VI Jednačina totalnog diferencijala

Jednačina $\boxed{P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0}$ je jednačina totalnog diferencijala ako postoji funkcija $F(x, y)$ takva da je leva strana jednačine totalni diferencijal funkcije $F(x, y)$, tj. da je

$$1)\quad dF(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

$$2)\quad \frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y),\ \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y).$$

Ako takva funkcija $F(x, y)$ postoji, tada iz $dF(x, y) = 0$, sledi da je $\boxed{F(x, y) = c}$. Da bi $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ bila jednačina totalnog diferencijala u otvorenoj jednostruko povezanoj oblasti G potrebno je i dovoljno da bude $\boxed{\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)}$, $Q(x_0, y_0) \neq 0$, $(x, y) \in G$, $(x_0, y_0) \in G$.

Funkciju $F(x, y)$ dobijamo iz

$$F(x, y) = \int P(x, y)dx + S(y) = p(x, y) + S(y).$$

Tada je

$$Q(x, y) = \frac{\partial p(x, y)}{\partial y} + S'(y),$$

odakle nalazimo $S(y)$.

Analogno, $F(x, y)$ možemo dobiti integraljenjem funkcije $Q(x, y)$, tj.

$$F(x, y) = \int Q(x, y)dy + \Phi(x) = q(x, y) + \Phi(x),$$

gde nepoznatu funkciju $\Phi(x)$ određujemo iz jednakosti

$$P(x, y) = \frac{\partial q(x, y)}{\partial x} + \Phi'(x).$$

10. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $(y - 3x^2)dx + (x - 4y)dy = 0$.

$$P(x, y) = y - 3x^2, \qquad Q(x, y) = x - 4y$$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$, pa data jednačina jeste jednačina totalnog diferencijala. Dakle, postoji funkcija $F(x, y)$ takva da je $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}dy = 0$, gde je $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = y - 3x^2$ i $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = x - 4y$.

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = y - 3x^2 \Rightarrow F(x, y) = \int (y - 3x^2)dx = xy - x^3 + S(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = (xy - x^3 + S(y))'_y = x + S'(y)$$

Izjednačavamo $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ sa $Q(x,y)$ i dobijamo

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) \Rightarrow \cancel{x} + S'(y) = \cancel{x} - 4y \Rightarrow S'(y) = -4y.$$

$$\frac{dS(y)}{dy} = -4y \Rightarrow \int dS(y) = -4\int y\,dy \Rightarrow S(y) = -2y^2 + c_1$$

Dakle, $F(x,y) = xy - x^3 - 2y^2 + c_1$ pa je opšte rešenje date jednačine $F(x,y) = C$, tj.

$\boxed{xy - x^3 - 2y^2 = c}$, gde je $c = C - c_1$.

opšte rešenje

VII Integracioni množitelj

Ako nije ispunjen uslov $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, pa diferencijalna jednačina $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ nije jednačina totalnog diferencijala, postavlja se pitanje može li se ona učiniti takvom, odnosno, da li postoji funkcija $h(x,y)$, različita od nule takva da jednačina $h(x,y)\cdot P(x,y)dx + h(x,y)\cdot Q(x,y)dy = 0$ bude jednačina totalnog diferencijala. Funkcija $h(x,y)$ (ukoliko postoji) naziva se *integracioni množitelj*. Potreban i dovoljan uslov za njenu egzistenciju dat je sa

$$\frac{\partial[h(x,y)\cdot P(x,y)]}{\partial y} = \frac{\partial[h(x,y)\cdot Q(x,y)]}{\partial x}.$$

$$P(x,y)\cdot\frac{\partial h(x,y)}{\partial y} + h(x,y)\cdot\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)\cdot\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} + h(x,y)\cdot\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

$$\frac{1}{h(x,y)}\left[P(x,y)\cdot\frac{\partial h(x,y)}{\partial y} - Q(x,y)\cdot\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}\right] = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}.$$

Iz poslednjeg izraza se određuje nepoznata funkcija $h(x,y)$.

11. Pokazati da diferencijalna jednačina $xdx + ydy + xdy - ydx = 0$ ima integracioni množitelj oblika $h = h(x^2 + y^2)$ i naći njeno opšte rešenje.

$h = h(t)$, $t = x^2 + y^2$

Ako pomnožimo datu diferencijalnu jednačinu sa $h(x^2 + y^2)$ dobićemo

$$h\cdot(x-y)dx + h\cdot(x+y)dy = 0, \qquad h = h(x^2+y^2).$$

Da bi ovo bila jednačina totalnog diferencijala mora važiti $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, gde je $P = h\cdot(x-y)$, a $Q = h\cdot(x+y)$, $h = h(x^2+y^2)$.

$$x^2+y^2=t,\quad h=h(t),\quad \frac{\partial h}{\partial x}=\frac{dh}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=h'\cdot 2x,\quad \frac{\partial h}{\partial y}=\frac{dh}{dt}\cdot\frac{dt}{dy}=h'\cdot 2y.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[h\cdot(x-y)]=\frac{\partial h}{\partial y}(x-y)-h=2y(x-y)h'-h$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}[h\cdot(x+y)]=\frac{\partial h}{\partial x}(x+y)+h=2x(x+y)h'+h$$

$$2y(x-y)\cdot h'-h=2x(x+y)\cdot h'+h$$

$$\cancel{2}h'(\cancel{xy}-y^2-x^2-\cancel{xy})=\cancel{2}h \quad\Rightarrow\quad -h'\cdot(x^2+y^2)=h \quad\Rightarrow\quad h'\cdot(x^2+y^2)=-h \quad\Rightarrow$$

$$\frac{h'}{h}=-\frac{1}{x^2+y^2}=-\frac{1}{t}$$

$h'=\dfrac{dh}{dt}$ jer $h=h(t)$

$$\int\frac{dh}{h}=-\int\frac{dt}{t}\ \Rightarrow\ \ln|h|=-\ln|t|\ \Rightarrow\ h=\frac{1}{t}\ \Rightarrow\ h=\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\frac{x-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{x^2+y^2}dy=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{x-y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{x+y}{x^2+y^2}$$

dm

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{x-y}{x^2+y^2}\ \Rightarrow\ F=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{\underbrace{x^2+y^2}_{=m}}dx-y\int\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\cancel{y}\cdot\frac{1}{\cancel{y}}arctg\frac{x}{y}+S(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\cancel{2}y-\frac{1}{\frac{y^2}{y^2}1+\frac{x^2}{\cancel{y^2}}}\cdot x(-\frac{1}{\cancel{y^2}})+S'(y)=\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{x}{x^2+y^2}+S'(y)=\frac{x+y}{x^2+y^2}+S'(y)$$

$$\cancel{\frac{x+y}{x^2+y^2}}+S'(y)=\cancel{\frac{x+y}{x^2+y^2}}\Rightarrow S'(y)=0\Rightarrow S(y)=c$$

$\boxed{\ln\sqrt{x^2+y^2}-arctg\dfrac{x}{y}=C}$ Opšte rešenje

VIII Kleroova jednačina

To je jednačina oblika $\boxed{y=xy'+f(y')}$.

Neka je $y'=p$, pri čemu je p funkcija od x.

$$y=xp+f(p)\ \Big|'_x \Rightarrow\ y'=p+xp'+f'(p)\cdot p'\ \Rightarrow\ p'(x+f'(p))=0$$

Odavde sledi da je ili $p'=0$ ili $x+f'(p)=0$

- $p'=0\ \Rightarrow\ p=c\ \Rightarrow \boxed{y=cx+f(c)}$ Opšte rešenje
- $x+f'(p)=0\ \Rightarrow\ x=-f'(p)\ \Rightarrow\ p=g(x)\ \Rightarrow \boxed{y=x\cdot g(x)+f[g(x)]}$ (singularno rešenje).

12. Uvodeći smenu $y=\frac{1}{z}$ rešiti diferencijalnu jednačinu $(y')^3-y^4(y+xy')=0$.

$$y=\frac{1}{z},\ y'=-\frac{1}{z^2}z',\ z\neq 0,\ z=z(x)$$

$$-\frac{(z')^3}{z^6}-\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{z}-\frac{x}{z^2}\cdot z'\right)=0 \ \Big/ \cdot z^6$$

$$(-z')^3-z+xz'=0$$

$$z=xz'-(z')^3 \text{ (Kleroova diferencijalna jednačina)}$$

$$z'=p,\ dz=pdx,\ p=p(x)$$

$$z=xp-p^3 \Big|'_x \Rightarrow z'=p+xp'-3p^2\cdot p'=p+(x-3p^2)p' \Rightarrow p=p+(x-3p^2)p'$$

$$(x-3p^2)p'=0 \Rightarrow p'=0 \text{ ili } x-3p^2=0$$

- $p'=0 \Rightarrow p=c \Rightarrow z=xc-c^3 \Rightarrow \frac{1}{y}=xc-c^3 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{xc-c^3}}$ Opšte rešenje

- $x-3p^2=0 \Rightarrow p=\pm\sqrt{\frac{x}{3}} \Rightarrow z=\pm x\cdot\sqrt{\frac{x}{3}}-\left(\pm\sqrt{\frac{x}{3}}\right)^3$

$$\boxed{\frac{1}{y}=\pm x\sqrt{\frac{x}{3}}\mp\left(\sqrt{\frac{x}{3}}\right)^3}$$ Singularno rešenje

IX Uvođenje parametra

U nekim slučajevima može se odrediti rešenje jednačine $F(x,y,y')=0$, a da se ne odredi y' kao funkcija od x i y. Postupak se sastoji u uvođenju parametra i posebno je važan za slučajeve jednačina koje se ne mogu rešiti po y'. Dakle, uzmimo da je parametar $p=y'$. Tako dobijamo dve jednačine $F(x,y,p)=0$ i $dy=pdx$. Ako je F diferencijabilna, imamo $\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial p}dp=0$. Ova jednačina može se pisati u jednom od oblika

$y'=\frac{dy}{dx}$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial y}\right)dx+\frac{\partial F}{\partial p}dp=0 \qquad \text{ili} \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial y}\right)dy+p\frac{\partial F}{\partial p}dp=0.$$

Sada, ukoliko je to moguće, iz $F(x,y,p)=0$ i jedne od poslednje dve jednačine odredi se $x=x(p)$ ili $y=y(p)$. Ako smo odredili $x=x(p)$ tada je $y(p)=\int px'(p)dp+c$. Ako smo odredili $y=y(p)$ tada je $x(p)=\int\frac{y'(p)}{p}dp+c$.

X Lagranžova jednačina

To je jednačina oblika $\boxed{y=xf(y')+g(y')}$.

Neka je $y'=p \Leftrightarrow dy=pdx$, pri čemu je p funkcija od x.

$$y = xf(p) + g(p) \Rightarrow dy = f(p)dx + (x \cdot f'(p) + g'(p))dp$$

$$pdx - f(p)dx = (x \cdot f'(p) + g'(p))dp \Leftrightarrow (p - f(p))dx = (x f'(p) + g'(p))dp$$

- $p - f(p) \neq 0$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{f'(p)}{p - f(p)}x + \frac{g'(p)}{p - f(p)}$$ (linearna diferencijalna jednačina)

x je zavisna, p nezavisna promenljiva

- $p - f(p) = 0 \Rightarrow p = p_1$, tada je

$\boxed{y = xf(p_1) + g(p_1)}$ singularno rešenje date diferencijalne jednačine.

13. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y = 2xy' + (y')^2$.

$$y' = p,\ dy = pdx$$

$$y = 2xp + p^2 \ \Big|'_x$$

$$y' = 2p + 2xp' + 2pp' \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2p + 2x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx} \Big| \cdot dx \Rightarrow dy = 2pdx + 2(x+p)dp$$

$$pdx = 2pdx + 2(x+p)dp \Rightarrow -pdx = 2(x+p)dp$$ $/ : (-pdp)$ ako $p \neq 0$

- $p \neq 0$: $\quad \frac{dx}{dp} = -\frac{2(x+p)}{p} = -\frac{2}{p}x - 2$

$$x' + \frac{2}{p}x = -2$$ (linearna diferencijalna jednačina) $\quad x = x(p)$

$$x = u \cdot v,\quad x' = u' \cdot v + u \cdot v',\quad u = u(p),\quad v = v(p)$$

biramo v

$$u'v + uv' + \frac{2}{p}uv = -2 \Rightarrow vu' + \underbrace{(v' + \frac{2}{p}v)}_{=0}u = -2$$

$$v' + \frac{2}{p}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -2\frac{dp}{p} \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = -2\int\frac{dp}{p} \Rightarrow \ln|v| = -2\ln|p| \Rightarrow v = p^{-2}$$

$$p^{-2}u' = -2 \Big| \cdot p^2 \Rightarrow \frac{du}{dp} = -2p^2 \Rightarrow du = -2p^2dp \Rightarrow \int du = -2\int p^2dp \Rightarrow u = -\frac{2}{3}p^3 + c$$

$$x = uv = (-\frac{2}{3}p^3 + c)\cdot\frac{1}{p^2} = \boxed{-\frac{2}{3}p + \frac{c}{p^2}}$$

$$y = 2xp + p^2 \Rightarrow y = (-\frac{2}{3}p + \frac{c}{p^2})\cdot 2p + p^2 = -\frac{4p^2}{3} + \frac{2c}{p} + p^2 = \frac{2c}{p} - \frac{p^2}{3}$$

$$\boxed{y = \frac{2c}{p} - \frac{p^2}{3}}$$ Opšte rešenje

- $p = 0$: $\quad y' = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}$ Singularno rešenje

$$y = 2xp + p^2$$

☺