Kompleksni brojevi

Algebarski oblik kompleksnog broja je $z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}$.

Teorema 1 *Za svaki ceo broj k važi* $i^{4k} = 1; \quad i^{4k+1} = i; \quad i^{4k+2} = -1; \quad i^{4k+3} = -i.$

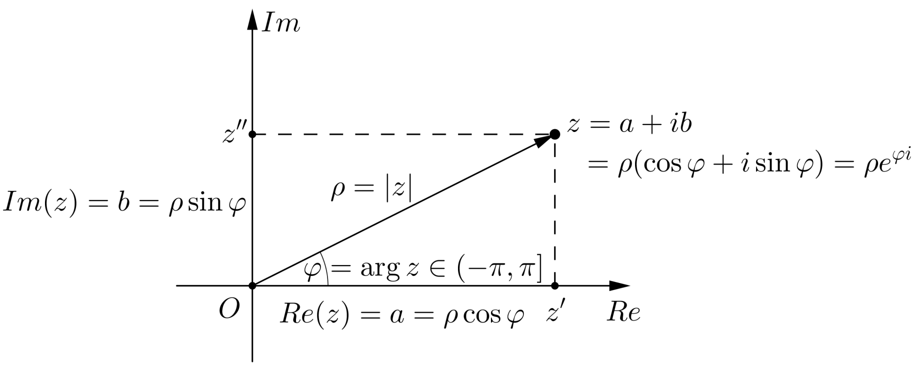
Dokaz je neposredna posledica činjenice da je $i^2 = -1$.

Definicija 1 *Ako je $z = a + ib$ kompleksan broj, tada je $\bar{z} = a - ib$ njemu konjugovano kompleksan broj.*

Definicija 2 *Neka je $z = a + ib$ kompleksan broj. Tada se $Re(z) = a$ naziva realan deo, $Im(z) = b$ imaginarni deo i $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ moduo kompleksnog broja z, tj, moduo je funkcija $|\ \ | : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.*

Definicija 3 *Argument kompleksnog broja z u oznaci $arg(z)$ ili $arg z$ merni je broj konveksnog orijentisanog ugla čiji je prvi kraj pozitivna realna osa, a drugi poluprava $0z$, gde je $0 = 0 + i0$ kompleksni broj 0, tj. koordinatni početak.*

Kako je merni broj konveksno orijentisanog ugla uvek iz intervala $(-\pi, \pi]$, to je i $arg(z)$ iz intrervala $(-\pi, \pi]$.



★ Treba primetiti da ako je $z = 0$, tada nije definisana poluprava $0z$, pa onda nije definisan ni argument kompleksnog broja 0.

Ako se ima u vidu geometrijska interepretacija kompleksnog broja, sledi da je moduo kompleksnog broja merni broj duži $0z$ jer je $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ i važi Pitagorina teorema.

Definicija 4 *Trigonometrijski oblik kompleksnog broja $z = a + ib$ je*

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

gde je $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ i $\varphi = arg(z) + 2k\pi$ za bilo koji ceo broj k.

Kraća oznaka za $\cos\varphi + i\sin\varphi$ je $e^{i\varphi}$.

Oblik kompleksnog broja $z = \rho e^{i\varphi}$ zvaćemo eksponencijalni oblik.

Teorema 2 *Ako je* $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ *i ako je* $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \rho_2 e^{i\varphi_2}$*, tada je*

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) = \rho_1\rho_2 e^{(\varphi_1+\varphi_2)i}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)) = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{(\varphi_1-\varphi_2)i}$$

Teorema 3 *Ako je* $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *tada je*

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

za svako $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 4 *Za kompleksni broj z važi*

$Re(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$

$Im(z) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$

$z\bar{z} = |z|^2$

Zadatak 1 *Dati su kompleksni brojevi* $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 1-2i$.

Izračunati: $z_1+z_2, \quad z_1-z_2, \quad z_1\cdot z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}$.

Rešenje:

$z_1+z_2 = 2+3i+1-2i = 3+i$

$z_1-z_2 = 2+3i-(1-2i) = 1+5i$

$z_1\cdot z_2 = (2+3i)(1-2i) = 2+6+3i-4i = 8-i$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{1-2i}\cdot\frac{1+2i}{1+2i} = \frac{2-6+4i+3i}{1^2+2^2} = \frac{-4+7i}{5} = -\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$

□

Zadatak 2 *Pretvoriti u trigonometrijski i eksponencijalni oblik:*

a) $1+i$ *b)* $\sqrt{3}-i$ *c)* -1 *d)* $3i$ *e)* 5 *f)* $-i$

Rešenje:

a) $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

b) $\sqrt{3}-i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

c) $-1 = 1(-1+0i) = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = e^{i\pi}$

d) $3i = 3(0+1i) = 3\Big(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\Big) = 3e^{\frac{\pi}{2}i}$

e) $5 = 5(\cos 0 + i\sin 0) = 5e^{i\cdot 0}$

f) $-i = 1\left(\cos\Big(-\dfrac{\pi}{2}\Big) + i\sin\Big(-\dfrac{\pi}{2}\Big)\right) = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$\square$

Teorema 5 *Jednačina $z^n = w = \rho e^{i\varphi}$, gde je z nepoznata, n proizvoljan prirodan broj i w proizvoljni kompleksni broj različit od nule, ima n različitih rešenja koja su u kompleksnoj ravni temena pravilnog $n-$ tougla čije je težiste u koordinatnom početku, tj. rešenja su*

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \quad k = 0,1,\ldots,n-1.$$

Zadatak 3 *Izračunati:*

a) $\sqrt[3]{-8+8i}$ *b)* $\sqrt{-7+24i}$

Rešenje:

a) $\rho = \sqrt{64+64} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

$\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$

$$\sqrt[3]{-8+8i} = \sqrt[3]{8\sqrt{2}e^{i\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}}} = 2\sqrt[6]{2}e^{\frac{3\pi+8k\pi}{12}i}, \quad k\in\{-1,0,1\}$$

$$z_0 = 2\sqrt[6]{2}e^{\frac{\pi}{4}i} = 2\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt[6]{2}(1+i)$$

$$z_1 = 2\sqrt[6]{2}e^{\frac{11\pi}{12}i}$$

$$z_{-1} = 2\sqrt[6]{2}e^{-\frac{5\pi}{12}i}$$

Kako je u pitanju treći koren, tri dobijena rešenja predstavljaju temena jednakostraničnog trougla sa težistem u koordinatnom početku. Svako naredno teme se može dobiti rotacijom prethodnog oko koordinatnog početka za $\frac{2\pi}{3}$.

Pokazati da je $z_1 = z_0 e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

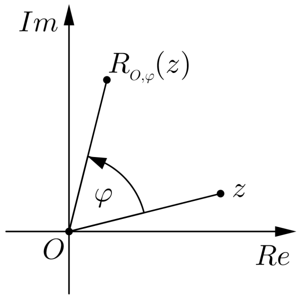
b) $\rho = \sqrt{49+576} = \sqrt{625} = 25$

Ako postupimo kao pod a) φ ne znamo da izrazimo.

$$\sqrt{-7+24i} = x+iy \quad /^2$$
$$-7+24i = x^2-y^2+2xyi$$
$$x^2-y^2=-7 \quad \wedge \quad 2xy=24 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{12}{x}$$
$$x^2-\frac{144}{x^2}=-7, \quad t=x^2$$
$$t^2+7t-144=0 \quad \Rightarrow \quad t_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49+576}}{2}=\frac{-7\pm 25}{2}$$
$$t_1=9 \quad \vee \quad t_2=-16 \quad \lightning$$
$$x^2=9 \quad \Rightarrow \quad x_1=3 \quad \vee \quad x_2=-3$$
$$x_1=3, \quad y_1=4 \quad \Rightarrow \quad z_1=3+4i$$
$$x_2=-3, \quad y_2=-4 \quad \Rightarrow \quad z_2=-3-4i$$

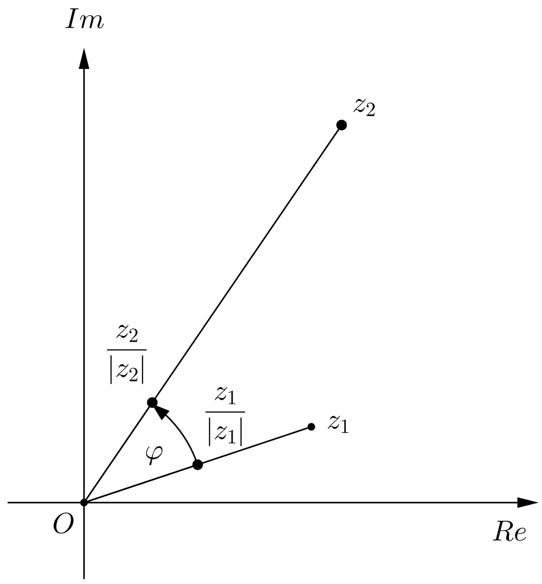
□

Teorema 6 *Množenje broja z brojem* $\cos\varphi + i\sin\varphi$ *jeste rotacija tačke z za ugao φ oko koordinatnog početka, tj. $R_{O,\varphi}(z) = ze^{i\varphi}$.*



Teorema 7 *Za konveksno orijentisani ugao $\varphi = \angle z_1Oz_2$ važi*

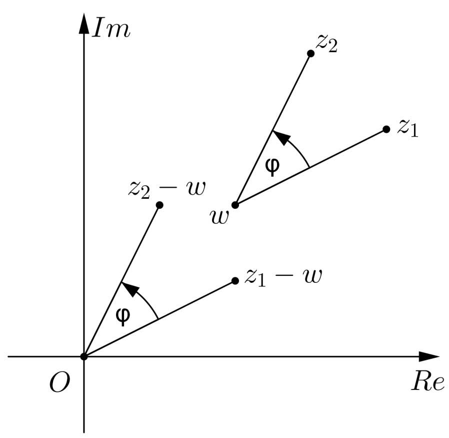
$$\angle z_1Oz_2 = arg\frac{z_2}{z_1}.$$



$$\frac{z_2}{|z_2|} = \frac{z_1}{|z_1|}e^{i\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad e^{i\varphi} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \Rightarrow \quad arg e^{i\varphi} = arg\frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \Leftrightarrow \quad \angle z_1 O z_2 = arg\frac{z_2}{z_1}$$

Teorema 8 *Ako je kompleksni broj z_2 dobijen rotacijom kompleksnog broja z_1 oko broja w za ugao φ, tada je*

$$z_2 = w + (z_1 - w)e^{i\varphi}.$$



Teorema 9 *Za konveksno orijentisani ugao $\varphi = \angle z_1 w z_2$ važi*

$$\angle z_1 w z_2 = arg\frac{z_2 - w}{z_1 - w}.$$

$$\frac{z_2 - w}{|z_2 - w|} = \frac{z_1 - w}{|z_1 - w|}e^{i\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad e^{i\varphi} = \frac{z_2 - w}{z_1 - w} \cdot \frac{|z_1 - w|}{|z_2 - w|} \quad \Rightarrow \quad arg e^{i\varphi} = arg\frac{z_2 - w}{z_1 - w} \cdot \frac{|z_1 - w|}{|z_2 - w|} \quad \Leftrightarrow$$

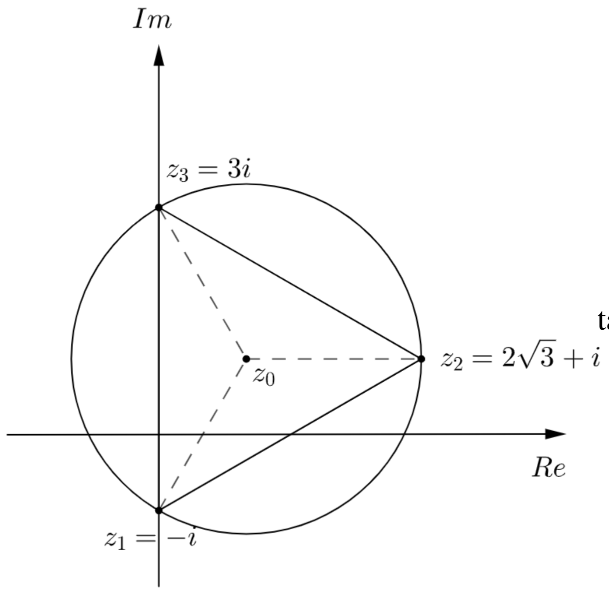
$$\angle z_1 w z_2 = arg\frac{z_2 - w}{z_1 - w}$$

Konveksni ugao $\angle z_1 w z_2$ pozitivno je orijentisan akko je $arg\frac{z_2 - w}{z_1 - w} > 0$.

Konveksni ugao $\angle z_1 w z_2$ negativno je orijentisan akko je $arg\frac{z_2 - w}{z_1 - w} < 0$.

Zadatak 4 *U kompleksnoj ravni odrediti jednačinu kružnice i tačku z_1 tako da je $Im(z_1) < 0$ i da tačke z_1, $z_2 = 2\sqrt{3} + i$ i $z_3 = 3i$ budu temena jednakostraničnog trougla upisanog u kružnicu.*

Rešenje:



Tačku z_1 dobijamo rotacijom oko tačke z_2 temena z_3 za ugao $\pm\frac{\pi}{3}$.

- Rotacija za $\frac{\pi}{3}$

$z_1 - z_2 = (z_3 - z_2)e^{\frac{\pi}{3}i}$

$z_1 = (2\sqrt{3} + i) + (3i - 2\sqrt{3} - i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\sqrt{3} + i + 2 \cdot \frac{1}{2}(i - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}i) =$

$= 2\sqrt{3} + i + i - \sqrt{3} - \sqrt{3} - 3i = -i.$

Kako je $Im(-i) = -1 < 0$ ovo jeste rešenje.

- Rotacija za $-\frac{\pi}{3}$

$z_1 = z_2 + (z_3 - z_2)e^{-\frac{\pi}{3}i}$

$z_1 = (2\sqrt{3} + i) + (3i - 2\sqrt{3} - i)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$

$= 2\sqrt{3} + i + 2 \cdot \frac{1}{2}(i - \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}i) = 2\sqrt{3} + i + i + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3} + 5i$

Kako je $Im(2\sqrt{3} + 5i) = 5 > 0$ ovo nije rešenje.

Dakle, postoji samo jedan takav trougao.

Da bi odredili jednačinu kružnice potrebno je naći centar i poluprečnik kružnice.

Centar kružnice možemo odrediti na 2 načina.

I način

$z_0 = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = \frac{-i + 2\sqrt{3} + i + 3i}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} + i$

II način

Centar kružnice je tačka z_0 i $\angle z_3 z_0 z_2 = -\dfrac{2\pi}{3}$

Rotacijom temena z_3 oko centra kružnice za $-\frac{2\pi}{3}$ dobijamo teme z_2.

$z_2 - z_0 = (z_3 - z_0)e^{-\frac{2\pi}{3}i}$

$z_0(e^{-\frac{2\pi}{3}i} - 1) = 3ie^{\frac{-2\pi}{3}i} - 2\sqrt{3} - i$

$$z_0 = \frac{3i\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-2\sqrt{3}-i}{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-1} = \frac{-3i+3\sqrt{3}-4\sqrt{3}-2i}{-3-\sqrt{3}i}\cdot\frac{-3+\sqrt{3}i}{-3+\sqrt{3}i} = \frac{3\sqrt{3}-3i+15i+5\sqrt{3}}{9+3} =$$

$$= \frac{8\sqrt{3}+12i}{12} = \frac{2\sqrt{3}}{3}+i$$

Poluprečnik kružnice je rastojanje bilo koje tačke kružnice od centra kružnice.

$$r = |\overrightarrow{z_0 z_1}| = |z_1 - z_0| = \left|-i - \frac{2\sqrt{3}}{3} - i\right| = \sqrt{4+\frac{12}{9}} = \frac{\sqrt{48}}{3} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

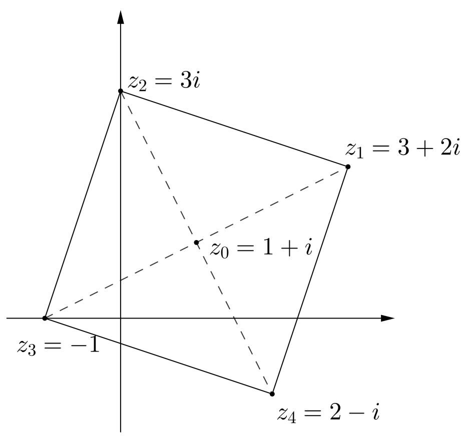
$$\mathcal{K}(z_0, r): \quad |z - z_0| = r$$

$$\mathcal{K}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+i, \frac{4}{\sqrt{3}}\right): \quad \left|z - \frac{2}{\sqrt{3}} - i\right| = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

□

Zadatak 5 *Neka je $z_1 = 3+2i$ jedno teme kvadrata. Odrediti preostala temena z_2, z_3, z_4 ako se zna da z_2 leži na pozitivnom delu imaginarne ose, a z_3 leži na realnoj osi.*

Rešenje:



z_2 i z_3 možemo zapisati u sledećem obliku $z_2 = ai, \quad a > 0, \quad z_3 = b$

Rotacijom temena z_3 oko z_2 za ugao od $\frac{\pi}{2}$ dobijamo teme z_1.

$z_1 = z_2 + (z_3 - z_2)e^{\frac{\pi}{2}i}$

$z_1 - z_2 = (z_3 - z_2)e^{\frac{\pi}{2}i}$

$3 + 2i - ai = (b - ai)i$

$3 - a + i(2 - a - b) = 0$

$a = 3 \quad \wedge \quad b = -1$

$z_2 = 3i \quad \wedge \quad z_3 = -1$

Kako centar kvadrata polovi dijagonale kvadrata imamo

$z_0 = \dfrac{z_1 + z_3}{2} = \dfrac{3 + 2i - 1}{2} = 1 + i$

$z_0 = \dfrac{z_2 + z_4}{2} \quad \Rightarrow \quad z_4 = 2z_0 - z_2$

$z_4 = 2 + 2i - 3i = 2 - i$

z_4 smo mogli dobiti i rotacijom temena z_2 oko temena z_3 za ugao $-\frac{\pi}{2}$. □

Zadatak 6 *Odrediti skup svih vrednosti za* $\sqrt[3]{1}$*, ako je* $\sqrt[3]{\cdot}$*:*

a) realan koren *b) kompleksan koren*

Rešenje:

a) $\sqrt[3]{1} = 1$ ako je realan koren

b) $1 = 1 + 0i = \cos 0 + i \sin 0 = e^{0i}$

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{0 + 2k\pi}{3}\right) = 1e^{i\frac{2k\pi}{3}}, \quad k \in \{-1, 0, 1\}$$

$k = 0: \quad e^{0i} = 1$

$k = 1: \quad e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$k = -1: \quad e^{-\frac{2\pi}{3}i} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\sqrt[3]{1} \in \left\{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

II način

$$z = \sqrt[3]{1} \quad \Rightarrow \quad z^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad z^3 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (z-1)(z^2 + z + 1) = 0$$

$$z_1 = 1 \quad \vee \quad z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad z_3 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

□

Zadatak 7 *Odrediti realan i imaginaran deo, moduo i argument kompleksnih brojeva:*

a) $z = 1 + e^{i\alpha}, \quad \alpha \in (-\pi, \pi]$

b) $z = 1 - e^{i\alpha}, \quad \alpha \in (0, \pi]$

c) $z = e^{i\alpha} + e^{i\beta}, \quad \alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2}]$

Rešenje:

a) $Re(z) = 1 + \cos\alpha$, $Im(z) = \sin\alpha$, dok iz

$$1 + e^{i\alpha} = e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{-i\frac{\alpha}{2}} + e^{i\frac{\alpha}{2}}\right) = 2\cos\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

sledi da je $|z| = 2\cos\frac{\alpha}{2}$, a $arg(z) = \frac{\alpha}{2}$.

b) $Re(z) = 1 - \cos\alpha$, $Im(z) = -\sin\alpha$, dok iz

$$1 - e^{i\alpha} = e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{-i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\frac{\alpha}{2}}\right) = e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(-2i\sin\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha}{2}e^{i(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{2})}$$

sledi da je $|z| = 2\sin\frac{\alpha}{2}$, a $arg(z) = \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2}$.

c) $Re(z) = \cos\alpha + \cos\beta$, $Im(z) = \sin\alpha + \sin\beta$, dok iz

$$z = e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right) = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

sledi da je $|z| = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, a $arg(z) = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

□

★ U svakom zadatku u kojem se pojavi neki od izraza $\pm 1 \pm e^{i\alpha}$, obavezno ga transformisati na način na koji je urađeno u prethodnom zadatku!

Zadatak 8 *Dati su kompleksni brojevi: $z_1 = 4 - i, z_2 = -3 - 5i, z_3 = 2 - 4i$. Naći kompleksan broj z koji zadovoljava uslove:*

$|z - z_3| = 2\sqrt{26}$ *i* $\angle z_1 z_3 z = \dfrac{1}{3}\angle z_1 z_3 z_2$.

Rešenje:

$$\angle z_1 z_3 z_2 = arg\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = arg\frac{-3-5i-2+4i}{4-i-2+4i} = arg\frac{-5-i}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i} =$$

$$= arg\frac{-10+15i-2i-3}{4+9} = arg\frac{13i-13}{13} = arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\angle z_1 z_3 z = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$z - z_3 = 2\sqrt{26}\cdot\frac{z_1 - z_3}{|z_1 - z_3|}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z = z_3 + 2\sqrt{26}\cdot\frac{2+3i}{\sqrt{13}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 - 4i + 4 + 6i + 4i - 6 = 6i$$

□

Zadatak 9 *Neka su z_1 i z_3 kompleksni brojevi i neka su l i θ realni brojevi, $l \geq 0, \theta \in (-\pi, \pi]$*

a) U zavisnosti od z_1, z_3, θ, l izraziti kompleksni broj z za koji važi $|z - z_1| = l$ i $\angle z_3 z_1 z = \theta$

b) Ako su z_1 i z_3 temena pravilnog šestougla koja pripadaju njegovoj kraćoj dijagonali, izraziti z_2, z_4, z_5 i z_6 u zavisnosti od z_1 i z_3.

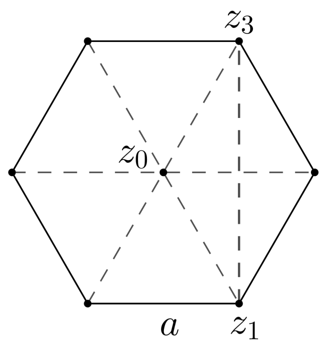
Rešenje:

a)

Nakon translacije za vektor $-z_1$, deljenjem svakog dobijenog broja svojim modulom i rotacijom za ugao θ oko koordinatnog početka dobija se

$$\frac{z-z_1}{|z-z_1|}=\frac{z_3-z_1}{|z_3-z_1|}e^{i\theta} \quad \Leftrightarrow \quad z=z_1+\frac{l}{|z_3-z_1|}(z_3-z_1)e^{i\theta}$$

b)



$|z_3-z_1|=\sqrt{3}|z_1-z_0|$, $\quad z_1z_3$ je kraća dijagonala šestougla stranice $a=|z_1-z_0|$

Ako se u jednakost dobijenu pod *a*) uvrsti $z=z_0$, $\theta=\frac{\pi}{6}$ i $l=\frac{|z_1-z_3|}{\sqrt{3}}$, dobija se centar šestougla z_0.

$$\frac{z_0-z_1}{\frac{|z_3-z_1|}{\sqrt{3}}}=\frac{z_3-z_1}{|z_3-z_1|}e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$z_0=z_1+\frac{|z_3-z_1|}{\sqrt{3}}\cdot\frac{z_3-z_1}{|z_3-z_1|}e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$z_0=z_1+\frac{1}{\sqrt{3}}(z_3-z_1)e^{\frac{\pi}{6}i}$$

Dalje, na osnovu kompleksnih brojeva z_0 i z_1 dobijaju se sva ostala temena po formuli za rotaciju oko z_0 za ugao $\frac{\pi}{3}$, tj.

$z_{k+1}=z_0+(z_k-z_0)e^{i\frac{\pi}{3}}$ redom za $k\in\{1,3,4,5\}$.

Ako se umesto θ uvrsti $-\frac{\pi}{6}$, tada se rotacije vrše za $-\frac{\pi}{3}$ i dobija se drugo rešenje.

$$z_0=z_1+\frac{1}{\sqrt{3}}(z_3-z_1)e^{-\frac{\pi}{6}i}$$

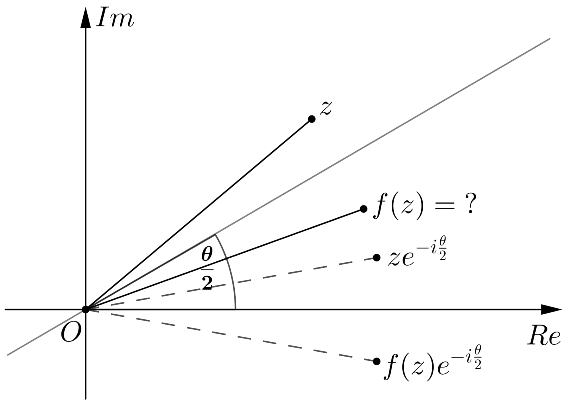
$z_{k+1}=z_0+(z_k-z_0)e^{-\frac{\pi}{3}i}$ redom za $k\in\{1,3,4,5\}$.

Postoje dva takva šestougla.

□

Zadatak 10 *Ako je $f(z)=\bar{z}\cdot e^{i\theta}$, pokazati da je f osna simetrija u odnosu na osu koja prolazi kroz koordinatni početak i obrazuje ugao $\frac{\theta}{2}$ sa pozitivnim delom realne ose.*

Rešenje:



Primetiti da je $g(z) = \bar{z}$ osna simetrija, gde je realna osa zapravo osa simetrije. Takođe je poznato da je kompozicija rotacije $R_{0,-\frac{\theta}{2}}$, osne simetrije $g(z) = \bar{z}$ i rotacije $R_{0,\frac{\theta}{2}}$ osna simetrija čija osa gradi ugao $\frac{\theta}{2}$ sa prvobitnom osom (realnom osom).

Znači $\overline{ze^{i\frac{-\theta}{2}}}e^{i\frac{\theta}{2}} = \bar{z}e^{i\theta} = f(z)$ jeste osna simetrija.

□

Zadatak 11 *Neka je* $A_n = \{z \in \mathbb{C} \quad | \quad z^n = \bar{z}\}, \quad n \in \mathbb{N}$.

a) *Eksplicitno odrediti elemente skupova* A_n.

b) *Odrediti broj elemenata skupova* A_n.

c) *Odrediti zbir* s_n *elemenata skupova* A_n.

Rešenje:

a) A_n je skup rešenja kompleksne jednačine.

$z = \rho e^{\varphi i}, \quad \rho \in [0, \infty), \quad \varphi \in (-\pi, \pi]$

1. slučaj n=1

$z = \bar{z} \quad \Rightarrow \quad A_n = \mathbb{R}$

2. slučaj n >1

Za kompleksne brojeve važi $\quad \rho_1 e^{\varphi_1} = \rho_2 e^{\varphi_2} \quad \Leftrightarrow \quad \rho_1 = \rho_2 \quad \wedge \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$z^n = \bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad (\rho e^{\varphi i})^n = \overline{\rho e^{i\varphi}} \quad \Leftrightarrow \quad \rho^n e^{ni\varphi} = \rho e^{-i\varphi} \quad \Leftrightarrow$

$\rho^n = \rho \quad \wedge \quad n\varphi = -\varphi + 2k\pi \quad \Leftrightarrow$

$\rho(\rho^{n-1} - 1) = 0 \quad \wedge \quad \varphi = \dfrac{2k\pi}{n+1}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow$

$z = 0 \quad \vee \quad z \in \left\{ e^{\varphi i} \quad | \quad \varphi = \dfrac{2k\pi}{n+1}, \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\} \right\}$

$$A_n = \begin{cases} \text{cela realna osa}, & n = 1 \\ \{0\} \cup \left\{ e^{\frac{2k\pi}{n+1} i} \quad | \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\} \right\}, & n > 1 \end{cases}$$

Primetimo da za $n > 1$ elementi skupa A_n predstavljaju temena pravilnog $(n+1)-$ tougla, uključujući i centar koji se nalazi u 0.

b) **n=1** $\Rightarrow$ $|A_n| = \infty$

n >1 $\Rightarrow$ $|A_n| = n+2$

c) **n=1**

Suma realnih brojeva je 0 (pozitivni i negativni se potiru).

n>1

$$\sum_{z\in A_n} z = 0 + \sum_{k=0}^{n} e^{\frac{2k\pi}{n+1}i} = \sum_{k=0}^{n}\left(e^{\frac{2\pi}{n+1}i}\right)^k = 1\cdot\frac{\left(e^{\frac{2k\pi}{n+1}i}\right)^{n+1}-1}{e^{\frac{2k\pi}{n+1}i}-1} = \frac{e^{2\pi i}-1}{e^{\frac{2k\pi}{n+1}i}-1} = 0$$

Koristili smo $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

□

Zadatak 12 *Rešiti po $z \in \mathbb{C}$ jednačinu $(\bar{z}+|z|)^6 = 64iz$.*

Rešenje:

$z = \rho e^{\varphi i}$

$(\rho e^{-i\varphi}+\rho)^6 = 64\rho e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\varphi}$

$\rho^6(e^{-i\varphi}+1)^6 = 64\rho e^{i(\frac{\pi}{2}+\varphi)}$

$\rho^6(e^{-i\frac{\varphi}{2}}(e^{-i\frac{\varphi}{2}}+e^{i\frac{\varphi}{2}}))^6 = 64\rho e^{i(\frac{\pi}{2}+\varphi)}$

$\rho^6 e^{-i\frac{6\varphi}{2}}\cdot 2^6\cdot\cos^6\dfrac{\varphi}{2} = 64\rho e^{i(\frac{\pi}{2}+\varphi)}$

$\rho^6\cos^6\dfrac{\varphi}{2}e^{-i\frac{6\varphi}{2}} = \rho e^{i(\frac{\pi}{2}+\varphi)}$

$\rho^6\cos^6\dfrac{\varphi}{2}e^{-3\varphi i} = \rho e^{i(\frac{\pi}{2}+\varphi)}$

Da bi prethodna jednakost bila tačna mora biti:

$\rho^6\cos^6\dfrac{\varphi}{2} = \rho \quad\wedge\quad 3\varphi = -\varphi-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$

$\rho(\rho^5\cos^6\dfrac{\varphi}{2}-1) = 0 \quad\wedge\quad 4\varphi = -\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$

$\rho = 0 \quad\vee\quad \rho = \dfrac{1}{\sqrt[5]{\cos^6\frac{\varphi}{2}}} \quad\wedge\quad \varphi = -\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2},\quad k\in\{0,1,2,3\}$

$\rho = 0 \quad\vee\quad \rho = \dfrac{1}{\sqrt[5]{\cos^6\frac{\varphi}{2}}} \quad\wedge\quad \varphi = -\dfrac{\pi}{8}\vee\varphi = -\dfrac{5\pi}{8}\vee\varphi = \dfrac{3\pi}{8}\vee\varphi = \dfrac{7\pi}{8}$

$$z\in\left\{0, \frac{1}{\sqrt[5]{\cos^6(-\frac{5\pi}{16})}}e^{-\frac{5\pi}{8}i}, \frac{1}{\sqrt[5]{\cos^6(-\frac{\pi}{16})}}e^{-\frac{\pi}{8}i}, \frac{1}{\sqrt[5]{\cos^6\frac{3\pi}{16}}}e^{\frac{3\pi}{8}i}, \frac{1}{\sqrt[5]{\cos^6\frac{7\pi}{16}}}e^{\frac{7\pi}{8}i}\right\}$$

□

Zadatak 13 *Navesti geometrijsku interpretaciju funkcija* $f_i : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad i \in \{1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,13,14,16,17\}$ *i* $f_i : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad i \in \{7,12,15\}$ *i odrediti da li su funkcije injektivne i da li su sirjektivne.*

a) $f_1(z) = \bar{z}$

$f_1(x+yi) = x - yi$

Osna simetrija u odnosu na Re-osu

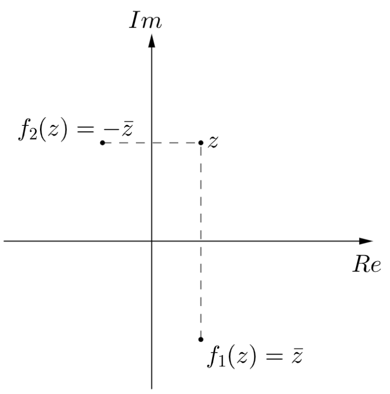
"$1-1$", "*na*"

b) $f_2(z) = -\bar{z}$

$f_2(x+yi) = -(x-yi) = -x+yi$

Osna simetrija u odnosu na Im-osu

"$1-1$", "*na*"



c) $f_3(z) = iIm(z)$

Projekcija na Im-osu

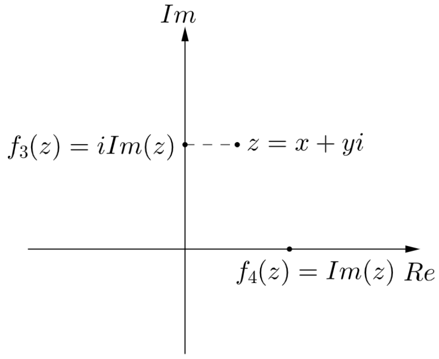
ni "$1-1$", *ni* "*na*"

d) $f_4(z) = Im(z)$

$f_4(z) = -i \cdot iIm(z) = e^{-\frac{\pi}{2}i} \cdot iIm(z)$

Kompozicija projekcije na Im-osu i rotacije za $-\frac{\pi}{2}$

ni "$1-1$", *ni* "*na*"

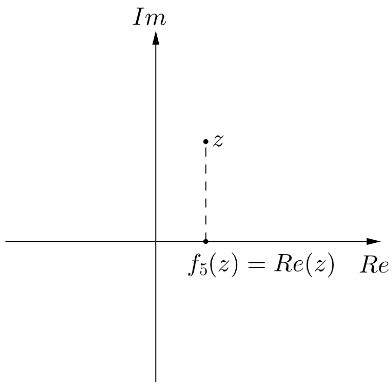


e) $f_5(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$

$f_5(z) = \dfrac{2x}{2} = x = Re(z)$

Projekcija na Re-osu

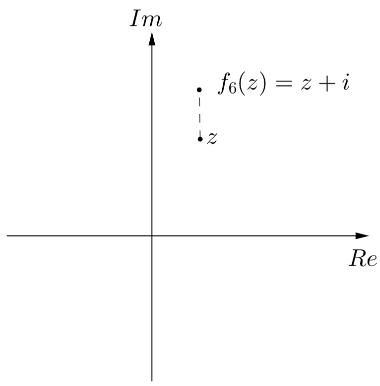
ni "$1-1$", *ni* "*na*"



f) $f_6(z) = z + i$

Translacija za i

"$1-1$", "*na*"



g) $f_7(z) = \bar{z} \cdot e^{2i \cdot argz}$

$f_7(z) = \rho e^{-\varphi i} \cdot e^{2\varphi i} = \rho e^{\varphi i}$

Identička funkcija

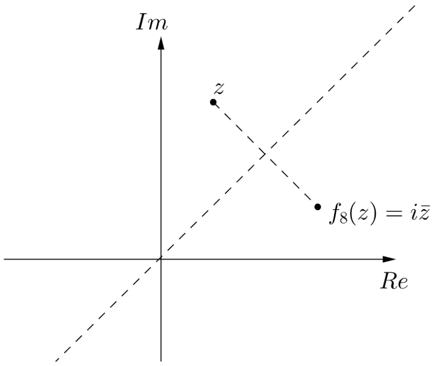
"$1-1$", "*na*"

h) $f_8(z) = i\bar{z}$

$f_8(z) = \bar{z}e^{\frac{\pi}{2}i}$

Osna simetrija u odnosu na pravu koja prolazi kroz koordinatni početak i obrazuje ugao $\frac{\pi}{4}$ sa pozitivnim delom realne ose (prava $y = x$)

"$1-1$", "*na*"



i) $f_9(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2}$

$f_9(z) = \dfrac{2iy}{2} = iy = iIm(z)$

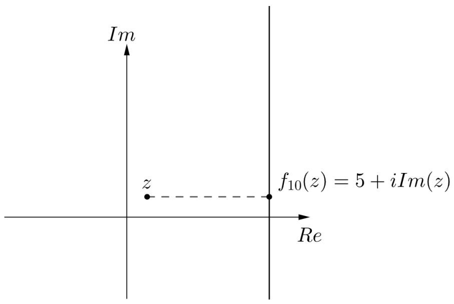
Projekcija na Im-osu

ni "$1-1$", *ni* "*na*"

j) $f_{10}(z) = 5 + iIm(z)$

Projekcija na pravu $x = 5$

ni "$1-1$", *ni* "*na*"

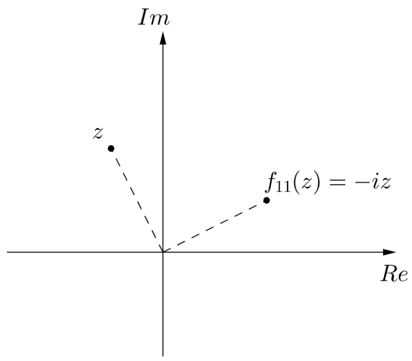


k) $f_{11}(z) = -iz$

$f_{11}(z) = ze^{-\frac{\pi}{2}i}$

Rotacija za $-\frac{\pi}{2}$

"$1-1$", "*na*"



l) $f_{12}(z) = -\dfrac{|z|^2}{z}$

$f_{12}(z) = -\dfrac{z\bar{z}}{z} = -\bar{z}$

Osna simetrija u odnosu na Im-osu

"$1-1$", "*na*"

m) $f_{13}(z) = \bar{z} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$

Osna simetrija u osnosu na pravu koja prolazi kroz koordinatni početak i zaklapa ugao $\frac{\pi}{6}$ *sa pozitivnim delom realne ose*

"$1-1$", "*na*"

n) $f_{14}(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

$f_{14}(z) = \dfrac{2yi}{2i} = y = Im(z) = f_4(z)$

ni "$1-1$, *ni* "*na*"

o) $f_{15}(z) = z \cdot e^{2i \cdot arg\bar{z}}$

$f_{15}(z) = \rho e^{\varphi i} \cdot e^{2i(-\varphi)} = \rho e^{-\varphi i} = \bar{z}$

Osna simetrija u odnosu na Re-osu

"$1-1$", "*na*"

p) $f_{16}(z) = i^3\bar{z}$

$f_{16}(z) = -i\bar{z} = \bar{z}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

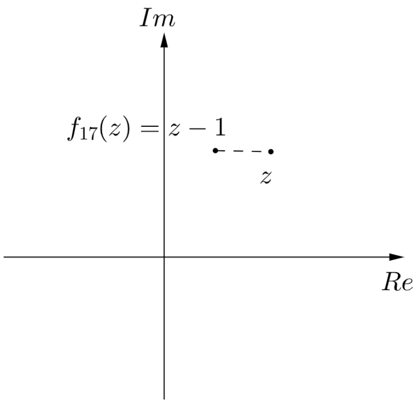
Osna simetrija u osnosu na pravu koja prolazi kroz koordinatni početak i zaklapa ugao $-\frac{\pi}{4}$ *sa pozitivnim delom realne ose (prava* $y = -x$*)*

"$1-1$", "*na*"

q) $f_{17}(z) = z - 1$

Translacija za -1

"$1-1$", "*na*"



Zadatak 14 *Navesti geometrijsku interpretaciju skupova* A_i.

a) $A_1 = \{z \mid z \cdot \bar{z} = 1\}$

$z\bar{z} = |z|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad |z| = 1$

Jednačina centralne jedinične kružnice $\quad \mathcal{K}(0,1)$

b) $A_2 = \{z \mid z = \bar{z}\}$

$x + yi = x - yi \quad \Rightarrow \quad y = 0, x \in \mathbb{R}$

Re-osa

c) $A_3 = \{z \mid argz = arg\bar{z}\}$

$z = \rho e^{\varphi i}, \quad argz = \varphi$

$\bar{z} = \rho e^{-\varphi i}, \quad arg\bar{z} = -\varphi$

$\varphi = -\varphi + 2k\pi \quad \Rightarrow 2\varphi = 2k\pi \quad \Rightarrow \quad \varphi = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Re-osa $\setminus\{0\}$ *(jer argument broja 0 nije definisan)*

d) $A_4 = \{z \mid (z - \alpha)^4 = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$

$z - \alpha = \sqrt[4]{\beta} \quad \Rightarrow \quad z = \alpha + \sqrt[4]{\beta}$

Temena kvadrata

e) $A_5 = \{z \mid |z-\alpha|^4 = \beta, \quad \alpha,\beta \in [0,\infty)\}$

$|z-\alpha| = \sqrt[4]{\beta}$

Kružnica $\mathcal{K}(\alpha, \sqrt[4]{\beta})$

f) $A_6 = \{z \mid \bar{z} = z \cdot e^{2i \cdot argz}\}$

$\rho e^{-\varphi i} = \rho e^{\varphi i} \cdot e^{2\varphi i} \quad \Leftrightarrow \quad \rho e^{-\varphi i} = \rho e^{3\varphi i}$

$3\varphi = -\varphi + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$

Cela Re-osa i Im-osa $\backslash\{0\}$

g) $A_7 = \{z \mid Im(z) = -Re(z)\}$

Prava $y = -x$

h) $A_8 = \{z \mid |\bar{z}i| = 1\}$

$|\bar{z}i| = |z| = 1$

Centralna jedinična kružnica $\quad \mathcal{K}(0,1)$

i) $A_9 = \{z \mid |z-2| = |z+1-i|\}$

$\sqrt{(x-2)^2+y^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$

$x^2-4x+4+y^2 = x^2+2x+1+y^2-2y+1$

$2y-6x+2 = 0$

Prava $y = 3x-1$

j) $A_{10} = \{z \mid (z-\alpha)^4 = 2+3i, \quad \alpha \in \mathbb{C}\}$

$z-\alpha = \sqrt[4]{2+3i} \quad \Rightarrow \quad z = \alpha + \sqrt[4]{2+3i}$

Temena kvadrata

k) $A_{11} = \{z \mid |z-\alpha|^4 = 2+3i, \quad \alpha \in \mathbb{C}\}$

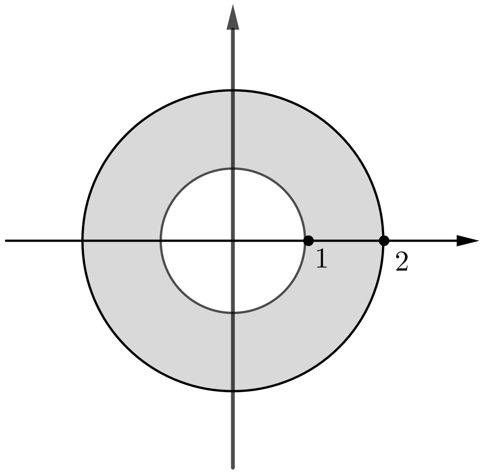
$\emptyset$*, jer je moduo realan broj*

l) $A_{12} = \{z \mid Re(z) \geq Im(z)\}$

$x \geq y$

Poluravan ispod prave $y = x$ *zajedno sa pravom* *m)* $A_{13} = \{z \mid 1 \leq |z| \leq 2\}$

Kružni prsten ograničen centralnim kružnicama poluprečnika 1 *i* 2



n) $A_{14} = \{z \mid \overline{z \cdot \bar{z}} = 4\}$

$z\bar{z} = |z|^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad |z| = 2$

Centralna kružnica poluprečnika 2 $\quad \mathcal{K}(0,2)$

o) $A_{15} = \{z \mid z = -\bar{z}\}$

$x + yi = -(x - yi) \quad \Rightarrow \quad x = 0, y \in \mathbb{R}$

Im-osa

p) $A_{16} = \{z \mid |z| = Re(z)\}$

$\rho = \rho\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \rho = 0 \vee \cos\varphi = 1$

Cela pozitivna Re-osa $\cup\{0\}$

q) $A_{17} = \{z \mid arg(-z) = arg(\overline{-z})\}$

$-z = -\rho e^{\varphi i} = e^{\pi i}\rho e^{\varphi i} = e^{(\pi+\varphi)i}, \quad arg(-z) = \pi + \varphi$

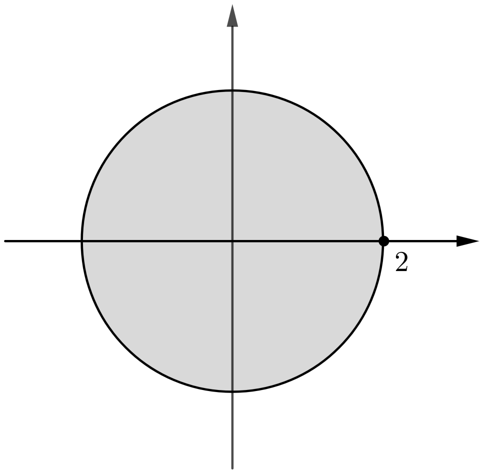
$\overline{-z} = -\rho e^{-\varphi i} = e^{\pi i}\rho e^{-\varphi i} = \rho e^{(\pi-\varphi)i}, \quad arg(-\bar{z}) = \pi - \varphi$

$\pi + \varphi = \pi - \varphi + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad \varphi = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Cela Re-osa $\setminus\{0\}$

r) $A_{18} = \{z \mid |z| < 2\}$

Unutrašnjost centralne kružnice poluprečnika 2



s) $A_{19} = \{z \mid arg z > 0\}$

Gornja poluravan sa negativnim delom Re-ose $\setminus\{0\}$

t) $A_{20} = \{z \mid (z-1-i)^5 = 32\}$

$z-(i+1) = \sqrt[5]{32}$

Temena pravilnog petougla (sa centrom u $1+i$*)*

u) $A_{21} = \{z \mid |z-2|^4 = 1\}$

$|z-2| = 1$

Jedinična kružnica sa centrom u 2 $\mathcal{K}(2,1)$

v) $A_{22} = \{z \mid |z-2|^4 = 0\}$

$z = 2$

$\{2\}$

w) $A_{23} = \{z \mid |arg z| = arg|z|\}$

$|z| \in [0,\infty) \quad \Rightarrow \quad arg|z| = 0$

Dakle i $|arg z|$ *mora biti 0, pa imamo* $arg z = 0$ *što je tačno za sve pozitivne realne brojeve.*

$\mathbb{R}^+$

x) $A_{24} = \{z \mid arg z = \dfrac{\pi}{6}\}$

Poluprava čiji je koeficijent pravca $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$

y) $A_{25} = \{z \mid \bar{z} = z^3\}$

$\{0, 1, -1, i, -i\}$
Temena kvadrata sa svojim centrom (pogledati zadatak 11)

z) $A_{26} = \{z \mid argz = -arg\bar{z}\}$

$argz = \varphi, \quad arg\bar{z} = -\varphi$
$\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Zadatak 15 *Rešiti jednačinu* $|\frac{z}{1-iz}| = 1$.

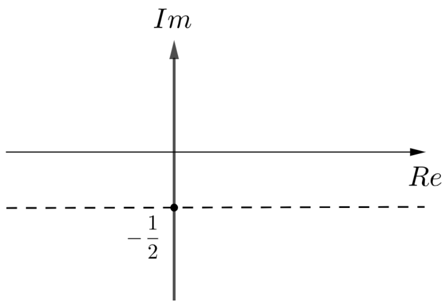
Rešenje:

I način

Kako za sve kompleksne brojeve važi $z\bar{z} = |z|^2$ imamo

$$\frac{z}{1-iz} \cdot \frac{\bar{z}}{\overline{1-iz}} = 1$$
$$\frac{z}{1-iz} \cdot \frac{\bar{z}}{1+i\bar{z}} = 1$$

$$z\bar{z} = 1 + i\bar{z} - iz + z\bar{z}$$
$$i(z - \bar{z}) = 1$$
$$z - \bar{z} = \frac{1}{i} = -i$$
$$2iIm(z) = -i$$
$$Im(z) = -\frac{1}{2}, \quad Re(z) \in \mathbb{R}$$



II način

$$|z| = |1 - iz|$$

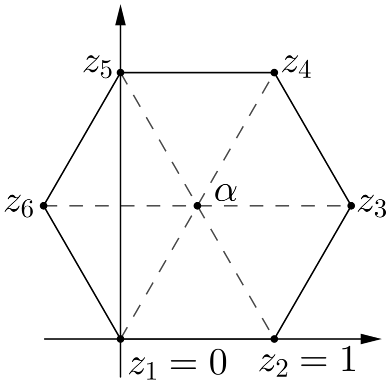
$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1+y)^2 + x^2} \quad /^2$$
$$x^2 + y^2 = y^2 + 2y + 1 + x^2$$
$$2y = -1$$
$$y = -\frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

□

Zadatak 16 *Odrediti kompleksne brojeve α i β kao i rešenja kompleksne jednačine $(z-\alpha)^6=\beta$ tako da 0 i 1 budu rešenja te jednačine, pri čemu su imaginarni delovi svih rešenja nenegativni. Koju figuru obrazuju?*

Rešenje:

Jedini mogući slučaj je da su 0 i 1 susedna temena šestougla.



Rotacijom temena 1 oko temena 0 za $\frac{\pi}{3}$ dobijamo centar šestougla.

$\alpha = z_0 = (1-0)e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Svako naredno teme dobije se rotacijom prethodnog temena oko centra šestougla za ugao $\frac{\pi}{3}$.

$z_i = z_0 + (z_{i-1} - z_0)e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad i = 2,3,4,5,6$

$\beta = (z-\alpha)^6 = (0-e^{i\frac{\pi}{3}})^6 = (-1)^6 e^{i\frac{\pi}{3}\cdot 6} = e^{2\pi i} = e^{0i} = 1$

$\square$