Електроенергетски софтверски инжењеринг 15. јун 2016.

Дискретна математика
Колоквијум II

1. Нека је G неповезан граф са $n \geq 6$ чворова који садржи 3 компоненте. Доказати да за комплемент графа G важи $\Delta(\overline{G}) \geq \frac{2n}{3}$, где је $\Delta(H)$ максималан степен чвора у графу H.

Решење: Претпоставимо супротно, $\Delta(\overline{G}) < \frac{2n}{3}$, тј. $\forall v \in V(\overline{G})\ d_{\overline{G}}(v) < \frac{2n}{3}$. Сада је

$$d_G(v) = n - 1 - d_{\overline{G}}(v) > n - 1 - \frac{2n}{3} = \frac{n}{3} - 1, \forall v \in V(G).$$

Како је $\omega(G) = 3$ знамо да постоји компонента G_i таква да је $|V(G_i)| \leq \frac{n}{3}$. Уочимо произвољан чвор u из G_i. Сада је $d_{G_i}(u) \leq \frac{n}{3} - 1$, што је у контрадикцији са претходно добијеним. Према томе важи $\Delta(\overline{G}) \geq \frac{2n}{3}$.

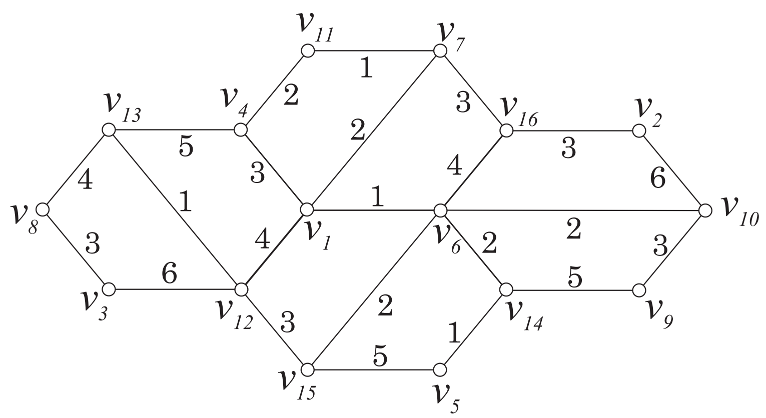
2. Показати да стабло са тачно два чвора степена 3 мора имати бар 4 висећа чвора.

Решење: Нека је T стабло са тачно 2 чвора степена 3. Претпоставимо да T има $k < 4$ висећа чвора. Важи

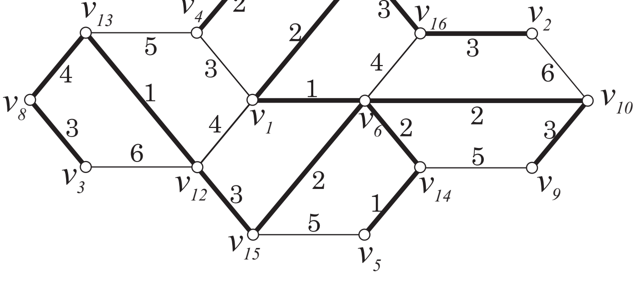
$$2(n-1) = \sum_{v \in V} d(v) = k \cdot 1 + 2 \cdot 3 + \sum_{2 \leq d(v), d(v) \neq 3} d(v) \geq k + 6 + 2(n-k-2) = 2+2-k > 2n+2-4 = 2n-2.$$

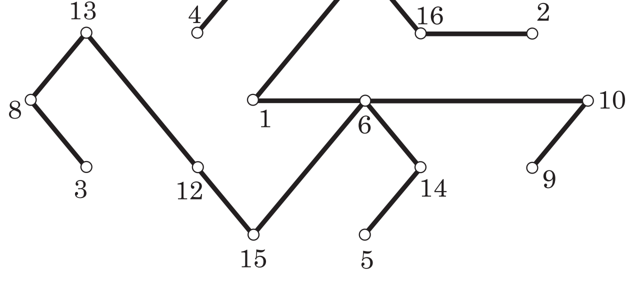
Добили смо $2n - 2 > 2n - 2$ што је контрадикција па T има бар k висећих чворова.

3. За тежински граф са слике пронаћи покривајуће стабло минималне тежине. Након тога пренумерисати чворове у добијеном стаблу тако да чвор v_i добије ознаку i и одредити Приферов низ за то стабло.



Решење:





Приферов низ конструисаног стабла изгледа $(16, 8, 11, 14, 13, 10, 6, 7, 12, 15, 6, 6, 1, 7)$.

4. Показати да ако граф G садржи чвор који је повезан са најмање 3 чвора степена 2, онда G није Хамилтонов.

Решење: Нека је у графу G чвор u повезан са $u_1, u_2, \ldots, u_s$ чворова степена 2, $s \geq 3$. Претпоставимо да је G Хамилтонов, тј. да садржи контуру C која купи све чворове графа G. Како су чворови $u_1, u_2, \ldots, u_s$ сви степена 2 и повезани са чвором u закључујемо да је u на контури C суседан са $u_1, u_2, \ldots, u_s$, $s \geq 3$. Сада се чвор u појављује на контури C бар 2 пута што је контрадикција са претпоставком да је C Хамилтонова контупа, па закључујемо да граф G није Хамилтонов.