VEKTORI

14. septembar 2020

Slobodni vektori su klase ekvivalencije na skupu uređenih parova tačaka prostora, u odnosu na relaciju ekvivalencije ρ definisanu sa

$$(A,B)\rho(C,D) \quad \Leftrightarrow \quad \text{duž } AB \text{ je paralelna, podudarna i isto orijentisana kao duž } CD.$$

Dakle, jedan vektor je skup svih orijentisanih duži koje imaju isti pravac (paralelne su), smer i dužinu. Kao glavnog predstavnika, najčešće uzimamo vektor čija je početna tačka u koordinatnom početku. Vektor je određen svojim pravcem, smerom i intenzitetom. Dva vektora su jednaka ako imaju jednake pravce smerove i intenzitete. Označimo skup svih vektora sa V, a za same vektore ćemo koristiti oznake poput $\vec{a}$, $\vec{x}$, ... ili poput $\overrightarrow{AB}$ za vektor čiji je jedan predstavnik orijentisana duž AB čija je početna tačka A a krajnja tačka B. Na ovako definisanom skupu vektora se geometrijski dešinišu razne operacije sa njima i razni njihovi važni parametri.

- ***Intenzitet*** ili ***dužina*** vektora se geometrijski definiše kao mera koja zadovoljava sve osobine koje su u skladu sa našim intuitivnim poimanjem dužine, i pri tome se definiše etalon za merenje dužine vektora. Intenzitet vektora je nenegativan realan broj, i intenzitet vektora $\vec{a}$ se označava sa $\left|\vec{a}\right|$. Dakle, intenzitet vektora je funkcija $|\cdot| : V \to [0,\infty)$.

- ***Ugao između dva vektora*** se takođe geometrijski definiše kao mera koja zadovoljava sve osobine koje su u skladu sa našim intuitivnim poimanjem ugla, i pri tome se definiše i etalon za merenje ugla između dva vektora. Ugao između dva vektora je nenegativan realan broj iz intervala $[0,\pi]$, i ugao između dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ se označava sa $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. Pri tome je ta mera ugla definisana na takav način da je $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \sphericalangle\left(\vec{b},\vec{a}\right)$, što znači znači da kod vektora u 3D prostoru nije definisana orijentacija ugla, već samo nenegativna veličina tog ugla. Dakle, ugao između dva vektora je funkcija $\sphericalangle : V^2 \to [0,\pi]$. Pri tome, pojmovi ortogonalnosti i paralelnosti vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ se definišu na sledeći način:

  $$\vec{a}\perp\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\pi}{2},$$

  $$\vec{a}\parallel\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0 \ \vee \ \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \pi\right).$$

  ☞ U ravni se orijentacija ugla može definisati kao kod kompleksnih brojeva koje možemo predstaviti kao vektore u kompleksnoj ravni. Tada u ravni postoje dve moguće orijentacije ugla, pozitivna i negativna, te stoga uglove u ravni možemo meriti pozitivnim i negativnim brojevima, u zavisnosti od pozitivne ili negativne orijentacije ugla. Međutim, u 3D prostoru je nemoguće definisati orijentaciju ugla.

➥ ***Suprotan vektor*** vektora $\vec{a}$, u oznaci $-\vec{a}$, je vektor koji je istog pravca i intenziteta kao vektor $\vec{a}$, a suprotnog smera.

➥ ***Nula-vektor***, u oznaci $\vec{0}$, je vektor koji ima istu početnu i krajnju tačku. Pravac nula-vektora se ne definiše, kao ni ugao između nula-vektora i bilo kojeg vektora $\vec{a}$. U cilju konzistentnosti definicija operacija i parametara vektora, po definiciji se smatra da je nula-vektor paralelan i ortogonalan na svaki vektor $\vec{a}$.

➥ ***Množenje vektora*** $\vec{a} \in V$ ***realnim brojem*** $\alpha \in \mathbb{R}$, u oznaci $\alpha\vec{a}$, kao rezultat daje nula-vektor $\vec{0}$ ako je $\alpha = 0$ ili $\vec{a} = \vec{0}$, a inače vektor koji je

- istog pravca kao vektor $\vec{a}$,
- istog smera kao vektor $\vec{a}$ za $\alpha > 0$ a suprotnog smera za $\alpha < 0$,
- intenziteta $\left|\alpha \cdot \vec{a}\right| = |\alpha| \cdot \left|\vec{a}\right|$.

Dakle, množenje vektora realnim brojem je funkcija $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$.

➥ ***Sabiranje dva vektora*** $\vec{a}, \vec{b} \in V$ je definisano na sledeći način. Neka je $\overrightarrow{AB}$ bilo koji predstavnik vektora $\vec{a}$, a za predstavnika vektora $\vec{b}$ uzmimo orijentisanu duž čija je početna tačka B - neka je to $\overrightarrow{BC}$. Rezultat sabiranja vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, u oznaci $\vec{a} + \vec{b}$ je vektor čiji je jedan predstavnik $\overrightarrow{AC}$. Dakle, sabiranje vektora je funkcija $+ : V^2 \to V$.

➥ ***Skalarni proizvod vektora*** $\vec{a}$ i $\vec{b}$, u oznaci $\vec{a} \cdot \vec{b}$, kao rezultat daje realan broj definisan sa

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right). \quad .$$

Dakle, skalarni proizvod vektora je funkcija $\cdot : V^2 \to \mathbb{R}$.

➥ ***Vektorski proizvod vektora*** $\vec{a}$ i $\vec{b}$, u oznaci $\vec{a} \times \vec{b}$, je vektor čiji je

- intenzitet $\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\left(\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right)$,
- pravac ortogonalan na pravce vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$,
- smer takav da uređena trojka vektora $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ čini desni trijedar, a to znači da se sa vrha vektora $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ kraće kretanje od vrha vektora $\vec{a}$ ka vrhu vektora $\vec{b}$ vidi kao pozitivan matematički ugao. Dakle, vektorski proizvod vektora je funkcija $\times : V^2 \to V$.

☞ Uočimo da je pravac vektora $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ortogonalan na pravce vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, te se postavlja pitanje šta ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ paralelni, u kojem slučaju ima beskonačno mnogo pravaca koji su ortogonalni na pravce vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, odnosno pravac vektora $\vec{c}$ u tom slučaju nije definisan. Međutim, slučaj $\vec{a} \parallel \vec{b}$, uključujući i slučaj $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$, znači da je $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0$ ili $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \pi$, te je tada

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\left(\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right) = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot 0 = 0,$$

odnosno, u takvom slučaju se dobija da je $\vec{c} = \vec{0}$. Formalno je $\vec{0}$ ortogonalan (po definiciji) i na $\vec{a}$ i na $\vec{b}$, a suštinski, $\vec{0}$ nema pravac.

- ***Mešoviti proizvod vektora*** $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, u oznaci $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$, je realan broj definisan sa

$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right).$$

Dakle, mešoviti proizvod vektora je funkcija $[\cdot,\cdot,\cdot] : V^3 \to \mathbb{R}$, tj. ternarna vektorska operacija definisana preko skalarnog i vektorskog proizvoda.

- ***Projekcija vektora*** $\vec{a}$ ***na vektor*** $\vec{b} \neq \vec{0}$, u oznaci $\mathrm{Proj}_{\vec{b}}\vec{a}$, je vektor
    - $\mathrm{Proj}_{\vec{b}}\vec{a} = \vec{0}$ ako je $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\pi}{2}$, a inače,
    - vektor istog pravca kao vektor $\vec{b}$,
    - vektor istog smera kao $\vec{b}$ ako je $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) < \frac{\pi}{2}$ a suprotnog smera ako je $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) > \frac{\pi}{2}$,
    - vektor intenziteta $|a| \cdot \cos\left(\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)$.

Račun sa ovako definisanim vektorima i operacijama je vrlo nepraktičan. Stoga je poželjno vektore predstaviti pomoću brojeva na neki pogodan način, način koji bi omogućavao lakše izračunavanje rezultata operacija nad vektorima.

U tu svrhu posmatrajmo Dekartov koordinatni sistem u 3D prostoru sa x-osom, y-osom i z-osom gde su svake dve od ovih osa uzajamno ortogonalne. Dalje, na svakoj od ovih osa fiksirajmo vektore jediničnog intenziteta koji polaze iz koordinatnog početka. Označimo sa $\vec{i}$ jedinični vektor na x-osi, sa $\vec{j}$ jedinični vektor na y-osi, i sa $\vec{k}$ jedinični vektor na z-osi. Pri tome, neka su vektori $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ orijentisani tako da $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ čini desni trijedar, a to znači da se sa vrha vektora $\vec{k}$ kraće kretanje od vrha vektora $\vec{i}$ ka vrhu vektora $\vec{j}$ vidi kao pozitivan matematički ugao. Neka su pozitivni delovi x-ose, y-ose i z-ose definisani smerovima vektora $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ redom.

Sada svaki vektor $\vec{a} \in V$ možemo jednoznačno predstaviti kao uređenu trojku realnih brojeva na sledeći način:

$$\vec{a} \quad \leftrightarrow \quad (x,y,z),$$

gde je

$$x = \mathrm{Proj}_{\vec{a}}\vec{i}, \qquad y = \mathrm{Proj}_{\vec{a}}\vec{j}, \qquad z = \mathrm{Proj}_{\vec{a}}\vec{k},$$

i pisaćemo $\vec{a} = (x,y,z)$, tj. vektor $\vec{a}$ ćemo poistovećivati sa (x,y,z).

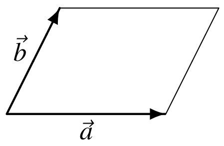
Ovakva reprezentacija vektora nam omogućava da gore navedene operacije sa vektorima, kao i još dodatna izračunavanja izvršavamo na lakši i efikasniji način, kao što je navedeno u nastavku. Neka je nadalje $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, i neka je $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b} = (b_1,b_2,b_3)$

i $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Bez dokaza se navode formule za izračunavanje rezultata operacija sa vektorima predstavljenim kao uređene trojke realnih brojeva.

- ***Intenzitet*** vektora $\vec{a}$ se izračunava sa
  $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.
- ***Suprotan vektor*** vektora $\vec{a}$ se izračunava sa
  $-\vec{a} = (-a_1, -a_2, -a_3)$.
- ***Nula-vektor*** ima reprezentaciju
  $\vec{0} = (0, 0, 0)$.
- Rezultat ***množenja vektora*** $\vec{a} \in V$ ***realnim brojem (skalarom)*** $\alpha \in \mathbb{R}$ se izračunava sa
  $\alpha\vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$.
- Rezultat ***sabiranja vektora*** $\vec{a}$ i $\vec{b}$ se izračunava sa
  $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.
- Rezultat ***skalarnog proizvoda vektora*** $\vec{a}$ i $\vec{b}$ se izračunava sa
  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$.
- ***Ugao između dva vektora*** se izračunava sa
  $$\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$
- Rezultat ***vektorskog proizvoda vektora*** $\vec{a}$ i $\vec{b}$ se izračunava sa
  $$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$
- Rezultat ***mešovitog proizvoda vektora*** $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ se izračunava sa
  $$\vec{a} \times \vec{b} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$
- Rezultat ***projekcije vektora*** $\vec{a}$ ***na vektor*** $\vec{b} \neq \vec{0}$ se izračunava sa
  $$\mathrm{Proj}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{\left|\vec{b}\right|^2} \cdot \vec{b}$$
  $$= \left(\frac{b_1(b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3)}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}, \frac{b_2(b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3)}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}, \frac{b_3(b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3)}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}\right).$$

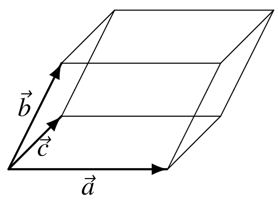
Koristeći ove operacije sa vektorima, možemo pomoću njih izraziti neke važne uzajamne odnose između vektora i geometrijskih tela koje obrazuju.

1. Kod vektorskog proizvoda, intenzitet vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ je površina paralelograma određenog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.



Slika 1: Površina paralelograma.

2. Kod mešovitog proizvoda, vrednost $\left|\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]\right|$ predstavlja zapreminu paralelopipeda određenog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.



Slika 2: Zapremina paralelopipeda.

3. Za svaka dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je $\vec{a} \perp \vec{b}$ ako i samo ako je $\vec{a}\vec{b} = 0$.
4. Za svaka dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ako i samo ako je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.
5. Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su koplanarni (leže u istoj ravni) ako i samo ako je $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = 0$.
6. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni ako i samo ako postoji skalar $k \in \mathbb{R}$ takav da je $\vec{a} = k\vec{b}$ ili $\vec{b} = k\vec{a}$.
7. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su nekolinearni ako i samo ako
   $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad (\alpha = 0 \land \beta = 0)$.
8. Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su koplanarni ako i samo ako postoje skalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$ ili $\vec{b} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{c}$ ili $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.
9. Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su nekoplanarni ako i samo ako
   $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad (\alpha = 0 \land \beta = 0 \land \gamma = 0)$.

10. Vektor $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ je jedinični vektor istog pravca i smera kao vektor $\vec{a}$.

11. Vektor $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ je simetralni vektor ugla kojeg obrazuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jer su obojica istog, jediničnog intenziteta, i $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ je istog pravca i smera kao vektor $\vec{a}$, a $\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ je istog pravca i smera kao vektor $\vec{b}$.

    Vektor $|\vec{b}| \cdot \vec{a} + |\vec{a}| \cdot \vec{b}$ je takođe simetralni vektor ugla kojeg obrazuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jer su obojica istog intenziteta $\left||\vec{b}| \cdot \vec{a}\right| = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \left||\vec{a}| \cdot \vec{b}\right|$, i $|\vec{b}| \cdot \vec{a}$ je istog pravca i smera kao vektor $\vec{a}$, a $|\vec{a}| \cdot \vec{b}$ je istog pravca i smera kao vektor $\vec{b}$.

Slede neke od važnih osobina operacija sa vektorima. Za sve vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, i sve skalare α i β važi

1. $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2$,
2. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$,
3. $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$,
4. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$,
5. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$,
6. $\alpha(\vec{a}\vec{b}) = (\alpha\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(\alpha\vec{b})$,
7. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$,
8. $\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b})$,
9. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$,
10. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$,
11. $|\alpha\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$.

Primer 1 *Dati su slobodni vektori*
$\vec{a} = (1, -3, 2)$, $\quad \vec{b} = (-2, -3, 4)$, $\quad \vec{c} = (1, 1, 1)$, $\quad \vec{d} = (-2, 6, -4)$, $\quad \vec{e} = (-1, -6, 6)$.

➥ $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{1^2+(-3)^2+2^2} = \sqrt{14},$

$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{(-2)^2+(-3)^2+4^2} = \sqrt{29},$

$\left|\vec{c}\right| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}.$

➥ $2\vec{a} = (2,-6,4), \quad -\vec{a} = (-1,3,-2).$

➥ $\vec{a}\cdot\vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2 = 14.$

➥ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot(-2)+(-3)\cdot(-3)+2\cdot 4 = 15,$

$\vec{a}\cdot\vec{c} = 1\cdot 1+(-3)\cdot 1+2\cdot 1 = 0,$ *odakle sledi da su vektori* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *ortogonalni,*

$\vec{a}\cdot\vec{d} = 1\cdot(-2)+(-3)\cdot 6+2\cdot(-4) = -28,$

➥ $\vec{d} = -2\cdot\vec{a},$ *odakle sledi da su vektori* $\vec{a}$ *i* $\vec{d}$ *paralelni, suprotnog smera, i vektor* $\vec{d}$ *je* 2 *puta duži od vektora* $\vec{a}$,

➥ $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \arccos\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}\right) = \arccos\left(\dfrac{15}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{29}}\right) = \arccos\left(\dfrac{15}{\sqrt{406}}\right),$

$\sphericalangle\left(\vec{b},\vec{c}\right) = \arccos\left(\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|}\right) = \arccos\left(\dfrac{(-2)\cdot 1+(-3)\cdot 1+4\cdot 1}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{3}}\right) = \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{87}}\right),$

(uglovi $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ *i* $\sphericalangle\left(\vec{b},\vec{c}\right)$ *su oštri jer je* $\arccos x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ *za* $x\in(0,1)$*).*

➥ $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (-12+6)\vec{i}+(4-4)\vec{j}+(-3+6)\vec{k} = (-6,0,3),$

površina paralelograma određenog vektorima $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *je*

$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{(-6)^2+0^2+3^2} = \sqrt{45},$

$\vec{a}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3-2)\vec{i}+(2-1)\vec{j}+(1+3)\vec{k} = (-5,1,4),$

površina paralelograma određenog vektorima $\vec{a}$ *i* $\vec{c}$ *je*

$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{(-5)^2+1^2+4^2} = \sqrt{42}.$

➥ $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3-12-4+6-6-4 = -23,$

zapremina paralelopipeda određenog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ *i* $\vec{c}$ *je* $\left|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\right| = 23,$

$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ -1 & -6 & 6 \end{vmatrix} = -18+12+24-6-36+24 = 0,$

zapremina paralelopipeda određenog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ *i* $\vec{c}$ *je* $\left|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\right| = 0$, *odnosno, vektori* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *i* $\vec{c}$ *su koplanarni.* ✔

Zadaci za vežbanje

Zadatak 1 *Za date vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ diskutovati po $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ njihovu kolinearnost i ortogonalnost.*

(a) $\vec{a} = (\alpha, 1, \alpha)$, $\vec{b} = (1, \alpha, \alpha)$.

(b) $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (1, \alpha, \beta)$.

(c) $\vec{a} = (4, 2\alpha, \alpha)$, $\vec{b} = (1, \alpha, -3\alpha)$.

Zadatak 2 *Neka je $ABCD$ paralelogram sa dijagonalama AC i BD, neka je T težište trougla BCD, i neka je S sredina duži AD. Izraziti vektor $\overrightarrow{TS}$ preko vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.*

Zadatak 3 *Neka je $ABCD$ paralelogram gde je BD njegova dijagonala, neka je S presek dijagonala paralelograma $ABCD$, neka je tačka T težište trougla ABC, i neka je tačka Q težište trougla ABS. Izraziti vektore $\overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{BT}$ i $\overrightarrow{DQ}$ preko vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.*

Zadatak 4 *Odrediti parametar $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da za $\vec{a} = (1, 1, 1)$ i $\vec{b} = (0, 2, 0)$ vektori $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 5\vec{b}$ i $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ budu*

(a) *paralelni,* (b) *ortogonalni.*

Zadatak 5 *Za koje sve vrednosti realnog parametra a su vektori $\vec{x} = (a, 1 - a, a)$, $\vec{y} = (2a, 2a - 1, a + 2)$ i $\vec{z} = (-2a, a, -a)$ koplanarni (leže u istoj ravni)?*

Zadatak 6 *Neka su A_1, B_1 i C_1 redom sredine stranica $[BC]$, $[AC]$ i $[AB]$ trougla $\triangle ABC$. Dokazati da je $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$.*

Rešenja zadataka

Rešenje zadatka 1:

(a) Iz

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (\alpha,1,\alpha)\cdot(1,\alpha,\alpha) = 2\alpha+\alpha^2 = \alpha(2+\alpha) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha\in\{0,-2\}$

sledi da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ortogonalni za $\alpha\in\{0,-2\}$. Iz

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha(1-\alpha),\alpha(1-\alpha),(\alpha-1)(\alpha+1)) = (0,0,0)$$

$\Leftrightarrow\quad (\alpha(1-\alpha)=0 \ \wedge\ \alpha(1-\alpha)=0 \ \wedge\ (\alpha-1)(\alpha+1)=0)$

$\Leftrightarrow\quad \alpha = 1$

sledi da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni za $\alpha = 1$.

(b) Iz

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (1,2,3)\cdot(1,\alpha,\beta) = 2\alpha+3\beta+1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha = -\dfrac{3}{2}\beta-\dfrac{1}{2},\ \beta\in\mathbb{R}$

sledi da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ortogonalni za $\alpha = -\frac{3}{2}\beta-\frac{1}{2}$ i proizvoljno $\beta\in\mathbb{R}$. Iz

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & \alpha & \beta \end{vmatrix} = (-3\alpha+2\beta,-\beta+3,\alpha-2) = (0,0,0)$$

$\Leftrightarrow\quad (-3\alpha+2\beta=0 \ \wedge\ -\beta+3=0 \ \wedge\ \alpha-2=0)$

$\Leftrightarrow\quad (\alpha=2 \ \wedge\ \beta=3)$

sledi da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni za $\alpha = 2$ i $\beta = 3$.

(c) Iz

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (4,2\alpha,1)\cdot(1,\alpha,-3\alpha) = 2\alpha^2-3\alpha+4 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha = \dfrac{3\pm\sqrt{9-32}}{4}\notin\mathbb{R}$

sledi da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu ortogonalni ni za jednu vrednost $\alpha\in\mathbb{R}$. Iz

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2\alpha & 1 \\ 1 & \alpha & -3\alpha \end{vmatrix} = (-\alpha(6\alpha+1),12\alpha+1,2\alpha) = (0,0,0)$$

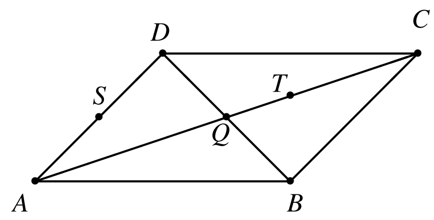
$\Leftrightarrow\quad (-\alpha(6\alpha+1)=0 \ \wedge\ 12\alpha+1=0 \ \wedge\ 2\alpha=0)$

$\Leftrightarrow\quad \left(\alpha\in\left\{-\dfrac{1}{6},0\right\} \ \wedge\ \alpha=-\dfrac{1}{12} \ \wedge\ \alpha=0\right) \quad\Leftrightarrow\quad \alpha\in\emptyset$

sledi da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu paralelni ni za jednu vrednost $\alpha\in\mathbb{R}$. ☑

Rešenje zadatka 2: Neka je Q presek dijagonala AC i BD, vidi sliku 3. Kako je $TQ = \dfrac{1}{3}CQ$ (težište trougla deli težišne linije u razmeri 1 : 2) i $CQ = AQ$ (presek dijagonala polovi dijagonale), sledi da je $TA = \dfrac{2}{3}CA$. Tako dobijamo

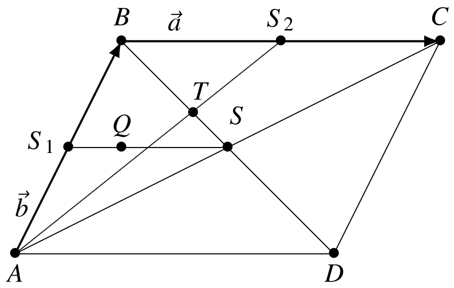
$$\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) =$$
$$= -\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\left(-\vec{a} + \vec{b}\right) = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b}.$$



Slika 3: Paralelogram. ☑

Rešenje zadatka 3: Neka je S_1 sredina duži AB, S_2 sredina duži BC, a R sredina duži S_1B, vidi sliku 4. Duž BS je težišna linija trougla ABC, te je $\overrightarrow{BT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BS}$ i $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AS_2}$. Presek dijagonala polovi dijagonale, te je $\overrightarrow{BT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BS} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$. Tako dobijamo

$$\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AS_2} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS_2}\right) = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) = \frac{2}{3}\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b},$$
$$\overrightarrow{BT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{3}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}.$$
$$\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{DS} + \overrightarrow{SQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{SS_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}\right) + \frac{2}{3}\overrightarrow{S_2B}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}\right) + \frac{2}{3}\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}\right) + \frac{1}{3}\left(-\overrightarrow{BC}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\vec{b} + \vec{a}\right) + \frac{1}{3}\left(-\vec{b}\right) = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{5}{6}\vec{b}.$$
☑



Slika 4: Paralelogram.

Rešenje zadatka 4:

$\vec{p} = \alpha(1,1,1) + 5(0,2,0) = (\alpha, \alpha+10, \alpha)$,

$\vec{q} = 3(1,1,1) - (0,2,0) = (3,1,3)$.

(a) $\vec{p} \parallel \vec{q} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{0} = \vec{p} \times \vec{q} = (30 + 2\alpha, 0, -30 - 2\alpha) \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad (30 + 2\alpha = 0 \ \wedge \ -30 - 2\alpha = 0) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = -15.$

(b) $\vec{p} \perp \vec{q} \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \vec{p} \cdot \vec{q} = 7\alpha + 10 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = -\frac{10}{7}.$ ☑

Rešenje zadatka 5: Od raznih potrebnih i dovoljnih uslova za koplanarnost vektora, ovde je najbolje koristiti da su vektori koplanarni ako i samo ako je njihov mešoviti proizvod jednak nuli.

$$[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = \begin{vmatrix} a & 1-a & a \\ 2a & 2a-1 & a+2 \\ -2a & a & -a \end{vmatrix} \overset{[1]}{=} \begin{vmatrix} -a & 1 & a \\ -4 & 3a+1 & a+2 \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix} \overset{[2]}{=} -a \begin{vmatrix} -a & 1 \\ -4 & 3a+1 \end{vmatrix}$$
$$= a\left(3a^2 + a - 4\right) = a(a-1)\left(a + \frac{4}{3}\right).$$

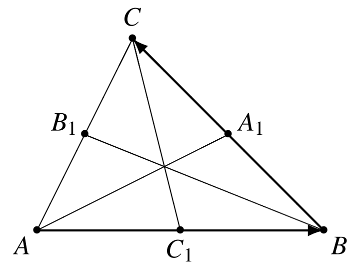
[1] - Treću kolonu dodamo na drugu, i treću kolonu pomnoženu sa -2 dodamo na prvu.

[2] - Razvijamo po trećoj vrsti.

Sledi da su vektori $\vec{x}$, $\vec{y}$ i $\vec{z}$ koplanarni za

$$[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = a(a-1)\left(a + \frac{4}{3}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in \left\{0, 1, -\frac{4}{3}\right\}.$$ ☑

Rešenje zadatka 6: Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, pri čemu je tada $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$, vidi sliku 5. Sabirajući vektore



Slika 5: Trougao.

$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$
$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$
$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC_1} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b},$

dobijamo

$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1\right)\vec{b} = \vec{0}.$ ☑