DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

Diferencijalne jednačine prvog reda

I Jednačina koja razdvaja promenljiive

To je jednačina oblika $y' = F(x, y)$ čija se desna strana može napisati kao proizvod dve neprekidne funkcije od kojih jedna zavisi samo od x, a druga samo od y, tj. $y' = f(x) \cdot g(y)$.

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)} \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx, \; g(y) \neq 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

1. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y(x^2 - 1) y' = -x(y^2 - 1)$.

$$y(x^2 - 1) \frac{dy}{dx} = -x(y^2 - 1) \Big/ \cdot \frac{dx}{(x^2 - 1)(y^2 - 1)}$$

$$\frac{y}{y^2 - 1} dy = -\frac{x}{x^2 - 1} dx$$

$$\int \frac{y}{y^2 - 1} dy = -\int \frac{x}{x^2 - 1} dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int \frac{2y}{y^2 - 1} dy = -\frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx$$

$$\ln\left| y^2 - 1 \right| = -\ln\left| x^2 - 1 \right| + c$$

$$\ln\left| y^2 - 1 \right| + \ln\left| x^2 - 1 \right| = c$$

$$\ln\left| y^2 - 1 \right|\left| x^2 - 1 \right| = c$$

$$\left| y^2 - 1 \right|\left| x^2 - 1 \right| = e^c = c_1$$ Opšte rešenja

Napomena:

Kada kažemo "Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine", podrazumevamo da se traži opšte rešenje, u skladu sa definicijom opšteg rešenja nad intervalom u kojem su zadovoljeni uslovi odgovarajućih teorema u vezi egzistencije i jedinstvenosti rešenja. To, međutim, treba proveriti u svakom konkretnom primeru kada se traži partikularno rešenje (dat je početni uslov zadate diferencijalne jednačine).

2. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = \dfrac{-x - xy}{y + xy}$.

$$y' = \frac{-x(1 + y)}{y(1 + x)}$$

$$y' = -\frac{x}{1+x} \cdot \frac{1+y}{y}$$

$$\frac{y}{1+y}dy = -\frac{x}{1+x}dx \Rightarrow \int \frac{y}{1+y}dy = -\int \frac{x}{1+x}dx$$

$$\int \frac{y+\overset{\mathrm{I}}{1-1}}{1+y}dy = -\int \frac{x+\overset{\mathrm{I}}{1-1}}{1+x}dx \Rightarrow \int dy - \int \frac{dy}{y+1} = -\int dx + \int \frac{dx}{1+x}$$

$$y - \ln|y+1| = -x + \ln|1+x| + c$$ Opšte rešenje

3. Odrediti partikularno rešenje diferencijalne jednačine koja zadovoljava zadati uslov: $(1+e^x)yy' = e^x$, $y(0) = 1$.

$$ydy = \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$\int ydy = \int \frac{e^x}{1+e^x}dx$ Uvodimo smenu $t = 1+e^x$, $dt = e^x dx$.

$\frac{y^2}{2} = \ln|1+e^x| + \ln c$ $\cancel{\Rightarrow y = \sqrt{2\ln|1+e^x|\cdot c}}$ Opšte rešenje $\boxed{y^2 = 2\ln(c\cdot(1+e^x))}$

U opšte rešenje uvrštavamo uslov.

$\cancel{1 = 2\ln|1+1|\cdot c \Rightarrow 1 = c\ln 4 \Rightarrow c = \frac{1}{\ln 4}}$

$y(0) = 1$

$1 = 2\cdot\ln(c\cdot 2)$

$\ln(2c) = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{e}}{2}$

$\cancel{y = \sqrt{2\ln|1+e^x|\cdot\frac{1}{\ln 4}}}$ Partikularno rešenje $\boxed{y^2 = 2\ln\left(\frac{\sqrt{e}}{2}(1+e^x)\right)}$

II Homogena jednačina

To je jednačina koja se može svesti na oblik $\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$, gde je f neprekidna funkcija. Smenom $u = \frac{y}{x}$, gde je u funkcija od x, homogena jednačina svodi se na jednačinu koja razdvaja promenljive.

$y = u\cdot x$, $y' = u'\cdot x + u$, $u = u(x)$

4. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $(x-y)ydx - x^2dy = 0$.

$$x^2dy = (xy - y^2)dx \;\; \Big| : x^2 \Rightarrow dy = \frac{\overset{\mathrm{I}}{xy - y^2}}{x^2}dx$$

$$dy = \left(\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)dx \;\; \Big| : dx \Leftrightarrow y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Smena: $\dfrac{y}{x}=u, u=u(x) \Rightarrow y=u\cdot x \Rightarrow y'=u'\cdot x+u$

$$u'x+\cancel{u}=\cancel{u}-u^2 \Rightarrow \frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{dx}=-\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{du}{u^2}=-\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{du}{u^2}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{u}=-\ln|x|+c=-\ln|x\cdot c_1|,\ c=-\ln c_1$$

$$\frac{x}{y}=\ln|x\cdot c_1| \Leftrightarrow y=\frac{x}{\ln|x\cdot c_1|}$$ Opšte rešenje

III Jednačine koje se svode na homogenu

Diferencijalna jednačina oblika $\boxed{y'=f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})}$ gde su $a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2\in R$, a f neprekidna funkcija, može se svesti na diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive ili na homogenu.

a) $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$. U tom slučaju smenom $a_1x+b_1y+c_1=t$ ili $a_2x+b_2y+c_2=t$ data diferencijalna jednačina se svodi na diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive.

b) $D\neq 0$. Uvodimo smenu $x=X+\alpha$, $y=Y+\beta$, gde su α i β jednoznačno određeni i određuju se iz sistema

$$a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0$$
$$a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0.$$

Tada je $Y'=f\left(\dfrac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right)=f\left(\dfrac{a_1+b_1\frac{Y}{X}}{a_2+b_2\frac{Y}{X}}\right)=g\left(\dfrac{Y}{X}\right)$, $X\neq 0$, a to je homogena diferencijalna jednačina.

5. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $x-y-1+(y-x+2)y'=0 \Rightarrow y'=\dfrac{x-y-1}{x-y-2}$.

Kako je $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=0$ uvodimo smenu $x-y-2=t$, $t=t(x)$, $1-y'=t' \Rightarrow y'=1-t'$.

$y'=\dfrac{x-y-1}{x-y-2}$ postaje $1-t'=\dfrac{t+1}{t} \Rightarrow t'=1-\dfrac{t+1}{t}$.

$$t'=\frac{\cancel{t}-\cancel{t}-1}{t} \Rightarrow t'=-\frac{1}{t} \Rightarrow \frac{dt}{dx}=-\frac{1}{t} \Rightarrow tdt=-dx \,/\int$$

$$\frac{t^2}{2} = -x + c \;\Rightarrow\; t^2 = 2(-x + c)$$

$(x - y - 2)^2 = 2(-x + c)$ Opšte rešenje

6. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = \dfrac{x + y - 5}{x - y + 1}$.

Kako je $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$, uvodimo smenu $x = X + \alpha$, $y = Y + \beta$ i $y' = Y'$.

$$Y' = \frac{X + \alpha + Y + \beta - 5}{X + \alpha - Y - \beta + 1} \quad \begin{matrix} = 0 \\ = 0 \end{matrix}$$

$$\alpha + \beta - 5 = 0$$

$$\alpha - \beta + 1 = 0$$

Rešavanjem sistema dobija se $\alpha = 2$ i $\beta = 3$.

Prava smena je: $x = X + 2$, $y = Y + 3$ i njome se data diferencijalna jednačina svodi na homogenu.

$$Y' = \frac{X + Y}{X - Y} \begin{matrix} /:X \\ /:X \end{matrix} \Rightarrow Y' = \frac{1 + \frac{Y}{X}}{1 - \frac{Y}{X}} \quad \text{(homogena diferencijalna jednačina)}$$

Smena: $\dfrac{Y}{X} = u, \; u = u(X) \;\Rightarrow\; Y = uX \;\Rightarrow\; Y' = u'X + u$

$$u'X + u = \frac{1 + u}{1 - u} \;\Rightarrow\; X\frac{du}{dX} = \frac{1 + u}{1 - u} - u \cdot \frac{1 - u}{1 - u}$$

$$X\frac{du}{dX} = \frac{1 + \cancel{u} - \cancel{u} + u^2}{1 - u} \;\Rightarrow\; \frac{1 - u}{1 + u^2}du = \frac{1}{X}dX \quad \text{(d. j. koja razdvaja promenljive)}$$

$$\int \frac{1 - u}{1 + u^2}du = \int \frac{1}{X}dX \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{1 + u^2}du - \frac{1}{2}\int \frac{2u}{1 + u^2}du = \ln|X| + \ln c$$

$$arctgu - \frac{1}{2}\ln|1 + u^2| = \ln|X| + \ln c$$

$$arctgu = \ln\left(c|X|\sqrt{1 + u^2}\right)$$

$$e^{arctg\frac{y-3}{x-2}} = c|x - 2|\sqrt{1 + \left(\frac{y - 3}{x - 2}\right)^2}$$ Opšte rešenje

IV Linearna jednačina

To je jednačina koja se može svesti na oblik $\boxed{y' + f(x)y = g(x)}$, gde su f i g neprekidne funkcije.

a) Rešenje jednačine dato je obrascem $y = e^{-\int f(x)dx}\left[c - \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx \right]$.

b) Rešenje je oblika $y = uv$, gde su u i v funkcije od x. Iz $y' = u'v + uv'$ sledi da je

$$u'v + uv' + f(x)uv = g(x)$$

$$vu' + (v' + f(x)v)u = g(x).$$

Nepoznatu funkciju v tražimo iz uslova $v' + f(x)v = 0$.

$$\frac{dv}{v} = -f(x)dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int f(x)dx$$

Pri traženju neodređenog integrala ovde se ne uzima u obzir konstanta, jer se ona u daljem traženju rešenja skrati.

$$v\frac{du}{dx} = g(x) \Rightarrow du = \frac{g(x)}{v}dx \Rightarrow \int du = \int \frac{g(x)}{v}dx$$

7. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$, $x \neq -1$.

Uvodimo smenu $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$, $u = u(x), v = v(x)$.

$$u'v + uv' - \frac{2}{x+1}uv = (x+1)^3 \Rightarrow vu' + \overbrace{\left(v' - \frac{2}{x+1}v\right)}^{=0}u = (x+1)^3$$

$$v' - \frac{2}{x+1}v = 0 \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = \int\frac{2}{x+1}dx \Rightarrow \ln|v| = 2\ln|x+1| \Rightarrow v = (x+1)^2$$

$$\cancel{(x+1)^2} \cdot u' = (x+1)^{\cancel{3}} \Rightarrow \int du = \int(x+1)dx \Rightarrow u = \frac{1}{2}x^2 + x + c$$

$$y = u \cdot v = \left(\frac{1}{2}x^2 + x + c\right)(x+1)^2$$ Opšte rešenje

V Bernulijeva jednačina

To je jednačina oblika $\boxed{y' + f(x)y = g(x) \cdot y^\alpha}$, gde je $\alpha \in R$, a f i g su neprekidne funkcije.

Za $\alpha = 0$ ili $\alpha = 1$ ona je linearna (za $\alpha = 1$ ona je i jednačina koja razdvaja promenljive jer je u tom slučaju $y' = y(g(x) - f(x))$). Razmatraćemo slučajeve kada je $\alpha \neq 0$ i $\alpha \neq 1$.

$$y' + f(x)y = g(x) \cdot y^\alpha \quad / : y^\alpha$$

$$\frac{y'}{y^{\alpha}}+f(x)\frac{y}{y^{\alpha}}=g(x)$$

$$y'\cdot y^{-\alpha}+f(x)y^{1-\alpha}=g(x)$$

Uvodimo smenu $z(x)=y^{1-\alpha}$, $z'(x)=(1-\alpha)y^{-\alpha}\cdot y'$, $\frac{z'}{1-\alpha}=y'y^{-\alpha}$ pa jednačina postaje

$$\frac{z'}{1-\alpha}+f(x)z=g(x)\ \Big/\cdot(1-\alpha)$$

$$z'(x)+(1-\alpha)\cdot f(x)\cdot z(x)=(1-\alpha)\cdot g(x)\ \text{(linearna d. j.).}$$

8. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $xy'+y=y^2\ln x$. $/:x$

$$y'+\frac{1}{x}y=\frac{\ln x}{x}y^2 \quad /:y^2$$

$$\frac{y'}{y^2}+\frac{1}{x}\frac{1}{y}=\frac{\ln x}{x}\ \Rightarrow\ y'y^{-2}+\frac{1}{x}y^{-1}=\frac{\ln x}{x}$$

Smena: $z=y^{-1}$, $z'=-y^{-2}y'$, $z=z(x)$

$$-z'+\frac{1}{x}z=\frac{\ln x}{x} \ /\cdot(-1)\ \Rightarrow\ z'-\frac{1}{x}z=-\frac{\ln x}{x}\ \text{ linearna d. j.}$$

Smena: $z(x)=u(x)v(x)$, $z'=u'v+uv'$

$$u'v+uv'-\frac{1}{x}uv=-\frac{\ln x}{x}$$

$$u'v+u\underbrace{(v'-\frac{1}{x}v)}_{=0}=-\frac{\ln x}{x}$$

Biramo v tako da $v'-\frac{1}{x}v=0\ \Rightarrow\ \frac{dv}{dx}=\frac{v}{x}\ \Rightarrow \int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x}\ \Rightarrow\ \ln|v|=\ln|x|\ \Rightarrow\ v=x$.

$$u'x=-\frac{\ln x}{x}\ \Rightarrow\ \frac{du}{dx}=-\frac{\ln x}{x^2}\ \Rightarrow\ du=-\frac{\ln x}{x^2}dx\ \Big/\int$$

$$u=-\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\begin{pmatrix} u_1=\ln x & du_1=\frac{1}{x}dx \\ dv_1=-\frac{1}{x^2}dx & v_1=\frac{1}{x}\end{pmatrix}=\frac{\ln x}{x}-\int\frac{1}{x^2}dx=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+c$$

$$z=uv=(\frac{1}{x}(\ln x+1)+c)x\ \Rightarrow\ \frac{1}{y}=\ln x+1+cx$$

$$y=\frac{1}{\ln x+1+cx}\ \text{Opšte rešenje}$$

9. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $(2x^2 y\ln y - x)y' = y$.

$$\frac{1}{x'} = y' = \frac{y}{2x^2 y\ln y - x} \Rightarrow x' = \frac{1}{y'} = \frac{2x^2 y\ln y - x}{y}$$

$$x' + \frac{1}{y}x - 2\ln y x^2 = 0$$ (Bernulijeva diferencijalna jednačina za $\alpha = 2$). $/ : x^2$

x zavisna, a y nezavisna promenljiva

$x' \cdot x^{-2} + \frac{1}{y} x^{-1} = 2\ln y$

Uvodimo smenu $z = x^{1-\alpha} = \frac{1}{x}$, $z' = -\frac{x'}{x^2}$, $z = z(y)$

$$-\frac{x'}{x^2} - \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{x} + 2\ln y = 0 \Rightarrow z' - \frac{1}{y}z + 2\ln y = 0$$ (linearna diferencijalna jednačina)

Uvodimo smenu $z = u\cdot v$, $z' = u'\cdot v + u\cdot v'$, $u = u(y)$, $v = v(y)$

$$v\cdot u' + u\cdot v' - \frac{1}{y}u\cdot v = -2\ln y \Rightarrow v\cdot u' + \underbrace{\left(v' - \frac{1}{y}v\right)}_{=0}\cdot u = -2\ln y$$

$$v' - \frac{1}{y}v = 0 \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = \int\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|v| = \ln|y| \Rightarrow v = y$$

$$yu' = -2\ln y \Rightarrow \int du = -2\int\frac{\ln y}{y}dy \Rightarrow u = -\ln^2 y + c$$

$$z = u\cdot v = c\cdot y - y\ln^2 y \Rightarrow x = \frac{1}{z} = \frac{1}{y(c - \ln^2 y)}.$$

☺

$$\boxed{x = \frac{1}{y(c - \ln^2 y)}}$$ Opšte rešenje