2. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $y = arctg\dfrac{2x}{x^2-1}$.

1) Domen

$$\left.\begin{array}{l} x^2-1\neq 0 \\ x^2\neq 1 \Rightarrow x\neq \pm 1 \end{array}\right\} \Rightarrow D: x\in R\setminus\{-1,1\}$$

$D = \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$

2) Nule funkcije

$$y = arctg\frac{2x}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$\dfrac{2x}{x^2-1} = 0$

3) Parnost funkcije

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ funkcija je neparna. Kako je funkcija neparna (simetrična u odnosu na koordinatni početak), dovoljno je posmatrati funkciju samo za $x \geq 0$.

centralno

$y(-x) = arctg\dfrac{-2x}{x^2-1} = -arctg\dfrac{2x}{x^2-1} = -y(x)$

4) Asimptote

"$arctg\dfrac{2}{0^+}$"

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^+} arctg\dfrac{2x}{x^2-1} = arctg\infty = \dfrac{\pi}{2} \text{ (tgα)} \\ \lim\limits_{x\to 1^-} arctg\dfrac{2x}{x^2-1} = arctg(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2} \text{ (tgα)} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{funkcija nema vertikalnu asimptotu}$$

$\lim\limits_{x\to\infty} arctg\dfrac{2x \;/ :x^2}{x^2-1 \;/ :x^2} = arctg 0 = 0 \Rightarrow$ prava $y=0$ je horizontalna asimptota funkcije

Funkcija nema kosu asimptotu.

5) Monotonost i ekstremne vrednosti

$$y' = \frac{1}{1+\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)^2}\cdot\frac{2(x^2-1)-2x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{\dfrac{(x^2-1)^2+4x^2}{\cancel{(x^2-1)^2}}}\cdot\frac{2x^2-2-4x^2}{\cancel{(x^2-1)^2}} =$$

$$= \frac{-2-2x^2}{x^4-2x^2+1+4x^2} = \frac{-2\cancel{(1+x^2)}}{(1+x^2)^{\cancel{2}}} = \frac{-2}{\underbrace{1+x^2}_{>0}} < 0$$

$y' < 0$ za svako $x\in D$, funkcija opada

Funkcija nema ekstremnih vrednosti.

6) Tangente funkcije

$\Rightarrow \alpha = -\dfrac{\pi}{4}$

$tg\alpha = \lim\limits_{x\to\pm 1} y' = \lim\limits_{x\to\pm 1}\dfrac{-2}{1+x^2} = -1 \; (y=-x)$

$tg\beta = y'(0) = -2 \; (y = -2x)$

$tg\beta = \lim\limits_{x\to 0^+} y' = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-2}{1+x^2} = -2$

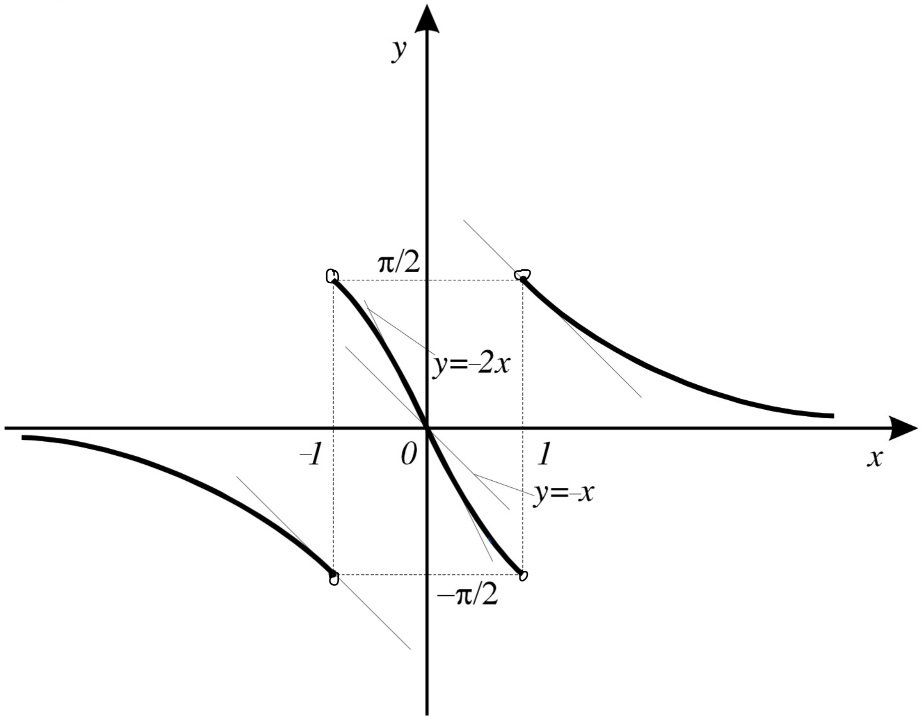
7) Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke

$$y'' = \frac{2\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

$y'' > 0$ za $x\in(0,1)\cup(1,\infty)$, funkcija je konveksna

Tačka $(0,0)$ je prevojna tačka funkcije.

8) Grafik funkcije



3. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x)=\ln\left|\dfrac{\ln|x|+1}{\ln|x|-1}\right|$.

1) Domen

$\ln|x|-1\neq 0 \Leftrightarrow \ln|x|\neq 1$ $\qquad$ $\ln|x|+1\neq 0 \Leftrightarrow \ln|x|\neq -1$ $\qquad$ $x\neq 0$

$|x|\neq e \Leftrightarrow x\neq \pm e$ $\qquad$ $|x|\neq e^{-1} \Leftrightarrow x\neq \pm e^{-1}$

$$D=R\setminus\left\{-e,-\frac{1}{e},0,\ e,\frac{1}{e}\right\}$$

2) Parnost funkcije

$f(-x)=f(x)\Rightarrow$ funkcija je parna. Kako je funkcija parna (simetrična u odnosu na y-osu) dovoljno je posmatrati funkciju samo za $x\geq 0$.

3) Nule funkcije

$$f(x)=\ln\left|\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\right|=0 \Leftrightarrow \left|\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\right|=1$$

a) $\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}=1$

$\cancel{\ln x}+1=\cancel{\ln x}-1 \Leftrightarrow 1=-1$ ↯

b) $\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}=-1$

$\ln x+\cancel{1}=-\ln x+\cancel{1} \Leftrightarrow 2\ln x=0 \Leftrightarrow x=1$

N(1,0)

4) Asimptote

☆ $\ln\left|\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\right| \overset{\text{л.п.}}{\overset{"\frac{-\infty}{-\infty}"}{=}} \ln\left|\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cancel{\frac{1}{x}}}{\cancel{\frac{1}{x}}}\right| = \ln|1| = \ln 1 = 0$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln\left|\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\right| = \ln\lim_{x\to 0^+}\left|\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\right| = \ln 1 = 0 \quad \text{!tg}\alpha$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{e}^{\pm}}\ln\left|\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\right| \overset{"\ln 0^+"}{=} -\infty \Rightarrow \text{prava } x=\frac{1}{e} \text{ je vertikalna asimptota funkcije}$$

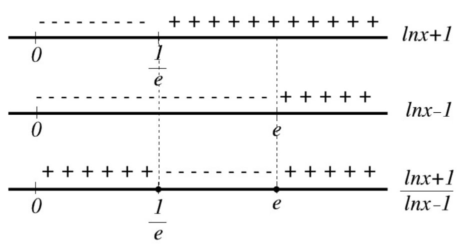
$$\lim_{x\to e^{\pm}}\ln\left|\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\right| \overset{"\ln\left|\frac{2}{0}\right| = \ln +\infty"}{=} \infty \Rightarrow \text{prava } x=e \text{ je vertikalna asimptota funkcije}$$

$$\lim_{x\to \infty}\ln\left|\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\right| \overset{☆}{=} 0 \Rightarrow \text{prava } y=0 \text{ je horizontalna asimptota funkcije}$$

Funkcija nema kosu asimptotu.

Za nalaženje izvoda, potrebno je da se oslobodimo apsolutne zagrade...

$$f(x)=\ln\left|\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\right|$$

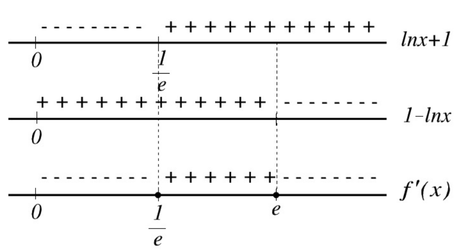


$$f(x)=\begin{cases}\ln\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}, & x\in(0,\frac{1}{e})\cup(e,\infty)\\[2ex] \ln\dfrac{\ln x+1}{1-\ln x}, & x\in(\frac{1}{e},e)\end{cases}$$

5) Monotonost i ekstremne vrednosti

za $x\in(0,\frac{1}{e})\cup(e,\infty)$

$$f'(x)=\frac{\cancel{\ln x-1}}{\ln x+1}\cdot\frac{\frac{1}{x}(\cancel{\ln x}-1)-(\cancel{\ln x}+1)\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x-1)^{\cancel{2}}}=\frac{-2}{x(\ln^2 x-1)}=\frac{2}{\underset{\overset{\vee}{0}}{x}(1-\ln^2 x)}$$



$f'(x) < 0$ za $x \in (0, \frac{1}{\mathrm{e}}) \cup (\mathrm{e}, \infty)$ funkcija opada

Funkcija nema ekstremnih vrednosti.

za $x \in (\frac{1}{e},\ e)$

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{\ln x+1} \cdot \frac{\frac{1}{x}\cdot(1-\ln x)+(\ln x+1)\cdot\frac{1}{x}}{(1-\ln x)^2} = \frac{2}{x(1-\ln^2 x)}$$

$f'(x) > 0$ za $x \in (\frac{1}{e},\ e)$ funkcija raste

Funkcija nema ekstremnih vrednosti.

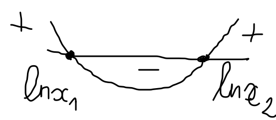
6) Tangente funkcije

$$tg\alpha = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x(1-\ln^2 x)} = 2\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{1-\ln^2 x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{Л.П.}}{=}} 2\lim_{x\to 0^+} \frac{-x^{-2}}{-2\ln x\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{\ln x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{Л.П.}}{=}}$$

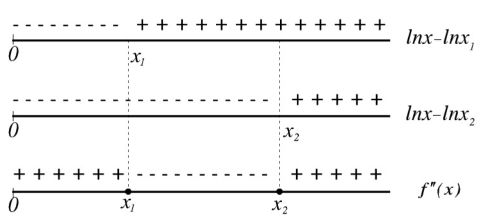
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^{-2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2}$$

7) Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke

$$f''(x) = \frac{-2\left[1-\ln^2 x + x(-2\ln x)\cdot\frac{1}{x}\right]}{x^2(1-\ln^2 x)^2} = \frac{2(\ln^2 x + 2\ln x - 1)}{x^2(1-\ln^2 x)^2}$$



$\ln^2 x + 2\ln x - 1 = 0$, $\ln x = t$, $t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$, $x_1 = e^{-1-\sqrt{2}}$, $x_2 = e^{-1+\sqrt{2}}$



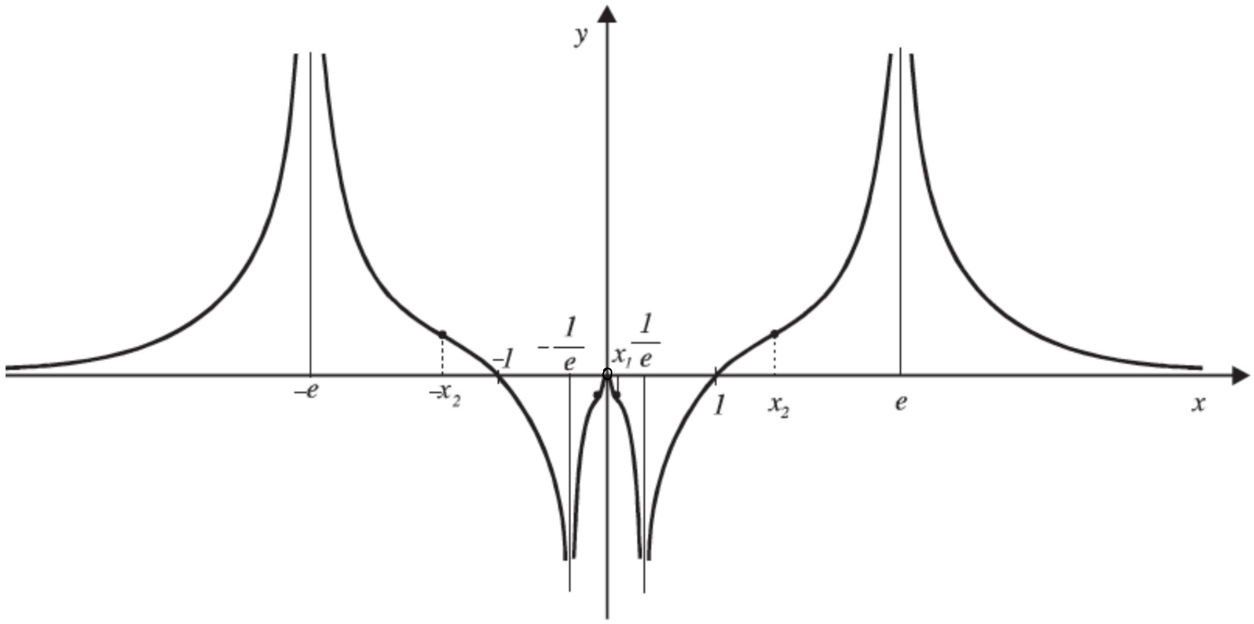
$0 < x_1 < \frac{1}{e} = e^{-1} < 1 = e^0 < x_2 < e = e^1$

$f''(x) > 0$ za $x \in (0, x_1) \cup (x_2, e) \cup (e, \infty)$ funkcija je konveksna

$f''(x) < 0$ za $x \in (x_1, \frac{1}{\mathrm{e}}) \cup (\frac{1}{e}, x_2)$ funkcija je konkavna

Tačke $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ su prevojne tačke funkcije ($f(x_1) \approx -0{,}88$, $f(x_2) \approx 0{,}87$).

8) Grafik funkcije



☺