

Statička optimizacija u slučaju funkcije jedne promenljive

Anja Buljević

Aleksandra Mitrović

Smilja Stokanović

27. oktobar 2020.

Zadaci

1. Pronaći stacionarne tačke funkcije $f(x) = 1 + 8x + 2x^2 - \frac{10}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6$ i ispitati njihov karakter.

Prvo ćemo pronaći stacionarne tačke¹.

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\f'(x) &= 8 + 4x - 10x^2 - x^3 + 4x^4 - x^5 = 0\end{aligned}$$

¹ Podsećanje sa predavanja: potreban uslov za postojanje stacionarne tačke je $f'(x) = 0$. Karakter stacionarne tačke ispitujemo na osnovu vrednosti funkcija viših izvoda.

Rešavanjem ove jednačine dobijamo sledeće stacionarne tačke

$$\boxed{x_1^* = -1} \quad \boxed{x_2^* = 2}$$

Sada trebamo da ispitamo karakter dobijenih stacionarnih tačaka, pa računamo drugi izvod funkcije i proveramo vrednost funkcije u stacionarnim tačkama.

$$\begin{aligned}f''(x) &= 4 - 20x - 3x^2 + 16x^3 - 5x^4 \\f''(-1) &= 0 \\f''(2) &= 0\end{aligned}$$

Pošto smo dobili i da je drugi izvod u stacionarnim tačkama nula, tražimo treći izvod funkcije i vrednost funkcije u stacionarnim tačkama.

$$\begin{aligned}f'''(x) &= -20 - 6x + 48x^2 - 20x^3 \\f'''(-1) &= 54 \\f'''(2) &= 0\end{aligned}$$

Pošto je vrednost funkcije u tački $x_1 = -1$ različita od nule, zaključujemo da je stacionarna tačka $x_1 = -1$ prevojna tačka. Vrednost funkcije za stacionarnu tačku $x_1 = 2$ je nula, te je potrebno da izračunamo i četvrti izvod.

$$f^{IV}(x) = -6 + 96x - 60x^2$$

$$f^{IV}(2) = -54$$

Vrednost četvrtog izvoda u tački $x_1 = 2$ je manja od nule i možemo da zaključimo da ova tačka predstavlja maksimum funkcije.

2. Troškovi proizvodnje su $100 \frac{\text{din}}{\text{komadu}}$. U razvoj tehnologije uloženo je 5000 dinara. Ukoliko se u reklamu uloži n dinara, može se prodati \sqrt{n} komada proizvoda po ceni $300 \frac{\text{din}}{\text{komadu}}$. Kako fabrika treba da posluje da bi dobit bila maksimalna?

Na početku zadatka, potrebno je da formiramo kriterijum optimalnosti z . Nepoznata u ovom slučaju jeste broj komada, koju ćemo obeležiti sa x , dok je promenljivu n potrebno izraziti preko x :

$$x = \sqrt{n} \rightarrow x^2 = n$$

Kriterijum optimalnosti :

$$z(x) = -100x - 5000 - x^2 + 300x$$

Da bismo odredili potrebne uslove, računamo prvi izvod funkcije z :

$$z'(x) = -100 - 2x + 300 = 0$$

$$200 - 2x = 0 \rightarrow \boxed{x^* = 100}$$

Vrednost stacionarne tačke x u ovom slučaju je 100, pa ostaje još da proverimo i dovoljne uslove:

$$z''(x) = -2 < 0$$

Vrednost drugog izvoda je manja od nule, što znači da za 100 proizvedenih komada fabrika će imati maksimalnu dobit.

3. Pokažite da za svako $x \in \mathbb{R}$ važi $e^x \geq x + 1$.
Prvo ćemo početni izraz zapisati u obliku

$$y = e^x - x - 1 \geq 0. \quad (1)$$

Da bismo mogli da dokažemo tvrđenje (1), neophodno je da odredimo stacionarnu tačku x^* funkcije $y = e^x - x - 1$ izjednačavanjem prvog izvoda sa nulom

$$y'(x) = e^x - 1 = 0$$

$$x^* = 0.$$

Ispitivanjem znaka drugog izvoda

$$y''(x) = e^x = e^0 = 1 > 0,$$

zaključujemo da početna funkcija ima ekstremnu vrednost (minimum) u tački $x^* = 0$ čime je nejednakost (1) dokazana.

4. Prostorija u kojoj se otvara restoran maksimalno može da primi 25 stolova za 4 osobe. Uzimajući u obzir istraživanje tržišta, izvedeno pre otvaranja restorana, zaključeno je da je moguće napuniti restoran u potpunosti ukoliko ima 15 stolova i ukoliko se naplaćuje $20 \frac{e}{\text{obroku}}$. Na svaki dodati sto, da bi restoran bio pun, cena obroka se mora smanjiti za 1. Sa koliko stolova se može zaraditi maksimalni profit?

Na osnovu teksta zadatka, možemo da zaključimo da će nam promenljiva u ovom slučaju biti ukupan broj stolova, x , jer ujedno od toga zavisi i cena obroka. Kriterijum optimalnosti formiramo na sledeći način:

$$z(x) = 4x(20 - (x - 15)) = 4x(35 - x) = 140x - 4x^2$$

Izjednačavanjem prvog izvoda sa nulom, dobićemo broj potrebnih stolova:

$$z'(x) = 140 - 8x = 0 \rightarrow x^* = 17.5$$

Pošto dobijena vrednost nije celi broj, izračunaćemo vrednost funkcije i u tački 17 i u tački 18, kako bi smo videli, za koji broj stolova će restoran imati veću zaradu.

$$z(17) = 1224$$

$$z(18) = 1224$$

Pošto je vrednost funkcije i za 17 i za 18 stolova jednaka, preostaje nam samo da izračunamo dovoljne uslove i proverimo da li je to stvarno maksimum funkcije:

$$z''(x) = -8$$

Pošto je vrednost funkcije manja od nula, zaključujemo da će restoran ostvariti maksimalni profit ukoliko u restoranu bude imao 17 ili 18 popunjenih stolova.

5. Avionska karta BG - NY košta 500€. Avion prima 300 putnika, a prosečni broj putnika je 180. Ako se cena karte smanji za 5€, broj putnika se poveća za 3. Kako odrediti cenu karte da profit bude najveći?

Nepoznata u ovom slučaju jeste broj smanjivanja cene karte, n . Na osnovu te vrednosti možemo izračunati cenu karte i broj putnika:

$$\begin{aligned}(500 - 5n) &= \text{cenakarte} \\ (180 + 3n) &= \text{brojputnika}\end{aligned}$$

Kriterijum optimalnosti dobićemo ukoliko cenu karte pomnožimo sa brojem putnika:

$$\begin{aligned}z &= (500 - 5n)(180 + 3n) = 90000 - 900n + 1500n - 15n^2 \\ z &= 90000 + 600n - 15n^2\end{aligned}$$

Sledeći korak jeste da pronađemo vrednost n , izjednačavanjem prvog izvoda sa nulom:

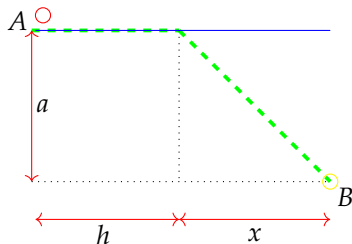
$$z'(x) = 600 - 30n = 0 \rightarrow n^* = 20$$

$$z''(x) = -30$$

Vidimo da je vrednost drugog izvoda manja o, te će dobit biti maksimalna ako se cena karta smanji 20 puta. U tom slučaju vrednost karte i broja putnika iznositi:

$$\begin{aligned}\text{cenakarte} &= (500 - 5n^*) = 400 e \\ \text{brojputnika} &= (180 + 3n^*) = 240 \text{putnika} \\ Z &= 400 * 240 = 96000 e\end{aligned}$$

6. Spasilac se nalazi na plaži u tački A i vidi kupaća koji se davi u tački B. Spasilac trči brzinom V_1 , a pliva brzinom V_2 . Kako treba da se kreće spasilac da bi najbrže stigao do davljenika?



Potrebno je da pronađemo minimalno vreme za koje će spasilac stići do davljenika, te ćemo na osnovu toga formirati

kriterijum optimalnosti:

$$\begin{aligned} t &= t_1 + t_2 \\ t &= \frac{s_1}{V_1} + \frac{s_2}{V_2} \\ t &= \frac{b-x}{V_1} + \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{V_2} \end{aligned}$$

Računanjem prvog izvoda pronalazimo potrebne uslove

$$t' = \frac{-1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \frac{2x}{\sqrt{a^2+x^2}} = 0$$

$$\begin{aligned} V_1 x &= V_2 \sqrt{a^2+x^2} \\ V_1^2 x^2 &= V_2^2 (a^2+x^2) \end{aligned}$$

$$x^* = \frac{V_2 a}{\sqrt{V_1^2 - V_2^2}}$$

7. Pri proizvodnji q jedinica, firma zarađuje $100-4q$ $\frac{\text{din}}{\text{jedinici}}$. Fiksni troškovi proizvodnje su 50 din, a troškovi proizvodnje po komadu su 2 din. Kako treba firma da posluje, da bi ostvarila maksimalnu dobit?

Formiramo kriterijum optimalnosti, z , na osnovu datih podataka:

$$z(x) = q(100 - 4q) - 50 - 2q = -4q^2 + 100q - 50 - 2q$$

Sledeći korak jeste da izračunamo stacionarnu tačku, na osnovu potrebnih uslova:

$$z'(x) = -8q + 98 = 0 \rightarrow q^* = 12.25$$

Vrednost stacionarne tačke nije celi broj, potrebno je da izračunamo vrednost funkcije i u tači 12 i u tački 13:

$$z(12) = 550$$

$$z(13) = 548$$

Pošto je vrednost funkcije za $q^* = 12$ veća u odnosu na $q^* = 13$, naša stacionarna tačka je u ovom slučaju $q^* = 12$.

$$z''(x) = -8$$

Računanjem drugog izvoda funkcije, koji je manji od nule, možemo da zaključimo da će fabrika imati maksimalnu dobit ukoliko proizvede 12 jedinica.