1.2 Izbori elemenata

Napomena: Ovo je radna verzija materijala sa predavanja, koja će tokom semestra biti proširena i revidirana.

1.2.1 Uređeni izbori elemenata sa ponavljanjem

Neka je dat skup $B = \{a_1, \ldots, a_n\}$ sa $n \geq 1$ elemenata.

Definicija 18 *Varijacija sa ponavljanjem klase m od n elemenata skupa B je bilo koja m-torka elemenata skupa B, tj. reč dužine m nad azbukom B.*

Broj m-varijacija sa ponavljanjem skupa od n elemenata ćemo označavati sa

$$\overline{V}(n, m).$$

Jasno je da je broj načina da se formiraju m-torke elemenata skupa B jednak broju načina da se elementima skupa $\{1, \ldots, m\}$ (komponentama) dodele elementi skupa B, a taj broj je jednak broju funkcija proizvoljnog skupa $\{a_1, \ldots, a_m\}$ u skup B.

Teorema 19 *Neka su A i B skupovi sa osobinom $|A| = m \geq 1$ i $|B| = n \geq 1$. Broj svih preslikavanja $f : A \to B$ jednak je n^m.*

Dokaz.

1. način (princip proizvoda)

   Neka je $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$. Proizvoljnu funkciju skupa A u skup B možemo predstaviti kao m-torku elemenata iz B :

   $$(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_m)) \in B \times \ldots \times B.$$

   Broj takvih m-torki elemenata iz B je na osnovu principa proizvoda:

   $$|B \times \ldots \times B| = |B|^m = n^m.$$

2. način (indukcijom po m)

   m=1: Kako (jedinom) argumentu a treba da odgovara tačno jedna slika, a na raspolaganju imamo n slika, zaključujemo da ima n različitih preslikavanje skupa $A = \{a\}$ u skup B. Kako je $n^1 = n$, za svako $n \geq 1$, tvrdjenje je zadovoljeno.

   $T_m \to T_{m+1}$: Pod pretpostavkom da tvrđenje važi za $|A| = m$, treba pokazati da tvrđenje važi za $|A| = m + 1$. Izdvojimo proizvoljno jedan element $a \in A$. Broj mogućih slika elementa a jednak je n. Na funkciju $g : A \setminus \{a\} \to B$ možemo primeniti induktivnu pretpostavku, tj. zaključujemo da je broj takvih funkcija jednak n^m. Broj funkcija $f : A \to B$ jednak je proizvodu broja funkcija $\{a\} \to B$ i broja funkcija $A \setminus \{a\} \to B$, a to je $n \cdot n^m = n^{m+1}$.

□

Posledica 20 *Broj m-permutacija sa ponavljanjem skupa od n elemenata jednak je* n^m *:*

$$\overline{V}(n, m) = n^m.$$

Teorema 21 *Dat skup A sa osobinom* $|A| = n \geq 1$. *Broj podskupova skupa A jednak je* 2^n.

Dokaz.

1. (pomoću binomnog obrasca) Neka je A_i skup svih podskupova kardinalnosti $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tada je ukupan broj podskupova skupa A jednak

$$\begin{aligned} 1 + |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| &= 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} \\ &= (1+1)^n = 2^n \end{aligned}$$

2. (indukcijom po n)
$\underline{n = 1 :}$ Ako je A jednočlani skup, jedini podskupovi tog skupa su $\emptyset$ i A,što znači da ih ima 2^1.
$\underline{T_n \to T_{n+1} :}$ Pod pretpostavkom da skup od n elemenata ima 2^n podskupova, treba dokazati da skup od $n + 1$ elemenata ima 2^{n+1} podskupova. Fiksirajmo jedan element a skupa A. Podskupove skupa A možemo podeliti na sva disjunktna skupa:

   - B_1 - skup podskupova koji sadrže a: broj podskupova koji ne sadrže a jednak je broju podskupova skupa $A \setminus \{a\}$, a to je po indukcijskoj pretpostavci 2^n.
   - B_2 - skup podskupova koji ne sadrže a: svaki podskup koji sadrži a možemo dobiti dodavanjem elementa a nekom podskupu skupa $A \setminus \{a\}$. Tako je broj podskupova koji sadrže a jednak broju podskupova skupa $A \setminus \{a\}$, a to je prema induktivnoj pretpostavci 2^n.

Znači, na osnovu principa zbira, ukupan broj podksupova skupa od $n+1$ elemenata jednak je $|B_1 \cup B_2| = |B_1| + |B_2| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

3. Posmatraćemo preslikavanje

$$\varphi : \mathcal{P}(A) \to \{f : A \to \{0,1\}\} : X \mapsto f_X,$$

gde je f_X karakteristična funkcija skupa X definisana na sledeći način:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & , x \in X \\ 0 & , x \notin X \end{cases} .$$

Preslikavanje φ je bijekcija. Prema principu bijekcije, zaključujemo da je broj podskupova skupa A jednak broju preslikavanja skupa od n elemenata u dvočlani skup. Prema Tvrđenju 19, taj broj je jednak 2^n.

□

Naredni primer ilustruje konstrukciju karakteristične funkcije iz prethodng dokaza.

Primer 1 *Neka je $A = \{1,2,3\}$. Skup svih podskupova skupa A je*

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Karaktiristične funkcije koje odgovaraju podskupovima skupa A su sledeće:

$$f_\emptyset = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f_{\{1\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f_{\{2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f_{\{3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad f_{\{1,2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad f_{\{1,3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f_{\{2,3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad f_{\{1,2,3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2.2 Uređeni izbori elemenata skupa bez ponavljanja

Neka je dat skup $B = \{a_1, \ldots, a_n\}$ sa $n \geq 1$ elemenata i neka je $n \geq m \geq 1$.

Definicija 22 *Varijacija bez ponavljanja klase m (m-varijacija ili m-permutacija) od n elemenata skupa B je bilo koja m-torka elemenata skupa B u kojoj su svaka dva elementa međusobno različita.*

Broj m-permutacija skupa od n elemenata (varijacija sa ponavljanjem skupa od n elemenata klase m) ćemo označavati sa

$$V(n,m).$$

Broj m torki elemenata skupa B u kojima su svake dve komponente različite jednak je broju načina da elementima skupa $\{1, \ldots, m\}$ (oznakama komponenti) dodelimo elemente skupa A tako da su različitim komponentama dodeljeni različiti elementi. Jasno je da je taj broj jednak broju injektivnih preslikavanja skupa $\{1, \ldots, m\}$ u skup B.

Teorema 23 *Neka su A i B skupovi sa osobinom $|A| = m$, $|B| = n$ i $n \geq m \geq 1$. Broj $1-1$ preslikavanja $f : A \to B$ jednak je*

$$n(n-1)\ldots(n-m+1).$$

Dokaz. (indukcijom po m)
m=1: Kako (jedinom) argumentu a treba da odgovara tačno jedna slika, a na raspolaganju imamo n slika, zaključujemo da ima n različitih preslikavanje skupa $A = \{a\}$ u skup B, tvrđenje je zadovoljeno.
$\underline{T_m \to T_{m+1}:}$ Pod pretpostavkom da tvrđenje važi za $|A| = m$, treba pokazati da tvrđenje važi za $|A| = m + 1$. Izdvojimo proizvoljno jedan element $a \in A$. Broj mogućih slika elementa a jednak je n. Na funkciju $g : A \setminus \{a\} \to B \setminus \{f(a)\}$ možemo primeniti induktivnu pretpostavku, tj. zaključujemo da je broj takvih funkcija jednak $(n-1)\ldots((n-1)-m+1)$. Broj funkcija $f : A \to B$ jednak je proizvodu broja funkcija $\{a\} \to B$ i broja funkcija $A \setminus \{a\} \to B \setminus \{f(a)\}$, tj. $n(n-1)\ldots(n-m) = n(n-1)\ldots(n-(m+1)+1)$, što je i trebalo dokazati. □

Posledica 24 *Broj m-permutacija od n elemenata jednak je*

$$V(n, m) = n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

1.2.3 Broj permutacija skupa

U algebri se permutacija definiše kao bijektivno preslikavanje skupa u samog sebe.

Definicija 25 *Bijektivno preslikavanje konačnog skupa A u samog sebe je permutacija skupa A.*

Broj permutacija konačnog skupa A, $|A| = n$, jednak je broju načina da se elementi skupa A urede u niz, tj. jednak je broju varijacija bez ponavljanja klase n skupa od n elemenata.

Posledica 26 *Broj permutacija skupa A jednak je*

$$P(n) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

1.2.4 Broj permutacija multiskupa

Neka je dat multiskup

$$M = [a_1, \ldots, a_l]_{m_1, \ldots, m_l} = \{\{\underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{m_1}, \ldots, \underbrace{a_l, \ldots, a_l}_{m_l}\}\}.$$

i neka je $n = m_1 + \ldots + m_l$ broj elemenata datog multiskupa.

Definicija 27 *Permutacija multiskupa M je proizvoljna n-torka u kojoj se a_1 pojavljuje m_1 puta, a_2 se pojavljuje m_2 puta, ..., a_l se pojavljuje m_l puta.*

Teorema 28 *Broj permutacija multiskupa M jednak je*

$$P(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \frac{(m_1 + \ldots + m_l)!}{m_1! \cdot \ldots \cdot m_l!}$$

Dokaz. Ako bi svi elementi skupa M bili različiti, broj bijektivnoh preslikavanja tog skupa na samog sebe bio bi jednak $(m_1 + \ldots + m_l)!$ Međutim, zbog ponavljanja određenih elemenata, imamo $m_1! \cdot \ldots \cdot m_l!$ istih preslikavanja. □

Zadatak 29 *Koliko različitih reči dužine 15 se može napisati od slova reči ANAVOLIMILOVANA?*

Rešenje. Posmatrani multiskup slova je $M = [A, V, I, L, M, N, O]_{4,2,2,2,1,2,2}$. Broj reči dužine 15 nad M jednak je

$$P(4, 2, 2, 2, 2, 2, 1) = \frac{15!}{4!2!2!2!2!2!}.$$

□

1.2.5 Neuređeni izbori elemenata bez ponavljanja

Neka je dat skup B sa n elemenata i neka je $n \geq m \geq 1$.

Definicija 30 *Kombinacija bez ponavljanja klase m (ili m-kombinacija) na skupu A je bilo koji podskup od m elemenata skupa A.*

Broj kombinacija klase m skupa od n elemenata ćemo označavati sa

$$C(n, m).$$

Neka je skup svih podskupova skupa M koji imaju m elemenata označen sa $\binom{B}{m}$.

Teorema 31 *Broj m-kombinacija bez ponavljanja na skupu B jednak je*

$$\left|\binom{B}{m}\right| = m! \cdot \left|\binom{B}{m}\right|.$$

Dokaz. Neka je $n = |B| \geq 1$. Ako izaberemo proizvoljan podskup od m elemenata skupa B, broj načina da uredimo taj podskup jednak je $m!$. Odatle je broj m-permutacija jednak broju m-kombinacija pomnoženih sa $m!$. Znači,

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = m! \cdot \left|\binom{B}{m}\right|$$

odakle je

$$\left|\binom{B}{m}\right| = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!}.$$

□

1.2.6 Neuređeni izbori elemenata sa ponavljanjem

Neka je dat proizvoljan broj elemenata skupa $B = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Definicija 32 *Kombinacija sa ponavljanjem multiskupa M (ili m-kombinacija sa ponavljanjem skupa B) je m-točlani multiskup u kojem je sveki element iz B (i moˇze se pojavljivati više puta).*

Broj m-kombinacija sa ponavljanje skupa od n elemenata ćemo označavati sa

$$\overline{C}(n,m).$$

Teorema 33 *Broj m-kombinacija sa ponavljanjem skupa od n elemenata jednak je*

$$\overline{C}(n,m) = \binom{m+n-1}{m} = \binom{m+n-1}{n-1}.$$

Dokaz. Neuređeni izbor od m elemenata skupa B koji se mogu ponavljati možemo predstaviti pomoću m markera koji su razdeljeni sa $n-1$ pregrada. Broj markera do prve pregrade jednak je broju izabranih elemenata a_1, broj markera između prve i druge pregrade je broj izabranih elemenata a_2,... Broj načina da se rasporedi m markera i $n-1$ pregrada jednak je broju permutacija multiskupa koji sadrži m elemenata i $n-1$ pregrada:

$$\overline{C}(n,m)\frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!}$$

Interpretacia preko kombinacija:

Broj načina da od $m+n-1$ mesta izaberemo m za markere jednak je

$$\binom{m+n-1}{m} = \frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!}$$

odnosno broj načina da od $m+n-1$ mesta izaberema $n-1$ za pregrade jednak je

$$\binom{m+n-1}{n-1} = \frac{(m+n-1)!}{(n-1)!\,m!}.$$

□

Zadatak 34 *Koliko se izbora od 8 elemenata može napisati od slova azbuke $A = \{a,b,c,d,e\}$, ako se elementi mogu ponavljati?*

Rešenje. Umesto pregrada i markera u ovom primeru ćemo koristiti elemente skupa $\{0,1\}$. Npr. neuređeni izbor $\{\{a,a,a,b,b,c,d,e\}\}$ možemo predstaviti na sledeći način:

$$\underbrace{000}_{a}1\underbrace{00}_{b}1\underbrace{0}_{c}1\underbrace{0}_{d}1\underbrace{0}_{e}.$$

Broj neuređenih izbora od 8 elenata smo na broj načina da od $8+5-1$ mesta za nule i jedinice, izaberemo 8 za nule ili 4 za jedinice. Znači, traženi broj je

$$\binom{8+5-1}{8} = \binom{8+5-1}{5-1} = \binom{12}{4} = 495.$$

□

1.2.7 Broj celobrojnih rešenja linearne jednačine

Zadatak 35 *Neka su $n \geq 0$ i $m \geq 1$ prirodni brojevi. Koliko rešenja ima jednačina*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$$

ako je $x_1, \geq 0, \ldots, x_m \geq 0$?

Rešenje. Posmatraćemo skup svih reči dužine $n+m-1$ nad azbukom $\{0,1\}$ koje sadrže $m-1$ nula i n jedinica . Sada ćemo napraviti bijektivno preslikavanje koje svakoj takvoj reči pridružuje tačno jedno rešenje $(x_1, \ldots, x_m)$ jednačine:

$$\underbrace{11\ldots1}_{x_1}0\ldots0\underbrace{11\ldots1}_{x_m}.$$

(x_i je broj jedinica između dve nule, odnosno pre prve ili poslednje nule) Na osnovu principa bijekcija, broj rešenja jednačine jednak je broju reči dužine $n+m-1$ u kojima ima $m-1$ nula i n jedinica:

$$\binom{n+m-1}{m-1}.$$

□

Zadatak 36 *Rešiti celobrojnu jednačinu*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$

ako je $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$.

Rešenje. Broj svih rešenja jednak je broju 10- orki od kojih su dve komponente jednake 0, a osam komponenti je jednako 1. Taj broj je jednak broju načina da od 10 elemenata izaberemo 2, što je $\binom{10}{2} = 45$.

NA primer:

- rešenju $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 8)$ odgovara torka 0011111111.

- rešenju $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 7)$ odgovara torka 0101111111.
- rešenju $(x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 4)$ odgovara torka 1011101111.

(Napomena: Rešenje se može dobiti i konstruktivno, nabrajanjem svih 45 uređenih trojki.) $\square$