Електроенергетски софтверски инжењеринг 2. јул 2016.

Дискретна математика

Колоквијум I

1. У правоугаоник димензија 20 *cm* и 15 *cm* је распоређено 26 тачака. Доказати да постоје две тачке које нису на растојању већем од 5 *cm*.

Решење: Поделимо правоугаоник на 25 малих правоугаоника 4×3. Како треба да распоредимо 26 тачака на основу Дирихлеовог принципа знамо да се бар 2 тачке морају наћи у истом правоугаонику. Сада су те две тачке на растојању ≤ 5.

2. Колико има шестоцифрених бројева код којих су све цифре различите, при чему су друга и четврта непарне?

Решење: Распоредимо прво цифре на другу и четврту позицију. За другу цифру имамо 5, а за четврту 4 могућности. Сада за прву цифру можемо бирати било коју од преосталих цифара осим нуле па имамо 7 начина за избор прве цифре. За трећу, пету и шесту цифру немамо додатних услова и њих можемо изабрати на 7,6 и 5 начина, респективно. Дакле решење је $7 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5$.

3. Колико решења има једначина $x + y + z = 15$ у скупу
   а) ненегативних целих бројева;
   б) позитивних целих бројева?

Решење:
   а) Број решења је $\binom{15+3-1}{2} = \binom{17}{2}$.
   б) Увођењем смене

$$\begin{aligned} a &= x - 1 \geq 0 \\ b &= y - 1 \geq 0 \\ c &= z - 1 \geq 0, \end{aligned}$$

проблем сводимо на решавање једначине $a + b + c = 12$ у скупу ненегативних целих бројева, која има $\binom{12+3-1}{2} = \binom{14}{2}$ решења.

4. Ако се зна да су сви чланови низа a_n различити решити рекурентну релацију

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^3}{a_n^2}, a_0 = 1, a_1 = 2.$$

Решење: Логаритмовањем једначине са основом 2 добијамо

$$\log_2 a_{n+2} = 3 \log_2 a_{n+1} - 2 \log_2 a_n.$$

Када уведемо смену $b_n = \log_2 a_n$, добијамо следећу рекурентну релацију

$$b_{n+2} - 3b_{n+1} + 2b_n = 0,$$

уз почетне услове $b_0 = \log_2 1 = 0$ и $b_1 = \log_2 2 = 1$. Нуле карактеристичне једначине $t^2 - 3t + 2 = 0$ су $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$, па рекурентна релација има облик $b_n = A + B2^n$. Сада из почетних услова добијамо систем једначина

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ A + 2B &= 1, \end{aligned}$$

одакле је $A = -1$ и $B = 1$. Сада је $b_n = -1 + 2^n$. Враћањем смене добијамо решење $a_n = 2^{2^n - 1}$.