

## MATEMATIČKA ANALIZA 1

### Granične vrednosti nizova i funkcija

1. Odrediti sledeće granične vrednosti:

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^3 + 2n^2 + 1}{2n^3 + n^2 + 2n + 1} \right)^{3n}$  ;
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3 + 3n^2 + 1}{n^3 + n + 2} \right)^{\frac{n^2}{n+1}}$  ;
- (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2}{2n+1} - \frac{(2n-1)(3n^2+n+2)}{4n^2} \right)$  ;
- (d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[4]{n^4+1} - \sqrt[5]{n^4+1}}$
- (e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln(n+1) - \ln n)$  ;
- (f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x)$  ;
- (g)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(3x^3+2x+1) - \ln(2x^2+3x+1)}{x-1}$  ;
- (h)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{x^3-1}$  ;
- (i)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 4x + 12}{3x^5 - 8x^4 + x^2 + 12x + 4}$  ;
- (j)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot^2 x}$  ;
- (k)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\cot x}$  .

2. Dati su nizovi  $\{a_n\}$  i  $\{b_n\}$  sa opštim članovima  $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{27n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{27n^3+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{27n^3+2n}}$ ,  $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+3n}}$ . Proveriti da li nizovi  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  i  $\{\frac{a_n}{b_n}\}$  imaju graničnu vrednost. Da li su nizovi Košijevi u prostoru  $\mathbf{R}$ ?  
 Odrediti tačke nagomilavanja datih nizova.

### Neprekidnost funkcije

3. Odrediti konstante  $A$  i  $B$  tako da funkcija  $f$  bude neprekidna u svim tačkama definisanosti, ako je:

(a)

$$f(x) = \begin{cases} Ax + e^{\frac{1}{x-1}}, & x < 1 \\ A, & x = 1 \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}, & x > 1 \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} (\sin x)^{\tan^2 x}, & x < \frac{\pi}{2} \\ A, & x = \frac{\pi}{2} \\ Ae + \frac{B}{x}, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ A \sin x + B, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

4. Ispitati da li su sledeće funkcije neprekidne. Ukoliko funkcije imaju prekid odrediti vrstu prekida.

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 1 \\ 3x-1, & x > 1 \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 3 \\ (x-2)^{\frac{1}{(x-3)^2}}, & x > 3 \end{cases}$$

### Diferencijalni račun

5. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija:

(a)  $y = (\cos^4 x) \sin(x^2 + 3)$ ;

(b)  $y = \arctan \frac{x+1}{x-1}$ ;

(c)  $y = \sin \left( \ln \frac{x}{x^2+1} \right)$ ;

(d)  $y = (x^x)^x$ ;

(e)  $y = (\tan x)^{\cot(\frac{x}{2})}$ ;

(f)  $y = x^{\ln x}$ .

6. Odrediti drugi izvod sledećih funkcija, koristeći izvod inverzne funkcije:

(a)  $y = \arccos x \quad (-1 < x < 1)$ ;

(b)  $y = \log x \quad (x > 0)$ .

7. Odrediti drugi izvod parametarski zadatih funkcija:

(a)  $x = \sin t, y = \cos t$ ;

(b)  $x = \ln t, y = t + \frac{1}{t}$ ;

(c)  $x = e^{-t}, y = e^{2t}$ ;

(d)  $x = \frac{1}{1+t^2}, y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2$ .

8. Odrediti drugi izvod implicitno zadatih funkcija:

(a)  $x^2 + y^2 = a^2$ ;

(b)  $e^{y^2} = \arccos(x+y)$ ;

(c)  $\ln \frac{x}{y} + \frac{x}{y} = c$ .

9. Dokazati da:

(a) funkcija  $y = (x + \sqrt{x^2 + 1})^n$  zadovoljava jednačinu  $(1+x^2)y'' + xy' - n^2y = 0$ ;

(b) funkcija  $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$  zadovoljava jednačinu  $xy'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{4}y = 0$ ;

(c) funkcija  $y = e^{4x} + 2e^{-x}$  zadovoljava jednačinu  $y''' - 13y' - 12y = 0$ .

10. Izračunati graničnu vrednost:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(x+1)}$ ;

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin(ax))}{\ln(\sin(bx))}, (a, b > 0)$ ;

(c)  $\lim_{x \rightarrow \inf} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$ ;

(d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\pi}{2} - \arctg x \right)^{\frac{1}{\ln x}}$ .

11. Detaljno ispitati sledeće funkcije i nacrtati njihove grafike:

(a)  $y = \frac{x^2 - 1}{(x+2)^2}$ ;

(b)  $y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 4}}$ ;

(c)  $y = \frac{1 - \ln x^2}{1 + \ln x^2}$ ;

(d)  $y = \ln \frac{2x}{x^2 + 1};$

(e)  $y = e^{\frac{2x+1}{x-1}};$

(f)  $y = x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2};$

(g)  $y = \sqrt{\frac{x^3}{x+2}};$

(h)  $y = \arctg\left(1 + \frac{1}{x}\right).$

**Funkcije više promenljivih**

12. Za funkciju  $z(x, y) = x^3 + 5xy + y^3 - 7$  izračunati parcijalne izvode prvog, drugog, trećeg reda, kao i totalni diferencijal prvog i drugog reda.

13. Za funkciju  $z(x, y) = x \ln(xy)$  odrediti:

(a)  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};$

(b)  $\frac{\partial^3 z}{\partial^2 x \partial y}.$

14. Naći ekstremne vrednosti funkcije:

(a)  $z = x^3 + y^3 - 3xy;$

(b)  $z = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + y^3.$

15. Naći ekstremne vrednosti funkcije:

(a)  $z = x^2 + y^2$  pod uslovom da je  $2x + y = 2;$

(b)  $z = 3 \ln \frac{x}{6} + 2 \ln y + \ln 12 - x - y$  pod uslovom da je  $x + y = 10;$

(c)  $z = e^{xy}$  pod uslovom da je  $x + y - 10 = 0.$

**Katedra za matematiku**