

Dužina luka krive

- *Pravougli koordinatni sistem*

Pretpostavimo da je u ravni definisana kriva AB sa $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, gde funkcija $f(x)$ ima neprekidan prvi izvod $f'(x)$ nad zatvorenim intervalom $[a, b]$.

Dužina luka krive $y = f(x)$ nad zatvorenim intervalom $[a, b]$ je $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

10. Naći dužinu luka krive $y^2 - 2 \ln y - 4x = 0$ od $x = \frac{1}{4}$ do $x = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{2}$.

$$x = \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} \ln y \Rightarrow x' = \frac{1}{2} y - \frac{1}{2y}$$

$$x = \frac{1}{4} \Rightarrow y^2 - 2 \ln y = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$x = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{2} \Rightarrow y^2 - 2 \ln y = e^2 - 2 \Rightarrow y = e$$

$$y' = \frac{1}{x'} \Rightarrow dx = x' dy, \quad \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + \frac{1}{(x')^2}} x' dy = \sqrt{1 + (x')^2} dy$$

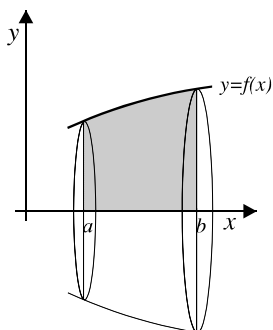
$$\begin{aligned} l &= \int_1^e \sqrt{1 + (x')^2} dy = \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{y^2 - 1}{2y}\right)^2} dy = \int_1^e \sqrt{\frac{4y^2 + y^4 - 2y^2 + 1}{4y^2}} dy = \int_1^e \sqrt{\frac{(y^2 + 1)^2}{(2y)^2}} dy = \\ &= \int_1^e \frac{y^2 + 1}{2y} dy = \frac{1}{2} \int_1^e y dy + \frac{1}{2} \int_1^e \frac{dy}{y} = \frac{1}{4} y^2 \Big|_1^e + \frac{1}{2} \ln y \Big|_1^e = \frac{1}{4} (e^2 - 1) + \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{e^2 + 1}{4} \end{aligned}$$

- *Polarni koordinatni sistem*

Ako je $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, jednačina krive AB u polarnom koordinatnom sistemu, gde funkcija $\rho = \rho(\varphi)$ ima neprekidan prvi izvod nad intervalom $[\alpha, \beta]$ tada je $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi$.

Zapremina obrtnih tela

- Pravougli koordinatni sistem

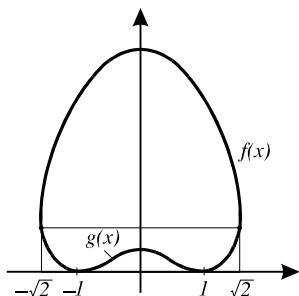


Neka je funkcija $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna nad intervalom $[a, b]$. Ako se krivolinijski trapez, čije stranice su interval $[a, b]$, delovi pravih $x = a$ i $x = b$ i kriva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ obrće oko x -ose, dobija se obrtno telo.

Zapremina tela dobijenog obrtanjem krive $y = f(x)$ oko x -ose nad zatvorenim intervalom

$$[a, b] \text{ je } V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

11. Naći zapreminu tela koje nastaje obrtanjem oko x -ose površi između krivih $f(x) = 3 - x^2 + 2\sqrt{2 - x^2}$ i $g(x) = 3 - x^2 - 2\sqrt{2 - x^2}$.



$$D: 2 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow 3 - x^2 = 2\sqrt{2 - x^2} \quad / \quad ^2$$

$$9 - 6x^2 + x^4 = 8 - 4x^2$$

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$

$$(x^2 - 1)^2 = 0$$

$$x = \pm 1$$

$$f(0) = 3 + 2\sqrt{2}, \quad g(0) = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$V_1 = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f^2(x) dx, \quad V_2 = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} g^2(x) dx$$

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [f^2(x) - g^2(x)] dx = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [f(x) - g(x)][f(x) + g(x)] dx =$$

$$= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 4\sqrt{2 - x^2} (6 - 2x^2) dx = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} 8\sqrt{2 - x^2} (3 - x^2) \cdot \frac{\sqrt{2 - x^2}}{\sqrt{2 - x^2}} dx =$$

$$= 16\pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{(2 - x^2)(3 - x^2)}{\sqrt{2 - x^2}} dx = 16\pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4 - 5x^2 + 6}{\sqrt{2 - x^2}} dx$$

$$\int \frac{x^4 - 5x^2 + 6}{\sqrt{2 - x^2}} dx = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sqrt{2 - x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}} \quad / \quad '$$

$$\frac{x^4 - 5x^2 + 6}{\sqrt{2-x^2}} = (3Ax^2 + 2Bx + C)\sqrt{2-x^2} + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{2-x^2}}$$

$$x^4 - 5x^2 + 6 = (3Ax^2 + 2Bx + C)(2-x^2) - x(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) + \lambda$$

$$x^4 - 5x^2 + 6 = -4Ax^4 - 3Bx^3 + (6A - 2C)x^2 + (4B - D)x + 2C + \lambda$$

$$-4A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{4}$$

$$-3B = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$6A - 2C = -5 \Rightarrow C = \frac{7}{4}$$

$$4B - D = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$2C + \lambda = 6 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{2}$$

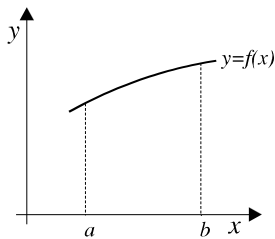
$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4 - 5x^2 + 6}{\sqrt{2-x^2}} dx = \left(-\frac{1}{4}x^3 + \frac{7}{4}x\right)\sqrt{2-x^2} \Big|_0^{\sqrt{2}} + \frac{5}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{5}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{5}{2} \arcsin 1 - \frac{5}{2} \arcsin 0 = \frac{5\pi}{4}$$

$$V = 16\pi \cdot \frac{5\pi}{4} = 20\pi^2$$

Površina omotača obrtnih tela

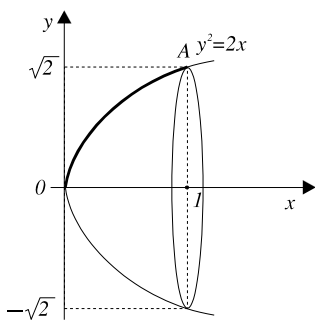
- Pravougli koordinatni sistem



Definišimo površinu omotača obrtnog tela, koje se dobija obrtanjem krivolinijskog trapeza, čije stranice su interval $[a, b]$, delovi pravih $x=a$ i $x=b$ i kriva $y=f(x)$, $a \leq x \leq b$, oko x -ose. Funkcija $f(x)$ je nenegativna i ima neprekidan prvi izvod nad zatvorenim intervalom $[a, b]$.

Površina M omotača obrtnog tela je $P = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx$.

12. Izračunati površinu omotača paraboličnog ogledala dubine 1 m, prečnika $D = 2\sqrt{2}$ m.



$$A(1, \sqrt{2})$$

$$y^2 = ax$$

$$(\sqrt{2})^2 = a \Rightarrow a = 2 \Rightarrow y^2 = 2x$$

$$y = \pm \sqrt{2x}$$

$$y' = \frac{2}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{2x}} = \frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x}}$$

$$M = 2\pi \int_0^1 \sqrt{2x} \cdot \frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x}} dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx = \left(\begin{array}{l} 2x+1=t \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right) = \pi \int_1^3 \sqrt{t} dt = \frac{2\pi}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^3 = \frac{2\pi}{3} (\sqrt{27} - 1) m^2$$

13. Naći $I = \int \frac{dx}{\cos x + 2}$ nad intervalom $(0, \frac{3\pi}{2})$.

Uvedimo smenu $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Za $x \in (0, \pi)$ je

$$I_1 = \int \frac{dx}{\cos x + 2} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 2} = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + c_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + c_1.$$

Slično za $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ je $I_2 = \int \frac{dx}{\cos x + 2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + c_2.$

Kako je funkcija $f(x) = \frac{1}{\cos x + 2}$ neprekidna za svako x to za nju postoji neodređeni integral nad zadatim intervalom.

Dakle, $\lim_{x \rightarrow \pi^-} I = \lim_{x \rightarrow \pi^-} I_1 = \lim_{x \rightarrow \pi^+} I_2.$

Kako je

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} I_1 = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + c_1 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} I_2 = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + c_2 = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_2,$$

sledi da je $\frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_1 = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_2$, odnosno da je $c_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + c_1$.

Dakle,

$$I = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + c, & x \in (0, \pi) \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}} + c, & x = \pi \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + c, & x \in (\pi, \frac{3\pi}{2}). \end{cases}$$

Određeni integral kao funkcija granice

Neka je funkcija $f(x)$ integrabilna nad zatvorenim intervalom $[A, B]$ i neka je a proizvoljna tačka iz intervala $[A, B]$. Kada x uzima vrednost iz intervala $[A, B]$, onda je

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

funkcija definisana nad intervalom $[A, B]$. Naziva se integral sa promenljivom gornjom granicom ili određeni integral kao funkcija gornje granice.

Slično, možemo posmatrati funkciju

$$I_1(x) = \int_x^a f(t) dt,$$

koja je definisana za svako $x \in [A, B]$. Ona se zove određeni integral sa promenljivom donjom granicom ili određeni integral kao funkcija donje granice.

Ako je $f(x)$ neprekidna funkcija nad zatvorenim intervalom $[A, B]$, tada funkcija $I(x)$ ima izvod nad intervalom $[A, B]$. Pri tom važi

$$I'(x) = f(x), \quad x \in [A, B].$$

Slično je $I_1'(x) = -f(x)$, $x \in [A, B]$.

Teorema o srednjoj vrednosti

Neka $f, g \in R[a, b]$, $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$, i $g(x) \geq 0$ ($g(x) \leq 0$) za $x \in [a, b]$. Tada

postoji $m \leq \eta \leq M$, takvo da je

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \eta \int_a^b g(x) dx.$$

Ako je još $f \in C^0[a, b]$ ($C^0[a, b]$ je skup svih neprekidnih funkcija nad zatvorenim intervalom $[a, b]$), onda postoji $c \in [a, b]$, takvo da je

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx.$$

14. Naći $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x \sqrt{t} \sin t dt$.

Funkcija $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin x$ je neprekidna za svako $x \geq 0$ pa na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti postoji tačka $\xi \in [0, x]$ takva da je

$$\int_0^x \sqrt{t} \sin t dt = (x - 0) \sqrt{\xi} \sin \xi \rightarrow 0 \text{ kada } x \rightarrow 0^+.$$

Primenjujemo Lopitalovo pravilo i dobijamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x \sqrt{t} \sin t dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \sin x}{1} = 0.$$

