2 + T

Zadatak 1 *Odrediti nepoznate koeficijente $a, b, c \in \mathbb{R}$ polinoma*

$$p(x) = x^5 - 5x^4 + ax^3 + 16x^2 + bx + c$$

ako je $x = 2$ njegov trostruki koren.

Rešenje:

Prvi način:

Ako je $x = 2$ trostruki koren polinoma $p(x)$, to znači da je $p(x)$ deljiv polinomom $(x-2)^3$. Pri deljenju polinoma $p(x)$ sa $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ dobijamo

$$
\begin{array}{rrrrrl}
(x^5 - 5x^4 + & ax^3 + & 16x^2 + & bx + & c) & : (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) = x^2 + x + a - 6 \\
-(x^5 - 6x^4 + & 12x^3 - & 8x^2) & & & \\
\hline
x^4 + (a-12)x^3 + & & 24x^2 + & bx + & c & \\
-\ (x^4 - & 6x^3 + & 12x^2 - & 8x) & & \\
\hline
(a-6)x^3 + & & 12x^2 + & (b+8)x + & c & \\
-\ ((a-6)x^3 - & 6(a-6)x^2 + & & 12(a-6)x - & 8(a-6)) & \\
\hline
 & & \multicolumn{3}{r}{(6a-24)x^2 + (-12a+b+80)x + 8a + b - 48} &
\end{array}
$$

Pošto ostatak mora biti jednak 0, to nam daje sistem

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
6a & & & & & = & 24 \\
-12a & + & b & & & = & -80 \\
8a & & & + & c & = & 48
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad (a, b, c) = (4, -32, 16).
$$

Drugi način:

Do nepoznatih koeficijenata polinoma $p(x)$ možemo doći i pomoću Hornerove šeme

x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^0	α	r
1	-5	a	16	b	c		
	1	-3	$a-6$	$2a+4$	$4a+b+8$	2	$8a+2b+c+16$
		1	-1	$a-8$	$4a-12$	2	$12a+b-16$
			1	1	$a-6$	2	$6a-24$

Odavde dobijamo sistem

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
8a & + & 2b & + & c & = & -16 \\
12a & + & b & & & = & 16 \\
6a & & & & & = & 24
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad (a, b, c) = (4, -32, 16).
$$

Treći način:

Iz činjenice da je $x = 2$ trostruki koren polinoma $p(x)$ sledi $p(2) = p'(2) = p''(2) = 0$. Prvi i drugi izvod polinoma $p(x)$ su

$$
\begin{aligned}
p'(x) &= 5x^4 - 20x^3 + 3ax^2 + 32x + b \\
p''(x) &= 20x^3 - 60x^2 + 6ax + 32.
\end{aligned}
$$

Uvrštavanjem $x = 2$ u polinome $p(x), p'(x)$ i $p''(x)$ dobijamo sistem

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
8a & + & 2b & + & c & = & -16 \\
12a & + & b & & & = & 16 \\
12a & & & & & = & 48
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad (a, b, c) = (4, -32, 16).
$$

$\square$

Zadatak 2 *Odrediti koeficijente $a, b, c \in \mathbb{R}$ tako da -2 bude tačno dvostruki koren polinoma $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 4x + c$ nad poljem $\mathbb{R}$.*

Rešenje: Kako bi -2 bio tačno dvostruki koren polinoma $p(x)$ mora da važi $p(-2) = p'(-2) = 0$ i $p''(-2) \neq 0$. Pošto je

$$p'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx - 4 \quad \text{i} \quad p''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b,$$

imamo

$$\begin{aligned} p(-2) &= 16 - 8a + 4b + 8 + c = 0 \\ p'(-2) &= -32 + 12a - 4b - 4 = 0 \\ p''(-2) &= 48 - 12a + 2b \neq 0. \end{aligned}$$

Iz sistema

$$8a - 4b - c = 24 \quad \wedge \quad 12a - 4b = 36$$

dobijamo

$$b = 3a - 9 \quad \wedge \quad c = -4a + 12,$$

dok iz uslova $12a - 2b \neq 48$ sledi da je $a \neq 5$.

Otuda je

$$(a, b, c) \in \Big\{(\alpha, 3\alpha - 9, -4\alpha + 12) \,|\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{5\}\Big\}.$$

$\square$

Primeri sa testa:

- Ako su P i Q polinomi, $P+Q \neq 0$ i $dg(P) = 2$ i $dg(Q) = 2$, tada je $dg(PQ) \in \{\ 4\ \}$ i $dg(P+Q) \in \{0,1,2\}$

- Neka su $P = (a_0, a_1, \ldots, a_4)$ i $Q = (b_0, b_1, \ldots, b_3)$ polinomi. Tada je $dg(P+Q) =$ __4__ i $dg(PQ) =$ __7__

- Ako je $P(x) = ax^3 + bx + c$ polinom nad poljem realnih brojeva i ako je $c \neq 0$, tada za stepen $dg(P)$ polinoma P važi: **1)** $dg(P) = 3$, **2)** $dg(P) \in \{1,3\}$, **3)** $dg(P) \in \{0,3\}$, **4)** $dg(P) \in \{0,1,3\}$, **5)** $dg(P) \in \{0,1,2,3\}$.

- Za polinome $p(x) = (x+1)^3 x^3 (x-2)^6$ i $q(x) = x^5 (x+1)^4 (x-5)^2 (x+2)^3$ nad poljem realnih brojeva izračunati: $NZD(p,q) = (x+1)^3 x^3$

- NZD za polinome $x^2 - x\sqrt{2} + 1$ i $x^2 - i$:
  1) ne postoji **2)** je linearni polinom **3)** je konstantni polinom

- Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ i $w \in \mathbb{C}$ koeficijenti polinoma $P(x) = x^2 + ax + b$ i $Q(x) = x^2 + w$. Ako je broj $2-3i$ zajednički koren polinoma P i Q, tada preostali koreni polinoma P i Q su redom $\alpha_1 =$ __2+3i__ i $\alpha' =$ __-2-3i__, dok je $a =$ __________, $b =$ __________ i $w =$ __________.

- Neka je $\{i, -i\}$ skup nekih korena polinoma $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tada skup svih vrednosti za a, b i c je $a \in \mathbb{R}$ $b \in \{1\}$ $c \in \mathbb{R}$.

- Ako je p polinom stepena 4 nad nekim poljem F i ako ima tačno jedan koren u tom polju, tada je p: **1)** uvek svodljiv **2)** uvek nesvodljiv **3)** nekada svodljiv, a nekada nesvodljiv **4)** ništa od prethodnog **5)** uvek normalizovan

- Polinom stepena 2 nad poljem $\mathbb{R}$ je:
  1) uvek svodljiv **2)** uvek nesvodljiv **3)** ništa od prethodnog.

- Ako je p polinom stepena 3 nad poljem $\mathbb{R}$, tada je p nad poljem $\mathbb{R}$:
  1) uvek svodljiv **2)** uvek nesvodljiv **3)** ništa od prethodnog.

- Ako je p polinom stepena 3 nad poljem $\mathbb{Q}$, tada je p nad poljem $\mathbb{Q}$:
  1) uvek svodljiv **2)** uvek nesvodljiv **3)** ništa od prethodnog.

- Nesvodljiv polinom nad poljem $\mathbb{R}$ može biti stepena 0 1 2 3 4
  Nesvodljiv polinom nad poljem $\mathbb{C}$ može biti stepena 0 1 2 3 4

- Odrediti sve vrednosti parametara $a,b \in \mathbb{Q}$ za koje je polinom $p(x) = ax+b$ nesvodljiv nad poljem $\mathbb{Q}$: $a \neq 0$ $a, b \in \mathbb{R}$

- Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom t^2+t+1 nesvodljiv nad njima.
  $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$ $\mathbb{Z}_5$

- Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom t^4+t^2+1 svodljiv nad njima.
  $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$ $\mathbb{Z}_5$

- Neka je P polinom nad poljem F takav da je $dg(P) \geq 1$. Tada:
  1) ako polinom P ima koren u F, tada je on svodljiv nad F;
  2) ako polinom P ima koren u F, tada je on nesvodljiv nad F;
  3) ako je polinom P svodljiv nad F, tada on ima koren u F;
  4) ako je $dg(P) = 3$, tada je polinom P svodljiv nad F;
  5) ako je $dg(P) > 1$, tada je polinom P svodljiv nad F akko ima koren u F;
  6) ako je $dg(P) > 1$ i polinom P ima koren u F, tada je on svodljiv nad F;
  7) ako je polinom P jednak proizvodu dva polinoma, onda je on svodljiv;
  8) ako je polinom P jednak proizvodu dva polinoma stepena većeg od 0, onda je on svodljiv.

- Ako je $f \in \mathbb{R}[x]$, $f(e^{-i\alpha}) = 0$ i $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, tada je: **1)** $x - e^{-i\alpha} \mid f(x)$ **2)** $x - e^{i\alpha} \mid f(x)$ **3)** $x - e^{i|\alpha|} \mid f(x)$ **4)** $x^2 - 2x\cos\alpha + 1 \mid f(x)$ **5)** $x^2 - x\cos\alpha + 1 \mid f(x)$ **6)** $x^2 + x\cos\alpha + 1 \mid f(x)$ **7)** $x^2 - x\cos\alpha + \alpha^2 \mid f(x)$

- Ako je $f \in \mathbb{R}[x]$, $f(e^{-i\alpha}) = 0$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, tada je: **1)** $x - e^{-i\alpha} \mid f(x)$ **2)** $x - e^{i\alpha} \mid f(x)$ **3)** $x - e^{i|\alpha|} \mid f(x)$ **4)** $x^2 - 2x\cos\alpha + 1 \mid f(x)$ **5)** $x^2 - x\cos\alpha + 1 \mid f(x)$ **6)** $x^2 + x\cos\alpha + 1 \mid f(x)$ **7)** $x^2 - x\cos\alpha + \alpha^2 \mid f(x)$

- Neka je $f \in \mathbb{R}[x]$ i $f(e^{-i\frac{\pi}{6}}) = 0$. Zaokružiti tačno: **1)** $x - e^{-i\frac{\pi}{6}} \mid f(x)$ **2)** $x + e^{i\frac{\pi}{6}} \mid f(x)$ **3)** $x - e^{i\frac{\pi}{6}} \mid f(x)$ **4)** $x^2 - x\sqrt{3} + 1 \mid f(x)$ **5)** $x^2 - 2x\sqrt{3} + 1 \mid f(x)$ **6)** $x^2 + x\sqrt{3} + 1 \mid f(x)$ **7)** $x^2 - x + 1 \mid f(x)$

- Neka je $f \in \mathbb{R}[x]$, $f(a+ib) = 0$, $b \neq 0$. Zaokružiti tačno:
  1) $x - a + ib \mid f(x)$ **2)** $x - a - ib \mid f(x)$ **3)** $x - e^{ia} \mid f(x)$ **4)** $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \mid f(x)$ **5)** $x^2 + 2ax + a^2 + b^2 \mid f(x)$ **6)** $x^2 - ax + a^2 + b^2 \mid f(x)$ **7)** $x - e^{-ia} \mid f(x)$