Integrali sa kvadratnim trinomom

I Integrali oblika $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$ ($a \neq 0$, $b^2-4ac<0$) rešavaju se na sledeći način:

- $m=0$: $ax^2+bx+c = a\,[\,(x+k)^2+l\,]$, k, l = const

$$\int \frac{n}{ax^2+bx+c}dx = \frac{n}{a}\int \frac{dx}{(x+k)^2+l}$$

- $m \neq 0$:

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{\frac{m}{2a}(2ax+b)+n-\frac{mb}{2a}}{ax^2+bx+c}dx$$

9. $$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \begin{pmatrix} x+1=t \\ dx=dt \end{pmatrix} = \int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}+c = \frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}+c$$

10. $$\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)-2+6}{x^2-4x+5}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx + 4\int \frac{dx}{x^2-4x+5} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx + 4\int \frac{dx}{(x-2)^2+1} = \begin{pmatrix} x^2-4x+5=t & x-2=t_1 \\ (2x-4)dx=dt & dx=dt_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t} + 4\int \frac{dt_1}{t_1^2+1} = \frac{3}{2}\ln|\,t\,| + 4arctgt_1 + c = \frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+5\right| + 4arctg(x-2)+c$$

II Integrali oblika $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ ($a \neq 0$, $b^2-4ac<0$) rešavaju se na sličan način kao integrali oblika I.

Primer: $$\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+5x+9}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{\sqrt{97}}{4})^2-(x-\frac{5}{4})^2}}$$

III Integrali oblika $\int \frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ ($m \neq 0$, $a \neq 0$, $b^2-4ac<0$) se pomoću smene $mx+n=\frac{1}{t}$ svode na integrale oblika II.

11. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}} = \left(\begin{array}{c} x+1=\frac{1}{t} \Rightarrow dx=\frac{-1}{t^2}dt \\ x=\frac{1}{t}-1=\frac{1-t}{t} \end{array} \right) = -\int \frac{\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{(1-t)^2}{t^2}+2\frac{1-t}{t}}} =$

$= -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{(1-t)^2+2t-2t^2}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin\frac{1}{x+1}+c$

IV Integrali oblika $\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx$ $(a \neq 0,\ b^2-4ac<0)$ svode se na integrale oblika $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ i $\int \sqrt{x^2+A}\,dx$.

12. $\int \sqrt{x-x^2}dx = \left(x-x^2 = -(x^2-x+\frac{1}{4})+\frac{1}{4} = \frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2 \right) = \int \sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}\ dx =$

$= \left(\begin{array}{c} x-\frac{1}{2}=t \\ dx=dt \end{array} \right) = \int \sqrt{(\frac{1}{2})^2-t^2}dt = \frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{4}-t^2} + \frac{\frac{1}{4}}{2}\arcsin\frac{t}{\frac{1}{2}}+c =$

$= \frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2} + \frac{1}{8}\arcsin(2x-1)+c$

Integrali racionalnih funkcija

Svaku nepravu racionalnu funkciju $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ (stepen polinoma $P(x)$ je veći ili jednak od stepena polinoma $Q(x)$) možemo napisati u obliku $\frac{P(x)}{Q(x)}=T(x)+\frac{R_1(x)}{Q(x)}$, gde je $T(x)$ polinom, a $\frac{R_1(x)}{Q(x)}$ prava racionalna funkcija (stepen polinoma $R_1(x)$ manji od stepena polinoma $Q(x)$.

Neka je $P(x)$ polinom stepena manjeg od n, a $Q(x)$ polinom oblika $Q(x)=c_n(x-a_1)^{k_1}...(x-a_p)^{k_p}(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}...(x^2+b_qx+c_q)^{l_q}$, gde je $k_1+k_2+...+k_p+2(l_1+l_2+...+l_q)=n$, n je stepen polinoma $Q(x)$, a_i, b_j i c_j su realni brojevi za koje važi $b_j^2-4c_j<0$, $i=1,2,...,p$, $j=1,2,...,q$ (svaki polinom $Q(x)$ se može napisati u tom obliku).

Tada se $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ može napisati u obliku

$$R(x)=\left(\frac{A_{11}}{x-a_1}+\ldots+\frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}\right)+\ldots+\left(\frac{A_{p1}}{x-a_p}+\ldots+\frac{A_{pk_p}}{(x-a_p)^{k_p}}\right)+$$

$$+\left(\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+b_1x+c_1}+\ldots+\frac{B_{1l_1}x+C_{1l_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}}\right)+\ldots+\left(\frac{B_{q1}x+C_{q1}}{x^2+b_qx+c_q}+\ldots+\frac{B_{ql_q}x+C_{ql_q}}{(x^2+b_qx+c_q)^{l_q}}\right)$$

Koeficijente A_{ij}, B_{ij} i C_{ij} dobijamo metodom neodređenih (nepoznatih) koeficijenata. Ova metoda se sastoji u sledećem: za datu funkciju $R(x)$ pretpostavi se da važi data jednakost u kojoj su A_{ij}, B_{ij} i C_{ij} neodređeni koeficijenti. Množenjem te jednakosti sa $Q(x)$, dobijaju se na levoj i desnoj strani polinomi. Kako su dva polinoma identički jednaka ako i samo ako su im jednaki koeficijenti uz iste stepene od x, izjednačavanjem ovih koeficijenata dobija se sistem jednačina za određivanje A_{ij}, B_{ij} i C_{ij}.

Razlomci oblika $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ i nazivaju se prosti ili parcijalni razlomci.

Primer 1: $R(x)=\dfrac{2x^3-x^2+x-4}{(x-1)(x-2)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$

Primer 2: $R(x)=\dfrac{2x^4-x^3-11x-2}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}=\dfrac{2(x^4+2x^3+2x^2+2x+1)-5x^3-4x^2-15x-4}{(x+1)^2(x^2+1)}$

$$=2+\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

13. $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{(x^2-3x+2)^2}$

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{(x-2)^2} \qquad (1)$$

$$x^2=A(x-1)(x^2-4x+4)+B(x^2-4x+4)+C(x^2-2x+1)(x-2)+D(x^2-2x+1)$$

$$x^2=Ax^3-4Ax^2+4Ax-Ax^2+4Ax-4A+Bx^2-4Bx+4B+Cx^3-2Cx^2+Cx-$$

$$-2Cx^2+4Cx-2C+Dx^2-2Dx+D$$

$$x^2=(A+C)x^3+(-5A+B-4C+D)x^2+(8A-4B+5C-2D)x+(-4A+4B-2C+D)$$

$$A+C=0$$

$$-5A+B-4C+D=1$$

$$8A-4B+5C-2D=0$$

$$-4A+4B-2C+D=0$$

Pomnožimo jednačinu (1) sa $(x-1)^2$.

$$\frac{x^2}{(x-2)^2} = B + A(x-1) + (\frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2})(x-1)^2$$

Za $x=1$, dobija se $B=1$.

Pomnožimo jednačinu (1) sa $(x-2)^2$.

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} = D + (\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2})(x-2)^2 + C(x-2)$$

Za $x=2$, dobija se $D=4$. Dalje se iz sistema jednačina dobija $A=4$ i $C=-4$.

$$\int \frac{x^2}{(x^3-3x+2)^2}dx = \int (\frac{4}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-4}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2})dx =$$

$$= 4\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} - 4\int \frac{dx}{x-2} + 4\int \frac{dx}{(x-2)^2} = \begin{pmatrix} x-1=t \Rightarrow dx=dt \\ x-2=m \Rightarrow dx=dm \end{pmatrix} =$$

$$= 4\int \frac{dt}{t} + \int t^{-2}dt - 4\int \frac{dm}{m} + 4\int m^{-2}dm = 4\ln|\,t\,| + \frac{t^{-1}}{-1} - 4\ln|\,m\,| + 4\frac{m^{-1}}{-1} + c =$$

$$= 4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| - \frac{1}{x-1} - 4\frac{1}{x-2} + c = \ln(\frac{x-1}{x-2})^4 - \frac{5x-6}{x^2-3x+2} + c$$

Integrali iracionalnih funkcija

I Integral oblika $\int R[x, (\frac{ax+b}{px+q})^{r_1}, ..., (\frac{ax+b}{px+q})^{r_k}]dx$.

Posmatrajmo integral kod koga je podintegralna funkcija racionalna funkcija od x i od različitih stepena izraza $\frac{ax+b}{px+q}$, pri čemu je $aq-bp \neq 0$ (inače se izraz svodi na konstantu). Neka je s najmanji zajednički sadržalac imenilaca eksponenata $r_1, r_2, ..., r_k$. Uvedimo smenu $\sqrt[s]{\frac{ax+b}{px+q}} = t \Rightarrow \frac{ax+b}{px+q} = t^s$. Tada je $(\frac{ax+b}{px+q})^{r_i} = t^{sr_i}$ za svako $i = 1, 2, ..., k$, pri čemu je, s obzirom da se imenilac svakog broja r_i sadrži u s, sr_i ceo broj. Takođe je $x = \frac{qt^s - b}{a - pt^s}$, pa se dati integral svodi na integral racionalne funkcije nove promenljive t.

14. $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt{x+1}} = \begin{pmatrix} \sqrt[6]{x+1} = t \Rightarrow x+1 = t^6 \\ dx = 6t^5dt \end{pmatrix} = \int \frac{6t^5}{t^4-t^3}dt = 6\int \frac{t^2}{t-1}dt = 6\int \frac{t^2-1+1}{t-1}dt =$$

$$= 6\int \frac{(t-1)(t+1)+1}{t-1}dt = 6\int (t+1)dt + 6\int \frac{dt}{t-1} = 6\frac{t^2}{2} + 6t + 6\ln|t-1| + c =$$

$$= 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x+1} - 1\right| + c$$

II Integrali binomnog diferencijala

Integral binomnog diferencijala je integral oblika $\int x^m (a+bx^n)^p\, dx$, gde su m, n i p racionalni brojevi ($n, p \neq 0$), a a i b realni brojevi različiti od nule. Za početak se uvodi pomoćna smena $x^n = t$, odakle je $x = t^{\frac{1}{n}}$, $dx = \frac{1}{n} \cdot t^{\frac{1}{n}-1} dt$, pa se integral svodi na $\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p\, dt = \frac{1}{n}\int t^q (a+bt)^p dt$, gde smo stavili $\frac{m+1}{n} - 1 = q$ (takođe racionalan broj).

Razmatramo tri slučaja:

- $p \in Z$, $q = \frac{r}{s} \in Q$

  Tada je $\int t^{\frac{r}{s}}(a+bt)^p\, dt = \int R(t, t^{\frac{r}{s}})dt$, tj. dobija se integral razmotren ranije, a on se smenom $t = z^s$ svodi na integral racionalne funkcije od z.

- $q \in Z$, $p = \frac{r}{s} \in Q$

  Tada se dobija integral $\int t^q (a+bt)^{\frac{r}{s}}\, dt = \int R(t, (a+bt)^{\frac{r}{s}})dt$, koji se smenom $a + bt = z^s$ svodi na integral racionalne funkcije od z.

- $p + q \in Z$ (neka je $p = \frac{r}{s}$)

  Tada je $\int t^q (a+bt)^p\, dt = \int t^{p+q} (\frac{a+bt}{t})^p\, dt = \int R(t, (\frac{a+bt}{t})^{\frac{r}{s}})dt$, pri čemu se poslednji integral smenom $\frac{a+bt}{t} = z^s$ svodi na integral racionalne funkcije od z.

15. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(4-\sqrt[3]{x})} = \int x^{-\frac{1}{2}}(4-x^{\frac{1}{3}})^{-1}dx = \begin{pmatrix} x^{\frac{1}{3}} = t,\ x = t^3 \\ dx = 3t^2 dt \end{pmatrix} = 3\int t^{-\frac{3}{2}}(4-t)^{-1}t^2 dt =$$

$$= 3\int t^{\frac{1}{2}}(4-t)^{-1}dt = \begin{pmatrix} t = z^2 \\ dt = 2zdz \end{pmatrix} = 6\int z(4-z^2)^{-1}zdz = 6\int \frac{z^2}{4-z^2}dz = -6\int \frac{z^2-4+4}{z^2-4}dz =$$

$$= -6\int dz - 24\int \frac{dz}{z^2-2^2} = -6z - 24\cdot\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{z-2}{z+2}\right| + c = -6t^{\frac{1}{2}} - 6\ln\left|\frac{\sqrt{t}-2}{\sqrt{t}+2}\right| + c =$$

$$=-6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-2}{\sqrt[6]{x}+2}\right|+c$$

16. $$\int\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}dx=\begin{pmatrix}x^{\frac{1}{3}}=t,\ x=t^3\\ dx=3t^2dt\end{pmatrix}=3\int t^{-2}(1+t)^{\frac{1}{2}}t^2dt=3\int(1+t)^{\frac{1}{2}}dt=$$

$$=\begin{pmatrix}1+t=z^2\\ dt=2zdz\end{pmatrix}=6\int z^2dz=6\cdot\frac{z^3}{3}+c=2\cdot(\sqrt{1+t})^3+c=2\cdot(1+\sqrt[3]{x})^{\frac{3}{2}}+c$$

17. $$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}=\int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}dx=\begin{pmatrix}x^2=t,\ x=t^{\frac{1}{2}}\\ dx=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\int t^{-1}(1+t)^{-\frac{3}{2}}\ t^{-\frac{1}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}}(1+t)^{-\frac{3}{2}}dt=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}\cdot\frac{(1+t)^{-\frac{3}{2}}}{t^{-\frac{3}{2}}}dt=\frac{1}{2}\int t^{-3}\cdot(\frac{1+t}{t})^{-\frac{3}{2}}dt=\begin{pmatrix}\frac{1+t}{t}=z^2,\ t=\frac{1}{z^2-1}\\ dt=\frac{-2z}{(z^2-1)^2}dz\end{pmatrix}=$$

$$=-\int\frac{(z^2-1)^3}{z^3}\frac{z}{(z^2-1)^2}dz=-\int\frac{z^2-1}{z^2}dz=-z-\frac{1}{z}+c=-\sqrt{\frac{1+t}{t}}-\sqrt{\frac{t}{1+t}}+c=$$

$$=-\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}-\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}+c$$

18. $$\int\sqrt[3]{3x-x^3}=\int x^{\frac{1}{3}}(3-x^2)^{\frac{1}{3}}dx=\begin{pmatrix}x^2=t,\quad x=t^{\frac{1}{2}}\\ dx=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{6}}(3-t)^{\frac{1}{3}}t^{-\frac{1}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{3}}(3-t)^{\frac{1}{3}}dt=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}\frac{(3-t)^{\frac{1}{3}}}{t^{\frac{1}{3}}}dt=\frac{1}{2}\int(\frac{3-t}{t})^{\frac{1}{3}}dt=\begin{pmatrix}\frac{3-t}{t}=z^3,t=\frac{3}{z^3+1}\\ dt=\frac{-9z^2}{(z^3+1)^2}dz\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{9}{2}\int\frac{z^3}{(z^3+1)^2}dz$$

$$u=z\Rightarrow du=dz\ ,\quad dv=\frac{z^2dz}{(z^3+1)^2}\Rightarrow v=\int dv=\begin{pmatrix}z^3+1=t\\ z^2dz=\frac{dt}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{3t}=-\frac{1}{3(z^3+1)}$$

$$\int \frac{z^3}{(z^3+1)^2}\,dz = -\frac{z}{3(z^3+1)} + \frac{1}{3}\int \frac{dz}{z^3+1}$$

$$\frac{1}{z^3+1} = \frac{1}{(z+1)(z^2-z+1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{Bz+C}{z^2-z+1}$$

$$1 = A(z^2-z+1) + (Bz+C)(z+1) = (A+B)z^2 + (-A+B+C)z + (A+C)$$

$$A+B=0$$

$$-A+B+C=0$$

$$A+C=1$$

Rešavanjem sistema jednačina dobija se $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$ i $C=\frac{2}{3}$.

$$\int \frac{dz}{z^3+1} = \frac{1}{3}\int\frac{dz}{z+1} - \frac{1}{3}\int\frac{z-2}{z^2-z+1}dz = \frac{1}{3}\ln|z+1| - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{2z-1-3}{z^2-z+1}dz =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|z+1| - \frac{1}{6}\ln|z^2-z+1| + \frac{1}{2}\int\frac{dz}{(z-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{1}{3}\ln|z+1| - \frac{1}{6}\ln|z^2-z+1| +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\,arctg\frac{z-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c = \frac{1}{3}\ln|z+1| - \frac{1}{6}\ln|z^2-z+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\,arctg\frac{2z-1}{\sqrt{3}} + c$$

$$\int \sqrt[3]{3x-x^3} = -\frac{9}{2}\left[-\frac{z}{3(z^3+1)} + \frac{1}{3}(\frac{1}{3}\ln|z+1| - \frac{1}{6}\ln|z^2-z+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\,arctg\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right] + c =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{(\frac{3-x^2}{x^2})^{\frac{1}{3}}}{\frac{3-x^2}{x^2}+1} - \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt[3]{\frac{3-x^2}{x^2}}+1\right| + \frac{1}{4}\ln\left|\sqrt[3]{(\frac{3-x^2}{x^2})^2} - \sqrt[3]{\frac{3-x^2}{x^2}}+1\right| - \frac{\sqrt{3}}{2}\,arctg\frac{2\sqrt[3]{\frac{3-x^2}{x^2}}-1}{\sqrt{3}} + c$$

☺