

# MATEMATIČKA ANALIZA 1

## za studente softverskog inženjerstva i informacionih tehnologija

Slavica Medić

23. februar 2021

## Prezentacija iz Matematičke analize 1 za studente softverskog inženjerstva i informacionih tehnologija

Autor: Slavica Medić

Nastavno-naučno veće Fakulteta koje je održano dana 16.7.2015., na osnovu predloga Odluke Saveta za bibliotečku i izdavačku delatnost br. 014-112/29, je odobrilo korišćenje *Prezentacije iz Matematičke analize 1 za studente softverskog inženjerstva i informacionih tehnologija*, kao pomoćno sredstvo u nastavi na predmetu *Matematička analiza 1*, na studijskom programu *Softversko inženjerstvo i informacione tehnologije*.

# Metrika i metrički prostor

## Definicija

**Metrika** ili **rastojanje** na nepraznom skupu  $X$  je svako preslikavanje  $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  za koje važi

$$(M_1) \quad d(x, y) \geq 0,$$

$$(M_2) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$(M_3) \quad d(x, y) = d(y, x),$$

$$(M_4) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ (nejednakost trougla)}$$

**Metrički prostor** je uređen par  $(X, d)$  skupa  $X$  i metrike  $d$  na  $X$ .

Za skup  $X$  kažemo da je **nosač metričkog prostora**  $(X, d)$ .

- Realan broj  $d(x, y)$  je **rastojanje elemenata** (tačaka)  $x, y \in X$ .
- Metrički prostor  $(X, d)$  ćemo nekada kraće označavati istim slovom kao i njegov nosač  $X$ .
- U metričkom prostoru  $(X, d)$  važi tzv. **nejednakost mnogougla**:

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

## Primer

$(\mathbb{R}^n, d)$  je metrički prostor, gde je metrika  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definisana sa

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

za  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ .

- Za metriku  $d$  kažemo da je **euklidska**, a prostor  $(\mathbb{R}^n, d)$ , koji ćemo kraće obeležavati sa  $\mathbb{R}^n$ ,  $n$ -**dimenzionalni euklidski prostor**.
- Metrika  $d$  je uopštenje metrika iz  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  i  $\mathbb{R}^3$ .

## Primer

Ako je  $X \neq \emptyset$  proizvoljan skup, tada je preslikavanje  $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definisano sa

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

metrika.

- Za  $(X, d)$  kažemo da je **diskretan metrički prostor**.

## Potprostor metričkog prostora

Neka je  $(X, d)$  metrički prostor i neka je  $\emptyset \neq Y \subset X$ . Sa  $d_Y$  obeležimo restrikciju preslikavanja  $d$  nad skupom  $Y$ , tj. neka je

$$d_Y(x, y) = d(x, y), \quad x, y \in Y.$$

Očigledno  $d_Y$  je metrika na skupu  $Y$ , tj.  $(Y, d_Y)$  je metrički prostor. Kažemo da je  $(Y, d_Y)$  **potprostor prostora**  $(X, d)$ .

Metriku  $d_Y$  najčešće označavamo takođe sa  $d$ , pa je reč o potprostoru  $(Y, d)$  prostora  $(X, d)$ .

## Ograničenost

### Definicija

Za neprazan skup  $A \subset X$  metričkog prostora  $(X, d)$  kažemo da je **ograničen** ako je skup  $\{d(a, b) : a, b \in A\}$  ograničen u skupu  $\mathbb{R}$ .

*Prazan skup je ograničen skup (po definiciji).*

### Definicija

Ako je  $(X, d)$  metrički prostor i ako je neprazan skup  $A \subset X$  ograničen, tada postoji realan broj  $d(A) = \sup\{d(a, b) : a, b \in A\}$  koji zovemo **dijametar skupa  $A$** .

*Po definiciji uzimamo da je  $d(\emptyset) = 0$ .*



## Definicija

Za preslikavanje  $f : D \rightarrow X$  skupa  $D$  u metrički prostor  $X$  kažemo da je **ograničeno nad skupom**  $A \subset D$  ako je  $f(A) \subset X$  ograničen skup u  $X$ .

Ako je  $A = D$ , tada je preslikavanje  $f$  **ograničeno**.

Ograničeno preslikavanje

$$f : N_1 \rightarrow X,$$

gde je  $N_1$  proizvoljan beskonačan podskup skupa prirodnih brojeva je **ograničen niz**.

## Definicija

Neka je  $(Y, \preceq)$  totalno uređen skup. Za funkciju  $f : X \rightarrow Y$  kažemo da je **ograničena sa gornje (donje) strane** nad nepraznim podskupom  $A$  od  $X$  ako je skup njenih vrednosti  $f(A)$  ograničen sa gornje (donje) strane u odnosu na relaciju  $\preceq$ , tj. ako postoji  $\mu \in \mathbb{R}$  tako da za sve  $x \in X$  važi da je  $f(x) \preceq \mu$  ( $\mu \preceq f(x)$ ).

Reći ćemo da je funkcija  $f$  ograničena sa gornje (donje) strane sa  $\mu$ , a broj  $\mu$  zvaćemo **gornjim (donjim) ograničenjem** ili **gornjom (donjom) granicom funkcije  $f$** .

Funkcija  $f$  je **ograničena** ako je ograničena i sa gornje i sa donje strane.

Potreban i dovoljan uslov da je funkcija  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X \subset \mathbb{R}$  ograničena, je da postoji  $\nu \in \mathbb{R}^+$ , tako da za svako  $x \in X$  važi  $|f(x)| \leq \nu$ .

# Topologija u metričkom prostoru

## Definicija

Neka je  $(X, d)$  metrički prostor,  $a \in X$  i  $r \in \mathbb{R}^+$ . Za skup

$$L(a, r) = \{x \in X : d(a, x) < r\}$$

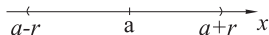
kažemo da je **otvorena lopta** u metričkom prostoru  $(X, d)$  sa centrom u tački  $a$  poluprečnika  $r$ .

- Kako je  $d(a, a) = 0 < r$ , jasno je da otvorena lopta  $L(a, r)$  sadrži svoj centar.
- Ako je  $r_1 \leq r_2$ , očigledno je  $L(a, r_1) \subset L(a, r_2)$ .

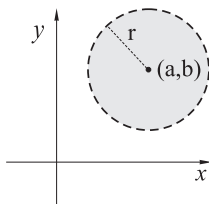
$$a) \quad \mathbb{R} : \quad L(a, r) = (a - r, a + r),$$

$$b) \quad \mathbb{R}^2 : \quad L((a, b), r) = \{(x, y) : \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < r\},$$

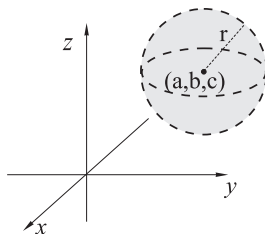
$$c) \quad \mathbb{R}^3 : \quad L((a, b, c), r) = \{(x, y, z) : \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} < r\}.$$



a)



b)



c)

## Tvrđenje

*Ako je  $L(a, r)$  otvorena lopta u metričkom prostoru  $(X, d)$ , tada za svaku tačku  $b \in L(a, r)$ , postoji  $s \in \mathbb{R}^+$  tako da je  $L(b, s) \subset L(a, r)$ .*

*Dokaz.* Kako  $b \in L(a, r)$ , to je  $d(a, b) < r$ , pa možemo uzeti da je

$$s = r - d(a, b) > 0.$$

Odatle sledi da je za svaku tačku  $x \in L(b, s)$

$$d(a, x) \leq d(a, b) + d(b, x) < r,$$

što dokazuje da je

$$L(b, s) \subset L(a, r).$$



## Definicija

Za neprazan skup  $U \subset X$  kažemo da je **otvoren** u metričkom prostoru  $(X, d)$  ako

$$(\forall x \in U)(\exists r \in \mathbb{R}^+) L(x, r) \subset U.$$

Uzimamo da je  $\emptyset$  po definiciji otvoren.

- Otvorena lopta jeste otvoren skup u metričkom prostoru.
- Za neprazan skup  $U \subset X$  koji je otvoren u metričkom prostoru  $(X, d)$  za svaku tačku  $x \in U$ , postoji  $r_x \in \mathbb{R}^+$ , tako da je  $x \in L(x, r_x) \subset U$ , pa je

$$U = \bigcup \{L(x, r_x) : x \in U\},$$

tj. sledi da je svaki neprazan otvoren skup u metričkom prostoru  $(X, d)$  unija neke familije otvorenih lopti iz  $(X, d)$ .

Familiju  $\tau$  svih otvorenih skupova metričkog prostora  $(X, d)$  zovemo topološka struktura ili **topologija metričkog prostora**  $(X, d)$ .

- Jasno je da je  $\emptyset \in \tau$  i da je  $X \in \tau$ .
- Unija svake familije elemenata iz  $\tau$  je ponovo element iz  $\tau$ .
- Presek konačno mnogo elemenata iz  $\tau$  je element iz  $\tau$ .

## Definicija

Za podskup  $A$  metričkog prostora  $X$  kažemo da je **zatvoren** ako je  $C_X(A) = X \setminus A$  otvoren skup.

Očigledno je da su  $\emptyset$  i skup  $X$  i zatvoreni skupovi.

# Pojam okoline tačke

## Definicija

*Neka je  $X$  dati metrički prostor i  $a$  tačka u  $X$ .*

*Za skup  $V \subset X$  kažemo da je **okolina tačke**  $a$  u metričkom prostoru  $X$ , ako postoji  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  tako da  $L(a, \varepsilon) \subset V$ .*

*Ako je  $V$  otvoren skup kažemo da je  $V$  **otvorena okolina tačke**  $a$ .*

*Otvorenu loptu  $L(a, \varepsilon)$  zovemo  $\varepsilon$ —**okolina** tačke  $a$ .*

$\varepsilon$  - pozitivan, proizvoljno mali, unapred dat!



- Okolina tačke  $a$  u prostoru  $X$  je neki podskup od  $X$  koji sadrži ne samo tačku  $a$  već i neku otvorenu loptu sa centrom u tački  $a$ .
- Skup  $X$  okolina svake svoje tačke u prostoru  $X$ .
- *Neprazan skup  $U \subset X$  je otvoren ako i samo ako je  $U$  okolina svake svoje tačke.*
- Za proizvoljnu tačku  $a$  u prostoru  $(X, d)$  familiju svih okolina tačke  $a$  u  $X$  nazivamo **sistem okolina tačke**  $a$  u prostoru  $X$ , u oznaci  $\mathcal{V}(a)$ .

## Tvrđenje

*Ako je  $(X, d)$  metrički prostor, za svake dve različite tačke  $a$  i  $b$ , postoje disjunktne otvorene okoline  $L(a, \varepsilon)$  i  $L(b, \varepsilon)$ , tj. svake dve različite tačke mogu se odvojiti disjunktним otvorenim okolinama.*

*Dokaz.* Kako je  $a \neq b$ , to možemo uzeti da je  $\varepsilon = \frac{1}{2}d(a, b) > 0$ .  
Dokažimo da je  $L(a, \varepsilon) \cap L(b, \varepsilon) = \emptyset$ . Pretpostavimo suprotno, tj.

$$L(a, \varepsilon) \cap L(b, \varepsilon) \neq \emptyset,$$

odnosno da postoji

$$z \in L(a, \varepsilon) \cap L(b, \varepsilon).$$

Tada  $z \in L(a, \varepsilon)$ , tj.  $d(a, z) < \varepsilon$  i  $z \in L(b, \varepsilon)$ , tj.  $d(b, z) < \varepsilon$ ,  
pa je

$$0 < d(a, b) \leq d(a, z) + d(z, b) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = d(a, b),$$

što je kontradikcija, jer je  $d(a, b) > 0$ .



## Napomena

*Ako je  $U$  okolina tačke  $a$ , tada postoji  $n \in \mathbb{N}$  tako da važi  $L(a, \frac{1}{n}) \subset U$ .*

*Zaista, ako je  $U$  okolina tačke  $a$ , tada postoji  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  tako da je*

$$a \in L(a, \varepsilon) \subset U.$$

*No kako postoji  $n \in \mathbb{N}$ , tako da je*

$$\frac{1}{n} < \varepsilon,$$

*to je*

$$L\left(a, \frac{1}{n}\right) \subset L(a, \varepsilon) \subset U.$$

# Klasifikacija tačaka u metričkom prostoru

## Definicija

Neka je  $A$  podskup metričkog prostora  $X$ . Za tačku  $a \in X$  kažemo da je **unutrašnja tačka** skupa  $A$ , ako postoji  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  tako da je  $L(a, \varepsilon) \subset A$ .

Skup  $A^\circ$  svih unutrašnjih tačaka zovemo **unutrašnjost skupa  $A$** .

Važe tvrđenja:

- $\emptyset^\circ = \emptyset$ ,  $X^\circ = X$
- Skup  $A^\circ$  je najveći otvoren skup sadržan u  $A$ .
- Skup  $A$  je otvoren ako i samo ako je  $A^\circ = A$ .

## Definicija

Za tačku  $a \in X$  kažemo da je **spoljašnja tačka** podskupa  $A$  metričkog prostora  $X$  ako postoji okolina tačke  $a$  koja ne sadrži nijednu tačku skupa  $A$ .

Skup svih spoljašnjih tačaka zovemo **spoljašnjost skupa**  $A$ .

Očigledno važi tvrđenje

- Ako je  $a$  spoljašnja tačka skupa  $A$ , tada je  $a$  unutrašnja tačka skupa  $X \setminus A$ . Dakle, spoljašnjost skupa  $A$  je skup  $(X \setminus A)^\circ$ .

## Definicija

Za tačku  $a \in X$  kažemo da je **rubna tačka** skupa  $A \subset X$  ako

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(L(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \wedge L(a, \varepsilon) \cap C_X(A) \neq \emptyset)$$

(svaka  $\varepsilon$ -okolina tačke  $a$  ima neprazan presek i sa skupom  $A$  i sa njegovim komplementom).

Skup  $A^*$  svih rubnih tačaka skupa  $A$  nazivamo **rubom** skupa  $A$ .

Važe tvrđenja:

- $A^* = (X \setminus A)^*$
- $X = A^\circ \cup (X \setminus A)^\circ \cup A^*$

## Definicija

Tačka  $a \in X$  je **adherentna tačka** skupa  $A \subset X$  ako svaka  $\varepsilon$ –okolina tačke  $a$  ima neprazan presek sa skupom  $A$ , tj.

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) L(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Skup  $\overline{A}$  svih adherentnih tačaka zovemo **adherencija** ili **zatvorenje skupa**  $A$ .

Važe tvrđenja:

- $\overline{\emptyset} = \emptyset, \overline{X} = X$
- Skup  $\overline{A}$  je najmanji zatvoren skup koji sadrži skup  $A$ .
- Skup  $A$  je zatvoren ako i samo ako je  $A = \overline{A}$ .
- $A^* = \overline{A} \cap (\overline{X \setminus A})$ .

## Definicija

Za tačku  $a \in X$  kažemo da je **tačka nagomilavanja** skupa  $A \subset X$  ako

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) L(a, \varepsilon) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$$

(svaka  $\varepsilon$ –okolina tačke  $a$  ima neprazan presek sa skupom  $A \setminus \{a\}$ ).

- Skup svih tačaka nagomilavanja skupa  $A$  obeležavamo sa  $A'$ .
- Svaka tačka nagomilavanja skupa  $A$  je adherentna tačka datog skupa, tj. važi da je  $A' \subset \overline{A}$ .
- Svaka tačka skupa ne mora biti tačka nagomilavanja datog skupa, pa odatle sledi da svaka adherentna tačka ne mora da bude i tačka nagomilavanja datog skupa. Na primer, ako je  $A = (0, 1) \cup \{3, 4\}$ , tada je  $A' = [0, 1]$ ,  $\overline{A} = [0, 1] \cup \{3, 4\}$ . Dakle,  $3 \in \overline{A}$ , ali  $3 \notin A'$ .
- Očigledno važi da je  $\overline{A} = A \cup A'$ .



## Definicija

Za tačku  $a \in A$  kažemo da je **izolovana tačka** skupa  $A \subset X$  ako

$$(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+) L(a, \varepsilon) \cap A = \{a\}$$

(postoji  $\varepsilon$ –okolina tačke  $a$  koja sadrži samo tačku  $a$  iz skupa  $A$ ).

## Primer

*Za skup  $A = (1, 2] \cup \{3\}$  je*

$$A^\circ = (1, 2),$$

$$\overline{A} = [1, 2] \cup \{3\},$$

$$A' = [1, 2],$$

$$A^* = \{1, 2, 3\}.$$

*Tačka 3 je izolovana tačka skupa  $A$ .*

*Za skup  $B = \{1, 2, 3\}$  je*

$$B^\circ = \emptyset,$$

$$\overline{B} = B = B^*,$$

$$B' = \emptyset.$$

*Sve tačke skupa  $B$  su izolovane tačke.*

# Konvergencija nizova u metričkom prostoru

## Definicija

Neka je  $A$  prebrojiv podskup skupa prirodnih brojeva (ili skupa  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ) i  $X$  neprazan skup. Preslikavanje  $a : A \rightarrow X$  zovemo **nizom** u skupu  $X$ .

Obično se u definiciji niza uzima da je  $A = \mathbb{N}$ . Međutim, tada za sledeća preslikavanja definisana sa

$$a(n) = \frac{1}{n-2}, \quad a(n) = \frac{1}{1+(-1)^n}$$

ne bismo mogli reći da predstavljaju niz. U prvom slučaju oblast definisanosti nije čitav skup  $\mathbb{N}$  već  $\mathbb{N} \setminus \{2\}$ , a u drugom slučaju  $\mathbb{N} \setminus \{2n-1 : n \in \mathbb{N}\}$ .

Bez gubitka opštosti za domen niza se može uzimati skup prirodnih brojeva  $\mathbb{N}$ , jer za svaki prebrojiv skup  $A$ ,  $A \subset \mathbb{N}$ , postoji bijekcija  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow A$  skupa  $\mathbb{N}$  na skup  $A$  sa osobinom da ako je

$$n < m,$$

tada je i

$$\phi(n) < \phi(m), \quad \text{za sve } n, m \in \mathbb{N}.$$

Tada umesto niza  $a$  možemo posmatrati niz

$$a \circ \phi : \mathbb{N} \rightarrow X.$$

Primetimo da njegov domen jeste skup prirodnih brojeva i da oba preslikavanja imaju isti skup vrednosti.

- Bijekciju  $\phi$  možemo definisati na sledeći način:

$$\phi(1) = \min A,$$

$$\phi(2) = \min(A \setminus \{\phi(1)\}),$$

$$\vdots$$

$$\phi(n) = \min(A \setminus \{\phi(1), \phi(2), \dots, \phi(n-1)\}), \text{ za sve } n > 1.$$

- Na primer, bijekcija  $\phi$  za niz dat sa  $a(n) = \frac{1}{n-2}$  preslikava skup  $\mathbb{N}$  na skup  $\mathbb{N} \setminus \{2\}$  i data je sa

$$\phi(1) = 1,$$

$$\phi(n) = n + 1, \text{ za sve } n > 1.$$

- Neka je  $a : \mathbb{N} \rightarrow X$  niz. Element  $a(n)$  skupa  $X$  (slika prirodnog broja  $n$ ) obeležavamo sa  $a_n$  i zovemo ga  **$n$ -ti član niza  $a$**  ili **opšti član niza  $a$** . Dakle,  $a(1) = a_1$  je prvi član niza,  $a(2) = a_2$  je drugi član niza, itd.
- Niz  $a : \mathbb{N} \rightarrow X$  kraće obeležavamo sa  $\{a_n\}$ ,  $\langle a_n \rangle$  ili  $(a_n)$ . Koristićemo oznaku  $\{a_n\}$ .
- Ako je  $X = \mathbb{R}$ , onda kažemo da je  $\{a_n\}$  **realan niz**, a ako je  $X = \mathbb{C}$  onda kažemo da je  $\{a_n\}$  **kompleksan niz**. Primetimo da svakom kompleksnom nizu

$$\{a_n\} = \{x_n + iy_n\}$$

odgovaraju dva realna niza:

$$\begin{aligned} \{x_n\} & - \text{ niz realnih delova niza } \{a_n\}, \\ \{y_n\} & - \text{ niz imaginarnih delova niza } \{a_n\}. \end{aligned}$$

Neka je  $(X, \preceq)$  (totalno) uređen skup i  $\{a_n\} \subset X$  niz u skupu  $X$ .

1) Ako postoji  $M \in X$ , tako da je  $a_n \preceq M$ , za sve  $n \in \mathbb{N}$ , onda kažemo da je niz  $\{a_n\}$  **ograničen sa gornje strane**.

Element  $M$  zovemo **gornja granica niza (gornje ograničenje)**.

Najmanja gornja granica niza (ako postoji) koji je ograničen sa gornje strane, zove se **supremum niza (gornja međa)**, u oznaci  $\sup a_n$ .

2) Ako postoji  $m \in X$ , tako da je  $m \preceq a_n$ , za sve  $n \in \mathbb{N}$ , onda kažemo da je niz  $\{a_n\}$  **ograničen sa donje strane**.

Element  $m$  zovemo **donja granica niza (donje ograničenje)**.

Najveća donja granica niza (ako postoji) ograničenog sa donje strane zove se **infimum niza (donja međa)**, u oznaci  $\inf a_n$ .

Ako je niz  $\{a_n\}$  ograničen i sa gornje i sa donje strane, kažemo da je **ograničen**.

Ako je  $M = \sup a_n$  i  $m = \inf a_n$ , tada za sve  $n \in \mathbb{N}$  važi da je  $m \preceq a_n \preceq M$ .

Ograničen niz realnih brojeva ima supremum i infimum.

- Realan niz  $\{\frac{1}{n}\}$  je ograničen, pri čemu je  $M = \sup \frac{1}{n} = 1$  prvi član niza, a  $m = \inf \frac{1}{n} = 0$  nije član niza.
- Realan niz  $\{n\}$  je ograničen sa donje strane ( $m = 1$ ), a nije ograničen sa gornje strane.
- Realan niz  $\{(-1)^n n\}$  nije ograničen ni sa gornje ni sa donje strane.



Ako za niz  $\{a_n\}$  važi:

1)  $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n < a_{n+1}$  - niz je **monotono rastući**,

2)  $(\forall n \in \mathbb{N}) a_{n+1} < a_n$  - niz je **monotono opadajući**,

3)  $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \leq a_{n+1}$  - niz je **monotono neopadajući**,

4)  $(\forall n \in \mathbb{N}) a_{n+1} \leq a_n$  - niz je **monotono nerastući**.

- Ako niz  $\{a_n\}$  zadovoljava neki od gornja četiri uslova, kažemo da je **monoton**.

- Ako niz zadovoljava uslov 1) ili 2) kažemo da je i **strogo (striktno) monoton**.

Očigledno je da je monotono rastući niz ujedno i monotono neopadajući, a monotono opadajući niz je ujedno i monotono nerastući.

- Kažemo da je niz  $\{a_n\}$  **gotovo monotono rastući**, ako postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tako da za svako  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$ , važi  $a_n < a_{n+1}$ .
- Slično se definišu pojmovi **gotovo monotono opadajućeg**, **gotovo monotono nerastućeg**, **gotovo monotono neopadajućeg** i **gotovo monotono** niza.

## Definicija

Ako je  $\{n_k\}$  monotono rastući niz prirodnih brojeva, onda za niz  $\{a_{n_k}\}$  kažemo da je **podniz niza**  $\{a_n\}$ .

Na primer podnizovi niza  $\{a_n\}$  su nizovi  $\{a_{2n}\}$ ,  $\{a_{3n}\}$ ,  $\{a_{2n-1}\}$ , itd.

## Definicija

Neka je  $(X, d)$  metrički prostor. Za niz  $\{a_n\} \subset X$  kažemo da ima **graničnu vrednost**  $a \in X$  i pišemo da je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , ako

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in L(a, \varepsilon)),$$

tj.

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon).$$

Prethodna definicija za prostore  $\mathbb{R}$  i  $\mathbb{C}$  je:

- Broj  $a \in \mathbb{R}$  je granična vrednost realnog niza  $\{a_n\}$  u  $\mathbb{R}$  ako i samo ako je ispunjen uslov

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon),$$

odnosno počev od  $n_0$  svi članovi niza nalaze se u  $\varepsilon$ -okolini tačke  $a$ , tj. u otvorenom intervalu  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .

- Broj  $z \in \mathbb{C}$  je granična vrednost kompleksnog niza  $\{z_n\}$  u  $\mathbb{C}$  ako i samo ako je ispunjen uslov

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon).$$

- Ako niz  $\{a_n\}$  ima graničnu vrednost  $a$ , tada kažemo da niz **konvergira** ili **teži** ka  $a$ , odnosno da je niz  $\{a_n\}$  **konvergentan**. Za niz koji nije konvergentan kažemo da **divergira**, odnosno da je **divergentan**.
- Broj  $n_0$  očigledno zavisi od  $\varepsilon$  i pokazuje koliko se članova niza  $\{a_n\}$  nalazi izvan  $\varepsilon$ –okoline tačke  $a$ . Počev od  $n_0$  svi članovi niza se nalaze u otvorenoj lopti  $L(a, \varepsilon)$  dok se van nje nalazi najviše  $n_0 - 1$  članova niza. Kažemo i da su u svakoj okolini **skoro svi članovi niza**.

## Napomena

*Ponekad se umesto  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  piše  $a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty$  ili kraće  $a_n \rightarrow a$ .*

- Ako je  $(\forall n \in \mathbb{N} \setminus N_1) a_n = a$ , gde je  $N_1 \subset \mathbb{N}$  konačan skup, onda kažemo da je niz  $\{a_n\}$  **stacionaran**. Kako za stacionaran niz  $\{a_n\}$  gde je

$$a_n = a, \quad \text{za} \quad n \in \mathbb{N} \setminus N_1$$

važi

$$d(a_n, a) = d(a, a) = 0, \quad \text{za} \quad n \in \mathbb{N} \setminus N_1$$

to sledi da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

- Slično, ako je  $\{a_n\}$  **konstantan** niz, tj.  $a_n = a$  za svako  $n \in \mathbb{N}$ , sledi da je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

## Primer

Za svako  $\alpha > 0$  u  $\mathbb{R}$  važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0.$$

To je tačno, jer je

$$\left| \frac{1}{n^\alpha} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^\alpha} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \left( \frac{1}{\varepsilon} \right)^{1/\alpha},$$

pa za proizvoljno  $\varepsilon > 0$ , postoji

$$n_0 = \left[ \left( \frac{1}{\varepsilon} \right)^{1/\alpha} \right] + 1.$$

Tako ako je  $\alpha = 1$  i  $\varepsilon = \frac{1}{10}$ , tada je  $n_0 = 11$ .

Ako je  $\{z_n\}$ , gde je  $z_n = x_n + y_n i$  kompleksan niz, granična vrednost niza  $\{z_n\}$  može se odrediti preko graničnih vrednosti realnih nizova  $\{x_n\}$  i  $\{y_n\}$ . Naime, važi

## Tvrđenje

*Kompleksan broj  $z = x + yi$  je granična vrednost kompleksnog niza  $\{z_n\}$ ,  $z_n = x_n + y_n i$  u  $\mathbb{C}$  ako i samo ako je  $x$  granična vrednost niza  $\{x_n\}$  u  $\mathbb{R}$ , a  $y$  granična vrednost niza  $\{y_n\}$  u  $\mathbb{R}$ , tj.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z = x + yi \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y.$$



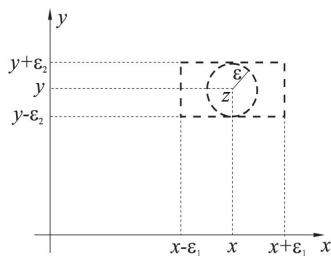
*Dokaz.* ( $\Rightarrow$ ) Pretpostavimo da je  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z = x + yi$ . Neka je  $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1)$ ,  $\varepsilon_1$ -okolina tačke  $x$  i  $(y - \varepsilon_2, y + \varepsilon_2)$ ,  $\varepsilon_2$ -okolina tačke  $y$ . Uzmimo da je  $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ . Tada

$$z_n \in L(z, \varepsilon), \quad \text{za} \quad n \geq n_0,$$

pa sledi da

$$|x_n - x| < \varepsilon \leq \varepsilon_1 \quad \text{i} \quad |y_n - y| < \varepsilon \leq \varepsilon_2 \quad \text{za} \quad n \geq n_0,$$

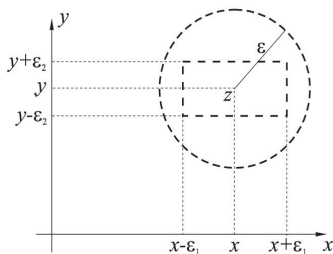
odnosno za nizove  $\{x_n\}$  i  $\{y_n\}$  važi  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ .



( $\Leftarrow$ ) Pretpostavimo obrnuto, tj. neka je  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ , a  $L(z, \varepsilon)$  proizvoljna  $\varepsilon$  okolina tačke  $z$ . Upišimo u  $L(z, \varepsilon)$  pravougaonik sa stranicama  $2\varepsilon_1$  i  $2\varepsilon_2$  čije su stranice paralelne koordinatnim osama. Tada je  $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1)$ ,  $\varepsilon_1$ -okolina tačke  $x$  i  $(y - \varepsilon_2, y + \varepsilon_2)$ ,  $\varepsilon_2$ -okolina tačke  $y$ , pa iz

$$x_n \in (x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1), \quad n \geq n_1 \quad \text{i} \quad y_n \in (y - \varepsilon_2, y + \varepsilon_2), \quad n \geq n_2$$

sledi da  $z_n \in L(z, \varepsilon)$  za  $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ , odnosno  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ .



## Napomena

*Slično se može dokazati da niz  $\{(x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^m)\} \subset \mathbb{R}^m$  konvergira ka  $(a^1, a^2, \dots, a^m) \in \mathbb{R}^m$  u  $\mathbb{R}^m$  ako i samo ako za svako  $i = 1, \dots, m$  niz  $\{x_n^i\}$  konvergira ka  $a^i$  u  $\mathbb{R}$ , tj.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^m) = (a^1, a^2, \dots, a^m) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^i = a^i, \quad i = 1, \dots, m.$$

## Napomena

*Niz  $\{a_n\} \subset X$  konvergira ka  $a \in X$  u metričkom prostoru  $(X, d)$  ako i samo ako niz realnih brojeva  $\{d(a_n, a)\}$  konvergira ka nuli u  $\mathbb{R}$ .*

## Napomena

*Ako je  $k$  fiksiran prirodan broj, tada ako je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , sledi takođe da je*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+k} = a.$$

## Tvrđenje

*Ako niz  $\{a_n\} \subset X$  konvergira u metričkom prostoru  $(X, d)$ , tada je granična vrednost jednoznačno određena.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da postoje dve granične vrednosti  $a$  i  $b$ . Kako je  $X$  metrički prostor, to postoje otvorene lopte  $L(a, \varepsilon)$  i  $L(b, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{2}d(a, b)$  koje su disjunktne. Tada postoje prirodni brojevi  $n_1$  i  $n_2$  tako da važi

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_1 \Rightarrow a_n \in L(a, \varepsilon)), \quad (\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_2 \Rightarrow a_n \in L(b, \varepsilon)).$$

Neka je  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ . Tada sledi da je

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in L(a, \varepsilon) \cap L(b, \varepsilon)),$$

što je nemoguće. Dakle, ako niz ima graničnu vrednost, ona je jednoznačno određena. □

## Tvrđenje

*Konvergentan niz u metričkom prostoru  $(X, d)$  je ograničen.*

*Dokaz.* Iz toga da je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , imamo da važi

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in L(a, 1)).$$

Ako je  $n_0 = 1$ , tada se svi članovi niza nalaze u otvorenoj lopti  $L(a, 1)$ , pa je  $d(a_m, a_n) \leq d(a_m, a) + d(a, a_n) < 1 + 1 = 2$ , tj. niz je ograničen.

Za  $n_0 > 1$ , neka je  $D = \max\{1, d(a, a_1), d(a, a_2), \dots, d(a, a_{n_0-1})\}$ . Tada je  $d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a, a_m) \leq 2D$ , pa je

$$\sup\{d(a_n, a_m) : a_n, a_m \in \{a_n\}\} \leq D + D = 2D.$$

Dakle, niz  $\{a_n\}$  je ograničen.



## Definicija

Za tačku  $a \in X$  kažemo da je **tačka nagomilavanja niza**  $\{a_n\}$  u metričkom prostoru  $(X, d)$  ako

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})(n \geq m \wedge a_n \in L(a, \varepsilon)).$$

- Dakle, ako je  $a$  tačka nagomilavanja niza  $\{a_n\}$ , tada svaka  $\varepsilon$ —okolina tačke  $a$  sadrži bar jedan član datog niza.

Obrnuto nije tačno. Na primer, ako posmatramo realan niz  $\{a_n\}$  gde je  $a_n = \frac{1}{n}$ , tada  $L(1, \varepsilon)$  sadrži prvi član niza  $a_1 = 1$ , ali 1 nije tačka nagomilavanja datog niza u  $\mathbb{R}$ .

- Tačke nagomilavanja niza  $\{(-1)^n\}$  u  $\mathbb{R}$  su očigledno  $-1$  i  $1$  (ograničen niz ne mora da bude konvergentan!).
- Tačka nagomilavanja niza  $\{n^{(-1)^n}\}$  u  $\mathbb{R}$  je  $0$  (nije ograničen i nije konvergentan!).
- Niz  $\{n\}$  nema ni jednu tačku nagomilavanja u  $\mathbb{R}$ .

Dakle, niz može da nema ni jednu, da ima jednu ili više tačaka nagomilavanja, pa i beskonačno mnogo.

## Tvrđenje

*Za svaku okolinu  $V$  tačke nagomilavanja  $a$  niza  $\{a_n\}$ , postoji beskonačan skup  $M \subset \mathbb{N}$  tako da je  $(\forall m \in M) a_m \in V$ .*

*Dokaz.* Dokažimo da je skup  $M = \{n \in \mathbb{N} : a_n \in V\}$  beskonačan. On je neprazan jer iz same definicije tačke nagomilavanja sledi da postoji prirodan broj  $n$  takav da  $a_n \in V$ .

Pretpostavimo da je  $M$  konačan skup. Tada postoji  $n_1 = \max\{n : n \in M\}$ . Ako uzmemo da je

$$m = n_1 + 1,$$

tada postoji  $n \geq m > n_1$  tako da  $a_n \in V$ , pa je  $n \in M$  tj.  $n \leq n_1$  što je kontradikcija. Dakle,  $M$  je beskonačan.  $\square$



- Iz definicije tačke nagomilavanja niza  $\{a_n\}$  sledi da je tačka nagomilavanja niza adherentna tačka skupa  $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ , ali ne mora da bude tačka nagomilavanja toga skupa.

Npr. u slučaju niza čiji je opšti član  $a_n = (-1)^n$  tačke 1 i  $-1$  su tačke nagomilavanja niza u  $\mathbb{R}$ , dok je skup  $\{1, -1\}$  konačan i nema tačke nagomilavanja.

## Napomena

*Ako niz  $\{a_n\} \subset X$  u metričkom prostoru  $X$  konvergira ka  $a$ , onda je  $a$  jedina tačka nagomilavanja niza  $\{a_n\}$ .*

- Tačka  $a$  je tačka nagomilavanja niza  $\{a_n\}$  ako i samo ako postoji podniz  $\{a_{n_k}\}$  niza  $\{a_n\}$  koji konvergira ka  $a$ .
- U metričkom prostoru  $(X, d)$ , skup  $A \subset X$  je zatvoren ako i samo ako za svaki niz  $\{a_n\}$  elemenata iz  $A$  koji konvergira ka  $a$  sledi da  $a \in A$ .

## Tvrđenje

*Neka je  $(X, d)$  metrički prostor. Skup svih tačaka nagomilavanja niza  $\{a_n\} \subset X$  je zatvoren u  $(X, d)$ .*

• Pretpostavimo da je skup  $A$  tačaka nagomilavanja realnog niza  $\{a_n\}$  neprazan i ograničen. Kako je skup tačaka nagomilavanja zatvoren, to sledi da skup  $A$  ima najveći i najmanji element, tj. najveću i najmanju tačku nagomilavanja. Tada

a) najveću tačku nagomilavanja zovemo **limes superior** datog niza i označavamo je sa  $\limsup a_n$  ili  $\overline{\lim} a_n$ .

b) najmanju tačku nagomilavanja zovemo **limes inferior** datog niza i označavamo je sa  $\liminf a_n$  ili  $\underline{\lim} a_n$ .

• ako su  $\liminf a_n$  i  $\limsup a_n$  različiti, niz ne konvergira, ako konvergira jednaki su.

# Divergencija realnih nizova

## Definicija

Za niz  $\{a_n\}$  kažemo da **teži**  $\infty$  kada  $n \rightarrow \infty$ , tj.  $a_n \rightarrow \infty$  kada  $n \rightarrow \infty$  ako

$$(\forall K \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n > K).$$

Za niz  $\{a_n\}$  kažemo da **teži**  $-\infty$  kada  $n \rightarrow \infty$ , tj.  $a_n \rightarrow -\infty$  kada  $n \rightarrow \infty$  ako

$$(\forall K \in \mathbb{R}^-)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n < K).$$

Ako niz  $\{a_n\}$  teži  $+\infty$  ili  $-\infty$  kažemo da je **divergentan u užem smislu**. Za niz koji je divergentan, ali ne u užem smislu, kažemo da je **divergentan u širem smislu**.

## Napomena

*Umesto  $a_n \rightarrow \infty$  (odnosno  $a_n \rightarrow -\infty$ ) kada  $n \rightarrow \infty$  često ćemo pisati  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  (odnosno  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ).*

- Niz  $\{(-1)^n\}$  je očigledno divergentan u širem smislu. (Ovaj niz ima dve tačke nagomilavanja.)
- Niz  $\{n^{(-1)^n}\}$  divergira u širem smislu. (Ovaj niz ima samo jednu tačku nagomilavanja i to realan broj 0.)
- Niz  $\{(-1)^n n\}$  je divergentan u širem smislu. (Ovaj niz nema ni jednu tačku nagomilavanja.)
- Niz  $\{\sqrt{n}\}$  teži ka  $\infty$  kada  $n \rightarrow \infty$ , a niz  $\{-n^2\}$  teži ka  $-\infty$  kada  $n \rightarrow \infty$ .

# Osnovne osobine realnih konvergentnih nizova

1° Ako je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , tada je  $a$  jedina tačka nagomilavanja niza  $\{a_n\}$ .

2° Konvergentan niz  $\{a_n\}$  ima jedinstvenu graničnu vrednost.

3° Konvergentan niz je ograničen.

4° Ako je realan niz  $\{a_n\}$  ograničen i ima jednu tačku nagomilavanja, tada je on konvergentan i njegova granična vrednost je tačka nagomilavanja.

**Naglasimo** da ograničen niz sa samo jednom tačkom nagomilavanja **ne mora** da bude konvergentan u prostoru  $(X, d)$ . Na primer, u prostoru  $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ , posmatrajmo niz  $\{a_n\}$  dat sa

$$\begin{aligned} a_{2n} &= 1, \\ a_{an-1} &\in \left(\sqrt{5} - \frac{1}{n}, \sqrt{5} + \frac{1}{n}\right) \cap \mathbb{Q} = \left(\sqrt{5} - \frac{1}{n}, \sqrt{5} + \frac{1}{n}\right)_{\mathbb{Q}} \end{aligned}$$

- $a_n \in (-50, 50)$  (ograničen je);
- 1 je jedina tačka nagomilavanja u  $\mathbb{Q}$ , u  $\mathbb{R}$  ima dve tačke nagomilavanja: 1 i  $\sqrt{5}$ ;
- $a_n \not\rightarrow 1, n \rightarrow \infty$  jer se izvan otvorene lopte  $L\left(1, \frac{1}{n}\right)_{\mathbb{Q}} = \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)_{\mathbb{Q}}$  nalaze svi neparni članovi niza, dakle beskonačno mnogo.

**5°** Ako niz  $\{a_n\}$  konvergira ka broju  $a$ , tada je i niz  $\{|a_n|\}$  konvergentan i konvergira ka broju  $|a|$ , tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|.$$

• Obrnuto nije tačno. Na primer, niz  $\{(-1)^n\}$  je divergentan, a niz  $\{|(-1)^n|\}$ , tj.  $\{1\}$  je konvergentan (konvergira ka broju 1).

**6°** Ako niz  $\{|a_n|\}$  konvergira ka broju 0, tada je i niz  $\{a_n\}$  konvergentan i konvergira ka broju 0, tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

**7°** Ako su nizovi  $\{a_n\}$  i  $\{b_n\}$  takvi da je  $a_n \leq b_n$  za  $n \geq k$  i ako je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , tada je  $a \leq b$ .



**8°** Ako su nizovi  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  i  $\{c_n\}$  takvi da je  $a_n \leq b_n \leq c_n$  za  $n \geq k$ ,  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ , onda je i  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .

## Primer

Kako je

$$\frac{n}{n^3 + n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^3 + n} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^3 + i} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^3 + 1} = \frac{n}{n^3 + 1},$$

to prema osobini **8°** sledi da je

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^3 + n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^3 + i} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^3 + 1} = 0,$$

tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^3 + 1} + \frac{1}{n^3 + 2} + \dots + \frac{1}{n^3 + n} \right) = 0.$$

**9°** Neka je  $\{b_n\}$  niz prirodnih brojeva za koji važi da je  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ .

Ako je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , tada je i  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{b_n} = a$ .

**10°** Ako niz  $\{a_n\}$  konvergira ka  $a$ , tada i svaki podniz  $\{a_{n_k}\}$  niza  $\{a_n\}$  konvergira ka  $a$ .

## Napomena

*Poslednje dve osobine važe i u proizvoljnom metričkom prostoru  $(X, d)$ .*

## Napomena

*Iz  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  i  $a_n < b_n$  za  $n \geq k$ , sledi  $a \leq b$ , ali ne uvek i  $a < b$ , što se npr. videti ako se uzme da je  $a_n = \frac{n}{n+1}$  i  $b_n = 1$ . Tada je  $a_n < b_n$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ .*

# Računske operacije sa graničnim vrednostima i primeri

Tvrđenje (deo tvrđenja pod a) važi i u  $\mathbb{R}$  i u  $\mathbb{C}$

a) Ako je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , tada je

$$1^\circ) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b,$$

$$2^\circ) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b,$$

$$3^\circ) \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \cdot a,$$

$$4^\circ) \text{ za } b_n \neq 0 \text{ i } b \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{1}{b},$$

$$5^\circ) \text{ za } b_n \neq 0 \text{ i } b \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}.$$

*Dokaz.* Dokazaćemo deo tvrđenja **a)** 1°).

Iz konvergencije nizova  $\{a_n\}$  i  $\{b_n\}$  sledi da za proizvoljno  $\varepsilon > 0$ , postoje prirodni brojevi  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ , tako da je

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq n_1 \quad \text{i} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq n_2.$$

Birajući

$$n_0 = \max\{n_1, n_2\},$$

imamo da je

$$\begin{aligned} |(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| &= |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon, \quad n \geq n_0. \end{aligned}$$

Tvrđenje (deo tvrđenja pod b), c), d) važi u  $\mathbb{R}$ )

**b)** Ako  $a_n \rightarrow \infty$  i  $b_n \rightarrow b$  ( $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ), tada

$$1^\circ) (a_n + b_n) \rightarrow \infty,$$

$$2^\circ) (a_n \cdot b_n) \rightarrow \infty, \text{ za } b > 0, \text{ odnosno } (a_n \cdot b_n) \rightarrow -\infty, \text{ za } b < 0.$$

**c)** Ako  $a_n \rightarrow -\infty$  i  $b_n \rightarrow b$  ( $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ), tada

$$1^\circ) (a_n + b_n) \rightarrow -\infty,$$

$$2^\circ) (a_n \cdot b_n) \rightarrow -\infty \text{ za } b > 0, \text{ odnosno } (a_n \cdot b_n) \rightarrow \infty \text{ za } b < 0.$$

**d)** Neka je  $\{a_n\}$  niz za koji je  $a_n \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Tada je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

# Princip monotonije

## Tvrđenje

*Svaki monotono neopadajući (rastući) niz koji je ograničen sa gornje strane konvergira svome supremumu, a svaki monotono nerastući (opadajući) niz ograničen sa donje strane konvergira svome infimumu.*

*Dokaz.* Pretpostavimo na primer, da je niz  $\{a_n\}$  ograničen sa gornje strane i monotono neopadajući. Neka je

$$(M - \varepsilon, M + \varepsilon), \quad M = \sup a_n,$$

$\varepsilon$ —okolina tačke  $M$ . Tada postoji  $n_1 \in \mathbb{N}$  tako da

$$M - \varepsilon < a_{n_1} \leq M.$$

Zaista, ako ne bi postojao takav prirodan broj  $n_1$ , sledilo bi da za sve članove niza važi

$$a_n \leq M - \varepsilon,$$

pa bi broj

$$M - \varepsilon < M$$

bio gornje ograničenje niza, koje je manja od njegovog supremuma  $M$  što je nemoguće.

S obzirom da je  $\{a_n\}$  monotonno neopadajući niz, važi

$$M - \varepsilon < a_{n_1} \leq a_{n_1+1} \leq a_{n_1+2} \leq \dots \leq M < M + \varepsilon,$$

tj.

$$a_n \in (M - \varepsilon, M + \varepsilon) \text{ za } n \geq n_1,$$

pa je  $M$  granična vrednost niza  $\{a_n\}$ . Slično se dokazuje preostali slučaj.

□

## Posledica

*Svaki gotovo monoton i ograničen niz je konvergentan.*

## Broj $e$

Posmatrajmo nizove  $\{a_n\}$  i  $\{b_n\}$ , gde je

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

1) Niz  $\{a_n\}$  je monotonno rastući, jer

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \\ &= \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

i koristeći Bernulijevu nejednakost  $(1+h)^n > 1+nh$ ,  $h > -1$ ,  $h \neq 0$ ,  $n > 1$  dobijamo da je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \frac{n+1}{n} = 1,$$

tj.  $a_{n+1} > a_n$ .



2) Niz  $\{b_n\}$  je monotono opadajući, jer iz

$$\begin{aligned}\frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+2}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}{(\frac{n+2}{n+1})^{n+2}} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \cdot (n+2)\right) \cdot \frac{n}{n+1} = 1,\end{aligned}$$

sledi da je  $b_{n+1} < b_n$ .

Kako je  $a_n < b_n$ , to je  $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1$ , tj. nizovi  $\{a_n\}$  i  $\{b_n\}$  su ograničeni, pa su zbog njihove monotonosti oba niza konvergentna.

Neka je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ .

Tada je  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e$ , pa je

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad (1)$$

jer je  $e$  supremum za niz  $\{a_n\}$ , a infimum za niz  $\{b_n\}$ . Svi članovi nizova  $a_n$  i  $b_n$  su racionalni brojevi. Broj  $e$  je iracionalan, pa u (1) važi stroga nejednakost.

Napomenimo da je  $e \approx 2,718281828\dots$  transcendentan broj, odnosno nije nula nijednog polinoma sa celobrojnim koeficijentima. Transcendentnost broja  $e$  dokazao je Ermit<sup>1</sup> 1873. godine.

---

<sup>1</sup>Ermit, Č. (Charles Hermite, 1822-1901) francuski matematičar

Važe osobine:

1) Ako niz  $\{a_n\}$ ,  $a_n > 0$  konvergira ka broju  $a > 0$ , tada je i niz  $\{\ln a_n\}$ , konvergentan i konvergira ka broju  $\ln a$ .

2) Ako niz  $\{a_n\}$  konvergira ka  $a$ , tada je i niz  $\{e^{a_n}\}$ , konvergentan i konvergira ka  $e^a$ .

3) Ako niz  $\{a_n\}$ ,  $a_n \geq 0$  konvergira ka broju  $a$ , tada je i niz  $\{\sqrt[k]{a_n}\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , konvergentan i konvergira ka broju  $\sqrt[k]{a}$ .

4) Ako je  $\{a_n\}$  niz takav da  $a_n \rightarrow \infty$ , tada je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

5) Ako je  $\{a_n\}$  niz takav da  $a_n \rightarrow -\infty$ , tada je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Primeri nekih graničnih vrednosti nizova su:

## Primer

$$1) \quad a > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1;$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

$$3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ \infty, & q > 1 \end{cases};$$

$$4) \quad \alpha \in \mathbb{R}, a > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0;$$

$$5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

## Niz umetnutih intervala. Bolcano-Vajerštrasova teorema

Pod **nizom umetnutih intervala** podrazumeva se niz zatvorenih intervala  $\{[a_n, b_n]\}$  za koji važi:

1)  $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$   
(svaki sledeći nalazi se u prethodnom intervalu).

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$  (dužina intervala teži ka nuli).

## Tvrđenje

*Neka je dat niz zatvorenih intervala  $\{[a_n, b_n]\}$  za koji važi 1).*

*Tada je*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

*gde je*

$$a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\},$$

$$b = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

*Ukoliko je  $\{[a_n, b_n]\}$  niz umetnutih intervala, tj. važi i 2), tada postoji jedan i samo jedan broj koji pripada svim intervalima.*

*Dokaz.* Posmatrajmo nizove  $\{a_n\}$  i  $\{b_n\}$ . Tada očigledno važi:

- niz  $\{a_n\}$  je monotono neopadajući,
- niz  $\{b_n\}$  je monotono nerastući,
- $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , odnosno nizovi  $\{a_n\}$  i  $\{b_n\}$  su ograničeni.

Dakle, nizovi  $\{a_n\}$  i  $\{b_n\}$  su konvergentni, prema principu monotonije, i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Takođe je  $a \leq b$  (osobina **7°**).

Iz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b - a = 0$$

sledi da je  $a = b$ . Kako za svako  $n$  važi

$$a_n \leq a = b \leq b_n$$

to je  $a$  jedina zajednička tačka za sve intervale.





Ovu osobinu nema skup racionalnih brojeva  $\mathbb{Q}$ . Između brojeva

$$\sqrt{2} - \frac{1}{n} \quad \text{i} \quad \sqrt{2} - \frac{1}{n+1}$$

uzmimo racionalan broj  $a_n$ , a između brojeva

$$\sqrt{2} + \frac{1}{n} \quad \text{i} \quad \sqrt{2} + \frac{1}{n+1}$$

racionalan broj  $b_n$ . Dobijamo niz zatvorenih intervala  $\{[a_n, b_n]\}$  pri čemu

1)  $a_n \in \mathbb{Q}, b_n \in \mathbb{Q},$

2)  $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots,$

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0.$

To bi bio niz umetnutih intervala u skupu  $\mathbb{R}$ . U skupu  $\mathbb{R}$  dati niz ima jednu i samo jednu zajedničku tačku i to  $\sqrt{2}$ .

Označimo sa  $[a, b]_{\mathbb{Q}} = [a, b] \cap \mathbb{Q}$ . Za niz  $\{[a_n, b_n]_{\mathbb{Q}}\}$  važi:

$$1) [a_1, b_1]_{\mathbb{Q}} \supset [a_2, b_2]_{\mathbb{Q}} \supset \dots \supset [a_n, b_n]_{\mathbb{Q}} \supset \dots,$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Ne postoji racionalan broj  $q$ , tako da za svako  $n \in \mathbb{N}$ ,  $q \in [a_n, b_n]_{\mathbb{Q}}$ , jer bi tada niz  $\{[a_n, b_n]\}$  imao dve zajedničke tačke  $q$  i  $\sqrt{2}$ , što protivreči dokazu prethodne teoreme.

Dokažimo Bolcano<sup>2</sup>-Vajerštrasovu<sup>3</sup> teoremu

---

<sup>2</sup>Bolcano, B. (Bernhard Bolzano, 1781-1848) - češki matematičar i filozof

<sup>3</sup>Vajerštras, K. (Karl Weierstrass, 1815-1897) - nemački matematičar

## Tvrđenje

*Svaki ograničen niz ima bar jednu tačku nagomilavanja.*

*Dokaz.* Neka je niz  $\{a_n\}$  ograničen i

$$m = \inf a_n \leq a_n \leq M = \sup a_n.$$

Ako je  $m = M$ , tada je  $a_n = m$ , odnosno niz  $\{a_n\}$  je konstantan, pa on ima jedinstvenu tačku nagomilavanja - graničnu vrednost.

Pretpostavimo da je  $m \neq M$ . Podelimo interval  $[m, M]$  na dva jednaka dela. U bar jednom delu, označimo taj interval sa  $[m_1, M_1]$ , ima beskonačno mnogo članova niza i to u smislu da je skup

$$N_1 = \{n \in \mathbb{N} : a_n \in [m_1, M_1]\}$$

beskonačan.

Podelimo  $[m_1, M_1]$  na dva jednaka dela. Sa  $[m_2, M_2]$  označavamo onaj od podintervala intervala  $[m_1, M_1]$  koji sadrži beskonačno mnogo članova niza.

Nastavljajući dolazimo do niza  $\{[m_n, M_n]\}$  zatvorenih intervala za koji važi:

1)  $[m_n, M_n]$  sadrži beskonačno mnogo članova niza,

2)  $[m_1, M_1] \supset [m_2, M_2] \supset \dots \supset [m_n, M_n] \supset \dots$ ,

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (M_n - m_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M - m}{2^n} = 0.$

Dakle, postoji jedinstvena tačka  $a$  koja pripada svim zatvorenim intervalima. Dokažimo da je  $a$  tačka nagomilavanja niza  $\{a_n\}$ . Iz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n \quad \text{i} \quad m_n \leq a \leq M_n,$$

sledi da za proizvoljno  $\varepsilon > 0$ , postoje  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ , tako da je

$$m_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad \text{i} \quad n \geq n_1$$

i

$$M_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad \text{i} \quad n \geq n_2,$$

odnosno

$$[m_n, M_n] \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad \text{za} \quad n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\},$$

pa je  $a$  tačka nagomilavanja niza  $\{a_n\}$  jer  $[m_n, M_n]$  sadrži beskonačno mnogo članova datog niza. □

## Posledica

*Iz svakog ograničenog niza može se izdvojiti konvergentan podniz.*

*Dokaz.* Neka je  $\{a_n\}$  ograničen niz. Postoji bar jedna tačka nagomilavanja  $a$  tog niza. Tada postoji monotono rastući niz prirodnih brojeva  $\{n_k\}$  tako da za svako  $k \in \mathbb{N}$  imamo da  $a_{n_k} \in L(a, \frac{1}{k})$ . Podniz  $\{a_{n_k}\}$  niza  $\{a_n\}$ , kako je konstruisan konvergira ka tački  $a$ .  $\square$

## Napomena

*Slična osobina važi i za prostor  $\mathbb{R}^m$ , tj. iz svakog ograničenog niza  $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^m$  može se izdvojiti konvergentan podniz.*

## Posledica

*Svaki ograničen niz  $\{a_n\}$  koji ima samo jednu tačku nagomilavanja, je konvergentan.*

*Dokaz.* Neka je  $\{a_n\}$  ograničen niz, tj.

$$m = \inf a_n \leq a_n \leq M = \sup a_n$$

i neka je  $a$  jedina tačka nagomilavanja niza  $a_n$ .

Dokažimo da je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Pretpostavimo suprotno, postoji okolina

$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  izvan koje ima beskonačno mnogo članova niza. Ovi članovi niza izvan  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , obrazuju novi niz  $\{a_{n_k}\}$  koji je podniz datog niza. Ovaj niz je ograničen, pa ima jednu tačku nagomilavanja  $b$ . Očigledno je da je  $b$  ujedno i tačka nagomilavanja niza  $\{a_n\}$  i da  $b \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .

Dakle, niz  $\{a_n\}$  ima dve tačke nagomilavanja, što je suprotno pretpostavci. Znači  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . □

# Kompletni metrički prostori

## Definicija

Za niz  $\{a_n\} \subset X$  kažemo da je **Košijev<sup>4</sup> niz** u metričkom prostoru  $(X, d)$  ako

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \wedge m \geq n_0 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \varepsilon),$$

odnosno u ekvivalentnom obliku

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow d(a_{n+p}, a_n) < \varepsilon).$$

---

<sup>4</sup>Koši, L. A. (Louis Augustin Cauchy, 1789-1857) - francuski matematičar



## Tvrđenje

Ako je niz  $\{a_n\} \subset X$  konvergentan u metričkom prostoru  $(X, d)$ , tada je  $\{a_n\}$  Košijev niz u  $(X, d)$ .

Dokaz. Ako je  $a \in X$  granična vrednost niza  $\{a_n\}$ , tada za svako  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ , postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tako da za svako  $n \in \mathbb{N}$ , za koje je  $n \geq n_0$ , sledi

$$d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Takođe za svaka dva prirodna broja  $m, n \geq n_0$  važi

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a, a_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

pa je niz  $\{a_n\}$  Košijev. □

## Tvrđenje

Neka je  $\{a_n\}$  Košijev niz u metričkom prostoru  $(X, d)$ . Ako neki podniz  $\{a_{n_k}\}$  niza  $\{a_n\}$  konvergira prema  $a \in X$  u  $(X, d)$ , tada i niz  $\{a_n\}$  konvergira ka  $a$  u  $(X, d)$ .

Dokaz. Neka je dato proizvoljno  $\varepsilon > 0$ . Tada po pretpostavci postoji takav  $n_0 \in \mathbb{N}$  da iz  $m, n \geq n_0$  sledi

$$d(a_m, a_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kako je  $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$ , postoji  $k \in \mathbb{N}$  da je  $n_k \geq n_0$  i da je

$$d(a_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ako je, dakle,  $n \geq n_0$ , onda je

$$d(a_n, a) \leq d(a_n, a_{n_k}) + d(a_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

pa je teorema dokazana.

## Tvrđenje

*Svaki Košijev niz  $\{a_n\}$  u metričkom prostoru  $(X, d)$  je ograničen u datom prostoru.*

*Dokaz.* Za  $\varepsilon = 1$  postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  tako da za  $n \geq n_0$  sledi  $d(a_n, a_{n_0}) < 1$ .

Dakle,  $\{a_n : n \geq n_0\} \subset L(a_{n_0}, 1)$ .

- Ako je  $n_0 = 1$  svi članovi niza su u otvorenoj lopti  $L(a_{n_0}, 1)$  pa je niz  $\{a_n\}$  ograničen.
- Za slučaj da je  $n_0 > 1$  uzmimo da je

$$D = \max\{1, d(a_{n_0}, a_1), d(a_{n_0}, a_2), \dots, d(a_{n_0}, a_{n_0-1})\}.$$

Tada je

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a_{n_0}) + d(a_{n_0}, a_m) < 2D,$$

odnosno niz  $\{a_n\}$  je ograničen. □

U svakom metričkom prostoru Košijev niz ne mora konvergirati. Na primer, posmatrajmo niz  $\{a_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{1\}$  dat sa

$$a_n = \frac{n}{n+1}.$$

S obzirom da je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ , to je  $\{a_n\}$  konvergentan niz u  $\mathbb{R}$ , pa je u  $\mathbb{R}$  i Košijev, odakle sledi da je Košijev i u  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , ali konvergira ka  $1 \notin \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Dakle, svaki Košijev niz prostora  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  ne konvergira u tom prostoru.

## Definicija

*Metrički prostor  $(X, d)$  je **kompletan** ukoliko u njemu svaki Košijev niz konvergira.*

## Tvrđenje

*Metrički prostor  $\mathbb{R}$  je kompletan.*

*Dokaz.* Neka je  $\{a_n\}$  Košijev niz. Tada je on u metričkom prostoru i ograničen, pa ćemo dokazati da on ima samo jednu tačku nagomilavanja, a odatle će slediti da je konvergentan.

Kako je  $\{a_n\}$  ograničen niz, to prema Bolzano-Vajershtasovoj teoremi sledi da niz  $\{a_n\}$  ima bar jednu tačku nagomilavanja  $a$ .

Dokažimo da je  $a$  jedina tačka nagomilavanja. Pretpostavimo da je  $b \neq a$  još jedna tačka nagomilavanja. Uzmimo da je

$$\varepsilon = \frac{1}{3}|b - a|.$$

Neka su

$a_n, n \in N'$  svi članovi niza za koje važi  $a_n \in L(a, \varepsilon)$ ,

$a_m, m \in N''$  svi članovi niza za koje važi  $a_m \in L(b, \varepsilon)$ .

S obzirom da su  $a$  i  $b$  tačke nagomilavanja, sledi da su  $N'$  i  $N''$  beskonačni podskupovi skupa  $\mathbb{N}$ . Tada je

$$|a_n - a_m| > \varepsilon,$$

pa sledi da niz  $\{a_n\}$  nije Košijev. Kontradikcija! Dakle, niz  $\{a_n\}$  ima samo jednu tačku nagomilavanja  $a$ . □

- Teorema važi i za metrički prostor  $\mathbb{R}^m$ , tj. za svako  $m \in \mathbb{N}$  metrički prostor  $\mathbb{R}^m$  je kompletan.
- Takođe i metrički prostor  $\mathbb{C}$  je kompletan.

## Primer

Niz  $\{a_n\}$ , gde je

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

divergira u  $\mathbb{R}$ .

Da bismo to dokazali, pokazaćemo da niz nije Košijev. Kako je

$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

to sledi da se  $|a_{2n} - a_n|$  ne može ni za jedno  $n$  učiniti manje od  $\frac{1}{2}$ , odnosno dati niz nije Košijev, pa samim tim sledi da je niz  $\{a_n\}$  divergentan.

Potprostor kompletnog prostora ne mora biti kompletan. Tako prostor  $\mathbb{Q}$  racionalnih brojeva nije kompletan, jer za niz  $\{a_n\} \subset \mathbb{Q}$ ,

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

važi da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e \notin \mathbb{Q}.$$

Prostor  $\mathbb{Q}$  se može kompletirati, tj. proširiti do najmanjeg prostora koji je kompletan. Tako možemo doći do skupa  $\mathbb{R}$  realnih brojeva.

Važi sledeća teorema

### Tvrđenje

*Zatvoren potprostor kompletnog metričkog prostora je kompletan.*



# Nepokretna tačka, teorema Banaha

## Definicija

Ako je  $f$  preslikavanje skupa  $X$  u samog sebe, tada za tačku  $x \in X$  kažemo da je **fiksna (nepokretna) tačka** za preslikavanje  $f$  ako je  $f(x) = x$ .

## Definicija

Za preslikavanje  $f : X \rightarrow Y$  metričkog prostora  $(X, d_1)$  u metrički prostor  $(Y, d_2)$  kažemo da vrši **kontrakciju** ako postoji realan broj  $\lambda \in (0, 1)$  tako da za svako  $x_1, x_2 \in X$  važi

$$d_2(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d_1(x_1, x_2).$$

Broj  $\lambda$  zovemo **koeficijent kontrakcije**, a preslikavanje  $f$  **kontrakcija**.

- Važi **teorema Banaha**<sup>5</sup> o fiksnoj tački:

## Tvrđenje

*Ako je  $(X, d)$  kompletan metrički prostor i  $f : X \rightarrow X$  kontrakcija sa koeficijentom  $\lambda$ , tada postoji jedna i samo jedna fiksna tačka  $a \in X$  preslikavanja  $f$  i važi da je*

$$d(a, a_n) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(a_0, a_1),$$

*gde je  $a_0 \in X$  proizvoljna tačka, a  $a_i = f(a_{i-1})$ ,  $i \in \mathbb{N}$ .*

(teorema daje i ocenu greške aproksimacije, kada se tačka  $a$  aproksimira članom  $a_n$  formiranog niza)

---

<sup>5</sup>Banah, Š. (Stefan Banach, 1892-1945) - poljski matematičar

## Napomena

Ako je  $(X, d)$  kompletan metrički prostor i za preslikavanje  $f : X \rightarrow X$  važi

$$d(f(x_1), f(x_2)) < d(x_1, x_2), \quad x_1 \neq x_2,$$

onda u opštem slučaju ne važi da za preslikavanje  $f$  postoji fiksna tačka.

**Dokaz.** Definišimo preslikavanje  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ .

Za  $x \neq y$  važi da je

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 + y^2}| = \frac{|x - y||x + y|}{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2}}$$

$$< |x - y| \frac{|x + y|}{|x| + |y|} \leq |x - y| \frac{|x| + |y|}{|x| + |y|} = |x - y|,$$

tj.  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ , dok preslikavanje nema fiksnu tačku.

## Napomena

*Primetimo da je uslov kompletности prostora neophodan!*

Zaista, u tu svrhu posmatrajmo prostor  $X = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \setminus \{0\}$  i funkciju  $f(x) = x^2$ . Pokažimo da je  $f$  kontrakcija, da prostor  $X$  nije kompletan i da funkcija nema nepokretnu tačku u  $X$ .

$$d(f(x), f(y)) = |x^2 - y^2| = |x + y||x - y| \leq \frac{2}{3}|x - y| = \frac{2}{3}d(x, y),$$

za sve  $x, y \in X$ . Jasno, zbog  $f(x) = x^2 = x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$ , funkcija  $f$  nema u  $X$  nepokretnu tačku.

Ako bi  $(X, d)$  bio kompletan prostor, na osnovu Banahove teoreme, sledilo bi da funkcija  $f : X \rightarrow X$  ima nepokretnu tačku, što je kontradikcija.

## Primer

*Dokazati pomoću Banahove teoreme o fiksnoj tački da jednačina  $x^3 - x - 1 = 0$  ima jedinstveno rešenje nad intervalom  $[1, 2]$ .*

**Rešenje.** Početna jednačina ekvivalentna je sa  $x = \sqrt[3]{x+1}$ .

Pokažimo da funkcija  $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$  ima nepokretnu tačku, odnosno da jednačina  $f(x) = x$  ima rešenje u intervalu  $[1, 2]$ .

Kako je  $f$  monotonno rastuća funkcija, to za  $x \in [1, 2]$

$$f(x) \in [f(1), f(2)] = [\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}] \subset [1, 2],$$

pa  $f : [1, 2] \rightarrow [1, 2]$ .

Skup  $[1, 2]$  je zatvoren metrički potprostor potpunog prostora  $\mathbb{R}$ , pa je i sam kompletan.

Pokažimo da je  $f$  kontrakcija. Neka su  $x, y \in [1, 2]$  proizvoljni elementi.

$$\begin{aligned}
 d(f(x), f(y)) &= |f(x) - f(y)| = \left| \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{y+1} \right| \\
 &= \left| \left( \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{y+1} \right) \cdot \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{y+1} + \sqrt[3]{(y+1)^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{y+1} + \sqrt[3]{(y+1)^2}} \right| \\
 &= \frac{|x - y|}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{y+1} + \sqrt[3]{(y+1)^2}} \\
 &\leq \frac{|x - y|}{\sqrt[3]{(1+1)^2} + \sqrt[3]{1+1}\sqrt[3]{1+1} + \sqrt[3]{(1+1)^2}} \\
 &= \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} |x - y| \\
 &= \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} d(x, y)
 \end{aligned}$$

Kako su ispunjeni uslovi Banahove teoreme, to postoji jedinstveno rešenje jednačine  $x = \sqrt[3]{x+1}$  u intervalu  $[1, 2]$ .

## Definicija

Neka su dati metrički prostori  $(X, d_X)$  i  $(Y, d_Y)$ . Neka je  $a \in X$  tačka nagomilavanja za oblast definisanosti  $D \subset X$  funkcije  $f : D \rightarrow Y$ . Za  $A \in Y$  kažemo da je **granična vrednost funkcije  $f$  u tački  $a$**  ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) f(L(a, \delta) \cap (D \setminus \{a\})) \subset L(A, \varepsilon),$$

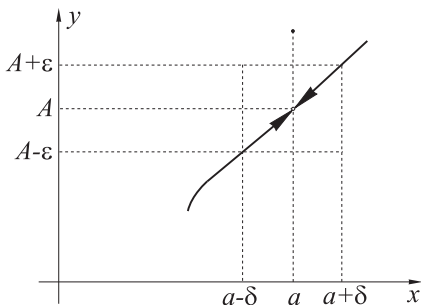
tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D \setminus \{a\})(d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(A, f(x)) < \varepsilon).$$

Pišemo da je  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , ili  $f(x) \rightarrow A, x \rightarrow a$ .

Dakle, za svaku  $\varepsilon$ —okolinu tačke  $A$ , postoji  $\delta$ —okolina tačke  $a$  koja se sva, izuzev tačke  $a$ , preslikava u  $\varepsilon$ —okolinu tačke  $A$ .

Primetimo da u tački  $a$  funkcija ne mora da bude definisana, a ako je i definisana,  $A$  ne mora da bude  $f(a)$ , jer u definiciji granične vrednosti isključena je tačka  $a$  iz okoline  $L(a, \delta)$ .





## Napomena

*Kod što kod nizova  $n_0$  zavisi od  $\varepsilon$ , tako i ovde  $\delta$  zavisi od  $\varepsilon$ . Kako se  $\varepsilon$  menja tako se i  $\delta$  menja.*

## Napomena

*Kao i kod nizova, kada je reč o realnim funkcijama ili funkcijama jedne ili više realnih promenljivih, uvek ćemo posmatrati metrički prostor  $\mathbb{R}$ , odnosno  $\mathbb{R}^n$  i to posebno nećemo naglašavati.*

- Za graničnu vrednost realne funkcije jedne realne promenljive, tj. gde je  $X = Y = \mathbb{R}$ , definiciju  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  možemo zapisati u obliku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D \setminus \{a\})(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

- Za graničnu vrednost realne funkcije  $n$  realnih promenljivih, tj. gde je  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $Y = \mathbb{R}$ , definiciju  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  možemo zapisati u obliku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D \setminus \{a\} \subset \mathbb{R}^n)(d(x, a) < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon),$$

gde je  $d(x, a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}$ .

Važi **Hajneova**<sup>6</sup> **teorema** (veza granične vrednosti funkcije i granične vrednosti niza)

## Tvrđenje

*Neka su  $(X, d_X)$  i  $(Y, d_Y)$  metrički prostori i neka je data funkcija  $f : D \rightarrow Y$ ,  $D \subset X$ . Tada  $f(x) \rightarrow A \in Y$ ,  $x \rightarrow a \in X$  ako i samo ako za svaki niz  $\{x_n\} \subset D \setminus \{a\}$  koji konvergira ka  $a$ , sledi da niz  $\{f(x_n)\}$ , konvergira ka  $A$ .*

---

<sup>6</sup>Hajne, E. (Eduard Heine, 1821-1881) - nemački matematičar

*Dokaz.*  $(\Rightarrow)$  Pretpostavimo da iz  $x \rightarrow a$ , imamo da  $f(x) \rightarrow A$ . Tada važi:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D \setminus \{a\})(d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(A, f(x)) < \varepsilon).$$

Ako niz  $\{x_n\} \subset D \setminus \{a\}$  teži ka  $a$ , tada

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) d_X(a, x_n) < \delta.$$

Tada za sve  $n \geq n_0$  važi da je

$$d_Y(A, f(x_n)) < \varepsilon,$$

pa sledi da niz  $\{f(x_n)\}$  teži ka  $A$ .

$(\Leftarrow)$  Dokažimo obrnut stav. Pretpostavimo da  $f(x)$  ne teži ka  $A$ , kada  $x \rightarrow a$ . Tada

$$(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x_n \in D \setminus \{a\})(x_n \in L\left(a, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow f(x_n) \notin L(A, \varepsilon)).$$

S obzirom da niz  $\{x_n\} \in D \setminus \{a\}$ , teži ka  $a$  to prema pretpostavci sledi da i niz  $\{f(x_n)\}$ , teži ka  $A$ , što je nemoguće po konstrukciji samog niza, jer otvorena lopta  $L(A, \varepsilon)$  ne sadrži ni jedan član niza  $\{f(x_n)\}$ .  $\square$

**Na osnovu Hajneove teoreme se može dokazati kao i kod granične vrednosti nizova, da ako funkcija  $f : D \rightarrow Y$  ima graničnu vrednost  $A$  u tački  $a$ , da je ta granična vrednost jednoznačno određena.**

## Primeri:

1. Ako je  $f : D \rightarrow Y$  konstantna funkcija, tj.  $f(x) = c$ , za svako  $x \in D$ , tada je

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3,$$

jer za proizvoljno  $\varepsilon > 0$ , birajući  $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$ , imamo da je

$$|(2x + 1) - 3| = |2x - 2| = 2|x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

U ovom primeru imamo da je funkcija definisana u tački  $a$ , tj.  $f(1) = 3$ , i postoji  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$  i ta granična vrednost je jednaka baš vrednosti funkcije u toj tački.



### 3. Za funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

je

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3.$$

Dakle,

- funkcija je definisana u tački 1, tj.  $f(1) = 0$ ;
- postoji  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ ;
- granična vrednost nije jednaka vrednosti funkcije u datoj tački.

## 4. Funkcija

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

nije definisana u tački 0, a ima graničnu vrednost. Zaista, kako za proizvoljno  $\varepsilon > 0$ , birajući  $\delta = \varepsilon$ , imamo

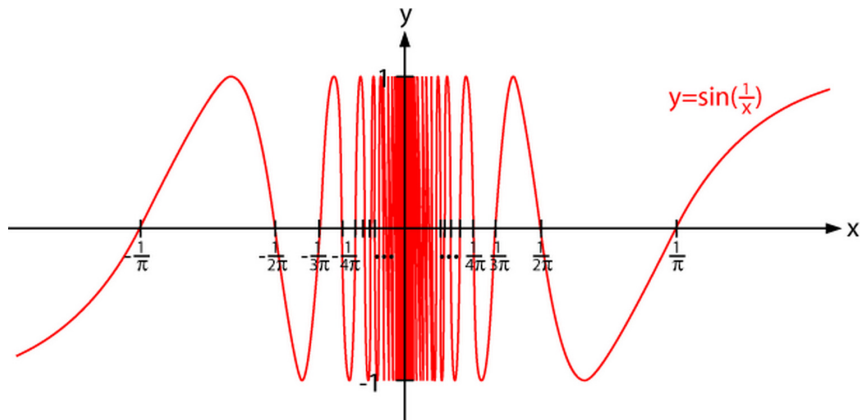
$$\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| = |x - 0| < \varepsilon,$$

to važi da je

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

## 5. Neka je

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}.$$



Funkcija nije definisana za  $x = 0$ .

Ne postoji ni  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ . Ako bi  $A$  bila granična vrednost funkcije  $f$  u tački 0, tada

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(|x| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

S obzirom da za svako  $\alpha \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  niz  $\{a_n(\alpha)\}$ , gde je

$$a_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 2n\pi}$$

teži ka nuli i

$$f(a_n(\alpha)) = \sin(\alpha + 2n\pi) = \sin \alpha,$$

pa bi u zavisnosti od  $\alpha$  imali različite granične vrednosti, što je nemoguće, jer je granična vrednost jedinstveno određena.

6. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Tada je funkcija  $f$  definisana za  $x = 0$ ,  $f(0) = 1$ , ali ne postoji

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}.$$

7. Funkcija  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definisana sa

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

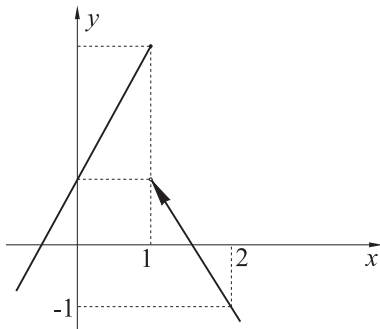
nema graničnu vrednost u tački  $O(0, 0)$ . Posmatrajmo niz

$$a_n(k) = \left( \frac{1}{n}, \frac{k}{n} \right).$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(k) = (0, 0)$ , a  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n(k))$  ne postoji jer je

$$f(a_n(k)) = \frac{k}{1+k^2}.$$

# Granične vrednosti nad skupom



8. Za funkciju  $f$  datu sa

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 1 \\ -2x + 3, & x > 1 \end{cases},$$

vidimo da  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  ne postoji.

Ovde ima smisla ispitati ponašanje funkcije za  $x > 1$  i za  $x < 1$ , tj. posmatrati funkciju  $f$  i sa leve i sa desne strane tačke 1.

Vidimo kada  $x \rightarrow 1$ , pri čemu je  $x > 1$ , da  $f(x) \rightarrow 1$ , a kada  $x \rightarrow 1$ , pri čemu je  $x < 1$ , da  $f(x) \rightarrow 3$ .

9. Ako posmatramo funkciju  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definisanu sa

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases},$$

vidimo da funkcija  $f$  nema graničnu vrednost ni u jednoj tački  $a \in \mathbb{R}$ . Međutim, restrikcija  $f_{\mathbb{Q}}$  funkcije  $f$  ima graničnu vrednost u svakoj tački  $a \in \mathbb{R}$ .

Ovi primeri daju nam povod da definišemo graničnu vrednost funkcije  $f$  u tački  $a$  dok  $x$  pripada skupu  $E$ , gde je  $E$  podskup oblasti definisanosti funkcije  $f$ , za koji je  $a$  tačka nagomilavanja.



## Definicija

Neka su  $(X, d_X)$  i  $(Y, d_Y)$  dati metrički prostori i neka je  $E$  neprazan podskup oblasti definisanosti  $D$  funkcije  $f : D \rightarrow Y$ . Ako restrikcija  $f_E$  funkcije  $f$  ima graničnu vrednost  $A \in Y$  u tački  $a \in X$ , onda kažemo da funkcija  $f$  ima **graničnu vrednost  $A$  u tački** nagomilavanja  $a$  skupa  $E$  **dok**  $x \in E$  i pišemo da je

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in E}} f(x) = A.$$

Specijalno, ako je

$$D \subset \mathbb{R} = X \text{ i } E = (a, \infty) \cap D \quad (E = (-\infty, a) \cap D)$$

i ako funkcija  $f$  ima graničnu vrednost  $A$  u tački  $a$  dok  $x \in E$ , onda kažemo da funkcija  $f$  u tački  $a$  ima **desnu (levu) graničnu vrednost**  $A$  i pišemo da je

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a^+) = A \quad (\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a^-) = A).$$

Koriste se i oznake

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a+0) \quad (\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a-0)).$$

Leva, odnosno desna granična vrednost se jednim imenom zovu **jednostrane granične vrednosti**.

- Ako funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$  u tački  $a$  ima graničnu vrednost  $A$ , tada
  - postoji bar jedna jednostrana granična vrednost koja je jednaka broju  $A$ , tj. graničnoj vrednosti funkcije  $f$  u tački  $a$ ;
  - ako postoje obe jednostrane granične vrednosti, one su jednake graničnoj vrednosti funkcije u tački  $a$ , tj.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

- Ako funkcija  $f$  u tački  $a$  ima obe jednostrane granične vrednosti, ona će imati graničnu vrednost samo onda ako su jednostrane granične vrednosti jednake, tj.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  postoji ako

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$$

i tada je  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ .

Kao što smo videli u primeru **8**, postoji leva granična vrednost u tački  $x = 1$ , tj.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1^-) = 3$ , kao i desna granična vrednost u tački  $x = 1$ , tj.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1^+) = 1$ , ali one nisu jednake, pa funkcija u tački  $x = 1$  nema graničnu vrednost.

## 10. Ako posmatramo funkciju

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}},$$

vidimo da u tački  $x = 0$  funkcija nema desnu graničnu vrednost, jer nije definisana nad intervalom  $(0, 1]$ . Međutim ovde je

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0.$$

11. Za funkciju

$$f(x) = \operatorname{arctg} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)$$

je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2},$$

pa funkcija nema graničnu vrednost u tački 0.

## 12. Posmatrajmo funkciju

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

iz primera 7. i uzmimo da je  $E = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$ . Tada važi

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (x, y) \in E}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2 + 4x^2} = \frac{2}{5}.$$

## Tvrđenje

Neka su  $(X, d_X)$  i  $(Y, d_Y)$  metrički prostori i neka je  $a \in X$  tačka nagomilavanja za definicioni skup  $D \subset X$  funkcije  $f : D \rightarrow Y$ . Tada važi

- a) Ako funkcija  $f$  ima graničnu vrednost  $A \in Y$  u tački  $a$  i ako je  $a$  tačka nagomilavanja za neprazan skup  $E \subset D$ , tada postoji  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in E}} f(x)$  i važi

$$\text{jednakost} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in E}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

- b) Neka je  $a$  tačka nagomilavanja svakog od skupova  $E_1, \dots, E_n \subset D$  koji vrše particiju skupa  $D \setminus \{a\}$ . Tada ako postoje granične vrednosti

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in E_i}} f(x), \text{ za svako } i = 1, \dots, n \text{ i pri tome su međusobno jednake, tada}$$

$$\text{postoji } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ i važi jednakost } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in E_i}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x), \text{ za } i = 1, \dots, n.$$



Ako za neko  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  uzmemo  $E = \{(x, kx) : x \in \mathbb{R}\}$ , tada za funkciju  $f$  iz primera **7.** važi:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \in E}} f(x,y) = \frac{k}{1+k^2}.$$

S obzirom da za svako  $k$  ove granične vrednosti nisu jednake, to ne postoji  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ , kao što smo i pre videli.

## Definicija

Neka je  $(X, d)$  metrički prostor i neka je  $a \in D$  tačka nagomilavanja za definicioni skup  $D \subset X$ , realne funkcije  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Tada

- funkcija  $f(x)$  **teži ka**  $\infty$ , tj.  $f(x) \rightarrow \infty, x \rightarrow a$ , ako i samo ako

$$(\forall K \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D \setminus \{a\})(x \in L(a, \delta) \Rightarrow f(x) > K).$$

- funkcija  $f(x)$  **teži ka**  $-\infty$ , tj.  $f(x) \rightarrow -\infty, x \rightarrow a$ , ako i samo ako

$$(\forall K \in \mathbb{R}^-)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D \setminus \{a\})(x \in L(a, \delta) \Rightarrow f(x) < K).$$

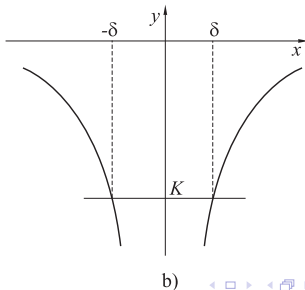
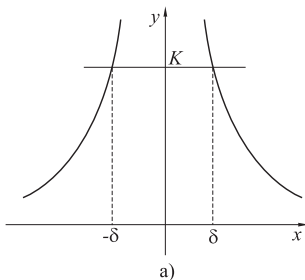
Ponekad se piše da  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , odnosno  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ .

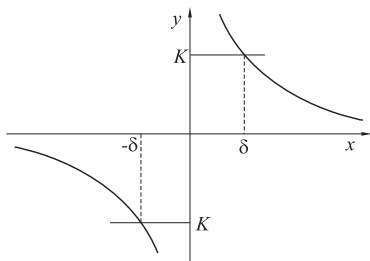
Ako posmatramo funkciju  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , vidimo da  $\frac{1}{x^2} \rightarrow \infty$ , kada  $x \rightarrow 0$ , jer za svako  $K > 0$ , postoji  $\delta = \frac{1}{\sqrt{K}}$ , tako da je

$$\frac{1}{x^2} > K \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{K} \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

Za funkciju  $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ , imamo da  $f(x) \rightarrow -\infty$ , kada  $x \rightarrow 0$ , jer za svako  $K < 0$ , postoji  $\delta = \frac{1}{\sqrt{-K}}$ , tako da je

$$-\frac{1}{x^2} < K \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > -K \Leftrightarrow x^2 < -\frac{1}{K} \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{-K}}.$$





Ako posmatramo funkciju  $f(x) = \frac{1}{x}$ , vidimo da  $f(x)$  ne teži ni  $\infty$ , ni  $-\infty$ , kada  $x \rightarrow 0$ , tj. ne postoji okolina 0 koja se čitava, izuzevši 0, preslika, iznad (ispod) prave  $y = K$ , gde je  $K > 0$  ( $K < 0$ ), jer sa leve strane tačke  $x = 0$  je  $f(x) < 0$ , a sa desne strane tačke  $x = 0$  je  $f(x) > 0$ . Vidimo da  $f(x) \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow 0^+$ , a  $f(x) \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow 0^-$ .

Uopšte, ako je  $a \in X$  tačka nagomilavanja podskupa  $E$ , definicionog skupa  $D \subset X$ , realne funkcije  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  i ako restrikcija  $f_E$  funkcije  $f$ , teži  $\infty$ , odnosno  $-\infty$ , kada  $x \rightarrow a$ , tada kažemo da  $f(x) \rightarrow \infty$ , odnosno  $f(x) \rightarrow -\infty$ , kada  $x \rightarrow a$ , dok  $x \in E$ .

Specijalno, ako je  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E = (a, \infty) \cap D \neq \emptyset$ , tada  $f(x) \rightarrow \infty$ , kad  $x \rightarrow a^+$  ako

$$(\forall K \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) > K),$$

odnosno  $f(x) \rightarrow -\infty$ , kada  $x \rightarrow a^+$  ako

$$(\forall K \in \mathbb{R}^-)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) < K).$$

Slično, ako je  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E = (-\infty, a) \cap D \neq \emptyset$ , tada  $f(x) \rightarrow \infty$ , kada  $x \rightarrow a^-$  ako

$$(\forall K \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) > K),$$

odnosno  $f(x) \rightarrow -\infty$ , kada  $x \rightarrow a^-$  ako

$$(\forall K \in \mathbb{R}^-)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) < K).$$

Primeri:

1. Za funkciju  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$  je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

$$2. \ g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & , \ x \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q} \\ -\frac{1}{x^2} & , \ x \in (0, \infty) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

$$3. \ h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \ x \neq 0 \\ 10 & , \ x = 0 \end{cases}$$

# Ponašanje funkcije $f(x)$ kada $x \rightarrow \pm\infty$

## Definicija

Neka je  $(Y, d)$  metrički prostor i neka je  $D \subset \mathbb{R}$  definicioni skup funkcije  $f : D \rightarrow Y$ , za koji važi da je  $(\forall a \in \mathbb{R}) (a, \infty) \cap D \neq \emptyset$ . Tada

1°) Kažemo da funkcija  $f(x)$  ima graničnu vrednost  $A \in Y$ , kada  $x \rightarrow \infty$ , ako je

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x > \Delta \Rightarrow f(x) \in L(A, \varepsilon)),$$

odnosno za  $Y = \mathbb{R}$ , važi

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x > \Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

i to zapisujemo sa  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ .



## Definicija

Neka je  $(Y, d)$  metrički prostor i neka je  $D \subset \mathbb{R}$  definicioni skup funkcije  $f : D \rightarrow Y$ , za koji važi da je  $(\forall a \in \mathbb{R}) (a, \infty) \cap D \neq \emptyset$ . Tada

2°) Ako je  $Y = \mathbb{R}$ , kažemo da  $f(x) \rightarrow \infty$ , kada  $x \rightarrow \infty$  ako

$$(\forall K \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x > \Delta \Rightarrow f(x) > K).$$

3°) Ako je  $Y = \mathbb{R}$ , kažemo da  $f(x) \rightarrow -\infty$ , kada  $x \rightarrow \infty$ , ako

$$(\forall K \in \mathbb{R}^-)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x > \Delta \Rightarrow f(x) < K).$$

Ponekad se umesto  $f(x) \rightarrow \infty$ , tj.  $f(x) \rightarrow -\infty$ , kada  $x \rightarrow \infty$ , piše

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \text{ odnosno } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty.$$

## Primer

Ako za proizvoljno  $\varepsilon > 0$ , uzmemo da je  $\Delta = \frac{1}{\varepsilon} - 1$ , to za  $x > 0$ , važi

$$\begin{aligned} \left| \frac{x}{x+1} - 1 \right| < \varepsilon &\Leftrightarrow \frac{1}{|x+1|} < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x+1| > \frac{1}{\varepsilon}, \\ &\Leftrightarrow x+1 > \frac{1}{\varepsilon} \\ &\Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \end{aligned}$$

pa je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$

## Primer

*Za funkciju*

$$f(x) = \left( \frac{1}{x}, \frac{x-1}{x^2-1} \right), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$$

*je*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = (0, 0).$$

## Definicija

Neka je  $(Y, d)$  metrički prostor i neka je  $D \subset \mathbb{R}$  definicioni skup funkcije  $f : D \rightarrow Y$ , za koji važi

$$(\forall a \in \mathbb{R}) (-\infty, a) \cap D \neq \emptyset.$$

Tada

1°) Funkcija  $f(x)$  ima graničnu vrednost  $A \in Y$  kada  $x \rightarrow -\infty$ , ako

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^-)(\forall x \in D)(x < \Delta \Rightarrow f(x) \in L(A, \varepsilon)),$$

odnosno za  $Y = \mathbb{R}$ , važi

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^-)(\forall x \in D)(x < \Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon),$$

i to zapisujemo sa  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ .

Posmatrajmo funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in Q \\ 0 & , \quad x \in R \setminus Q \end{cases} .$$

Da li ona ima graničnu vrednost kada  $x \rightarrow \infty$ , tj. da li postoji  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ?

Da li ona ima graničnu vrednost kada  $x \rightarrow \infty$ , dok  $x$  pripada skupu racionalnih brojeva, tj. da li postoji  $\lim_{x \rightarrow \infty, x \in Q} f(x)$ ?

## Definicija

Neka je  $(Y, d)$  metrički prostor i neka je  $D \subset \mathbb{R}$  definicioni skup funkcije  $f : D \rightarrow Y$ , za koji važi  $(\forall a \in \mathbb{R}) (-\infty, a) \cap D \neq \emptyset$ . Tada

2°) Ako je  $Y = \mathbb{R}$ , kažemo da  $f(x) \rightarrow \infty$ , kada  $x \rightarrow -\infty$ , ako

$$(\forall K \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^-)(\forall x \in D)(x < \Delta \Rightarrow f(x) > K).$$

3°) Ako je  $Y = \mathbb{R}$ , kažemo da  $f(x) \rightarrow -\infty$ , kada  $x \rightarrow -\infty$ , ako

$$(\forall K \in \mathbb{R}^-)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^-)(\forall x \in D)(x < \Delta \Rightarrow f(x) < K).$$

Ponekad se umesto

$$f(x) \rightarrow \infty, \text{ odnosno } f(x) \rightarrow -\infty \text{ kada } x \rightarrow -\infty,$$

piše

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \text{ odnosno } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

I ovde (uvek!) važi Hajneova teorema:

## Tvrđenje

*Neka su  $(X, d_X)$  i  $(Y, d_Y)$  metrički prostori i neka je data funkcija  $f : D \rightarrow Y$ ,  $D \subset X$ . Tada važi*

- Ako je  $Y = \mathbb{R}$ , tada  $f(x) \rightarrow \pm\infty$ ,  $x \rightarrow a$  ako i samo ako za svaki niz  $\{x_n\} \subset D \setminus \{a\}$ , koji konvergira ka  $a$ , sledi da niz  $\{f(x_n)\}$  teži  $\infty$ , odnosno  $-\infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ .*
- Ako je  $X = \mathbb{R}$ , tada  $f(x) \rightarrow A \in Y$ ,  $x \rightarrow \pm\infty$  ako i samo ako za svaki niz  $\{x_n\} \subset D$ , koji teži ka  $\pm\infty$ , sledi da niz  $\{f(x_n)\}$  konvergira ka  $A$ .*
- Ako je  $X = Y = \mathbb{R}$ , tada  $f(x) \rightarrow \infty$  ( $f(x) \rightarrow -\infty$ ),  $x \rightarrow \pm\infty$  ako i samo ako za svaki niz  $\{x_n\} \subset D$  koji teži  $\pm\infty$ , sledi da niz  $\{f(x_n)\}$  teži  $\infty$  ( $-\infty$ ),  $n \rightarrow \infty$ .*

- Može se i ovde pokazati da ako postoji granična vrednost, da je ona jednoznačno određena.
- Ako posmatramo funkciju  $f(x) = \cos x$ , vidimo da
  - 1)  $f(x)$  ne teži ni  $\infty$ , ni  $-\infty$ , kada  $x \rightarrow \infty$  jer  $-1 \leq f(x) \leq 1$ .
  - 2) Ne postoji  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ . Ako bi postojao  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ , tada bi po definiciji granične vrednosti, sledilo da

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in \mathbb{R})(x > \Delta \Rightarrow |\cos x - A| < \varepsilon).$$

Ako posmatramo niz  $\{a_n\}$  sa opštim članom  $a_n = \alpha + 2n\pi$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  vidimo da  $a_n \rightarrow \infty$ , kada  $n \rightarrow \infty$ , pa u svakom intervalu  $(a, \infty)$  su skoro svi članovi datog niza. Kako je  $\cos a_n = \cos \alpha$ , to bi sledilo da je  $A = \cos \alpha$ , što je kontradikcija, jer, ako postoji granična vrednost ona je jednoznačno određena.



Ponekad sa

$$f(x) \rightarrow \pm\infty, \text{ kada } x \rightarrow a,$$

označavamo da

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ ili } f(x) \rightarrow -\infty \text{ kada } x \rightarrow a$$

i često pišemo

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty.$$

Slično, ako

$$f(x) \rightarrow A \text{ kada } x \rightarrow \infty \text{ ili } x \rightarrow -\infty,$$

često pišemo

$$f(x) \rightarrow A, x \rightarrow \pm\infty,$$

odnosno

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = A.$$

# Računske operacije sa graničnim vrednostima funkcija

## Tvrđenje

Neka je  $(X, d_X)$  metrički prostor i neka je  $a$  tačka nagomilavanja za definicioni skup  $D \subset X$  funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  i  $g : D \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ . Tada važi

a) Ako je  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  i  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , to je

$$1^\circ) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B,$$

$$2^\circ) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B,$$

$$3^\circ) \lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \cdot A,$$

$$4^\circ) \text{ za } g(x) \neq 0 \text{ i } B \neq 0, \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{1}{B},$$

$$5^\circ) \text{ za } g(x) \neq 0 \text{ i } B \neq 0, \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B}.$$

## Tvrđenje

*Neka je  $(X, d_X)$  metrički prostor i neka je  $a$  tačka nagomilavanja za definicioni skup  $D \subset X$  funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  i  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Tada važi*

**b)** *Ako  $f(x) \rightarrow \infty$ , kada  $x \rightarrow a$  i  $g(x) \rightarrow B$  ( $B \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ), kada  $x \rightarrow a$ , tada*

1°)  $(f(x) + g(x)) \rightarrow \infty$ , kada  $x \rightarrow a$ ,

2°)  $(f(x) \cdot g(x)) \rightarrow \infty$ , za  $B > 0$ , odnosno  $(f(x) \cdot g(x)) \rightarrow -\infty$ , za  $B < 0$ .

**c)** *Ako  $f(x) \rightarrow -\infty$ , kada  $x \rightarrow a$  i  $g(x) \rightarrow B$  ( $B \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ), kada  $x \rightarrow a$ , tada*

1°)  $(f(x) + g(x)) \rightarrow -\infty$ , kada  $x \rightarrow a$ ,

2°)  $(f(x) \cdot g(x)) \rightarrow -\infty$ , za  $B > 0$ , odnosno  $(f(x) \cdot g(x)) \rightarrow \infty$ , za  $B < 0$ .

**d)** *Ako je  $X = \mathbb{R}$ , tada osobine a), b) i c) važe i kada  $x \rightarrow \infty$ , odnosno  $x \rightarrow -\infty$ .*

*Dokaz.* Dokaz sledi iz Hajneove teoreme i odgovarajućih osobina nizova. Ovde ćemo ipak, radi ilustracije, dati dokaz da je

$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$ , ne koristeći Hajneovu teoremu.

S obzirom da je  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  i  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , to za proizvoljno  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ , postoje  $\delta_f, \delta_g \in \mathbb{R}^+$ , tako da za sve  $x \in D \setminus \{a\}$ , važi

$$d_X(a, x) < \delta_f \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$d_X(a, x) < \delta_g \Rightarrow |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Neka je  $\delta_{f+g} = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ . Tada važi:

$$|(f(x) + g(x)) - (A + B)| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

za  $0 < d_X(a, x) < \delta_{f+g}$ , odakle sledi dato tvrđenje. □

## Napomena

*U formulaciji teoreme smo prepostavili da je  $a$  tačka nagomilavanja za zajednički definicioni skup  $D$  funkcija  $f$  i  $g$ , jer iz*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \text{ i } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B,$$

*ne sledi uvek da je*

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B,$$

*što se vidi iz sledećeg primera.*

## Primer

*Neka su date funkcije  $f$  i  $g$  sa*

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt{-x}.$$

*Vidi se da je*

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0,$$

*a*

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x))$$

*ne postoji, jer je 0 izolovana tačka, za definicioni skup funkcije  $f + g$ .*

## Napomena

*Tvrđenje teoreme pod a) važi i kada su u pitanju kompleksne funkcije.*

## Primer

*Neka su date funkcije*

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} \cos^2 \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 10, & x = 0 \end{cases}.$$

*Njihova granična vrednost u  $x = 0$ , ne postoji, dok je*

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

## Tvrđenje

*Neka je dat metrički prostor  $(X, d)$  i neka je  $a$  tačka nagomilavanja za definicioni skup  $D \subset X$  funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  i  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Tada, ako je  $f(x) \leq g(x)$  i*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

*i*

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B,$$

*tada je i  $A \leq B$ .*



## Tvrđenje

Neka je dat metrički prostor  $(X, d)$  i neka je  $a$  tačka nagomilavanja za definicioni skup  $D \subset X$  funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  i  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Tada

a) Ako za funkciju  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ , važi

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

i ako je

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A,$$

to je i

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = A.$$

b) Slična osobina važi i za slučaj kada je  $X = \mathbb{R}$  i kada  $x \rightarrow \infty$ , odnosno  $x \rightarrow -\infty$ .

Dokaz. Sledi iz Hajneove teoreme i slične osobine za nizove.



## Primer

*Na osnovu prethodne i Hajneove teoreme sledi da je*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

*kao i da je*

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Važi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

# Beskonačno male i beskonačno velike veličine

Neka je  $(X, d)$  metrički prostor i funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\emptyset \neq D \subset X$ .

## Definicija

Za funkciju  $f(x)$  kažemo da je **beskonačno mala veličina** kada  $x \rightarrow a$ , ako je

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

## Definicija

Za funkciju  $f(x)$  kažemo da je **beskonačno velika veličina** kada  $x \rightarrow a$ , ako

$$|f(x)| \rightarrow \infty, \text{ kada } x \rightarrow a.$$

Očigledno je da je recipročna vrednost beskonačno male veličine, beskonačno velika veličina i obrnuto.

• Posmatrajmo dve beskonačno male veličine  $f(x)$  i  $g(x)$  kada  $x \rightarrow a$ , gde je  $g(x) \neq 0$  u nekoj okolini tačke  $x = a$ .

1) Ako je  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$  ili što je ekvivalentno sa  $|\frac{g(x)}{f(x)}| \rightarrow \infty$  kada  $x \rightarrow a$ , onda kažemo da je  $f(x)$  **beskonačno mala veličina višeg reda** od  $g(x)$  kada  $x \rightarrow a$ , odnosno da je  $g(x)$  **beskonačno mala veličina nižeg reda** od  $f(x)$ , kada  $x \rightarrow a$ . Kažemo još i da  $f(x)$  **brže teži nuli** od  $g(x)$  kada  $x \rightarrow a$ , odnosno da  $g(x)$  **sporije teži nuli** od  $f(x)$ , kada  $x \rightarrow a$ .

Na primer, funkcija  $f(x) = 1 - \cos x$  brže teži nuli od funkcije  $g(x) = x$ , kada  $x \rightarrow 0$ , jer je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x} = 0.$$

2) Ako je  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$ , onda kažemo da su  $f(x)$  i  $g(x)$  **beskonačno male veličine istog reda** kada  $x \rightarrow a$ .

Specijalno, ako je  $C = 1$ , tj. ako je  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ , onda kažemo da su  $f(x)$  i  $g(x)$  **ekvivalentne beskonačno male veličine**, kada  $x \rightarrow a$  i to zapisujemo sa

$$f(x) \sim g(x), \text{ kada } x \rightarrow a.$$

Takođe kažemo da se funkcije  $f(x)$  i  $g(x)$  **isto ponašaju**, kada  $x \rightarrow a$ .

## Primer

*Funkcija  $f(x) = \sin \alpha x$ ,  $\alpha \neq 0$  i funkcija  $g(x) = x$  su beskonačno male veličine istog reda, kada  $x \rightarrow 0$ , jer je  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha$ . Ako je  $\alpha = 1$ , tada je  $\sin x \sim x$ , kada  $x \rightarrow 0$ .*

3) Ako ne postoji ni  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ , ni  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)}$ , tada se beskonačno male veličine  $f(x)$  i  $g(x)$  **ne mogu porediti**, kada  $x \rightarrow a$ , tj.  $f(x)$  i  $g(x)$  su **neuporedive beskonačno male veličine**, kada  $x \rightarrow a$ .

Na primer, funkcije

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ i } g(x) = \frac{1}{x(2 + \sin x)}$$

su neuporedive beskonačno male veličine, kada  $x \rightarrow \infty$ , jer ne postoji ni

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \sin x),$$

ni

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \sin x}.$$

• Posmatrajmo dve beskonačno velike veličine  $f(x)$  i  $g(x)$ , kada  $x \rightarrow a$ , tj.  $|f(x)| \rightarrow \infty$  i  $|g(x)| \rightarrow \infty$ , kada  $x \rightarrow a$ .

1) Ako je

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

odnosno

$$\left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| \rightarrow \infty, \text{ kada } x \rightarrow a,$$

gde je  $g(x) \neq 0$ , tada kažemo da je  $g(x)$  **beskonačno velika veličina višeg reda** od  $f(x)$ , kada  $x \rightarrow a$ , odnosno da je  $f(x)$  **beskonačno velika veličina nižeg reda** od  $g(x)$ , kada  $x \rightarrow a$ .

2) Ako je  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \neq 0$ , onda kažemo da su  $f(x)$  i  $g(x)$  **beskonačno velike veličine istog reda**, kada  $x \rightarrow a$ .

Specijalno, ako je  $\alpha = 1$ , tj.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ , onda kažemo da su  $f(x)$  i  $g(x)$  **ekvivalentne beskonačno velike veličine**, kada  $x \rightarrow a$  ili da su  $f(x)$  i  $g(x)$  **asimptotski jednake**, kada  $x \rightarrow a$ . Tada pišemo da je

$$f(x) \sim g(x), \text{ kada } x \rightarrow a.$$

Na primer, polinomi

$$P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, \quad Q_n(x) = a_n x^n, \quad a_n \neq 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

su asimptotski jednaki, kada  $x \rightarrow \infty$ , jer je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = 1.$$

Kažemo i da se polinom ponaša kao njegov najstariji (vodeći) član kada  $x \rightarrow \infty$ .



3) Ako ne postoji ni  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ , ni  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)}$ , onda kažemo da se beskonačno velike veličine  $f(x)$  i  $g(x)$  **ne mogu uporediti**, kada  $x \rightarrow a$ , odnosno da su  $f(x)$  i  $g(x)$  **neuporedive beskonačno velike veličine**, kada  $x \rightarrow a$ .

Na primer, funkcije  $f(x) = x$  i  $g(x) = x(2 + \sin x)$  su neuporedive beskonačno velike veličine, kada  $x \rightarrow \infty$ , jer ne postoji ni

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \sin x},$$

ni

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \sin x).$$

## Napomena

Analogne definicije za beskonačno male i beskonačno velike veličine mogu se dati i kada  $x \rightarrow a^+$ , odnosno kada  $x \rightarrow a^-$ .

# Definicija neprekidnosti funkcije i primeri

## Definicija

*Neka su dati metrički prostori  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  i funkcija  $f : D \rightarrow Y$ ,  $D \subset X$ . Za funkciju  $f$  kažemo da je **neprekidna u tački**  $a \in D$  ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in L(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in L(f(a), \varepsilon)),$$

*odnosno*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon).$$

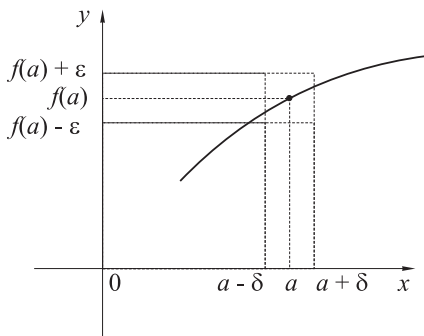
Ako je  $X = Y = \mathbb{R}(\mathbb{C})$ , tada neprekidnost funkcije  $f : D \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  u tački  $a$  možemo zapisati na sledeći način

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

## Zahtevi za neprekidnost u tački $a$ i postojanje granične vrednost u $a$ se razlikuju u sledećim činjenicama:

- za graničnu vrednost u tački  $a$  pretpostavka je da je  $a$  tačka nagomilavanja za  $D$ , a kod neprekidnosti da  $a \in D$ , tj. da je funkcija  $f$  definisana u tački  $a$ ;

- kod neprekidnosti se zahteva da funkcija  $f$  otvorenu loptu  $L(a, \delta(\varepsilon))$  preslika u otvorenu loptu  $L(f(a), \varepsilon)$ , dok kod granične vrednosti je zahtev da funkcija  $f$  otvorenu loptu  $L(a, \delta(\varepsilon))$  bez centra  $a$  preslika u otvorenu loptu  $L(A, \varepsilon)$ .



Zaključak je sledeći:

- ako je  $f$  neprekidna funkcija u tački  $a$  ne mora da postoji  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  (ako je  $a \in D$  izolovana tačka za skup  $D$ , tada je  $f$  automatski neprekidna u tački  $a$ , dok u tom slučaju ne postoji  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ).
- ako postoji  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  bez obzira da li je funkcija  $f$  definisana u tački  $a$ , funkcija ne mora da bude neprekidna u tački  $a$ . Na primer, ako posmatramo funkcije

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 5, & x = 0 \end{cases},$$

tada važi  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ . Ni funkcija  $f$ , ni funkcija  $g$  nisu neprekidne u tački 0, jer  $f$  nije definisana u tački 0, dok je  $g(0) = 5 \neq 1$ .

**Dakle, da bi funkcija  $f$  bila neprekidna u tački  $a$  treba da važi:**

1)  $a \in D$ , tj. funkcija  $f$  je definisana u tački  $a$ ;

2) ako je  $a$  tačka nagomilavanja za  $D$ , tada postoji  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  i važi jednakost

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a);$$

3) ako je  $a \in D$  izolovana tačka, tada je  $f$  neprekidna u tački  $a$ .

Ako je  $a \in D \subset \mathbb{R}$  ( $a \in D \subset \mathbb{C}$ ) tačka nagomilavanja za definicioni skup  $D$  i ako je  $Y = \mathbb{R}$ , ( $Y = \mathbb{C}$ )  $x = a + \Delta x \in D$ ,  $\Delta x \neq 0$  i  $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ , gde su  $\Delta x$  i  $\Delta y$  redom priraštaji nezavisne i zavisne promenljive, tada neprekidnost realne funkcije jedne realne promenljive možemo izraziti na sledeći način:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x = a + \Delta x \in D)(|\Delta x| < \delta \Rightarrow |\Delta y| < \varepsilon),$$

odnosno

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ a + \Delta x \in D}} \Delta y = 0.$$

Dakle, realna (kompleksna) funkcija jedne realne (kompleksne) promenljive je neprekidna u tački  $a$  iz domena ako priraštaj funkcije  $\Delta y$  u tački  $a$  teži ka nuli kada priraštaj argumenta  $\Delta x$  teži ka nuli.

Ako funkcija  $f$  nije neprekidna u tački  $a$ , onda kažemo da je funkcija  $f$  **prekidna** u tački  $a$ , odnosno da funkcija  $f$  ima **prekid** u tački  $a$  (tačka  $a$  je **prekid** date funkcije).

## Napomena

*Kako je funkcija u izolovanim tačkama neprekidna, to je realni niz ( $a$  i svaki drugi), kao funkcija iz  $\mathbb{N}$  u  $\mathbb{R}$  neprekidna funkcija.*

## Definicija

Neka su  $(X, d_X)$  i  $(Y, d_Y)$  metrički prostori i neka je data funkcija  $f : D \rightarrow Y$ ,  $D \subset X$ .

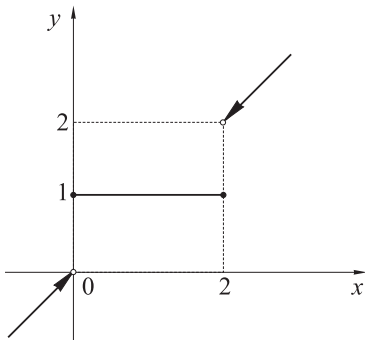
- Ako je restrikcija  $f_E$  funkcije  $f$  nad nepraznim skupom  $E \subset D$  neprekidna u tački  $a \in E$ , onda kažemo da je funkcija  $f$  **neprekidna u tački  $a$  dok  $x \in E$** .
- Ako je  $f_E$  neprekidna u svakoj tački skupa  $E$ , onda kažemo da je  $f$  **neprekidna nad skupom  $E$** .
- Ako je  $E = D$ , tj. ako je funkcija  $f$  neprekidna u svakoj tački definicionog skupa  $D$ , onda kažemo da je  $f$  **neprekidna funkcija**.



Primetimo, da ako je funkcija  $f$  neprekidna nad skupom  $E$ , ona ne mora biti neprekidna u svakoj tački skupa  $E$ . Na primer, ako posmatramo funkciju

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 2 \\ x, & x > 2 \end{cases}$$

vidimo da je ona neprekidna nad zatvorenim intervalom  $[0, 2]$ , dok su krajnje tačke 0 i 2 prekidi date funkcije.



Ako je  $f : D \rightarrow Y$ ,  $D \subset \mathbb{R}$  i ako je  $f$  neprekidna u tački  $a$  dok

$$x \in E = D \cap [a, \infty) \quad (x \in E = D \cap (-\infty, a]),$$

tada kažemo da je funkcija  $f$  **neprekidna u tački  $a$  sa desne (leve) strane**.

Ako postoji  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ , tada je funkcija  $f$  neprekidna u tački  $a$  sa leve strane ako je

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a),$$

a ako postoji  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ , tada je funkcija  $f$  neprekidna u tački  $a$  sa desne strane ako je

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

Očigledno važi:

1) *Funkcija  $f$  jedne realne promenljive je neprekidna u tački  $a$  ako i samo ako je neprekidna u tački  $a$  i sa leve i sa desne strane.*

2) *Funkcija jedne realne promenljive je neprekidna nad zatvorenim intervalom  $[a, b]$  ako i samo ako je*

*- neprekidna u svakoj tački otvorenog intervala  $(a, b)$ ;*

*- u tački  $a$  je neprekidna sa desne strane;*

*- u tački  $b$  je neprekidna sa leve strane.*

## Tvrđenje

*Ako su realne (kompleksne) funkcije  $f$  i  $g$  neprekidne u tački  $a$ , tada su u tački  $a$  neprekidne i sledeće funkcije:*

1)  $h = f + g$ ,

2)  $h = f \cdot g$ ,

3)  $h = \frac{f}{g}$ , pod uslovom da je  $g \neq 0$  u nekoj okolini tačke  $a$ .

# Primeri

1. Konstantna funkcija  $f(x) = c$  je neprekidna funkcija, jer je

$$\Delta y = c - c = 0,$$

pa je

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

2. Funkcija  $f(x) = \sin x$  je neprekidna za svako  $x \in (-\infty, \infty)$ . Birajući  $\delta = \varepsilon$ , za proizvoljno  $\varepsilon > 0$ , imamo

$$\begin{aligned} |\Delta y| &= |\sin(x + \Delta x) - \sin x| \\ &= 2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \frac{\Delta x}{2} \right| \\ &= |\Delta x| < \varepsilon, \end{aligned}$$

tj.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

3. Funkcija  $f(x) = x^2$  je neprekidna za svako  $x \in (-\infty, \infty)$ , jer iz

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = \Delta x(2x + \Delta x),$$

sledi da je

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Slično, **stepena funkcija**  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  je neprekidna za svako  $x \in (-\infty, \infty)$ , pa kako je i konstantna funkcija neprekidna, iz prethodne teoreme sledi da je svaki **polinom**  $P_n(x)$  neprekidna funkcija za svako  $x \in (-\infty, \infty)$ , dok je svaka **racionalna funkcija**  $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  neprekidna funkcija u svakoj tački  $x_0$  za koju je  $Q_m(x_0) \neq 0$ .

#### 4. Za funkciju

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 2 \\ 2x, & x > 2 \end{cases}$$

je

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 1) = 1 = f(2^-) = f(2) \neq 4 = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x).$$

Dakle, ne postoji u tački  $x = 2$  granična vrednost, pa je funkcija u tački 2 prekidna.

Za sve ostale vrednosti od  $x$  funkcija je neprekidna.

Primetimo da je funkcija  $f(x)$  neprekidna u tački 2 sa leve strane.



5. Za funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

imamo da važi

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x - 3) = -1 \neq 0 = f(1),$$

pa je funkcija  $f$  u tački 1 prekidna.

Za sve ostale vrednosti od  $x$  funkcija je neprekidna.

6. Funkcija  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definisana sa

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

nije neprekidna u tački  $(0, 0)$ , jer ne postoji

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y).$$

## 7. Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data sa

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ima prekid za svaki realan broj. Ona je neprekidna nad  $\mathbb{Q}$ , kao i nad  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**8.** Sabiranje realnih (kompleksnih) brojeva je neprekidna funkcija.

Zaista, zbog:

$$|(x + y) - (a + b)| \leq |x - a| + |y - b| \leq 2\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2},$$

iz  $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \frac{\varepsilon}{2}$  sledi neprekidnost sabiranja realnih brojeva.

## 9. Množenje realnih (kompleksnih) brojeva je nепrekidna funkcija.

Kako je:

$$|xy - ab| = |(x-a)(y-b) + a(y-b) + b(x-a)| \leq |x-a||y-b| + |a||y-b| + |b||x-a|$$

i

$$|x - a| \leq \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}, \quad |y - b| \leq \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2},$$

to iz  $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta$ , gde je  $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{1+|a|+|b|}\}$ , sledi da je

$$|xy - ab| < \delta^2 + \delta|a| + \delta|b| \leq \delta(1 + |a| + |b|) \leq \frac{\varepsilon \cdot (1 + |a| + |b|)}{1 + |a| + |b|} = \varepsilon,$$

odakle zaključujemo da je množenje realnih brojeva nепrekidna funkcija.

Iz Hajneove teoreme sledi

## Tvrđenje

*Funkcija  $f : D \rightarrow Y$  je neprekidna u tački  $a \in D$*

*ako i samo ako*

*za svaki niz  $\{x_n\} \subset D$  koji konvergira ka  $a$  sledi da niz  $\{f(x_n)\} \subset Y$  konvergira ka  $f(a)$ .*

## Vrste tačaka prekida funkcija

Neka su  $(X, d_X)$  i  $(Y, d_Y)$  metrički prostori i  $a$  tačka nagomilavanja za definicioni skup  $D \subset X$  funkcije  $f : D \rightarrow Y$ .

Pretpostavimo da u tački  $a$  funkcija ima prekid.

**1°)** Ako postoji  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , onda kažemo da funkcija  $f$  u tački  $a$  ima **prividan** ili **otklonljiv prekid**, odnosno da je  $a$  prividan (otklonljiv) prekid.

## a) Funkcija

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

ima u tački 0 prividan prekid (funkcija u tački 0 nije definisana), jer je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ako posmatramo funkciju

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases},$$

vidimo da je ona neprekidna u tački 0, jer smo je u tački 0, definisali baš sa

$$F(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



b) Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

ima otklonljiv prekid u tački 0, jer je

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x + 1) = 1 \neq f(0) = -1.$$

Međutim, funkcija

$$F(x) = 2x + 1$$

je neprekidna u tački 0.

## c) Funkcija

$$f(x) = e^{-\sqrt{\frac{x}{x+1}}}$$

ima prividan prekid u tački  $-1$  (funkcija nije u datoj tački definisana), jer je

$$\lim_{x \rightarrow -1} e^{-\sqrt{\frac{x}{x+1}}} = 0.$$

Primetimo da u ovom primeru ne postoji desna granična vrednost date funkcije u tački  $-1$ , jer funkcija nije definisana za  $x \in [-1, 0)$ , pa se granična vrednost poklapa sa levom graničnom vrednošću u datoj tački.

Funkcija

$$F(x) = \begin{cases} e^{-\sqrt{\frac{x}{x+1}}}, & x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0) \\ 0, & x = -1 \end{cases}$$

dobijena iz funkcije  $f$  je neprekidna u tački  $-1$ .

2°) Za  $X = \mathbb{R}$ , ako postoje leva i desna granična vrednost funkcije  $f(x)$  u tački  $a$ , tj. ako postoji

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a^-)$$

i

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a^+),$$

pri čemu je

$$f(a^-) \neq f(a^+),$$

onda kažemo da funkcija u tački  $a$  ima **skok**, odnosno da je  $a$  skok date funkcije.

a) Kako za funkciju

$$f(x) = \operatorname{arctg} \left( 1 + \frac{1}{x} \right),$$

važi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2},$$

to data funkcija ima skok u tački 0.

b) Za funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 1 \\ 3x - 1, & x > 1 \end{cases}$$

je

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 = f(1)$$

i

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2,$$

pa funkcija  $f$  u tački 1 ima skok.

I) Ako u tački  $a$  funkcija  $f$  ima prividan prekid ili skok, onda kažemo da data funkcija  $f$  u tački  $a$  ima **prekid prve vrste**.

II) Ako je tačka  $a$  prekid funkcije koji nije prve vrste, onda kažemo da u tački  $a$  funkcija  $f$  ima **prekid druge vrste**.

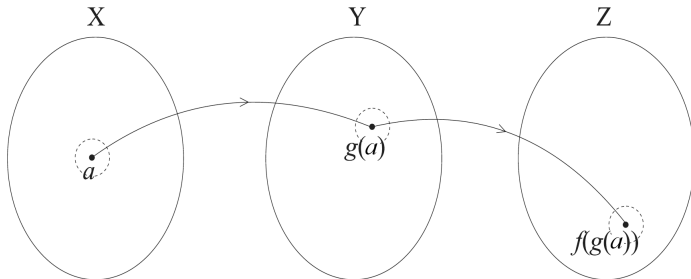
Ako je  $(Y, d_Y)$  metrički prostor, tada za funkciju  $f : I \rightarrow Y$  koja ima konačan broj prekida prve vrste nad intervalom  $I \subset \mathbb{R}$ , kažemo da je  $f$  **neprekidna po delovima** nad intervalom  $I$ .

# Nепrekidnost i granična vrednost složene funkcije

## Tvrđenje

*Neka su dati metrički prostori  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  i  $(Z, d_Z)$  kao i funkcije  $g : D \rightarrow Y$ ,  $D \subset X$  i  $f : Y \rightarrow Z$ .*

*Ako je  $g$  nепrekidna funkcija u tački  $a$ ,  $f$  nепrekidna funkcija u tački  $g(a)$ , tada je složena funkcija  $h = f \circ g$  nепrekidna funkcija u tački  $a$ .*



*Dokaz.* S obzirom da je  $f$  neprekidna funkcija u tački  $g(a)$  i  $g$  neprekidna funkcija u tački  $a$  to važi

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall u \in Y)(u \in L(g(a), \delta) \Rightarrow f(u) \in L(f(g(a)), \varepsilon)),$$

$$(\forall \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in L(a, \delta_1) \Rightarrow g(x) \in L(g(a), \varepsilon_1)).$$

Tada birajući da je  $\varepsilon_1 = \delta$ , imamo

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in L(a, \delta_1) \Rightarrow f(g(x)) \in L(f(g(a)), \varepsilon)),$$

odakle sledi da je složena funkcija  $h = f \circ g$  neprekidna u tački  $a$ .





## Posledica

*Neka su dati metrički prostori  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  i  $(Z, d_Z)$  kao i funkcije  $g : D \rightarrow Y$ ,  $D \subset X$  i  $f : Y \rightarrow Z$ .*

*Ako su funkcije  $g$  i  $f$  neprekidne, tada je i složena funkcija  $h = f \circ g$  neprekidna.*

## Tvrđenje

*Neka su dati metrički prostori  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  i  $(Z, d_Z)$  kao i funkcije  $g : D \rightarrow Y$ ,  $D \subset X$  i  $f : Y \rightarrow Z$ .*

*Ako je  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha \in Y$  i  $f$  neprekidna funkcija u tački  $\alpha$ , tada je*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = f(\alpha).$$

*Dokaz.* Funkcija  $f$  je neprekidna u tački  $\alpha$ , pa je

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall u \in Y)(u \in L(\alpha, \delta) \Rightarrow f(u) \in L(f(\alpha), \varepsilon)).$$

Kako je  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha$ , to je

$$(\forall \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D \setminus \{a\})(x \in L(a, \delta_1) \Rightarrow g(x) \in L(\alpha, \varepsilon_1)),$$

a odatle uzimajući  $\varepsilon_1 = \delta$  sledi da je

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D \setminus \{a\})(x \in L(a, \delta_1) \Rightarrow f(g(x)) \in L(f(\alpha), \varepsilon)),$$

tj.  $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\alpha)$ .

Ako je  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \alpha$  i  $X = \mathbb{R}$ , tada važi

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x > \Delta \Rightarrow g(x) \in L(\alpha, \delta)).$$

pa sledi da

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x > \Delta \Rightarrow f(g(x)) \in L(f(\alpha), \varepsilon)),$$

tj.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(g(x)) = f(\alpha)$ .

Slično, kao i prethodnom slučaju se dokazuje da iz  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \alpha$  i  $X = \mathbb{R}$ , sledi da je  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(g(x)) = f(\alpha)$ . □

Pretpostavka da je  $f: Y \rightarrow Z$  je bitna, jer ako to nije tačno teorema ne mora da važi što se vidi iz sledećeg primera

## Primer

*Posmatrajmo funkcije*

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = -x^2.$$

*Iz neprekidnosti u 0 funkcije  $f(x)$  i iz toga da je  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$  imamo da je*

$$f(\lim_{x \rightarrow 0} g(x)) = f(0) = 0.$$

*Kako je*

$$f(g(x)) = \sqrt{-x^2},$$

*to je funkcija  $f(g(x))$  definisana samo za  $x = 0$ , pa*

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x))$$

*ne postoji.*

## Tvrđenje

Neka su dati metrički prostori  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  i  $(Z, d_Z)$  kao i funkcije  $g : D \rightarrow Y$ ,  $D \subset X$  i  $f : Y \rightarrow Z$ . Pretpostavimo da

- 1)  $g(x) \rightarrow \alpha \in Y$ , kada  $x \rightarrow a$ ;
- 2)  $f(u) \rightarrow \beta$ , kada  $u \rightarrow \alpha$ ;
- 3)
  - a) Ako  $a \in X$ , (za slučaj  $X = \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , tj.  $x$  ne teži  $\pm\infty$ ), onda  $(\exists \delta^* \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in (D \setminus \{a\}) \cap L(a, \delta^*)) g(x) \neq \alpha$ ;
  - b) Ako je  $X = \mathbb{R}$  i  $g(x) \rightarrow \alpha$ , kada  $x \rightarrow \infty$ , onda  $(\exists \delta^* \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D \cap (\delta^*, \infty)) g(x) \neq \alpha$ ;
  - c) Ako je  $X = \mathbb{R}$  i  $g(x) \rightarrow \alpha$ , kada  $x \rightarrow -\infty$ , onda  $(\exists \delta^* \in \mathbb{R}^-)(\forall x \in D \cap (-\infty, \delta^*)) g(x) \neq \alpha$ .

Tada  $f(g(x)) \rightarrow \beta$ , kada  $x \rightarrow a$ .

## Tvrđenje

*Neka su dati metrički prostori  $(X, d_X)$  i  $(Z, d_Z)$  kao i funkcije  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset X$  i  $f : \mathbb{R} \rightarrow Z$ . Pretpostavimo da*

*1)  $g(x) \rightarrow \pm\infty$ , kada  $x \rightarrow a$ ,*

*2)  $f(u) \rightarrow \beta$ , kada  $u \rightarrow \pm\infty$ .*

*Tada  $f(g(x)) \rightarrow \beta$ , kada  $x \rightarrow a$ .*

## Primer

Neka je  $u = g(x) = \frac{1}{x}$ ,  $y = f(u) = (1 + \frac{1}{u})^u$ . Kako  $g(x) \rightarrow \infty$ , kada  $x \rightarrow 0^+$  i  $f(u) \rightarrow e$ , kada  $u \rightarrow \infty$ , to je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Kako  $g(x) \rightarrow -\infty$ , kada  $x \rightarrow 0^-$  i  $f(u) \rightarrow e$ , kada  $u \rightarrow -\infty$ , to je

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

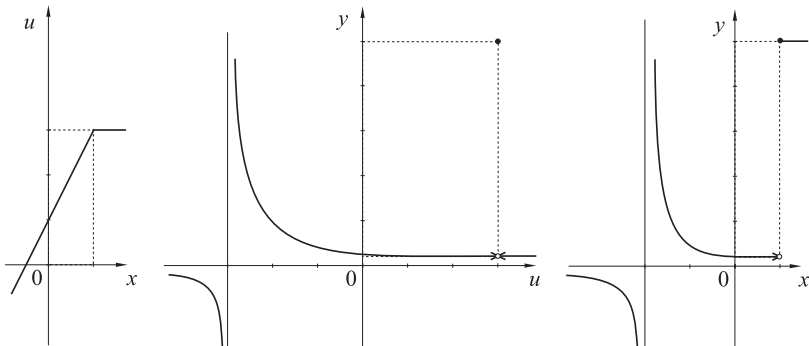
pa je

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

## Primer

$$\text{Za } u = g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 1 \\ 3, & x > 1 \end{cases} \text{ i } y = f(u) = \begin{cases} \frac{1}{u+3}, & u \neq 3 \\ 5, & u = 3 \end{cases}$$

$$\text{imamo da je } f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{2x+4}, & x < 1 \\ 5, & x \geq 1 \end{cases}.$$





1°) Iz neprekidnosti funkcije  $g$  u tački 2 je

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3, \quad (\alpha = 3)$$

i

$$\lim_{u \rightarrow 3} f(u) = \frac{1}{6}, \quad (\beta = \frac{1}{6}),$$

ne sledi da je

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(g(x)) = \frac{1}{6},$$

jer je

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 2} f(3) = 5.$$

Uslov 3) prethodne teoreme nije ispunjen, jer ne postoji okolina tačke 2 tako da je za svako  $x$  iz te okoline  $g(x) \neq 3$ .

2°)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x))$  ne postoji iako je  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$ , i  $\lim_{u \rightarrow 3} f(u) = \frac{1}{6}$ .

## Primer

Neka je  $u = g(x) = \frac{1}{x}$ ,  $y = f(u) = (1 + \frac{1}{u})^u$ . Kako  $g(x) \rightarrow \infty$ , kada  $x \rightarrow 0^+$  i  $f(u) \rightarrow e$ , kada  $u \rightarrow \infty$ , to je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Kako  $g(x) \rightarrow -\infty$ , kada  $x \rightarrow 0^-$  i  $f(u) \rightarrow e$ , kada  $u \rightarrow -\infty$ , to je

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

pa je

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

# Osobine neprekidnih funkcija

## Tvrđenje

*Neka su  $(X, d_X)$  i  $(Y, d_Y)$  metrički prostori i neka je data funkcija  $f : X \rightarrow Y$ . Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna*

- a) Funkcija  $f$  je neprekidna.*
- b) Inverzna slika svakog otvorenog skupa  $U \subset Y$  je otvoren skup.*
- c) Inverzna slika svakog zatvorenog skupa  $F \subset Y$  je zatvoren skup.*

## Tvrđenje

*Neka je  $(X, d)$  metrički prostor i  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset X$  funkcija koja je neprekidna u tački  $a \in D$ .*

*Ako je  $f(a) > c$  ( $f(a) < c$ ), tada postoji pozitivan realan broj  $\varepsilon$ , tako da za sve  $x \in L(a, \varepsilon) \cap D$  važi  $f(x) > c$  ( $f(x) < c$ ).*

*Dokaz.* Posmatrajmo slučaj kada je  $f(a) > c$ . Analogno se dokazuje i kada je  $f(a) < c$ . Neka je  $\varepsilon = f(a) - c > 0$ . Kako je  $f$  neprekidna funkcija u tački  $a$ , to

$$(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in L(a, \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon),$$

tj.  $c = f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$ . Dakle,

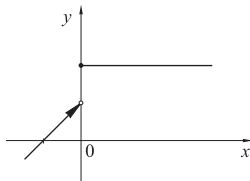
$$(\forall x \in D)(x \in L(a, \delta) \Rightarrow f(x) > c),$$

što je i trebalo da se dokaže. □

Ako funkcija  $f$  ima prekid u tački  $a \in D$ , teorema ne mora da važi.

Na primer, ako posmatramo funkciju

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0 \\ 2, & x \geq 0 \end{cases},$$



vidimo da ne postoji okolina  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  tačke 0, tako da iz  $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  sledi

$$f(x) > \frac{3}{2}.$$

## Posledica

Ako je funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset X$ , neprekidna u tački  $a \in D$  i  $f(a) > 0$  ( $f(a) < 0$ ), tada postoji otvorena lopta  $L(a, \delta)$ , tako da za svako  $x \in D \cap L(a, \delta)$  sledi da je  $f(x) > 0$  ( $f(x) < 0$ ).

## Tvrđenje

*Ako je funkcija  $f : [a, b] \rightarrow Y$  neprekidna nad zatvorenim intervalom  $[a, b]$ , onda je ona nad tim intervalom i ograničena.*

*Dokaz.* Dokaz ćemo dati za slučaj kada je  $Y = \mathbb{R}$ .

Pretpostavimo da  $f$  nije ograničena nad  $[a, b]$ . Tada

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x_n \in [a, b]) |f(x_n)| > n. \quad (2)$$

Posmatrajmo niz  $\{x_n\}$ . S obzirom da su svi članovi niza  $\{x_n\}$  iz  $[a, b]$ , to je dati niz ograničen, pa postoji konvergentan podniz  $\{x_{n_k}\}$  datog niza.

Neka je  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi \in [a, b]$ .

Kako je  $f$  neprekidna funkcija nad  $[a, b]$ , to je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}) = f(\xi),$$

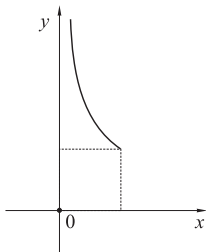
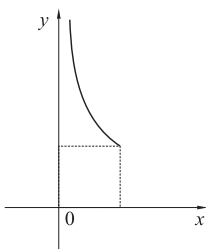
odnosno sledi da je niz  $\{f(x_{n_k})\}$  konvergentan, što je u suprotnosti sa (2).

Dakle, funkcija  $f$  je ograničena nad  $[a, b]$ .

Obe pretpostavke prethodne teoreme su bitne.

- Ako posmatramo funkciju  $f(x) = \frac{1}{x}$ , vidimo da je ona neprekidna nad intervalom  $(0, 1]$ , ali nad tim intervalom nije ograničena (ne postoji  $\sup_{x \in (0, 1]} f(x)$ , dok je  $\inf_{x \in (0, 1]} f(x) = 1$ ).

- Ako posmatramo funkciju  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , vidimo da ona nije ograničena nad zatvorenim intervalom  $[0, 1]$  (ima prekid u tački 0).



## Definicija

Za neprazan skup  $A \subset X$  kažemo da je **kompaktan** u metričkom prostoru  $(X, d_X)$ , ako za svaki niz  $\{a_n\} \subset A$  postoji tačka nagomilavanja  $a \in A$ .

Metrički prostor  $(X, d_X)$  je **kompaktan** ako je  $X$  kompaktan skup u metričkom prostoru  $(X, d_X)$ .

Prethodna teorema važi i kada se zatvoreni interval zameni skupom kompaktnim u metričkom prostoru  $(X, d_X)$  :

## Tvrđenje

Neka su  $(X, d_X)$  i  $(Y, d_Y)$  proizvoljni metrički prostori. Ako je  $f : D \rightarrow Y$ ,  $D \subset X$  neprekidna funkcija i ako je skup  $D$  kompaktan u metričkom prostoru  $(X, d_X)$ , tada je  $f$  ograničena funkcija.



## Tvrđenje

*Ako je funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna nad  $[a, b]$ , tada ona bar jednom dostiže svoju najveću i najmanju vrednost (funkcija  $f(x)$  ima maksimum i minimum nad intervalom  $[a, b]$ ), tj. postoje realni brojevi  $\alpha, \beta \in [a, b]$ , takvi da je*

$$m = \inf_{x \in [a, b]} f(x) = f(\alpha) \quad i \quad M = \sup_{x \in [a, b]} f(x) = f(\beta).$$

I ova teorema važi u opštijem slučaju, tj. važi sledeće tvrđenje:

## Tvrđenje

*Neka je  $(X, d_X)$  metrički prostor i  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset X$  neprekidna funkcija nad kompaktnim skupom  $D$ . Tada funkcija  $f$  dostiže najveću i najmanju vrednost nad skupom  $D$ .*

## Tvrđenje

*Ako je funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna nad intervalom  $[a, b]$  i  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , tada u intervalu  $(a, b)$  postoji bar jedna nula funkcije, tj. postoji tačka  $\xi \in (a, b)$ , tako da je  $f(\xi) = 0$ .*

*Dokaz.* Ako je

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0,$$

tada je

$$\xi = \frac{a+b}{2} \in (a, b),$$

pa je teorema dokazana.

Ako je

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0,$$

tada od podintervala

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \quad \text{i} \quad \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

intervala  $[a, b]$  izaberimo onaj, koji ćemo obeležiti sa  $[a_1, b_1]$ , kod koga funkcija na krajevima intervala ima različit znak.

Ponavljajući isti postupak na intervalu  $[a_1, b_1]$  dobićemo da je ili

$$f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) = 0 \quad \text{ili} \quad f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) \neq 0.$$

Ako je

$$f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) = 0,$$

tada je

$$\xi = \frac{a_1 + b_1}{2} \in (a, b),$$

pa je teorema dokazana.

Ako je

$$f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) \neq 0,$$

tada od podintervala

$$\left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2}\right] \quad \text{i} \quad \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1\right]$$

intervala  $[a_1, b_1]$  izaberimo onaj, koji ćemo obeležiti sa  $[a_2, b_2]$ , kod koga funkcija na krajevima intervala ima različit znak.

Nastavljajući taj proces, dobićemo da

1) Posle  $n$  koraka, ako je  $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$ , tada je  $\xi = \frac{a_n+b_n}{2}$ , pa je teorema dokazana.

2) Ako je za svako  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \neq 0$ , tada za niz intervala  $\{[a_n, b_n]\}$  važi:

$$- [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots;$$

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0;$$

pa je dati niz, niz umetnutih intervala. Sledi da postoji jedna i samo jedna zajednička tačka  $\xi$  za sve intervale.

Dokazaćemo da je  $f(\xi) = 0$ . Pretpostavimo suprotno, tj. da je

$$f(\xi) > 0 \quad (f(\xi) < 0).$$

Primetimo pre svega da je funkcija  $f$  definisana u tački  $\xi \in (a, b)$ , jer je  $f$  neprekidna nad zatvorenim intervalom  $[a, b]$ .

Kako je  $f$  neprekidna u tački  $\xi$  i po pretpostavci je  $f(\xi) > 0$  ( $f(\xi) < 0$ ), to postoji pozitivan realan broj  $\delta$ , tako da za svako  $x$  iz skupa

$$(\xi - \delta, \xi + \delta) \cap [a, b]$$

važi

$$f(x) > 0 \quad (f(x) < 0).$$

Kako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi,$$

to postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  tako da je za svako  $n \geq n_0$

$$[a_n, b_n] \subset (\xi - \delta, \xi + \delta).$$

Kako je

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0,$$

to funkcija  $f$  nije uvek pozitivna (negativna) nad intervalom

$$(\xi - \delta, \xi + \delta)$$

što je kontradikcija.

Dakle,  $f(\xi) = 0$ .

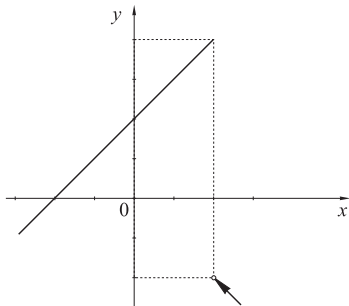




Bitna je pretpostavka teoreme da je funkcija  $f$  neprekidna nad datim zatvorenim intervalom.

Ako funkcija  $f$  nije neprekidna nad posmatranim zatvorenim intervalom, tada  $f$  ne mora obavezno da ima nulu nad odgovarajućim otvorenim intervalom. Na primer, ako posmatramo funkciju

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq 2 \\ -x, & x > 2 \end{cases},$$



vidimo da funkcija  $f$  nema nulu u intervalu  $(0, 3)$ , iako je

$$f(0) = 2 > 0, \quad f(3) = -3 < 0,$$

jer funkcija  $f$  ima prekid u tački 2.

## Tvrđenje

*Ako je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija nad  $[a, b]$  i ako je  $f(a) \neq f(b)$ , ona u tom intervalu uzima sve vrednosti između  $f(a)$  i  $f(b)$ .*

## Tvrđenje

*Ako je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija, tada je ili za svako  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) = c$  ili  $f([a, b]) = [c, d]$ .*

## Tvrđenje

*Ako je  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna strogo monotona funkcija nad  $(a, b)$ , tada je  $f((a, b))$  otvoren interval.*

## Tvrđenje

*Ako je  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna strogo monotona funkcija nad proizvoljnim intervalom realnih brojeva  $I$ , tada je inverzna funkcija  $f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna nad  $f(I)$ .*

# Elementarne funkcije

**Osnovne elementarne funkcije** su sledeće funkcije:

- konstantna funkcija  $y = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,
- stepena funkcija  $y = x^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,
- eksponencijalna funkcija  $y = a^x$ , gde je  $a > 0$  i  $a \neq 1$ ,
- logaritamska funkcija  $y = \log_a x$ , gde je  $a > 0$  i  $a \neq 1$ ,
- trigonometrijske funkcije:  
 $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$ ,
- inverzne trigonometrijske funkcije:  
 $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$ ,  $y = \operatorname{arcctg} x$ .

**Elementarne funkcije** uvodimo sledećom rekurzivnom definicijom.

## Definicija

1. *Osnovne elementarne funkcije su elementarne funkcije.*
2. *Ako su  $f$  i  $g$  elementarne funkcije,  $g \neq 0$  ( $0$  nula funkcija), tada su elementarne funkcije i  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \cdot g$ ,  $\frac{f}{g}$ ,  $f \circ g$ .*
3. *Elementarne funkcije se mogu dobiti samo konačnom primenom pravila 1. i 2. ove definicije.*

Na primer, elementarne funkcije su:  $y = 2x^2 + 3x + 5$ ,  
 $y = 3^{2x} - \sin^2 x$ ,  $y = \ln(\sqrt{x} + 3)$ ,  $y = \frac{\ln x + 5}{\arctg x + 3x}$ ,  $y = \ln(\arcsin x^2)$ .

Na osnovu poslednje teoreme i osobina neprekidnih funkcija sledi da važi sledeća teorema

## Tvrđenje

*Elementarne funkcije su neprekidne u oblasti definisanosti.*

# Uniformna neprekidnost

## Definicija

Neka su dati metrički prostori  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  i funkcija  $f : D \rightarrow Y$ ,  $D \subset X$ . Funkcija  $f$  je **uniformno neprekidna nad**  $\emptyset \neq E \subset D$  ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in E)(d_X(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon).$$

Dakle, možemo reći da je funkcija  $f$  uniformno neprekidna nad  $E$  ako za svaki pozitivan realan broj  $\varepsilon$ , postoji pozitivan realan broj  $\delta$ , koji zavisi samo od  $\varepsilon$  ali ne i od  $x$ , tako da ako je rastojanje tačaka  $x_1$  i  $x_2$  iz  $E$  manje od  $\delta$ , tada je rastojanje slika manje od  $\varepsilon$ .

## Napomena

*Očigledno je, da ako je funkcija  $f$  uniformno neprekidna nad skupom  $E$ , ona je nad tim skupom i neprekidna. Da obrnuto nije uvek tačno pokazuje sledeći primer.*

## Primer

*Funkcija  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definisana sa*

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

*je nad intervalom  $(0, 1)$  neprekidna, ali nije i uniformno neprekidna.*

Da bi to pokazali pretpostavimo suprotno, tj. da je data funkcija nad intervalom  $(0, 1)$  uniformno neprekidna. Tada za  $0 < \varepsilon < 1$ , postoji  $\delta > 0$ , tako da je

$$|x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right| < \varepsilon.$$

Primetimo da kako  $x_1, x_2 \in (0, 1)$ , to je  $\delta < 1$ .

Neka je

$$x_1 = \delta \in (0, 1), \quad x_2 = \frac{\delta}{1 + \varepsilon} \in (0, 1).$$

Tada važi:

$$|x_2 - x_1| = \left| \frac{\delta}{1 + \varepsilon} - \delta \right| = \delta \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right| = \left| \frac{1 + \varepsilon}{\delta} - \frac{1}{\delta} \right| = \frac{\varepsilon}{\delta} > \varepsilon,$$

što je suprotno pretpostavci da je funkcija  $f$  uniformno neprekidna. Dakle,  $f$  nije uniformno neprekidna nad  $(0, 1)$ .



## Tvrđenje

*Ako je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna nad  $[a, b]$ , ona je nad tim intervalom i uniformno neprekidna.*

## Primer

*Funkcija  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definisana sa  $f(x) = x$  je nad intervalom  $(0, 1)$  neprekidna i uniformno neprekidna.*

## Primer

*Funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definisana sa  $f(x) = x^2$  je nad intervalom  $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  uniformno neprekidna.*

## Definicija izvoda

Posmatramo realnu funkciju  $y = f(x)$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , i  $x \in D^\circ$ .

- ▶  $\Delta x \neq 0$  - **priraštaj argumenta** funkcije  $f(x)$  u tački  $x \in D^\circ$
- ▶ ukoliko  $x + \Delta x \in D^\circ$  tada je

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

**priraštaj funkcije**  $f(x)$  u tački  $x \in D^\circ$  koji odgovara priraštaju argumenta  $\Delta x$

Kako je priraštaj funkcije  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ , to količnik  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  nije definisan za  $\Delta x = 0$ .

Da li postoji granična vrednost tog količnika kada  $\Delta x \rightarrow 0$ ?

Očigledno da je potreban uslov da granična vrednost količnika postoji kada  $\Delta x \rightarrow 0$  taj da i  $\Delta y \rightarrow 0$  tj. da funkcija  $f(x)$  treba da bude neprekidna u tački  $x$ .

## Definicija

*Ako postoji granična vrednost*

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

onda se ta granična vrednost zove **izvod funkcije  $f(x)$  u tački  $x$**  i označava se sa  **$f'(x)$**  ili  **$y'$** .

# Izvod i neprekidnost. Jednostrani izvod

## Teorema

*Ako funkcija ima izvod u nekoj tački  $x$ , ona je u toj tački i neprekidna.*

*Dokaz.*  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x = f'(x) \cdot 0 = 0.$  □

**Obrnuto ne mora da važi!** Primer:  $f(x) = |x|$ , neprekidna je za svako  $x$ , a nema izvoda u  $x = 0$ , jer je

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$

pri čemu je

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Prethodni primer pokazuje da mogu postojati desna i leva granična vrednost,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  i  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  koje su različite, pa ima smisla definisati i jednostrane izvode.

- **Desni izvod** funkcije  $f(x)$  nad  $[x, x + \delta)$ ,  $\delta > 0$  je

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad x + \Delta x \in [x, x + \delta)$$

- **Levi izvod** funkcije  $f(x)$  nad  $(x - \delta, x]$ ,  $\delta > 0$  je

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad x + \Delta x \in (x - \delta, x]$$

$f(x)$  ima izvod u  $x$  **akko** postoje jednostrani izvodi i važi  

$$f'_-(x) = f'_+(x) = f'(x)$$

Da iz neprekidnosti funkcije u tački  $x$  ne sledi uvek da postoji bar jedan jednostrani izvod u posmatranoj tački, pokazuje sledeći primer.

### Primer

Funkcija  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$  nema jednostrane izvode u tački  $x = 0$ .

*Rešenje.* Funkcija  $f(x)$  je neprekidna za svako  $x$ . U tački  $x = 0$  ne postoji ni jedan jednostrani izvod:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{\Delta x} \quad \text{ne postoji,}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \sin \frac{1}{\Delta x} \quad \text{ne postoji.}$$

- ▶ funkcija ima izvod u svakoj tački  $(a, b)$
- ▶ u tački  $a$  funkcija ima desni izvod, za intervale  $I_1$  i  $I_3$ , piše se da je  $f'(a) = f'_+(a)$
- ▶ u tački  $b$  funkcija ima levi izvod, za intervale  $I_2$  i  $I_3$ , piše se da je  $f'(b) = f'_-(b)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha, \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0$$

Može se desiti da funkcija ima izvod u svakoj tački intervala  $(a, b)$ , da u tačakama  $a$  i  $b$  nema izvod, a da ima izvod nad zatvorenim intervalom  $[a, b]$ .

Na primer, funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \sin x & , \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{2}{\pi}x & , \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ima izvod  $f'(x)$  nad intervalom  $[0, \frac{\pi}{2}]$  iako u krajnjim tačkama  $0$  i  $\frac{\pi}{2}$  tog intervala ne postoji izvod, jer je

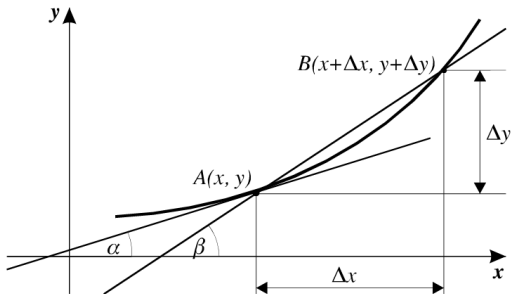
$$f'_-(0) = 0, \quad f'_+(0) = 1,$$

$$f'_-\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f'_+\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}.$$



# Geometrijska interpretacija izvoda

$y = f(x)$  je neprekidna funkcija nad  $(a, b)$



- ▶  $A, B$  su tačke grafika, prava  $AB$  je **sečica** krive,  $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
- ▶ ako  $B \rightarrow A$  prava  $AB$  postaje **tangenta** krive u tački  $A$
- ▶ ako je  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , ugao koji tangenta zaklapa sa pozitivnim

delom  $x$ -ose tada je  $\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$ .

- ▶ ako je  $f'(a) \neq 0$ , jednačina tangente u tački  $A(a, f(a))$  je

$$y - f(a) = f'(a)(x - a),$$

a jednačina normale u tački  $A(a, f(a))$  je

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

- ▶ jednačina desne tangente u tački  $A(a, f(a))$  je

$$y - f(a) = f'_+(a)(x - a),$$

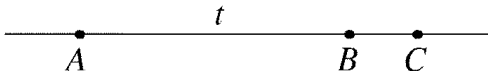
a jednačina leve tangente u tački  $A(a, f(a))$  je

$$y - f(a) = f'_-(a)(x - a),$$

- ▶ ako je ako je  $f'(a) = 0$  jednačina tangente funkcije u tački  $A(a, f(a))$  je  $y = f(a)$ , a jednačina normale je  $x = a$ .

## Fizička interpretacija izvoda - brzina i ubrzanje tačke

Neka se tačka kreće po pravoj tako da je jednačinom  $s = f(t)$  data zavisnost pređenog puta od početne tačke  $A$ .



U trenutku  $t$  neka se tačka nalazi u  $B$ , a u trenutku  $t + \Delta t$  u  $C$ .  
Pređeni put do trenutka  $t$  je  $f(t)$ , a do trenutka  $t + \Delta t$  je  $f(t + \Delta t)$ .  
Srednja brzina  $v_s$  na putu  $BC$  je jednaka

$$v_s = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Prirodno je definisati trenutnu brzinu te tačke u  $B$  kao graničnu vrednost srednje brzine kada  $C$  teži  $B$ . Drugim rečima, brzina  $v(t)$  u  $B$  se definiše kao

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t),$$

ako ta granična vrednost postoji.

Slično, ako je u trenutku  $t$  data brzina  $v = f'(t)$ , a u trenutku  $t + \Delta t$  brzina  $v = f'(t + \Delta t)$ , srednje ubrzanje na putu  $BC$  je jednako

$$a_s = \frac{\Delta v_s}{\Delta t},$$

pa je trenutno ubrzanje u tački  $B$  jednako

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_s}{\Delta t} = v'(t),$$

ako ta granična vrednost postoji.

# Osobine izvoda

## Teorema

Ako funkcije  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  imaju izvod u tački  $x$ , tada i funkcije  $u \pm v$ ,  $uv$ ,  $\frac{u}{v}$  ( $v(x) \neq 0$  u datoj tački  $x$ ) i  $c \cdot u$  imaju izvod u tački  $x$  i važi da je:

1.  $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x),$
2.  $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$
3.  $\left[ \frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)},$
4.  $[c u(x)]' = c u'(x), c = \text{const.}$

## Teorema (izvod složene funkcije)

Neka je data složena funkcija  $y = f(u)$ ,  $u = g(x)$ . Ako  $g(x)$  ima izvod u tački  $x$  i  $f(u)$  ima izvod u tački  $u$ , tada je

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(u)g'(x).$$

## Teorema (izvod inverzne funkcije)

Neka je  $f(x)$  neprekidna strogo monotona funkcija definisana na intervalu  $(a, b)$  i  $f^{-1}(x)$  njena inverzna funkcija. Ako funkcija  $f(x)$  ima izvod  $f'(x)$  u tački  $x \in (a, b)$  i  $f'(x) \neq 0$ , tada funkcija  $f^{-1}(x)$  ima izvod u tački  $y = f(x)$  i važi

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Neka su nad intervalom  $I \subset \mathbb{R}$  definisane realne funkcije

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in I,$$

pri čemu za funkciju  $\varphi(t)$  postoji inverzna funkcija  $t = \varphi^{-1}(x)$ .

Složena funkcija  $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$  je definisana nad skupom vrednosti  $\{\varphi(t) : t \in I\}$  funkcije  $\varphi(t)$ .

Tada je sa  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in I$  funkcija  $f(x)$  zadata u **parametarskom obliku** i promenljivu  $t$  zovemo **parametrom**.

### Teorema (izvod parametarski zadate funkcije)

*Neka je data funkcija  $y = f(x)$  u parametarskom obliku  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $t \in I$ . Ako neprekidne funkcije  $\varphi(t)$  i  $\psi(t)$  imaju izvode u tački  $t \in (a, b)$  i ukoliko je  $\varphi'(t) \neq 0$ , tada funkcija  $y = f(x)$  ima izvod u tački  $t$  i važi*

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}.$$

## Logaritamski izvod

Neka je data funkcija Neka je  $y = f(x)^{g(x)}$ ,  $f(x) > 0$ . Tada je

$$\ln y = g(x) \ln f(x),$$

pa je

$$\frac{y'}{y} = g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)},$$

odakle je

$$y' = f(x)^{g(x)} \left( g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right)$$

## Primer

Odrediti prvi izvod funkcije  $y = x^x$ .



## Diferencijabilnost. Diferencijal.

Neka je funkcija  $f(x)$  definisana na skupu  $D$  i neka  $x \in D^\circ$ .

Priraštaj funkcije

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x), \quad x + \Delta x \in D^\circ$$

zavisi od priraštaja nezavisno promenljive  $\Delta x$ .

### Definicija

Za funkciju  $f(x)$  se kaže da je **diferencijabilna u tački  $x$**  ako se  $\Delta y$  može napisati u obliku

$$\Delta y = D\Delta x + \alpha\Delta x,$$

pri čemu  $\alpha \rightarrow 0$  kada  $\Delta x \rightarrow 0$ , dok  $D$  ne zavisi od  $\Delta x$ .

Linearni deo priraštaja funkcije,  $D\Delta x$ , naziva se **diferencijal funkcije  $f(x)$**  i obeležava se sa  $dy$  ili  $df(x)$ , tj.

$$dy = df(x) = D\Delta x.$$

- ▶ Ako je funkcija diferencijabilna u svakoj tački skupa  $A$  onda se kaže da je  $f(x)$  **diferencijabilna nad skupom**  $A$ .
- ▶ Ako funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}$  ima izvod u svakoj tački skupa  $X_1 \subseteq D^\circ$ , tada za funkciju  $f' : x \rightarrow f'(x)$ ,  $x \in X_1$  kažemo da je **izvodna funkcija** funkcije  $f$ .

## Primer

Za funkciju  $f(x) = x^2$  je

$$\begin{aligned}
 \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) \\
 &= (x + \Delta x)^2 - x^2 \\
 &= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 \\
 &= \underbrace{2x}_{D} \Delta x + \underbrace{\Delta x}_{\alpha} \Delta x,
 \end{aligned}$$

gde  $D = 2x$  ne zavisi od  $\Delta x$ , a  $\alpha = \Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$ , pa je ova funkcija diferencijabilna.

## Teorema

*Potreban i dovoljan uslov da funkcija  $f(x)$  bude diferencijabilna u tački  $x$  je da ima izvod u toj tački.*

*Dokaz. **Uslov je potreban.*** Pretpostavimo da je funkcija  $f(x)$  diferencijabilna u tački  $x$ . Tada je

$$\Delta y = D\Delta x + \alpha\Delta x,$$

pri čemu  $\alpha \rightarrow 0$  kada  $\Delta x \rightarrow 0$ . Sledi da je

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (D + \alpha) = D.$$

Izvod postoji i to je baš  $D$ .

**Uslov je dovoljan.** Ako  $f(x)$  ima izvod u tački, tj. postoji granična vrednost

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x),$$

tada je količnik

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0.$$

Sledi da je

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x,$$

što znači da je funkcija  $f(x)$  diferencijabilna u tački  $x$ .

Treba uočiti da  $f'(x)$  ne zavisi od  $\Delta x$ .



- ▶ Dakle, diferencijal je dat obrascem  $dy = f'(x)\Delta x$ .
- ▶ Za funkciju  $y = x$  je  $dy = dx$  pa se i u opštem slučaju  $\Delta x$  zamenjuje sa  $dx$ , pa je

$$dy = f'(x)dx \Rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

što je **Lajbnicova oznaka za izvod**.

- ▶ Izvod složene funkcije je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

- ▶ Izvod inverzne funkcije je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

# Invarijantnost oblika diferencijala

- Ako je  $y = f(u)$ ,  $u = g(x)$  složena funkcija, tada je

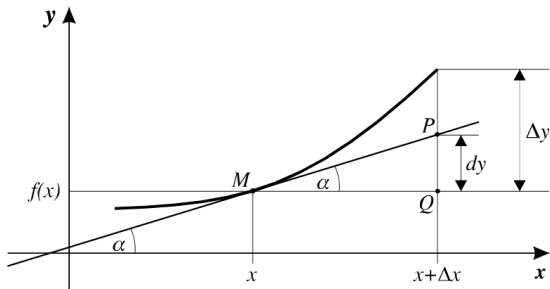
$$dy = d(f(g(x))) = (f \circ g)'(x)dx = f'(u)g'(x)dx$$

odnosno

$$dy = f'(u)du$$

Dakle, diferencijal ima osobinu **invarijantnosti oblika**, tj. diferencijal ima isti oblik i kada je  $u$  funkcija od  $x$ , kao što bi imao da je  $u$  nezavisna promenljiva.

# Geometrijska interpretacija diferencijala



- Neka u proizvoljnoj tački  $M(x, f(x))$  kriva  $y = f(x)$  ima tangentu. Tada je

$$dy = f'(x)\Delta x = \operatorname{tg}\alpha \Delta x = \frac{\overline{PQ}}{\overline{MQ}} \overline{MQ} = \overline{PQ},$$

tj. diferencijal  $dy$  je priraštaj ordinate tangente u tački  $M(x, f(x))$  koji odgovara priraštaju argumenta  $\Delta x$ .

# Osobine diferencijala

## Teorema (osobine diferencijala)

Ako su funkcije  $u = u(x)$  i  $v = v(x)$  diferencijabilne u tački  $x$  tada važi

1.  $d(u(x) \pm v(x)) = du(x) \pm dv(x),$
2.  $d(u(x)v(x)) = v(x)du(x) + u(x)dv(x),$
3.  $d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{v(x)du(x) - u(x)dv(x)}{v^2(x)}, \quad v(x) \neq 0$
4.  $d(c \cdot u(x)) = c \cdot du(x).$



## Primena diferencijala

Kako je

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x,$$

pri čemu  $\alpha \rightarrow 0$  kada  $\Delta x \rightarrow 0$ , u određenom smislu priraštaj

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

možemo aproksimirati diferencijalom

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$$

kada  $\Delta x \rightarrow 0$ , tj.

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x \quad (\Delta x \rightarrow 0).$$

Na osnovu toga sledi da je

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \quad (\Delta x \rightarrow 0).$$

## Primer

Odrediti približno  $\sqrt[3]{8,01}$ .

Rešenje. Za funkciju  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  imamo da je

$$\sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Delta x, \quad \Delta x \rightarrow 0, x \neq 0.$$

Za  $x = 8$  i  $\Delta x = 0,01$  dobijamo

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{8 + 0,01} &\approx \sqrt[3]{8} + \frac{1}{3\sqrt[3]{64}} \cdot 0,01 \\ &= 2 + \frac{1}{1200} \\ &\approx 2 + 0,00083 = 2,00083. \end{aligned}$$

## Izvodi višeg reda

Neka funkcija  $y = f(x)$  ima izvod u svakoj tački skupa  $X_1 \subset D^\circ$ .

Njen izvod  $f'(x)$  je funkcija nezavisne promenljive  $x$ ,  $x \in X_1$ .

Ako ona ima izvod u nekoj tački  $x \in X_1$  tada njen izvod  $(f'(x))'$  nazivamo

**drugi izvod** ili **izvod drugog reda** funkcije  $f(x)$  u tački  $x$ .

Slično se definišu ostali viši izvodi funkcije  $y = f(x)$  :

$$\begin{aligned}
 y & \stackrel{\text{def}}{=} f^0(x), \\
 y' & = f'(x), \\
 y'' & = (f'(x))', \\
 & \vdots \\
 f^{(n)}(x) & = (f^{(n-1)}(x))'.
 \end{aligned}$$

$$y_x'' = \left( \frac{y_t'}{x_t'} \right)' = \left( \frac{y_t'}{x_t'} \right)' \cdot t_x' = \frac{y_t'' x_t' - x_t'' y_t'}{(x_t')^2} \cdot \frac{1}{x_t'} = \frac{y_t'' x_t' - x_t'' y_t'}{(x_t')^3}$$

- za inverznu funkciju  $x = f^{-1}(y)$  :

$$x_y'' = \left( \frac{1}{y_x'} \right)'_y = \left( \frac{1}{y_x'} \right)'_x \cdot x_y' = -\frac{y_x''}{(y_x')^2} \frac{1}{y_x'} = -\frac{y_x''}{(y_x')^3}$$

## Diferencijali višeg reda

Ako je funkcija  $f(x)$  dva puta diferencijabilna nad  $X_1 \subset D^\circ$  onda se diferencijal funkcije  $y = f'(x)dx$  označava sa  $d^2y$  i naziva **drugi diferencijal** ili **diferencijal drugog reda** funkcije  $f(x)$ .

Shodno tome se  $dy = f'(x)dx$  naziva **diferencijal prvog reda** ili **prvi diferencijal**.

- Važi da je  $d^2f = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dx^2$ .
- Ako je funkcija  $f^{(n-1)}(x)$ ,  $n \geq 2$  diferencijabilna, tada se diferencijal funkcije  $d^{n-1}y = f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}$  naziva **diferencijal  $n$ -tog reda** funkcije  $f(x)$  i može da se pokaže da važi  $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$ .

Ako je  $y = f(u)$ ,  $u = u(x)$ , gde su funkcije  $y = f(u)$  i  $u = u(x)$  dva puta diferencijabilne, tada je

$$\begin{aligned}d^2y &= d(dy) \\&= d(f'(u)du) \\&= d(f'(u))du + f'(u)d(du) \\&= d(f'(u))du + f'(u)d(u'(x)dx) \\&= d(f'(u))du + f'(u)(u''(x)dx^2) \\&= f''(u)du^2 + f'(u)d^2u,\end{aligned}$$

pa diferencijali višeg reda ne poseduju osobinu invarijantnosti oblika!

# Osnovne teoreme diferencijalnog računa

## Rolova teorema

### Rolova teorema

Ako je funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna nad zatvorenim intervalom  $[a, b]$ , ima izvod nad otvorenim intervalom  $(a, b)$  i ako je  $f(a) = f(b)$ , tada postoji bar jedna tačka  $\xi \in (a, b)$  takva da je  $f'(\xi) = 0$ .

**Geometrijski smisao:** Postoji bar jedna tačka  $\xi \in (a, b)$  takva da je tangenta krive  $y = f(x)$  u tački  $A(\xi, f(\xi))$  paralelna sa  $x$ -osom.

**Mehanička interpretacija:** Tačka se kreće po pravoj, u trenutku  $t$  se nalazi u tački sa koordinatom  $x(t)$ .

Neka je  $x = x(t)$  neprekidna za  $t \in [\alpha, \beta]$  i diferencijabilna za  $t \in (\alpha, \beta)$ . Ako je  $x(\alpha) = x(\beta)$  (tj. položaj tačke u trenutku  $t = \alpha$  poklapa se sa položajem tačke u trenutku  $t = \beta$ ), tada postoji bar jedna tačka  $\xi \in (a, b)$  u kojoj je brzina jednaka nuli.

*Dokaz Rolove teoreme.* Nепrekidna funkcija nad zatvorenim intervalom dostiže bar jednom najmanju vrednost  $m$  i najveću vrednost  $M$ .

- Ako je  $m = M$ ,  $f(x)$  je konstantna na celom intervalu, pa je  $f'(x) = 0$  za svako  $x \in (a, b)$ .

- Neka je  $m < M$ .

Pp. da je  $M > f(a) = f(b)$  (ukoliko je  $M = f(a)$  tada je  $m < f(a)$ ).

Tada postoji bar jedna tačka  $\xi \in (a, b)$ , takva da je  $f(\xi) = M$ .

Dokazaćemo da je  $f'(\xi) = 0$ . Važi

$$f(\xi + \Delta x) \leq f(\xi), \text{ za } \xi + \Delta x \in [a, b], \quad \text{tj.}$$

$$\frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \leq 0, \Delta x > 0 \text{ i } \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \geq 0, \Delta x < 0.$$

Za tačku  $\xi$ , po pretpostavci postoji  $f'(\xi)$ , pa je  $f'_+(\xi) = f'_-(\xi) = f'(\xi)$ .

Iz  $f'_+(\xi) \leq 0$ ,  $f'_-(\xi) \geq 0$  i  $f'_+(\xi) = f'_-(\xi) = f'(\xi)$  sledi da je  $f'(\xi) = 0$ .  $\square$



# Lagranžova teorema

## Lagranžova teorema - teorema o srednjoj vrednosti

*Ako je funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna nad zatvorenim intervalom  $[a, b]$ , ima izvod nad otvorenim intervalom  $(a, b)$ , tada postoji bar jedna tačka  $\xi \in (a, b)$  takva da je*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

**Geometrijski smisao:** Postoji tačka  $\xi \in (a, b)$  takva da je tangenta u  $C(\xi, f(\xi))$  paralelna pravoj kroz  $A(a, f(a))$  i  $B(b, f(b))$ .

**Mehanička interpretacija:** Kod pravolinijskog kretanja tačke po zakonu  $x = x(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  gde je funkcija  $x(t)$  neprekidna za  $t \in [\alpha, \beta]$  i diferencijabilna nad  $(\alpha, \beta)$  postoji tačka  $\xi \in (\alpha, \beta)$  u kojoj je trenutna brzina jednaka srednjoj brzini u posmatranom intervalu.

► Ako stavimo

$$\frac{\xi - a}{b - a} = \theta,$$

tada je  $\xi = a + \theta(b - a)$ ,  $0 < \theta < 1$ , pa se tvrđenje

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

može zapisati u obliku

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a), \quad 0 < \theta < 1,$$

a uzimajući  $a = x$  i  $b = x + h$  dobija se

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

# Posledice Rolove i Lagranžove teoreme

## Posledica

*(Rolv metod za razdvajanje korena funkcije) Ako za funkciju*

*$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  važi:*

- a)  $f(x)$  je neprekidna nad zatvorenim intervalom  $[a, b]$ ,*
- b)  $f(x)$  je diferencijabilna nad intervalom  $(a, b)$  i pri tome je  $f'(x) \neq 0$  za  $x \in (a, b)$ ,*
- c)  $f(a) \cdot f(b) < 0$*

*tada postoji samo jedna nula funkcije nad intervalom  $(a, b)$ .*

## Posledica

*Ako je funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  diferencijabilna nad intervalom  $(a, b)$  i ako su  $c_1, c_2 \in (a, b)$ ,  $c_1 < c_2$  dve uzastopne nule prvog izvoda, tada nad intervalom  $(c_1, c_2)$  funkcija  $f(x)$  ima najviše jednu nulu.*

## Primer

*Pokazati da jednačina  $x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0$  nad intervalom  $(-1, 1)$  ima tačno jedno rešenje.*

*Rešenje.* Posmatrajmo funkciju  $f(x) = x^3 - 3x + \frac{1}{2}$ .

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \vee x = -1$$

$$f(-1) = -1 + 3 + \frac{1}{2} > 0, \quad f(1) = 1 - 3 + \frac{1}{2} < 0$$

pa na osnovu prethodne teoreme nad intervalom  $(-1, 1)$  funkcija  $f(x)$  ima tačno jednu nulu.

## Posledica

Ako za funkciju  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  važi:

- a)  $f(x)$  je neprekidna nad  $[a, b]$ ,
- b)  $f(x)$  je diferencijabilna nad intervalom  $(a, b)$  i pri tome je  $f'(x) = 0$  za svako  $x \in (a, b)$ ,

tada je funkcija  $f(x)$  konstantna funkcija nad  $[a, b]$ .

## Posledica

Ako funkcije  $f(x)$  i  $g(x)$  imaju jednake izvode:  $f'(x) = g'(x)$ ,  $x \in I$ , tada se one razlikuju za konstantu nad intervalom  $I$ .

## Primer

*Pokazati da je  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x \in [-1, 1]$ .*

*Rešenje.* Posmatrajmo funkciju  $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ .

Ona je neprekidna nad  $[-1, 1]$ .

Diferencijabilna je nad  $(-1, 1)$  i pri tome je

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad x \in (-1, 1)$$

pa je funkcija  $f(x)$  konstantna funkcija nad intervalom  $[-1, 1]$ , tj.  $f(x) = c$ ,  $x \in [-1, 1]$ .

$$c = ?$$

$$\arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = c.$$

## Primer

Da li postoji konstanta  $c$  tako da je  $\operatorname{arcctg} \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x = c$ , za svako  $x \neq 0$ ?

Rešenje. Za funkciju  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  je

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Za  $g(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$  je

$$g'(x) = -\frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \neq 0.$$

Za  $x > 0$  je funkcija  $\operatorname{arcctg} \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x$  konstantna, pri čemu računajući njenu vrednost npr. u tački  $x = 1$  dobijamo da je

$$\operatorname{arcctg} \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x = 0, \quad x > 0$$

Za  $x < 0$  je funkcija  $\operatorname{arcctg} \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x$  konstantna, pri čemu računajući njenu vrednost npr. u tački  $x = -1$  dobijamo da je

$$\operatorname{arcctg} \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x = \pi, \quad x < 0.$$

## Posledica

*Neka je funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna nad  $[a, b]$  i diferencijabilna nad  $(a, b)$ . Ako postoji*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) \quad \left( \lim_{x \rightarrow b^-} f'(x) \right),$$

*tada postoji i  $f'_+(a)$  ( $f'_-(b)$ ) i važi jednakost*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = f'_+(a) \quad \left( \lim_{x \rightarrow b^-} f'(x) = f'_-(b) \right).$$

## Posledica

*Ako funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ima izvod nad intervalom  $I$ , tada izvod  $f'(x)$  ne može imati prekide prve vrste nad tim intervalom.*



Da izvod može imati prekide druge vrste pokazuje sledeći primer.

## Primer

*Pokazati da za funkciju*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

*prvi izvod  $f'(x)$  ima prekid druge vrste u tački  $x = 0$ .*

*Rešenje.* Kako je  $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ , za  $x \neq 0$  i

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 0,$$

s obzirom da granične vrednosti  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$  i  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$  ne postoje, to funkcija  $f'(x)$  ima u tački  $x = 0$  prekid druge vrste.

# Košijeva teorema

## Darbuova teorema

*Ako funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ima izvod nad intervalom  $[a, b]$  i ako je  $f'(a) \neq f'(b)$ , onda  $f'(x)$  uzima sve međuvrednosti između  $f'(a)$  i  $f'(b)$ .*

## Košijeva teorema

*Ako su funkcije  $f(x), g(x)$  neprekidne nad zatvorenim intervalom  $[a, b]$ , imaju izvode nad  $(a, b)$  i za svako  $x \in (a, b)$  je  $g'(x) \neq 0$ , tada postoji bar jedna tačka  $\xi \in (a, b)$ , takva da je*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

*Dokaz.* Primetimo da je  $g(b) - g(a) \neq 0$ , jer bi inače funkcija  $g(x)$  ispunjavala uslove Rolove teoreme, pa bi postojala tačka  $\xi \in (a, b)$  takva da je  $g'(\xi) = 0$ , to je suprotno uslovu da je  $g'(x) \neq 0$  za svako  $x \in (a, b)$ .

Funkcija

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

je neprekidna nad intervalom  $[a, b]$ , ima izvod u svakoj tački  $x \in (a, b)$  i  $h(a) = h(b) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$ .

Prema Rolovoj teoremi postoji  $\xi \in (a, b)$ , takvo da je

$$h'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi) = 0.$$

Sledi da je

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

što je i trebalo dokazati. □

## Dokaz Lagranžove teoreme.

Lagranžova teorema je specijalan slučaj Košijeve.

Naime, stavljajući u Košijevu teoremu

$$g(x) = x,$$

dobija se

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

# Lopitalovo pravilo

- $\frac{f(x)}{g(x)}$  ima neodređeni oblik " $\frac{0}{0}$ " kada  $x \rightarrow a$  ako važi

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

- $\frac{f(x)}{g(x)}$  ima neodređeni oblik " $\frac{\infty}{\infty}$ " kada  $x \rightarrow a$  ako važi

$$f(x) \rightarrow \pm\infty, \quad g(x) \rightarrow \pm\infty, \quad x \rightarrow a$$

## Lopitalova teorema

Neka su funkcije  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  diferencijabilne nad  $(a, b)$ ,  
 $g'(x) \neq 0$ ,  $x \in (a, b)$  i neka je  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$

$\left( \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0 \right)$ . Tada:

1. Ako postoji  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$   $\left( \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = B \right)$ , tada postoji

$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \left( \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} \right)$  i važi jednakost

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A, \left( \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = B \right).$$

2. Ako  $\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow \pm\infty, x \rightarrow a^+ (x \rightarrow b^-)$ , tada i  $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \pm\infty$ , kada  
 $x \rightarrow a^+ (x \rightarrow b^-)$ .

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in (a, b) \\ 0 & , \quad x = a \end{cases} \quad , \quad G(x) = \begin{cases} g(x) & , \quad x \in (a, b) \\ 0 & , \quad x = a \end{cases}$$

Sledi da postoji  $\xi \in (a, x)$  tako da je

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Kako je  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ , za svako  $\varepsilon > 0$  postoji  $\delta \in \mathbb{R}^+$ , tako da

$$a < x < a + \delta < b \Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \varepsilon.$$

Za  $x \in (a, a + \delta)$  na osnovu

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right| < \varepsilon$$

zaključujemo

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$



Za slučaj da je  $a = -\infty$  uvodimo smenu  $t = \frac{1}{x}$  :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} \\&= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)} \\&= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.\end{aligned}$$



## Teorema

Neka su funkcije  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  diferencijabilne nad  $(a, b)$  i  $g'(x) \neq 0$ ,  $x \in (a, b)$  i neka  $f(x) \rightarrow \pm\infty$  i  $g(x) \rightarrow \pm\infty$  kada  $x \rightarrow a^+$  ( $f(x) \rightarrow \pm\infty$  i  $g(x) \rightarrow \pm\infty$  kada  $x \rightarrow b^-$ ). Tada:

1. Ako postoji  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$  ( $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = B$ ), tada postoji

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \left( \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} \right) \text{ i važi jednakost}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \left( \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = B \right).$$

2. Ako  $\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow \pm\infty$ , kada  $x \rightarrow a^+$  ( $x \rightarrow b^-$ ), tada i  $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \pm\infty$ , kada  $x \rightarrow a^+$  ( $x \rightarrow b^-$ ).

## Primer

Odrediti  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$ .

Rešenje. Ovde ne možemo da koristimo Lopitalovo pravilo, jer

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1}$$

ne postoji, dok je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1.$$

- Dakle, Lopitalova pravila daju dovoljne, ali ne i potrebne uslove za postojanje granične vrednosti.

I ostali neodređeni izrazi oblika  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$ ,  $1^\infty$  mogu se određivati koristeći Lopitalova pravila.

## Primer

*Odrediti:*

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$ ,

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ ,

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$ .

# Tejlorova i Maklorenova teorema

## Tejlorova teorema

*Neka su funkcija  $f(x)$  i svi njeni izvodi do  $(n-1)$ -vog reda neprekidni nad  $[A, B]$  i neka  $f(x)$  ima  $n$ -ti izvod nad  $(A, B)$ .*

*Neka je  $a \in [A, B]$  proizvoljna tačka. Tada:*

*za svako  $b \in [A, B]$ ,  $b \neq a$ , postoji bar jedna tačka  $\xi \in (a, b)$ ,  $b > a$  (tj. postoji bar jedna tačka  $\xi \in (b, a)$ ,  $a > b$ ), takva da je*

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n, \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (b-a)^i + R_n, \end{aligned}$$

$$R_n = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

Za  $b = a + h$  Tejlorova formula je oblika

$$f(a + h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n,$$

$$R_n(x) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Za  $b = x$  Tejlorova formula je oblika

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta(x-a)), \quad 0 < \theta < 1.$$

Kada je funkcija  $f(x)$  predstavljena kao

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i + R_n(x)$$

kažemo da je razvijena po Tejlorovoj formuli u tački  $a$ .

►  $T_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i$  **Tejlorov polinom**

►  $R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta(x-a)), 0 < \theta < 1$  **ostatak ili greška**

U specijalnom slučaju za  $a = 0$  imamo Maklorenovu formulu

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1.$$

- ▶  $M_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i$  Maklorenov polinom
- ▶  $R_n(x)$  ostatak ili greška aproksimacije funkcije Maklorenovim polinomom



## Primer

*Napisati Maklorenove formule za funkcije:*

- a)  $f(x) = e^x$ ,
- b)  $f(x) = \sin x$ ,
- c)  $f(x) = \cos x$ ,
- d)  $f(x) = \ln(1 + x)$ ,
- e)  $f(x) = (1 + x)^\alpha$ .

*Rešenje.* a) Kako je  $f(x) = f'(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$   
i  $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = e^0 = 1$ ,  $f^{(n)}(\theta x) = e^{\theta x}$ ,  
to Maklorenova formula za funkciju  $f(x) = e^x$  glasi

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

## Primer

Napisati polinom  $P(x) = 1 + x - 3x^2 + 4x^3$  po stepenima od  $x - 1$ .

Rešenje. Kako je

$$P(x) = P(1) + \frac{x-1}{1!} P'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!} P''(1) + \frac{(x-1)^3}{3!} P'''(1),$$

i pri tome

$$\begin{aligned} P(1) &= 3, \\ P'(x) &= 1 - 6x + 12x^2 \quad \Rightarrow \quad P'(1) = 7, \\ P''(x) &= -6 + 24x \quad \Rightarrow \quad P''(1) = 18, \\ P'''(x) &= 24 \quad \Rightarrow \quad P'''(1) = 24, \end{aligned}$$

to je  $P(x) = 3 + 7(x-1) + 9(x-1)^2 + 4(x-1)^3$ .

## Napomena u vezi definicije izvoda

Pri definiciji izvoda funkcije  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$ , pretpostavka je da je  $x \in D^\circ$ .

Mogli smo definisati i izvod u tački  $x \in D$ , ali uz pretpostavku da je  $x$  tačka nagomilavanja skupa  $D$ , jer graničnu vrednost

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0, x + \Delta x \in D} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

možemo tražiti bez obzira da li je funkcija definisana u nekoj okolini tačke  $x$ .

Na primer, tada bi funkcija  $f(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{Q}$ , imala "izvod" u svakoj tački  $x \in \mathbb{Q}$ , dok ona izvod, onako kako smo ga definisali, nema ni u jednoj tački  $x \in \mathbb{Q}$ .

Česta je situacija da funkcija  $f(x)$  u tački  $a$  ima otklonjiv prekid, tj. postoji  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , pri čemu ili funkcija  $f(x)$  nije definisana u tački  $a$ , ili ako je definisana  $A \neq f(a)$ .

Tada funkcija nema izvod u tački  $a$  (morala bi da bude neprekidna u  $a$ ).

Mogli bismo definisati

$$\overline{f'}(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - A}{\Delta x},$$

ako ta granična vrednost postoji i nazvati je **nepravi** ili **kvazi izvod**.

Ako postoji  $f'(a)$ , tada postoji i  $\overline{f'}(a)$  i važi jednakost  $f'(a) = \overline{f'}(a)$ .

Funkcija u tački  $a$  može da ima nepravi izvod, a da nema izvod:

Za funkciju  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  ne postoji  $f'(0)$ , dok je

$$\begin{aligned}\overline{f'}(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x - \Delta x}{(\Delta x)^2} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{2\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\sin \Delta x}{2} = 0.\end{aligned}$$

$\overline{f'}(0)$  je u stvari izvod funkcije

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

u nuli, tj.  $F'(0) = \overline{f'}(0) = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a^+), \left( \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b^-) \right).$$
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(a + \Delta x) - f(a^+)}{\Delta x}, \quad \left( \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(b + \Delta x) - f(b^-)}{\Delta x}, \right)$$

Ne interesuje nas da li je funkcija definisana u datim tačkama, niti, ako je definisana, da li je neprekidna sa desne (leve) strane.

Nepravi desni i nepravi levi izvod jednim imenom zovemo **jednostrani nepravi izvodi**.

Ako funkcija u tački ima desni (levi) izvod, onda ona ima u toj tački desni nepravi (levi nepravi) izvod i oni su jednaki.

Obrnuto nije tačno: Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , \quad x < 0 \\ \frac{\cos x - 1}{x} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

nije definisana u nuli, pa nema u nuli ni desni ni levi izvod.

Kako je

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

to je

$$\overline{f'}(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(\Delta x) - f(0^-)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 0.$$

Slično, kako je

$$f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{x} = 0,$$

to je

$$\overline{f}'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(\Delta x) - f(0^+)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}}{\Delta x} = -\frac{1}{2}.$$



# Monotonost

## Definicija

Funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$  je nad intervalom  $I \subset \mathbb{R}$

1. **monotono rastuća** ako za svake dve tačke  $x_1, x_2 \in I$  važi
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$
2. **monotono opadajuća** ako za svake dve tačke  $x_1, x_2 \in I$  važi
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),$$
3. **monotono nerastuća** ako za svake dve tačke  $x_1, x_2 \in I$  važi
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2),$$
4. **monotono neopadajuća** ako za svake dve tačke  $x_1, x_2 \in I$  važi
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

U svakom od navedenih slučajeva funkcija je monotona, u slučajevima 1 i 2 je strogo monotona.

## Teorema

Neka funkcija  $f(x)$  ima izvod **nad intervalom  $I$** . Ako je  $f(x)$  monotono neopadajuća funkcija nad intervalom  $I$  tada je  $f'(x) \geq 0$ , za  $x \in I$ , a ako je monotono nerastuća funkcija nad intervalom  $I$  tada je  $f'(x) \leq 0$ , za  $x \in I$ .

*Dokaz (za monotono neopadajuću funkciju).* Za proizvoljno  $x \in I$ , s obzirom da je  $f(x)$  monotono neopadajuća funkcija je

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0, \quad x + \Delta x \in I,$$

odakle sledi da je

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$



## Teorema

Neka funkcija  $f(x)$  ima prvi izvod **nad intervalom  $I$** . Ako je  $f'(x) > 0$ , funkcija  $f(x)$  je monotonno rastuća nad intervalom  $I$ , a ako je  $f'(x) < 0$ , funkcija  $f(x)$  je monotonno opadajuća nad intervalom  $I$ .

*Dokaz.* Neka je  $[x_1, x_2] \subset I$  proizvoljan podinterval intervala  $I$ . Funkcija  $f(x)$  nad intervalom  $[x_1, x_2]$  zadovoljava sve uslove Lagranžove teoreme, pa postoji tačka  $\xi \in (x_1, x_2)$  takva da je

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Ako je  $f'(x) > 0$ , tada je i  $f'(\xi) > 0$ , pa je

$$f(x_2) > f(x_1).$$

Dokaz je sličan kada je  $f'(x) < 0$ . □

## Definicija

Neka je funkcija  $f(x)$  definisana u nekoj okolini tačke  $a$ .

Funkcija je **rastuća u tački**  $a$  ako postoji okolina tačke  $a$  u kojoj za svako  $x$  iz te okoline važi

$$f(x) > f(a) \text{ za } x > a, \quad f(x) < f(a) \text{ za } x < a.$$

Funkcija je **opadajuća u tački**  $a$  ako postoji okolina tačke  $a$  u kojoj za svako  $x$  iz te okoline važi

$$f(x) < f(a) \text{ za } x > a, \quad f(x) > f(a) \text{ za } x < a.$$

## Teorema

Ako je funkcija  $f(x)$  rastuća (opadajuća) **u tački**  $a$  i ako postoji  $f'(a)$ , tada je  $f'(a) \geq 0$ , ( $f'(a) \leq 0$ ).

## Teorema

Neka funkcija  $f(x)$  **u tački**  $a$  ima izvod  $f'(a) \neq 0$ . Ako je  $f'(a) > 0$ , funkcija  $f(x)$  je rastuća u tački  $a$ , a ako je  $f'(a) < 0$  ona je u tački  $a$  opadajuća.

## Primer

Pokazati da funkcija  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$  nije monotona ni u jednoj okolini nule. Da li je ova funkcija rastuća u nuli?

Rešenje.  $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad x = 0 \end{cases}$ ,

$f'(0) = \frac{1}{2} > 0$ , pa je funkcija rastuća u nuli.

Ako posmatramo nizove sa opštim članovima

$$a_n = \frac{1}{2n\pi}, \quad b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}, \quad c_n = -\frac{1}{2n\pi}, \quad d_n = -\frac{1}{(2n+1)\pi},$$

možemo primetiti da je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ ,

$$f'(a_n) = f'(c_n) = -\frac{1}{2}, \quad f'(b_n) = f'(d_n) = \frac{3}{2},$$

pa ne postoji okolina nule u kojoj je prvi izvod stalnog znaka, te funkcija nije monotona ni u jednoj okolini nule.

Dovoljan uslov za monotonost:

## Teorema

*Neka funkcija  $f(x)$  ima prvi izvod u okolini tačke  $a$  i neka je  $f'(x)$  neprekidna funkcija u tački  $a$ . Ako je  $f'(a) > 0$ , funkcija  $f(x)$  je monotonno rastuća u nekoj okolini tačke  $a$ , a ako je  $f'(a) < 0$ , funkcija  $f(x)$  je monotonno opadajuća u nekoj okolini tačke  $a$ .*

## Darbuova teorema

*Ako funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ima izvod nad intervalom  $[a, b]$  i ako je  $f'(a) \neq f'(b)$ , onda  $f'(x)$  uzima sve međuvrednosti između  $f'(a)$  i  $f'(b)$ .*

- ▶ funkcija  $f'(x)$  ne mora biti neprekidna nad  $[a, b]$ ,  $f'(x)$  može imati prekid druge vrste

Dokaz. Neka je  $f'(a) > f'(b)$  i  $f'(a) > C > f'(b)$ .

Posmatrajmo funkciju  $g(x) = f(x) - Cx$ .

$g'(x) = f'(x) - C$ , pa je

$$g'(a) = f'(a) - C > 0 > f'(b) - C = g'(b).$$

$g(x)$  je neprekidna nad  $[a, b]$ , pa nad njim dostiže svoju najveću vrednost, tj. postoji  $\xi \in [a, b]$  da je  $g(\xi) = \max_{x \in [a, b]} g(x)$ .

Štaviše,  $\xi \neq a$  jer je  $g'(a) > 0$  ( $g(x)$  je rastuća u  $a$ ) i  $\xi \neq b$ , jer je  $g'(b) < 0$ .

Dakle,  $\xi \in (a, b)$ .

Kako je tu ekstrem, mora biti  $g'(\xi) = 0$ , tj.  $f'(\xi) = C$ .



# Ekstremne vrednosti funkcija

## Definicija

Ako je realna funkcija  $f(x)$  definisana u nekoj okolini tačke  $a \in \mathbb{R}$ , tada kažemo da funkcija  $f(x)$  u tački  $a$  ima **lokalni minimum** ako postoji  $\delta > 0$  takvo da

$$x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) > f(a),$$

a **lokalni maksimum** ako postoji  $\delta > 0$  takvo da

$$x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) < f(a).$$

- ▶ tačka  $a$  je tada **lokalna ekstremna vrednost** i to je najmanja ili najveća vrednost funkcije u nekoj okolini tačke  $a$ .
- ▶ ako je za  $x = a + \Delta x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$  priraštaj funkcije  $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a) > 0$  tada funkcija u tački  $a$  ima lokalni minimum, a ako je  $\Delta y < 0$  ima lokalni maksimum



## Teorema

*Ako funkcija  $f(x)$  ima u tački  $a$  ekstremnu vrednost i ako postoji  $f'(a)$  tada je  $f'(a) = 0$ .*

- ▶ uslov je potreban, ne i dovoljan (primer funkcije  $x^3$ )
- ▶ **stacionarne tačke** - tačke u kojima je  $f'(x) = 0$
- ▶ funkcija može imati ekstremnu vrednost u  $x = a$ , a da  $f'(a)$  ne postoji (primer funkcije  $|x|$ )
- ▶ **kritične tačke**

## Teorema

*Ako je funkcija u tački  $a$  neprekidna i postoji  $\delta > 0$  takvo da je*

$$f'(x) > 0 \quad (f'(x) < 0), \quad \text{za } x \in (a - \delta, a),$$

*a*

$$f'(x) < 0 \quad (f'(x) > 0), \quad \text{za } x \in (a, a + \delta),$$

*onda funkcija u tački  $a$  ima ekstremnu vrednost i to maksimum (minimum).*

*Dokaz (za maksimum).*

Ako za  $x \in (a - \delta, a)$  važi  $f'(x) > 0$ , funkcija je monotono rastuća nad  $(a - \delta, a)$ .

Ako za  $x \in (a, a + \delta)$  važi  $f'(x) < 0$ , funkcija je monotono opadajuća nad  $(a, a + \delta)$ .

Ako bi postojala neka tačka  $x_1 \in (a - \delta, a)$  takva da je  $f(x_1) \geq f(a)$ , sledilo bi da postoji tačka  $\xi \in (x_1, a)$  takva da je

$$0 \geq f(a) - f(x_1) = f'(\xi)(a - x_1).$$

Moralo bi biti  $f'(\xi) \leq 0$ . Kontradikcija.

Slično se pokazuje da ne postoji tačka  $x_1 \in (a, a + \delta)$  takva da je  $f(x_1) \geq f(a)$ . □

## Primer

Proveriti da li funkcija  $f(x) = \begin{cases} x^2 (2 + \sin \frac{1}{x}) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$  ima ekstremnu vrednost u tački  $x = 0$ .

Rešenje. Kako je

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} ,$$

$$f''(x) = 4 + 2 \sin \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}, x \neq 0,$$

to je  $f'(0) = 0$ , pa je  $x = 0$  stacionarna tačka.  $f''(0)$  ne postoji.

Pokažimo da ne postoji  $\delta > 0$  takvo da je u intervalu  $(-\delta, 0)$ , odnosno u intervalu  $(0, \delta)$  prvi izvod istog znaka.

Ako posmatramo nizove se opštim članovima

$$a_n = \frac{1}{2n\pi}, \quad b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}, \quad c_n = -\frac{1}{2n\pi}, \quad d_n = -\frac{1}{(2n+1)\pi},$$

vidimo da važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0.$$

Dakle, u svakoj okolini nule su skoro svi članovi posmatranih nizova.  
Kako je

$$f'(a_n) = \frac{2}{n\pi} - 1 < 0, \quad f'(b_n) = \frac{4}{(2n+1)\pi} + 1 > 0,$$

$$f'(c_n) = -\frac{2}{n\pi} - 1 < 0, \quad f'(d_n) = -\frac{4}{(2n+1)\pi} + 1 > 0,$$

sledi da za svako  $\delta > 0$  postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$ , takav da za svako  $n \geq n_0$

$$a_n, b_n \in (0, \delta) \quad \wedge \quad c_n, d_n \in (-\delta, 0).$$

Dakle, sledi da za svako  $\delta > 0$  u intervalima  $(-\delta, 0)$  i  $(0, \delta)$  postoje tačke u kojima je prvi izvod pozitivan i tačke u kojima je prvi izvod negativan. Dakle, **prvi izvod ne menja znak prolazeći kroz tačku  $x = 0$ .**

Na osnovu do sada utvrđenih kriterijuma ne možemo reći da li funkcija u tački nula ima ekstremnu vrednost ili ne.

Kako je  $f(0) = 0$  i  $f(x) > 0$  za svako  $x \neq 0$ , sledi da **funkcija  $f(x)$  u tački nula ima minimum.**

## Teorema

*Neka je  $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$  i  $f^{(n)}(a) \neq 0, n \geq 2$ . Ako je  $n$  paran broj, funkcija  $f(x)$  ima u tački  $a$  ekstremnu vrednost i to:*

- ▶ *maksimum ako je  $f^{(n)}(a) < 0$  odnosno,*
- ▶ *minimum ako je  $f^{(n)}(a) > 0$ .*

*Ako je  $n$  neparan broj funkcija  $f(x)$  nema ekstremnu vrednost u tački  $a$ . U tom slučaju ako je  $f^{(n)}(a) > 0$  funkcija je u tački  $a$  rastuća a ako je  $f^{(n)}(a) < 0$  funkcija je u tački  $a$  opadajuća.*

*Dokaz (za slučaj  $f^{(n)}(a) > 0$ ): Iz Tejlorove formule*

$$f(a + \Delta x) = f(a) + \frac{\Delta x}{1} f'(a) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a + \theta \Delta x),$$

$$0 < \theta < 1$$

*i uslova teoreme sledi*

$$f(a + \Delta x) - f(a) = \frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a + \theta \Delta x), \quad 0 < \theta < 1.$$

Ako je  $f^{(n)}(a) > 0$  tada je  $f^{(n-1)}(x)$  rastuća funkcija u tački  $a$ , pa je

$$f^{(n-1)}(a + \theta \Delta x) > f^{(n-1)}(a) = 0, \quad \Delta x > 0,$$

$$f^{(n-1)}(a + \theta \Delta x) < f^{(n-1)}(a) = 0, \quad \Delta x < 0.$$

Ako je  $n$  parno, izraz

$$\frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a + \theta \Delta x),$$

(a onda i priraštaj funkcije) je za svako dovoljno malo  $\Delta x$  pozitivan, tj. funkcija u tački  $a$  ima minimum.

Ako je  $n$  neparno, izraz

$$\frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a + \theta \Delta x),$$

nije stalnog znaka (pozitivan je za  $\Delta x > 0$ , a negativan za  $\Delta x < 0$ ) i ekstremne vrednosti u  $a$  nema.

# Tangenta i normala krive

Videli smo već da ako funkcija  $f(x)$  ima izvod u tački  $a$ , jednačina tangente u tački  $A(a, f(a))$  je

$$y - f(a) = f'(a)(x - a),$$

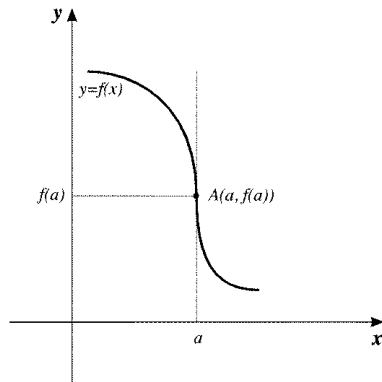
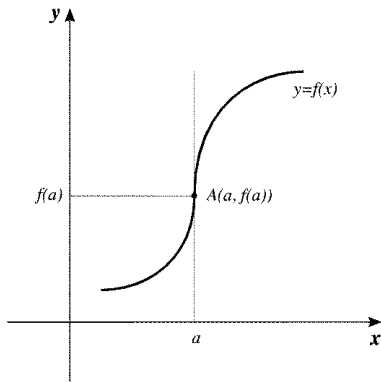
a jednačina normale u tački  $A(a, f(a))$  je

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a),$$

ako je  $f'(a) \neq 0$ , odnosno normala je  $x = a$  ako je  $f'(a) = 0$ .



- Tangenta funkcije u tački  $A(a, f(a))$  može da bude paralelna sa  $y$ -osom, ako  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \infty$  ili  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow -\infty$  kada  $\Delta x \rightarrow 0$ :



U ovim slučajevima tangenta u tački  $A(a, f(a))$  je prava  $x = a$ , a normala je prava  $y = f(a)$ .

- Može da se desi da ne postoji  $f'(a)$ , ali postoji  $f'_+(a)$  ili  $f'_-(a)$  :

Ako postoji  $f'_+(a)$ , prava

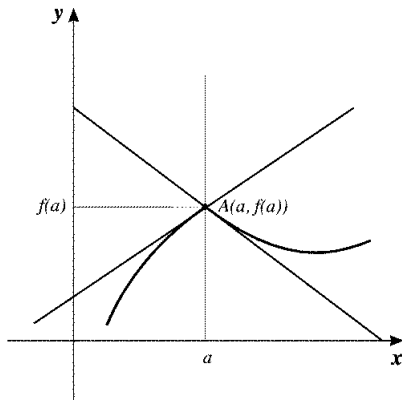
$$y - f(a) = f'_+(a)(x - a)$$

je tangenta na desnu granu funkcije u tački  $A(a, f(a))$  (desna tangenta).

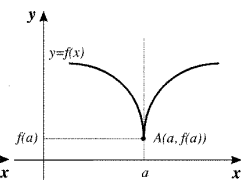
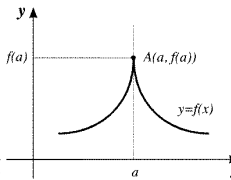
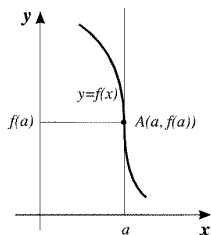
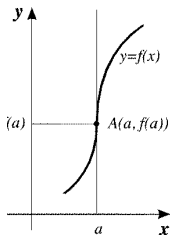
Ako postoji  $f'_-(a)$ , prava

$$y - f(a) = f'_-(a)(x - a)$$

je tangenta na levu granu funkcije u tački  $A(a, f(a))$  (leva tangenta)



- ako  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \infty$  ili  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow -\infty$  kada  $\Delta x \rightarrow 0^+$  prava  $x = a$  je tangenta na desnu granu funkcije u tački  $A(a, f(a))$ ,
- ako  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \infty$  ili  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow -\infty$  kada  $\Delta x \rightarrow 0^-$  prava  $x = a$  je tangenta na levu granu funkcije u tački  $A(a, f(a))$ ,
- ako je prava  $x = a$  tangenta i na levu i na desnu granu funkcije u tački  $A(a, f(a))$ , prava  $x = a$  je tangenta funkcije u tački  $A(a, f(a))$ .



- Ako ne postoji  $f'_+(a)$ , a postoji nepravi desni izvod  $\bar{f}'_+(a)$  u tački  $a$ , prava

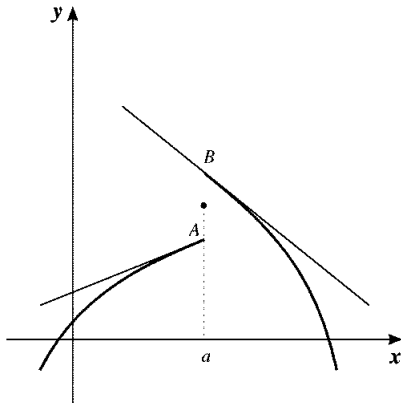
$$y - f(a^+) = \bar{f}'_+(a)(x - a)$$

je tangenta na desnu granu funkcije u tački  $A(a, f(a))$ .

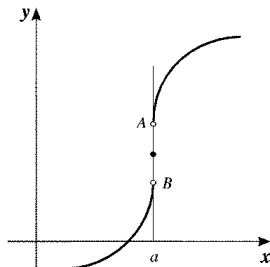
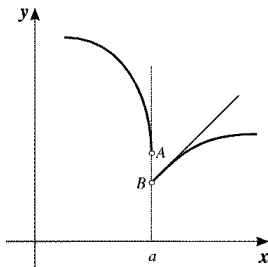
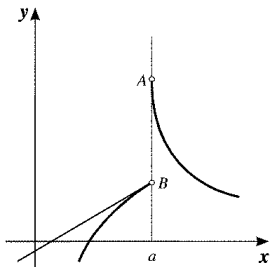
- Ako ne postoji  $f'_-(a)$ , a postoji nepravi levi izvod  $\bar{f}'_-(a)$  u tački  $a$ , prava

$$y - f(a^-) = \bar{f}'_-(a)(x - a)$$

je tangenta na levu granu funkcije u tački  $A(a, f(a))$ .



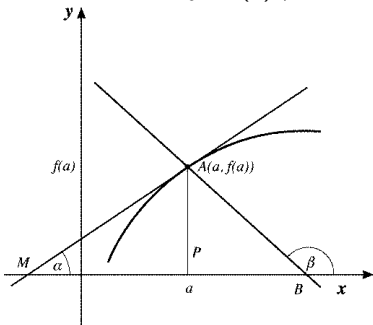
- ako  $\frac{f(a + \Delta x) - f(a^+)}{\Delta x} \rightarrow \pm\infty$ , kada  $\Delta x \rightarrow 0^+$ , prava  $x = a$  je tangenta na desnu granu funkcije u tački  $A(a, f(a^+))$
- ako  $\frac{f(a + \Delta x) - f(a^-)}{\Delta x} \rightarrow \pm\infty$ , kada  $\Delta x \rightarrow 0^-$ , prava  $x = a$  je tangenta na levu granu funkcije u tački  $B(a, f(a^-))$



Pretpostavimo da funkcija ima izvod u tački  $a$  i da je  $f'(a) \neq 0$ .

- deo tangente od tačke  $A$  do preseka sa  $x$ -osom naziva se **dužina tangente**,  $T$ , a dužina njene projekcije na  $x$ -osu naziva se **subtangent**,  $S_T$ .

- deo normale od tačke  $A$  do preseka sa  $x$ -osom naziva se **dužina normale**,  $N$ , a dužina njene projekcije na  $x$ -osu naziva se **subnormala**,  $S_N$ .



$$\text{Iz } |f'(a)| = |\operatorname{tg} \alpha| = \frac{|f(a)|}{S_T} = \frac{S_N}{|f(a)|} \text{ sledi}$$

$$S_T = \left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right|, \quad T = \sqrt{f^2(a) + S_T^2}$$

$$S_N = |f(a)f'(a)|, \quad N = \sqrt{f^2(a) + S_N^2}$$

# Konveksnost, konkavnost, prevojne tačke

## Definicija

Funkcija  $f(x)$  definisana nad intervalom  $I$  je **konveksna** nad  $I$  ako za proizvoljne dve tačke  $x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$  za svako  $x, x_1 < x < x_2$  važi

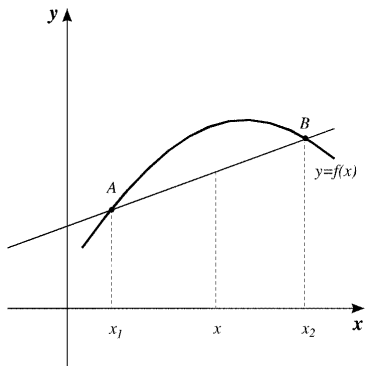
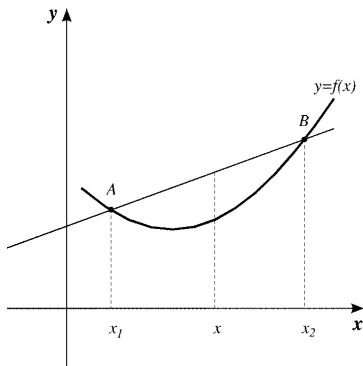
$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2).$$

Ako je

$$f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

funkcija je **konkavna**.

**Geometrijska interpretacija:** Ako postavimo sečicu kroz tačke  $A(x_1, f(x_1))$  i  $B(x_2, f(x_2))$ ,  $x_1 < x_2$  grafik funkcije je uvek ispod sečice nad intervalom  $(x_1, x_2)$  u slučaju konveksnosti, odnosno iznad sečice u slučaju konkavne funkcije nad  $(x_1, x_2)$ .





## Definicija

Neka je funkcija  $f(x)$  definisana u nekoj okolini tačke  $a$  i neka je u tački  $a$  diferencijabilna. Funkcija  $f(x)$  je **konveksna (konkavna)** u tački  $a$  ako postoji okolina  $(a - \delta, a + \delta)$  tačke  $a$ , takva da je

$$f(x) \geq y_t(x) \quad (f(x) \leq y_t(x)),$$

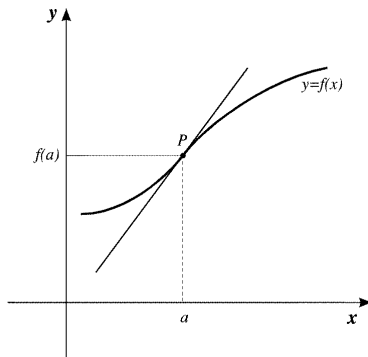
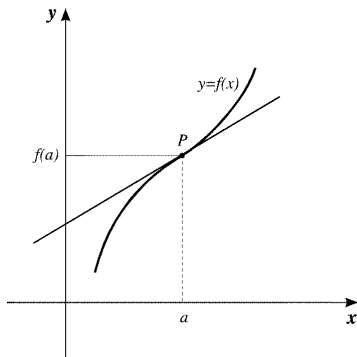
za svako  $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ , gde je

$$y_t(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

jednačina tangente na datu funkciju u tački  $A(a, f(a))$ .

## Definicija

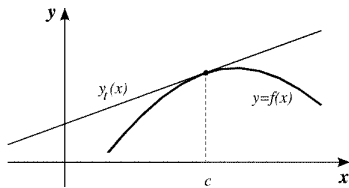
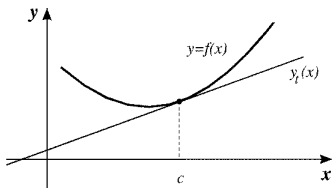
Za tačku  $P(a, f(a))$  se kaže da je **prevojna tačka** funkcije  $f(x)$  ako postoji okolina  $(a - \delta, a + \delta)$  tačke  $a$ , takva da je funkcija  $f(x)$  nad intervalom  $(a - \delta, a)$  konkavna, a nad intervalom  $(a, a + \delta)$  konveksna ili obrnuto.



Ako postoji izvod funkcije  $f(x)$  nad intervalom  $I$  tada konveksnost i konkavnost može da se definiše na dva (ekvivalentna) načina:

## Definicija 1

Funkcija  $f(x)$  je konveksna nad  $I$  ako za svako  $c \in I$  i  $x \in I \setminus \{c\}$   
 $f(x) > y_t(x)$ , gde je  $y_t = f(c) + f'(c)(x - c)$  jednačina tangente na  
 krivu u tački  $C(c, f(c))$  (u slučaju konkavnosti je  $f(x) < y_t(x)$ .)



## Definicija 2

Funkcija  $f(x)$  je konveksna (konkavna) nad  $I$  ako je  $f'(x)$  monotono rastuća (opadajuća) funkcija nad  $I$ .

## Teorema

*Ako funkcija ima izvod nad intervalom  $I$ , tada su Definicija 1 i Definicija 2 konveksnosti (konkavnosti) ekvivalentne.*

*Dokaz.* Pokažimo da Definicija 1  $\Rightarrow$  Definicija 2, za slučaj konveksnosti:

Neka je funkcija  $f(x)$  konveksna nad intervalom  $I$  u smislu Definicije 1.

Neka su  $x_1$  i  $x_2$ ,  $x_1 < x_2$  proizvoljne tačke iz intervala  $I$ . Neka su

$$y_t^1 = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1),$$

$$y_t^2 = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2),$$

tangente na datu funkciju u tačkama  $A(x_1, f(x_1))$  i  $B(x_2, f(x_2))$ . Tada važi

$$f(x_2) > f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1),$$

$$f(x_1) > f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2).$$

Sabiranjem ovih nejednakosti dobija se

$$f(x_2) + f(x_1) > f(x_1) + f(x_2) + f'(x_1)(x_2 - x_1) + f'(x_2)(x_1 - x_2),$$

tj.

$$(f'(x_2) - f'(x_1))(x_2 - x_1) > 0,$$

odakle sledi

$$f'(x_2) > f'(x_1),$$

pa je  $f'(x)$  monotonno rastuća funkcija nad intervalom  $I$ .



## Teorema

*Ako je  $f''(x) > 0$  ( $f''(x) < 0$ ) nad intervalom  $I$ , tada je funkcija  $f(x)$  konveksna (konkavna) nad intervalom  $I$ .*

*Ako postoji  $f''(x)$  nad  $I$  i ako je funkcija  $f(x)$  konveksna (konkavna) nad  $I$ , tada je  $f''(x) \geq 0$  ( $f''(x) \leq 0$ ) nad  $I$ .*

*Dokaz. Ako je*

$$f''(x) > 0 \quad (f''(x) < 0),$$

*tada je  $f'(x)$  monotonno rastuća (opadajuća) funkcija, pa je  $f(x)$  konveksna (konkavna) nad intervalom  $I$ .*

*Ako je  $f(x)$  konveksna (konkavna) nad intervalom  $I$ , tada je  $f'(x)$  monotonno rastuća (opadajuća) funkcija nad intervalom  $I$ , pa je*

$$f''(x) \geq 0 \quad (f''(x) \leq 0)$$

*nad intervalom  $I$ .*



## Teorema

Ako je  $P(a, f(a))$  prevojna tačka funkcije  $f(x)$  i ako postoji  $f''(a)$ , tada je  $f''(a) = 0$ .

Dokaz.  $f'(x)$  ima ekstremnu vrednost u tački  $a$ !



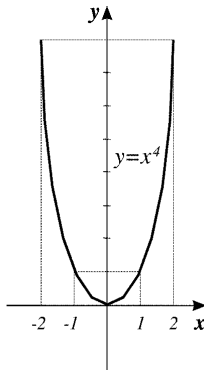
Obrnuto ne mora da važi! Funkcija  
 $f(x) = x^4$  ima drugi izvod

$$f''(x) = 12x^2$$

za koji je

$$f''(0) = 0,$$

a tačka  $O(0, 0)$  nije prevojna tačka.



Za funkciju  $f(x) = (x - 1)^3$  je  $A(1, 0)$  prevojna tačka, jer je

$$f''(x) = 6(x - 1)$$

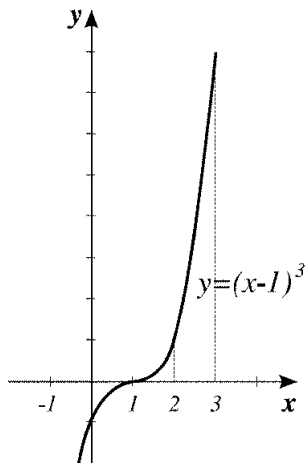
pa je

$$f''(x) > 0 \text{ za } x > 1$$

$$f''(x) < 0 \text{ za } x < 1,$$

a

$$f''(1) = 0.$$





Tačka  $a$  može da bude prevojna tačka funkcije a da u tački  $a$  ne postoji drugi izvod.

Ako u tački  $a$  drugi izvod  $f''(x)$  menja znak (bez obzira da li postoji  $f''(a)$ ) i ako je funkcija  $f(x)$  definisana u tački  $a$ , tada je  $P(a, f(a))$  prevojna tačka date funkcije.

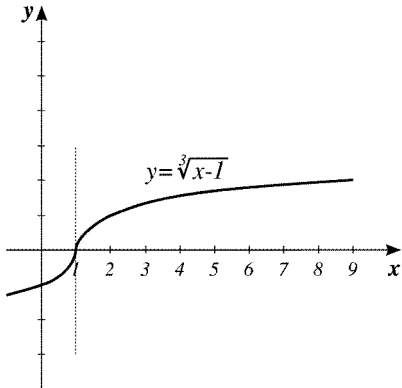
Primer je funkcija

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

za koju je  $P(1, 0)$  prevojna tačka,

$$f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}$$

menja znak prolazeći kroz nju, a  $f''(1)$  ne postoji.



## Teorema

*Ako je  $f''(a) > 0$  ( $f''(a) < 0$ ), funkcija  $f(x)$  je konveksna (konkavna) u tački  $a$ .*

Ako je  $f''(a) > 0$ , ne postoji uvek okolina tačke  $a$  nad kojom je funkcija konveksna!

Ako  $f''(x)$  postoji u nekoj okolini tačke  $a$  i ako je neprekidan u  $a$ , onda iz  $f''(a) > 0$  sledi da postoji okolina tačke  $a$  nad kojom je funkcija konveksna.

## Teorema

*Ako postoji  $\delta > 0$  takvo da je u intervalu  $(a - \delta, a)$  funkcija ispod (iznad) tangente funkcije  $f(x)$  u tački  $A(a, f(a))$ , a u intervalu  $(a, a + \delta)$  funkcija iznad (ispod) tangente funkcije  $f(x)$  u tački  $A(a, f(a))$  i ako postoji  $f''(a)$ , tada je  $f''(a) = 0$ .*

Može se desiti da je u intervalu  $(a - \delta, a)$  funkcija ispod (iznad) tangente, a u intervalu  $(a, a + \delta)$  funkcija iznad (ispod) tangente funkcije  $f(x)$  u tački  $A(a, f(a))$ , a tačka  $A(a, f(a))$  nije prevojna!

## Primer

*Ispitati da li je tačka  $O(0, 0)$  prevojna tačka funkcije*

$$f(x) = \begin{cases} x^3(2 + \sin \frac{1}{x^2}) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} .$$

$$f'(x) = \begin{cases} 6x^2 + 3x^2 \sin \frac{1}{x^2} - 2 \cos \frac{1}{x^2} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} ,$$

$f''(x) = 12x + 6x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x} \cos \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} \sin \frac{1}{x^2}$ , za  $x \neq 0$ , a  $f''(0)$  ne postoji. Posmatraju se nizovi s opštim članovima

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}, \quad c_n = -\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, \quad d_n = -\frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}.$$

## Teorema

Neka je  $f''(a) = f'''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$ ,  $f^{(n)}(a) \neq 0$ ,  $n \geq 3$ .

Ako je  $n$  neparan, tada je  $P(a, f(a))$  prevojna tačka funkcije  $f(x)$ .

Ako je  $n$  paran, tada je funkcija u okolini tačke  $x = a$  konveksna za  $f^{(n)}(a) > 0$ , a konkavna za  $f^{(n)}(a) < 0$ .

Dokaz. (za prevojnu tačku) Neka je  $n = 2k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Kako je

$$f^{(2k+1)}(a) = (f'')^{(2k-1)}(a) \neq 0,$$

to sledi da je  $f''(x)$  rastuća funkcija u tački  $x = a$  za  $(f'')^{(2k-1)}(a) > 0$ , a opadajuća funkcija za  $(f'')^{(2k-1)}(a) < 0$ .

Sledi da postoji  $\delta > 0$  tako da je

$$f''(x) < f''(a) = 0 \quad (f''(x) > f''(a) = 0), \text{ za } x \in (a - \delta, a),$$

$$f''(x) > f''(a) = 0 \quad (f''(x) < f''(a) = 0), \text{ za } x \in (a, a + \delta).$$

Dakle, nad intervalom  $(a - \delta, a)$  je funkcija konkavna (konveksna), a nad intervalom  $(a, a + \delta)$  konveksna (konkavna), pa je  $A(a, f(a))$  prevojna.  $\square$

# Asimptote funkcija

## Definicija

Neka je funkcija  $f(x)$  definisana nad intervalom  $(a, \infty)$  ( $(-\infty, a)$ ),  $a \in \mathbb{R}$ . Funkcija  $\phi(x)$  je **asimptota funkcije**  $f(x)$  kada  $x \rightarrow \infty$ , ako je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - \phi(x)] = 0.$$

Slično, funkcija  $\phi(x)$  je **asimptota funkcije**  $f(x)$  kada  $x \rightarrow -\infty$ , ako je

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \phi(x)] = 0.$$

- ▶  $f(x)$  se **asimptotski ponaša** kao  $\phi(x)$ , kad  $x \rightarrow \infty$  (tj.  $x \rightarrow \infty$ ), što pišemo  $f(x) \sim \phi(x)$
- ▶ **Geometrijski smisao**: postoji  $b \in \mathbb{R}$  takav da je razlika ordinata krivih  $y = f(x)$  i  $y = \phi(x)$  proizvoljno mala za  $x > b$  ( $x < b$ ).

Ako je asimptota funkcije prava  $\phi(x) = mx + n$ , tada funkcija  $y = f(x)$  ima:

- ▶ za  $m \neq 0$  ima **kosu** asimptotu  $\phi(x) = mx + n$ ,
- ▶ za  $m = 0$  ima **horizontalnu** asimptotu  $\phi(x) = n$ .

Po definiciji je za  $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (mx + n)] = 0 \text{ ili } \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x} \right] = 0,$$

pa je

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx].$$

## Definicija

Funkcija  $y = f(x)$  ima **vertikalnu asimptotu** u tački nagomilavanja  $x = a$  definicionog skupa, ako funkcija bar sa jedne strane tačke  $a$  teži  $\infty$  odnosno  $-\infty$ . Za pravu  $x = a$  kažemo da je vertikalna asimptota funkcije  $f(x)$ .

# Ispitivanje toka funkcija

## Obavezna grupa zahteva:

- ▶ određivanje oblasti definisanosti
- ▶ određivanje nula funkcije
- ▶ određivanje intervala monotonosti i ekstremnih vrednosti
- ▶ određivanje intervala konveksnosti, konkavnosti i prevojnih tačaka
- ▶ određivanje asimptota funkcije i ispitivanje položaja grafika u odnosu na asimptote
- ▶ tangente funkcije u tačkama gde ne postoji  $f'(x)$  i njegovo ponašanje u tim tačkama
- ▶ skiciranje grafika funkcije

## Neobavezna grupa zahteva:

- ▶ znak funkcije
- ▶ parnost i neparnost funkcije
- ▶ periodičnost funkcije

## Funkcije $n$ realnih promenljivih

Posmatramo realne funkcije  $n$  realnih promenljivih, tj.

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1$$

Vrednost funkcije  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  u tački  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$

►  $n > 3 \quad z = f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

►  $n = 3, \quad u = f(X) = f(x, y, z),$

►  $n = 2, \quad z = f(X) = f(x, y)$



$$M(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad z = f(x, y)$$

- $$\Delta z = f(N) - f(M) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

- ▶ ako  $D_1 = D \cap \{(\nu, y) : \nu \in \mathbb{R}\}$  nije jednočlan skup tada

$$\Delta_x z = f(M_{x+\Delta x}) - f(M) = f(\textcolor{red}{x} + \textcolor{red}{\Delta x}, y) - f(x, y),$$

- ▶ ako  $D_2 = D \cap \{(x, \nu) : \nu \in \mathbb{R}\}$  nije jednočlan skup tada

$$\Delta_y z = f(M_{y+\Delta y}) - f(M) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

$M_{y+\Delta y}(x, y + \Delta y) \in D_2$ ,  $\Delta y \neq 0$  je **parcijalni priraštaj po promenljivoj  $y$**  u tački  $M$ .

$$M(x_1, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2, \quad f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad z = f(x_1, \dots, x_n)$$

- ▶ ako  $M \in D$  nije izolovana tačka oblasti definisanosti  $D$  funkcije  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  tada je

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(N) - f(M) \\ &= f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

$$N(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) \in D, \quad (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \neq (0, 0, \dots, 0) \text{ totalni priraštaj funkcije } z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- ▶ ako  $D_i = D \cap \{(x_1, \dots, x_{i-1}, \nu, x_{i+1}, \dots, x_n) : \nu \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$  nije jednočlan skup tada

$$\begin{aligned} \Delta_{x_i} z &= f(M_{x_i + \Delta x_i}) - f(M) \\ &= f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

$$M_{x_i + \Delta x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \in D_i, \quad \Delta x_i \neq 0 \text{ je}$$

parcijalni priraštaj po promenljivoj  $x_i$  u tački  $M$ .

Za svako  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , posmatrajmo restrikciju  $f_i : D_i \rightarrow \mathbb{R}$  funkcije  $f$  nad skupom  $D_i$ .

## Definicija

Ako funkcija  $f_i(x_i)$ ,  $x_i \in D_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  ima izvod u tački  $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D^\circ$  onda taj izvod funkcije  $f_i(x_i)$  zovemo **parcijalni izvod** funkcije  $f(x_1, \dots, x_n)$  u tački  $M$  po promenljivoj  $x_i$ . Označavamo ga sa

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(M) \text{ ili } z_{x_i}(M)$$

*i* važi

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_i} &= \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_i} z}{\Delta x_i} \\ &= \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_i} \end{aligned}$$

Ako funkcija  $f_i(x_i)$ ,  $x_i \in D_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  ima desni (levi) izvod u tački  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , onda taj izvod funkcije  $f_i(x_i)$  zovemo desni (levi) parcijalni izvod funkcije  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  u tački  $M$  po promenljivoj  $x_i$  i obeležavamo ga sa

$$\frac{\partial^+ z}{\partial x_i}(M) \text{ ili } z_{x_i}^+(M) \quad \left( \frac{\partial^- z}{\partial x_i}(M) \text{ ili } z_{x_i}^-(M) \right).$$

U tom slučaju je

- **desni parcijalni izvod funkcije**  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  po promenljivoj  $x_i$

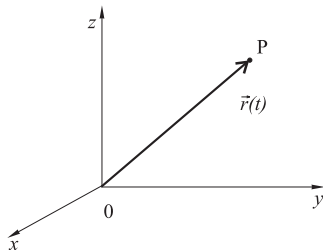
$$\frac{\partial^+ z}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x_i z}{\Delta x_i}$$

- **levi parcijalni izvod funkcije**  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  po promenljivoj  $x_i$  je

$$\frac{\partial^- z}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0^-} \frac{\Delta x_i z}{\Delta x_i}$$

*Funkcija ima parcijalni izvod po promenljivoj  $x_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  u tački  $M$  (unutrašnja!) ako i samo ako ima i levi i desni parcijalni izvod po promenljivoj  $x_i$  i ako su oni jednaki.*

# Vektorske funkcije



Sa  $E$  označimo skup tačaka tro-dimenzionalnog prostora. Neka je  $O$  fiksna tačka (koordinatni početak). Vektor  $\overrightarrow{OP}$ , gde je  $P$  promenljiva tačka iz  $E$ , je vektor položaja tačke  $P$  u odnosu na dati koordinatni sistem.

Označimo sa  $X_0(E) = \{\overrightarrow{OP} : P \in E\}$ . Preslikavanje  $f : E \rightarrow X_0(E)$  dato sa  $f(P) = \overrightarrow{OP}$ ,  $P \in E$  je bijekcija. Skup  $X_0(E)$  ćemo kraće označavati sa  $X_0$ .

## Definicija

Neka je  $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$  i neka su  $x : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $z : D \rightarrow \mathbb{R}$  tri realne funkcije realne promenljive. Svako preslikavanje  $\vec{r} : D \rightarrow X_0$  definisano sa

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in D,$$

zovemo **vektorskom funkcijom** jedne skalarne promenljive.

## Definicija

Ako je  $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$  i ako su  $x : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $z : D \rightarrow \mathbb{R}$  tri realne funkcije  $n$  realnih promenljivih, tada se preslikavanje  $\vec{r} : D \rightarrow X_0$  zadato sa

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in D,$$

zove **vektorska funkcija**  $n$  realnih promenljivih.

## Definicija

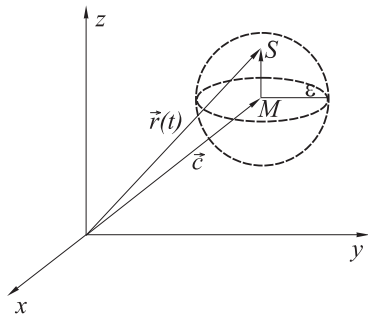
Ako je  $a \in \mathbb{R}^n$  tačka nagomilavanja oblasti definisanosti  $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$  vektorske funkcije  $\vec{r}: D \rightarrow X_0$ , tada za vektor  $\vec{c}$  kažemo da je **granična vrednost vektorske funkcije  $\vec{r}$  u tački  $a$**  ako

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall t \in D \setminus \{a\})(d(a, t) < \delta \Rightarrow |\vec{r}(t) - \vec{c}| < \varepsilon).$$

Pišemo da je  $\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \vec{c}$ .

Iz same definicije granične vrednosti vidimo da je

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \lim_{t \rightarrow a} x(t)\vec{i} + \lim_{t \rightarrow a} y(t)\vec{j} + \lim_{t \rightarrow a} z(t)\vec{k}.$$



Ako oko vrha  $M$  vektora  $\vec{c}$  opišemo otvorenu loptu  $L(M, \varepsilon)$  poluprečnika  $\varepsilon$ , to sledi da postoji  $\delta \in \mathbb{R}^+$ , tako da za svako  $t \in L(a, \delta) \setminus \{a\}$ , vrh  $S$  vektora  $\vec{r}(t)$  pripada  $L(M, \varepsilon)$ , tj. svi vektori  $\overrightarrow{MS}$  leže u otvorenoj lopti  $L(M, \varepsilon)$ .

## Napomena

Ako je  $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$  i ako za svako  $t \in D$  sa  $\tau(t)$  označimo vrh vektora  $\vec{r}(t)$ , tada važi

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \vec{c} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow a} \tau(t) = (c_1, c_2, c_3).$$



## Definicija

Za vektorsku funkciju  $\vec{r} : D \rightarrow X_0$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , kažemo da je **neprekidna u tački**  $a \in D$  ako

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall t \in D)(d(a, t) < \delta \Rightarrow |\vec{r}(t) - \vec{r}(a)| < \varepsilon).$$

Vektorska funkcija  $\vec{r} : D \rightarrow X_0$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  je **neprekidna** ako je neprekidna u svakoj tački  $a \in D$ .

Iz same definicije neprekidnosti sledi da je funkcija  $\vec{r}$  neprekidna u tački  $a$  ako i samo ako su komponente  $x : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $z : D \rightarrow \mathbb{R}$  funkcije  $\vec{r} : D \rightarrow X_0$  neprekidne u tački  $a$ .

Kao i kod skalarne funkcije, sledi da je vektorska funkcija  $\vec{r}$  neprekidna u tački nagomilavanja  $a \in D$  ako i samo ako važi da je

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a),$$

a ako je  $a \in D$  izolovana tačka definicionog skupa  $D$  vektorske funkcije  $\vec{r}$ , tada je  $\vec{r}$  automatski neprekidna u datoj tački.

Vektorska funkcija  $\vec{r} : D \rightarrow X_0$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , je **neprekidna nad skupom**  $E \subset D$  ako je restrikcija funkcije  $\vec{r}_E$  ( $\vec{r}_E(t) = \vec{r}(t)$ ,  $t \in E$ ) neprekidna funkcija za svako  $t \in E$ .

## Definicija

Ako je  $D = I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  i ako je  $\vec{r} : I \rightarrow X_0$  neprekidna funkcija, tada skup tačaka

$$L = \{\mathcal{T}(t) : t \in I\}$$

zovemo **kriva** u prostoru, odnosno **hodograf vektorske funkcije**  $\vec{r}$ .

Primetimo da je  $L$  kriva ako i samo ako je  $\mathcal{T} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  neprekidna funkcija.

Kriva  $L$  je parametarski data sa  $L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in [a, b],$

a u vektorskom obliku sa  $\vec{r} = \vec{r}(t), t \in [a, b]$ .

Ako je

$$M((x(a), y(a), z(a)) \equiv N(x(b), y(b), z(b)))$$

za krivu  $L$  kažemo da je **zatvorena**.

Ako sve tačke krive  $L$  leže u jednoj ravni, onda kažemo da je  $L$  **ravna kriva**.

## Definicija

Ako je  $(X, d)$  metrički prostor, **spojnicom (lukom)** u prostoru  $X$  nazivamo svako neprekidno preslikavanje  $s : I \rightarrow X$  intervala  $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  u prostor  $X$ .

Ako su tačke  $a = s(0)$  i  $b = s(1)$  različite, tada kažemo da spojnica **povezuje tačke  $a$  i  $b$** .

## Teorema

*Skup  $L \subset \mathbb{R}^3$  je kriva ako i samo ako je spojnica.*

*Dokaz.* Ako je  $L$  spojnica, očigledno je da je  $L$  kriva.

Neka je  $L = \{\tau(t) : t \in [a, b]\}$  kriva u prostoru. Tada je  $\tau : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  neprekidna funkcija. Ako posmatramo funkciju  $h : [0, 1] \rightarrow [a, b]$  zadatu sa

$$h(x) = (b - a)x + a,$$

vidimo da za nju važi

- $h$  je bijekcija,
- $h$  je neprekidna funkcija nad  $[0, 1]$ ,
- $h^{-1}$  je neprekidna funkcija nad  $[a, b]$ .

Preslikavanje  $f = \tau \circ h$  je neprekidno preslikavanje zatvorenog intervala  $[0, 1]$  na tačke krive  $L$ , pa je  $L$  spojnica. □

## Definicija

Za skup  $\emptyset \neq A \subset X$  kažemo da je **povezan** (lučno povezan) u metričkom prostoru  $(X, d)$ , ako za svake dve različite tačke  $a, b \in A$ , postoji spojnica  $s : I \rightarrow A$  koja povezuje tačke  $a$  i  $b$ .

Ako je skup  $X$  povezan u metričkom prostoru  $(X, d)$ , tada kažemo da je metrički prostor  $(X, d)$  **povezan**.

## Definicija

Ako je skup  $A \subset X$  istovremeno otvoren i povezan u metričkom prostoru  $(X, d)$  i  $A_1 \subset A^*$ , tada za skup  $A \cup A_1$  kažemo da je **oblast**. Specijalno, ako je  $A_1 = \emptyset$ , tada se za  $A$  kaže i **otvorena oblast**, a ako je  $A_1 = A^*$ , tada se za  $A \cup A_1 = A \cup A^* = \overline{A}$  kaže i **zatvorena oblast**.

Iz same definicije zatvorene oblasti ne sledi da je svaki neprazan zatvoren skup, zatvorena oblast.

## Primer

Skup  $A = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$  je zatvoren, ali nije zatvorena oblast, jer je  $A^\circ = \emptyset$ . ◇

## Definicija

Za skup  $L \subset E = \mathbb{R}^3$  kažemo da je **Žordanova<sup>7</sup> kriva** ili **Žordanov luk sa krajevima** ako:

- 1°) postoji interval  $I = [a, b]$  i preslikavanje  $\tau : I \rightarrow E$ , tako da je  $L = \{\tau(t) : t \in I\}$ ;
- 2°)  $\tau$  je bijektivno preslikavanje intervala  $I$  na  $L$ ;
- 3°)  $\tau$  je neprekidno preslikavanje.

Tačke  $A = \tau(a)$ ,  $B = \tau(b)$  zovemo **krajevi krive**  $L$ .

---

<sup>7</sup>Žordan, K. (Camil Jordan, 1838-1922) - francuski matematičar

Ako umesto  $2^\circ$ ) uzmemo da važi

$2^*)$   $\tau$  je bijekcija skupa  $[a, b]$  na  $L$  i  $\tau(a) = \tau(b)$ ,  
onda kažemo da je  $L$  **zatvorena Žordanova kriva**.

## Tvrđenje

Ako je  $L_1 = \{M(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ , tada je kriva  $L$  zatvorena Žordanova kriva ako i samo ako postoji preslikavanje  $f : L_1 \rightarrow L$ , tako da važi

- 1)  $f$  je bijektivno preslikavanje skupa  $L_1$  na  $L$ ;
- 2)  $f$  je neprekidno preslikavanje;
- 3)  $f^{-1} : L \rightarrow L_1$  je neprekidno preslikavanje.



## Tvrđenje

Neka je  $L \subset \tau = \mathbb{R}^2$  ravna zatvorena Žordanova kriva. Tada

- 1)  $\mathbb{R}^2 \setminus L = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , gde su  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$  dve disjunktne otvorene oblasti;
- 2)  $L = \Omega_1^* = \Omega_2^*$ ;
- 3) Jedna od oblasti, npr. uzmimo da je to  $\Omega_1$ , je ograničen skup i nju zovemo **unutrašnjost krive**  $L$ , dok je druga  $\Omega_2$  neograničen skup i nju zovemo **spoljašnjost krive**  $L$ .

Za ravnu oblast  $G \subset \tau = \mathbb{R}^2$  kažemo da je **jednostruko povezana** ako unutrašnjost svake Žordanove krive  $L \subset G$  pripada oblasti  $G$ .

Funkcija  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ima parcijalni izvod po  $x_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  nad  $E \subset D$ , pri čemu je skup  $E$  unija neke otvorene oblasti  $E_1$  i dela njenog ruba ako

1. postoji  $\frac{\partial z}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  po prethodnoj definiciji;
2. za rubnu tačku  $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$  ako ne postoji  $\frac{\partial z}{\partial x_i}(M)$ , tada:

a) ako postoji  $\varepsilon_i > 0$  sa osobinom da je

$$L_{\varepsilon_i} = \{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i - \varepsilon_i, x_{i+1}, \dots, x_n\} \subset E$$

postoji

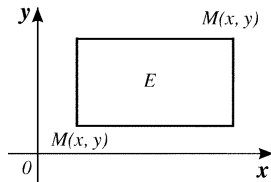
$$\frac{\partial^- z}{\partial x_i}(M).$$

Ako je za svako  $\varepsilon_i > 0$

$$D_{\varepsilon_i} = \{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + \varepsilon_i, x_{i+1}, \dots, x_n\} \not\subset E,$$

tada je

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(M) = \frac{\partial^- z}{\partial x_i}(M).$$



b) ako postoji  $\varepsilon_i > 0$  sa osobinom da je

$$D_{\varepsilon_i} = \{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + \varepsilon_i, x_{i+1}, \dots, x_n\} \subset E$$

postoji

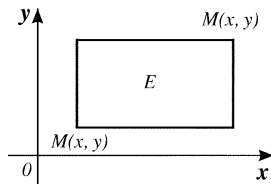
$$\frac{\partial^+ z}{\partial x_i}(M).$$

Ako je za svako  $\varepsilon_i > 0$

$$L_{\varepsilon_i} = \{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i - \varepsilon_i, x_{i+1}, \dots, x_n\} \not\subset E,$$

tada je

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(M) = \frac{\partial^+ z}{\partial x_i}(M).$$



c) ako za svako  $\varepsilon_i > 0$

$$L_{\varepsilon_i} = \{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i - \varepsilon_i, x_{i+1}, \dots, x_n\} \not\subset E$$

$$D_{\varepsilon_i} = \{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + \varepsilon_i, x_{i+1}, \dots, x_n\} \not\subset E,$$

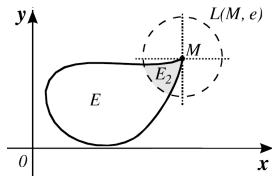
tada ako postoji

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(N), \text{ za svako } N \in L(M, \varepsilon) \cap E_1 = E_2 \neq \emptyset, \text{ za neko } \varepsilon > 0,$$

uzimamo po definiciji da je

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(M) = \lim_{\substack{N \rightarrow M \\ N \in E_2}} \frac{\partial z}{\partial x_i}(N),$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$



## Napomena

$$\text{Za funkciju } z = f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + y & , \quad x > 0, y \geq 0 \\ y & , \quad x = 0, y \geq 0 \end{cases}$$

postoji

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}(0, 1) &= \frac{\partial^+ z}{\partial x}(0, 1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 1) - f(0, 1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{\Delta x} + 1 - 1}{\Delta x} = 0, \end{aligned}$$

$$\text{a kako je } \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, \quad x > 0, y > 0,$$

$$\text{ne postoji } \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 1) \\ x > 0, y > 0}} \frac{\partial z}{\partial x}(x, y).$$

## Primer

Naći parcijalne izvode funkcije  $z = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)^3}$ .

Funkcija  $z = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)^3}$  je definisana za  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

Za svaku tačku  $M(x, y)$  za koju je  $x^2 + y^2 < 1$  ( $M$  je unutrašnja tačka oblasti definisanosti) je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -3x\sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3y\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

U rubnoj tački  $M(x, y)$  za koju je  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x \neq 0$ ,  $y \neq \pm 1$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}(M) &= \frac{\partial^- z}{\partial x}(M) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{(1 - (x + \Delta x)^2 - (1 - x^2))^3} - 0}{\Delta x} = 0, \text{ za } x > 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}(M) &= \frac{\partial^+ z}{\partial x}(M) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{(1 - (x + \Delta x)^2 - (1 - x^2))^3} - 0}{\Delta x} = 0, \text{ za } x < 0.\end{aligned}$$



U tačkama  $M(0, 1)$  i  $N(0, -1)$  je

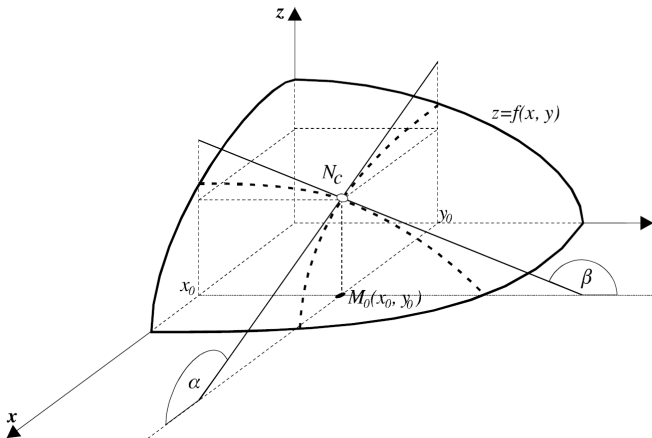
$$\frac{\partial z}{\partial x}(M) = \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 1) \\ x^2 + y^2 < 1}} -3x\sqrt{1 - x^2 - y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(N) = \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, -1) \\ x^2 + y^2 < 1}} -3x\sqrt{1 - x^2 - y^2} = 0.$$

Slično se računaju parcijalni izvodi po  $y$  u rubnim tačkama.

## Geometrijska interpretacija parcijalnih izvoda

- ▶ Površ  $\mathcal{S}$  zadata jednačinom  $z = f(x, y)$
- ▶ nad skupom  $D$  funkcija je neprekidna i ima parcijalne izvode
- ▶  $M_0(x_0, y_0) \in D$ , odgovara tački  $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathcal{S}$



Pri traženju parcijalnog izvoda  $\frac{\partial z}{\partial x}$  u tački  $M_0$  posmatra se funkcija  $z = f(x, y)$  kao funkcija jedne promenljive  $x$ , a  $y$  se tretira kao konstanta  $y = y_0$ , to jest  $z = f(x, y_0) = f_1(x)$ . Funkcijom  $z = f_1(x)$  definisana je kriva  $L$  dobijena presekom površi  $S$  i ravni  $y = y_0$ .

$$f'_1(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0),$$

je koeficijent pravca tangente u tački  $N_0$  krive  $L$  dobijene presekom ravni  $y = y_0$  i površi  $z = f(x, y)$ .

Slično, funkcijom  $z = f_2(y) = f(x_0, y)$  definisana je kriva  $L_1$  dobijena presekom površi  $S$  i ravni  $x = x_0$ , pa je

$$f'_2(y_0) = \operatorname{tg} \beta = \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)$$

koeficijent pravca tangente u tački  $N_0$  krive  $L_1$  dobijene presekom ravni  $x = x_0$  i površi  $z = f(x, y)$ .

# Diferencijabilnost

## Definicija

Neka je  $M(x_1, \dots, x_n)$  unutrašnja tačka oblasti  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  na kojoj je definisana funkcija  $z = f(x_1, \dots, x_n) = f(X)$ ,  $X \in D$ . Funkcija  $f(x_1, \dots, x_n)$  je **diferencijabilna u tački  $M$**  ako se njen totalni priraštaj

$$\Delta z = f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n),$$

gde  $N(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) \in D$ ,  $(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \neq (0, \dots, 0)$

koji odgovara priraštajima  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$  promenljivih  $x_1, \dots, x_n$  može napisati u obliku

$$\Delta z = D_1 \Delta x_1 + \dots + D_n \Delta x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_n \Delta x_n,$$

pri čemu  $D_i$  ne zavise od  $\Delta x_i$  i  $\lim_{(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \rightarrow (0, \dots, 0)} \alpha_i = 0$ .

Linearni deo priraštaja je **totalni diferencijal funkcije  $z$  u tački  $M$** , u oznaci  $dz(M) = df(M) = D_1 \Delta x_1 + \dots + D_n \Delta x_n$ .

Na primer, za funkciju  $z = x^2 + y^2$  imamo da je

$$\begin{aligned}\Delta z &= (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 - (x^2 + y^2) \\ &= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + y^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2 - x^2 - y^2 \\ &= \underbrace{2x}_{D_1} \Delta x + \underbrace{2y}_{D_2} \Delta y + \underbrace{\Delta x}_{\alpha_1} \Delta x + \underbrace{\Delta y}_{\alpha_2} \Delta y.\end{aligned}$$

## Teorema

Neka je funkcija  $z = f(x_1, \dots, x_n)$  diferencijabilna u tački  $M$ . Tada

a) funkcija  $f$  je neprekidna u tački  $M$ ,

b) postoje parcijalni izvodi  $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$

i važi jednakost  $D_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1}(M), \dots, D_n = \frac{\partial z}{\partial x_n}(M)$ .

*Dokaz.*

a)  $\lim_{(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \rightarrow (0, \dots, 0)} \Delta z = \lim_{(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \rightarrow (0, \dots, 0)} \sum_{i=1}^n (D_i + \alpha_i) \Delta x_i = 0$ , pa je funkcija  $z = f(x_1, \dots, x_n)$  neprekidna u tački  $M$ .

b) Pokažimo npr. da je  $D_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1}(M)$  (ostalo analogno).

Iz diferencijabilnosti funkcije  $z$  u tački  $M$  je za  $\Delta x_1 \neq 0$ ,  $\Delta x_2 = \Delta x_3 = \dots = \Delta x_n = 0$ ,

$$\Delta_{x_1} z = D_1 \Delta x_1 + \alpha_1 \Delta x_1.$$

Sledi da je

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_1} z}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} (D_1 + \alpha_1) = D_1.$$

Oдавде sledi da  $\frac{\partial z}{\partial x_1}$  postoji u tački  $M$  i da je  $\frac{\partial z}{\partial x_1}(M) = D_1$ .  $\square$

Kako je  $dz = dx_i = \Delta x_i$  za funkciju  $z = x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , to totalni diferencijal možemo zapisati u obliku

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n.$$

Ako sa

$$\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2} \neq 0$$

označimo rastojanje tačaka

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{i} \quad N(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n)$$

tada izraz

$$\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_n \Delta x_n$$

možemo zapisati u obliku

$$\omega \rho, \text{ gde je } \omega = \alpha_1 \frac{\Delta x_1}{\rho} + \alpha_2 \frac{\Delta x_2}{\rho} + \dots + \alpha_n \frac{\Delta x_n}{\rho}.$$

Kako je

$$\left| \frac{\Delta x_i}{\rho} \right| \leq 1 \quad \text{za svako} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

i kako je

$$\lim_{(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \rightarrow (0, \dots, 0)} \alpha_i = 0,$$

sledi da je

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \omega = 0.$$

Iz tog razloga, da je funkcija  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  diferencijabilna možemo zapisati i u obliku

$$\Delta z = D_1 \Delta x_1 + D_2 \Delta x_2 + \dots + D_n \Delta x_n + \omega \rho,$$

gde  $D_1, D_2, \dots, D_n$  ne zavise od  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ , a  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \omega = 0$ .



Suprotan smer prethodne teoreme ne važi uvek - neprekidnost funkcije u tački  $M$  i postojanje njenih parcijalnih izvoda u ovoj tački ne garantuje diferencijabilnost funkcije u toj tački.

## Primer

### *Funkcija*

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*je neprekidna u tački  $O(0, 0)$ , ima parcijalne izvode u tački  $O(0, 0)$ , a nije diferencijabilna u tački  $O(0, 0)$ .*

Iz

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

i

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon = \delta$$

sledi da je

$$|f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon,$$

pa je funkcija  $f(x, y)$  neprekidna u tački  $O(0, 0)$ .

Funkcija ima parcijalne izvode u tački  $O(0,0)$  :

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{(\Delta x)^2 \cdot 0}{(\Delta x)^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{(0)^2 \cdot \Delta y}{(0)^2 + (\Delta y)^2} - 0}{\Delta y} = 0$$

Ona nije diferencijabilna u toj tački. Ako bi bila, njen priraštaj bi mogao da se napiše u obliku

$$\Delta z = \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} - 0 = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + \omega \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

pri čemu je  $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \omega = 0$ , što nije tačno, jer za  $\Delta x = \Delta y > 0$  imamo

$$\omega(\Delta x, \Delta x) = \frac{(\Delta x)^3}{(2(\Delta x)^2)\Delta x\sqrt{2}},$$

pa je

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \omega(\Delta x, \Delta x) = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

što je kontradikcija.

## Teorema

*Ako funkcija  $z = f(x_1, \dots, x_n)$  ima parcijalne izvode u nekoj  $\delta$ -okolini tačke  $M$  i ako su ti izvodi neprekidni u samoj tački  $M$ , tada je funkcija diferencijabilna u  $M$ .*

Neprekidnost parcijalnih izvoda nije potreban uslov za diferencijabilnost:

## Primer

*Funkcija*

$$z = f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*je diferencijabilna u tački  $O(0, 0)$ , a oba parcijalna izvoda imaju prekid u tački  $O(0, 0)$ .*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}, \text{ za } (x, y) \neq (0, 0),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}, \text{ za } (x, y) \neq (0, 0),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{(\Delta x)^2} - 0}{\Delta x} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(\Delta y)^2 \sin \frac{1}{(\Delta y)^2} - 0}{\Delta y} = 0,$$

$$\begin{aligned}\Delta z = z(\Delta x, \Delta y) &= 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y \\ &+ \left( \Delta x \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \right) \Delta x \\ &+ \left( \Delta y \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \right) \Delta y,\end{aligned}$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \alpha = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \Delta x \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 0,$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \beta = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \Delta y \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 0,$$

pa je funkcija diferencijabilna u  $O(0, 0)$ .

$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial z}{\partial x}$  i  $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial z}{\partial y}$  ne postoje, pa su oba parcijalna izvoda prekidna u  $O(0, 0)$

$$\left( a_n = \left( \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, 0 \right) \rightarrow (0, 0), n \rightarrow \infty; \frac{\partial z}{\partial x}(a_n) \rightarrow -\infty, n \rightarrow \infty \right)$$

- ▶ funkcija  $z = f(x_1, \dots, x_n)$  je **diferencijabilna nad skupom  $A \subset D^\circ$**  ako je diferencijabilna u svakoj tački skupa  $A$
- ▶ ako funkcija  $z = f(x_1, \dots, x_n)$  ima neprekidne parcijalne izvode u tački  $M \subset D^\circ$  onda kažemo da je ona **neprekidno diferencijabilna u tački  $M$**
- ▶ ako funkcija  $z = f(x_1, \dots, x_n)$  ima neprekidne parcijalne izvode u svim tačkama skupa  $A \subset D^\circ$  onda kažemo da je ona **neprekidno diferencijabilna nad skupom  $A$**
- ▶ za dovoljno male priraštaje  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  važi da je  $\Delta z \approx dz$



## Izvod složene funkcije

Neka je dato  $n$  funkcija

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1(x_1, \dots, x_m), \\ u_2 &= \varphi_2(x_1, \dots, x_m), \\ &\vdots \\ u_n &= \varphi_n(x_1, \dots, x_m), \end{aligned}$$

koje preslikavaju skup  $D_1 \subset \mathbb{R}^m$  na skup  $D \subset \mathbb{R}$ .

Neka je  $z = f(u_1, \dots, u_n)$  definisana nad  $D^n$ . Tada je funkcija

$$z = f(\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m))$$

složena funkcija od funkcija

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \text{ i } f,$$

pri čemu je oblast definisanosti ove funkcije skup  $D_1 \subset \mathbb{R}^m$ .

## Teorema

*Neka funkcije  $u_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_m)$ ,  $i = 1, \dots, n$  imaju parcijalne izvode po svim promenljivama  $x_1, \dots, x_m$  u tački  $M(x_1, \dots, x_m)$ .*

*Ako je funkcija  $z = f(u_1, \dots, u_n)$  diferencijabilna u tački*

$$N(\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m)),$$

*tada složena funkcija  $z = f(u_1, \dots, u_n)$  ima sve parcijalne izvode po promenljivama  $x_i$  u tački  $M$  pri čemu važe jednakosti*

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_1} &= \frac{\partial z}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial z}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ &\vdots \\ \frac{\partial z}{\partial x_m} &= \frac{\partial z}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_m} + \dots + \frac{\partial z}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_m}. \end{aligned}$$

*Dokaz.* (za slučaj  $z = f(u, v)$ ,  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ )

Kako je funkcija  $z$  diferencijabilna u tački  $M$ , to je

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial z}{\partial v} \Delta v + \alpha \Delta u + \beta \Delta v, \quad \lim_{(\Delta u, \Delta v) \rightarrow (0,0)} \alpha = \lim_{(\Delta u, \Delta v) \rightarrow (0,0)} \beta = 0.$$

Za  $\Delta y = 0$  i  $\Delta x \neq 0$ , iz diferencijabilnosti funkcije  $f$  sledi

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta \frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Za  $\Delta x \rightarrow 0$  je i  $(\Delta_x u, \Delta_x v) \rightarrow (0, 0)$ , pa je

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta = 0.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta \frac{\Delta_x v}{\Delta x} \right) \\
 &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}.
 \end{aligned}$$

Slično se pokazuje da je

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

# Izvod vektorske funkcije skalarne promenljive

## Definicija

Ako za vektorsku funkciju

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in D^\circ$$

postoji

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t},$$

onda kažemo da vektorska funkcija  $\vec{r}(t)$  ima **izvod u tački  $t$**  koji se obeležava sa  $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$  ili sa  $\dot{\vec{r}}(t)$ , tj.

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Očigledno je  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$ ,

pa važe slična pravila kao kod izvoda realne funkcije jedne realne promenljive:

$$a) \frac{d}{dt}(\lambda_1 \vec{r}_1 + \lambda_2 \vec{r}_2) = \lambda_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + \lambda_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt},$$

$$b) \frac{d}{dt}(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot \vec{r}_2 + \frac{d\vec{r}_2}{dt} \cdot \vec{r}_1,$$

$$c) \frac{d}{dt}(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \frac{d\vec{r}_2}{dt},$$

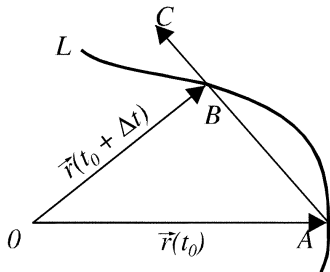
$$d) \frac{d}{dt}(\vec{r}(u(t))) = \frac{d\vec{r}}{du} \frac{du}{dt},$$

$$e) \frac{d}{dt}(u\vec{r}) = u \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{du}{dt} \vec{r}.$$

pri čemu izvodi sa desne strane postoje po pretpostavci.

## Geometrijska interpretacija izvoda:

Pretpostavimo da je  $\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = \dot{\vec{r}}_0 \neq 0$ .



Tada je  $\Delta \vec{r}(t) = \overrightarrow{AB}$ .  
 A je vrh vektora  $\vec{r}(t_0)$ ,  
 B je vrh vektora  $\vec{r}(t_0 + \Delta t)$ ,  
 pa je  $\frac{\Delta \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \overrightarrow{AC}$ .

Granična vrednost

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \dot{\vec{r}}_0$$

je vektor koji leži na pravoj koja prolazi kroz tačku A koju ćemo definisati kao **tangenta krive**  $L$  u tački A.

Tangenta krive  $L$  u tački  $A$  je prava

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}_0} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_0} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_0}, \quad \dot{r}_0 \neq 0,$$

a ravan

$$\dot{x}_0(x - x_0) = \dot{y}_0(y - y_0) = \dot{z}_0(z - z_0),$$

koja je normalna na  $p$  zovemo **normalna ravan krive  $L$** .

(stavljeno je da je  $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0$ )

Vektor  $\vec{\dot{r}}$  ima smer tamo kuda skalar raste.



Intenzitet vektora  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  zavisi od izbora parametra  $t$ .

Ako uzmemo da je  $t = \alpha\tau$ ,  $\alpha \neq 0$ , prema d) je tada

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \left| \frac{d\vec{r}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \right| = \left| \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right| \left| \frac{1}{\alpha} \right|,$$

pa možemo izabrati parametar tako da taj intenzitet bude jednak 1.

Obeležićemo tu vrednost parametra sa  $s$ .

$$\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = \sqrt{\left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dz}{ds} \right)^2} = 1.$$

Sledi da je  $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$ , tj.  $s = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ .

Dakle,  $s$  je dužina luka krive  $L$  od neke fiksne tačke  $M$ . Prema geometrijskoj interpretaciji izvoda sledi da je  $\vec{r}(s) = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \vec{t}_0$ , ort tangente na krivu  $L$  u posmatranoj tački sa smerom porasta skalara  $t$ .

Za jedinični vektor  $\vec{c} = \vec{c}(t)$  je  $\vec{c} \cdot \vec{c} = 1$ , odakle sledi da je

$$\frac{d\vec{c}}{dt} \cdot \vec{c} + \frac{d\vec{c}}{dt} \cdot \vec{c} = 0.$$

Dakle, izvod jediničnog vektora  $\vec{c}$  normalan je na vektor  $\vec{c}$ . Za  $\vec{r} = r\vec{r}_0$  ( $\vec{r}_0$  je ort) je

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{r}_0 + r\frac{d\vec{r}_0}{dt}.$$

Ako je  $\vec{r}_0$  konstantan vektor, tada vektor

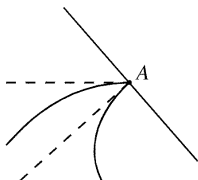
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{r}_0$$

ima pravac jediničnog vektora, a ako je  $\vec{r}$  konstantnog intenziteta, tada vektor

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = r\frac{d\vec{r}_0}{dt}$$

ima pravac koji je normalan na vektor  $\vec{r}_0$ .

## Mehanička interpretacija jednostranih izvoda:



Ako materijalna tačka tokom kretanja udari u prepreku, odbija se i nastavlja kretanje. U trenutku  $t_0$  sudara sa preprekom, funkcija  $\vec{r}$  nema izvod, ali postoje **desni i levi izvod u tački  $t_0$**  :

$$\dot{\vec{r}}_+(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}, \quad \dot{\vec{r}}_-(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^-} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

Oni daju brzinu tačke pre i posle udara u prepreku. Odgovaraju im desna i leva tangenta na krivu  $L$  u tački udara  $A$  :

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}_0^+} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_0^+} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_0^+}, \quad \frac{x - x_0}{\dot{x}_0^-} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_0^-} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_0^-}.$$

## Tangentna ravan i normala površi

Neka je površ  $S$  data jednačinom  $F(x, y, z) = 0$ .

- ▶  $P(x, y, z)$  je **regularna(nesingularna) tačka površi  $S$**  ako postoje sva tri parcijalna izvoda  $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$  u tački  $P$  koji su neprekidni u tački  $P$  i

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \neq (0, 0, 0)$$

- ▶ Ako tačka  $P(x, y, z)$  nije regularna tačka površi  $S$ , onda za nju kažemo da je **singularna tačka površi  $S$** .

Neka je skup  $L$  tačaka površi  $S$  (u daljem tekstu kriva  $L$  u parametarskom obliku) dat sa

$$L : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), & t \in [\alpha, \beta] \\ z = \omega(t) \end{cases}$$

- ▶  $\varphi, \psi, \omega$  imaju neprekidne izvode za svako  $t \in [\alpha, \beta]$
- ▶  $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t) \neq 0$ , za svako  $t \in [\alpha, \beta]$

Tada vektor

$$\vec{r}_0' = \vec{r}_0'(t_0) = \dot{x}(t_0)\vec{i} + \dot{y}(t_0)\vec{j} + \dot{z}(t_0)\vec{k}$$

leži na tangenti krive  $L$  u tački  $P(x_0, y_0, z_0)$ .

Tangenta krive  $L$  u tački  $P$  je **tangenta površi  $S$**  u tački  $P$ .

Jednačina površi je  $F(x, y, z) = 0$  tj.  $F(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) = 0$  jer  $L$  leži na  $S$ . Diferenciranjem po  $t$  dobijamo

$$\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt}}_{\vec{n} \cdot \dot{\vec{r}}} = 0,$$

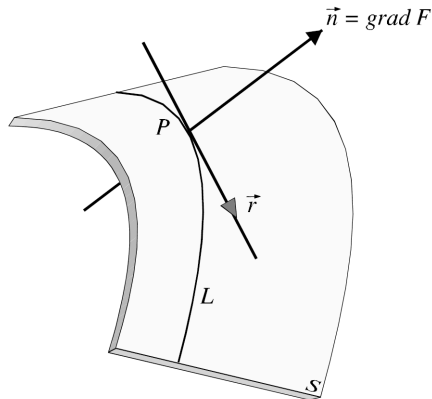
pri čemu je

- ▶  $\vec{n} = \text{grad} F = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k}$ , ne zavisi od oblika krive, jedino od koordinata tačke  $P$  i funkcije  $F(x, y, z)$ ,
- ▶  $\dot{\vec{r}} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$  leži na tangenti krive  $L$  u tački  $P$

Kako je  $P$  regularna tačka površi  $S$ , to je

$$|\text{grad} F| = |\vec{n}| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \neq 0.$$

Iz  $\vec{n} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$  sledi da su vektori  $\dot{\vec{r}}$  i  $\vec{n}$  ortogonalni. Ovo znači da je vektor  $\dot{\vec{r}}$ , koji leži na tangenti krive  $L$  u tački  $P$ , normalan na vektor  $\vec{n}$  u tački  $P$ .



Ovo se može primeniti na bilo koju krivu  $L$  koja leži na površi  $S$  i prolazi kroz tačku  $P$ .

## Definicija

Ravan formirana od svih tangenti površi  $S$  kroz datu regularnu tačku  $P \in S$  je **tangentna ravan** površi  $S$  u tački  $P$ .

Vektor

$$\vec{n}(P) = \left( \frac{\partial F}{\partial x}(P), \frac{\partial F}{\partial y}(P), \frac{\partial F}{\partial z}(P) \right)$$

je vektor normale tangentne ravni površi  $F(x, y, z) = 0$  u tački  $P$ .

Jednačina tangentne ravni u regularnoj tački  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  je

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(P_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(P_0)(z - z_0) = 0.$$



Ako je površ  $S$  data jednačinom  $z = f(x, y)$ , možemo da je napišemo kao

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0.$$

Tada je

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -1,$$

pa je jednačina tangentne ravni u tački  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ,  $z_0 = f(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = z - z_0.$$

## Geometrijska interpretacija totalnog diferencijala

Zamenom  $x - x_0 = \Delta x$  i  $y - y_0 = \Delta y$ , prethodna jednačina tangentne ravni se svodi na

$$\begin{aligned}
 z - z_0 &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy.
 \end{aligned}$$

Desna strana gornje jednakosti je totalni diferencijal funkcije  $z = f(x, y)$ , u tački  $M_0(x_0, y_0)$  ravni  $xy$ , pa je

$$z - z_0 = dz.$$

Sledi da je vrednost totalnog diferencijala funkcije  $z = f(x, y)$  u tački  $M_0(x_0, y_0)$  koji odgovara priraštajima  $\Delta x$  i  $\Delta y$  jednaka priraštaju po aplikati  $z$  tangentne ravni u tački  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  dobijenom pri pomeranju iz tačke  $M_0(x_0, y_0)$  u tačku  $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ .

- └ Funkcije više promenljivih
- └ Tangentna ravan i normala površi

## Definicija

Prava koja prolazi kroz tačku  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  površi  $F(x, y, z) = 0$  i koja je normalna na tangentnu ravan površi u tački  $P_0$  je **normala površi u tački  $P_0$**  i data je jednačinom

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)}.$$

Ako je površ  $S$  zadata jednačinom  $z = f(x, y)$ , jednačina normale površi u tački  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  postaje

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

## Parcijalni izvodi višeg reda

Neka  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , postoji  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  za neko  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  u svim tačkama nepraznog podskupa  $D_1 \subset D$ .

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$  je realna funkcija definisana nad skupom  $D_1$ , tj.  $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ , pa se može postaviti pitanje postojanja parcijalnog izvoda te funkcije po promenljivoj  $x_j$  u nekoj tački  $M \in D_1$ .

### Definicija

Ako postoji parcijalni izvod  $\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (M)$  tada je to *drugi parcijalni izvod ili parcijalni izvod drugog reda funkcije  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  u tački  $M$  po promenljivama  $x_i, x_j$  (tim redom!) i označavamo ga sa*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (M).$$

- ▶ za  $i = j$  je  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(M)$
- ▶ za  $i \neq j$  je  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M)$  **mešoviti** parcijalni izvod
- ▶ u opštem slučaju  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M)$  i  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(M)$  mogu imati različite vrednosti

## Primer

$$\text{Funkcija } z = f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ima mešovite parcijalne izvode u svim tačkama, pri čemu oni nisu jednaki

u koordinatnom početku, tj.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ .

## Teorema

Ako postoje drugi mešoviti parcijalni izvodi  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  i  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  u nekoj  $\delta$ -okolini tačke  $M(x_1, \dots, x_n)$  i ako su oni neprekidni u datoj tački  $M$ , onda su oni i jednaki u toj tački, tj. važi jednakost

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(M).$$

Parcijalni izvodi **višeg reda** definišu se induktivno:

- ▶ parcijalni izvod **reda  $m$**  ili  **$m$ -tog reda funkcije  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  u tački  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  po promenljivama  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$  (tim redom!)** označava se sa

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}}(M),$$

pri čemu neki od indeksa mogu biti jednaki.

Redosled traženja parcijalnih izvoda u opštem slučaju utiče na njegovu vrednost. U slučaju da su izvodi neprekidne funkcije u nekoj tački, na osnovu prethodne teoreme, redosled više nije bitan.

$C^m(D, \mathbb{R})$  je skup svih funkcija takvih da su svi parcijalni izvodi  $m$ -tog reda neprekidni nad skupom  $D$ .

## Posledica

Za  $f \in C^m(D, \mathbb{R})$  se vrednost izraza  $\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}}(M)$  ne menja pri proizvoljnoj permutaciji indeksa  $i_1, i_2, \dots, i_m$ .

Funkcije klase  $C^m(D, \mathbb{R})$ , gde je  $D$  otvorena oblast su  **$m$  puta neprekidno diferencijabilne**. Za  $m$ -ti parcijalni izvod takve funkcije koristićemo oznaku

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

gde  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq \alpha_i \leq m$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m$ .

## Totalni diferencijal višeg reda

Za diferencijabilnu funkciju  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  nad skupom  $D$  je **totalni diferencijal prvog reda (prvi totalni diferencijal)** funkcije

$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  u tački  $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$  koji odgovara priraštajima  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$  promenljivih  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dat formulom

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n,$$

gde su  $dx_i = \Delta x_i$ ,  $i = \{1, 2, \dots, n\}$  proizvoljni priraštaji nezavisnih promenljivih, tj. proizvoljni brojevi nezavisni od  $x_i$ ,  $i = \{1, 2, \dots, n\}$ .

- ▶  $x_1, x_2, \dots, x_n$  možemo da menjamo tako da pri tome  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$  ostanu konstantni
- ▶ za date  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$  totalni diferencijal  $dz$  je funkcija od  $x_1, x_2, \dots, x_n$  koja takođe može da bude diferencijabilna



## Definicija

Totalni diferencijal  $d(dz)$  u tački  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  koji odgovara priraštajima nezavisnih promenljivih  $dx_1, \dots, dx_n$  se zove **drugi totalni diferencijal (totalni diferencijal drugog reda) funkcije  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  u tački  $M$ , u oznaci  $d^2z$** .

Ako funkcija  $z = f(x, y)$  ima neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda u otvorenoj oblasti  $D$ , tada je totalni diferencijal  $dz$  funkcije  $z = f(x, y)$  diferencijabilna funkcija pa u  $D$  postoji  $d^2z$ . Kako su  $dx$  i  $dy$  konstantni, sledi

$$\begin{aligned}
 d^2z &= d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dy \\
 &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2
 \end{aligned}$$

Ako sa  $d$  označimo  $d = \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy$ , tada se može pisati

$$dz = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) z, \quad d^2 z = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z$$

### Opštije,

ako funkcija  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ima neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda u otvorenoj oblasti  $D$ , tada je totalni diferencijal  $dz$  funkcije  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  diferencijabilna funkcija pa u  $D$  postoji  $d^2 z$ . Kako su  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$  konstantni, sledi

$$\begin{aligned} d^2 z &= d(dz) = d \left( \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n \right) \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} dx_2^2 + \dots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} dx_n^2 + \\ &\quad + 2 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \dots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1} \partial x_n} dx_{n-1} dx_n \right) \end{aligned}$$

Ako sa  $d$  označimo

$$d = \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n,$$

prethodna formula se može zapisati kao

$$d^2 z = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 z,$$

a prvi totalni diferencijal možemo zapisati u obliku

$$dz = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right) z.$$

- ▶ totalni diferencijal  $m$ -tog reda ili  $m$ -ti totalni diferencijal,  $m \geq 3$ , definišu se induktivno
- ▶ za  $m$ -ti totalni diferencijal,  $m \geq 2$ , kažemo da je totalni diferencijal višeg reda ili viši totalni diferencijal

## Teorema

Ako funkcija  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^m(D, \mathbb{R})$ ,  $D$  je otvorena oblast, tada postoji totalni diferencijal  $d^m z$   $m$ -tog reda koji je dat obrascem

$$d^m z = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^m z.$$

# Lokalni ekstremi

## Definicija

Neka je  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  definisana na nekoj okolini  $L(A, \varepsilon)$  tačke  $A \in D$  (sledi da je  $A \in D^\circ$ ).

- ▶ Ako je za svaku tačku  $X \in L(A, \varepsilon) \setminus \{A\}$  ispunjeno

$$f(X) < f(A),$$

tada funkcija  $f$  u tački  $A$  ima **lokalni maksimum** jednak  $f(A)$ .

- ▶ Ako je za svaku tačku  $X \in L(A, \varepsilon) \setminus \{A\}$  ispunjeno

$$f(X) > f(A),$$

tada funkcija  $f$  u tački  $A$  ima **lokalni minimum** jednak  $f(A)$ .

Lokalne maksimume i lokalne minimume zovemo **lokalni ekstremi**.

Drugim rečima, funkcija  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  u tački

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D^\circ$$

ima lokalni ekstrem ako za svako  $i \in \{1, \dots, n\}$  postoje  $\delta_i > 0$  takvi da je

$$\text{za svako } |\Delta x_i| < \delta_i, \quad (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n) \neq (0, 0, \dots, 0),$$

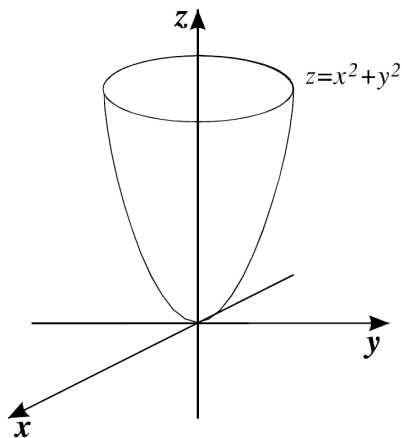
$$B(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) \in D$$

priraštaj funkcije

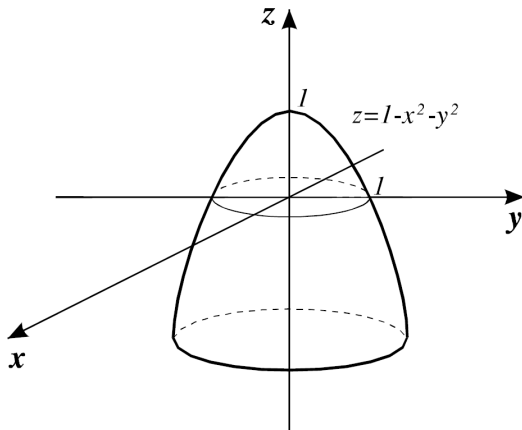
$$\Delta z = f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n)$$

u tački  $A$  ili pozitivan (lokalni minimum) ili negativan (lokalni maksimum) (o rubnim ekstremima biće reči kasnije).

Funkcija  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$  u tački  $O(0, 0)$  ima lokalni minimum:



Funkcija  $z = f(x, y) = 1 - x^2 + y^2$  u tački  $O(0, 0)$  ima lokalni maksimum:

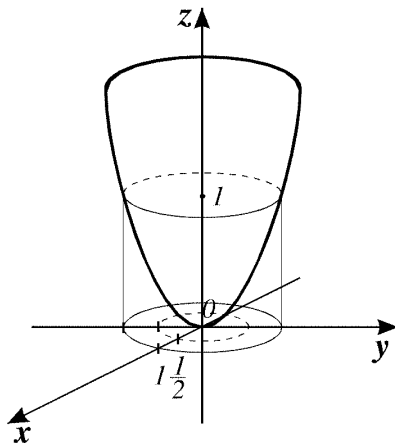




## Funkcija

$$z = f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & , \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ 1 & , \quad x = y = 0 \end{cases}$$

u tački  $O(0,0)$  ima lokalni maksimum:



## Potreban uslov za postojanje lokalnog ekstrema:

### Teorema

*Neka funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  u tački  $A(a_1, a_2, \dots, a_n) \in D^\circ$  ima sve parcijalne izvode prvog reda i neka u toj tački ima lokalni ekstrem. Tada je*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(A) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(A) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) = 0.$$

*Specijalno, ako je  $f(X)$ ,  $X \in D$  diferencijabilna funkcija u nekoj okolini tačke  $A \in D^\circ$ , onda je*

$$df(A) = 0, \quad (dx_1, dx_2, \dots, dx_n) \neq (0, 0, \dots, 0).$$

*Dokaz.* Neka je  $L(a, \varepsilon)$  otvorena lopta u kojoj je definisana funkcija  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  i u kojoj važi da je

$$f(x) < f(A) \quad (f(x) > f(A)) \text{ za sve } x \in L(a, \varepsilon) \setminus \{A\}.$$

Za proizvoljno  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  posmatrajmo funkciju

$$f_i : (a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$$

definisano sa

$$f_i(x_i) = f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n), \text{ za } x_i \in (a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon).$$

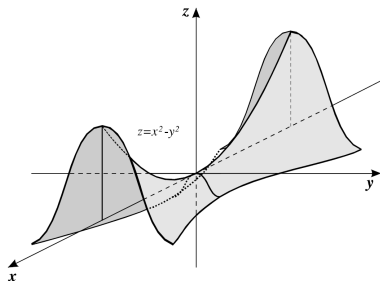
Ta funkcija jedne promenljive ima lokalni ekstrem u tački  $a_i$ , pa je

$$f'_i(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0.$$



**Navedeni uslov nije i dovoljan za postojanje ekstrema:**

Funkcija  $z = x^2 - y^2$  ima izvode  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$ , koji su jednaki nuli za  $x = y = 0$ .



Kako je  $f(O) = f(0,0) = 0$ ,  $\Delta z = f(x,y) - f(0,0) = x^2 - y^2$ , to je

$$\begin{cases} \Delta f > 0 & , \quad x \neq 0, y = 0 \\ \Delta f < 0 & , \quad x = 0, y \neq 0 \end{cases}$$

pa ova funkcija nema lokalni ekstrem u tački  $O(0,0)$ .

- ▶ **stacionarne tačke** - unutrašnje tačke oblasti definisanosti diferencijabilne funkcije  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  u kojima su svi parcijalni izvodi prvog reda jednaki nuli

## Dovoljni uslovi za postojanje lokalnog ekstrema (2 teoreme):

### Teorema

Neka je  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  otvorena oblast i neka  $A(a_1, \dots, a_n) \in D$ ,  $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ , pri čemu je  $A$  stacionarna tačka funkcije  $f(x_1, \dots, x_n)$ , tj.  $df(A) = 0$  za  $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ . Tada

1. Ako je  $d^2f(A) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 f(a_1, \dots, a_n) < 0$  za  $(dx_1, \dots, dx_n) \neq (0, \dots, 0)$ , tada  $f$  u  $A$  ima lokalni maksimum.
2. Ako je  $d^2f(A) > 0$  za  $(dx_1, \dots, dx_n) \neq (0, \dots, 0)$ , funkcija  $f$  u tački  $A$  ima lokalni minimum.
3. Ako  $d^2f(A)$  menja znak za  $(dx_1, \dots, dx_n) \neq (0, \dots, 0)$ , funkcija  $f$  u tački  $A$  nema lokalni ekstrem.

## Teorema

Neka je  $D \subset \mathbb{R}^2$  otvorena oblast i neka  $A(a, b) \in D$ ,  $f \in C^2(D, \mathbb{R})$  i

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0.$$

Označimo sa  $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$ ,  $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$ ,  $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$ . Tada:

1. Ako je  $r > 0$  ( $t > 0$ ) i  $rt - s^2 > 0$ , funkcija  $f(x, y)$  u tački  $A(a, b)$  ima lokalni minimum.
2. Ako je  $r < 0$  ( $t < 0$ ) i  $rt - s^2 > 0$ , funkcija  $f(x, y)$  u tački  $A(a, b)$  ima lokalni maksimum.
3. Ako je  $rt - s^2 < 0$ ,  $f(x, y)$  u tački  $A(a, b)$  nema lokalni ekstrem.
4. Ako je  $rt - s^2 = 0$ , potrebna su dalja ispitivanja (posmatra se znak priraštaja funkcije u tački  $A(a, b)$ ).

## Primer

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije  $z = f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$

Iz  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y = 0$  i  $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x + 2y = 0$  dobijamo stacionarne tačke

$A(x, -x)$ , tj. sve tačke prave  $y = -x$  su stacionarne tačke. Kako je

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2,$$

to je uvek

$$rt - s^2 = 4 - 4 = 0$$

ili

$$d^2 f(A) = 2(dx + dy)^2 \geq 0,$$

pa na osnovu ovih kriterijuma ne možemo zaključiti da li data funkcija u tačkama  $A(x, -x)$  ima lokalni ekstrem.

U svakoj okolini tačke  $A(x, -x)$  ima i drugih tačaka

$$B(y, -y), \text{ pri čemu je } A \neq B,$$

pri čemu važi da je

$$f(B) - f(A) = 0.$$

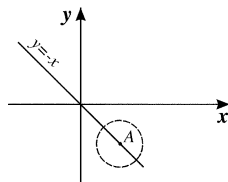
Dalje, za sve tačke

$$X(x, y), \text{ gde je } x \neq y$$

je

$$f(x, y) - f(0, 0) = (x + y)^2 > 0,$$

pa zaključujemo da je  $f(X) - f(A) \geq 0$ , za tačke  $X \in L(A, \varepsilon)$ , pa zaključujemo da funkcija ni u jednoj tački  $A(x, -x)$  nema lokalni ekstrem.



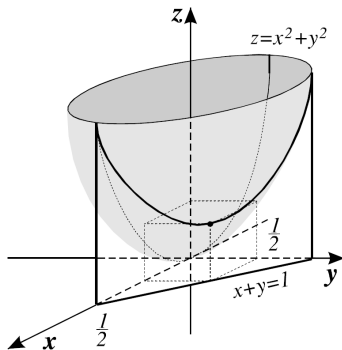


## Vezani (uslovni) ekstremi

Kod određivanja ekstremnih vrednosti funkcija više promenljivih promenljive mogu biti vezane nekim dodatnim relacijama (ne mogu slobodno da se menjaju u oblasti definisanosti funkcije).

### Primer

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$  pod uslovom da je  $x + y = 1$ .



Iz date veze sledi da je  $y = 1 - x$ , pa je u odgovarajućim tačkama

$$f(x, y) = f(x, 1 - x) = 2x^2 - 2x + 1 = 2 \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}.$$

Funkcija  $f(x, 1 - x)$  ima minimum za  $x = \frac{1}{2}$  (pa i  $y = \frac{1}{2}$ ).

Minimalna vrednost je  $\frac{1}{2}$ .

Sama funkcija  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$  u svakoj okolini tačke  $\left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$  ima i manjih vrednosti od  $\frac{1}{2}$ .

Inače, njena najmanja vrednost je 0.

Ograničimo razmatranja na funkciju dve promenljive,  $z = f(x, y)$ . Neka je  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , definisana na  $D \subset \mathbb{R}^2$  i  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Neka je

$$B = \{(x, y) \in D : \varphi(x, y) = 0\}$$

neprazan skup određen uslovom ili vezom  $\varphi(x, y) = 0$ .

## Definicija

Funkcija  $z = f(x, y)$  u tački nagomilavanja  $A(x, y) \in B$  skupa  $B$  ima *uslovni (vezani) lokalni maksimum (uslovni (vezani) lokalni minimum) pri uslovu  $\varphi(x, y) = 0$ , ako*

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall X \in B \cap (L(A, \varepsilon) \setminus \{A\})) \quad f(X) < f(A) \quad (f(X) > f(A)).$$

Uslovni lokalni minimum odnosno uslovni lokalni maksimum jednim imenom zovemo *uslovni ili vezani ekstremi* a jednačina  $\varphi(x, y) = 0$  zove se *jednačina veze*.

Ako je jednačina krive  $L : \varphi(x, y) = 0$ , problem određivanja uslovnih ekstrema funkcije  $z = f(x, y)$  na krivoj  $L$  može se formulisati kao:  
**odrediti uslovne ekstreme funkcije  $z = f(x, y)$  nad skupom  $D$ , pod uslovom  $\varphi(x, y) = 0$ .**

**Lagranžov metod za određivanje uslovnog ekstrema:**

Neka je  $M_0 = (x_0, y_0)$  potencijalna tačka uslovnog ekstrema funkcije  $z = f(x, y)$  sa jednačinom veze  $\varphi(x, y) = 0$ .

Pp. da funkcije  $f(x, y)$  i  $\varphi(x, y)$  imaju neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda u nekoj okolini tačke  $M_0(x_0, y_0)$  i da je bar jedan od parcijalnih izvoda

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(M_0), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(M_0)$$

različit od 0 (neka je npr.  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(M_0) \neq 0$ .)

Iz  $\varphi(x, y) = 0$  sledi da je  $y = \psi(x)$ , pa je  $z = f(x, \psi(x)) = h(x)$  funkcija jedne promenljive. Potreban uslov da funkcija

$$z = f(x, \psi(x))$$

u tački  $M(x_0, \psi(x_0))$  ima ekstremnu vrednost je da je  $\frac{dz}{dx}(M_0) = 0$ . Sledi da je

$$dz(M_0) = df(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)dy = 0. \quad (3)$$

Iz jednačine veze se dobija

$$d\varphi(M_0) = \varphi_x(M_0)dx + \varphi_y(M_0)dy = 0. \quad (4)$$

Množenjem jednakosti (4) sa  $\lambda$  i dodavanjem jednakosti (3) dobijamo

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) \right) dx + \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \right) dy = 0.$$

Iz  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$  izrazimo  $\lambda$  :

$$\lambda = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Dakle, jednakosti

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

daju potrebne uslove za nevezane ekstreme u tački  $M_0(x_0, y_0)$  funkcije

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) \quad (\text{LAGRANŽOVA FUNKCIJA}).$$

Dakle, uslovni ekstrem funkcije  $f(x, y)$ , ako je  $\varphi(x, y) = 0$ , je obavezno stacionarna tačka Lagranžove funkcije

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y),$$

pa se tačke koje mogu biti uslovni ekstremi funkcije  $f(x, y)$ , ako je  $\varphi(x, y) = 0$ , dobijaju tako što se formira Lagranžova funkcija i njeni prvi parcijalni izvodi

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}$$

izjednače sa nulom. Dobijamo sistem od tri jednačine

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= f_x(x, y) + \lambda \varphi_x(x, y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= f_y(x, y) + \lambda \varphi_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) &= 0, \end{aligned}$$

čijim rešavanjem određujemo  $\lambda$ ,  $x$  i  $y$  mogućih tačaka ekstrema.

Postojanje i prirodu uslovnih ekstrema određujemo pomoću znaka drugog totalnog diferencijala Lagranžove funkcije

$$d^2F(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2,$$

za skup vrednosti  $x_0, y_0, \lambda$  dobijenih iz prikazanog sistema jednačina pod uslovom  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0$ , za  $(dx, dy) \neq (0, 0)$ .

- ▶  $d^2F(x_0, y_0) < 0$  u tački  $(x_0, y_0)$  funkcija  $f(x, y)$  ima uslovni maksimum
- ▶  $d^2F(x_0, y_0) > 0$  u tački  $(x_0, y_0)$  funkcija  $f(x, y)$  ima uslovni minimum
- ▶  $d^2F(x_0, y_0)$  u tački  $(x_0, y_0)$  menja znak funkcija  $f(x, y)$  nema uslovni ekstrem



## Primer

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$  pod uslovom da je  $x + y = 1$ .

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1),$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2x + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2y + \lambda = 0, \\ x + y - 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = y = \frac{1}{2}, \lambda = -1.$$

Kako je  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$  i  $dx + dy = 0$ , to je

$$\begin{aligned} d^2 F \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) &= 2dx^2 + 2dy^2 \\ &= 2dx^2 + 2(-dx)^2 = 4dx^2 > 0, (dx, dx) \neq (0, 0), \end{aligned}$$

pa funkcija u tački  $A \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$  ima uslovni minimum pod uslovom  $x + y = 1$ .

## Primer

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije  $z = f(x, y) = xy$  pod uslovom da je  $y - x = 0$ .

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(y - x),$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= y - \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= x + \lambda = 0, \\ y - x &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = y = 0, \lambda = 0.$$

Kako je  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1$  i  $dy - dx = 0$ , to je

$d^2 F(0, 0) = dx^2 > 0$ , za  $dx \neq 0$ . Kako je  $d^2 F(0, 0) > 0$ , to funkcija u tački  $O(0, 0)$  ima uslovni lokalni minimum. Primetimo da je  $rt - s^2(0, 0) = -1 < 0$ , dakle **funkcija može imati uslovni ekstrem i ako je  $rt - s^2 < 0$ .**

Neka je data funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , definisana na skupu  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  i funkcije  $\varphi_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , za fiksirano  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m < n$ . Neka je

$$B = \{X \in D : \varphi_i(X) = 0, i = 1, 2, \dots, m\}$$

neprazan skup određen sa  $\varphi_1(X) = 0, \varphi_2(X) = 0, \dots, \varphi_m(X) = 0$ .

## Definicija

Funkcija  $z = f(x_1, \dots, x_n)$  u tački nagomilavanja  $A(a_1, a_2, \dots, a_n) \in B$  skupa  $B$  ima **uslovni (vezani) lokalni maksimum (uslovni (vezani) lokalni minimum)** pri uslovima

$\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \varphi_2(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n) = 0$  ako

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall X \in B \cap (L(A, \varepsilon) \setminus \{A\})) \quad f(X) < f(A) \quad (f(X) > f(A)).$$

Uslovni lokalni minimum odnosno uslovni lokalni maksimum jednim imenom zovemo **uslovni ili vezani ekstremi**.

Ako tražimo uslovne ekstreme funkcije  $z = f(x_1, \dots, x_n)$ , pod uslovima

$$\begin{aligned}\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0,\end{aligned}$$

gde je  $1 \leq m < n$ , formiramo **Lagranžovu funkciju**:

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(x_1, \dots, x_n),$$

uz pretpostavku da funkcije  $f(x_1, \dots, x_n)$  i  $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, \dots, m$  imaju neprekidne parcijalne izводе prvog i drugog reda u nekoj okolini potencijalne tačke uslovnog ekstrema  $M(a_1, \dots, a_n)$ .

Dalje, pretpostavimo da u toj okolini funkcionalna matrica

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

ima rang  $m$ . Izjednačavanjem sa nulom svih parcijalnih izvoda prvog reda funkcije  $F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$  i uzimajući u obzir jednačine veze, dobijamo sistem od  $n + m$  jednačina:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$\varphi_j(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad j \in \{1, 2, \dots, m\}$$

čijim rešavanjem nalazimo  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  i koordinate  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mogućih ekstrema.

Postojanje i prirodu uslovnih ekstrema određujemo pomoću znaka drugog diferencijala Lagranžove funkcije. Ako je u dobijenim tačkama

- ▶  $d^2F < 0$ ,  $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ , funkcija  $f(x, y)$  ima uslovni maksimum
- ▶  $d^2F > 0$   $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ , funkcija  $f(x, y)$  ima uslovni minimum
- ▶  $d^2F$  menja znak funkcija  $f(x, y)$  nema uslovni ekstrem

Između  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$  postoje veze

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} dx_n &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} dx_n &= 0. \end{aligned}$$

## Primer

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije  $u = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  pod uslovom da je  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ,  $a > b > c > 0$ .

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2x + 2\lambda \frac{x}{a^2} = 2x \left( 1 + \frac{\lambda}{a^2} \right) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee \lambda = -a^2, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2y + 2\lambda \frac{y}{b^2} = 2y \left( 1 + \frac{\lambda}{b^2} \right) = 0 \Rightarrow y = 0 \vee \lambda = -b^2, \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= 2z + 2\lambda \frac{z}{c^2} = 2z \left( 1 + \frac{\lambda}{c^2} \right) = 0 \Rightarrow z = 0 \vee \lambda = -c^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$A(a, 0, 0), \quad B(-a, 0, 0) \quad (\lambda = -a^2)$$

$$C(0, b, 0), \quad D(0, -b, 0) \quad (\lambda = -b^2)$$

$$E(0, 0, c), \quad H(0, 0, -c) \quad (\lambda = -c^2)$$

Kako je

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2 + 2\frac{\lambda}{a^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2 + 2\frac{\lambda}{b^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 2 + 2\frac{\lambda}{c^2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = 0,$$

to je

$$d^2 F = 2 \left( \left( 1 + \frac{\lambda}{a^2} \right) dx^2 + \left( 1 + \frac{\lambda}{b^2} \right) dy^2 + \left( 1 + \frac{\lambda}{c^2} \right) dz^2 \right).$$

Za tačke  $A$  i  $B$  je

$$d^2 F(A) = d^2 F(B) = 2 \left( \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right) dy^2 + \left( 1 - \frac{a^2}{c^2} \right) dz^2 \right).$$



Diferenciranjem jednačine veze dobijamo

$$\frac{2x}{a^2}dx + \frac{2y}{b^2}dy + \frac{2z}{c^2}dz = 0,$$

odakle uvrštavanjem koordinata tačaka  $A$  i  $B$  dobijamo  $\pm \frac{2a}{a^2}dx = 0$ ,

odakle je  $dx = 0$ .

S obzirom da je  $(dx, dy, dz) \neq (0, 0, 0)$ , bar jedan od diferencijala  $dy$  ili  $dz$  mora biti različit od nule.

Kako je

$$1 - \frac{a^2}{b^2} < 0 \quad \text{i} \quad 1 - \frac{a^2}{c^2} < 0$$

sledi da je

$$d^2F(A) = d^2F(B) < 0,$$

pa funkcija u tačkama  $A$  i  $B$  ima uslovni maksimum.

Za tačke  $C$  i  $D$  je

$$d^2F(C) = d^2F(D) = 2 \left( \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) dx^2 + \left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right) dz^2 \right).$$

Iz  $\pm \frac{2b}{b^2} dy = 0$  sledi da je  $dy = 0$ . S obzirom da je  $(dx, dy, dz) \neq (0, 0, 0)$ , bar jedan od diferencijala  $dx$  ili  $dz$  mora biti različit od nule. Ako je  $dx = 0$  tada je

$$d^2F(C) = d^2F(D) = 2 \left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right) dz^2 < 0,$$

a ako je  $dz = 0$  tada je

$$d^2F(C) = d^2F(D) = 2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) dx^2 > 0,$$

pa kako  $d^2F$  menja znak u tačkama  $C$  i  $D$ , funkcija u tačkama  $C$  i  $D$  nema uslovni ekstrem.

Za tačke  $E$  i  $H$  je

$$d^2F(E) = d^2F(H) = 2 \left( \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) dx^2 + \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) dy^2 \right).$$

Iz  $\pm \frac{2c}{c^2} dy = 0$  sledi da je  $dz = 0$ . Kako je

$$1 - \frac{c^2}{a^2} > 0 \quad \text{i} \quad 1 - \frac{c^2}{b^2} > 0$$

sledi da je

$$d^2F(E) = d^2F(H) > 0,$$

pa funkcija u tačkama  $E$  i  $F$  ima uslovni minimum.

## Primitivna funkcija i neodređeni integral

- ▶  $f(x)$  definisana nad intervalom  $I$ , tj.  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$
- ▶ ako za funkciju  $f(x)$  postoji funkcija  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ , koja ima izvod  $F'(x)$  nad intervalom  $I$ , takva da je

$$F'(x) = f(x), \quad x \in I$$

tada je  $F(x)$  **primitivna funkcija** funkcije  $f(x)$  nad intervalom  $I$

- ▶ ona nije jednoznačno određena, svaka funkcija  $F(x) + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$  je takođe primitivna funkcija jer je

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

**Veza između dve primitivne funkcije  $F(x)$  i  $G(x)$  funkcije  $f(x)$  :**

### Teorema

*Ako su  $F(x)$  i  $G(x)$  dve primitivne funkcije za  $f(x)$  nad nekim intervalom  $I$  onda se one nad tim intervalom razlikuju za konstantu, tj. nad intervalom  $I$  je  $F(x) - G(x) = C$ .*

**Bitna je pretpostavka da se razlika  $G(x) - F(x)$  posmatra nad intervalom, a ne na proizvoljnom skupu:**

### Primer

*Pokazati da su funkcije  $G(x) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$  i  $F(x) = \operatorname{arctg} x$  primitivne funkcije funkcije  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , za  $x \neq 0$ . Odrediti  $G(x) - F(x)$ .*

- ▶  $F(x)$  je primitivna funkcija funkcije  $f(x)$  za svako  $x \in \mathbb{R}$ , jer je  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ .
- ▶  $\left(-\operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+x^2}$ , za  $x \neq 0$ , pa je nad svakim od intervala  $(-\infty, 0)$  i  $(0, \infty)$  funkcija  $G(x)$  primitivna funkcija funkcije  $f(x)$ .
- ▶ Pri tome je  $G(x) - F(x) = \begin{cases} \pi & , \quad x \in (-\infty, 0) \\ 0 & , \quad x \in (0, \infty) \end{cases}$ .

## Definicija

Skup svih primitivnih funkcija funkcije  $f(x)$  nad nekim intervalom  $I$  naziva se **neodređeni integral funkcije  $f(x)$**  nad datim  $I$  i označava se sa

$$\int f(x)dx.$$

- ▶  $f(x)$  je **podintegralna funkcija**
- ▶  $f(x)dx$  je **podintegralni izraz**
- ▶  $\int$  je **znak integrala**
- ▶ ako je  $F(x)$  jedna primitivna funkcija tada je

$$\int f(x)dx = F(x) + C = \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$$

## Da li za svaku funkciju postoji primitivna funkcija?

### Teorema

*Ako je funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna nad intervalom  $I$  tada postoji primitivna funkcija  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  nad intervalom  $I$ , tj. postoji neodređeni integral funkcije  $f(x)$  nad datim intervalom  $I$ .*

- ▶ funkcija  $f(x)$  ne mora da bude neprekidna da bi za nju postojao neodređeni integral; funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

za  $x = 0$  ima prekid druge vrste, a jedna njena primitivna funkcija je

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

**Ako funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  u nekoj tački intervala  $[a, b]$  ima prekid druge vrste, da li za nju uvek postoji primitivna funkcija nad posmatranim intervalom?**

### Primer

Proveriti da li **Dirihleova funkcija**  $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$  ima primitivnu funkciju nad proizvoljnim intervalom  $I$ .

**NE.** Ako bi nad proizvoljnim zatvorenim intervalom  $[a, b]$  postojala funkcija  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , koja ima izvod nad  $I$ , pri čemu je  $F'(x) = \chi(x)$ , tada važi  $F'(x) = 1$ , za  $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$ ,

$$F'(x) = 0, \text{ za } x \in [a, b] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}),$$

a ne postoji  $\xi \in [a, b]$  sa osobinom da je (na primer)  $F'(\xi) = \frac{1}{2}$  (Darbuova teorema), što znači da  $F(x)$  nije primitivna funkcija funkcije  $\chi(x)$  nad  $[a, b]$ .



- ▶ ako funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ima prekid prve vrste u  $c \in I$  tada za nju ne postoji primitivna funkcija  $F(x)$  nad intervalom  $I$  (ako funkcija  $f(x)$  ima izvod u svakoj tački intervala  $I$ , tada taj izvod ne može imati prekide prve vrste)
- ▶ ako neodređeni integral date funkcije postoji, on se ne može uvek izraziti u konačnom obliku (preko konačnog broja elementarnih funkcija) - neki primeri:

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{e^x}{x} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx.$$

## Osobine neodređenog integrala

$$1. \left( \int f(x) dx \right)' = f(x)$$

$$2. d \int f(x) dx = f(x) dx$$

$$3. \int dF(x) = F(x) + C;$$

$$\text{specijalno: } \int F'(f(x))f'(x)dx = \int dF(f(x)) = F(f(x)) + C$$

$$4. \int a f(x) dx = a \int f(x) dx, a \in \mathbb{R}$$

$$5. \int (f_1(x) + \cdots + f_n(x)) dx = \int f_1(x) dx + \cdots + \int f_n(x) dx$$

$$6. \text{ Ako je } \int f(x) dx = F(x) + C, \text{ tada je}$$

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C, a \neq 0$$

Tako je, na osnovu osobine 3.

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx = \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{3} + C.$$

- ▶ Tablica neodređenih integrala
- ▶ ukoliko nije drugačije naglašeno, traženje neodređenog integrala podrazumeva nalaženje datog integrala nad svim intervalima iz oblasti definisanosti date funkcije

# Smena promenljive u neodređenom integralu

## Teorema

Neka surjekcija  $\varphi : I_1 \rightarrow I \subset \mathbb{R}$  ima neprekidan izvod različit od nule nad intervalom  $I_1$  i neka za funkciju  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  postoji neodređeni integral nad intervalom  $I$ . Tada važi

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt;$$

(posle integracije desne strane se stavi  $t = \varphi^{-1}(x)$ ,  $x \in I$ .)

Dokaz. Jednakost važi jer su izvodi obe strane jednaki:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int f(x) dx &= f(x), \\ \frac{d}{dx} \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt &= \frac{d}{dt} \left( \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right) \frac{dt}{dx} \\ &= f(\varphi(t)) \varphi'(t) \frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x), \end{aligned}$$

a zbog stalnosti znaka  $\varphi'(t)$  je funkcija  $\varphi(t)$  strogo monotona, pa ima inverznu funkciju  $\varphi^{-1}(x)$ .

- često je pogodnije smenu promenljivih umesto u obliku

$$x = \varphi(t)$$

pisati u obliku

$$t = \psi(x), \quad dt = \psi'(x) \, dx.$$

Recimo,

$$\begin{aligned} \int \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} dx &= \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |\psi(x)| + C, \\ \int \frac{\psi'(x)}{2\sqrt{\psi(x)}} dx &= \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \sqrt{\psi(x)} + C. \end{aligned}$$

## Primer

Da li se u integral  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}}, x > 2$ , može uvesti smena  $x = \arcsin t$ ?

## Parcijalna integracija

### Teorema

*Neka su  $u(x)$  i  $v(x)$  diferencijabilne funkcije i neka postoji primitivna funkcija funkcije  $u'(x)v(x)$ . Tada postoji primitivna funkcija funkcije  $u(x)v'(x)$  i važi jednakost*

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

*Dokaz.* Polazeći od jednakosti  $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$  dobija se

$$\int (u(x)v(x))' dx = \int u'(x)v(x) dx + \int u(x)v'(x) dx,$$

odakle je

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

(konstantu je dovoljno staviti sa jedne strane jednakosti)

## Napomena

- $\int P_n(x)e^{ax} dx$ ,  $n \geq 1$  rešava se sa  $n$  parcijalnih integracija, uzimajući

$$u = P_n(x), \quad e^{ax} dx = dv$$

- $\int P_n(x) \sin ax \, dx \quad (\int P_n(x) \cos ax \, dx)$ ,  $n \geq 1$  rešava se sa  $n$  parcijalnih integracija, uzimajući

$$u = P_n(x), \quad \sin ax \, dx = dv, (\cos ax \, dx = dv)$$

- $\int P_n(x) \ln^m x \, dx$ ,  $n \geq 1$ ,  $m \in \mathbb{N}$  rešava se sa  $m$  parcijalnih integracija, uzimajući

$$u = \ln^m x, \quad P_n(x) \, dx = dv$$

## Primer

Odrediti neodređeni integral  $I(x)$  funkcije  $f(x) = \begin{cases} x & , \quad x < 2 \\ 2 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$

$I(x)$  postoji nad  $\mathbb{R}$  ( $f(x)$  je neprekidna funkcija). Kako je

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C_1,$$

$$\int 2 dx = 2x + C_2,$$

to da bi  $I(x)$  bila neprekidna funkcija mora da važi

$$2 + C_1 = 4 + C_2, \text{ tj. } C_1 = C_2 + 2$$

$$\text{pa je } I(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + 2 + C & , \quad x < 2 \\ 2x + C & , \quad x \geq 2 \end{cases}.$$



## Integrali racionalnih funkcija

**Racionalna funkcija** je  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

- ▶ ako je  $\deg P(x) < \deg Q(x)$  - **prava racionalna funkcija**
- ▶ ako je  $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$  - **neprava racionalna funkcija**

Svaka neprava racionalna funkcija može se napisati u obliku

$$R(x) = T(x) + \frac{R_1(x)}{Q(x)}, \quad \deg R_1(x) < \deg Q(x)$$

- ▶  $P(x)$  je deljiv polinomom  $x - a$  ako i samo ako je  $P(a) = 0$
- ▶ Svaki polinom stepena  $n \geq 1$  ima tačno  $n$  nula,  $\mathbb{R}$  ili  $\mathbb{C}$
- ▶ Ako su  $a_1, \dots, a_m$  različite nule polinoma  
 $P(x) = c_n x^n + \dots c_1 x + c_0$ ,  $n \geq 1$  onda je

$$P(x) = c_n (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_m)^{k_m}, \quad k_1 + \dots + k_m = n.$$

- ▶ Ako je kompleksan broj  $z = \alpha + i\beta$  koren reda  $k$  polinoma  $P(x)$   
tada je i  $\bar{z} = \alpha - i\beta$  takođe koren reda  $k$  polinoma  $P(x)$ .

# Integrali racionalnih funkcija

## Teorema

Neka je  $P(x)$  polinom stepena manjeg od  $n$ , a  $Q(x)$  polinom stepena  $n$  takav da je

$$Q(x) = c_n(x-a_1)^{k_1} \dots (x-a_p)^{k_p}(x^2+b_1x+c_1)^{l_1} \dots (x^2+b_qx+c_q)^{l_q} = n,$$

gde je  $k_1 + \dots + k_p + 2(l_1 + \dots + l_q)$ ,  $a_i, b_j, c_j \in \mathbb{R}$ ,  $b_j^2 - 4c_j < 0$ ,

$i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q$ . Tada se polinom  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  može napisati u obliku

$$R(x) = \left( \frac{A_{11}}{x-a_1} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} \right) + \dots + \left( \frac{A_{p1}}{x-a_p} + \dots + \frac{A_{pk_p}}{(x-a_p)^{k_p}} \right)$$

$$+ \left( \frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+b_1x+c_1} + \dots + \frac{B_{1l_1}x+C_{1l_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}} \right) + \dots$$

$$+ \left( \frac{B_{q1}x+C_{q1}}{x^2+b_qx+c_q} + \dots + \frac{B_{ql_q}x+C_{ql_q}}{(x^2+b_qx+c_q)^{l_q}} \right)$$

$\frac{A}{(x-a)^k}$  i  $\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^l}$ ,  $b^2 - 4c < 0$ , se nazivaju **prosti** ili **parcijalni razlomci**.



# Pojam određenog integrala

Posmatramo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$

- ▶ **Podela intervala**:  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ,  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
- ▶ skup svih podela je  $P^*[a, b]$
- ▶  $P' \subset P \Rightarrow P$  je **finija** od  $P'$ ,  $P'$  je **grublja** od  $P$
- ▶  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  dužina intervala  $[x_{i-1}, x_i]$
- ▶ **parametar podele**  $P$  je  $\max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i = \lambda(P)$
- ▶  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ , **skup izabranih tačaka**  
 $\xi \in \mathbb{R}^n$  **podele**  $P$  je

$$\xi(P) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n), \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, n\}$$

- ▶ **podela intervala sa izabranom tačkom**  $(P, \xi)$
- ▶  $P = P[a, b]$  skup svih takvih podela

## Definicija

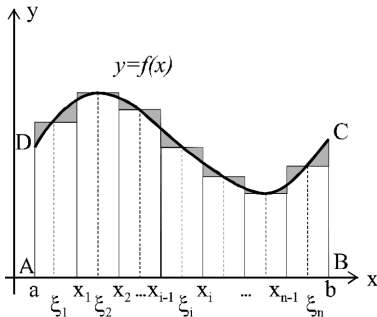
Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  i neka je  $(P, \xi)$  podela sa izabranom tačkom intervala  $[a, b]$ . Zbir

$$I(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

se naziva **integralna** ili **Rimanova suma** funkcije  $f(x)$  za datu podelu  $(P, \xi)$ .

### MOTIVACIJA 1:

Površina krivolinijskog trapeza je približno jednaka integralnoj sumi:



**MOTIVACIJA 2:** Na pravolinijskom putu  $AB$  deluje promenljiva sila  $\vec{F}$  na materijalnu tačku. Zavisnost intenziteta sile od puta je  $F = F(s)$ . Uočimo podelu  $P = \{s_0, s_1, \dots, s_n\}$  sa izabranom tačkom  $\xi$  intervala, tj. puta  $[a, b]$  ( $a$  i  $b$  su koordinate tačaka  $A$  i  $B$  respektivno). Rad sile  $\vec{F}$  na intervalu  $[s_{i-1}, s_i]$  je približno  $\sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta s_i$ ,  $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ . Dakle, rad sile intenziteta  $F$  konstantnog pravca na pravolinijskom putu približno je jednak integralnoj sumi.

## Definicija

Broj  $I$  je **limes (granična vrednost) integralnih suma**  $I(f, P, \xi)$  funkcije  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  za  $\lambda(P) \rightarrow 0$ , pišemo

$$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} I(f, P, \xi) = I,$$

ako za svako  $\varepsilon > 0$  postoji  $\delta > 0$ , takvo da za svaku podelu  $P$  i svaku izabranu tačku  $\xi \in \xi(P)$ , kada je  $\lambda(P) < \delta$ , važi nejednakost

$$|I(f, P, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Ako postoji

$$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} I(f, P, \xi) = I$$

tada

- ▶  $f(x)$  je **integrabilna u Rimanovom smislu** nad  $[a, b]$
- ▶  $I$  se naziva **Rimanov ili određeni integral** funkcije  $f(x)$  nad  $[a, b]$ ,

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

- ▶  $a$  je **donja granica** integrala,  $b$  je **gornja granica** integrala
- ▶  $f(x)$  je **podintegralna funkcija**
- ▶  $f(x) dx$  je **podintegralni izraz**
- ▶  $x$  je **integraciona promenljiva**
- ▶  $R[a, b]$  skup svih **integrabilnih funkcija nad  $[a, b]$**  (u Rimanovom smislu)

## Primer

Pokazati da je  $I = \int_a^b c dx = c(b - a)$ .

Posmatrajmo funkciju  $f(x) = c$ ,  $x \in [a, b]$ . Neka je  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ,  $\xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n\}$  proizvoljna podela sa izabranom tačkom. Tada je  $f(\xi_i) = c$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , pa je

$$I(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n c \Delta x_i = c(b - a).$$

Dakle,

$$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} I(f, P, \xi) = c(b - a),$$

tj.

$$\int_a^b c dx = c(b - a).$$



## Primer

*Pokazati da za Dirihleovu funkciju  $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$  ne postoji određeni integral ni nad jednim zatvorenim intervalom  $[a, b]$ .*

Neka su  $a, b \in \mathbb{R}$  proizvoljni,  $a < b$ . Uzmimo proizvoljnu podelu  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  intervala  $[a, b]$  i dve izabrane tačke

$$\xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n\} \quad \text{i} \quad \xi' = \{\xi'_0, \xi'_1, \dots, \xi'_n\},$$

takve da je  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  iracionalan, a  $\xi'_i \in [x_{i-1}, x_i]$  racionalan broj,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Tada

$$I(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^n 0 \cdot \Delta x_i = 0, \quad I(f, P, \xi') = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i = b - a,$$

pa  $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} I(f, P, \xi)$  ne postoji.

## Teorema

*Potreban uslov da funkcija  $f(x)$  bude integrabilna nad intervalom  $[a, b]$  je da funkcija  $f(x)$  bude ograničena nad  $[a, b]$ .*

*Dokaz.* Neka je funkcija  $f(x)$  definisana i neograničena nad intervalom  $[a, b]$ . Za proizvoljnu podelu  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  postoji interval

$$[x_{k-1}, x_k], \quad k \in \{1, \dots, n\}$$

takav da funkcija  $f(x)$  na njemu nije ograničena.

Na intervalima

$$[x_{i-1}, x_i], \quad i \in \{1, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}$$

proizvoljno izaberimo tačke  $\xi_i$  i sa  $I^k$  označimo zbir

$$I^k = \sum_{i \neq k} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Neka je  $M$  proizvoljno velik broj. Zbog neograničenosti funkcije  $f(x)$  nad intervalom  $[x_{k-1}, x_k]$ , postoji tačka  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ , takva da je

$$|f(\xi_k)| \geq \frac{|I^k| + M}{\Delta x_k}, \quad \text{odakle sledi da je} \quad |f(\xi_k)| \Delta x_k \geq |I^k| + M.$$

Za integralnu sumu sada važi

$$|I(f, P, \xi)| = \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \right| = \left| I^k + f(\xi_k) \Delta x_k \right| \geq |f(\xi_k)| \Delta x_k - |I^k| \geq M.$$

Izaberimo niz  $\{M_k\}$  takav da  $M_k \rightarrow \infty$ , kada  $k \rightarrow \infty$ . Za datu podelu  $P$  i za svako  $k \in \mathbb{N}$  postoji  $\xi$  tako da je  $I(f, P, \xi) \geq M_k$ , pa

$$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} I(f, P, \xi)$$

ne postoji i  $f(x)$  nije integrabilna. □

Neka je  $f(x)$  definisana i ograničena funkcija nad  $[a, b]$  i  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  njegova podela. Uvedimo oznake

$$\blacktriangleright m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$$

$$\blacktriangleright M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$$

$$\blacktriangleright s = s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \text{ donja Darbuova suma za } f(x) \text{ nad } [a, b]$$

$$\blacktriangleright S = S(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \text{ gornja Darbuova suma za } f(x) \text{ nad } [a, b]$$

## Teorema

*Za integralnu i Darbuove sume ograničene funkcije  $f(x)$  nad intervalom  $[a, b]$  važi*

$$\blacktriangleright m(b-a) \leq s(f, P) \leq I(f, P, \xi) \leq S(f, P) \leq M(b-a)$$

$$\blacktriangleright \inf_{\xi \in \xi(P)} I(f, P, \xi) = s(f, P); \quad \sup_{\xi \in \xi(P)} I(f, P, \xi) = S(f, P).$$

## Takođe važe tvrđenja:

$$1) \quad P \subset P' \Rightarrow s(f, P) \leq s(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P)$$

*Dokaz.* Tvrđenje je dovoljno pokazati u slučaju da se  $P$  i  $P'$  razlikuju za jednu tačku. Neka je  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  i  $P' = P \cup \{x'\}$ ,  $x_{k-1} < x' < x_k$ . Neka je  $s^k = \sum_{i \neq k} m_i \Delta x_i$ . Tada je

$$\begin{aligned} s(f, P) &= s^k + m_k(x_k - x_{k-1}) \\ s(f, P') &= s^k + m'_k(x' - x_{k-1}) + m''_k(x_k - x'), \end{aligned}$$

gde je

$$m'_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x']} f(x), \quad m''_k = \inf_{x \in [x', x_k]} f(x).$$

Kako je  $m_k = \min\{m'_k, m''_k\}$ , to je

$$\begin{aligned} m_k(x_k - x_{k-1}) &= m_k(x_k - x' + x' - x_{k-1}) \\ &= m_k(x_k - x') + m_k(x' - x_{k-1}) \\ &\leq m''_k(x_k - x') + m'_k(x' - x_{k-1}), \end{aligned}$$

odakle sledi  $s(f, P) \leq s(f, P')$  (ostalo slično).

2)  $s(f, P) \leq S(f, P')$  za proizvoljne podele  $P, P'$

Dokaz. Za proizvoljne podele  $P$  i  $P'$  intervala  $[a, b]$  neka je  $P'' = P \cup P'$ .

Tada je  $P \subset P''$  i  $P' \subset P''$  pa je

$$s(f, P) \leq s(f, P'') \leq S(f, P'') \leq S(f, P').$$



3) Postoje  $\sup_{P \in P^*} s(f, P)$  i  $\inf_{P \in P^*} S(f, P)$ .

Dokaz. Skup

$$\{s(f, P) : P \in P^*\}$$

je ograničen sa gornje strane, a skup

$$\{S(f, P) : P \in P^*\}$$

je ograničen sa donje strane, pa zbog prethodno pokazane nejednakosti

$\sup_{P \in P^*} s(f, P)$  i  $\inf_{P \in P^*} S(f, P)$  postoje.





## Teorema

*Neka je funkcija  $f(x)$  ograničena nad intervalom  $[a, b]$ . Funkcija  $f(x)$  je integrabilna nad  $[a, b]$  ako i samo ako*

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall P \in P^*) \lambda(P) < \delta \Rightarrow S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon.$$

*Dokaz.* ( $\Leftarrow$ ) Iz pretpostavke i niza nejednakosti  $s(f, P) \leq I_* \leq I^* \leq S(f, P)$  dobijamo da se donji i gornji Darbuov integral funkcije  $f(x)$  poklapaju:  $I_* = I^*$ . Označimo njihovu zajedničku vrednost sa  $I$ . Tada je

$$s(f, P) \leq I \leq S(f, P).$$

Sa druge strane, za proizvoljnu tačku  $\xi$  podele  $P$  važi

$$s(f, P) \leq I(f, P, \xi) \leq S(f, P).$$

Iz poslednje dve relacije i početne pretpostavke sledi da je  $|I(f, P, \xi) - I| < \varepsilon$  ako je podela  $P \in P^*[a, b]$  takva da je  $\lambda(P) < \delta$ , što znači da je funkcija  $f(x)$  integrabilna i  $I = \int_a^b f(x) dx$ . □



## Definicija

- Ako je funkcija  $f(x)$  definisana u tački  $a$  onda je

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

- Ako je  $a < b$  i  $\int_a^b f(x) dx$  postoji onda je

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

# Integrabilnost nekih klasa funkcija

## Teorema

Ako je funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna nad  $[a, b]$  ona je nad tim intervalom i integrabilna.

Dokaz. Iz neprekidnosti funkcije  $f(x)$  nad intervalom  $[a, b]$  sledi njena uniformna neprekidnost, što znači da za svako  $\varepsilon > 0$  postoji  $\delta > 0$  tako da

$$x', x'' \in [a, b], |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Izaberimo proizvoljnu podelu  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  intervala  $[a, b]$  za koju je  $\lambda(P) < \delta$ . Tada važi

$$M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b - a}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

jer postoje tačke  $\xi_i^1, \xi_i^2 \in [x_{i-1}, x_i]$  sa osobinom  $f(\xi_i^2) = M_i$ ,  $f(\xi_i^1) = m_i$ , pa je  $M_i - m_i = f(\xi_i^2) - f(\xi_i^1) < \frac{\varepsilon}{b-a}$ . To znači da je

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b - a} (b - a) = \varepsilon.$$

## Još dve klase integrabilnih funkcija:

### Teorema

*Ako je funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ograničena nad intervalom  $[a, b]$  i nad njim ima konačan broj prekida ona je nad tim intervalom i integrabilna.*

### Teorema

*Ako je funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monotona nad intervalom  $[a, b]$  ona je nad tim intervalom i integrabilna.*

## Napomena

*Ograničena funkcija može da ima i beskonačan broj prekida, a da bude integrabilna, jer važi*

**Teorema Lebega:** *Ograničena funkcija  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je integrabilna nad zatvorenim intervalom  $[a, b]$  ako i samo ako je skup prekida date funkcije nad zatvorenim intervalom  $[a, b]$  mere nula.*

Rimanova funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \text{nzd}(m, n) = 1 \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

neprekidna je za svako  $x$  iracionalan broj, a prekidna u svim racionalnim tačkama, mere nula, pa je integrabilna, na primer nad zatvorenim intervalom  $[-1, 1]$ .

## Napomena

*Posmatrajmo skup racionalnih tačaka iz zatvorenog intervala  $[0, 1]$  poređan u niz  $A = \{a_n\}$  i neka je  $a_1 = 0$ . Funkcija*

$$f(x) = \sum_{a_n < x} \frac{1}{n^2}, \quad x \in [0, 1]$$

*je očigledno monotono rastuća, ograničena i naprekidna u svim iracionalnim tačkama datog intervala, a prekidna u svim racionalnim tačkama iz posmatranog intervala, te je time integrabilna nad posmatranim intervalom  $[0, 1]$ .*

**Primer 17.1.** Naći  $\int_0^1 x \, dx$  po definiciji.

*Rešenje.* Podintegralna funkcija  $f(x) = x$  je neprekidna, pa je integrabilna. Za podelu  $P$  intervala  $[0, 1]$  uzmimo **ekvidistantnu podelu** ( $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$ ) i izaberimo tačku

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , pri čemu je  $\xi_i = \frac{i}{n}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Tada je

$$I(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2n^2},$$

pa je  $\int_0^1 x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{2n^2} = \frac{1}{2} \cdot \Delta$

## Teorema

1. Ako je  $f(x) = 0$  za svako  $x \in [a, b]$ , tada je  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b 0 dx = 0$ .
2. Ako postoji konačan skup različitih tačaka  $c_1, \dots, c_k \in [a, b]$  takav da je

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a, b] \setminus \{c_1, \dots, c_k\} \\ A_i, & x = c_i, i \in \{1, 2, \dots, k\}, A_i \neq 0 \end{cases}$$

tada je  $\int_a^b g(x) dx = 0$ .

# Veza između određenog i neodređenog integrala

## Njutn-Lajbnicova formula

Ako je funkcija  $f(x)$  integrabilna nad zatvorenim intervalom  $[a, b]$  i ako funkcija  $f(x)$  ima primitivnu funkciju  $F(x)$  nad intervalom  $[a, b]$ , tada je

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

*Dokaz.* Posmatrajmo realnu funkciju  $F(x)$  nad intervalom  $[a, b]$ . Ona je neprekidna i ima izvod nad intervalom  $[a, b]$ . Uzmimo da je

$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  proizvoljna podela intervala  $[a, b]$ .

Primenjujući Lagranžovu teoremu (teoremu o srednjoj vrednosti) na svakom podintervalu  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  dobijamo

$$\begin{aligned} F(x_1) - F(a) &= F'(\xi_1)(x_1 - a) = f(\xi_1)\Delta x_1, & \xi_1 \in (a, x_1) \\ F(x_2) - F(x_1) &= F'(\xi_2)(x_2 - x_1) = f(\xi_2)\Delta x_2, & \xi_2 \in (x_1, x_2) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$F(b) - F(x_{n-1}) = F'(\xi_n)(b - x_{n-1}) = f(\xi_n)\Delta x_n, \quad \xi_n \in (x_{n-1}, b)$$



Ako saberemo gornje jednakosti, dobijamo

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

čija je desna strana jedna integralna suma  $I(f, P, \xi)$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  funkcije  $f(x)$ .

Kako je funkcija  $f(x)$  integrabilna nad intervalom  $[a, b]$  to je

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} I(f, P, \xi) \\ &= \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \\ &= \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} (F(b) - F(a)) \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

## Primer

Odrediti  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right).$

Posmatrajmo niz s opštim članom  $a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}$ . Kako je

$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\frac{i}{n}} \frac{1}{n}$  integralna suma za funkciju  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  nad zatvorenim intervalom  $[0, 1]$ , ako posmatramo ekvidistantnu podelu  $P = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$  zatvorenog intervala  $[0, 1]$ ,  $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ ,  $\xi_i = \frac{i}{n}$ , to je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

## Primer

### Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

*nije integrabilna nad zatvorenim intervalom  $[-1, 1]$ , a nad tim intervalom jedna njena primitivna funkcija je na primer funkcija*

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} .$$

## Neke osobine određenog integrala

- ▶ Ako je funkcija  $f(x)$  integrabilna nad zatvorenim intervalom  $[a, b]$ , tj.  $f \in R[a, b]$ , tada je ona integrabilna i nad svakim zatvorenim podintervalom  $[c, d]$  intervala  $[a, b]$ .
- ▶ (linearnost integrala) Ako  $f, g \in R[a, b]$  tada i  $f \pm g \in R[a, b]$ ,  $\alpha f \in R[a, b]$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  i važi
  - ▶  $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
  - ▶  $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx.$
- ▶ Ako je  $f \in R[a, b]$  i ako se funkcija  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  razlikuje u konačnom broju tačaka od funkcije  $f(x)$  tada je i  $g \in R[a, b]$  i važi

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

- ▶ Ako  $f, g \in R[a, b]$  tada  $f \cdot g \in R[a, b]$ ,  $|f| \in R[a, b]$ ,  $\frac{1}{f} \in R[a, b]$  uz uslov  $|f(x)| \geq \alpha > 0$  za  $x \in [a, b]$ .
- ▶ (aditivnost integrala) Neka su  $a, b, c \in \mathbb{R}$  krajevi tri zatvorena intervala. Ako je  $f$  integrabilna na najvećem od ovih intervala onda je ona integrabilna i na ostala dva. Pri tom važi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

- ▶ (monotonost i procena integrala) Ako je  $f \in R[a, b]$ ,  $a < b$  i  $f(x) \geq 0$ ,  $x \in [a, b]$  tada je i

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

- Ako je  $f(x) \leq g(x)$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $a < b$ ,  $f, g \in R[a, b]$  onda je

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

- Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilna i nenegativna (nepozitivna) funkcija. Ako postoji tačka  $c \in [a, b]$  takva da je  $f(c) > 0$  ( $f(c) < 0$ ) u kojoj je funkcija neprekidna ako  $c \in (a, b)$ , a neprekidna sa leve (desne) strane ako je  $c = b$  ( $c = a$ ), onda je

$$\int_a^b f(x) dx > 0 \quad \left( \int_a^b f(x) dx < 0 \right).$$

- Ako je  $f \in R[a, b]$ ,  $a < b$  onda važi nejednakost

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq (b - a) \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

## Primer

Naći određeni integral funkcije  $f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \leq 0 \\ 5 & , \quad x > 0 \end{cases}$  nad  $[-1, 2]$ .

Funkcija  $f(x)$  je neprekidna u svim tačkama intervala  $[-1, 2]$  osim u 0 gde ima prekid prve vrste, pa je ona integrabilna nad  $[-1, 2]$  ali nema primitivnu funkciju pa se ne može primeniti Njutn-Lajbnicova formula.

Kako je  $\int_{-1}^2 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx$  i

$$\int_{-1}^0 f(x)dx = \int_{-1}^0 xdx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{2}, \quad \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 5dx = 5x \Big|_0^2 = 10$$

( $f(x) = x$  i  $g(x) = 5$  se razlikuju nad intervalom  $[0, 2]$  samo u jednoj tački jer je  $f(0) = 0$ ,  $g(0) = 5$ , pa imaju isti određeni integral), to je

$$\int_{-1}^2 f(x)dx = -\frac{1}{2} + 10 = \frac{19}{2}.$$

## Teorema o srednjoj vrednosti:

### Teorema

Neka  $f, g \in R[a, b]$ ,  $a < b$ ,  $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ ,  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$  i  $g(x) \geq 0$  ( $g(x) \leq 0$ ), za  $x \in [a, b]$ . Tada postoji  $m \leq \eta \leq M$ , takvo da je

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \eta \int_a^b g(x)dx.$$

Ako je još i  $f \in C^0[a, b]$  ( $C^0[a, b]$  je skup svih neprekidnih funkcija nad intervalom  $[a, b]$ ), onda postoji  $c \in [a, b]$  takvo da je

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$



*Dokaz.* Bez ograničenja opštosti može se pretpostaviti da je funkcija  $g(x)$  nenegativna. Tada iz  $m \leq f(x) \leq M$  sledi

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x), \quad x \in [a, b].$$

Integracijom se dobija

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx, \quad x \in [a, b].$$

Ako je  $\int_a^b g(x)dx = 0$ , onda je  $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ , pa jednakost važi.

Ako je  $\int_a^b g(x)dx > 0$ , onda je  $m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$ , pa se može uzeti

$$\eta = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$



## Posledica

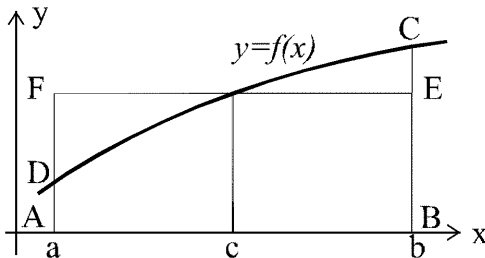
Neka  $f \in R[a, b]$ ,  $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ ,  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ . Tada postoji

$m \leq \eta \leq M$ , takvo da je

$$\int_a^b f(x) dx = \eta(b - a).$$

Ako je  $f \in C^0[a, b]$  onda postoji  $c \in [a, b]$  takvo da je

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(c)(b - a).$$



## Određeni integral kao funkcija granice

$f(x)$  je integrabilna nad  $[A, B]$ ,  $a \in [A, B]$  proizvoljna tačka. Za  $x \in [A, B]$  :

- ▶  $I(x) = \int_a^x f(t)dt$  **određeni integral sa promenljivom gornjom granicom**
- ▶  $I_1(x) = \int_x^a f(t)dt$  **određeni integral sa promenljivom donjom granicom**

### Teorema

Neka  $f \in R[A, B]$  i  $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ ,  $x \in [A, B]$ ,  $a \in [A, B]$ . Tada važi:

- 1)  $I(x)$  je neprekidna funkcija nad  $[A, B]$
- 2) Ako je funkcija  $f(x)$  neprekidna u tački  $x \in (A, B]$  ( $x \in [A, B)$ ) sa leve (desne) strane, tada funkcija  $I(x)$  ima levi (desni) izvod u tački  $x$ . Pri tome važi

$$I'_-(x) = f(x), \quad (I'_+(x) = f(x)).$$

*Dokaz.* Dokazaćemo 2), za slučaj kad je funkcija  $f(x)$  neprekidna nad intervalom  $[A, B]$  i  $x \in (A, B)$ . Kako je

$$I'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x},$$

to na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti za integrale, zbog neprekidnosti funkcije  $f(x)$  sledi da postoji tačka  $\xi \in [x, x + \Delta x] \subset [A, B]$ , za  $\Delta x > 0$ , odnosno  $\xi \in [x + \Delta x, x] \subset [A, B]$ , za  $\Delta x < 0$ , tako da je

$$I'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi) \int_x^{x+\Delta x} dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x f(\xi)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(x).$$



Za funkciju  $I_1(x)$  pod istim uslovima važi

- ▶  $I_1(x)$  je neprekidna nad intervalom  $[A, B]$ ,
- ▶  $I_{1-}'(x) = (-I_-(x))' = -I_-'(x) = -f(x), x \in (A, B]$ ,  
 $I_{1+}'(x) = (-I_+(x))' = -I_+'(x) = -f(x), x \in [A, B)$ .

## Posledica

Ako je  $f(x)$  neprekidna funkcija nad  $[A, B]$  tada funkcija  $I(x)$  ima izvod nad intervalom  $[A, B]$ , pri čemu važi  $I'(x) = f(x), x \in [A, B]$ .

## Posledica

Ako je funkcija  $f(x)$  neprekidna nad intervalom  $I$ , tada je funkcija

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , pri čemu je  $a$  proizvoljna tačka iz intervala  $I$ , primitivna funkcija funkcije  $f(x)$  nad  $I$ .

## Primer

$$\text{Naći } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_1^x \frac{2 + \ln t}{3 + \ln t} dt}{x}.$$

Kako je funkcija  $f(x) = \frac{2 + \ln x}{3 + \ln x}$  neprekidna za  $x \geq 1$ , to postoji tačka  $\xi \in [1, x]$  tako da je

$$\int_1^x \frac{2 + \ln t}{3 + \ln t} dt = (x - 1) \frac{2 + \ln \xi}{3 + \ln \xi}.$$

Kako je  $f(x) = \frac{2 + \ln x}{3 + \ln x}$  monotono rastuća i  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \ln x}{3 + \ln x} = 1$ ,

$f(1) = \frac{2}{3}$ , sledi da  $f(x) = \frac{2 + \ln x}{3 + \ln x} \in \left[ \frac{2}{3}, 1 \right]$ , za  $x \geq 1$ .

Sledi da

$$\int_1^x \frac{2 + \ln t}{3 + \ln t} dt = (x - 1) \frac{2 + \ln \xi}{3 + \ln \xi} \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty.$$

Primenom Lopitalovog pravila dobijamo da je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_1^x \frac{2 + \ln t}{3 + \ln t} dt}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2 + \ln x}{3 + \ln x}}{1} = 1.$$



## Parcijalna integracija i smena promenljive

### Teorema

*Neka funkcije  $u(x)$ ,  $v(x)$  imaju neprekidne izvode nad  $[a, b]$ . Tada važi*

$$\int_a^b u(x) dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x).$$

### Teorema

*Neka je funkcija  $f : [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna, a funkcija  $\varphi : [\alpha_0, \beta_0] \rightarrow [A, B]$  ima neprekidan izvod. Ako je  $\alpha \in [\alpha_0, \beta_0]$ ,  $\beta \in [\alpha_0, \beta_0]$ ,  $a = \varphi(\alpha)$ ,  $b = \varphi(\beta)$ , onda važi jednakost*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$



*Dokaz.* neka je  $F(x)$  primitivna funkcija funkcije  $f(x)$ ,  $x \in [A, B]$ . Za složenu funkciju  $(F \circ \varphi)(t) = F(\varphi(t))$ ,  $t \in [\alpha_0, \beta_0]$  imamo

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'_\varphi \cdot \varphi'_t = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Dakle, za  $\alpha_0 \leq t \leq \beta_0$  funkcija  $F(\varphi(t))$  je primitivna funkcija funkcije  $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$  pa je prema Njutn-Lajbnicovoj formuli

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Sa druge strane, iz  $F'(x) = f(x)$  sledi

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

# Primena određenog integrala

## POVRŠINA RAVNIH FIGURA

- ▶ **pravougle koordinate:**  $y = f(x)$  je neprekidna i nenegativna za  $x \in [a, b]$

$$P = \int_a^b f(x) dx$$

- ▶ **parametarski oblik:**  $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$ 
  - ▶  $\varphi(t)$  ima neprekidan izvod nad  $[\alpha, \beta]$
  - ▶  $\varphi(t)$  monotono rastuća nad  $[\alpha, \beta]$
  - ▶  $\psi(t)$  neprekidna nad  $[\alpha, \beta]$
  - ▶  $\psi(t) \geq 0, t \in [\alpha, \beta]$

$$P = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt$$

- ▶ **polarne koordinate:**  $\rho = \rho(\varphi)$  neprekidna,  $\alpha \leq \varphi \leq \beta, |\beta - \alpha| \leq 2\pi$

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

# DUŽINA LUKA RAVNE KRIVE

- ▶ pravougle koordinate:  $y = f(x)$ , ima neprekidan izvod nad  $[a, b]$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \, dx$$

- parametarski oblik:  $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$

- ▶  $\varphi(t), \psi(t)$  imaju neprekidan izvod nad  $[\alpha, \beta]$
- ▶  $\varphi'(t) > 0$  nad  $[\alpha, \beta]$

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\psi'^2(t) + \varphi'^2(t)} \, dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} \, dt$$

- ▶ **polarne koordinate:**  $\rho = \rho(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$ ,  $\rho$  ima neprekidan prvi izvod nad  $[\alpha, \beta]$

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} \, d\varphi$$



- ▶ **pravougle koordinate:**  $y = f(x) \geq 0$  i ima neprekidan prvi izvod nad  $[a, b]$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

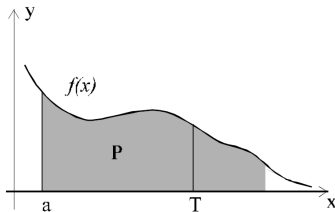
- ▶ **parametarski oblik:**  $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$ 
  - ▶  $\varphi(t)$  i  $\psi(t)$  imaju neprekidan prvi izvod nad  $[\alpha, \beta]$
  - ▶  $\varphi'(t) > 0$  nad  $[\alpha, \beta]$
  - ▶  $\psi(t) \geq 0, t \in [\alpha, \beta]$

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{\psi'^2(t) + \varphi'^2(t)} dt$$

- ▶ **polarne koordinate:**  $\rho = \rho(\varphi)$ ,  $\alpha \leq \varphi \leq \beta \subset [0, \pi]$ ,  $\rho$  ima neprekidan prvi izvod nad  $[\alpha, \beta]$

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi) \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} \sin \varphi d\varphi$$

# MOTIVACIJA (geometrijska interpretacija)



$\int_a^T f(x)dx$ ,  $f(x) \geq 0$  predstavlja površinu ravnog lika ograničenog  $x$ -osom, pravama  $x = a$ ,  $x = T$  i lukom krive  $y = f(x)$  nad intervalom  $[a, T]$ . Prirodno bi bilo površinu lika ograničenog  $x$ -osom, pravom  $x = a$  i lukom krive  $y = f(x)$  nad intervalom  $[a, \infty)$  definisati kao  $\int_a^\infty f(x)dx$ .

# Nesvojstveni integral I vrste

## Definicija

Neka je funkcija  $f(x)$  definisana nad  $[a, \infty)$  i integrabilna nad svakim zatvorenim intervalom  $[a, T] \subset [a, \infty)$ . **Nesvojstveni integral funkcije  $f(x)$  nad intervalom  $[a, \infty)$** , u oznaci  $\int_{[a, \infty)} f(x) dx$  je funkcija  $F(T)$  definisana

$$\text{sa} \quad F(T) = \int_a^T f(x) dx, \quad T \geq a.$$

Ako postoji  $A = \lim_{T \rightarrow \infty} F(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_a^T f(x) dx$ , u oznaci  $\int_a^\infty f(x) dx$ , tada **nesvojstveni integral  $\int_{[a, \infty)} f(x) dx$  konvergira ka broju  $A$** . Ako granična

vrednost  $\lim_{T \rightarrow \infty} F(T)$  ne postoji, tada **nesvojstveni integral  $\int_{[a, \infty)} f(x) dx$  divergira**.

## Definicija

Neka je funkcija  $f(x)$  definisana nad  $(-\infty, a]$  i integrabilna nad svakim zatvorenim intervalom  $[T, a] \subset (-\infty, a]$ . **Nesvojstveni integral funkcije  $f(x)$  nad intervalom  $(-\infty, a]$** , u oznaci  $\int_{(-\infty, a]} f(x)dx$  je funkcija  $F(T)$

definisana sa

$$F(T) = \int_T^a f(x)dx, \quad T \leq a.$$

Ako postoji  $B = \lim_{T \rightarrow -\infty} F(T) = \lim_{T \rightarrow -\infty} \int_T^a f(x)$ , u oznaci  $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ , tada **nesvojstveni integral  $\int_{(-\infty, a]} f(x)dx$  konvergira ka broju  $B$** . Ako granična vrednost  $\lim_{T \rightarrow -\infty} F(T)$  ne postoji, tada **nesvojstveni integral  $\int_{(-\infty, a]} f(x)dx$  divergira**.



## Definicija

Neka je funkcija  $f(x)$  definisana nad intervalom  $(-\infty, \infty)$  i integrabilna nad svakim zatvorenim intervalom  $[M, N] \subset (-\infty, \infty)$ . **Nesvojstveni integral funkcije  $f(x)$  nad intervalom  $(-\infty, \infty)$** , u oznaci  $\int_{(-\infty, \infty)} f(x)dx$ ,

je uređen par  $\left( \int_{(-\infty, a]} f(x)dx, \int_{[a, \infty)} f(x)dx \right)$  nesvojstvenih integrala

$\int_{(-\infty, a]} f(x)dx, \int_{[a, \infty)} f(x)dx$ , gde je  $a$  proizvoljan realan broj. Ako oba

ova nesvojstvena integrala konvergiraju tada **nesvojstveni integral**

$\int_{(-\infty, \infty)} f(x)dx$  **konvergira** i pišemo  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx$ .

Ukoliko bar jedan od njih divergira tada i **nesvojstveni integral**

$\int_{(-\infty, \infty)} f(x)dx$  **divergira**.

Nesvojstvene integrale  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ,  $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ ,  $\int_a^{\infty} f(x)dx$  jednim imenom zovemo **nesvojstveni integral prve vrste**.

## Primer

Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala  $I_\alpha = \int_{[1,\infty)} \frac{dx}{x^\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Rešenje. Po definiciji treba posmatrati

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_1^T \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \left( \lim_{T \rightarrow \infty} T^{1-\alpha} - 1 \right), \quad \alpha \neq 1.$$

$$1 - \alpha < 0 \Rightarrow T^{1-\alpha} \rightarrow 0, T \rightarrow \infty \Rightarrow I_\alpha \text{ konvergira ka } \frac{1}{\alpha-1}$$

$$1 - \alpha > 0 \Rightarrow T^{1-\alpha} \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty \Rightarrow I_\alpha \text{ divergira}$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow \int_1^T \frac{dx}{x} = \ln T \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty \Rightarrow I_\alpha \text{ divergira}$$

Dakle,  $I_\alpha$  konvergira za  $\alpha > 1$ , a divergira za  $\alpha \leq 1$ .

- $$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(x) dx = V.P. \int_{(-\infty, \infty)} f(x) dx$$

► Ako nesvojstveni integral  $\int_{(-\infty, \infty)} f(x) dx$  konvergira, tada postoji

V.P.  $\int_{(-\infty, \infty)} f(x) dx$  i važi jednakost

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = V.P. \int_{(-\infty, \infty)} f(x)dx.$$

- Može da postoji  $V.P. \int_{(-\infty, \infty)} f(x) dx$ , a da nesvojstveni integral

$$\int_{(-\infty, \infty)} f(x) dx \text{ divergira (sled} \acute{\text{e}} \text{c} \acute{\text{i}} \text{ primer).}$$

## Primer

Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala  $I = \int_{(-\infty, \infty)} \frac{2x}{1+x^2} dx$ .

Rešenje. 
$$I = \left( \int_{(-\infty, a]} \frac{2x}{1+x^2} dx, \int_{[a, \infty)} \frac{2x}{1+x^2} dx \right) = (I_1, I_2).$$

Kako je

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_a^T \frac{2x}{1+x^2} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \ln(1 + T^2) - \ln(1 + a^2) = \infty,$$

to  $I_2$  divergira, pa  $I$  divergira. Za glavnu vrednost se dobija

$$\begin{aligned} V.P. \int_{(-\infty, \infty)} \frac{2x}{1+x^2} dx &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{2x}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} (\ln(1 + T^2) - \ln(1 + T^2)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

# Nesvojstveni integral II vrste

## Definicija

Neka je  $f(x)$  definisana nad konačnim intervalom  $[a, b)$  i integrabilna nad svakim zatvorenim intervalom  $[a, b - \varepsilon] \subset [a, b)$ ,  $\varepsilon > 0$ . **Nesvojstveni integral druge vrste funkcije  $f(x)$  nad intervalom  $[a, b)$  u oznaci**

$\int_{[a, b)} f(x)dx$  je funkcija  $F(\varepsilon)$  definisana sa

$$F(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \quad a < b - \varepsilon < b.$$

Ako postoji  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = A$ , tada nesvojstveni integral

$\int_{[a, b)} f(x)dx$  **konvergira ka  $A$** . Piše se  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = A$ .

Ukoliko  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F(\varepsilon)$  ne postoji, nesvojstveni integral  $\int_{[a, b)} f(x)dx$  **divergira**.

## Primer

*Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

*Rešenje.*

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\arcsin(1-\varepsilon) - 0) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

pa nesvojstveni integral  $\int_{[0,1)} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$  konvergira ka  $\frac{\pi}{2}$ .

## Definicija

Neka je  $f(x)$  definisana nad konačnim intervalom  $(a, b]$  i integrabilna nad svakim zatvorenim intervalom  $[a + \varepsilon, b] \subset (a, b], \varepsilon > 0$ .

*Nesvojstveni integral druge vrste funkcije  $f(x)$  nad intervalom  $(a, b]$  u oznaci  $\int_{(a,b]} f(x)dx$  je funkcija  $F(\varepsilon)$  definisana sa*

$$F(\varepsilon) = \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx, \quad a < a + \varepsilon < b.$$

Ako postoji  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx = B$ , tada nesvojstveni integral

$\int_{(a,b]} f(x)dx$  *konvergira ka B*. Piše se  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx = B$ .

Ukoliko  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F(\varepsilon)$  ne postoji, nesvojstveni integral  $\int_{(a,b]} f(x)dx$  *divergira*.

## Definicija

Neka je  $f(x)$  definisana nad konačnim intervalom  $(a, b)$  i integrabilna nad svakim zatvorenim intervalom  $[m, M] \subset (a, b)$ .

*Nesvojstveni integral druge vrste funkcije  $f(x)$  nad intervalom  $(a, b)$  u*

*oznaci  $\int_{(a,b)} f(x)dx$  je uređen par  $\left( \int_{(a,c]} f(x)dx, \int_{[c,b)} f(x)dx \right)$  nesvojstvenih*

*integrala  $\int_{(a,c]} f(x)dx$  i  $\int_{[c,b)} f(x)dx$ , gde je  $c \in (a, b)$  proizvoljan realan*

*broj. Ako svaki od nesvojstvenih integrala  $\int_{(a,c]} f(x)dx$  i  $\int_{[c,b)} f(x)dx$*

*konvergira, onda nesvojstveni integral  $\int_{(a,b)} f(x)dx$  **konvergira** i pišemo*

*$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ , a ukoliko bar jedan od njih divergira, nesvojstveni integral  $\int_{(a,b)} f(x)dx$  **divergira**.*



## Definicija

Ako je  $f(x)$  definisana u svim tačkama intervala  $(a, b)$  osim u tački  $c \in (a, b)$  i ako su definisani nesvojstveni integrali  $\int_{(a,c)} f(x)dx$  i

$\int_{(c,b)} f(x)dx$  tada je **nesvojstveni integral druge vrste funkcije  $f(x)$  nad intervalom  $(a, b)$**  u oznaci  $\int_{(a,b)} f(x)dx$  uređen par

$\left( \int_{(a,c)} f(x)dx, \int_{(c,b)} f(x)dx \right)$  nesvojstvenih integrala  $\int_{(a,c)} f(x)dx$  i  $\int_{(c,b)} f(x)dx$ . Ako oba nesvojstvena integrala  $\int_{(a,c)} f(x)dx$  i  $\int_{(c,b)} f(x)dx$  konvergiraju, onda nesvojstveni integral  $\int_{(a,b)} f(x)dx$  **konvergira** i pišemo

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ , a ukoliko bar jedan od njih divergira, nesvojstveni integral  $\int_{(a,b)} f(x)dx$  **divergira**.

## Definicija

Ako za nesvojstveni integral  $\int_{(a,b)} f(x)dx$  postoji granična vrednost

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x) dx = V.P. \int_{(a,b)} f(x) dx$$

to je *glavna vrednost nesvojstvenog integrala*  $\int_{(a,b)} f(x)dx$ .

- Slično se definiše i nesvojstveni integral  $\int_{(a,b)} f(x)dx$  kada funkcija  $f(x)$  nije definisana u konačnom broju tačaka intervala  $(a, b)$ .

## Napomena

Pri definiciji  $\int_{[a,b)} f(x)dx$  nismo ništa pretpostavili o ponašanju funkcije  $f(x)$  u tački  $b$ !

- ▶ ako  $f(x) \rightarrow \pm\infty$ , kad  $x \rightarrow b^-$ , nesvojstveni integral može da konvergira ili da divergira
- ▶ ako postoji  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L$ , nesvojstveni integral može samo da

konvergira i to ka Rimanovom integralu  $\int_a^b f_1(x)dx$  funkcije

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in [a, b) \\ L & , \quad x = b \end{cases} ,$$

pa važi jednakost  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx$ .

## Primer

Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala  $I_\beta = \int_{(0,1]} \frac{dx}{x^\beta}$ .

Rešenje. Za  $\beta > 0$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^\beta} \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow 0^+$ . Po definiciji je

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^\beta} = \frac{1}{1-\beta} (1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-\beta+1}).$$

$$-\beta + 1 > 0 \Rightarrow \varepsilon^{-\beta+1} \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow I_\beta \text{ konvergira ka } \frac{1}{1-\beta}$$

$$-\beta + 1 < 0 \Rightarrow \varepsilon^{-\beta+1} \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow I_\beta \text{ divergira}$$

$$\beta = 1 \Rightarrow \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = -\ln \varepsilon \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow I_\beta \text{ divergira}$$

Dakle,  $I_\beta$  konvergira za  $\beta < 1$ , a divergira za  $\beta \geq 1$ .

# Nesvojstveni integral III vrste

## Definicija

Neka je funkcija  $f(x)$  integrabilna nad svakim zatvorenim intervalom  $[a + \varepsilon, T]$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $T > 0$ ,  $a + \varepsilon < T < \infty$ . Po definiciji je

$$\int_{(a, \infty)} f(x) dx = \left( \int_{(a, c]} f(x) dx, \int_{[c, \infty)} f(x) dx \right), c \in (a, \infty) \text{ nesvojstveni}$$

*integral treće vrste funkcije  $f(x)$  nad intervalom  $(a, b)$ .*

Ako oba nesvojstvena integrala  $\int_{(a, c]} f(x) dx$  i  $\int_{[c, \infty)} f(x) dx$  (druge i prve

vrste, respektivno) konvergiraju, onda nesvojstveni integral  $\int_{(a, \infty)} f(x) dx$

*konvergira* i pišemo  $\int_a^\infty f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx$ .

- ▶ Slično se definiše ostali slučajevi nesvojstvenog integrala treće vrste.

# Osnovne osobine nesvojstvenog integrala

## Linearnost nesvojstvenog integrala:

### Teorema

Ako  $\int_{[a,\infty)} f(x)dx$  i  $\int_{[a,\infty)} g(x)dx$  konvergiraju tada za svako  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  važi

$$\int_a^\infty (\alpha f(x) \pm \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^\infty f(x) dx \pm \beta \int_a^\infty g(x) dx$$

## Parcijalna integracija u nesvojstvenom integralu:

### Teorema

Pretpostavimo da  $\int_{[a,\infty)} u(x)v'(x)dx$  i  $\int_{[a,\infty)} v(x)u'(x)dx$  konvergiraju.

Tada važi:

$$\int_a^\infty u(x)v'(x)dx = \lim_{T \rightarrow \infty} u(T)v(T) - u(a)v(a) - \int_a^\infty v(x)u'(x)dx.$$

## Smena promenljive u nesvojstvenom integralu:

### Teorema

*Neka funkcija  $t = \varphi(x)$  ima neprekidan prvi izvod različit od nule nad  $[a, \infty)$  i neka nesvojstveni integral  $\int_{[a, \infty)} f(x)dx$  konvergira. Tada važi*

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_A^B f(\phi(t))\phi'(t)dt,$$

$$A = \varphi(a), \quad B = \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x), \quad \phi(t) = \varphi^{-1}(x)$$

# Kriterijumi konvergencije nesvojstvenog integrala

## Košijev kriterijum

Nesvojstveni integral  $\int_{[a, \infty)} f(x) dx$  konvergira ako i samo ako za svako

$\varepsilon > 0$  postoji realan broj  $T_0 > a$  takav da za svako  $T, T'$  takve da je  $T' > T > T_0$  važi

$$\left| \int_T^{T'} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Navešćemo još neke od **kriterijuma konvergencije** i to samo za slučaj kad je podintegralna funkcija  $f(x)$  stalnog znaka za  $x \geq x_0$ .



## Uporedni kriterijum

Neka je  $0 \leq f(x) \leq Mg(x)$  za  $x \geq a$ ,  $M > 0$ .

Ako  $\int_{[a, \infty)} g(x)dx$  konvergira, onda konvergira i integral  $\int_{[a, \infty)} f(x)dx$  i važi  
da je

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \leq M \int_a^{\infty} g(x)dx.$$

Obrnuto, ako je  $0 \leq mg(x) \leq f(x)$ , za  $x \geq a$ ,  $m > 0$  i integral  
 $\int_{[a, \infty)} g(x)dx$  divergira tada divergira i  $\int_{[a, \infty)} f(x)dx$ .

Pogodnije za upotrebu:

## Teorema

*Neko je  $f(x) > 0$  i  $g(x) > 0$  i  $f(x) \approx g(x)$ , kada  $x \rightarrow \infty$ , tj.*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

*Tada nesvojstveni integrali  $\int_{[a, \infty)} f(x) dx$  i  $\int_{[a, \infty)} g(x) dx$  istovremeno konvergiraju ili divergiraju.*

## Primer

*Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala  $\int_{[1, \infty)} \frac{x^5 + x^3 + 8x^2}{x^6 + 2x + 1} dx$ .*

Rešenje.  $\frac{x^5 + x^3 + 8x^2}{x^6 + 2x + 1} \approx \frac{1}{x}$ ,  $x \rightarrow \infty$ , a kako  $\int_{[1, \infty)} \frac{1}{x} dx$  divergira, to i

$\int_{[1, \infty)} \frac{x^5 + x^3 + 8x^2}{x^6 + 2x + 1} dx$  divergira.

## Neke funkcije definisane nesvojstvenim integralom

Ojlerova **gama funkcija**:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

definisana je za one  $x \in \mathbb{R}$  za koje nesvojstveni integral  $\int_{(0,\infty)} e^{-t} t^{x-1} dt$

konvergira, odnosno za  $x > 0$ .

**Funkcionalna jednačina za gama funkciju:**

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0.$$

pokazuje smisao uvođenja gama funkcije - proširuje  $n!$  na skup pozitivnih realnih brojeva; ako stavimo redom  $x = n, n-1, \dots, 2, 1$  i imamo u vidu

da je  $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$ , dobija se  $\Gamma(n+1) = n!$ .

## Beta funkcija:

$$\mathbf{B}(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$$

definisana je za one vrednosti  $a, b \in \mathbb{R}$  za koje nesvojstveni integral  $\int_{(0,1)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$  konvergira, odnosno za  $a > 0$  i  $b > 0$ .

## Veza beta i gama funkcije:

$$\mathbf{B}(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

# Apsolutna konvergencija nesvojstvenog integrala

## Definicija

Nesvojstveni integral prve vrste  $\int_{[a, \infty)} f(x) dx$  **konvergira apsolutno** ako

$\int_{[a, \infty)} |f(x)| dx$  konvergira. Nesvojstveni integral koji je konvergentan, ali ne apsolutno konvergentan **konvergira uslovno**.

- ▶ definicija je data za nesvojstveni integral prve vrste, slično se može uraditi za nesvojstveni integral druge i treće vrste

## Teorema

Svaki apsolutno konvergentan integral je i konvergentan (u običnom smislu). Obrnuto ne mora da važi.

## Opšti pojmovi, definicije

- ▶ **Diferencijalna jednačina** - jednačina koja sadrži bar jedan izvod nepoznate funkcije jedne ili više promenljivih.
- ▶ **Obična diferencijalna jednačina** - nepoznata funkcija je funkcija jedne promenljive, **parcijalna diferencijalna jednačina** - nepoznata funkcija je funkcija više promenljivih.
- ▶ **Red diferencijalne jednačine** je red najvišeg izvoda nepoznate funkcije koji se javlja.
- ▶ **Sistem (običnih ili parcijalnih) diferencijalnih jednačina** je sistem jednačina kod kog svaka jednačina sadrži bar jedan izvod reda  $n \in \mathbb{N}$  jedne od nepoznatih funkcija jedne ili više promenljivih, npr.  
 $x' = 2x - 3xy, y' = -2x + 5xy, x = x(t), y = y(t).$

Ako je broj nepoznatih funkcija jednak broju jednačina sistema, sistem je **određen**.

## ► Jednačina

$$tx'(t) + ty''(t) = t^2 - 1$$

može se smatrati **neodređenim** sistemom ( $n = 2, m = 1$ ).

► **Opšti oblik** jednačine  $n$ -tog reda:

$$G(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad n \geq 0.$$

► **Normalni oblik** jednačine  $n$ -tog reda:

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

- Funkcija  $y = f(x)$ , definisana i  $n$  puta diferencijabilna u intervalu  $(a, b)$  je **rešenje** jednačine  $n$ -tog reda u opštem, tj. normalnom obliku, ako je za svako  $x \in (a, b)$

$$G(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0,$$

odnosno

$$f^{(n)} = F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)).$$

- ▶ Rešenje je u **implicitnom obliku** ako je dato vezom  $g(x, y) = 0$ , npr.  $x^2 + y^2 = r^2$  je **implicitno rešenje** jednačine  $x + yy' = 0$ .
- ▶ **Početni (Košijev) problem** - Pronaći rešenje jednačine

$$G(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

koje zadovoljava početni uslov

$$y(x_0) = \alpha_0, \quad y'(x_0) = \alpha_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1},$$

pri čemu je  $x_0$  proizvoljna tačka posmatranog intervala,  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  su proizvoljni brojevi,  $i = 0, \dots, n-1$ .

- ▶ **Granični problem** - Problem drugog reda: naći rešenje jednačine  $y = y(x)$  jednačine

$$y'' = F(x, y, y')$$

nad intervalom  $[a, b]$  koje zadovoljava granični uslov

$$y(a) = A, \quad y(b) = B.$$





$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, y(\pi) = -1$$

je granični problem koji ima beskonačno mnogo rešenja.



$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, y(\pi) = 2$$

je granični problem koji nema rešenje.



$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

je granični problem koji ima jedinstveno rešenje.

# Modeli:

izvod  $\frac{dy}{dx}$  predstavlja veličinu promene funkcije  $y(x)$  u zavisnosti od  $x$ , a sve što se u prirodi dešava je promena

- ▶  $y' = ky$ ,  $y = y(x)$ ,  $k$ -proizvoljna konstanta - **Maltusov zakon rasta populacije**
- ▶  $y'' - 2xy' + 2py = x^2$ ,  $y = y(x)$ ,  $p$ -proizvoljna konstanta - **Ermitova jednačina** čija su rešenja **talasne funkcije** kvantne mehanike
- ▶  $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $u = (x, t)$  - **jednodimenzionalna jednačina provođenja toplote**
- ▶  $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$  - **jednačina matematičkog klatna** ( $L$  je dužina klatna,  $g$  je gravitaciona konstanta,  $\theta$  je uglovno udaljenje od ravnotežnog položaja)

- $N(t)$ -broj jedinki posmatrane populacije u trenutku  $t$ ; ako smatramo da je veličina promene populacije srazmerna broju jedinki dobijamo **matematički model rasta populacije**:

$$N'(t) = kN(t), \quad k = \text{const.}$$

Tada je  $N(t)$  rešenje početnog problema

$$N'(t) = kN(t), \quad N(t_0) = N_0 :$$

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} = kN &\Rightarrow \frac{dN}{N} = kdt \Rightarrow \int \frac{dN}{N} = \int kdt \Rightarrow \ln N(t) = kt + c \\ &\Rightarrow N(t) = e^{kt+c} \Rightarrow N(t) = c_1 e^{kt} \end{aligned}$$

$$t = t_0 \Rightarrow N(t_0) = c_1 e^{kt_0}, \text{ tj. } c_1 = N_0 e^{-kt_0},$$

pa je rešenje posmatranog početnog problema

$$N(t) = N_0 e^{k(t-t_0)}.$$

## Ukoliko matematički model pojave zadovoljava osobine:

- ▶ postoji rešenje početnog problema,
- ▶ rešenje početnog problema je jedinstveno,
- ▶ rešenje početnog problema neprekidno zavisi od početnih uslova

kaže se da je **problem korektno postavljen** u smislu Adamara.

- ▶ **Kvalitativna analiza** - ne samo nalaženje rešenja, već i proučavanje njegovih osobina na osnovu posmatrane jednačine
- ▶ ključna tačka postupka rešavanja bila je **integracija**, odatle se termin **integrala diferencijalne jednačine** koristi za njeno rešenje

## Diferencijalne jednačine prvog reda

► Opšti oblik

$$G(x, y, y') = 0 \quad (5)$$

► Normalni oblik

$$y' = F(x, y) \quad (6)$$

- $x$  je **promenljiva**,  $y = y(x)$  je **nepoznata funkcija**,  $y'$  je **izvod** po promenljivoj,  $F, G$  **poznate funkcije**.
- $y = f(x)$ , definisana i diferencijabilna nad  $(a, b)$  je **rešenje jednačine** (5) odnosno (6) ako za svako  $x \in (a, b)$  važi da je

$$G(x, f(x), f'(x)) = 0,$$

odnosno

$$f'(x) = F(x, f(x)).$$

## Teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja

Neka je  $F(x, y)$  neprekidna u zatvorenoj oblasti  $G : \begin{cases} a \leq x \leq b \\ \alpha \leq y \leq \beta \end{cases}$  i

neka postoji  $K > 0$  tako da u oblasti  $G$  važi

$$|F(x, y_2) - F(x, y_1)| \leq K |y_2 - y_1| \quad (\text{Lipšicov uslov}).$$

Tada postoji jedinstveno rešenje početnog problema

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (x_0, y_0) \in G,$$

koje je definisano nad intervalom  $[a', b'] \subset [a, b]$ . Rešenje je dato sa

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x), \quad \text{gde je } \{y_n(x)\} \text{ niz sukcesivnih aproksimacija,}$$

definisan rekurzivno sa

$$y_0(x) = y_0, \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(t, y_{n-1}(t)) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$a' = \max \left\{ a, x_0 - \frac{\beta - y_0}{M}, x_0 - \frac{y_0 - \alpha}{M} \right\}, \quad b' = \min \left\{ b, x_0 + \frac{\beta - y_0}{M}, x_0 + \frac{y_0 - \alpha}{M} \right\},$$

$$M = \sup_{(x, y) \in G} |f(x, y)| > 0$$

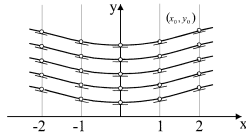
- ▶ dovoljan uslov za konvergenciju niza je neprekidnost i Lipšicov uslov
- ▶ neprekidnost i jedinstvenost rešenja ne garantuju konvergenciju niza sukcesivnih aproksimacija
- ▶ ako niz konvergira ka nekom rešenju, ono ne mora biti jedinstveno
- ▶ u praksi se umesto Lipšicovog uslova zahteva da je u oblasti  $G$

$$\left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| \leq M.$$

- ▶ metoda se koristi u teorijske, a manje u praktične svrhe

Neka je funkcija  $F(x, y)$  definisana i neprekidna u oblasti  $G$  i neka je  $y = f(x)$  je rešenje jednačine  $y' = F(x, y)$  nad intervalom  $(a, b)$ .

- ▶  $(x, y, y')$  je **linijski element**
- ▶ skup svih linijskih elemenata je **polje pravaca**
- ▶ tangenta rešenja  $y = f(x)$  u svakoj tački  $(x, y)$  grafika ima koeficijent pravca  $y'$  dat sa  $y' = F(x, y)$ ; svaka kriva sa ovom osobinom je **saglasna sa poljem pravaca**



- ▶ skup svih krivih saglasnih sa poljem pravaca naziva se **opšte rešenje jednačine**
- ▶ kriva koja zadovoljava početni uslov  $y(x_0) = y_0$ , tj. prolazi kroz neku tačku  $(x_0, y_0)$  naziva se **partikularno rešenje**

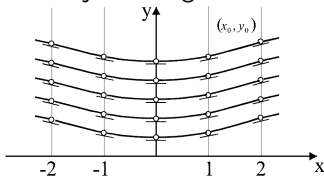


## Primer

Odrediti rešenje  $y = y(x)$  diferencijalne jednačine  $y' = x$ .

U svim tačkama sa istom apscisom tangente imaju isti nagib:

x:	$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
y:	sve vrednosti (proizvoljne)
y':	$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$



Lako se može zaključiti da su sva rešenja (opšte rešenje u smislu naše definicije) data sa

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + c,$$

gde je  $c$  proizvoljna konstanta, a partikularno koje prolazi kroz tačku  $(x_0, y_0)$  sa data sa

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + y_0 - \frac{x_0^2}{2}.$$

## Ojlerove poligonalne linije - aproksimacija rešenja

- ▶ podela konačnog intervala intervala  $(a, b)$  koji sadrži  $x_0$  :  
 $a = z_n < z_{n-1} < \dots < z_1 < z_0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
- ▶ kroz  $(x_0, y_0)$  postavimo pravu  $L_0 : y = y_0 + (x - x_0)F(x_0, y_0)$ , sa nagibom  $F(x_0, y_0)$
- ▶ ako je  $\xi_1 = x_1$  ili  $z_1$  dosta blizu  $x_0$ , u tački  $\xi_1$  ordinata prave  $L_0$  data sa  $y_1 = y_0 + (\xi - x_0)F(x_0, y_0)$  ne odstupa mnogo od ordinate rešenja u toj tački
- ▶ kroz  $(\xi_1, y_1)$  postavimo pravu  $L_1 : y = y_1 + (x - \xi_1)F(\xi_1, y_1)$
- ▶ nakon  $k$  koraka - **Ojlerova poligonalna linija**

$$L_k : y = y_k + (x - \xi_k)F(\xi_k, y_k),$$

$$(\xi_k \leq x \leq \xi_{k+1}, \xi_i = x_i) \text{ ili } (\xi_{k+1} \leq x \leq \xi_k, \xi_i = z_i), i = 1, 2, \dots, n$$

gde se  $y_{k+1}$  računa iz obrasca

$$y_{k+1} = y_k + (\xi_{k+1} - \xi_k)F(\xi_k, y_k), k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

## Jednačina koja razdvaja promenljive

Normalni oblik:

$$y' = f(x)g(y)$$

### Teorema

Ako je  $f(x)$  *neprekidna* nad  $a < x < b$ , a  $g(y)$  *neprekidna i različita od 0* nad  $\alpha < y < \beta$  tada postoji *jedinstveno rešenje* jednačine  $y' = f(x)g(y)$  koje zadovoljava početni uslov  $y(x_0) = y_0$ ,  $x_0 \in (a, b)$ ,  $y_0 \in (\alpha, \beta)$  i definisano je na nekoj okolini  $x_0$ . Rešenje je dato sa

$$y(x) = G^{-1} \left( G(y_0) + \int_{x_0}^x f(t)dt \right),$$

pri čemu je  $G(u)$  primitivna funkcija za  $\frac{1}{g(u)}$  nad  $(\alpha, \beta)$ .

Opšte rešenje pod uslovom  $g(y) \neq 0$  je dato obrascem

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c.$$

**O egzistenciji i jedinstvenosti rešenja ako je funkcija  $g(y)$  neprekidna nad intervalom  $(\alpha, \beta)$ , ali ne važi  $g(y) \neq 0$  nad datim intervalom:**

- ▶ Ako je  $g(y_0) \neq 0$ , zbog neprekidnosti  $g(y)$  postoji interval  $(\alpha_1, \beta_1) \subset (\alpha, \beta)$  koji sadrži  $y_0$  sa osobinom

$$g(y)g(y_0) > 0 \text{ za svako } y \in (\alpha_1, \beta_1).$$

Zaključak teoreme ostaje, ali se  $(\alpha, \beta)$  zamenjuje sa  $(\alpha_1, \beta_1)$ .

- ▶ Ako je  $g(y_0) = 0$ , rešenje početnog problema je sigurno funkcija  $y(x) = y_0$ , ali to rešenje ne mora da bude jedinstveno (videti sledeći primer).

## Primer

Rešiti početni problem  $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$ ,  $y(1) = 0$ .

Jedno rešenje početnog problema je  $y(x) = 0$ .

Iz  $\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}$  zbog konvergencije nesvojstvenog integrala

$$\int_{(0, y(x))} \frac{du}{3u^{\frac{2}{3}}} \text{ za } y(x) > 0, \text{ odnosno } \int_{(y(x), 0)} \frac{du}{3u^{\frac{2}{3}}} \text{ za } y(x) < 0,$$

da je

$$\int_0^{y(x)} \frac{du}{3u^{\frac{2}{3}}} = \int_1^x dt, \text{ odnosno } \sqrt[3]{u}|_0^{y(x)} = t|_1^x.$$

Sledi da je  $\sqrt[3]{y(x)} = x - 1$ , odnosno  $y(x) = (x - 1)^3$ , pa dati problem ima najmanje dva rešenja.

## Primer

Naći rešenje jednačine  $y' = x(y - 1)^2$  koje prolazi kroz tačku  $(0, 1)$ .

$$\begin{aligned} \frac{dy}{(y-1)^2} = x dx &\Rightarrow -\frac{1}{y-1} = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y-1 = -\frac{2}{x^2 + 2c} \\ &\Rightarrow y(x) = 1 - \frac{2}{x^2 + 2c} \end{aligned}$$

Uzimajući u obzir početni uslov dobijamo  $1 = 1 - \frac{2}{2c}$ , tj.  $0 = \frac{1}{c}$   
(konstanta u "opštem" rešenju ne može da se odredi).

Ova situacija je nastupila jer nesvojstveni integral

$$\int_{(1,y)} \frac{dy}{(y-1)^2} \text{ za } y > 1, \text{ odnosno } \int_{(y,1)} \frac{dy}{(y-1)^2} \text{ za } y < 1$$

divergira. Rešenje problema je  $y(x) = 1$ .

# Homogena diferencijalna jednačina

Normalni oblik:  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ ,  $f(t)$  je neprekidna funkcija nad  $(a, b)$ ;

**smenom:**  $\frac{y}{x} = u$ ,  $y' = u + xu'$  svodi se na jednačinu  $u' = \frac{f(u) - u}{x}$  koja razdvaja promenljive.

**Ako je  $f(u) - u \neq 0$  nad intervalom  $(a, b)$**  tada kroz svaku tačku  $(x_0, y_0)$  oblasti  $G : \begin{cases} a < \frac{y}{x} < b \\ x > 0 \end{cases}$  ili  $G : \begin{cases} a < \frac{y}{x} < b \\ x < 0 \end{cases}$  prolazi samo jedno rešenje  $y(x) = xu(x)$  definisano za svako  $x$  za koje je

$$\text{ili } \lim_{y \rightarrow \alpha^+} G(y) < G(y_0) + \int_{x_0}^x f(t) dt < \lim_{y \rightarrow \beta^-} G(y)$$

$$\text{ili } \lim_{y \rightarrow \beta^-} G(y) < G(y_0) + \int_{x_0}^x f(t) dt < \lim_{y \rightarrow \alpha^+} G(y),$$

gde je  $u(x)$  dato sa  $\int_{u_0}^{u(x)} \frac{dt}{f(t) - t} = \ln \left| \frac{x}{x_0} \right|$ ,  $u_0 = \frac{y_0}{x_0}$ .

**Ako je  $f(u) - u = 0$  za neko  $x \in (a, b)$  :**

- ▶ Ako je  $f(u_0) \neq u_0$ ,  $\left(u_0 = \frac{y_0}{x_0}\right)$ , zbog neprekidnosti funkcije  $f(u) - u$  postoji interval  $(a_1, b_1) \subset (a, b)$ , koji sadrži tačku  $u_0$ , tako da je

$$(f(u) - u)(f(u_0) - u_0) > 0 \text{ za svako } u \in (a_1, b_1)$$

pa svi zaključci važe nad podintervalom  $(a_1, b_1)$  intervala  $(a, b)$ .

- ▶ Ako je  **$f(u) - u = 0$  za svako  $u \in (a, b)$** , jednačina glasi  $y' = \frac{y}{x}$ , a to je jednačina koja razdvaja promenljive.
- ▶ Ako je  $f(u_0) = u_0$ ,  $\left(u_0 = \frac{y_0}{x_0}\right)$ , rešenje početnog problema je sigurno funkcija  $y(x) = u_0 x$ ,  $(y'(x) = u_0 = f\left(\frac{u_0 x}{x}\right) = f(u_0))$ . Ovo rešenje ne mora da bude jedinstveno.



## Napomena

Opšte rešenje uz pretpostavku  $f(u) - u \neq 0$  dato je obrascem

$$\int \frac{du}{f(u)-u} = \ln cx \quad (u = \frac{y}{x}), \quad y = y(x), \quad \text{a partikularno se dobija}$$

određivanjem  $c$  iz početnog uslova  $y(x_0) = y_0$ . Gornji integral mora da postoji nad posmatranim intervalom!

## Primer

Jednačina  $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ , gde su  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$  realni brojevi, a  $f(t)$  neprekidna funkcija nad intervalom  $(a, b)$ , svodi se na jednačinu koja razdvaja promenljive ili na homogenu.

► Ako je  $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ , jednačina se smenom

$$a_1x + b_1y + c_1 = t \text{ ili } a_2x + b_2y + c_2 = t$$

svodi na jednačinu koja razdvaja promenljive.

► Ako je  $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ , smenom

$$x = X + \alpha, \quad y = Y + \beta$$

gde su  $\alpha$  i  $\beta$  (jedinstvena!) rešenja sistema

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0$$

$$a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0$$

dobija se

$$\begin{aligned} Y' = y' &= f\left(\frac{a_1X + a_1\alpha + b_1Y + b_1\beta + c_1}{a_2X + a_2\beta + b_2Y + b_2\beta + c_2}\right) \\ &= f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{Y}{X}}{a_2 + b_2\frac{Y}{X}}\right) \\ &= g\left(\frac{Y}{X}\right). \end{aligned}$$

# Linearna diferencijalna jednačina

Opšti oblik:

$$y' + f(x) y = g(x)$$

## Teorema

Ako su funkcije  $f(x)$  i  $g(x)$  **neprekidne** nad intervalom  $(a, b)$  tada postoji **jedinstveno** rešenje linearne diferencijalne jednačine koje zadovoljava početni uslov  $y(x_0) = y_0$ ,  $x_0 \in (a, b)$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$  i definisano je nad  $(a, b)$  u obliku

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^x f(t)dt} \left( y_0 + \int_{x_0}^x e^{\int_{x_0}^t f(u)du} g(t)dt \right).$$

► **smena:**  $y(x) = u(x) \cdot v(x)$

## Bernulijeva jednačina

Opšti oblik:

$$y' + f(x)y = g(x)y^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

- ▶  $\alpha = 0$  - linearna diferencijalna jednačina
- ▶  $\alpha = 1$  - jednačina koja razdvaja promenljive
- ▶ **smena:**  $z(x) = (y(x))^{-\alpha+1}$ ,  $z'(x) = (1 - \alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x)$

Svodi se na linearnu diferencijalnu jednačinu

$$z'(x) + (1 - \alpha)f(x)z(x) = (1 - \alpha)g(x)$$

Ako su  $f(x)$  i  $g(x)$  neprekidne nad  $(a, b)$ , tada kroz svaku tačku  $(x_0, z_0)$ , gde je  $x_0 \in (a, b)$ ,  $z_0 \in \mathbb{R}$ , prolazi jedinstveno rešenje definisano nad  $(a, b)$ . Kako se zbog  $\alpha \in \mathbb{R}$  mora pretpostaviti da je  $y > 0$ , rešenje je u opštem slučaju definisano na najvećem podintervalu  $(a_1, b_1)$  od  $(a, b)$  kom pripada  $x_0$  i u kom je  $z(x) > 0$ .

## Jednačina totalnog diferencijala

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

je jednačina totalnog diferencijala ako postoji funkcija  $F(x, y)$  takva da je

- ▶  $dF(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$
- ▶  $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$

### Teorema

Neka su  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$  neprekidne u otvorenoj jednostruko povezanoj oblasti  $G$  i  $Q(x_0, y_0) \neq 0$ . Da bi jednačina  $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$  bila jednačina totalnog diferencijala **potrebno je i dovoljno** da bude za svako  $(x, y) \in G$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

Ako oblast nije jednostruko povezana, tvrđenje ne mora da važi!

## Integracioni množitelj

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \neq \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

Da li postoji funkcija  $h(x, y) \neq 0$  takva da je diferencijalna jednačina

$$h(x, y)P(x, y)dx + h(x, y)Q(x, y)dy = 0$$

jednačina totalnog diferencijala, tj.  $\frac{\partial(hP)}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial(hQ)}{\partial x}(x, y)$ ?

$$\frac{1}{h} \left( P \frac{\partial h}{\partial y} - Q \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

$h(x, y)$  - **integracioni množitelj** (funkcija koja ima u otvorenoj jednostruko povezanoj oblasti  $G$  neprekidne parcijalne izvode, zadovoljava gornji uslov i različita je od nule u  $G$ )

# Klero-ova jednačina $y = xy' + f(y')$

## Tvrđenje

*Neka funkcija  $f(t)$  ima nad intervalom  $(a, b)$  neprekidan drugi izvod koji je različit od nule i neka je  $\varphi(t)$  inverzna funkcija od  $-f'(t)$ . Tada su rešenja jednačine  $y = xy' + f(y')$  funkcije*

- ▶  $y = xc + f(c), \quad c \in (a, b)$  ( $c$  je konstanta)
- ▶  $y = x\varphi(x) + f(\varphi(x))$  (tzv. *singularno rešenje*)  
*definisano nad intervalom  $(\alpha, \beta)$ , gde  $\alpha = \inf_{t \in (a, b)} \{-f'(t)\}$  ako infimum postoji, u suprotnom  $\alpha = -\infty$  i  $\beta = \sup_{t \in (a, b)} \{-f'(t)\}$  ako supremum postoji, u suprotnom je  $\beta = \infty$*
- ▶ *svaka kriva sastavljena od proizvoljnog luka  $AB$  krive i na nju nastavljenih tangenata u tačkama  $A$  i  $B$ .*

## Lagranžova jednačina

$$y = xf(y') + g(y')$$

Uzmimo  $p = y'$ , tj.  $dy = p dx$ . Dobijamo  $y = xf(p) + g(p)$ , a odavde diferenciranjem  $p dx = dy = (xf'(p) + g'(p))dp + f(p)dx$ , tj.

$$(f(p) - p)dx + (xf'(p) + g'(p))dp = 0.$$

$$\blacktriangleright f(p) - p \neq 0 \Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{f(p) - p}x + \frac{g'(p)}{f(p) - p} = 0,$$

što je linearna jednačina, iz koje dobijamo  $x = x(p)$ , što sa  $y(p) = x(p)f(p) + g(p)$  predstavlja rešenje Lagranžove jednačine u parametarskom obliku.

- ▶ Ako jednačina  $f(p) - p = 0$  ima rešenja i ako je jedno rešenje  $p = c$ , tada je rešenje jednačine i  $y = cx + g(c)$ .
- ▶ Ako je  $f(p) - p = 0$  za svako  $p$ , Lagranžova jednačina postaje  $y = xy' + g(y')$  (Klero-ova).

(ovo je spec. slučaj opšteg postupka uvođenja parametra)



## Snižavanje reda diferencijalne jednačine

I)  $y^{(n)}(x) = f(x)$ ,  $f(x)$  neprekidna funkcija nad  $(a, b)$

$$y^{(n-1)}(x) = \int f(x) dx = f_1(x) + c_1$$

$$y^{(n-2)}(x) = \int (f_1(x) + c_1) dx = f_2(x) + c_1x + c_2$$

$$\vdots$$

$$y(x) = f_n(x) + \frac{c_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{c_{n-1} x}{1!} + c_n$$

## Primer

Rešiti početni problem  $y^{IV} = \sin x$ ,  $y(0) = y''(0) = 1$ ,  $y'(0) = y'''(0) = 0$

$$y''' = \int y^{IV}(x)dx = \int \sin x dx = -\cos x + c_1,$$

$$y'' = \int y'''(x)dx = \int (-\cos x + c_1)dx = -\sin x + c_1x + c_2,$$

$$y' = \int y''(x)dx = \int (-\sin x + c_1x + c_2)dx = \cos x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3,$$

$$y = \int y'(x)dx = \int (\cos x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3)dx =$$

$$\sin x + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3x + c_4,$$

$$y'''(0) = -1 + c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1$$

$$y''(0) = c_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 1$$

$$y'(0) = 1 + c_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_3 = -1$$

$$y(0) = c_4 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_4 = 1$$

$$\Rightarrow y = \sin x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - x + 1$$

III)  $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, 1 \leq k < n$

smena:  $y^{(k)}(x) = z(x)$

dobijamo jednačinu reda  $n - k$  oblika

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0.$$

IV)  $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, n \geq 2$

smena:  $y' = z(y)$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = z'(y)y'(x) = z' z$$

$$\begin{aligned} y''' &= \frac{dy''}{dx} = \frac{d(zz')}{dx} = \frac{dz}{dx} z' + z \frac{dz'}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} z' + z \frac{dz'}{dy} \frac{dy}{dx} \\ &= zz'^2 + z^2 z'' \end{aligned}$$

dobijamo jednačinu reda  $n - 1$  oblika  $H(y, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0.$

- Ako znamo jedno rešenje  $y_1(x)$  diferencijalne jednačine

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

tada se jednačina

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$$

rešava smenom

$$y = z(x)y_1(x),$$

gde je  $z(x)$  nepoznata funkcija.

$$\begin{aligned} y = zy_1 \Rightarrow \quad y' &= z'y_1 + zy_1' \\ y'' &= z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1'' \end{aligned}$$

pa da bi  $y$  bilo rešenje  $z(x)$  mora da zadovoljava jednačinu

$$y_1 z'' + (2y_1' + a_1(x)y_1)z' + \underbrace{(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1)}_0 z = f(x)$$

koja ne sadrži  $z$ , pa joj se smenom  $z' = p$ ,  $z'' = p'$  snižava red.

- Ako znamo dva rešenja  $y_1(x)$  i  $y_2(x)$  diferencijalne jednačine

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x),$$

tj. ako je

$$y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x) = f(x),$$

$$y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_2(x)y_2(x) = f(x),$$

oduzimanjem ove dve jednakosti dobija se

$$(y_2(x) - y_1(x))'' + a_1(x)(y_2(x) - y_1(x))' + a_2(x)(y_2(x) - y_1(x)) = 0,$$

tj. funkcija  $h(x) = y_2(x) - y_1(x)$  je jedno rešenje jednačine

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0.$$

Ona se rešava smenom

$$y = z(x)(y_2(x) - y_1(x)).$$

## Linearna jednačina $n$ -tog reda, $n \geq 2$

Opšti oblik:  $g_0(x)y^{(n)} + g_1(x)y^{(n-1)} + \dots + g_n(x)y = h(x)$ .

Pretpostavke:

- ▶  $h(x), g_i(x), i = 1, 2, \dots, n$  definisane i neprekidne nad otvorenim intervalom  $I$
- ▶  $g_0(x) \neq 0, x \in I$

$$L_n[y] = f(x)$$

$$L_n[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y$$

$$a_i(x) = \frac{g_i(x)}{g_0(x)}, i = 1, 2, \dots, n, \quad f(x) = \frac{h(x)}{g_0(x)}$$

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x)$$

- ▶  $f(x) = 0, x \in I$  - **homogena** diferencijalna jednačina, u suprotnom je to **nehomogena** diferencijalna jednačina

- 1) problem egzistencije rešenja
- 2) problem jednoznačnosti rešenja
- 3) problem pronalaženja rešenja (efektivnog rešavanja)

## Teorema

*Ako su  $a_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  i  $f(x)$  neprekidne funkcije nad intervalom  $I$ ,  $x_0 \in I$  proizvoljna tačka,  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  proizvoljni brojevi, tada postoji jedinstveno rešenje  $y(x)$  diferencijalne jednačine  $L_n[y] = f(x)$  koje zadovoljava početni uslov*

$$y(x_0) = \alpha_0, y'(x_0) = \alpha_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}$$

*i definisano je nad datim intervalom  $I$ .*

# Homogena linearna jednačina $L_n[y] = 0$

## Lema

Operator  $L_n[ \ ]$  je linearan, tj. važi

$$L_n[y_1 + y_2] = L_n[y_1] + L_n[y_2], \quad L_n[cy] = cL_n[y],$$

gde je  $c$  proizvoljna konstanta.

## Teorema

(**PRINCIP SUPERPOZICIJE**) Ako su  $y_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine tada je rešenje  $i$

$$y(x) = \sum_{i=1}^m c_i y_i(x), \quad \text{gde su } c_i \text{ proizvoljne konstante.}$$

Dokaz.  $L_n \left[ \sum_{i=1}^m c_i y_i(x) \right] = \sum_{i=1}^m c_i L_n[y_i(x)] = 0.$

- ▶ **opšte rešenje**:  $m = n$ ,  $c_i$  se mogu izabrati tako da je zadovoljen svaki početni uslov
- ▶ **partikularno rešenje** - dob. izborom konstanti  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$



## Definicija

Funkcije  $f_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , su **linearno zavisne nad intervalom  $I$**  ako postoje brojevi  $c_i$  koji nisu svi jednaki nuli, da je

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0, \quad \text{za svako } x \in I.$$

Funkcije koje nisu linearno zavisne su **linearno nezavisne**.

## Definicija

Ako su funkcije  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x) \in C^{n-1}(I)$ ,  $n \geq 2$ , tada je

$$W(x) = W(y_1, \dots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

**determinanta Vronskog** od  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  nad  $I$ .

## Lema

*Neka su funkcije  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  ( $n - 1$ ) puta neprekidno diferencijabilne nad intervalom  $I$ . Ako su funkcije  $y_1, y_2, \dots, y_n$  linearno zavisne nad intervalom  $I$ , tada je  $W(x) = 0$  za svako  $x \in I$ .*

*Dokaz.* Ako su funkcije  $y_1, y_2, \dots, y_n$  linearno zavisne nad intervalom  $I$ , tada postoje konstante  $c_1, c_2, \dots, c_n$  koje nisu sve istovremeno jednake nuli, tako da je

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0, \text{ za svako } x \in I.$$

Ako je na primer  $c_n \neq 0$ , tada je

$$y_n = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_{n-1} y_{n-1}, \quad \alpha_i = -\frac{c_i}{c_n}, i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Sledi da je poslednja kolona u  $W(x)$  linearna kombinacija prethodnih kolona, pa je  $W(x) = 0$ .

## Lema

*Ako su rešenja  $y_1, y_2, \dots, y_n$  homogene linearne jednačine  $L_n[y] = 0$  linearno nezavisna, tada je  $W(x) \neq 0$ , za svako  $x \in I$ .*

## Teorema

*Potreban i dovoljan uslov da  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  budu linearno nezavisna rešenja homogene linearne jednačine  $L_n[y] = 0$  nad nekim intervalom  $I$  je da bude*

$$W(x) \equiv W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) \neq 0, \text{ za svako } x \in I.$$

Dakle, za skup rešenja  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  jednačine  $L_n[y] = 0$  je ili  $W(x) = 0$  za svako  $x \in I$  ili  $W(x) \neq 0$  za svako  $x \in I$ .

## Primer

Ispitati linearnu zavisnost funkcija  $y_1(x) = x$  i  $y_2(x) = x^2$  nad  $\mathbb{R}$ . Naći  $W(x)$ .

Iz  $\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = 0$  za svako  $x \in \mathbb{R}$  sledi da je  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , jer:

$$\begin{aligned} x = 1 &\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ x = -1 &\Rightarrow -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

tako da su funkcije  $y_1(x) = x$  i  $y_2(x) = x^2$  linearno nezavisne nad  $\mathbb{R}$ .  
Kako je

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2,$$

sledi da je  $W(0) = 0$ ,  $W(x) \neq 0$ , za svako  $x \neq 0$ .

## Primer

Da li funkcije  $y_1(x) = x$  i  $y_2(x) = x^2$  mogu biti rešenja nad skupom  $\mathbb{R}$  neke homogene linearne jednačine oblika  $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ , gde su  $a_1(x)$  i  $a_2(x)$  neprekidne funkcije za svako  $x \in \mathbb{R}$ ? Formirati homogenu linearnu jednačinu čija su rešenja  $y_1(x) = x$  i  $y_2(x) = x^2$ .

$y_1(x) = x$  i  $y_2(x) = x^2$  su linearno nezavisne nad  $\mathbb{R}$ . Ne mogu da budu rešenja homogene linearne jednačine  $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$  nad  $\mathbb{R}$ , jer je  $W(0) = 0$ . Ako su  $y_1(x) = x$  i  $y_2(x) = x^2$  rešenja neke linearne jednačine, tada je rešenje te jednačine i funkcija  $y(x) = c_1x + c_2x^2$ , gde su  $c_1$  i  $c_2$  proizvoljne konstante.

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1x + c_2x^2 \\ y'(x) &= c_1 + 2c_2x \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} c_2 &= \frac{y''(x)}{2} \\ c_1 &= y'(x) - xy''(x) \end{aligned} \\ y''(x) &= 2c_2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow y(x) = xy'(x) - x^2y''(x) + \frac{x^2}{2}y''(x)$ , pa je tražena jednačina  $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ .

## Definicija

Svaki skup od  $n$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  linearno nezavisnih rešenja jednačine  $L_n[y] = 0$  je **fundamentalni skup rešenja** jednačine  $L_n[y] = 0$ .

## Teorema

Postoji fundamentalni skup rešenja jednačine  $L_n[y] = 0$  nad intervalom  $I$ .

Dokaz. Neka je  $x_0$  proizvoljna tačka iz intervala  $I$  i  $y_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  rešenja jednačine  $L_n[y] = 0$  koja zadovoljavaju početni uslov

$$\begin{array}{llll} y_1(x_0) = 1, & y_1'(x_0) = 0, & \dots, & y_1^{(n-1)}(x_0) = 0, \\ y_2(x_0) = 0, & y_2'(x_0) = 1, & \dots, & y_2^{(n-1)}(x_0) = 0, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n(x_0) = 0, & y_n'(x_0) = 0, & \dots, & y_n^{(n-1)}(x_0) = 1. \end{array}$$

(postoje na osnovu teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti)

Rešenja  $y_i(x)$  su linearno nezavisna nad intervalom  $I$ , jer da su linearno zavisna, sledilo bi da je  $W(x) = 0$  za svako  $x \in I$ , pa i za  $x = x_0$ .

Za  $x_0$  imamo da je

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

što je kontradikcija.



## Teorema

(**FORMULA LJUVILA-ABELA**) Neka je  $x_0 \in I$  proizvoljna tačka, a  $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$  fundamentalni skup rešenja homogene linearne jednačine  $L_n[y] = 0$ . Tada je za svako  $x \in I$

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x a_1(t)dt}.$$

- Ako je  $a_1 = c$ , tada je  $W(x) = W(x_0)e^{-c(x-x_0)}$ , te za  $c = 0$  važi  $W(x) = W(x_0)$ , za svako  $x \in I$ .

## Posledica

Rešenja  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  homogene linearne jednačine  $L_n[y] = 0$  su linearno nezavisna nad intervalom  $I$  ako je  $W(x_0) \neq 0$  za neku tačku  $x_0 \in I$ .



## Teorema

Ako je  $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$  fundamentalni skup rešenja homogene linearne jednačine  $L_n[y] = 0$  nad intervalom  $I$ , tada je opšte rešenje te jednačine nad intervalom  $I$  dato sa

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x),$$

gde su  $c_1, c_2, \dots, c_n$  proizvoljni realni brojevi.

*Dokaz.* Neka su  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  proizvoljni realni brojevi i neka je  $h(x)$  rešenje jednačine  $L_n[y] = 0$  koje zadovoljava početni uslov

$$h(x_0) = \alpha_0, h'(x_0) = \alpha_1, \dots, h^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}, \quad x_0 \in I.$$

Pokažimo da se u rešenju

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

konstante  $c_1, c_2, \dots, c_n$  mogu odrediti tako da i  $y(x)$  zadovoljava isti početni uslov.

Uvrštavajući početni uslov u

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

dobijamo sistem  $S$  algebarskih jednačina

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \cdots + c_n y_n(x_0) = \alpha_0$$

$$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \cdots + c_n y_n'(x_0) = \alpha_1$$

$$c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}$$

Determinanta ovog sistema je  $D_S = W(x_0) \neq 0$  jer su rešenja  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  linearno nezavisna, pa je sistem određen.

Znači, rešenje

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

gde je  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  rešenje sistema  $S$  zadovoljava isti početni uslov kao i rešenje  $h(x)$ .

Zbog jednoznačnosti rešenja početnog problema je  $y(x) = h(x), x \in I$ .  $\square$

# Homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

$$L_n[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, a_i \in \mathbb{R}$$

Ako je  $y = e^{kx}$ ,  $k \in \mathbb{R}$  tada je  $y^{(i)} = k^i e^{kx}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , pa je

$$L_n[e^{kx}] = e^{kx} \underbrace{(k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_{n-1} k + a_n)}_{P_n(k)}$$

pa je

$$L_n[e^{kx}] = 0 \Leftrightarrow k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_{n-1} k + a_n = 0$$

- ▶  $P_n(k)$  - karakterističan polinom
- ▶  $k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_{n-1} k + a_n = 0$  - karakteristična jednačina

Rešenja diferencijalne jednačine su za svako  $x \in (-\infty, \infty)$  funkcije

$$y_i = e^{k_i x}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

## Lema

Ako je  $y(x) = u(x) + iv(x)$  kompleksno rešenje linearne jednačine  $L_n[y] = 0$  tada su  $u(x)$  i  $v(x)$  dva realna rešenja te jednačine.

$$\begin{aligned} \text{Dokaz. } L_n[u(x) + iv(x)] &= L_n[u(x)] + iL_n[v(x)] = 0 \\ &\Rightarrow L_n[u(x)] = L_n[v(x)] = 0. \end{aligned}$$

### • Koreni karakteristične jednačine su realni i jednostruki

Karakteristična jednačina ima  $1 < m \leq n$  različitih realnih korena  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ; realna rešenja su  $y_i = e^{k_i x}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ; linearno su nezavisna (čine fundamentalni skup rešenja) ako je  $m = n$ , jer je

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & \dots & e^{k_m x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & \dots & k_m e^{k_m x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{m-1} e^{k_1 x} & k_2^{m-1} e^{k_2 x} & \dots & k_m^{m-1} e^{k_m x} \end{vmatrix} \\ &= e^{(k_1 + k_2 + \dots + k_m)x} V, \end{aligned}$$

gde je

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_1^{m-1} & k_2^{m-1} & \dots & k_m^{m-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq m} (k_i - k_j) \neq 0,$$

jer je  $k_i \neq k_j$  za  $i \neq j$ .

Opšte rešenje za  $m = n$  dato je sa:

$$y(x) = \sum_{i=1}^n c_i e^{k_i x}.$$

- Koreni karakteristične jednačine su kompleksni i jednostruki

$k_j = \alpha_j + i \beta_j$ ,  $\beta_j \neq 0$ , tada su rešenja

$$y_{j1} = \operatorname{Re}(e^{(\alpha_j + i \beta_j)x}) = e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x$$

$$y_{j2} = \operatorname{Im}(e^{(\alpha_j + i \beta_j)x}) = e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x$$

Lako se proverava da su ova dva rešenja linearno nezavisna.

Iako je  $\overline{k_j} = \alpha_j - i \beta_j$  takođe koren karakteristične jednačine, nema dodatnih rešenja!

- Koreni karakteristične jednačine su realni i višestruki

$k_i$  koren višestrukosti  $m > 1$ , tada su rešenja jednačine funkcije

$$y_{i_1}(x) = e^{k_i x}, y_{i_2}(x) = x e^{k_i x}, \dots, y_{i_m}(x) = x^{m-1} e^{k_i x}$$

i linearno su nezavisna:

Kako je

$$P_n(k_i) = P'_n(k_i) = \dots = P_n^{(m-1)}(k_i) = 0, \quad P_n^{(m)}(k_i) \neq 0$$

i kako je  $L_n[e^{kx}] = e^{kx} P_n(k)$  to se diferenciranjem po  $k$  dobija

$$\begin{aligned} L_n[xe^{kx}] &= xe^{kx} P_n(k) + e^{kx} P'_n(k) \\ &= e^{kx} (xP_n(k) + P'_n(k)) \end{aligned}$$

pa se iz  $L_n[xe^{kx}] = e^{kx} (xP_n(k) + P'_n(k))$  stavljaajući  $k = k_i$  dobija  $L_n[xe^{k_i x}] = 0$ , tj da je i  $x e^{k_i x}$  rešenje. Slično, diferenciranjem  $(m-1)$  puta po  $k$  dobijamo da su rešenja i funkcije

$$y_{i_1}(x) = e^{k_i x}, y_{i_2}(x) = x e^{k_i x}, \dots, y_{i_m}(x) = x^{m-1} e^{k_i x}.$$

- Koreni karakteristične jednačine su kompleksni i višestruki

$k_j = \alpha_j + i \beta_j$ ,  $\beta_j \neq 0$  koren višestrukosti  $m > 1$ , tada su  $2m$  realnih (linearno nezavisnih) rešenja jednačine funkcije

$$\begin{aligned}
 y_{j1} &= e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x, \\
 y_{j2} &= x e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x, \\
 &\vdots \\
 y_{jm} &= x^{m-1} e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x, \\
 y_{j_{m+1}} &= e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x, \\
 y_{j_{m+2}} &= x e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x, \\
 &\vdots \\
 y_{j_{2m}} &= x^{m-1} e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x.
 \end{aligned}$$



## Primer

*Neka su rešenja karakteristične jednačine neke homogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima*

$$\begin{aligned}
 k_1 = k_2 = k_3 &= 1, \\
 k_4 &= -1, \\
 k_5 &= 3 + i, \\
 k_6 &= 3 - i, \\
 k_7 = k_8 = k_9 &= 2 + i, \\
 k_{10} = k_{11} = k_{12} &= 2 - i.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(x) = & e^x(c_1 + c_2x + c_3x^2) + c_4e^{-x} + e^{3x}(c_5 \cos x + c_6 \sin x) + \\
 & e^{2x}(c_7 \cos x + c_8x \cos x + c_9x^x \cos x + c_{10} \sin x + c_{11}x \sin x + c_{12}x^2 \sin x)
 \end{aligned}$$

## Primer

*Neka su rešenja karakteristične jednačine neke homogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima*

$$\begin{aligned}
 k_1 = k_2 = k_3 &= 1, \\
 k_4 &= -1, \\
 k_5 &= 3 + i, \\
 k_6 &= 3 - i, \\
 k_7 = k_8 = k_9 &= 2 + i, \\
 k_{10} = k_{11} = k_{12} &= 2 - i.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(x) = & e^x(c_1 + c_2x + c_3x^2) + c_4e^{-x} + e^{3x}(c_5 \cos x + c_6 \sin x) + \\
 & e^{2x}(c_7 \cos x + c_8x \cos x + c_9x^x \cos x + c_{10} \sin x + c_{11}x \sin x + c_{12}x^2 \sin x)
 \end{aligned}$$

## Primer

*Neka su rešenja karakteristične jednačine neke homogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima*

$$\begin{aligned}
 k_1 = k_2 = k_3 &= 1, \\
 k_4 &= -1, \\
 k_5 &= 3 + i, \\
 k_6 &= 3 - i, \\
 k_7 = k_8 = k_9 &= 2 + i, \\
 k_{10} = k_{11} = k_{12} &= 2 - i.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(x) = & e^x(c_1 + c_2x + c_3x^2) + c_4e^{-x} + e^{3x}(c_5 \cos x + c_6 \sin x) + \\
 & e^{2x}(c_7 \cos x + c_8x \cos x + c_9x^x \cos x + c_{10} \sin x + c_{11}x \sin x + c_{12}x^2 \sin x)
 \end{aligned}$$

## Primer

*Neka su rešenja karakteristične jednačine neke homogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima*

$$\begin{aligned}
 k_1 = k_2 = k_3 &= 1, \\
 k_4 &= -1, \\
 k_5 &= 3 + i, \\
 k_6 &= 3 - i, \\
 k_7 = k_8 = k_9 &= 2 + i, \\
 k_{10} = k_{11} = k_{12} &= 2 - i.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(x) = & e^x(c_1 + c_2x + c_3x^2) + c_4e^{-x} + e^{3x}(c_5 \cos x + c_6 \sin x) + \\
 & e^{2x}(c_7 \cos x + c_8x \cos x + c_9x^x \cos x + c_{10} \sin x + c_{11}x \sin x + c_{12}x^2 \sin x)
 \end{aligned}$$

## Primer

*Neka su rešenja karakteristične jednačine neke homogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima*

$$\begin{aligned}
 k_1 = k_2 = k_3 &= 1, \\
 k_4 &= -1, \\
 k_5 &= 3 + i, \\
 k_6 &= 3 - i, \\
 k_7 = k_8 = k_9 &= 2 + i, \\
 k_{10} = k_{11} = k_{12} &= 2 - i.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(x) = & e^x(c_1 + c_2x + c_3x^2) + c_4e^{-x} + e^{3x}(c_5 \cos x + c_6 \sin x) + \\
 & e^{2x}(c_7 \cos x + c_8x \cos x + c_9x^x \cos x + c_{10} \sin x + c_{11}x \sin x + c_{12}x^2 \sin x)
 \end{aligned}$$

# Nehomogena linearna jednačina

## Teorema

*Neka je  $y_p(x)$  neko (partikularno) rešenje jednačine*

$$L_n[y] = f(x)$$

*i  $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$  opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine  $L_n[y] = 0$ .*

*Tada je*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

*opšte rešenje jednačine  $L_n[y] = f(x)$ .*

*Dokaz.*  $y(x)$  je rešenje jednačine  $L_n[y] = f(x)$  jer iz linearnosti operatora  $L_n[ \ ]$  sledi

$$\begin{aligned} L_n[y(x)] &= L_n[y_h(x) + y_p(x)] = L_n[y_h(x)] + L_n[y_p(x)] \\ &= 0 + f(x) = f(x) \end{aligned}$$

Pokažimo da ono sadrži svako rešenje koje zadovoljava početni uslov

$$y^{(i)}(x_0) = \alpha_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

(tj. svako **partikularno** rešenje), gde su  $\alpha_i$  proizvoljni realni brojevi,  $x_0 \in I$  proizvoljna tačka i  $y^{(0)}(x) = y(x)$  :

Neka je  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  fundamentalni skup rešenja jednačine  $L_n[y] = 0$ . Tada je njeno opšte rešenje

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x).$$

Neka su  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$  proizvoljni brojevi i  $h(x)$  rešenje jednačine  $L_n[y] = f(x)$  koje u proizvoljnoj tački  $x_0$  zadovoljava početni uslov

$$h(x_0) = \alpha_0, h'(x_0) = \alpha_1, \dots, h^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}.$$

Pokazaćemo da se u rešenju

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_p(x)$$

konstante mogu odrediti tako da i funkcija  $y(x)$  zadovoljava isti početni uslov.

Uvrštavajući početni uslov u rešenje

$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) + y_p(x)$  dobijamo sistem  $S$  algebarskih jednačina

$$\begin{array}{ccccccc} c_1y_1(x_0) & + c_2y_2(x_0) & + \cdots + c_ny_n(x_0) & = & \alpha_0 - y_p(x_0) \\ c_1y_1'(x_0) & + c_2y_2'(x_0) & + \cdots + c_ny_n'(x_0) & = & \alpha_1 - y_p'(x_0) \\ & & & & \vdots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0) & + c_2y_2^{(n-1)}(x_0) & + \cdots + c_ny_n^{(n-1)}(x_0) & = & \alpha_{n-1} - y_p^{(n-1)}(x_0) \end{array}$$

Determinanta sistema  $S$  je  $D_S = W(x_0) \neq 0$ , pa je sistem određen.

Dakle, rešenje  $g(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) + y_p(x)$ , gde je  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  rešenje sistema  $S$  zadovoljava isti početni uslov kao i  $h(x)$ .

Zbog jednoznačnosti rešenja početnog problema je  $g(x) = h(x)$  za svako  $x \in I$ . □



# Metod varijacije konstanti

## Teorema

*Neka je  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  fundamentalni skup rešenja jednačine  $L_n[y] = 0$  nad intervalom  $I$ . Tada je partikularno rešenje  $y_p(x)$  nehomogene jednačine  $L_n[y] = f(x)$  koje zadovoljava početni uslov  $y_p^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)} = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ , dato sa*

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^n y_i(x) \int_{x_0}^x \frac{W_i(s)}{W(s)} f(s) ds,$$

*gde je  $x_0 \in I$  proizvoljna tačka, a  $W_i(s)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , je determinanta koja se dobija kada se iz determinante Wronskog funkcija  $y_1(x), \dots, y_n(x)$   $i$ -ta kolona zameni sa  $\text{col}(0, 0, \dots, 1)$  dok su ostale kolone iste kao kod  $W(x)$ .*

*Dokaz.* Neka je  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  fundamentalni skup rešenja. Potrebno je odrediti funkcije  $c_1(x), \dots, c_n(x)$  tako da je

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)$$

partikularno rešenje nad intervalom  $I$  jednačine  $L_n[y] = f(x)$ .

Diferenciranjem obe strane i ako za prvi uslov za funkcije  $c_i(x)$  uzmemo

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + \dots + c_n'(x)y_n(x) = 0$$

dobijamo

$$y_p'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) + \dots + c_n(x)y_n'(x)$$

Ponovnim diferenciranjem poslednje jednakosti i ako za drugi uslov za funkcije  $c_i(x)$  uzmemo

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + \dots + c_n'(x)y_n'(x) = 0$$

dobijamo

$$y_p''(x) = c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x) + \dots + c_n(x)y_n''(x).$$

Nastavljajući ovaj postupak dobijamo

$$c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0,$$

$$y_p^{(n-1)}(x) = c_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n(x)y_n^{(n-1)}(x).$$

Sada je

$$\begin{aligned} y_p^{(n)}(x) &= c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) \\ &\quad + c_1(x)y_1^{(n)}(x) + c_2(x)y_2^{(n)}(x) + \cdots + c_n(x)y_n^{(n)}(x). \end{aligned}$$

## Kako funkcija

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x)$$

treba da bude rešenje jednačine  $L_n[y] = f(x)$ , zamenom

$y_p(x), y_p'(x), \dots, y_p^{(n)}(x)$  u tu jednačinu i vodeći računa da je  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  fundamentalni skup rešenja jednačine  $L_n[y] = 0$ , dobijamo

$$L_n[y_p(x)] \equiv \sum_{i=1}^n c_i(x) \underbrace{L_n[y_i(x)]}_0 + \sum_{i=1}^n c_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) = f(x),$$

odnosno

$$c_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x) y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) = f(x).$$

## Determinanta linearnog (algebarskog) sistema

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + \cdots + c_n'(x)y_n(x) = 0$$

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + \cdots + c_n'(x)y_n'(x) = 0$$

$$\vdots$$

$$c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x)$$

je  $W(x) \neq 0$  jer su rešenja  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  jednačine  $L_n[y] = 0$  po pretpostavci linearno nezavisna. Rešavanjem po  $c_i'(x)$  dobija se

$$c_i'(x) = \frac{D_{C_i}}{D} = \frac{W_i(x)f(x)}{W(x)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Integracijom nad intervalom  $(x_0, x)$  za  $x > x_0$  (tj.  $(x, x_0)$  za  $x < x_0$ ) sledi da je

$$c_i(x) = \int_{x_0}^x \frac{W_i(s)}{W(s)} f(s) ds, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

čijom zamenom u obrazac za  $y_p(x)$  dobijamo da je partikularno rešenje

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^n y_i(x) \int_{x_0}^x \frac{W_i(s)}{W(s)} f(s) ds.$$



Na primer, za  $n = 2$  sistem za određivanje funkcija  $c_i$  glasi

$$\begin{aligned}c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) &= 0 \\c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) &= f(x),\end{aligned}$$

dok je za  $n = 3$  odgovarajući sistem

$$\begin{aligned}c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_3'(x)y_3(x) &= 0 \\c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_3'(x)y_3'(x) &= 0 \\c_1'(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2''(x) + c_3'(x)y_3''(x) &= f(x)\end{aligned}$$

## Primer

Naći opšte rešenje jednačine  $y''' - y'' = e^x$ .

$$y''' - y'' = 0 \Rightarrow k^3 - k^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 0, k_3 = 1$$

$$\Rightarrow y_h(x) = c_1 + c_2x + c_3e^x$$

Metodom varijacije konstanti dobijamo sistem

$$\begin{aligned} c_1'(x) + c_2'(x)x + c_3'(x)e^x &= 0 \\ c_2'(x) + c_3'(x)e^x &= 0 \\ c_3'(x)e^x &= e^x \end{aligned}$$

čijim rešavanjem i integracijom rešenja dobijamo

$$\begin{aligned} c_3'(x) &= 1 & \Rightarrow c_3(x) &= x + C_3 \\ c_2'(x) &= -c_3'(x)e^x = -e^x & \Rightarrow c_2(x) &= -e^x + C_2 \\ c_1'(x) &= -c_2'(x)x - c_3'(x)e^x = (x-1)e^x & \Rightarrow c_1(x) &= (x-2)e^x + C_1 \end{aligned}$$

Jedno partikularno rešenje nehomogene jednačine je

$$y_p(x) = (x-2)e^x$$

pa je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 + c_2x + c_3e^x + (x-2)e^x.$$



## Metod jednakih koeficijenata

Ako je jednačina linearna sa konstantnim koeficijentima oblika

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x)$$

gde je funkcija  $f(x)$  specijalnog oblika

$$f(x) = e^{\alpha x} (P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x),$$

partikularno rešenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = x^r e^{\alpha x} (T_k(x) \cos \beta x + R_k(x) \sin \beta x)$$

pri čemu je

- ▶  $k = \max\{n, m\}$ ,  $n = \deg P(x)$ ,  $m = \deg Q(x)$ , ako su oba polinoma različita od nula polinoma (ako je  $P(x)$  nula polinom onda je  $k = m$ , a ako je  $Q(x)$  nula polinom onda je  $k = n$ )
- ▶  $r$  je višestrukost  $\alpha + i\beta$  kao korena karakteristične jednačine odgovarajuće homogene jednačine

**Korisna je činjenica:** ako je

$$L_n[y] = f_1(x) + f_2(x)$$

i ako je

$y_1(x)$  partikularno rešenje jednačine  $L_n[y] = f_1(x)$  nad  $I$ ,

$y_2(x)$  partikularno rešenje jednačine  $L_n[y] = f_2(x)$  nad  $I$ ,

tada je

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

nad intervalom  $I$  partikularno rešenje jednačine

$$L_n[y] = f_1(x) + f_2(x)$$

## Primer

Odrediti opšte rešenja jednačine  $y''' - y'' = e^x + \sin x + x$ .

Rešenje. Opšte rešenje homogenog dela jednačine je

$$y_h(x) = c_1 + c_2x + c_3e^x.$$

Jedno partikularno rešenje jednačine  $y''' - y'' = e^x$  je

$$y_{p1}(x) = xe^x.$$

Jedno partikularno rešenje jednačine  $y''' - y'' = \sin x$  je

$$y_{p2}(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x).$$

Jedno partikularno rešenje jednačine  $y''' - y'' = x$  je

$$y_{p3}(x) = -\frac{1}{6}x^2(x + 3).$$

Opšte rešenje je

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^x + xe^x + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) - \frac{1}{6}x^2(x + 3).$$

# Ojlerova jednačina

Ojlerova jednačina je oblika

$$(ax + b)^n y^{(n)} + a_1(ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(ax + b)y' + a_n y = f(x)$$

gde su  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  konstante i smenom

$$ax + b = e^t, ax + b > 0 \quad (ax + b = -e^t, ax + b < 0)$$

svodi se na jednačinu sa konstantnim koeficijentima.

## Primer

Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$x^3 y''' + x^2 y'' + 3xy - 8y = 0.$$

Za  $x > 0$  smenom

$$x = e^t \Rightarrow y'_x = y'_t t'_x = \frac{1}{x} y'_t,$$

$$y''_x = -\frac{1}{x^2} y'_t + \frac{1}{x^2} y''_t = \frac{1}{x^2} (y''_t - y'_t)$$

$$y'''_x = -\frac{2}{x^3} (y''_t - y'_t) + \frac{1}{x^3} (y'''_t - y''_t) = \frac{1}{x^3} (y'''_t - 3y''_t + 2y'_t)$$

dobija se linearna diferencijalna jednačina  $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$ . čija karakteristična jednačina  $r^3 - 2r^2 + 4r - 8 = 0$  ima korene  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 2i$ ,

$r_3 = -2i$  pa je njen fundamentalni skup rešenja  $\{e^{2t}, \sin 2t, \cos 2t\}$  tako da je fundamentalni skup rešenja Ojlerove jednačine

$\{x^2, \sin(2 \ln |x|), \cos(2 \ln |x|)\}$ ,  $x \neq 0$

pa je opšte rešenje  $y = c_1 x^2 + c_2 \sin(2 \ln |x|) + c_3 \cos(2 \ln |x|)$ .

# Brojni redovi - osnovne definicije i teoreme

Neka je  $\{a_n\}$  niz realnih (kompleksnih) brojeva.

## Definicija

*Brojni red* u prostoru realnih (kompleksnih) brojeva je uređen par  $(\{a_n\}, \{s_k\})$  koji se sastoji od dva niza

$$\{a_n\}, \quad a_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C}),$$

$$\{s_k\}, \quad s_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

za koje važi

$$s_k = \sum_{n=1}^k a_n, \quad s_{k+1} = s_k + a_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Elementi  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  su članovi reda, a  $\{s_k\}$  je niz parcijalnih suma. Red se kraće označava sa  $\sum a_n$  ili  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ .

## Primer

Posmatrajmo geometrijski niz  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots$  u skupu  $\mathbb{R}$ .

$$s_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2^n}, k \in \mathbb{N}.$$

Za fiksiran prirodan broj  $k \in \mathbb{N}$  je  $s_k = \frac{1 - \frac{1}{2^k}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$ .

Kolika je suma svih članova niza (šta se događa kada  $k \rightarrow \infty$ )?

Prirodna ideja je da je ta suma jednaka  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k$ , ako on postoji.

U ovom primeru,  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 2$ .

## Definicija

Brojni red  $\sum a_n$  je *konvergentan* ako i samo ako je niz parcijalnih suma  $\{s_k\}$  konvergentan, tj. ako postoji konačan broj  $s \in \mathbb{R}$  tako da je

$$s = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k.$$

Broj  $s$  je *limes (zbir)* reda  $\sum a_n$ , što kraće zapisujemo

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Nalaženje sume  $s$  nazivamo *sumiranje* reda.

Za red koji ne konvergira kažemo da *divergira*.



## Elementarne osobine redova:

- ▶ Članovi reda ne moraju biti numerisani od 1.

Ako numeracija kreće od 0, red označavamo sa

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n, \quad \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Ako numeracija kreće od  $p \in \mathbb{N}$ , red označavamo sa

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_p} a_n, \quad \mathbb{N}_p = \{n \in \mathbb{N} | n \geq p\}$$

i tada, ako je red konvergentan, sumu zapisujemo  $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ .

- ▶ konačno mnogo članova reda ne utiče na njegovu konvergenciju, tj. ako red  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  konvergira, tada i red  $\sum_{n \in \mathbb{N}_p} a_n$  konvergira i važi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{p-1} a_n + \sum_{n=p}^{\infty} a_n.$$

- ▶ Redovi  $\sum a_n$  i  $\sum \lambda a_n$  oba istovremeno konvergiraju ili divergiraju za  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ .
- ▶ Ako redovi  $\sum a_n$  i  $\sum b_n$  oba konvergiraju (numeracija je od istog indeksa!), tada i red  $\sum (a_n + b_n)$  konvergira.
- ▶ Ako red  $\sum a_n$  konvergira, a red  $\sum b_n$  divergira, tada red  $\sum (a_n + b_n)$  divergira.
- ▶ Ako redovi  $\sum a_n$  i  $\sum b_n$  oba divergiraju, tada red  $\sum (a_n + b_n)$  može i da konvergira i da divergira.

**Košijev kriterijum konvergencije** - omogućuje ispitivanje konvergencije reda bez poznavanja njegove sume.

## Tvrđenje

Brojni red  $\sum a_n$  konvergira ako i samo ako za svako  $\varepsilon > 0$  postoji  $k_0 \in \mathbb{N}$  tako da za sve  $p \in \mathbb{N}$  i sve  $k \in \mathbb{N}$  važi implikacija

$$k \geq k_0 \implies \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon.$$

*Dokaz.* Red je konvergentan ako i samo ako je niz njegovih parcijalnih suma konvergentan, što je ekvivalentno tome da je niz parcijalnih suma Košijev, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N}) \quad k \geq k_0 \implies |s_{k+p} - s_k| < \varepsilon,$$

$$\text{gde je } |s_{k+p} - s_k| = \left| \sum_{n=1}^{k+p} a_n - \sum_{n=1}^k a_n \right| = \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon,$$

što je i trebalo pokazati. □

Potreban uslov za konvergenciju brojnog reda:

## Tvrđenje

Ako brojni red  $\sum a_n$  konvergira, tada je  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ .

Dokaz. Sledi iz prethodne teoreme, za  $p = 1$ .

Primer da ovaj uslov nije i dovoljan za konvergenciju:

## Primer

Za harmonijski red  $\sum \frac{1}{n}$  važi da je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , a red je divergentan jer za proizvoljno  $k_0 \in \mathbb{N}$  važi

$$|s_{2k_0} - s_{k_0}| = \left| \sum_{n=k_0+1}^{2k_0} \frac{1}{n} \right| = \left| \frac{1}{k_0+1} + \frac{1}{k_0+2} + \cdots + \frac{1}{2k_0} \right| \geq \frac{k_0}{2k_0} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4},$$

tj. postoji  $\varepsilon > 0$  ( $\varepsilon = \frac{1}{4}$ ) tako da za svako  $k_0 \in \mathbb{N}$  postoje

$$k, p \in \mathbb{N}, k \geq k_0 \text{ (} k = p = k_0 \text{)} \text{ takvi da je } \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} \frac{1}{n} \right| \geq \varepsilon.$$

## Redovi sa pozitivnim članovima

Ako je  $a_n \in \mathbb{R}$  i  $a_n \geq 0$ , za sve  $n \in \mathbb{N}$  tada je uobičajen naziv za red  $\sum a_n$  **red sa pozitivnim članovima**.

### Tvrđenje

*Red  $\sum a_n$  sa pozitivnim članovima konvergira ako i samo ako je niz parcijalnih suma ograničen od gore.*

*Dokaz.* Kako je  $s_k = \sum_{n=1}^k a_n$  i  $a_{k+1} \geq 0$ , to je

$$s_{k+1} = s_k + a_{k+1} \geq s_k,$$

tj. niz parcijalnih suma  $\{s_k\}$  je monotono neopadajući niz, te je po principu monotonije konvergentan ako i samo ako je ograničen od gore.  $\square$

## Kriterijumi konvergencije redova sa pozitivnim članovima:

### I) Uporedni kriterijum

Neka su  $\sum a_n$  i  $\sum b_n$  redovi sa pozitivnim članovima.

1. Ako postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  takvo da je  $a_n \leq b_n$  za svako  $n \geq n_0$ , tada

▶  $\sum b_n$  konvergira  $\Rightarrow \sum a_n$  konvergira

▶  $\sum a_n$  divergira  $\Rightarrow \sum b_n$  divergira

2. Ako članovi reda  $\sum a_n$  i  $\sum b_n$  zadovoljavaju uslov  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$ ,  
 $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda \neq \infty$ , (tj.  $a_n \sim \lambda b_n$  kad  $n \rightarrow \infty$ ), tada redovi  $\sum a_n$  i  $\sum b_n$   
istovremeno konvergiraju ili divergiraju.

## II) Korenski (Košijev) kriterijum

Neka je  $\sum a_n$  red sa pozitivnim članovima.

- ▶ Ako postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  i  $q \in (0, 1)$  tako da za sve  $n > n_0$  važi da je  $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ , tj.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$  tada red  $\sum a_n$  konvergira.
- ▶ Ako za beskonačan skup prirodnih brojeva  $n$  važi da je  $\sqrt[n]{a_n} > 1$ , tj.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ , tada je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , pa red  $\sum a_n$  divergira.
- ▶ Ako je  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$  kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji.

### Napomena

Ako je  $\{\sqrt[n]{a_n}\}$  konvergentan niz onda je  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$  i red  $\sum a_n$  konvergira ako  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$  a divergira ako je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ .

## II) Korenski (Košijev) kriterijum

Neka je  $\sum a_n$  red sa pozitivnim članovima.

- ▶ Ako postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  i  $q \in (0, 1)$  tako da za sve  $n > n_0$  važi da je  $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ , tj.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$  tada red  $\sum a_n$  konvergira.
- ▶ Ako za beskonačan skup prirodnih brojeva  $n$  važi da je  $\sqrt[n]{a_n} > 1$ , tj.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ , tada je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , pa red  $\sum a_n$  divergira.
- ▶ Ako je  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$  kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji.

### Napomena

Ako je  $\{\sqrt[n]{a_n}\}$  konvergentan niz onda je  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$  i red  $\sum a_n$  konvergira ako  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$  a divergira ako je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ .



### III) Količnički (D'alamberov) kriterijum

Neka je  $\sum a_n$  red sa pozitivnim članovima.

- ▶ Ako postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  i  $q \in (0, 1)$  tako da za sve  $n > n_0$  važi da je  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ , tj.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$  tada red  $\sum a_n$  konvergira.
- ▶ Ako postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  i  $Q > 1$  tako da za sve  $n > n_0$  važi da je  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq Q$ , tj.  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  tada red  $\sum a_n$  divergira.
- ▶ Ako je  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji.

#### Napomena

Ako  $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}$  konvergira, važi  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ .

Tada  $\sum a_n$  konvergira za  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ , a divergira za  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ .

### III) Količnički (D'alamberov) kriterijum

Neka je  $\sum a_n$  red sa pozitivnim članovima.

- ▶ Ako postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  i  $q \in (0, 1)$  tako da za sve  $n > n_0$  važi da je  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ , tj.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$  tada red  $\sum a_n$  konvergira.
- ▶ Ako postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  i  $Q > 1$  tako da za sve  $n > n_0$  važi da je  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq Q$ , tj.  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  tada red  $\sum a_n$  divergira.
- ▶ Ako je  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji.

### Napomena

Ako  $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$  konvergira, važi  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ .

Tada  $\sum a_n$  konvergira za  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ , a divergira za  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ .

## Napomena

*Može se pokazati da za niz  $\{a_n\}$  nenegativnih brojeva važi*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

*što znači da je korenski kriterijum precizniji:*

- *ako količnički kriterijum pokaže konvergenciju (divergenciju) reda, korenski kriterijum će tada pokazati isto,*
- *ako količnički kriterijum ne može da da odgovor o prirodi reda, može da se desi da na osnovu korenskog kriterijuma odredimo da li red konvergira ili ne.*

## IV) Integralni kriterijum

Neka je  $\sum a_n = \sum f(n)$  red sa pozitivnim članovima takav da funkcija  $f$  zadovoljava uslove:

- ▶ postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  takvo da je  $f$  definisano za sve  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \geq n_0$
- ▶  $f(x) \geq 0$ ,  $f$  je monotono opadajuća funkcija nad  $[n_0, \infty)$  i  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

Tada red  $\sum a_n$  konvergira ako i samo ako nesvojstveni integral  $\int_{[n_0, \infty)} f(x) dx$  konvergira.

# Primeri

## Primer

Pomoću integralnog kriterijuma ispitati konvergenciju reda  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  u zavisnosti od vrednosti parametra  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Rešenje.

- za  $\alpha = 1$  red divergira (harmonijski)
- za  $\alpha \leq 0$  red divergira (član reda  $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$  ne teži 0)
- za  $\alpha > 0$  funkcija  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$  zadovoljava uslove za primenu integralnog kriterijuma: kako nesvojstveni integral

$$\int_{[1, \infty)} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{T^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \right) & , \quad \alpha \neq 1 \\ \lim_{T \rightarrow \infty} (\ln T - 0) & , \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

konvergira za  $\alpha > 1$ , a divergira za  $\alpha \leq 1$ , to i red  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  konvergira za  $\alpha > 1$ , a divergira za  $\alpha \leq 1$ .

## Primer

Ispitati konvergenciju redova 1)  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2 + 2}{n^4 - 2n + 1}$ , 2)  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ .

Rešenje.

1) Koristićemo uporedni kriterijum:

$$\frac{n^2 + 2}{n^4 - 2n + 1} \sim \frac{1}{n^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$  konvergira ( $\alpha = 2 > 1$ ), pa i red  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2 + 2}{n^4 - 2n + 1}$  konvergira.

2)  $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, \quad \alpha = \frac{3}{2} > 1,$  pa red konvergira.

## Primer

Ispitati konvergenciju reda  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(n!)^2}{2n!}$ .

Rešenje.

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(n!)^2}{(2n)!} &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n! \cdot n!}{2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n! \cdot n!}{2^n \cdot n! \cdot (2n-1)!!} < \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n}, \end{aligned}$$

jer je  $\frac{n!}{(2n-1)!!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1} < 1$ ,

a (geometrijski) red  $\sum \frac{1}{2^n}$  konvergira, pa po prvom uporednom

kriterijumu konvergira i "manji" red  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(n!)^2}{2n!}$ .

## Primer

Ispitati konvergenciju reda  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sqrt{2} + (-1)^n}{2^n}$ .

Rešenje.

Korenski kriterijum: Kako je

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{2} + (-1)^n}{2^n}} = \frac{1}{2} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{2} + (-1)^n} = \frac{1}{2},$$

to dati red konvergira.

Količnički kriterijum ne daje odgovor da li dati red konvergira:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{\sqrt{2} + (-1)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{\sqrt{2} + (-1)^n}{2^n}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} + (-1)^{n+1}}{\sqrt{2} + (-1)^n}$$

ima dve tačke nagomilavanja, pri čemu je

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 < \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$



## Alternativni redovi

- Red  $\sum a_n$  u prostoru  $\mathbb{R}$  je **alternativan** ako je za svako  $n \in \mathbb{N}$

$$a_{2n-1} \geq 0, \quad a_{2n} \leq 0.$$

- neka je za svako  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b_n = |a_n|$ , tada je

$$\sum a_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots$$

### Primer

Red  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  je alternativni red, a odgovarajući niz  $\{b_n\}$  je niz  $\{\frac{1}{n}\}$ .

Lajbnicov kriterijum konvergencije alternativnih redova:

### Tvrđenje

Neka je  $\sum a_n$  alternativan red u  $\mathbb{R}$ . Ako je niz  $\{b_n\} = \{|a_n|\}$  monotono nerastući i  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , tada red  $\sum a_n$  konvergira.

Ako niz  $\{|a_n|\}$  alternativnog reda  $\sum a_n$  teži 0, ali ne monotono, tada red  $\sum a_n$  može, ali ne mora da konvergira.

### Primer

Za red  $\sum a_n$  dat sa  $\sum a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3^4} + \dots$  važi da  $|a_n|$  teži 0, ali ne monotono. Pri tome je

$$\sum a_n = \sum b_n + \sum c_n,$$

gde je

$$\sum b_n = \sum_{n \in \mathbb{N}_2} \frac{1}{n}, \quad \sum c_n = \sum_{n \in \mathbb{N}_2} \frac{-1}{3^n}.$$

$\sum c_n$  je konvergentan, a  $\sum b_n$  divergentan, pa je  $\sum a_n$  divergentan.

## Približno izračunavanje sume alternativnog reda:

Može se pokazati da ako sumu  $s$  alternativnog reda zamenimo parcijalnom sumom  $s_k$ , pravimo grešku koja je manja od člana  $b_{k+1}$ , tj.

$$|s - s_k| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n - \sum_{n=1}^k (-1)^{n+1} b_n \right| \leq b_{k+1}.$$

Prvi odbačeni član predstavlja gornju granicu greške.

## Apsolutno konvergentni redovi

- ▶ Ako red  $\sum |a_n|$  konvergira tada red  $\sum a_n$  **konvergira apsolutno**.
- ▶ Red koji konvergira ali ne konvergira apsolutno, **konvergira uslovno**.

### Primer

Red  $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$  *apsolutno konvergira*, jer red  $\sum \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum \frac{1}{n^2}$  konvergira ( $\alpha = 2 > 1$ ).

### Primer

Red  $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  (*alternativni harmonijski red*) konvergira, ali red  $\sum \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum \frac{1}{n}$  divergira, što znači da red  $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  konvergira uslovno.

## Tvrđenje

Ako je brojni red  $\sum a_n$  apsolutno konvergentan tada je on i konvergentan i važi

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

## Tvrđenje

Neka je  $\sum \alpha_n$  brojni red i neka je  $\sum a_n$  red u  $\mathbb{R}$  sa pozitivnim članovima,  $a_n \geq 0$ , tako da važi  $|\alpha_n| \leq a_n$  za svako  $n \in \mathbb{N}$ . Ako red  $\sum a_n$  konvergira u  $\mathbb{R}$  tada red  $\sum \alpha_n$  apsolutno konvergira i važi

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

## Kriterijumi konvergencije apsolutno konvergentnih redova:

### 1. Korenski kriterijum

- ▶  $\sum a_n$  konvergira apsolutno ako je  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ .
- ▶  $\sum a_n$  divergira ako je  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ .
- ▶ nema odgovora ako je  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ .

### 2. Količnički (D'alamberov) kriterijum

- ▶  $\sum a_n$  konvergira apsolutno ako je  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ .
- ▶  $\sum a_n$  divergira ako je  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$ .
- ▶ nema odgovora ako je  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq 1 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ .

**Komutativni i asocijativni zakon za redove:**

Neka je  $a_1, a_2, \dots$  beskonačan brojni niz i  $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  jedna permutacija skupa prirodnih brojeva. Niz  $a_{p(1)}, a_{p(2)}, \dots$  sastoji se od istih članova kao početni niz, ali je redosled drugačiji.

- ▶ Ako je  $\sum a_n$  apsolutno konvergentan brojni red, tada je i  $\sum a_{p(n)}$  apsolutno konvergentan brojni red, pri čemu važi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}.$$

- ▶ Ako je  $\sum a_n$  apsolutno konvergentan brojni red i  $\mathbb{N}_1$  i  $\mathbb{N}_2$  neprazni, disjunktni podskupovi od  $\mathbb{N}$ , tako da je  $\mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 = \mathbb{N}$  tada su i  $\sum_{n \in \mathbb{N}_1} a_n$  i  $\sum_{n \in \mathbb{N}_2} a_n$  apsolutno konvergentni i važi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n \in \mathbb{N}_1} a_n + \sum_{n \in \mathbb{N}_2} a_n$$

# Operacije sa redovima

Ako su  $\sum a_n$ ,  $\sum b_n$  konvergentni redovi i  $c \in \mathbb{R}$  ili  $\mathbb{C}$  tada su redovi  $\sum(a_n + b_n)$  i  $\sum ca_n$  konvergentni i važi

- ▶ za sabiranje redova:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) + \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right)$$

- ▶ za množenje reda skalarom:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)$$



(Košijev) proizvod redova  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  i  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  je red  $\sum \xi_n$  čiji su članovi

$$\xi_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}, \quad \text{tj.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)$$

Ako su redovi  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  i  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  apsolutno konvergentni, tada je i njihov proizvod apsolutno konvergentan i važi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)$$

### Primer

Red  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$  konvergira (ali ne apsolutno).

Red  $\left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right)^2$  ne konvergira.