UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA

Tatjana Grbić Ljubo Nedović

Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz verovatnoće, statistike i slučajnih procesa

Novi Sad, 2001. god.

Naslov:	Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz verovatnoće, statistike i slučajnih procesa
Autori:	mr Tatjana Grbić, asistent na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu Ljubo Nedović, asistent na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu
Recenzenti:	dr Mila Stojaković, redovni profesor na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu dr Jovan Mališić, redovni profesor na Matematičkom fakultetu u Beogradu dr Zorana Lužanin, docent na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu mr Dragan Đorić, asistent na Fakultetu organizacionih nauka u Beogradu mr Emilija Nikolić Đorić, asistent na Poljoprivrednom fakultetu u Novom Sadu mr Zoran Ovcin, asistent na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu
Kompjuterski slog:	Ljubo Nedović
Izdavač:	Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad
Tiraž:	100 primeraka

Predgovor

"Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz verovatnoće, statistike i slučajnih procesa" sadrži zadatke sa ispita "Slučajni procesi" iz perioda januar 1999. - oktobar 2001. godine koji su održani na elektrotehničkom odseku Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu. Svaki rok sadrži 6-9 zadataka u zavisnosti od važećeg plana i programa.
Ova Zbirka namenjena je prvenstveno studentima elektrotehničkog odseka Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu, gde se verovatnoća, statistika i slučajni procesi predaju na drugoj (smer računarstvo) i trećoj (smer telekomunikacije) godini studija. Pored toga Zbirka se preporučuje i studentima saobraćajnog odseka koji na drugoj godini studija u okviru predmeta "Matematička statistika"izučavaju oblasti obrađene u ovoj zbirci. Autori se nadaju da će je sa uspehom koristiti i studenti ostalih odseka Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu, kao i studenti drugih fakulteta koji izučavaju osnove verovatnoće, statistike i slučajnih procesa. Zbirku preporučujemo i talentovanim srednjoškolcima koji u četvrtom razredu izučavaju verovatnoću i statistiku.
U Zbirci smo koristili definicije i oznake kao u knjizi "Slučajni procesi" Mile Stojaković. Takođe su za testiranje hipoteza, intervale poverenja i centralnu graničnu teoremu korišćene tablice iz iste knjige.
U toku 1999. godine u predlaganju nekih zadataka je učestvovao Zoran Ovcin, te mu se ovom prilikom zahvaljujemo.
Zahvaljujemo se recenzentima Stojaković dr Mili , Mališić dr Jovanu, Lužanin dr Zorani , Đorić mr Draganu , Nikolić Đorić mr Emiliji i Ovcin mr Zoranu na veoma korisnim sugestijama koje su doprinele poboljšanju ove Zbirke.
Unapred se zahvaljujemo svima koji čitajući ovaj tekst ukažu na eventualne greške, koje bismo otklonili u narednom izdanju Zbirke.
Finansijsku pomoć za izdavanje Zbirke pružili su: "Vista king" (Novi Sad), "Pagal" (Ratkovo), "Sitoplast" (Ratkovo) i "Tehnopromet Gero"(Ratkovo), te im se i ovom prilikom zahvaljujemo.

Novi Sad, decembar 2001. Autori

11.01.1999.

1. Aparat sadrži 4 procesora tako da su svaka dva direktno povezana. Verovatnoća neispravnosti svake veze je p ($p \in (0,1)$) nezavisno od ispravnosti ostalih veza. Aparat je ispravan ako i samo ako postoji direktna ili posredna veza između svaka dva procesora. Naći verovatnoću ispravnosti aparata.

2. Igrač baca homogenu kocku sa numerisanim stranama sve do prve pojave broja deljivog sa 3. Ako se broj deljiv sa 3 prvi put pojavi u neparnom po redu bacanju, igrač dobije m dinara, a inače gubi n dinara. Neka slučajna promenljiva X predstavlja dobitak (odnosno gubitak) igrača u dinarima. Odrediti vezu između parametara m i n tako da očekivani dobitak igrača (matematičko očekivanje slučajne promenljive X) bude nula.

3. Data je slučajna promenljiva X sa uniformnom $\mathcal{U}(1,4)$ raspodelom. Naći raspodelu slučajne promenljive (Y,Z), gde je $Y = X^2 - 1$ i $Z = e^X - 2$.

4. Slučajna promenljiva X predstavlja broj automobila koji prolaze kroz neku posmatranu raskrsnicu tokom jednog minuta ima (u svakoj minuti) Poasonovu raspodelu sa parametrom $\lambda = 30$.
   (a) Naći verovatnoću da tokom 20 minuta kroz raskrsnicu prođe najmanje 200 automobila.
   (b) Odrediti maksimalnu vrednost broja m takvog da sa verovatnoćom većom od 0.9 broj automobila koji za 20 minuta prolaze kroz raskrsnicu bude bar m.

5. Dat je homogen lanac Markova čiji je skup mogućih stanja S prebrojiv ($S = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$). Verovatnoće prelaza su definisane na sledeći način:
$$\begin{aligned} \mathsf{P}(X_{n+1} = a_1 \mid X_n = a_i) &= \tfrac{1}{3}, \\ \mathsf{P}(X_{n+1} = a_{i+1} \mid X_n = a_i) &= \tfrac{2}{3}, \\ \mathsf{P}(X_{n+1} = a_j \mid X_n = a_i) &= 0, \quad j \notin \{1, i+1\}, \end{aligned}$$
gde $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}$. Neka su početne verovatnoće zadate sa
$$\mathsf{P}(X_1 = a_1) = 1 \qquad (\text{odnosno } \mathbf{p}_1 = [1, 0, 0, \dots]).$$
   (a) Naći verovatnoće stanja za $n = 3$ (tj. raspodelu za X_3).
   (b) Naći matricu prelaza P za jedan korak.
   (c) Naći finalne verovatnoće.

6. Slučajna promenljiva X ima raspodelu $\mathcal{U}(0,b)$, $b > 0$. Na osnovu prostog uzorka obima n dobijena je ocena $\hat{b} = 2\overline{X}_n$.
   (a) Ispitati da li je navedena ocena centrirana.
   (b) Ispitati postojanost (stabilnost) ocene.

Rešenja:

1. U aparatu ima ukupno $\binom{4}{2} = 6$ direktnih veza. Posmatrajmo sledeće događaje i njihove verovatnoće:

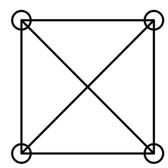
   A_0 - "*svih* 6 *veza su ispravne*", sledi $\mathsf{P}(A_0) = (1-p)^6$,

   A_1 - "*neispravna je tačno jedna (bilo koja) veza*"; pošto veza ima 6, sledi $\mathsf{P}(A_1) = 6p(1-p)^5$,

   A_2 - "*neispravne su tačno dve (bilo koje) veze*"; pošto parova veza ima $\binom{6}{2} = 15$, sledi $\mathsf{P}(A_2) = 15p^2(1-p)^4$,

   A_3 - "*neispravne su tačno* 3 *veze pri čemu ne pripadaju sve tri jednom procesoru*"; pošto ovakvih trojki veza među procesorima ima $\binom{6}{3} - 4 = 16$, sledi $\mathsf{P}(A_3) = 16p^3(1-p)^3$,

   A - "*aparat je ispravan*".

   Događaji A_i, $i \in \{0,1,2,3\}$ su disjunktni između sebe i pri tome je $A = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$ pa je:

   $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A_0 + A_1 + A_2 + A_3) = \mathsf{P}(A_0) + \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2) + \mathsf{P}(A_3) =$

   $= (1-p)^3\left((1-p)^3 + 6p(1-p)^2 + 15p^2(1-p) + 16p^3\right) =$

   $= 1 - 4p^3 - 3p^4 + 12p^5 - 6p^6.$

2. Slučajna promenljiva X ima zakon raspodele $X : \begin{pmatrix} -n & m \\ p & q \end{pmatrix}$, gde je p verovatnoća da je broj deljiv sa 3 prvi put pao u parnom bacanju, a $q = 1-p$ je verovatnoća da je broj deljiv sa 3 prvi put pao u neparnom bacanju. Ako sa A_i $(i \in \mathbb{N})$ označimo događaj koji se realizuje kada pri i-tom bacanju kocke padne broj deljiv sa 3 (dakle, 3 ili 6), tada je $\mathsf{P}(A)_i = \frac{1}{3}$ i $\mathsf{P}(\overline{A}_i) = \frac{2}{3}$ odakle sledi

   $p = \mathsf{P}(X = -n) = \mathsf{P}\left(\overline{A}_1 A_2 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 A_4 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5 A_6 + \ldots\right) =$

   $\stackrel{[1]}{=} \mathsf{P}\left(\overline{A}_1 A_2\right) + \mathsf{P}\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 A_4\right) + \mathsf{P}\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5 A_6\right) + \ldots =$

   $\stackrel{[2]}{=} \mathsf{P}\left(\overline{A}_1\right)\mathsf{P}(A_2) + \mathsf{P}\left(\overline{A}_1\right)\mathsf{P}\left(\overline{A}_2\right)\mathsf{P}\left(\overline{A}_3\right)\mathsf{P}(A_4) +$

   $+\mathsf{P}\left(\overline{A}_1\right)\mathsf{P}\left(\overline{A}_2\right)\mathsf{P}\left(\overline{A}_3\right)\mathsf{P}\left(\overline{A}_4\right)\mathsf{P}\left(\overline{A}_5\right)\mathsf{P}(A_6) + \ldots =$

   $= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \ldots$

   $= \frac{2}{9}\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{2}{5}.$

   [1] - *Koristimo disjunktnost događaja.*

[2] - *Koristimo nezavisnost događaja A_i.*

Odatle je $q = \mathsf{P}(X = m) = 1 - p = \frac{3}{5}$.

Sada dobijamo $\mathsf{E}(X) = -n\frac{2}{5} + m\frac{3}{5}$ pa je $\mathsf{E}(X) = 0$ za $-2n + 3m = 0$ odnosno $n = \frac{3}{2}m$. Dakle, očekivani dobitak (gubitak) igrača je jednak nuli za $(m,n) \in \left\{ \left(k, \frac{3}{2}k\right) \;\middle|\; k \in (0,\infty) \right\}$.

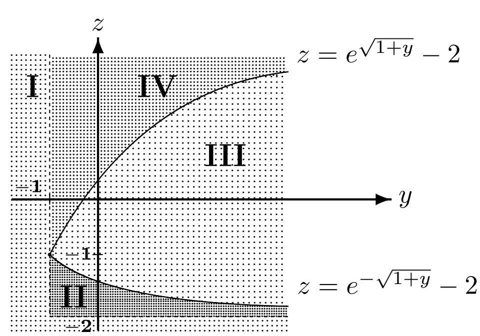
3. $X : \mathcal{U}(1,4)$ znači da je

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & , \quad x \in (1,4) \\ 0 & , \quad x \notin (1,4) \end{cases} \qquad \text{i} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le 1 \\ \frac{x-1}{3} & , \quad x \in (1,4] \\ 1 & , \quad x > 4 \end{cases}.$$

Sledi da je:

$F_{Y,Z}(y,z) = \mathsf{P}(Y < y\ ,\ Z < z) = \mathsf{P}\left(X^2 - 1 < y\ ,\ e^X - 2 < z\right) =$
$= \mathsf{P}\left(X^2 < 1 + y\ ,\ e^X < 2 + z\right) = \ldots$

Događaj $X^2 < 1 + y$ je nemoguć za $1 + y \le 0$, a za $1 + y > 0$ je ekvivalentan sa $-\sqrt{1+y} < X < \sqrt{1+y}$. Događaj $e^X < 2 + z$ je nemoguć za $2 + z \le 0$, a za $2 + z > 0$ je ekvivalentan sa $X < \ln(2+z)$. Na osnovu navedenog dobijamo sledeće slučajeve i odgovarajuće oblasti prikazane na slici:



(a) Za $y \le -1$ ili $z \le -2$ (oblast I sa slike) je
$F_{Y,Z}(y,z) = 0$.

(b) Za $y > -1$ i $z > -2$ je
$F_{Y,Z}(y,z) = \mathsf{P}\left(-\sqrt{1+y} < X < \sqrt{1+y}\ ,\ X < \ln(2+z)\right) =$
$= \mathsf{P}\left(-\sqrt{1+y} < X < \min\left\{\sqrt{1+y}, \ln(2+z)\right\}\right) = \ldots$

(b.1) ako je $\ln(2+z) \le -\sqrt{1+y}$, odnosno $z \le e^{-\sqrt{1+y}} - 2$ (oblast II sa slike), tada je
$F_{Y,Z}(y,z) = \mathsf{P}(\emptyset) = 0$.

(b.2) ako je $-\sqrt{1+y} < \ln(2+z) < \sqrt{1+y}$, odnosno
$e^{-\sqrt{1+y}} - 2 < z < e^{\sqrt{1+y}} - 2$ (oblast III sa slike), tada je
$F_{Y,Z}(y,z) = \mathsf{P}\left(-\sqrt{1+y} < X < \ln(2+z)\right) =$

$$= F_X\left(\ln(2+z)\right) - F_X\left(-\sqrt{1+y}\right) = F_X\left(\ln(2+z)\right) - 0 =$$

$$= \begin{cases} 0 & , \ \ln(2+z) \in (-\infty, 1] \\ \frac{\ln(2+z)-1}{3} & , \ \ln(2+z) \in (1, 4] \\ 1 & , \ \ln(2+z) \in (4, \infty) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0 & , \ z \in (-2, e-2] \\ \frac{\ln(2+z)-1}{3} & , \ z \in \left(e-2, e^4-2\right] \\ 1 & , \ z \in \left(e^4-2, \infty\right) \end{cases} .$$

(b.3) ako je $\sqrt{1+y} \leq \ln(2+z)$, odnosno $e^{\sqrt{1+y}} - 2 \leq z$ (oblast IV sa slike), tada je

$$F_{Y,Z}(y,z) = \mathsf{P}\left(-\sqrt{1+y} < X < \sqrt{1+y}\right) =$$

$$= F_X\left(\sqrt{1+y}\right) - F_X\left(-\sqrt{1+y}\right) = F_X\left(\sqrt{1+y}\right) - 0 =$$

$$= \begin{cases} 0 & , \ \sqrt{1+y} \in (-\infty, 1] \\ \frac{\sqrt{1+y}-1}{3} & , \ \sqrt{1+y} \in (1, 4] \\ 1 & , \ \sqrt{1+y} \in (4, \infty) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0 & , \ y \in (-1, 0] \\ \frac{\sqrt{1+y}-1}{3} & , \ y \in (0, 15] \\ 1 & , \ y \in (15, \infty) \end{cases} .$$

Dakle: $$F_{Y,Z}(y,z) = \begin{cases} 0 & , \ (y,z) \in D_1 \\ \frac{\ln(2+z)-1}{3} & , \ (y,z) \in D_2 \\ \frac{\sqrt{1+y}-1}{3} & , \ (y,z) \in D_3 \\ 1 & , \ (y,z) \in D_4 \end{cases}$$ gde je

$$D_1 = \left\{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ \begin{array}{l} y \leq -1 \ \vee \ z \leq -2 \ \vee \\ \vee \left(y > -1 \ \wedge \ z > -2 \ \wedge \ \left(z \leq e^{-\sqrt{1+y}} - 2 \ \vee \right.\right. \\ \vee \left(e^{-\sqrt{1+y}} - 2 < z < e^{\sqrt{1+y}} - 2 \ \wedge \right. \\ \left. \wedge \ 2 < z \leq e-2 \right) \vee \\ \left.\left. \vee \left(e^{\sqrt{1+y}} - 2 \leq z \ \wedge \ -1 < y \leq 0 \right) \right) \right) \end{array} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ \begin{array}{l} y > -1 \ \wedge \ z > -2 \ \wedge \\ \wedge \ e^{-\sqrt{1+y}} - 2 < z < e^{\sqrt{1+y}} - 2 \ \wedge \\ \wedge \ e-2 < z \leq e^4 - 2 \end{array} \right\},$$

$$D_3 = \left\{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ \begin{array}{l} y > -1 \ \wedge \ z > -2 \ \wedge \\ \wedge \ e^{\sqrt{1+y}} - 2 \leq z \ \wedge \ 0 < y \leq 15 \end{array} \right\},$$

$$D_4 = \left\{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} y > -1 \;\wedge\; z > -2 \;\wedge \\ \wedge \left(\left(e^{-\sqrt{1+y}} - 2 < z < e^{\sqrt{1+y}} - 2 \;\wedge \right. \right. \\ \left. \wedge\; z > e^4 - 2 \right) \vee \\ \left. \vee \left(e^{\sqrt{1+y}} - 2 \leq z \;\wedge\; y > 15 \right) \right) \end{array} \right\}.$$

4. $\mathcal{R}_X = \{0,1,2,3,\ldots\}$, $\quad \mathsf{P}(X = i) = \frac{30^i}{i!} e^{-30},\ i \in \mathcal{R}_X$,
$\mathsf{E}(X) = 30$, $\quad \mathsf{D}(X) = 30$.

Posmatrajmo slučajne promenljive X_k koje predstavljaju broj automobila koji prolaze kroz raskrsnicu tokom k - tog posmatranog minuta. Slučajne promenljive X_k su međusobno nezavisne i imaju iste raspodele (samim tim i matematička očekivanja i disperzije) kao slučajna promenljiva X. Slučajna promenljiva $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ predstavlja broj automobila koji prolaze kroz raskrsnicu tokom n minuta, pri čemu za nju važi $\mathsf{E}(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathsf{E}(X_k) = 30n$ i $\mathsf{D}(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathsf{D}(X_k) = 30n$. Posmatrajmo i normalizovanu slučajnu promenljivu $S_n^* = \frac{S_n - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}} = \frac{S_n - 30n}{\sqrt{30n}}$.

(a) Primenom centralne granične teoreme na S_{20}^* dobijamo
$\mathsf{P}(S_{20} \geq 200) = 1 - \mathsf{P}(S_{20} < 200) = 1 - \mathsf{P}\left(\frac{S_{20}-600}{\sqrt{600}} < \frac{200-600}{\sqrt{600}} \right) =$
$= 1 - \mathsf{P}\left(S_{20}^* < \frac{-400}{10\sqrt{6}} \right) \approx 1 - \mathsf{P}(S_{20}^* < -16.33) \approx 1 - \phi(-16.33) =$
$= 1 - 1 + \phi(16.33) \approx 1.$

(b) Tražimo maksimalno $m \in \mathbb{N}$ za koje važi $\mathsf{P}(S_{20} \geq m) > 0.9$? Imamo
$\mathsf{P}(S_{20} \geq m) = 1 - \mathsf{P}(S_{20} < m) = 1 - \mathsf{P}\left(\frac{S_{20}-600}{\sqrt{600}} < \frac{m-600}{\sqrt{600}} \right) =$
$= 1 - \mathsf{P}\left(S_{20}^* < \frac{m-600}{10\sqrt{6}} \right) \approx 1 - \phi\left(\frac{m-600}{10\sqrt{6}} \right).$
Dakle:

$$\begin{array}{llll} & \mathsf{P}(S_{20} \geq m) > 0.9 & \Leftrightarrow & 1 - \phi\left(\frac{m-600}{10\sqrt{6}} \right) \succ 0.9 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \phi\left(\frac{m-600}{10\sqrt{6}} \right) \prec 0.1 & \Leftrightarrow & \frac{m-600}{10\sqrt{6}} \prec \phi^{-1}(0.1) \approx -1.28 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & m \prec 568.647 & & \end{array}$$

pa je traženo rešenje $m = 568$.

5. (a) Raspodela slučajne promenljive $X_1 : \begin{pmatrix} a_1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Koristeći uslovnu raspodelu

$$X_2 | \{X_1 = a_1\} : \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

dobijamo
$\mathsf{P}(X_2 = a_1) = \mathsf{P}(X_1 = a_1)\,\mathsf{P}(X_2 = a_1 \mid X_1 = a_1) = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3},$

$\mathsf{P}(X_2 = a_2) = \mathsf{P}(X_1 = a_1)\,\mathsf{P}(X_2 = a_2 \mid X_1 = a_1) = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$,

odnosno dobili smo raspodelu $X_2 : \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Analogno, iz uslovnih raspodela

$X_3 | \{X_2 = a_1\} : \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ i $X_3 | \{X_2 = a_2\} : \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

dobijamo

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(X_3 = a_1) &= \sum_{i=1}^{2} \mathsf{P}(X_2 = a_i)\,\mathsf{P}(X_3 = a_1 \mid X_2 = a_i) = \\
&= \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3}, \\
\mathsf{P}(X_3 = a_2) &= \sum_{i=1}^{2} \mathsf{P}(X_2 = a_i)\,\mathsf{P}(X_3 = a_2 \mid X_2 = a_i) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{2}{9}, \\
\mathsf{P}(X_3 = a_3) &= \sum_{i=1}^{2} \mathsf{P}(X_2 = a_i)\,\mathsf{P}(X_3 = a_3 \mid X_2 = a_i) = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{4}{9},
\end{aligned}$$

i dolazimo do tražene raspodele

$$X_3 : \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

(b) Matrica prelaza je

$$P = P(1) = [p_{a_i a_j}] = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \end{array}.$$

(c) Rešavamo sistem jednačina: $p_j^* = \sum_{k=1}^{\infty} p_k^* \cdot p_{kj}, \;\; j \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} p_j^* = 1$

Znači imamo

$$\begin{aligned}
&p_1^* + p_2^* + p_3^* + \ldots = 1 \\
&p_1^* = \tfrac{1}{3}(p_1^* + p_2^* + p_3^* + \ldots) \\
&p_2^* = \tfrac{2}{3} p_1^* \\
&p_3^* = \tfrac{2}{3} p_2^* = \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 p_1^* \\
&\vdots \\
&p_j^* = \left(\tfrac{2}{3}\right)^{j-1} p_1^* \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo

$$p_1^* \left(1 + \tfrac{2}{3} + \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + \ldots\right) = p_1^* \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3p_1^* = 1$$

tj. $p_1^* = \frac{1}{3}$ i $p_j^* = \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} \cdot \frac{1}{3}, \;\; j = 2, 3, 4, \ldots$

Primetimo da smo verovatnoće stanja za $n = 3$ (što je traženo pod (a)) mogli izračunati koristeći matricu prelaza na sledeći način:

$$\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_2 \cdot P = \mathbf{p}_1 \cdot P^2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \dots \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \end{array},$$

gde je $$P^2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{3}{9} & \frac{2}{9} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{3}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 & \frac{4}{9} & 0 & \dots \\ \frac{3}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Dakle, zakon raspodele (zaseka) X_3 je: $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$.

6. $X : \mathcal{U}(0, b)$, $\quad \mathsf{E}(X) = \frac{b}{2}$, $\quad \mathsf{D}(X) = \frac{b^2}{12} \qquad (b > 0)$.

   (a) $\mathsf{E}\left(\hat{b}\right) = \mathsf{E}\left(2 \cdot \overline{X}_n\right) = \mathsf{E}\left(2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{2}{n} \cdot n \cdot \mathsf{E}(X) = 2 \cdot \frac{b}{2} = b.$

   Dakle, ocena $\hat{b}$ jeste centrirana.

   (b) $\mathsf{D}\left(\hat{b}\right) = \mathsf{D}\left(2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{4}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{D}(X_i) = \frac{4}{n^2} \cdot n \cdot \frac{b^2}{12} = \frac{1}{3n} b^2.$

   Kako je ocena centrirana, možemo da koristimo nejednakost Čebiševa. Za $\varepsilon > 0$ važi

   $\mathsf{P}\left(\left|\hat{b} - b\right| > \varepsilon\right) = \mathsf{P}\left(\left|\hat{b} - \mathsf{E}\left(\hat{b}\right)\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathsf{D}(\hat{b})}{\varepsilon^2} = \frac{b^2}{3n\varepsilon^2}.$

   Prema tome: $\qquad 0 \leq \lim\limits_{n \to \infty} \mathsf{P}\left(\left|\hat{b} - b\right| > \varepsilon\right) \leq \lim\limits_{n \to \infty} \frac{b^2}{3n\varepsilon^2} = 0,$

   odakle je $\lim\limits_{n \to \infty} \mathsf{P}\left(\left|\hat{b} - b\right| > \varepsilon\right) = 0$, pa ocena jeste postojana.

11.02.1999.

1. Kocka A ima 4 crvene i 2 bele strane, a kocka B ima 3 crvene i 3 bele strane. Baca se novčić, i ako se pojavi grb baca se kocka A, a ako se pojavi pismo baca se kocka B.

   (a) Naći verovatnoću da se pri bacanju kocke pojavi crvena boja.

   (b) Eksperiment ponavljamo n puta (prvo bacamo novčić a zatim odgovarajuću kocku). Ako se u n bacanja crvena boja pojavila n puta, naći verovatnoću da je kocka B bacana bar jednom.

2. Nezavisne slučajne promenljive X i Y imaju Poasonove raspodele $X : \mathcal{P}(a)$, $Y : \mathcal{P}(b)$, $\ (a, b > 0)$. Naći raspodele slučajnih promenljivih:

   (a) $Z = X + Y$.

(b) $X | \{X+Y=n\}$.

3. Slučajna promenljiva X ima uniformnu $\mathcal{U}(0,1)$ raspodelu. Slučajna promenljiva Y pri $X=x$ $(x \in [0,1))$ ima $\mathcal{U}(x,1)$ raspodelu.

   (a) Naći matematičko očekivanje slučajne promenljive Y bez nalaženja njene raspodele.

   (b) Naći raspodelu slučajne promenljive $Z=(X+1)Y$.

4. Vreme rada procesora (u satima) je slučajna promenljiva sa $\mathcal{E}(0.005)$ raspodelom. Procesor koji pregori se zamenjuje novim i vreme zamene je zanemarljivo malo. Procesori rade nezavisno jedan od drugog.

   (a) Koliko procesora treba imati u rezervi da sa verovatnoćom 0.98 vreme rada aparata bude bar 10000 sati?

   (b) Za koje m je vreme rada sistema bar m sa verovatnoćom 0.99 ako je obezbeđeno 100 procesora?

5. Tri učenika iz Novog Sada i tri učenika iz Subotice idu u Rim. Oni se na slučajan način raspoređuju u dve sobe, tako da se u svakoj sobi nalazi po tri učenika. Broj učenika iz Novog Sada u prvoj sobi definiše stanje sistema. Kako nisu mogli na početku da se dogovore ko će u koju sobu, svaki dan se na slučajan način bira po jedan učenik iz svake sobe i oni menjaju mesta.

   (a) Sastaviti matricu prelaza za jedan dan.

   (b) Ako se zna da su na početku svi učenici iz Novog Sada bili u istoj sobi, naći verovatnoću da posle dva dana svi učenici iz Novog Sada neće biti u istoj sobi.

   (c) Naći finalne verovatnoće.

6. Slučajna promenljiva X ima binomnu $\mathcal{B}(1,p)$ raspodelu. Na osnovu prostog uzorka obima n dobijena je ocena $\hat{p}=k\cdot\overline{X}_n$.

   (a) Odrediti k tako da predložena ocena bude centrirana.

   (b) Za tako određeno k ispitati postojanost predložene ocene.

   (c) Za ocenu parametra p^2 se predlaže ocena $\tilde{p}=\overline{X}_n^2$. Ispitati centriranost ocene $\tilde{p}$.

7. Na jednoj autobuskoj liniji je ispitivano koliko minuta je putnik čekao autobus. Anketirano je 50 slučajno odabranih putnika i rezultati su dati u tabeli:

I_i	$[0,1]$	$(1,2]$	$(2,3]$	$(3,4]$	$(4,5]$
m_i	15	10	9	12	4

   χ^2 testom sa pragom značajnosti $\alpha=0.05$ testirati hipotezu da vreme čekanja autobusa ima uniformnu raspodelu $\mathcal{U}(0,5)$.

Rešenja:

1. Posmatramo sledeće događaje:

   H - "*pri bacanju novčića pojavilo se pismo*",

   $\overline{H}$ - "*pri bacanju novčića pojavio se grb*".

   $\left\{H, \overline{H}\right\}$ je potpun sistem događaja, pri čemu je $\mathsf{P}(H) = \mathsf{P}\left(\overline{H}\right) = \frac{1}{2}$.

   (a) Neka je C događaj "*pri bacanju kocke pojavila se crvena boja*". Iz uslova zadatka je $\mathsf{P}(C \mid H) = \frac{1}{2}$ i $\mathsf{P}\left(C \mid \overline{H}\right) = \frac{2}{3}$. Na osnovu formule totalne verovatnoće sledi

   $$\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}(H)\,\mathsf{P}(C \mid H) + \mathsf{P}\left(\overline{H}\right)\mathsf{P}\left(C \mid \overline{H}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{7}{12}.$$

   (b) Označimo događaje:

   C_i: "*u i-tom bacanju se pojavila crvena boja*" $(i \in \{1, 2, \ldots, n\})$,

   B: "*u n bacanja se kocka B baca bar jednom*".

   Koristeći nezavisnost eksperimenata dobijamo da je tražena verovatnoća

   $\mathsf{P}(B \mid C_1C_2\ldots C_n) = 1 - \mathsf{P}\left(\overline{B} \mid C_1C_2\ldots C_n\right) =$

   $= 1 - \frac{\mathsf{P}\left(\overline{B}C_1C_2\ldots C_n\right)}{\mathsf{P}(C_1C_2\ldots C_n)} = 1 - \frac{\mathsf{P}\left(\overline{B}\right)\mathsf{P}\left(C_1C_2\ldots C_n \mid \overline{B}\right)}{\mathsf{P}(C_1)\mathsf{P}(C_2)\ldots\mathsf{P}(C_n)} =$

   $= 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{7}{12}\right)^n} = 1 - \left(\frac{4}{7}\right)^n.$

2. $X : \mathcal{P}(a)$, $\quad Y : \mathcal{P}(b)$, $\quad \mathcal{R}_X = \mathcal{R}_Y = \{0, 1, 2, \ldots\}$,

   $\mathsf{P}(X = j) = \frac{a^j}{j!}e^{-a}$, $\quad \mathsf{P}(Y = j) = \frac{b^j}{j!}e^{-b}$, $\quad j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

   (a) $Z = X + Y$, $\mathcal{R}_Z = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

   <u>Prvi način</u>:

   Za $k \in \mathcal{R}_Z$ je

   $$\mathsf{P}(Z = k) = \mathsf{P}\left(\sum_{i=0}^{k}(X = i, Y = k - i)\right) \overset{[1]}{=} \sum_{i=0}^{k}\mathsf{P}(X = i, Y = k - i) =$$

   $$\overset{[2]}{=} \sum_{i=0}^{k}\mathsf{P}(X = i)\,\mathsf{P}(Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k}\frac{a^i}{i!}e^{-a}\cdot\frac{b^{k-i}}{(k-i)!}e^{-b} =$$

   $$= e^{-(a+b)}\cdot\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!\cdot(k-i)!}a^ib^{k-i} = e^{-(a+b)}\cdot\frac{1}{k!}(a+b)^k.$$

   Dakle, slučajna promenljiva Z ima Poasonovu raspodelu $\mathcal{P}(a + b)$.

   <u>Drugi način</u>:

   Koristeći karakteristične funkcije slučajnih promenljivih X i Y:

   $\mathcal{K}_X(t) = e^{a\left(e^{it}-1\right)}$, $\qquad \mathcal{K}_Y(t) = e^{b\left(e^{it}-1\right)}$,

   dobijamo karakterističnu funkciju slučajne promenljive Z:

   $\mathcal{K}_Z(t) = \mathcal{K}_{X+Y}(t) \overset{[2]}{=} \mathcal{K}_X(t)\,\mathcal{K}_Y(t) =$

$= e^{a\left(e^{it}-1\right)} e^{b\left(e^{it}-1\right)} = e^{(a+b)\left(e^{it}-1\right)}$

Dobijena karakteristična funkcija odgovara slučajnoj promenljivoj sa Poasonovom $\mathcal{P}(a+b)$ raspodelom.

(b) Za $k \in \mathcal{R}_{X|\{X+Y=n\}} = \{0,1,2,\ldots,n\}$ važi:

$\mathsf{P}(X=k \mid X+Y=n) = \frac{\mathsf{P}(X=k, X+Y=n)}{\mathsf{P}(X+Y=n)} =$

$= \dfrac{\mathsf{P}(X=k, Y=n-k)}{\mathsf{P}(X+Y=n)} \overset{[2]}{=} \dfrac{\mathsf{P}(X=k)\,\mathsf{P}(Y=n-k)}{\mathsf{P}(X+Y=n)} =$

$= \dfrac{\frac{a^k}{k!}e^{-a} \cdot \frac{b^{n-k}}{n-k!}e^{-b}}{\frac{(a+b)^n}{n!}e^{-(a+b)}} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^k \left(\dfrac{b}{a+b}\right)^{n-k}.$

Pri tome je $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$, pa slučajna promenljiva $X|\{X+Y=n\}$ ima binomnu $\mathcal{B}\left(n, \frac{a}{a+b}\right)$ raspodelu.

[1] - *Koristimo disjunktnost događaja koji čine uniju.*

[2] - *Koristimo nezavisnost slučajnih promenljivih X i Y.*

3. $X : \mathcal{U}(0,1)$, $\quad \varphi_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$,

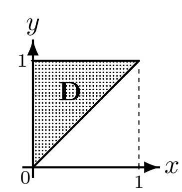
$Y|\{X=x\} : \mathcal{U}(x,1)$, $\quad \varphi_{Y|\{X=x\}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & y \in [x,1] \\ 0, & y \notin [x,1] \end{cases}$.

Na osnovu zadanih gustina dobijamo

$\varphi_{X,Y}(x,y) = \varphi_X(x) \cdot \varphi_{Y|\{X=x\}}(y) =$

$= \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}$,

gde je $D = \{(x,y) \mid x \in [0,1] \wedge y \in [x,1]\}$.



(a) Koristeći $\mathsf{E}(Y) = \mathsf{E}(\mathsf{E}(Y|X))$ izračunavamo

$\mathsf{E}(Y|X=x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y\varphi_{Y|\{X=x\}}(y)\,dy = \int\limits_x^1 y \cdot \frac{1}{1-x}dy = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_x^1 = \frac{1+x}{2}$,

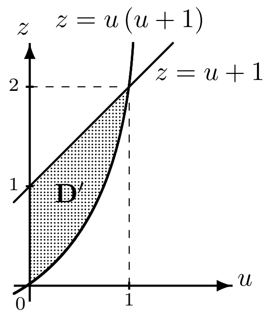
te je $\mathsf{E}(Y|X=x) = \begin{cases} \frac{1+x}{2} & , \; x \in [0,1] \\ 0 & , \; x \notin [0,1] \end{cases}$,

$\mathsf{E}(Y) = \mathsf{E}(\mathsf{E}(Y|X)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathsf{E}(Y|X=x)\;\varphi_X(x)\,dx = \int\limits_0^1 \frac{1+x}{2} \cdot 1dx =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x)^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$

(b) Posmatrajmo transformaciju $(X,Y) \xrightarrow{f} (U,Z)$ gde je $Z = (X+1)Y$ i $U = X$.

Transformacija f oblast D bijektivno preslikava u oblast
$D' = \left\{ (u,z) \mid u \in (0,1) \ \wedge \ z \in \left(u^2+u,1\right) \right\}$
i njena inverzna transformacija je
$f^{-1}(u,z) = \left(u, \frac{z}{u+1}\right)$, $(u,z) \in D'$, a njen Jakobijan je
$\mathcal{J}_{f^{-1}}(u,z) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ u & \frac{1}{u+1} \end{vmatrix} = \frac{1}{u+1}.$



Sada imamo da je
$\varphi_{U,Z}(u,z) = \varphi_{X,Y}\left(u, \frac{z}{u+1}\right) \cdot \left|\frac{1}{u+1}\right| =$
$= \begin{cases} \frac{1}{1-u} \cdot \frac{1}{1+u} & , \ (u,z) \in D' \\ 0 & , \ (u,z) \notin D' \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-u^2} & , \ (u,z) \in D' \\ 0 & , \ (u,z) \notin D' \end{cases}.$
Marginalna gustina φ_Z vektora (U,Z) je

$$\varphi_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_{U,Z}(u,z)\,du = \begin{cases} \int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{1+4z}-1}{2}} \frac{1}{1-u^2}du & , \ z \in (0,1] \\ \int\limits_{z-1}^{\frac{\sqrt{1+4z}-1}{2}} \frac{1}{1-u^2}du & , \ z \in (1,2) \\ 0 & , \ z \notin (0,2) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1+4z}}{1-\sqrt{1+4z}} & , \ z \in (0,1] \\ \ln\frac{1+\sqrt{1+4z}}{1-\sqrt{1+4z}} - \frac{1}{2}\ln\frac{z}{2-z} & , \ z \in (1,2) \\ 0 & , \ z \notin (0,2) \end{cases}.$$

4. Posmatramo slučajnu promenljivu X_i koja predstavlja vreme rada i-tog procesora. X_i su nezavisne slučajne promenljive i imaju istu $\mathcal{E}(0.005)$ raspodelu, pri čemu je $\mathsf{E}(X_i) = \frac{1}{0.005} = 200$ i $\mathsf{D}(X_i) = \frac{1}{0.005^2} = 40000$.

   Tada $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ predstavlja ukupno vreme rada aparata (tj. n procesora), pri čemu je

   $\mathsf{E}(S_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{E}(X_i) = 200n, \quad \mathsf{D}(S_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{D}(X_i) = 40000n,$

   $S_n^* = \frac{S_n - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}} = \frac{S_n - 200n}{200\sqrt{n}}$ (normalizovana slučajna promenljiva).

   (a) Rešavamo po n jednačinu $\mathsf{P}(S_n \geq 10000) = 0.98$. Pošto je
   $\mathsf{P}(S_n \geq 10000) = 1 - \mathsf{P}(S_n < 10000) =$
   $= 1 - \mathsf{P}\left(\frac{S_n - 200n}{200\sqrt{n}} < \frac{10000-200n}{200\sqrt{n}}\right) = 1 - \mathsf{P}\left(S_n^* < \frac{10000-200n}{200\sqrt{n}}\right) \approx$

$\approx 1-\phi\left(\frac{10000-200n}{200\sqrt{n}}\right)=1-\phi\left(\frac{50}{\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right),$

sledi da je

$\mathsf{P}\left(S_n\geq 10000\right)=0.98 \quad \Leftrightarrow \quad 1-\phi\left(\frac{50}{\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)\approx 0.98 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \phi\left(\frac{50}{\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)\approx 0.02 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{50}{\sqrt{n}}-\sqrt{n}\approx\phi^{-1}\left(0.02\right) \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \frac{50}{\sqrt{n}}-\sqrt{n}\approx -2.055 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{n}\right)^2-2.055\cdot\sqrt{n}-50\approx 0 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{n}\approx -6.12 \ \vee\ \sqrt{n}\approx 8.17\right) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{n}\approx 8.17 \quad \Leftrightarrow \quad n\approx 66.8.$

To znači da sa približnom verovatnoćom od 0.98 aparat radi bar 10000 sati ako je obezbeđeno 67 procesora.

(b) Rešavamo po m jednačinu $\mathsf{P}\left(S_{100}\geq m\right)=0.99$. Pošto je

$\mathsf{P}\left(S_{100}\geq m\right)=1-\mathsf{P}\left(S_{100}<m\right)=$

$=1-\mathsf{P}\left(\frac{S_{100}-100\cdot 200}{\sqrt{100\cdot 200}}<\frac{m-100\cdot 200}{\sqrt{100\cdot 200}}\right)=1-\mathsf{P}\left(S^*_{100}<\frac{m-20000}{2000}\right)=$

$\approx 1-\phi\left(\frac{m-20000}{2000}\right),$

sledi da je

$\mathsf{P}\left(S_{100}\geq m\right)=0.99 \quad \Leftrightarrow \quad 1-\phi\left(\frac{m-20000}{2000}\right)\approx 0.99 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \phi\left(\frac{m-20000}{2000}\right)\approx 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m-20000}{2000}\approx\phi^{-1}\left(0.01\right) \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \frac{m-20000}{2000}\approx -2.33 \quad \Leftrightarrow \quad m\approx 15340.$

To znači da sa približnom verovatnoćom od 0.99 uz obezbeđenih 100 procesora sistem radi najmanje 15340 sati.

5. (a) Na osnovu uslova zadatka nalazimo matricu prelaza (za 1 dan):

$$P=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}.$$

(b) Matrica prelaza za dva dana:

$$P^2=\left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ \frac{4}{81} & \frac{41}{81} & \frac{32}{81} & \frac{4}{81} \\ \frac{4}{81} & \frac{32}{81} & \frac{41}{81} & \frac{4}{81} \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right].$$

Vektor početne raspodele: $\mathbf{p}^0=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \end{array}.$

Vektor raspodele nakon dva dana:

$$\mathbf{p}^2=\mathbf{p}^0\cdot P^2=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{18} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{18} \end{array}\right] \end{array}.$$

Nakon dva dana neće biti svi učenici iz Novog Sada u istoj sobi sa verovatnoćom $\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=\frac{8}{9}$.

(c) Finalne verovatnoće dobijamo rešavanjem sistema jednačina

$$p^*_j=\sum_k p_{kj}\cdot p^*_k,\ \ j\in\{0,1,2,3\} \quad \wedge \quad \sum_k p^*_k=1$$

odnosno $\mathbf{p}^* = \mathbf{p}^* \cdot P$ gde je $\mathbf{p}^* = [p_0^*, p_1^*, p_2^*, p_3^*]$, $p_0^* + p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1$:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \frac{1}{9}p_1^* & & & & & = & p_0^* \\ p_0^* & + & \frac{4}{9}p_1^* & + & \frac{4}{9}p_2^* & & & = & p_1^* \\ & & \frac{4}{9}p_1^* & + & \frac{4}{9}p_2^* & + & p_3^* & = & p_2^* \\ & & & & \frac{1}{9}p_2^* & & & = & p_3^* \\ p_0^* & + & p_1^* & + & p_2^* & + & p_3^* & = & 1 \\ \hline \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccccc} -p_0^* & + & \frac{1}{9}p_1^* & & & & & = & 0 \\ p_0^* & - & \frac{5}{9}p_1^* & + & \frac{4}{9}p_2^* & & & = & 0 \\ & & \frac{4}{9}p_1^* & - & \frac{5}{9}p_2^* & + & p_3^* & = & 0 \\ & & & & \frac{1}{9}p_2^* & - & p_3^* & = & 0 \\ p_0^* & + & p_1^* & + & p_2^* & + & p_3^* & = & 1 \\ \hline \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccccc} p_0^* & - & \frac{1}{9}p_1^* & & & & & = & 0 \\ & & p_1^* & - & p_2^* & & & = & 0 \\ & & & & p_2^* & - & 9p_3^* & = & 0 \\ & & & & & & 20p_3^* & = & 1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} p_0^* = \frac{1}{20} \\ p_1^* = \frac{9}{20} \\ p_2^* = \frac{9}{20} \\ p_3^* = \frac{1}{20} \end{array}.$$

Dobijene finalne verovatnoće tumačimo na sledeći način: posle "dovoljno dugo vremena", sa verovatnoćama $\frac{1}{20}$ će se u prvoj sobi nalaziti svi učenici iz Novog Sada, odnosno niko od njih, a sa verovatnoćama $\frac{9}{20}$ će se u prvoj sobi nalaziti 1, odnosno 2 učenika iz Novog Sada.

6. $\mathcal{B}(1,p)$, $\quad \mathsf{E}(X) = p$, $\quad \mathsf{D}(X) = p(1-p)$,
$\mathsf{E}\left(X^2\right) = \mathsf{D}(X) + \mathsf{E}^2(X) = p(1-p) + p^2 = p.$

(a) $\mathsf{E}(\hat{p}) = \mathsf{E}\left(k\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = k\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}(X_i) \overset{[1]}{=} k\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}(X) =$
$= k\frac{1}{n}n\mathsf{E}(X) = k\mathsf{E}(X) = kp.$
Prema tome, ocena $\hat{p}$ je centrirana za $k = 1$ (jer tada i samo tada je $\mathsf{E}(\hat{p}) = p$).

(b) Ispitujemo postojanost ocene $\overline{X}_n$. Pošto je ocena centrirana, na osnovu nejednakosti Čebiševa, za svako $\varepsilon > 0$ dobijamo
$$\mathsf{P}(|\hat{p} - p| \geq \varepsilon) = \mathsf{P}(|\hat{p} - \mathsf{E}(\hat{p})| \geq \varepsilon) \leq \tfrac{\mathsf{D}(\hat{p})}{\varepsilon^2},$$
gde je
$\mathsf{D}(\hat{p}) = \mathsf{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\mathsf{D}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{[2]}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{D}(X_i) =$
$\overset{[1]}{=} \frac{1}{n^2}n\mathsf{D}(X) = \frac{1}{n}\mathsf{D}(X) = \frac{1}{n}p(1-p).$
Prema tome, na osnovu nejednakosti Čebiševa smo dobili da važi nejednakost $\mathsf{P}(|\hat{p} - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$ odakle dobijamo

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(|\hat{p}-p| \geq \varepsilon\right) \leq \lim_{n\to\infty} \tfrac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} = 0,$$

pa sledi da je $\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(|\hat{p}-p| \geq \varepsilon\right) = 0$, te je ocena $\hat{p}$ postojana.

(c) $\mathsf{E}\left(\tilde{p}\right) = \mathsf{E}\left(\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right) = \mathsf{E}\left(\frac{1}{n^2}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum\limits_{i\neq j} X_i X_j\right)\right) =$

$= \frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{E}\left(X_i^2\right) + \frac{1}{n^2}\sum\limits_{i\neq j} \mathsf{E}\left(X_i X_j\right) =$

$\stackrel{[2]}{=} \frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{E}\left(X_i^2\right) + \frac{1}{n^2}\sum\limits_{i\neq j} \mathsf{E}\left(X_i\right)\mathsf{E}\left(X_j\right) =$

$\stackrel{[1]}{=} \frac{1}{n^2} n \mathsf{E}\left(X^2\right) + \frac{1}{n^2}\sum\limits_{i\neq j} \mathsf{E}\left(X\right)\mathsf{E}\left(X\right) =$

$= \frac{1}{n}\mathsf{E}\left(X^2\right) + \frac{1}{n^2} n\left(n-1\right)\left(\mathsf{E}\left(X\right)\right)^2 = \frac{1}{n}p + \frac{1}{n}\left(n-1\right)p^2 \neq p^2.$

Prema tome, $\overline{X}_n^2$ nije centrirana ocena parametra p^2.

[1] - *Sve slučajne promenljive X_i imaju iste raspodele pa samim tim i iste karakteristike kao slučajna promenljiva X.*

[2] - *Slučajne promenljive X_i su nezavisne.*

7. Pošto poslednji interval sadrži samo 4 elementa iz uzorka, njega ćemo spojiti sa pretposlednjim intervalom:

I_i	$[0,1]$	$(1,2]$	$(2,3]$	$(3,5]$
m_i	15	10	9	16

Ako sa X obeležimo slučajnu promenljivu koja predstavlja vreme čekanja jednog putnika, tada za $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$ verovatnoće

$$p_i = \mathsf{P}\left(a_{i-1} < X \leq a_i\right) = F_X\left(a_i\right) - F_X\left(a_{i-1}\right), \quad i \in \{1,2,3,4\}$$

(F_X je funkcija raspodele slučajne promenljive sa uniformnom $\mathcal{U}(0,5)$ raspodelom) iznose:

$$p_1 = F_X(1) - F_X(0) = \tfrac{1-0}{5-0} - \tfrac{0-0}{5-0} = \tfrac{1}{5},$$
$$p_2 = F_X(2) - F_X(1) = \tfrac{2-0}{5-0} - \tfrac{1-0}{5-0} = \tfrac{1}{5},$$
$$p_3 = F_X(3) - F_X(2) = \tfrac{3-0}{5-0} - \tfrac{2-0}{5-0} = \tfrac{1}{5},$$
$$p_4 = F_X(5) - F_X(3) = \tfrac{5-0}{5-0} - \tfrac{3-0}{5-0} = \tfrac{2}{5}.$$

Ako je naša hipoteza tačna, tada za realizovane vrednosti $m_1 = 15$, $m_2 = 10$, $m_3 = 9$, $m_4 = 16$ slučajne promenljive X, vrednost

$$z = \sum_{i=1}^{4} \tfrac{(m_i - np_i)^2}{np_i} = \tfrac{(15-10)^2}{10} + \tfrac{(10-10)^2}{10} + \tfrac{(9-10)^2}{10} + \tfrac{(16-20)^2}{20} = 3.4$$

(gde je $n = 50$ veličina uzorka) treba da predstavlja realizaciju slučajne promenljive sa približno χ^2_3 raspodelom. Iz tablica za χ^2 raspodelu za prag značajnosti $\alpha = 0.05$ nalazimo da je $\chi^2_{0.05;3} \approx 7.81$. Pošto je $\chi^2_{0.05;3} > 3.4$, ne odbacujemo (sa pragom značajnosti 0.05) hipotezu da vreme čekanja jednog putnika ima $\mathcal{U}(0,5)$ raspodelu.

06.04.1999.

1. Uređaj se nalazi u jednom od dva stanja S_A ili S_B sa verovatnoćama p_1 i p_2 redom. Verovatnoća kvara uređaja u toku nekog fiksnog vremenskog perioda t je q_1 ako je uređaj u stanju S_A, odnosno q_2 ako je uređaj u stanju S_B.

   (a) Naći verovatnoću da uređaj nakon vremena t bude neispravan.

   (b) Ako je uređaj nakon vremena t bio ispravan, naći verovatnoću da se nalazio u stanju S_A.

2. Slučajni vektor (X,Y) ima raspodelu datu tablicom:

X \ Y	1	2	3
1	0.1	0.05	0
2	0.4	0.15	0.3

   (a) Ispitati nezavisnost slučajnih promenljivih X i Y.

   (b) Naći srednju vrednost (matematičko očekivanje) slučajne promenljive $Z = \max\left\{X, \frac{Y}{2}\right\}$.

3. Slučajna promenljiva X ima eksponencijalnu raspodelu $\mathcal{E}(a)$. Naći raspodelu slučajne promenljive $Y = [X]$ gde $[X]$ označava funkciju "najveće celo od X".

4. Elektrostanica opslužuje mrežu sa 10000 sijalica. Verovatnoća uključenja svake od sijalica uveče iznosi 0.9. Izračunati verovatnoću da apsolutno odstupanje broja uključenih sijalica od matematičkog očekivanja bude najviše 200 koristeći

   (a) nejednakost Čebiševa,

   (b) teoremu Moavr - Laplasa.

5. Luka na posao ide vozom, autobusom ili kolima. Ako na posao jednog dana ide kolima, onda sledećeg dana jednakoverovatno ide vozom, autobusom ili kolima. Vozom ne ide dva dana uzastopno, a ako ide vozom onda sutradan ide 2 puta verovatnije kolima nego autobusom. Ako jednog dana ide autobusom, onda sutra jednakoverovatno ide vozom ili kolima (a ne ide autobusom). Posmatramo sistem čija su stanja određena prevoznim sredstvom koje Luka koristi u toku dana za odlazak na posao.

   (a) Sastaviti matricu prelaza za jedan dan.

   (b) Ako je Luka išao kolima, naći verovatnoću da će kroz dva dana ići kolima.

   (c) Naći finalne verovatnoće.

6. Strelac pogađa kružnu metu poluprečnika 1. Ispitati nezavisnost sledećih događaja: A - "*pogođen je prsten sa manjim poluprečnikom* $\frac{1}{2}$ *i većim poluprečnikom* 1", i B - "*pogođena je donja polovina mete*".

Rešenja:

1. Označimo sa A i B događaje koji se realizuju kada se uređaj nalazi u stanju S_A odnosno stanju S_B, a sa T označimo događaj koji se realizuje kada se uređaj pokvari u toku vremenskog perioda t. Dato je:
$$\mathsf{P}(A) = p_1, \qquad \mathsf{P}(B) = p_2, \qquad \mathsf{P}(T \mid A) = q_1, \qquad \mathsf{P}(T \mid B) = q_2.$$
   (a) Događaji A i B čine potpun sistem događaja, pa na osnovu formule totalne verovatnoće dobijamo
$$\mathsf{P}(T) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(T \mid A) + \mathsf{P}(B)\,\mathsf{P}(T \mid B) = p_1q_1 + p_2q_2.$$
   (b) Koristeći Bajesovu formulu (i $\mathsf{P}\left(\overline{T}\right) = 1 - \mathsf{P}(T) = 1 - p_1q_1 - p_2q_2$) dobijamo traženu verovatnoću:
$$\mathsf{P}\left(A \mid \overline{T}\right) = \frac{\mathsf{P}(A)\mathsf{P}\left(\overline{T} \mid A\right)}{\mathsf{P}\left(\overline{T}\right)} = \frac{\mathsf{P}(A)(1-\mathsf{P}(T \mid A))}{\mathsf{P}\left(\overline{T}\right)} = \frac{p_1(1-q_1)}{1-p_1q_1-p_2q_2}.$$

2. (a) $\mathsf{P}(\{X=1\} \cap \{Y=3\}) = 0 \neq 0.15 \cdot 0.3 = \mathsf{P}(X=1)\,\mathsf{P}(Y=3)$,
   odakle sledi da su slučajne promenljive X i Y zavisne.
   (b) Iz $X \in \{1,2\}$ i $\frac{Y}{2} \in \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right\}$ sledi da je $\left\{1, \frac{3}{2}, 2\right\}$ skup mogućih vrednosti slučajne promenljive Z, a odgovarajuće verovatnoće su:
$$\begin{aligned}&\mathsf{P}(Z=1) = \mathsf{P}\left(\left\{X=1, \tfrac{Y}{2}=\tfrac{1}{2}\right\} + \left\{X=1, \tfrac{Y}{2}=1\right\}\right) =\\ &= \mathsf{P}(\{X=1, Y=1\} + \{X=1, Y=2\}) =\\ &= \mathsf{P}(\{X=1, Y=1\}) + \mathsf{P}(\{X=1, Y=2\}) = 0.1 + 0.05 = 0.15,\end{aligned}$$
$$\mathsf{P}\left(Z=\tfrac{3}{2}\right) = \mathsf{P}\left(\left\{X=1, \tfrac{Y}{2}=\tfrac{3}{2}\right\}\right) = \mathsf{P}(\{X=1, Y=3\}) = 0,$$
$$\begin{aligned}&\mathsf{P}(Z=2) =\\ &= \mathsf{P}\left(\left\{X=2, \tfrac{Y}{2}=\tfrac{1}{2}\right\} + \left\{X=2, \tfrac{Y}{2}=1\right\} + \left\{X=2, \tfrac{Y}{2}=\tfrac{3}{2}\right\}\right) =\\ &= \mathsf{P}(\{X=2, Y=1\} + \{X=2, Y=2\} + \{X=2, Y=3\}) =\\ &= \mathsf{P}(\{X=2, Y=1\}) + \mathsf{P}(\{X=2, Y=2\}) + \mathsf{P}(\{X=2, Y=3\}) =\\ &= 0.4 + 0.15 + 0.3 = 0.85.\end{aligned}$$
   Dakle: $\qquad \mathcal{R}_Z = \{1,2\} \qquad$ i $\qquad Z : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.15 & 0.85 \end{pmatrix}$,
   odakle dobijamo
   $\mathsf{E}(Z) = 1 \cdot 0.15 + 2 \cdot 0.85 = 1.85.$

3. $$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ ae^{-ax} & x > 0 \end{cases}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-ax} & x > 0 \end{cases}.$$
   $Y = [X]$ je diskretna slučajna promenljiva i $\mathcal{R}_Y = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
   Za svako $k \in \mathcal{R}_Y$ važi

$$\mathsf{P}(Y=k)=\mathsf{P}([X]=k)=\mathsf{P}(k\le X<k+1)=\int\limits_k^{k+1}\varphi_X(x)\,dx=$$
$$=a\int\limits_k^{k+1}e^{-ax}dx=F_X(k+1)-F_X(k)=1-e^{-a(k+1)}-1+e^{-ak}=$$
$$=e^{-ak}\left(1-e^{-a}\right).$$

4. Slučajna promenljiva X koja predstavlja broj uključenih sijalica ima binomnu raspodelu $X:\mathcal{B}(10000,0.9)$, pri čemu je

$$\mathsf{E}(X)=10000\cdot 0.9=9000 \quad \text{i} \quad \mathsf{D}(X)=10000\cdot 0.9\cdot 0.1=900.$$

(a) Na osnovu nejednakosti Čebiševa $\mathsf{P}(|X-\mathsf{E}(X)|\ge\varepsilon)\le\frac{\mathsf{D}(X)}{\varepsilon^2}$ (za sve $\varepsilon>0$) dobijamo

$$\mathsf{P}(|X-\mathsf{E}(X)|\le 200)=1-\mathsf{P}(|X-\mathsf{E}(X)|>200)=$$
$$=1-\mathsf{P}(|X-\mathsf{E}(X)|\ge 201)\ge 1-\frac{\mathsf{D}(X)}{201^2}\approx 0.9777.$$

(b) Primenom teoreme Moavr-Laplasa dobijamo

$$\mathsf{P}(|X-\mathsf{E}(X)|\le 200)=\mathsf{P}(|X-\mathsf{E}(X)|<201)=$$
$$=\mathsf{P}(-201<X-\mathsf{E}(X)<201)=\mathsf{P}\left(\frac{-201}{\sqrt{\mathsf{D}(X)}}<\frac{X-\mathsf{E}(X)}{\sqrt{\mathsf{D}(X)}}<\frac{201}{\sqrt{\mathsf{D}(X)}}\right)=$$
$$=\mathsf{P}\left(-\frac{201}{\sqrt{900}}<\frac{X-\mathsf{E}(X)}{\sqrt{\mathsf{D}(X)}}<\frac{201}{\sqrt{900}}\right)=\mathsf{P}(-6.7<X^*<6.7)=$$
$$\approx\phi(6.7)-(1-\phi(6.7))=2\phi(6.7)-1\approx 1.$$

5. (a) Skup stanja sistema:
$v=$ "*ide vozom*", $a=$ "*ide autobusom*", $k=$ "*ide kolima*".

Matrica prelaza za jedan dan: Matrica prelaza za dva dana:

$$P=\begin{array}{c} \\ v \\ a \\ k\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} v & a & k\end{array}\\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\end{array}. \qquad P^2=\begin{array}{c} \\ v \\ a \\ k\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} v & a & k\end{array}\\ \begin{bmatrix} \frac{7}{18} & \frac{2}{9} & \frac{7}{18}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{5}{18} & \frac{2}{9} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\end{array}.$$

(b) Vektor početne raspodele: $\mathbf{p}^0=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} v & a & k\end{array}\\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}.$

Raspodela nakon dva dana: $\mathbf{p}^2=\mathbf{p}^0\cdot P^2=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} v & a & k\end{array}\\ \begin{bmatrix} \dots & \dots & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\end{array}.$

Prema tome, tražena verovatnoća je $\frac{1}{2}$.

(c) Finalne verovatnoće nalazimo rešavajući sistem jednačina:
$\begin{bmatrix} p_v^* & p_a^* & p_k^*\end{bmatrix}\cdot P=\begin{bmatrix} p_v^* & p_a^* & p_k^*\end{bmatrix} \quad\wedge\quad p_v^*+p_a^*+p_k^*=1$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{array}{rcrcrcr} p_v^* & = & & & \frac{1}{2}p_a^* & + & \frac{1}{3}p_k^*\\ p_a^* & = & \frac{1}{3}p_v^* & & & + & \frac{1}{3}p_k^*\\ p_k^* & = & \frac{2}{3}p_v^* & + & \frac{1}{2}p_a^* & + & \frac{1}{3}p_k^*\\ 1 & = & p_v^* & + & p_a^* & + & p_k^*\\ \hline \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcr} 0 & = & -p_v^* & & \frac{1}{2}p_a^* & + & \frac{1}{3}p_k^* \\ 0 & = & \frac{1}{3}p_v^* & - & p_a^* & + & \frac{1}{3}p_k^* \\ 0 & = & \frac{2}{3}p_v^* & + & \frac{1}{2}p_a^* & - & \frac{2}{3}p_k^* \\ 1 & = & p_v^* & + & p_a^* & + & p_k^* \\ \hline \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcr} 0 & = & p_v^* & - & \frac{1}{2}p_a^* & - & \frac{1}{3}p_k^* \\ 0 & = & & & p_a^* & - & \frac{8}{15}p_k^* \\ \frac{15}{32} & = & & & & & p_k^* \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} p_k^* = \frac{15}{32} \\ p_a^* = \frac{1}{4} \\ p_v^* = \frac{9}{32} \end{array}$$

Dakle, vektor finalnih verovatnoća je:

$$\begin{array}{ccc} v & a & k \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} \frac{9}{32} & \frac{1}{4} & \frac{15}{32} \end{bmatrix}.$$

Dobijene finalne verovatnoće tumačimo na sledeći način: ako posmatramo dovoljno dug vremenski period, možemo reći da Luka najčešće na posao ide kolima (sa verovatnoćom $\frac{15}{32}$), a sa verovatnoćama $\frac{9}{32}$ i $\frac{1}{4}$ redom, ide vozom odnosno autobusom.

6. Možemo koristiti geometrijsku definiciju verovatnoće. Obeležimo sa $\mathcal{P}(X)$ površinu oblasti $X \subseteq \mathbb{R}^2$.

   Metu možemo predstaviti kao oblast

   $$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 1 \right\},$$

   pri čemu je $\mathcal{P}(M) = \pi$ i $\mathsf{P}(M) = 1$.

   Događaju A odgovara oblast (vidi sliku 1)

   $$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \tfrac{1}{2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \tfrac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1 \right\},$$

   pri čemu je $\mathcal{P}(A) = \pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi$, odnosno $\mathsf{P}(A) = \frac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(M)} = \frac{3}{4}$.

   Događaju B odgovara oblast (vidi sliku 2)

   $$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 1 \;\land\; y \leq 0 \right\},$$

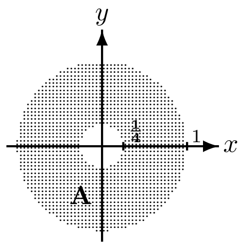
   pri čemu je $\mathcal{P}(B) = \frac{1}{2}\pi$, odnosno $\mathsf{P}(B) = \frac{\mathcal{P}(B)}{\mathcal{P}(M)} = \frac{1}{2}$.

   Događaju AB odgovara oblast (vidi sliku 3)

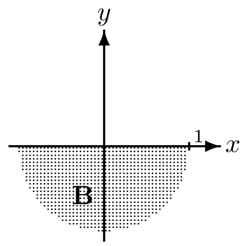
   $$A \cap B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \tfrac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1 \;\land\; y \leq 0 \right\},$$

   pri čemu je $\mathcal{P}(A \cap B) = \frac{3}{8}\pi$, odnosno $\mathsf{P}(AB) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(M)} = \frac{3}{8}$.

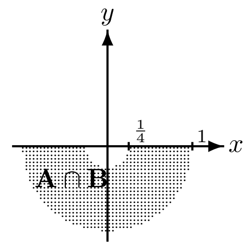
   Iz $\mathsf{P}(AB) = \frac{3}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B)$ sledi da su događaji A i B nezavisni.



slika 1



slika 2



slika 3

24.06.1999.

1. U šeširu se nalaze 4 bele kuglice. Tri puta se na slučajan način izvlači jedna kuglica i zamenjuje crnom kuglicom. Potom je na slučajan način izvučena jedna kuglica i videlo se da je bela. Koliko iznosi verovatnoća da su u šeširu tačno dve crne kuglice nakon opisanih zamena?

2. Slučajna promenljiva X ima Poasonovu raspodelu sa parametrom λ. Uslovna slučajna promenljiva $Y \mid \{X = x\}$ ima raspodelu datu formulom: $\mathsf{P}\left(Y = y \mid X = x\right) = \frac{\lambda^{y-x}}{(y-x)!}e^{-\lambda}$, $y = x, x+1, x+2, \ldots$ Pokazati da slučajna promenljiva $X \mid \{Y = y\}$ ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}\left(y, \frac{1}{2}\right)$.

3. Dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X, Y) ima raspodelu datu gustinom:
$$\varphi_{X,Y}\left(x, y\right) = A\left(x + y\right), \qquad 0 < x < 1, \ 0 < y < x^2.$$
   (a) Izračunati konstantu A.
   (b) Naći gustinu slučajne promenljive $Z = XY$.

4. Oceniti verovatnoću da je odstupanje relativne učestalosti broja dobijenih šestica u 100 bacanja kocke za "Ne ljuti se čoveče" od verovatnoće pojavljivanja šestice manja od 0.1:
   (a) pomoću nejednakosti Čebiševa,
   (b) pomoću teoreme Moavr - Laplasa.

5. Slučajna promenljiva X ima gustinu $\varphi_X\left(x\right) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Naći raspodelu slučajne promenljive
$$Y = \begin{cases} X\left(X + 4\right) & , \quad X \leq 1 \\ 5 & , \quad X > 1 \end{cases}.$$

6. Dva broda A i B treba da stignu u isto pristanište. Njihova vremena dolaska u pristanište su slučajna, međusobno nezavisna i jednakoverovatna u toku 24 sata. Kad brod A stigne u pristanište, on ostaje u njemu 2 sata, dok brod B nakon pristajanja ostaje u pristaništu do kraja posmatranog perioda. Pristanište ne može da odjednom primi oba broda.

(a) Naći verovatnoću da jedan od brodova čeka na oslobađanje pristaništa, dok drugi brod ne ode.

(b) Naći verovatnoću da će između dolaska brodova proći bar 10 sati.

Rešenja:

1. Primetimo da se nakon prve zamene u kutiji sigurno nalaze tri bele i jedna crna kuglica.

   Oznake događaja:

   B_i - "*nakon druge zamene se u kutiji nalazi* $i \in \{1,2\}$ *crnih kuglica*",
   H_i - "*nakon treće zamene se u kutiji nalazi* $i \in \{1,2,3\}$ *crnih kuglica*",
   A - "*nakon svih zamena je izvučena bela kuglica*".

   Nalazimo verovatnoće:

   $$\begin{array}{ll} \mathsf{P}(B_1) = \frac{1}{4}, & \mathsf{P}(B_2) = \frac{3}{4}, \\ \mathsf{P}(H_1 \mid B_1) = \frac{1}{4}, & \mathsf{P}(H_1 \mid B_2) = 0, \\ \mathsf{P}(H_2 \mid B_1) = \frac{3}{4}, & \mathsf{P}(H_2 \mid B_2) = \frac{2}{4}, \\ \mathsf{P}(H_3 \mid B_1) = 0, & \mathsf{P}(H_3 \mid B_2) = \frac{2}{4}. \end{array}$$

   Na osnovu formule totalne verovatnoće (B_1 i B_2 čine potpun sistem događaja) imamo da je

   $$\mathsf{P}(H_i) = \sum_{j=1}^{2} \mathsf{P}(B_j)\,\mathsf{P}(H_i \mid B_j), \quad i \in \{1,2,3\},$$

   odnosno: $\mathsf{P}(H_1) = \frac{1}{16}$, $\mathsf{P}(H_2) = \frac{9}{16}$, $\mathsf{P}(H_3) = \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{16}$.

   Koristeći Bajesovu formulu (H_1, H_2, H_3 čine potpun sistem događaja) dobijamo traženu verovatnoću:

   $$\mathsf{P}(H_2 \mid A) = \frac{\mathsf{P}(H_2)\,\mathsf{P}(A \mid H_2)}{\sum\limits_{i=1}^{3} \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(A \mid H_i)} = \frac{\frac{9}{16} \cdot \frac{2}{4}}{\frac{1}{16} \cdot \frac{3}{4} + \frac{9}{16} \cdot \frac{2}{4} + \frac{6}{16} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

2. Zakon raspodele slučajne promenljive X:

   $\mathsf{P}(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \ x \in \{0,1,2,\ldots\}$.

   Zakon raspodele uslovne slučajne promenljive $Y \mid \{X = x\}$:

   $$\mathsf{P}(Y = y \mid X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda^{y-x}}{(y-x)!} e^{-\lambda} & , \ y \in \{x, x+1, x+2, \ldots\} \\ 0 & , \ y \notin \{x, x+1, x+2, \ldots\} \end{cases}.$$

   Zakon raspodele slučajnog vektora (X,Y):

   $$\mathsf{P}(X = x, Y = y) = \mathsf{P}(X = x)\,\mathsf{P}(Y = y \mid X = x) =$$

   $$= \begin{cases} \frac{\lambda^{y}}{x!(y-x)!} e^{-2\lambda} & , \ x \in \{0,1,2,\ldots\} \ \wedge \ y \in \{x, x+1, x+2, \ldots\} \\ 0 & , \ \text{inače} \end{cases}.$$

Zakon raspodele slučajne promenljive Y : za $y < 0$ je $\mathsf{P}(Y = y) = 0$, a za $y \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ je

$\mathsf{P}(Y = y) = \sum\limits_{x=0}^{\infty} \mathsf{P}(X = x, Y = y) = \sum\limits_{x=0}^{y} \frac{\lambda^y}{x!(y-x)!} e^{-2\lambda} =$

$= \lambda^y e^{-2\lambda} \sum\limits_{x=0}^{y} \frac{1}{x!(y-x)!} \cdot \frac{y!}{y!} = \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{y!} \sum\limits_{x=0}^{y} \frac{y!}{x!(y-x)!} = \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{y!} \sum\limits_{x=0}^{y} \binom{y}{x} =$

$= \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{y!} \sum\limits_{x=0}^{y} \binom{y}{x} \cdot 1^x \cdot 1^{y-x} = \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{y!} (1+1)^y = \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{y!} 2^y = \frac{(2\lambda)^y e^{-2\lambda}}{y!}.$

Dakle, slučajna promenljiva Y ima Poasonovu raspodelu $\mathcal{P}(2\lambda)$.

Zakon raspodele slučajne promenljive $X \mid \{Y = y\}$ $(y \in \{0, 1, 2, \ldots\})$:

Za $x \notin \{0, 1, 2, \ldots, y\}$ je očigledno $\mathsf{P}(X = x \mid Y = y) = \frac{\mathsf{P}(X=x, Y=y)}{\mathsf{P}(Y=y)} = 0$,

a za $x \in \{0, 1, 2, \ldots, y\}$ je

$\mathsf{P}(X = x \mid Y = y) = \frac{\mathsf{P}(X=x, Y=y)}{\mathsf{P}(Y=y)} = \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{x!(y-x)!} \cdot \frac{y!}{(2\lambda)^y e^{-2\lambda}} =$

$= \frac{y!}{x!(y-x)!} \cdot \frac{\lambda^y}{(2\lambda)^y} = \binom{y}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^y = \binom{y}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{y-x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x.$

Prema tome, slučajna promenljiva $X \mid \{Y = y\}$ ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}\left(y, \frac{1}{2}\right)$.

3. Neka je $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < x < 1 \ \wedge\ 0 < y < x^2 \right\}$ (vidi sliku 1),

$$\varphi_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} A(x + y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}.$$

(a) $1 = \iint\limits_D \varphi_{X,Y}(x, y)\, dxdy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{x^2} A(x + y)\, dy \right) dx =$

$= A \int\limits_0^1 \left(xy \Big|_0^{x^2} + \frac{y^2}{2} \Big|_0^{x^2} \right) dx = A \int\limits_0^1 \left(x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \frac{7}{20} A,$

pa sledi da je $A = \frac{20}{7}$.

(b) <u>Prvi način</u>:

Posmatrajmo transformaciju $f : (X, Y) \to (U, Z)$ datu sa $U = X$, $Z = XY$. Transformacija f je neprekidna i monotona po obe komponente, a oblast D je ograničena krivama

$l_1 = \{ (x, 0) \mid 0 < x < 1 \}$, $l_2 = \{ (1, y) \mid 0 < y < 1 \}$,

$l_3 = \left\{ \left(x, x^2\right) \;\middle|\; 0 < x < 1 \right\}$,

odakle sledi da je oblast $D' = f(D)$ (vidi sliku 2) ograničena krivama

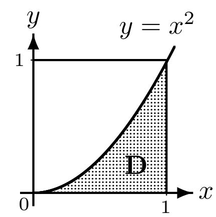
${l_1}' = \{ (u, 0) \mid 0 < u < 1 \}$, ${l_2}' = \{ (1, z) \mid 0 < z < 1 \}$,

${l_3}' = \left\{ \left(u, u^3\right) \;\middle|\; 0 < u < 1 \right\}$.

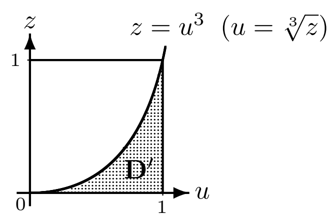
Dakle, $D' = \left\{ (u, z) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < u < 1 \ \wedge\ 0 < z < u^3 \right\}$.

Funkcija $f : D \to D'$ je bijektivna pa postoji inverzna funkcija $f^{-1} : D' \to D$, $f^{-1} : (U, Z) \to (X, Y)$ data sa $X = U$, $Y = \frac{Z}{U}$ (tj. $f^{-1}(u, z) = \left(u, \frac{z}{u}\right)$) i

$$\mathcal{J}_{f^{-1}}(u, z) = \begin{vmatrix} x_u & x_z \\ y_u & y_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{z}{u^2} & \frac{1}{u} \end{vmatrix} = \frac{1}{u}.$$



slika 1



slika 2

Dobijamo:

$$\varphi_{U,Z}(u, z) = \varphi_{X,Y}\left(f^{-1}(u, z)\right) \cdot \left|\mathcal{J}_{f^{-1}}(u, z)\right| =$$

$$= \varphi_{X,Y}\left(u, \frac{z}{u}\right) \cdot \frac{1}{u} = \begin{cases} \frac{20}{7}\left(1 + \frac{z}{u^2}\right) & , \ (u, z) \in D' \\ 0 & , \ (u, z) \notin D' \end{cases}.$$

Gustinu slučajne promenljive Z nalazimo kao marginalnu gustinu slučajnog vektora (U, Z). Za $z \in (0, 1)$ je:

$$\varphi_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_{U,Z}(u, z)\, du = \int\limits_{\sqrt[3]{z}}^{1} \frac{20}{7}\left(1 + \frac{z}{u^2}\right) du = \frac{20}{7} \frac{\sqrt[3]{z} - \sqrt[3]{z^2} - \sqrt[3]{z^4} + z}{\sqrt[3]{z}}.$$

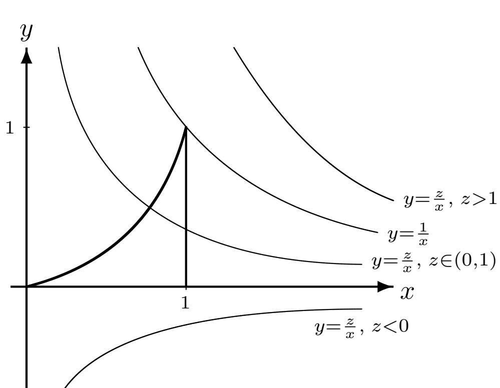
Dakle: $$\varphi_Z(z) = \begin{cases} \frac{20}{7}\left(1 - z + z^{\frac{2}{3}} - z^{\frac{1}{3}}\right) & , \ z \in (0, 1) \\ 0 & , \ z \notin (0, 1) \end{cases}.$$

Drugi način:

Kako slučajna promenljiva (X, Y) ne može imati vrednosti oblika $(0, y)$ (vidi oblast D), događaj $\{XY < z\}$ je ekvivalentan sa događajem $\left\{Y < \frac{z}{X}\right\}$ $(z \in \mathbb{R})$, tako da je

$$F_Z(z) = \mathsf{P}(Z < z) = \mathsf{P}(XY < z) = \mathsf{P}\left(Y < \frac{z}{X}\right) = \iint\limits_{S_z} \varphi_{X,Y}(x, y)\, dxdy$$

gde je $S_z = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y < \frac{z}{x} \right\} \cap D$ (vidi sliku 3).



slika 3

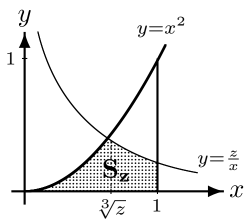
Za $z \leq 0$ je očigledno $S_z = \emptyset$, pa je $F_Z(z) = 0$.

Za $0 < z \leq 1$ (vidi sliku 4) je:

$$F_Z(z) = \int\limits_0^{\sqrt[3]{z}} \left(\int\limits_0^{x^2} \tfrac{20}{7}(x+y)\,dy \right) dx + \int\limits_{\sqrt[3]{z}}^{1} \left(\int\limits_0^{\frac{z}{x}} \tfrac{20}{7}(x+y)\,dy \right) dx =$$

$$= \tfrac{1}{7}\sqrt[3]{z^4}\left(5 + 2\sqrt[3]{z}\right) + \tfrac{10}{7}z\left(2 - 2\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{z^2} - z\right) =$$

$$= \tfrac{1}{7}z\left(20 - 15\sqrt[3]{z} + 12\sqrt[3]{z^2} - 10z\right).$$



slika 4

Za $1 < z$ je očigledno $S_z = D$, pa je $F_Z(z) = 1$.

Koristeći da je $\varphi_Z(z) = F'_Z(z)$, dobijamo

$$\varphi_Z(z) = \begin{cases} \frac{20}{7}\left(1 - z + z^{\frac{2}{3}} - z^{\frac{1}{3}}\right) & , \quad z \in (0,1) \\ 0 & , \quad z \notin (0,1) \end{cases}.$$

4. Neka je $X_i,\ i \in \{1,\dots,100\}$ slučajna promenljiva koja pretstavlja indikator događaja "*u i-tom bacanju kocke dobija se šestica*": $X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

   Slučajna promenljiva $X = \sum\limits_{i=1}^{100} X_i$ predstavlja broj dobijenih šestica u 100 bacanja kocke. Ona ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}\left(100, \frac{1}{6}\right)$ i

   $$\mathsf{E}(X) = 100 \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{50}{3} \quad \text{i} \quad \mathsf{D}(X) = 100 \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{125}{9}.$$

   Slučajna promenljiva $Y = \frac{1}{100}X$ predstavlja relativnu učestalost broja dobijenih šestica u 100 bacanja kocke, i za nju je

   $$\mathsf{E}(Y) = \tfrac{1}{100}\mathsf{E}(X) = \tfrac{1}{6} \quad \text{i} \quad \mathsf{D}(Y) = \tfrac{1}{100^2}\mathsf{D}(X) = \tfrac{1}{720}.$$

   (a) $\mathsf{P}(|Y - \mathsf{E}(Y)| < 0.1) = \mathsf{P}\left(\left|Y - \frac{1}{6}\right| < 0.1\right) =$

   $= 1 - \mathsf{P}\left(\left|Y - \frac{1}{6}\right| \geq 0.1\right) \overset{[1]}{\geq} 1 - \frac{\mathsf{D}(Y)}{0.1^2} = 1 - \frac{1}{720 \cdot 0.01} = 1 - \frac{5}{36} = \frac{31}{36}.$

   [1] - *Koristimo nejednakost Čebiševa.*

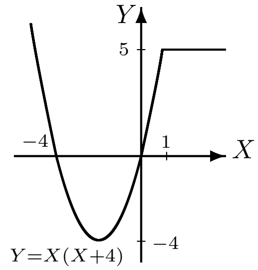
   (b) $\mathsf{P}(|Y - \mathsf{E}(Y)| < 0.1) = \mathsf{P}\left(\left|\frac{Y - \mathsf{E}(Y)}{\sqrt{\mathsf{D}(Y)}}\right| < \frac{0.1}{\sqrt{\mathsf{D}(Y)}}\right) =$

   $= \mathsf{P}\left(\left|\frac{Y - \mathsf{E}(Y)}{\sqrt{\mathsf{D}(Y)}}\right| < \frac{6}{\sqrt{5}}\right) \approx 2\phi\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right) - 1 \approx 2\phi(2.68) - 1 \approx$

   $\approx 2 \cdot 0.99632 - 1 \approx 0.9926.$

5. Gustina i funkcija raspodele slučajne promenljive X glase

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & , \quad x < 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x} & , \quad x \geq 0 \end{cases},$$



$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & , \quad x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & , \quad x > 0 \end{cases},$$

jer za $x \leq 0$ imamo

$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_X(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{t}dt = \frac{1}{2}e^{x}$,

a za $x > 0$ je

$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_X(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{t}dt + \int\limits_{0}^{x} \frac{1}{2}e^{-t}dt = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$.

Raspodela slučajne promenljive X se grana u tački $x = 0$. Na osnovu definicije slučajne promenljive Y ($Y = -4$ je minimalna vrednost, za $X > 1$ je $Y = 5$, i za $X = 0$ je $Y = 0$) nalazimo funkciju raspodele slučajne promenljive Y na sledeći način (vidi sliku):

- ▷ Za $y \leq -4$ je $F_Y(y) = 0$.
- ▷ Za $y \in (-4, 0]$ je ($x^2 + 4x = y$ je za $x_1 = -2 - \sqrt{4+y}$ i za $x_2 = -2 + \sqrt{4+y}$, pri čemu je $x_1 < 0$ i $x_2 \leq 0$):
  $F_Y(y) = \mathsf{P}(Y < y) = \mathsf{P}(x_1 < X < x_2) =$
  $= \mathsf{P}\left(-2 - \sqrt{4+y} < X < -2 + \sqrt{4+y}\right) =$
  $= F_X\left(-2 + \sqrt{4+y}\right) - F_X\left(-2 - \sqrt{4+y}\right) =$
  $= \frac{1}{2}\left(e^{-2+\sqrt{4+y}} - e^{-2-\sqrt{4+y}}\right)$.
- ▷ Za $y \in (0, 5]$ je ($x^2 + 4x = y$ je za $x_1 = -2 - \sqrt{4+y}$ i za $x_2 = -2 + \sqrt{4+y}$, pri čemu je $x_1 < 0$ i $0 < x_2 \leq 1$):
  $F_Y(y) = \mathsf{P}(Y < y) = \mathsf{P}(x_1 < X < x_2) =$
  $= \mathsf{P}\left(-2 - \sqrt{4+y} < X < -2 + \sqrt{4+y}\right) =$
  $= F_X\left(-2 + \sqrt{4+y}\right) - F_X\left(-2 - \sqrt{4+y}\right) =$
  $= 1 - \frac{1}{2}e^{2-\sqrt{4+y}} - \frac{1}{2}e^{-2-\sqrt{4+y}}$.
- ▷ Za $y \in (5, \infty)$ je ($x^2 + 4x = y \ \wedge\ x < 1$ je za $x_1 = -2 - \sqrt{4+y}$, pri čemu je $x_1 < 0$):
  $F_Y(y) = \mathsf{P}(Y < y) = \mathsf{P}(x_1 < X) = 1 - F_X\left(-2 - \sqrt{4+y}\right) =$
  $= 1 - \frac{1}{2}e^{-2-\sqrt{4+y}}$.

6. Brod A se zadržava u luci dva sata i za to vreme brod B ne može da pristane, a brod B se zadržava od momenta pristajanja pa do kraja posmatranog perioda, tako da ako brod B stigne u luku pre broda A,

tada brod A neće moći da pristane u luku. Obeležimo sa t_A, odnosno sa t_B, vremena dolaska brodova A i B u luku, tako da u koordinatnoj ravni vremena pristizanja brodova možemo predstaviti kao uređeni par (t_A, t_B), pri čemu siguran događaj možemo predstaviti kao kvadrat

$$K = \{ (t_A, t_B) \mid t_A \in [0, 24] \ \wedge \ t_B \in [0, 24] \} .$$

Obeležimo sa $m(X)$ površinu oblasti X. Pri tome je površina kvadrata $m(K) = 24^2 = 576$.

(a) Događajima M_1: "*brod A stiže posle broda B*" i M_2: "*brod B stiže posle broda A, ali najviše* 2 *sata posle*" odgovaraju disjunktne oblasti (vidi sliku 1)

$M_1 = \{ (t_A, t_B) \in K \mid t_B < t_A \}$ i

$M_2 = \{ (t_A, t_B) \in K \mid t_A < t_B < t_A + 2 \}$

(odgovarajući događaji su disjunktni). Površine ovih oblasti su:

$m(M_1) = \frac{576}{2} = 288 \quad$ i $\quad m(M_2) = 288 - \frac{(24-2)^2}{2} = 46.$

Verovatnoća traženog događaja je

$\mathsf{P}(M_1 + M_2) = \mathsf{P}(M_1) + \mathsf{P}(M_2) =$

$= \frac{m(M_1)}{m(K)} + \frac{m(M_2)}{m(K)} = \frac{288}{576} + \frac{46}{576} = \frac{167}{288} \approx 0.58.$

(b) Događajima L_1: "*brod A stiže bar* 10 *sati posle broda B*" i L_2: "*brod B stiže bar* 10 *sati posle broda A*" odgovaraju disjunktne oblasti (vidi sliku 2)

$L_1 = \{ (t_A, t_B) \in K \mid t_A \geq t_B + 10 \}$ i

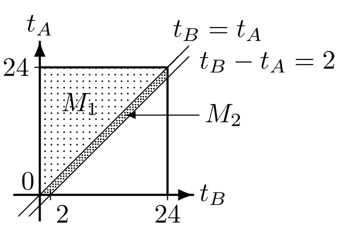
$L_2 = \{ (t_A, t_B) \in K \mid t_B \geq t_A + 10 \}$

(odgovarajući događaji su disjunktni). Površine ovih oblasti su:

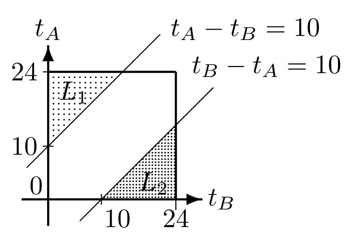
$$m(L_1) = m(L_2) = \frac{(24-10)^2}{2} = 98.$$

Verovatnoća traženog događaja je

$\mathsf{P}(L_1 + L_2) = \mathsf{P}(L_1) + \mathsf{P}(L_2) = \frac{m(L_1)}{m(K)} + \frac{m(L_2)}{m(K)} = 2 \cdot \frac{98}{576} = \frac{49}{144} \approx 0.34.$



slika 1



slika 2

15.07.1999.

1. Iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ na slučajan način se bira jedan broj, a zatim, bez vraćanja, još jedan.

(a) Naći verovatnoću da je drugi broj veći od prvog.

(b) Naći verovatnoću da je drugi broj za dva veći od prvog.

2. U kutiji je 8 belih i 2 crne kuglice.

   (a) Igrač A izvlači dva puta po jednu kuglicu bez vraćanja. Pri svakom izvlačenju bele kuglice on dobija 3 dinara, a pri svakom izvlačenju crne kuglice on plaća 5 dinara. Odrediti njegov očekivani dobitak.

   (b) Igrač B izvlačenja vrši sa vraćanjem, jer procenjuje da bi njegov očekivani dobitak u tom slučaju bio veći. Da li je on u pravu?

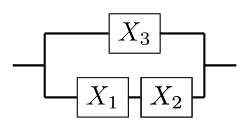
3. Neka su X i Y nezavisne slučajne promenljive sa $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelom. Naći raspodelu slučajne promenljive $Z = |Y - X|$.

4. Aparat sadrži dva tranzistora od kojih svaki nezavisno od drugog pregoreva sa verovatnoćom 0.1. Aparat je neispravan ako mu pregore oba tranzistora.

   (a) Naći verovatnoću da je aparat neispravan.

   (b) Posmatra se uzorak od 100 aparata. Koliki će biti najmanji broj M za koji je, sa verovatnoćom ne manjom od 0.985, broj neispravnih aparata u uzorku najviše M?

5. Tri prekidača su povezana u strujno kolo na slici. Dužine rada prekidača su nezavisne slučajne promenljive sa istom uniformnom raspodelom $\mathcal{U}(0,2)$. Naći raspodelu slučajne promenljive T koja predstavlja dužinu rada strujnog kola.



6. Gađa se sa n, $n \geq 2$ granata rezervoar nafte. Gađanja su nezavisna. Svaka granata pogađa rezervoar sa verovatnoćom p. Ako u rezervoar padne jedna granata, on se zapali sa verovatnoćom p_0, a ako padnu bar dve granate, on se sigurno zapali. Kolika je verovatnoća da će se rezervoar zapaliti?

Rešenja:

1. Prvi način:

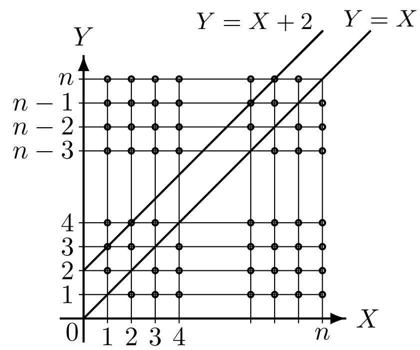
   Skup elementarnih događaja je

$$\Omega = \{ (x,y) \mid x, y \in \{1,2,\ldots,n\} \ \wedge \ x \neq y \}$$

   pri čemu su svi elementarni događaji jednakoverovatni, pa ćemo koristiti Laplasovu definiciju verovatnoće tj. verovatnoća događaja A je $\frac{m(A)}{m(\Omega)}$, gde je $m(D)$ broj elementarnih događaja koji čine događaj D. Pri tome je:

$$m(\Omega) = \mathrm{Card}(\Omega) = n^2 - n = n(n-1)$$

   (način izvlačenja je isti kao kad bi igrač odjednom izvlačio dve kuglice).



(a) Traženi događaj je $A = \{(x,y) \mid x,y \in \{1,\ldots,n\} \wedge x < y\}$. Broj čvorova na slici (elementarnih događaja) koji se nalaze iznad prave $X = Y$ je $m(A) = \frac{n^2-n}{2}$ pa je:

$$\mathsf{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1}{2}.$$

(b) Traženi događaj je $B = \{(x,y) \mid x \in \{1,2,\ldots,n-2\} \wedge y = x+2\}$. Broj čvorova na slici (elementarnih događaja) koji se nalaze na pravoj $Y = X + 2$ je $m(B) = n-2$ pa je:

$$\mathsf{P}(B) = \frac{m(B)}{m(\Omega)} = \frac{n-2}{n(n-1)}.$$

Drugi način:

Neka su $H_i,\ i \in \{1,2,\ldots,n\}$ događaji koji se realizuju kada je u prvom izvlačenju izvučen broj i. Familija $H_1, H_2, \ldots, H_n$ čini potpun sistem događaja, i pri tome je $\mathsf{P}(H_i) = \frac{1}{n}$ za svako $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

(a) Za događaj A: "*drugi izvučeni broj je veći od prvog*" važi

$$\mathsf{P}(A \mid H_i) = \frac{n-i}{n-1}, \quad i \in \{1,2,\ldots,n\}.$$

Na osnovu formule totalne verovatnoće je:

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(A \mid H_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{n-i}{n-1} =$$

$$= \frac{1}{n(n-1)}\left((n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1\right) = \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2}.$$

(b) Za događaj B: "*drugi izvučeni broj je za dva veći od prvog*" važi

$$\mathsf{P}(B \mid H_i) = \frac{1}{n-1}, \quad i \in \{1,2,\ldots,n-2\},$$

$$\mathsf{P}(B \mid H_{n-1}) = \mathsf{P}(B \mid H_n) = 0.$$

Na osnovu formule totalne verovatnoće je:

$$\mathsf{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(B \mid H_i) = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}(n-2)\frac{1}{n-1} = \frac{n-2}{n(n-1)}.$$

2. Neka su $H_i,\ i \in \{1,2\}$ događaji koji se realizuju kada je u i - tom izvlačenju izvučena bela kuglica.

(a) Događaji H_1 i H_2 u ovom slučaju nisu nezavisni. Neka slučajna promenljiva X predstavlja dobitak igrača A. Skup njenih vrednosti je $\mathcal{R}_X = \{-10, -2, 6\}$, a odgovarajuće verovatnoće su:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(X=-10) &= \mathsf{P}\left(\overline{H}_1\overline{H}_2\right) = \mathsf{P}\left(\overline{H}_1\right)\mathsf{P}\left(\overline{H}_2 \mid \overline{H}_1\right) = \tfrac{2}{10}\cdot\tfrac{1}{9} = \tfrac{1}{45},\\
\mathsf{P}(X=-2) &= \mathsf{P}\left(H_1\overline{H}_2 + \overline{H}_1 H_2\right) = \mathsf{P}\left(H_1\overline{H}_2\right) + \mathsf{P}\left(\overline{H}_1 H_2\right) =\\
&= \mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}\left(\overline{H}_2 \mid H_1\right) + \mathsf{P}\left(\overline{H}_1\right)\mathsf{P}\left(H_2 \mid \overline{H}_1\right) =\\
&= \tfrac{8}{10}\cdot\tfrac{2}{9} + \tfrac{2}{10}\cdot\tfrac{8}{9} = \tfrac{16}{45},\\
\mathsf{P}(X=6) &= \mathsf{P}(H_1H_2) = \mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}(H_2 \mid H_1) = \tfrac{8}{10}\cdot\tfrac{7}{9} = \tfrac{28}{45}.
\end{aligned}$$

Napomena: posmatrani model izvlačenja je isti kao da se obe kuglice izvlače odjednom, i tada dobijamo $\mathsf{P}(X=-10) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{45}$, $\mathsf{P}(X=-2) = \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{16}{45}$, $\mathsf{P}(X=6) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{28}{45}$.

Prema tome, zakon raspodele dobitka igrača A glasi

$$X : \begin{pmatrix} -10 & -2 & 6 \\ \frac{1}{45} & \frac{16}{45} & \frac{28}{45} \end{pmatrix},$$

a očekivani dobitak je $\mathsf{E}(X) = -10\cdot\frac{1}{45} - 2\cdot\frac{16}{45} + 6\cdot\frac{28}{45} = \frac{14}{5} = 2.8$.

(b) Događaji H_1 i H_2 su u ovom slučaju nezavisni. Neka slučajna promenljiva Y predstavlja dobitak igrača B. Skup njenih vrednosti je $\mathcal{R}_Y = \{-10, -2, 6\}$, a odgovarajuće verovatnoće su:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(Y=-10) &= \mathsf{P}\left(\overline{H}_1\overline{H}_2\right) = \mathsf{P}\left(\overline{H}_1\right)\mathsf{P}\left(\overline{H}_2\right) = \left(\tfrac{2}{10}\right)^2 = \tfrac{1}{25},\\
\mathsf{P}(Y=-2) &= \mathsf{P}\left(H_1\overline{H}_2 + \overline{H}_1 H_2\right) =\\
&= \mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}\left(\overline{H}_2\right) + \mathsf{P}\left(\overline{H}_1\right)\mathsf{P}(H_2) =\\
&= \tfrac{8}{10}\cdot\tfrac{2}{10} + \tfrac{2}{10}\cdot\tfrac{8}{10} = \tfrac{8}{25},\\
\mathsf{P}(Y=6) &= \mathsf{P}(H_1H_2) = \mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}(H_2) = \left(\tfrac{8}{10}\right)^2 = \tfrac{16}{25}.
\end{aligned}$$

Prema tome, zakon raspodele dobitka igrača B je

$$Y : \begin{pmatrix} -10 & -2 & 6 \\ \frac{1}{25} & \frac{8}{25} & \frac{16}{25} \end{pmatrix},$$

a očekivani dobitak je $\mathsf{E}(Y) = -10\cdot\frac{1}{25} - 2\cdot\frac{8}{25} + 6\cdot\frac{16}{25} = \frac{14}{5} = 2.8$.

Dakle, obe taktike su jednako efikasne, tako da igrač B nije u pravu.

3. $$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & , \ x > 0 \end{cases}, \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & , \ x > 0 \end{cases},$$

$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \ y \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda y} & , \ y > 0 \end{cases}, \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \ y \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda y} & , \ y > 0 \end{cases}.$$

Slučajne promenljive X i Y su nezavisne, pa gustina i raspodela slučajnog vektora (X, Y) glase:

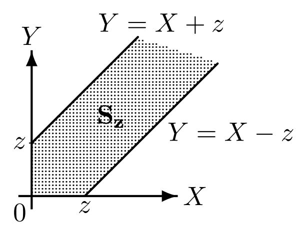
$$\varphi_{X,Y}(x,y) = \varphi_X(x)\,\varphi_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le 0 \vee y \le 0 \\ \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} & , \quad x > 0 \wedge y > 0 \end{cases},$$

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)\,F_Y(y) =$$
$$= \begin{cases} 0 & , \quad x \le 0 \vee y \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} - e^{-\lambda y} + e^{-\lambda(x+y)} & , \quad x > 0 \wedge y > 0 \end{cases}.$$

Prvi način:

Nađimo funkciju raspodele slučajne promenljive $Z = |Y - X|$ bez nalaženja njene gustine:

- Za $z \le 0$: $F_Z(z) = \mathsf{P}(Z < z) = \mathsf{P}(|Y - X| < z) = 0.$
- Za $z > 0$: neka je (vidi sliku 1)
  $S_z = \{(x,y) \mid x > 0 \wedge y > 0 \wedge |y - x| < z\} =$
  $= \{(x,y) \mid x > 0 \wedge y > 0 \wedge x - z < y < x + z\}.$



slika 1

$$F_Z(z) = \mathsf{P}(Z < z) = \mathsf{P}(|Y - X| < z) = \mathsf{P}(-z < Y - X < z) =$$
$$= \mathsf{P}((X,Y) \in S_z) = \iint\limits_{S_z} \varphi_{X,Y}(x,y)\,dxdy =$$
$$= \int_0^z \left(\int_0^{x+z} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} dy \right) dx + \int_z^\infty \left(\int_{x-z}^{x+z} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} dy \right) dx =$$
$$= \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \left(1 - e^{-\lambda(x+z)}\right) dx + \int_z^\infty \lambda \left(e^{-\lambda(2x-z)} - e^{-\lambda(2x+z)}\right) dx =$$
$$= \lambda \left(\int_0^z e^{-\lambda x} dx - \int_0^z e^{-\lambda(2x+z)} dx + \int_z^\infty e^{-\lambda(2x-z)} dx + \int_z^\infty e^{-\lambda(2x+z)} dx \right) =$$
$$= 1 - e^{-\lambda z} + \tfrac{1}{2} e^{-3\lambda z} - \tfrac{1}{2} e^{-\lambda z} + \tfrac{1}{2} e^{-\lambda z} - \tfrac{1}{2} e^{-3\lambda z} = 1 - e^{-\lambda z}.$$

Drugi način:

Posmatrajmo transformaciju $f : (X,Y) \to (U,V)$ definisanu sa $U = X$, $V = Y - X$. Njena inverzna transformacija $f^{-1} : (U,V) \to (X,Y)$ je $X = U$, $Y = U + V$ i Jakobijan te inverzne transformacije je

$$\mathcal{J}_{f^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Transformacijom f se oblast $D = \{(x,y) \mid x > 0 \ \wedge \ y > 0\}$ (vidi sliku 2) ograničena polupravama

$$
\begin{aligned}
&l_1 : \ x = 0, \ y > 0 \quad \Leftrightarrow \quad l_1 = \{(0,t) \mid t \in R^+\} \\
&l_2 : \ y = 0, \ x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad l_2 = \{(t,0) \mid t \in R^+\}
\end{aligned}
$$

preslikava u oblast $D' = \{(u,v) \mid u > 0 \ \wedge \ -u < v\}$ (vidi sliku 3) ograničenu polupravama

$$
\begin{aligned}
&l_1' = f(l_1) : \ u = 0, \ v > 0 \qquad \Leftrightarrow \quad l_1' = \{(0,t) \mid t \in R^+\} \\
&l_2' = f(l_2) : \ v = -u, \ u > 0 \quad \Leftrightarrow \quad l_2' = \{(t,-t) \mid t \in R^+\}
\end{aligned} .
$$

Tako dobijamo

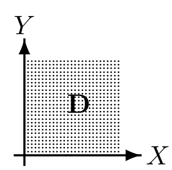
$\varphi_{U,V}(u,v) = \varphi_{X,Y}\left(f^{-1}(u,v)\right) \cdot \left|\mathcal{J}_{f^{-1}}(u,v)\right| = \varphi_{X,Y}(u, u+v) \cdot 1 =$

$= \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(2u+v)} & , \ (u,v) \in D' \\ 0 & , \ (u,v) \notin D' \end{cases} .$

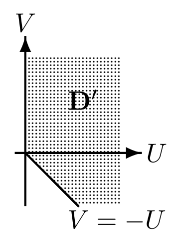
Gustinu raspodele slučajne promenljive V sada dobijamo kao marginalnu gustinu vektora (U,V): $\varphi_V(v) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_{U,V}(u,v)\,du = \ldots$

(a) Za $v \le 0$: $\varphi_V(v) = \int\limits_{-v}^{\infty} \lambda^2 e^{-2\lambda u} e^{-\lambda v} du = \frac{\lambda}{2} e^{\lambda v}$.

(b) Za $v > 0$: $\varphi_V(v) = \int\limits_{0}^{\infty} \lambda^2 e^{-2\lambda u} e^{-\lambda v} du = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda v}$.



slika 2



slika 3

Prema tome: $\varphi_V(v) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|v|}$, $v \in R$. Sada imamo da je $Z = |V|$ pa je

$F_Z(z) = \mathsf{P}(Z < z) = \mathsf{P}(|V| < z) = \begin{cases} 0 & , \ z \le 0 \\ \int\limits_{-z}^{z} \varphi_V(v)\,dv & , \ z > 0 \end{cases} =$

$= \begin{cases} 0 & , \ z \le 0 \\ \int\limits_{-z}^{z} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|v|} dv & , \ z > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , \ z \le 0 \\ 2\int\limits_{0}^{z} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda v} dv & , \ z > 0 \end{cases} =$

$= \begin{cases} 0 & , \ z \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda z} & , \ z > 0 \end{cases} .$

Dakle, slučajna promenljiva Z ima ekponencijalnu raspodelu $\mathcal{E}(\lambda)$.

4. (a) Tranzistori pregorevaju nezavisno, svaki sa verovatnoćom 0.1, pa verovatnoća neispravnosti aparata iznosi $p = 0.1 \cdot 0.1 = 0.01$.

(b) Neka slučajna promenljiva X_i, $i \in \{1,2,\ldots,100\}$ predstavlja indikator neispravnosti i - tog aparata (događaj $\{X_i = 1\}$ znači da je i - ti aparat neispravan, a događaj $\{X_i = 0\}$ znači da je i - ti aparat ispravan).

$$X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.99 & 0.01 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \mathsf{E}(X_i) = 0.01 \\ \mathsf{D}(X_i) = 0.0099 \end{array}, \ i \in \{1,2,\ldots,100\}.$$

Slučajna promenljiva $X = \sum\limits_{i=1}^{100} X_i$ predstavlja broj neispravnih aparata u uzorku obima 100 (X ima binomnu $\mathcal{B}(100, 0.01)$ raspodelu), pri čemu je (zbog osobina matematičkog očekivanja i disperzije sume nezavisnih slučajnih promenljivih)

$$\mathsf{E}(X) = 100 \cdot 0.01 = 1 \quad \text{i} \quad \mathsf{D}(X) = 100 \cdot 0.0099 = 0.99.$$

Broj M dobijamo rešavanjem nejednačine $\mathsf{P}(X \le M) \ge 0.985$:

$$0.985 \le \mathsf{P}(X \le M) = \mathsf{P}\left(\frac{X - \mathsf{E}(X)}{\sqrt{\mathsf{D}(X)}} \le \frac{M - \mathsf{E}(X)}{\sqrt{\mathsf{D}(X)}}\right) \approx \phi\left(\frac{M - \mathsf{E}(X)}{\sqrt{\mathsf{D}(X)}}\right),$$

odakle dobijamo:

$$\frac{M - \mathsf{E}(X)}{\sqrt{\mathsf{D}(X)}} \succeq \phi^{-1}(0.985) \approx 2.17 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad M \succeq 2.17\sqrt{\mathsf{D}(X)} + \mathsf{E}(X) \approx 2.17 \cdot 0.994987 + 1 \approx 3.1591.$$

Dakle, traženi broj M je 4.

5. Za sve $i \in \{1,2,3\}$ je

$$\varphi_{X_i}(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \notin [0,2] \\ \frac{1}{2} & , \ x \in [0,2] \end{cases}, \qquad F_{X_i}(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \le 0 \\ \frac{x}{2} & , \ x \in (0,2] \\ 1 & , \ 2 < x \end{cases}.$$

Slučajna promenljiva $U = \min\{X_1, X_2\}$ predstavlja vreme rada serijske veze $X_1 - X_2$, a pošto su slučajne promenljive X_i nezavisne, dobijamo

$$F_U(u) = \mathsf{P}(U < u) = \mathsf{P}(\min\{X_1,X_2\} < u) = 1 - \mathsf{P}(\min\{X_1,X_2\} \ge u) =$$

$$= 1 - \mathsf{P}(X_1 \ge u, X_2 \ge u) = 1 - \mathsf{P}(X_1 \ge u)\,\mathsf{P}(X_2 \ge u) =$$

$$= 1 - \left(1 - F_{X_1}(u)\right)\left(1 - F_{X_2}(u)\right) = \begin{cases} 0 & , \ u \le 0 \\ u - \frac{u^2}{4} & , \ u \in (0,2] \\ 1 & , \ 2 < u \end{cases}.$$

Konačno, slučajna promenljiva $T = \max\{U, X_3\}$ predstavlja vreme rada celog kola, a pošto su slučajne promenljive X_i nezavisne, tada su i slučajne promenljive U i X_3 nezavisne, pa dobijamo

$$F_T(t) = \mathsf{P}(T < t) = \mathsf{P}(\max\{U, X_3\} < t) = \mathsf{P}(U < t, X_3 < t) =$$

$$= \mathsf{P}(U < t)\,\mathsf{P}(X_3 < t) = F_U(t)\,F_{X_3}(t) = \begin{cases} 0 & , \ t \le 0 \\ \frac{1}{2}t^2\left(1 - \frac{t}{4}\right) & , \ t \in (0,2] \\ 1 & , \ 2 < t \end{cases}.$$

6. Neka slučajna promenljiva X predstavlja broj pogodaka. Označimo sa A posmatrani događaj: "*rezervoar je zapaljen*". Slučajna promenljiva X ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}(n,p)$.

Događaji $\{X=0\}$, $\{X=1\}$, $\{X\geq 2\}$ čine potpun sistem događaja, pa je

$$\mathsf{P}(A)=\mathsf{P}(X=0)\,\mathsf{P}(A\mid X=0)+\mathsf{P}(X=1)\,\mathsf{P}(A\mid X=1)+ \\ +\mathsf{P}(X\geq 2)\,\mathsf{P}(A\mid X\geq 2).$$

Po uslovima zadatka imamo:

$$\mathsf{P}(A\mid X=0)=0,\qquad \mathsf{P}(A\mid X=1)=p_0,\qquad \mathsf{P}(A\mid X\geq 2)=1,$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(X=0) &= \tbinom{n}{0}(1-p)^n=(1-p)^n,\\
\mathsf{P}(X=1) &= \tbinom{n}{1}p\,(1-p)^{n-1}=np\,(1-p)^{n-1},\\
\mathsf{P}(X\geq 2) &= 1-\mathsf{P}(X<2)=1-\left(\mathsf{P}(X=0)+\mathsf{P}(X=1)\right)=\\
&= 1-\Big((1-p)^n+np\,(1-p)^{n-1}\Big)=\\
&= 1-(1-p)^{n-1}\left(1+(n-1)\,p\right),
\end{aligned}$$

te tako dobijamo: $\qquad \mathsf{P}(A)=1-(1-p)^{n-1}\left(1-p\,(1-n+np_0)\right).$

04.09.1999.

1. U kutiji A se nalaze 2 bele i 5 crvenih kuglica, a u kutiji B se nalaze 4 bele i 4 crvene kuglice. Iz svake kutije se na slučajan način biraju po dve kuglice, a zatim se od ove 4 kuglice na slučajan način bira jedna. Ako se zna da je poslednja izabrana kuglica bele boje, koliko iznosi verovatnoća da ona potiče iz kutije B.

2. Slučajna promenljiva X ima zakon raspodele $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, a slučajna promenljiva Y ima uniformnu raspodelu $\mathcal{U}(0,2)$. Naći funkciju raspodele slučajne promenljive $Z=XY$.

3. Slučajna promenljiva X ima uniformnu $\mathcal{U}(1,2)$ raspodelu, a slučajna promenljiva Y za $X=x$ ima uniformnu $\mathcal{U}(x,x+1)$ raspodelu. Naći raspodelu slučajne promenljive $Z=\frac{Y-1}{X+1}$.

4. Lutrija je pustila u prodaju nagradnu igru. Cena jednog listića je 10 dinara. Verovatnoća da je listić dobitni iznosi 0.9. Dobitak svakog listića je nezavisan od ostalih. Ukoliko je kupljen "dobitni" listić, dobitak iznosi 100 dinara.

   (a) Pera je uložio 1000 dinara u nagradnu igru. Koliko iznosi verovatnoća da je njegov dobitak bar 9200 dinara?

   (b) Koliko najmanje novca treba uložiti pa da sa verovatnoćom većom od 0.95 dobijemo bar 10000 dinara?

5. Sistem se sastoji od uređaja X i Y čija su vremena rada slučajne promenljive koje imaju sledeće gustine:

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} \frac{k}{t+1} & , \quad t \in [0,1] \\ 0 & , \quad t \notin [0,1] \end{cases}, \qquad \varphi_Y(t) = \begin{cases} \frac{m}{t+2} & , \quad t \in [0,2] \\ 0 & , \quad t \notin [0,2] \end{cases}.$$

Sistem funkcioniše tako što se na početku aktivira uređaj X, a kada X prestane sa radom aktivira se uređaj Y, i nakon prestanka rada uređaja Y i sistem prestaje da funkcioniše.

(a) Izračunati konstante k i m.

(b) Naći očekivano vreme funkcionisanja sistema.

6. U vremenskom intervalu od 60 sekundi dva ovna u slučajnim trenucima kreću sa dva kraja brvna, i pri tome jednom treba 10, a drugom 20 sekundi da pređu brvno. U slučaju da se susretnu na brvnu, sa verovatnoćom $\frac{1}{3}$ jedan obara drugog, a sa verovatnoćom $\frac{2}{3}$ oba ovna padaju. Koliko iznosi verovatnoća da će oba ovna pasti s brvna?

7. U kutiji se nalaze tri kuglice koje mogu biti bele ili crne boje. Na slučajan način se izvlači jedna kuglica i zamenjuje se kuglicom suprotne boje. Stanje sistema nakon svake zamene definišemo brojem belih kuglica u kutiji.

   (a) Sastaviti matricu prelaza za jedan korak.

   (b) Ako su na početku u kutiji bile 1 bela i 2 crne kuglice, naći verovatnoću da će nakon dve zamene stanje u kutiji biti nepromenjeno.

   (c) Naći finalne verovatnoće.

8. Data je gustina obeležja X: $\varphi_X(x) = \frac{1}{2\lambda\sqrt{x}} e^{-\frac{\sqrt{x}}{\lambda}}$, $x > 0$.

   (a) Metodom maksimalne verodostojnosti naći ocenu parametra λ.

   (b) Pokazati da je nađena ocena centrirana.

   (c) χ^2 testom testirati saglasnost uzorka

I_i	$(0,1]$	$(1,2]$	$(2,4]$	$(4,6]$	$(6,+\infty)$
m_i	24	12	8	4	2

   sa datim obeležjem za $\lambda = 1$ i pragom značajnosti $\alpha = 0.05$.

Rešenja:

1. Oznake događaja: D - "*izvučena je bela kuglica*", A - "*izvučena kuglica je iz kutije A*", B - "*izvučena kuglica je iz kutije B*".

Događaji A i B čine potpun sistem događaja, a po uslovu zadatka važi

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B) = \tfrac{1}{2}, \qquad \mathsf{P}(D \mid A) = \tfrac{2}{7}, \qquad \mathsf{P}(D \mid B) = \tfrac{1}{2},$$

te je

$\mathsf{P}(D) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(D \mid A) + \mathsf{P}(B)\,\mathsf{P}(D)\,B = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{11}{28}.$

Traženu verovatnoću dobijamo na osnovu Bajesove formule:

$$\mathsf{P}(B \mid D) = \frac{\mathsf{P}(B)\,\mathsf{P}(D \mid B)}{\mathsf{P}(D)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{11}{28}} = \frac{7}{11}.$$

2. Funkcija raspodele slučajne promenljive Y je

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \quad y \le 0 \\ \frac{1}{2}y & , \quad 0 < y \le 2 \\ 1 & , \quad 2 < y \end{cases} .$$

Događaji $\{X = -1\}$ i $\{X = 0\}$ čine potpun sistem događaja pa je

$F_Z(z) = \mathsf{P}(Z < z) = \mathsf{P}(XY < z) =$

$= \mathsf{P}(X = -1)\,\mathsf{P}(XY < z \mid X = -1) + \mathsf{P}(X = 0)\,\mathsf{P}(XY < z \mid X = 0) =$

$= \frac{2}{3}\mathsf{P}(-Y < z) + \frac{1}{3}\mathsf{P}(0 < z) = \frac{2}{3}\mathsf{P}(Y > -z) + \frac{1}{3}\mathsf{P}(0 < z) =$

$= \frac{2}{3}(1 - \mathsf{P}(Y \le -z)) + \frac{1}{3}\mathsf{P}(0 < z) =$

$= \frac{2}{3}(1 - \mathsf{P}(Y < -z)) + \frac{1}{3}\mathsf{P}(0 < z) = \frac{2}{3}(1 - F_Y(-z)) + \frac{1}{3}\mathsf{P}(0 < z) = \ldots$

(a) Za $z \le -2$ $(\Leftrightarrow -z \ge 2)$ važi:
$F_Z(z) = \frac{2}{3}(1-1) + 0 = 0,$

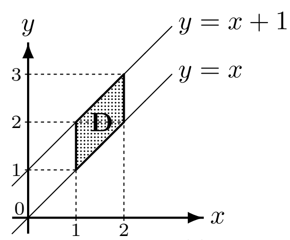
(b) za $z \in (-2, 0]$ $(\Leftrightarrow -z \in [0, 2))$ važi:
$F_Z(z) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{-z}{2}\right) + 0 = \frac{2+z}{3},$

(c) za $z > 0$ $(\Leftrightarrow -z < 0)$ važi:
$F_Z(z) = \frac{2}{3}(1-0) + \frac{1}{3} = 1.$

Prema tome: $$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & , \quad z \le -2 \\ \frac{2+z}{3} & , \quad z \in (-2, 0] \\ 1 & , \quad 0 < z \end{cases} .$$

3. $\varphi_X(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in [1,2] \\ 0 & , \quad x \notin [1,2] \end{cases},$

$\varphi_{Y \mid \{X=x\}}(y) = \begin{cases} 1 & , \quad y \in [x, x+1] \\ 0 & , \quad y \notin [x, x+1] \end{cases},$



slika 1

$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in [1,2] \ \wedge\ y \in [x, x+1] \right\}$ (vidi sliku 1), pri čemu je $m(D) = 1$ (površina oblasti D).

$\varphi_{X,Y}(x,y) = \varphi_X(x)\,\varphi_{Y \mid \{X=x\}}(y) = \begin{cases} 1 & , \quad (x,y) \in D \\ 0 & , \quad (x,y) \notin D \end{cases}.$

Posmatrajmo transformaciju $f : (X, Y) \to (U, Z)$ definisanu sa

$$Z = \frac{Y-1}{X+1} \quad \text{i} \quad U = X \qquad \left(f(x,y) = \left(x, \frac{y-1}{x+1} \right) \right).$$

Rešavajući sistem jednačina $z = \frac{y-1}{x+1} \ \wedge\ u = x$ po x i y (rešenja su $x = u \ \wedge\ y = (u+1)z + 1$) dobijamo inverznu transformaciju $(x,y) = f^{-1}(u,z) = (u, (u+1)z + 1)$.

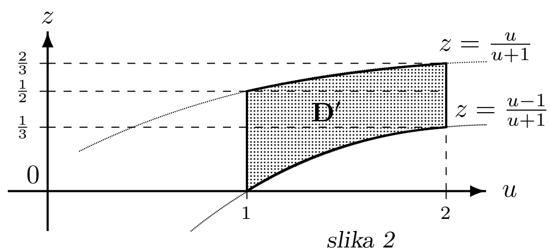
Transformacija f je neprekidna na oblasti D, a oblast D je ograničena pravama $l_1 : x = 1$, $l_2 : x = 2$, $l_3 : y = x$, $l_4 : y = x + 1$, odnosno

$l_1 = \{(1,y) \mid y \in \mathbb{R}\}, \quad l_2 = \{(2,y) \mid y \in \mathbb{R}\},$
$l_3 = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad l_4 = \{(x,x+1) \mid x \in \mathbb{R}\},$

pa je oblast $D' = f(D)$ ograničena krivama

$l_1' = f(l_1) = \{(1,z) \mid z \in \mathbb{R}\}, \qquad l_2' = f(l_2) = \{(2,z) \mid z \in \mathbb{R}\},$
$l_3' = f(l_3) = \left\{ \left(u, \frac{u-1}{u+1}\right) \,\middle|\, u \in \mathbb{R} \right\}, \quad l_4' = f(l_4) = \left\{ \left(u, \frac{u}{u+1}\right) \,\middle|\, u \in \mathbb{R} \right\},$

odnosno $l_1' : u = 1$, $l_2' : u = 2$, $l_3' : z = \frac{u-1}{u+1}$, $l_4' : z = \frac{u}{u+1}$,



slika 2

pa dobijamo da je $D' = \left\{ (u,z) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, u \in [1,2] \wedge z \in \left[\frac{u-1}{u+1}, , \frac{u}{u+1}\right] \right\}$ (vidi sliku 2). Jakobijan inverzne transformacije f^{-1} je:

$$\mathcal{J}_{f^{-1}}^{-1}(u,z) = \begin{vmatrix} x_u & x_z \\ y_u & y_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ z & u+1 \end{vmatrix} = u+1.$$

Tako dolazimo do gustine vektora (U,Z) :

$\varphi_{U,Z}(u,z) = \varphi_{X,Y}\left(f^{-1}(u,z)\right) \left|\mathcal{J}_{f^{-1}}^{-1}(u,z)\right| =$

$= \varphi_{X,Y}(u,(u+1)z+1)\,|u+1| = \begin{cases} u+1 & , \ (u,z) \in D' \\ 0 & , \ (u,z) \notin D' \end{cases},$

i do gustine slučajne promenljive Z:

$\varphi_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_{U,Z}(u,z)\,du = \ldots$

(a) Za $z \notin \left[0, \frac{2}{3}\right]$ je: $\quad \varphi_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} 0du = 0.$

(b) Za $z \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ je:

$$\varphi_Z(z) = \int\limits_1^{\frac{1+z}{1-z}} (u+1)\,du = \frac{(u+1)^2}{2} \Big|_1^{\frac{1+z}{1-z}} = \frac{1}{2(1-z)^2} - 2.$$

(c) Za $z \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ je:

$$\varphi_Z(z) = \int\limits_1^2 (u+1)\,du = \frac{(u+1)^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2}.$$

(d) Za $z \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ je:

$$\varphi_Z(z) = \int\limits_{\frac{z}{1-z}}^2 (u+1)\,du = \frac{(u+1)^2}{2} \Big|_{\frac{z}{1-z}}^2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2(1-z)^2}.$$

4. Obeležimo sa X broj dobitnih od n kupljenih listića.

$X : \mathcal{B}(n, 0.9), \qquad \mathsf{E}(X) = 0.9n, \qquad \mathsf{D}(X) = 0.09n.$

(a) $n = \frac{1000}{10} = 100, \qquad X : \mathcal{B}(100, 0.9), \qquad \mathsf{E}(X) = 90, \qquad \mathsf{D}(X) = 9.$
Treba da je broj dobitnih listića veći ili jednak sa $\frac{9200}{100} = 92$, tako da je tražena verovatnoća

$\mathsf{P}(X \geq 92) = 1 - \mathsf{P}(X < 92) = 1 - \mathsf{P}\left(\frac{X - \mathsf{E}(X)}{\sqrt{\mathsf{D}(X)}} \leq \frac{92 - \mathsf{E}(X)}{\sqrt{\mathsf{D}(X)}}\right) \overset{[1]}{=}$

$= 1 - \mathsf{P}\left(X^* \leq \frac{92-90}{\sqrt{9}}\right) \approx 1 - \mathsf{P}(X^* \leq 0.67) \approx 1 - \phi(0.67) \approx$

$\approx 1 - 0.7486 \approx 0.2514.$

(b) Tražimo n za koje će broj dobitnih listića biti bar $\frac{10000}{100} = 100$ sa verovatnoćom od 0.95 ili većom, odnosno rešavamo po n nejednačinu $\mathsf{P}(X \geq 100) \geq 0.95$. Kako je

$\mathsf{P}(X \geq 100) \geq 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \mathsf{P}(X < 100) \geq 0.95 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad 1 - \mathsf{P}\left(\frac{X - 0.9n}{\sqrt{0.09n}} < \frac{100 - 0.9n}{\sqrt{0.09n}}\right) \geq 0.95 \quad \overset{[1]}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \quad 1 - \mathsf{P}\left(X^* < \frac{100-0.9n}{0.3\sqrt{n}}\right) \geq 0.95 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(X^* < \frac{100-0.9n}{0.3\sqrt{n}}\right) \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad \phi\left(\frac{100-0.9n}{0.3\sqrt{n}}\right) \preceq 0.05 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \frac{100-0.9n}{0.3\sqrt{n}} \preceq \phi^{-1}(0.05) \approx -1.645 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad 0.9n - 0.4935\sqrt{n} - 100 \succeq 0 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \left(0.9t^2 - 0.4935t - 100 \succeq 0 \ \wedge \ t = \sqrt{n}\right) \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad ((t \succeq 10.8187 \ \vee \ t \preceq -10.2703) \ \wedge \ t = \sqrt{n}) \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad (t \succeq 10.8187 \ \wedge \ t = \sqrt{n}) \quad \Leftrightarrow \quad n = t^2 \succeq 10.8187^2 \approx 117.0443,$

treba da je $n \geq 118$, odnosno ulog treba da je bar $118 \cdot 10 = 1180$ dinara.

[1] - *Na osnovu centralne granične teoreme je*

$X^* = \frac{X - \mathsf{E}(X)}{\sqrt{\mathsf{D}(X)}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$

5. (a) Iz uslova

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(t)\, dt = \int\limits_{0}^{1} \frac{k}{t+1} dt = k \cdot \ln 2 = 1,$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_Y(t)\, dt = \int\limits_{0}^{2} \frac{m}{t+2} dt = m \cdot \ln 2 = 1,$

dobijamo da je $k = \frac{1}{\ln 2}$ i $m = \frac{1}{\ln 2}$.

(b) Obeležimo sa Z slučajnu promenljivu koja pretstavlja vreme rada sistema. Na osnovu opisanog načina rada imamo da je $Z = X + Y$ i traži se $\mathsf{E}(Z)$. Imamo

$\mathsf{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t\varphi_X(t)\, dt = \frac{1}{\ln 2} \int\limits_{0}^{1} \frac{t}{t+1} dt = \frac{1}{\ln 2} \int\limits_{0}^{1} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt =$

$= \frac{1}{\ln 2}(1 - \ln 2) = \frac{1}{\ln 2} - 1,$

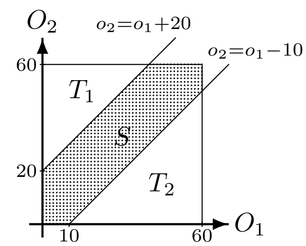
$$\mathsf{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} t\varphi_Y(t)\,dt = \frac{1}{\ln 2}\int_0^2 \frac{t}{t+2}dt = \frac{1}{\ln 2}\int_0^2 \left(1 - \frac{2}{t+2}\right)dt =$$
$$= \frac{1}{\ln 2}(2 - 2\ln 2) = \frac{2}{\ln 2} - 2,$$

$$\mathsf{E}(Z) = \mathsf{E}(X) + \mathsf{E}(Y) = 3\left(\frac{1}{\ln 2} - 1\right).$$

6. Označimo događaje: S - "*došlo je do susreta na brvnu*",
   A - "*oba ovna padaju sa brvna*".

   Koristeći formulu totalne verovatnoće imamo
   $$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(S)\,\mathsf{P}(A \mid S) + \mathsf{P}(\overline{S})\,\mathsf{P}(A \mid \overline{S}).$$
   Po uslovu zadatka je $\mathsf{P}(A \mid S) = \frac{2}{3}$ i $\mathsf{P}(A \mid \overline{S}) = 0$, te je $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(S)\,\mathsf{P}(A \mid S)$.

   Možemo koristiti geometrijsku interpretaciju verovatnoće. Označimo sa $m(X)$ površinu oblasti $X \subseteq \mathbb{R}^2$. Vremena kretanja ovnova preko brvna možemo predstaviti uređenim parom $(o_1, o_2) \in K$, gde je K kvadrat sa temenima $(0,0)$, $(60,0)$, $(60,60)$, $(0,60)$. Događaj S možemo u ravni predstaviti (vidi sliku) kao oblast:

   $S = \{(o_1, o_2) \mid o_1 - 10 < o_2 < o_1 + 20\} = K \setminus (T_1 \cup T_2)$.

   Sada dobijamo:
   $$m(K) = 60^2 = 3600, \qquad m(T_1) = \frac{40^2}{2} = 800, \qquad m(T_2) = \frac{50^2}{2} = 1250,$$
   odakle sledi
   $$\mathsf{P}(S) = \frac{m(S)}{m(K)} = \frac{m(K) - m(T_1) - m(T_2)}{m(K)} = \frac{31}{72},$$
   odnosno: $\mathsf{P}(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{31}{72} = \frac{31}{108} \approx 0.2870$.

7. Moguće vrednosti slučajnog procesa su $0, 1, 2, 3$.

   (a) Matrice prelaza za jedan i za dva koraka su:

   $$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad P^2 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{7}{9} & 0 & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{7}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{array}.$$

   (b) Vektor početne raspodele: $\mathbf{p}^0 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$.

   Vektor raspodele nakon dva koraka:
   $$\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}^0 \cdot P^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{9} & 0 & \frac{2}{9} \end{bmatrix} \end{array}.$$
   Prema tome, verovatnoća da stanje nakon dva koraka ostaje nepromenjeno iznosi $p_1(2) = \frac{7}{9}$.

(c) Finalne verovatnoće p_j^*, $j \in \{0,1,2,3\}$ nalazimo rešavanjem sistema: $[p_0^* \ p_1^* \ p_2^* \ p_3^*] \cdot P = [p_0^* \ p_1^* \ p_2^* \ p_3^*] \quad \wedge \quad p_0^* + p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1.$

$$\begin{array}{ccccccccc} p_0^* & + & p_1^* & + & p_2^* & + & p_3^* & = & 1 \\ & & \frac{1}{3}p_1^* & & & & & = & p_0^* \\ p_0^* & & & + & \frac{2}{3}p_2^* & & & = & p_1^* \\ & & \frac{2}{3}p_1^* & & & + & p_3^* & = & p_2^* \\ & & & & \frac{1}{3}p_2^* & & & = & p_3^* \\ \hline \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccccc} p_0^* & + & p_1^* & + & p_2^* & + & p_3^* & = & 1 \\ & & p_1^* & + & \frac{3}{4}p_2^* & + & \frac{3}{4}p_3^* & = & \frac{3}{4} \\ & & & & p_2^* & + & \frac{3}{7}p_3^* & = & \frac{3}{7} \\ & & & & & & p_3^* & = & \frac{1}{8} \\ \hline \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} p_3^* = \frac{1}{8} \\ p_2^* = \frac{3}{8} \\ p_1^* = \frac{3}{8} \\ p_0^* = \frac{1}{8} \end{array}$$

dobijamo

$$\mathbf{p}^* = \begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \left[\begin{matrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{matrix} \right] \end{array}.$$

8. (a) $L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_X(x_i;\lambda) = 2^{-n}\lambda^{-n}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right)$,

$\ln L(\lambda) = -n\ln 2 - n\ln\lambda - \frac{1}{2}\ln\prod_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}$,

$\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial\lambda} = -\frac{n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}$.

Odnosno, dobili smo ocenu: $\quad \hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{X_i}$.

(b) $\mathsf{E}\left(\hat{\lambda}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}\left(\sqrt{X_i}\right) = \frac{1}{n}n\mathsf{E}\left(\sqrt{X}\right) = \mathsf{E}\left(\sqrt{X}\right) =$
$= \int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{x}\cdot\varphi_X(x)\,dx = \int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{2\lambda\sqrt{x}}\cdot\exp\left(-\frac{\sqrt{x}}{\lambda}\right)dx =$
$= \frac{1}{2\lambda}\cdot\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{\sqrt{x}}{\lambda}\right)dx \stackrel{[1]}{=} \lambda\int_0^{\infty} t\exp(-t)\,dt = \lambda\Gamma(2) = \lambda.$

[1] - *Smenom* $\frac{\sqrt{x}}{\lambda} = t.$

Dakle, ocena je centrirana.

(c) Funkcija raspodele slučajne promenljive X glasi:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le 0 \\ \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}dx & , \quad x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , \quad x \le 0 \\ 1 - e^{-\sqrt{x}} & , \quad x > 0 \end{cases} ,$$

a u tablici spajamo poslednja dva intervala da bi svako m_i bilo najmanje 5. Obim uzorka je: $n = 24+12+8+6 = 50$. Odgovarajuće teorijske verovatnoće p_i dobijamo na sledeći način:

$p_i = \mathsf{P}(X \in (a_i, b_i]) = F_X(b_i) - F_X(a_i)$.

Prema tome, χ^2 test primenjujemo na sledeće podatke:

$(a_i, b_i]$	$(0,1]$	$(1,2]$	$(2,4]$	$(4,+\infty)$
m_i	24	12	8	6
p_i	0.6321	0.1248	0.1078	0.1353
np_i	31.606	6.238	5.389	6.767

Sada dobijamo:

$$\chi_3^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(np_i - m_i)^2}{np_i} \approx 8.51 > \chi^2_{4-1-0;0.05} \approx 7.81,$$

što znači da hipotezu odbacujemo.

27.09.1999.

1. U kutiji se nalaze 4 ispravna i 2 neispravna proizvoda. Na slučajan način se izvlači grupa od 3 proizvoda i ako među njima ima neispravnih, svi se vraćaju. Ako je grupa proizvoda vraćena, koliko iznosi verovatnoća da je vraćena zato što su u njoj bila 2 neispravna?

2. Baca se kockica za "Čoveče ne ljuti se". Ako padne paran broj, baca se još jedna, a ako padne neparan broj, bacaju se još dve kockice. Označimo sa X ukupan broj pojavljivanja dvojke, a sa Y ukupan broj pojavljivanja trojke.

   (a) Naći zajedničku raspodelu slučajnog vektora (X, Y).

   (b) Naći $\mathsf{E}(Y \mid X = 1)$.

3. Dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X, Y) data je gustinom
$$\varphi_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{12}{7}\left(x^2+y\right) & , \quad (x,y) \in T \\ 0 & , \quad (x,y) \notin T \end{cases},$$
   gde je T oblast: $0 < x < 1$, $1 - x < y < 1$.

   (a) Naći raspodelu slučajne promenljive $Z = X^2 + Y$.

   (b) Izračunati verovatnoću $\mathsf{P}\left(1 < Z < \frac{3}{2}\right)$.

4. Količina praška u jednoj kesi ima očekivanu vrednost $a = 3.6\ kg$ sa standardnim odstupanjem $\sigma = 0.05\ kg$. Količina praška u jednoj kesi u sanduku je nezavisna od količine praška u ostalim kesama. Koliko najviše može biti kesa u sanduku pa da ukupna količina praška bude manja od $400\ kg$ sa verovatnoćom 0.9?

5. Za ocenu nepoznatog parametra m u obeležju sa normalnom raspodelom $\mathcal{N}(m,1)$ predložene su ocene:

$$\theta_1 = nX_1 - (X_2 + X_3 + \ldots + X_n),$$
$$\theta_2 = (n-1)\,\tfrac{X_1+X_2}{2} - (X_3 + X_4 + \ldots + X_n).$$

   (a) Ispitati centriranost datih ocena.

   (b) Koja ocena je efikasnija?

6. Troje dece se dodaju loptom. Anica sa istom verovatnoćom dodaje Branku i Cani, Branko dvostruko verovatnije dodaje Anici nego Cani, Cana uvek dodaje Branku. Vreme leta lopte je zanemarljivo malo, deca podjednako dugo zadržavaju loptu.

   (a) Ako dodavanje traje "dovoljno dugo", koliki deo vremenskog perioda je lopta kod kojeg deteta?

   (b) Dodajmo uslov da devojčice u 10% dodavanja ispuštaju loptu, i u takvom slučaju se igra prekida. Ako je lopta na početku bila kod Branka, koliko iznosi verovatnoća da će biti više od četiri dodavanja?

7. Dva tenisera igraju u dva uzastopna dobijena seta. Prvi igrač dobija pojedinačni set sa verovatnoćom 0.7, a drugi sa 0.3. Slučajna promenljiva X predstavlja broj odigranih setova.

   (a) Naći raspodelu slučajne promenljive X.

   (b) Naći karakterističnu funkciju slučajne promenljive X i pomoću karakteristične funkcije matematičko očekivanje.

8. Na simpozijumu od 40 učesnika, njih 30 govori srpski jezik, 12 mađarski i 3 slovački, 6 govori srpski i mađarski, 2 srpski i slovački i 2 mađarski i slovački. Jedan učesnik govori sva tri jezika. Naći verovatnoću da slučajno odabran učesnik ne govori ni jedan od navedenih jezika.

9. χ^2 testom sa pragom značajnosti $\alpha = 0.05$ testirati hipotezu da dati uzorak ne protivureči normalnoj raspodeli $\mathcal{N}(m,4)$:

$(1,3]$	$(3,5]$	$(5,8]$	$(8,12]$	$(12,15]$	$(15,17]$
2	3	7	10	11	7

Rešenja:

1. Označimo sa $H_i,\ i \in \{0,1,2\}$ broj neispravnih od tri izvučena proizvoda, pri čemu je $A = H_1 + H_2$ događaj koji označava da su tri izvučena proizvoda vraćena u kutiju. Verovatnoće ovih događaja su:

$$\mathsf{P}(H_0) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}, \qquad \mathsf{P}(H_1) = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{6\cdot 2}{20} = \frac{3}{5},$$
$$\mathsf{P}(H_2) = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{6}{3}} = 1 - \mathsf{P}(H_0) - \mathsf{P}(H_1) = \frac{1}{5}.$$

Tražena verovatnoća je:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(H_2 \mid A) = \frac{\mathsf{P}(H_2 A)}{\mathsf{P}(A)} &= \frac{\mathsf{P}(H_2 (H_1 + H_2))}{\mathsf{P}(H_1 + H_2)} = \\
&= \frac{\mathsf{P}(H_2)}{\mathsf{P}(H_1) + \mathsf{P}(H_2)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5} + \frac{1}{5}} = \frac{1}{4},
\end{aligned}
$$

gde smo koristili da su H_1 i H_2 disjunktni događaji.

2. Označimo sa A, B, C slučajne promenljive koje predstavljaju redom brojeve dobijene pri prvom, drugom, trećem bacanju kockice, pri čemu ćemo smatrati npr. da C uzima vrednost 0 ako trećeg bacanja uopšte nema (u prvom bacanju je pao paran broj). Iz formulacije zadatka vidimo da su (A, B) i (B, C) parovi nezavisnih slučajnih promenljivih, dok slučajne promenljive A i C nisu nezavisne. Za ove slučajne promenljive imamo sledeće zakone raspodele:

$$\mathsf{P}(A = k) = \mathsf{P}(B = k) = \tfrac{1}{6}, \quad k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$\mathsf{P}(C = 0) = \mathsf{P}(A \in \{2, 4, 6\}) = \tfrac{1}{2},$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(C = k) &= \mathsf{P}(A \in \{2, 4, 6\})\, \mathsf{P}(C = k \mid A \in \{2, 4, 5\}) + \\
&\quad + \mathsf{P}(A \in \{1, 3, 5\})\, \mathsf{P}(C = k \mid A \in \{1, 3, 5\}) = \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot 0 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{12}, \quad k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.
\end{aligned}
$$

Skupovi mogućih vrednosti slučajnih promenljivih X i Y su redom $\mathcal{R}_X = \{0, 1, 2\}$ i $\mathcal{R}_Y = \{0, 1, 2, 3\}$. Koristeći navedene slučajne promenljive i događaje $K_n = \{A \in \{1, 3, 5\}\}$ i $K_p = \{A \in \{2, 4, 6\}\}$ koji čine potpun sistem događaja, pri čemu je $\mathsf{P}(K_n) = \mathsf{P}(K_p) = \frac{1}{2}$, dolazimo do zakona raspodele slučajnog vektora (X, Y) :

$$
\begin{aligned}
p_{i,j} &= \mathsf{P}(X = i, Y = j) = \\
&= \mathsf{P}(K_n)\, \mathsf{P}(X = i, Y = j \mid K_n) + \mathsf{P}(K_p)\, \mathsf{P}(X = i, Y = j \mid K_p) = \\
&= \mathsf{P}(K_n) \tfrac{\mathsf{P}(X=i, Y=j, K_n)}{\mathsf{P}(K_n)} + \mathsf{P}(K_p) \tfrac{\mathsf{P}(X=i, Y=j, K_p)}{\mathsf{P}(K_p)} = \\
&= \mathsf{P}(X = i, Y = j, K_n) + \mathsf{P}(X = i, Y = j, K_p) = \\
&= \mathsf{P}(X = i, Y = j, A \in \{1, 3, 5\}) + \mathsf{P}(X = i, Y = j, A \in \{2, 4, 6\}), \\
&\quad (i, j \in \mathcal{R}_X \times \mathcal{R}_Y).
\end{aligned}
$$

Dakle:

$$
\begin{aligned}
p_{0,0} &= \mathsf{P}(X = 0, Y = 0, A \in \{1, 3, 5\}) + \mathsf{P}(X = 0, Y = 0, A \in \{2, 4, 6\}) = \\
&= \mathsf{P}(A \in \{1, 5\}, B \in \{1, 4, 5, 6\}, C \in \{1, 4, 5, 6\}) + \\
&\quad + \mathsf{P}(A \in \{4, 6\}, B \in \{1, 4, 5, 6\}, C = 0) = \\
&= \mathsf{P}(A \in \{1, 5\}, B \in \{1, 4, 5, 6\}, C \in \{1, 4, 5, 6\}) + \\
&\quad + \mathsf{P}(A \in \{4, 6\}, B \in \{1, 4, 5, 6\}) = \tfrac{2}{6} \cdot \tfrac{4}{6} \cdot \tfrac{4}{6} + \tfrac{2}{6} \cdot \tfrac{4}{6} = \tfrac{80}{216},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{0,1} &= \mathsf{P}\left(X=0, Y=1, A \in \{1,3,5\}\right) + \mathsf{P}\left(X=0, Y=1, A \in \{2,4,6\}\right) = \\
&= \Big(\mathsf{P}\left(A=3, B \in \{1,4,5,6\}, C \in \{1,4,5,6\}\right) + \\
&\quad + \mathsf{P}\left(A \in \{1,5\}, B=3, C \in \{1,4,5,6\}\right) + \\
&\quad + \mathsf{P}\left(A \in \{1,5\}, B \in \{1,4,5,6\}, C=3\right)\Big) + \\
&\quad + \mathsf{P}\left(A \in \{4,6\}, B=3, C=0\right) = \\
&= \left(\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{4}{6}\cdot\tfrac{4}{6} + \tfrac{2}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{4}{6} + \tfrac{2}{6}\cdot\tfrac{4}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\right) + \tfrac{2}{6}\cdot\tfrac{1}{6} = \tfrac{44}{216},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{0,2} &= \mathsf{P}\left(X=0, Y=2, A \in \{1,3,5\}\right) + \mathsf{P}\left(X=0, Y=2, A \in \{2,4,6\}\right) = \\
&= \left(2\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{4}{6} + \tfrac{2}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\right) + 0 = \tfrac{10}{216},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{0,3} &= \mathsf{P}\left(X=0, Y=3, A \in \{1,3,5\}\right) + \mathsf{P}\left(X=0, Y=3, A \in \{2,4,6\}\right) = \\
&= \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6} + 0 = \tfrac{1}{216},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{1,0} &= \mathsf{P}\left(X=1, Y=0, A \in \{1,3,5\}\right) + \mathsf{P}\left(X=1, Y=0, A \in \{2,4,6\}\right) = \\
&= \left(\tfrac{2}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{4}{6} + \tfrac{2}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\right) + \left(\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{4}{6} + \tfrac{2}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\right) = \tfrac{52}{216},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{1,1} &= \mathsf{P}\left(X=1, Y=1, A \in \{1,3,5\}\right) + \mathsf{P}\left(X=1, Y=1, A \in \{2,4,6\}\right) = \\
&= \left(\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{4}{6} + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{4}{6}\cdot\tfrac{1}{6} + \tfrac{2}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6} + \tfrac{2}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\right) + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6} = \tfrac{18}{216},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{1,2} &= \mathsf{P}\left(X=1, Y=2, A \in \{1,3,5\}\right) + \mathsf{P}\left(X=1, Y=2, A \in \{2,4,6\}\right) = \\
&= \left(\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\right) + 0 = \tfrac{2}{216},
\end{aligned}
$$

$$
p_{1,3} = \mathsf{P}\left(X=1, Y=3, A \in \{1,3,5\}\right) + \mathsf{P}\left(X=1, Y=3, A \in \{2,4,6\}\right) = 0,
$$

$$
\begin{aligned}
p_{2,0} &= \mathsf{P}\left(X=2, Y=0, A \in \{1,3,5\}\right) + \mathsf{P}\left(X=2, Y=0, A \in \{2,4,6\}\right) = \\
&= \tfrac{2}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6} = \tfrac{8}{216},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{2,1} &= \mathsf{P}\left(X=2, Y=1, A \in \{1,3,5\}\right) + \mathsf{P}\left(X=2, Y=1, A \in \{2,4,6\}\right) = \\
&= \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6} + 0 = \tfrac{1}{216},
\end{aligned}
$$

$$
p_{2,2} = \mathsf{P}\left(X=2, Y=2, A \in \{1,3,5\}\right) + \mathsf{P}\left(X=2, Y=2, A \in \{2,4,6\}\right) = 0,
$$

$$
p_{2,3} = \mathsf{P}\left(X=2, Y=3, A \in \{1,3,5\}\right) + \mathsf{P}\left(X=2, Y=3, A \in \{2,4,6\}\right) = 0,
$$

X \ Y	0	1	2	3
0	$\frac{80}{216}$	$\frac{44}{216}$	$\frac{10}{216}$	$\frac{1}{216}$
1	$\frac{52}{216}$	$\frac{18}{216}$	$\frac{2}{216}$	0
2	$\frac{8}{216}$	$\frac{1}{216}$	0	0

Sada dobijamo

$$
\mathsf{P}\left(X=1\right) = \sum_{i=0}^{3} \mathsf{P}\left(X=1, Y=i\right) = \tfrac{52}{216} + \tfrac{18}{216} + \tfrac{2}{216} + 0 = \tfrac{72}{216}.
$$

Zakon raspodele uslovne slučajne promenljive $Y \mid \{X=1\}$:

$$
\mathsf{P}\left(Y=0 \mid X=1\right) = \tfrac{\mathsf{P}(X=1, Y=0)}{\mathsf{P}(X=1)} = \tfrac{13}{18},
$$

$$
\mathsf{P}\left(Y=1 \mid X=1\right) = \tfrac{\mathsf{P}(X=1, Y=1)}{\mathsf{P}(X=1)} = \tfrac{1}{4},
$$

$\mathsf{P}(Y=2 \mid X=1) = \frac{\mathsf{P}(X=1,Y=2)}{\mathsf{P}(X=1)} = \frac{1}{36}$,

$\mathsf{P}(Y=3 \mid X=1) = \frac{\mathsf{P}(X=1,Y=3)}{\mathsf{P}(X=1)} = 0$,

$$Y|\{X=1\} \;:\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{13}{18} & \frac{1}{4} & \frac{1}{36} \end{pmatrix},$$

odakle dobijamo traženo matematičko očekivanje:

$$\mathsf{E}(Y \mid X=1) = \sum_{k=0}^{2} k\mathsf{P}(Y=k \mid X=1) = 0 \cdot \tfrac{13}{18} + 1 \cdot \tfrac{1}{4} + 2 \cdot \tfrac{1}{36} = \tfrac{11}{36}.$$

3. Posmatrajmo transformaciju $f : (X,Y) \to (Z,U)$ definisanu sa $Z = X^2 + Y$, $U = Y$; dakle, funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je definisana sa $f(x,y) = \left(x^2+y, y\right)$, $(x,y) \in T$. Oblast T (vidi sliku 1) je ograničena dužima

$l_1 = \{(x, 1-x) \mid x \in [0,1]\}$ $(y = 1-x)$,

$l_2 = \{(x, 1) \mid x \in [0,1]\}$ $(y = 1)$,

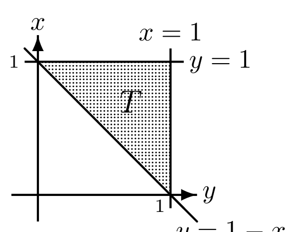
$l_3 = \{(1, y) \mid y \in [0,1]\}$ $(x = 1)$,

pa, pošto je funkcija f neprekidna i monotona na oblasti T, oblast $T' = f(T)$ (vidi sliku 2) je ograničena lukovima

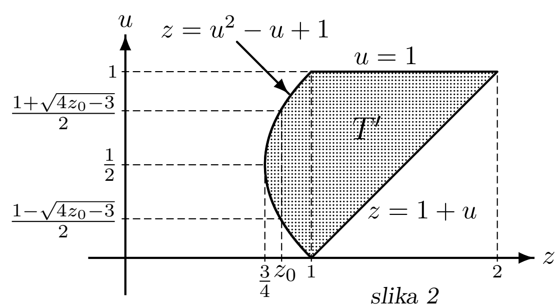
$l_1' = f(l_1) = \left\{ \left(u^2 - u + 1, u\right) \;\middle|\; u \in [0,1] \right\}$ $(z = u^2 - u + 1)$,

$l_2' = f(l_2) = \left\{ \left(x^2 + 1, 1\right) \;\middle|\; x \in [0,1] \right\} = \{(z,1) \mid z \in [1,2]\}$ $(u = 1)$,

$l_3' = f(l_3) = \{(1+y, y) \mid y \in [0,1]\} = \{(z, z-1) \mid z \in [1,2]\}$ $(u = z-1)$.



slika 1



slika 2

Rešenja sistema $z = x^2 + y \wedge u = y$ po promenljivima z i u na oblasti T' su $y = u \wedge x = \sqrt{z-u}$ odakle dobijamo inverznu transformaciju $f^{-1}(z,u) = \left(\sqrt{z-u}, u\right)$, $(z,u) \in T'$, čiji je Jakobijan

$$\mathcal{J}_{f^{-1}}^{-1}(z,u) = \begin{vmatrix} x_z & x_u \\ y_z & y_u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{z-u}} & -\frac{1}{2\sqrt{z-u}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{z-u}},$$

te dobijamo:

$$\varphi_{Z,U}(z,u) = \varphi_{X,Y}\left(f^{-1}(z,u)\right) \left|\mathcal{J}_{f^{-1}}^{-1}(z,u)\right| = \frac{6z}{7\sqrt{z-u}}, \quad (z,u) \in T'.$$

Sada je:

$$\varphi_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_{Z,U}(z,u)\,du = \dots$$

- za $z < \frac{3}{4}$: $\quad \varphi_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} 0du = 0;$

- za $\frac{3}{4} \le z < 1$: $\quad \varphi_Z(z) = \int\limits_{\frac{1-\sqrt{4z-3}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{4z-3}}{2}} \frac{6z}{7\sqrt{z-u}}du =$

  $= -\frac{12}{7}z\sqrt{z-u}\,\Big|_{\frac{1-\sqrt{4z-3}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{4z-3}}{2}} = \frac{12}{7}z\left(\sqrt{\frac{2z-1+\sqrt{4z-3}}{2}} - \sqrt{\frac{2z-1+\sqrt{4z-3}}{2}}\right);$

- za $1 \le z \le 2$:

  $\varphi_Z(z) = \int\limits_{z-1}^{1} \frac{6z}{7\sqrt{z-u}}du = -\frac{12}{7}z\sqrt{z-u}\,\Big|_{z-1}^{1} = \frac{12}{7}z\left(1-\sqrt{z-1}\right);$

- za $2 < z$: $\quad \varphi_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} 0du = 0.$

Koristeći izračunatu gustinu $\varphi_Z(z)$ dobijamo:

$$\mathsf{P}\left(1 < Z < \tfrac{3}{2}\right) = \int\limits_{1}^{\frac{3}{2}} \varphi_Z(z)\,dz = \int\limits_{1}^{\frac{3}{2}} \tfrac{12}{7}z\left(1-\sqrt{z-1}\right)dz =$$

$$= \tfrac{12}{7}\tfrac{z^2}{2}\Big|_{1}^{\frac{3}{2}} - \tfrac{12}{7}(z-1)\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{z-1}+1\right)\Big|_{1}^{\frac{3}{2}} = \tfrac{15}{14} - \tfrac{13\sqrt{2}}{35}.$$

4. Neka je X_i količina praška u i - toj kesi (jedinica merenja je kilogram), a $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ ukupna količina praška koji se nalazi u sanduku, upakovana u n kesa $(n \in \mathbb{N})$. Slučajna promenljiva X_i ima numeričke karakteristike $\mathsf{E}(X_i) = 3.6$ i $\mathsf{D}(X_i) = 0.05^2 = 0.0025$ za sve $i \in \{1,2,\dots,n\}$. Odatle dobijamo

   $$\mathsf{E}(S_n) = \mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}(X_i) = 3.6n,$$

   $$\mathsf{D}(S_n) = \mathsf{D}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{D}(X_i) = 0.0025n$$

   (slučajne promenljive X_i su nezavisne).

   Treba po n rešiti jednačinu $\mathsf{P}(S_n < 400) = 0.9$.

   $$\mathsf{P}(S_n < 400) = 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(\frac{S_n - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}} < \frac{400 - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}}\right) = 0.9 \quad \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow \quad \phi\left(\frac{400 - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}}\right) \approx 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{400 - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}} \approx \phi^{-1}(0.9) \approx 1.28 \quad \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow \quad \frac{400 - 3.6n}{0.05\sqrt{n}} \approx 1.28 \quad \Leftrightarrow \quad 3.6n + 0.064\sqrt{n} - 400 \approx 0 \quad \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow \quad \left(3.6t^2 + 0.064t - 400 \approx 0 \ \wedge\ t = \sqrt{n}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \quad ((t \approx -10.532 \ \vee \ t \approx 10.5498) \ \wedge \ t = \sqrt{n}) \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{n} \approx 10.5498 \quad \Leftrightarrow \quad n \approx 10.5498^2 \approx 111.2983,$

što znači da se sa najviše 111 kesa u sanduku nalazi manje od $400kg$ sa verovatnoćom 0.9.

5. Za obeležje $X : \mathcal{N}(m,1)$ imamo $\mathsf{E}(X) = m$ i $\mathsf{D}(X) = 1^2 = 1$.

   (a) Obe ocene su centrirane jer je

   $\mathsf{E}(\theta_1) = \mathsf{E}(nX_1 - (X_2 + X_3 + \cdots + X_n)) =$

   $= n\mathsf{E}(X_1) - \sum\limits_{i=2}^{n} \mathsf{E}(X_i) = nm - (n-1)m = m,$

   $\mathsf{E}(\theta_2) = \mathsf{E}\left((n-1)\frac{X_1+X_2}{2} - (X_3 + X_4 + \cdots + X_n)\right) =$

   $= \frac{n-1}{2}(\mathsf{E}(X_1) + \mathsf{E}(X_2)) - \sum\limits_{i=3}^{n} \mathsf{E}(X_i) = (n-1)m - (n-2)m = m.$

   (b) Elementi X_i uzorka su nezavisni pa je

   $\mathsf{D}(\theta_1) = \mathsf{D}(nX_1 - (X_2 + X_3 + \cdots + X_n)) =$

   $= n^2\mathsf{D}(X_1) + \sum\limits_{i=2}^{n} \mathsf{D}(X_i) = n^2 \cdot 1 + (n-1)\cdot 1 = n^2 + n - 1,$

   $\mathsf{D}(\theta_2) = \mathsf{D}\left((n-1)\frac{X_1+X_2}{2} - (X_3 + X_4 + \cdots + X_n)\right) =$

   $= \frac{(n-1)^2}{4}(\mathsf{D}(X_1) + \mathsf{D}(X_2)) + \sum\limits_{i=3}^{n} \mathsf{D}(X_i) =$

   $= \frac{(n-1)^2}{4} \cdot 2 + (n-2)\cdot 1 = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}.$

   Sada treba da vidimo za koje n je ocena θ_1 efikasnija od ocene θ_2, i obratno:

   $\mathsf{D}(\theta_1) \geq \mathsf{D}(\theta_2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(n+1)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad n \in \mathbb{N}$

   Dakle, za sve $n \in \mathbb{N}$ je ocena θ_2 efikasnija od ocene θ_1.

6. Sa A, B, C i I ćemo redom obeležiti stanja kada je lopta kod Anice, Branka, Cane, odnosno kada je lopta ispuštena.

   (a) Matrica prelaza (za jedan korak):

   $$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

   Za navedenu matricu prelaza P tražimo vektor finalnih verovatnoća $\mathbf{p}^* = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \end{array}$, gde je $x, y, z \in (0,1)$ i $z = 1 - x - y$, odnosno rešavamo sistem jednačina $\mathbf{p}^* \cdot P = \mathbf{p}^* \ \wedge \ z = 1 - x - y$:

   $\begin{bmatrix} x & y & 1-x-y \end{bmatrix} \cdot P = \begin{bmatrix} x & y & 1-x-y \end{bmatrix}$

   $$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} \frac{2}{3}y & = & x \\ \frac{1}{2}x + 1 - x - y & = & y \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y & = & 1 - x - y \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcl} x & - & \frac{2}{3}y & = & 0 \\ x & + & 4y & = & 2 \\ x & + & \frac{8}{9}y & = & \frac{2}{3} \\ \hline \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcl} x & - & \frac{2}{3}y & = & 0 \\ & & \frac{14}{3}y & = & 2 \\ & & 0 & = & 0 \\ \hline \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} y = \frac{3}{7} \\ x = \frac{2}{7} \end{array} \qquad \left(z = 1 - x - y = \tfrac{2}{7}\right).$$

Dakle, vektor finalnih verovatnoća je:

$$\mathbf{p}^* = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right] \end{array},$$

što znači da ako dodavanje traje "dovoljno dugo", oko $\frac{2}{7}$ vremenskog perioda je lopta u posedu Anice, oko $\frac{2}{7}$ vremenskog perioda je lopta u posedu Cane, a oko $\frac{4}{7}$ vremenskog perioda je lopta u posedu Branka.

(b) Matrica prelaza (za jedan korak):

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ I \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & I \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & \frac{9}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{9}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}.$$

Više od četiri dodavanja biće ako nakon četvrtog dodavanja lopta nije ispuštena, odnosno ako se nakon četiri dodavanja ne nalazi u stanju I (tj. nalazi se u nekom od stanja A, B, C).

Matrica prelaza za 4 koraka:

$$P^2 = P \cdot P = \left[\begin{array}{cccc} \frac{3}{10} & \frac{81}{200} & \frac{3}{20} & \frac{29}{200} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad P^4 = P^2 \cdot P^2 = \left[\begin{array}{cccc} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \frac{19}{100} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right]$$

(za odgovor na postavljeno pitanje dovoljan je samo element $\frac{19}{100}$ u matrici prelaza za 4 koraka P^4).

Vektor početnih verovatnoća: $\quad \mathbf{p}(0) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & I \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}.$

Raspodela verovatnoća nakon 4 dodavanja:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(4) &= [p_A(4) \;\; p_B(4) \;\; p_C(4) \;\; p_I(4)] = \\ &= \mathbf{p}(0) \cdot P^4 = \left[\cdots \;\; \cdots \;\; \cdots \;\; \tfrac{19}{100}\right]. \end{aligned}$$

Dakle, verovatnoća da posle 4 dodavanja lopta nije ispuštena iznosi

$$p_A(4) + p_B(4) + p_C(4) = 1 - p_I(4) = 1 - \tfrac{19}{100} = \tfrac{81}{100}.$$

7. Skup mogućih vrednosti slučajne promenljive X je $\mathcal{R}_X = \{2,3,4,\ldots\}$. Obeležimo sa A događaj "*prvi igrač dobija set*", a sa B događaj "*drugi igrač dobija set*".

   (a) Tražimo zakon raspodele slučajne promenljive X :

   (a.1) za $k = 2m,\ m \in \{1,2,3,\ldots\}$ imamo

   $$\begin{aligned} p_{2m} &= \mathsf{P}(X=2m) = \mathsf{P}\Big((AB)^{m-1}AA \ + \ (BA)^{m-1}BB\Big) = \\ &= (\mathsf{P}(A))^2(\mathsf{P}(A))^{m-1}(\mathsf{P}(B))^{m-1} + \\ &\quad + (\mathsf{P}(B))^2(\mathsf{P}(A))^{m-1}(\mathsf{P}(B))^{m-1} = \\ &= (\mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B))^{m-1}\Big((\mathsf{P}(A))^2 + (\mathsf{P}(B))^2\Big) = \\ &= \left(\tfrac{7}{10}\cdot\tfrac{3}{10}\right)^{m-1}\cdot\Big(\left(\tfrac{7}{10}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{10}\right)^2\Big) = \left(\tfrac{21}{100}\right)^{m-1}\cdot\tfrac{58}{100}; \end{aligned}$$

   (a.2) za $k = 2m+1,\ m \in \{1,2,3,\ldots\}$ imamo

   $$\begin{aligned} p_{2m+1} &= \mathsf{P}(X=2m+1) = \\ &= \mathsf{P}\Big(A(BA)^{m-1}BB \ + \ B(AB)^{m-1}AA\Big) = \\ &= \mathsf{P}(A)(\mathsf{P}(B))^2(\mathsf{P}(A))^{m-1}(\mathsf{P}(B))^{m-1} + \\ &\quad + \mathsf{P}(B)(\mathsf{P}(A))^2(\mathsf{P}(A))^{m-1}(\mathsf{P}(B))^{m-1} = \\ &= (\mathsf{P}(A))^m(\mathsf{P}(B))^m(\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(B)) = (\mathsf{P}(A))^m(\mathsf{P}(B))^m = \\ &= \left(\tfrac{7}{10}\cdot\tfrac{3}{10}\right)^m = \left(\tfrac{21}{100}\right)^m. \end{aligned}$$

   (b) $$\begin{aligned} \mathcal{K}_X(t) &= \mathsf{E}\left(e^{itX}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} e^{itn}\mathsf{P}(X=n) = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} e^{it2m}\mathsf{P}(X=2m) + \sum_{m=1}^{\infty} e^{it(2m+1)}\mathsf{P}(X=2m+1) = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} e^{it2m}\left(\tfrac{21}{100}\right)^{m-1}\tfrac{58}{100} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{it(2m+1)}\left(\tfrac{21}{100}\right)^m = \\ &= \tfrac{58}{100}e^{i2t}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\tfrac{21}{100}e^{it2}\right)^{m-1} + e^{it}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\tfrac{21}{100}e^{it2}\right)^m = \\ &= \tfrac{58}{100}e^{i2t}\tfrac{1}{1-\frac{21}{100}e^{i2t}} + e^{it}\tfrac{21}{100}e^{i2t}\tfrac{1}{1-\frac{21}{100}e^{i2t}} = \\ &= \tfrac{58}{100}e^{i2t}\tfrac{100}{100-21e^{i2t}} + e^{i3t}\tfrac{21}{100}\tfrac{100}{100-21e^{i2t}} = \tfrac{58e^{i2t}-21e^{i3t}}{100-21e^{i2t}}, \end{aligned}$$

   $$(\mathcal{K}_X(t))' = ie^{i2t}\tfrac{11600-6300e^{it}+441e^{i3t}}{(100-21e^{i2t})^2},$$

   $$\mathsf{E}(X) = \frac{(\mathcal{K}_X(0))'}{i} = \frac{5741}{6241}.$$

8. Obeležimo redom sa S, L i M skupove učesnika koji govore srpski, slovački i mađarski jezik.

$$\begin{array}{ccccc} & & S & & \\ & & 23 & & \\ & 5 & 1 & 1 & \\ M & 5 & 1 & 0 & L \end{array}$$

Na dijagramu ovih skupova uočavamo koliko učesnika govori koje od ova tri jezika. Sledi da $23+5+5+1+1+1=36$ učesnika govori bar jedan od ova tri jezika, tj. $40-36=4$ učesnika ne govori ni jedan od navedena tri jezika, pa verovatnoća da slučajno izabrani učesnik ne govori ni jedan od navedena tri jezika iznosi $\frac{4}{40}=\frac{1}{10}$.

9. Pošto u raspodeli obeležja X figuriše nepoznati parametar m, njega ćemo najpre oceniti metodom maksimalne verodostojnosti.

Funkcija verodostojnosti:

$$L(m)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_X(x_i)=\frac{1}{\left(4\sqrt{2\pi}\right)^n}\cdot e^{-\frac{1}{32}\left((x_1-m)^2+\ldots+(x_n-m)^2\right)},$$

$$\ln L(m)=-n\cdot\ln\left(4\sqrt{2\pi}\right)-\tfrac{1}{32}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2m\sum_{i=1}^{n}x_i+nm^2\right),$$

$$\frac{\partial\ln L(m)}{\partial m}=\tfrac{1}{32}\left(2\sum_{i=1}^{n}x_i-2nm\right),$$

$$\frac{\partial\ln L(m)}{\partial m}=0\quad\Leftrightarrow\quad 2\sum_{i=1}^{n}x_i-2nm=0\quad\Leftrightarrow\quad m=\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

(naravno da smo za ocenu matematičkog očekivanja m obeležja X dobili uzoračku aritmetičku sredinu).

Za naš dati uzorak obima $n=2+3+7+10+11+7=40$ dobijamo

$$m=\tfrac{1}{40}\left(2\cdot 2+4\cdot 3+6.5\cdot 7+10\cdot 10+13.5\cdot 11+16\cdot 7\right)=\tfrac{211}{20}=10.55,$$

gde smo za x_i uzeli sredine datih intervala.

Testiraćemo hipotezu da obeležje X ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}\left(\frac{211}{20},4\right)$.

Svaki interval uzorka mora imati bar 5 elemenata iz uzorka i intervali moraju da prekriju celu realnu pravu (zbog $\mathcal{R}_X=\mathbb{R}$), pa spajanjem prvog i drugog intervala dobijamo sledeće podatke za primenu χ^2 testa:

$(a_i,b_i]$	$(-\infty,5]$	$(5,8]$	$(8,12]$	$(12,15]$	$(15,\infty)$
n_i	5	7	10	11	7

Označimo redom intervale: $I_i=(a_i,b_i]$, $i\in\{1,2,3,4,5\}$. Na osnovu gustine $\varphi_X(x)$ izračunavamo teorijske verovatnoće na sledeći način:

$$p_i=\mathsf{P}(X\in I_i)=\mathsf{P}(a_i<X\leq b_i)=\mathsf{P}\left(a_i-\tfrac{211}{20}<X-\tfrac{211}{20}\leq b_i-\tfrac{211}{20}\right)=$$

$$=\mathsf{P}\left(\frac{a_i-\frac{211}{20}}{4}<\frac{X-\frac{211}{20}}{4}\leq\frac{b_i-\frac{211}{20}}{4}\right)\overset{[1]}{\approx}\phi\left(\frac{b_i-\frac{211}{20}}{4}\right)-\phi\left(\frac{a_i-\frac{211}{20}}{4}\right).$$

[1] - *Slučajna promenljiva* $\frac{X-\frac{211}{20}}{4}$ *ima približno* $\mathcal{N}(0,1)$ *zato što* X *ima* $\mathcal{N}\left(\frac{211}{20},4\right)$ *raspodelu.*

Tako dobijamo

$$p_1=\mathsf{P}\left(X\in(-\infty,5]\right)\approx\phi(-1.3875)-\phi(-\infty)=\left(1-\phi(1.3875)\right)-0\approx$$
$$\approx(1-0.9177)-0\approx 0.0823,$$

$p_2 = \mathsf{P}(X \in (5,8]) \approx \phi(-0.6375) - \phi(-1.3875) \approx$
$\approx (1-0.7389) - (1-0.9177) \approx 0.1788,$

$p_3 = \mathsf{P}(X \in (8,12]) \approx \phi(0.3625) - \phi(-0.6375) \approx$
$\approx 0.6406 - (1-0.7389) \approx 0.3795,$

$p_4 = \mathsf{P}(X \in (12,15]) \approx \phi(1.1125) - \phi(0.3625) \approx 0.8665 - 0.6406 \approx 0.2259,$

$p_5 = \mathsf{P}(X \in (15,\infty]) \approx \phi(\infty) - \phi(1.1125) \approx 1 - 0.8665 \approx 0.1335.$

Vrednost statistike $Z = \sum\limits_{i=1}^{5} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$ za naš uzorak iznosi

$$z = \frac{(5-40\cdot 0.0823)^2}{40\cdot 0.0823} + \frac{(7-40\cdot 0.1788)^2}{40\cdot 0.1788} + \frac{(10-40\cdot 0.3795)^2}{40\cdot 0.3795} + \\ + \frac{(11-40\cdot 0.2259)^2}{40\cdot 0.2259} + \frac{(7-40\cdot 0.1335)^2}{40\cdot 0.1335} \approx 3.59992,$$

a iz tablica očitavamo odgovarajuću vrednost χ^2 raspodele:

$$\chi^2_{0.05;5-1-1} = \chi^2_{0.05;3} \approx 7.81.$$

Pošto je $\chi^2_{0.05;3} > z$, ne odbacujemo hipotezu da obeležje X ima $\mathcal{N}\left(\frac{211}{20}, 4\right)$ raspodelu.

24.10.1999.

1. U kutiji se nalazi 6 belih i 2 crne kuglice. Strelac na slučajan način izvlači 3 kuglice i gađa metu onoliko puta koliko je belih kuglica izvukao. Pri svakom gađanju, udaljenost pogotka od centra mete ima eksponencijalnu raspodelu $\mathcal{E}(1)$. Izračunati verovatnoću da će svi pogoci završiti u krugu poluprečnika 1 oko centra mete.

2. Iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ se na slučajan način sa vraćanjem biraju dva broja X i Y. Ako je $Z = X + Y$, naći uslovnu raspodelu slučajne promenljive $X \mid \{Z = k\}$, $k \in \{2, 3, \ldots, 2n\}$.

3. Slučajna promenljiva X ima uniformnu raspodelu $\mathcal{U}(0,1)$. Naći raspodelu dvodimenzionalne slučajne promenljive (X, X^2).

4. Lutrija je pustila u prodaju nagradnu igru za koju je poznato da ima 51.5% dobitnih listića. Dobitak na jednom kupljenom listiću je nezavisan od dobitka na ostalim listićima. Koliko listića treba kupiti da bi verovatnoća da među njima ima bar 32 dobitna listića više nego onih koji ne donose dobitak bila najmanje 0.99?

5. Obeležje X dato je gustinom raspodele $\varphi_X(x) = \frac{\theta}{x^2}$, $x > \theta$ $(\theta > 0)$. Na osnovu uzorka obima n metodom maksimalne verodostojnosti naći ocenu parametra θ i ispitati njenu centriranost.

6. Trgovački putnik prodaje robu u Somboru, Subotici i Novom Sadu. Nikad ne prodaje dva dana uzastopce u istom gradu. Ako jednog dana prodaje u Somboru, sutra sigurno prodaje u Subotici. Posle Subotice ili Novog Sada dva puta verovatnije prelazi u Sombor nego u onaj drugi grad.

(a) Ako posmatramo "dovoljno dug" vremenski period, koliko će prosečno vremena putnik provesti u pomenutim gradovima?

(b) Ako je u ponedeljak radio u Novom Sadu, kolika je verovatnoća da u sredu neće raditi u Novom Sadu?

7. Dat je prost slučajni uzorak: $(1,2,8,3,1,4,2,4,5,7)$ obeležja X sa normalnom raspodelom $\mathcal{N}(m,\xi)$.

   (a) Naći interval poverenja za m, sa nivoom poverenja $\beta = 0.95$.

   (b) Naći jednostrani interval poverenja za disperziju ξ^2 sa nivoom poverenja $\beta = 0.95$.

   (c) Testirati hipotezu da je $m = 5$ sa pragom značajnosti $\alpha = 0.05$.

8. Avioni A, B i C u slučajnim trenucima tokom jednog sata sleću na aerodrom. Koliko iznosi verovatnoća da će avion C sleteti poslednji?

9. Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne promenljive sa eksponencijalnom raspodelom $\mathcal{E}(1)$. Naći matematičko očekivanje slučajne promenljive $Y = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)^2$.

Rešenja:

1. Među 3 izvučene kuglice mogu da se nalaze jedna, dve ili tri bele kuglice (ne mogu sve tri izvučene biti crne jer se u kutiji nalaze samo dve crne). Označimo sa A_i, $i \in \{1,2,3\}$ događaj: "*broj izvučenih belih kuglica je i*", a sa B označimo događaj (čija se verovatnoća traži): "*svi hici završavaju u krugu poluprečnika* 1 *oko centra mete*". Događaji A_i, $i \in \{1,2,3\}$ čine potpun sistem događaja pa je $\mathsf{P}(B) = \sum\limits_{i=1}^{3} \mathsf{P}(A_i)\,\mathsf{P}(B \mid A_i)$. Na osnovu uslova zadatka imamo:

   $\mathsf{P}(A_1) = \frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{3}{28}$, $\mathsf{P}(A_2) = \frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{15}{28}$, $\mathsf{P}(A_3) = \frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{2}{0}}{\binom{8}{3}} = \frac{10}{28}$.

   Verovatnoća da jedan pojedinačni ispaljeni hitac završava u krugu poluprečnika 1 oko centra mete iznosi $\mathsf{P}(X < 1) = F_X(1) = 1 - e^{-1}$, gde je X slučajna promenljiva koja ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(1)$ raspodelu, odakle dobijamo:

   $\mathsf{P}(B \mid A_1) = 1 - e^{-1}$, $\mathsf{P}(B \mid A_2) = \left(1 - e^{-1}\right)^2$, $\mathsf{P}(B \mid A_1) = \left(1 - e^{-1}\right)^3$,

   te je: $\mathsf{P}(B) = \frac{3}{28}\left(1 - e^{-1}\right) + \frac{15}{28}\left(1 - e^{-1}\right)^2 + \frac{10}{28}\left(1 - e^{-1}\right)^3 \approx 0.371993$.

2. Slučajne promenljive X i Y su nezavisne i imaju isti zakon raspodele

   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} \end{pmatrix},$$

   odakle sledi da zakon raspodele slučajnog vektora (X,Y) glasi

$$\mathsf{P}(X=k,Y=j)=\mathsf{P}(X=i)\,\mathsf{P}(Y=j)=\begin{cases}\frac{1}{n^2} & ,\ (i,j)\in\{1,\dots,n\}^2\\ 0 & ,\ (i,j)\notin\{1,\dots,n\}^2\end{cases}.$$

Nađimo zakon raspodele slučajne promenljive $Z=X+Y$. Skup vrednosti slučajne promenljive Z je $\mathcal{R}_Z=\{2,3,4,\dots,2n\}$, a odgovarajuće verovatnoće $\mathsf{P}(Z=k)$, $k\in\mathcal{R}_Z$ su:

$$\mathsf{P}(Z=k)=\mathsf{P}(X+Y=k)=\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{k-1}\{X=i,Y=k-i\}\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{k-1}\mathsf{P}(X=i,Y=k-i)=\sum_{i=1}^{k-1}\mathsf{P}(X=i)\,\mathsf{P}(Y=k-i)=\dots$$

(a) Za $k\in\{2,3,\dots,n+1\}$ (u ovom slučaju je $i,k-i\in\{1,2,\dots,n\}$):

$$\mathsf{P}(Z=k)=\sum_{i=1}^{k-1}\tfrac{1}{n}\cdot\tfrac{1}{n}=\tfrac{k-1}{n^2}.$$

(b) Za $k\in\{n+2,n+3,\dots,2n\}$ (u ovom slučaju nije uvek zadovoljeno $i,k-i\in\{1,2,\dots,n\}$):

$$\mathsf{P}(Z=k)=\sum_{i=1}^{k-n-1}0\cdot\tfrac{1}{n}+\sum_{i=k-n}^{n}\tfrac{1}{n}\cdot\tfrac{1}{n}=\tfrac{2n-k+1}{n^2}.$$

Prema tome, zakon raspodele slučajne promenljive Z glasi:

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & \dots & n & n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n-1 & 2n\\ \frac{1}{n^2} & \frac{2}{n^2} & \frac{3}{n^2} & \dots & \frac{n-1}{n^2} & \frac{n}{n^2} & \frac{n-1}{n^2} & \frac{n-2}{n^2} & \dots & \frac{2}{n^2} & \frac{1}{n^2}\end{pmatrix}.$$

Koristeći zakon raspodele slučajne promenljive Z nalazimo zakon raspodele uslovne slučajne promenljive $X\mid\{Z=k\}$, $k\in\{2,3,\dots,2n\}$.

Odgovarajuće verovatnoće su:

$$\mathsf{P}(X=i\mid Z=k)=\tfrac{\mathsf{P}(X=i,Z=k)}{\mathsf{P}(Z=k)}=\tfrac{\mathsf{P}(X=i,X+Y=k)}{\mathsf{P}(Z=k)}=$$
$$=\tfrac{\mathsf{P}(X=i,Y=k-i)}{\mathsf{P}(Z=k)}=\tfrac{\mathsf{P}(X=i)\mathsf{P}(Y=k-i)}{\mathsf{P}(Z=k)}=\dots$$

(a) Za $k\in\{2,3,\dots,n+1\}$ imamo

$$\mathsf{P}(X=i\mid Z=k)=\tfrac{\mathsf{P}(X=i)\mathsf{P}(Y=k-i)}{\frac{k-1}{n^2}}=\dots$$

(a.1) za $i\in\{1,2,\dots,k-1\}$ je:

$$\mathsf{P}(X=i\mid Z=k)=\tfrac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{k-1}{n^2}}=\tfrac{1}{k-1};$$

(a.2) za $i\in\{k,k+1,\dots,n\}$ je:

$$\mathsf{P}(X=i\mid Z=k)=\tfrac{0}{\frac{k-1}{n^2}}=0.$$

(b) Za $k\in\{n+2,n+3,\dots,2n\}$ imamo

$$\mathsf{P}(X=i\mid Z=k)=\tfrac{\mathsf{P}(X=i)\mathsf{P}(Y=k-i)}{\frac{2n-k+1}{n^2}}=\dots$$

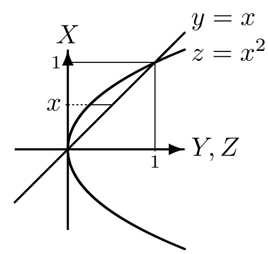
(b.1) za $i\in\{1,\dots,k-n-1\}$ je

$$\mathsf{P}(X=i\mid Z=k)=\tfrac{0}{\frac{2n-k+1}{n^2}}=0;$$

(b.2) za $i\in\{k-n,\dots,k-1\}$ je:

$$\mathsf{P}(X=i\mid Z=k)=\tfrac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{2n-k+1}{n^2}}=\tfrac{1}{2n-k+1}.$$

3. Neka je $Y = X$ i $Z = X^2$.
$X : \mathcal{U}(0,1)$ znači da je:



$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases},$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x \in (0,1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}.$$

Funkciju raspodele slučajnog vektora (Y, Z) nalazimo po definiciji:

$F_{Y,Z}(y,z) = \mathsf{P}(Y < y, Z < z) = \mathsf{P}\left(X < y, X^2 < z\right) =$

$= \mathsf{P}\left(X < y, -\sqrt{z} < X < \sqrt{z}\right) = \mathsf{P}\left(X < \min\{y, \sqrt{z}\}\right) =$

$$= \mathsf{P}\left(X < \min\{y, \sqrt{z}, 1\}\right) = \begin{cases} 0 & , \ y \leq 0 \ \vee \ z \leq 0 \\ \sqrt{z} & , \ y \in (0,1] \ \wedge \ z < y^2 \\ y & , \ y \in (0,1] \ \wedge \ y^2 \leq z \leq 1 \\ 1 & , \ y > 1 \ \wedge \ z > 1 \end{cases}.$$

4. Neka je n broj listića koje treba kupiti, i neka je X_i, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ slučajna promenljiva koja uzima vrednost 1 ako je i - ti listić dobitni, odnosno 0 ako i - ti listić nije dobitni. Sve slučajne promenljive X_i imaju isti zakon raspodele $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$, gde je $p = 0.515 = \frac{103}{200}$ i $q = 1 - p = \frac{97}{200}$. Slučajna promenljiva $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ predstavlja broj dobitnih listića među n kupljenih, i ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}\left(n, \frac{103}{200}\right)$ pri čemu je:

$$\mathsf{E}(S_n) = np = \frac{103}{200}n \qquad \text{i} \qquad \mathsf{D}(S_n) = npq = \frac{9991}{40000}n.$$

Rešavamo po n nejednačinu

$$\mathsf{P}(S_n \geq (n - S_n) + 32) \geq 0.99$$

($n - S_n$ je broj listića koji ne donose dobitak):

$\mathsf{P}(S_n \geq (n - S_n) + 32) \geq 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{P}(2S_n \geq n + 32) \geq 0.99 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(S_n \geq \frac{n+32}{2}\right) \geq 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \mathsf{P}\left(S_n < \frac{n+32}{2}\right) \geq 0.99 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(S_n < \frac{n+32}{2}\right) \leq 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(\frac{S_n - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}} < \frac{\frac{n+32}{2} - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}}\right) \leq 0.01 \quad \overset{[1]}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \quad \phi\left(\frac{\frac{n+32}{2} - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}}\right) \preceq 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{n+32}{2} - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}} \preceq \phi^{-1}(0.01) \approx -2.33 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\frac{n+32}{2} - \frac{103}{200}n}{\frac{\sqrt{9991n}}{200}} \preceq -2.33 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-3n + 3200}{\sqrt{9991n}} \preceq -2.33 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad 3n - 2.33\sqrt{9991}\sqrt{n} - 3200 \succeq 0 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \left(3t^2 - 2.33\sqrt{9991}t - 3200 \succeq 0 \ \wedge \ t = \sqrt{n}\right) \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad ((t \preceq -11.9122 \ \vee \ t \succeq 89.5439) \ \wedge \ t = \sqrt{n}) \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad (t \succeq 89.5439 \ \wedge \ t = \sqrt{n}) \quad \Leftrightarrow \quad n \succeq 89.5439^2 \approx 8018.11.$

[1] - *Slučajna promenljiva* $\frac{S_n - \mathsf{E}(S_n)}{\mathsf{D}(S_n)}$ *na osnovu Moavr-Laplasove teoreme ima približno normalnu raspodelu* $\mathcal{N}(0,1)$.

Dakle, treba kupiti najmanje 8019 listića.

5. Funkcija verodostojnosti:

$L(x_1,\ldots,x_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_X(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta}{x_i^2} = \frac{\theta^n}{(x_1\ldots x_n)^2}, \ \ \forall i, \ x_i > \theta,$

$\ln L(x_1,\ldots,x_n,\theta) = \ln \frac{\theta^n}{(x_1\ldots x_n)^2} = n\cdot\ln\theta - 2\sum_{i=1}^{n}\ln x_i, \ \ \forall i, \ x_i > \theta.$

Tražimo maksimum funkcije L po θ :

$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x_1,\ldots,x_n,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(n\cdot\ln\theta - 2\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right) = \frac{n}{\theta}.$

Pošto je $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x_1,\ldots,x_n,\theta) = \frac{n}{\theta} \neq 0$ za svako θ, to se maksimum funkcije L (a isto tako i maksimum funkcije $\ln L$) ne nalazi unutar oblasti $\theta \in (0,\min\{x_1,\ldots,x_n\})$ već na njenom rubu, odnosno, pošto je funkcija $\ln L(x_1,\ldots,x_n,\theta)$ (a isto tako i funkcija $L(x_1,\ldots,x_n,\theta)$) monotono rastuća po θ na intervalu $(0,\min\{x_1,\ldots,x_n\})$ (jer je $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x_1,\ldots,x_n,\theta) = \frac{n}{\theta} > 0$ za sve $\theta \in (0,\min\{x_1,\ldots,x_n\})$), sledi da funkcija L dostiže maksimum na desnom rubu intervala, tj. u tački $\theta = \min\{x_1,\ldots,x_n\}$. Prema tome, za ocenu parametra θ dobijamo:

$$\hat{\theta} = \min\{X_1,\ldots,X_n\}.$$

Ispitajmo centriranost ocene $\hat{\theta}$:

$F_{\hat{\theta}}(t) = \mathsf{P}(\min\{X_1,\ldots,X_n\} < t) = 1 - \mathsf{P}(\min\{X_1,\ldots,X_n\} \geq t) =$
$= 1 - \mathsf{P}(X_1 \geq t,\ldots,X_n \geq t) = 1 - \mathsf{P}(X_1 \geq t)\ldots\mathsf{P}(X_n \geq t) =$
$= 1 - (1 - \mathsf{P}(X_1 < t))\ldots(1 - \mathsf{P}(X_n < t)) =$
$= 1 - \left(1 - F_{X_1}(t)\right)\ldots\left(1 - F_{X_n}(t)\right) = 1 - (1 - F_X(t))^n.$

Pošto je

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_X(x)\,dx = \begin{cases} 0 & , \ x \leq \theta \\ \int_{\theta}^{x}\frac{\theta}{u^2}du & , \ x > \theta \end{cases} = \begin{cases} 0 & , \ x \leq \theta \\ 1 - \frac{\theta}{x} & , \ x > \theta \end{cases},$

sledi

$F_{\hat{\theta}}(t) = 1 - (1 - F_X(t))^n = \begin{cases} 0 & , \ t \leq \theta \\ 1 - \frac{\theta^n}{t^n} & , \ t > \theta \end{cases},$

$\varphi_{\hat{\theta}}(t) = (F_X(t))' = \begin{cases} 0 & , \ t \leq \theta \\ \frac{n\theta^n}{t^{n+1}} & , \ t > \theta \end{cases},$

$\mathsf{E}\left(\hat{\theta}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} t\cdot\varphi_{\hat{\theta}}(t) = \int_{\theta}^{\infty} t\cdot\frac{n\theta^n}{t^{n+1}}dt = n\theta^n\int_{\theta}^{\infty}\frac{1}{t^n}dt =$
$= n\theta^n\frac{t^{1-n}}{1-n}\Big|_{\theta}^{\infty} = -\frac{n\theta^n}{n-1}\frac{1}{t^{n-1}}\Big|_{\theta}^{\infty} = \frac{n\theta^n}{n-1}\frac{1}{\theta^{n-1}} = \frac{n}{n-1}\theta.$

Dakle, ocena $\hat{\theta}$ nije centrirana jer je $\mathsf{E}\left(\hat{\theta}\right) \neq \theta$. Ocena jeste asimptotski centrirana jer je $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}\left(\hat{\theta}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n-1}\theta = \theta$.

6. Označimo redom sa S, B i N Sombor, Suboticu i Novi Sad. Matrica P prelaza tj. kretanja trgovačkog putnika glasi:

$$P = \begin{array}{c} \\ S \\ B \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & B & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

(a) Tražimo finalne verovatnoće $\mathbf{p}^* = [x \;\; y \;\; z]$ koje zadovoljavaju jednačinu $\mathbf{p}^* {\cdot} P = \mathbf{p}^*$ uz dodatni uslov $x, y, z \in (0,1)$ i $x{+}y{+}z = 1$, što je ekvivalentno sa

$$\begin{array}{ccccccc} & & \frac{2}{3}y & + & \frac{2}{3}z & = & x \\ x & & & + & \frac{1}{3}z & = & y \\ & & \frac{1}{3}y & & & = & z \\ x & + & y & + & z & = & 1 \\ \hline \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccc} x & - & \frac{2}{3}y & - & \frac{2}{3}z & = & 0 \\ & & y & - & 3z & = & 0 \\ & & & & z & = & \frac{3}{20} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} z = \frac{3}{20} \\ y = \frac{9}{20} \\ x = \frac{8}{20} \end{array}$$

Dakle:

$$\mathbf{p}^* = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & B & N \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} \frac{2}{5} & \frac{9}{20} & \frac{3}{20} \end{array}\right] \end{array},$$

što znači da prosečno $\frac{2}{5}$ vremena trgovački putnik provede u Somboru, prosečno $\frac{9}{20}$ vremena provede u Subotici i prosečno $\frac{3}{20}$ vremena provede u Novom Sadu.

(b) Početna raspodela, tj. raspodela za ponedeljak, odnosno vektor početnih verovatnoća: $\mathbf{p}(0) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & B & N \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$.

Od ponedeljka do srede imamo dva prelaza, pa raspodelu verovatnoća za sredu dobijamo na sledeći način:

$$\mathbf{p}(2) = \mathbf{p}(0) \cdot P^2 = [0 \;\; 0 \;\; 1] \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} & \frac{7}{9} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & B & N \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} \frac{2}{9} & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} \end{array}\right] \end{array},$$

te verovatnoća da u sredu neće raditi u Novom Sadu iznosi

$$1 - \tfrac{1}{9} = \tfrac{8}{9}.$$

7. (a) Slučajna promenljiva (statistika) $Z_{n-1} = \frac{\overline{X}_n - m}{\overline{S}_n}\sqrt{n-1}$ ima Studentovu t_{n-1} raspodelu, gde je:

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{i} \quad \overline{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2.$$

To znači da je

$\mathsf{P}\left(\left|\frac{\overline{X}_n - m}{\overline{S}_n}\sqrt{n-1}\right| < a\right) = 0.95 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(-a < \frac{\overline{X}_n - m}{\overline{S}_n}\sqrt{n-1} < a\right) = 0.95 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad F_{Z_{n-1}}(a) - F_{Z_{n-1}}(-a) = 0.95 \quad \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \quad 2F_{Z_{n-1}}(a) - 1 = 0.95 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad F_{Z_{n-1}}(a) = \frac{1+0.95}{2} = 0.975 \quad \Leftrightarrow \quad a = F^{-1}_{Z_{n-1}}(0.975).$

[1] - $F_{Z_{n-1}}(x)$ *je funkcija raspodele Studentove slučajne promenljive, a zbog simetričnosti njene gustine u odnosu na* y *- osu za* $a < 0$ *važi* $F_{Z_{n-1}}(-a) = 1 - F_{Z_{n-1}}(-a)$.

Za naš uzorak, gde je $n = 10$ veličina uzorka, važi

$\overline{x}_{10} = \frac{1}{10}(1+2+8+3+1+4+2+4+5+7) = 3.7,$

$$\begin{aligned}\overline{s}^2_{10} = \frac{1}{10}\Big(&(1-3.7)^2 + (2-3.7)^2 + (8-3.7)^2 + (3-3.7)^2 + \\ &+ (1-3.7)^2 + (4-3.7)^2 + (2-3.7)^2 + (4-3.7)^2 + \\ &+ (5-3.7)^2 + (7-3.7)^2\Big) = 5.21,\end{aligned}$$

odnosno $\overline{s}_{10} = \sqrt{\overline{s}^2_{10}} \approx 2.2825$, a iz tablica očitavamo

$$a = F^{-1}_{Z_9}(0.975) = t_{10-1;0.975} \approx 2.262\,.$$

Prema tome:

$\mathsf{P}\left(\left|\frac{\overline{x}_{10} - m}{\overline{s}_{10}}\sqrt{9}\right| < a\right) = 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(-a < 3\frac{\overline{x}_{10} - m}{\overline{s}_{10}} < a\right) = 0.95 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(\overline{x}_{10} - \frac{a\overline{s}_{10}}{3} < m < \overline{x}_{10} + \frac{a\overline{s}_{10}}{3}\right) = 0.95 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(3.7 - \frac{2.262\cdot 2.2825}{3} < m < 3.7 + \frac{2.262\cdot 2.2825}{3}\right) \approx 0.95 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \mathsf{P}(1.9790 < m < 5.4210) \approx 0.95.$

Dakle, interval poverenja za m sa nivoom pouzdanosti 0.95 je $(1.9790, 5.4210)$.

(b) Slučajna promenljiva (statistika) $Z_{n-1} = \frac{n\overline{S}^2_n}{\xi^2}$ ima χ^2_{n-1} raspodelu. To znači da je

$\mathsf{P}\left(\frac{n\overline{S}^2_n}{\xi^2} \geq c\right) = 1 - \mathsf{P}\left(\frac{n\overline{S}^2_n}{\xi^2} < c\right) = 0.95 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad F_{Z_{n-1}}(c) = 1 - 0.95 = 0.05 \quad \overset{[2]}{\Leftrightarrow} \quad c = F^{-1}_{Z_{n-1}}(0.05).$

[2] - $F_{Z_{n-1}}(x)$ *je funkcija raspodele* χ^2_{n-1} *slučajne promenljive.*

Prema tome, $\quad \mathsf{P}\left(\frac{n\overline{S}^2_n}{\xi^2} \geq c\right) = \mathsf{P}\left(\frac{n\overline{S}^2_n}{c} \geq \xi^2\right) = 0.95. \qquad [*]$

Uvrštavanjem u $[*]$ vrednosti $n = 10$ i $\overline{s}^2_{10} = 5.21$, i iz tablice očitanog $c = F^{-1}_{Z_9}(0.05) = \chi^2_{10-1;0.05} \approx 3.33$, dobijamo

$$\mathsf{P}\left(\xi^2 \leq 15.6456\right) \approx 0.95.$$

Dakle, jednostrani interval poverenja za ξ^2 sa nivoom poverenja 0.95 je $(0, 15.6456]$.

(c) Ukoliko je naša hipoteza $m = 5$ tačna, tada slučajna promenljiva (statistika) $Z_{n-1} = \frac{\overline{X}_n - 5}{\overline{S}_n}\sqrt{n-1}$ ima Studentovu t_{n-1} raspodelu, i tada mora biti zadovoljeno

$\mathsf{P}\left(\left|\frac{\overline{X}_n-5}{\overline{S}_n}\sqrt{n-1}\right| > \left|\frac{\overline{x}_n-5}{\overline{s}_n}\sqrt{n-1}\right|\right) =$

$= \mathsf{P}\left(|Z_{n-1}| > \left|\frac{\overline{x}_n-5}{\overline{s}_n}\sqrt{n-1}\right|\right) = 1 - \mathsf{P}\left(|Z_{n-1}| \le \left|\frac{\overline{x}_n-5}{\overline{s}_n}\sqrt{n-1}\right|\right) =$

$= 1 - \mathsf{P}\left(-\left|\frac{\overline{x}_n-5}{\overline{s}_n}\sqrt{n-1}\right| \le |Z_{n-1}| \le \left|\frac{\overline{x}_n-5}{\overline{s}_n}\sqrt{n-1}\right|\right) =$

$= 1 - \left(F_{Z_{n-1}}\left(\left|\frac{\overline{x}_n-5}{\overline{s}_n}\sqrt{n-1}\right|\right) - F_{Z_{n-1}}\left(-\left|\frac{\overline{x}_n-5}{\overline{s}_n}\sqrt{n-1}\right|\right)\right) =$

$= 1 - \left(F_{Z_{n-1}}\left(\left|\frac{\overline{x}_n-5}{\overline{s}_n}\sqrt{n-1}\right|\right) - \left(1 - F_{Z_{n-1}}\left(\left|\frac{\overline{x}_n-5}{\overline{s}_n}\sqrt{n-1}\right|\right)\right)\right) =$

$= 2 - 2F_{Z_{n-1}}\left(\left|\frac{\overline{x}_n-5}{\overline{s}_n}\sqrt{n-1}\right|\right) = \alpha^* \ge 0.05.$

Za naš uzorak, gde smo videli da je $n = 10$ i izračunali $\overline{x}_{10} = 3.7$ i $\overline{s}_{10} \approx 2.2825$, dobijamo sledeću realizaciju statistike Z_9 :

$$z_9 = \frac{\overline{x}_n-5}{\overline{s}_n}\sqrt{n-1} \approx \frac{3.7-5}{2.2825}\sqrt{9} \approx -1.7086,$$

pa pošto je

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{\overline{X}_n-5}{\overline{S}_n}\sqrt{n-1}\right| > \left|\frac{\overline{x}_n-5}{\overline{s}_n}\sqrt{n-1}\right|\right) = 2 - 2F_{Z_9}(1.7086) = \alpha^*,$$

gde je $F_{Z_9}(1.7086) < F_{Z_9}(1.833) \approx 0.95$, sledi

$$\alpha^* = 2 - 2F_{Z_9}(1.7086) \succ 2 - 2 \cdot 0.95 = 0.1 > 0.05 = \alpha,$$

što znači da uzorak ne protivreči hipotezi.

(Zaključak smo mogli izvesti i direktno na osnovu rezultata pod (a) gde smo našli interval poverenja za m sa stepenom pouzdanosti (nivoom poverenja) $0.95 = 1 - 0.05$, i vidimo da $5 \in (1.9790, 5.4210)$).

8. Prvi način: Ako za jedinicu vremena na vremenskoj osi uzmemo sat, i ako vremena pristizanja aviona A, B i C predstavljamo redom na osama x, y i z, tada koristeći geometrijsku interpretaciju verovatnoće imamo da vremenima pristizanja aviona A, B i C odgovara jedna trojka $(a,b,c) \in K$ gde je K kocka sa temenima $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$, a traženi uslov zadovoljavaju uređene trojke $(a,b,c) \in T$ gde je T presek kocke K, poluprostora $z > x$ i poluprostora $z > y$, odnosno T je piramida sa temenima $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,1)$. Tako dobijamo da verovatnoća traženog događaja iznosi: $\frac{m(T)}{m(K)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1}{1} = \frac{1}{3}$, gde je sa m označena mera (odnosno zapremina) posmatrane oblasti.

   Drugi način: Pošto svi avioni pristižu u toku jednog sata nezavisno jedan od drugog, to su svi mogući rasporedi (A,B,C), (A,C,B), (B,A,C), (B,C,A), (C,A,B), (C,B,A) jednako verovatni, a od ovih 6 rasporeda pomatranom događaju odgovaraju 2 povoljna rasporeda, a to su (A,B,C) i (B,A,C), te po Laplasovoj definiciji imamo da tražena verovatnoća iznosi $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

9. Sve slučajne promenljive X imaju istu raspodelu $\mathcal{E}(1)$ odakle sledi da sve imaju isto matematičko očekivanje $\mathsf{E}(X_i)=\frac{1}{1}=1,\ i\in\{1,2,\dots,n\}$, istu disperziju $\mathsf{D}(X_i)=\frac{1}{1^2}=1,\ i\in\{1,2,\dots,n\}$, i iste momente drugog reda $\mathsf{E}\left(X_i^2\right)=\mathsf{D}(X_i)+\mathsf{E}^2(X_i)=2,\ i\in\{1,2,\dots,n\}$. Zato je

$$\mathsf{E}(Y)=\mathsf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\right)=$$
$$=\mathsf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2+\sum_{\substack{i,j=1,\dots,n\\ i\neq j}}X_iX_j\right)\right)\overset{[1]}{=}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}\left(X_i^2\right)-\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}\left(X_i^2\right)-\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i,j=1,\dots,n\\ i\neq j}}\mathsf{E}(X_iX_j)\overset{[2]}{=}$$
$$=n\frac{n-1}{n^2}\mathsf{E}\left(X_1^2\right)-\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i,j=1,\dots,n\\ i\neq j}}\mathsf{E}(X_i)\,\mathsf{E}(X_j)=$$
$$=\frac{n-1}{n}\mathsf{E}\left(X_1^2\right)-\frac{1}{n^2}n(n-1)\,\mathsf{E}^2(X_1)=\frac{n-1}{n}\left(\mathsf{E}\left(X_1^2\right)-\mathsf{E}^2(X_1)\right)=$$
$$=\frac{n-1}{n}\mathsf{D}(X_1)=\frac{n-1}{n}.$$

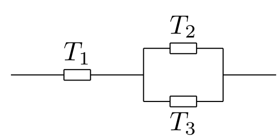
[1] - *Matematatičko očekivanje je linearna funkcija.*

[2] - *Sve slučajne promenljive X_i imaju jednak momenat drugog reda, a iz nezavisnosti (po parovima) ovih slučajnih promenljivih sledi da je* $\mathsf{E}(X_iX_j)=\mathsf{E}(X_i)\,\mathsf{E}(X_j)$.

21.11.1999.

1. Verovatnoća da avion bude pogođen prvim hicem iznosi 0.4, drugim 0.5, i trećim 0.7. U slučaju jednog pogotka, avion će biti oboren sa verovatnoćom 0.2, u slučaju dva pogotka sa verovatnoćom 0.6, a u slučaju tri pogotka će sigurno biti oboren. Izračunati verovatnoću da avion bude oboren posle tri pojedinačna hica.

2. Dato je strujno kolo na slici, u kome prekidači rade nezavisno jedan od drugog i imaju vreme rada sa eksponencijalnom raspodelom $\mathcal{E}(2)$. Naći raspodelu i očekivano vreme rada celog strujnog kola.



3. Dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X,Y) data je gustinom

$$\varphi_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} Axy & ,\quad 1<x+y<2\ \land\ x>0\ \land\ y>0\\ 0 & ,\quad \text{inače}\end{cases}.$$

   (a) Naći verovatnoću događaja $Y>X$.

   (b) Naći raspodelu slučajne promenljive $Z=X+Y-1$.

4. Autobus ide na svakih pet minuta. Putnici stižu na stajalište u slučajnom momentu nezavisno jedan od drugog. Verovatnoća da ukupno vreme koje

svi putnici na stajalištu provode čekajući autobus više od jednog sata je 0.99. Koliko putnika na stajalištu čeka autobus?

5. Slučajna promenljiva Y predstavlja zbir brojeva dobijenih pri bacanju 5 kockica za igru. Odrediti karakterističnu funkciju slučajne promenljive Y i pomoću nje matematičko očekivanje za Y.

6. Žeton za igru staje 10\$. U svakoj igri igrač ulaže jedan žeton i dobija 20\$ sa verovatnoćom p, a ne dobija ništa sa verovatnoćom $1-p$. Igrač igra 5 nezavisnih igara.

   (a) Naći raspodelu slučajne promenljive X koja predstavlja dobitak (gubitak) igrača.

   (b) Naći očekivanu vrednost i disperziju slučajne promenljive X.

   (c) Ako je $p = \frac{1}{3}$, naći verovatnoću da igrač neće biti na gubitku.

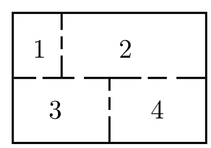
7. Iz raspodele odredjene gustinom $\varphi_X(x) = \begin{cases} e^{\theta - x} & , \text{ za } x \geq \theta \\ 0 & , \text{ za } x < \theta \end{cases}$, uzet ja uzorak obima n.

   (a) Metodom maksimalne verodostojnosti naći ocenu parametra θ.

   (b) Za tako dobijenu ocenu ispitati postojanost i centriranost, i ako ocena nije centrirana naći ocenu koja jeste centrirana.

   (c) Naći disperzije tako nađenih ocena.

8. Devojčica drži belog miša u kutiji sa slike. U diskretnim trenucima miš izlazi iz prostorije kroz jedan, na slučajan način izabran otvor. Vreme prolaska kroz otvor je zanemarljivo malo.



   (a) Koliki deo "dovoljno dugog" vremenskog intervala će miš u proseku provoditi u pojedinim prostorijama?

   (b) Ako je na početku miš stavljen u prostoriju broj 1, kolika je verovatnoća da će posle četiri prolaska miš ponovo biti u prostoriji 1?

9. U svaku od 100 meta izvedeno je 10 gađanja. Beležen je broj pogodaka:

broj pogodaka:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
učestalost:	1	1	4	11	22	25	19	12	3	0	2

   Sa nivoom značajnosti $\alpha = 0.05$ proveriti da li broj pogodaka ima binomnu raspodelu.

Rešenja:

1. Označimo sa D posmatrani događaj (avion je oboren posle tri pojedinačna hica), i označimo redom sa A, B, C događaje koji se realizuju kada je avion pogođen redom prvim, drugim, trećim hicem. Događaji

$A\,B\,C$, $A\,B\,\overline{C}$, $A\,\overline{B}\,C$, $\overline{A}\,B\,C$, $A\,\overline{B}\,\overline{C}$, $\overline{A}\,B\,\overline{C}$, $\overline{A}\,\overline{B}\,C$, $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ čine potpun sistem događaja, pa na osnovu formule totalne verovatnoće imamo:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(D) &= \mathsf{P}(A\,B\,C)\,\mathsf{P}(D \mid A\,B\,C) + \mathsf{P}\left(A\,B\,\overline{C}\right)\mathsf{P}\left(D \mid A\,B\,\overline{C}\right) + \\
&\quad + \mathsf{P}\left(A\,\overline{B}\,C\right)\mathsf{P}\left(D \mid A\,\overline{B}\,C\right) + \mathsf{P}\left(A\,\overline{B}\,\overline{C}\right)\mathsf{P}\left(D \mid A\,\overline{B}\,\overline{C}\right) + \\
&\quad + \mathsf{P}\left(\overline{A}\,B\,C\right)\mathsf{P}\left(D \mid \overline{A}\,B\,C\right) + \mathsf{P}\left(\overline{A}\,B\,\overline{C}\right)\mathsf{P}\left(D \mid \overline{A}\,B\,\overline{C}\right) + \\
&\quad + \mathsf{P}\left(\overline{A}\,\overline{B}\,C\right)\mathsf{P}\left(D \mid \overline{A}\,\overline{B}\,C\right) + \mathsf{P}\left(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\right)\mathsf{P}\left(D \mid \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\right) = \\
&= \mathsf{P}(A\,B\,C)\cdot 1 + \mathsf{P}\left(A\,B\,\overline{C}\right)\cdot 0.6 + \mathsf{P}\left(A\,\overline{B}\,C\right)\cdot 0.6 + \\
&\quad + \mathsf{P}\left(A\,\overline{B}\,\overline{C}\right)\cdot 0.2 + \mathsf{P}\left(\overline{A}\,B\,C\right)\cdot 0.6 + \mathsf{P}\left(\overline{A}\,B\,\overline{C}\right)\cdot 0.2 + \\
&\quad + \mathsf{P}\left(\overline{A}\,\overline{B}\,C\right)\cdot 0.2 + \mathsf{P}\left(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\right)\cdot 0 = \\
&= \mathsf{P}(A\,B\,C) + 0.6\cdot\left(\mathsf{P}\left(A\,B\,\overline{C}\right) + \mathsf{P}\left(A\,\overline{B}\,C\right) + \mathsf{P}\left(\overline{A}\,B\,C\right)\right) + \\
&\quad + 0.2\cdot\left(\mathsf{P}\left(A\,\overline{B}\,\overline{C}\right) + \mathsf{P}\left(\overline{A}\,B\,\overline{C}\right) + \mathsf{P}\left(\overline{A}\,\overline{B}\,C\right)\right) = \\
&= 0.14 + 0.6\cdot(0.06 + 0.14 + 0.21) + 0.2\cdot(0.06 + 0.09 + 0.21) = \\
&= 0.14 + 0.246 + 0.072 = 0.458\ ,
\end{aligned}$$

gde je

$\mathsf{P}(A\,B\,C) = 0.4\cdot 0.5\cdot 0.7 = 0.14,$

$\mathsf{P}\left(A\,B\,\overline{C}\right) = 0.4\cdot 0.5\cdot(1-0.7) = 0.06,$

$\mathsf{P}\left(A\,\overline{B}\,C\right) = 0.4\cdot(1-0.5)\cdot 0.7 = 0.14,$

$\mathsf{P}\left(A\,\overline{B}\,\overline{C}\right) = 0.4\cdot(1-0.5)\cdot(1-0.7) = 0.06,$

$\mathsf{P}\left(\overline{A}\,B\,C\right) = (1-0.4)\cdot 0.5\cdot 0.7 = 0.21,$

$\mathsf{P}\left(\overline{A}\,B\,\overline{C}\right) = (1-0.4)\cdot 0.5\cdot(1-0.7) = 0.09,$

$\mathsf{P}\left(\overline{A}\,\overline{B}\,C\right) = (1-0.4)\cdot(1-0.5)\cdot 0.7 = 0.21,$

$\mathsf{P}\left(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\right) = (1-0.4)\cdot(1-0.5)\cdot(1-0.7) = 0.09.$

2. Neka su T_1, T_2, T_3 slučajne promenljive koje predstavljaju vremena rada odgovarajućih prekidača, pri čemu sve tri imaju istu $\mathcal{E}(2)$ raspodelu sa gustinom i funkcijom raspodele:

$$\varphi_T(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ 2e^{-2t} & , \quad t \geq 0 \end{cases}, \qquad F_T(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ 1 - e^{-2t} & , \quad t \geq 0 \end{cases}.$$

Neka je K slučajna promenljiva koja predstavlja vreme rada celog strujnog kola. Na osnovu opisanih veza između prekidača zaključujemo da je $K = \min\{T_1, \max\{T_2, T_3\}\}$. Uvedimo pomoćnu slučajnu promenljivu $S = \max\{T_2, T_3\}$ čiju ćemo raspodelu najpre naći:

$$\begin{aligned}
&F_S(s) = \mathsf{P}(S < s) = \mathsf{P}(\max\{T_2, T_3\} < s) = \mathsf{P}(T_2 < s, T_3 < s) = \\
&= \mathsf{P}(T_2 < s)\,\mathsf{P}(T_3 < s) = F_T(s)\,F_T(s) = \begin{cases} 0 & , \quad s < 0 \\ \left(1 - e^{-2s}\right)^2 & , \quad s \geq 0 \end{cases},
\end{aligned}$$

$$\varphi_S(s) = (F_S(s))' = \begin{cases} 0 & , \quad s < 0 \\ 4e^{-2s}\left(1 - e^{-2s}\right) & , \quad s \geq 0 \end{cases}.$$

Sada nalazimo raspodelu slučajne promenljive $K = \min\{T_1, S\}$:

$F_K(k) = \mathsf{P}(K < k) = \mathsf{P}(\min\{T_1, S\} < k) = 1 - \mathsf{P}(\min\{T_1, S\} \geq k) =$

$= 1 - \mathsf{P}(T_1 \geq k, S \geq k) = 1 - \mathsf{P}(T_1 \geq k)\,\mathsf{P}(S \geq k) =$

$= 1 - (1 - \mathsf{P}(T_1 < k))(1 - \mathsf{P}(S < k)) =$

$= 1 - (1 - F_T(k))(1 - F_S(k)) = \begin{cases} 0 & , \ k < 0 \\ 1 + e^{-6k} - 2e^{-4k} & , \ k \geq 0 \end{cases},$

$\varphi_K(k) = (F_K(k))' = \begin{cases} 0 & , \ k < 0 \\ 8e^{-4k} - 6e^{-6k} & , \ k \geq 0 \end{cases}.$

Matematičko očekivanje vremena rada strujnog kola je

$\mathsf{E}(K) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} k\varphi_K(k)\,dk = \int\limits_{0}^{\infty} k\left(8e^{-4k} - 6e^{-6k}\right)dk = \frac{1}{3}.$

3. Neka je $S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 - x < y < 2 - x, \;\; x > 0, \;\; y > 0 \right\}$

$(1 < x + y < 2 \;\; \Leftrightarrow \;\; 1 - x < y < 2 - x)$.

Zbog

$$1 = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi_{X,Y}(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^{2-x} Axydy \right) dx + \int\limits_1^2 \left(\int\limits_0^{2-x} Axydy \right) dx = \frac{5}{8}A,$$

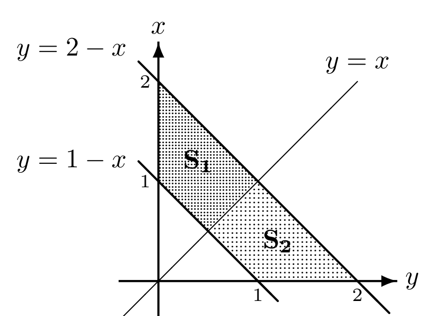
sledi da je $A = \frac{8}{5}$.

(a) Neka je $S_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 - x < y < 2 - x, \;\; x > 0, \;\; y > x \right\}$ i $S_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 - x < y < 2 - x, \;\; x > 0, \;\; y \leq x \right\}$ $(S = S_1 \cup S_2$, vidi sliku 1). Pošto su oblasti S_1 i S_2 simetrične u odnosu na pravu $x = y$, a gustina $\varphi_{X,Y}(x,y)$ je takođe simetrična u odnosu na tu pravu, sledi da je:

$$\iint\limits_{S_1} \varphi_{X,Y}(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{S_2} \varphi_{X,Y}(x,y)\,dxdy,$$

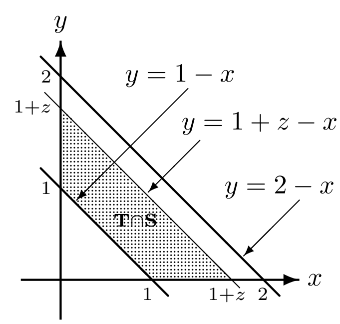
pa zbog $S = S_1 \cup S_2$ i $\iint\limits_{S} \varphi_{X,Y}(x,y)\,dxdy = 1$ dobijamo

$$\mathsf{P}(Y > X) = \iint\limits_{S_1} \varphi_{X,Y}(x,y)\,dxdy = \frac{1}{2}.$$



slika 1

(b) $F_Z(z) = \mathsf{P}(Z < z) = \mathsf{P}(X + Y - 1 < z) =$
$= \mathsf{P}(Y < -X + 1 + z) = \iint\limits_T \varphi_{X,Y}(x,y)\,dxdy,$
gde je T poluravan određena nejednačinom $y < -x + 1 + z$, dakle ona poluravan u odnosu na pravu $y = -x + 1 + z$ (primetimo da su prave $y = -x + 2$, $y = -x + 1 + z$ i $y = -x + 1$ paralelne) u kojoj se nalazi npr. tačka $(0, y_0)$ za koju važi $y_0 < z + 1$ $(T = \{(x,y) \mid y < -x + 1 + z\})$.



slika 2

Prema tome (vidi sliku 2):

$F_Z(z) = \iint\limits_{T\cap S} \frac{8}{5}xydxdy = \ldots$

(1) za $z \le 0$ je $T \cap S = \emptyset$ pa imamo: $F_Z(z) = \iint\limits_{\emptyset} \frac{8}{5}xydxdy = 0;$

(2) za $0 < z \le 1$ je
$T \cap S = \{(x,y) \mid 1 - x < y < 1 + z - x \ \wedge\ x \ge 0 \ \wedge\ y \ge 0\}$
pa imamo:
$F_Z(z) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^{1+z-x} \frac{8}{5}xydy \right) dx + \int\limits_1^{1+z} \left(\int\limits_0^{1+z-x} \frac{8}{5}xydy \right) dx =$
$= \left(\frac{4}{15}z + \frac{2}{5}z^2\right) + \left(\frac{4}{15}z^3 + \frac{1}{15}z^4\right) = \frac{1}{15}z\left(z^3 + 4z^2 + 6z + 4\right);$

(3) za $1 < z$ je $T \cap S = S$ pa je: $F_Z(z) = \iint\limits_S \frac{8}{5}xydxdy = 1.$

4. Vreme ćemo meriti u minutima (1 sat = 60 minuta). Posmatramo samo interval od pet minuta između dva sukcesivna prolaska autobusa. Obeležimo sa X_i vreme koje i - ti putnik provede na stajalištu (čekajući autobus). Pošto se putnik pojavljuje u slučajnom trenutku u intervalu od 5 minuta, slučajna promenljiva X_i ima uniformnu raspodelu $\mathcal{U}(0,5)$. Ako sa n obeležimo broj putnika koji pristignu na stanicu između dva prolaska autobusa, tada slučajna promenljiva $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ predstavlja ukupno vreme koje tih n putnika provede na stajalištu između dva prolaska autobusa, i treba po n rešiti jednačinu: $\mathsf{P}(S_n > 60) = 0.99.$

$\mathsf{E}(X_i) = \frac{5}{2}, \quad \mathsf{D}(X_i) = \frac{25}{12} \quad$ za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\},$

$\mathsf{E}(S_n) = \mathsf{E}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{E}(X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{5}{2} = \frac{5}{2}n,$

$\mathsf{D}(S_n) = \mathsf{D}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{[1]}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{D}(X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{25}{12} = \frac{25}{12}n,$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(S_n > 60) = 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \mathsf{P}(S_n \leq 60) = 0.99 \quad \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \quad \mathsf{P}(S_n \leq 60) = 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(\tfrac{S_n - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}} \leq \tfrac{60 - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}}\right) = 0.01 \quad \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(\tfrac{S_n - \frac{5}{2}n}{\sqrt{\frac{25}{12}n}} \leq \tfrac{60 - \frac{5}{2}n}{\sqrt{\frac{25}{12}n}}\right) = 0.01 \quad \overset{[2]}{\Leftrightarrow} \quad \phi\left(\tfrac{60 - \frac{5}{2}n}{\sqrt{\frac{25}{12}n}}\right) \approx 0.01 \quad \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \quad \phi\left(\tfrac{60 - \frac{5}{2}n}{\frac{5}{2\sqrt{3}}\sqrt{n}}\right) \approx 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{60 - \frac{5}{2}n}{\frac{5}{2\sqrt{3}}\sqrt{n}} \approx \phi^{-1}(0.01) \approx -2.33 \quad \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \quad 60 - \tfrac{5}{2}n \approx -2.33 \cdot \tfrac{5}{2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{n} \quad \Leftrightarrow \quad n + \tfrac{2.33}{\sqrt{3}}\sqrt{n} - 24 \approx 0 \quad \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \quad \left(t^2 + \tfrac{2.33}{\sqrt{3}}t - 24 \approx 0 \ \wedge \ t = \sqrt{n}\right) \quad \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \quad ((t \approx -5.6176 \ \vee \ t \approx 4.2713) \ \wedge \ t = \sqrt{n}) \quad \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \quad (\sqrt{n} \approx -5.6176 \ \vee \ \sqrt{n} \approx 4.2713) \quad \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{n} \approx 4.2713 \quad \Leftrightarrow \quad n \approx 31.5569,
\end{aligned}$$

na osnovu čega dobijamo približno rešenje $n = 32$.

[1] - *Slučajne promenljive* X_i *su nezavisne.*

[2] - *Raspodelu slučajne promenljive* $S_n^* = \frac{S_n - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}} = \frac{S_n - \frac{5}{2}n}{\sqrt{\frac{25}{12}n}}$ *na osnovu centralne granične teoreme aproksimiramo normalnom raspodelom* $\mathcal{N}(0,1)$.

5. Neka su $X_i,\ i \in \{1,2,3,4,5\}$ slučajne promenljive koje predstavljaju brojeve koji su dobijeni na i - toj kockici. Slučajne promenljive X_i su nezavisne i imaju isti zakon raspodele:

$$\mathsf{P}(X_i = k) = \tfrac{1}{6}, \quad k \in \{1,2,3,4,5,6\}, \quad i \in \{1,2,3,4,5\}.$$

Slučajnu promenljivu Y možemo predstaviti kao

$$Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$$

pa ćemo naći karakteristične funkcije slučajnih promenljivih X_i (sve imaju isti zakon raspodele, pa će imati i iste karakteristične funkcije), te ćemo pomoću njih, koristeći osobine karakterističnih funkcija, naći karakterističnu funkciju slučajne promenljive Y :

$\mathcal{K}_{X_j}(t) = \mathsf{E}\left(e^{itX_j}\right) = \sum\limits_{m=1}^{6} e^{itm}\mathsf{P}(X = m) = \sum\limits_{m=1}^{6} e^{itm}\frac{1}{6} =$

$= \frac{1}{6}\left(e^{it} + e^{2it} + e^{3it} + e^{4it} + e^{5it} + e^{6it}\right).$

Sada dobijamo:

$\mathcal{K}_Y(t) = \mathcal{K}_{(X_1+X_2+X_3+X_4+X_5)}(t) \overset{[1]}{=} \prod_{j=1}^{5} \mathcal{K}_{X_j}(t) \overset{[2]}{=} \left(\mathcal{K}_{X_1}(t)\right)^5 =$
$= \frac{1}{6^5}\left(e^{it} + e^{2it} + e^{3it} + e^{4it} + e^{5it} + e^{6it}\right)^5.$

[1] - *Slučajne promenljive* X_j *su nezavisne.*

[2] - *Sve slučajne promenljive* X_j *imaju istu karakterističnu funkciju.*

Pomoću karakteristične funkcije nalazimo matematičko očekivanje slučajne promenljive Y:

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{K}_Y(t)\right)' &= \tfrac{1}{6^5} 5\left(e^{it} + e^{2it} + e^{3it} + e^{4it} + e^{5it} + e^{6it}\right)^4 \cdot \\
&\quad \cdot \left(ie^{it} + 2ie^{2it} + 3ie^{3it} + 4ie^{4it} + 5ie^{5it} + 6ie^{6it}\right) = \\
&= \tfrac{5i}{6^5}\left(e^{it} + e^{2it} + e^{3it} + e^{4it} + e^{5it} + e^{6it}\right)^4 \cdot \\
&\quad \cdot \left(e^{it} + 2e^{2it} + 3e^{3it} + 4e^{4it} + 5e^{5it} + 6e^{6it}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}'_Y(0) &= \tfrac{5i}{6^5}(1+1+1+1+1+1)^4(1+2+3+4+5+6) = \\
&= \tfrac{5i}{6^5} \cdot 6^4 \cdot 21 = \tfrac{35}{2} i,
\end{aligned}$$

$$\mathsf{E}(Y) = \frac{\mathcal{K}'_Y(0)}{i} = \frac{35}{2}.$$

6. Neka je Y slučajna promenljiva koja predstavlja broj dobijenih igara. Skup vrednosti slučajne promenljive Y je $\mathcal{R}_Y = \{0,1,2,3,4,5\}$ i ona ima binomnu $\mathcal{B}(5,p)$ raspodelu ($\mathsf{P}(Y=k) = \binom{5}{k} p^k (1-p)^{5-k}$, $k \in \mathcal{R}_Y$). Prema opisu iz zadatka, slučajnu promenljivu X možemo predstaviti na sledeći način: $X = -50 + 20Y$. U pitanju je bijektivna transformacija, te je $\mathcal{R}_X = \{-50,-30,-10,10,30,50\}$.

   (a) $\mathsf{P}(X = -50+20k) = \mathsf{P}(Y=k) = \binom{5}{k} p^k (1-p)^{5-k}$, $k \in \mathcal{R}_Y$ odnosno X ima zakon raspodele
   $$\begin{pmatrix} -50 & -30 & -10 & 10 & 30 & 50 \\ (1-p)^5 & 5p(1-p)^4 & 10p^2(1-p)^3 & 10p^3(1-p)^2 & 5p^4(1-p) & p^5 \end{pmatrix}.$$

   (b) Koristeći osobine matematičkog očekivanja i disperzije, kao i poznate vrednosti očekivanja i disperzije slučajne promenljive sa binomnom raspodelom, dobijamo:
   $\mathsf{E}(X) = \mathsf{E}(-50+20Y) = -50 + 20\mathsf{E}(Y) = -50 + 20 \cdot 5 \cdot p = 100p - 50,$
   $\mathsf{D}(X) = \mathsf{D}(-50+20Y) = 0 + 20^2 \mathsf{D}(Y) =$
   $= 400 \cdot 5 \cdot p \cdot (1-p) = 2000p(1-p).$

   (c) Verovatnoća da igrač nije na gubitku iznosi
   $\mathsf{P}(X > 0) = \mathsf{P}(X \in \{10,30,50\}) = \mathsf{P}(Y \in \{3,4,5\}) =$
   $= \mathsf{P}(Y=3) + \mathsf{P}(Y=4) + \mathsf{P}(Y=5) =$
   $= 10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) + p^5 = \frac{17}{81} \approx 0.21.$

7. (a) Funkcija verodostojnosti:

$$L(x_1,\ldots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_X(x_i)=$$
$$=\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{n}e^{\theta-x_i} & ,\ \forall i, x_i\ge\theta\\ 0 & ,\ \exists i, x_i<\theta\end{cases}=\begin{cases}e^{n\theta-(x_1+\ldots+x_n)} & ,\ \forall i, x_i\ge\theta\\ 0 & ,\ \exists i, x_i<\theta\end{cases},$$
$$\ln L(x_1,\ldots,x_n;\theta)=n\theta-\sum_{i=1}^{n}x_i,$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x_1,\ldots,x_n;\theta)=n\ne 0,\quad x_i\ge\theta.$$
Vidimo da funkcija L nema ekstrema u unutrašnjosti intervala $(-\infty,\min\{x_1,\ldots,x_n\}]$ (jer je: $\forall i, x_i\ge\theta\ \Leftrightarrow\ \theta\le\min\{x_1,\ldots,x_n\}$), a pošto je funkcija L monotono rastuća po θ na ovom intervalu, to ona maksimum dostiže na desnom rubu intervala, te dobijamo ocenu
$$\hat\theta=\min\{X_1,\ldots,X_n\}.$$

(b) Pomoću raspodele slučajne promenljive X nalazimo raspodelu slučajne promenljive $\hat\theta$:
$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_X(x)\,dx=$$
$$=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{x}0dx & ,\ x<\theta\\ \int\limits_{\theta}^{x}e^{\theta-t}dt & ,\ x\ge\theta\end{cases}=\begin{cases}0 & ,\ x<\theta\\ 1-e^{\theta-x} & ,\ x\ge\theta\end{cases},$$
$$F_{\hat\theta}(t)=\mathsf{P}\left(\hat\theta<t\right)=\mathsf{P}(\min\{X_1,\ldots,X_n\}<t)=$$
$$=1-\mathsf{P}(\min\{X_1,\ldots,X_n\}\ge t)=1-\mathsf{P}(X_1\ge t,\ldots,X_n\ge t)\overset{[1]}{=}$$
$$=1-\prod_{i=1}^{n}\mathsf{P}(X_i\ge t)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-\mathsf{P}(X_i<t))=1-\prod_{i=1}^{n}\left(1-F_{X_i}(t)\right)=$$
$$=1-(1-F_X(t))^n=\begin{cases}1-e^{n(\theta-t)} & ,\ t\ge\theta\\ 0 & ,\ t<\theta\end{cases},$$
$$\varphi_{\hat\theta}(t)=\left(F_{\hat\theta}(t)\right)'=\begin{cases}ne^{n(\theta-t)} & ,\ t\ge\theta\\ 0 & ,\ t<\theta\end{cases}.$$

Centriranost:
$$\mathsf{E}\left(\hat\theta\right)=\int_{-\infty}^{\infty}t\varphi_{\hat\theta}(t)\,dt=\int_{\theta}^{\infty}nte^{n(\theta-t)}dt\overset{[2]}{=}$$
$$=\left(-te^{n(\theta-t)}\right)\Big|_{\theta}^{\infty}+\int_{\theta}^{\infty}e^{n(\theta-t)}dt=\theta-\tfrac{1}{n}e^{n(\theta-t)}\Big|_{\theta}^{\infty}=\theta+\tfrac{1}{n}.$$

Prema tome, vidimo da ocena $\hat\theta$ nije centrirana, ali jeste asimptotski centrirana jer je $\mathsf{E}\left(\hat\theta\right)\ne\theta$ i $\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{E}\left(\hat\theta\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\theta+\frac{1}{n}\right)=\theta$.

Ocena $\ddot\theta=\hat\theta-\frac{1}{n}=\min\{X_1,\ldots,X_n\}-\frac{1}{n}$ je očigledno centrirana jer je $\mathsf{E}\left(\ddot\theta\right)=\mathsf{E}\left(\hat\theta-\frac{1}{n}\right)=\mathsf{E}\left(\hat\theta\right)-\mathsf{E}\left(\frac{1}{n}\right)=\theta+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}=\theta$.

Postojanost: za proizvoljno $\varepsilon>0$ važi

$\mathsf{P}\left(\left|\hat{\theta}-\theta\right|>\varepsilon\right)=1-\mathsf{P}\left(\left|\hat{\theta}-\theta\right|\leq\varepsilon\right)=1-\mathsf{P}\left(-\varepsilon\leq\hat{\theta}-\theta\leq\varepsilon\right)=$
$=1-\mathsf{P}\left(\theta-\varepsilon\leq\hat{\theta}\leq\theta+\varepsilon\right)=1-\left(F_{\hat{\theta}}\left(\theta+\varepsilon\right)-F_{\hat{\theta}}\left(\theta-\varepsilon\right)\right)=$
$=1-\left(\left(1-e^{n(\theta-(\theta+\varepsilon))}\right)-0\right)=1-\left(1-e^{-n\varepsilon}\right)=e^{-n\varepsilon}.$

Ocena je postojana jer je $\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(\left|\hat{\theta}-\theta\right|>\varepsilon\right)=\lim\limits_{n\to\infty}e^{-n\varepsilon}=0.$

(c) $\mathsf{E}\left(\hat{\theta}^2\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}t^2\varphi_{\hat{\theta}}(t)\,dt=\int\limits_{\theta}^{\infty}nt^2e^{n(\theta-t)}dt\overset{[3]}{=}$
$=\left(-t^2e^{n(\theta-t)}\right)\Big|_{\theta}^{\infty}+\int\limits_{\theta}^{\infty}2te^{n(\theta-t)}dt=\theta^2+2\frac{1}{n}\int\limits_{\theta}^{\infty}nte^{n(\theta-t)}\overset{[2]}{=}$
$=\theta^2+2\frac{1}{n}\left(\theta+\frac{1}{n}\right)=\theta^2+\frac{2\theta}{n}+\frac{2}{n^2},$

$\mathsf{D}\left(\hat{\theta}\right)=\mathsf{E}\left(\hat{\theta}^2\right)-\left(\mathsf{E}\left(\hat{\theta}^2\right)\right)^2=\theta^2+\frac{2\theta}{n}+\frac{2}{n^2}-\left(\theta^2+\frac{2\theta}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{n^2},$

$\mathsf{D}\left(\ddot{\theta}\right)=\mathsf{D}\left(\hat{\theta}+\frac{1}{n}\right)=\mathsf{D}\left(\hat{\theta}\right)+\mathsf{D}\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}+0=\frac{1}{n^2}.$

Primetimo da su obe ocene jednako efikasne, jer je $\mathsf{D}\left(\hat{\theta}\right)=\mathsf{D}\left(\ddot{\theta}\right)$.

[1] - *Slučajne promenljive* X_i *su nezavisne.*

[2] - *Parcijalnom integracijom:* $u=t,\ dv=ne^{n(\theta-t)}dt.$

[3] - *Parcijalnom integracijom:* $u=t^2,\ dv=ne^{n(\theta-t)}dt.$

8. (a) Na osnovu opisa dobijamo matricu prelaza za jedan korak, i zatim matricu prelaza za 4 koraka koja će nam trebati pod (b) (izračunavamo samo one elemente koji će nam biti zaista potrebni):

$$P=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\ \begin{bmatrix}0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\ \frac{2}{5}&0&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0&\frac{1}{2}\\ 0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}\end{array}\quad\Rightarrow\quad P^2=\begin{bmatrix}\frac{7}{20}&\frac{1}{12}&\frac{2}{15}&\frac{13}{30}\\ \frac{1}{2}&\frac{31}{60}&\frac{1}{3}&\frac{1}{10}\\ \frac{1}{10}&\frac{5}{12}&\frac{23}{60}&\frac{1}{10}\\ \frac{13}{40}&\frac{1}{8}&\frac{1}{10}&\frac{9}{20}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad P^4=P^2\cdot P^2=\begin{bmatrix}\frac{337}{1200}&\frac{131}{720}&\frac{38}{225}&\frac{221}{600}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{bmatrix}.$$

Za navedenu matricu prelaza P tražimo vektor finalnih verovatnoća $\mathbf{p}^*=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\ \begin{bmatrix}x&y&z&u\end{bmatrix}\end{array}$ gde je $x,y,z,u\in(0,1)$ i $u=1-x-y-z$, odnosno rešavamo po x,y,z,u sistem jednačina:

$\underline{\mathbf{p}^*\cdot P=\mathbf{p}^*\ \wedge\ u=1-x-y-z}\ \Leftrightarrow$

$\underline{\begin{bmatrix}x&y&z&1-x-y-z\end{bmatrix}\cdot P=\begin{bmatrix}x&y&z&1-x-y-z\end{bmatrix}}\quad\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{ccccccccl} & & \frac{2}{5}y & + & \frac{1}{4}z & & & = & x \\ \frac{2}{3}x & & & + & \frac{1}{4}z & + & \frac{1}{2}(1-x-y-z) & = & y \\ \frac{1}{3}x & + & \frac{1}{5}y & & & + & \frac{1}{2}(1-x-y-z) & = & z \\ & & \frac{2}{5}y & + & \frac{1}{2}z & & & = & 1-x-y-z \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccc} x & - & \frac{2}{5}y & - & \frac{1}{4}z & = & 0 \\ & & y & + & \frac{25}{172}z & = & \frac{15}{43} \\ & & & & z & = & \frac{1}{4} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = \frac{3}{16} \\ y = \frac{5}{16} \\ z = \frac{1}{4} \\ u = \frac{1}{4} \end{array}$$

Dakle, finalna raspodela je:

$$\mathbf{p}^* = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right] \end{array}.$$

Dobijene finalne verovatnoće imaju sledeće značenje: ako se posmatra "dovoljno dug" vremenski period, $\frac{3}{16}$ vremena miš provede u prostoriji broj 1, $\frac{5}{16}$ vremena provede u prostoriji broj 2, a po $\frac{1}{4}$ vremena provodi u prostorijama broj 3 i 4.

(b) Početna raspodela: $\quad \mathbf{p}(0) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}.$

Raspodela nakon 4 koraka:

$$\mathbf{p}(4) = \mathbf{p}(0) \cdot P(4) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} \frac{337}{1200} & \frac{131}{720} & \frac{38}{225} & \frac{221}{600} \end{array} \right] \end{array},$$

tako da je tražena verovatnoća $p_1(4) = \frac{337}{1200}$.

9. Obeležje X ima $\mathcal{B}(10,p)$ raspodelu i posmatra se uzorak $(x_1,\ldots,x_{100})$. Za ocenu parametra p koristimo npr.

$$\hat{p} = \frac{1}{10}\overline{X}_{100} = \frac{1}{1000}(X_1 + \ldots + X_{100}),$$

čija je realizovana vrednost na osnovu uzorka

$$\hat{p} = \frac{1}{1000}(0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot 4 + 3\cdot 11 + 4\cdot 22 + 5\cdot 25 + 6\cdot 19 + 7\cdot 12 + \\ +8\cdot 3 + 9\cdot 0 + 10\cdot 2) = 0.497$$

(najbolja ocena matematičkog očekivanja $\mathsf{E}(X) = 10p$ je statistika $\overline{X}_{100}$, a pri tome je $p = \frac{1}{10}\mathsf{E}(X)$).

Teorijske verovatnoće ćemo χ^2 testom uporediti sa uzorkom, ali pre toga moramo izvršiti spajanje grupa podataka tako da u svakoj grupi bude bar 5 realizacija:

broj pogodaka (k)	$0,1,2$	3	4	5	6	7	$8,9,10$
učestalost (n_k)	6	11	22	25	19	12	5

Teorijske verovatnoće su

$$\mathsf{P}(X=k) = \binom{10}{k}\hat{p}^k(1-\hat{p})^{10-k}, \ k \in \{0,1,2,\ldots,10\},$$

odnosno

$p_2 = \mathsf{P}(X=0) + \mathsf{P}(X=1) + \mathsf{P}(X=2) \approx 0.0568287,$
$p_3 = \mathsf{P}(X=3) \approx 0.120012, \quad p_4 = \mathsf{P}(X=4) \approx 0.207517,$
$p_5 = \mathsf{P}(X=5) \approx 0.246049, \quad p_6 = \mathsf{P}(X=6) \approx 0.202595,$
$p_7 = \mathsf{P}(X=7) \approx 0.114388,$
$p_8 = \mathsf{P}(X=8) + \mathsf{P}(X=9) + \mathsf{P}(X=10) = 1 - \sum\limits_{i=2}^{7} p_i \approx 0.0423838.$

Broj grupa podataka je 7, i pri tome smo imali jedan ocenjeni parametar, pa iz tablica očitavamo $\chi^2_{\alpha;7-1-1} = \chi^2_{0.05;5} \approx 11.1$. Pošto je

$$z = \sum_{k=2}^{8} \frac{(n_k - 100 \cdot p_k)^2}{100 \cdot p_k} \approx 0.42537 < 11.1 \approx \chi^2_{0.05;5}$$

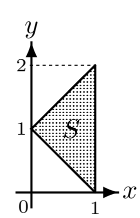
konstatujemo da uzorak ne protivreči hipotezi.

22.01.2000.

1. Zoran ima 4 crvena i 7 belih klikera, a Tanja 5 crvenih i 4 bela klikera. Zoran i Tanja nasumice uzimaju po 2 klikera i započinju igru. Tokom igre jedan kliker se polomi.
   (a) Koliko iznosi verovatnoća da je polomljeni kliker bele boje?
   (b) Ako se zna da je polomljeni kliker bele boje, koliko iznosi verovatnoća da je kliker bio Tanjin?

2. Pretpostavimo da je nov semafor postavljen određenog dana u 0 časova. Vreme X pojave kvara na semaforu, mereno u satima, ima eksponencijalnu raspodelu sa očekivanim vremenom pojave kvara od 48 sati.
   (a) Naći verovatnoću da će do pojave kvara doći tokom nekog dana u vremenskom periodu između 6 časova ujutru i 6 časova posle podne.
   (b) Naći matematičko očekivanje vremena pojave kvara ako znamo da se kvar desio u prva 24 časa.

3. Data je gustina dvodimenzionalne slučajne promenljive (X, Y):
   $$\varphi_{X,Y}(x, y) = \tfrac{3}{2}x, \quad (x, y) \in S,$$
   gde je $S = \{(x, y) \mid |y - 1| < x < 1\}$ oblast na slici.



   (a) Naći gustinu slučajne promenljive Y i skicirati njen grafik.
   (b) Naći raspodelu slučajne promenljive $Z = X + Y$.

4. Ispod slavine koja kaplje postavljena je prazna šolja zapremine $100ml$. Svake 4 sekunde u šolju padne jedna kap. Količina vode u jednoj kapi ima očekivanu vrednost $3ml$ sa standardnim odstupanjem $0.8ml$ i ne zavisi od količine vode u drugim kapima. Koliko iznosi verovatnoća da će se za dva minuta šolja prepuniti?

5. Dato je obeležje $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1-3p & p & 2p \end{pmatrix}$ i dve ocene parametra p (gde n označava obim uzorka):

$$\hat{X}_n = \frac{1}{5n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \ddot{X}_n = \frac{1}{9n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

(a) Ispitati centriranost ocena $\hat{X}_n$ i $\ddot{X}_n$.

(b) Koja ocena je efikasnija?

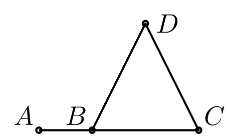
6. Dat je prost slučajni uzorak obeležja X:

1.31	0.77	2.20	0.23	2.33	0.62	4.28	2.51	0.69	2.52
0.67	0.014	3.47	8.34	1.91	5.43	2.31	2.63	0.66	0.42
2.22	1.44	2.92	7.63	0.00042	0.46	0.21	4.01	0.78	4.75

χ^2 testom ispitati da li je uzorak u saglasnosti sa eksponencijalnom raspodelom sa pragom značajnosti $\alpha = 0.05$, uzimajući intervale $(-\infty, 0.5]$, $(0.5, 1]$, $(1, 2.5]$, $(2.5, +\infty)$.

7. Neka su tačke A, B, C, D povezane kao na slici.

Neka se čestica u svakom koraku pomera iz jedne tačke u drugu sa njom povezanu tačku, pri čemu u slučaju da je polazna tačka povezana sa više tačaka, prelasci u sve povezane tačke su jednako verovatni.



(a) Naći matricu prelaza za jedan korak.

(b) Ako se na početku čestica sa jednakim verovatnoćama nalazi u tački C ili tački D, naći raspodelu verovatnoća položaja čestice nakon 2 koraka.

8. Neka su U i V nezavisne slučajne promenljive sa normalnom raspodelom $\mathcal{N}(0,1)$ i neka je $X_t,\ t \in \mathbb{R}$ slučajni proces definisan sa $X_t = e^t U + t^2 V$. Naći sledeće karakteristike slučajnog procesa X_t:

(a) matematičko očekivanje,

(b) autokovarijansnu funkciju,

(c) disperziju.

Rešenja:

1. Označimo sa B događaj "*polomljeni kliker je bele boje*", a sa T događaj "*polomljeni kliker je bio Tanjin*". Tekstom zadatka je dato:

$\mathsf{P}(T) = \mathsf{P}(\overline{T}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \mathsf{P}(B \mid T) = \frac{4}{5+4} = \frac{4}{9}, \quad \mathsf{P}(B \mid \overline{T}) = \frac{7}{4+7} = \frac{7}{11}.$

(a) Na osnovu formule totalne verovatnoće je:
$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(T)\,\mathsf{P}(B \mid T) + \mathsf{P}(\overline{T})\,\mathsf{P}(B \mid \overline{T}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9} + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{11} = \frac{107}{198} \approx 0.54.$

(b) Na osnovu Bajesove formule je

$$\mathsf{P}(T \mid B) = \frac{\mathsf{P}(T)\,\mathsf{P}(B \mid T)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}}{\frac{107}{198}} = \frac{44}{107} \approx 0.41.$$

2. Slučajna promenljiva X ima $\mathcal{E}\left(\frac{1}{48}\right)$ raspodelu, jer je $\mathsf{E}(X) = \frac{1}{\frac{1}{48}} = 48$. Gustina i funkcija raspodele slučajne promenljive X su:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{1}{48}e^{-\frac{1}{48}x}, & x \geq 0 \end{cases}, \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{48}x}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Obeležimo sa A skup (disjunktnih) vremenskih intervala između 6 časova ujutru i 6 časova posle podne: $A = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} [24k+6, 24k+18]$.

(a) Traži se verovatnoća događaja $\{X \in A\}$ koga možemo predstaviti kao uniju disjunktnih događaja:

$$\{X \in A\} = \sum_{k=0}^{\infty} \{X \in [24k+6, 24k+18]\}.$$

$$\mathsf{P}(X \in A) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(24k+6 \leq X \leq 24k+18) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(F_X(24k+18) - F_X(24k+6)\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(1 - e^{-\frac{1}{48}(24k+18)}\right) - \left(1 - e^{-\frac{1}{48}(24k+6)}\right)\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{1}{2}k-\frac{1}{8}} - e^{-\frac{1}{2}k-\frac{3}{8}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}k}\left(e^{-\frac{1}{8}} - e^{-\frac{3}{8}}\right) =$$
$$= \left(e^{-\frac{1}{8}} - e^{-\frac{3}{8}}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^k =$$
$$= \left(e^{-\frac{1}{8}} - e^{-\frac{3}{8}}\right) \frac{1}{1-e^{-\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1}{\sqrt[8]{e}} - \frac{1}{\sqrt[8]{e^3}}\right) \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}.$$

(b) Traži se $\mathsf{E}(X \mid X \in [0,24])$.

$$\mathsf{P}(X \in [0,24]) = \mathsf{P}(0 \leq X \leq 24) = F_X(24) - F_X(0) =$$
$$= 1 - e^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1},$$

$$F_{X \mid \{X \in [0,24]\}}(x) = \frac{\mathsf{P}(X<x, 0 \leq X \leq 24)}{\mathsf{P}(0 \leq X \leq 24)} = \frac{\mathsf{P}(0<X<\min\{x,24\})}{\mathsf{P}(0 \leq X \leq 24)} =$$

$$= \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ \frac{\mathsf{P}(0<X<x)}{\mathsf{P}(0 \leq X \leq 24)} & , \quad x \in (0,24] \\ \frac{\mathsf{P}(0<X<24)}{\mathsf{P}(0 \leq X \leq 24)} & , \quad x > 24 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ \frac{1-e^{-\frac{1}{48}x}}{1-e^{-\frac{1}{2}}} & , \quad x \in (0,24] \\ 1 & , \quad x > 24 \end{cases}.$$

Sada dobijamo:

$$\varphi_{X \mid \{X \in [0,24]\}}(x) = F'_{X \mid \{X \in [0,24]\}}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \notin [0,24] \\ \frac{e^{-\frac{1}{48}x}}{48\ \ 1-e^{-\frac{1}{2}}} & , \quad x \in [0,24] \end{cases},$$

$$\mathsf{E}(X \mid X \in [0,24]) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\varphi_{X \mid \{X \in [0,24]\}}(x)\,dx = \int\limits_{0}^{24} x \frac{e^{-\frac{1}{48}x}}{48\ 1-e^{-\frac{1}{2}}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{48\ 1-e^{-\frac{1}{2}}} \left(-48e^{-\frac{1}{48}x}(x+48)\right)\Big|_{0}^{24} = 24\frac{2\sqrt{e}-3}{\sqrt{e}-1}.$$

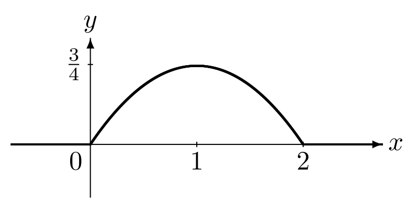
3. Neka je S oblast nad kojom je gustina $\varphi_{X,Y}(x,y)$ pozitivna:

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |y-1| < x < 1\right\} =$$
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < y < 2 \ \wedge\ 1-y < x < y-1\right\}.$$

(a) $\varphi_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_{X,Y}(x,y)\ dx = \ldots$

- za $y \notin (0,2)$: $\quad \varphi_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} 0\,dx = 0;$
- za $y \in (0,1]$: $\quad \varphi_Y(y) = \int\limits_{1-y}^{1} \frac{3}{2}x\ dx = \frac{3}{4}x^2 \Big|_{1-y}^{1} =$
  $= \frac{3}{4}\left(1-(1-y)^2\right) = \frac{3}{4}y(2-y);$
- za $y \in (1,2)$: $\quad \varphi_Y(y) = \int\limits_{y-1}^{1} \frac{3}{2}x\ dx = \frac{3}{4}x^2 \Big|_{y-1}^{1} =$
  $= \frac{3}{4}\left(1-(y-1)^2\right) = \frac{3}{4}\left(1-(1-y)^2\right) = \frac{3}{4}y(2-y).$

Dakle: $\qquad \varphi_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \notin (0,2) \\ \frac{3}{4}y(2-y) & y \in (0,2) \end{cases}.$



(b) $F_Z(z) = \mathsf{P}(Z < z) = \mathsf{P}(X+Y < z) =$
$= \iint\limits_{T_z} \varphi_{X,Y}(x,y)\ dxdy = \iint\limits_{T_z \cap S} \frac{3}{2}x\ dxdy,$

gde je $T_z = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+y < z\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y < z-x\right\}$ ona poluravan u odnosu na pravu $y = z-x$ u čiju je unutrašnjost usmeren vektor $\vec{v} = (-1,-1)$, što znači da u zavisnosti od z za oblast $T_z \cap S$ imamo sledeće situacije:

- za $z \leq 1$ je $T_z \cap S = \emptyset$;
- za $1 < z \leq 3$ je $T_z \cap S$ oblast ograničena dužima:
  $l_1 = \{(x, 1-x) \mid x \in [0,1]\},$
  $l_2 = \left\{(x, 1+x) \mid x \in \left[0, \frac{z-1}{2}\right]\right\},$

$l_3 = \left\{ (x, z-x) \mid x \in \left[\frac{z-1}{2}, 1\right]\right\},$

$l_4 = \{ (1, y) \mid y \in [0, z-1]\},$

odnosno

$T_z \cap S = \left\{ (x,y) \mid x \in \left(0, \frac{z-1}{2}\right] \wedge y \in (1-x, 1+x)\right\} \cup$
$\cup \left\{ (x,y) \mid x \in \left(\frac{z-1}{2}, 1\right] \wedge y \in (1-x, z-x)\right\};$

- za $3 < z$ je $T_z \cap S = S$.

Prema tome:

- za $z \leq 1$: $\quad F_Z(z) = 0;$
- za $1 < z \leq 3$ (vidi sliku):

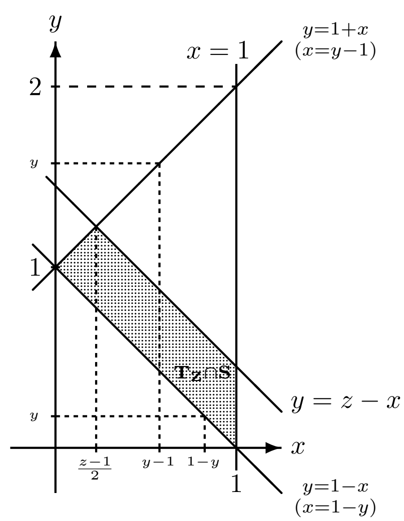
$$F_Z(z) = \int\limits_0^{\frac{z-1}{2}} \left(\int\limits_{1-x}^{1+x} \frac{3}{2} x \, dy \right) dx + \int\limits_{\frac{z-1}{2}}^{1} \left(\int\limits_{1-x}^{z-x} \frac{3}{2} x \, dy \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{z-1}{2}} 3x^2 \, dx + \int\limits_{\frac{z-1}{2}}^{1} \frac{3}{2} x (z-1) \, dx =$$

$$= \frac{1}{8}(z-1)^3 + \frac{3}{4}(z-1)\left(1 - \frac{1}{4}(z-1)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(z-1)\left(3 - \frac{1}{4}(z-1)^2\right);$$

- za $3 < z$: $\quad F_Z(z) = \iint\limits_S \frac{3}{2} x \, dxdy = 1.$



4. Tokom dve minute, u šolju padne $\frac{2 \cdot 60}{4} = 30$ kapi. Neka slučajna promenljiva X_i, $i \in \{1, 2, \ldots, 30\}$ predstavlja količinu vode u i - toj kapi. Za svako $i \in \{1, 2, \ldots, 30\}$ važi $\mathsf{E}(X_i) = 3$ i $\mathsf{D}(X_i) = 0.8^2 = 0.64$ $(\sigma(X_i) = 0.8)$. Slučajna promenljiva $S_{30} = \sum\limits_{i=1}^{30} X_i$ predstavlja ukupnu količinu vode u 30 kapi, tj. količinu vode koja nakapa za 2 minuta. Za nju važi:

$\mathsf{E}(S_{30}) = \mathsf{E}\left(\sum\limits_{i=1}^{30} X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{30} \mathsf{E}(X_i) = \sum\limits_{i=1}^{30} 3 = 3 \cdot 30 = 90,$

$\mathsf{D}(S_{30}) = \mathsf{D}\left(\sum\limits_{i=1}^{30} X_i\right) \overset{[1]}{=} \sum\limits_{i=1}^{30} \mathsf{D}(X_i) = \sum\limits_{i=1}^{30} 0.64 = 0.64 \cdot 30 = 19.2.$

Od nas se traži da izračunamo $\mathsf{P}(S_{30} \geq 100)$:

$\mathsf{P}(S_{30} \geq 100) = 1 - \mathsf{P}(S_{30} < 100) =$

$= 1 - \mathsf{P}\left(\frac{S_{30} - \mathsf{E}(S_{30})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{30})}} < \frac{100 - \mathsf{E}(S_{30})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{30})}}\right) = 1 - \mathsf{P}\left(\frac{S_{30} - \mathsf{E}(S_{30})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{30})}} < \frac{100 - 90}{\sqrt{19.2}}\right) \approx$

$\approx 1 - \mathsf{P}\left(\frac{S_{30} - \mathsf{E}(S_{30})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{30})}} < 2.28\right) \overset{[2]}{\approx} 1 - \phi(2.28) \approx 1 - 0.9887 \approx 0.0113.$

[1] - *Kapi su nezavisne.*

[2] - *Slučajna promenljiva* $\frac{S_{30} - \mathsf{E}(S_{30})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{30})}}$ *ima približno* $\mathcal{N}(0,1)$ *raspodelu.*

5. $\mathsf{E}(X) = 0 \cdot (1 - 3p) + 1 \cdot p + 2 \cdot 2p = 5p,$

$\mathsf{E}(X^2) = 0^2 \cdot (1 - 3p) + 1^2 \cdot p + 2^2 \cdot 2p = 9p,$

$\mathsf{D}(X) = \mathsf{E}(X^2) - (\mathsf{E}(X))^2 = 9p - 25p^2 = p(9 - 25p),$

$X^2 : \begin{pmatrix} 0^2 & 1^2 & 2^2 \\ 1 - 3p & p & 2p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 - 3p & p & 2p \end{pmatrix},$

$\mathsf{E}\left(\left(X^2\right)^2\right) = 0 \cdot (1 - 3p) + 1^2 \cdot p + 4^2 \cdot 2p = 33p,$

$\mathsf{D}(X^2) = \mathsf{E}\left(\left(X^2\right)^2\right) - \left(\mathsf{E}(X^2)\right)^2 = 33p - 81p^2 = 3p(11 - 27p).$

(a) $\mathsf{E}\left(\hat{X}_n\right) = \mathsf{E}\left(\frac{1}{5n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{5n}\sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{E}(X) = \frac{1}{5n} n\mathsf{E}(X) = \frac{1}{5}5p = p,$

$\mathsf{E}\left(\ddot{X}_n\right) = \mathsf{E}\left(\frac{1}{9n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \frac{1}{9n}\sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{E}(X^2) = \frac{1}{9n} n\mathsf{E}(X^2) = \frac{1}{9}9p = p.$

Dakle, obe ocene su centrirane.

(b) $\mathsf{D}\left(\hat{X}_n\right) = \mathsf{D}\left(\frac{1}{5n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{25n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{D}(X) = \frac{1}{25n^2} n\mathsf{D}(X) = \frac{p(9 - 25p)}{25n},$

$\mathsf{D}\left(\ddot{X}_n\right) = \mathsf{D}\left(\frac{1}{9n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \frac{1}{81n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{D}(X^2) = \frac{1}{81n^2} n\mathsf{D}(X^2) =$

$= \frac{1}{81n} 3p(11 - 27p) = \frac{p(11 - 27p)}{27n}.$

Ispitajmo za koje n je ocena $\hat{X}_n$ efikasnija od ocene $\ddot{X}_n$:

$\mathsf{D}\left(\hat{X}_n\right) \leq \mathsf{D}\left(\ddot{X}_n\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p(9 - 25p)}{25n} \leq \frac{p(11 - 27p)}{27n} \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \frac{9}{25} - p \leq \frac{11}{27} - p \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9}{25} \leq \frac{11}{27}.$

Poslednja nejednakost je tačna za svako n, pa je ocena $\hat{X}_n$ efikasnija od ocene $\ddot{X}_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

6. Prebrojavanjem elemenata iz uzorka u odnosu na date intervale dobijamo sledeću tabelu:

I_i	$(-\infty, 0.5]$	$(0.5, 1]$	$(1, 2.5]$	$(2.5, \infty)$
n_i	6	6	7	11

Da bi smo našli verovatnoće $p_i = \mathsf{P}(X \in I_i)$, $i \in \{1,2,3,4\}$ za slučajnu promenljivu $X : \mathcal{E}(a)$, moramo najpre na osnovu uzorka oceniti parametar a. Ocenimo ga, na primer, metodom maksimalne verodostojnosti. Dobijamo:

$L(x_1, \ldots, x_{30}; a) = \prod\limits_{i=1}^{30} \varphi_X(x_i; a) = \prod\limits_{i=1}^{30} a e^{-a x_i} = a^{30} e^{-a(x_1+\ldots+x_{30})}$,

$\ln L(x_1, \ldots, x_{30}; a) = \ln\left(a^{30} e^{-a(x_1+\ldots+x_{30})}\right) = 30 \ln a - a(x_1 + \ldots + x_{30})$,

$\frac{\partial}{\partial a} \ln L(x_1, \ldots, x_{30}; a) = \frac{30}{a} - (x_1 + \ldots + x_{30})$,

$\frac{\partial}{\partial a} \ln L(x_1, \ldots, x_{30}; a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{30}{x_1+\ldots+x_{30}} = \frac{1}{\overline{x}_{30}}$.

Prema tome, imamo ocenu parametra a: $\quad \hat{a} = \dfrac{1}{\overline{X}_{30}}$,

a na osnovu uzorka dobijamo odgovarajuću vrednost:

$$a = \frac{30}{x_1+\ldots+x_{30}} \approx 0.442906.$$

Koristeći funkciju raspodele $F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-0.442906x}, & x > 0 \end{cases}$

dobijamo:

$p_1 = \mathsf{P}(X \in I_1) = F_X(0.5) \approx 0.198647$,

$p_2 = \mathsf{P}(X \in I_2) = F_X(1) - F_X(0.5) \approx 0.159186$,

$p_3 = \mathsf{P}(X \in I_3) = F_X(2.5) - F_X(1) \approx 0.311706$,

$p_4 = \mathsf{P}(X \in I_4) = 1 - F_X(2.5) \approx 0.330461$.

Pošto je

$z = \sum\limits_{i=1}^{4} \frac{(n_i - 30 \cdot p_i)^2}{30 \cdot p_i} =$

$= \frac{(6-30\cdot 0.198647)^2}{30\cdot 0.198647} + \frac{(6-30\cdot 0.159186)^2}{30\cdot 0.159186} + \frac{(7-30\cdot 0.311706)^2}{30\cdot 0.311706} + \frac{(11-30\cdot 0.330461)^2}{30\cdot 0.330461} \approx$

$\approx 1.02437 < 5.99 \approx \chi^2_{0.05;2} = \chi^2_{\alpha;4-1-1}$,

sledi da dati uzorak ne protivreči hipotezi.

7. (a) Na osnovu opisa dobijamo matricu prelaza za jedan korak, a zatim i matricu prelaza za 2 koraka:

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \Rightarrow \quad P(2) = P^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{5}{12} \end{bmatrix}.$$

(b) Početna raspodela: $\mathbf{p}(0) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right] \end{array}$.

Raspodela nakon dva koraka:

$$\mathbf{p}(2) = \mathbf{p}(0) \cdot P^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{7}{24} & \frac{7}{24} \end{array} \right] \end{array} .$$

8. Pošto slučajne promenljive U i V imaju $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu, sledi da je $\mathsf{E}(U) = \mathsf{E}(V) = 0$ i $\mathsf{D}(U) = \mathsf{D}(V) = 1$, a iz $\mathsf{D}(U) = \mathsf{E}\left(U^2\right) - (\mathsf{E}(U))^2$ dobijamo da je $\mathsf{E}\left(U^2\right) = \mathsf{D}(U) + (\mathsf{E}(U))^2 = 1 + 0 = 1$ i analogno $\mathsf{E}\left(V^2\right) = 1$.

(a) $m_X(t) = \mathsf{E}\left(e^t U + t^2 V\right) \stackrel{[1]}{=} e^t \mathsf{E}(U) + t^2 \mathsf{E}(V) = e^t \cdot 0 + t^2 \cdot 0 = 0.$

(b) $\mathsf{K}_X(t,s) = \mathsf{E}\left((X_t - m_X(t))(X_s - m_X(s))\right) = \mathsf{E}(X_t X_s) =$
$= \mathsf{E}\left(\left(e^t U + t^2 V\right)\left(e^s U + s^2 V\right)\right) =$
$= \mathsf{E}\left(e^{s+t} U^2 + \left(e^t s^2 + e^s t^2\right) UV + t^2 s^2 V^2\right) \stackrel{[1],[2]}{=}$
$= e^{s+t} \mathsf{E}\left(U^2\right) + \left(e^t s^2 + e^s t^2\right) \mathsf{E}(U)\,\mathsf{E}(V) + t^2 s^2 \mathsf{E}\left(V^2\right) =$
$= e^{s+t} \cdot 1 + 0 + (ts)^2 \cdot 1 = e^{s+t} + t^2 s^2.$

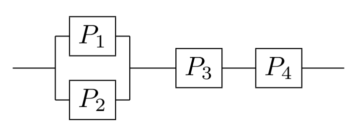
(c) $\mathsf{D}_X(t) = \mathsf{K}_X(t,t) = e^{t+t} + (tt)^2 = e^{2t} + t^4.$

[1] - *Matematičko očekivanje je linearna transformacija.*

[2] - *Slučajne promenljive U i V nezavisne, te je* $\mathsf{E}(UV) = \mathsf{E}(U)\,\mathsf{E}(V)$.

13.02.2000.

1. Dato je strujno kolo sastavljeno od 4 prekidača povezana kao na slici. Verovatnoća da je pojedini prekidač uključen je 0.7 i prekidači su uključeni nezavisno jedan od drugog.



   (a) Izračunati verovatnoću da kroz kolo prolazi struja.

   (b) Izračunati verovatnoću da kroz kolo prolazi struja ako se zna da je prekidač P_1 uključen.

   (c) Izračunati verovatnoću da je prekidač P_1 uključen ako se zna da kroz kolo prolazi struja.

2. Student je na pismenom ispitu dobio 60 poena, a na usmenom delu ispita izvlači 5 pitanja pri čemu svaki put sa verovatnoćom $\frac{2}{3}$ izvlači pitanje na koje ume da odgovori ispravno i svaki ispravan odgovor mu donosi još po 20 poena. Naći zakon raspodele, karakterističnu funkciju i matematičko očekivanje ukupnog broja poena koje je student imao nakon oba dela ispita.

3. Neka su X, Y i Z nezavisne slučajne promenljive zadane zakonom raspodele, odnosno gustinom:

$$X \; : \; \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \; y \notin [-2,0] \\ -\frac{1}{2}y & , \; y \in [-2,0] \end{cases} \quad , \quad \varphi_Z(z) = \begin{cases} 0 & , \; z \notin [-1,1] \\ \frac{3}{2}z^2 & , \; z \in [-1,1] \end{cases} \; .$$

(a) Naći raspodelu slučajne promenljive $T = XY$.

(b) Naći matematičko očekivanje slučajne promenljive $W = X(Y+Z)$.

4. Autobus gradskog saobraćaja po jednom krugu utroši količinu goriva koja ima eksponencijalnu raspodelu, pri čemu je očekivani utrošak goriva $5l$. Tokom dana autobus napravi 30 krugova. Pomoću centralne granične teoreme odrediti koliko je goriva najmanje potrebno obezbediti za jedan dan, tako da ta količina bude dovoljna sa verovatnoćom ne manjom od 0.985.

5. Obeležje X je dato gustinom:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta-1}x^{-\frac{\theta}{\theta-1}} & , \; x > 1 \\ 0 & , \; x \leq 1 \end{cases} \; , \qquad (\theta > 1).$$

(a) Metodom maksimalne verodostojnosti naći ocenu parametra θ.

(b) Ispitati centriranost dobijene ocene.

6. Na uzorku od 100 četvoročlanih porodica posmatrana je dnevna potrošnja mleka i dobijeni rezultati su prikazani u tabeli:

potrošnja mleka (ℓ)	$[0,0.5)$	$[0.5,1)$	$[1,1.5)$	$[1.5,2]$
broj porodica	35	35	18	12

Sa pragom značajnosti $\alpha = 0.05$ na osnovu datog uzorka χ^2 testom testirati hipotezu da prosečna potrošnja mleka ima raspodelu datu gustinom $\varphi(x) = 1 - \frac{1}{2}x, \; x \in (0,2)$ i $\varphi(x) = 0, \; x \notin (0,2)$.

7. Nakon pljačke banke, lopov se krije u Somboru, Novom Sadu ili Rumi. Policija zna da se lopov nalazi u jednom od ta tri grada. Ako je lopov jednog dana u Novom Sadu, sutradan podjednako verovatno ide u Sombor, Rumu, ili ostaje u Novom Sadu. Poznato je da iz Rume 2 puta verovatnije ide u Sombor nego u Novi Sad, kao i da u Rumi ne boravi 2 dana uzastopno. Ako je lopov jednog dana u Somboru, sutradan obavezno napušta Sombor i jednako verovatno odlazi u Novi Sad ili Rumu.

(a) Sastaviti matricu prelaza za jedan dan.

(b) Ako je lopov prvog dana bio u Novom Sadu, naći verovatnoću da će kroz 2 dana biti ponovo u Novom Sadu.

(c) Ako policija uhvati lopova, lopov ide u zatvor. Verovatnoća da će ga uhvatiti u Novom Sadu je $\frac{1}{4}$, u Rumi je $\frac{1}{3}$, a u Somboru $\frac{1}{5}$. Izračunati verovatnoću da će posle 2 dana lopov i dalje biti na slobodi ako se zna da je posle pljačke banke na slučajan način izabrao grad u kojem se krije.

8. Neka su U i V nezavisne slučajne promenljive, i neka U ima normalnu $\mathcal{N}(5,2)$ raspodelu a V Poasonovu $\mathcal{P}(4)$ raspodelu. Slučajni proces $X_t,\ t \in [0,\infty)$ je definisan sa $X_t = U\cos t + V\sin t$. Izračunati matematičko očekivanje, autokorelacionu funkciju i disperziju slučajnog procesa X_t.

Rešenja:

1. Obeležimo sa $P_i,\ i \in \{1,2,3,4\}$ događaj "*prekidač* P_i *je uključen*". Tekstom zadatka je dato da je $\mathsf{P}(P_i) = 0.7$ i $\mathsf{P}\left(\overline{P}_i\right) = 0.3$. Obeležimo sa A događaj "*kroz kolo protiče struja*".

   (a) $A = P_1P_2P_3P_4 + \overline{P}_1P_2P_3P_4 + P_1\overline{P}_2P_3P_4$

   Dakle, A je unija disjunktnih događaja, pri čemu su događaji P_i, $i \in \{1,2,3,4\}$ nezavisni, te je

   $$\begin{aligned}\mathsf{P}(A) &= \mathsf{P}\left(P_1P_2P_3P_4 + \overline{P}_1P_2P_3P_4 + P_1\overline{P}_2P_3P_4\right) = \\ &= \mathsf{P}(P_1P_2P_3P_4) + \mathsf{P}\left(\overline{P}_1P_2P_3P_4\right) + \mathsf{P}\left(P_1\overline{P}_2P_3P_4\right) = \\ &= \mathsf{P}(P_1)\,\mathsf{P}(P_2)\,\mathsf{P}(P_3)\,\mathsf{P}(P_4) + \mathsf{P}\left(\overline{P}_1\right)\mathsf{P}(P_2)\,\mathsf{P}(P_3)\,\mathsf{P}(P_4) + \\ &\quad + \mathsf{P}(P_1)\,\mathsf{P}\left(\overline{P}_2\right)\mathsf{P}(P_3)\,\mathsf{P}(P_4) = \\ &= 0.7^4 + 2\cdot 0.3\cdot 0.7^3 = 0.4459.\end{aligned}$$

   (b) $\mathsf{P}(A \mid P_1) = \frac{\mathsf{P}(AP_1)}{\mathsf{P}(P1)} = \frac{\mathsf{P}\left(P_1P_2P_3P_4 + P_1\overline{P}_2P_3P_4\right)}{\mathsf{P}(P1)} =$
   $= \frac{0.7^3(0.7+0.3)}{0.7} = 0.7^2 = 0.49.$

   (c) $\mathsf{P}(P_1 \mid A) = \frac{\mathsf{P}(P_1A)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{0.7^3}{0.7^3(0.7+2\cdot 0.3)} = \frac{1}{1.3} \approx 0.77.$

2. Neka je Y (pomoćna) slučajna promenljiva koja predstavlja broj pitanja koje je student izvukao i na koje ume da da ispravan odgovor. Po opisu iz zadatka vidimo da Y ima binomnu $\mathcal{B}\left(5,\frac{2}{3}\right)$ raspodelu. Za slučajnu promenljivu Y su poznati zakon raspodele, karakteristična funkcija i matematičko očekivanje:

   $$q_k = \mathsf{P}(Y=k) = \begin{cases} \binom{5}{k}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{5-k} &,\quad k \in \{0,1,2,3,4,5\} \\ 0 &,\quad k \notin \{0,1,2,3,4,5\}\end{cases},$$

   $\mathcal{K}_Y(t) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{it}\right)^5 = \frac{1}{243}\left(1+2e^{it}\right)^5,\qquad \mathsf{E}(Y) = 5\cdot\frac{2}{3} = \frac{10}{3}.$

   Slučajnu promenljivu X koja predstavlja ukupan broj poena koje je student dobio na ispitu možemo predstaviti na sledeći način:

   $$X = 20Y + 60.$$

   Moguće vrednosti slučajne promenljive X su

$$\mathcal{R}_X = \{60, 80, 100, 120, 140, 160\} = \{\, 20k + 60 \mid\ k \in \mathcal{R}_Y\}$$

i koristeći navedenu transformaciju lako dobijamo zakon raspodele slučajne promenljive X : za svako $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ je

$$\mathsf{P}\left(X = 20k + 60\right) = \mathsf{P}\left(Y = k\right) = \binom{5}{k} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^{5-k}.$$

Dalje, koristeći poznate osobine karakterističnih funkcija i matematičkog očekivanja dobijamo:

$\mathcal{K}_X\left(t\right) = \mathcal{K}_{20Y+60}\left(t\right) = e^{i60t}\mathcal{K}_X\left(20t\right) = \frac{1}{243}e^{i60t}\left(1 + 2e^{i20t}\right)^5,$

$\mathsf{E}\left(X\right) = \mathsf{E}\left(20Y + 60\right) = 20\mathsf{E}\left(Y\right) + \mathsf{E}\left(60\right) = 20\frac{10}{3} + 60 = \frac{380}{3} \approx 126.66.$

3. Funkcije raspodele datih slučajnih promenljivih su:

$$F_X\left(x\right) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \\ \frac{1}{3}, & x \in (-2, 4] \\ 1, & 4 < x \end{cases}, \qquad F_Y\left(y\right) = \begin{cases} 0, & y \leq -2 \\ 1 - \frac{1}{4}y^2, & y \in (-2, 0] \\ 1, & 0 < y \end{cases},$$

$$F_Z\left(z\right) = \begin{cases} 0, & z \leq -1 \\ \frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{2}, & z \in (-1, 1] \\ 1, & 1 < z \end{cases}.$$

(a) Slučajna promenljiva T je slučajna promenljiva koja nije ni diskretnog ni absolutno neprekidnog tipa, a skup mogućih vrednosti joj je:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_T &= \{\, xy \mid\ x \in \mathcal{R}_X = \{-2, 4\} \ \ \wedge\ \ y \in \mathcal{R}_Y = [-2, 0]\} = \\ &= [0, 4] \cup [-8, 0] = [-8, 4]\,.\end{aligned}$$

Funkciju raspodele F_T slučajne promenljive T ćemo naći koristeći potpun sistem događaja $\{X = -2\}$, $\{X = 4\}$:

$F_T\left(t\right) = \mathsf{P}\left(T < t\right) = \mathsf{P}\left(XY < t\right) = \ldots$

- za $t \leq -8$: $\quad F_T\left(t\right) = 0;$
- za $-8 < t \leq 4$:

$$\begin{aligned}F_T\left(t\right) &\overset{[1]}{=} \mathsf{P}\left(X = -2\right)\mathsf{P}\left(XY < t \mid X = -2\right) + \\ &\quad + \mathsf{P}\left(X = 4\right)\mathsf{P}\left(XY < t \mid X = 4\right) = \\ &= \tfrac{1}{3}\mathsf{P}\left(-2Y < t \mid X = -2\right) + \tfrac{2}{3}\mathsf{P}\left(4Y < t \mid X = 4\right) \overset{[2]}{=} \\ &= \tfrac{1}{3}\mathsf{P}\left(-2Y < t\right) + \tfrac{2}{3}\mathsf{P}\left(4Y < t\right) = \\ &= \tfrac{1}{3}\mathsf{P}\left(Y > -\tfrac{1}{2}t\right) + \tfrac{2}{3}\mathsf{P}\left(Y < \tfrac{1}{4}t\right) = \\ &= \tfrac{1}{3}\left(1 - \mathsf{P}\left(Y \leq -\tfrac{1}{2}t\right)\right) + \tfrac{2}{3}\mathsf{P}\left(Y < \tfrac{1}{4}t\right) \overset{[3]}{=} \\ &= \tfrac{1}{3}\left(1 - F_Y\left(-\tfrac{1}{2}t\right)\right) + \tfrac{2}{3}F_Y\left(\tfrac{1}{4}t\right) = \ldots\end{aligned}$$

  * za $-8 \leq t < 0$ $\ (0 < -\frac{1}{2}t \leq 4\ \wedge\ -2 \leq \frac{1}{4}t < 0)$:
    $F_T\left(t\right) = \frac{1}{3}\left(1 - 1\right) + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16}t^2\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{96}t^2;$
  * za $0 \leq t < 4$ $\ (-2 < -\frac{1}{2}t \leq 0\ \wedge\ 0 \leq \frac{1}{4}t < 1)$:
    $F_T\left(t\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}t^2\right)\right) + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{48}t^2;$
- za $4 \leq t$: $\quad F_T\left(t\right) = 1.$

[1] - *Po formuli totalne verovatnoće.*
[2] - X *i* Y *su nezavisne slučajne promenljive.*
[3] - Y *je slučajna promenljiva neprekidnog tipa pa je* $\mathsf{P}\left(Y \leq -\frac{1}{2}t\right) = \mathsf{P}\left(Y < -\frac{1}{2}t\right) = F_Y\left(-\frac{1}{2}t\right)$.

Dakle: $$F_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -8 \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{96}t^2, & t \in (-8, 0] \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{48}t^2, & t \in (0, 4] \\ 1, & 4 \leq t \end{cases}.$$

(b) $\mathsf{E}(X) = -2 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} = 2$,

$\mathsf{E}(Y) = \int\limits_{-2}^{0} y\left(-\frac{1}{2}y\right) = -\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0} y^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{0} = \frac{4}{3}$,

$\mathsf{E}(Z) = \int\limits_{-1}^{1} z\left(\frac{3}{2}z^2\right) = \frac{3}{2}\int\limits_{-1}^{1} z^3 = \frac{3}{2}\left(\frac{z^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{1} = 0$,

$\mathsf{E}(W) = \mathsf{E}(X(Y+Z)) = \mathsf{E}(XY + XZ) = \mathsf{E}(XY) + \mathsf{E}(XZ) \overset{[4]}{=}$
$= \mathsf{E}(X)\,\mathsf{E}(Y) + \mathsf{E}(X)\,\mathsf{E}(Z) = 2 \cdot \frac{4}{3} + 2 \cdot 0 = \frac{8}{3}$.

[4] - X, Y *i* X, Z *su parovi nezavisnih slučajnih promenljivih.*

4. Obeležimo sa X_i, $i \in \{1, 2, \ldots, 30\}$ utrošak goriva u i - tom krugu. Dato je da X_i ima $\mathcal{E}(a)$ raspodelu, pri čemu je $\mathsf{E}(X_i) = 5$, odakle sledi da je $a = \frac{1}{5}$, a odatle je dalje $\mathsf{D}(X_i) = \frac{1}{a^2} = 25$. Slučajna promenljiva $S_{30} = \sum\limits_{i=1}^{30} X_i$ predstavlja ukupan utrošak goriva tokom celog dana, a mi treba da odredimo x tako da važi $\mathsf{P}(S_{30} < x) \geq 0.985$. Pri tome znamo da je

$\mathsf{E}(S_{30}) = \mathsf{E}\left(\sum\limits_{i=1}^{30} X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{30} \mathsf{E}(X_i) = 30 \cdot 5 = 150$,

$\mathsf{D}(S_{30}) = \mathsf{D}\left(\sum\limits_{i=1}^{30} X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{30} \mathsf{D}(X_i) = 30 \cdot 25 = 750$

(X_i su nezavisne slučajne promenljive).

$\mathsf{P}(S_{30} < x) \geq 0.985 \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(\frac{S_{30} - \mathsf{E}(S_{30})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{30})}} < \frac{x - \mathsf{E}(S_{30})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{30})}}\right) \geq 0.985 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(\frac{S_{30} - \mathsf{E}(S_{30})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{30})}} < \frac{x-150}{\sqrt{750}}\right) \geq 0.985 \quad \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \quad \phi\left(\frac{x-150}{\sqrt{750}}\right) \succeq 0.985 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \frac{x-150}{\sqrt{750}} \succeq \phi^{-1}(0.985) \approx 2.17 \quad \Leftrightarrow \quad x \succeq 2.17 \cdot \sqrt{750} + 150 \approx 209.43$.

[1] - *Primena centralne granične teoreme.*

Dakle, uz zadani nivo pouzdanosti procene, treba obezbediti bar $210l$ goriva.

5. (a) $$L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \frac{1}{\theta-1} x_1^{-\frac{\theta}{\theta-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\theta-1} x_n^{-\frac{\theta}{\theta-1}} = \frac{1}{(\theta-1)^n}(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{-\frac{\theta}{\theta-1}},$$

$$\ln L(x_1,\dots,x_n;\theta) = \ln(\theta-1)^{-n} - \tfrac{\theta}{\theta-1}\ln(x_1\cdot\ldots\cdot x_n)$$
$$= -n\ln(\theta-1) - \tfrac{\theta}{\theta-1}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i),$$

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x_1,\dots,x_n;\theta) = -\tfrac{n}{\theta-1} + \tfrac{1}{(\theta-1)^2}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i),$$

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x_1,\dots,x_n;\theta) = 0 \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad -\tfrac{n}{\theta-1} + \tfrac{1}{(\theta-1)^2}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \theta = 1 + \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i).$$

Dakle, dobili smo ocenu: $\hat{\theta} = 1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)$.

(b) $$\mathsf{E}(\ln X) = \int_{-\infty}^{\infty}\ln x\,\varphi_X(x)\,dx = \int_{1}^{\infty}\ln x\,\tfrac{1}{\theta-1}x^{-\frac{\theta}{\theta-1}}dx \overset{[1]}{=}$$
$$= \tfrac{1}{\theta-1}\left(-(\theta-1)x^{-\frac{1}{\theta-1}}\ln x\Big|_1^{\infty} + (\theta-1)\int_1^{\infty}\tfrac{1}{x}x^{-\frac{1}{\theta-1}}\right) =$$
$$= \int_1^{\infty}x^{-\frac{\theta}{\theta-1}} = -(\theta-1)x^{-\frac{1}{\theta-1}}\Big|_1^{\infty} = \theta-1.$$

[1] - *Parcijalnom integracijom:* $u=\ln x,\ dv = x^{-\frac{\theta}{\theta-1}}dx.$

$$\mathsf{E}\left(\hat{\theta}\right) = \mathsf{E}\left(1+\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)\right) = \mathsf{E}(1) + \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}(\ln(X_i)) =$$
$$= 1 + \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\theta-1) = 1 + \tfrac{1}{n}n(\theta-1) = \theta.$$

Prema tome, ocena $\hat{\theta}$ jeste centrirana.

6. Neka je X obeležje koje predstavlja dnevnu potrošnju mleka jedne četvoročlane porodice. Koristeći datu gustinu obeležja X, izračunavamo njegovu funkciju raspodele:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt = \begin{cases} 0 & , \quad x\le 0 \\ x-\frac{1}{4}x^2 & , \quad 0<x\le 2 \\ 1 & , \quad 2<x \end{cases}.$$

Nalazimo teorijske verovatnoće (verovatnoće po hipotezi) obeležja X:

$p_1 = \mathsf{P}(X\in[0,0.5)) = F_X(0.5) - F_X(0) = \frac{7}{16} - 0 = \frac{7}{16} = 0.4375,$

$p_2 = \mathsf{P}(X\in[0.5,1)) = F_X(1) - F_X(0.5) = \frac{3}{4} - \frac{7}{16} = \frac{5}{16} = 0.3125,$

$p_3 = \mathsf{P}(X\in[1,1.5)) = F_X(1.5) - F_X(1) = \frac{15}{16} - \frac{3}{4} = \frac{3}{16} = 0.1875,$

$p_4 = \mathsf{P}(X\in[1.5,2]) = F_X(2) - F_X(1.5) = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16} = 0.0625.$

Obim uzorka je: $35+35+18+12=100$.

Pošto je

$$z = \sum_{i=1}^{4}\tfrac{(n_i-100\cdot p_i)^2}{100\cdot p_i} = \tfrac{188}{25} = 7.52 < \chi^2_{\alpha;4-1} = \chi^2_{0.05;3} \approx 7.81,$$

sledi da dati uzorak ne protivreči hipotezi.

7. Označimo redom sa S, N i R stanja "*lopov je u Somboru*", odnosno "*lopov je u Novom Sadu*", odnosno "*lopov je u Rumi*".

(a) Matrica P prelaza tj. kretanja lopova glasi: $P = \begin{array}{c} \\ S \\ N \\ R \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & N & R \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \end{array}$.

(b) Početna raspodela verovatnoća: $\mathbf{p}(0) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & N & R \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$.

Matrica prelaza za 2 dana:
$$P(2) = P^2 = \begin{array}{c} \\ S \\ N \\ R \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & N & R \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{18} & \frac{5}{18} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Raspodela verovatnoća nakon 2 dana:
$$\mathbf{p}(2) = \mathbf{p}(0) \cdot P(2) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & N & R \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{7}{18} & \frac{5}{18} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Prema tome, verovatnoća da će nakon 2 dana biti u Novom Sadu je $p_N(2) = \frac{7}{18}$.

(c) Novo stanje u kome se lopov može naći je "*biti u zatvoru*" - obeležićemo ga sa Z, i sada na osnovu opisa formiramo novu matricu prelaza za 1 dan i za 2 dana:

$$Q = \begin{array}{c} \\ S \\ N \\ R \\ Z \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S & N & R & Z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad Q(2) = Q^2 = \begin{array}{c} \\ S \\ N \\ R \\ Z \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S & N & R & Z \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{5}{18} & \frac{17}{90} & \frac{1}{10} & \frac{13}{30} \\ \frac{25}{144} & \frac{157}{720} & \frac{13}{80} & \frac{107}{240} \\ \frac{1}{18} & \frac{7}{30} & \frac{7}{30} & \frac{43}{90} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Početna raspodela verovatnoća: $\mathbf{q}(0) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S & N & R & Z \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \end{array}$.

Raspodela verovatnoća nakon 2 dana:
$$\mathbf{q}(2) = \mathbf{q}(0) \cdot Q(2) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S & N & R & Z \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \frac{977}{2160} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Prema tome, verovatnoća da će nakon 2 dana biti i dalje na slobodi je: $q_S(2) + q_N(2) + q_R(2) = 1 - q_Z(2) = \frac{1183}{2160} \approx 0.55$.

8. Za date slučajne promenljive imamo: $\mathsf{E}(U) = 5$, $\mathsf{D}(U) = 2^2 = 4$, $\mathsf{E}(V) = 4$, $\mathsf{D}(V) = 4$, i izračunavamo $\mathsf{E}(U^2) = \mathsf{D}(U) + \mathsf{E}^2(U) = 29$ i $\mathsf{E}(V^2) = \mathsf{D}(V) + \mathsf{E}^2(V) = 20$.

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \mathsf{E}(X_t) = \mathsf{E}(U\cos t + V\sin t) = \cos t\ \mathsf{E}(U) + \sin t\ \mathsf{E}(V) = \\ &= 5\cos t + 4\sin t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathsf{R}_X(t,s) = \mathsf{E}(X_t X_s) = \mathsf{E}((U\cos t + V\sin t)(U\cos s + V\sin s)) = \\ &= \mathsf{E}\left(U^2\cos t\ \cos s + V^2 \sin t\ \sin s + (\cos t\ \sin s + \sin t\ \cos s)UV\right) \overset{[1]}{=} \\ &= \cos t\ \cos s\ \mathsf{E}\left(U^2\right) + \sin t\ \sin s\ \mathsf{E}\left(V^2\right) + \\ &\quad + (\cos t\ \sin s + \sin t\ \cos s)\,\mathsf{E}(U)\,\mathsf{E}(V) = \\ &= 29\ \cos t\ \cos s + 20\ \sin t\ \sin s + 20\ (\cos t\ \sin s + \sin t\ \cos s), \end{aligned}$$

[1] - *Slučajne promenljive* U *i* V *su nezavisne pa je*

$\mathsf{E}(UV) = \mathsf{E}(U)\,\mathsf{E}(V)$.

$$\begin{aligned}
&\mathsf{D}_X(t) = \mathsf{K}_X(t,t) = \mathsf{R}_X(t,t) - m_X^2(t) = \\
&= \left(29\cos^2 t + 20\sin^2 t + 40\cos t\sin t\right) - (5\cos t + 4\sin t)^2 = \\
&= 20 + 9\cos^2 t + 40\cos t\sin t - \left(25\cos^2 t + 16\sin^2 t + 40\cos t\sin t\right) = \\
&= 20 + 9\cos^2 t - \left(9\cos^2 t + 16\right) = 4.
\end{aligned}$$

04.05.2000.

1. Strelac ima 4 metka i gađa u cilj dok ne pogodi 2 puta uzastopno ili ne potroši sve metke. Izračunati verovatnoće sledećih događaja:

   A - "*cilj je pogođen bar 2 puta (ne mora uzastopno)*",

   B - "*ostaje neiskorišćen bar jedan metak*",

   C - "*više je promašaja nego pogodaka*".

2. Numerisana homogena kocka se baca 2 puta. Slučajna promenljiva X predstavlja broj pojavljivanja parnog broja u 2 bacanja, a slučajna promenljiva Y broj pojavljivanja broja deljivog sa 3 u 2 bacanja. Naći zakon raspodele dvodimenzionalne slučajne promenljive (X,Y). Ispitati da li su X i Y nezavisne slučajne promenljive. Naći matematičko očekivanje slučajne promenljive $Z = XY$.

3. Slučajna promenljiva X ima uniformnu raspodelu $X : \mathcal{U}(0,4)$, a slučajna promenljiva Y pod uslovom da je $X = x$ ima uniformnu raspodelu $Y|\{X = x\} : \mathcal{U}\left(\frac{x}{4}, \frac{3x}{4}\right)$. Naći gustinu slučajne promenljive Y, kao i gustinu ili funkciju raspodele slučajne promenljive $Z = X + 2Y$.

4. Studenti polažu ispit. Prosečno svaki treći položi.

   (a) Naći matematičko očekivanje slučajne promenljive koja predstavlja broj studenata koji izađu na ispit pre nego što položi prvih n studenata.

   (b) Odrediti broj studenata koji treba da izađu na ispit da bi sa verovatnoćom 0.9 položilo bar 30 studenata.

5. U kutiji se nalaze 3 kuglice pri čemu je svaka od njih zelena ili plava. Broj zelenih kuglica u kutiji definiše stanje sistema. Iz kutije se na slučajan način bira jedna kuglica. Umesto izvučene kuglice u kutiju se vraća zelena kuglica.

   (a) Napraviti matricu prelaza za jedan korak.

   (b) Ako se zna da je na početku u kutiji bila tačno jedna zelena kugica, izračunati verovatnoću da će nakon 2 izvlačenja u kutiji biti 3 zelene kuglice.

6. Obeležje X ima raspodelu određenu gustinom:
$$\varphi_X(x) = \theta\, x^{\theta-1}, \quad x \in (0,1).$$
   (a) Na osnovu uzorka obima n metodom maksimalne verodostojnosti oceniti parametar θ.
   (b) χ^2 - testom ispitati saglasnost uzorka:

interval:	$\left(0, \frac{1}{4}\right]$	$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$	$\left(\frac{3}{4}, 1\right)$
učestanost:	2	18	20	30

   sa navedenom raspodelom za prag značajnosti $\alpha = 0.1$.

7. Naći minimalan obim uzorka na osnovu kojeg možemo oceniti matematičko očekivanje sa greškom manjom od 5 i nivoom poverenja $\beta = 0.95$ ako pretpostavimo da obeležje ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(m, 10)$.

8. Naći matematičko očekivanje, autokorelacionu funkciju i disperziju slučajnog procesa $X(t) = \cos(\lambda t + U)$, $t \in \mathbb{R}$ gde je λ konstanta, a U je slučajna promenljiva sa uniformnom raspodelom $\mathcal{U}(0, 2\pi)$.

Rešenja:

1. Označimo sa P događaj *"u pojedinačnom gađanju je cilj pogođen"*, a sa X označimo događaj *"u pojedinačnom gađanju je cilj promašen"*. Označimo sa p verovatnoću pojedinačnog pogotka, a sa $q = 1 - p$ verovatnoću pojedinačnog promašaja.

$\mathsf{P}(A) =$
$= \mathsf{P}(PP + XPP + XXPP + XPXP + PXXP + PXPX + PXPP) =$
$= p^2 + qp^2 + 4p^2q^2 + qp^3,$

$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(PP + XPP) = p^2 + qp^2,$

$\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}(XXXX + XXXP + XXPX + XPXX + PXXX) =$
$= q^4 + 4pq^3.$

2. Označimo sa K_1 i K_2 slučajne promenljive koje predstavljaju dobijeni broj na prvoj odnosno drugoj kocki.

$\mathsf{P}(X=0, Y=0) = \mathsf{P}((K_1, K_2) \in \{(1,1), (1,5), (5,1), (5,5)\}) = \frac{1}{9},$

$\mathsf{P}(X=0, Y=1) = \mathsf{P}((K_1, K_2) \in \{(1,3), (3,1), (3,5), (5,3)\}) = \frac{1}{9},$

$\mathsf{P}(X=0, Y=2) = \mathsf{P}((K_1, K_2) \in \{(3,3)\}) = \frac{1}{36},$

$\mathsf{P}(X=1, Y=0) =$
$= \mathsf{P}((K_1, K_2) \in \{(1,2), (2,1), (1,4), (4,1), (2,5), (5,2), (4,5), (5,4)\}) = \frac{2}{9},$

$\mathsf{P}(X=1, Y=1) =$
$= \mathsf{P}((K_1, K_2) \in \{(1,6), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (5,6), (6,1), (6,5)\}) = \frac{2}{9},$

$\mathsf{P}(X=1, Y=2) = \mathsf{P}((K_1, K_2) \in \{(3,6), (6,3)\}) = \frac{1}{18},$

$\mathsf{P}(X=2, Y=0) = \mathsf{P}((K_1, K_2) \in \{(2,2), (2,4), (4,2), (4,4)\}) = \frac{1}{9},$

$\mathsf{P}(X=2,Y=1)=\mathsf{P}((K_1,K_2)\in\{(2,6),(4,6),(6,2),(6,4)\})=\frac{1}{9}$,
$\mathsf{P}(X=2,Y=2)=\mathsf{P}((K_1,K_2)\in\{(6,6)\})=\frac{1}{36}$.

$X \backslash Y$	0	1	2	
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

Direktnom proverom na osnovu dobijenih verovatnoća dobijamo da važi:

$$\forall i,j\in\{0,1,2\},\quad \mathsf{P}(X=i,Y=j)=\mathsf{P}(X=i)\,\mathsf{P}(Y=j),$$

što znači da su slučajne promenljive X i Y nezavisne.

Koristeći njihovu nezavisnost dobijamo

$$\mathsf{E}(Z)=\mathsf{E}(XY)=\mathsf{E}(X)\,\mathsf{E}(Y)=$$
$$=\left(0\cdot\tfrac{1}{4}+1\cdot\tfrac{1}{2}+2\cdot\tfrac{1}{4}\right)\left(0\cdot\tfrac{4}{9}+1\cdot\tfrac{4}{9}+2\cdot\tfrac{1}{9}\right)=1\cdot\tfrac{2}{3}=\tfrac{2}{3}.$$

3. $\varphi_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}\,, & x\in[0,4]\\ 0\,, & x\notin[0,4]\end{cases}, \qquad \varphi_{Y|\{X=x\}}(y)=\begin{cases}\frac{2}{x}\,, & y\in\left[\frac{1}{4}x,\frac{3}{4}x\right]\\ 0\,, & y\notin\left[\frac{1}{4}x,\frac{3}{4}x\right]\end{cases}.$

Pomoću gustine slučajnog vektora (X,Y):

$$\varphi_{X,Y}(x,y)=\varphi_X(x)\,\varphi_{Y|\{X=x\}}(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{x}=\frac{1}{2x} & ,\ (x,y)\in D\\ 0 & ,\ (x,y)\notin D\end{cases},$$

gde je $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ x\in[0,4]\ \wedge\ y\in\left[\frac{1}{4}x,\frac{3}{4}x\right]\right\}$ (vidi sliku 1), nalazimo gustinu slučajne promenljive Y:

$$\varphi_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_{X,Y}(x,y)\,dx=\begin{cases}0 & ,y\notin[0,3]\\ \int\limits_{\frac{4}{3}y}^{4y}\frac{1}{2x}dx & ,y\in[0,1]\\ \int\limits_{\frac{4}{3}y}^{4}\frac{1}{2x}dx & ,y\in(1,3]\end{cases}=\begin{cases}0 & ,y\notin[0,3]\\ \frac{1}{2}\ln 3 & ,y\in[0,1]\\ \frac{1}{2}\ln\frac{3}{y} & ,y\in(1,3]\end{cases}.$$

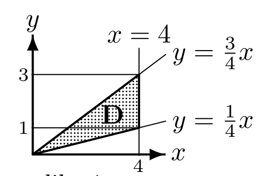
Raspodelu slučajne promenljive Z ćemo naći kao marginalnu raspodelu slučajnog vektora $(U,Z)=(X,X+2Y)$ (dakle, pomoću transformacije $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x,x+2y)=(u,z)$; ova funkcija je monotono rastuća po obe komponente nad oblašću D). Rešavanjem po x i y sistema jednačina $u=x\ \wedge\ z=x+2y$, odnosno $x=u\ \wedge\ y=\frac{z-u}{2}$ dobijamo inverznu transformaciju $f^{-1}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$:

$$f^{-1}(u,z)=\left(u,\tfrac{z-u}{2}\right)=(x,y)$$

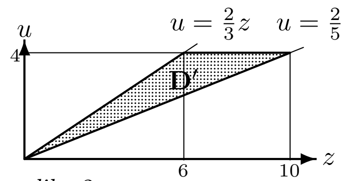
čiji je Jakobijan: $\qquad \mathcal{J}_{f^{-1}}(u,z)=\begin{vmatrix}x_u & x_z\\ y_u & y_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}.$

Pošto je f neprekidna i monotona funkcija, sliku $D'=f(D)$ oblasti D koja je ograničena dužima:

$\ell_1 = \left\{ \left(x, \frac{1}{4}x\right) \;\middle|\; x \in [0,4] \right\}$ (prava $y = \frac{1}{4}x$),
$\ell_2 = \left\{ \left(x, \frac{3}{4}x\right) \;\middle|\; x \in [0,4] \right\}$ (prava $y = \frac{3}{4}x$),
$\ell_3 = \left\{ (4, y) \mid y \in [1,3] \right\}$ (prava $x = 4$),
dobijamo kao oblast ograničenu sa (vidi sliku 2):
$\ell_1' = f(\ell_1) = \left\{ \left(x, x + 2 \cdot \frac{1}{4}\, x\right) \;\middle|\; x \in [0,4] \right\} = \left\{ \left(u, \frac{3}{2}u\right) \;\middle|\; u \in [0,4] \right\}$
(prava $z = \frac{3}{2}u$),
$\ell_2' = f(\ell_2) = \left\{ \left(x, x + 2 \cdot \frac{3}{4}\, x\right) \;\middle|\; x \in [0,4] \right\} = \left\{ \left(u, \frac{5}{2}u\right) \;\middle|\; u \in [0,4] \right\}$
(prava $z = \frac{5}{2}u$),
$\ell_3' = f(\ell_3) = \left\{ (4, 4 + 2y) \mid y \in [1,3] \right\} = \left\{ (4, z) \mid z \in [6,10] \right\}$
(prava $u = 4$).



slika 1



slika 2

Dakle:
$$D' = \left\{ (u,z) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; u \in [0,4] \;\wedge\; z \in \left[\tfrac{3}{2}u, \tfrac{5}{2}u\right] \right\} =$$
$$= \left\{ (u,z) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; z \in [0,6] \;\wedge\; u \in \left[\tfrac{2}{5}z, \tfrac{2}{3}z\right] \right\} \cup$$
$$\cup \left\{ (u,z) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; u \in [6,10] \;\wedge\; u \in \left[\tfrac{2}{5}z, 4\right] \right\}.$$
Koristeći transformaciju f dobijamo
$$\varphi_{U,Z}(u,z) = \varphi_{X,Y}\left(f^{-1}(u,z)\right)\left|\mathcal{J}_{f^{-1}}(u,z)\right| =$$
$$= \varphi_{X,Y}\left(u, \tfrac{z-u}{2}\right) \cdot \tfrac{1}{2} = \begin{cases} \frac{1}{4u} & , \quad (u,z) \in D' \\ 0 & , \quad (u,z) \notin D' \end{cases},$$
te je
$$\varphi_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_{U,Z}(u,z)\, du =$$
$$= \begin{cases} 0 & , \quad z \notin [0,10] \\ \int\limits_{\frac{2}{5}z}^{\frac{2}{3}z} \frac{1}{4u} du & , \quad z \in [0,6) \\ \int\limits_{\frac{2}{5}z}^{4} \frac{1}{4u} du & , \quad z \in [6,10) \end{cases} = \begin{cases} 0 & , \quad z \notin [0,10] \\ \frac{1}{4}\ln\frac{5}{3} & , \quad z \in [0,6) \\ \frac{1}{4}\ln\frac{10}{z} & , \quad z \in [6,10) \end{cases},$$
$$F_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{z} \varphi_Z(t)\, dt = \begin{cases} 0 & , \quad z \notin (-\infty, 0] \\ \int\limits_{0}^{z} \frac{1}{4}\ln\frac{5}{3} dt & , \quad z \in (0,6] \\ \int\limits_{0}^{6} \frac{1}{4}\ln\frac{5}{3} dt + \int\limits_{6}^{z} \frac{1}{4}\ln\frac{10}{t} dt & , \quad z \in (6,10] \\ 1 & , \quad z \in (10,\infty) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0 & , \quad z \notin (-\infty, 0] \\ \frac{z}{4} \ln \frac{5}{3} & , \quad z \in (0, 6] \\ \frac{1}{4} \left(z \ln \frac{10}{z} + z - 6 \right) & , \quad z \in (6, 10] \\ 1 & , \quad z \in (10, \infty) \end{cases} .$$

4. (a) Obeležimo sa $X_i,\ i \in \mathbb{N}$ slučajnu promenljivu koja pretstavlja broj studenata koji su izašli na ispit počevši od momenta nakon što je $(i-1)$ - vi student položio ispit do momenta kada je i - ti student položio ispit (na primer, ako prva 2 studenta padnu, pa zatim 1 položi, pa 5 studenata padne, pa 3 studenta polože, pa 1 padne, pa jedan položi, pa 4 studenta padnu, pa 2 studenta polože, itd..., tada je $X_1 = 2+1 = 3$, $X_2 = 5+1 = 6$, $X_3 = 0+1 = 1$, $X_4 = 0+1 = 1$, $X_5 = 1+1 = 2$, $X_6 = 4+1 = 5$, $X_7 = 0+1 = 1$, itd.). Iz opisanog modela sledi da svaka od slučajnih promenljivih X_i ima geometrijsku $\mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)$ raspodelu, odnosno

$$X_i \ : \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} & \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} & \cdots \end{pmatrix},$$

pri čemu je $\mathsf{E}(X_i) = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$. Sada našu slučajnu promenljivu X koja predstavlja broj studenata koji izađu na ispit pre nego što položi prvih n studenata možemo predstaviti kao $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ odakle sledi da je

$\mathsf{E}(X) = \mathsf{E}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) =$
$= \mathsf{E}(X_1) + \mathsf{E}(X_2) + \ldots + \mathsf{E}(X_n) = n\mathsf{E}(X_1) = 3n.$

(b) Slučajna promenljiva Y_n, koja predstavlja broj studenata koji su položili od n studenata koji su izašli na ispit, ima binomnu $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$ raspodelu, pri čemu je $\mathsf{E}(Y_n) = \frac{1}{3}n$ i $\mathsf{D}(Y_n) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot n = \frac{2}{9}n$. Naš zadatak je da odredimo n za koje je $\mathsf{P}(Y_n \geq 30) = 0.9$:

$\mathsf{P}(Y_n \geq 30) = 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \mathsf{P}(Y_n < 30) = 0.9 \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad 1 - \mathsf{P}\left(\frac{Y_n - \mathsf{E}(Y_n)}{\sqrt{Y_n}} < \frac{30 - \mathsf{E}(Y_n)}{\sqrt{Y_n}} \right) = 0.9 \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad 1 - \mathsf{P}\left(\frac{Y_n - \mathsf{E}(Y_n)}{\sqrt{Y_n}} < \frac{30 - \frac{1}{3}n}{\sqrt{\frac{2}{9}n}} \right) = 0.9 \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad 1 - \mathsf{P}\left(\frac{Y_n - \mathsf{E}(Y_n)}{\sqrt{Y_n}} < \frac{90 - n}{\sqrt{2n}} \right) = 0.9 \quad \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \quad \phi\left(\frac{90-n}{\sqrt{2n}} \right) \approx 0.1 \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \frac{90-n}{\sqrt{2n}} \approx \phi^{-1}(0.1) \approx -1.28 \quad \Leftrightarrow \quad n - 1.28\sqrt{2n} - 90 \approx 0 \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \left(t^2 - 1.81t - 90 \approx 0 \ \wedge \ t = \sqrt{n} \right) \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad ((t \approx -8.62 \ \vee \ t \approx 10.43) \ \wedge \ t = \sqrt{n}) \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad n \approx 10.43^2 = 108.78 \approx 109.$

[1] - *Na osnovu centralne granične teoreme, slučajna promenljiva* $Y_n^* = \frac{Y_n - \mathsf{E}(Y_n)}{\sqrt{Y_n}}$ *ima približno normalnu* $\mathcal{N}(0,1)$ *raspodelu.*

Dakle, da bi bili zadovoljeni traženi zahtevi, na ispit treba da izađe 109 studenta.

5. (a) Matrice prelaza za 1 i za 2 koraka su:

$$P = P(1) = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad P(2) = P^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{3} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Početna raspodela: $\mathbf{p}(0) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}.$

Raspodela nakon dva koraka: $\mathbf{p}(2) = \mathbf{p}(0) \cdot P(2) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{3} & \frac{2}{9} \end{array} \right] \end{array}.$

Dakle, verovatnoća da će nakon 2 izvlačenja u kutiji biti 3 zelene kuglice je $p_3(2) = \frac{2}{9}$.

6. (a) $L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \varphi_{X_1}(x_1; \theta)\, \varphi_{X_2}(x_2; \theta) \ldots \varphi_{X_n}(x_n; \theta) =$

$$= \begin{cases} \theta x_1^{\theta-1}\, \theta x_2^{\theta-1} \ldots \theta x_n^{\theta-1} & , \ \forall i,\ x_i \in (0,1) \\ 0 & , \ \text{inače} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \theta^n \left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i \right)^{\theta-1} & , \ \forall i,\ x_i \in (0,1) \\ 0 & , \ \text{inače} \end{cases},$$

$$\ln L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = n \ln \theta + (\theta - 1) \sum_{i=1}^{n} \ln x_i,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = -\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i}.$$

Dakle, dobili smo ocenu: $\hat{\theta} = -\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \ln X_i}.$

(b) Obim uzorka: $n = 2 + 18 + 20 + 30 = 70.$

Koristeći dobijenu ocenu parametra, izračunavamo njenu realizovanu vrednost iz uzorka:

$$\theta = -\frac{70}{2 \ln \frac{1}{8} + 18 \ln \frac{3}{8} + 20 \ln \frac{5}{8} + 30 \ln \frac{7}{8}} \approx 1.98752$$

(kao x_i se koriste sredine $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$ datih intervala), te funkcija raspodele obeležja X glasi:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(x)\, dx = \begin{cases} 0 & , \ x \le 0 \\ x^{1.98752} & , \ 0 < x < 1 \\ 1 & , \ 1 \le x \end{cases}.$$

Na osnovu nje ćemo izračunati teorijske verovatnoće:

$$p_i = F_X(b_i) - F_X(a_i) \qquad (a_i \text{ i } b_i \text{ su rubovi datih intervala}).$$

U prvoj grupi iz uzorka imamo $2 < 5$ realizovanih vrednosti, pa interval $\left(0, \frac{1}{4}\right]$ spajamo sa susednim intervalom. Tako dobijamo sledeću tabelu:

interval $(a_i, b_i]$	$\left(0, \frac{1}{2}\right]$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$	$\left(\frac{3}{4}, 1\right)$
učestanost m_i	20	20	30
teorijske verovatnoće p_i	0.252173	0.312351	0.435476
$\frac{(m_i-np_i)^2}{np_i}$	0.3123	0.159008	0.00766394

Nalazimo vrednost χ^2 statistike za dati uzorak:

$$z = \sum_{i=1}^{3} \frac{(m_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} \approx 0.478973\,,$$

što upoređujemo sa tabličnom vrednošću $\chi^2_{\alpha;3-1-1}$:

$$z < 2.71 \approx \chi^2_{\alpha;3-1-1} = \chi^2_{0.1;1}\,.$$

Znači, dati uzorak ne protivreči hipotezi.

7. $X : \mathcal{N}(m, 10), \qquad \mathsf{E}(X) = m, \qquad \mathsf{D}(X) = 10^2 = 100.$

Za dati uzorak obima n je poznato da je "najbolja" ocena matematičkog očekivanja obeležja X aritmetička sredina uzorka: $m = \overline{X}_n$, pri čemu je

$$\mathsf{E}\left(\overline{X}_n\right) = \mathsf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}(X_i) = \frac{1}{n} n \mathsf{E}(X) = \mathsf{E}(X) = m,$$

$$\mathsf{D}\left(\overline{X}_n\right) = \mathsf{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{D}(X_i) = \frac{1}{n^2} n \mathsf{D}(X) = \frac{1}{n} 10^2 = \frac{100}{n}.$$

S obzirom na formulaciju zadatka, treba da nađemo najmanje rešenje po n nejednačine $\mathsf{P}\left(\left|\overline{X}_n - m\right| < 5\right) \geq 0.95$:

$$0.95 \leq \mathsf{P}\left(\left|\overline{X}_n - m\right| < 5\right) = \mathsf{P}\left(-5 < \overline{X}_n - m < 5\right) =$$
$$= \mathsf{P}\left(-\frac{5}{\sqrt{\frac{100}{n}}} < \frac{\overline{X}_n - m}{\sqrt{\frac{100}{n}}} < \frac{5}{\sqrt{\frac{100}{n}}}\right) = \mathsf{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{2} < \frac{\overline{X}_n - m}{\sqrt{\frac{100}{n}}} < \frac{\sqrt{n}}{2}\right) \overset{[1]}{\approx}$$
$$\approx \phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) - \phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\right) = 2\phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) - 1.$$

[1] - *Slučajna promenljiva* $\overline{X}^*_n = \frac{\overline{X}_n - m}{\sqrt{\frac{100}{n}}}$ *ima približno* $\mathcal{N}(0,1)$ *raspodelu.*

Dakle:

$$0.95 \leq \mathsf{P}\left(\left|\overline{X}_n - m\right| < 5\right) = \mathsf{P}\left(-5 < \overline{X}_n - m < 5\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 0.95 \preceq 2\phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) \succeq 0.975 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{n}}{2} \succeq \phi^{-1}(0.975) \approx 1.96 \quad \Leftrightarrow \quad n \succeq 15.3664.$$

Prema tome, minimalan obim uzorka koji zadovoljava tražene uslove je $n = 16$.

8. $\varphi_{_U}(u) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & , \ u \in [0, 2\pi] \\ 0 & , \ u \notin [0, 2\pi] \end{cases}.$

Matematičko očekivanje:

$$m_X(t) = \mathsf{E}(\cos(\lambda t + U)) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda t + u)\,\varphi_U(u)\,du =$$
$$= \int_0^{2\pi} \cos(\lambda t + u)\,\frac{1}{2\pi}du \overset{[1]}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{\lambda t}^{\lambda t + 2\pi} \cos z dz = \frac{1}{2\pi}\sin z \Big|_{\lambda t}^{\lambda t + 2\pi} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}(\sin(\lambda t + 2\pi) - \sin(\lambda t)) = \frac{1}{2\pi}(\sin(\lambda t) - \sin(\lambda t)) = 0.$$

[1] - *Smena:* $z = \lambda t + u$
($du = dz,\ u = 0 \to z = \lambda t,\ u = 2\pi \to z = \lambda t + 2\pi$*).*

Autokorelaciona funkcija:

$$\mathsf{R}_X(t,s) = \mathsf{E}(X(t)X(s)) = \mathsf{E}(\cos(\lambda t + U)\ \cos(\lambda s + U)) =$$
$$\overset{[2]}{=} \mathsf{E}\left(\tfrac{1}{2}\cos(\lambda t + \lambda s + 2U) + \tfrac{1}{2}\cos(\lambda t - \lambda s)\right) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\mathsf{E}(\cos(\lambda t + \lambda s + 2U)) + \tfrac{1}{2}\cos(\lambda t - \lambda s) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda t + \lambda s + 2u)\,\varphi_U(u)\,du + \tfrac{1}{2}\cos(\lambda t - \lambda s) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(\lambda t + \lambda s + 2u)\,\tfrac{1}{2\pi}du + \tfrac{1}{2}\cos(\lambda t - \lambda s) =$$
$$\overset{[3]}{=} 0 + \tfrac{1}{2}\cos(\lambda t - \lambda s) = \tfrac{1}{2}\cos(\lambda(t - s)).$$

[2] - $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$.

[3] - *Smenom* $z = \lambda t + \lambda s + 2u$ *kao u* [1].

(Dakle, proces $X(t)$ je slabo stacionaran).

Disperzija:

$$\mathsf{D}_X(t) = \mathsf{K}_X(t,t) = \mathsf{R}_X(t,t) - (m_X(t))^2 = \tfrac{1}{2}\cos 0 - 0^2 = \tfrac{1}{2}.$$

17.06.2000.

1. n osoba u restoranu naruči n različitih jela. Rasejani konobar servira gostima naručena jela na proizvoljan način. Izračunati verovatnoću da će bar jedan gost dobiti jelo koje je naručio.

2. Na brojač padaju kosmičke čestice. Neka slučajna promenljiva X predstavlja broj čestica koje padnu na brojač u toku nekog fiksnog vremenskog intervala, i poznato je da X ima Poasonovu $\mathcal{P}\left(\frac{1}{2}\right)$ raspodelu. Svaka čestica koja padne na brojač registruje se nezavisno od drugih čestica sa verovatnoćom $\frac{3}{4}$. Naći zakon raspodele slučajne promenljive Y koja predstavlja broj registrovanih čestica na brojaču.

3. Slučajni vektor (X,Y) ima gustinu raspodele verovatnoća:
$$\varphi_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 12x^3y & ,\quad 0 < y < x < 1 \\ 0 & ,\quad \text{inače} \end{cases}.$$
   (a) Naći funkciju raspodele slučajnog vektora (X,Y).

(b) Naći funkciju raspodele ili gustinu raspodele verovatnoća slučajne promenljive $Z = -X + 2Y$.

4. Istovremeno se baca više kockica.

   (a) Ako se baca 100 kockica, izračunati verovatnoću da će zbir palih brojeva biti između 300 i 400.

   (b) Koliko kockica treba bacati pa da zbir palih brojeva bude veći od 100 sa verovatnoćom 0.9?

5. Dve signalne lampice se pale i gase u diskretnim vremenskim trenucima od po 1 sekunde na sledeći način: svetleća lampica se u sledećoj sekundi gasi sa verovatnoćom $\frac{1}{4}$, a ugašena se u sledećoj sekundi uključi sa verovatnoćom $\frac{2}{3}$. Ako je u početnom trenutku svaka od lampica uključena sa verovatnoćom $\frac{1}{2}$ nezavisno od druge, izračunati verovatnoću da će nakon 2 sekunde biti uključena bar jedna lampica.

6. Naći matematičko očekivanje, disperziju i autokovarijansnu funkciju slučajnog procesa
$$X_t = \sum_{n=0}^{3} t^n U_n, \quad t \in \mathbb{R},$$
gde su $U_n : \mathcal{E}\left(\frac{1}{2^n}\right), \ n \in \{0,1,2,3\}$ nezavisne slučajne promenljive.

7. Obeležje X ima uniformnu $\mathcal{U}(0,b)$ raspodelu ($b > 0$). Na osnovu uzorka obima n oceniti parametar b. Ispitati centriranost i postojanost dobijene ocene.

8. Koristeći χ^2 test, sa pragom značajnosti 0.02 proveriti da li su podaci

I_k	$\left(0, \frac{1}{4}\right]$	$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$	$\left(\frac{3}{4}, 1\right]$
m_k	6	18	20	30

saglasni sa hipotezom da se radi o uzorku iz populacije čija je gustina
$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x & , \ x \in (0,1) \\ 0 & , \ x \notin (0,1) \end{cases}.$$

Rešenja:

1. Označimo događaje: A_i - "*i-ti gost je dobio svoje jelo*", $i \in \{1,2,\ldots,n\}$,
   B_n - "*bar jedan od* n *gostiju je dobio svoje jelo*".

   Pošto je $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, sledi:

$$\mathsf{P}(B_n) = \mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathsf{P}(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} \mathsf{P}(A_iA_jA_k) - \ldots + (-1)^{n-1}\mathsf{P}(A_1 ... A_n) =$$
$$\stackrel{[1]}{=} n\frac{(n-1)!}{n!} - \binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{n!} + \binom{n}{3}\frac{(n-3)!}{n!} - \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}\frac{0!}{n!} =$$

$= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$.

[1] - *Po opisu iz zadatka izračunavamo:*

$\mathsf{P}(A_i) = \frac{1}{n} = \frac{(n-1)!}{n!}$,

$\mathsf{P}(A_iA_j) = \mathsf{P}(A_i)\,\mathsf{P}(A_j \mid A_i) = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1} = \frac{(n-2)!}{n!} \qquad (i<j)$,

$\mathsf{P}(A_iA_jA_k) = \mathsf{P}(A_i)\,\mathsf{P}(A_j \mid A_i)\,\mathsf{P}(A_k \mid A_iA-j) =$
$\qquad = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2} = \frac{(n-3)!}{n!} \qquad (i<j<k)$,

$\vdots$

$\mathsf{P}(A_1A_2\ldots A_n) = \mathsf{P}(A_1)\,\mathsf{P}(A_2 \mid A_1)\ldots\mathsf{P}(A_n \mid A_1A_2\ldots A_{n-1}) =$
$\qquad = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{1} = \frac{0!}{n!}$.

(Primetimo da je $\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{P}(B_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}\right) = 1-e^{-1}$).

2. Označimo sa Y slučajnu promenljivu koja predstavlja broj registrovanih čestica. Dato je da X ima Poasonovu $\mathcal{P}\left(\frac{1}{2}\right)$ raspodelu, tj.

$$\mathsf{P}(X=n) = \frac{1}{2^n n!\sqrt{e}}, \quad n\in\{0,1,2,\ldots\},$$

a iz opisa sledi da uslovna slučajna promenljiva $Y \mid \{X=n\}$ ima binomnu $\mathcal{B}\left(n,\frac{3}{4}\right)$ raspodelu:

$$\mathsf{P}(Y=k \mid X=n) = \begin{cases} \binom{n}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} & , \quad k\in\{0,1,2,\ldots,n\} \\ 0 & , \quad k\notin\{0,1,2,\ldots,n\} \end{cases}.$$

Skup vrednosti slučajne promenljive Y je $\mathcal{R}_Y = \{0,1,2,\ldots\}$. Koristeći uslovnu raspodelu $\mathsf{P}(Y=k \mid X=n)$ i formulu totalne verovatnoće (familija $\{X=n\}$, $n\in\{0,1,2,\ldots\}$ čini potpun sistem događaja) dobijamo raspodelu slučajne promenljive Y:

$$\mathsf{P}(Y=k) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathsf{P}(X=n)\,\mathsf{P}(Y=k \mid X=n).$$

Za $k\in\mathcal{R}_Y$ je

$\mathsf{P}(Y=k) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\mathsf{P}(X=n)\,\mathsf{P}(Y=k \mid X=n) =$

$= \sum\limits_{n=0}^{k-1}\mathsf{P}(X=n)\,\mathsf{P}(Y=k \mid X=n) + \sum\limits_{n=k}^{\infty}\mathsf{P}(X=n)\,\mathsf{P}(Y=k \mid X=n) =$

$= \sum\limits_{n=0}^{k-1}\mathsf{P}(X=n)\cdot 0 + \sum\limits_{n=k}^{\infty}\frac{1}{2^n n!\sqrt{e}}\binom{n}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} =$

$= \frac{1}{\sqrt{e}}\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(\frac{1}{4}\right)^{-k}\sum\limits_{n=k}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{3^k}{\sqrt{e}}\sum\limits_{n=k}^{\infty}\frac{1}{2^k 2^{n-k} n!}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{4^k 4^{n-k}} =$

$= \frac{3^k}{\sqrt{e}2^k 4^k k!}\sum\limits_{n=k}^{\infty}\frac{1}{2^{n-k}}\cdot\frac{1}{(n-k)!}\cdot\frac{1}{4^{n-k}} = \frac{3^k}{\sqrt{e}8^k k!}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{4^n} =$

$= \left(\frac{3}{8}\right)^k\frac{1}{\sqrt{e}k!}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{8}\right)^n}{n!} = \left(\frac{3}{8}\right)^k\frac{1}{\sqrt{e}k!}e^{\frac{1}{8}} = \left(\frac{3}{8}\right)^k\frac{1}{k!}e^{-\frac{3}{8}}$.

Dakle, zakon raspodele slučajne promenljive Y glasi:

$$\mathsf{P}(Y=k)=\begin{cases} 0 & , \quad k<0 \\ \left(\frac{3}{8}\right)^k \frac{1}{k!}e^{-\frac{3}{8}} & , \quad k\geq 0 \end{cases},$$

tako da slučajna promenljiva Y ima Poasonovu $\mathcal{P}\left(\frac{3}{8}\right)$ raspodelu.

3. Neka je T oblast na kojoj je gustina vektora (X,Y) različita od nule:
$T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0<y<x\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x\in(0,1)\ \wedge\ y\in(0,x)\right\}.$

(a) $F_{X,Y}(x,y)=\iint\limits_{-\infty<u<x,-\infty<v<y}\varphi_{X,Y}(u,v)\,dudv=$
$=\iint\limits_{\substack{-\infty<u<x,-\infty<v<y\\(u,v)\in T}}12u^3vdudv=\ldots$

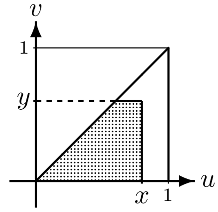
(a.1) za $x\leq 0\ \vee\ y\leq 0$ je: $F_{X,Y}(x,y)=\iint\limits_{\emptyset}12u^3vdudv=0;$

(a.2) za $0<x<1$ i $0<y<x$ je (vidi sliku a.2):
$F_{X,Y}(x,y)=12\int\limits_0^y\left(\int\limits_v^x u^3vdu\right)dv=\frac{3}{2}x^4y^2-\frac{1}{2}y^6;$

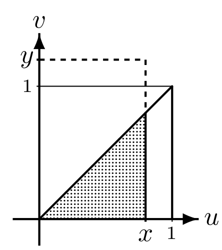
(a.3) za $0<x<1$ i $x\leq y$ je (vidi sliku a.3):
$F_{X,Y}(x,y)=12\int\limits_0^x\left(\int\limits_v^x u^3vdu\right)dv=x^6;$

(a.4) za $1\leq x$ i $0<y<x$ je (vidi sliku a.4):
$F_{X,Y}(x,y)=12\int\limits_0^y\left(\int\limits_v^1 u^3vdu\right)dv=\frac{3}{2}y^2-\frac{1}{2}y^6;$

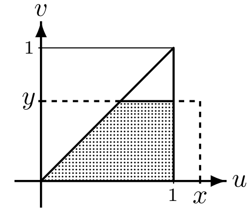
(a.5) za $0<x<1$ i $x\leq y$ je: $F_{X,Y}(x,y)=\iint\limits_T 12u^3vdudv=1.$



slika a.2



slika a.3



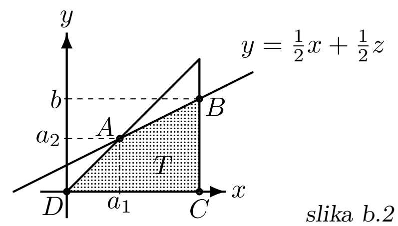
slika a.4

(b) Nalazimo funkciju raspodele slučajne promenljive Z pomoću gustine slučajnog vektora (X,Y):

$F_Z(z)=\mathsf{P}(Z<z)=\mathsf{P}(2Y-X<z)=\mathsf{P}\left(Y<\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}z\right)=$
$=\iint\limits_{T\cap\left\{(x,y)\ |\ y<\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z\right\}}12x^3ydxdy=\ldots$

(b.1) za $z\leq -1$ (poluravan $Y<\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}z$ nema zajedničkih tačaka sa oblasti T) je: $F_Z(z)=0;$

(b.2) za $-1<z\leq 1$ (vidi sliku b.2) imamo sledeću situaciju:



slika b.2

Obeležimo sa S unutrašnjost četvorougla $ABCD$, gde je

$D = (0,0)\,, \qquad C = (1,0)\,, \qquad B = (1,b)\,, \qquad A = (a_1, a_2)\,.$

Koordinatu b nalazimo iz preseka pravih $x = 1$ i $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z$:

$$\begin{array}{l} x = 1 \\ b = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x = 1 \\ b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z \end{array},$$

a iz preseka pravih $y = x$ i $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z$ nalazimo koordinate a_1 i a_2:

$$\begin{array}{l} a_2 = a_1 \\ a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}z \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} a_2 = a_1 \\ a_1 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}z \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad a_2 = a_1 = z.$$

Dakle: $A = (z,z)$, $B = \left(1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z\right)$, $C = (1,0)$, $D = (0,0)$, te je

$$F_Z\left(z\right) = \iint\limits_S 12x^3 y dx dy =$$
$$= \int\limits_0^z \left(\int\limits_0^x 12x^3 y dy\right) dx + \int\limits_z^1 \left(\int\limits_0^{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z} 12x^3 y dy\right) dx =$$
$$= 12\int\limits_0^z \tfrac{1}{2}x^5 dx + 12\int\limits_z^1 \tfrac{1}{8}x^3\left(x+z\right)^2 dx =$$
$$= z^6 + \left(-\tfrac{49}{40}z^6 + \tfrac{3}{8}z^2 + \tfrac{3}{5}z + \tfrac{1}{4}\right) = -\tfrac{9}{40}z^6 + \tfrac{3}{8}z^2 + \tfrac{3}{5}z + \tfrac{1}{4};$$

(b.3) za $1 < z$ (poluravan $Y < \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}z$ sadrži oblast T) je: $F_Z\left(z\right) = 1$.

Dakle:

$$F_Z\left(z\right) = \begin{cases} 0 & , \quad z \le -1 \\ -\frac{9}{40}z^6 + \frac{3}{8}z^2 + \frac{3}{5}z + \frac{1}{4} & , \quad -1 < z \le 1 \\ 1 & , \quad 1 < z \end{cases},$$

$$\varphi_Z\left(z\right) = F_Z'\left(z\right) = \begin{cases} 0 & , \quad z \notin (-1,1] \\ -\frac{27}{20}z^5 + \frac{3}{4}z + \frac{3}{5} & , \quad z \in (-1,1] \end{cases}.$$

4. Označimo sa n broj kockica koje se bacaju. Neka je X_i broj koji se dobija na i-toj kockici, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Tada slučajna promenljiva $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ predstavlja zbir svih brojeva koji se dobijaju na n kockica. Pošto su slučajne promenljive X_i nezavisne i sve imaju isti zakon raspodele

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right),$$

pri čemu je

$\mathsf{E}\left(X_i\right) = \frac{1}{6}\left(1+2+3+4+5+6\right) = \frac{7}{2}$,

$\mathsf{E}\left(X_i^2\right) = \frac{1}{6}\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2\right) = \frac{91}{6}$,

$\mathsf{D}\left(X_i\right) = \mathsf{E}\left(X_i^2\right) - \left(\mathsf{E}\left(X_i\right)\right)^2 = \frac{35}{12}$,

možemo na S_n primeniti centralnu graničnu teoremu, pri čemu je

$\mathsf{E}\left(S_n\right) = \mathsf{E}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{E}\left(X_i\right) = n\mathsf{E}\left(X_i\right) = \frac{7}{2}n$,

$\mathsf{D}\left(S_n\right) = \mathsf{D}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{D}\left(X_i\right) = n\mathsf{D}\left(X_i\right) = \frac{35}{12}n$.

(a) $\mathsf{P}\left(300 < S_{100} < 400\right) =$
$= \mathsf{P}\left(300 - \mathsf{E}\left(S_{100}\right) < S_{100} - \mathsf{E}\left(S_{100}\right) < 400 - \mathsf{E}\left(S_{100}\right)\right) =$
$= \mathsf{P}\left(\frac{300-\mathsf{E}(S_{100})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{100})}} < \frac{S_{100}-\mathsf{E}(S_{100})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{100})}} < \frac{400-\mathsf{E}(S_{100})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{100})}}\right) =$
$= \mathsf{P}\left(\frac{300-350}{\sqrt{\frac{3500}{12}}} < \frac{S_{100}-\mathsf{E}(S_{100})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{100})}} < \frac{400-350}{\sqrt{\frac{3500}{12}}}\right) =$
$\approx \mathsf{P}\left(-2.9277 < \frac{S_{100}-\mathsf{E}(S_{100})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{100})}} < 2.9277\right) \approx$
$\approx \phi\left(2.9277\right) - \phi\left(-2.9277\right) =$
$= 2\phi\left(2.9277\right) - 1 \approx 2 \cdot 0.9982 - 1 \approx 0.9964$.

(b) Po n rešavamo jednačinu $\mathsf{P}\left(S_n > 100\right) = 0.9$:
$\mathsf{P}\left(S_n > 100\right) = 0.9 \quad\Leftrightarrow\quad 1 - \mathsf{P}\left(S_n \leq 100\right) = 0.9 \quad\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\quad 1 - \mathsf{P}\left(\frac{S_n-\mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}} \leq \frac{100-\mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}}\right) = 0.9 \quad\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\quad 1 - \phi\left(\frac{100-\mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}}\right) \approx 0.9 \quad\Leftrightarrow\quad \phi\left(\frac{100-\frac{7}{2}n}{\sqrt{\frac{35}{12}n}}\right) \approx 0.1 \quad\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\quad \frac{100-\frac{7}{2}n}{\sqrt{\frac{35}{12}n}} \approx \phi^{-1}\left(0.1\right) \quad\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\quad \frac{100-\frac{7}{2}n}{\sqrt{\frac{35}{12}n}} \approx -\phi^{-1}\left(1-0.1\right) = -\phi^{-1}\left(0.9\right) \approx -1.28 \quad\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\quad \frac{100-3.5n}{1.70783\sqrt{n}} \approx -1.28 \quad\Leftrightarrow\quad 3.5 \cdot n - 2.1860224 \cdot \sqrt{n} - 100 \approx 0 \quad\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\quad \left(3.5 \cdot t^2 - 2.1860224 \cdot t - 100 \approx 0 \ \wedge\ t = \sqrt{n}\right) \quad\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\quad \left(\left(t \approx -5.04205 \ \vee\ t \approx 5.66663\right) \ \wedge\ t = \sqrt{n}\right) \quad\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\quad \left(\sqrt{n} \approx -5.04205 \ \vee\ \sqrt{n} \approx 5.66663\right) \quad\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\quad \sqrt{n} \approx 5.66663 \quad\Leftrightarrow\quad n \approx 5.66663^2 \approx 32.110696$,
što znači da treba baciti 33 kockice.

5. Stanja sistema definišemo brojem uključenih lampica (moguća stanja su 0, 1 ili 2). Označimo sa S_1^n i S_2^n stanja $\circ =$ "*uključeno*" i $\times =$ "*isključeno*" posmatranih lampica u momentu n. Tada su prelazne verovatnoće (koristimo nezavisnost ponašanja sijalica):

$p_{0,0} = \mathsf{P}\ \ S_1^{n+1} = \times \mid S_1^n = \times\ \ \mathsf{P}\ \ S_2^{n+1} = \times \mid S_2^n = \times\ \ = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$,

$p_{0,1} = \mathsf{P}\ \ S_1^{n+1} = \circ \mid S_1^n = \times\ \ \mathsf{P}\ \ S_2^{n+1} = \times \mid S_2^n = \times\ \ +$
$+\,\mathsf{P}\ \ S_1^{n+1} = \times \mid S_1^n = \times\ \ \mathsf{P}\ \ S_2^{n+1} = \circ \mid S_2^n = \times\ \ = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$,

$p_{0,2} = \mathsf{P}\ \ S_1^{n+1} = \circ \mid S_1^n = \times\ \ \mathsf{P}\ \ S_2^{n+1} = \circ \mid S_2^n = \times\ \ = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

Analogno dobijamo

$p_{1,0} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}, \qquad p_{1,1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{12}, \qquad p_{1,2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12},$
$p_{2,0} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}, \qquad p_{2,1} = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{16}, \qquad p_{2,2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16},$

te možemo formirati matricu prelaza $P = P(1)$, a zatim i matricu prelaza za 2 koraka (2 sekunde) $P(2) = P^2$:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{12} & \frac{5}{12} & \frac{6}{12} \\ \frac{1}{16} & \frac{6}{16} & \frac{9}{16} \end{bmatrix} \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad P^2 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{25}{34} & \cdots & \cdots \\ \frac{65}{864} & \cdots & \cdots \\ \frac{169}{2304} & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \end{array}.$$

Vektor početnih verovatnoća je: $\qquad \mathbf{p}_0 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{array}.$

Stanje sistema nakon dve sekunde je: $\qquad \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_0 \cdot P^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{6241}{82944} & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \end{array},$

te je tražena verovatnoća $1 - \frac{6241}{82944} = \frac{76703}{82944} \approx 0.925$.

6. $U_n : \mathcal{E}\left(\frac{1}{2^n}\right), \qquad \mathsf{E}(U_n) = \frac{1}{\frac{1}{2^n}} = 2^n, \qquad \mathsf{D}(U_n) = \frac{1}{\frac{1}{(2^n)^2}} = 2^{2n},$

$\mathsf{E}\left(U_n^2\right) = \mathsf{D}(U_n) + (\mathsf{E}(U_n))^2 = 2^{2n+1}.$

Matematičko očekivanje:

$$m_X(t) = \mathsf{E}(X_t) = \mathsf{E}\left(\sum_{n=0}^{3} t^n U_n\right) \overset{[1]}{=} \sum_{n=0}^{3} t^n \mathsf{E}(U_n) = \sum_{n=0}^{3} 2^n t^n =$$
$$= 1 + 2t + 4t^2 + 8t^3.$$

Autokovarijansna funkcija:

$$\mathsf{K}_X(t,s) = \mathsf{E}\left((X_t - m_X(t))(X_s - m_X(s))\right) =$$
$$= \mathsf{E}\left(\left(\sum_{n=0}^{3} t^n U_n - \sum_{n=0}^{3} 2^n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{3} s^n U_n - \sum_{n=0}^{3} 2^n s^n\right)\right) =$$
$$= \mathsf{E}\left(\sum_{n=0}^{3} t^n (U_n - 2^n) \cdot \sum_{n=0}^{3} s^n (U_n - 2^n)\right) =$$
$$= \mathsf{E}\left(\sum_{n=0}^{3} t^n (U_n - \mathsf{E}(U_n)) \cdot \sum_{n=0}^{3} s^n (U_n - \mathsf{E}(U_n))\right) =$$
$$\overset{[1]}{=} \sum_{n=0}^{3} t^n s^n \mathsf{E}\left((U_n - \mathsf{E}(U_n))^2\right) + \sum_{\substack{n,m=0 \\ n \neq m}}^{3} t^n s^m \mathsf{E}\left((U_n - 2^n)(U_m - 2^m)\right) =$$
$$\overset{[2]}{=} \sum_{n=0}^{3} t^n s^n \mathsf{D}(U_n) + \sum_{\substack{n,m=0 \\ n \neq m}}^{3} t^n s^m \mathsf{E}(U_n - 2^n)\,\mathsf{E}(U_m - 2^m) =$$
$$= \sum_{n=0}^{3} 2^{2n} (ts)^n + \sum_{\substack{n,m=0 \\ n \neq m}}^{3} t^n s^m \cdot 0 \cdot 0 = 1 + 4(ts) + 16(ts)^2 + 64(ts)^3.$$

Disperzija:

Prvi način: koristeći osobine disperzije dobijamo

$\mathsf{D}_X(t) = \mathsf{D}\left(\sum\limits_{n=0}^{3} t^n U_n\right) \overset{[2]}{=} \sum\limits_{n=0}^{3} (t^n)^2 \,\mathsf{D}(U_n) = \sum\limits_{n=0}^{3} 2^{2n} t^{2n} =$
$= 1 + 4t^2 + 16t^4 + 64t^6.$

Drugi način: koristeći autokovarijansnu funkciju dobijamo

$\mathsf{D}_X(t) = \mathsf{K}_X(t,t) = 1 + 4t^2 + 16\left(t^2\right)^2 + 64\left(t^2\right)^3 = 1 + 4t^2 + 16t^4 + 64t^6.$

[1] - *Matematičko očekivanje je linearna funkcija.*

[2] - *Slučajne promenljive U_n su nezavisne.*

7. Slučajna promenljiva X ima sledeće karakteristike:

$$\varphi_X(x;b) = \begin{cases} 0 & , \quad x \notin [0,b] \\ \frac{1}{b} & , \quad x \in [0,b] \end{cases},$$

$$F_X(x;b) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{1}{b}x & , \quad x \in [0,b] \\ 1 & , \quad x > b \end{cases}, \quad (b > 0),$$

$\mathsf{E}(X) = \frac{1}{2}b, \qquad \mathsf{D}(X) = \frac{1}{12}b^2.$

Prvi način - metodom maksimalne verodostojnosti:

Funkcija verodostojnosti je $\quad L(x_1,\ldots,x_n;b) = \prod\limits_{i=1}^{n} \varphi_X(x_i;b) = \frac{1}{b^n}.$

$L(x_1,\ldots,x_n;b)$ je monotono opadajuća funkcija (po b), te dostiže maksimalnu vrednost za najmanje b za koje uzorak ima smisla [1], a to je u tački $b = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Tako dobijamo ocenu:

$$\hat{b} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}.$$

Pošto je

$F_{\hat{b}}(t) = \mathsf{P}\left(\hat{b} < t\right) = \mathsf{P}\left(\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} < t\right) =$
$= \mathsf{P}(X_1 < t, X_2 < t, \ldots, X_n < t) =$

---

[1] $L(x_1,\ldots,x_n;b) = \begin{matrix} 0 & , & \exists i,\ x_i \notin [0,b] \\ \frac{1}{b^n} & , & \forall i,\ x_i \in [0,b] \end{matrix},$

$\frac{\partial \ln L(x_1,\ldots,x_n;b)}{\partial b} = \begin{matrix} 0 & , & \exists i,\ x_i \notin [0,b] \\ -\frac{n}{b} & , & \forall i,\ x_i \in [0,b] \end{matrix}.$

Kako X ima $\mathcal{U}(0,b)$ raspodelu, elementi x_i uzorka će biti nenegativni (ako bi u uzorku postojao element $x_i < 0$, tada bismo konstatovali da obeležje X nema navedenu raspodelu). Pošto je $\frac{\partial \ln L(x_1,\ldots,x_n;b)}{\partial b} < 0$ (za svako $b > 0$) ako je zadovoljen uslov $\forall i,\ x_i \in [0,b]$, pri čemu je $\forall i,\ x_i \in [0,b] \ \Leftrightarrow\ b \geq \max\{x_1,\ldots,x_n\}$, i s druge strane je $\frac{\partial \ln L(x_1,\ldots,x_n;b)}{\partial b} = 0$ (za svako $b > 0$) ako $\exists i,\ x_i \notin [0,b]$, pri čemu je $\exists i,\ x_i \notin [0,b] \ \Leftrightarrow\ b < \max\{x_1,\ldots,x_n\}$, sledi da je funkcija $L(x_1,\ldots,x_n;b)$ monotono opadajuća (po b) na intervalu $[\max\{x_1,\ldots,x_n\}, \infty)$ (na intervalu na kome nije identički jednaka nuli), te stoga na tom intervalu dostiže svoj maksimum (kao funkcija od b) na levom rubu.

$= \mathsf{P}(X_1 < t)\,\mathsf{P}(X_2 < t)\ldots\mathsf{P}(X_n < t) =$

$= F_{X_1}(t)\,F_{X_2}(t)\ldots F_{X_n}(t) = (F_X(t))^n = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ \frac{1}{b^n}t^n & , \quad t \in [0,b] \\ 1 & , \quad t > b \end{cases},$

sledi da je: $\quad \varphi_{\hat{b}}(t) = F'_{\hat{b}}(t) = \begin{cases} \frac{n}{b^n}t^{n-1} & , \quad t \in [0,b] \\ 0 & , \quad t \notin [0,b] \end{cases}.$

Centriranost:

$\mathsf{E}\left(\hat{b}\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t\varphi_{\hat{b}}(t)\,dt = \int\limits_{0}^{b} t\frac{n}{b^n}t^{n-1}dt = \frac{n}{b^n}\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^b = b\frac{n}{n+1}.$

Statistika $\hat{b}$ nije centrirana ali jeste asimptotski centrirana ocena parametra b jer je: $\quad \mathsf{E}\left(\hat{b}\right) = b\frac{n}{n+1} \neq b \quad$ i $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}\left(\hat{b}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} b\frac{n}{n+1} = b.$

Postojanost: za proizvoljno $\varepsilon > 0$ važi

$\mathsf{P}\left(\left|\hat{b} - b\right| > \varepsilon\right) = 1 - \mathsf{P}\left(\left|\hat{b} - b\right| \leq \varepsilon\right) = 1 - \mathsf{P}\left(b - \varepsilon \leq \hat{b} \leq b + \varepsilon\right) =$

$= 1 - \left(F_{\hat{b}}(b+\varepsilon) - F_{\hat{b}}(b-\varepsilon)\right) =$

$= \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{n}{b^n}(b-\varepsilon)^{n-1}\right), & 0 < \varepsilon < b \\ 1 - (1 - 0) & , \quad \varepsilon \geq b \end{cases} = \begin{cases} \frac{n}{b}\left(\frac{b-\varepsilon}{b}\right)^{n-1}, & 0 < \varepsilon < b \\ 0 & , \quad \varepsilon \geq b \end{cases}.$

Ocena je postojana jer je

$\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\left|\hat{b} - b\right| > \varepsilon\right) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{b}\left(\frac{b-\varepsilon}{b}\right)^{n-1} & , \quad 0 < \varepsilon < b \\ \lim\limits_{n\to\infty} 0 & , \quad \varepsilon \geq b \end{cases} \overset{[1]}{=} 0.$

[1] - *Jer je* $0 < \frac{b-\varepsilon}{b} < 1$ *a poznato je da za* $|q| < 1$ *važi* $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0.$

Drugi način - metodom momenata:

Izjednačavanjem matematičkog očekivanja $\mathsf{E}(X) = \frac{1}{2}b$ obeležja X sa uzoračkom srednjom vrednošću $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ dobijamo jednačinu $\frac{1}{2}b = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ čijim rešavanjem po b dobijamo ocenu:

$$\overline{b} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Centriranost:

$\mathsf{E}\left(\overline{b}\right) = \mathsf{E}\left(\frac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{E}(X_i) = \frac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2}b = \frac{2}{n}\cdot n\cdot\frac{1}{2}b = b,$

te je $\overline{b}$ centrirana ocena parametra b.

Postojanost: statistika $\overline{b}$ je centrirana ocena parametra b pa postojanost možemo ispitati koristeći zakon veliki brojeva Čebiševa, za proizvoljno $\varepsilon > 0$ važi

$\mathsf{P}\left(\left|\overline{b} - b\right| \geq \varepsilon\right) = \mathsf{P}\left(\left|\frac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \frac{2}{n}n\frac{b}{2}\right| \geq \varepsilon\right) =$

$= \mathsf{P}\left(\left|2\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - 2\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b}{2}\right| \geq \varepsilon\right) = \mathsf{P}\left(2\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathsf{E}(X_i)\right| \geq \varepsilon\right) =$

$$= \mathsf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathsf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Ocena je postojana jer na osnovu zakona velikih brojeva Čebiševa (pri čemu su ispunjeni svi potrebni uslovi za primenu tog zakona: X_i su nezavisne slučajne promenljive sa jednakim, konačnim disperzijama) važi

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\left|\overline{b} - b\right| > \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\left(X_i\right)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0.$$

8. Označimo intervale iz uzorka redom sa $I_k = (a_k, b_k]$, $k \in \{1,2,3,4\}$. Teorijske verovatnoće najlakše možemo dobiti na sledeći način: za sve $k \in \{1,2,3,4\}$ je

$$p_k = \mathsf{P}\left(X \in I_k\right) = \mathsf{P}\left(a_k < X \leq b_k\right) = \int_{a_k}^{b_k} \varphi\left(x\right) dx \overset{[1]}{=} \int_{a_k}^{b_k} 2x dx = b_k^2 - a_k^2.$$

[1] - *Svaki od intervala* I_k *se nalazi unutar oblasti* $(0,1)$.

Tako dobijamo: $p_1 = \frac{1}{16}$, $p_2 = \frac{3}{16}$, $p_3 = \frac{5}{16}$, $p_4 = \frac{7}{16}$.

Veličina uzorka: $n = \sum_{k=1}^{4} m_k = 6 + 18 + 20 + 30 = 74.$

I_k	$\left(0, \frac{1}{4}\right]$	$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$	$\left(\frac{3}{4}, 1\right]$
m_k	6	18	20	30
p_k	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$

Vrednost statistike $Z = \sum_{k=1}^{4} \frac{(m_k - np_k)^2}{np_k}$ za naš uzorak iznosi

$$z = \frac{\left(6 - 74\cdot\frac{1}{16}\right)^2}{74\cdot\frac{1}{16}} + \frac{\left(18 - 74\cdot\frac{3}{16}\right)^2}{74\cdot\frac{3}{16}} + \frac{\left(20 - 74\cdot\frac{5}{16}\right)^2}{74\cdot\frac{5}{16}} + \frac{\left(30 - 74\cdot\frac{7}{16}\right)^2}{74\cdot\frac{7}{16}} \approx 2.23,$$

a iz tablica očitavamo: $\chi^2_{0.02;4-1} = \chi^2_{0.02;3} > \chi^2_{0.025;3} \approx 9.35.$

Pošto je $\chi^2_{0.02;3} > z$, konstatujemo da uzorak ne protivreči hipotezi da obeležje X ima raspodelu određenu navedenom gustinom.

09.07.2000.

1. Igrač baca novčić 2 puta. Ako pismo padne bar jednom, izvlači dve kuglice sa vraćanjem iz kutije koja sadrži 3 zelene i 2 bele kuglice. Ako pismo ne padne nijednom, izvlači dve kuglice bez vraćanja iz iste kutije.

   (a) Izračunati verovatnoću da će igrač izvući 2 zelene kuglice.

   (b) Ako igrač nije izvukao 2 zelene kuglice, koliko iznosi verovatnoća da je pri bacanju novčića 2 puta pao grb?

2. U kutiji se nalaze 3 zelene i 3 crvene kuglice. Igrač na slučajan način bira 3 kuglice iz kutije, a zatim baca onoliko kockica koliko je zelenih kuglica izvukao. Neka slučajna promenljiva X označava broj izvučenih zelenih kuglica, a slučajna promenljiva Y broj pojavljivanja 6 - ice na bačenim kockicama.

   (a) Naći raspodelu dvodimenzionalnog slučajnog vektora (X, Y).

   (b) Naći matematičko očekivanje $\mathsf{E}(Y \mid X = 2)$.

3. Neka je X slučajna promenljiva sa uniformnom $\mathcal{U}(2, 3)$ raspodelom.

   (a) Naći raspodelu dvodimenzionalnog slučajnog vektora (Y, Z) gde je $Y = X^2 - 2$ i $Z = X + 2$.

   (b) Naći matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive Y.

4. Poznato je da jedno pakovanje patent olovaka sadrži prosečno 4% neispravnih olovaka.

   (a) Koliko iznosi verovatnoća da će u pakovanju od 100 olovaka bar 94 olovke biti ispravne?

   (b) Koliko je najmanje olovaka potrebno staviti u jedno pakovanje da bi ono sadržalo bar 100 ispravnih sa verovatnoćom ne manjom od 0.95?

5. Iz populacije obeležja X sa normalnom raspodelom uzet je prost slučajan uzorak:

I_k	$(0.5, 1.5]$	$(1.5, 2.5]$	$(2.5, 3.5]$	$(3.5, 4.5]$
m_k	2	3	8	12
I_k	$(4.5, 5.5]$	$(5.5, 6.5]$	$(6.5, 7.5]$	$(7.5, 8.5]$
m_k	10	2	2	1

   (a) Naći 95% interval poverenja za matematičko očekivanje obeležja X.

   (b) Naći 90% jednostrani interval poverenja za disperziju obeležja X.

6. Obeležje X ima raspodelu određenu gustinom:

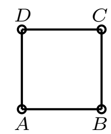
$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} x^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}} & , \quad x > 1 \\ 0 & , \quad x \leq 1 \end{cases}, \qquad \text{gde je } \alpha > 0.$$

   (a) Metodom maksimalne verodostojnost naći ocenu parametra α.

   (b) Za tako dobijenu ocenu ispitati postojanost i centriranost.

7. Neka je U slučajna promenljiva sa normalnom $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodelom, i neka je X_t, $t \in [0, \infty)$ slučajni proces definisan sa $X_t = a \sin(bt + U)$, gde su a i b pozitivne realne konstante. Naći očekivanje, disperziju i autokovarijansnu funkciju procesa X_t. Da li je X_t stacionaran slučajni proces?

8. Čestica se u diskretnim vremenskim trenucima kreće po temenima kvadrata $ABCD$ sa slike, pri čemu u svakom koraku može da pređe samo u susedno teme, i to na sledeći način: kreće se u pozitivnom matematičkom smeru sa verovatnoćom $\frac{2}{3}$ a u negativnom sa verovatnoćom $\frac{1}{3}$, pri čemu, ako dospe u teme A, kretanje prestaje (tj. čestica ostaje u temenu A).



   (a) Naći finalne verovatnoće, ako postoje.

   (b) Ako je na početku čestica bila u temenu B, koliko iznosi verovatnoća da će posle četiri koraka čestica biti (i ostati) u temenu A?

Rešenja:

1. Označimo sledeće događaje i izračunajmo njihove verovatnoće:

   H_1 - "*pismo ne pada ni jednom*": $\mathsf{P}(H_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$,
   H_2 - "*pismo pada bar jednom*": $\mathsf{P}(H_2) = 1 - \mathsf{P}(H_1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$,
   A - "*igrač izvlači* 2 *zelene kuglice*".

   (a) $\mathsf{P}(A \mid H_1) \overset{[1]}{=} \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$, $\qquad \mathsf{P}(A \mid H_2) \overset{[2]}{=} \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$.

   [1] - *Izvlače se dve kuglice zaredom bez vraćanja (kao kada odjednom izvlačimo dve od pet kuglica).*

   [2] - *Izvlače se dve kuglice jedna za drugom sa vraćanjem (dva nezavisna izvlačenja, sa jednakim verovatnoćama ishoda).*

   Događaji H_1 i H_2 čine potpun sistem događaja, pa po formuli totalne verovatnoće dobijamo:

   $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}(A \mid H_1) + \mathsf{P}(H_2)\,\mathsf{P}(A \mid H_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{25} = \frac{69}{200}$.

   (b) Tražimo verovatnoću $\mathsf{P}\left(H_1 \mid \overline{A}\right)$. Pošto je:

   $\mathsf{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathsf{P}(A) = \frac{131}{200}$, $\qquad \mathsf{P}\left(\overline{A} \mid H_1\right) = 1 - \mathsf{P}(A \mid H_1) = \frac{7}{10}$,

   na osnovu Bajesove formule dobijamo:

   $$\mathsf{P}\left(H_1 \mid \overline{A}\right) = \frac{\mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}\left(\overline{A} \mid H_1\right)}{\mathsf{P}\left(\overline{A}\right)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{7}{10}}{\frac{131}{200}} = \frac{35}{131}.$$

2. Raspodelu slučajne promenljive X možemo dobiti računajući odgovarajuće verovatnoće primenom klasične (Laplasove) definicije verovatnoće: za svako $k \in \mathcal{R}_X = \{0, 1, 2, 3\}$ je

   $$\mathsf{P}(X = k) = \frac{\binom{3}{k} \cdot \binom{3}{3-k}}{\binom{6}{3}} = \frac{\binom{3}{k} \cdot \binom{3}{3-k}}{20}, \quad \text{dakle} \quad X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} \end{pmatrix}.$$

   Naravno, skup mogućih vrednosti slučajne promenljive Y je takođe $\mathcal{R}_Y = \{0, 1, 2, 3\}$.

   (a) $\mathcal{R}_{X,Y} = \mathcal{R}_X \times \mathcal{R}_Y = \{(i, j) \mid i, j \in \{0, 1, 2, 3\}\}$.

Zajednički zakon raspodele vektora (X, Y) možemo naći na sledeći način:

$$\mathsf{P}(X = i, Y = j) = \mathsf{P}(X = i)\,\mathsf{P}(Y = j \mid X = i), \quad (i, j) \in \mathcal{R}_{X,Y}.$$

Za $j > i$ je očigledno

$\mathsf{P}(X = i, Y = j) = \mathsf{P}(X = i)\,\mathsf{P}(Y = j \mid X = i) = \mathsf{P}(X = i) \cdot 0 = 0,$

i dalje je

$\mathsf{P}(X = 0, Y = 0) = \mathsf{P}(X = 0)\,\mathsf{P}(Y = 0 \mid X = 0) = \frac{1}{20} \cdot 1 = \frac{1}{20},$

$\mathsf{P}(X = 1, Y = 0) = \mathsf{P}(X = 1)\,\mathsf{P}(Y = 0 \mid X = 1) = \frac{9}{20} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3}{8},$

$\mathsf{P}(X = 1, Y = 1) = \mathsf{P}(X = 1)\,\mathsf{P}(Y = 1 \mid X = 1) = \frac{9}{20} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{40},$

$\mathsf{P}(X = 2, Y = 0) = \mathsf{P}(X = 2)\,\mathsf{P}(Y = 0 \mid X = 2) = \frac{9}{20} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{16},$

$\mathsf{P}(X = 2, Y = 1) = \mathsf{P}(X = 2)\,\mathsf{P}(Y = 1 \mid X = 2) = \frac{9}{20} \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{8},$

$\mathsf{P}(X = 2, Y = 2) = \mathsf{P}(X = 2)\,\mathsf{P}(Y = 2 \mid X = 2) = \frac{9}{20} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{80},$

$\mathsf{P}(X = 3, Y = 0) = \mathsf{P}(X = 3)\,\mathsf{P}(Y = 0 \mid X = 3) = \frac{1}{20} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{25}{864},$

$\mathsf{P}(X = 3, Y = 1) = \mathsf{P}(X = 3)\,\mathsf{P}(Y = 1 \mid X = 3) = \frac{1}{20} \cdot 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{288},$

$\mathsf{P}(X = 3, Y = 2) = \mathsf{P}(X = 3)\,\mathsf{P}(Y = 2 \mid X = 3) = \frac{1}{20} \cdot 3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{288},$

$\mathsf{P}(X = 3, Y = 3) = \mathsf{P}(X = 3)\,\mathsf{P}(Y = 3 \mid X = 3) = \frac{1}{20} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{4320}.$

Dakle:

$X \backslash Y$	0	1	2	3	$\mathsf{P}(X = i)$
0	$\frac{1}{20}$	0	0	0	$\frac{1}{20}$
1	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{40}$	0	0	$\frac{9}{20}$
2	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{80}$	0	$\frac{9}{20}$
3	$\frac{25}{864}$	$\frac{5}{288}$	$\frac{1}{288}$	$\frac{1}{4320}$	$\frac{1}{20}$

(b) Zakon raspodele slučajne promenljive $Y \mid \{X = 2\}$ nalazimo na sledeći način:

$$\mathsf{P}(Y = j \mid X = 2) = \frac{\mathsf{P}(X=2, Y=j)}{\mathsf{P}(X=2)} = \frac{20}{9}\mathsf{P}(X = 2, Y = j), \quad j \in \mathcal{R}_Y.$$

Dakle:

$\mathsf{P}(Y = 0 \mid X = 2) = \frac{20}{9}\mathsf{P}(X = 2, Y = 0) = \frac{20}{9} \cdot \frac{5}{16} = \frac{25}{36},$

$\mathsf{P}(Y = 1 \mid X = 2) = \frac{20}{9}\mathsf{P}(X = 2, Y = 1) = \frac{20}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{18},$

$\mathsf{P}(Y = 2 \mid X = 2) = \frac{20}{9}\mathsf{P}(X = 2, Y = 2) = \frac{20}{9} \cdot \frac{1}{80} = \frac{1}{36},$

$\mathsf{P}(Y = 3 \mid X = 2) = \frac{20}{9}\mathsf{P}(X = 2, Y = 3) = \frac{20}{9} \cdot 0 = 0.$

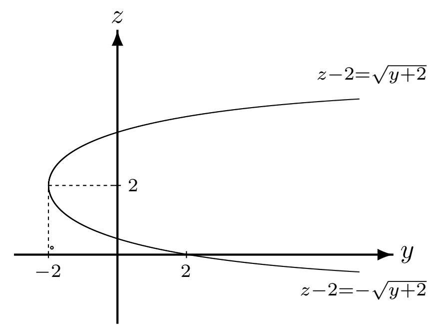
Prema tome, $Y \mid \{X = 2\} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{25}{36} & \frac{5}{18} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$, te dobijamo

$$\mathsf{E}(Y \mid X = 2) = \sum_{j=0}^{2} j\,\mathsf{P}(Y = j \mid X = 2) = 0 \cdot \frac{25}{36} + 1 \cdot \frac{5}{18} + 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{3}.$$

3. Gustina i funkcija raspodele slučajne promenljive $X : \mathcal{U}(2, 3)$ glase:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \notin [2, 3] \\ 1 & , \quad x \in [2, 3] \end{cases}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 2 \\ x - 2 & , \quad 2 < x \leq 3 \\ 1 & , \quad 3 < x \end{cases}.$$

(a) $F_{Y,Z}(y,z) = \mathsf{P}(Y < y, Z < z) = \mathsf{P}\left(X^2 - 2 < y, X + 2 < z\right) =$
$= \mathsf{P}\left(X^2 < y+2, X < z-2\right) = \ldots$
Događaj $X^2 < y+2$ je nemoguć za $y+2 \leq 0$, a za $y+2 > 0$ je ekvivalentan sa $-\sqrt{y+2} < X < \sqrt{y+2}$, te dobijamo sledeće slučajeve (vidi sliku):



(a.1) za $y \leq -2$: $F_{Y,Z}(y,z) = 0$;
(a.2) za $y > -2$:
$F_{Y,Z}(y,z) = \mathsf{P}\left(-\sqrt{y+2} < X < \sqrt{y+2}, X < z-2\right) =$
$= \mathsf{P}\left(-\sqrt{y+2} < X < \min\left\{\sqrt{y+2}, z-2\right\}\right) =$
$= F_X\left(\min\left\{\sqrt{y+2}, z-2\right\}\right) - F_X\left(-\sqrt{y+2}\right) =$
$\overset{[1]}{=} F_X\left(\min\left\{\sqrt{y+2}, z-2\right\}\right) = \ldots$

(a.2.1) za slučaj $\min\left\{\sqrt{y+2}, z-2\right\} \leq 2$
($\Leftrightarrow \quad \sqrt{y+2} \leq 2 \ \vee \ z-2 \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad (y \leq 2 \ \vee \ z \leq 4)$)
je: $F_{Y,Z}(y,z) = 0$;

(a.2.2) slučaj $2 < \min\left\{\sqrt{y+2}, z-2\right\} \leq 3$
($\Leftrightarrow \quad 2 < \sqrt{y+2} \ \wedge \ 2 < z-2 \ \wedge \ \sqrt{y+2} \leq 3 \ \vee \ z-2 \leq 3$)
možemo podeliti na sledeća dva podslučaja:

(a.2.2.1) za $\min\left\{\sqrt{y+2}, z-2\right\} = \sqrt{y+2}$ (pri čemu je $2 < \sqrt{y+2} \leq 3$ tj. $2 < y \leq 7$)
imamo: $F_{Y,Z}(y,z) = \sqrt{y+2} - 2$;

(a.2.2.2) za $\min\left\{\sqrt{y+2}, z-2\right\} = z-2$ (pri čemu je $2 < z-2 \leq 3$ tj. $4 < z \leq 5$)
imamo: $F_{Y,Z}(y,z) = (z-2) - 2 = z - 4$;

(a.2.3) za slučaj $3 < \min\left\{\sqrt{y+2}, z-2\right\}$
($\Leftrightarrow \quad \left(3 < \sqrt{y+2} \ \wedge \ 3 < z-2\right) \quad \Leftrightarrow \quad (7 < y \ \wedge \ 5 < z)$)
je: $F_{Y,Z}(y,z) = 1$.

Prema tome:
$F_{Y,Z}(y,z) =$
$$= \begin{cases} 0 & , \quad y \leq 2 \ \vee \ z \leq 4 \\ \sqrt{y+2} - 2 & , \quad 2 < y \leq 7 \ \wedge \ \sqrt{y+2} \leq z-2 \\ z-4 & , \quad 4 < z \leq 5 \ \wedge \ \sqrt{y+2} \geq z-2 \\ 1 & , \quad 7 < y \ \wedge \ 5 < z \end{cases}.$$

[1] - *Za* $\alpha \leq 0$ *je* $F_X(\alpha) = 0$ *(vidi raspodelu promenljive* X*).*

(b) $\mathsf{E}(X) = \frac{2+3}{5} = \frac{5}{2}, \quad \mathsf{D}(X) = \frac{(3-2)^2}{12} = \frac{1}{12}$,
$\mathsf{E}\left(X^2\right) = \mathsf{D}(X) + (\mathsf{E}(X))^2 = \frac{19}{3}$,
odakle je
$\mathsf{E}(Y) = \mathsf{E}\left(X^2-2\right) = \mathsf{E}\left(X^2\right) - \mathsf{E}(2) = \frac{19}{3} - 2 = \frac{13}{3}$,
$\mathsf{D}(Y) = \mathsf{D}\left(X^2-2\right) \overset{[2]}{=} \mathsf{D}\left(X^2\right) + \mathsf{D}(2) =$
$= \left(\mathsf{E}\left(\left(X^2\right)^2\right) - \left(\mathsf{E}\left(X^2\right)\right)^2\right) + 0 = \mathsf{E}\left(X^4\right) - \left(\frac{19}{3}\right)^2 =$
$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^4 \varphi_X(x)\,dx - \frac{361}{9} = \int\limits_{2}^{3} x^4 dx - \frac{361}{9} = \frac{211}{5} - \frac{361}{9} = \frac{94}{45}$.

[2] - *Slučajne promenljive X^2 i $C \equiv 2$ su nezavisne.*

4. Obeležimo sa X_i slučajnu promenljivu koja predstavlja indikator ispravnosti i - te olovke u pakovanju, pri čemu je njena raspodela data sa $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.04 & 0.96 \end{pmatrix}$, pri čemu $X_i = 0$ predstavlja događaj "*i - ta olovka je neispravna*", a $X_i = 1$ predstavlja događaj "*i - ta olovka je ispravna*". Slučajne promenljive X_i su nezavisne i sve imaju matematičko očekivanje $\mathsf{E}(X_i) = 0.96$ i disperziju $\mathsf{D}(X_i) = 0.96 \cdot 0.04 = 0.0384$. Slučajna promenljiva $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ predstavlja broj ispravnih olovaka u paketu od n olovaka i ona ima binomnu $\mathcal{B}(n, 0.96)$ raspodelu, ali ćemo zbog računskih teškoća pri nalaženju verovatnoće

$$\mathsf{P}(S_n < k) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \cdot 0.96^i \cdot 0.04^{n-i}$$

izračunati približnu vrednost pomoću centralne granične teoreme.

$\mathsf{E}(S_n) = \mathsf{E}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{E}(X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} 0.96 = 0.96\,n$,

$\mathsf{D}(S_n) = \mathsf{D}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{D}(X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} 0.0384 = 0.0384\,n$.

(a) $\mathsf{P}(S_{100} \geq 94) = 1 - \mathsf{P}(S_{100} < 94) =$
$= 1 - \mathsf{P}\left(\frac{S_{100} - \mathsf{E}(S_{100})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{100})}} < \frac{94 - \mathsf{E}(S_{100})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{100})}}\right) = 1 - \mathsf{P}\left(\frac{S_{100} - \mathsf{E}(S_{100})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{100})}} < \frac{94-96}{\sqrt{3.84}}\right) \overset{[1]}{\approx}$
$\approx 1 - \phi\left(\frac{94-96}{\sqrt{3.84}}\right) \approx 1 - \phi(-1.02) = \phi(1.02) \approx 0.8461$.

(b) Dakle, tražimo najmanje rešenje n nejednačine $\mathsf{P}(S_n > 100) \geq 0.95$:
$\mathsf{P}(S_n > 100) \geq 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \mathsf{P}(S_n \leq 100) \geq 0.95 \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad 1 - \mathsf{P}(S_n < 101) \geq 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{P}(S_n < 101) \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(\frac{S_n - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}} < \frac{101 - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}}\right) \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(\frac{S_n - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}} < \frac{101 - 0.96\,n}{\sqrt{0.0384\,n}}\right) \leq 0.05 \quad \overset{[1]}{\Leftrightarrow}$
$\Leftrightarrow \quad \phi\left(\frac{101 - 0.96\,n}{\sqrt{0.0384\,n}}\right) \preceq 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{101 - 0.96\,n}{\sqrt{0.0384\,n}} \preceq \phi^{-1}(0.05) \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \frac{101-0.96\,n}{\sqrt{0.0384\,n}} \preceq -\phi^{-1}(1-0.05) = -\phi^{-1}(0.95) \approx -1.645 \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad 0 \preceq 0.96\,n - 1.645\sqrt{0.0384\,n} - 101 \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad 0 \preceq 0.96\,n - 0.3224\sqrt{n} - 101 \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \left(0 \preceq 0.96\,t^2 - 0.3224\,t - 101 \ \wedge \ t = \sqrt{n}\right) \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad ((t \preceq -10.0906 \ \vee \ t \succeq 10.4264) \ \wedge \ t = \sqrt{n}) \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad (\sqrt{n} \preceq -10.0906 \ \vee \ \sqrt{n} \succeq 10.4264) \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \sqrt{n} \succeq 10.4264 \quad \Leftrightarrow \quad n \succeq 108.71.$

Dakle, potrebno je najmanje $n = 109$ olovaka.

[1] - *Raspodelu slučajne promenljive* $S_n^* = \frac{S_n - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}}$ *na osnovu centralne granične teoreme aproksimiramo normalnom raspodelom* $\mathcal{N}(0,1)$.

5. Veličina datog uzorka je $n = 2+3+8+12+10+2+2+1 = 40$. Obeležimo sa a_k i b_k redom leve i desne krajeve intervala I_k. Pri izračunavanju uzoračke aritmetičke sredine $\overline{X}_n$ i uzoračke disperzije $\overline{S}_n$ ćemo svaki interval I_k iz uzorka reprezentovati njegovom sredinom x_k, te tako dobijamo:

sredine intervala x_k	1	2	3	4	5	6	7	8
frekvencija m_k	2	3	8	12	10	2	2	1

$\overline{x}_{40} = \frac{1}{40}\sum\limits_{k=1}^{8} m_k\,x_k = 4.1,$

$\overline{s}_{40}^2 = \frac{1}{40}\sum\limits_{k=1}^{8} m_k\,(x_k - \overline{x}_{40})^2 = 2.24, \qquad \overline{s}_{40} = \sqrt{\overline{s}_{40}^2} \approx 1.4967.$

(a) Obeležje X ima normalnu $\mathcal{N}(m,\sigma)$ raspodelu, a tada slučajna promenljiva (statistika) $Z = \frac{\overline{X}_{40}-m}{\overline{S}_{40}}\sqrt{40-1}$ ima Studentovu t_{n-1} raspodelu, što znači da po zahtevu zadatka za matematičko očekivanje m obeležja X treba da važi:

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{\overline{X}_{40}-m}{\overline{S}_{40}}\sqrt{40-1}\right| < a\right) = 0.95. \qquad [*]$$

Broj a nalazimo koristeći $[*]$ i tablice Studentove raspodele na sledeći način:

$\mathsf{P}\left(\left|\frac{\overline{X}_{40}-m}{\overline{S}_{40}}\sqrt{40-1}\right| < a\right) = 0.95 \quad \stackrel{[1]}{\Leftrightarrow}$
$\Leftrightarrow \quad F_{t_{40-1}}(a) - F_{t_{40-1}}(-a) = 2F_{t_{39}}(a) - 1 = 0.95 \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad F_{t_{39}}(a) = \frac{1+0.95}{2} = 0.975 \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad a = t_{39;0.975} \approx t_{40;0.975} \approx 2.021.$

Pošto je $[*]$ ekvivalentno sa

$$\mathsf{P}\left(\overline{X}_{40} - t_{39;0.975}\frac{\overline{S}_{40}}{\sqrt{39}} \le m \le \overline{X}_{40} + t_{39;0.975}\frac{\overline{S}_{40}}{\sqrt{39}}\right) \approx 0.95,$$

to je traženi 95% interval poverenja za matematičko očekivanje m:

$I = \left[\overline{x}_{40} - t_{39;0.975}\frac{\overline{s}_{40}}{\sqrt{39}},\ \overline{x}_{40} + t_{39;0.975}\frac{\overline{s}_{40}}{\sqrt{39}}\right] = [3.61565,\ 4.58435].$

[1] - *Gustina Studentove raspodele je simetrična tj. parna funkcija, te je* $F_{t_{n-1}}(-a) = 1 - F_{t_{n-1}}(a)$.

(b) S obzirom da obeležje X ima normalnu $\mathcal{N}(m,\sigma)$ raspodelu, slučajna promenljiva (statistika) $\frac{40\overline{S}^2_{40}}{\sigma^2}$ ima χ^2_{40-1} raspodelu, što znači da po zahtevu zadatka za disperziju σ^2 obeležja X treba da važi:

$\mathsf{P}\left(\frac{40\overline{S}^2_{40}}{\sigma^2} \geq a\right) = 1 - \mathsf{P}\left(\frac{40\overline{S}^2_{40}}{\sigma^2} < a\right) = 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(\frac{40\overline{S}^2_{40}}{\sigma^2} < a\right) = 0.1,$

gde iz tablica χ^2 raspodele nalazimo da je

$$a = \chi^2_{40-1;0.1} = \chi^2_{39;0.1} \approx \chi^2_{30;0.1} \approx 21.$$

Pošto je

$$\mathsf{P}\left(\frac{40\overline{S}^2_{40}}{\sigma^2} \geq \chi^2_{39;0.1}\right) = 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(\sigma^2 \leq \frac{40\overline{S}^2_{40}}{\chi^2_{39;0.1}}\right) = 0.9,$$

to je traženi 90% jednostrani interval poverenja za disperziju σ^2:

$$I = \left[0,\ \frac{40\overline{s}^2_{40}}{\chi^2_{39;0.1}}\right] = \left[0,\ \frac{64}{15}\right] = [0,\ 4.26667].$$

6. (a) Funkcija verodostojnosti:

$$L(x_1,\dots,x_n;\alpha) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_X(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha^n}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}} & , \quad \forall i, x_i > 1 \\ 0 & , \quad \exists i, x_i \leq 1 \end{cases}.$$

Dakle, za $x_i > 1,\ i \in \{1,2,\dots,n\}$ i za $\alpha \in (0,1)$ je:

$$\ln L(x_1,\dots,x_n;\alpha) = -n\ln\alpha - \frac{1+\alpha}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln L(x_1,\dots,x_n;\alpha) = -\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i.$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln L(x_1,\dots,x_n;\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n}{\alpha} = \frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i.$$

Dakle, možemo uzeti ocenu: $\quad \hat{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i.$

(b) Centriranost:

$$\mathsf{E}(\hat{\alpha}) = \mathsf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}(\ln X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}(\ln X) =$$

$$= \frac{1}{n}\, n\,\mathsf{E}(\ln X) = \mathsf{E}(\ln X) = \int_{-\infty}^{\infty} \ln x\, \varphi_X(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int_{1}^{\infty} x^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}} \ln x\, dx \overset{[1]}{=} (-\ln x\ )\Big|_{1}^{\infty} + \int_{1}^{\infty} x^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}\, dx =$$

$$= (0-0) - \alpha x^{-\frac{1}{\alpha}}\Big|_{1}^{\infty} = -\alpha(0-1) = \alpha.$$

[1] - *Parcijalnom integracijom:* $\quad u = \ln x,\ \ dv = x^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}.$

Dakle, ocena $\hat{\alpha}$ jeste centrirana.

Postojanost: statistika $\hat{\alpha}$ je centrirana ocena parametra α pa postojanost možemo ispitati koristeći zakon velikih brojeva Čebiševa; za proizvoljno $\varepsilon > 0$ važi

$$\mathsf{P}\left(|\hat{\alpha}-\alpha|\geq\varepsilon\right)=\mathsf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i-\frac{1}{n}\,n\,\alpha\right|\geq\varepsilon\right)=$$
$$=\mathsf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha\right|\geq\varepsilon\right)=$$
$$\overset{[2]}{=}\mathsf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}\left(\ln X_i\right)\right|\geq\varepsilon\right).$$

Ocena je postojana jer na osnovu zakona velikih brojeva Čebiševa (pri čemu su ispunjeni svi potrebni uslovi za primenu tog zakona: X_i su nezavisne slučajne promenljive sa jednakim, ograničenim disperzijama) važi

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(|\hat{\alpha}-\alpha|>\varepsilon\right)=\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}\left(\ln X_i\right)\right|\geq\varepsilon\right)=0.$$

[2] - *Pri ispitivanju centriranosti smo videli da je*

$$\mathsf{E}\left(\ln X\right)=\mathsf{E}\left(\ln X_i\right)=\alpha.$$

7. Matematičko očekivanje:

$$m_X\left(t\right)=\mathsf{E}\left(a\,\sin\left(bt+U\right)\right)=a\,\mathsf{E}\left(\sin\left(bt+U\right)\right)=$$
$$=a\int_{-\infty}^{\infty}\sin\left(bt+u\right)\,\varphi_U\left(u\right)du=a\int_{-\infty}^{\infty}\sin\left(bt+u\right)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2}du=a\frac{\sin(bt)}{\sqrt{2\sqrt{e}}}.$$

Autokovarijansna funkcija:

$$\mathsf{K}_X\left(t,s\right)=\mathsf{E}\left(\left(X_t-m_X\left(t\right)\right)\left(X_s-m_X\left(s\right)\right)\right)=\mathsf{E}\left(X_tX_s\right)-m_X\left(t\right)m_X\left(s\right)=$$
$$=\mathsf{E}\left(a\,\sin\left(bt+U\right)\,a\,\sin\left(bs+U\right)\right)-a^2\,\frac{\sin(bt)\,\sin(bs)}{2\sqrt{e}}=$$
$$=a^2\,\mathsf{E}\left(\sin\left(bt+U\right)\,\sin\left(bs+U\right)\right)-a^2\,\frac{\sin(bt)\,\sin(bs)}{2\sqrt{e}}\overset{[1]}{=}$$
$$=a^2\,\mathsf{E}\left(\left(\sin\left(bt\right)\cos U+\cos\left(bt\right)\sin U\right)\left(\sin\left(bs\right)\cos U+\cos\left(bs\right)\sin U\right)\right)$$
$$-a^2\,\frac{\sin(bt)\,\sin(bs)}{2\sqrt{e}}=$$
$$=a^2\,\mathsf{E}\big(\sin\left(bt\right)\sin\left(bs\right)\cos^2U+\sin\left(b\left(t+s\right)\right)\sin U\cos U+$$
$$+\cos\left(bt\right)\cos\left(bs\right)\sin^2U\big)-a^2\,\frac{\sin(bt)\,\sin(bs)}{2\sqrt{e}}=$$
$$=a^2\,\sin\left(bt\right)\sin\left(bs\right)\mathsf{E}\left(\cos^2U\right)+a^2\,\sin\left(b\left(t+s\right)\right)\mathsf{E}\left(\sin U\cos U\right)+$$
$$+a^2\cos\left(bt\right)\cos\left(bs\right)\mathsf{E}\left(\sin^2U\right)-a^2\,\frac{\sin(bt)\,\sin(bs)}{2\sqrt{e}}=$$
$$=a^2\sin\left(bt\right)\sin\left(bs\right)\int_{-\infty}^{\infty}\cos^2u\,\varphi_U\left(u\right)du+$$
$$+\,a^2\sin\left(b\left(t+s\right)\right)\int_{-\infty}^{\infty}\sin u\cos u\,\varphi_U\left(u\right)du+$$
$$+\,a^2\cos\left(bt\right)\cos\left(bs\right)\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2u\,\varphi_U\left(u\right)du-a^2\,\frac{\sin(bt)\,\sin(bs)}{2\sqrt{e}}=$$
$$=a^2\sin\left(bt\right)\sin\left(bs\right)\int_{-\infty}^{\infty}\cos^2u\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2}du+$$

$$+ a^2 \sin(b(t+s)) \int_{-\infty}^{\infty} \sin u \cos u \, \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2} du +$$

$$+ a^2 \cos(bt)\cos(bs) \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 u \, \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2} du - a^2 \, \tfrac{\sin(bt)\,\sin(bs)}{2\sqrt{e}} =$$

$$= \tfrac{a^2}{2\sqrt{2e}} (e+1)\sin(bt)\sin(bs) + 0 +$$

$$+ \tfrac{a^2}{2\sqrt{2e}} (e-1)\cos(bt)\cos(bs) - a^2 \, \tfrac{\sin(bt)\,\sin(bs)}{2\sqrt{e}} =$$

$$= \tfrac{a^2}{2\sqrt{2e}} \left(\left(e+1-\sqrt{2e}\right)\sin(bt)\sin(bs) + (e-1)\cos(bt)\cos(bs)\right).$$

Disperzija:

$$\mathsf{D}_X(t) = \mathsf{K}_X(t,t) = \tfrac{a^2}{2\sqrt{2e}} \left(\left(e+1-\sqrt{2e}\right)\sin^2(bt) + (e-1)\cos^2(bt)\right) =$$

$$= \tfrac{a^2}{2\sqrt{2e}} \left(e + \left(1-\sqrt{2e}\right)\sin^2(bt) - \cos^2(bt)\right).$$

[1] - *Koristimo adicione formule za "sinus zbira".*

8. Na osnovu opisa dobijamo matricu prelaza za jedan korak:

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

(a) Finalne verovatnoće $p^* = [x\ y\ z\ u]$, $x,y,z,u \in (0,1)$ ne postoje jer u matrici P imamo $p_{1,1}(1) = 1$ i $p_{1,2}(1) = p_{1,3}(1) = p_{1,4}(1) = 0$, te u maticama P^n za svako $n \in \mathbb{N}$ takođe imamo $p_{1,1}(n) = 1$ i $p_{1,2}(n) = p_{1,3}(n) = p_{1,4}(n) = 0$.

Rešavanjem sistema

$$\begin{array}{l} [x,y,z,u]\cdot P = [x,y,z,u] \\ u = 1-x-y-z \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccccccc} x & + & \frac{1}{3}y & & + & \frac{2}{3}(1-x-y-z) & = & x \\ & & & \frac{1}{3}z & & & = & y \\ & & \frac{2}{3}y & & + & \frac{1}{3}(1-x-y-z) & = & z \\ & & & \frac{2}{3}z & & & = & 1-x-y-z \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & \frac{2}{3}z & = & 1 \\ & & -y & + & \frac{1}{3}z & = & 0 \\ & & & & -\frac{5}{9}z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \\ z=0 \\ u=0 \end{array}$$

dobili smo vektor verovatnoća: $\mathbf{p}^* = \overset{\begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array}}{[1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]}$, odnosno, nakon konačno mnogo promene položaja čestica dolazi i ostaje u temenu A, što se i moglo očekivati s obzirom na opis kretanja čestice.

(b) Matrica prelaza za 4 koraka:

$$P^4 = \left(P^2\right)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{57}{81} & \frac{8}{81} & 0 & \frac{16}{81} \\ \frac{65}{81} & 0 & \frac{16}{81} & 0 \\ \frac{69}{81} & \frac{4}{81} & 0 & \frac{8}{81} \end{bmatrix}.$$

Početna raspodela: $\mathbf{p}(0) = \begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$.

Raspodela nakon 4 koraka: $\mathbf{p}(4) = \mathbf{p}(0) \cdot P^4 = \begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{57}{81} & \frac{8}{81} & 0 & \frac{16}{81} \end{bmatrix} \end{array}$,

tako da je tražena verovatnoća $p_A(4) = \frac{57}{81}$.

07.09.2000.

1. Fabrika pravi tri modela patent - olovaka. Svaki dan se napravi 1000 olovaka modela M_1 i to podjednak broj olovaka bele i crvene boje. Olovaka modela M_2 se pravi 600 i to samo u beloj boji, a olovaka modela M_3 se pravi 400 i to u podjednakom broju olovaka bele, crvene, plave i zelene boje.

   (a) Koliko iznosi verovatnoća da je slučajno izabrana olovka bele boje?

   (b) Ako je slučajno izabrana olovka bele boje, koliko iznosi verovatnoća da je ona tipa M_2?

2. Bacaju se dve homogene kocke čije su stranice numerisane brojevima $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Naći očekivanu vrednost slučajne promenljive Y koja predstavlja zbir parnih brojeva koji su dobijeni pri bacanju, s tim što smatramo da je zbir 0 ako su na obe kockice pali neparni brojevi.

3. Slučajni vektor (X, Y) ima gustinu

$$\varphi_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} Kx^2y^2 & , \quad (x, y) \in T \\ 0 & , \quad (x, y) \notin T \end{cases},$$

   gde je T skup tačaka koje pripadaju unutrašnjosti i rubu trougla čija su temena $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ i $C(1, 1)$. Odrediti konstantu K i naći raspodelu slučajne promenljive $Z = X + Y$.

4. U proseku svaki treći prolaznik pored kioska kupi novine. Koliko ljudi treba da prođe pored kioska, pa da sa verovatnoćom 0.95 bude prodato bar 100 primeraka novina (odgovor naći primenom centralne granične teoreme).

5. Neka obeležje X predstavlja broj studenata koji u intervalu od 20 sekundi uđu na fakultet. Izvršeno je 200 brojanja ulazaka, i rezultati su predstavljeni u sledećoj tabeli:

broj ulazaka	0	1	2	3	4	5
broj merenja	100	65	22	6	4	3

Sa pragom značajnosti $\alpha = 0.005$ testirati hipotezu da obeležje X ima Poasonovu raspodelu.

6. Slučajna promenljiva X ima uniformnu raspodelu $\mathcal{U}(0,b)$, $b>0$. Na osnovu prostog uzorka obima n dobijena je ocena $\hat{b} = 2\,\overline{X}_n$.

   (a) Ispitati da li je navedena ocena centrirana.

   (b) Ispitati postojanost (stabilnost) ocene.

7. 3 bela i 3 plava listića su raspoređeni u dve kutije, pri čemu su 2 listića stavljena u prvu kutiju, a 4 listića su stavljena u drugu kutiju. Izvodi se sledeći eksperiment: vadi se na slučajan način po jedan listić iz svake kutije, i zamene im se mesta u kutijama. Eksperiment se ponovi 3 puta, i prati se broj belih listića u prvoj kutiji. Ako su listići na početku razmešteni slučajnim izborom, koliko iznosi verovatnoća da će se nakon 3 premeštanja u prvoj kutiji nalaziti samo beli listići?

8. Slučajne promenljive X i Y su nezavisne, pri čemu je gustina slučajne promenljive X

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{4}{3} - x^2 & , \quad x \in [0,1] \\ 0 & , \quad x \notin [0,1] \end{cases},$$

a slučajna promenljiva Y ima uniformnu $\mathcal{U}(0,\pi)$ raspodelu. Odrediti matematičko očekivanje, autokorelacionu funkciju i disperziju slučajnog procesa $U_t = X\cos(t-Y)$, $t \in \mathbb{R}$.

Rešenja:

1. Oznake događaja:

   B - "*slučajno izabrana olovka je bele boje*";

   H_i - "*slučajno izabrana olovka je tipa* M_i, $i \in \{1,2,3\}$".

   Događaji H_i čine potpun sistem događaja, a po uslovu zadatka važi (ukupno se proizvodi 2000 olovaka):

   $\mathsf{P}(H_1) = \frac{1000}{2000} = \frac{1}{2}$, $\mathsf{P}(H_2) = \frac{600}{2000} = \frac{3}{10}$, $\mathsf{P}(H_3) = \frac{400}{2000} = \frac{1}{5}$,

   $\mathsf{P}(B \mid H_1) = \frac{1}{2}$, $\mathsf{P}(B \mid H_2) = 1$, $\mathsf{P}(B \mid H_3) = \frac{1}{4}$.

   (a) Koristeći formulu totalne verovatnoće dobijamo:

   $$\mathsf{P}(B) = \sum_{i=1}^{3} \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(B \mid H_i) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\cdot 1 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{5}.$$

   (b) Traženu verovatnoću dobijamo na osnovu Bajesove formule:

   $$\mathsf{P}(H_2 \mid B) = \frac{\mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(B \mid H_2)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{\frac{3}{10}\cdot 1}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}.$$

2. Neka su X_1 i X_2 slučajne promenljive koje predstavljaju redom brojeve dobijene na prvoj i drugoj kockici, pri čemu za sve $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ važi $\mathsf{P}(X_1 = i) = \mathsf{P}(X_2 = i) = \frac{1}{6}$. Pošto su slučajne promenljive X_1 i X_2 nezavisne, sledi $\mathsf{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \mathsf{P}(X_1 = i)\,\mathsf{P}(X_2 = j) = \frac{1}{36}$.

   Neka je Y slučajna promenljiva koja predstavlja zbir dobijenih parnih brojeva. Njene moguće vrednosti su $0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$, i one se mogu dobiti sa sledećim verovatnoćama:

   $\mathsf{P}(Y = 0) = \mathsf{P}((X_1, X_2) \in \{(i,j) \mid i,j \in \{1,3,5\}\}) = \frac{9}{36}$,

   $\mathsf{P}(Y = 2) = \mathsf{P}((X_1, X_2) \in \{(2,j) \mid j \in \{1,3,5\}\} \cup \{(i,2) \mid i \in \{1,3,5\}\}) = \frac{6}{36}$,

   $\mathsf{P}(Y = 4) =$
   $= \mathsf{P}((X_1, X_2) \in \{(2,2)\} \cup \{(4,j) \mid j \in \{1,3,5\}\} \cup \{(i,4) \mid i \in \{1,3,5\}\}) = \frac{7}{36}$,

   $\mathsf{P}(Y = 6) =$
   $= \mathsf{P}((X_1, X_2) \in \{(2,4),(4,2)\} \cup \{(6,j) \mid j \in \{1,3,5\}\} \cup \{(i,6) \mid i \in \{1,3,5\}\})$
   $= \frac{8}{36}$,

   $\mathsf{P}(Y = 8) = \mathsf{P}((X_1, X_2) \in \{(2,6),(4,4),(6,2)\}) = \frac{3}{36}$,

   $\mathsf{P}(Y = 10) = \mathsf{P}((X_1, X_2) \in \{(4,6),(6,4)\}) = \frac{2}{36}$,

   $\mathsf{P}(Y = 12) = \mathsf{P}((X_1, X_2) \in \{(6,6)\}) = \frac{1}{36}$.

   Dakle, slučajna promenljiva Y ima zakon raspodele:

   $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{7}{36} & \frac{2}{9} & \frac{1}{12} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} \end{pmatrix},$$

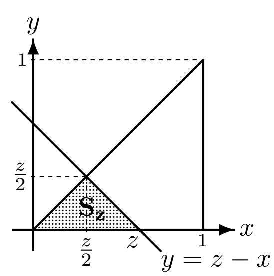
   a njena očekivana vrednost je

   $\mathsf{E}(Y) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 6 \cdot \frac{2}{9} + 8 \cdot \frac{1}{12} + 10 \cdot \frac{1}{18} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 4.$

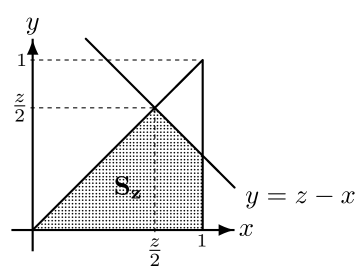
3. Iz $1 = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi_{X,Y}(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x Kx^2y^2dy \right) dx = \frac{K}{18}$ sledi da je $K = 18$.

   $F_Z(z) = \mathsf{P}(Z < z) = \mathsf{P}(X + Y < z) = \mathsf{P}(Y < z - X) = \ldots$

   Neka je $S_z = \{(x,y) \in T \mid y \le z - x\}$.



slika b



slika c

   $F_Z(z) = \mathsf{P}((X,Y) \in S_z) = \iint\limits_{S_z} \varphi_{X,Y}(x,y)\,dxdy = \ldots$

   (a) za $z \le 0$ je $S_z = \emptyset$, te je: $F_Z(z) = 0$;

(b) za $0 < z \le 1$ je (vidi sliku b):

$$F_Z(z) = \int\limits_0^{\frac{z}{2}} \left(\int\limits_y^{z-y} 18x^2y^2dx \right) dy = \tfrac{z^6}{20};$$

(c) za $1 < z \le 2$ je (vidi sliku c):

$$F_Z(z) = \int\limits_0^{\frac{z}{2}} \left(\int\limits_0^{x} 18x^2y^2dy \right) dx + \int\limits_{\frac{z}{2}}^{1} \left(\int\limits_0^{z-x} 18x^2y^2dy \right) dx =$$

$$= -\tfrac{1}{20}z^6 + 2z^3 - \tfrac{9}{2}z^2 + \tfrac{18}{5}z - 1;$$

(d) za $z > 2$ je $S_z = T$, te je: $F_Z(z) = 1$.

4. Neka je X_i slučajna promenljiva koja predstavlja indikator događaja "*i-ti prolaznik je kupio novine*". Ova slučajna promenljiva ima zakon raspodele $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ gde $X_i = 0$ predstavlja događaj "*i-ti prolaznik nije kupio novine*", a $X_i = 1$ predstavlja događaj "*i-ti prolaznik je kupio novine*". Tada slučajna promenljiva $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ predstavlja broj kupljenih novina za vreme dok n ljudi prođe pored kioska, tako da treba rešiti po n jednačinu $\mathsf{P}(S_n \ge 100) = 0.95$. Pošto su slučajne promenljive X_i nezavisne i pri tome je

$$\mathsf{E}(X_i) = 0 \cdot \tfrac{2}{3} + 1 \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3},$$

$$\mathsf{D}(X_i) = \mathsf{E}\left(X_i^2\right) - \mathsf{E}^2(X_i) = \left(0^2 \cdot \tfrac{2}{3} + 1^2 \cdot \tfrac{1}{3}\right) - \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 = \tfrac{2}{9},$$

$$\mathsf{E}(S_n) = \mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}(X_i) = n\mathsf{E}(X_1) = \tfrac{1}{3}n,$$

$$\mathsf{D}(S_n) = \mathsf{D}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{D}(X_i) = n\mathsf{D}(X_1) = \tfrac{2}{9}n.$$

Slučajna promenljiva $S_n^* = \frac{S_n - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}}$ ima približno normalnu $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu, te tako dobijamo:

$$\mathsf{P}(S_n \ge 100) = 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \mathsf{P}(S_n < 100) = 0.95 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \mathsf{P}\left(S_n - \tfrac{1}{3}n < 100 - \tfrac{1}{3}n\right) = 0.95 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \mathsf{P}\left(\frac{S_n - \frac{1}{3}n}{\sqrt{\frac{2}{9}n}} < \frac{100 - \frac{1}{3}n}{\sqrt{\frac{2}{9}n}}\right) = 0.95 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \mathsf{P}\left(S_n^* < \frac{100 - \frac{1}{3}n}{\sqrt{\frac{2}{9}n}}\right) = 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(S_n^* < \frac{100 - \frac{1}{3}n}{\sqrt{\frac{2}{9}n}}\right) = 0.05 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \phi\left(\frac{100 - \frac{1}{3}n}{\sqrt{\frac{2}{9}n}}\right) \approx 0.05 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{100 - \frac{1}{3}n}{\sqrt{\frac{2}{9}n}} \approx \phi^{-1}(0.05) = -\phi^{-1}(1 - 0.05) = -\phi^{-1}(0.95) \approx -1.645 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 100 - \tfrac{1}{3}n \approx -1.645\sqrt{\tfrac{2}{9}n} \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{3}n - 1.645\tfrac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{n} - 100 \approx 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad n - 2.3264\sqrt{n} - 300 \approx 0 \quad \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \quad \left(t^2 - 2.3264t - 300 \approx 0 \ \wedge \ t = \sqrt{n}\right) \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad ((t \approx -16.1963 \ \vee \ t \approx 18.5227) \ \wedge \ t = \sqrt{n}) \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{n} \approx 18.5227 \quad \Leftrightarrow \quad n \approx 343.091.$

Prema tome, potrebno je da prođe približno 343 potencijalna kupca.

5. Da bi smo našli verovatnoće $p_m = \mathsf{P}(X = m)$, $m \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ za slučajnu promenljivu $X : \mathcal{P}(\lambda)$, moramo najpre na osnovu uzorka oceniti parametar λ. Pošto je kod Poasonove raspodele $\mathsf{E}(X) = \lambda$, a poznato je da sa uzoračkim matematičkim očekivanjem dobijamo "dobru" ocenu matematičkog očekivanja obeležja, to parametar λ možemo oceniti sa:

   $\hat{\lambda} = \overline{x}_{200} = \frac{1}{200} \sum\limits_{i=1}^{200} x_i =$

   $\quad = \frac{1}{200}(100 \cdot 0 + 65 \cdot 1 + 22 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 5) = 0.79,$

   gde je $n = 100 + 65 + 22 + 6 + 4 + 3 = 200$ obim uzorka.

   Prema tome, testiraćemo hipotezu da obeležje X ima sledeći zakon raspodele: $\mathsf{P}(X = k) = \frac{0.79^k}{k!} e^{-0.79}$, $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

   Poslednje dve grupe iz uzorka spajamo u jednu (da bi u svakoj grupi imali bar 5 elemenata), a zatim za svaku grupu izračunavamo odgovarajuće teorijske verovatnoće:

   $p_0 = \mathsf{P}(X = 0) = \frac{0.79^0}{0!} e^{-0.79} \approx 0.4538,$

   $p_1 = \mathsf{P}(X = 1) = \frac{0.79^1}{1!} e^{-0.79} \approx 0.3585,$

   $p_2 = \mathsf{P}(X = 2) = \frac{0.79^2}{2!} e^{-0.79} \approx 0.1416,$

   $p_3 = \mathsf{P}(X = 3) = \frac{0.79^3}{3!} e^{-0.79} \approx 0.0373,$

   $p_4 = \mathsf{P}(X \geq 4) = 1 - \mathsf{P}(X < 4) = 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3) \approx 0.0087.$

   Dakle, χ^2 test primenjujemo na sledeće podatke:

broj ulazaka (k)	0	1	2	3	$4, 5, \ldots$
broj merenja (m_k)	100	65	22	6	7
teorijeske verovatnoće (p_k)	0.4538	0.3585	0.1416	0.0373	0.0087

   Za vrednost statistike $Z = \sum\limits_{k=0}^{4} \frac{(m_k - 200\,p_k)^2}{200\,p_k}$ dobijamo $z \approx 19.1595$.

   Pošto je $\chi^2_{\alpha;5-1-1} = \chi^2_{0.005;3} \approx 12.8 < z$ sledi da odbacujemo hipotezu o tome da obeležje X ima Poasonovu raspodelu.

6. Vidi zadatak 6 u ispitnom roku 11.01.1999.

7. U prvoj kutiji se u svakom trenutku $n \in \mathbb{N}$ može nalaziti 0, 1 ili 2 bela listića, tj. ovo su moguća stanja $S(n)$ opisanog sistema. Odgovarajuće verovatnoće početnog stanja sistema su $p_i^0 = \frac{\binom{3}{i} \cdot \binom{3}{2-i}}{\binom{6}{2}}$, $i \in \{0, 1, 2\}$ te tako dobijamo vektor početnih verovatnoća:

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{p}(0) = \begin{bmatrix} p_0^0 & p_1^0 & p_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Prelazne verovatnoće $p_{i,j} = \mathsf{P}(S(n) = j \mid S(n-1) = i)$, $i, j \in \{0, 1, 2\}$ izračunavamo na osnovu opisa eksperimenta:

$p_{0,0} = 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, $\quad p_{0,1} = 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$, $\quad p_{0,2} = 0$,

$p_{1,0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $\quad p_{1,1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $\quad p_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$,

$p_{2,0} = 0$, $\quad p_{2,1} = 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$, $\quad p_{2,2} = 1 \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{4}$,

odnosno matrica prelaza za jedno premeštanje :

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Matrica prelaza za 3 premeštanja:

$$P^3 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{13}{64} & \frac{39}{64} & \frac{12}{64} \\ \frac{13}{64} & \frac{38}{64} & \frac{13}{64} \\ \frac{12}{64} & \frac{39}{64} & \frac{13}{64} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Sada dobijamo verovatnoće stanja sistema nakon 3 razmeštanja listića:

$$\mathbf{p}^3 = \mathbf{p}(3) = \mathbf{p}^0 \cdot P^3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \end{array},$$

što znači da će se posle 3 razmeštanja u prvoj kutiji nalaziti 2 bela listića sa verovatnoćom $p_2^3 = \frac{1}{5}$.

8. Matematičko očekivanje:

$$m_U(t) = \mathsf{E}(X \cos(t - Y)) \overset{[1]}{=} \mathsf{E}(X)\,\mathsf{E}(\cos(t - Y)) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\,\varphi_X(x)\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \cos(t - y)\ \varphi_Y(y)\,dy =$$
$$= \int_0^1 x\ \left(\tfrac{4}{3} - x^2\right) dx \cdot \int_0^{\pi} \cos(t - y)\ \tfrac{1}{\pi} dy =$$
$$= \left(\tfrac{4}{3} \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^3 dx\right) \cdot \tfrac{1}{\pi} \int_t^{t-\pi} (-\cos z)\,dz = \tfrac{5}{6\pi} \sin t.$$

Autokorelaciona funkcija:

$$\mathsf{R}_U(t, s) = \mathsf{E}(U_t U_s) = \mathsf{E}\left(X^2 \cos(t - Y) \cos(s - Y)\right) \overset{[1]}{=}$$
$$= \mathsf{E}\left(X^2\right) \mathsf{E}(\cos(t - Y) \cos(s - Y)) =$$
$$= \int_0^1 x^2 \left(\tfrac{4}{3} - x^2\right) dx \cdot \tfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(t - y) \cos(s - y)\,dy = \tfrac{11}{90} \cos(s - t).$$

Disperzija:

$$\mathsf{D}_U(t) = \mathsf{K}_U(t, t) = \mathsf{R}_U(t, t) - m^2(t) =$$
$$= \tfrac{11}{90} \cos 0 - \tfrac{25}{36\pi^2} \sin^2 t = \tfrac{11}{90} - \tfrac{25}{36\pi^2} \sin^2 t.$$

[1] - *Iz nezavisnosti slučajnih promenljivih X i Y sledi nezavisnost slučajnih promenljivih X i $\cos(t - Y)$.*

29.09.2000.

1. Iz intervala $(0,3)$ biraju se brojevi x i y.

   (a) Izračunati verovatnoću da je za izabrane brojeve zbir manji od 3 i maksimum manji od 2.

   (b) Ako je maksimum izabranih brojeva manji od 2, izračunati verovatnoću da je minimum izabranih brojeva veći od 1.

2. Kontrolor ima na stolu 4 proizvoda čiji kvalitet treba da proveri. Poznato je da svaki proizvod može biti neispravan sa verovatnoćom 0.1, nezavisno od drugih proizvoda. Kontrolor vrši proveru dok ne otkrije 2 neispravna proizvoda, a ako se to ne desi, on će proveriti sva 4 proizvoda. Neka je X broj proverenih proizvoda, a Y broj otkrivenih neispravnih proizvoda. Naći raspodelu dvodimenzionalne slučajne promenljive (X,Y), kao i matematičko očekivanje slučajne promenljive $Z = 2X + Y$.

3. Posmatramo prizmu čija je baza kvadrat stranice X, a visina Y. Slučajne promenljive X i Y su nezavisne i imaju uniformnu $\mathcal{U}(1,2)$ i $\mathcal{U}(2,3)$ raspodelu, redom.

   (a) Naći gustinu slučajne promenljive (B,V) gde je B površina baze, a V zapremina prizme.

   (b) Kolika je očekivana zapremina prizme?

4. U jednoj igri igrač osvaja 50 poena sa verovatnoćom 0.5, 10 poena sa verovatnoćom 0.3 i -100 poena sa verovatnoćom 0.2 (dakle, gubi 100 poena sa verovatnoćom 0.2).

   (a) Ako je igrač odigrao 100 igara, koliko iznosi verovatnoća da je osvojio bar 900 poena?

   (b) Koliko igara treba da odigra, pa da sa verovatnoćom 0.95 osvoji bar 1000 poena?

5. Fabrika pakuje po 4 proizvoda u jednu kutiju. Nasumice je uzeto 50 kutija i za svaku je proveren broj neispravnih proizvoda. Dobijeni rezultati prikazani su u tabeli:

br. neispravnih proizvoda	0	1	2	3	4
br. kutija	12	18	14	4	2

   Koristeći χ^2 test uz prag značajnosti $\alpha = 0.01$, ispitati da li su podaci saglasni sa hipotezom da se radi o uzorku iz populacije sa binomnom raspodelom.

6. Data je raspodela obeležja X:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ \frac{1}{\theta} & \frac{\theta-1}{\theta}\cdot\frac{1}{\theta} & \left(\frac{\theta-1}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{\theta} & \left(\frac{\theta-1}{\theta}\right)^3\cdot\frac{1}{\theta} & \cdots \end{pmatrix}, \qquad \theta > 1.$$

Na osnovu uzorka obima n metodom maksimalne verodostojnosti oceniti parametar θ. Ispitati centriranost i postojanost dobijene ocene.

7. Posmatraju se tri izborna mesta I_1, I_2 i I_3. Pored izborne komisije postoji i kontrolor koji obilazi izborna mesta i proverava regularnost izbora. Verovatnoća da će kontrolor otkriti neregularnost na izbornom mestu I_1 je 0.5, na izbornom mestu I_2 je 0.3 i na izbornom mestu I_3 je 0.6.

   Ako kontrolor na I_1 otkrije neregularnost, sa verovatnoćom 0.5 ostaje na I_1 ili sa jednakim verovatnoćama odlazi na I_2 ili I_3. Ako na I_1 ne otkrije neregularnost, sigurno napušta I_1 i sa tri puta većom verovatnoćom odlazi na I_2 nego na I_3.

   Ako na I_2 ne otkrije neregularnost, onda podjednako verovatno odlazi na I_1 ili I_3, a I_2 sigurno napušta. Ako otkrije neregularnost na I_2, onda na I_2 ostaje dva puta većom verovatnoćom nego što odlazi na I_1 ili I_3 (odlazak na I_1 ili I_3 je podjednako verovatan).

   Ako na I_3 otkrije neregularnost, onda na I_3 sigurno i ostaje. Ako na I_3 ne otkrije neregularnost, onda sa dva puta većom verovatnoćom odlazi na I_1 ili I_2 nego što ostaje na I_3 (odlasci na I_1 i I_2 su jednako verovatni, i ta je verovatnoća dva puta veća od verovatnoće da ostane na I_3).

   Vreme prelaska sa jednog izbornog mesta na drugo je zanemarljivo malo.

   (a) Sastaviti matricu prelaza za jedan korak.

   (b) Ako na početku podjednako verovatno bira izborno mesto I_1 ili I_3 a sa dva puta manjom verovatnoćom izborno mesto I_2, izračunati verovatnoće sa kojima će kontrolor nakon jednog obilaska nalaziti na pojedinim izbornim mestima.

8. Dat je slučajan proces $X_t = U\cos(\omega t)$, $t \in \mathbb{R}$, gde je U slučajna promenljiva za koju je $\mathsf{E}(U) = 2$ i $\mathsf{D}(U) = 9$. Naći matematičko očekivanje, autokorelacionu funkciju i disperziju slučajnog procesa X_t. Da li je X_t stacionaran slučajan proces?

Rešenja:

1. Zadatak možemo rešiti primenom geometrijske interpretacije verovatnoće. Skup svih mogućih podjednako verovatnih elementarnih ishoda je:

$$\Omega = \{\,(x,y) \mid x,y \in (0,3)\}\,.$$

   Sa $\mathcal{P}(O)$ ćemo označiti površinu oblasti O.

   (a) Događaj "*za izbrane brojeve zbir je manji od* 3 *i maksimum je manji od* 2" možemo predstaviti kao:

$$\begin{aligned} A &= \{\,(x,y) \mid \max\{x,y\} < 2 \ \wedge\ x+y < 3\} = \\ &= \{\,(x,y) \mid x < 2 \ \wedge\ y < 2 \ \wedge\ x+y < 3\}\,. \end{aligned}$$

   Koristeći sliku 1 lako nalazimo da je: $\mathsf{P}(A) = \dfrac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(\Omega)} = \dfrac{\frac{7}{2}}{9} = \dfrac{7}{18}.$

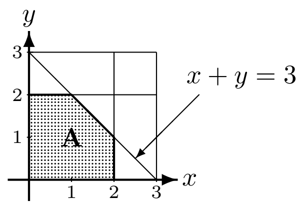
(b) Događaj "*maksimum izabranih brojeva je manji od* 2" možemo predstaviti kao

$$B = \{(x,y) \mid \max\{x,y\} < 2\} = \{(x,y) \mid x < 2 \ \wedge \ y < 2\},$$

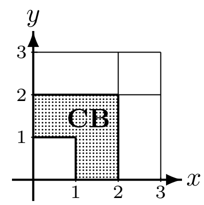
a događaj "*minimum izabranih brojeva je veći od* 1" možemo predstaviti kao

$$C = \{(x,y) \mid \min\{x,y\} > 1\} = \{(x,y) \mid x > 1 \ \wedge \ y > 1\}.$$

Koristeći sliku 2 lako nalazimo da je: $\quad \mathsf{P}(C \mid B) = \frac{\mathcal{P}(CB)}{\mathcal{P}(B)} = \frac{3}{4}$.



slika 1



slika 2

2. Skupovi mogućih vrednosti slučajnih promenljivih X i Y su

$$\mathcal{R}_X = \{2,3,4\} \quad \text{i} \quad \mathcal{R}_Y = \{0,1,2\}.$$

Označimo sa $A_i,\ i \in \{1,2,3,4\}$ događaj "*i-ti kontrolisani proizvod je ispravan*", pri čemu je $\mathsf{P}(A_i) = 0.9$ i $\mathsf{P}\left(\overline{A}_i\right) = 0.1$.

Na osnovu opisanih uslova dobijamo

$\mathsf{P}(X=2,Y=0) = \mathsf{P}(X=2,Y=1) = 0,$

$\mathsf{P}(X=3,Y=0) = \mathsf{P}(X=3,Y=1) = 0,$

$\mathsf{P}(X=2,Y=2) = \mathsf{P}\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\right) = \mathsf{P}\left(\overline{A}_1\right)\mathsf{P}\left(\overline{A}_2\right) = 0.1^2 = 0.01,$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X=3,Y=2) &= \mathsf{P}\left(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3\right) = \\ &= \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}\left(\overline{A}_2\right)\mathsf{P}\left(\overline{A}_3\right) + \mathsf{P}\left(\overline{A}_1\right)\mathsf{P}(A_2)\mathsf{P}\left(\overline{A}_3\right) = 2\cdot 0.9\cdot 0.1^2 = 0.018,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X=4,Y=0) &= \mathsf{P}(A_1A_2A_3A_4) = \\ &= \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2)\mathsf{P}(A_3)\mathsf{P}(A_4) = 0.9^4 = 0.6561,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X=4,Y=1) &= \mathsf{P}\left(A_1A_2A_3\overline{A}_4 + A_1A_2\overline{A}_3A_4 + A_1\overline{A}_2A_3A_4 + \overline{A}_1A_2A_3A_4\right) = \\ &= \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2)\mathsf{P}(A_3)\mathsf{P}\left(\overline{A}_4\right) + \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2)\mathsf{P}\left(\overline{A}_3\right)\mathsf{P}(A_4) + \\ &\quad + \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}\left(\overline{A}_2\right)\mathsf{P}(A_3)\mathsf{P}(A_4) + \mathsf{P}\left(\overline{A}_1\right)\mathsf{P}(A_2)\mathsf{P}(A_3)\mathsf{P}(A_4) = \\ &= 4\cdot 0.9^3\cdot 0.1 = 0.2916,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X=4,Y=2) &= \mathsf{P}\left(A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4 + A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4 + \overline{A}_1A_2A_3\overline{A}_4\right) = \\ &= \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2)\mathsf{P}\left(\overline{A}_3\right)\mathsf{P}\left(\overline{A}_4\right) + \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}\left(\overline{A}_2\right)\mathsf{P}(A_3)\mathsf{P}\left(\overline{A}_4\right) + \\ &\quad + \mathsf{P}\left(\overline{A}_1\right)\mathsf{P}(A_2)\mathsf{P}(A_3)\mathsf{P}\left(\overline{A}_4\right) = 3\cdot 0.9^2\cdot 0.1^2 = 0.0243.\end{aligned}$$

Dakle, dobili smo zakon raspodele slučajnog vektora (X,Y), a zatim dobijamo marginalne zakone raspodela slučajnih promenljivih X i Y:

$$\mathsf{P}(X=k) = \sum_{i=0}^{2} \mathsf{P}(X=k, Y=i),\ k \in \{2,3,4\},$$

$$\mathsf{P}(Y=k) = \sum_{i=2}^{4} \mathsf{P}(X=i, Y=k),\ k \in \{0,1,2\},$$

$X \backslash Y$	0	1	2	
2	0	0	0.01	0.01
3	0	0	0.018	0.018
4	0.6561	0.2916	0.0243	0.972
	0.6561	0.2916	0.0523	1

$$X : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0.01 & 0.018 & 0.972 \end{pmatrix}, \qquad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.6561 & 0.2916 & 0.0523 \end{pmatrix}.$$

Sada dobijamo

$$\mathsf{E}(X) = 2 \cdot 0.01 + 3 \cdot 0.018 + 4 \cdot 0.972 = 3.962,$$

$$\mathsf{E}(Y) = 0 \cdot 0.6561 + 1 \cdot 0.2916 + 2 \cdot 0.0523 = 0.3962,$$

$$\mathsf{E}(Z) = \mathsf{E}(2X + Y) = 2\mathsf{E}(X) + \mathsf{E}(Y) = 8.3202.$$

3. $X : \mathcal{U}(1,2)$ $\qquad$ $Y : \mathcal{U}(2,3)$

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in (1,2) \\ 0\,, & x \notin (1,2) \end{cases}, \qquad \varphi_Y(y) = \begin{cases} 1\,, & y \in (2,3) \\ 0\,, & y \notin (2,3) \end{cases}.$$

X i Y su nezavisne slučajne promenljive, te je

$$\varphi_{X,Y}(x,y) = \varphi_X(x)\,\varphi_Y(y) = \begin{cases} 1\,, & (x,y) \in D \\ 0\,, & (x,y) \notin D \end{cases},$$

gde je $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in (1,2) \;\land\; y \in (2,3) \right\}$ (vidi sliku 1), odnosno D je unutrašnjost kvadrata ograničenog dužima

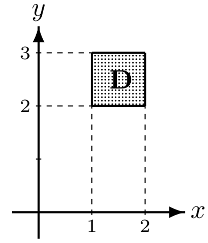
$$l_1 = \{ (1,y) \mid y \in [2,3] \}, \qquad l_2 = \{ (2,y) \mid y \in [2,3] \},$$
$$l_3 = \{ (x,2) \mid x \in [1,2] \}, \qquad l_4 = \{ (x,3) \mid x \in [1,2] \}.$$

(a) Posmatrajmo transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definisanu sa

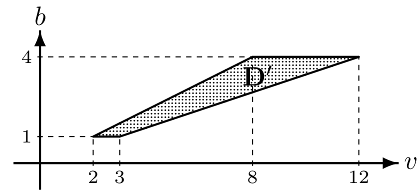
$$f(X,Y) = (B,V) = \left(X^2, X^2 Y \right).$$

Oblast D ograničena dužima l_1, l_2, l_3, l_4 se transformacijom $f(x,y) = \left(x^2, x^2 y \right)$ (na oblasti D je funkcija f neprekidna i monotona) preslikava u oblast D' (vidi sliku 2) ograničenu krivima:

$$l_1' = f(l_1) = \left\{ \left(1^2, 1^2 y\right) \;\middle|\; y \in [2,3] \right\} = \{ (1,v) \mid v \in [2,3] \},$$
$$l_2' = f(l_2) = \left\{ \left(2^2, 2^2 y\right) \;\middle|\; y \in [2,3] \right\} = \{ (4,v) \mid v \in [8,12] \},$$
$$l_3' = f(l_3) = \left\{ \left(x^2, x^2 2\right) \;\middle|\; x \in [1,2] \right\} = \{ (b,2b) \mid b \in [1,4] \},$$
$$l_4' = f(l_4) = \left\{ \left(x^2, x^2 3\right) \;\middle|\; x \in [1,2] \right\} = \{ (b,3b) \mid b \in [1,4] \}.$$



slika 1



slika 2

Rešavajući po (X,Y) sistem jednačina $B=X^2, V=X^2Y$, dobijamo dve monotone "grane" inverzne transformacije:

$$f_1^{-1}(b,v)=\left(-\sqrt{b},\tfrac{v}{b}\right)=(x,y)\,,\ b\geq 0,$$

$$f_2^{-1}(b,v)=\left(\sqrt{b},\tfrac{v}{b}\right)=(x,y)\,,\ b\geq 0.$$

Jakobijani ovih funkcija su:

$$\mathcal{J}_{f_1}^{-1}(b,v)=\begin{vmatrix} x_b & x_v \\ y_b & y_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{b}} & 0 \\ -\frac{v}{b^2} & \frac{1}{b} \end{vmatrix}=-\tfrac{1}{2b\sqrt{b}},$$

$$\mathcal{J}_{f_2}^{-1}(b,v)=\begin{vmatrix} x_b & x_v \\ y_b & y_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{b}} & 0 \\ -\frac{v}{b^2} & \frac{1}{b} \end{vmatrix}=\tfrac{1}{2b\sqrt{b}}.$$

Gustina slučajnog vektora (B,V) glasi:

$$\varphi_{B,V}(b,v)=$$

$$=\varphi_{X,Y}\left(f_1^{-1}(b,v)\right)\left|\mathcal{J}_{f_1}^{-1}(b,v)\right|+\varphi_{X,Y}\left(f_2^{-1}(b,v)\right)\left|\mathcal{J}_{f_2}^{-1}(b,v)\right|=$$

$$=\varphi_{X,Y}\left(-\sqrt{b},\tfrac{v}{b}\right)\left|-\tfrac{1}{2b\sqrt{b}}\right|+\varphi_{X,Y}\left(\sqrt{b},\tfrac{v}{b}\right)\left|\tfrac{1}{2b\sqrt{b}}\right|=$$

$$\overset{[1]}{=}0\cdot\left|-\tfrac{1}{2b\sqrt{b}}\right|+\varphi_{X,Y}\left(\sqrt{b},\tfrac{v}{b}\right)\left|\tfrac{1}{2b\sqrt{b}}\right|=\varphi_{X,Y}\left(\sqrt{b},\tfrac{v}{b}\right)\tfrac{1}{2b\sqrt{b}}=$$

$$=\begin{cases} 0\cdot\frac{1}{2b\sqrt{b}} & , \ (b,v)\notin D' \\ 1\cdot\frac{1}{2b\sqrt{b}} & , \ (b,v)\in D' \end{cases}=\begin{cases} 0 & , \ (b,v)\notin D' \\ \frac{1}{2b\sqrt{b}} & , \ (b,v)\in D' \end{cases}.$$

[1] - *Za svako* (b,v) *važi* $\left(-\sqrt{b},\tfrac{v}{b}\right)\notin D$.

(b) <u>Prvi način</u>:

$$\mathsf{E}\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\varphi_X(d)\,x=\int_1^2 x^2dx=\tfrac{7}{3},$$

$$\mathsf{E}(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}y\varphi_Y(d)\,y=\int_2^3 ydy=\tfrac{5}{2}.$$

Koristeći osobine matematičkog očekivanja (X i Y su nezavisne slučajne promenljive pa su nezavisne i X^2 i Y) dobijamo

$$\mathsf{E}(V)=\mathsf{E}\left(X^2Y\right)=\mathsf{E}\left(X^2\right)\mathsf{E}(Y)=\tfrac{7}{3}\cdot\tfrac{5}{2}=\tfrac{35}{6}.$$

<u>Drugi način</u>:

$$\varphi_V(v)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{B,V}(b,v)\,db=$$

$$=\begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{\infty}0db & , \ v\notin(2,12) \\ \int\limits_{1}^{\frac{1}{2}v}\frac{1}{2b\sqrt{b}}db & , \ v\in(2,3] \\ \int\limits_{\frac{1}{3}v}^{\frac{1}{2}v}\frac{1}{2b\sqrt{b}}db & , \ v\in(3,8] \\ \int\limits_{\frac{1}{3}v}^{4}\frac{1}{2b\sqrt{b}}db & , \ v\in(8,12) \end{cases}=\begin{cases} 0 & , \ v\notin(2,12) \\ 1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{v}} & , \ v\in(2,3] \\ \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{v}} & , \ v\in(3,8] \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{v}}-\frac{1}{2} & , \ v\in(8,12) \end{cases}.$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}(V) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v\varphi_{V}(v)\,dv = \\
&= \int\limits_{2}^{3} v\left(1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{v}}\right)dv + \int\limits_{3}^{8} v\,\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{v}}\,dv + \int\limits_{8}^{12} v\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{v}}-\frac{1}{2}\right)dv = \\
&= \left(\tfrac{31}{6}-2\sqrt{6}\right) + \left(-\tfrac{82}{3}+\tfrac{38}{3}\sqrt{6}\right) + \left(28-\tfrac{32}{3}\sqrt{6}\right) = \tfrac{35}{6}.
\end{aligned}
$$

4. Neka je X_i slučajna promenljiva koja predstavlja broj poena koji igrač dobija (ili gubi) u i - toj igri. Slučajne promenljive X_i su nezavisne i imaju isti zakon raspodele i numeričke karakteristike:

   $X_i : \begin{pmatrix} -100 & 10 & 50 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$,

   $\mathsf{E}(X_i) = -100\cdot 0.2 + 10\cdot 0.3 + 50\cdot 0.5 = 8$,

   $\mathsf{E}\left(X_i^2\right) = (-100)^2\cdot 0.2 + 10^2\cdot 0.3 + 50^2\cdot 0.5 = 3280$,

   $\mathsf{D}(X_i) = \mathsf{E}\left(X_i^2\right) - \mathsf{E}(X_i) = 3280 - 8^2 = 3216$.

   Slučajna promenljiva $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ predstavlja ukupan broj dobijenih ili izgubljenih poena tokom odigranih n igara. Pri tome je

   $$\mathsf{E}(S_n) = \sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}(X_i) = 8n \qquad \text{i} \qquad \mathsf{D}(S_n) = \sum_{i=1}^{n}\mathsf{D}(X_i) = 3216n$$

   (zbog nezavisnosti slučajnih promenljivih X_i). Na osnovu centralne granične teoreme ([$*$]), slučajna promenljiva $S_n^* = \frac{S_n-\mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}}$ ima (za "dovoljno" veliko n) približno $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu.

   (a) $\mathsf{P}(S_{100} \geq 900) = 1 - \mathsf{P}(S_{100} < 900) =$
   $= 1 - \mathsf{P}\left(\frac{S_{100}-\mathsf{E}(S_{100})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{100})}} < \frac{900-\mathsf{E}(S_{100})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{100})}}\right) = 1 - \mathsf{P}\left(S_{100}^* < \frac{900-800}{\sqrt{321600}}\right) \approx$
   $\approx 1 - \mathsf{P}\left(S_{100}^* < 0.18\right) \overset{[*]}{\approx} 1 - \phi(0.18) \approx 1 - 0.5676 \approx 0.4324.$

   (b) Rešavamo po n jednačinu $\mathsf{P}(S_n \geq 1000) = 0.95$:

   $$
   \begin{aligned}
   &\mathsf{P}(S_n \geq 1000) = 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \mathsf{P}(S_n < 1000) = 0.95 \quad \Leftrightarrow \\
   &\Leftrightarrow \quad \mathsf{P}(S_n < 1000) = 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(S_n^* < \frac{1000-\mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}}\right) = 0.05 \quad \Leftrightarrow \\
   &\Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(S_n^* < \frac{1000-8n}{\sqrt{3216n}}\right) = 0.05 \quad \overset{[*]}{\Leftrightarrow} \quad \phi\left(\frac{1000-8n}{\sqrt{3216n}}\right) \approx 0.05 \quad \Leftrightarrow \\
   &\Leftrightarrow \quad \frac{1000-8n}{\sqrt{3216n}} \approx \phi^{-1}(0.05) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1000-8n}{\sqrt{3216n}} \approx -1.65 \quad \Leftrightarrow \\
   &\Leftrightarrow \quad 1000-8n \approx -1.65\sqrt{3216n} \quad \Leftrightarrow \quad 8n-93.57\sqrt{n}-1000 \approx 0 \quad \Leftrightarrow \\
   &\Leftrightarrow \quad \left(8t^2 - 93.57t - 1000 \approx 0 \ \wedge \ t = \sqrt{n}\right) \quad \Leftrightarrow \\
   &\Leftrightarrow \quad ((t \approx -6.76935 \ \vee \ t \approx 18.4656) \ \wedge \ t = \sqrt{n}) \quad \Leftrightarrow \\
   &\Leftrightarrow \quad (t \approx 18.4656 \ \wedge \ t = \sqrt{n}) \quad \Leftrightarrow \quad n \approx 18.4656^2 \approx 340.978.
   \end{aligned}
   $$

   Dakle, treba da odigra 341 igru.

5. Neka slučajna promenljiva (obeležje) X predstavlja broj neispravnih od ukupno 4 proizvoda iz jedne kutije. Testiramo hipotezu da obeležje X ima binomnu $\mathcal{B}(4,p)$ gde je p nepoznati parametar koji možemo oceniti na osnovu uzorka koristeći matematičko očekivanje slučajne promenljive sa binomnom raspodelom $\mathsf{E}(X) = np = 4p$. Za ocenu matematičkog očekivanja obeležja X možemo koristiti uzoračku aritmetičku sredinu (gde je veličina uzorka: $n = 12+18+14+4+2 = 50$):

$$\overline{x}_{50} = \tfrac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} x_i = \tfrac{1}{50}\left(0\cdot 12 + 1\cdot 18 + 2\cdot 14 + 3\cdot 4 + 4\cdot 2\right) = \tfrac{33}{25},$$

odakle onda dobijamo: $\quad \overline{p} = \frac{1}{4}\cdot\frac{33}{25} = \frac{33}{100}$.

Spajajući poslednje dve grupe podataka (da bi u svakoj grupi imali bar 5 realizacija obeležja) i nakon izračunavanja teorijskih verovatnoća

$$p_i = \mathsf{P}(X=i) = \tbinom{4}{i}\left(\tfrac{33}{100}\right)^i\left(\tfrac{67}{100}\right)^{4-i},\ i\in\{0,1,2,3,4\}$$

za binomnu raspodelu, pri čemu na $p_3 \approx 0.0963112$ zbog spajanja podataka dodajemo $p_4 \approx 0.0118592$, dobijamo sledeću tabelu:

x_i	0	1	2	$3,4$
m_i	12	18	14	6
p_i	0.201511	0.397007	0.293311	0.10817

Na osnovu prikazanih podataka, za vrednost statistike $Z = \sum\limits_{i=0}^{3}\frac{(m_i-50p_i)^2}{50p_i}$ dobijamo $z \approx 0.634941$.

Pošto je $\chi^2_{\alpha;4-1-1} = \chi^2_{0.01;2} \approx 9.21 > z$, sledi da ne odbacujemo hipotezu da obeležje X ima Binomnu $\mathcal{B}(4,p)$ raspodelu.

6. Funkcija verodostojnosti: za $\theta > 1$ je

$$L(x_1,\ldots,x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n}\mathsf{P}(X=x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n}\tfrac{1}{\theta}\cdot\left(\tfrac{\theta-1}{\theta}\right)^{x_i} = \tfrac{1}{\theta^n}\cdot\left(\tfrac{\theta-1}{\theta}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i},$$

$$\ln L(x_1,\ldots,x_n;\theta) = -n\ln\theta + \sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\ln\tfrac{\theta-1}{\theta}.$$

Tražimo maksimum funkcije L po $\theta > 1$:

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x_1,\ldots,x_n;\theta) = -\tfrac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\tfrac{\theta}{\theta-1}\cdot\tfrac{1}{\theta^2} = -\tfrac{n}{\theta} + \tfrac{1}{\theta(\theta-1)}\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

Pošto je

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x_1,\ldots,x_n,\theta) = -\tfrac{n}{\theta} + \tfrac{1}{\theta(\theta-1)}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i = 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad n(\theta-1) = \sum_{i=1}^{n}x_i \quad\Leftrightarrow\quad \theta = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i + 1 = \overline{x}_n + 1,$$

dobili smo ocenu: $\qquad \hat{\theta} = \overline{X}_n + 1.$

Centriranost:

Primetimo da se slučajna promenljiva X može predstaviti kao $X = Y - 1$, gde je Y slučajna promenljiva sa geometrijskom $\mathcal{G}\left(\frac{1}{\theta}\right)$ raspodelom, odakle dobijamo

$$\mathsf{E}\left(\hat{\theta}\right) = \mathsf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + 1\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}\left(X_i\right) + \mathsf{E}\left(1\right) = \frac{1}{n} n \mathsf{E}\left(X\right) + 1 =$$
$$= \mathsf{E}\left(Y-1\right) + 1 = \mathsf{E}\left(Y\right) - 1 + 1 = \mathsf{E}\left(Y\right) = \frac{1}{\frac{1}{\theta}} = \theta.$$

Dakle, ocena $\hat{\theta} = \overline{X}_n + 1$ jeste centrirana.

Postojanost:

Kako je ocena $\hat{\theta} = \overline{X}_n + 1$ centrirana, postojanost možemo ispitati primenom nejednakosti Čebiševa ([*]).

Za $Y : \mathcal{G}\left(\frac{1}{\theta}\right)$ je $\mathsf{D}\left(Y\right) = \frac{1-\frac{1}{\theta}}{\left(\frac{1}{\theta}\right)^2} = \theta\left(\theta - 1\right)$, te dobijamo

$$\mathsf{D}\left(X\right) = \mathsf{D}\left(Y-1\right) = \mathsf{D}\left(Y\right) - \mathsf{D}\left(1\right) = \mathsf{D}\left(Y\right) = \theta\left(\theta-1\right),$$

odakle sledi

$$\mathsf{D}\left(\hat{\theta}\right) = \mathsf{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + 1\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{D}\left(X_i\right) + \mathsf{D}\left(1\right) =$$
$$= \frac{1}{n^2} n \mathsf{D}\left(X\right) + 0 = \frac{1}{n}\mathsf{D}\left(X\right) = \frac{1}{n}\theta\left(\theta-1\right).$$

Za svako $\varepsilon > 0$ je

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\left|\hat{\theta} - \mathsf{E}\left(\hat{\theta}\right)\right| \ge \varepsilon\right) \overset{[*]}{\le} \lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{D}(\hat{\theta})}{\varepsilon^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\theta(\theta-1)}{n\varepsilon^2} = 0.$$

Dakle, ocena $\hat{\theta} = \overline{X}_n + 1$ jeste postojana.

7. Označimo sa 1, 2 i 3 stanja S koja odgovaraju izbornom mestu na kome se nalazi kontrolor.

   (a) Ako sa R_1, R_2 i R_3 redom označimo događaje: "*na i - tom biračkom mestu (i $\in \{1,2,3\}$) je otkrivena neregularnost*", pri čemu je dato da je $\mathsf{P}\left(R_1\right) = \frac{1}{2}$, $\mathsf{P}\left(R_2\right) = \frac{3}{10}$ i $\mathsf{P}\left(R_3\right) = \frac{3}{5}$, tada na osnovu opisa zakonitosti kretanja kontrolora verovatnoće prelaza možemo dobiti pomoću formule totalne verovatnoće na sledeći način:

   $p_{ij} = \mathsf{P}\left(S = j \mid S = i\right) =$
   $= \mathsf{P}\left(R_i\right)\mathsf{P}\left(S = j \mid S = i, R_i\right) + \mathsf{P}\left(\overline{R_i}\right)\mathsf{P}\left(S = j \mid S = i, \overline{R_i}\right)$

   za sve $i, j \in \{1,2,3\}$. Dakle:

   $p_{11} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{4}$, $\quad p_{12} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{2}$,
   $p_{13} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, $\quad p_{21} = \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{4} + \frac{7}{10}\cdot\frac{1}{2} = \frac{17}{40}$,
   $p_{22} = \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2} + \frac{7}{10}\cdot 0 = \frac{3}{20}$, $\quad p_{23} = \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{4} + \frac{7}{10}\cdot\frac{1}{2} = \frac{17}{40}$,
   $p_{31} = \frac{3}{5}\cdot 0 + \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{25}$, $\quad p_{32} = \frac{3}{5}\cdot 0 + \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{25}$,
   $p_{33} = \frac{3}{5}\cdot 1 + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{17}{25}$.

   Prema tome, matrica P prelaza za jedan korak glasi:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{17}{40} & \frac{3}{20} & \frac{17}{40} \\ \frac{4}{25} & \frac{4}{25} & \frac{17}{25} \end{bmatrix} \end{array}.$$

(b) Na osnovu opisa početne pozicije kontrolora, imamo vektor početne raspodele: $\mathbf{p}^0 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \end{array}$.
Raspodelu nakon jednog koraka dobijamo na sledeći način:

$$\mathbf{p}^1 = \mathbf{p}^0 \cdot P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{17}{40} & \frac{3}{20} & \frac{17}{40} \\ \frac{4}{25} & \frac{4}{25} & \frac{17}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{249}{1000} & \frac{294}{1000} & \frac{457}{1000} \end{bmatrix}.$$

8. Matematičko očekivanje:
$m_X(t) = \mathsf{E}(X_t) = \mathsf{E}(U\cos(\omega t)) = \cos(\omega t)\,\mathsf{E}(U) = 2\cos(\omega t)$.

Autokorelaciona funkcija:

$\mathsf{R}_X(t,s) = \mathsf{E}((X_t - m_X(t))(X_s - m_X(s))) =$
$= \mathsf{E}((U\cos(\omega t) - 2\cos(\omega t))(U\cos(\omega s) - 2\cos(\omega s))) =$
$= \mathsf{E}((U-2)\cos(\omega t)\ (U-2)\cos(\omega s)) =$
$= \mathsf{E}\left((U-2)^2\cos(\omega t)\cos(\omega s)\right) = \cos(\omega t)\cos(\omega s)\,\mathsf{E}\left((U-2)^2\right) =$
$= \cos(\omega t)\cos(\omega s)\,\mathsf{E}\left((U-\mathsf{E}(U))^2\right) = \cos(\omega t)\cos(\omega s)\,\mathsf{D}(U) =$
$= 9\cos(\omega t)\cos(\omega s)$.

Disperzija:

$\mathsf{D}_X(t) = \mathsf{R}_X(t,t) = 9\cos^2(\omega t)$.

Pošto je $m_X(t) = const$ samo za $\omega \equiv 0$, a u tom slučaju je $X_t \equiv U$, sledi da slučajni proces X_t jeste stacionaran za $\omega = 0$, a inače nije.

28.10.2000.

1. U činiji se nalazi 4 zrna grožđa, 5 zrna višanja i 3 zrna trešanja. Perica nasumice iz činije vadi 2 zrna. Ako nije izvukao ni jedno zrno grožđa, onda pojede izvađena zrna. Ako je izvukao bar jedno zrno grožđa, tada ponovo nasumice vadi nova 2 zrna bez vraćanja prethodna 2 i bezuslovno ih pojede.

   (a) Koliko iznosi verovatnoća da je Perica prvi put izvukao 2 zrna iste vrste?

   (b) Koliko iznosi verovatnoća da Perica nije pojeo ni jedno zrno grožđa?

2. Igrač baca kockicu za "Ne ljuti se čoveče" sve dok se ne pojavi broj manji od 3. Ako se broj manji od 3 pojavio pri neparnom po redu bacanju, tada izvlači 3 kuglice iz kutije u kojoj se nalazi 5 zelenih i 2 bele kuglice, a ako se broj manji od 3 pojavio pri parnom po redu bacanju, tada izvlači 3 kuglice iz kutije u kojoj se nalaze 2 zelene i 5 belih kuglica. Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja broj izvučenih zelenih kuglica. Naći raspodelu slučajne promenljive X i matematičko očekivanje slučajne promenljive $Y = X^2 + 3$.

3. Slučajna promenljiva X ima uniformnu $\mathcal{U}(0,4)$ raspodelu, a uslovna slučajna promenljiva $Y \mid \{X = x\}$ ima uniformnu $\mathcal{U}\left(\frac{1}{4}x, \frac{1}{2}x\right)$ raspodelu.

   (a) Naći gustinu slučajne promenljive Y.

   (b) Naći raspodelu slučajne promenljive $Z = -X + 4Y$.

4. Poznato je da se u prometu nalazi 20% belih automobila. Beleži se boja 1000 automobila koji sukcesivno prođu kroz raskrsnicu. Oceniti verovatnoću da relativna učestanost prolaska belih automobila odstupa od odgovarajuće verovatnoće za najviše 0.02:

   (a) pomoću nejednakosti Čebiševa,

   (b) pomoću teoreme Moavr - Laplasa.

5. Obeležje X ima gustinu:
$$\varphi_X(x) = \begin{cases} e^{a-x} & , \quad x \geq a \\ 0 & , \quad x < a \end{cases} .$$
   Na osnovu uzorka obima n metodom maksimalne verodostojnosti oceniti parametar a. Ispitati centriranost dobijene ocene, i ako ona nije centrirana, naći jednu centriranu ocenu.

6. Obeležje X ima gustinu:
$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 1.7x^{0.7} & , \quad x \in (0,1) \\ 0 & , \quad x \notin (0,1) \end{cases} .$$
   χ^2 - testom uz prag značajnosti $\alpha = 0.025$ ispitati saglasnost uzorka

interval	$\left(0, \frac{1}{4}\right]$	$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$	$\left(\frac{3}{4}, 1\right)$
učestanost	6	18	20	30

   sa gore navedenom raspodelom obeležja X.

7. Dve pumpe snabdevaju fabriku vodom. Svaka od pumpi se nezavisno od druge u toku dana kvari sa verovatnoćom $p = 0.1$ i u tom slučaju se opravlja i kreće ponovo sa radom sledećeg dana. Napraviti matricu prelaza za jedan korak i naći finalne verovatnoće sistema čija stanja predstavljaju broj pumpi koje su u pogonu bez kvara tokom celog dana.

8. Neprekidne i nezavisne slučajne promenljive X i Y su date svojim gustinama raspodele:
$$\varphi_X(x) = \begin{cases} x & , \quad x \in [0,1) \\ 2-x & , \quad x \in [1,2] \\ 0 & , \quad x \notin [0,2] \end{cases}, \qquad \varphi_Y(y) = \begin{cases} y-3 & , \quad y \in [3,4) \\ 5-y & , \quad y \in [4,5] \\ 0 & , \quad y \notin [3,5] \end{cases},$$
i definisan je slučajni proces $U_t = atX + btY$, $t \in \mathbb{R}$, gde su a i b realni parametri.

   (a) Odrediti srednju vrednost, autokorelacionu funkciju i disperziju slučajnog procesa U_t.

   (b) Za koje vrednosti parametara a i b je proces stacionaran?

Rešenja:

1. (a) Neka je A događaj "*Perica je u prvom izvlačenju izvadio* 2 *zrna iste vrste*", i neka događaji G, V i T redom pretstavljaju "*izvlačenje* 2 *zrna grožđa*", odnosno "*izvlačenje* 2 *zrna višanja*", odnosno "*izvlačenje* 2 *zrna trešanje*" (u prvom izvlačenju). Pošto je $A = G + V + T$ pri čemu su G, V i T disjunktni događaji, sledi da je
$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(G+V+T) = \mathsf{P}(G)+\mathsf{P}(V)+\mathsf{P}(T) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{12}{2}} =$$
$$= \frac{\frac{4!}{2!\cdot 2!} + \frac{5!}{2!\cdot 3!} + \frac{3!}{2!\cdot 1!}}{\frac{12!}{2!\cdot 10!}} = \frac{3\cdot 4 + 4\cdot 5 + 2\cdot 3}{11\cdot 12} = \frac{19}{66} \approx 0.2879.$$

   (b) Neka je B događaj "*Perica nije pojeo ni jedno zrno grožđa*". Obeležimo sa H_i, $i \in \{0,1,2\}$ događaje: "*u prvom izvlačenju Perica je izvadio i zrna grožđa*" koji čine potpun sistem događaja, te je:
$$\mathsf{P}(B) = \sum_{i=0}^{2} \mathsf{P}(H_i)\, \mathsf{P}(B \mid H_i).$$
Nalazimo potrebne verovatnoće:
$$\mathsf{P}(H_0) = \frac{\binom{5+3}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{\frac{8!}{2!\cdot 6!}}{\frac{12!}{2!\cdot 10!}} = \frac{7\cdot 8}{11\cdot 12} = \frac{14}{33} \approx 0.4242,$$
$$\mathsf{P}(H_1) = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{5+3}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{\frac{4!}{1!\cdot 3!}\cdot\frac{8!}{1!\cdot 7!}}{\frac{12!}{2!\cdot 10!}} = \frac{4\cdot 8}{\frac{11\cdot 12}{2}} = \frac{16}{33} \approx 0.4848,$$
$$\mathsf{P}(H_2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{\frac{4!}{2!\cdot 2!}}{\frac{12!}{2!\cdot 10!}} = \frac{3\cdot 4}{11\cdot 12} = \frac{3}{33} \approx 0.0909,$$
$$\mathsf{P}(B \mid H_0) = 1,$$
$$\mathsf{P}(B \mid H_1) = \frac{\binom{5+3-1}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{7!}{2!\cdot 5!}}{\frac{10!}{2!\cdot 8!}} = \frac{6\cdot 7}{9\cdot 10} = \frac{21}{45} \approx 0.4667,$$
$$\mathsf{P}(B \mid H_2) = \frac{\binom{5+3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{8!}{2!\cdot 6!}}{\frac{10!}{2!\cdot 8!}} = \frac{7\cdot 8}{9\cdot 10} = \frac{28}{45} \approx 0.6222$$

(događaj $B \mid H_1$ znači da Perica u drugom vađenju bira 2 od ukupno 7 zrna višanja i trešanja, pri čemu je u činiji ostalo ukupno 10 zrna, jer se prva 2 izvučena zrna ne vraćaju u činiju; analogna je situacija sa događajem $B \mid H_2$).

Dakle: $\mathsf{P}(B) = \frac{14}{33} \cdot 1 + \frac{16}{33} \cdot \frac{21}{45} + \frac{3}{33} \cdot \frac{28}{45} = \frac{70}{99} \approx 0.7071.$

2. Slučajna promenljiva Z koja predstavlja redni broj bacanja kockice pri kojem se prvi put pojavio broj manji od 3 (1 ili 2) ima geometrijsku $\mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)$ raspodelu (verovatnoća da u jednom bacanju padne broj manji od 3 je $\frac{1}{3}$).

   Obeležimo sa $H_i,\ i \in \{1,2\}$ događaje: "3 *kuglice se izvlače iz i-te kutije*" koji čine potpun sistem događaja. Njihove verovatnoće su:

   $$\mathsf{P}(H_1) = \mathsf{P}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \{Z = 2k+1\}\right) \overset{[1]}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(Z = 2k+1) =$$
   $$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{(2k+1)-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{k} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{3}{5},$$

   [1] - *Događaji $\{Z = 2k+1\}$ su disjunktni.*

   $\mathsf{P}(H_2) = 1 - \mathsf{P}(H_1) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$

   Raspodelu slučajne promenljive X odnosno odgovarajuće verovatnoće

   $$\mathsf{P}(X = j)\,,\quad j \in \mathcal{R}_X = \{0,1,2,3\}$$

   možemo naći pomoću formule totalne verovatnoće

   $$\mathsf{P}(X = j) = \sum_{i=1}^{2} \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(X = j \mid H_i)\,,\ j \in \mathcal{R}_X,$$

   pri čemu je:

   $$\begin{aligned}
   \mathsf{P}(X=0 \mid H_1) &= \frac{0}{\binom{7}{3}} = 0, & \mathsf{P}(X=0 \mid H_2) &= \frac{\binom{5}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{2}{7},\\
   \mathsf{P}(X=1 \mid H_1) &= \frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{7}, & \mathsf{P}(X=1 \mid H_2) &= \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{5}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{4}{7},\\
   \mathsf{P}(X=2 \mid H_1) &= \frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{4}{7}, & \mathsf{P}(X=2 \mid H_2) &= \frac{\binom{2}{2}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{7},\\
   \mathsf{P}(X=3 \mid H_1) &= \frac{\binom{5}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{2}{7}, & \mathsf{P}(X=3 \mid H_2) &= \frac{0}{\binom{7}{3}} = 0.
   \end{aligned}$$

   Uvrštavajući dobijeno u formulu totalne verovatnoće dobijamo zakon raspodele slučajne promenljive X:

   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{4}{35} & \frac{11}{35} & \frac{14}{35} & \frac{6}{35} \end{pmatrix}.$$

   Koristeći $\mathsf{E}\left(X^2\right) = \sum_{i=0}^{3} i^2 \mathsf{P}(X = i) = 0^2 \cdot \frac{4}{35} + 1^2 \cdot \frac{11}{35} + 2^2 \cdot \frac{14}{35} + 3^2 \cdot \frac{6}{35} = \frac{121}{35}$ i osobine matematičkog očekivanja dobijamo:

   $$\mathsf{E}(Y) = \mathsf{E}\left(X^2 + 3\right) = \mathsf{E}\left(X^2\right) + \mathsf{E}(3) = \frac{121}{35} + 3 = \frac{226}{35}.$$

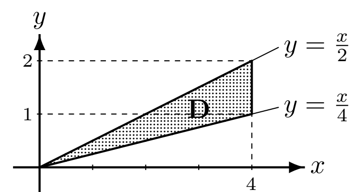
3. Koristeći gustine zadanih slučajnih promenljivih:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & , \quad x \in (0,4) \\ 0 & , \quad x \notin (0,4) \end{cases}, \qquad \varphi_{Y|\{X=x\}}(y) = \begin{cases} \frac{4}{x} & , \quad y \in \left(\frac{1}{4}x, \frac{1}{2}x\right) \\ 0 & , \quad y \notin \left(\frac{1}{4}x, \frac{1}{2}x\right) \end{cases},$$

dobijamo gustinu slučajnog vektora (X,Y):

$$\varphi_{X,Y}(x,y) = \varphi_X(x)\,\varphi_{Y|\{X=x\}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad (x,y) \in D \\ 0 & , \quad (x,y) \notin D \end{cases},$$

gde je $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in (0,4) \;\wedge\; y \in \left(\frac{1}{4}x, \frac{1}{2}x\right)\right\}$ otvorena oblast prikazana na slici 1.



slika 1

(a) $\varphi_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_{X,Y}(x,y)\,dx = \ldots$

– za $y \notin (0,2)$: $\quad \varphi_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} 0dx = 0;$

– za $y \in (0,1]$: $\quad \varphi_Y(y) = \int\limits_{2y}^{4y} \frac{1}{x}dx = \ln x \Big|_{2y}^{4y} = \ln\frac{4y}{2y} = \ln 2;$

– za $y \in (1,2)$: $\quad \varphi_Y(y) = \int\limits_{2y}^{4} \frac{1}{x}dx = \ln x \Big|_{2y}^{4} = \ln\frac{4}{2y} = \ln 2 - \ln y.$

(b) Posmatrajmo transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definisanu sa

$$f(X,Y) = (U,Z) = (X, -X+4Y)$$

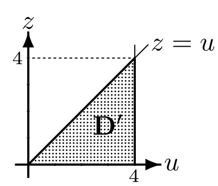
(odnosno $Z = -X + 4Y$, $U = X$).

Oblast D ograničena dužima:

$l_1 = \left\{\left(t, \frac{1}{4}t\right) \;\middle|\; t \in [0,4]\right\},$

$l_2 = \left\{\left(t, \frac{1}{2}t\right) \;\middle|\; t \in [0,4]\right\},$

$l_3 = \{(4,t) \mid t \in [1,2]\}$



slika 2

se funkcijom $f(x,y) = (x, -x+4y)$ (na oblasti D je funkcija f neprekidna i monotona) preslikava u oblast D' (vidi sliku 2) ograničenu dužima:

$l'_1 = f(l_1) = \left\{\left(t, -t+4\cdot\frac{1}{4}\cdot t\right) \;\middle|\; t \in [0,4]\right\} = \{(u,0) \mid u \in [0,4]\},$

$l'_2 = f(l_2) = \left\{\left(t, -t+4\cdot\frac{1}{2}\cdot t\right) \;\middle|\; t \in [0,4]\right\} = \{(z,z) \mid z \in [0,4]\},$

$l'_3 = f(l_3) = \{(4, -4+4t) \mid t \in [1,2]\} = \{(4,z) \mid z \in [0,4]\}.$

Rešavajući po (X,Y) sistem jednačina $Z = -X + 4Y$, $U = X$, dobijamo inverznu transformaciju:

$$f^{-1}(u,z) = \left(u, \tfrac{z+u}{4}\right) = (x,y)\,.$$

Jakobijan ove funkcije je:

$$\mathcal{J}_f^{-1}(u,z) = \begin{vmatrix} x_u & x_z \\ y_u & y_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \tfrac{1}{4}.$$

Sledi:

$$\varphi_{U,Z}(u,z) = \varphi_{X,Y}\left(f^{-1}(u,z)\right)\left|\mathcal{J}_f^{-1}(u,z)\right| =$$

$$= \varphi_{X,Y}\left(u, \tfrac{z+u}{4}\right)\cdot\left|\tfrac{1}{4}\right| = \begin{cases} \frac{1}{4u} & (u,z)\in D' \\ 0 & (u,z)\notin D' \end{cases}.$$

Gustinu slučajne promenljive Z nalazimo kao marginalnu raspodelu slučajnog vektora (Z,U) :

$$\varphi_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_{U,Z}(u,z)\,du = \ldots$$

– za $z\notin(0,4)$: $\qquad \varphi_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} 0du = 0,$

– za $z\in(0,4)$: $\qquad \varphi_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4u}du = \frac{1}{4}\ln u\Big|_z^4 = \frac{1}{4}\ln\frac{4}{z},$

te dolazimo do funkcije raspodele slučajne promenljive Z :

$$F_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_Z(t)\,dt = \ldots$$

– za $z\le 0$: $\qquad F_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{z} 0dt = 0;$

– za $0<z\le 4$: $\qquad F_Z(z) = \int\limits_{0}^{z}\frac{1}{4}\ln\frac{4}{t}dt = \frac{1}{4}z\left(1+\ln 4-\ln z\right);$

– za $4<z$: $\qquad F_Z(z) = \int\limits_{0}^{4}\frac{1}{4}\ln\frac{4}{t}dt = 1.$

4. Slučajna promenljiva S_{1000} koja predstavlja broj belih od ukupno 1000 automobila koji prođu kroz raskrsnicu ima binomnu $\mathcal{B}\left(1000,\frac{1}{5}\right)$ raspodelu. Pri tome je $\mathsf{E}(S_{1000}) = 1000\cdot\frac{1}{5} = 200$ i $\mathsf{D}(S_{1000}) = 1000\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} = 160$. Ispitujemo odstupanje $\left|\frac{S_{1000}}{1000}-\frac{1}{5}\right|$ relativne učestanosti $\frac{S_{1000}}{1000}$ broja belih automobila od verovatnoće $\frac{1}{5}$ prolaska belog automobila:

   (a) $\mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{1000}}{1000}-\frac{1}{5}\right|<0.02\right) = 1-\mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{1000}}{1000}-\frac{1}{5}\right|\ge 0.02\right) =$
   $= 1-\mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{1000}-1000\cdot\frac{1}{5}}{1000}\right|\ge 0.02\right) =$
   $= 1-\mathsf{P}\left(\left|S_{1000}-1000\cdot\frac{1}{5}\right|\ge 1000\cdot 0.02\right) \overset{[1]}{\ge} 1-\frac{1000\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}{(1000\cdot 0.02)^2} =$
   $= 1-\frac{160}{400} = \frac{240}{400} = \frac{3}{5}.$

   [1] - *Primena nejednakosti Čebiševa:*

   $$\mathsf{P}\left(\left|S_{1000}-\mathsf{E}(S_{1000})\right|\ge\varepsilon\right)\le\frac{\mathsf{D}(S_{1000})}{\varepsilon^2}.$$

   (b) $\mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{1000}}{1000}-\frac{1}{5}\right|<0.02\right) = \mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{1000}-1000\cdot\frac{1}{5}}{1000}\right|<0.02\right) =$

$$= \mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{1000}-1000\cdot\frac{1}{5}}{\sqrt{1000\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}}\sqrt{\frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}{1000}}\right| < 0.02\right) =$$

$$= \mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{1000}-1000\cdot\frac{1}{5}}{\sqrt{1000\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}}\right| < 0.02\sqrt{\frac{1000}{\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}}\right) \approx \mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{1000}-200}{\sqrt{160}}\right| < 1.58114\right) =$$

$$= \mathsf{P}\left(-1.58114 < \frac{S_{1000}-200}{\sqrt{160}} < 1.58114\right) \approx$$

$$\stackrel{[2]}{\approx} \phi(1.58114) - \phi(-1.58114) = 2\phi(1.58114) - 1 \approx 2\phi(1.58) - 1 \approx$$

$$\approx 2 \cdot 0.9429 - 1 \approx 0.8858.$$

[2] - *Primena Moavr - Laplasove teoreme:*

$$\mathsf{P}\left(a < \frac{S_{1000}-\mathsf{E}(S_{1000})}{\mathsf{D}(S_{1000})} < b\right) \approx \phi(b) - \phi(a).$$

5. Funkcija verodostojnosti:

$$L(x_1,\ldots,x_n;a) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_X(x_i;a) =$$

$$= \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{n} e^{a-x_i} & , \ \forall i,\ x_i \ge a \\ 0 & , \ \exists i,\ x_i < a \end{cases} = \begin{cases} e^{na}\cdot e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} & , \ \forall i,\ x_i \ge a \\ 0 & , \ \exists i,\ x_i < a \end{cases},$$

$$\ln L(x_1,\ldots,x_n;a) = na - \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (\text{za } \forall i,\ x_i \ge a).$$

Tražimo maksimum funkcije L po $a \le \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (vodeći računa da $\forall i,\ x_i \ge a$):

$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln L(x_1,\ldots,x_n;\theta) = n > 0$ za sve $a \le \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Funkcija L je monotono rastuća po a, te je njen maksimum dostignut na desnom kraju intervala $(-\infty, \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}]$ što znači da metodom maksimalne verodostojnosti dobijamo ocenu:

$$\hat{a} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}.$$

Za ispitivanje centriranosti ove ocene treba nam očekivanje, dakle i raspodela slučajne promenljive (statistike) $\hat{a}$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\,dt = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt \ , & x \le a \\ \int\limits_{a}^{x} e^{a-t}dt \ , & x > a \end{cases} = \begin{cases} 0 & , \ x \le a \\ 1 - e^{a-x} & , \ x > a \end{cases}.$$

Za $t \ge a$ je

$$F_{\hat{a}}(t) = \mathsf{P}(\hat{a} < t) = \mathsf{P}(\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} < t) =$$

$$= 1 - \mathsf{P}(\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \ge t) =$$

$$= 1 - \mathsf{P}(X_1 \ge t, X_2 \ge t, \ldots, X_n \ge t) \stackrel{[1]}{=}$$

$$= 1 - \mathsf{P}(X_1 \ge t)\,\mathsf{P}(X_2 \ge t)\ldots\mathsf{P}(X_n \ge t) =$$

$$= 1 - (1 - \mathsf{P}(X_1 < t))(1 - \mathsf{P}(X_2 < t))\ldots(1 - \mathsf{P}(X_n < t)) =$$

$$= 1 - \left(1 - F_{X_1}(t)\right)\left(1 - F_{X_2}(t)\right)\ldots\left(1 - F_{X_n}(t)\right) \stackrel{[2]}{=} 1 - (1 - F_X(t))^n =$$

$= 1 - (1 - (1 - e^{a-t}))^n = 1 - e^{n(a-t)}$,

i $F_{\hat{a}}(t) = 0$ za $t < a$.

[1] - *Slučajne promenljive* X_i *su nezavisne.*

[2] - *Slučajne promenljive* X_i *imaju istu raspodelu (kao obeležje* X*).*

$$\varphi_{\hat{a}}(t) = F'_{\hat{a}}(t) = \begin{cases} ne^{n(a-t)} & \text{za } t \geq a \\ 0 & \text{za } t < a \end{cases},$$

$$\mathsf{E}(\hat{a}) = \int_{-\infty}^{\infty} t\varphi_{\hat{a}}(t)\,dt = \int_{a}^{\infty} tne^{n(a-t)}dt = ne^{na}\int_{a}^{\infty} te^{-nt}dt =$$

$$= -ne^{na}e^{-nt}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+t\right)\Big|_{a}^{\infty} = -e^{n(a-t)}\left(\frac{1}{n}+t\right)\Big|_{a}^{\infty} = 0 + e^0\left(\frac{1}{n}+a\right) = \frac{1}{n}+a.$$

Centriranost:

Ocena $\hat{a} = \frac{1}{n}$ nije centrirana jer je $\mathsf{E}(\hat{a}) \neq a$. Međutim, ocena $\hat{\hat{a}} = \hat{a} - \frac{1}{n}$ jeste centrirana jer je $\mathsf{E}\left(\hat{\hat{a}}\right) = \mathsf{E}\left(\hat{a} - \frac{1}{n}\right) = \mathsf{E}(\hat{a}) - \frac{1}{n} = a$.

6. Pošto je

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X t dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0dt & , \quad x \leq 0 \\ \int_{0}^{x} 1.7t^{0.7}dt, & 0 < x \leq 1 \\ \int_{0}^{1} 1.7t^{0.7}dt, & 1 < x \end{cases} = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ x^{1.7}, & 0 < x \leq 1 \\ 1 & , \quad 1 < x \end{cases},$$

sledi:

$p_1 = \mathsf{P}\left(X \in \left(0, \frac{1}{4}\right]\right) = F_X\left(\frac{1}{4}\right) - F_X(0) \approx 0.0947$,

$p_2 = \mathsf{P}\left(X \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]\right) = F_X\left(\frac{1}{2}\right) - F_X\left(\frac{1}{4}\right) \approx 0.2131$,

$p_3 = \mathsf{P}\left(X \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]\right) = F_X\left(\frac{3}{4}\right) - F_X\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0.3054$,

$p_4 = \mathsf{P}\left(X \in \left(\frac{3}{4}, 1\right)\right) = F_X(1) - F_X\left(\frac{3}{4}\right) \approx 0.3868$,

te za učestanosti $m_1 = 6$, $m_2 = 18$, $m_3 = 20$, $m_4 = 30$ i obim uzorka $n = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 74$ kao vrednost statistike $Z = \sum_{i=1}^{4} \frac{(m_k - np_i)^2}{np_i}$ na osnovu uzorka dobijamo $z \approx 0.8277$.

Pošto je

$$\chi^2_{\alpha;4-1} = \chi^2_{0.025;3} \approx 9.35 > z$$

sledi da ne odbacujemo hipotezu o tome da elementi uzorka imaju raspodelu obeležja X.

7. Stanja sistema ćemo označiti sa brojem pumpi koje su u pogonu bez kvara tokom celog dana (moguća stanja su 0, 1 ili 2). S obzirom na to da su u toku svakog dana pumpe na početku ispravne, tada stanje sistema uopšte ne zavisi od njegovog stanja u toku prošlog dana, već samo od eventualne pojave kvara na pumpama u tekućem danu, što znači da za

svako $i \in \{0,1,2\}$ imamo prelazne verovatnoće (koristimo nezavisnost pojave kvara kod pumpi):

$$p_{i,0} = 0.1 \cdot 0.1 = 0.01,$$

$$p_{i,1} = 0.1 \cdot 0.9 + 0.9 \cdot 0.1 = 0.18,$$

$$p_{0,2} = 0.9 \cdot 0.9 = 0.81.$$

Dakle, matrica prelaza za jedan korak glasi:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & \quad 1 & \quad 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.01 & 0.18 & 0.81 \\ 0.01 & 0.18 & 0.81 \\ 0.01 & 0.18 & 0.81 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Sada rešavanjem odgovarajuće jednačine po $(x,y,z) \in (0,1)^3$, gde je $z = 1 - x - y$, dobijamo finalne verovatnoće:

$$\begin{bmatrix} x & y & 1-x-y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.01 & 0.18 & 0.81 \\ 0.01 & 0.18 & 0.81 \\ 0.01 & 0.18 & 0.81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccccccc} 0.01x & + & 0.01y & + & 0.01\,(1-x-y) & = & x \\ 0.18x & + & 0.18y & + & 0.18\,(1-x-y) & = & y \\ 0.81x & + & 0.81y & + & 0.81\,(1-x-y) & = & 1-x-y \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccccc} -x & & & = & -0.01 \\ & & -y & = & -0.18 \\ x & + & y & = & 0.19 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccc} x & = & 0.01 \\ y & = & 0.18 \\ 0 & = & 0 \end{array}$$

Dakle, vektor finalnih verovatnoća je

$$\mathbf{p}^* = [0.01 \quad 0.18 \quad 1 - 0.01 - 0.18] = [0.01 \;\; 0.18 \;\; 0.81]\,.$$

Napomena: već na osnovu opisa slučajnog procesa smo mogli primetiti da stanje sistema u toku nekog dana ne zavisi od stanja sistema u toku prethodnog dana, jer su na početku svakog dana obe pumpe ispravne; dakle, radi se o stacionarnom slučajnom procesu kod kojeg je $\mathbf{p}^* = \mathbf{p}(n)$ gde je $\mathbf{p}(n)$ raspodela verevatnoća opisanog slučajnog procesa za n-ti dan.

8. $\mathsf{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,\varphi_{X}(x)\,dx = \int\limits_{0}^{1} x^2 dx + \int\limits_{1}^{2} \left(2x - x^2\right) dx = 1,$

$\mathsf{E}\left(X^2\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\,\varphi_{X}(x)\,dx = \int\limits_{0}^{1} x^3 dx + \int\limits_{1}^{2} \left(2x^2 - x^3\right) dx = \frac{7}{6},$

$\mathsf{D}(X) = \mathsf{E}\left(X^2\right) - \mathsf{E}^2(X) = \frac{7}{6} - 1^2 = \frac{1}{6},$

$\mathsf{E}(Y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y\,\varphi_{Y}(y)\,dy = \int\limits_{3}^{4} \left(y^2 - 3y\right) dy + \int\limits_{4}^{5} \left(5y - y^2\right) dy = 4,$

$\mathsf{E}\left(Y^2\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2\,\varphi_{Y}(y)\,dy = \int\limits_{3}^{4} \left(y^3 - 3y^2\right) dy + \int\limits_{4}^{5} \left(5y^2 - y^3\right) dy = \frac{97}{6},$

$\mathsf{D}(Y) = \mathsf{E}\left(Y^2\right) - \mathsf{E}^2(Y) = \frac{97}{6} - 4^2 = \frac{1}{6}.$

(a) Srednja vrednost procesa:

$m_U(t) = \mathsf{E}(atX + btY) = at\mathsf{E}(X) + bt\mathsf{E}(Y) = at + 4bt = (a+4b)\,t.$

Autokorelaciona funkcija:

$\mathsf{R}_U(t,s) = \mathsf{E}(U_t\,U_s) = \mathsf{E}((atX + btY)(asX + bsY)) =$
$= \mathsf{E}\left(a^2tsX^2 + b^2tsY^2 + 2abtsXY\right) \overset{[1]}{=}$
$= a^2ts\mathsf{E}\left(X^2\right) + b^2ts\mathsf{E}\left(Y^2\right) + 2abts\mathsf{E}(X)\,\mathsf{E}(Y) =$
$= \frac{7}{6}a^2ts + \frac{97}{6}b^2ts + 8abts = \frac{1}{6}\left(7a^2 + 48ab + 97b^2\right)ts.$

[1] - *X i Y su nezavisne veličine, pa je* $\mathsf{E}(XY) = \mathsf{E}(X)\,\mathsf{E}(Y)$.

Disperzija procesa:

$\mathsf{D}_U(t) = \mathsf{D}(atX + btY) = \mathsf{K}_U(t,t) = \mathsf{R}_U(t,t) - m_U^2(t) =$
$= \frac{1}{6}\left(a^2 + b^2\right)t^2.$

(b) Da bi slučajni proces U_t bio stacionaran, mora biti $m_U(t) \equiv const$ i $\mathsf{R}_U(t,s)$ mora da bude funkcija od $(t-s)$.

S jedne strane $m_U(t) = (a+4b)\,t = const$ samo ako je $a = -4b$, i tada je $U_t = bt(-4X + Y)$ (u tom slučaju je $m_U(t) \equiv 0,\ t \in R$); s druge strane, za $a = -4b$ je $\mathsf{R}_U(t,s) = \frac{17}{6}b^2ts$ funkcija od $(t-s)$ samo za $b = 0$ (tada je $\mathsf{R}_U(t,s) = 0 \cdot (t-s)$). Sledi da mora biti $a = b = 0$. Ali tada je $U_t \equiv 0$ i u tom slučaju, trivijalno, proces U_t jeste stacionaran.

18.11.2000.

1. Pera učestvuje na turniru preferansa. Turnir je organizovan na sledeći način: u prvom kolu se igraju tri partije i zatim se na osnovu plasmana iz prvog kola prolazi ili ne prolazi u drugo kolo turnira, pri čemu se sa tri pobede sigurno prolazi u drugo kolo, sa dve pobede se prolazi u drugo kolo sa verovatnoćom $\frac{1}{2}$, sa jednom pobedom se prolazi u drugo kolo sa verovatnoćom $\frac{1}{4}$, a bez ijedne pobede se sigurno ne prolazi u drugo kolo. Verovatnoća da Pera pobedi u jednoj partiji prvog kola je p, nezavisno od ishoda ostale dve partije.

   (a) S kojom verovatnoćom će se Pera plasirati u drugo kolo?

   (b) Ako se Pera nije plasirao u drugo kolo, koliko iznosi verovatnoća da je u prvom kolu imao 2 pobede?

2. Slučajna promenljiva X ima uniformnu $\mathcal{U}(-2,1)$ raspodelu. Naći funkciju raspodele slučajnog vektora $(Z,W) = (X, 2X+1)$.

3. Slučajna promenljiva X je određena gustinom raspodele verovatnoća:

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive Y definisane sa:

$$Y = f(X) = \begin{cases} X+2 & , \quad X \le -2 \\ -X-2 & , \quad -2 < X \le 0 \\ X-2 & , \quad 0 < X \le 3 \\ 1 & , \quad 3 < X \end{cases} .$$

4. Verovatnoća da student položi ispit je 0.3. Studenti polažu ispit nezavisno jedan od drugog.

   (a) Ako ispit polaže 100 studenata, primenom Moavr - Laplasove teoreme oceniti verovatnoću da će bar 35 studenata položiti ispit.

   (b) Koliko studenata treba da izađe na ispit pa da sa verovatnoćom 0.9 položi bar 50?

5. Odrediti parametar c u funkciji od parametara $a > 0$ i $b > 0$ tako da
$$\varphi(x) = \begin{cases} be^{-ax} & , \quad x \ge c \\ 0 & , \quad x < c \end{cases}$$
bude funkcija gustine nekog obeležja X, a zatim za $b = ae^a$ i odgovarajuće c, na osnovu uzorka obima n oceniti parametar $a > 0$.

6. Poznato je da nedeljna količina padavina u ataru sela Kupusina ima približno normalnu raspodelu. Izvršena je serija merenja čiji su rezultati dati u tabeli pri čemu je količina padavina a_k merena u milimetrima po metru kvadratnom, a sa m_k je označen broj merenja:

a_k	$[0,5)$	$[5,10)$	$[10,15)$	$[15,20)$	$[20,25)$	$[25,30)$	$[30,\infty)$
m_k	1	3	4	10	6	4	2

   (a) Naći 95% interval poverenja za srednju vrednost nedeljne količine padavina.

   (b) Sa pragom značajnosti 0.05 testirati hipotezu da je srednja vrednost količina padavina na njivama sela Kupusine jednaka 36.

7. Date su tačke A, B i C. Duž BC je dva puta duža od duži AB, a duž AC je tri puta duža od duži AB. Čestica se u diskretnim vremenskim trenucima kreće po tačkama A, B i C (prelazi iz jedne u drugu) na sledeći način: ako se u jednom trenutku nalazi u tački X, u sledećem trenutku će ostati u tački X sa verovatnoćom $\frac{1}{2}$, a u preostala dve tačke će preći sa verovatnoćama koje su u obrnutoj razmeri sa rastojanjima od tačke X do tih tačaka (verovatnoća prelaska iz X u Y se prema verovatnoći prelaska iz X u Z odnosi kao $XZ : XY$). Napraviti matricu prelaza za jedan korak slučajnog procesa čija stanja opisuju položaj čestice tokom vremena i naći najverovatniji položaj čestice nakon dva koraka ako je na početku čestica bila u tački A.

8. Neka su U i V nezavisne slučajne promenljive pri čemu U ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(0,1)$ a V ima uniformnu $\mathcal{U}(-2,2)$ raspodelu, i neka je X_t, $t \in \mathbb{R}$ slučajni proces definisan sa $X_t = 2^t\, U + t^2\, V$. Naći matematičko očekivanje, autokovarijansnu funkciju i disperziju slučajnog procesa X_t.

Rešenja:

1. Označimo događaje:

   A - "*Pera se plasirao u drugo kolo*",

   $H_i,\ i \in \{0,1,2,3\}$ - "*Pera je u prvom kolu ostvario i pobeda*",

   i označimo sa $+$ i $-$ redom pobedu, odnosno poraz u pojedinačnoj partiji.

   $\mathsf{P}(H_0) = \mathsf{P}(\,-\ -\ -\,) = (1-p)^3,$

   $\mathsf{P}(H_1) = \mathsf{P}(\,-\ -\ +\,,\ -\ +\ -\,,\ +\ -\ -\,) = 3p(1-p)^2,$

   $\mathsf{P}(H_2) = \mathsf{P}(\,-\ +\ +\,,\ +\ -\ +\,,\ +\ +\ -\,) = 3p^2(1-p),$

   $\mathsf{P}(H_3) = \mathsf{P}(\,+\ +\ +\,) = p^3,$

   $\mathsf{P}(A \mid H_0) = 0, \qquad \mathsf{P}(A \mid H_1) = \frac{1}{4}, \qquad \mathsf{P}(A \mid H_2) = \frac{1}{2}, \qquad \mathsf{P}(A \mid H_3) = 1.$

   (a) $\{H_0, H_1, H_2, H_3\}$ je potpun sistem događaja pa koristeći formulu totalne verovatnoće dobijamo:

   $$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=0}^{3} \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(A \mid H_i) = \frac{3}{4}p(1-p)^2 + \frac{3}{2}p^2(1-p) + p^3.$$

   (b) Koristeći Bajesovu formulu dobijamo:

   $$\mathsf{P}\left(H_2 \mid \overline{A}\right) = \frac{\mathsf{P}(H_2)\,\mathsf{P}\left(\overline{A} \mid H_2\right)}{\mathsf{P}\left(\overline{A}\right)} = \frac{\mathsf{P}(H_2)\,(1-\mathsf{P}(A \mid H_2))}{1-\mathsf{P}(A)} =$$

   $$= \frac{3p^2(1-p)\left(1-\frac{1}{2}\right)}{1-\left(\frac{3}{4}p(1-p)^2 + \frac{3}{2}p^2(1-p) + p^3\right)} =$$

   $$= \frac{\frac{3}{2}p^2(1-p)}{1-\frac{3}{4}p(1-p)^2 - \frac{3}{2}p^2(1-p) - p^3} = \frac{6p^2}{p^2+p+4}.$$

2. $X : \mathcal{U}(-2,1), \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le -2 \\ \frac{x+2}{3} & , \quad -2 < x \le 1 \\ 1 & , \quad 1 < x \end{cases}.$

   Funkciju raspodele vektora (Z,W) možemo naći na sledeći način:

   $F_{Z,W}(z,w) = \mathsf{P}(Z<z, W<w) = \mathsf{P}(X<z, 2X+1<w) =$

   $= \mathsf{P}(X<z, 2X<w-1) = \mathsf{P}\left(X<z, X<\frac{w-1}{2}\right) =$

   $= \mathsf{P}\left(X < \min\left\{z, \frac{w-1}{2}\right\}\right) = F_X\left(\min\left\{z, \frac{w-1}{2}\right\}\right) =$

   $$= \begin{cases} 0 & , \quad \min\left\{z, \frac{w-1}{2}\right\} \le -2 \\ \frac{\min\left\{z, \frac{w-1}{2}\right\}+2}{3} & , \quad -2 < \min\left\{z, \frac{w-1}{2}\right\} \le 1 \\ 1 & , \quad 1 < \min\left\{z, \frac{w-1}{2}\right\} \end{cases}.$$

   Pošto je

   ▷ $\min\left\{z, \frac{w-1}{2}\right\} \le -2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(z \le -2 \ \vee\ \frac{w-1}{2} \le -2\right) \quad \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \quad (z \le -2 \ \vee\ w \le -3),$

▷ $-2 < \min\left\{z, \frac{w-1}{2}\right\} \leq 1 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \left(\left(-2 < z \ \wedge \ -2 < \frac{w-1}{2}\right) \ \wedge \ \left(z \leq 1 \ \vee \ \frac{w-1}{2} \leq 1\right)\right) \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad ((-2 < z \ \wedge \ -3 < w) \ \wedge \ (z \leq 1 \ \vee \ w \leq 3)) \quad \Leftrightarrow$

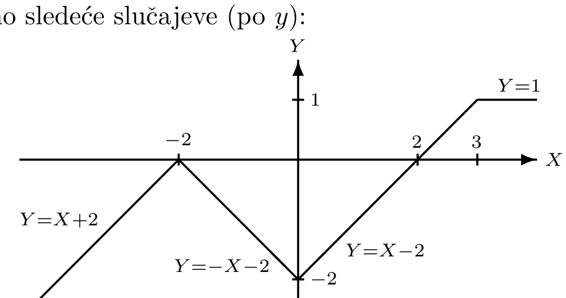
$\Leftrightarrow \quad ((-2 < z \leq 1 \ \wedge \ -3 < w) \ \vee \ (-2 < z \ \wedge \ -3 < w \leq 3)),$

▷ $1 < \min\left\{z, \frac{w-1}{2}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 < z \ \wedge \ 1 < \frac{w-1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad (1 < z \ \wedge \ 3 < w),$

to je: $\qquad F_{Z,W}(z,w) = \begin{cases} 0 & , \ z \leq -2 \ \vee \ w \leq -3 \\ \frac{z+2}{3} & , \ -2 < z \leq 1 \ \wedge \ z \leq \frac{w-1}{2} \\ \frac{w+3}{6} & , \ -2 < z \leq 1 \ \wedge \ z > \frac{w-1}{2} \\ 1 & , \ 1 < z \ \wedge \ 3 < w \end{cases}.$

3. $\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & , \ x < 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x} & , \ x \geq 0 \end{cases}.$

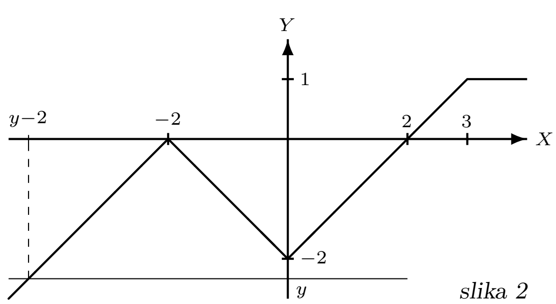
Pri izračunavanju $F_Y(y) = \mathsf{P}(Y < y)$ događaj $\{Y < y\}$ ćemo izraziti preko događaja oblika $\{a < X < b\}$ da bismo iskoristili raspodelu slučajne promenljive X. S obzirom na definiciju slučajne promenljive Y (vidi sliku 1) i tačku $x = 0$ u kojoj se grana gustina slučajne promenljive X, dobijamo sledeće slučajeve (po y):



slika 1

▷ za $y \leq -2$ (pri tome je $y - 2 \leq 0$, vidi sliku 2):

$F_Y(y) = \mathsf{P}(X < y-2) = \int\limits_{-\infty}^{y-2} \varphi_X(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{y-2} \frac{1}{2}e^{x}dx = \frac{1}{2}e^{y-2};$



slika 2

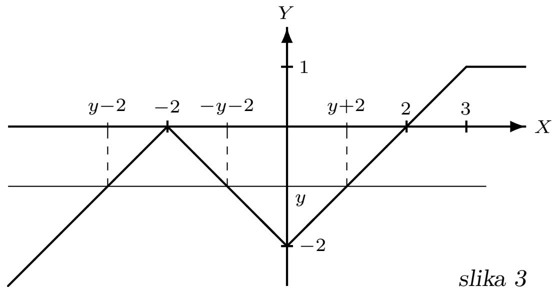
▷ za $-2 < y \leq 0$ (pri tome je $y - 2 \leq 0 \ \wedge \ -y-2 < 0 \ \wedge \ y+2 > 0$, vidi sliku 3):

$F_Y(y) = \mathsf{P}(\{X < y-2\} \ + \ \{-y-2 < X < y+2\}) =$

$= \mathsf{P}(X < y-2) + \mathsf{P}(-y-2 < X < y+2) =$

$= \int\limits_{-\infty}^{y-2} \varphi_X(x)\,dx + \int\limits_{-y-2}^{y+2} \varphi_X(x)\,dx =$

$= \int\limits_{-\infty}^{y-2} \frac{1}{2}e^x dx + \int\limits_{-y-2}^{0} \frac{1}{2}e^x dx + \int\limits_{0}^{y+2} \frac{1}{2}e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{e^2}\left(e^{-y} - \frac{1}{2}e^y\right);$

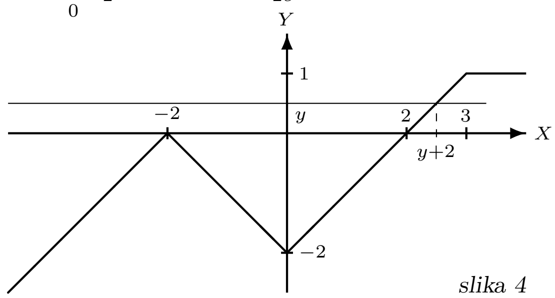


slika 3

▷ za $0 < y \leq 1$ (pri tome je $y+2 > 0$, vidi sliku 4):

$F_Y(y) = \mathsf{P}(X < y+2) = \int\limits_{-\infty}^{y+2} \varphi_X(x)\,dx =$

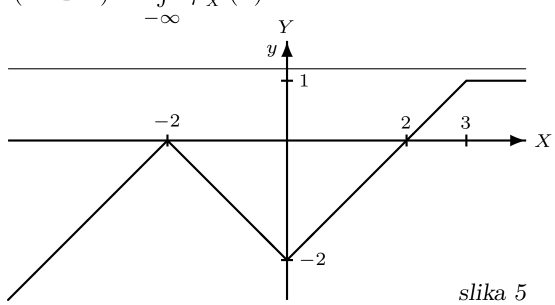
$= \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^x dx + \int\limits_{0}^{y+2} \frac{1}{2}e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{2e^2}e^{-y};$



slika 4

▷ za $1 < y$ (vidi sliku 5):

$F_Y(y) = \mathsf{P}(X \in R) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(x)\,dx = 1.$



slika 5

4. Neka je X_n slučajna promenljiva koja predstavlja broj studenata koji polože, od n studenata koji su izašli na ispit. X_n ima binomnu $\mathcal{B}(n, 0.3)$ raspodelu, pri čemu je $\mathsf{E}(X_n) = np = 0.3n$ i $\mathsf{D}(X_n) = npq = 0.21n$, gde je $p = 0.3$ i $q = 1 - p = 0.7$.

(a) $\mathsf{P}(X_{100} \geq 35) = 1 - \mathsf{P}(X_{100} < 35) = 1 - \mathsf{P}\left(\frac{X_{100}-np}{\sqrt{npq}} < \frac{35-np}{\sqrt{npq}}\right) \approx$

$\approx 1 - \mathsf{P}\left(\frac{X_{100}-np}{\sqrt{npq}} < 1.09109\right) \overset{[1]}{\approx} 1 - \phi(1.09109) \approx 1 - 0.8621 \approx 0.1379.$

(b) Rešavamo po n jednačinu $\mathsf{P}(X_n \geq 50) = 0.9$:

$\mathsf{P}(X_n \geq 50) = 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \mathsf{P}(X_n < 50) = 0.9 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad 1 - \mathsf{P}\left(\frac{X_n-np}{\sqrt{npq}} < \frac{50-np}{\sqrt{npq}}\right) = 0.9 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad 1 - \mathsf{P}\left(\frac{X_n-0.3\,n}{\sqrt{0.21\,n}} < \frac{50-0.3\,n}{\sqrt{0.21\,n}}\right) = 0.9 \quad \overset{[1]}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \quad 1 - \phi\left(\frac{50-0.3\,n}{\sqrt{0.21\,n}}\right) \approx 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad \phi\left(\frac{50-0.3\,n}{\sqrt{0.21\,n}}\right) \approx 0.1 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \frac{50-0.3\,n}{\sqrt{0.21\,n}} \approx \phi^{-1}(0.1) = -\phi^{-1}(0.9) \approx -1.28 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad 50 - 0.3\,n \approx -1.28\sqrt{0.21\,n} \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad 0.3n - 1.28\sqrt{0.21}\sqrt{n} - 50 \approx 0 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad (\sqrt{n} \approx -11.9693 \ \vee \ \sqrt{n} \approx 13.9245) \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{n} \approx 13.9245 \quad \Leftrightarrow \quad n \approx 13.9245^2 \approx 193.892.$

Dakle, na ispit treba da izađe (približno) 194 studenta.

[1] - *Primena Moavr - Laplasove teoreme.*

5. Da bi data funkcija bila gustina neke slučajne promenljive, mora da važi

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = \int_{c}^{\infty} be^{-ax}dx = \tfrac{b}{a}e^{-ac}.$$

Rešavanjem ove jednačine po c: $1 = \frac{b}{a}e^{-ac} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = e^{-ac} \Leftrightarrow \ln\frac{a}{b} = -ac$ dobijamo (obratiti pažnju na uslove $a > 0$ i $b > 0$):

$$c = -\tfrac{1}{a}\ln\tfrac{a}{b}.$$

Za $b = ae^a$ dobijamo $c = -\frac{1}{a}\ln\frac{a}{ae^a} = -\frac{1}{a}\ln e^{-a} = -\frac{-a}{a} = 1$, pa obeležje X ima gustinu:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} ae^{a(1-x)} & , \quad x \geq 1 \\ 0 & , \quad x < 1 \end{cases}.$$

Parametar a možemo oceniti npr. metodom momenata.

$\mathsf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_X(x)\,dx = \int_{1}^{\infty} xae^{a(1-x)}dx = \frac{1+a}{a}.$

Izjednačavanjem matematičkog očekivanja obeležja X sa uzoračkim momentom reda 1 (uzoračkom aritmetičkom sredinom) dobijamo:

$$\frac{1+a}{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \Leftrightarrow \quad 1 = a\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\right) \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - 1}.$$

Time za ocenu parametra a dobijamo statistiku:

$$\hat{a} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - 1}.$$

6. (a) Za datu seriju od $n = 1+3+4+10+6+4+2 = 30$ merenja izračunavamo uzoračku aritmetičku sredinu i uzoračku disperziju (za svaki interval iz tabele, kao količinu padavina uzimamo sredinu intervala):

$$\overline{x}_{30} = \tfrac{1}{30}\left(2.5 + 3\cdot 7.5 + 4\cdot 12.5 + 10\cdot 17.5 + 6\cdot 22.5 + 4\cdot 27.5 + 2\cdot 32.5\right) = \\ = \tfrac{56}{3} \approx 18.6667,$$

$$\overline{s}^2_{30} = \tfrac{1}{30}\Big(\left(2.5-\tfrac{56}{3}\right)^2 + 3\cdot\left(7.5-\tfrac{56}{3}\right)^2 + 4\cdot\left(12.5-\tfrac{56}{3}\right)^2 + \\ +10\cdot\left(17.5-\tfrac{56}{3}\right)^2 + 6\cdot\left(22.5-\tfrac{56}{3}\right)^2 + \\ +4\cdot\left(27.5-\tfrac{56}{3}\right)^2 + 2\cdot\left(32.5-\tfrac{56}{3}\right)^2\Big) = \\ = \tfrac{1901}{36} \approx 52.8056,$$

$$\overline{s}_{30} = \sqrt{\tfrac{1901}{36}} \approx 7.26674.$$

Iz tablica Studentove raspodele nalazimo da je

$$t_{30-1;\frac{1+0.95}{2}} = t_{29;0.975} \approx 2.045,$$

te je traženi interval poverenja:

$$\left(\overline{x}_{30} - \tfrac{t_{29;0.975}}{\sqrt{30-1}}\overline{s}_{30}\ ,\ \overline{x}_{30} + \tfrac{t_{29;0.975}}{\sqrt{30-1}}\overline{s}_{30}\right) = (15.9071\ ,\ 21.4262)\,.$$

(b) Pošto je zadan isti prag značajnosti $0.05 = 1 - 0.95$ kao pod (a), i pošto 36 ne pripada nađenom 95% - om intervalu poverenja, odbacujemo našu hipotezu.

7. Obeležimo stanja sistema istim slovima kao odgovarajuće tačke. Ako se sistem nalazi u tački A, tada ostaje u tački A sa verovatnoćom $\frac{1}{2}$, ili prelazi u tačke B ili C sa verovatnoćama p_{AB} i p_{AC} za koje važi $p_{AB} + p_{AC} = \frac{1}{2}$ i $p_{AB} : p_{AC} = 3 : 1$ (tj. $\frac{p_{AB}}{p_{AC}} = \frac{3}{1}$); rešavajući ovaj sistem jednačina dobijamo $p_{AB} = \frac{3}{8}$ i $p_{AC} = \frac{1}{8}$. Na isti način nalazimo $p_{BA} = \frac{1}{3}$ i $p_{BC} = \frac{1}{6}$, kao i $p_{CA} = \frac{1}{5}$ i $p_{CB} = \frac{3}{10}$. Tako smo dobili matricu prelaza $P = [p_{XY}]\,,\ X, Y \in \{A, B, C\}$.

Matrica prelaza za jedan korak:

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Matrica prelaza za dva koraka:

$$P^2 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{33}{80} & \frac{3}{16} \\ \frac{11}{30} & \frac{17}{40} & \frac{5}{24} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{8} & \frac{13}{40} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Vektor početnih verovatnoća je $\mathbf{p}^0 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ [1 \quad 0 \quad 0] \end{array}$ te za vektor verovatnoća položaja čestice nakon dva koraka dobijamo

$$\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}^0 \cdot P^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \left[\frac{2}{5} \quad \frac{33}{80} \quad \frac{3}{16}\right] \end{array},$$

pa je nakon dva koraka najverovatniji položaj čestice u tački B.

8. Pošto slučajne promenljive U i V imaju redom $\mathcal{N}(0,1)$ i $\mathcal{U}(-2,2)$ raspodelu, sledi da je $\mathsf{E}(U) = 0$, $\mathsf{E}(V) = \frac{-2+2}{2} = 0$, $\mathsf{D}(U) = 1$ i

$\mathsf{D}(V) = \frac{(2-(-2))^2}{12} = \frac{4}{3}$, a iz $\mathsf{D}(U) = \mathsf{E}\left(U^2\right) - \left(\mathsf{E}(U)\right)^2$ dobijamo da je $\mathsf{E}\left(U^2\right) = \mathsf{D}(U) + \left(\mathsf{E}(U)\right)^2 = 1 + 0^2 = 1$ i na isti način dobijamo $\mathsf{E}\left(V^2\right) = \mathsf{D}(V) + \left(\mathsf{E}(V)\right)^2 = \frac{4}{3}$.

$m_X(t) = \mathsf{E}(X_t) = \mathsf{E}\left(2^t\, U + t^2\, V\right) \overset{[1]}{=} 2^t\, \mathsf{E}(U) + t^2\, \mathsf{E}(V) = 2^t \cdot 0 + t^2 \cdot 0 = 0,$

$$\begin{aligned}
\mathsf{K}_X(t,s) &= \mathsf{E}\left((X_t - m_X(t))(X_s - m_X(s))\right) = \mathsf{E}(X_t\, X_s) = \\
&= \mathsf{E}\left(\left(2^t\, U + t^2\, V\right)\left(2^s\, U + s^2\, V\right)\right) = \\
&= \mathsf{E}\left(2^{s+t}\, U^2 + \left(2^t s^2 + 2^s t^2\right)\, U\, V + t^2 s^2\, V^2\right) \overset{[1],[2]}{=} \\
&= 2^{s+t}\mathsf{E}\left(U^2\right) + \left(2^t s^2 + 2^s t^2\right)\mathsf{E}(U)\,\mathsf{E}(V) + t^2 s^2 \mathsf{E}\left(V^2\right) = \\
&= 2^{s+t} \cdot 1 + 0 + (ts)^2 \cdot \frac{4}{3} = 2^{s+t} + \frac{4}{3}(ts)^2,
\end{aligned}$$

$\mathsf{D}_X(t) = \mathsf{K}_X(t,t) = 2^{t+t} + \frac{4}{3}(tt)^2 = 4^t + \frac{4}{3}t^4.$

[1] - *Matematičko očekivanje je linearna transformacija.*

[2] - *Slučajne promenljive U i V su nezavisne pa je* $\mathsf{E}(U\,V) = \mathsf{E}(U)\,\mathsf{E}(V)$.

16.12.2000.

1. Igrač baca novčić 3 puta. Ako pismo padne bar jednom, igrač izvlači 2 kuglice sa vraćanjem iz kutije u kojoj se nalaze 3 bele i 2 crvene kuglice. Ako pismo ne padne ni jednom, igrač izvlači 2 kuglice bez vraćanja iz iste kutije.
   (a) Izračunati verovatnoću da će igrač izvući 2 bele kuglice.
   (b) Ako je igrač izvukao bar 1 crvenu kuglicu, koliko iznosi verovatnoća da je pri bacanju novčića 3 puta pao grb?

2. Diskretna slučajna promenljiva X ima zakon raspodele: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, a slučajna promenljiva Y ima uniformnu raspodelu $\mathcal{U}(-3,-1)$. Naći funkciju raspodele slučajne promenljive $Z = X\,Y$.

3. U unutrašnjosti trougla T sa temenima u tačkama $(0,0)$, $(1,0)$ i $(0,1)$ se na slučajan način bira tačka $A(x,y)$. Naći raspodelu slučajne promenljive Z koja predstavlja obim pravougaonika sa temenima $(0,0)$, $(x,0)$, (x,y) i $(0,y)$.

4. Košarkaš izvodi 2 slobodna bacanja. Verovatnoća da će oba puta pogoditi iznosi 0.7, da će samo jednom pogoditi 0.2 i da će oba puta promašiti 0.1.
   (a) Ako u toku prvenstva igrač izvodi 100 puta po 2 slobodna bacanja, izračunati verovatnoću da će postići bar 170 koševa.

(b) Koliko puta igrač treba da izvede po 2 slobodna bacanja pa da sa verovatnoćom 0.99 postigne bar 100 koševa?

5. Obeležje X je dato zakonom raspodele: $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 12 \\ 2\theta & 3\theta & \theta & 1-6\theta \end{pmatrix}$.

   (a) Odrediti konstante a i b tako da statistika $\overline{\theta} = a + b\overline{X}_n$ bude centrirana ocena parametra θ.

   (b) Ispitati saglasnost uzorka:

x_i	2	5	7	12
m_i	12	22	10	6

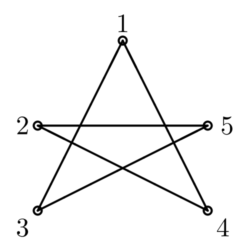
   sa datom raspodelom i pragom značajnosti $\alpha = 0.1$.

6. U osam merenja jedne veličine dobijeni su sledeći rezultati: 12.32, 14.58, 10.18, 13.82, 11.04, 12.12, 14.88, 11.06. Pretpostavlja se da obeležje X ima normalnu raspodelu.

   (a) Naći 90% interval poverenja za nepoznato matematičko očekivanje m obeležja X.

   (b) Naći 90% jednostrani interval poverenja za nepoznatu disperziju σ^2 obeležja X.

7. Čestica se kreće po čvorovima grafa sa slike pri čemu u svakom koraku iz nekog čvora sa jednakim verovatnoćama prelazi u bilo koji povezan čvor. Naći matricu prelaza kretanja čestice po čvorovima grafa (za jedan korak) i odrediti da li je verovatnije da se nakon drugog koraka čestica našla u čvoru 5 ako je na početku bila u čvoru 1 ili ako je na početku bila u čvoru 2.



8. Naći matematičko očekivanje, disperziju i autokovarijansnu funkciju slučajnog procesa $X_t = \sum_{n=0}^{3} e^{nt} U_n,\ t \in \mathbb{R}$, gde su $U_n,\ n \in \{0,1,2,3\}$ nezavisne slučajne promenljive sa normalnom $\mathcal{N}(n, 2^{-n})$ raspodelom.

Rešenja:

1. Događaji H_1: "*pismo je palo bar jednom*" i H_2: "*pismo nije palo nijednom*" čine potpun sistem događaja pri čemu je $\mathsf{P}(H_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ i $\mathsf{P}(H_1) = 1 - \mathsf{P}(H_2) = \frac{7}{8}$. Za događaj A: "*igrač izvlači 2 bele kuglice*" je $\mathsf{P}(A \mid H_1) = \frac{3}{3+2} \cdot \frac{3}{3+2} = \frac{9}{25}$ i $\mathsf{P}(A \mid H_2) = \frac{3}{3+2} \cdot \frac{3-1}{(3-1)+2} = \frac{3}{10}$.

   (a) Na osnovu formule totalne verovatnoće je:
   $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A \mid H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A \mid H_2) =$
   $= \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{25} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{10} = \frac{141}{400} = 0.3525.$

(b) Pošto je $\mathsf{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathsf{P}(A) = \frac{259}{400} = 0.6475,$

$\mathsf{P}\left(\overline{A} \mid H_2\right) = 1 - \mathsf{P}(A \mid H_2) = \frac{7}{10},$

na osnovu Bajesove formule imamo:

$$\mathsf{P}\left(H_2 \mid \overline{A}\right) = \frac{\mathsf{P}(H_2)\,\mathsf{P}\left(\overline{A} \mid H_2\right)}{\mathsf{P}\left(\overline{A}\right)} = \frac{\frac{1}{8}\cdot\frac{7}{10}}{\frac{259}{400}} = \frac{5}{37} = 0.1351.$$

2. $\mathcal{R}_Z = \mathcal{R}_X \cdot \mathcal{R}_Y = 1\cdot[-3,-1] \cup 2\cdot[-3,-1] = [-6,-1],$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \quad y \in (-\infty,-3] \\ \frac{y+3}{2} & , \quad y \in (-3,-1] \\ 1 & , \quad y \in (-1,\infty) \end{cases}.$$

Događaji $\{X=1\}$ i $\{X=2\}$ čine potpun sistem događaja pa je

$F_Z(z) = \mathsf{P}(Z<z) = \mathsf{P}(XY<z) =$

$= \mathsf{P}(X=1)\,\mathsf{P}(XY<z \mid X=1) + \mathsf{P}(X=2)\,\mathsf{P}(XY<z \mid X=2) =$

$= \frac{1}{3}\mathsf{P}(Y<z) + \frac{2}{3}\mathsf{P}(2Y<z) = \frac{1}{3}\mathsf{P}(Y<z) + \frac{2}{3}\mathsf{P}\left(Y<\frac{1}{2}z\right) =$

$= \frac{1}{3}F_Y(z) + \frac{2}{3}F_Y\left(\frac{1}{2}z\right) = \ldots$

- za $z \le -6$ $\left(\frac{1}{2}z \le -3\right)$ važi:

  $F_Z(z) = \dfrac{1}{3}\cdot 0 + \dfrac{2}{3}\cdot 0 = 0;$

- za $z \in (-6,-3]$ $\left(\frac{1}{2}z \in \left[-3,-\frac{3}{2}\right)\right)$ važi:

  $F_Z(z) = \dfrac{1}{3}\cdot 0 + \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\frac{z}{2}+3}{2} = \dfrac{1}{6}z + 1;$

- za $z \in (-3,-2]$ $\left(\frac{1}{2}z \in \left(-\frac{3}{2},-1\right]\right)$ važi:

  $F_Z(z) = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{z+3}{2} + \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\frac{z}{2}+3}{2} = \dfrac{1}{3}z + \dfrac{3}{2};$

- za $z \in (-2,-1]$ $\left(\frac{1}{2}z \in \left(-1,-\frac{1}{2}\right]\right)$ važi:

  $F_Z(z) = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{z+3}{2} + \dfrac{2}{3}\cdot 1 = \dfrac{1}{6}z + \dfrac{7}{6};$

- za $z \in (-1,\infty)$ $\left(\frac{1}{2}z > -\frac{1}{2}\right)$ važi:

  $F_Z(z) = \dfrac{1}{3}\cdot 1 + \dfrac{2}{3}\cdot 1 = 1.$

Prema tome, imamo:
$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & , \quad z \in (-\infty,-6] \\ \frac{1}{6}z+1 & , \quad z \in (-6,-3] \\ \frac{1}{3}z+\frac{3}{2} & , \quad z \in (-3,-2] \\ \frac{1}{6}z+\frac{7}{6} & , \quad z \in (-2,-1] \\ 1 & , \quad z \in (-1,\infty) \end{cases}.$$

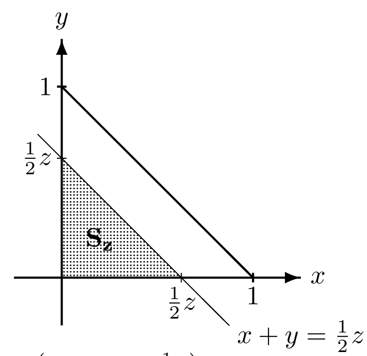
3. Neka slučajne promenljive X i Y redom predstavljaju x i y koordinatu izabrane tačke A. Pošto se tačka A slučajno bira iz trougla

površine $\frac{1}{2}$, to znači da slučajni vektor (X,Y) ima uniformnu $\mathcal{U}(T)$ raspodelu tj. gustina vektora (X,Y) glasi:

$$\varphi_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{1}{2}} & , \quad (x,y) \in T \\ 0 & , \quad (x,y) \notin T \end{cases} = \begin{cases} 2 & , \quad (x,y) \in T \\ 0 & , \quad (x,y) \notin T \end{cases} .$$

Slučajnu promenljivu Z možemo izraziti preko slučajnog vektora (X,Y) kao $Z = 2X+2Y$ pa funkciju raspodele slučajne promenljive Z nalazimo koristeći raspodelu slučajnog vektora (X,Y).

Obeležimo:
$S_z = \left\{ (x,y) \in T \mid x+y < \frac{1}{2}z \right\}$.



$F_Z(z) = \mathsf{P}(Z<z) = \mathsf{P}(2X+2Y<z) = \mathsf{P}\left(X+Y<\frac{1}{2}z\right) =$
$= \iint\limits_{S_z} \varphi_{X,Y}(x,y)\,dxdy = \ldots$

- za $z \le 0$:
  $F_Z(z) = \iint\limits_{\emptyset} \varphi_{X,Y}(x,y)\,dxdy = 0;$
- za $0 < z \le 2$ (vidi sliku):
  $$F_Z(z) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}z} \left(\int\limits_0^{\frac{1}{2}z-x} 2dy \right) dx = 2\int\limits_0^{\frac{1}{2}z} \left(\frac{1}{2}z - x\right) dx =$$
  $$= z\int\limits_0^{\frac{1}{2}z} dx - 2\int\limits_0^{\frac{1}{2}z} xdx = \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{4}z^2 = \frac{1}{4}z^2;$$
- za $2 < z$:
  $F_Z(z) = \iint\limits_{T} \varphi_{X,Y}(x,y)\,dxdy = 1.$

4. Slučajna promenljiva X_i, koja predstavlja broj pogodaka u i-tom izvođenju 2 slobodna bacanja, ima zakon raspodele $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$ i numeričke karakteristike

   $\mathsf{E}(X_i) = 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.7 = 1.6,$
   $\mathsf{D}(X_i) = \mathsf{E}\left(X_i^2\right) - \mathsf{E}^2(X_i) = 0^2 \cdot 0.1 + 1^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.7 - 1.6^2 = 0.44.$

   Slučajna promenljiva $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ predstavlja broj pogodaka pri n izvođenja 2 slobodna bacanja, i njene karakteristike su

$\mathsf{E}(S_n) = \mathsf{E}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{E}(X_i) = 1.6\,n,$

$\mathsf{D}(S_n) = \mathsf{D}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{D}(X_i) = 0.44\,n$

(svako izvođenje 2 slobodna bacanja je nezavisno od ostalih izvođenja).

(a) Za $n = 100$ izračunavamo verovatnoću:

$\mathsf{P}(S_{100} \geq 170) = 1 - \mathsf{P}(S_{100} < 170) =$

$= 1 - \mathsf{P}\left(\frac{S_{100} - \mathsf{E}(S_{100})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{100})}} < \frac{170 - \mathsf{E}(S_{100})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{100})}}\right) \overset{[1]}{\approx} 1 - \phi\left(\frac{170 - \mathsf{E}(S_{100})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{100})}}\right) =$

$= 1 - \phi\left(\frac{170 - 100 \cdot 1.6}{\sqrt{100 \cdot 0.44}}\right) \approx 1 - \phi(1.51) \approx 1 - 0.9345 \approx 0.0655.$

(b) Rešavamo po n jednačinu $\mathsf{P}(S_n \geq 100) = 0.99$:

$\mathsf{P}(S_n \geq 100) = 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \mathsf{P}(S_n < 100) = 0.99 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \mathsf{P}(S_n < 100) = 0.01 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(\frac{S_n - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}} < \frac{100 - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}}\right) = 0.01 \quad \Leftrightarrow$

$\overset{[1]}{\Leftrightarrow} \quad \phi\left(\frac{100 - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}}\right) \approx 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad \phi\left(\frac{100 - 1.6n}{\sqrt{0.44n}}\right) \approx 0.01 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \frac{100 - 1.6n}{\sqrt{0.44n}} \approx \phi^{-1}(0.01) = -\phi^{-1}(0.99) \approx -2.33 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad 1.6n - 2.33\sqrt{0.44}\sqrt{n} - 100 \approx 0 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{n} = t \ \wedge \ 1.6t^2 - 2.33\sqrt{0.44}t - 100 \approx 0\right) \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad (\sqrt{n} = t \ \wedge \ (t \approx -7.43745 \ \vee \ t \approx 8.40342)) \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad (\sqrt{n} \approx -7.43745 \ \vee \ \sqrt{n} \approx 8.40342) \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{n} \approx 8.40342 \quad \Leftrightarrow \quad n \approx 8.40342^2 \approx 70.6174.$

Dakle, potrebno je da oko 71 put izvede po dva slobodna bacanja.

[1] - *Primena centralne granične teoreme.*

5. (a) Rešavamo po a i b jednačinu: $\mathsf{E}(\overline{\theta}) = \theta.$

$\mathsf{E}(X) = 2 \cdot 2\theta + 5 \cdot 3\theta + 7 \cdot \theta + 12 \cdot (1 - 6\theta) = 12 - 46\theta,$

$\mathsf{E}(\overline{\theta}) = \mathsf{E}(a + b\overline{X}_n) = a + b\mathsf{E}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = a + b\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{E}(X_i) =$

$= a + b\frac{1}{n}(n\mathsf{E}(X)) = a + b\mathsf{E}(X) = a + b(12 - 46\theta) =$

$= a + 12b - 46b\theta.$

Dakle:

$\mathsf{E}(\overline{\theta}) = \theta \quad \Leftrightarrow \quad a + 12b - 46b\theta = \theta \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad a + 12b - (46b + 1)\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a + 12b = 0 \ \wedge \ 46b + 1 = 0) \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \left(b = -\frac{1}{46} \ \wedge \ a = \frac{6}{23}\right).$

(b) Pošto je ocena $\overline{\theta}$ iz (a) centrirana, možemo je smatrati "dobrom" ocenom parametra θ, pa je možemo koristiti za izračunavanje vrednosti parametra θ.

Veličina uzorka je $n = 12 + 22 + 10 + 6 = 50$, uzoračka aritmetička sredina je $\overline{x}_{50} = \frac{1}{50}(2 \cdot 12 + 5 \cdot 22 + 7 \cdot 10 + 12 \cdot 6) = \frac{138}{25} = 5.52$, te dobijamo

$$\theta = a + b\overline{x}_{50} = \tfrac{6}{23} - \tfrac{1}{46} \cdot 5.52 = \tfrac{81}{575} \approx 0.140867.$$

Prema tome, dobijamo sledeće teorijske verovatnoće:
$p_1 = \mathsf{P}(X = 2) = 2\theta = \frac{162}{575} \approx 0.2817$,
$p_2 = \mathsf{P}(X = 5) = 3\theta = \frac{243}{575} \approx 0.4226$,
$p_3 = \mathsf{P}(X = 7) = \theta = \frac{81}{575} \approx 0.1409$,
$p_4 = \mathsf{P}(X = 12) = 1 - 6\theta = \frac{89}{575} \approx 0.1548$.
Na osnovu dobijenih teorijskih verovatnoća i datog uzorka:

x_i	2	5	7	12
m_i	12	22	10	6
p_i	$\frac{162}{575}$	$\frac{243}{575}$	$\frac{81}{575}$	$\frac{89}{575}$

izračunavamo vrednost χ^2 statistike: $z = \sum\limits_{i=1}^{4} \frac{(m_i - 50\, p_i)^2}{50\, p_i} \approx 1.9768$.

Pošto je $z < 4.61 \approx \chi^2_{\alpha;4-1-l} = \chi^2_{0.1;2}$ (gde je $l = 1$ broj ocenjenih parametara), konstatujemo da uzorak ne protivreči hipotezi.

6. Za zadani uzorak obima $n = 8$ izračunavamo uzoračku aritmetičku sredinu i uzoračku disperziju:

$\overline{x}_8 = \frac{1}{8}\left(12.32+14.58+10.18+13.82+11.04+12.12+14.88+11.06\right) = 12.5$,

$\overline{s}^2_8 = \frac{1}{8}\left(12.32^2+14.58^2+10.18^2+13.82^2+11.04^2+12.12^2+14.88^2+11.06^2\right) - 12.5^2 =$
$= 2.6872$,

$\overline{s}_8 = \sqrt{\overline{s}^2_8} \approx 1.6393$,

a iz tablica Studentove i χ^2 raspodele za nivo poverenja $\beta = 0.9$ odnosno prag značajnosti $\alpha = 1 - \beta = 0.1$ očitavamo:

$$t_{n-1;\frac{1+\beta}{2}} = t_{7;0.95} \approx 1.895, \qquad \chi^2_{n-1;\alpha} = \chi^2_{7;0.1} \approx 2.83.$$

(a) 90% interval poveranja za matematičko očekivanje (kada disperzija nije poznata):

$$I = \left[\overline{x}_8 - t_{7;0.95}\tfrac{\overline{s}_8}{\sqrt{7}}, \overline{x}_8 + t_{7;0.95}\tfrac{\overline{s}_8}{\sqrt{7}}\right] = [11.3259, 13.6741].$$

(b) 90% jednostrani interval poveranja za disperziju:

$$I = \left(0, \tfrac{n\overline{s}^2_8}{\chi^2_{7;0.1}}\right] = (0, 7.59633].$$

7. Matrice prelaza za jedan i dva koraka:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad P^2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Posmatramo početne raspodele verovatnoća:

$$\mathbf{u}(0) = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{(čestica je na početku bila u čvoru 1),}$$

$$\mathbf{v}(0) = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{(čestica je na početku bila u čvoru 2).}$$

Za raspodele verovatnoća položaja čestice nakon dva koraka u ova dva slučaja dobijamo:

$$\mathbf{u}(2) = \mathbf{u}(0) \cdot P^2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{array},$$

$$\mathbf{v}(2) = \mathbf{v}(0) \cdot P^2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Vidimo da je $u_5(2) = \frac{1}{4} > 0 = v_5(2)$ tj. verovatnije je da se nakon drugog koraka našla u čvoru 5 ako je na početku bila u čvoru 1 (ako je na početku bila u čvoru 2, tada se nakon 2 koraka sigurno ne nalazi u čvoru 5).

8. Iz $U_n : \mathcal{N}(n, 2^{-n})$ imamo da je $\mathsf{E}(U_n) = n$ i $\mathsf{D}(U_n) = 2^{-2n}$.

   * Koristeći linearnost matematičkog očekivanja dobijamo:
   $m_X(t) = \mathsf{E}(X_t) = \mathsf{E}\left(\sum\limits_{n=0}^{3} e^{nt} U_n\right) \overset{[1]}{=} \sum\limits_{n=0}^{3} e^{nt} \mathsf{E}(U_n) = \sum\limits_{n=0}^{3} n e^{nt}.$

   * $\mathsf{K}_X(t,s) = \mathsf{E}\left((X_t - m_X(t))(X_s - m_X(s))\right) =$
   $= \mathsf{E}\left(\left(\sum\limits_{n=0}^{3} e^{nt} U_n - \sum\limits_{n=0}^{3} n e^{nt}\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{3} e^{ns} U_n - \sum\limits_{n=0}^{3} n e^{ns}\right)\right) =$
   $= \mathsf{E}\left(\sum\limits_{n=0}^{3} e^{nt}(U_n - n) \cdot \sum\limits_{n=0}^{3} e^{ns}(U_n - n)\right) =$
   $= \mathsf{E}\left(\sum\limits_{n=0}^{3} e^{n(t+s)}(U_n - n)^2 + \sum\limits_{\substack{n,m=0\\ n\neq m}}^{3} e^{nt+ms}(U_n - n)(U_m - m)\right) =$
   $\overset{[1],[2]}{=} \sum\limits_{n=0}^{3} e^{n(t+s)} \mathsf{E}\left((U_n - n)^2\right) + \sum\limits_{\substack{n,m=0\\ n\neq m}}^{3} e^{nt+ms} \mathsf{E}(U_n - n)\,\mathsf{E}(U_m - m) =$
   $\overset{[3]}{=} \sum\limits_{n=0}^{3} 2^{-2n} e^{n(t+s)} = \sum\limits_{n=0}^{3} \left(\frac{1}{4} e^{(t+s)}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{4} e^{(t+s)}\right)^4}{1 - \frac{1}{4} e^{(t+s)}} = \frac{1}{64} \frac{256 - e^{4(t+s)}}{4 - e^{(t+s)}}.$

   * <u>Prvi način</u>: koristeći osobine disperzije (U_n su nezavisne) dobijamo
   $\mathsf{D}_X(t) = \mathsf{D}\left(\sum\limits_{n=0}^{3} e^{nt} U_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{3} \left(e^{nt}\right)^2 \mathsf{D}(U_n) = \sum\limits_{n=0}^{3} 2^{-2n} e^{2nt} =$
   $= \sum\limits_{n=0}^{3} \left(\frac{1}{4} e^{2t}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{4} e^{2t}\right)^4}{1 - \frac{1}{4} e^{2t}} = \frac{1}{64} \frac{256 - e^{8t}}{4 - e^{2t}}.$

   <u>Drugi način</u>: koristeći autokorelacionu funkciju dobijamo
   $\mathsf{D}_X(t) = \mathsf{K}_X(t,t) = \frac{1}{64} \frac{256 - e^{4(t+t)}}{4 - e^{(t+t)}} = \frac{1}{64} \frac{256 - e^{8t}}{4 - e^{2t}}.$

   [1] - *Matematičko očekivanje je linearna funkcija.*

[2] - *Slučajne promenljive* U_n *su nezavisne pa su nezavisne i* $U_n - n$, *odakle sledi da je* $\mathsf{E}\left((U_n - n)(U_m - m)\right) = \mathsf{E}(U_n - n)\ \mathsf{E}(U_m - m)$ *za sve* $n \neq m$.

[3] - *Koristimo:* $\mathsf{E}\left((U_n - n)^2\right) = \mathsf{D}(U_n) = 2^{-2n}$,
$\mathsf{E}(U_n - n) = \mathsf{E}(U_n - \mathsf{E}(U_n)) = 0$.

01.02.2001.

1. Baca se kockica za "Ne ljuti se čoveče". Ako se pojavi broj veći od 4, na slučajan način se bira u ravni jedna tačka iz kvadrata sa temenima u tačkama $(1,0)$, $(2,1)$, $(1,2)$ i $(0,1)$. U suprotnom, na slučajan način se bira jedna tačka iz kruga sa centrom u tački $(1,1)$ poluprečnika 1.

   (a) Naći verovatnoću da je zbir koordinata izbrane tačke manji od 2.

   (b) Ako je zbir koordinata izabrane tačke manji od 2, koliko iznosi verovatnoća da su obe koordinate manje od 1?

2. Slučajna promenljiva X ima uniformnu $\mathcal{U}(0,2)$ raspodelu, a slučajna promenljiva Y pod uslovom $X = x$ ima uniformnu $\mathcal{U}\left(\frac{1}{2}x, x\right)$ raspodelu.

   (a) Naći matematičko očekivanje slučajne promenljive Y.

   (b) Naći raspodelu slučajnog vektora $\left(X^2, X+2\right)$.

3. Slučajna promenljiva X uzima vrednosti iz skupa $\mathbb{N}$ sa verovatnoćama $p_n = \mathsf{P}(X = n) = \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Naći matematičko očekivanje slučajne promenljive $Y = \sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$.

4. Slučajna promenljiva X ima binomnu $\mathcal{B}\left(10, \frac{1}{4}\right)$ raspodelu. Oceniti verovatnoću $\mathsf{P}\left(\left|\frac{1}{10}X - \frac{1}{4}\right| > 0.2\right)$

   (a) koristeći nejednakost Čebiševa,

   (b) koristeći Moavr - Laplasovu teoremu.

5. Dato je obeležje X zakonom raspodele:

$$\mathsf{P}(X = k) = \frac{a^{k-3}}{(k-3)!}e^{-a}, \quad k \in \{3,4,5,\ldots\}, \quad (a > 0)$$

   i dat je uzorak dobijen na osnovu izvršenih 576 merenja:

realizacije eksperimenata:	3	4	5	6	7	8
broj realizacija eksperimenata:	229	211	93	35	7	1

   (a) Naći jednu centriranu ocenu parametra a obeležja X.

   (b) χ^2 - testom ispitati da li je, sa pragom značajnosti $\alpha = 0.1$, dati uzorak u saglasnosti sa obeležjem X.

6. Poznato je da obeležje X, koje predstavlja vreme (u satima) inkubacije nekog virusa kod pacijenata ima normalnu raspodelu. Odrediti 90% jednostrani i dvostrani interval poverenja za disperziju obeležja X na osnovu slučajnog uzorka prikazanog u tabeli:

vreme inkubacije	$[0,6)$	$[6,7)$	$[7,9)$	$[9,12)$	$[12,14)$	$[14,16)$	$[16,19]$
broj pacijenata	1	3	4	10	6	4	2

7. Slučajni proces $X_n,\ n \in \mathbb{N}$, koji predstavlja položaj čestice u trenutku $n \in \mathbb{N}$ koja se kreće po celobrojnim tačkama iz intervala $[1,100]$ (tj. skup stanja je $\{1,2,3,\ldots,100\}$), određen je sledećim uslovnim verovatnoćama:

   $\mathsf{P}\left(X_{n+1}=100 \mid X_n=100\right)=1,$

   $$\mathsf{P}\left(X_{n+1}=j \mid X_n=i\right)=\begin{cases}\frac{1}{4} & , \quad j=1 \\ \frac{3}{4} & , \quad j=i+1 \\ 0 & , \quad j \notin \{1,i+1\}\end{cases} \quad , \quad \text{za } \ i \neq 100.$$

   (a) Naći matricu prelaza za jedan korak.

   (b) Ako se na početku čestica sa jednakim verovatnoćama nalazi u bilo kojoj od tačaka iz skupa mogućih stanja, naći zakon raspodele verovatnoća položaja čestice u trenutku $n=2$.

8. Slučajni proces $X_t,\ t \in (0,\infty)$ je određen svojim jednodimenzionalnim raspodelama $X_t : \mathcal{U}(0,t)$. Neka je Y nezavisna (u odnosu na X_t) slučajna promenljiva sa eksponencijalnom $\mathcal{E}(2)$ raspodelom. Naći matematičko očekivanje, autokovarijansnu funkciju i disperziju procesa

$$Z_t = X_t + \tfrac{1}{t}\,Y, \quad t \in (0,\infty)\,.$$

Rešenja:

1. Označimo događaje:

   H_1 - "*bira se tačka iz kruga*"
   (tj. "*na kockici je dobijen broj iz skupa* $\{1,2,3,4\}$"),
   H_2 - "*bira se tačka iz kvadrata*",
   (tj. "*na kockici je dobijen broj iz skupa* $\{5,6\}$"),
   A - "*zbir koordinata izabrane tačke je manji od* 2",
   B - "*obe koordinate izabrane tačke su manje od* 1".

   Skup $\{H_1,H_2\}$ čini potpun sistem događaja, pri čemu je:

   $$\mathsf{P}(H_1)=\tfrac{2}{3}, \qquad \mathsf{P}(H_2)=1-\mathsf{P}(H_1)=\tfrac{1}{3}.$$

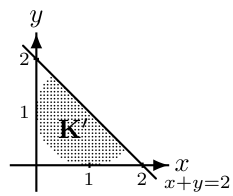
   (a) Koristeći geometrijsku definiciju verovatnoće dobijamo:

   $\mathsf{P}(A \mid H_1)=\dfrac{\textit{površina polukruga } K'}{\textit{površina kruga } K}=\frac{1}{2}$ (vidi sliku 1),

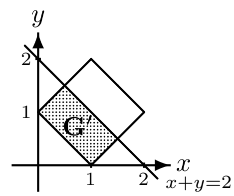
   $\mathsf{P}(A \mid H_2)=\dfrac{\textit{površina pravougaonika } G'}{\textit{površina kvadrata } G}=\frac{1}{2}$ (vidi sliku 2).

   Na osnovu formule totalne verovatnoće je:

   $\mathsf{P}(A)=\mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}(A \mid H_1)+\mathsf{P}(H_2)\,\mathsf{P}(A \mid H_2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$



slika 1



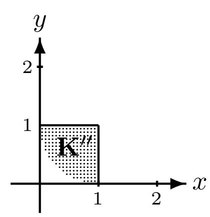
slika 2

(b) $\mathsf{P}(B \mid A) = \frac{\mathsf{P}(B\cap A)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{P}(B\cap A\cap(H_1+H_2))}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{P}(B\cap A\cap H_1)+\mathsf{P}(B\cap A\cap H_2)}{\mathsf{P}(A)} =$
$= \frac{\mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(B\cap A \mid H_1)+\mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(B\cap A \mid H_2)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$,

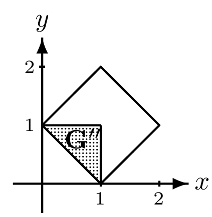
gde je:

$\mathsf{P}(B\cap A \mid H_1) = \frac{\textit{površina kružnog isečka } K''}{\textit{površina kruga } K} = \frac{1}{4}$ (vidi sliku 3),

$\mathsf{P}(B\cap A \mid H_2) = \frac{\textit{površina isečka iz kvadrata } G''}{\textit{površina kvadrata } K} = \frac{1}{4}$ (vidi sliku 4).



slika 3



slika 4

2. Iz $X : \mathcal{U}(0,2)$ i $Y|\{X=x\} : \mathcal{U}\left(\frac{1}{2}x, x\right)$ (podrazumeva se da $x \in [0,2]$ jer je inače slučajna promenljiva $Y|\{X=x\}$ nedefinisana) imamo:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad x \in [0,2] \\ 0 & , \quad x \notin [0,2] \end{cases}, \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in (-\infty, 0] \\ \frac{1}{2}x & , \quad x \in (0,2] \\ 1 & , \quad x \in (2,\infty) \end{cases},$$

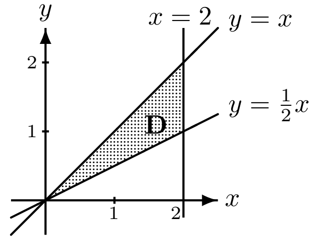
$$\varphi_{Y|\{X=x\}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{x-\frac{1}{2}x} & , \quad y \in \left[\frac{1}{2}x, x\right] \\ 0 & , \quad y \notin \left[\frac{1}{2}x, x\right] \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{x} & , \quad y \in \left[\frac{1}{2}x, x\right] \\ 0 & , \quad y \notin \left[\frac{1}{2}x, x\right] \end{cases}.$$

(a) <u>Prvi način:</u>

Nalazimo gustinu slučajne promenljive Y i zatim njeno očekivanje:

$\varphi_{X,Y}(x,y) = \varphi_X(x)\ \varphi_{Y|\{X=x\}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad (x,y) \in D \\ 0 & , \quad (x,y) \notin D \end{cases}$,

gde je $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le 2 \ \wedge\ \frac{1}{2}x \le y \le x \right\}$ oblast sa slike:



$\varphi_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_{X,Y}(x,y)\,dx = \dots$

(a.1) za $y \notin [0,2]$: $\varphi_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} 0dx = 0;$

(a.2) za $y \in [0,1]$: $\varphi_Y(y) = \int\limits_{y}^{2y} \frac{1}{x}dx = \ln x \Big|_{y}^{2y} = \ln\frac{2y}{y} = \ln 2;$

(a.3) za $y \in (1,2]$: $\varphi_Y(y) = \int\limits_{y}^{2} \frac{1}{x}dx = \ln x \Big|_{y}^{2} = \ln\frac{2}{y}.$

Dakle: $\qquad \varphi_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \; y \notin [0,2] \\ \ln 2 & , \; y \in [0,1] \\ \ln\frac{2}{y} & , \; y \in (1,2] \end{cases}.$

$\mathsf{E}(Y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y\,\varphi_Y(y)\,dy = \int\limits_{0}^{1} y\;\ln 2dy + \int\limits_{1}^{2} y\;\ln\frac{2}{y}dy =$

$= \ln 2\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 + \left(\frac{y^2}{4} + \frac{y^2}{2}\ln\frac{2}{y}\right)\Big|_1^2 = \frac{3}{4}.$

Drugi način (koristeći osobinu $\mathsf{E}(Y) = \mathsf{E}(\mathsf{E}(Y|X))$):
Matematičko očekivanje uslovne slučajne promenljive $Y|\{X=x\}$ za $x \in [0,2]$:

$\mathsf{E}(Y|X=x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y\,\varphi_{Y|\{X=x\}}(y)\,dy = \int\limits_{\frac{1}{2}x}^{x} y\frac{2}{x}dy = \frac{3}{4}x,$

i $\mathsf{E}(Y|\{X=x\}) = 0$ za $x \notin [0,2]$.
Matematičko očekivanje slučajne promenljive Y :

$\mathsf{E}(Y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathsf{E}(Y|X=x)\,\varphi_X(x)\,dx = \int\limits_{0}^{2} \frac{3}{4}x\frac{1}{2}dx = \frac{3}{4}.$

(b) Nalazimo funkciju raspodele slučajnog vektora (Z,W) gde je $Z = X^2$ i $W = X+2$:

$F_{Z,W}(z,w) = \mathsf{P}(Z<z, W<w) = \mathsf{P}\left(X^2<z, X+2<w\right) =$
$= \mathsf{P}\left(X^2<z, X<w-2\right) = \dots$

(b.1) za $z \le 0$:
$F_{Z,W}(z,w) = \mathsf{P}(X \in \emptyset, X<w-2) = 0;$

(b.2) za $z > 0$:
$F_{Z,W}(z,w) = \mathsf{P}(-\sqrt{z}<X<\sqrt{z}, X<w-2) =$
$\overset{[1]}{=} \mathsf{P}(0<X<\sqrt{z}, X<w-2) = \mathsf{P}(X<\sqrt{z}, X<w-2) = \dots$

(b.2.1) za $w-2 \le 0$ odnosno $w \le 2$:
$F_{Z,W}(z,w) = \mathsf{P}(X \in [-\sqrt{z}, w-2] \subseteq (-\infty,0]) \overset{[1]}{=} 0;$

(b.2.2) za $w-2>0$ odnosno $w>2$:
$F_{Z,W}(z,w) = \mathsf{P}(X<\min\{\sqrt{z}, w-2\}) =$
$= F_X(\min\{\sqrt{z}, w-2\}) = \dots$

(b.2.2.1) za $\sqrt{z} \le w-2 \;\wedge\; \sqrt{z} \le 2$:
$F_{Z,W}(z,w) = F_X(\sqrt{z}) = \frac{1}{2}\sqrt{z};$

(b.2.2.2) za $w-2 \leq \sqrt{z} \ \wedge \ w-2 \leq 2$:
$F_{Z,W}(z,w) = F_X(w-2) = \frac{1}{2}(w-2)$;

(b.2.2.3) za $\sqrt{z} > 2 \ \wedge \ w-2 > 2$:
$F_{Z,W}(z,w) = \mathsf{P}(X \in [0,2]) = 1$.

[1] - X *ima* $\mathcal{U}(0,2)$ *raspodelu te važi* $\mathsf{P}(X<0)=0$, *odnosno* $\mathsf{P}(X \in [a,b]) = \mathsf{P}(X \in [a,b] \cap [0,2])$.

Dakle: $$F_{Z,W}(z,w) = \begin{cases} 0 & , \ z \leq 0 \ \vee \ w \leq 2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{z} & , \ \sqrt{z} \leq w-2 \ \wedge \ 0 < z \leq 4 \\ \frac{1}{2}w - 1 & , \ w-2 \leq \sqrt{z} \ \wedge \ 2 < w \leq 4 \\ 1 & , \ z > 4 \ \wedge \ w > 4 \end{cases}.$$

3. Moguće vrednosti slučajne promenljive Y su:
$\mathcal{R}_Y = \left\{\sin\frac{\pi}{2}, \sin\frac{2\pi}{2}, \sin\frac{3\pi}{2}, \sin\frac{4\pi}{2}, \sin\frac{5\pi}{2}, \ldots\right\} = \{-1,0,1\}$,
a odgovarajuće verovatnoće su:

$\mathsf{P}(Y=-1) = \mathsf{P}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right) = -1\right) =$
$= \mathsf{P}\left(\frac{\pi}{2}X \in \left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \ \middle| \ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}\right) =$
$= \mathsf{P}(X \in \{3,7,11,15,\ldots\}) = \mathsf{P}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \{X = 4k-1\}\right) =$
$= \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(X=4k-1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{4k-1}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16^k 2^{-1}} = 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^k =$
$= 2 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{16}{15} = \frac{2}{15}$,

$\mathsf{P}(Y=0) = \mathsf{P}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right) = 0\right) = \mathsf{P}\left(\frac{\pi}{2}X \in \{\pi + k\pi \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}\right) =$
$= \mathsf{P}(X \in \{2,4,6,8,\ldots\}) = \mathsf{P}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \{X = 2k\}\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(X=2k) =$
$= \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$,

$\mathsf{P}(Y=1) = \mathsf{P}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right) = 1\right) = \mathsf{P}\left(\frac{\pi}{2}X \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \middle| \ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}\right) =$
$= \mathsf{P}(X \in \{1,5,9,13,\ldots\}) = \mathsf{P}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \{X = 4k-3\}\right) =$
$= \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(X=4k-3) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{4k-3}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16^k 2^{-3}} = 8\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^k =$
$= 8 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{15} = \frac{8}{15}$.

Dakle, Y ima zakon raspodele: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{15} & \frac{5}{15} & \frac{8}{15} \end{pmatrix}$,
odakle dobijamo:
$\mathsf{E}(Y) = -1 \cdot \frac{2}{15} + 0 \cdot \frac{5}{15} + 1 \cdot \frac{8}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

4. Slučajna promenljiva $X : \mathcal{B}\left(10, \frac{1}{4}\right)$ ima sledeće brojne karakteristike:
$\mathsf{E}(X) = 10 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$, $\quad \mathsf{D}(X) = 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{8}$.

(a) Primenom nejednakosti Čebiševa dobijamo:
$\mathsf{P}\left(\left|\frac{1}{10}X-\frac{1}{4}\right|>0.2\right)\le\mathsf{P}\left(\left|\frac{1}{10}X-\frac{1}{4}\right|\ge 0.2\right)=$
$=\mathsf{P}\left(\frac{1}{10}\left|X-\frac{5}{2}\right|\ge 0.2\right)=\mathsf{P}\left(\left|X-\frac{5}{2}\right|\ge 2\right)=$
$=\mathsf{P}\left(\left|X-\mathsf{E}\left(X\right)\right|\ge 2\right)\le\frac{\mathsf{D}(X)}{2^2}=\frac{\frac{15}{8}}{4}=\frac{15}{32}\approx 0.46875.$

(b) Primenom Moavr - Laplasove teoreme dobijamo:
$\mathsf{P}\left(\left|\frac{1}{10}X-\frac{1}{4}\right|>0.2\right)=1-\mathsf{P}\left(\left|\frac{1}{10}X-\frac{1}{4}\right|\le 0.2\right)=$
$=1-\mathsf{P}\left(-0.2\le\frac{1}{10}X-\frac{1}{4}\le 0.2\right)=$
$=1-\mathsf{P}\left(-0.2\le\frac{1}{10}\left(X-\frac{5}{2}\right)\le 0.2\right)=1-\mathsf{P}\left(-2\le X-\frac{5}{2}\le 2\right)=$
$=1-\mathsf{P}\left(-2\le X-\mathsf{E}\left(X\right)\le 2\right)=$
$=1-\mathsf{P}\left(\frac{-2}{\sqrt{\mathsf{D}(X)}}\le\frac{X-\mathsf{E}(X)}{\sqrt{\mathsf{D}(X)}}\le\frac{2}{\sqrt{\mathsf{D}(X)}}\right)=$
$=1-\mathsf{P}\left(\frac{-2}{\sqrt{\frac{15}{8}}}\le\frac{X-\mathsf{E}(X)}{\sqrt{\mathsf{D}(X)}}\le\frac{2}{\sqrt{\frac{15}{8}}}\right)\approx$
$\approx 1-\mathsf{P}\left(-1.46\le\frac{X-\mathsf{E}(X)}{\sqrt{\mathsf{D}(X)}}\le 1.46\right)\approx$
$\approx 1-\left(\phi\left(1.46\right)-\phi\left(-1.46\right)\right)=$
$=1-\left(\phi\left(1.46\right)-\left(1-\phi\left(1.46\right)\right)\right)=2-2\phi\left(1.46\right)\approx$
$\approx 2-2\cdot 0.9279\approx 0.1442.$

5. Primetimo da slučajna promenljiva X ima "pomerenu za 3 Poasonovu raspodelu", odnosno $X=Y+3$, gde je Y slučajna promenljiva sa Poasonovom $\mathcal{P}\left(a\right)$ raspodelom $(a>0)$. Zaista, iz $\mathcal{R}_Y=\{0,1,2,\ldots\}$ sledi $\mathcal{R}_X=\{3,4,5,\ldots\}$ i za sve $k\in\{3,4,5,\ldots\}$ važi

$$\mathsf{P}\left(X=k\right)=\mathsf{P}\left(Y+3=k\right)=\mathsf{P}\left(Y=k-3\right)=\frac{a^{k-3}}{(k-3)!}e^{-a}.$$

(a) Pošto je $\mathsf{E}\left(X\right)=\mathsf{E}\left(Y+3\right)=\mathsf{E}\left(Y\right)+\mathsf{E}\left(3\right)=a+3$, a s druge strane znamo da je $\overline{X}_n$ (uzoračka aritmetička sredina) centrirana ocena matematičkog očekivanja $\mathsf{E}\left(X\right)$, parametar a ocenjujemo statistikom $\hat{a}$ za koju važi $\overline{X}_n=\hat{a}+3$ (zbog $\mathsf{E}\left(X\right)=a+3$), tj. statistikom $\hat{a}=\overline{X}_n-3$. Zaista iz
$\mathsf{E}\left(\hat{a}\right)=\mathsf{E}\left(\overline{X}_n-3\right)=\mathsf{E}\left(\overline{X}_n\right)-3=\mathsf{E}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)-3=$
$=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathsf{E}\left(X_i\right)-3=\frac{1}{n}n\mathsf{E}\left(X\right)-3=\mathsf{E}\left(X\right)-3=(a+3)-3=a,$
sledi da $\hat{a}$ jeste centrirana ocena parametra a.

(b) Najpre na osnovu gore nađene ocene parametra a i datih podataka izračunavamo realizovanu vrednost navedene ocene:
$\hat{a}=\frac{1}{576}\left(3\cdot 229+4\cdot 211+5\cdot 93+6\cdot 35+7\cdot 7+8\cdot 1\right)-3=\frac{535}{576}.$
Dakle, za sve $k\in\{3,4,5,\ldots\}$ je: $\mathsf{P}\left(X=k\right)=\frac{\left(\frac{535}{576}\right)^{k-3}}{(k-3)!}e^{-\frac{535}{576}}.$
Da bi χ^2 test mogli primeniti, poslednju grupu podataka (frekvencija manja od 5) moramo spojiti sa susednom, čime dobijamo sledeću tablicu:

x_i	3	4	5	6	$7, 8, \ldots$
f_i	229	211	93	35	8
p_i	0.3950	0.3669	0.1704	0.0528	0.0149

gde su p_i odgovarajuće teorijske verovatnoće:
$p_1 = \mathsf{P}(X = 3) = \frac{\left(\frac{535}{576}\right)^0}{0!}e^{-\frac{535}{576}} \approx 0.3950,$
$p_2 = \mathsf{P}(X = 4) = \frac{\left(\frac{535}{576}\right)^1}{1!}e^{-\frac{535}{576}} \approx 0.3669,$
$p_3 = \mathsf{P}(X = 5) = \frac{\left(\frac{535}{576}\right)^2}{2!}e^{-\frac{535}{576}} \approx 0.1704,$
$p_4 = \mathsf{P}(X = 6) = \frac{\left(\frac{535}{576}\right)^3}{3!}e^{-\frac{535}{576}} \approx 0.0528,$
$p_5 = \mathsf{P}(X \geq 7) = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \approx 0.0149.$
Izračunavamo vrednost Z statistike χ^2 testa:

$$z = \sum_{i=1}^{5} \frac{(f_i - 576p_i)}{576p_i} \approx 1.0221.$$

Iz tablice χ^2 raspodele za zadani prag značajnosti $\alpha = 0.1$ nalazimo $\chi^2_{0.1;5-1-1} = \chi^2_{0.1;3} \approx 6.25.$
Pošto je $z < \chi^2_{0.1;3}$, konstatujemo da dati uzorak ne protivreči hipotezi o saglasnosti sa raspodelom obeležja X.

6. Intervale reprezentujemo njihovim sredinama i izračunavamo pomoćne veličine:

x_i	3	6.5	8	10.5	13	15	17.5	
f_i	1	3	4	10	6	4	2	$n = \sum_{i=1}^{7} f_i = 30$
$x_i f_i$	3	19.5	32	105	78	60	35	$\sum_{i=1}^{7} x_i f_i = 332.5$
$x_i^2 f_i$	9	126.75	256	1102.5	1014	900	612.5	$\sum_{i=1}^{7} x_i^2 f_i = 4020.75$

$$\overline{x}_{30} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{7} x_i f_i \approx 11.0833,$$

$$\overline{s}^2_{30} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{7} x_i^2 f_i - \overline{x}^2_{30} \approx 11.1847, \qquad \overline{s}_{30} = \sqrt{\overline{s}^2_{30}} \approx 3.34436.$$

Nivou poverenja $\beta = 0.9$ odgovara prag značajnosti $\alpha = 0.1$.

Iz tablice χ^2 raspodele nalazimo vrednosti: $\chi^2_{n-1;\alpha} = \chi^2_{29;0.1} \approx 19.8$, $\chi^2_{n-1;\frac{1+\beta}{2}} = \chi^2_{29;0.95} \approx 42.6$, $\chi^2_{n-1;\frac{1-\beta}{2}} = \chi^2_{29;0.05} \approx 17.7$.

Jednostrani interval poverenja:

$$I_1 = \left(0, \frac{n\overline{s}^2_n}{\chi^2_{n-1;\alpha}}\right) = \left(0, \frac{30\overline{s}^2_{30}}{\chi^2_{29;0.1}}\right) = (0, 16.9465)\,.$$

Dvostrani interval poverenja:

$$I_2 = \left(\frac{n\overline{s}^2_n}{\chi^2_{n-1;\frac{1+\beta}{2}}}, \frac{n\overline{s}^2_n}{\chi^2_{n-1;\frac{1-\beta}{2}}}\right) = \left(\frac{30\overline{s}^2_{30}}{\chi^2_{29;0.95}}, \frac{30\overline{s}^2_{30}}{\chi^2_{29;0.05}}\right) = (7.87656, 18.9572)\,.$$

7. Na osnovu opisa dobijamo matricu prelaza P za jedan korak, a zatim matricu prelaza P^2 za dva koraka:

$$P = \begin{array}{r@{}c} & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & 100 \end{array} \\ \begin{array}{r} 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ \vdots\\ 98\\ 99\\ 100 \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$P^2 = \begin{array}{r@{}c} & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & 100 \end{array} \\ \begin{array}{r} 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ \vdots\\ 98\\ 99\\ 100 \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{16} & \frac{9}{16} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{16} & 0 & \frac{9}{16} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{16} & 0 & 0 & \frac{9}{16} & \dots & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{16} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{16} & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{9}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Početna raspodela: $\quad \mathbf{p}^0 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & & 100 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{100} & \frac{1}{100} & \dots & \frac{1}{100} \end{array} \right] \end{array}$.

Raspodela nakon dva koraka:

$$\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}^0 \cdot P(2) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & & 99 & 100 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} \frac{393}{1600} & \frac{297}{1600} & \frac{9}{1600} & \frac{9}{1600} & \dots & \frac{9}{1600} & \frac{37}{1600} \end{array} \right] \end{array}.$$

8. Slučajna promenljiva Y ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(2)$ raspodelu, odakle dobijamo:

[1] $\quad \mathsf{E}(Y) = \frac{1}{2}, \qquad \mathsf{D}(Y) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, \qquad \mathsf{E}\left(Y^2\right) = \mathsf{D}(Y) + \mathsf{E}^2(Y) = \frac{1}{2}.$

Slučajna promenljiva X_t ima uniformnu $\mathcal{U}(0,t)$ raspodelu, odakle je za svako $t \in (0,\infty)$:

[2] $\quad \mathsf{E}(X_t) = \frac{t}{2}, \qquad \mathsf{D}(X_t) = \frac{t^2}{12}, \qquad \mathsf{E}\left(X_t^2\right) = \mathsf{D}(X_t) + \mathsf{E}^2(X_t) = \frac{t^2}{3}.$

Pošto je slučajni proces $X_t,\ t \in (0,\infty)$ određen jednodimenzionalnim raspodelama, to znači da su X_t i X_s nezavisne slučajne promenljive za sve $s \neq t$; pri tome su još i Y i X_t nezavisne slučajne promenljive za svako t, tako da je:

[3]
$$\begin{aligned} &\mathsf{E}(X_t\, Y) = \mathsf{E}(X_t)\ \mathsf{E}(Y) = \frac{t}{4}, \\ &\mathsf{E}(X_t\, X_s) = \begin{cases} \mathsf{E}(X_t)\ \mathsf{E}(X_s) & ,\ t \neq s \\ \mathsf{E}\left(X_t^2\right) & ,\ t = s \end{cases} = \begin{cases} \frac{ts}{4} & ,\ t \neq s \\ \frac{t^2}{3} & ,\ t = s \end{cases}. \end{aligned}$$

Koristićemo još i linearnost matematičkog očekivanja : za svake dve slučajne promenljive U i W i sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je

[4] $\quad \mathsf{E}(\alpha U + \beta W) = \alpha \mathsf{E}(U) + \beta \mathsf{E}(W)$.

▷ Matematičko očekivanje:

$m_Z(t) = \mathsf{E}(Z_t) = \mathsf{E}\left(X_t + \frac{1}{t}Y\right) \overset{[4]}{=} \mathsf{E}(X_t) + \frac{1}{t}\mathsf{E}(Y) \overset{[2],[1]}{=} \frac{t^2+1}{2t}$.

▷ Autokovarijansna funkcija:

$$\begin{aligned}
\mathsf{K}_Z(t,s) &= \mathsf{E}((Z_t - m_Z(t))(Z_s - m_Z(s))) = \\
&= \mathsf{E}(Z_t Z_s - m_Z(t)\, Z_s - m_Z(s)\, Z_t + m_Z(t)\, m_Z(s)) = \\
&\overset{[4]}{=} \mathsf{E}(Z_t Z_s) - m_Z(t)\, m_Z(s) = \\
&= \mathsf{E}\left(\left(X_t + \tfrac{1}{t}Y\right)\left(X_s + \tfrac{1}{s}Y\right)\right) - \tfrac{t^2+1}{2t} \cdot \tfrac{s^2+1}{2s} = \\
&= \mathsf{E}\left(X_t X_s + \tfrac{1}{s} Y X_t + \tfrac{1}{t} Y X_s + \tfrac{1}{ts} Y^2\right) - \tfrac{(t^2+1)(s^2+1)}{4ts} = \\
&\overset{[4]}{=} \mathsf{E}(X_t X_s) + \tfrac{1}{s}\mathsf{E}(Y X_t) + \tfrac{1}{t}\mathsf{E}(Y X_s) + \\
&\quad + \tfrac{1}{ts}\mathsf{E}\left(Y^2\right) - \tfrac{(t^2+1)(s^2+1)}{4ts} \overset{[3]}{=} \ldots
\end{aligned}$$

▷▷ za $t \neq s$:

$$\begin{aligned}
\mathsf{K}_Z(t,s) &= \mathsf{E}(X_t)\,\mathsf{E}(X_s) + \tfrac{1}{s}\mathsf{E}(Y)\,\mathsf{E}(X_t) + \tfrac{1}{t}\mathsf{E}(Y)\,\mathsf{E}(X_s) + \\
&\quad + \tfrac{1}{ts}\mathsf{E}\left(Y^2\right) - \tfrac{(t^2+1)(s^2+1)}{4ts} = \\
&\overset{[1],[2]}{=} \tfrac{ts}{4} + \tfrac{t}{4s} + \tfrac{s}{4t} + \tfrac{1}{2ts} - \tfrac{(t^2+1)(s^2+1)}{4ts} = \tfrac{1}{4ts}.
\end{aligned}$$

▷▷ za $t = s$:

$$\begin{aligned}
\mathsf{K}_Z(t,t) &= \mathsf{E}\left(X_t^2\right) + \tfrac{2}{t}\mathsf{E}(Y X_t) + \tfrac{1}{t^2}\mathsf{E}\left(Y^2\right) - \tfrac{(t^2+1)^2}{4t^2} = \\
&\overset{[3],[1]}{=} \tfrac{t^2}{3} + \tfrac{2}{t} \cdot \tfrac{t}{4} + \tfrac{1}{t^2} \cdot \tfrac{1}{2} - \tfrac{(t^2+1)^2}{4t^2} = \tfrac{t^2}{12} + \tfrac{1}{4t^2}.
\end{aligned}$$

▷ Disperzija:

$\mathsf{D}_Z(t) = \mathsf{K}_Z(t,t) = \frac{t^2}{12} + \frac{1}{4t^2}$.

17.02.2001.

1. Fabrika pravi 3 modela automobila. Modela Ajkula se pravi 100 komada dnevno, podjednako u beloj i crnoj boji. Model Pirana se pravi 60 komada dnevno, podjednako u beloj, crnoj, plavoj i žutoj boji. Model Pastrmka se pravi 40 komada dnevno, i to samo u crnoj boji.

   (a) Izračunati verovatnoću da je slučajno izabrani automobil iz fabrike crne boje.

   (b) Ako je odabrani automobil crne boje, koliko iznosi verovatnoća da je on modela Pastrmka?

2. Jedan tehnički uređaj ima dužinu rada kojoj odgovara slučajna promenljiva T određena gustinom: $\quad \varphi_T(t) = \begin{cases} \frac{2}{(t+1)^3} & , \quad t \geq 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases}$.

Troškovi proizvodnje jednog uređaja su 2500 dinara. Uređaj se prodaje po ceni od 10000 dinara. Ukoliko se uređaj pokvari pre momenta $t = 1$, proizvođač vraća kupcu novac i plaća kaznu od 500 dinara. Naći očekivani dobitak proizvođača po jednom uređaju, kao i očekivani dobitak na 1000 prodatih uređaja.

3. Dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X, Y) ima raspodelu određenu gustinom:

$$\varphi_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} ax^2y & , \quad (x, y) \in D \\ 0 & , \quad (x, y) \notin D \end{cases},$$

gde je $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < x < 1 \;\wedge\; 1 - x < y < 1 \right\}$. Naći konstantu a i naći raspodelu slučajne promenljive $Z = X + 2Y$.

4. U procesu sabiranja brojeva, računar zaokružuje brojeve na najbliži ceo broj, pri čemu su greške zaokruživanja nezavisne jedna od druge i uniformno su raspodeljene na intervalu $[-0.5, 0.5]$.

   (a) Koliko iznosi verovatnoća da apsolutna vrednost ukupne greške pri sabiranju 1500 brojeva premaši 15?

   (b) Koliko se najviše brojeva može sabrati a da sa verovatnoćom 0.9 apsolutna vrednost greške bude manja od 10?

5. Obeležje X ima normalnu $\mathcal{N}(m, 1)$ raspodelu. Za ocenu parametra m se predlaže statistika

$$\hat{m} = n\,X_1 - (X_2 + X_3 + \ldots + X_n)\,.$$

   (a) Ispitati centriranost predložene ocene.

   (b) Ispitati postojanost predložene ocene.

6. Fabrika izrađuje metalne diskove određenog poluprečnika. Radi provere kvaliteta uzet je uzorak od 120 diskova, i odstupanja (u milimetrima) od nominalnog prečnika data su u tabeli:

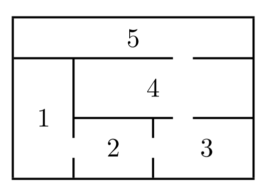
odstupanje:	$(-12, -8]$	$(-8, -4]$	$(-4, 0]$	$(0, 4]$	$(4, 8]$	$(8, 12)$
broj diskova:	8	17	42	30	18	5

Pretpostavimo da obeležje čiji uzorak posmatramo ima normalnu raspodelu.

   (a) Naći interval poverenja za ocenu srednje vrednosti sa pragom značajnosti $\alpha = 0.01$.

   (b) Testirati hipotezu da je prosečno odstupanje 0.3 sa nivoom poverenja $\beta = 0.99$.

7. Mačka se na svakih 5 sekundi kreće iz sobe u sobu kuće čija je šema data na slici, pri čemu svaki put sa verovatnoćom $\frac{1}{2}$ ostaje u sobi u kojoj je i bila, ili na slučajan način bira vrata kroz koja će preći u drugu sobu.



(a) Naći matricu prelaska (za jedan korak) položaja mačke po kući.

(b) U kojoj sobi je mačka bila na početku svoje šetnje kroz sobe, ako se zna da se nakon 11 sekundi najverovatnije nalazi u sobi broj 3?

(c) Naći finalne verovatnoće položaja mačke.

8. Slučajne promenljive $X : \mathcal{E}(a)$ i $Y : \mathcal{E}(b)$ su nezavisne $(a, b > 0)$. Naći matematičko očekivanje, autokovarijansnu funkciju i disperziju slučajnog procesa $Z_t = X \sin t - Y \cos t,\ t \in \mathbb{R}$. Da li je za neke $a, b > 0$ proces Z_t stacionaran?

Rešenja:

1. Označimo sa A_1, A_2, A_3 događaje "*slučajno izabrani automobil je modela Ajkula*", odnosno "*slučajno izabrani automobil je modela Pirana*", odnosno "*slučajno izabrani automobil je modela Pastrmka*". Sa C označimo događaj "*slučajno izabrani automobil je crne boje*". Na osnovu datih podataka imamo da je:

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(A_1) &= \tfrac{100}{100+60+40} = \tfrac{1}{2}, & \mathsf{P}(C \mid A_1) &= \tfrac{1}{2},\\ \mathsf{P}(A_2) &= \tfrac{60}{100+60+40} = \tfrac{3}{10}, & \mathsf{P}(C \mid A_2) &= \tfrac{1}{4},\\ \mathsf{P}(A_3) &= \tfrac{40}{100+60+40} = \tfrac{2}{10}, & \mathsf{P}(C \mid A_3) &= 1. \end{aligned}$$

(a) Na osnovu formule totalne verovatnoće je:

$$\mathsf{P}(C) = \sum_{i=1}^{3} \mathsf{P}(A_i)\,\mathsf{P}(C \mid A_i) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{40} + \tfrac{2}{10} = \tfrac{21}{40},$$

ili jednostavnije:

$$\mathsf{P}(C) = \frac{\textit{broj proizvedenih crnih automobila}}{\textit{ukupan broj proizvedenih automobila}} = \tfrac{50+15+40}{100+60+40} = \tfrac{21}{40}.$$

(b) Na osnovu Bajesove formule je:

$$\mathsf{P}(A_3 \mid C) = \frac{\mathsf{P}(A_3)\,\mathsf{P}(C \mid A_3)}{\mathsf{P}(C)} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{21}{40}} = \frac{8}{21}.$$

2. Označimo sa Y_i slučajnu promenljivu koja predstavlja dobitak ili gubitak ostvaren na prodaji i - tog uređaja $(i \in \{1, 2, \ldots, 1000\})$, a sa T_i označimo vreme rada i - tog uređaja $(\varphi_{T_i}(t) = \varphi_T(t))$. Moguće dve vrednosti slučajne promenljive Y_i su:

- $y_1 = 10000 - 2500 = 7500$, pri čemu je:

  $\mathsf{P}(Y_i = 7500) = \mathsf{P}(T_i \geq 1) = 1 - \mathsf{P}(T_i < 1) = 1 - \int\limits_0^1 \varphi_{T_i}(t)\,dt =$

  $= 1 - \left(-\frac{1}{(1+t)^2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4},$

- $y_2 = -2500 - 500 = -3000$, pri čemu je:

  $\mathsf{P}(Y_i = -3000) = 1 - \mathsf{P}(Y_i = 7500) = \frac{3}{4}.$

Dakle, slučajna promenljiva Y_i je određena zakonom raspodele

$$\begin{pmatrix} -3000 & 7500 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Očekivani dobitak (ili gubitak) po jednom prodatom uređaju je

$$\mathsf{E}(Y_i) = \tfrac{3}{4}(-3000) + \tfrac{1}{4}7500 = -375$$

(dakle, očekivani gubitak je 375 dinara po uređaju).

Slučajna promenljiva $Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{1000}$ predstavlja očekivani dobitak (ili gubitak) na 1000 prodatih uređaja, i on iznosi:

$\mathsf{E}(Y) = \mathsf{E}(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{1000}) = \mathsf{E}(Y_1) + \mathsf{E}(Y_2) + \ldots + \mathsf{E}(Y_{1000}) =$

$= 1000 \cdot (-375) = -375000$

(375000 dinara gubitka na 1000 prodatih uređaja).

3. Najpre određujemo konstantu a na osnovu uslova

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi_{X,Y}(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D} ax^2y\,dxdy = 1.$$

$$\iint\limits_{D} ax^2y\,dxdy = a\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^1 x^2y\,dy\right)dx = a\int\limits_0^1 x^2 \left(\int\limits_{1-x}^1 y\,dy\right)dx =$$
$$= a\int\limits_0^1 x^2 \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{1-x}^{1}\right)dx = \frac{a}{2}\left(2\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 - \frac{x^5}{5}\Big|_0^1\right) = \frac{3a}{20},$$

te iz $\frac{3a}{20} = 1$ dobijamo $a = \frac{20}{3}$.

Posmatrajmo slučajnu promenljivu $U = X$, odnosno slučajni vektor $(U,Z) = f(X,Y) = (X, X+2Y)$ (tj. $Z = X + 2Y$, $U = X$). Nalazimo inverznu transformaciju $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f^{-1}(u,z) = (x,y)$:

$$\begin{array}{l} Z = X + 2Y \\ U = X \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} X = U \\ Y = \frac{Z-U}{2} \end{array}.$$

Dakle: $(x,y) = f^{-1}(u,z) = \left(u, \frac{z-u}{2}\right)$.

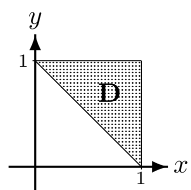
Njen Jakobijan je: $\mathcal{J}_{f^{-1}}(z,u) = \begin{vmatrix} x_u & x_z \\ y_u & y_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$

Transformacija f je monotona i neprekidna po obe komponente, pa se zatvorena oblast D (vidi sliku 1) ograničena pravama $l_1 : x = 1$, $l_2 : y = 1$ i $l_3 : y = 1 - x$ preslikava u oblast $D' = f(D)$ (vidi sliku 2) ograničenu pravama $l_1' : u = 1$, $l_2' : z = 2 + u$ i $l_3' : y = 2 - u$.

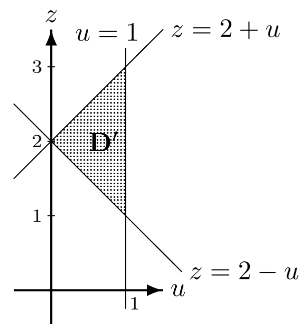
Sada dobijamo:

$$\begin{aligned} \varphi_{U,Z}(u,z) &= \varphi_{X,Y}\left(f^{-1}(u,z)\right)\left|\mathcal{J}_{f^{-1}}(u,z)\right| = \varphi_{X,Y}\left(u, \tfrac{z-u}{2}\right) \cdot \tfrac{1}{2} = \\ &= \tfrac{20}{3} \cdot u^2 \cdot \tfrac{z-u}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{3}u^2(z-u), \quad (u,z) \in D', \end{aligned}$$

$\varphi_{U,Z}(u,z) = 0, \quad (u,z) \notin D'.$



slika 1



slika 2

Gustinu slučajne promenljive Z dobijamo kao marginalnu gustinu slučajnog vektora (U,Z):

$\varphi_Z(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_{U,Z}(u,z)\ du = \ldots$

- za $z \notin (1,3)$: $\quad \varphi_Z(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} 0\, du = 0;$

- za $z \in (1,2]$: $\quad \varphi_Z(z) = \int\limits_{2-z}^{1} \frac{5}{3}u^2(z-u)\, du =$

$= \frac{5}{9}zu^3 \Big|_{2-z}^{1} - \frac{5}{12}u^4 \Big|_{2-z}^{1} = \frac{35}{36}z^4 - \frac{20}{3}z^3 + \frac{50}{3}z^2 - \frac{155}{9}z + \frac{25}{4};$

- za $z \in (2,3)$: $\quad \varphi_Z(z) = \int\limits_{z-2}^{1} \frac{5}{3}u^2(z-u)\, du =$

$= \frac{5}{9}zu^3 \Big|_{z-2}^{1} - \frac{5}{12}u^4 \Big|_{z-2}^{1} = -\frac{5}{36}z^4 + \frac{10}{3}z^2 - \frac{25}{3}z + \frac{25}{4}.$

Dakle: $\quad \varphi_Z(z) = \begin{cases} 0 & , \quad z \notin (1,3) \\ \frac{35}{36}z^4 - \frac{20}{3}z^3 + \frac{50}{3}z^2 - \frac{155}{9}z + \frac{25}{4} & , \quad z \in (1,2] \\ -\frac{5}{36}z^4 + \frac{10}{3}z^2 - \frac{25}{3}z + \frac{25}{4} & , \quad z \in (2,3) \end{cases}.$

4. Neka je $X_i,\ i \in \mathbb{N}$ slučajna promenljiva koja predstavlja grešku pri zaokruživanju nakon i - tog sabiranja. Slučajne promenljive X_i su nezavisne i svaka ima $\mathcal{U}(-0.5;0.5)$ raspodelu. Slučajna promenljiva $U_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ predstavlja ukupnu grešku zaokruživanja pri sabiranju n brojeva, pri čemu je:

$\mathsf{E}(X_i) = \frac{-0.5+0.5}{2} = 0, \qquad \mathsf{D}(X_i) = \frac{(0.5-(-0.5))^2}{12} = \frac{1}{12},$

$\mathsf{E}(U_n) = \mathsf{E}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{E}(X_i) = 0,$

$\mathsf{D}(U_n) = \mathsf{D}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{[1]}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{D}(X_i) = \frac{n}{12}.$

(a) $\mathsf{P}(|U_{1500}| > 15) = 1 - \mathsf{P}(|U_{1500}| \leq 15) = 1 - \mathsf{P}(-15 \leq U_{1500} \leq 15) =$
$= 1 - \mathsf{P}\left(\frac{-15-\mathsf{E}(U_{1500})}{\sqrt{\mathsf{D}(U_{1500})}} < \frac{U_{1500}-\mathsf{E}(U_{1500})}{\sqrt{\mathsf{D}(U_{1500})}} < \frac{15-\mathsf{E}(U_{1500})}{\sqrt{\mathsf{D}(U_{1500})}}\right) =$
$= 1 - \mathsf{P}\left(\frac{-15}{5\sqrt{5}} < U^*_{1500} < \frac{15}{5\sqrt{5}}\right) \approx 1 - \mathsf{P}(-1.34 < U^*_{1500} < 1.34) \overset{[2]}{\approx}$
$\approx 1 - (\phi(1.34) - \phi(-1.34)) = 1 - (\phi(1.34) - (1 - \phi(1.34))) =$
$= 2 - 2\phi(1.34) \approx 2 - 2 \cdot 0.9099 \approx 0.1802.$

(b) Rešavamo po n jednačinu $\mathsf{P}(|U_n| < 10) = 0.9$:
$\mathsf{P}(|U_n| < 10) = 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{P}(-10 < U_n < 10) = 0.9 \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(\frac{-10-\mathsf{E}(U_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(U_n)}} < \frac{U_n-\mathsf{E}(U_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(U_n)}} < \frac{10-\mathsf{E}(U_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(U_n)}}\right) = 0.9 \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(\frac{-20\sqrt{3}}{\sqrt{n}} < U^*_n < \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right) = 0.9 \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \phi\left(\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right) - \phi\left(\frac{-20\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right) \approx 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad 2\phi\left(\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right) - 1 \approx 0.9 \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \phi\left(\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right) \approx 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}} \approx \phi^{-1}(0.95) \approx 1.645 \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \sqrt{n} \approx \frac{20\sqrt{3}}{1.645} \approx 21.0584 \quad \Leftrightarrow \quad n \approx 21.0584^2 \approx 443.4549.$
Dakle, najviše 443 broja možemo sabrati pa da se sa verovatnoćom 0.9 ne prekorači zadana apsolutna greška 10.

[1] - *Slučajne promenljive* X_i *su nezavisne.*

[2] - *Na slučajnu promenljivu* $U^*_n = \frac{U_n-\mathsf{E}(U_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(U_n)}} = \frac{U_n}{\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{n}}$ *možemo primeniti centralnu graničnu teoremu.*

5. Zbog $X_i : \mathcal{N}(m,1)$ važi $\forall i \in \{1,2,\dots,n\}$, $\mathsf{E}(X_i) = m \land \mathsf{D}(X_i) = 1$.

(a) $\mathsf{E}(\hat{m}) = \mathsf{E}(nX_1 - X_2 - X_3 - \ldots - X_n) =$
$= n\mathsf{E}(X_1) - \mathsf{E}(X_2) - \mathsf{E}(X_3) - \ldots - \mathsf{E}(X_n) = nm - (n-1)m = m.$
Dakle, ocena $\hat{m}$ je centrirana.

(b) $\mathsf{D}(\hat{m}) = \mathsf{D}(nX_1 - X_2 - X_3 - \ldots - X_n) =$
$= n^2\mathsf{D}(X_1) + \mathsf{D}(X_2) + \mathsf{D}(X_3) + \ldots + \mathsf{D}(X_n) =$
$= n^2 \cdot 1 + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{(n-1)\text{ puta}} = n^2 + n - 1.$

Primenom nejednakosti Čebiševa dobijamo:
$\mathsf{P}(|\hat{m} - m| > \varepsilon) = \mathsf{P}(|\hat{m} - \mathsf{E}(\hat{m})| > \varepsilon) \leq \frac{\mathsf{D}(\hat{m})}{\varepsilon^2} = \frac{n^2+n-1}{\varepsilon^2}$,
pri čemu je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n-1}{\varepsilon^2} = \infty \neq 0$, te na osnovu nejednakosti Čebiševa ne možemo ispitati postojanost ocene $\hat{m}$. Postojanost ćemo ispitati koristeći funkciju raspodele statistike $\hat{m}$, za čije izračunavanje je potrebna sledeća lema (koju navodimo sa dokazom):

Lema: Neka su U i V nezavisne slučajne promenljive, U sa normalnom $\mathcal{N}(a,\xi)$ raspodelom, a V sa normalnom $\mathcal{N}(b,\sigma)$ raspodelom, i neka je $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tada slučajna promenljiva $W = \alpha U + \beta V$ ima normalnu $\mathcal{N}\left(\alpha a + \beta b, \sqrt{\alpha^2 \xi^2 + \beta^2 \sigma^2}\right)$ raspodelu.

Dokaz izvodimo pomoću karakterističnih funkcija. Karakteristične funkcije slučajnih promenljivih U i V su $\mathcal{K}_U(t) = e^{ita} e^{-\frac{\xi^2 t^2}{2}}$ i $\mathcal{K}_V(t) = e^{itb} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$. Koristeći osobine karakterističnih funkcija dobijamo

$$\mathcal{K}_W(t) = \mathcal{K}_{\alpha U + \beta V}(t) = \mathcal{K}_{\alpha U}(t)\,\mathcal{K}_{\beta V}(t) = \mathcal{K}_U(\alpha t)\,\mathcal{K}_V(\beta t) =$$
$$= e^{it(\alpha a + \beta b)} e^{-\frac{\left(\alpha^2 \xi^2 + \beta^2 \sigma^2\right) t^2}{2}},$$

što je karakteristična funkcija slučajne promenljive sa normalnom raspodelom, čime je lema dokazana.

Primenom navedene Leme matematičkom indukcijom dokazujemo da $Y = X_2 + X_3 + \ldots + X_n$ ima normalnu $\mathcal{N}\left((n-1)\,m, \sqrt{n-1}\right)$ raspodelu, a zatim primenom Leme na slučajne promenljive X_1 i Y dobijamo da statistika $\hat{m} = nX_1 - (X_2 + X_3 + \ldots + X_n) = nX_1 - Y$ ima normalnu $\mathcal{N}\left(m, \sqrt{n^2 + n - 1}\right)$ raspodelu.

Sledi

$$\mathsf{P}(|\hat{m} - m| > \varepsilon) = 1 - \mathsf{P}(|\hat{m} - m| \leq \varepsilon) = 1 - \mathsf{P}(-\varepsilon \leq \hat{m} - m \leq \varepsilon) =$$
$$= 1 - \mathsf{P}\left(\frac{-\varepsilon}{\sqrt{n^2+n-1}} \leq \frac{\hat{m}-m}{\sqrt{n^2+n-1}} \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n^2+n-1}}\right) =$$
$$\stackrel{[1]}{=} 1 - \left(\phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n^2+n-1}}\right) - \phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{n^2+n-1}}\right)\right) = 2\phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n^2+n-1}}\right).$$

Dakle, imamo da za svako $\varepsilon > 0$ važi

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(|\hat{m} - m| > \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} 2\phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n^2+n-1}}\right) = 2\phi(0) = 1 \neq 0,$$

tako da ocena $\hat{m}$ nije postojana.

[1] - *Slučajna promenljiva* $\frac{\hat{m}-m}{\sqrt{n^2+n-1}}$ *ima* $\mathcal{N}(0,1)$ *raspodelu.*

6. Intervale reprezentujemo njihovim sredinama, i izračunavamo pomoćne veličine:

x_i	-10	-6	-2	2	6	10	
f_i	8	17	42	30	18	5	$n = \sum\limits_{i=1}^{6} f_i = 120$
$x_i f_i$	-80	-102	-84	60	108	50	$\sum\limits_{i=1}^{6} x_i f_i = -48$
$x_i^2 f_i$	800	612	168	120	648	500	$\sum\limits_{i=1}^{6} x_i^2 f_i = 2848$

$$\overline{x}_{120} = \frac{1}{120} \sum_{i=1}^{6} x_i f_i = -\frac{2}{5} = -0.4,$$

$$\overline{s}_{120}^2 = \frac{1}{120} \sum_{i=1}^{6} x_i^2 f_i - \overline{x}_{120}^2 = \frac{1768}{75} \approx 23.5733,$$

$$\overline{s}_{120} = \sqrt{\overline{s}_{120}^2} \approx 4.85524.$$

Pragu značajnosti $\alpha = 0.01$ odgovara nivo poverenja $\beta = 0.99$.

(a) Iz tablice Studentove raspodele nalazimo vrednost

$$t_{120-1;\frac{1+0.99}{2}} = t_{119;0.995} \approx t_{\infty;0.995} \approx 2.576,$$

i zatim traženi interval poverenja:

$$I = \left[\overline{x}_{120} - \tfrac{t_{119;0.995}}{\sqrt{119}}\overline{s}_{120}, \overline{x}_{120} + \tfrac{t_{119;0.995}}{\sqrt{119}}\overline{s}_{120}\right] = [-1.54652, 0.746523].$$

(b) Pošto za testiranje ove hipoteze koristimo istu statistiku kao pod (a) i to sa istim nivoom poverenja, tada iz $0.3 \in I$ sledi da uzorak ne protivreči hipotezi.

7. (a) Na osnovu opisa dobijamo matricu prelaza P za jedan korak, a zatim matricu prelaza P^2 za dva koraka:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}, \quad P^2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{7}{16} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \end{array}.$$

(b) Zanima nas za koji vektor početnih verovatnoća $\mathbf{p}^0 \in S_0$, gde je $S_0 = \{[\,1\,0\,0\,0\,0\,], [\,0\,1\,0\,0\,0\,], [\,0\,0\,1\,0\,0\,], [\,0\,0\,0\,1\,0\,], [\,0\,0\,0\,0\,1\,]\}$, dobijamo takav vektor verovatnoća položaja nakon 2 koraka (mačka je posle 11 sekundi 2 puta prelazila iz sobe u sobu)

$\mathbf{p}^2 \in \left\{ \mathbf{p}^0 \cdot P^2 \;\middle|\; \mathbf{p}^0 \in S_0 \right\} =$

$= \left\{ [\,\frac{3}{8}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{8}\,0\,0\,], [\,\frac{1}{4}\,\frac{7}{16}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{16}\,0\,], [\,\frac{1}{16}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{8}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{16}\,], \right.$

$\left. [\,0\,\frac{1}{16}\,\frac{1}{4}\,\frac{7}{16}\,\frac{1}{4}\,], [\,0\,0\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{8}\,] \right\}$

kod kojeg je maksimalna verovatnoća na 3-em mestu, tj. tražimo i koje ispunjava uslov

$$p_{i3}(2) = \max_{1 \leq j \leq 5} p_{ij}(2).$$

Praktično, gledamo u kojoj vrsti matrice P^2 se maksimalni broj nalazi na trećem mestu (u trećoj koloni), i dobijamo odgovor: 3. Dakle, mačka na početku treba da se nalazi u sobi 3 da bi nakon 11 sekundi najverovatnije bila u sobi 3.

(c) Rešavamo jednačinu $\mathbf{p}^* \cdot P = \mathbf{p}^*$ po promenljivoj $\mathbf{p}^* = [\,x\;y\;z\;t\;u\,]$ koja još zadovoljava uslov $x+y+z+t+u = 1$ $(x, y, z, t, u \in (0,1))$:

$\underline{(\mathbf{p}^* \cdot P = \mathbf{p}^* \;\wedge\; x+y+z+t+u = 1)} \quad \Leftrightarrow$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
\frac{1}{2}x & + & \frac{1}{4}y & & & & & & & = & x \\
\frac{1}{2}x & + & \frac{1}{2}y & + & \frac{1}{4}z & & & & & = & y \\
 & & \frac{1}{4}y & + & \frac{1}{2}z & + & \frac{1}{4}t & & & = & z \\
 & & & & \frac{1}{4}z & + & \frac{1}{2}t & + & \frac{1}{2}u & = & t \\
 & & & & & & \frac{1}{4}t & + & \frac{1}{2}u & = & u \\
x & + & y & + & z & + & t & + & u & = & 1
\end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x & - & \frac{1}{2}y & & & & & & & = & 0 \\
 & & y & - & z & & & & & = & 0 \\
 & & & & z & - & t & & & = & 0 \\
 & & & & & & t & - & 2u & = & 0 \\
 & & & & & & & & 8u & = & 1
\end{array} \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} u = \frac{1}{8} \\ t = \frac{1}{4} \\ z = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{4} \\ x = \frac{1}{8} \end{array}$$

Dakle, vektor finalnih verovatnoća glasi: $\mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$.
Dobijene finalne verovatnoće tumačimo na sledeći način: ako se mačka "dovoljno dugo" kreće po sobama, u proseku po $\frac{1}{8}$ vremena provodi u prvoj i petoj sobi, a po $\frac{1}{4}$ vremena provodi u drugoj, trećoj i četvrtoj sobi.

8. Koristićemo sledeće:

   [1] - *Slučajne promenljiva X i Y imaju eksponencijalne raspodelu, odakle dobijamo:*

   $\mathsf{E}(X) = \frac{1}{a}, \quad \mathsf{D}(X) = \frac{1}{a^2}, \quad \mathsf{E}(X^2) = \mathsf{D}(X) + (\mathsf{E}(X))^2 = \frac{2}{a^2},$
   $\mathsf{E}(Y) = \frac{1}{b}, \quad \mathsf{D}(Y) = \frac{1}{b^2}, \quad \mathsf{E}(Y^2) = \mathsf{D}(Y) + (\mathsf{E}(Y))^2 = \frac{2}{b^2}.$

   [2] - *Za proizvoljne slučajne promenljive V i W i proizvoljne $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ važi:*

   $\mathsf{E}(\alpha V + \beta W) = \alpha \mathsf{E}(V) + \beta \mathsf{E}(W).$

   [3] - *Iz nezavisnosti slučajnih promenljivih X i Y sledi:*

   $\mathsf{E}(X\,Y) = \mathsf{E}(X)\ \mathsf{E}(Y).$

   Matematičko očekivanje:

   $m_z(t) = \mathsf{E}(Z_t) = \mathsf{E}(X \sin t - Y \cos t) \overset{[2]}{=} \sin t \mathsf{E}(X) - \cos t \mathsf{E}(Y) =$
   $\overset{[1]}{=} \frac{1}{a} \sin t - \frac{1}{b} \cos t.$

   Autokovarijansna funkcija:

   $\mathsf{K}_z(t,s) = \mathsf{E}((Z_t - m_z(t))(Z_s - m_z(s))) =$
   $= \mathsf{E}(Z_t\,Z_s - m_z(t)\ Z_s - m_z(s)\ Z_t + m_z(t)\ m_z(s)) =$
   $\overset{[2]}{=} \mathsf{E}(Z_t\,Z_s) - m_z(t)\ m_z(s) =$

$= \mathsf{E}\left(\left(X\sin t - Y\cos t\right)\left(X\sin s - Y\cos s\right)\right) -$
$\quad - \left(\frac{1}{a}\sin t - \frac{1}{b}\cos t\right)\left(\frac{1}{a}\sin s - \frac{1}{b}\cos s\right) =$
$= \mathsf{E}\left(X^2\sin t\sin s - \left(\sin t\cos s + \cos t\sin s\right)XY + Y^2\cos t\cos s\right)$
$\quad - \left(\frac{1}{a}\sin t - \frac{1}{b}\cos t\right)\left(\frac{1}{a}\sin s - \frac{1}{b}\cos s\right) \overset{[2],[3]}{=}$
$= \sin t\sin s\,\mathsf{E}\left(X^2\right) - \left(\sin t\cos s + \cos t\sin s\right)\mathsf{E}\left(X\right)\mathsf{E}\left(Y\right) + \cos t\cos s\,\mathsf{E}\left(Y^2\right)$
$\quad - \left(\frac{1}{a}\sin t - \frac{1}{b}\cos t\right)\left(\frac{1}{a}\sin s - \frac{1}{b}\cos s\right) \overset{[1]}{=}$
$= \frac{2}{a^2}\sin t\sin s - \frac{1}{ab}\left(\sin t\cos s + \cos t\sin s\right) + \frac{2}{b^2}\cos t\cos s =$
$\quad -\frac{1}{a^2}\sin t\sin s - \frac{1}{b^2}\cos t\cos s + \frac{1}{ab}\left(\sin t\cos s + \cos t\sin s\right) =$
$= \frac{1}{a^2}\sin t\sin s + \frac{1}{b^2}\cos t\cos s.$

Disperzija:

$\mathsf{D}_Z\left(t\right) = \mathsf{K}_Z\left(t,t\right) = \frac{1}{a^2}\sin^2 t + \frac{1}{b^2}\cos^2 t.$

Pošto je $m_Z\left(t\right) \not\equiv const$ za sve $a, b > 0$, sledi da ne postoje a i b za koje je proces $Z_t,\ t\in\mathbb{R}$ stacionaran (niti slabo stacionaran).

17.04.2001.

1. Na putu kretanja automobila nalaze se 3 semafora. Verovatnoća da na prvom semaforu bude upaljeno zeleno svetlo je 0.7, na drugom 0.6, a na trećem 0.8. Semafori rade nezavisno jedan od drugog. Ako na svakom semaforu bude zeleno, vozač će stići na vreme na odredište. Ako na 2 semafora bude zeleno, stiže na vreme sa verovatnoćom 0.6, a ako zaleno bude na jednom semaforu, stiže na vreme sa verovatnoćom 0.1. Ako ni na jednom semaforu nije zeleno, sigurno kasni.
   (a) Izračunati verovatnoću da će vozač stići na vreme.
   (b) Ako je vozač stigao na vreme, koliko iznosi verovatnoća da na jednom semaforu nije bilo zeleno svetlo?

2. Neka su $X_i,\ i\in\{1,2,\dots,n\}$ nezavisne slučajne promenljive i neka X_i ima Poasonovu $\mathcal{P}\left(\lambda_i\right)$ raspodelu ($\lambda_i > 0$). Dokazati da slučajna promenljiva $Z_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ ima Poasonovu $\mathcal{P}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$ raspodelu.

3. Slučajna promenljiva X ima raspodelu definisanu gustinom raspodele verovatnoća $\varphi_X\left(x\right) = \frac{1}{2}e^{-|x|},\ x\in\mathbb{R}$. Naći raspodelu slučajne promenljive
$$Y = \begin{cases} X^2 + 2X & , \quad X \le 1 \\ 3 & , \quad X > 1 \end{cases}.$$

4. Putnici nezavisno jedan od drugog stižu na autobusko stajalište. Vreme čekanja autobusa u minutima ima uniformnu $\mathcal{U}\left(0;5\right)$ raspodelu.

(a) Izračunati verovatnoću da će 24 putnika autobus čekati manje od ukupno 70 minuta.

(b) Odrediti najveće t takvo da sa verovatnoćom većom od 0.95 vreme čekanja autobusa 24 putnika bude bar t.

5. Obeležje X ima uniformnu $\mathcal{U}(a,b)$ raspodelu.

(a) Metodom momenata naći ocenu parametara a i b.

(b) Dat je uzorak:

vrednost uzorka	$[0,0.4]$	$(0.4,0.8]$	$(0.8,1.2]$	$(1.2,1.6]$	$(1.6,2]$
učestanost	2	9	10	7	12

Dobijenim ocenama na osnovu uzorka izračunati vrednosti parametara a i b, a zatim χ^2 - testom ispitati saglasnost uzorka sa navedenom raspodelom za prag značajnosti $\alpha = 0.1$.

6. Na uzorku od 500 studenata ispitivano je prosečno dnevno učenje u satima u vreme ispitnog roka. Dobijeni rezultati su sređeni u tabeli:

dužina učenja	$[0,2]$	$(2,4]$	$(4,6]$	$(6,8]$
broj studenata	150	180	150	20

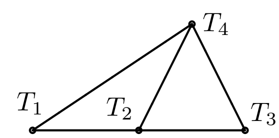
Poznato je da vreme učenja kod studenata ima normalnu raspodelu.

(a) Naći 95% interval poverenja za srednju vrednost dužine učenja.

(b) Testirati hipotezu da je srednja vrednost dužine učenja 4 sata sa pragom značajnosti $\alpha = 0.05$.

7. Neka su tačke T_1, T_2, T_3, T_4 povezane kao na slici.

Neka se čestica u svakom koraku pomera iz jedne tačke u drugu sa njom povezanu tačku, pri čemu u slučaju da je polazna tačka povezana sa više tačaka, prelasci u sve povezane tačke su jednako verovatni.



Naći matricu prelaza za jedan korak i finalne verovatnoće.

8. Naći matematičko očekivanje, autokorelacionu funkciju i disperziju slučajnog procesa $X(t) = \cos(\lambda t + U)$, $t \in \mathbb{R}$ gde je λ konstanta, a U je slučajna promenljiva sa uniformnom raspodelom $\mathcal{U}(0, 2\pi)$. Ispitati slabu stacionarnost procesa $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Rešenja:

1. Obeležimo: $\circ$ "*na rednom semaforu je zeleno svetlo*",
$\times$ "*na rednom semaforu nije zeleno svetlo*",

H_i, $i \in \{0,1,2,3\}$ - događaj: "*na i semafora vozač zatiče zeleno svetlo*",

A - događaj: "*vozač stiže na vreme*".

Događaji H_0, H_1, H_2, H_3 čine potpun sistem događaja i pri tome je:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(H_0) &= \mathsf{P}(\times\times\times) = (1-0.7)(1-0.6)(1-0.8) = 0.024,\\
\mathsf{P}(H_1) &= \mathsf{P}(\circ\times\times + \times\circ\times + \times\times\circ) =\\
&= 0.7(1-0.6)(1-0.8) + (1-0.7)\,0.6\,(1-0.8) +\\
&\quad + (1-0.7)(1-0.6)\,0.8 = 0.356,\\
\mathsf{P}(H_2) &= \mathsf{P}(\circ\circ\times + \circ\times\circ + \times\circ\circ) =\\
&= 0.7\cdot 0.6\cdot(1-0.8) + 0.7\cdot(1-0.6)\cdot 0.8 + (1-0.7)\cdot 0.6\cdot 0.8 =\\
&= 0.452,\\
\mathsf{P}(H_3) &= \mathsf{P}(\circ\circ\circ) = 0.7\cdot 0.6\cdot 0.8 = 0.336.
\end{aligned}
$$

Iz opisa sledi da je:

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{P}(A \mid H_0) = 0, && \mathsf{P}(A \mid H_1) = 0.1,\\
&\mathsf{P}(A \mid H_2) = 0.6, && \mathsf{P}(A \mid H_3) = 1.
\end{aligned}
$$

(a) Koristeći formulu totalne verovatnoće dobijamo:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(A) &= \sum_{i=0}^{3} \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(A \mid H_i) =\\
&= 0.024\cdot 0 + 0.356\cdot 0.1 + 0.452\cdot 0.6 + 0.336\cdot 1 = 0.6428.
\end{aligned}
$$

(b) Koristeći Bajesovu formulu dobijamo:

$$
\mathsf{P}(H_2 \mid A) = \frac{\mathsf{P}(H_2)\,\mathsf{P}(A \mid H_2)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{0.452\cdot 0.6}{0.6428} = 0.4219.
$$

2. Prvi način: dokaz izvodimo indukcijom po $n \in \mathbb{N}$.

* Za $n = 1$ je $Z_1 = X_1 : \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{1} \lambda_i\right)$.
* Pretpostavimo da za $n = k$ važi: $Z_k = \sum_{i=1}^{k} X_i : \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right)$ (skup vrednosti slučajne promenljive Z_k je $\mathcal{R}_{Z_k} = \{0, 1, 2, \ldots\}$).
* Dokazujemo da za $n = k+1$ slučajna promenljiva

$$
Z_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} X_i = Z_k + X_{k+1}
$$

ima Poasonovu $\mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i\right)$ raspodelu.

Označimo radi skraćenog pisanja: $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$.

Skup mogućih vrednosti slučajne promenljive Z_{k+1} je skup

$$
\mathcal{R}_{Z_{k+1}} = \mathcal{R}_{Z_k} + \mathcal{R}_{X_{k+1}} = \{0, 1, 2, \ldots\},
$$

a odgovarajuće verovatnoće su (za sve $m \in \mathcal{R}_{Z_{k+1}}$):

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{P}(Z_{k+1} = m) = \mathsf{P}(Z_k + X_{k+1} = m) =\\
&= \mathsf{P}\left(\sum_{i=0}^{m} \{Z_k = i, X_{k+1} = m - i\}\right) =\\
&\overset{[1]}{=} \sum_{i=0}^{m} \mathsf{P}(Z_k = i, X_{k+1} = m - i) =
\end{aligned}
$$

$$\stackrel{[2]}{=} \sum_{i=0}^{m} \mathsf{P}(Z_k = i) \cdot \mathsf{P}(X_{k+1} = m-i) =$$

$$\stackrel{[3]}{=} \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}\right) \cdot \left(\frac{\lambda_{k+1}^{m-i}}{(m-i)!} e^{-\lambda_{k+1}}\right) =$$

$$= e^{-(\lambda+\lambda_{k+1})} \lambda_{k+1}^m \sum_{i=0}^{m} \frac{\lambda^i}{i!} \cdot \frac{\lambda_{k+1}^{-i}}{(m-i)!} =$$

$$= e^{-(\lambda+\lambda_{k+1})} \lambda_{k+1}^m \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)^i \cdot \frac{1}{i!(m-i)!} =$$

$$= e^{-(\lambda+\lambda_{k+1})} \lambda_{k+1}^m \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)^i \cdot 1^{m-i} \cdot \frac{m!}{i!(m-i)!} =$$

$$= e^{-(\lambda+\lambda_{k+1})} \lambda_{k+1}^m \frac{1}{m!} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{k+1}} + 1\right)^m =$$

$$= e^{-(\lambda+\lambda_{k+1})} \lambda_{k+1}^m \frac{1}{m!} \frac{(\lambda+\lambda_{k+1})^m}{\lambda_{k+1}^m} =$$

$$= e^{-(\lambda+\lambda_{k+1})} \frac{(\lambda+\lambda_{k+1})^m}{m!} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i\right)^m}{m!} \exp\left[-\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i\right].$$

[1] - *Događaji* $\{Z_k = i, X_{k+1} = m-i\}$, $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ *su disjunktni.*

[2] - *Slučajne promenljive* Z_k *i* X_{k+1} *su nezavisne jer je* Z_k *funkcija od* $X_1, \ldots, X_k$ *a slučajne promenljive* $X_1, \ldots, X_k, X_{k+1}$ *su nezavisne.*

[3] - *Dato je* $X_{k+1} : \mathcal{P}(\lambda_{k+1})$ *tj.*

$$\mathsf{P}(X_{k+1} = j) = \frac{\lambda_{k+1}^j}{j!} e^{-\lambda_{k+1}},\ j \in \{0, 1, 2, \ldots\};$$

s druge strane, po induktivnoj pretpostavci je $Z_k : \mathcal{P}(\lambda)$ *tj.*

$$\mathsf{P}(Z_k = j) = \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda},\ j \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Prema tome, slučajna promenljiva Z_{k+1} ima skup mogućih vrednosti i njima odgovarajuće verovatnoće koje odgovaraju Poasonovoj $\mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i\right)$ raspodeli.

Na osnovu principa matematičke indukcije, tvrđenje zadatka je dokazano.

Drugi način:

Tvrđenje lakše dokazujemo pomoću karakterističnih funkcija. Slučajna promenljiva $X_j : \mathcal{P}(\lambda_j)$ ima karakterističnu funkciju

$$\mathcal{K}_{X_j}(t) = e^{\left(e^{it}-1\right)\lambda_j}$$

pa za karakterističnu funkciju slučajne promenljive Z_n, koristeći nezavisnost slučajnih promenljivih X_j [$*$], dobijamo:

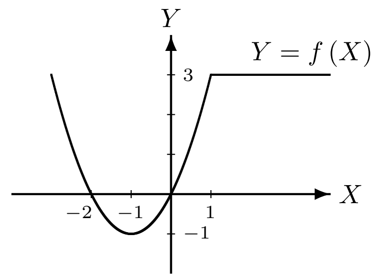
$$\mathcal{K}_{Z_n}(t) = \mathcal{K}_{\sum_{j=1}^{n} X_j}(t) \stackrel{[*]}{=} \prod_{j=1}^{n} \mathcal{K}_{X_j}(t) = \prod_{j=1}^{n} e^{\lambda_j\left(e^{it}-1\right)} = e^{\left(e^{it}-1\right)\sum_{j=1}^{n} \lambda_j}$$

što je upravo karakteristična funkcija slučajne promenljive sa Poasonovom $\mathcal{P}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$ raspodelom. Pošto je funkcija raspodele jednoznačno određena karakterističnom funkcijom, sledi da slučajna promenljiva Z_n ima $\mathcal{P}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$ raspodelu.

3.

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & , \quad x < 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x} & , \quad x \geq 0 \end{cases},$$

$$F_X(x) = \mathsf{P}(X < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\, dt.$$



Funkcijom $Y = f(X) = \begin{cases} X^2 + 2X & , \quad X \leq 1 \\ 3 & , \quad X > 1 \end{cases}$ (čiji je grafik dat na slici) se slučajna promenljiva X transformiše u slučajnu promenljivu Y. Pri rešavanju nejednačine $Y = f(X) < y$ dobijamo sledeće slučajeve:

* za $y < -1$ jednačina $x^2 + 2x - y = 0$ nema rešenja tj. prava $Y = y$ ne seče krivu $f(X)$;

* za $-1 \leq y \leq 3$ jednačina $x^2 + 2x - y = 0$ ima dva različita rešenja $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+y}$ tj. prava $Y = y$ seče krivu $f(X)$ u tačkama čije su apscise x_1 i x_2;

* za $3 < y < \infty$ jednačina $x^2 + 2x - y = 0$ ima, takođe, dva rešenja $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+y}$, ali prava $Y = y$ seče krivu $f(X)$ u tački čija je apscisa $x_1 = -1 - \sqrt{1+y}$.

Na osnovu razmotrenih slučajeva, izračunavanjem $F_Y(y) = \mathsf{P}(Y < y)$ dobijamo

(1) za $y \leq -1$:
$F_Y(y) = \mathsf{P}(X \in \emptyset) = 0;$

(2) za $-1 < y \leq 0$:
$$F_Y(y) = \mathsf{P}\left(X \in \left(-1-\sqrt{1+y}, -1+\sqrt{1+y}\right)\right) = \\ = \int\limits_{-1-\sqrt{1+y}}^{-1+\sqrt{1+y}} \varphi_X(x)\, dx = \int\limits_{-1-\sqrt{1+y}}^{-1+\sqrt{1+y}} \tfrac{1}{2}e^{x} dx = \\ = \tfrac{1}{2}\left(e^{-1+\sqrt{1+y}} - e^{-1-\sqrt{1+y}}\right);$$

(3) za $0 < y \leq 3$:
$$F_Y(y) = \mathsf{P}\left(X \in \left(-1-\sqrt{1+y}, -1+\sqrt{1+y}\right)\right) = \\ = \int\limits_{-1-\sqrt{1+y}}^{-1+\sqrt{1+y}} \varphi_X(x)\, dx = \int\limits_{-1-\sqrt{1+y}}^{0} \tfrac{1}{2}e^{x} dx + \int\limits_{0}^{-1+\sqrt{1+y}} \tfrac{1}{2}e^{-x} dx =$$

$= 1 - \frac{1}{2}\left(e^{-1-\sqrt{1+y}} + e^{1-\sqrt{1+y}}\right);$

(4) za $3 < y < \infty$:

$F_Y(y) = \mathsf{P}\left(X \in \left(-1-\sqrt{1+y}, \infty\right)\right) = \int\limits_{-1-\sqrt{1+y}}^{\infty} \varphi_X(x)\, dx =$

$= \int\limits_{-1-\sqrt{1+y}}^{0} \frac{1}{2} e^x dx + \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{2} e^{-1-\sqrt{1+y}}.$

4. Obeležimo sa X_i vreme čekanja i - tog putnika. Iz $X_i : \mathcal{U}(0,5)$ sledi da je $\mathsf{E}(X_i) = \frac{5}{2}$ i $\mathsf{D}(X_i) = \frac{25}{12}$. Slučajna promenljiva $S_{24} = \sum\limits_{i=1}^{24} X_i$ predstavlja ukupno vreme čekanja 24 putnika, pri čemu je

$\mathsf{E}(S_{24}) = \mathsf{E}\left(\sum\limits_{i=1}^{24} X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{24} \mathsf{E}(X_i) = \sum\limits_{i=1}^{24} \frac{5}{2} = 60$

i (slučajne promenljive X_i su nezavisne)

$\mathsf{D}(S_{24}) = \mathsf{D}\left(\sum\limits_{i=1}^{24} X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{24} \mathsf{D}(X_i) = \sum\limits_{i=1}^{24} \frac{25}{12} = 50.$

Primenom centralne granične teoreme ([*]) dobijamo:

(a) $\mathsf{P}(S_{24} < 70) = \mathsf{P}\left(\frac{S_{24} - \mathsf{E}(S_{24})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{24})}} < \frac{70 - \mathsf{E}(S_{24})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{24})}}\right) =$

$= \mathsf{P}\left(S_{24}^* < \frac{70-60}{\sqrt{50}}\right) \approx \mathsf{P}(S_{24}^* < 1.42) \overset{[*]}{\approx} \phi(1.42) \approx 0.9222.$

(b) Tražimo maksimalno rešenje po t nejednačine $\mathsf{P}(S_{24} \geq t) > 0.95$:

$\mathsf{P}(S_{24} \geq t) > 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \mathsf{P}(S_{24} < t) > 0.95 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \mathsf{P}(S_{24} < t) < 0.05 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(\frac{S_{24} - \mathsf{E}(S_{24})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{24})}} < \frac{t - \mathsf{E}(S_{24})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{24})}}\right) < 0.05 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(S_{24}^* < \frac{t - \mathsf{E}(S_{24})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{24})}}\right) < 0.05 \quad \overset{[*]}{\Leftrightarrow} \quad \phi\left(\frac{t - \mathsf{E}(S_{24})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{24})}}\right) \preceq 0.05 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \frac{t - \mathsf{E}(S_{24})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{24})}} \preceq \phi^{-1}(0.05) \approx -1.64 \quad \Leftrightarrow \quad t \preceq 48.438.$

Dakle, traženo t je približno 48.438 minuta.

5. (a) Pošto treba oceniti 2 parametra, izjednačićemo, na primer, momente prvog i drugog reda obeležja X sa prvim i drugim uzoračkim momentom (posmatramo uzorak veličine n: $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$), a zatim dobijene jednakosti rešavamo kao sistem jednačina po a i b:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(X) &= \frac{a+b}{2} = \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \\ \mathsf{E}\left(X^2\right) &= \mathsf{D}(X) + \mathsf{E}^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4} = \\ &= \frac{1}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right) = \overline{m}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2, \end{aligned}$$

koji je ekvivalentan sa

$$\frac{\begin{array}{l} a = 2\overline{X}_n - b \\ a^2 + ab + b^2 = \frac{3}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 \end{array}}{} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\begin{array}{l} a = 2\overline{X}_n - b \\ b^2 - 2\overline{X}_n b + 4\overline{X}_n^2 - \frac{3}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 = 0 \end{array}}{} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\begin{array}{l} a = 2\overline{X}_n - b \\ b = \overline{X}_n \pm \sqrt{\frac{3}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 - 3\overline{X}_n^2} = \\ \quad = \overline{X}_n \pm \sqrt{\frac{3}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right)} = \\ \quad = \overline{X}_n \pm \sqrt{\frac{3}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2} = \overline{X}_n \pm \sqrt{3\overline{S}_n^2} \end{array}}{} \quad \Leftrightarrow$$

$$a = \overline{X}_n \mp \sqrt{3\overline{S}_n^2} \qquad \wedge \qquad b = \overline{X}_n \pm \sqrt{3\overline{S}_n^2},$$

ali zbog $X : \mathcal{U}(a,b)$, tj. zbog $a < b$ uzimamo:

$$\hat{a} = \overline{X}_n - \sqrt{3\overline{S}_n^2} \qquad \wedge \qquad \hat{b} = \overline{X}_n + \sqrt{3\overline{S}_n^2}.$$

(b) Veličina zadanog uzorka je $n = 2+9+10+7+12 = 40$. Intervale iz uzorka reprezentujemo (kao što je uobičajeno) njihovim sredinama:

$$x_1 = 0.2, \quad x_2 = 0.6, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 1.4, \quad x_5 = 1.8\,.$$

Na osnovu zadanog uzorka i dobijenih ocena izračunavamo:

$\overline{X}_{40} = \frac{1}{40}(2\cdot 0.2 + 9\cdot 0.6 + 10\cdot 1 + 7\cdot 1.4 + 12\cdot 1.8) = 1.18,$

$$\overline{S}_{40}^2 = \frac{1}{40}\Big(2(0.2-1.18)^2 + 9(0.6-1.18)^2 + 10(1-1.18)^2 + \\ +7(1.4-1.18)^2 + 12(1.8-1.18)^2\Big) = 0.2556,$$

$\hat{a} = 1.18 - \sqrt{3\cdot 0.2556} \approx 0.3043,$

$\hat{b} = 1.18 + \sqrt{3\cdot 0.2556} \approx 2.0557.$

Prema tome, X ima $\mathcal{U}(0.3043, 2.0557)$ raspodelu, odnosno:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \le 0.3043 \\ \frac{x-0.3043}{1.7514} & , \ 0.3043 < x \le 2.0557 \\ 1 & , \ 2.0557 < x \end{cases}.$$

Pošto u prvoj grupi imamo manje od 5 podataka, vršimo spajanje prve i druge grupe. Dakle, teorijske verovatnoće (verovatnoće koje odgovaraju obeležju) dobijamo sa:

$p_1 = \mathsf{P}(X \in [-\infty, 0.8]) = F_X(0.8) \approx 0.2830,$

$p_2 = \mathsf{P}(X \in [0.8, 1.2]) = F_X(1.2) - F_X(0.8) \approx 0.2284,$

$p_3 = \mathsf{P}(X \in [1.2, 1.6]) = F_X(1.6) - F_X(1.2) \approx 0.2284,$

$p_4 = \mathsf{P}(X \in [1.6, \infty]) = 1 - F_X(1.6) \approx 0.2602.$

Prema tome, χ^2 test primenjujemo na sledeće podatke podatke:

I_i	$(-\infty, 0.8]$	$(0.8, 1.2]$	$(1.2, 1.6]$	$(1.6, \infty)$
m_i :	11	10	7	12
p_i :	0.2830	0.2284	0.2284	0.2602

Vrednost statistike Z je: $\quad z = \sum\limits_{i=1}^{4} \frac{(m_i - 40 \cdot p_i)^2}{40 \cdot p_i} \approx 0.8339.$

Pošto je (imamo 4 grupe podataka i 2 ocenjena parametra)

$$\chi^2_{0.1;1} \approx 2.71 > z$$

konstatujemo da uzorak ne protivreči našoj hipotezi.

6. Intervale reprezentujemo njihovim sredinama, i izračunavamo pomoćne veličine:

x_i	1	3	5	7	
f_i	150	180	150	20	$n = \sum\limits_{i=1}^{4} f_i = 500$
$x_i f_i$	150	540	750	140	$\sum\limits_{i=1}^{4} x_i f_i = 1580$
$x_i^2 f_i$	150	1620	3750	980	$\sum\limits_{i=1}^{4} x_i^2 f_i = 6500$

$\overline{x}_{500} = \frac{1}{500} \sum\limits_{i=1}^{4} x_i f_i = 3.16,$

$\overline{s}^2_{500} = \frac{1}{500} \sum\limits_{i=1}^{4} x_i^2 f_i - \overline{x}^2_{500} = 3.0144, \qquad \overline{s}_{500} = \sqrt{\overline{s}^2_{500}} \approx 1.7362.$

Iz tablice Studentove raspodele očitavamo:

$$t_{500-1; 0.95 + \frac{1-0.95}{2}} = t_{499;0.975} \approx t_{\infty;0.975} \approx 1.96.$$

(a) Traženi interval poverenja:

$I = \left(\overline{x}_{500} - t_{499;0.975} \frac{\overline{s}_{500}}{\sqrt{499}} ; \overline{x}_{500} + t_{499;0.975} \frac{\overline{s}_{500}}{\sqrt{499}} \right) =$

$= (3.00766; 3.31234)$.

(b) Pošto hipotezu testiramo sa istim pragom značajnosti sa kojim smo pod (a) našli interval poverenja, tada zbog $4 \notin I$ hipotezu odbacujemo.

7. Matrica prelaza (za jedan korak):

$$P = \begin{array}{c} \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array} \right] \end{array} .$$

Tražimo vektor verovatnoća $\mathbf{v} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array}\right] \end{array}$ za koji važi $\mathbf{v} \cdot P = \mathbf{v}$; dakle, rešavamo po $x, y, z, t \in (0,1)$ sistem jednačina

$$[x \;\; y \;\; z \;\; t] \cdot P = [x \;\; y \;\; z \;\; t] \quad \wedge \quad x+y+z+t = 1\,,$$

koji je dalje ekvivalentan sa

$$\begin{array}{ccccccccc}
x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\
 & & \frac{1}{3}y & & & + & \frac{1}{3}t & = & x \\
\frac{1}{2}x & & & + & \frac{1}{2}z & + & \frac{1}{3}t & = & y \\
 & & \frac{1}{3}y & & & + & \frac{1}{3}t & = & z \\
\frac{1}{2}x & + & \frac{1}{3}y & + & \frac{1}{2}z & & & = & t
\end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\
 & & \frac{4}{3}y & + & z & + & \frac{4}{3}t & = & 1 \\
 & & & & \frac{9}{8}z & + & \frac{4}{3}t & = & \frac{5}{8} \\
 & & & & & & \frac{40}{27}t & = & \frac{4}{9}
\end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$x = \frac{2}{10} \;\; \wedge \;\; y = \frac{3}{10} \;\; \wedge \;\; z = \frac{2}{10} \;\; \wedge \;\; t = \frac{3}{10}$.

Prema tome, vektor finalnih verovatnoća glasi:

$$\mathbf{v} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} \frac{2}{10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} \end{array}\right] \end{array}.$$

8. Matematičko očekivanje:

$m_X(t) = \mathsf{E}(\cos(\lambda t + U)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda t + u)\, \varphi_Y(u)\, du =$
$= \int\limits_{0}^{2\pi} \cos(\lambda t + u)\, \frac{1}{2\pi} du \overset{[1]}{=} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\lambda t}^{\lambda t + 2\pi} \cos z dz = \frac{1}{2\pi} \sin z \Big|_{\lambda t}^{\lambda t + 2\pi} =$
$= \frac{1}{2\pi}(\sin(\lambda t + 2\pi) - \sin(\lambda t)) = \frac{1}{2\pi}(\sin(\lambda t) - \sin(\lambda t)) = 0.$

[1] - *Smena:* $z = \lambda t + u$.

Autokorelaciona funkcija:

$\mathsf{R}_X(t,s) = \mathsf{E}(X(t)\; X(s)) = \mathsf{E}(\cos(\lambda t + U)\; \cos(\lambda s + U)) \overset{[2]}{=}$
$= \mathsf{E}\left(\frac{1}{2}\cos(\lambda t + \lambda s + 2U) + \frac{1}{2}\cos(\lambda t - \lambda s)\right) =$
$= \frac{1}{2}\mathsf{E}(\cos(\lambda t + \lambda s + 2U)) + \frac{1}{2}\cos(\lambda t - \lambda s) =$
$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda t + \lambda s + 2u)\, \varphi_Y(u)\, du + \frac{1}{2}\cos(\lambda t - \lambda s) =$
$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} \cos(\lambda t + \lambda s + 2u)\, \frac{1}{2\pi} du + \frac{1}{2}\cos(\lambda t - \lambda s) \overset{[3]}{=}$
$= 0 + \frac{1}{2}\cos(\lambda t - \lambda s) = \frac{1}{2}\cos(\lambda(t - s)).$

Dakle, proces $X(t)$ je slabo stacionaran jer je $m_X(t) = const$ a autokorelaciona funkcija je funkcija od $(t-s)$.

[2] - *Koristeći* $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$.

[3] - *Smenom* $z = \lambda t + \lambda s + 2u$ *kao u* [1].

Disperzija:

$\mathsf{D}_X(t) = \mathsf{K}_X(t,t) = \mathsf{R}_X(t,t) - (m_X(t))^2 = \frac{1}{2}\cos 0 - 0^2 = \frac{1}{2}$.

26.06.2001.

1. Aca i Boki bacaju pravilan novčić, svaki po 100 puta. Izračunati verovatnoću da su jednak broj puta bacili grb.

2. Diskretna slučajna promenljiva X ima geometrijsku $\mathcal{G}(p)$ $(0 < p < 1)$ raspodelu. Neprekidna slučajna promenljiva Y pri $X = n$ ima gustinu
$$\varphi_{Y|\{X=n\}}(y) = \begin{cases} (n+1)\,y^n & , \quad y \in (0,1) \\ 0 & , \quad y \notin (0,1) \end{cases}.$$
   (a) Naći funkciju raspodele slučajne promenljive Y.
   (b) Izračunati verovatnoće $\mathsf{P}(X = n, Y < y)$.

3. Slučajni vektor (X,Y) ima gustinu raspodele verovatnoća:
$$\varphi_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} Ax^2y & , \quad (x,y) \in D \\ 0 & , \quad (x,y) \notin D \end{cases},$$
gde je $A = \frac{10}{17}$, i gde je D trougao u $\mathbb{R}^2$ ravni sa temenima u tačkama $(1,1)$, $(2,1)$ i $(1,3)$. Naći raspodelu slučajne promenljive $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ koja predstavlja ugao koji slučajni vektor (X,Y) zaklapa sa pozitivnim smerom x ose.

4. Slučajna promenljiva X ima normalnu $\mathcal{N}(m,\sigma)$ raspodelu. Odrediti približne vrednosti parametara m i σ ako se zna da je $\mathsf{P}\left(X < \frac{33}{25}\right) = 0.2$ i $\mathsf{P}\left(X > \frac{139}{25}\right) = 0.1$.

5. Obeležje X ima zakon raspodele: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2p & 1-2p \end{pmatrix}$.
   Na osnovu uzorka obima n oceniti parametar p
   (a) metodom momenata,
   (b) metodom maksimalne verodostojnosti.

6. U periodu od 50 godina je praćen broj kišovitih dana u Briselu, i dobijeni podaci su predstavljeni u sledećoj tabeli:

broj kišnih dana	$[0,40]$	$(40,80]$	$(80,100]$	$(100,120]$	$(120,360]$
broj godina	5	14	14	11	6

χ^2 testom sa pragom značajnosti $\alpha = 0.01$ testirati hipotezu da broj kišnih dana u godini u Briselu ima normalnu raspodelu (za ocenu parametara koristiti poznate statistike).

7. Dva nezavisna izvora šuma S_1 i S_2 na svaku sekundu menjaju svoja stanja

   stanje 0: "*izvor ne emituje šum*" i stanje 1: "*izvor emituje šum*"

   i to na sledeći način:

   izvor S_1: ako tokom jedne sekunde ne emituje šum, tada u toku naredne sekunde ne emituje šum sa verovatnoćom $\frac{1}{2}$; ako tokom jedne sekunde emituje šum, tada u toku naredne sekunde ne emituje šum sa verovatnoćom $\frac{1}{3}$;

   izvor S_2: ako tokom jedne sekunde ne emituje šum, tada u toku naredne sekunde ne emituje šum sa verovatnoćom $\frac{1}{4}$; ako tokom jedne sekunde emituje šum, tada u toku naredne sekunde ne emituje šum sa verovatnoćom $\frac{1}{5}$.

   Slučajni proces ξ predstavlja stanja izvora šumova na takav način da $\xi(n) = (i, j)$, gde je $i, j \in \{0, 1\}$ označava da se u toku n - te sekunde izvor šuma S_1 nalazi u stanju i, a S_2 u stanju j.

   (a) Naći matricu prelaza (za jedan korak) homogenog lanca Markova ξ.
   (b) Ako u toku prve sekunde ni jedan izvor ne emituje šum, izračunati verovatnoću da u toku treće sekunde tačno jedan izvor emituje šum.

8. Slučajne promenljive $U : \mathcal{N}(0,1)$ i $V : \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$ su nezavisne. Naći srednju vrednost, autokovarijansnu funkciju i disperziju slučajnog procesa $X_t = U \sin t + e^{-tV}$, $t \in [0, \infty)$.

Rešenja:

1. Označimo sa A_i, $i \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ događaj: "*Aca je i puta bacio grb*", a sa B_j, $j \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ događaj: "*Boki je j puta bacio grb*". Sa C označimo događaj "*Aca i Boki su jednak broj puta bacili grb*".

   Slučajna promenljiva X koja predstavlja broj bačenih grbova pri 100 bacanja pravilnog novčića ima $\mathcal{B}\left(100, \frac{1}{2}\right)$ raspodelu, tako da je:

   $\mathsf{P}(A_i) = \mathsf{P}(B_i) = \mathsf{P}(X = i) = \binom{100}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{2}\right)^{100-i} = \frac{1}{2^{100}}\binom{100}{i}$.

   Događaj C možemo predstaviti na sledeći način: $C = \sum\limits_{k=0}^{100} A_k B_k$. Pri tome su događaji $A_k B_k$, $k \in \{1, \ldots, 100\}$ disjunktni, a događaji A_k i B_k su nezavisni međusobno, te sledi da je:

   $$\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}\left(\sum_{k=0}^{100} A_k B_k\right) = \sum_{k=0}^{100} \mathsf{P}(A_k B_k) = \sum_{k=0}^{100} \mathsf{P}(A_k)\ \mathsf{P}(B_k) =$$
   $$= \sum_{k=0}^{100} \frac{1}{2^{100}}\binom{100}{k} \cdot \frac{1}{2^{100}}\binom{100}{k} = \frac{1}{2^{200}} \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} \cdot \binom{100}{k} = \frac{1}{2^{200}}\binom{200}{100}.$$

2. $\mathsf{P}(X=n) = p\,(1-p)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$;

$F_{Y|\{X=n\}}(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} \varphi_{Y|\{X=n\}}(t)\,dt =$

$$= \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{y} 0dt & , \ y \le 0 \\ \int\limits_{0}^{y} (n+1)\,t^n dt & , \ 0 < y \le 1 \\ \int\limits_{0}^{1} (n+1)\,t^n dt & , \ 1 < y \end{cases} = \begin{cases} 0 & , \ y \le 0 \\ y^{n+1} & , \ 0 < y \le 1 \\ 1 & , \ 1 < y \end{cases}.$$

(a) Na osnovu formule totalne verovatnoće (događaji $\{X=n\}$, $n \in \mathbb{N}$ čine potpun sistem događaja) dobijamo:

$F_Y(y) = \mathsf{P}(Y < y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(X=n)\,\mathsf{P}(Y < y \mid X=n) =$

$= p \sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} \cdot F_{Y|\{X=n\}}(y) = \ldots$

- za $y \le 0$:

  $F_Y(y) = p \sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} \cdot 0 = 0;$

- za $0 < y \le 1$:

  $F_Y(y) = p \sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} y^{n+1} = py^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} y^{n-1} =$

  $= py^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} (y\,(1-p))^{n-1} \overset{[1]}{=} py^2 \frac{1}{1-y(1-p)} = \frac{py^2}{1-y(1-p)};$

- za $1 < y$:

  $F_Y(y) = p \sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} \cdot 1 \overset{[1]}{=} \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$

[1] - *Suma beskonačnog geometrijskog reda.*

Dakle: $\quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \ y \le 0 \\ \frac{py^2}{1-y(1-p)} & , \ 0 < y \le 1 \\ 1 & , \ 1 < y \end{cases}.$

(b) Za $n \le 0$, zbog $\{X=n, Y<y\} \subseteq \{X=n\}$, važi

$\mathsf{P}(X=n, Y<y) \le \mathsf{P}(X=n) = 0,$

a za $n \in \mathbb{N}$ je

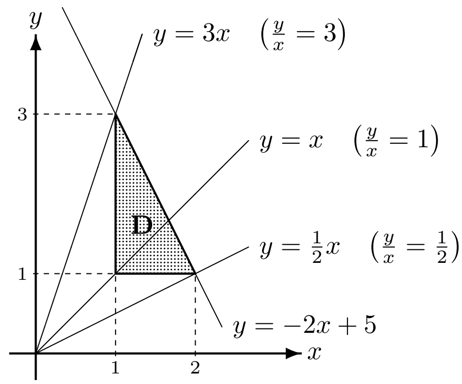
$\mathsf{P}(X=n, Y<y) = \mathsf{P}(X=n)\,\mathsf{P}(Y<y \mid X=n) =$

$= p\,(1-p)^{n-1} \cdot F_{Y|\{X=n\}}(y) = \begin{cases} 0 & , \ y \le 0 \\ p\,(1-p)^{n-1} y^{n+1} & , \ 0 < y \le 1 \\ p\,(1-p)^{n-1} & , \ 1 < y \end{cases}.$

3. Za slučajnu promenljivu α važi $\operatorname{tg}\alpha = \frac{Y}{X}$, gde je tg bijektivna funkcija na posmatranom intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, te je

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{Y}{X}$$

i pri tome znamo da je $\mathsf{P}\left(\alpha \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = 0.$



slika 1

Na osnovu definicije funkcije raspodele $F_\alpha(a) = \mathsf{P}(\alpha < a)$ i gustine slučajnog vektora (X, Y) dobijamo sledeće slučajeve (vidi sliku 1):

(1) za $a \le 0$: $\quad F_\alpha(a) = 0$;

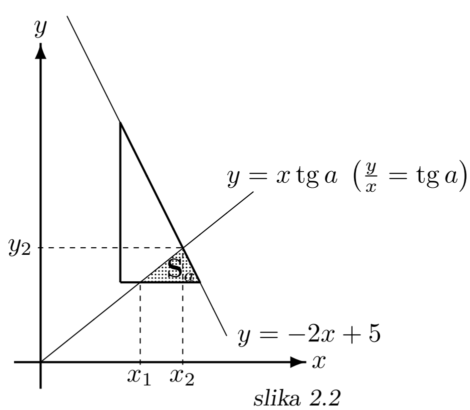
(2) za $a > 0$: posmatrajući oblast $S_a = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{y}{x} < \operatorname{tg} a\right\}$ dobijamo

$$F_\alpha(a) = \mathsf{P}\left(\operatorname{arctg}\frac{Y}{X} < a\right) = \mathsf{P}\left(\frac{Y}{X} < \operatorname{tg} a\right) = \iint\limits_{S_a \cap D} Ax^2 y\,dx\,dy = \ldots$$

(2.1) za $a \in \left(0, \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right]$: $\quad F_\alpha(a) = \iint\limits_{\emptyset} Ax^2 y\,dx\,dy = 0$;

(2.2) za $a \in \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}, \operatorname{arctg} 1\right] = \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$ (vidi sliku 2.2):

$$F_\alpha(a) = \int\limits_1^{\frac{5\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} a + 2}} \left(\int\limits_{\frac{y}{\operatorname{tg} a}}^{\frac{5-y}{2}} Ax^2 y\,dx \right) dy = A\frac{24\cos a + 8\cos(3a) - 821\sin^3 a}{480\sin^3 a};$$



$x_1 = \frac{1}{\operatorname{tg} a}$

$x_2 = \frac{5}{\operatorname{tg} a + 2}$

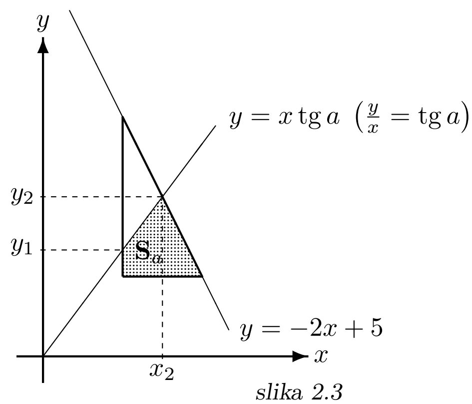
$y_2 = \frac{5\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} a + 2}$

slika 2.2

(2.3) za $a \in (\operatorname{arctg} 1, \operatorname{arctg} 3] = \left(\frac{\pi}{4}, \operatorname{arctg} 3\right]$ (vidi sliku 2.3):

$$F_\alpha(a) = \int\limits_1^{\frac{5}{\operatorname{tg} a + 2}} \left(\int\limits_1^{\operatorname{tg} a \cdot x} Ax^2 y\,dy \right) dx + \int\limits_{\frac{5}{\operatorname{tg} a + 2}}^{2} \left(\int\limits_1^{-2x+5} Ax^2 y\,dy \right) dx =$$

$= -\frac{A}{960\cos^2 a((2\cos a+\sin a)^4} \cdot (230 + 7619\cos(2a) +$
$+11674\cos(4a) + 4189\cos(6a) + 4242\sin(2a) +$
$+5832\sin(4a) + 2602\sin(6a));$



$x_2 = \frac{5}{\mathrm{tg}\,a+2}$

$y_1 = \mathrm{tg}\,a$

$y_2 = \frac{5\,\mathrm{tg}\,a}{\mathrm{tg}\,a+2}$

slika 2.3

(2.4) za $a \in (\mathrm{arctg}\,3, \infty)$: $\quad F_\alpha(a) = \iint\limits_D Ax^2 y\,dxdy = 1.$

4. Slučajna promenljiva $X^* = \frac{X-\mathsf{E}(X)}{\sqrt{\mathsf{D}(X)}} = \frac{X-m}{\sigma}$ ima $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu. Približne vrednosti ove raspodele su date u tablicama (Laplasova funkcija), tako da je:

$$\mathsf{P}\left(X < \tfrac{33}{25}\right) = \mathsf{P}\left(\frac{X-\mathsf{E}(X)}{\sqrt{\mathsf{D}(X)}} < \frac{\frac{33}{25}-\mathsf{E}(X)}{\sqrt{\mathsf{D}(X)}}\right) = \mathsf{P}\left(X^* < \frac{\frac{33}{25}-m}{\sigma}\right) \approx$$
$$\approx \phi\left(\frac{\frac{33}{25}-m}{\sigma}\right) \approx 0.2 \qquad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\frac{33}{25}-m}{\sigma} \approx \phi^{-1}(0.2) \approx -0.84 \qquad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \qquad m - \sigma \cdot 0.84 \approx \tfrac{33}{25},$$
$$\mathsf{P}\left(X > \tfrac{139}{25}\right) = 1 - \mathsf{P}\left(X \le \tfrac{139}{25}\right) = 1 - \mathsf{P}\left(\frac{X-\mathsf{E}(X)}{\sqrt{\mathsf{D}(X)}} \le \frac{\frac{139}{25}-\mathsf{E}(X)}{\sqrt{\mathsf{D}(X)}}\right) =$$
$$= 1 - \mathsf{P}\left(X^* \le \frac{\frac{139}{25}-m}{\sigma}\right) \approx 1 - \phi\left(\frac{\frac{139}{25}-m}{\sigma}\right) \approx 0.1 \qquad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \qquad \phi\left(\frac{\frac{139}{25}-m}{\sigma}\right) \approx 1 - 0.1 = 0.9 \qquad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\frac{139}{25}-m}{\sigma} \approx \phi^{-1}(0.9) \approx 1.28 \qquad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \qquad m + \sigma \cdot 1.28 \approx \tfrac{139}{25}.$$

Rešavajući dobijeni sistem jednačina po m i σ izračunavamo tražene približne vrednosti:

$$\begin{array}{l} m - \sigma \cdot 0.84 \approx \frac{33}{25} \\ m + \sigma \cdot 1.28 \approx \frac{139}{25} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \sigma \approx 2 \\ m \approx 3 \end{array}.$$

Dakle, slučajna promenljiva X ima približno $\mathcal{N}(3,2)$ raspodelu.

5. (a) Matematičko očekivanje obeležja X:
$\mathsf{E}(X) = 1 \cdot 2p + 2 \cdot (1-2p) = 2(1-p)$
izjednačavamo sa uzoračkom srednjom vrednošću:
$\mathsf{E}(X) = \overline{X}_n \quad \Rightarrow \quad 2(1-\overline{p}) = \overline{X}_n \quad \Rightarrow \quad 1-\overline{p} = \frac{1}{2}\overline{X}_n$
i dobijamo ocenu parametra p :
$$\overline{p} = 1 - \tfrac{1}{2}\overline{X}_n.$$
(b) Koristićemo statistiku K, gde je K slučajna promenljiva koja predstavlja broj jedinica u uzorku obima n (možemo je predstaviti na sledeći način: $K = K(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} I_{\{X_i=1\}}$, gde je $I_{\{X_i=1\}}$ indikator događaja $\{X_i = 1\}$, tj. slučajna promenljiva definisana sa $I_{\{X_i=1\}} = \begin{cases} 1 & , \quad X_i = 1 \\ 0 & , \quad X_i \neq 1 \end{cases}$).
Označimo sa k broj pojavljivanja jedinice u uzorku $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
$$L(x_1, \ldots, x_n; p) = \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}(X_i = x_i) = \\ = (2p)^k \cdot (1-2p)^{n-k},$$
$$\ln L(x_1, \ldots, x_n; p) = \ln\left((2p)^k \cdot (1-2p)^{n-k}\right) = \\ = k \cdot \ln(2p) + (n-k) \cdot \ln(1-2p).$$
Maksimum funkcije L po p :
$$\frac{\partial}{\partial p} \ln L(x_1, \ldots, x_n; p) = k \cdot \frac{1}{2p} \cdot 2 + (n-k) \cdot \frac{1}{1-2p} \cdot (-2) =$$
$$= \frac{k}{p} + \frac{-2(n-k)}{1-2p} = \frac{(1-2p)k - 2p(n-k)}{p(1-2p)} =$$
$$= \frac{k - 2pk - 2p(n-k)}{p(1-2p)} = \frac{k - 2p(k+n-k)}{p(1-2p)} = \frac{k-2np}{p(1-2p)},$$
$\frac{\partial}{\partial p} \ln L(x_1, \ldots, x_n; p) = 0 \quad \Rightarrow \quad k - 2np = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{k}{2n}.$
Prema tome, metodom maksimalne verodostojnosti smo dobili ocenu:
$$\hat{p} = \frac{K}{2n}.$$

6. Za izračunavanje parametara m i σ normalne raspodele $\mathcal{N}(m, \sigma)$ koristimo uzoračku aritmetičku sredinu i uzoračku standardnu devijaciju, pri čemu svaki interval reprezantujemo njegovom sredinom ($x_1 = 20$, $x_2 = 60$, $x_3 = 90$, $x_4 = 110$, $x_5 = 240$):
$$\overline{x}_{50} = \tfrac{1}{50}(5 \cdot 20 + 14 \cdot 60 + 14 \cdot 90 + 11 \cdot 110 + 6 \cdot 240) = 97,$$
$$\overline{s}^2_{50} = \tfrac{1}{50}\Big(5 \cdot (20-97)^2 + 14 \cdot (60-97)^2 + 14 \cdot (90-97)^2 + \\ +11 \cdot (110-97)^2 + 6 \cdot (240-97)^2\Big) = 3481,$$
$$\overline{s}_{50} = \sqrt{\overline{s}^2_{50}} = 59.$$
Sa ovako izračunatim parametrima nalazimo potrebne teorijske verovatnoće za obeležje X sa normalnom $\mathcal{N}(97, 59)$ raspodelom:

$$p_i = \mathsf{P}(X \in (a_i, b_i)) = \frac{1}{\overline{s}_{50}\sqrt{2\pi}} \int\limits_{a_i}^{b_i} e^{-\frac{(x-\overline{x}_{50})^2}{2\overline{s}_{50}^2}} dx \overset{[1]}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{a_i-\overline{x}_{50}}{\overline{s}_{50}}}^{\frac{b_i-\overline{x}_{50}}{\overline{s}_{50}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \approx$$

$$\approx \phi\left(\frac{b_i - \overline{x}_{50}}{\overline{s}_{50}}\right) - \phi\left(\frac{a_i - \overline{x}_{50}}{\overline{s}_{50}}\right) = \phi\left(\frac{b_i - 97}{59}\right) - \phi\left(\frac{a_i - 97}{59}\right).$$

[1] - *Smena* $\frac{x-\overline{x}_{50}}{\overline{s}_{50}} = t$.

Kako je gustina slučajne promenljive sa normalnom raspodelom različita od nule na celom skupu $\mathbb{R}$, χ^2 test ćemo primeniti na sledeće podatke:

$(-\infty, 40]$	$(40, 80]$	$(80, 100]$	$(100, 120]$	$(120, \infty)$
5	14	14	11	6

Dakle:

$p_1 \approx \phi\left(\frac{40-97}{59}\right) - \phi(-\infty) \approx 0.166 - 0 \approx 0.166,$

$p_2 \approx \phi\left(\frac{80-97}{59}\right) - \phi\left(\frac{40-97}{59}\right) \approx 0.3859 - 0.166 \approx 0.2199,$

$p_3 \approx \phi\left(\frac{100-97}{59}\right) - \phi\left(\frac{80-97}{59}\right) \approx 0.5199 - 0.3859 \approx 0.134,$

$p_4 \approx \phi\left(\frac{120-97}{59}\right) - \phi\left(\frac{100-97}{59}\right) \approx 0.6517 - 0.5199 \approx 0.1318,$

$p_5 \approx \phi(\infty) - \phi\left(\frac{120-97}{59}\right) \approx 1 - 0.6517 \approx 0.3483.$

Izračunavamo vrednost statistike $Z = \sum\limits_{i=1}^{5} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$:

$$z \approx 20.5204.$$

Pošto je $z > \chi^2_{0.01;5-1-2} = \chi^2_{0.01;2} \approx 9.21$ (dva ocenjena parametra), hipotezu odbacujemo.

7. (a) Verovatnoće prelaza stanja izvora šuma S_1:

$\mathsf{P}(S_1(n+1) = 0 \mid S_1(n) = 0) = \frac{1}{2},$

$\mathsf{P}(S_1(n+1) = 1 \mid S_1(n) = 0) = 1 - \mathsf{P}(S_1(n+1) = 0 \mid S_1(n) = 0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$

$\mathsf{P}(S_1(n+1) = 0 \mid S_1(n) = 1) = \frac{1}{3},$

$\mathsf{P}(S_1(n+1) = 1 \mid S_1(n) = 1) = 1 - \mathsf{P}(S_1(n+1) = 0 \mid S_1(n) = 1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$

Verovatnoće prelaza stanja izvora šuma S_2:

$\mathsf{P}(S_2(n+1) = 0 \mid S_2(n) = 0) = \frac{1}{4},$

$\mathsf{P}(S_2(n+1) = 1 \mid S_2(n) = 0) = 1 - \mathsf{P}(S_2(n+1) = 0 \mid S_2(n) = 0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$

$\mathsf{P}(S_2(n+1) = 0 \mid S_2(n) = 1) = \frac{1}{5},$

$\mathsf{P}(S_2(n+1) = 1 \mid S_2(n) = 1) = 1 - \mathsf{P}(S_2(n+1) = 0 \mid S_2(n) = 1) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$

Verovatnoće prelaza stanja procesa ξ: za sve $i, j, k, m \in \{0, 1\}$ važi

$p_{(i,j),(k,m)} =$
$= \mathsf{P}\left(S_1(n+1)=k, S_2(n+1)=m \mid S_1(n)=i, S_2(n)=j\right) =$
$= \dfrac{\mathsf{P}\left(S_1(n+1)=k, S_2(n+1)=m, S_1(n)=i, S_2(n)=j\right)}{\mathsf{P}\left(S_1(n)=i, S_2(n)=j\right)} =$
$\overset{[1]}{=} \dfrac{\mathsf{P}\left(S_1(n+1)=k, S_1(n)=i\right)\mathsf{P}\left(S_2(n+1)=m, S_2(n)=j\right)}{\mathsf{P}\left(S_1(n)=i\right)\mathsf{P}\left(S_2(n)=j\right)} =$
$= \dfrac{\mathsf{P}\left(S_1(n+1)=k, S_1(n)=i\right)}{\mathsf{P}\left(S_1(n)=i\right)} \cdot \dfrac{\mathsf{P}\left(S_2(n+1)=m, S_2(n)=j\right)}{\mathsf{P}\left(S_2(n)=j\right)} =$
$= \mathsf{P}\left(S_1(n+1)=k \mid S_1(n)=i\right)\mathsf{P}\left(S_2(n+1)=m \mid S_2(n)=j\right).$

[1] - *Izvori šumova S_1 i S_2 su nezavisni.*

Prema tome:

$p_{(0,0),(0,0)} =$
$= \mathsf{P}\left(S_1(n+1)=0 \mid S_1(n)=0\right)\mathsf{P}\left(S_2(n+1)=0 \mid S_2(n)=0\right) =$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8},$

$p_{(0,0),(0,1)} =$
$= \mathsf{P}\left(S_1(n+1)=0 \mid S_1(n)=0\right)\mathsf{P}\left(S_2(n+1)=1 \mid S_2(n)=0\right) =$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8},$

$p_{(0,0),(1,0)} =$
$= \mathsf{P}\left(S_1(n+1)=1 \mid S_1(n)=0\right)\mathsf{P}\left(S_2(n+1)=0 \mid S_2(n)=0\right) =$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8},$

$p_{(0,0),(1,1)} =$
$= \mathsf{P}\left(S_1(n+1)=1 \mid S_1(n)=0\right)\mathsf{P}\left(S_2(n+1)=1 \mid S_2(n)=0\right) =$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8},$

$p_{(0,1),(0,0)} =$
$= \mathsf{P}\left(S_1(n+1)=0 \mid S_1(n)=0\right)\mathsf{P}\left(S_2(n+1)=0 \mid S_2(n)=1\right) =$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10},$

$p_{(0,1),(0,1)} =$
$= \mathsf{P}\left(S_1(n+1)=0 \mid S_1(n)=0\right)\mathsf{P}\left(S_2(n+1)=1 \mid S_2(n)=1\right) =$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{10},$

$p_{(0,1),(1,0)} =$
$= \mathsf{P}\left(S_1(n+1)=1 \mid S_1(n)=0\right)\mathsf{P}\left(S_2(n+1)=0 \mid S_2(n)=1\right) =$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10},$

$p_{(0,1),(1,1)} =$
$= \mathsf{P}\left(S_1(n+1)=1 \mid S_1(n)=0\right)\mathsf{P}\left(S_2(n+1)=1 \mid S_2(n)=1\right) =$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{10},$

$p_{(1,0),(0,0)} =$
$= \mathsf{P}\left(S_1(n+1)=0 \mid S_1(n)=1\right)\mathsf{P}\left(S_2(n+1)=0 \mid S_2(n)=0\right) =$
$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$

$p_{(1,0),(0,1)} =$
$= \mathsf{P}\left(S_1(n+1)=0 \mid S_1(n)=1\right)\mathsf{P}\left(S_2(n+1)=1 \mid S_2(n)=0\right) =$
$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{12},$

$p_{(1,0),(1,0)} =$
$= \mathsf{P}\left(S_1(n+1)=1 \mid S_1(n)=1\right)\mathsf{P}\left(S_2(n+1)=0 \mid S_2(n)=0\right) =$
$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{12},$

$p_{(1,0),(1,1)} =$
$= \mathsf{P}(S_1(n+1) = 1 \mid S_1(n) = 1)\,\mathsf{P}(S_2(n+1) = 1 \mid S_2(n) = 0) =$
$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12},$
$p_{(1,1),(0,0)} =$
$= \mathsf{P}(S_1(n+1) = 0 \mid S_1(n) = 1)\,\mathsf{P}(S_2(n+1) = 0 \mid S_2(n) = 1) =$
$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15},$
$p_{(1,1),(0,1)} =$
$= \mathsf{P}(S_1(n+1) = 0 \mid S_1(n) = 1)\,\mathsf{P}(S_2(n+1) = 1 \mid S_2(n) = 1) =$
$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15},$
$p_{(1,1),(1,0)} =$
$= \mathsf{P}(S_1(n+1) = 1 \mid S_1(n) = 1)\,\mathsf{P}(S_2(n+1) = 0 \mid S_2(n) = 1) =$
$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{15},$
$p_{(1,1),(1,1)} =$
$= \mathsf{P}(S_1(n+1) = 1 \mid S_1(n) = 1)\,\mathsf{P}(S_2(n+1) = 1 \mid S_2(n) = 1) =$
$= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}.$

Matrica prelaza procesa ξ:

$$P = \begin{array}{c} \\ {\scriptstyle (0,0)} \\ {\scriptstyle (0,1)} \\ {\scriptstyle (1,0)} \\ {\scriptstyle (1,1)} \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} {\scriptstyle (0,0)} & {\scriptstyle (0,1)} & {\scriptstyle (1,0)} & {\scriptstyle (1,1)} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{10} & \frac{4}{10} & \frac{1}{10} & \frac{4}{10} \\ \frac{1}{12} & \frac{3}{12} & \frac{2}{12} & \frac{6}{12} \\ \frac{1}{15} & \frac{4}{15} & \frac{2}{15} & \frac{8}{15} \end{array}\right] \end{array}.$$

(b) Matrica prelaza procesa ξ za dva koraka:

$$P^2 = \begin{array}{c} \\ {\scriptstyle (0,0)} \\ {\scriptstyle (0,1)} \\ {\scriptstyle (1,0)} \\ {\scriptstyle (1,1)} \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} {\scriptstyle (0,0)} & {\scriptstyle (0,1)} & {\scriptstyle (1,0)} & {\scriptstyle (1,1)} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} \cdots & \frac{21}{64} & \frac{119}{960} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right] \end{array}.$$

Vektor početne raspodele verovatnoća: $\mathbf{p}(0) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} {\scriptstyle (0,0)} & {\scriptstyle (0,1)} & {\scriptstyle (1,0)} & {\scriptstyle (1,1)} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}.$
Vektor raspodele verovatnoća nakon dva koraka:

$$\mathbf{p}(2) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} {\scriptstyle (0,0)} & {\scriptstyle (0,1)} & {\scriptstyle (1,0)} & {\scriptstyle (1,1)} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} \cdots & \frac{21}{64} & \frac{119}{960} & \cdots \end{array}\right] \end{array}.$$

Prema tome, verovatnoća da je u toku treće sekunde aktivan tačno jedan izvor šuma iznosi:
$\mathsf{P}(\xi(2) \in \{(0,1),(1,0)\}) = \mathsf{P}(\xi(2) = (0,1)) + \mathsf{P}(\xi(2) = (1,0)) =$
$= \frac{21}{64} + \frac{119}{960} = \frac{217}{480} \approx 0.4521.$

8. $\mathsf{E}(U) = 0, \quad \mathsf{D}(U) = 1, \quad \mathsf{E}\left(U^2\right) = \mathsf{D}(U) + \mathsf{E}^2(U) = 0 + 1 = 1.$

Za sve $t, s \in [0, \infty)$ je:

▷ $m_X(t) = \mathsf{E}(X_t) = \mathsf{E}\left(U \sin t + e^{-tV}\right) = \sin t\, \mathsf{E}(U) + \mathsf{E}\left(e^{-tV}\right) =$
$= \mathsf{E}\left(e^{-tV}\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-tv} \varphi_V(v)\, dv = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-tv} e^{-\frac{1}{2}v} dv =$

$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{\infty} e^{-\left(t+\frac{1}{2}\right)v} dv \overset{[1]}{=} -\frac{1}{2t+1} \int\limits_0^{-\infty} e^z dz = \frac{1}{2t+1} \int\limits_{\infty}^{0} e^z dz = \frac{1}{2t+1};$

$\triangleright$ $\mathsf{K}_X(t,s) = \mathsf{E}\left((X_t - m_X(t))(X_s - m_X(s))\right) =$
$= \mathsf{E}(X_t X_s) - m_X(t)\, m_X(s) =$
$= \mathsf{E}\left(\left(U \sin t + e^{-tV}\right)\left(U \sin s + e^{-sV}\right)\right) - \frac{1}{2t+1} \cdot \frac{1}{2s+1} =$
$= \mathsf{E}\left(\sin t \sin s\, U^2 + \sin t\, U\, e^{-sV} + \sin s\, U\, e^{-tV} + e^{-(t+s)V}\right)$
$- \frac{1}{2t+1} \cdot \frac{1}{2s+1} =$
$\overset{[2]}{=} \sin t \sin s\, \mathsf{E}\left(U^2\right) + \sin t\, \mathsf{E}\left(U\, e^{-sV}\right) +$
$+ \sin s\, \mathsf{E}\left(U\, e^{-tV}\right) + \mathsf{E}\left(e^{-(t+s)V}\right) - \frac{1}{2t+1} \cdot \frac{1}{2s+1} =$
$= \sin t \sin s + \mathsf{E}\left(e^{-(t+s)V}\right) - \frac{1}{(2t+1)(2s+1)} =$
$= \sin t \sin s + \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+s)v} \varphi_V(v)\, dv - \frac{1}{(2t+1)(2s+1)} =$
$= \sin t \sin s + \frac{1}{2} \int\limits_0^{\infty} e^{-\left(t+s+\frac{1}{2}\right)v} dv - \frac{1}{(2t+1)(2s+1)} =$
$\overset{[3]}{=} \sin t \sin s + \frac{1}{2(t+s)+1} - \frac{1}{(2t+1)(2s+1)};$

$\triangleright$ $\mathsf{D}_X(t) = \mathsf{K}_X(t,t) = \sin^2 t + \frac{1}{4t+1} - \frac{1}{(2t+1)^2} = \sin^2 t + 4\frac{t^2}{(4t+1)(2t+1)^2}.$

[1] - *Smena* $-\left(t+\frac{1}{2}\right)v = z.$

[2] - *Slučajne promenljive* U *i* V *su nezavisne, te su nezavisne i slučajne promenljive* U *i* $e^{\alpha V}$*, odakle sledi*

$$\mathsf{E}\left(U\, e^{\alpha V}\right) = \mathsf{E}(U)\, \mathsf{E}\left(e^{\alpha V}\right) = 0 \cdot \mathsf{E}\left(e^{\alpha V}\right) = 0.$$

[3] - *Smena* $-\left(t+s+\frac{1}{2}\right)v = z.$

12.07.2001.

1. Strelci A, B i C gađaju po jednom u cilj nezavisno jedan od drugog, pogađajući ga redom sa verovatnoćama 0.6, 0.5 i 0.4. Ustanovljeno je da je cilj pogođen ukupno 2 puta. Šta je verovatnije: da je strelac C pogodio ili promašio?

2. Nezavisne slučajne promenljive X i Y su određene zakonima raspodela:
$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 1-p \end{pmatrix}, \qquad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & 1-q \end{pmatrix}, \qquad (p, q \in (0,1)),$$
a slučajne promenljive $Z = f(X)$ i $W = g(Y)$ su određene uslovnim raspodelama:
$$Z|\{X=0\} : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 1-a \end{pmatrix}, \qquad Z|\{X=1\} : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 1-b \end{pmatrix},$$
$$W|\{Y=0\} : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & 1-c \end{pmatrix}, \qquad W|\{Y=1\} : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d & 1-d \end{pmatrix},$$

$(a, b, c, d \in (0,1))$ i definisane su slučajne promenljive $S = X + Y$ i $T = Z + W$.

(a) Naći raspodelu slučajne promenljive Z.

(b) Naći raspodelu slučajne promenljive W.

(c) Izračunati verovatnoće $\mathsf{P}(S = 0)$ i $\mathsf{P}(T = 1)$.

(d) Izračunati uslovnu verovatnoću $\mathsf{P}(T = 1 \mid S = 0)$.

3. Slučajna promenljiva X ima uniformnu $\mathcal{U}(0,1)$ raspodelu. Naći funkciju raspodele slučajne promenljive:

$$Y = f(X) = \begin{cases} X & , \quad X \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & , \quad \frac{1}{2} < X \le \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2}X - \frac{1}{2} & , \quad \frac{2}{3} < X \end{cases} .$$

Izračunati verovatnoću događaja $Y = \frac{1}{2}$. Da li je Y neprekidna slučajna promenljiva?

4. Preduzeće u jednoj smeni proizvede 10000 proizvoda jedne vrste. Verovatnoća da je jedan proizvod neispravan iznosi 0.05. Po završetku smene neispravni proizvodi se stavljaju u posebno skladište.

(a) Za koliki broj proizvoda treba da bude napravljeno skladište pa da sa verovatnoćom 0.99 bude dovoljno za sve neispravne proizvode iz jedne smene?

(b) Izračunati verovatnoću da je po završetku smene u skladištu broj neispravnih proizvoda veći od 450 i manji od 520.

5. Obeležje X ima gustinu raspodele:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\theta}} e^{-\frac{x}{\sqrt{\theta}}} & , \quad x \ge 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} , \qquad (\theta > 0).$$

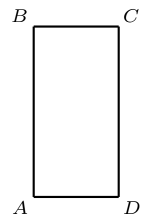
Metodom maksimalne verodostojnosti naći ocenu parametra θ (za uzorak obima n) i ispitati centriranost (asimptotsku centriranost) dobijene ocene.

6. χ^2 testom sa pragom značajnosti $\alpha = 0.05$ ispitati saglasnost uzorka

I_k	$(1, 1.2]$	$(1.2, 1.4]$	$(1.4, 1.6]$	$(1.6, 1.8]$	$(1.8, 2]$
m_k	33	23	20	15	9

sa funkcijom raspodele: $F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le 1 \\ \sqrt{x-1} & , \quad 1 < x \le 2 \\ 1 & , \quad 2 < x \end{cases}$.

7. U pravougaoniku $ABCD$ sa slike, stranice AB i CD su dva puta duže od stranica AD i BC. Čestica se u diskretnim vremenskim trenucima kreće iz temena u teme pravougaonika tako da u svakom trenutku prelazi u neko od dva susedna temena i to sa verovatnoćama koje su obrnuto srazmerne odgovarajućim rastojanjima između temena. Napraviti matricu prelaza za jedan korak slučajnog procesa čija stanja opisuju položaj čestice tokom vremena, i naći najverovatniji položaj čestice nakon dva koraka ako je na početku čestica bila u temenu A.



8. Neka su $U : \mathcal{N}(1,2)$ (normalna raspodela) i $V : \mathcal{P}(3)$ (Poasonova raspodela) nezavisne slučajne promenljive i neka je $X_t,\ t \in [0,\infty)$ slučajni proces definisan sa:

$$X_t = e^t\, U + t^2\, V.$$

(a) Naći srednju vrednost, autokovarijansnu funkciju i disperziju slučajnog procesa X_t.

(b) Naći srednju vrednost slučajnog procesa $Y_t = \int\limits_0^t X_s ds$.

Rešenja:

1. Označimo događaje:
A - "*strelac A je pogodio cilj*",
B - "*strelac B je pogodio cilj*",
C - "*strelac C je pogodio cilj*",
W - "*cilj je pogođen* 2 *puta*".

Verovatnoća da je cilj pogođen (tačno) 2 puta:

$\mathsf{P}(W) = \mathsf{P}\left(AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC\right) =$
$\stackrel{[1]}{=} \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B)\,\mathsf{P}\left(\overline{C}\right) + \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}\left(\overline{B}\right)\mathsf{P}(C) + \mathsf{P}\left(\overline{A}\right)\mathsf{P}(B)\,\mathsf{P}(C) =$
$= 0.6\cdot 0.5\cdot 0.6 + 0.6\cdot 0.5\cdot 0.4 + 0.4\cdot 0.5\cdot 0.4 = 0.38.$

Verovatnoća da je strelac C cilj pogodio pod uslovom da je cilj pogođen (tačno) 2 puta:

$\mathsf{P}(C \mid W) = \frac{\mathsf{P}(CW)}{\mathsf{P}(W)} = \frac{\mathsf{P}\left(A\overline{B}C+\overline{A}BC\right)}{\mathsf{P}(W)} \stackrel{[1]}{=} \frac{\mathsf{P}(A)\mathsf{P}\left(\overline{B}\right)\mathsf{P}(C)+\mathsf{P}\left(\overline{A}\right)\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C)}{\mathsf{P}(W)} =$
$= \frac{0.6\cdot0.5\cdot0.4+0.4\cdot0.5\cdot0.4}{0.4} = \frac{0.2}{0.38} = 0.5263,$

a verovatnoća da je strelac C cilj promašio pod uslovom da je cilj pogođen (tačno) 2 puta:

$\mathsf{P}\left(\overline{C} \mid W\right) = 1 - \mathsf{P}(C \mid W) = 0.4737.$

Dakle, pod uslovom da je cilj pogođen (tačno) 2 puta, verovatnije je da je strelac C pogodio cilj nego da ga je promašio ($\mathsf{P}\left(\overline{C} \mid W\right) < \mathsf{P}(C \mid W)$).

[1] - *Koristimo disjunktnost i nezavisnost odgovarajućih događaja.*

2. Koristićemo sledeće:

[1] - *Slučajne promenljive* X *i* Y *su nezavisne.*

[2] - *Slučajne promenljive* X *i* Y *su nezavisne, odakle sledi da su i slučajne promenljive* $Z = f(X)$ *i* $W = g(Y)$ *nezavisne.*

[3] - *Zbog nezavisnosti slučajnih promenljivih* X *i* Y*, kao i slučajnih promenljivih* $Z = f(X)$ *i* $W = g(Y)$*, sledi da su slučajni vektori* (Z, X) *i* (W, Y) *nezavisni.*

(a) $\mathcal{R}_Z = \{0, 1\}$.

Koristeći formulu totalne verovatnoće za potpun sistem događaja $\{\{X = 0\}, \{X = 1\}\}$ dobijamo:

$\mathsf{P}(Z = 0) =$
$= \mathsf{P}(X = 0)\,\mathsf{P}(Z = 0 \mid X = 0) + \mathsf{P}(X = 1)\,\mathsf{P}(Z = 0 \mid X = 1) =$
$= pa + (1 - p)\,b = b + p\,(a - b)$,

$\mathsf{P}(Z = 1) =$
$= \mathsf{P}(X = 0)\,\mathsf{P}(Z = 1 \mid X = 0) + \mathsf{P}(X = 1)\,\mathsf{P}(Z = 1 \mid X = 1) =$
$= p\,(1 - a) + (1 - p)\,(1 - b) = 1 - b + p\,(b - a)$.

Dakle: $$Z : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b + p\,(a - b) & 1 - b + p\,(b - a) \end{pmatrix}.$$

(b) $\mathcal{R}_W = \{0, 1\}$.

Koristeći formulu totalne verovatnoće za potpun sistem događaja $\{\{Y = 0\}, \{Y = 1\}\}$ dobijamo:

$\mathsf{P}(W = 0) =$
$= \mathsf{P}(Y = 0)\,\mathsf{P}(W = 0 \mid Y = 0) + \mathsf{P}(Y = 1)\,\mathsf{P}(W = 0 \mid Y = 1) =$
$= qc + (1 - q)\,d = d + q\,(c - d)$,

$\mathsf{P}(W = 1) =$
$= \mathsf{P}(Y = 0)\,\mathsf{P}(W = 1 \mid Y = 0) + \mathsf{P}(Y = 1)\,\mathsf{P}(W = 1 \mid Y = 1) =$
$= q\,(1 - c) + (1 - q)\,(1 - d) = 1 - d + q\,(d - c)$.

Dakle: $$W : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d + q\,(c - d) & 1 - d + q\,(d - c) \end{pmatrix}.$$

(c) $\mathsf{P}(S = 0) = \mathsf{P}(X + Y = 0) = \mathsf{P}(X = 0, Y = 0) =$
$\stackrel{[1]}{=} \mathsf{P}(X = 0)\,\mathsf{P}(Y = 0) = pq.$

$\mathsf{P}(T = 1) = \mathsf{P}(Z + W = 1) =$
$= \mathsf{P}(\{Z = 0, W = 1\} + \{Z = 1, W = 0\}) =$
$= \mathsf{P}(Z = 0, W = 1) + \mathsf{P}(Z = 1, W = 0) =$
$\stackrel{[2]}{=} \mathsf{P}(Z = 0)\,\mathsf{P}(W = 1) + \mathsf{P}(Z = 1)\,\mathsf{P}(W = 0) =$
$= (b + p\,(a - b))\,(1 - d + q\,(d - c)) +$
$\quad + (1 - b + p\,(b - a))\,(d + q\,(c - d)) =$
$= (b + d - 2bd) + p\,(a - b)\,(1 - 2d) +$
$\quad + q\,(c - d)\,(1 - 2b) + pq\,(-2\,(a - b)\,(c - d)).$

(d) $\mathsf{P}(T=1 \mid S=0) = \frac{\mathsf{P}(T=1,S=0)}{\mathsf{P}(S=0)} =$

$= \frac{\mathsf{P}(\{Z=0,W=1,X=0,Y=0\}+\{Z=1,W=0,X=0,Y=0\})}{\mathsf{P}(X=0,Y=0)} =$

$= \frac{\mathsf{P}(Z=0,W=1,X=0,Y=0)+\mathsf{P}(Z=1,W=0,X=0,Y=0)}{\mathsf{P}(X=0,Y=0)} =$

$\stackrel{[3]}{=} \frac{\mathsf{P}(Z=0,X=0)\mathsf{P}(W=1,Y=0)+\mathsf{P}(Z=1,X=0)\mathsf{P}(W=0,Y=0)}{\mathsf{P}(X=0,Y=0)} =$

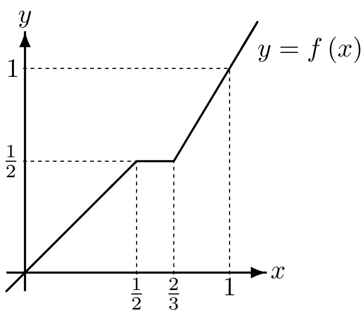
$= \frac{(\mathsf{P}(X=0)\mathsf{P}(Z=0 \mid X=0))(\mathsf{P}(Y=0)\mathsf{P}(W=1 \mid Y=0))}{\mathsf{P}(X=0)\mathsf{P}(Y=0)} +$

$+ \frac{(\mathsf{P}(X=0)\mathsf{P}(Z=1 \mid X=0))(\mathsf{P}(Y=0)\mathsf{P}(W=0 \mid Y=0))}{\mathsf{P}(X=0)\mathsf{P}(Y=0)} =$

$= \mathsf{P}(Z=0 \mid X=0)\,\mathsf{P}(W=1 \mid Y=0) +$

$+ \mathsf{P}(Z=1 \mid X=0)\,\mathsf{P}(W=0 \mid Y=0) =$

$= a(1-c) + (1-a)c = a + c - 2ac.$

3. 

Funkcija raspodele slučajne promenljive X:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le 0 \\ x & , \quad 0 < x \le 1 \\ 1 & , \quad 1 < x \end{cases}.$$

$F_Y(y) = \mathsf{P}(Y < y) = \ldots$

(1) za $y \le \frac{1}{2}$: $\quad F_Y(y) = \mathsf{P}(X < y) = F_X(y) = \ldots$

(1.1) za $y \le 0$: $\quad F_Y(y) = 0$;

(1.2) za $0 < y \le \frac{1}{2}$: $\quad F_Y(y) = y$;

(2) za $\frac{1}{2} < y$ (za $\frac{1}{2} < y$ nalazimo odgovarajuće x takve da je $f(x) = y$: $f(x) = y \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}$):

$F_Y(y) = \mathsf{P}\left(X < \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}\right) = F_X\left(\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}\right) = \ldots$

(2.1) za $\frac{2}{3}y + \frac{1}{3} \le 1$ odnosno $y \le 1$: $\quad F_Y(y) = \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}$;

(2.2) za $1 < \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}$ odnosno $1 < y$: $\quad F_Y(y) = 1$.

Dakle: $$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \quad y \le 0 \\ y & , \quad 0 < y \le \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}y + \frac{1}{3} & , \quad \frac{1}{2} < y \le 1 \\ 1 & , \quad 1 < y \end{cases}.$$

Slučajna promenljiva Y nije apsolutno neprekidnog tipa jer za funkciju

$$\varphi(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \quad y \le 0 \\ 1 & , \quad 0 < y \le \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & , \quad \frac{1}{2} < y \le 1 \\ 0 & , \quad 1 < y \end{cases}$$

važi: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\,dy = \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} dy + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{2}{3} dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \neq 1.$

$\mathsf{P}\left(Y = \frac{1}{2}\right) = \mathsf{P}\left(X \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]\right) = F_X\left(\frac{2}{3}\right) - F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$

4. Neka je S_{10000} slučajna promenljiva koja predstavlja broj neispravnih proizvoda među 10000 proizvedenih tokom jedne smene. Slučajna promenljiva S_{10000} ima binomnu $\mathcal{B}(10000, 0.05)$ raspodelu, što znači da za približno izračunavanje verovatnoća $\mathsf{P}(a < S_{10000} < b)$ možemo koristiti Moavr - Laplasovu teoremu [$*$] ($n = 10000$, $p = 0.05$, $q = 1 - 0.05 = 0,95$).

   (a) Označimo sa k broj proizvoda koji mogu stati u skladište. Treba da ga odredimo tako da broj neispravnih proizvoda jedne smene bude manji ili jednak sa k sa verovatnoćom 0.99:

   $$\mathsf{P}(S_{10000} \le k) = \mathsf{P}(S_{10000} < k+1) = 0.99 \quad \Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < \frac{k+1-np}{\sqrt{npq}}\right) = 0.99 \quad \Leftrightarrow$$
   $$\overset{[*]}{\Leftrightarrow} \quad \phi\left(\frac{k+1-np}{\sqrt{npq}}\right) \approx 0.99 \quad \Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow \quad \frac{k+1-np}{\sqrt{npq}} \approx \phi^{-1}(0.99) \approx 2.33 \quad \Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow \quad \frac{k+1-10000\cdot 0.05}{\sqrt{10000\cdot 0.05\cdot 0.95}} \approx 2.33 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k-499}{21.7945} \approx 2.33 \quad \Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow \quad k \approx 2.33 \cdot 21.7945 + 499 \approx 549.781.$$

   Dakle, skladište treba da bude za 550 (neispravnih) proizvoda.

   (b) $$\mathsf{P}(450 < S_{10000} < 520) = \mathsf{P}\left(\frac{451-np}{\sqrt{npq}} \le \frac{S_{10000}-np}{\sqrt{npq}} < \frac{520-np}{\sqrt{npq}}\right) \approx$$
   $$\overset{[*]}{\approx} \phi\left(\frac{520-np}{\sqrt{npq}}\right) - \phi\left(\frac{451-np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \phi\left(\frac{520-500}{21.7945}\right) - \phi\left(\frac{451-500}{21.7945}\right) \approx$$
   $$\approx \phi(0.92) - \phi(-2.25) \approx 0.8212 - (1 - 0.9878) \approx 0.809.$$

5. Funkcija verodostojnosti za uzorak obima n:

   $$L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\theta}} e^{-\frac{x_i}{\sqrt{\theta}}} = \theta^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{\theta}} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i},$$

   $$\ln L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \ln \theta^{-\frac{n}{2}} + \ln e^{-\frac{1}{\sqrt{\theta}} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i} = -\frac{n}{2} \ln \theta - \frac{1}{\sqrt{\theta}} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

   Tražimo maksimum funkcije L po θ :

   $$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\theta} + \frac{1}{2} \theta^{-\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \quad \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow \quad -n + \theta^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{\theta}} \sum_{i=1}^{n} x_i = n \quad \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow \quad \sqrt{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\theta} = \overline{x}_n \quad \Rightarrow \quad \theta = \overline{x}_n^2.$$

   Prema tome, dobili smo ocenu: $\hat{\theta} = \overline{X}_n^2.$

   Koristeći:

$$\mathsf{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,\varphi_X(x)\,dx = \int\limits_{0}^{\infty} x\,\frac{1}{\sqrt{\theta}}\,e^{-\frac{x}{\sqrt{\theta}}}dx =$$
$$\stackrel{[1]}{=} \sqrt{\theta}\int\limits_0^{\infty} t^{2-1}\,e^{-t}dt = \sqrt{\theta}\,\Gamma(2) = \sqrt{\theta},$$
$$\mathsf{E}\left(X^2\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\,\varphi_X(x)\,dx = \int\limits_{0}^{\infty} x^2\,\frac{1}{\sqrt{\theta}}\,e^{-\frac{x}{\sqrt{\theta}}}dx =$$
$$\stackrel{[1]}{=} \theta\int\limits_0^{\infty} t^{3-1}\,e^{-t}dt = \theta\,\Gamma(3) = 2\theta,$$

[1] - *Smena* $\frac{x}{\sqrt{\theta}} = t.$

i koristeći nezavisnost slučajnih promenljivih X_i (odnosno koristeći $\mathsf{E}(X_iX_j) = \mathsf{E}(X_i)\,\mathsf{E}(X_j)$), dobijamo matematičko očekivanje statistike $\hat{\theta}$:

$$\mathsf{E}\left(\hat{\theta}\right) = \mathsf{E}\left(\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right]^2\right) = \frac{1}{n^2}\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i\neq j} X_iX_j\right) =$$
$$= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}\left(X_i^2\right) + \sum_{i\neq j}\mathsf{E}(X_i)\,\mathsf{E}(X_j)\right) =$$
$$= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}\left(X^2\right) + \sum_{i\neq j}\left(\mathsf{E}(X)\right)^2\right) =$$
$$= \frac{1}{n^2}\left(n\mathsf{E}\left(X^2\right) + \left(n^2-n\right)\left(\mathsf{E}(X)\right)^2\right) =$$
$$= \frac{1}{n^2}\left(n\cdot(2\theta) + \left(n^2-n\right)\theta\right) = \frac{2}{n}\,\theta + \theta - \frac{1}{n}\,\theta = \frac{1}{n}\,\theta + \theta \neq \theta.$$

Dakle, ocena $\hat{\theta}$ nije centrirana, ali jeste asimptotski centrirana jer je:

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{E}\left(\hat{\theta}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\,\theta + \theta\right) = \theta.$$

6. Veličina uzorka: $n = 33 + 23 + 20 + 15 + 9 = 100.$

   Teorijske verovatnoće obeležja X:

   $p_1 = \mathsf{P}(X \le 1.2) = F_X(1.2) \approx 0.4472,$
   $p_2 = \mathsf{P}(1.2 < X \le 1.4) = F_X(1.4) - F_X(1.2) \approx$
   $\approx 0.6325 - 0.4472 \approx 0.1853,$
   $p_3 = \mathsf{P}(1.4 < X \le 1.6) = F_X(1.6) - F_X(1.4) \approx$
   $\approx 0.7746 - 0.6325 \approx 0.1421,$
   $p_4 = \mathsf{P}(1.6 < X \le 1.8) = F_X(1.8) - F_X(1.6) \approx$
   $\approx 0.8944 - 0.7746 \approx 0.1198,$
   $p_5 = \mathsf{P}(1.8 < X) = 1 - F_X(1.8) \approx 1 - 0.8944 \approx 0.1056.$

   Izračunavamo vrednost statistike $Z = \sum\limits_{i=1}^{5}\frac{(m_i-np_i)^2}{np_i}$:

   $$z = \frac{(33-100\cdot0.4472)^2}{100\cdot0.4472} + \frac{(23-100\cdot0.1853)^2}{100\cdot0.1853} + \frac{(20-100\cdot0.1421)^2}{100\cdot0.1421} + \frac{(15-100\cdot0.1198)^2}{100\cdot0.1198} + \frac{(9-100\cdot0.1056)^2}{100\cdot0.1056} \approx 7.49802.$$

   Pošto je $z < \chi^2_{0.05;5-1} = \chi^2_{0.05;4} \approx 9.49$, konstatujemo da je uzorak saglasan sa zadanom funkcijom raspodele.

7. Obeležimo sa p_{AX} verovatnoću prelaza u jednom koraku iz temena A u ostala temena $X \in \{A, B, C, D\}$.

Iz opisa vidimo da je $p_{AA} = p_{AC} = 0$, a verovatnoće p_{AB} i p_{AD} zadovoljavaju uslove

$\frac{p_{AB}}{p_{AD}} = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad p_{AA} + p_{AB} + p_{AC} + p_{AD} = p_{AB} + p_{AD} = 1,$

odakle dobijamo

$(p_{AD} = 2p_{AB} \quad \wedge \quad p_{AB} + p_{AD} = 1) \qquad \Rightarrow \qquad \left(p_{AD} = \frac{2}{3} \quad \wedge \quad p_{AB} = \frac{1}{3}\right).$

Analogno dobijamo i ostale verovatnoće prelaza, tj. matricu prelaza:

$$P = P(1) = [p_{XY}] = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right] \end{array}.$$

Matrica prelaza za dva koraka: $\qquad P(2) = P^2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & 0 & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{5}{9} & 0 & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & 0 & \frac{5}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{5}{9} \end{bmatrix}.$

Početna raspodela: $\qquad \mathbf{p}(0) \;=\; \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}.$

Raspodela nakon dva koraka: $\quad \mathbf{p}(2) = \mathbf{p}(0) \cdot P(2) \;=\; \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} \frac{5}{9} & 0 & \frac{4}{9} & 0 \end{array}\right] \end{array}.$

Dakle, nakon 2 koraka će čestica najverovatnije biti ponovo u temenu A.

8. $\mathsf{E}(U) = 1, \quad \mathsf{D}(U) = 2^2 = 4, \quad \mathsf{E}\left(U^2\right) = \mathsf{D}(U) + \mathsf{E}^2(U) = 4 + 1 = 5,$

$\mathsf{E}(V) = 3, \quad \mathsf{D}(V) = 3, \quad \mathsf{E}\left(V^2\right) = \mathsf{D}(V) + \mathsf{E}^2(V) = 3 + 9 = 12.$

(a) Za sve $t, s \in [0, \infty)$ je

$*$ srednja vrednost procesa:

$m_X(t) = \mathsf{E}(X_t) = \mathsf{E}\left(e^t\, U + t^2\, V\right) =$
$= e^t\, \mathsf{E}(U) + t^2\, \mathsf{E}(V) = e^t + 3t^2;$

$*$ autokovarijansna funkcija procesa:

$\mathsf{K}_X(t, s) = \mathsf{E}\left((X_t - m_X(t))(X_s - m_X(s))\right) =$
$= \mathsf{E}(X_t X_s) - m_X(t)\, m_X(s) =$
$= \mathsf{E}\left(\left(e^t\, U + t^2\, V\right)\left(e^s\, U + s^2\, V\right)\right) - \left(e^t + 3t^2\right)\left(e^s + 3s^2\right) =$
$= \mathsf{E}\left(e^{t+s} U^2 + \left(e^t s^2 + e^s t^2\right) U\, V + (ts)^2\, V^2\right)$
$\quad - \left(e^t + 3t^2\right)\left(e^s + 3s^2\right) =$
$= e^{t+s} \mathsf{E}\left(U^2\right) + \left(e^t s^2 + e^s t^2\right)\, \mathsf{E}(UV) + (ts)^2\, \mathsf{E}\left(V^2\right)$
$\quad - \left(e^t + 3t^2\right)\left(e^s + 3s^2\right) =$

$\overset{[1]}{=} e^{t+s}\mathsf{E}\left(U^2\right) + \left(e^t s^2 + e^s t^2\right)\ \mathsf{E}(U)\ \mathsf{E}(V) + (ts)^2\,\mathsf{E}\left(V^2\right)$
$\quad - \left(e^t + 3t^2\right)\left(e^s + 3s^2\right) =$
$= 5e^{t+s} + 3e^t s^2 + 3e^s t^2 + 12t^2 s^2 - e^{t+s} - 3e^t s^2 - 3e^s t^2 - 9t^2 s^2 =$
$= 4e^{t+s} + 3t^2 s^2;$

$*$ disperzija procesa:
$\mathsf{D}_X(t) = \mathsf{K}_X(t,t) = 4e^{2t} + 3t^4.$

[1] - *Slučajne promenljive* U *i* V *su nezavisne.*

(b) $m_Y(t) = \int\limits_0^t m_Y(s)\,ds = \int\limits_0^t \left(e^s + 3s^2\right) ds = e^t + t^3 - 1.$

11.09.2001.

1. Gliša je u džepu imao 8 zelenih i 6 belih klikera, ali je 1 kliker izgubio. Dva puta sa vraćanjem vadi po jedan kliker iz džepa i konstatuje boju svakog od izvučenih klikera.

   (a) Koliko iznosi verovatnoća da je izgubljeni kliker zelene boje ako su oba izvučena klikera zelene boje?

   (b) Koliko iznosi verovatnoća da je izgubljeni kliker zelene boje ako su oba izvučena klikera iste boje?

2. Naći raspodelu, matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive X koja predstavlja slučajno izabrani broj iz skupa $[3,5]\cup[10,11]\cup\{15\}$.

3. Posmatrajmo događaj A: "*prilikom bacanja kockice za "Ne ljuti se čoveče" se pojavio broj manji od* 5". Kockica se baca dok se događaj A ili njemu suprotan događaj ne realizuje 2 puta uzastopno. Naći raspodelu slučajne promenljive Y koja predstavlja broj izvedenih bacanja kockice.

4. Košarkaš na utakmici pogađa koš sa verovatnoćom 0.4.

   (a) Koliko iznosi verovatnoća da iz 40 pokušaja koš pogodi bar 15 puta?

   (b) Koliko najmanje puta treba da gađa koš pa da sa verovatnoćom 0.9 ima bar 30 pogodaka.

5. Neka obeležje X ima raspodelu datu gustinom

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{\sqrt{x}} e^{-2\theta\sqrt{x}} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \le 0 \end{cases}, \qquad (\theta > 0).$$

   (a) Naći ocenu parametra θ metodom maksimalne verodostojnosti.

   (b) χ^2 testom ispitati saglasnost uzorka

I_k	$(0,1]$	$(1,2]$	$(2,3]$	$(3,4]$	$(4,5]$
m_k	35	26	20	15	4

   sa datom raspodelom uz prag značajnosti $\alpha = 0.1$.

6. Ako pretpostavimo da se uzorak

I_k	$(0,1]$	$(1,2]$	$(2,3]$	$(3,4]$	$(4,5]$
m_k	4	8	9	7	2

odnosi na obeležje sa normalnom raspodelom, naći 90% intervale poverenja za srednju vrednost i za disperziju obeležja.

7. Počevši od ponedeljka elektrodistribucija svaki dan isključuje po jednu od 3 grupe potrošača po sledećem pravilu: ako određena grupa tokom jednog dana nema struje, tada se sutradan sa podjednakim verovatnoćama isključuje jedna od preostale dve grupe.

   (a) Naći matricu prelaza lanca Markova ξ_n koji predstavlja redni broj isključene grupe u toku n - tog dana od početka primene restrikcija.

   (b) Ako neka grupa u sredu nema struje, koliko iznosi verovatnoća da će u nedelju imati struje?

   (c) Naći finalne verovatnoće procesa ξ_n.

8. Neka su U i V nezavisne slučajne promenljive, obe sa uniformnom $\mathcal{U}(1,3)$ raspodelom. Naći raspodele prvog reda i matematičko očekivanje slučajnog procesa
$$X_t = (U+V)^{t+1}\,, \;\; t \in [0,\infty)\,.$$

Rešenja:

1. Označimo sa Z događaj: "*izgubljeni kliker je zelene boje*". Događaji Z i $\overline{Z}$ očigledno čine potpun sistem događaja i verovatnoće ovih događaja su $\mathsf{P}(Z) = \frac{8}{8+6} = \frac{4}{7}$ i $\mathsf{P}\left(\overline{Z}\right) = 1 - \mathsf{P}(Z) = \frac{3}{7}$.

   (a) Označimo sa A događaj: "*oba izvučena klikera su zelene boje*". Pošto je $\mathsf{P}(A \mid Z) = \left(\frac{7}{7+6}\right)^2 = \frac{49}{169}$ i $\mathsf{P}\left(A \mid \overline{Z}\right) = \left(\frac{8}{8+5}\right)^2 = \frac{64}{169}$, koristeći formulu totalne verovatnoće dobijamo
   $$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(Z)\,\mathsf{P}(A \mid Z) + \mathsf{P}\left(\overline{Z}\right)\mathsf{P}\left(A \mid \overline{Z}\right) = \frac{388}{1183},$$
   pa koristeći Bajesovu formulu dobijamo
   $$\mathsf{P}(Z \mid A) = \frac{\mathsf{P}(Z)\mathsf{P}(A \mid Z)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{49}{97}.$$

   (b) Označimo sa C događaj: "*oba izvučena klikera su iste boje*" (možemo ga predstaviti kao $C = A + B$ gde je A događaj opisan pod (a), a B je događaj: "*oba izvučena klikera su bele boje*"). Pošto je $\mathsf{P}(C \mid Z) = \mathsf{P}(A \mid Z) + \mathsf{P}(B \mid Z) = \left(\frac{7}{7+6}\right)^2 + \left(\frac{6}{7+6}\right)^2 = \frac{85}{169}$ i $\mathsf{P}\left(C \mid \overline{Z}\right) = \mathsf{P}\left(A \mid \overline{Z}\right) + \mathsf{P}\left(B \mid \overline{Z}\right) = \left(\frac{8}{8+5}\right)^2 + \left(\frac{5}{8+5}\right)^2 = \frac{89}{169}$, koristeći formulu totalne verovatnoće dobijamo
   $$\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}(Z)\,\mathsf{P}(C \mid Z) + \mathsf{P}\left(\overline{Z}\right)\mathsf{P}\left(C \mid \overline{Z}\right) = \frac{607}{1183},$$
   pa koristeći Bajesovu formulu dobijamo
   $$\mathsf{P}(Z \mid C) = \frac{\mathsf{P}(Z)\mathsf{P}(C \mid Z)}{\mathsf{P}(C)} = \frac{340}{607}.$$

2. Pošto slučajna promenljiva X predstavlja slučajno izabrani broj iz unije skupova $T = [3,5] \cup [10,11] \cup \{15\}$, tada je X apsolutno neprekidnog tipa i ima uniformnu raspodelu na skupu T koji je mere (tj. "dužine") $(5-3)+(11-10)+(15-15)=3$. Dakle:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & , \quad x \in T \\ 0 & , \quad x \notin T \end{cases},$$

$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\,dt = \ldots$

- za $x \leq 3$:
  $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0;$
- za $3 < x \leq 5$:
  $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{3} 0dt + \int\limits_{3}^{x} \frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}x - 1;$
- za $5 < x \leq 10$:
  $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{3} 0dt + \int\limits_{3}^{5} \frac{1}{3}dt + \int\limits_{5}^{x} 0dt = \frac{2}{3};$
- za $10 < x \leq 11$:
  $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{3} 0dt + \int\limits_{3}^{5} \frac{1}{3}dt + \int\limits_{5}^{10} 0dt + \int\limits_{10}^{x} \frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3};$
- za $11 < x \leq 15$:
  $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{3} 0dt + \int\limits_{3}^{5} \frac{1}{3}dt + \int\limits_{5}^{10} 0dt + \int\limits_{10}^{11} \frac{1}{3}dt + \int\limits_{11}^{x} 0dt = 1;$
- za $15 < x$:
  $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{3} 0dt + \int\limits_{3}^{5} \frac{1}{3}dt + \int\limits_{5}^{10} 0dt + \int\limits_{10}^{11} \frac{1}{3}dt + \int\limits_{11}^{15} 0dt + \int\limits_{15}^{15} \frac{1}{3}dt + \int\limits_{15}^{x} 0dt = 1.$

Dakle: $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in (-\infty, 3] \\ \frac{1}{3}x - 1 & , \quad x \in (3,5] \\ \frac{2}{3} & , \quad x \in (5,10] \\ \frac{1}{3}x - \frac{8}{3} & , \quad x \in (10,11] \\ 1 & , \quad x \in (11, \infty) \end{cases},$$

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(X) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\varphi_X(x)\,dx = \int\limits_{3}^{5} \frac{1}{3}xdx + \int\limits_{10}^{11} \frac{1}{3}xdx + \int\limits_{15}^{15} \frac{1}{3}xdx = \frac{37}{6}, \\ \mathsf{E}\left(X^2\right) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi_X(x)\,dx = \int\limits_{3}^{5} \frac{1}{3}x^2dx + \int\limits_{10}^{11} \frac{1}{3}x^2dx + \int\limits_{15}^{15} \frac{1}{3}x^2dx = \frac{143}{3}, \\ \mathsf{D}(X) &= \mathsf{E}\left(X^2\right) - \mathsf{E}^2(X) = \frac{143}{3} - \left(\frac{37}{6}\right)^2 = \frac{347}{36}. \end{aligned}$$

3. $\mathsf{P}(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad \mathsf{P}\left(\overline{A}\right) = \frac{1}{3}.$

Skup vrednosti slučajne promenljive Y: $\quad \mathcal{R}_Y = \{2,3,4,\dots\}$.

Pri izračunavanju zakona raspodele slučajne promenljive Y $(\mathsf{P}(Y=k),$ $k \in \mathcal{R}_Y)$ moramo posebno razmatrati slučajeve kada je k parno i kada je k neparno.

▷ Za parno k, odnosno za $k = 2n,\ n \in \{1,2,3,\dots\}$ je
$\mathsf{P}(Y=2n) = \mathsf{P}\left(\left(A\overline{A}\right)^{n-1} AA + \left(\overline{A}A\right)^{n-1} \overline{A}\,\overline{A}\right) =$
$\overset{[1]}{=} \mathsf{P}\left(\left(A\overline{A}\right)^{n-1} AA\right) + \mathsf{P}\left(\left(\overline{A}A\right)^{n-1} \overline{A}\,\overline{A}\right) =$
$\overset{[2]}{=} \left(\mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}\left(\overline{A}\right)\right)^{n-1} \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(A) + \left(\mathsf{P}\left(\overline{A}\right)\mathsf{P}(A)\right)^{n-1} \mathsf{P}\left(\overline{A}\right)\mathsf{P}\left(\overline{A}\right) =$
$= \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} \frac{4}{9} + \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} \frac{1}{9} = \frac{5}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}.$

▷ Za neparno k, odnosno za $k = 2n+1,\ n \in \{1,2,3,\dots\}$ je
$\mathsf{P}(Y=2n+1) = \mathsf{P}\left(\overline{A}\left(A\overline{A}\right)^{n-1} AA + A\left(\overline{A}A\right)^{n-1} \overline{A}\,\overline{A}\right) =$
$\overset{[1]}{=} \mathsf{P}\left(\overline{A}\left(A\overline{A}\right)^{n-1} AA\right) + \mathsf{P}\left(A\left(\overline{A}A\right)^{n-1} \overline{A}\,\overline{A}\right) =$
$\overset{[2]}{=} \mathsf{P}\left(\overline{A}\right)\left(\mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}\left(\overline{A}\right)\right)^{n-1} \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(A) +$
$\quad + \mathsf{P}(A)\left(\mathsf{P}\left(\overline{A}\right)\mathsf{P}(A)\right)^{n-1} \mathsf{P}\left(\overline{A}\right)\mathsf{P}\left(\overline{A}\right) =$
$= \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} \frac{4}{27} + \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} \frac{2}{27} = \left(\frac{2}{9}\right)^{n}.$

[1] - *Radi se o verovatnoći unije disjunktnih događaja.*

[2] - *Pojedinačna bacanja kockice su nezavisna.*

4. Slučajna promenljiva S_n koja predstavlja broj postignutih koševa pri n gađanja ima binomnu $\mathcal{B}(n, 0.4)$ raspodelu, pa koristimo Moavr-Laplasovu teoremu ([∗]).

   (a) Tražena verovatnoća je:
   $\mathsf{P}(S_{40} \geq 15) = 1 - \mathsf{P}(S_{40} < 15) =$
   $= 1 - \mathsf{P}\left(\frac{S_{40}-40\cdot 0.4}{\sqrt{40\cdot 0.4\cdot 0.6}} < \frac{15-40\cdot 0.4}{\sqrt{40\cdot 0.4\cdot 0.6}}\right) \approx 1 - \mathsf{P}\left(\frac{S_{40}-40\cdot 0.4}{\sqrt{40\cdot 0.4\cdot 0.6}} < -0.3227\right) \approx$
   $\overset{[*]}{\approx} 1 - \phi(-0.3227) = \phi(0.3227) \approx 0.6265.$

   (b) Tražimo najmanje rešenje po n jednačine $\mathsf{P}(S_n \geq 30) = 0.9$:
   $\mathsf{P}(S_n \geq 30) = 1 - \mathsf{P}(S_n < 30) = 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{P}(S_n < 30) = 0.1 \quad \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(\frac{S_n - 0.4\,n}{\sqrt{0.4\cdot 0.6\,n}} < \frac{30-0.4\,n}{\sqrt{0.4\cdot 0.6\,n}}\right) = 0.1 \quad \Leftrightarrow$
   $\overset{[*]}{\Leftrightarrow} \quad \phi\left(\frac{30-0.4\,n}{\sqrt{0.4\cdot 0.6\,n}}\right) \approx \phi\left(\frac{30-0.4\,n}{0.4849\sqrt{n}}\right) \approx 0.1 \quad \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \quad \frac{30-0.4\,n}{0.4849\sqrt{n}} \approx \phi^{-1}(0.1) = -\phi^{-1}(0.9) \approx -1.28 \quad \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \quad 0.4\,n - 1.28\cdot 0.4849\sqrt{n} - 30 \approx 0 \quad \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \quad \left(0.4\,t^2 - 0.6207\,t - 30 \approx 0 \ \wedge\ t = \sqrt{n}\right) \quad \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \quad ((t \approx -7.9191 \ \vee\ t \approx 9.4708) \ \wedge\ t = \sqrt{n}) \quad \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \quad (\sqrt{n} \approx -7.9191 \ \vee\ \sqrt{n} \approx 9.4708) \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{n} \approx 9.4708 \quad \Leftrightarrow \quad n \approx 9.4708^2 \approx 89.6963.$

Dakle, košarkaš treba da gađa oko 90 puta da bi sa verovatnoćom 0.9 imao bar 30 pogodaka.

5. (a) Za slučaj $\forall i,\ x_i > 0$ je

$L(x_1,\dots,x_n;\theta) = \varphi_X(x_1)\cdot\ldots\cdot\varphi_X(x_n) =$

$= \frac{\theta}{\sqrt{x_1}}e^{-2\theta\sqrt{x_1}}\cdot\ldots\cdot\frac{\theta}{\sqrt{x_n}}e^{-2\theta\sqrt{x_n}} = \theta^n(x_1\ldots x_n)^{-\frac{1}{2}}\,e^{-2\theta\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}},$

$\ln L(x_1,\dots,x_n;\theta) = n\ln\theta - \frac{1}{2}\ln(x_1\ldots x_n) - 2\theta\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{x_i},$

$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x_1,\dots,x_n;\theta) = \frac{n}{\theta} - 2\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}.$

Nalazimo maksimum funkcije L po θ:

$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x_1,\dots,x_n;\theta) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{n}{\theta} - 2\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{x_i} = 0 \quad\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\quad n = 2\theta\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{x_i} \quad\Leftrightarrow\quad \theta = \frac{n}{2\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}.$

Dakle, dobili smo ocenu: $\quad \hat{\theta} = \dfrac{n}{2\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{X_i}}.$

(b) Obim posmatranog uzorka je $n = \sum\limits_{i=1}^{5} m_i = 35+26+20+15+4 = 100.$

Vrednost nepoznatog parametra θ koji figuriše u zadanoj raspodeli obeležja možemo na osnovu uzorka izračunati koristeći prethodno nađenu ocenu (pri čemu za x_i uzimamo sredine zadanih intervala):

$$\theta = \frac{100}{2\left(35\cdot\frac{1}{2}+26\cdot\frac{3}{2}+20\cdot\frac{5}{2}+15\cdot\frac{7}{2}+4\cdot\frac{9}{2}\right)} \approx 0.4.$$

Funkcija raspodele obeležja X:

$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x}\varphi_X(t)\,dx = \ldots$

- za $x \le 0$: $\quad F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0;$
- za $x < 0$: $\quad F_X(x) = \int\limits_{0}^{x}\frac{\theta}{\sqrt{x}}e^{-2\theta\sqrt{x}}dx \overset{[1]}{=} 1 - e^{-2\theta\sqrt{x}}.$

[1] - *Smenom* $\sqrt{x} = t$.

Dakle: $\quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & ,\ x \le 0 \\ 1 - e^{-0.8\sqrt{x}} & ,\ x > 0 \end{cases}.$

Spajamo poslednje dve grupe podataka i izračunavamo odgovarajuće teorijske verovatnoće:

$p_1 = \mathsf{P}(0 < X \le 1) = F_X(1) - F_X(0) \approx 0.5514 - 0 \approx 0.5514,$

$p_2 = \mathsf{P}(1 < X \le 2) = F_X(2) - F_X(1) \approx 0.6781 - 0.5514 \approx 0.1267,$

$p_3 = \mathsf{P}(2 < X \le 3) = F_X(3) - F_X(2) \approx 0.7505 - 0.6781 \approx 0.0724,$

$p_4 = \mathsf{P}(3 < X < \infty) = 1 - F_X(3) = 1 - (p_1 + p_2 + p_3) \approx 0.2495.$
Dakle, χ^2 test primenjujemo na sledeće podatke:

I_k	$(0,1]$	$(1,2]$	$(2,3]$	$(3,\infty)$
m_k	35	26	20	15
p_k	0.5514	0.1267	0.0724	0.2495

Izračunavamo vrednost $Z = \sum\limits_{k=1}^{4} \frac{(m_k - np_k)^2}{np_k}$ statistike:

$$z = \frac{(35-100\cdot 0.5514)^2}{100\cdot 0.5514} + \frac{(26-100\cdot 0.1267)^2}{100\cdot 0.1267} + \\ + \frac{(20-100\cdot 0.0724)^2}{100\cdot 0.0724} + \frac{(15-100\cdot 0.2495)^2}{100\cdot 0.2495} \approx 45.2752.$$

Pošto je $z > \chi^2_{0.1;4-1-1} = \chi^2_{0.1;2} \approx 4.61$, hipotezu odbacujemo.

6. Svaki interval reprezentujemo njegovom sredinom:

$$x_1 = \tfrac{1}{2}, \quad x_2 = \tfrac{3}{2}, \quad x_3 = \tfrac{5}{2}, \quad x_4 = \tfrac{7}{2}, \quad x_5 = \tfrac{9}{2}.$$

Veličina uzorka: $\qquad n = \sum\limits_{k=1}^{5} m_k = 30.$

Izračunavamo uzoračku srednju vrednost, disperziju i standardnu devijaciju:

$$\overline{x}_{30} = \frac{1}{30} \sum_{k=1}^{5} m_k x_k = \frac{7}{3} \approx 2.3333,$$

$$\overline{s}^2_{30} = \frac{1}{30} \sum_{k=1}^{5} m_k x_k^2 - \overline{x}^2_{30} = \frac{229}{180} \approx 1.2722, \qquad \overline{s}_{30} = \sqrt{\overline{s}^2_{30}} \approx 1.1279.$$

▷ Iz tablice Studentove raspodele za $n = 30$ i nivo poverenja $\beta = 0.9$ nalazimo $t_{n-1;\frac{1+\beta}{2}} = t_{29;0.95} \approx 1.699$ i dobijamo traženi interval poverenja:

$$I = \left[\overline{x}_{30} - t_{29;0.95}\frac{\overline{s}_{30}}{\sqrt{29}}, \overline{x}_{30} + t_{29;0.95}\frac{\overline{s}_{30}}{\sqrt{29}}\right] = [1.9861, 2.6806]\,.$$

▷ Iz tablice χ^2 raspodele za $n = 30$ i nivo poverenja $\beta = 0.9$ nalazimo $\chi^2_{n-1;\frac{1+\beta}{2}} = \chi^2_{29;0.95} \approx 42.6$ i $\chi^2_{n-1;\frac{1-\beta}{2}} = \chi^2_{29;0.05} \approx 17.7$ i dobijamo traženi interval poverenja:

$$I = \left[\frac{n\overline{s}^2_{30}}{\chi^2_{29;0.95}}, \frac{n\overline{s}^2_{30}}{\chi^2_{29;0.05}}\right] = [2.1563, 0.8959]\,.$$

7. Obeležimo grupe potrošača sa 1, 2 i 3.

(a) Na osnovu opisa nalazimo matricu prelaza P za jedan dan i izračunavamo matricu prelaza $P(4) = P^4 = \left(P^2\right)^2$ za 4 dana (koristićemo je pod (b)):

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad P(4) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{16} & \frac{5}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{3}{8} & \frac{5}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \end{array}.$$

(b) Posmatrajmo npr. grupu 1, a ista je situacija (zbog simetričnih prelaznih verovatnoća) i sa grupama 2 i 3. Sreda je treći dan ($n=3$), a nedelja sedmi dan ($n=7$) sprovođenja restrikcija. Ako grupa 1 u sredu nema struje, to znači da raspodela verovatnoća lanca ξ_n za sredu glasi: $\mathbf{p}(3) = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$.

Raspodela verovatnoća lanca ξ_n za nedelju tada glasi:

$$\mathbf{p}(7) = \mathbf{p}(3)\cdot P^4 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{16} & \frac{5}{16} \end{bmatrix} \end{array} .$$

Dakle, grupa 1 će u nedelju imati struju sa verovatnoćom

$$1 - p_1(7) = 1 - \tfrac{3}{8} = \tfrac{5}{8}.$$

(c) Vektor finalnih verovatnoća $\mathbf{p}^* = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \end{array}$ nalazimo rešavanjem sistema jednačina $\mathbf{p}^*\cdot P = \mathbf{p}^* \ \wedge\ x+y+z=1 \quad (x,y,z\in(0,1))$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \frac{1}{2}y & + & \frac{1}{2}z & = & x \\ \frac{1}{2}x & & & + & \frac{1}{2}z & = & y \\ \frac{1}{2}x & + & \frac{1}{2}y & & & = & z \\ x & + & y & + & z & = & 1 \\ \hline \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccc} x & - & \frac{1}{2}y & - & \frac{1}{2}z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ & & & & z & = & \frac{1}{3} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccc} x & = & \frac{1}{3} \\ y & = & \frac{1}{3} \\ z & = & \frac{1}{3} \end{array}$$

Dakle, vektor finalnih verovatnoća glasi: $\mathbf{p}^* = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{array}$.

Na osnovu dobijenih finalnih verovatnoća možemo zaključiti: ako isključenja struje traju "dovoljno dugo", sve grupe potrošača će podjednako biti bez struje.

8. Odredimo najpre raspodelu slučajne promenljive $Z = U + V$.

$$\varphi_U(u) = \begin{cases} 0 & , \ u \notin [1,3] \\ \frac{1}{2} & , \ u \in [1,3] \end{cases}, \qquad \varphi_V(v) = \begin{cases} 0 & , \ v \notin [1,3] \\ \frac{1}{2} & , \ v \in [1,3] \end{cases}.$$

Iz nezavisnosti slučajnih promenljivih U i V sledi da je

$$\varphi_{U,V}(u,v) = \varphi_U(u)\,\varphi_V(v) = \begin{cases} 0 & , \ (u,v) \notin D \\ \frac{1}{4} & , \ (u,v) \in D \end{cases},$$

gde je $D = [1,3]^2$. Označimo sa $\mathcal{P}(S)$ površinu oblasti $S \subseteq \mathbb{R}^2$.

$$F_Z(z) = \mathsf{P}(Z<z) = \mathsf{P}(U+V<z) = \mathsf{P}(U<z-V) =$$
$$= \iint\limits_{u<z-v} \varphi_{U,V}(u,v)\,dudv = \iint\limits_{D_z} \tfrac{1}{4}dudv = \tfrac{1}{4}\iint\limits_{D_z} dudv = \tfrac{1}{4}\mathcal{P}(D_z),$$

gde je $D_z = D \cap \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ u < z - v \right\}$.

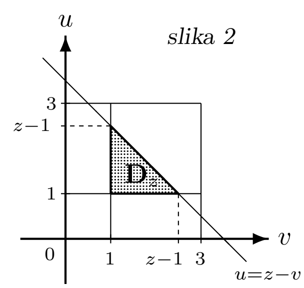
Za razne vrednosti z dobijamo

(1) za $z < 2$ je $D_z = \emptyset$, a za $z = 2$ je $D_z = \{(1,1)\}$, te za slučaj $z \leq 2$ važi: $F_Z(z) = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0$;

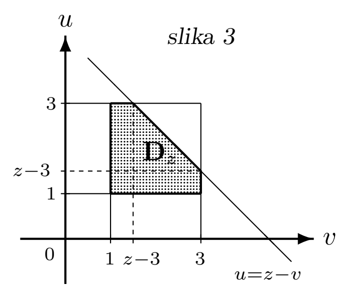
(2) za $2 < z \leq 4$ je (vidi sliku 2) D_z je trougao sa temenima u tačkama $(1,1)$, $(z-1,1)$ i $(1,z-1)$, te je $\mathcal{P}(D_z) = \frac{(z-2)^2}{2}$, odakle dobijamo: $F_Z(z) = \frac{1}{4} \cdot \frac{(z-2)^2}{2} = \frac{1}{8}z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$;

(3) za $4 < z \leq 6$ je (vidi sliku 3) D_z je poligon sa temenima u tačkama $(1,1)$, $(3,1)$, $(3,z-3)$, $(z-3,3)$ i $(1,3)$, te je
$\mathcal{P}(D_z) = \mathcal{P}(D) - \mathcal{P}(D \setminus D_z) = 4 - \frac{(6-z)^2}{2}$, odakle dobijamo:
$F_Z(z) = \frac{1}{4} \cdot \left(4 - \frac{(6-z)^2}{2}\right) = -\frac{1}{8}z^2 + \frac{3}{2}z - \frac{7}{2}$;

(4) za $6 < z$ je $D_z = D$, te je $\mathcal{P}(D_z) = \mathcal{P}(D) = 4$, odakle dobijamo: $F_Z(z) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$.



slika 2



slika 3

Dakle:
$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & , \ z \in (-\infty, 2] \\ \frac{1}{8}z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} & , \ z \in (2,4] \\ -\frac{1}{8}z^2 + \frac{3}{2}z - \frac{7}{2} & , \ z \in (4,6] \\ 1 & , \ z \in (6,\infty) \end{cases} .$$

Pri tome je Z slučajna promenljiva absolutno neprekidnog tipa sa gustinom raspodele verovatnoća

$$\varphi_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} 0 & , \ z \notin [2,6] \\ \frac{1}{4}z - \frac{1}{2} & , \ z \in [2,4) \\ -\frac{1}{4}z + \frac{3}{2} & , \ z \in [4,6] \end{cases} .$$

Sada je:

$$F_{X_t}(x) = \mathsf{P}(X_t < x) = \mathsf{P}\left((U+V)^{t+1} < x\right) = \mathsf{P}\left(Z^{t+1} < x\right) \overset{[1]}{=} \dots$$

(1) za $x \leq 0$: $F_{X_t}(x) = 0$;

(2) za $x > 0$: $F_{X_t}(x) = \mathsf{P}\left(Z < x^{\frac{1}{t+1}}\right) = F_Z\left(x^{\frac{1}{t+1}}\right) = \dots$

(2.1) za $x^{\frac{1}{t+1}} \in (0,2]$ odnosno $x \in \left(0, 2^{t+1}\right]$: $F_{X_t}(x) = 0$;

(2.2) za $x^{\frac{1}{t+1}} \in (2,4]$ odnosno $x \in \left(2^{t+1}, 4^{t+1}\right]$:
$F_{X_t}(x) = \frac{1}{8}x^{\frac{2}{t+1}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{t+1}} + \frac{1}{2}$;

(2.3) za $x^{\frac{1}{t+1}} \in (4,6]$ odnosno $x \in \left(4^{t+1}, 6^{t+1}\right]$:

$F_{X_t}(x) = -\frac{1}{8}x^{\frac{2}{t+1}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{t+1}} - \frac{7}{2}$;

(2.4) za $x^{\frac{1}{t+1}} \in (6,\infty)$ odnosno $x \in \left(6^{t+1}, \infty\right]$: $\quad F_{X_t}(x) = 1$.

Dakle: $$F_{X_t}(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \in \left(-\infty, 2^{t+1}\right] \\ \frac{1}{8}x^{\frac{2}{t+1}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{t+1}} + \frac{1}{2} & , \ x \in \left(2^{t+1}, 4^{t+1}\right] \\ -\frac{1}{8}x^{\frac{2}{t+1}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{t+1}} - \frac{7}{2} & , \ x \in \left(4^{t+1}, 6^{t+1}\right] \\ 1 & , \ x \in \left(6^{t+1}, \infty\right] \end{cases}.$$

[1] - *Zbog* $t \in [0,\infty)$ *je* $t+1>0$, *pa je* $\frac{1}{t+1} > 0$; *pri tome je* $Z>0$ *i* $Z^{t+1} > 0$.

Izračunavamo matematičko očekivanje.

Prvi način:

$$m_X(t) = \mathsf{E}(X_t) = \mathsf{E}\left(Z^{t+1}\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} z^{t+1}\varphi_Z(z)\,dz =$$
$$= \int\limits_2^4 z^{t+1}\left(\frac{1}{4}z - \frac{1}{2}\right)dz + \int\limits_4^6 z^{t+1}\left(-\frac{1}{4}z + \frac{3}{2}\right)dz =$$
$$= \frac{1}{4}\int\limits_2^4 z^{t+2}dz - \frac{1}{2}\int\limits_2^4 z^{t+1}dz - \frac{1}{4}\int\limits_4^6 z^{t+2}dz + \frac{3}{2}\int\limits_4^6 z^{t+1}dz =$$
$$= \frac{2\left(2^t + 2^t 3^{t+3} - 4^{t+2}\right)}{(t+2)(t+3)}.$$

Drugi način: koristeći $\mathsf{E}(f(U,V)) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(u,v)\,\varphi_{U,V}(u,v)\,dudv$ i raspodelu slučajnog vektora (U,V) dobijamo

$$\mathsf{E}\left((U+V)^{t+1}\right) = \iint\limits_D (u+v)^{t+1}\cdot\frac{1}{4}dudv = \frac{1}{4}\int\limits_1^3\left(\int\limits_1^3 (u+v)^{t+1}\,du\right)dv =$$
$$= \frac{1}{4}\int\limits_1^3 \frac{(u+v)^{t+2}}{t+2}\Bigg|_1^3 dv = \frac{1}{4}\int\limits_1^3 \frac{(3+v)^{t+2}-(1+v)^{t+2}}{t+2}dv =$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(t+2)(t+3)}\cdot\left((3+v)^{t+3} - (1+v)^{t+3}\right)\Bigg|_1^3 = \frac{2\left(2^t+2^t 3^{t+3} - 4^{t+2}\right)}{(t+2)(t+3)}.$$

28.09.2001.

1. Skup od 8 belih i 1 crne kuglice se na slučajan način deli na grupe od po 2, 3 i 4 kuglice. Zatim se baca kockica za "Ne ljuti se čoveče" i bira se ona grupa kuglica u kojoj je broj kuglica najbliži broju dobijenom na kockici.

   (a) Koliko iznosi verovatnoća da je izabrana grupa u kojoj se nalazi crna kuglica?

   (b) Ako je izabrana grupa u kojoj se nalazi crna kuglica, koliko iznosi verovatnoća da je na kockici bačen broj 1?

2. Košarkaš izvodi šuteve na koš 3 puta i to tako što pri svakom gađanju baca pravilan novčić, pa ako na novčiću dobije pismo, tada gađa sa 5 metara, a ako dobije grb, tada gađa sa 7 metara. Sa 5 metara koš pogađa sa verovatnoćom $\frac{4}{5}$, a sa 7 metara pogađa sa verovatnoćom $\frac{3}{5}$. Naći raspodelu slučajne promenljive $X = (2-Y)^2$, gde je Y slučajna promenljiva koja predstavlja broj postignutih koševa i izračunati uslovnu verovatnoću $\mathsf{P}(Y=3 \mid X=1)$.

3. Neka je $\varphi(x) = \begin{cases} a^2 x e^{-ax} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$.

   (a) Za koje sve vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ je funkcija φ gustina raspodele verovatnoća neke slučajne promenljive?

   (b) Za $a = 1$ slučajna promenljiva X ima gustinu raspodele φ, a pri uslovu $X = x$, $x > 0$ slučajna promenljiva Y ima uniformnu $\mathcal{U}(0, x)$ raspodelu. Naći raspodelu slučajne promenljive $Z = X + 3Y$.

4. Poznato je da 30% studenata stanuje u studentskom domu. Radi anketiranja se na slučajan način bira grupa studenata. Koliki treba da je broj studenata u grupi, pa da se sa verovatnoćom 0.9 u njoj nalazi bar 20 studenata koji stanuju u studentskom domu?

5. Obeležje X ima zakon raspodele: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \theta & 2\theta & 1-3\theta \end{pmatrix}$.

   (a) Na osnovu uzorka obima n naći ocenu parametra θ metodom maksimalne verodostojnosti.

   (b) Izračunati vrednost ocenjenog parametra za uzorak

   $$1,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1,\ 1,\ -1,\ 0\ .$$

   (c) Ispitati centriranost dobijene ocene.

6. U jednakim vremenskim intervalima, u tankom sloju rastvora zlata registrovan je broj čestica koje padaju u vidno polje mikroskopa. Rezultati dobijeni za dva uzorka prikazani su u sledećoj tabeli:

broj čestica x_i	0	1	2	3	4	5
broj realizacija m_i	15	40	26	10	7	2

   χ^2 testom sa pragom značajnosti $\alpha = 0.05$ testirati hipotezu da broj čestica iz uzorka ima Poasonovu raspodelu.

7. U kutiji X se nalaze 2 bele, a u kutiji Y se nalaze 3 crne kuglice. Izvođač eksperimenta pri jednom premeštanju kuglica nasumice vadi po jednu kuglicu iz svake kutije i zameni im mesta. Označimo sa X_n i Y_n redom broj belih kuglica u kutijama X i Y nakon n premeštanja $(n \in \{0, 1, 2, \ldots\})$. Koje je najverovatnije stanje slučajnog procesa

   $$\xi_n = X_n - Y_n, \quad n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$

   nakon 4 premeštanja kuglica?

8. Neka su U i V nezavisne slučajne promenljive, U sa binomnom $\mathcal{B}\left(5, \frac{1}{5}\right)$ raspodelom, a V sa uniformnom $\mathcal{U}(1,3)$ raspodelom. Naći srednju vrednost, autokovarijansnu funkciju i disperziju slučajnog procesa
$$X_t = (U+t)\ V^t, \ \ t \in [0, \infty).$$

Rešenja:

1. Označimo sa A događaj "*odabrana je grupa koja sadrži crnu kuglicu*", i označimo redom sa H_i, $i \in \{2,3,4\}$ događaje: "*odabrana je grupa koja sadrži i kuglica*". Skup $\{H_2, H_3, H_4\}$ čini potpun sistem događaja, pa ako sa K označimo dobijeni broj na kockici, tada verovatnoće $\mathsf{P}(H_i)$ možemo dobiti na sledeći način:
$$\mathsf{P}(H_2) = \mathsf{P}(K \in \{1,2\}) = \tfrac{2}{6},$$
$$\mathsf{P}(H_3) = \mathsf{P}(K \in \{3\}) = \tfrac{1}{6},$$
$$\mathsf{P}(H_4) = \mathsf{P}(K \in \{4,5,6\}) = \tfrac{3}{6}.$$
Događaj $A\,|\,H_i$ je ekvivalentan sa događajem "*crna kuglica je raspoređena u grupu koja sadrži i kuglica*", te su verovatnoće $\mathsf{P}(A \mid H_i)$ proporcionalne broju kuglica u odgovarajućoj grupi jer se kuglice dele u grupe na slučajan način:
$$\mathsf{P}(A \mid H_2) = \tfrac{2}{9}, \qquad \mathsf{P}(A \mid H_3) = \tfrac{3}{9}, \qquad \mathsf{P}(A \mid H_4) = \tfrac{4}{9}.$$
   (a) Koristeći formulu totalne verovatnoće dobijamo
$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=2}^{4} \mathsf{P}(H_i)\, \mathsf{P}(A \mid H_i) = \tfrac{19}{54} \approx 0.3519.$$
   (b) Koristeći Bajesovu formulu dobijamo
$$\mathsf{P}(H_2 \mid A) = \tfrac{\mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A \mid H_2)}{\mathsf{P}(A)} = \tfrac{4}{19} \approx 0.2105.$$
   Dakle, ako je odabrana grupa koja sadrži crnu kuglicu, tada je na kockici sa verovatnoćom $\frac{4}{19}$ dobijen broj iz skupa $\{1,2\}$, a pošto se ovi brojevi na kockici dobijaju sa jednakom verovatnoćom, tražena verovatnoća je
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{19} = \frac{2}{19} \approx 0.1053.$$

2. Označimo sa A događaj "*pri jednom gađanju košarkaš pogađa koš*". Verovatnoću ovog događaja možemo naći koristeći potpun sistem događaja $\{P, G\}$ gde je P događaj "*na navčiću je palo pismo*", a G je događaj "*na navčiću je pao grb*". Koristeći formulu totalne verovatnoće dobijamo
$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(P)\,\mathsf{P}(A \mid P) + \mathsf{P}(G)\,\mathsf{P}(A \mid G) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{5} = \tfrac{7}{10}.$$
Dakle, košarkaš izvodi 3 nezavisna šuta na koš pri čemu svaki put pogađa sa verovatnoćom $\frac{7}{10}$. To znači da slučajna promenljiva Y (broj postignutih koševa) ima binomnu $\mathcal{B}\left(3, \frac{7}{10}\right)$ raspodelu. Računamo verovatnoće
$$\mathsf{P}(Y = k) = \tbinom{3}{k} \left(\tfrac{7}{10}\right)^k \left(\tfrac{3}{10}\right)^{3-k} = \tfrac{1}{1000} \tbinom{3}{k}\, 7^k\, 3^{3-k}, \ \ k \in \{0,1,2,3\}$$
i dobijamo zakon raspodele slučajne promenljive Y:

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{27}{1000} & \frac{189}{1000} & \frac{441}{1000} & \frac{343}{1000} \end{array} \right).$$

Iz $\mathcal{R}_X = \{0,1,2,3\}$ sledi da je

$$\mathcal{R}_Y = \left\{(2-0)^2, (2-1)^2, (2-2)^2, (2-3)^2\right\} = \{0,1,4\},$$

pri čemu je:

$\mathsf{P}(Y=0) = \mathsf{P}(X=2) = \frac{441}{1000}$,

$\mathsf{P}(Y=1) = \mathsf{P}(\{X=1\}+\{X=3\}) = \mathsf{P}(X=1) + \mathsf{P}(X=3) = \frac{532}{1000}$,

$\mathsf{P}(Y=4) = \mathsf{P}(X=0) = \frac{27}{1000}$.

Dakle, zakon raspodele slučajne promenljive X glasi:

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 4 \\ \frac{441}{1000} & \frac{532}{1000} & \frac{27}{1000} \end{array} \right).$$

Tražena uslovna verovatnoća je

$$\mathsf{P}(Y=3 \mid X=1) = \frac{\mathsf{P}(Y=3, X=1)}{\mathsf{P}(X=1)} = \frac{\mathsf{P}(Y=3, Y\in\{1,3\})}{\mathsf{P}(X=1)} =$$
$$= \frac{\mathsf{P}(Y=3)}{\mathsf{P}(X=1)} = \frac{\frac{343}{1000}}{\frac{532}{1000}} = \frac{343}{532} = \frac{49}{76} \approx 0.6447.$$

3. (a) Funkcija φ je nenegativna i integrabilna na celom skupu $\mathbb{R}$ za sve $a\in\mathbb{R}$. Treba još ispitati po a uslov $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = a^2 \int\limits_{0}^{\infty} xe^{-ax}dx = 1$.

(a.1) Za $a=0$ je: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} 0dx = 0.$

(a.2) Za $a\neq 0$ je: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx \overset{[1]}{=} -\frac{1+ax}{e^{ax}}\Big|_0^{\infty} = \frac{1+ax}{e^{ax}}\Big|_{\infty}^{0} = \ldots$

(a.2.1) za $a<0$ je: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1-(-\infty) = \infty;$

(a.2.2) za $a>0$ je: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1-0 = 1.$

[1] - Parcijalnom integracijom: $u=x,\ dv = e^{-ax}dx$.

Dakle, funkcija φ je gustina ako i samo ako je $a>0$.

(b) Gustina slučajnog vektora (X,Y) je

$$\varphi_{X,Y}(x,y) = \varphi_X(x)\,\varphi_{Y|\{X=x\}}(x,y) =$$
$$= \left\{ \begin{array}{ccc} xe^{-x}\cdot\frac{1}{x} & , & (x,y)\in D \\ 0 & , & (x,y)\notin D \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{ccc} e^{-x} & , & (x,y)\in D \\ 0 & , & (x,y)\notin D \end{array} \right.$$

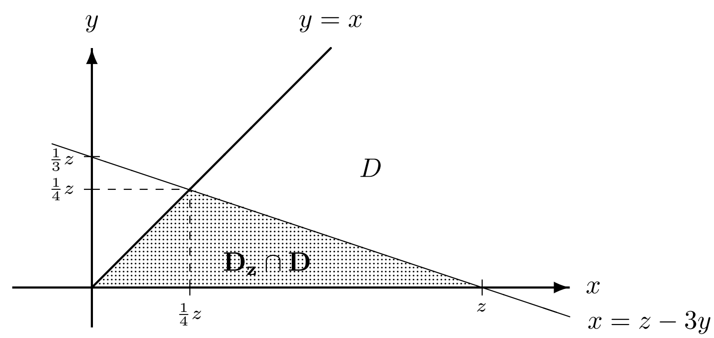
gde je $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x\geq 0 \ \wedge\ 0\leq y\leq x\right\}$.

Označimo

$$D_z = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+3y<z\right\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x<z-3y\right\}.$$

Funkciju raspodele slučajne promenljive Z možemo dobiti na sledeći način:

$F_Z(z) = \mathsf{P}(Z < z) = \mathsf{P}(X + 3Y < z) =$
$= \iint\limits_{D_z} \varphi_{X,Y}(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_z \cap D} e^{-x} dxdy = \dots$



(1) za $z < 0$: $\quad F_Z(z) = \iint\limits_{\emptyset} e^{-x} dxdy = 0;$

(2) za $z \geq 0$:

$$F_Z(z) = \int\limits_0^{\frac{1}{4}z} \left(\int\limits_y^{z-3y} e^{-x} dx \right) dy =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{4}z} \left(e^{-y} - e^{3y-z} \right) dy = 1 + \tfrac{1}{3}e^{-z} - \tfrac{4}{3}e^{-\frac{1}{4}z}.$$

Dakle: $\quad F_Z(z) = \begin{cases} 0 & , \quad z \leq 0 \\ 1 + \frac{1}{3}e^{-z} - \frac{4}{3}e^{-\frac{1}{4}z} & , \quad z > 0 \end{cases}.$

4. Označimo sa n traženi broj studenata u grupi za anketiranje i označimo sa X_i slučajnu promenljivu koja uzima vrednost 1 ako i-ti student u grupi stanuje u domu, odnosno 0 ako i-ti student u grupi ne stanuje u domu. Sve slučajne promenljive X_i imaju zakon raspodele $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{7}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$.

   Slučajna promenljiva $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ predstavlja broj studenata u grupi koji stanuju u studentskom domu i ima binomnu $\mathcal{B}\left(n, \frac{3}{10}\right)$ raspodelu, matematičko očekivanje $\mathsf{E}(S_n) = \frac{3}{10}n$ i disperziju $\mathsf{D}(S_n) = \frac{21}{100}n$. Približno rešenje možemo naći primenom Moavr-Laplasove teoreme:

   $\mathsf{P}(S_n \geq 20) = 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \mathsf{P}(S_n < 20) = 0.9 \quad \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \quad \mathsf{P}(S_n < 20) = 0.1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(\frac{S_n - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}} < \frac{20 - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}} \right) = 0.1 \quad \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(\frac{S_n - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}} < \frac{20 - \frac{3}{10}n}{\sqrt{\frac{21}{100}n}} \right) = 0.1 \quad \Leftrightarrow \quad \phi\left(\frac{20 - \frac{3}{10}n}{\sqrt{\frac{21}{100}n}} \right) \approx 0.1 \quad \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \quad \frac{20 - \frac{3}{10}n}{\sqrt{\frac{21}{100}n}} \approx \phi^{-1}(0.1) = -\phi^{-1}(0.9) \approx -1.28 \quad \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \quad \frac{3}{10}n - 0.5866\sqrt{n} - 20 \approx 0 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{3}{10}t^2 - 0.5866t - 20 \approx 0 \quad \wedge \quad t = \sqrt{n}\right) \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad ((t \approx -7.2457 \quad \vee \quad t \approx 9.2009) \quad \wedge \quad t = \sqrt{n}) \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad (t \approx 9.2009 \quad \wedge \quad t = \sqrt{n}) \quad \Leftrightarrow \quad n \approx 84.6566.$

Dakle, potrebno je da u grupi bude oko 85 studenata.

5. (a) Neka statistika K_n predstavlja broj pojavljivanja broja -1 u uzorku, a statistika M_n broj pojavljivanja broja 0 u uzorku. Tada broj pojavljivanja broja 1 u uzorku predstavlja statistika $n - K_n - M_n$.

$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \mathsf{P}(X_1 = x_1)\,\mathsf{P}(X_2 = x_2) \dots \mathsf{P}(X_n = x_n) =$
$= \theta^{k_n} \cdot (2\theta)^{m_n} \cdot (1 - 3\theta)^{n-k_n-m_n} = 2^{m_n} \cdot \theta^{k_n+m_n} \cdot (1-3\theta)^{n-k_n-m_n},$
$\ln L(x_1, \dots, x_n; \theta) =$
$= m_n \ln 2 + (k_n + m_n) \ln \theta + (n - k_n - m_n) \ln(1 - 3\theta),$

$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \frac{k_n+m_n}{\theta} - 3\frac{n-k_n-m_n}{1-3\theta}.$

Nalazimo maksimum funkcije L po θ:
$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln L(x_1, \dots, x_n; \theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k_n+m_n}{\theta} - 3\frac{n-k_n-m_n}{1-3\theta} = 0 \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad (k_n + m_n)(1 - 3\theta) - 3(n - k_n - m_n)\theta = 0 \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad k_n + m_n - 3n\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{k_n+m_n}{3n}.$

Dakle, dobili smo ocenu: $\quad \hat{\theta} = \frac{1}{3n}(K_n + M_n).$

(b) Kod uzorka $1, 1, -1, 0, 0, 1, 1, -1, 0$ veličine $n = 8$ je $k_8 = 2$ i $m_8 = 2$ te je $\theta = \frac{2+2}{3\cdot 8} = \frac{1}{6}$.

(c) Poznato je da slučajna promenljiva K_n ima binomnu $\mathcal{B}(n, \theta)$ raspodelu, a slučajna promenljiva M_n binomnu $\mathcal{B}(n, 2\theta)$ raspodelu. Sledi da je $\mathsf{E}(K_n) = n\theta$ i $\mathsf{E}(M_n) = 2n\theta$ te dobijamo

$\mathsf{E}\left(\hat{\theta}\right) = \mathsf{E}\left(\frac{1}{3n}(K_n + M_n)\right) = \frac{1}{3n}\left(\mathsf{E}(K_n) + \mathsf{E}(M_n)\right) =$
$= \frac{1}{3n}(n\theta + 2n\theta) = \theta,$

što znači da ocena $\hat{\theta}$ jeste centrirana.

6. Obim posmatranog uzorka je $n = \sum_{i=1}^{6} m_i = 100$. Ako obeležje X koje predstavlja broj pomenutih čestica ima Poasonovu $\mathcal{P}(\lambda)$ raspodelu, tada je $\mathsf{E}(X) = \lambda$, te nepoznati parametar λ Poasonove raspodele možemo oceniti uzoračkom aritmetičkom sredinom:

$$\lambda = \overline{x}_{100} = \frac{1}{100}(0 \cdot 15 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 26 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 2) = 1.6\,.$$

Spajamo poslednje dve grupe podataka (da bi u svakoj imali bar 5 podataka) i izračunavamo odgovarajuće teorijske verovatnoće:

$p_1 = \mathsf{P}(X = 0) = e^{-1.6} \approx 0.2019,$

$p_2 = \mathsf{P}(X = 1) = 1.6 \cdot e^{-1.6} \approx 0.3230,$

$p_3 = \mathsf{P}(X = 2) = \frac{1.6^2}{2} \cdot e^{-1.6} \approx 0.2584,$

$p_4 = \mathsf{P}(X=3) = \frac{1.6^3}{6} \cdot e^{-1.6} \approx 0.1378,$

$p_5 = \mathsf{P}(X \geq 4) = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \approx 0.0788.$

Dakle, χ^2 test primenjujemo na sledeće podatke:

x_i	0	1	2	3	$4,5,\dots$
m_i	15	40	26	10	9
p_i	0.2019	0.3230	0.2584	0.1378	0.0788

Izračunavamo vrednost $Z = \sum\limits_{i=1}^{5} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$ statistike:

$$z = \frac{(15-100\cdot 0.2019)^2}{100\cdot 0.2019} + \frac{(40-100\cdot 0.3230)^2}{100\cdot 0.3230} + \frac{(26-100\cdot 0.2584)^2}{100\cdot 0.2584} +$$
$$+ \frac{(10-100\cdot 0.1378)^2}{100\cdot 0.1378} + \frac{(9-100\cdot 0.0788)^2}{100\cdot 0.0788} \approx 4.3657.$$

Pošto je $z < \chi^2_{0.05;5-1-1} = \chi^2_{0.05;3} \approx 7.81$, konstatujemo da uzorak ne protivreči hipotezi.

7. Primetimo da slučajne promenljive (slučajni proces) Y_n možemo predstaviti kao $Y_n = 2 - X_n$ odakle je $\xi_n = X_n - (2 - X_n) = 2X_n - 2$ (slučajni proces ξ_n je linearna transformacija procesa X_n). Moguće vrednosti slučajnog procesa X_n su 0, 1 i 2, odakle sledi da je skup stanja procesa ξ_n skup $\{-2, 0, 2\}$, a verovatnoće prelaska procesa ξ_n glase:

   $p_{i,j} = \mathsf{P}(\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i) = \mathsf{P}(2X_{n+1} - 2 = j \mid 2X_n - 2 = i) =$

   $= \mathsf{P}\left(X_{n+1} = \frac{j}{2} + 1 \mid X_n = \frac{i}{2} + 1\right), \quad i, j \in \{-2, 0, 2\}.$

   Dakle:

   $p_{-2,-2} = \mathsf{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0) = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3},$

   $p_{-2,0} = \mathsf{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0) = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3},$

   $p_{-2,2} = \mathsf{P}(X_{n+1} = 2 \mid X_n = 0) = 0,$

   $p_{0,-2} = \mathsf{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6},$

   $p_{0,0} = \mathsf{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{6},$

   $p_{0,2} = \mathsf{P}(X_{n+1} = 2 \mid X_n = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$

   $p_{2,-2} = \mathsf{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 2) = 0,$

   $p_{2,0} = \mathsf{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 2) = 1,$

   $p_{2,2} = \mathsf{P}(X_{n+1} = 2 \mid X_n = 2) = 0$

   i time smo dobili matricu prelaza (za jedno premeštanje), a zatim nalazimo matricu prelaza $P(4) = P^4 = \left(P^2\right)^2$ za 4 premeštanja:

$$P = \begin{array}{c} \\ {\scriptstyle -2} \\ {\scriptstyle 0} \\ {\scriptstyle 2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} {\scriptstyle -2} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad P(4) = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{66}{216} & \frac{127}{216} & \frac{23}{216} \end{bmatrix}.$$

Početni broj beli kuglica u kutiji X je 2, pa početno stanje procesa ξ iznosi $\xi_0 = 2X_0 - 2 = 2\cdot 2 - 2 = 2$, odnosno vektor početne raspodele verovatnoća glasi: $\mathbf{p}(0) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -2 & 0 & 2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$.

Vektor raspodele verovatnoća nakon 4 premeštanja:

$$\mathbf{p}(4) = \mathbf{p}(0) \cdot P^4 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -2 & 0 & 2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} \frac{66}{216} & \frac{127}{216} & \frac{23}{216} \end{array}\right] \end{array}.$$

Prema tome, nakon 4 premeštanja se proces ξ najverovatnije nalazi u stanju 0.

8. Iz zadanih raspodela vidimo da je

$\mathsf{E}(U) = 5 \cdot \frac{1}{5} = 1, \quad \mathsf{D}(U) = 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}, \quad \mathsf{E}\left(U^2\right) = \mathsf{D}(U) + \mathsf{E}^2(U) = \frac{9}{5}.$

Matematičko očekivanje procesa: za sve $t \in [0, \infty)$ je

$m_X(t) = \mathsf{E}\left((U+t)\,V^t\right) \overset{[1]}{=} \mathsf{E}(U+t)\,\mathsf{E}\left(V^t\right) =$

$= (\mathsf{E}(U) + t) \int\limits_{-\infty}^{\infty} v^t\, \varphi_V(v)\, dv = (1+t) \int\limits_{1}^{3} v^t \cdot \frac{1}{2} dv = \frac{3^{t+1}-1}{2}.$

Autokovarijansna funkcija procesa: za sve $t, s \in [0, \infty)$ je

$\mathsf{K}_X(t,s) = \mathsf{E}\left((U+t)\,V^t\ (U+s)\,V^s\right) =$

$= \mathsf{E}\left(\left(U^2 + (t+s)\,U + ts\right) V^{t+s}\right) \overset{[2]}{=} \mathsf{E}\left(U^2 + (t+s)\,U + ts\right) \mathsf{E}\left(V^{t+s}\right) =$

$= \left(\mathsf{E}\left(U^2\right) + (t+s)\,\mathsf{E}(U) + ts\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} v^{t+s} \varphi_V(v)\, dv =$

$= \left(\frac{9}{5} + (t+s) + ts\right) \int\limits_{1}^{3} v^{t+s} \cdot \frac{1}{2} dv = \left(\frac{4+5ts}{10(t+s+1)} + \frac{1}{2}\right) \left(3^{t+s+1} - 1\right).$

Disperzija procesa: za sve $t \in [0, \infty)$ je

$\mathsf{D}_X(t) = \mathsf{K}_X(t,t) = \left(\frac{4+5t^2}{10(2t+1)} + \frac{1}{2}\right) \left(3^{2t+1} - 1\right).$

[1] - *Iz nezavisnosti slučajnih promenljivih U i V sledi nezavisnost slučajnih promenljivih $U+t$ i V^t za svako $t \in [0, \infty)$.*

[2] - *Iz nezavisnosti slučajnih promenljivih U i V sledi nezavisnost slučajnih promenljivih $U^2 + (t+s)\,U + ts$ i V^{t+s} za svako $t \in [0, \infty)$.*

06.10.2001.

1. Vidi zadatak 1 iz oktobarkog roka 1999 (27.09.1999)

2. Vidi zadatak 2 iz aprilskog roka 2000 (04.05.2000)

3. Vidi zadatak 3 iz julskog roka 1999 (15.07.1999)
4. Vidi zadatak 4 iz septembarskog roka 1999 (04.09.1999)
5. Vidi zadatak 5 iz julskog roka 2001 (12.07.2001)
6. Vidi zadatak 6 iz oktobarskog/2 roka 2000 (28.10.2000)
7. Vidi zadatak 8 iz julskog roka 2000 (09.07.2000)
8. Vidi zadatak 6 iz junskog roka 2000 (17.06.2000)

CIP – Каталогизација у публикацији
Библиотека Матице српске, Нови Сад

519.2(076.58)

Грбић, Татјана
Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz verovatnoće, statistike i slučajnih procesa / Tatjana Grbić, Ljubo Nedović. - Novi Sad : Fakultet tehničkih nauka, 2001 (Novi Sad : FB print). - 203 str. : graf. prikazi, tabele; 25 cm.

Tiraž 100.

1. Недовић, Љубо
а) Математичка статистика - Задаци
б) Теорија вероватноће - Задаци