Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka
Elektroenergetski softverski inženjering / Primenjeno softvesrko inženjerstvo
predmet: **Matematička analiza**
datum: **15. jun 2020. godine**

PRVI KOLOKVIJUM (Prvi deo) Rešenja predispitnih obaveza

Sve odgovore obrazložiti.

1. (2 poena) Da li je funkcija $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data sa $d(x, y) = |x - y|$ za $x, y \in \mathbb{R}$ metrika (rastojanje)?

   Rešenje

   Jeste (po definiciji rastojanja) zbog osobina apsolutne vrednosti.

   - $d(x, y) = |x - y| \geq 0$.
   - $d(x, y) = |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$
   - $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$
   - $d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$

2. (1 poen) Da li je tačka 0 tačka nagomilavanja skupa $A = [-1, 0) \cup (0, 1)$?

   Rešenje

   Jeste, jer svaka lopta $L(0, r)$, $r > 0$, sadrži tačke iz skupa A različite od 0. Ekvivalentno, ne postoji lopta $L(0, r)$ takva da je $A \cap L(0, r) \backslash 0 = \emptyset$.

3. Dat je niz $a_n = \dfrac{2 + (-1)^n}{n^2}$.

   (1 poen) Odrediti $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

   Rešenje

   $a = 0$, jer je $2 + (-1)^n$ ograničeno i $n^2 \to \infty$ kad $n \to \infty$.

   (1 poen) Da li dati niz zadovoljava sve uslove principa monotonosti? Navesti i proveriti uslove.

   Rešenje

   Svaki monotono neopadajuci (nerastući) niz ograničen sa gornje (donje) strane konvergira ka svom supremumu (infimumu). Dati niz je ograničen (jer je konvergentan), ali nije monoton. Za $n = 2k - 1$ je $a_n = a_{2k-1} = \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{4k^2-2k+1} < \frac{3}{4k^2} = \frac{3}{(2k)^2} = a_{2k} = a_{n+1}$ dok je za $n = 2k$, $a_n = a_{2k} = \frac{3}{4k^2} > \frac{1}{4k^2+2k+1} = a_{2k+1} = a_{n+1}$.

4. Data je funkcija $f(x) = \begin{cases} 1 + x & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$.

   (1 poen) Odrediti $A = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

   Rešenje

   $A = 1$.

   (1 poen) Odrediti δ tako da je $|f(x) - A| < 10^{-2}$ za $|x| < \delta$, $x \neq 0$.

   Rešenje

   $|f(x) - A| = |1 + x - 1| = |x| < 10^{-2}$ za $|x - 0| < 10^{-2}$, tj. $\delta = 10^{-2}$.

5. (1 poen) Odrediti vrstu prekida funkcije $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ u tački 0.

   Rešenje

   $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, pa funkcija ima prividan prekid u tački 0.

6. (2 poena) Pokazati da funkcija $f(x) = x^3 - 2x + 3$ na intervalu [-3,1] ima bar jednu nulu. Gde se ta nula nalazi u odnosu na tačku -1?

   Rešenje

   Funkcija je neprekidna na $[-3, 1]$, $f(-3) < 0$, $f(1) > 0$, pa na intervalu $[-3, 1]$ funkcija ima bar jednu nulu. Kako je $f(-1) > 0$, nula se nalazi levo od tačke 1.

Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka
Elektroenergetski softverski inženjering / Primenjeno softvesrko inženjerstvo
predmet: **Matematička analiza**
datum: **15. jun 2020. godine**

Prvi kolokvijum (drugi deo) Rešenja predispitnih obaveza

Sve odgovore obrazložiti.

1. (2 poena) Data je funkcija $y = x^2$. Čemu je jednak priraštaj Δy a čemu diferencijal dy date funkcije u tački $x = 1$ ako je $\Delta x = 0.1$?

   Rešenje

   $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(1.1) - f(1) = 1.1^2 - 1^2 = 0.21$. $dy = y'dx = 2 \cdot 0.1 = 0.2$.

2. (1 poen) Odrediti prvi izvod funkcije $y = y(x)$ date sa $x(t) = \ln t$, $y(t) = e^t$, $t > 0$.

   Rešenje

   $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt} = e^t$, $y'(t) = \frac{e^t}{\frac{1}{t}} = te^t$, $x(t) = \ln t$ (ovo je izvod u parametarskom obliku).

   Drugi način: $y(x) = e^{e^t}$, $y'(x) = e^t e^{e^t}$ (ovo je izvod u eksplicitnom obliku).

3. (1 poen) Za funkciju $f(x) = \dfrac{1}{2 + x}$ napisati Tejlorov polinom prvog stepena u tački $a = 1$, kao i formulu za grešku.

   Rešenje

   Domaći.

4. Data je funkcija $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \ln x & x > 0 \end{cases}$.

   (a) (1 poen) Da li ova funkcija ima ekstrem u $x = 0$?

   Rešenje

   Da, jer je $f(1) = 1$, $f(x) = \ln x < 1$ za $x \in (0, r)$ za svako $0 < r < e$, i $f(x) = \frac{\sin x}{x} < 1$ za $x < 0$ (jer je $\sin x > x$ za $x < 0$, sto se vidi iz grafika funkcija $y = \sin x$ i $y = x$).

   (b) (1 poen) Da li ima vertikalnu asimptotu u tački $x = 0$?

   Rešenje

   Da, jer je $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

   (c) (1 poen) Da li ima horizontalnu asimptotu kad $x \to -\infty$?

   Rešenje

   Da, jer je $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. Horizontalna asimptota je prava $y = 0$ tj. x-osa.

5. (1 poen) Za funkciju $z(x, y) = x^2 h(u, v)$, $u = xy$, $v = x + y$, gde je h diferencijabilna funkcija, naći $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

   Rešenje

   $$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xh(u, v) + x^2\left(\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 2xh(u, v) + x^2\left(\frac{\partial h}{\partial u}y + \frac{\partial h}{\partial v}\right).$$

6. Data je funkcija $z(x, y) = (x + 1)(y - 1)$.

   (a) (1 poen) Ispitati po definiciji da li je data funkcija diferencijabilna na $\mathbb{R}^2$.

   Rešenje

   $\Delta z = z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x, y) = (x+\Delta x+1)(y+\Delta y-1) - (x+1)(y-1) = (y-1)\Delta x + (x+1)\Delta y + \Delta x \Delta y$, pa je $D_1 = (y - 1)$, $D_2 = x + 1$ i npr. $\alpha_1 = \Delta y$ (ili $\alpha_2 = \Delta x$).

   (b) (1 poen) Da li funkcija ima ekstrem u tački $T(-1, 1)$?

   Rešenje

   Ne, jer u tački T je $\Delta z = \Delta x \Delta y$ što nije stalnog znaka ni u jednoj okolini tačke T.

(c) (1 poen) Naći ekstreme ove funkcije pod uslovom $x - y + 1 = 0$.

Rešenje

iz $x - y + 1 = 0$ je $y = x + 1$ pa je $z = y(y-1) = y^2 - y$. Ova kvadratna funkcija ima minimum za $y = \frac{1}{2}$ (onda je $x = -\frac{1}{2}$), pa polazna funkcija ima uslovni ekstrem u tački $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Elektroenergetski softverski inženjering/Primenjeno softvesrko inženjerstvo
predmet: **Matematička analiza** **15. Jun 2020.**
Kolokvijum 1a - Rešenja ispitnih zadataka

1. a) (7 poena) U zavisnosti od realnih parametara p i q, $p \geq 0$, $q \geq 0$, diskutovati graničnu vrednost niza datog sa

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{pn^3 + qn^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{pn^3 + qn^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{pn^3 + qn^2 + n}}.$$

Rešenje. Zadatak rešavamo primenom teoreme o uklještenim nizovima (T.O.U).

$$b_n = \frac{n}{\sqrt{pn^3 + qn^2 + n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{pn^3 + qn^2 + 1}} = c_n$$

U nastavku diskutujemo tri slučaja u zavisnosti od realnih parametra p i q:

1. za $p > 0$ i $q \geq 0$ dobijamo sledeće granične vrednosti:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{pn^3 + qn^2 + n}} \Big/^{:n} = \lim_{1\to\infty} \frac{1}{\sqrt{pn + q + \frac{1}{n}}} = 0 \quad \text{i}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{pn^3 + qn^2 + 1}} \Big/^{:n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{pn + q + \frac{1}{n^2}}} = 0$$

Primenom T.O.U. možemo da zaključimo da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. za $p = 0$ i $q > 0$ dobijamo sledeće granične vrednosti:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{qn^2 + n}} \Big/^{:n} = \lim_{1\to\infty} \frac{1}{\sqrt{q + \frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{q}} \quad \text{i}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{qn^2 + 1}} \Big/^{:n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{q + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{q}}$$

Primenom T.O.U. možemo da zaključimo da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{q}}$.

3. za $p = 0$ i $q = 0$ dobijamo $b_n = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \leq a_n \leq n = c_n$ odakle sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

b) (7 poena) Odrediti konstante A i B tako da funkcija $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 + x} & , x < -1 \\ Ax + B & , -1 \leq x \leq 0 \\ \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+1} - 1} & , x > 0 \end{cases}$

bude neprekidna na $\mathbb{R}$. Raditi bez korišćenja Lopitalovog pravila.

Rešenje. Za zadatu funkciju $f(x)$ uslovi za neprekidnost su:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \tag{2}$$

Iz uslova (1) dobijamo da je:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 + x} = \lim_{x\to -1^-} \frac{(x+1)(x^2 - 3x + 2)}{x(1+x)} = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x} = \frac{1 + 3 + 2}{-1} = -6,$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) = -A + B,$$

odakle dobijamo da je $\boxed{-A + B = -6}$.

Iz uslova (2) dobijamo da je:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x+1} - 1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x+1} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot 2 \cdot (\sqrt{x+1} + 1) = 4,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = B,$$

odakle dobijamo da je $\boxed{B = 4}$ i $-A + 4 = -6 \Rightarrow \boxed{A = 10}$.

2. (13 poena) Detaljno ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \dfrac{\ln|x|+1}{x}$.

Rešenje.

(1) *oblast definisanosti:* je skup $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ (ili $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$).

(2) *parnost*: $f(-x) = \dfrac{\ln|-x|+1}{-x} = -\dfrac{\ln|x|+1}{x} = -f(x) \Rightarrow$ funkcija $f(x)$ je *naparna* tako da u nastavku zadatka ispitujemo funkciju za $x > 0$, tj. posmatramo $f(x) = \dfrac{\ln x + 1}{x}$.

(3) *nule funkcije:* $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \approx 0,37$.

(4) *asimptote funkcije*:

· V.A. je prava $x = 0$ jer

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x + 1}{x} = \frac{(-\infty)+1}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty.$$

· H.A. je prava $y = 0$ jer

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x + 1}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

· K.A. ne postoji, jer funkcija ima horizontalnu asimptotu.

(5) *monotonost i ekstremne vrednosti:*

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x + 1}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\ln x + 1) \cdot 1}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$.
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
Funkcija je rastuća na intervalu $(0, 1)$, a opadajuća na intervalu $(1, +\infty)$.
Funkcija ima maksimum u tački $T_{max}(1, 1)$.

(6) *konveksnost, konkavnost i prevojne tačke:*

$$f''(x) = -\frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{2\ln x - 1}{x^3};$$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \sqrt{e} \approx 1,65$ i
$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{e}$, a $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$.

Funkcija je konveksna na intervalu $(\sqrt{e}, +\infty)$, konkavna na intervalu $(0, \sqrt{e})$. Funkcija ima prevojnu tačku $P(\sqrt{e}, \frac{3}{2\sqrt{e}})$, gde je $\frac{3}{2\sqrt{e}} \approx 0,91$.

(7) *tangente funkcije u tačkama gde ne postoji prvi izvod:* nema tačaka za ispitivanje.

3. (7 poena) Naći ekstremne vrednosti funkcije $z(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2xy + 2y^2)$.

Rešenje.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x-y}(x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 2y) = 0$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x-y}(-x^2 + 2xy - 2y^2 - 2x + 4y) = 0.$$

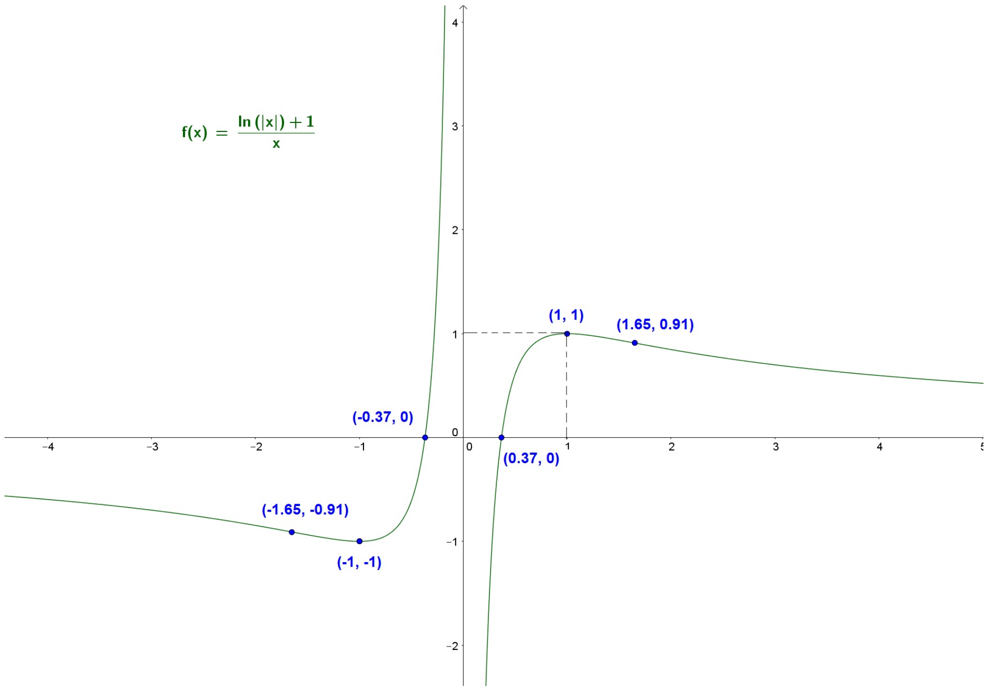
Sistem je dalje ekvivalentan sa sistemom

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 2y &= 0 \\ -x^2 + 2xy - 2y^2 - 2x + 4y &= 0 \\ \hline 2y = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0} \end{aligned}$$

pa dolazimo do jednačine

$$x^2 - 2x \cdot 0 + 2 \cdot 0^2 + 2x - 2 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_1 = 0,} \boxed{x_2 = -2}.$$

Stacionarne tačke su $A(0, 0)$ i $B(-2, 0)$. Pre ispitivanja karaktera stacionarnih tačaka potrebni su parcijalni izvodi drugog reda



Slika 1: Grafik funkcije $f(x) = \frac{\ln|x|+1}{x}$

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x-y}(x^2-2xy+2y^2+2x-2y)\right) = e^{x-y}(x^2-2xy+2y^2+4x-4y+2);\\
t &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x-y}(-x^2+2xy-2y^2-2x+4y)\right) = e^{x-y}(x^2-2xy+2y^2+4x-8y+4);\\
s &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x-y}(x^2-2xy+2y^2+2x-2y)\right) = e^{x-y}(-x^2+2xy-2y^2-4x+6y-2).
\end{aligned}
$$

Tačka $A(0,0)$: $r = 2,\ \ t = 4,\ \ s = -2$ $rt - s^2 = 4 > 0$ $r > 0$ Funkcija $z(x,y)$ ima minimum $z(0,0) = 0$ u tački A.	Tačka $B(-2,0)$: $r = -2e^{-2},\ \ t = 0,\ \ s = 2e^{-2}$ $rt - s^2 = -4e^{-4} < 0$ Funkcija $z(x,y)$ nema ekstrem u tački B.