ISPITIVANJE FUNKCIJA

Obavezna grupa zahteva:

1) Oblast definisanosti (skup x-eva za koje postoji y)
2) Nule funkcije (skup x-eva za koje je $y=0$)
3) Određivanje intervala monotonosti i ekstremnih vrednosti

   $f'(x)>0 \Rightarrow$ funkcija $f(x)$ je monotono rastuća
   $f'(x)<0 \Rightarrow$ funkcija $f(x)$ je monotono opadajuća

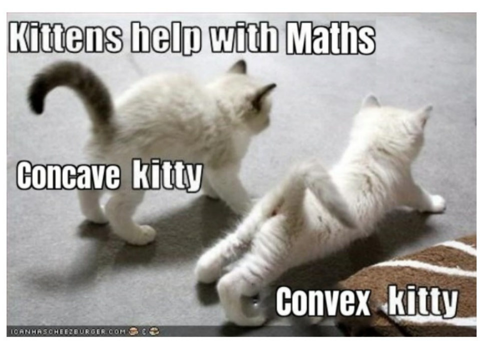
   Tačke u kojima je $f'(x)=0$ su stacionarne tačke.
   Ako je realna funkcija $f(x)$ definisana u nekoj okolini tačke $a \in R$, tada kažemo da funkcija $f(x)$ u tački a ima minimum (maksimum) ako postoji $\delta>0$, takvo da za $x \in (a-\delta,\ a) \cup (a,\ a+\delta) \Rightarrow f(x) > f(a)\ (f(x) < f(a))$. Ako funkcija u tački a ima minimum ili maksimum kažemo da u tački a funkcija ima ekstremnu vrednost.
   Ako funkcija $f(x)$ u tački a ima ekstremnu vrednost i ako postoji $f'(a)$ tada je $f'(a)=0$.
   Jedna od mogućnosti da se ispita da li funkcija u tački a ima ekstremnu vrednost ili ne jeste da se ispita znak prvog izvoda.

   Teorema: Ako je funkcija u tački a neprekidna i ako postoji $\delta>0$ takvo da za $x \in (a-\delta, a)$ je $f'(x)>0$, $(f'(x)<0)$, a za $x \in (a, a+\delta)$ je $f'(x)<0$ $(f'(x)>0)$ onda funkcija u tački a ima ekstremnu vrednost i to maksimum (minimum).

   (Ako je funkcija u tački a neprekidna i ako u tački a prvi izvod menja znak onda funkcija u tački a ima ekstremnu vrednost.)

4) Određivanje konveksnosti, konkavnosti i prevojnih tačaka

   $f''(x)>0 \Rightarrow$ funkcija $f(x)$ je konveksna ☺ (nije kraj, samo smo nasmejani)
   $f''(x)<0 \Rightarrow$ funkcija $f(x)$ je konkavna ☹



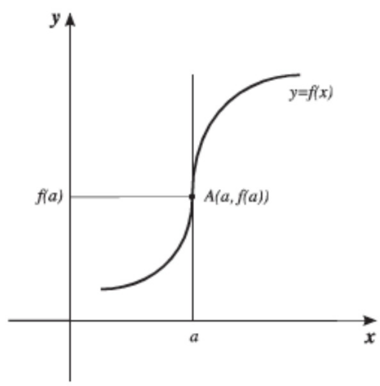
   Ako je $P(a, f(a))$ prevojna tačka funkcije $f(x)$ i ako $\exists f''(a) \Rightarrow f''(a)=0$.
   Tačka $P(a, f(a))$ je prevojna tačka funkcije $f(x)$ ako funkcija $f(x)$ u tački a prelazi iz konveksnosti u konkavnost ili obrnuto.

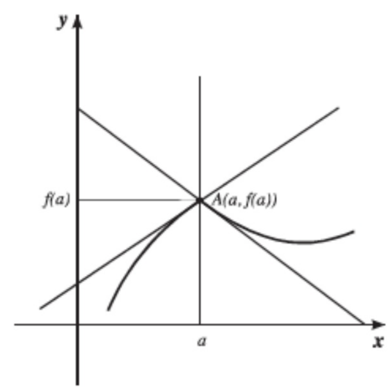
5) Asimptote funkcije

- Vertikalna asimptota je prava $x = a$ (u tačkama prekida domena) ako je
  $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$ ili $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$
- Kosa asimptota je prava $y = kx + n$, gde je
  $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $\qquad$ $n = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx)$
  Napomena: Asimptote funkcije ne moraju biti iste kada $x \to +\infty$ odnosno $x \to -\infty$.
- Horizontalna asimptota je prava $y = n$, gde je
  $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = n$

6) Tangenta funkcije (u tačkama gde ne postoji prvi izvod)

Poznato je da prvi izvod predstavlja tangens ugla α koji tangenta na funkciju u tački $(a, f(a))$ zaklapa sa pozitivnim smerom x-ose. Neka je sada a tačka u kojoj ne postoji prvi izvod funkcije.
Tangenta na grafik funkcije u tački $(a, f(a))$ može biti paralelna sa y-osom: ako je $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = \pm\infty$, onda je prava $x = a$ jednačina tangente na desnu granu grafika funkcije $f(x)$ u tački $(a, f(a))$, kao npr. na prvoj slici.





Na drugoj slici je ilustrovana situacija kada je $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = A \neq \pm\infty$. Tada je desna tangenta (tangenta na desnu granu grafika funkcije) u tački $(a, f(a))$ paralelna sa pravom $y = Ax$.
Slično važi za levu tangentu.

7) Grafik funkcije

Neobavezna grupa zahteva:

1) Znak funkcije ($y > 0, y < 0$)

2) Parnost

$f(-x) = f(x)$ parna (grafik osno simetričan u odnosu na y-osu)

$f(-x) = -f(x)$ neparna (grafik centralno simetričan u odnosu na $(0,0)$)

3) Periodičnost

4) Presek grafika sa y-osom ($y=?$ $x=0$)

ZADACI:

1. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $y = \sqrt{\dfrac{(x-2)^3}{x}}$.

1) Domen

$x-2$	$-$		$-$		$+$
x	$-$		$+$		$+$
	$+$	0	$-$	2	$+$

$D = (-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$

$x \neq 0 \wedge \dfrac{(x-2)^3}{x} \geq 0$

	$-\infty$	0		2	∞
$(x-2)^3$	-	-	-	0	+
x	-	0	+	+	+
$\dfrac{(x-2)^3}{x}$	+		-	0	+

$D = R \setminus [0,2) = (-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$

2) Nule funkcije

$$y = \sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^3}{x} = 0 \Leftrightarrow (x-2)^3 = 0 \Leftrightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2 \qquad N(2,0)$$

3) Parnost

$y(-x) = \sqrt{\dfrac{(-x-2)^3}{-x}} = \sqrt{\dfrac{(x+2)^3}{x}}$ $\neq y(x)$ НИЈЕ ПАРНА; $\neq -y(x)$ НИЈЕ НЕПАРНА

Domen nije simetričan u odnosu na koordinatni početak $\Rightarrow$ ni parna ni neparna

4) Znak

$y \geq 0, \forall x \in D$

5) Asimptote

$$„\sqrt{\frac{-8}{0^-}}" = \sqrt{\infty} = +\infty$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{\dfrac{(x-2)^3}{x}} = \infty \Rightarrow$ prava $x=0$ je vertikalna asimptota funkcije (sa leve strane)

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \sqrt{\dfrac{(x-2)^3}{x}} = \infty \Rightarrow$ funkcija nema horizontalnu asimptotu

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{(x-2)^2(x-2)}{x}} \overset{*}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{|x-2|}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-\cancel{2}}{\cancel{x}}\sqrt{\frac{x-\cancel{2}}{\cancel{x}}} = 1$$

$$* \ \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$n_1 = \lim_{x\to\infty}[f(x) - 1x] = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}} - x\right) \overset{„\infty-\infty"}{=} \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x^3}} - 1\right) \overset{„\infty\cdot 0"}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\dfrac{(x-2)^3}{x^3}} - 1}{\dfrac{1}{x}} = „\frac{0}{0}"$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{x-2}{x}\right)^{\frac{3}{2}} - 1}{\frac{1}{x}} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{\text{Л.П.}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{x-2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\cancel{x}-(\cancel{x}-2)}{\cancel{x^2}}}{-\frac{1}{\cancel{x^2}}} = -3 \cdot \lim_{x\to\infty} \left(\cancel{\frac{x-2}{x}}^{\,1}\right)^{\frac{1}{2}} = -3$$

$\Rightarrow$ prava $y_1 = x - 3$ je kosa asimptota funkcije kada $x \to \infty$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x-2|}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \cancel{\frac{2-x}{x}}^{\,-1} \sqrt{\cancel{\frac{x-2}{x}}^{\,1}} = -1$$

$$n_2 = \lim_{x\to-\infty}[f(x)+x] = \lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}} + x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(|x|\cdot\sqrt{\left(\frac{x-2}{x}\right)^3} + x\right) =$$

$|x| = \sqrt{x^2}$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{\left(\frac{x-2}{x}\right)^3} + x\right) \overset{\text{"}\infty-\infty\text{"}}{=} \lim_{x\to-\infty} x\left(1-\sqrt{\left(\frac{x-2}{x}\right)^3}\right) \overset{\text{"}\infty\cdot 0\text{"}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\left(\frac{x-2}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{x}} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{\text{Л.П.}}{=}} 3$$

$\Rightarrow$ prava $y_2 = -x + 3$ je kosa asimptota funkcije kada $x \to -\infty$

6) Monotonost i ekstremne vrednosti

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}}} \cdot \frac{3(x-2)^2 \cdot x - (x-2)^3}{x^2} = \frac{(x-2)^2\overbrace{(3x-x+2)}^{2x+2}}{2\sqrt{\frac{(x-2)^3}{\cancel{x}}}\cdot x^{\cancel{4}\,3}} = \frac{\cancel{2}(x+1)\sqrt{(x-2)^4}}{\cancel{2}\sqrt{x^3(x-2)^3}} =$$

$$= (x+1)\sqrt{\frac{x-2}{x^3}} \geq 0$$

	$-\infty$	-1		0		2	∞
$x+1$	-	0	+			+	+
y'	-	0	+			0	+
y	↘	0	↗				↗
		min					

$y' > 0$ za $x \in (-1, 0) \cup [2, \infty)$, funkcija raste,
$y' < 0$ za $x \in (-\infty, -1)$, funkcija opada

Napomena: Kada pišemo da funkcija raste (opada) za $x \in (-1, 0) \cup [2, \infty)$, to znači da funkcija raste (opada) nad intervalom $(-1, 0)$ i da funkcija raste (opada) nad intervalom $[2, \infty)$.

Funkcija ima minimum $\sqrt{27}$ za $x = -1$ ($y(-1) = \sqrt{\frac{(-1-2)^3}{-1}} = \sqrt{27}$).

7) Tangente

$tg\alpha = \lim_{x\to 2^+} f'(x) = 3\cdot\sqrt{\frac{0}{8}} = 0$ - koeficijent pravca tangente

$\Rightarrow \alpha = 0$

$\alpha = 0$ - ugao između tangente i pozitivnog smera x-ose

8) Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke

$$y'' = \sqrt{\frac{x-2}{x^3}} + (x+1)\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{x-2}{x^3}}}\cdot\frac{x^{\cancel{3}} - (x-2)\cdot 3x^{\cancel{2}}}{x^{\cancel{6}\,4}} = \sqrt{\frac{x-2}{x^3}}\cdot\left(1+\frac{(x+1)(\overbrace{x-3x+6}^{-2x+6\;=\;\cancel{2}(3-x)})}{\frac{\cancel{2}(x-2)}{\cancel{x^3}}\cdot x^{\cancel{4}}}\right)=$$

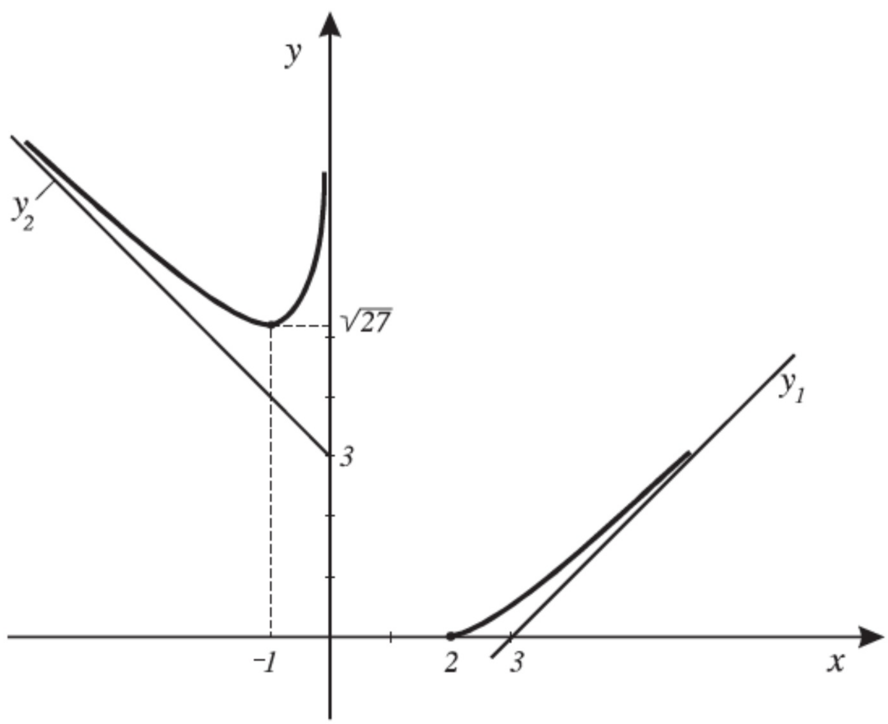
$$=\sqrt{\frac{x-2}{x^3}}\cdot\frac{x^2-2x+(x+1)(3-x)}{x(x-2)} = \sqrt{\frac{x-2}{x^3}}\cdot\frac{\cancel{x^2}-\cancel{2x}+\cancel{3x}-\cancel{x^2}+3-\cancel{x}}{x(x-2)} = \frac{3}{\underbrace{x(x-2)}_{\neq 0}}\cdot\sqrt{\frac{x-2}{x^3}}$$

	$-\infty$	0		2	∞
3	+			+	+
x	-	0		+	+
$x-2$	-			0	+
y''	+			0	+
y	∪				∪

$y'' > 0$ za $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, funkcija je konveksna
Funkcija nema prevojnih tačaka.

Napomena: Kada pišemo da je funkcija konveksna (konkavna) za $x \in (-\infty,0) \cup (2,\infty)$, to znači da je funkcija konveksna (konkavna) nad intervalom $(-\infty, 0)$ i da je funkcija konveksna (konkavna) nad intervalom $(2, \infty)$.

9) Grafik funkcije



☺