DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

Diferencijalne jednačine prvog reda

I Jednačina koja razdvaja promenljiive

To je jednačina oblika $y' = F(x, y)$ čija se desna strana može napisati kao proizvod dve neprekidne funkcije od kojih jedna zavisi samo od x, a druga samo od y, tj. $y' = f(x) \cdot g(y)$.

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx,\ g(y) \neq 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

1. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y(x^2 - 1)y' = -x(y^2 - 1)$.

$$y(x^2-1)\frac{dy}{dx} = -x(y^2-1) \bigg/ \cdot \frac{dx}{(x^2-1)(y^2-1)}$$

$$\frac{y}{y^2-1} dy = -\frac{x}{x^2-1} dx$$

$$\int \frac{y}{y^2-1} dy = -\int \frac{x}{x^2-1} dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2y}{y^2-1} dy = -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1} dx$$

$$\ln\left| y^2 - 1 \right| = -\ln\left| x^2 - 1 \right| + c$$

$$\ln\left| y^2 - 1 \right| + \ln\left| x^2 - 1 \right| = c$$

$$\ln\left| y^2 - 1 \right|\left| x^2 - 1 \right| = c$$

$$\left| y^2 - 1 \right|\left| x^2 - 1 \right| = e^c = c_1$$

Napomena:

Kada kažemo “Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine”, podrazumevamo da se traži opšte rešenje, u skladu sa definicijom opšteg rešenja nad intervalom u kojem su zadovoljeni uslovi odgovarajućih teorema u vezi egzistencije i jedinstvenosti rešenja. To, međutim, treba proveriti u svakom konkretnom primeru kada se traži partikularno rešenje (dat je početni uslov zadate diferencijalne jednačine).

2. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = \dfrac{-x - xy}{y + xy}$.

$$y' = \frac{-x(1+y)}{y(1+x)}$$

$$y' = -\frac{x}{1+x}\cdot\frac{1+y}{y}$$

$$\frac{y}{1+y}dy = -\frac{x}{1+x}dx \Rightarrow \int\frac{y}{1+y}dy = -\int\frac{x}{1+x}dx$$

$$\int\frac{y+1-1}{1+y}dy = -\int\frac{x+1-1}{1+x}dx \Rightarrow \int dy - \int\frac{dy}{y+1} = -\int dx + \int\frac{dx}{1+x}$$

$$y - \ln|y+1| = -x + \ln|1+x| + c$$

3. Odrediti partikularno rešenje diferencijalne jednačine koja zadovoljava zadati uslov: $(1+e^x)yy' = e^x,\ y(0)=1.$

$$ydy = \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$\int ydy = \int\frac{e^x}{1+e^x}dx$ Uvodimo smenu $t = 1+e^x,\ dt = e^x dx.$

$\frac{y^2}{2} = \ln|1+e^x| + \ln c \ \Rightarrow\ y = \sqrt{2\ln|1+e^x|\cdot c}$ Opšte rešenje

U opšte rešenje uvrštavamo uslov.

$$1 = 2\ln|1+1|\cdot c \ \Rightarrow\ 1 = c\ln 4 \ \Rightarrow\ c = \frac{1}{\ln 4}$$

$y = \sqrt{2\ln|1+e^x|\cdot\frac{1}{\ln 4}}$ Partikularno rešenje

II Homogena jednačina

To je jednačina koja se može svesti na oblik $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, gde je f neprekidna funkcija. Smenom $u = \frac{y}{x}$, gde je u funkcija od x, homogena jednačina svodi se na jednačinu koja razdvaja promenljive.

4. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $(x-y)ydx - x^2dy = 0$.

$$x^2dy = (xy-y^2)dx \Rightarrow dy = \frac{xy-y^2}{x^2}dx$$

$$dy = \left(\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)dx \Leftrightarrow y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Smena: $\dfrac{y}{x}=u, u=u(x)\Rightarrow y=u\cdot x\Rightarrow y'=u'\cdot x+u$

$u'x+u=u-u^2\Rightarrow \dfrac{1}{u^2}\cdot\dfrac{du}{dx}=-\dfrac{1}{x}\Rightarrow \dfrac{du}{u^2}=-\dfrac{dx}{x}\Rightarrow \int\dfrac{du}{u^2}=-\int\dfrac{dx}{x}$

$-\dfrac{1}{u}=-\ln|x|+c=-\ln|x\cdot c_1|,\ c=-\ln c_1$

$\dfrac{x}{y}=\ln|x\cdot c_1| \Leftrightarrow y=\dfrac{x}{\ln|x\cdot c_1|}$ Opšte rešenje

III Jednačine koje se svode na homogenu

Diferencijalna jednačina oblika $y'=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ gde su $a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2\in R$, a f neprekidna funkcija, može se svesti na diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive ili na homogenu.

a) $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$. U tom slučaju smenom $a_1x+b_1y+c_1=t$ ili $a_2x+b_2y+c_2=t$ data diferencijalna jednačina se svodi na diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive.

b) $D\neq 0$. Uvodimo smenu $x=X+\alpha$, $y=Y+\beta$, gde su α i β jednoznačno određeni i određuju se iz sistema

$$a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0$$
$$a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0.$$

Tada je $Y'=f\left(\dfrac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right)=f\left(\dfrac{a_1+b_1\frac{Y}{X}}{a_2+b_2\frac{Y}{X}}\right)=g\left(\dfrac{Y}{X}\right)$, $X\neq 0$, a to je homogena diferencijalna jednačina.

5. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $x-y-1+(y-x+2)y'=0 \Rightarrow y'=\dfrac{x-y-1}{x-y-2}$.

Kako je $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=0$ uvodimo smenu $x-y-2=t$, $t=t(x)$, $1-y'=t' \Rightarrow y'=1-t'$.

$y'=\dfrac{x-y-1}{x-y-2}$ postaje $1-t'=\dfrac{t+1}{t} \Rightarrow t'=1-\dfrac{t+1}{t}$.

$t'=\dfrac{t-t-1}{t} \Rightarrow t'=-\dfrac{1}{t} \Rightarrow \dfrac{dt}{dx}=-\dfrac{1}{t} \Rightarrow tdt=-dx \Big/ \int$

$$\frac{t^2}{2} = -x + c \;\Rightarrow\; t^2 = 2(-x+c)$$

$(x-y-2)^2 = 2(-x+c)$ Opšte rešenje

6. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = \dfrac{x+y-5}{x-y+1}$.

Kako je $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0$, uvodimo smenu $x = X + \alpha$, $y = Y + \beta$ i $y' = Y'$.

$$Y' = \frac{X + \alpha + Y + \beta - 5}{X + \alpha - Y - \beta + 1}$$

$$\alpha + \beta - 5 = 0$$

$$\alpha - \beta + 1 = 0$$

Rešavanjem sistema dobija se $\alpha = 2$ i $\beta = 3$.

Prava smena je: $x = X + 2$, $y = Y + 3$ i njome se data diferencijalna jednačina svodi na homogenu.

$$Y' = \frac{X+Y}{X-Y} \Rightarrow Y' = \frac{1+\frac{Y}{X}}{1-\frac{Y}{X}}$$ (homogena diferencijalna jednačina)

Smena: $\dfrac{Y}{X} = u,\; u = u(X) \;\Rightarrow\; Y = uX \;\Rightarrow\; Y' = u'X + u$

$$u'X + u = \frac{1+u}{1-u} \;\Rightarrow\; X\frac{du}{dX} = \frac{1+u}{1-u} - u$$

$$X\frac{du}{dX} = \frac{1+u-u+u^2}{1-u} \;\Rightarrow\; \frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{1}{X}dX$$ (d. j. koja razdvaja promenljive)

$$\int \frac{1-u}{1+u^2}du = \int \frac{1}{X}dX \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{1+u^2}du - \frac{1}{2}\int \frac{2u}{1+u^2}du = \ln|X| + \ln c$$

$$arctgu - \frac{1}{2}\ln|1+u^2| = \ln|X| + \ln c$$

$$arctgu = \ln c|X|\sqrt{1+u^2}$$

$$e^{arctg\frac{y-3}{x-2}} = c|x-2|\sqrt{1+\left(\frac{y-3}{x-2}\right)^2}$$

IV Linearna jednačina

To je jednačina koja se može svesti na oblik $y' + f(x)y = g(x)$, gde su f i g neprekidne funkcije.

a) Rešenje jednačine dato je obrascem $y = e^{-\int f(x)dx}\left[c - \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx \right]$.

b) Rešenje je oblika $y = uv$, gde su u i v funkcije od x. Iz $y' = u'v + uv'$ sledi da je

$$u'v + uv' + f(x)uv = g(x)$$

$$vu' + (v' + f(x)v)u = g(x).$$

Nepoznatu funkciju v tražimo iz uslova $v' + f(x)v = 0$.

$$\frac{dv}{v} = -f(x)dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int f(x)dx$$

Pri traženju neodređenog integrala ovde se ne uzima u obzir konstanta, jer se ona u daljem traženju rešenja skrati.

$$v\frac{du}{dx} = g(x) \Rightarrow du = \frac{g(x)}{v}dx \Rightarrow \int du = \int \frac{g(x)}{v}dx$$

7. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$, $x \neq -1$.

Uvodimo smenu $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$, $u = u(x), v = v(x)$.

$$u'v + uv' - \frac{2}{x+1}uv = (x+1)^3 \Rightarrow vu' + (v' - \frac{2}{x+1}v)u = (x+1)^3$$

$$v' - \frac{2}{x+1}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{2}{x+1}dx \Rightarrow \ln|v| = 2\ln|x+1| \Rightarrow v = (x+1)^2$$

$$(x+1)^2 \cdot u' = (x+1)^3 \Rightarrow du = (x+1)dx \Rightarrow u = \frac{1}{2}x^2 + x + c$$

$$y = u \cdot v = (\frac{1}{2}x^2 + x + c)(x+1)^2 \qquad \text{Opšte rešenje}$$

V Bernulijeva jednačina

To je jednačina oblika $y' + f(x)y = g(x) \cdot y^{\alpha}$, gde je $\alpha \in R$, a f i g su neprekidne funkcije.

Za $\alpha = 0$ ili $\alpha = 1$ ona je linearna (za $\alpha = 1$ ona je i jednačina koja razdvaja promenljive jer je u tom slučaju $y' = y(g(x) - f(x))$). Razmatraćemo slučajeve kada je $\alpha \neq 0$ i $\alpha \neq 1$.

$$y' + f(x)y = g(x) \cdot y^{\alpha} \quad / : y^{\alpha}$$

$$\frac{y'}{y^\alpha} + f(x)\frac{y}{y^\alpha} = g(x)$$

$$y' \cdot y^{-\alpha} + f(x)y^{1-\alpha} = g(x)$$

Uvodimo smenu $z(x) = y^{1-\alpha}$, $z'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha} \cdot y'$, $\frac{z'}{1-\alpha} = y' y^{-\alpha}$ pa jednačina postaje

$$\frac{z'}{1-\alpha} + f(x)z = g(x) \Big/ \cdot (1-\alpha)$$

$$z'(x) + (1-\alpha)\cdot f(x)\cdot z(x) = (1-\alpha)\cdot g(x) \text{ (linearna d. j.).}$$

8. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $xy' + y = y^2 \ln x$.

$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2$

$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}\frac{1}{y} = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow y' y^{-2} + \frac{1}{x}y^{-1} = \frac{\ln x}{x}$

Smena: $z = y^{-1}$, $z' = -y^{-2}y'$, $z = z(x)$

$-z' + \frac{1}{x}z = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow z' - \frac{1}{x}z = -\frac{\ln x}{x}$ linearna d. j.

Smena: $z(x) = u(x)v(x)$, $z' = u'v + uv'$

$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = -\frac{\ln x}{x}$

$u'v + u(v' - \frac{1}{x}v) = -\frac{\ln x}{x}$

Biramo v tako da $v' - \frac{1}{x}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = \ln|x| \Rightarrow v = x$.

$u'x = -\frac{\ln x}{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow du = -\frac{\ln x}{x^2}dx \Big/ \int$

$$u = -\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \begin{pmatrix} u_1 = \ln x & du_1 = \frac{1}{x}dx \\ dv_1 = -\frac{1}{x^2}dx & v_1 = \frac{1}{x} \end{pmatrix} = \frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x^2}dx = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + c$$

$z = uv = (\frac{1}{x}(\ln x + 1) + c)x \Rightarrow \frac{1}{y} = \ln x + 1 + cx$

$y = \frac{1}{\ln x + 1 + cx}$ Opšte rešenje

9. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $(2x^2 y\ln y - x)y' = y$.

$$y' = \frac{y}{2x^2 y\ln y - x} \Rightarrow x' = \frac{1}{y'} = \frac{2x^2 y\ln y - x}{y}$$

$x' + \frac{1}{y}x - 2\ln y x^2 = 0$ (Bernulijeva diferencijalna jednačina za $\alpha = 2$).

Uvodimo smenu $z = x^{1-\alpha} = \frac{1}{x}$, $z' = -\frac{x'}{x^2}$

$-\frac{x'}{x^2} - \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{x} + 2\ln y = 0 \Rightarrow z' - \frac{1}{y}z + 2\ln y = 0$ (linearna diferencijalna jednačina)

Uvodimo smenu $z = u\cdot v$, $z' = u'\cdot v + u\cdot v'$.

$$v\cdot u' + u\cdot v' - \frac{1}{y}u\cdot v = -2\ln y \Rightarrow v\cdot u' + (v' - \frac{1}{y}v)\cdot u = -2\ln y$$

$$v' - \frac{1}{y}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|v| = \ln|y| \Rightarrow v = y$$

$$yu' = -2\ln y \Rightarrow du = -2\frac{\ln y}{y}dy \Rightarrow u = -\ln^2 y + c$$

$$z = u\cdot v = c\cdot y - y\ln^2 y \Rightarrow x = \frac{1}{z} = \frac{1}{y(c - \ln^2 y)}.$$

☺