Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka
Elektroenergetski softverski inženjering / Primenjeno softvesrko inženjerstvo
predmet: **Matematička analiza**
PRVI KOLOKVIJUM (Probni) Predispitne obaveze

Sve odgovore obrazložiti.

1. U metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$, gde je d Euklidska metrika, data je lopta $L(0,2)$ i tačka $b = 1.5 \in L(0,2)$. Naći r tako da je lopta $L(b,r)$ sadržana u lopti $L(0,2)$.

   Rešenje: Lopta u $\mathbb{R}$ je otvoren interval, $L(0,2)$ je lopta sa centrom u $a = 0$ poluprečnika $s = 2$, pa je $L(0,2) = (-2,2)$. Rastojanje izmedju a i b je 1.5 ($d(a,b) = |b-a| = |1.5-0| = 1.5$), pa je r bilo koji pozitivan broj manji ili jednak $s - d(a,b) = 2 - 1,5 = 0.5$. Dakle, r može biti bilo koji broj iz intervala $(0, 0.5]$.

   Moguće vrednosti za r se mogu lako videti ako se data lopta i tačka b predstave grafički na realnoj osi (i to se priznaje kao tačan odgovor).

2. Da li je tačka 0 tačka nagomilavanja skupa $[-1,0) \cup \{1\}$?

   Rešenje: Jeste, jer u svakoj okolini tačke 0 (konkretno, levo od tačke 0) ima tačaka iz datog skupa.

3. Dat je niz $a_n = \dfrac{\cos n\pi}{n^2}$.

   Odrediti $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

   Rešenje: Funkcija $\cos x$ je ograničena, pa je $a = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n\pi}{n^2} = 0$.

   Da li je dati niz Košijev u $\mathbb{R}$?

   Rešenje: Niz je realan i konvergentan, pa je Košijev.

   Da li je Košijev u $\mathbb{Q}$?

   Rešenje: Elementi niza su i racionalni brojevi (jer je $\cos n\pi = 1$ za n parno, $\cos n\pi = -1$ za n neparno, i n^2 je prirodan broj), rastojanje izmedju dva racionalna broja u metričkom prostoru $\mathbb{Q}$ je isto kao i njihovo rastojanje u $\mathbb{R}$, pa je niz Košijev i u $\mathbb{Q}$.

4. Data je funkcija $f(x) = \begin{cases} 1-x & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$.

   Odrediti $A = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

   Rešenje: $A = 1$.

   Odrediti δ tako da je $|f(x) - A| < 10^{-2}$ za $|x| < \delta$, $x \neq 0$.

   Rešenje: $|f(x) - A| = |(1-x) - 1| = |-x| = |x| < 10^{-2}$ za $\delta = 10^{-2}$.

5. Odrediti vrstu prekida funkcije $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ u tački 0.

   Rešenje: $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$, pa funkcija ima prekid druge vrste u tački 0.

6. Data je funkcija $f(x) = \ln \frac{e^x + (2+\sin x)^2}{x^4+1}$. Da li je data funkcija ograničena na $[-1,1]$?

   Rešenje: Funkcija f je kompozicija elementarnih funkcija pa je neprekidna na svom domenu definisanosti (na skupu $\mathbb{R}$). Sledi da je f neprekidna i na $[-1,1]$. Neprekidna funkcija na zatvorenom intervalu je ograničena, pa je i f ograničena na $[-1,1]$.

7. Da li su funkcije $f(x) = (x-2)\ln x$ i $g(x) = (x^2 - 2x)\ln x$ beskonačno male veličine kad $x \to 2$? Ako jesu, uporediti brzinu kojom one teže nuli.

   Rešenje: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} g(x) = 0$, pa su f i g beskonačno male veličine kad $x \to 2$.

   $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$, pa su f i g beskonačo male veičine istog reda kad $x \to 2$.

Elektroenergetski softverski inženjering/Primenjeno softvesrko inženjerstvo
predmet: **Matematička analiza**
Probni prvi kolokvijum - Ispitni zadaci

1. a) U zavisnosti od realnog parametra a odrediti graničnu vrednost niza $a_n = \dfrac{2^n + a^n}{2^{n+1} - 5a^n}$.

   b) Odrediti konstante A i B tako da funkcija $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2020x}{x} & , x < 0 \\ Ax + B & , 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{\ln x^2}{x-1} & , x > 1. \end{cases}$

   bude neprekidna na $\mathbb{R}$.

   c) Izračunati

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{8x} - 2}{\sqrt{x^2+3} - 2}$$

.

Napomena: Zadatke raditi bez korišćenja Lopitalovog pravila.

Rešenje.

1. a) Koristimo $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, za $-1 < q < 1$. Razlikujemo sledeća četiri slučaja:

   - $|a| > 2$, odnosno $a \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n + a^n}{2^{n+1} - 5a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{a}\right)^n + 1}{2\left(\frac{2}{a}\right)^n - 5} = -\frac{1}{5}.$$

   - $|a| < 2$, odnosno $a \in (-2, 2)$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n + a^n}{2^{n+1} - 5a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \left(\frac{a}{2}\right)^n}{2 - 5\left(\frac{a}{2}\right)^n} = \frac{1}{2}.$$

   - $a = -2$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n + (-2)^n}{2^{n+1} - 5(-2)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + (-1)^n}{2 - 5\cdot(-1)^n} \quad \text{- granična vrednost ne postoji,}$$

     zato što je

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2 - 5\cdot(-1)^n} = \begin{cases} \dfrac{1 + (-1)}{2 - 5\cdot(-1)}, & n = 2k-1 \\ \dfrac{1+1}{2 - 5\cdot 1}, & n = 2k \end{cases} = \begin{cases} 0, & n = 2k-1 \\ -\dfrac{2}{3}, & n = 2k \end{cases}.$$

   - $a = 2$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 2^n}{2^{n+1} - 5\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2^n}{-3\cdot 2^n} = -\frac{2}{3}.$$

   b) Kako je $f(x)$ neprekidna na intervalima $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ i $(1, +\infty)$ kao kompozicija neprekidnih funkcija, odredićemo A i B iz uslova $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ i $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

   - Neprekidnost funkcije $f(x)$ u tački $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin 2020x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin 2020x}{2020x} \cdot 2020 = 2020.$$

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} Ax + B = B.$$

     Sledi da je $B = 2020$.

   - Neprekidnost funkcije $f(x)$ u tački $x = 1$:

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (Ax + B) = A + B.$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x^2}{x-1} \overset{t=x-1}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{2\ln(t+1)}{t} = 2.$$

     Kako je $B = 2020$, iz $A + B = 2$ sledi da je $A = -2017$.

c) Vidimo da ako u funkciju, čija se granična vrednost traži, zamenimo $x = 1$ dobijamo neodređeni izraz $\frac{0}{0}$. Tako da ćemo koristiti dozvoljene transformacije

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{8x}-2}{\sqrt{x^2+3}-2} = \lim_{x\to 1}\Big(\frac{\sqrt[3]{8x}-2}{\sqrt{x^2+3}-2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2}\cdot\frac{(\sqrt[3]{8x})^2+2\cdot\sqrt[3]{8x}+2^2}{(\sqrt[3]{8x})^2+2\cdot\sqrt[3]{8x}+2^2}\Big)$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{((\sqrt[3]{8x})^3-2^3)(\sqrt{x^2+3}+2)}{((\sqrt{x^2+3})^2-2^2)((\sqrt[3]{8x})^2+2\cdot\sqrt[3]{8x}+2^2)} = \lim_{x\to 1}\frac{(8x-8)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x^2-1)((\sqrt[3]{8x})^2+2\cdot\sqrt[3]{8x}+2^2)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{8\cdot(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x+1)((\sqrt[3]{8x})^2+2\cdot\sqrt[3]{8x}+2^2)} = \frac{8\cdot 4}{2\cdot(2^2+2\cdot 2+2^2)} = \frac{32}{24} = \frac{4}{3}.$$