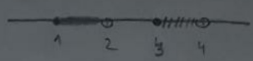
11. 5. 2019.

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(L(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset)$

1. a) $\overline{A} = [1,2] \cup [3,4]$



b) $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)\cancel{(\forall n \in \mathbb{N})}(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon)$

c) Сваки ограничен низ има бар једну тачку нагомилавања

d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt[3]{x^3+x+25}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+8}+3} - \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^3+x+25}-3}{x-1} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x^3+x+25)^2} + 3\sqrt[3]{x^3+x+25}+9}{\sqrt[3]{(x^3+x+25)^2} + 3\sqrt[3]{x^3+x+25}+9} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{x+8-9}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} - \lim\limits_{x\to 1} \frac{\overset{x^3+x-2}{x^3+x+25-27}}{(x-1)(\sqrt[3]{(x^3+x+25)^2}+6\sqrt[3]{x^3+x+25}+9)} =$ x^2+x+2

$= \frac{1}{6} \lim\limits_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{x-1}} - \frac{1}{27} \lim\limits_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+2)}{\cancel{x-1}} = \frac{1}{6}^{/9} - \frac{4}{27}^{/2} = \frac{9-8}{54} = \frac{1}{54}$ ✓

e). $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(d(x_0,x) < \delta \Rightarrow d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon)$ ✓

2. a) $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(\Delta x + 3) - f(3)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x + \cancel{3} - \cancel{3}| - 0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(\Delta x + 3) - f(3)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x + \cancel{3} - \cancel{3}| - 0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$

b) Нека је $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна над затвореним интервалом $[a,b]$ и
c) диференцијабилна над отвореним интервалом (a,b), тада ће функција имати бар
d) једну тачку $\xi \in (a,b)$ за коју важи $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$ ✓

e) Геометријска интерпретација Лагранжове теореме јесте да је постоји тачка $\xi \in (a,b)$ тако да је тангента у тачки $C(\xi, f(\xi))$ паралелна са правом која садржи тачке $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ ✓

$D\Delta x + \alpha \Delta x$

c) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^3 - x^3 = \cancel{x^3} + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - \cancel{x^3} = 3x^2\Delta x + \Delta x(3x\Delta x + (\Delta x)^2)$

t:

$D = 3x^2$

w: $\alpha = 3x\Delta x + (\Delta x)^2$ ✓

$\alpha \to 0, \Delta x \to 0$

e) $A(-1,-2)$ $B(1,2)$ $\quad$ J-J

$f'(x) = 2x+2 = 2(x+1)$

$f'(-1) = 0 \qquad f'(1) = 4$

t_A: $y+2=0$ $\quad \boxed{y=-2}$

t_B: $y-2 = 4(x-1)$

$y = 4x-2$

n_A: $\boxed{x=-1}$

n_B: $y-2 = -\frac{1}{4}(x-1)$

$y = \frac{-x}{4} + \frac{1}{4} + \frac{8}{4} \qquad \boxed{y = \frac{-x}{4} + \frac{9}{4}}$

S. 2 · 6
12 · 9
102

3. a) $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2z^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xz^3y \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2z^2 \qquad A(1,2,3)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2xz^3 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6xy^2z \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2z^3y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 3y^2z^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 6xyz^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = 54 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(A) = 72 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = 108 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(A) = 108 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(A) = 108$

$d^2 f(A) = 54dy^2 + 72dz^2 + 216dxdy + 216dxdz + 216dydz$ $\quad$ OK

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x, 4) - f(1,4)}{\Delta x}$

- Геометријска интерпретација овог парцијалног извода јесте коефицијент правца тангенте у тачки $A(1,4)$ криве, добијене пресеком равни $y=4$ и површи $z=f(x,y)$

c) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x} f\left(\frac{x^2}{y^3}\right) + e^{2x} \cdot f'\left(\frac{x^2}{y^3}\right) \cdot \frac{2x}{y^3}$

d) $F(x,y,\lambda) = x^2 + y + \lambda(5x - y + 10)$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 5\lambda \qquad 2x + 5\lambda = 0$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 - \lambda \qquad 1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 5x - y + 10 \qquad 5x - y + 10 = 0$

$2x + 5 = 0 \qquad 5 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) - y + 10 = 0$

$x = -\frac{5}{2} \qquad y = -\frac{25}{2} + \frac{20}{2}$

$y = -\frac{5}{2}$

тачка $A\left(-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ јесте стационарна тачка

MOŽE I OVAKO: $y = 5x + 10$

$\Rightarrow z = x^2 + 5x - 10$

$z' = 2x + 5 \qquad z' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$

$y = -\frac{25}{2} + 10 = -\frac{5}{2}$

$A\left(-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

(PREKO FAP) LAKŠE TJ. KRAĆE

2. јун 2020.

1.

a) За тачку $a \in \mathbb{R}$ кажемо да је адхерентна тачка скупа A акко $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(L(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset)$

b) $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow e(x,y) < \varepsilon)$

c) Ако постоји $M \in X$ тако да је $a_n < M$ за свако $n \in \mathbb{N}$, тада кажемо да је низ $\{a_n\}$ ограничен са горње стране

d) $(\forall K \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n > K)$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+1) = 1$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^-}(3\cos x + A) = 3+A \quad f(0) = 1$

$1 = 3 + A \Rightarrow \boxed{A=-2}$ Функција је непрекидна за $A=-2$

2. a) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{5(x_0+\Delta x) + \cancel{3} - 5x_0 - \cancel{3}}{\Delta x} =$ $\qquad f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{5x} + 5\cancel{\Delta x} - \cancel{5x}}{\cancel{\Delta x}} = 5$

b) Геометријска интерпретација првог извода функције је коефицијент правца праве која је тангента на график функције у тачки где се тражи извод.

c) Нека је $y = f(u)$ и $u = g(x)$. Ако $g(x)$ има извод у тачки x и $f(u)$ има извод у тачки u, важи да је

$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(x) \cdot g'(x)$

d) $\Delta y = f(\Delta x + x) - f(x) = 5(\Delta x + x) - 5x = 5\Delta x + \cancel{5x} - \cancel{5x} = \underbrace{5}_{D}\Delta x + \underbrace{0}_{\alpha}\cdot \Delta x$

$\stackrel{?}{=} D\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x, \quad \alpha \to 0, \quad \Delta x \to 0$

2) $A(2,-1)$ $B(6,-9)$ $\qquad y-y_0 = f'(x_0)(x-x_0)$

$$f'(x) = \frac{(3-2x)(x-4)-(3x-x^2)}{(x-4)^2} = \frac{\cancel{3x}-12-2x^2+8x-\cancel{3x}+x^2}{(x-4)^2} = \frac{-x^2+8x-12}{(x-4)^2}$$

$$f'(2) = \frac{-4+16-12}{4} = 0 \qquad f'(6) = \frac{-36+48-12}{4} = 0$$

$t_A: y+1 = 0(x-2)$ $\qquad t_B: \boxed{y=-9}$

$\boxed{y=-1}$

$n_A: \boxed{x=2}$ $\qquad n_B: \boxed{x=6}$

3. a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2-9y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -9x+3y^2 \qquad \cancel{\frac{\partial f}{\partial z} = 0}$

u ovom zadatku je u pitanju funkcija dva promenljive, a ne tri, ja sam pogrešno otkucala f(z,y,z)!!!

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y \qquad \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -9 \qquad \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0} \qquad \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = 18 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = 18$

$$d^2f(A) = 18\,dx^2 + 18\,dy^2 - 18\,dx\,dy = 18(dx^2 - dx\,dy + dy^2)$$

b) $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial w}dw$

c) Када за свако $X \in L(A,\varepsilon) \setminus \{A\}$ важи да је $f(X) < f(A)$

d) $\frac{\partial u}{\partial y} = \cancel{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = f'\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}$

e) $\frac{\partial F}{\partial x} = 2^{\frac{x}{z}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{z} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2^{\frac{y}{z}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{z} \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 2^{\frac{y}{z}} \ln 2 \cdot \left(-\frac{y}{z^2}\right) + 2^{\frac{x}{z}} \ln 2 \left(-\frac{x}{z^2}\right)$

$\frac{\partial F}{\partial x}(P) = 2^2 \cdot \ln 2 = 4\ln 2 \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(P) = 2^2 \ln 2 = 4\ln 2 \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(P) = 2^2 \ln 2(-2) + 2^2 \ln 2 \cdot (-2) = -8\ln 2 - 8\ln 2 = -16\ln 2$

$t: 4\ln 2(x-2) + 4\ln 2(y-2) - 16\ln 2(z-1) = 0$

$n: \frac{x-2}{4\ln 2} = \frac{y-2}{4\ln 2} = -\frac{z-1}{16\ln 2}$

OK