-Припрема за колоквијум-

1. Колико има речи дужине n над азбуком $\{0, 1, 2\}$ које садрже паран број нула?
2. Доказати да је у сваком скупу број подскупова са непарним бројем елемената једнак броју подскупова са парним бројем елемената.
3. Из скупа $\{1, 2, \ldots, 30\}$ се насумично извлачи 12 бројева. Доказати да међу извученим бројевима увек постоје два броја чији је највећи заједнички делилац већи од 1.
4. У групи од шест особа сваке две се или познају или не познају. Доказати да се међу њима увек могу наћи бар 3 особе тако да се све три међусобно познају или међусобно не познају.
5. Колико има шестоцифрених бројева у којима парне и непарне цифре долазе наизменично?
6. Колико има седмоцифрених бројева који не садрже цифре 0,4,8, дељиви су са 4 и сваке две суседне цифре су међусобно различите?
7. Три студента деле собу. Они на располагању имају 4 шољице, 5 тањирића и 6 кашичица. На колико начина они могу да попију чај, ако сваки треба да користи једну шољицу, један тањирић и једну кашичицу?
8. На колико начина се на шаховску таблу може поређати 8 независних топова (таквих да се никоја два не туку) ако
   a) топове не разликујемо
   b) су топови нумерисани?
9. Доказати да важи $\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j}\binom{j}{k} = \binom{n}{k} 2^{n-k}$, за природне бројеве $n \geq k$.
10. Колико има пермутација цифара $0, 1, \ldots, 9$ у којима је прва цифра мања од 8, а последња већа од 1?
11. У кантини кафа кошта 1 динар, а кисела вода и сок по 2 динара. На колико начина се у кантини може потрошити стипендија од n динара ако је битан редослед којим се наручују пића?

ПРИПРЕМА ЗА КОЛОКВИЈУМ 1

1. $\{0,1,2\}$, паран број нула $\Rightarrow f_n$

$\underbrace{\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2}\_\ \dots\ \_}_{n} \Rightarrow f_{n-1}$ $\quad \underbrace{0\_\ \dots\ \_}_{n} \Rightarrow 3^n - f_{n-1}$

$$2f_{n-1} + 3^n - f_{n-1} = f_n$$

$$f_n - f_{n-1} - 3^n = 0$$

homogena: $f_n - f_{n-1} = 0 \Rightarrow t-1=0 \quad t=1$

$$f_n^{(h)} = A \cdot 1^n = A$$

partikularno: $f_n^{(p)} = n^0 \cdot B \cdot 3^n = B \cdot 3^n$

$$B \cdot 3^n - B \cdot 3^{n-1} - 3^n = 0$$

$$3B - B - 1 = 0 \Rightarrow B = \frac{1}{2} \Rightarrow f_n^{(p)} = \frac{1}{2} \cdot 3^n$$

opšte: $f_n = A + \frac{1}{2} \cdot 3^n$

$f_1 = 2 = A + \frac{3}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \Rightarrow f_n = \frac{1}{2}(1 + 3^n)$

2. S je скуп

$\mathcal{A} = \{A \subseteq S \mid 2 \mid |A|\}$ $\quad \mathcal{B} = \{B \subseteq S \mid 2 \nmid |A|\}$

$f: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ treba da je bijekcija

$$f(A) = \begin{cases} A \cup \{x\}, & x \notin A \\ A \setminus \{x\}, & x \in A \end{cases}$$

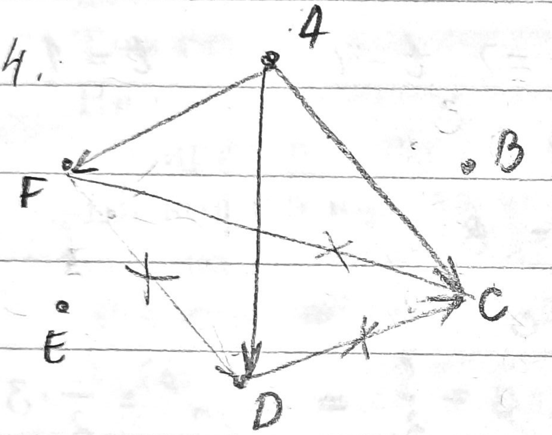
$\Rightarrow f$ je bijekcija $\Rightarrow |\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$

3. $\{1, 2, \dots, 30\} = \{1\} \cup \{2, 4, 6, 8, \dots 30\} \cup \{3, 9, 15, 21, 27\} \cup \{5, 25\} \cup \{7\} \cup \{11\} \cup \{13\} \cup \{17\} \cup \{19\} \cup \{23\} \cup \{29\}$

11 подскупова, 12 елемената се бира $\Rightarrow$ 2 ће сигурно бити из истог подскупа

4.



Ако A познаје F, D и C, потребно је да F не познаје C и D и D не познаје C да би тврђење било оповргнуто за особе које се познају. Међутим, ако се то уради, добијају се три особе које се не познају, што испуњава услов задатка, односно тврђење је тачно

5. _ _ _ _ _ _

прва цифра:

- парна: $4 \cdot 5^5$ - непарна: 5^6 $\Rightarrow 9 \cdot 5^5$

$10 \cdot 6^5 \Leftarrow 6 \leftarrow 6 \leftarrow 6 \leftarrow 6 \leftarrow 6 \leftarrow 10$

6. 7 цифара: _ _ _ _ _ _ _

048 → 7 опција

дјељиви са 4: ~~00~~, ~~04~~, ~~08~~, 12, 16, ~~20~~, ~~24~~, ~~28~~, 32, 36, ~~4.~~, 52, 56, ~~60~~, ~~64~~, ~~68~~, 72, 76, ~~8.~~, 92, 96 → 10 опција

7. $\binom{4}{3}\cdot 3!\cdot\binom{5}{3}\cdot 3!\cdot\binom{6}{3}\cdot 3!$

8. а) $8!$

↳ редови једнозначно одређени јер мора у сваком, а за колоне има $8\cdot 7\cdot 6\cdot\ldots\cdot 1$ опција

б) $8!\cdot 8!$ ↳ топови

↳ места

9. $$\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{k}=\sum_{j=k}^{n}\frac{n!}{(n-j)!\,\cancel{j!}}\cdot\frac{\cancel{j!}}{k!\,(j-k)!}=$$

$$=\sum_{j=k}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-j)!\,(j-k)!}=\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}=\binom{n}{k}2^{n-k}$$

10. S_1 : 1. цифра ≥ 8 $\Rightarrow 2\cdot 9!=N(S_1)$ $\Rightarrow N(S_1S_2)=4\cdot 8!$

S_2 : 10. цифра ≤ 1 $\Rightarrow 2\cdot 9!=N(S_2)$

$\Rightarrow N(S_1'S_2')=10!-4\cdot 9!+4\cdot 8!$

11. $\underbrace{-\ -\ \ldots\ -}_{n}\Rightarrow f_n$

кафа   кисела вода и сок

$1.1\Rightarrow f_{n-1}$ $1.2\Rightarrow f_{n-2}$

$$f_n=f_{n-1}+2f_{n-2}$$

$$t^2-t-2=(t-2)(t+1)=0$$

$$t_1=-1\quad t_2=2$$

$$f_n=A(-1)^n+B\cdot 2^n$$

$$\left.\begin{aligned}f_1&=1=-A+2B\\ f_2&=3=A+4B\end{aligned}\right\}\Rightarrow 6B=4\Rightarrow B=\frac{2}{3}\quad A=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f_n=\frac{1}{3}\left((-1)^n+2^{n+1}\right)$$