DISKRETNA MATEMATIKA

- PREDAVANJE -

Jovanka Pantović

Primer0 (samo IN i SIIT)

Primer

Odrediti $\binom{-4}{n}$ *i otvorenu formu generatorne funkcije*

$$A(z) = \frac{1}{(1-z)^4}.$$

$$\begin{aligned}
\binom{-4}{n} &= \frac{\overbrace{-4}^{1.} \cdot \overbrace{(-5)}^{2.} \cdot \ldots \cdot \overbrace{(-4-n+1)}^{n.}}{n!} = \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (n+3)}{n!} \\
&= (-1)^n \cdot \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3!} = (-1)^n \binom{n+3}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-z)^4} &= (1-z)^{-4} = \sum_{n \geq 0} \binom{-4}{n} (-z)^n \\
&= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \binom{n+3}{3} (-1)^n z^n = \sum_{n \geq 0} \binom{n+3}{3} z^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} z^n
\end{aligned}$$

Primer1 (samo IN i SIIT)

Primer

Odrediti zatvorenu formu generatorne funkcije niza

$$1, 4, 9, 16, 25, ..., (n+1)^2, ...$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0}(n+1)^2 z^n &= \left(\sum_{n\geq 0}(n+1)z^{n+1}\right)' = \left(z\cdot\sum_{n\geq 0}(n+1)z^n\right)' = \left(z\cdot\left(\sum_{n\geq 0}z^{n+1}\right)'\right)' \\
&= \left(z\cdot\left(z\cdot\sum_{n\geq 0}z^n\right)'\right)' = \left(z\cdot\left(\frac{z}{1-z}\right)'\right)' = \left(z\cdot\frac{1}{(1-z)^2}\right)' \\
&= \frac{(1-z)^2+2z(1-z)}{(1-z)^4} = \frac{1-z^2}{(1-z)^4} = \frac{1+z}{(1-z)^3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n\geq 0}(n+1)^2 z^n = \frac{1+z}{(1-z)^3}}$$

Primer2 (samo IN i SIIT)

Primer

Odrediti zatvorenu formu generatorne funkcije niza

$$1^2, 1^2+2^2, 1^2+2^2+3^2, \ldots, 1^2+2^2+\ldots+n^2, \ldots$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0}(1^2+2^2+\ldots+(n+1)^2)z^n &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{n}\underbrace{(j+1)^2}_{a_j}\cdot\underbrace{1}_{b_{n-j}}\right)z^n \\
&= \sum_{n\geq 0}\underbrace{(n+1)^2}_{a_n}z^n\cdot\sum_{n\geq 0}\underbrace{1}_{b_n}\cdot z^n \\
&= \frac{1+z}{(1-z)^3}\cdot\frac{1}{1-z} = \frac{1+z}{(1-z)^4}
\end{aligned}$$

Primer3 (samo IN i SIIT)

Primer

Odrediti zatvorenu formu $f(n)$ za opšti član niza $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, ako je

$$f_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + (n+1)^2.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0}(1^2+2^2+\ldots+(n+1)^2)z^n &= \frac{1+z}{(1-z)^4} = \frac{1}{(1-z)^4} + \frac{z}{(1-z)^4} \\
&= \sum_{n\geq 0}\binom{n+3}{3}z^n + \sum_{n\geq 1}\binom{n+2}{3}z^n \\
&= 1 + \sum_{n\geq 1}\left(\binom{n+3}{3}+\binom{n+2}{3}\right)z^n \\
&= 1 + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}+\frac{(n+2)(n+1)n}{6}\right)z^n \\
&= 1 + \sum_{n\geq 1}\frac{(n+2)(n+1)(2n+3)}{6}z^n = \sum_{n\geq 0}\frac{(n+2)(n+1)(2n+3)}{6}z^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Primer3 (samo IN i SIIT)

Primer

Odrediti zatvorenu formu generatorne funkcije Fibonačijevog niza

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Primetimo da je $f_n z^n = f_{n-1} z^n + f_{n-2} z^n$, za $n \geq 2$. Neka je $F(z) = \sum\limits_{n \geq 0} f_n z^n$.

$$\begin{aligned}
& \sum_{n\geq 2} f_n z^n = \sum_{n\geq 2} f_{n-1} z^n + \sum_{n\geq 2} f_{n-2} z^n \\
\Leftrightarrow\quad & \sum_{n\geq 0} f_n z^n - f_0 - f_1 z = z \sum_{n\geq 2} f_{n-1} z^{n-1} + z^2 \sum_{n\geq 2} f_{n-2} z^{n-2} \\
\Leftrightarrow\quad & \sum_{n\geq 0} f_n z^n - z = z \sum_{n\geq 1} f_n z^n + z^2 \sum_{n\geq 0} f_n z^n \\
\Leftrightarrow\quad & F(z) - z = z(F(z) - f_0) + z^2 F(z) \\
\Leftrightarrow\quad & F(z) - z = z(F(z) - f_0) + z^2 F(z) \Leftrightarrow (1 - z - z^2)F(z) = z \\
\Leftrightarrow\quad & F(z) = \tfrac{z}{1-z-z^2}
\end{aligned}$$

Primer4

Primer

Rešiti rekurentnu relaciju

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\ \textit{ako je } f_0 = 0, f_1 = 1.$$

Neka je $z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Tada je

$$(1 - zz_1)(1 - zz_2) = 1 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2 z^2 = 1 - z - z^2$$

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{z}{1-z-z^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{1-z_1 z} - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{1-z_2 z} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sum_{n\geq 0} (z_1 z)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sum_{n\geq 0} (z_2 z)^n \\ &= \sum_{n\geq 0} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}(z_1^n + z_2^n)}_{f_n} z^n \end{aligned}$$

$$\boxed{f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(z_1^n + z_2^n),\ n \geq 0}$$

Primer5

Primer

Izračunati $\binom{4}{0}2^4 + \binom{4}{1}3 \cdot 2^3 + \binom{4}{2}3^2 \cdot 2^2 + \binom{4}{3}2 \cdot 3^3 + \binom{4}{4}3^4$.

Kada u binomnu formulu

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

zamenimo $n = 4$ i $x = 3$ i $y = 2$ dobijamo

$$\binom{4}{0}2^4 + \binom{4}{1}3 \cdot 2^3 + \binom{4}{2}3^2 \cdot 2^2 + \binom{4}{3}2 \cdot 3^3 + \binom{4}{4}3^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} 3^k 2^{4-k} = (3+2)^4 = 5^4 = 625.$$

Primer6

Primer

Napisati razvijeni oblik stepena trinoma $(1+x+x^2)^3$.

$$
\begin{aligned}
(1+x+x^2)^3 &= \sum_{\substack{i+j+k=3\\ i,j,k\geq 0}} \binom{3}{i,j,k} 1^i x^j x^{2k} = \sum_{\substack{i+j+k=3\\ i,j,k\geq 0}} \binom{3}{i,j,k} x^{j+2k} \\
&= \binom{3}{3,0,0} + \binom{3}{0,3,0}x^3 + \binom{3}{0,0,3}x^6 + \binom{3}{0,1,2}x^5 + \binom{3}{0,2,1}x^4 + \binom{3}{1,0,2}x^4 \\
&\quad + \binom{3}{1,2,0}x^2 + \binom{3}{2,0,1}x^2 + \binom{3}{2,1,0}x + \binom{3}{1,1,1}x^3 \\
&= 1 + x^3 + x^6 + 3x^5 + 3x^4 + 3x^4 + 3x^2 + 3x^2 + 3x + 6x^3 \\
&= x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 3x + 1
\end{aligned}
$$

Primer7

Primer

Neka je $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *i* $B = \{a, b, c\}$*. Odrediti broj injektivnih preslikavanja skupa* B *u skup* A*.*

Broj injektivnih preslikavanja skupa B u skup A jednak je broju načina da se elementima skupa B pridruže, bez ponavljanja elemenata, elementi skupa A. Elementu a možemo pridružiti biko koji od 5 elemenata skupa A. Kada smo izabrali taj element, za b nam na raspolaganju ostane 4 elemenata, i na kraju za sliku elementa c ostaju 3 elementa. Tako je ukupan broj injektivnih preslikavanja skupa B u skup A jednak

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Primer8

Primer

Odrediti broj razbijanja skupa $\{a, b, c, d, e, f\}$ na tri neprazna podskupa.

Broj razbijanja skupa $\{a, b, c, d, e, f\}$ na 3 neprazna podskupa odgovara Stirlingovom broju $S(6, 3)$, koji ćemo dobiti iz tablice. Tablicu Stirlingovih brojeva druge vrste formiramo koristeći osobine

$$S(m, 1) = 1 \quad S(m, m) = 1 \quad S(m, n) = S(m-1, n-1) + n \cdot S(m-1, n).$$

Iz tablice

(m, n)	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	1	3	1			
4	1	7	6	1		
5	1	15	25	10	1	
6	1	31	90	65	15	1

možemo zaključiti da je $S(6, 3) = 90$.

Primer9

Primer

Napisati rekurentnu relaciju koja opisuje broj reči dužine n nad azbukom $\{a, b, c\}$ koje ne sadrže podreč aaa.

a_n - broj reči dužine n nad azbukom $\{a, b, c\}$ koje ne sadrže podreč aaa

$$a_1 = 3 \qquad a_2 = 3^2 = 9 \qquad a_3 = 3^3 - 1 = 26.$$

1. ako reč počinje sa b i ne sadrži aaa, takvih reči ima a_{n-1};
2. ako reč počinje sa c i ne sadrži aaa, takvih reči ima a_{n-1};
3. ako reč počinje sa a, onda ta reč počinje sa aa, ab ili ac:
    1. ako reč počine sa aa, onda ona počinje sa aaa, aab ili aac:
        - ako reč počine sa aab i ne sadrži aaa, takvih reči ima a_{n-3};
        - ako reč počine sa aac i ne sadrži aaa, takvih reči ima a_{n-3};
    2. ako reč počine sa ab i ne sadrži aaa, takvih reči ima a_{n-2};
    3. ako reč počine sa ac, i ne sadrži aaa, takvih reči ima a_{n-2}.

$$\boxed{a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2a_{n-3}, n \geq 4, \qquad a_1 = 3 \qquad a_2 = 9 \qquad a_3 = 26}$$

Primer10

Primer

Rešiti rekurentnu relaciju $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$, $a_0 = 1$ $a_1 = 3$, $a_2 = 9$, *primenom generatornih funkcija.*

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 3} a_n z^n &= 3\sum_{n\geq 3} a_{n-1} z^n - 3\sum_{n\geq 3} a_{n-2} z^n + \sum_{n\geq 3} a_{n-3} z^n \\
\sum_{n\geq 0} a_n z^n - 1 - 3z - 9z^2 &= 3z(\sum_{n\geq 0} a_n z^n - 1 - 3z) - 3z^2(\sum_{n\geq 0} a_n z^n - 1) + z^3 \sum_{n\geq 0} a_n z^n \\
A(z) - 1 - 3z - 9z^2 &= 3z(A(z) - 1 - 3z) - 3z^2(A(z) - 1) + z^3 A(z) \\
(1 - 3z + 3z^2 - z^3)A(z) &= 1 + 3z + 9z^2 - 3z - 9z^2 + 3z^2 \\
A(z) &= \frac{1 + 3z^2}{(1-z)^3} = (1 + 3z^2)\sum_{n\geq 0} \binom{n+2}{2} z^n
\end{aligned}$$

Primer10

Primer

Rešiti rekurentnu relaciju $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$, $a_0 = 1$ $a_1 = 3$, $a_2 = 9$, *primenom generatornih funkcija.*

$$
\begin{aligned}
A(z) &= (1+3z^2)\sum_{n\geq 0}\binom{n+2}{2}z^n \\
&= \sum_{n\geq 0}\binom{n+2}{2}z^n + \sum_{n\geq 0}3\binom{n+2}{2}z^{n+2} \\
&= \sum_{n\geq 0}\binom{n+2}{2}z^n + \sum_{n\geq 2}3\binom{n}{2}z^n \\
&= 1+3z+\sum_{n\geq 2}\left(\binom{n+2}{2}+3\binom{n}{2}\right)z^n \\
&= 1+3z+\sum_{n\geq 2}(2n^2+1)z^n = \sum_{n\geq 0}(2n^2+1)z^n
\end{aligned}
$$

Primer11

Primer

Na koliko načina je moguće izabrati 5 kugli sladoleda, ako je u ponudi 8 različitih vrsta sladoleda.

Neka je sa x_i označen broj kugli sladoleda vrste $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Broj načina da se izabere 5 kugli sladoleda jednak je broju rešenja sistema

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0. \end{gathered}$$

Taj broj rešenja je jednak broju reči dužine $5 + (8 - 1)$ nad azbukom $\{0, 1\}$ u kojima ima 5 jedinica i 7 nula, a to je

$$\binom{12}{5} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 792.$$

Primer12

Primer

Napisati homogenu linearnu rekurentnu relaciju reda 4 sa konstantnim koeficijentima, čiji koreni karakteristične jednačine su $x_{1,2,3} = 3$, $x_4 = 1$.

Ako su $x_{1,2,3} = 3$ i $x_4 = 0$ koreni karakteristične jednačine, onda je ta jednačina oblika

$$\begin{aligned} (x-1)\cdot(x-3)^3 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-1)\cdot(x^3 - 9x^2 + 27x - 27) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 18x - 54 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^4 = 10x^3 - 36x^2 + 18x + 54. \end{aligned}$$

Tražena rekurentna relacija je

$$a_n = 10a_{n-1} + 36a_{n-2} + 18a_{n-3} + 54a_{n-4}.$$

Primer13

Primer

Izračunati $\sum\limits_{\substack{i+j+k=4 \\ 0 \le i,j,k \le 4}} \binom{4}{i,j,k} 2^i 3^j.$

Prema polinomnoj formuli je

$$\sum_{\substack{i+j+k=4 \\ 0 \le i,j,k \le 4}} \binom{4}{i,j,k} 2^i 3^j = (2+3+1)^4 = 6^4 = 1296.$$

Primer14

Primer

Napisati otvorenu i zatvorenu formu generatorne funkcije niza

$$(0, 0, 0, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots).$$

Otvorena forma je

$$0z^0 + 0z^1 + 0z^2 + 2z^3 + 4z^4 + 8z^5 + 16z^6 + \ldots = 2z^3 \sum_{n\geq 0} 2^n z^n.$$

Zatvorena forma je

$$\sum_{n\geq 0} 2^{n+1} z^{n+3} = \frac{2z^3}{1-2z}.$$

Primer15

Primer

Koliko ima reči dužine 8 nad azbukom $\{0,1\}$ koje počinju sa 11 ili se završavaju sa 0?

Neka je

$$\begin{aligned} A &= \{\{0,1\}^8 : \text{ prve dve komponente su } 11 \text{ ili je poslednja komponenta } 0\} \\ A_1 &= \{\{0,1\}^8 : \text{ prve dve komponente su } 11\} \\ A_2 &= \{\{0,1\}^8 : \text{ poslednja komponenta je } 0\} \end{aligned}$$

Tada je $A = A_1 \cup A_2$ i $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Prema principu uključenja-isključenja imamo

$$|A| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = |\{0,1\}^6| + |\{0,1\}^7| - |\{0,1\}^5| = 2^6 + 2^7 - 2^5 = 160.$$

Primer16

Primer

Ako je n prirodan broj, izračunati $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 5^{n-k}$.

Kada u binomnu formulu $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ zamenimo $x = 1$ i $y = 5$ dobijamo

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 5^{n-k} = (1+5)^n = 6^n.$$

Odatle je, kada izdvojimo član $k = 0$,

$$\binom{n}{0} 5^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 5^{n-k} = 6^n$$

i konačno

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 5^{n-k} = 6^n - 5^n.$$

Primer17

Primer

Izračunati $S(4,3)$.

Ako formiramo tablicu

$$\begin{array}{c|cccc} (m,n) & 1 & 2 & 3 & \dots \\ \hline 1 & 1 & & & \\ 2 & 1 & 1 & & \\ 3 & 1 & 3 & 1 & \\ 4 & 1 & 7 & 6 & \end{array}$$

možemo zaključiti da je $S(4,3) = 6$.

Primer18

Primer

Izračunati $\displaystyle\sum_{\substack{i+j+k=4\\0\le i,j,k\le 3}} \binom{4}{i,j,k}$.

Kada u polinomnu formulu zamenimo $x=y=z=1$ i $n=4$ dobijamo

$$\sum_{\substack{i+j+k=4\\0\le i,j,k\le 4}} \binom{4}{i,\,j,\,k} 1^i 1^j 1^k = (1+1+1)^4$$

$$\binom{4}{0,0,4} + \binom{4}{0,4,0} + \binom{4}{0,0,4} + \sum_{\substack{i+j+k=4\\0\le i,j,k\le 3}} \binom{4}{i,j,k} 1^i 1^j 1^k = 3^4$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\substack{i+j+k=4\\0\le i,j,k\le 3}} \binom{4}{i,j,k} 1^i 1^j 1^k = 3^4 - \binom{4}{0,0,4} - \binom{4}{0,4,0} - \binom{4}{0,0,4}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\substack{i+j+k=4\\0\le i,j,k\le 3}} \binom{4}{i,j,k} 1^i 1^j 1^k = 3^4 - 3 = 3(3^3-1) = 78.$$

Primer19

Primer

Odrediti koeficijent uz xy^2z^2 u razvoju $(x+y+z)^5$.

Prema polinomnoj formuli,

$$(x+y+z)^5 = \sum_{\substack{i+j+k=5 \\ 0 \le i,j,k \le 5}} \binom{5}{i,j,k} x^i y^j z^k.$$

Za član koji sadrži xy^2z^2 je $i=1$, $j=2$ i $k=2$, odakle je koeficijent

$$\binom{5}{1,2,2} = \frac{5!}{1!2!2!} = 30.$$

Primer20

Primer

Koliko ima petocifrenih brojeva u kojima su susedne cifre različite parnosti i cifre se ne ponavljaju?

Ako je prva cifra parna, ona ne sme biti jednaka nuli, tako da imamo 4 cifre na raspolaganju. Za treću poziciju imamo na rapolaganju sve parne cifre osim one koja je na prvoj poziciji (ukljuvcujući 0) i za petu poziciju imamo na rapoloaganju sve parne cifre osim već izabrane dve cifre. Na drugoj poziciji može biti bilo koja od 5 neparnih cifara, a na četvrtoj jedna od 5 neparnih koja nije izabrana za drugu poziciju. Takvih brojeva ima

$$4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cdot 4 \cdot 3 = 960.$$

Slično, ako je prva cifra neparna, onda takvih brojeva ima

$$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 1200.$$

Znači, ukupno ih ima

$$1200 + 960 = 2160$$

Primer21

Primer

Izračunati $\binom{7}{0}+\binom{7}{1}\cdot 2+\binom{7}{2}\cdot 2^2+\binom{7}{3}\cdot 2^3+\binom{7}{4}\cdot 2^4+\binom{7}{5}\cdot 2^5+7\cdot 2^6+2^7$

Kada u binomnu formulu

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

zamenimo $x=2$ i $y=1$ i $n=7$ dobijamo

$$\begin{aligned}\binom{7}{0}+\binom{7}{1}\cdot 2+\binom{7}{2}\cdot 2^2+\binom{7}{3}\cdot 2^3+\binom{7}{4}\cdot 2^4+\binom{7}{5}\cdot 2^5+7\cdot 2^6+2^7 &= (2+1)^7\\ &= 3^7=2187\end{aligned}$$

Primer22

Primer

Izračunati $S(2018, 1)$ *i* $S(2018, 2018)$.

Neka je $A = \{a_1, \dots, a_{2018}\}$.

1. Broj načina da se skup A od 2018 elemenata razdeli na jedan podskup jednak je $S(2018, 1) = 1$. Taj podskup je sam skup A.
2. Broj načina da se skup od 2018 elemenata razdeli na 2018 nepraznih podskupova jednak je $S(2018, 2018) = 1$. Ti jednočlani podskupovi su:

$$\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_{2018}\}.$$

Primer23

Primer

Na koliko načina se pravougaonik dimenzije $1 \times n$ može pokriti pravougaonicima dimenzije 1×1 i 1×2 (bez preklapanja). Postaviti i rešiti rekurentnu relaciju.

Inicijalne vrednosti su

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = 2.$$

Ako je $n \geq 3$, onda je na prvom mestu ili pravougaonik dimenzije 1×1 ili je na prvom mestu pravougaonik dimenzije 1×2. U prvom slučaju je broj načina da se prekrije preostali deo jednak a_{n-1}, a u drugom a_{n-2}, odakle je rekurentna relacija:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 2, \qquad a_0 = 1 \qquad a_1 = 1.$$

Primer23

Primer

Na koliko načina se pravougaonik dimenzije $1 \times n$ može pokriti pravougaonicima dimenzije 1×1 i 1×2 (bez preklapanja). Postaviti i rešiti rekurentnu relaciju.

$$
\begin{aligned}
& \sum_{n\geq 2} a_n z^n = \sum_{n\geq 2} a_{n-1} z^n + \sum_{n\geq 2} a_{n-2} z^n \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{n\geq 2} a_n z^n = z \sum_{n\geq 2} a_{n-1} z^{n-1} + z^2 \sum_{n\geq 2} a_{n-2} z^{n-2} \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{n\geq 2} a_n z^n = z \sum_{n\geq 1} a_n z^n + z^2 \sum_{n\geq 0} a_n z^n \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{n\geq 0} a_n z^n - a_0 - a_0 z = z(\sum_{n\geq 0} a_n z^n - a_0) + z^2 \sum_{n\geq 0} a_n z^n \\
\Leftrightarrow \quad & A(z) - 1 - z = z(A(z) - 1) + z^2 A(z) \\
\Leftrightarrow \quad & (1 - z - z^2) A(z) = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & A(z) = \frac{1}{(1-z-z^2)} = \dots
\end{aligned}
$$

Primer24

Primer

Napisati otvoreni oblik generatorne funkcije $\frac{z}{(1-z)^2}$

$$
\begin{aligned}
\frac{z}{(1-z)^2} &= z \cdot (1-z)^{-2} = z \cdot \sum_{n \geq 0} \binom{-2}{n} (-1)^n z^n \\
&= z \cdot \sum_{n \geq 0} (-1)^n (n+1)(-1)^n z^n \\
&= \sum_{n \geq 0} (n+1) z^{n+1} \\
&= \sum_{n \geq 0} n z^n .
\end{aligned}
$$

Primer25

Primer

Koliko se različitih sedmocifrenih brojeva može napisati pomoću cifara 7,7,6,6,6,0,0?

Broj reči dužine 7 napisanih od slova 7,7,6,6,6,0,0 jednak je $\frac{7!}{2!3!2!}$. Broj reči koj na prvom mestu imaju 0 jednak je broju reči dužine 6 napisanih od slova 7,7,6,6,6,0, a to je $\frac{6!}{2!3!}$. Tako je broj sedmocifrenih brojeva napisanih pomoću cifara 7,7,6,6,6,0,0 jednak

$$\frac{7!}{2!3!2!} - \frac{6!}{2!3!} = \frac{7! - 2 \cdot 6!}{2!3!2!} = \frac{6! \cdot 5}{24} = 6 \cdot 5 \cdot 5 = 150.$$

Primer26

Primer

Odrediti član koji ne sadrži x *u razvoju* $(x^2 + \frac{1}{x} + 5)^7$.

$$(x^2+\frac{1}{x}+5)^7 = \sum_{\substack{i+j+k=7\\ i,j,k\geq 0}} \binom{7}{i,j,k}(x^2)^i(x^{-1})^j5^k == \sum_{\substack{i+j+k=7\\ i,j,k\geq 0}} \binom{7}{i,j,k}x^{2i}x^{-j}5^k,$$

$$\begin{array}{c} i+j+k=7\\ 2i-j=0\\ i,j,k\in\{0,1,2,3,4,5,6,7\}\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} 3i+k=7\\ j=2i\\ i,j,k\in\{0,1,2,3,4,5,6,7\}\end{array}$$

$$(i,k)\in\{(0,7),(1,4),(2,1)\},$$

$$(i,j,k)\in\{(0,0,7),(1,2,4),(2,4,1)\}.$$

$$\binom{7}{0,0,7}5^7 + \binom{7}{1,2,4}5^4 + \binom{7}{2,4,1}5^1 = 5^7 + 105\cdot 5^4 + 105\cdot 5 = 78125 + 625 + 525 = 79275.$$

Primer27

Primer

Izračunati $\binom{2n}{2}+\binom{2n}{3}+\ldots+\binom{2n}{2n-2}+\binom{2n}{2n-1}$.

Na osnovu binomne formule važi

$$2^{2n}=(1+1)^{2n}=\binom{2n}{0}+\binom{2n}{1}+\binom{2n}{2}+\binom{2n}{3}+\ldots+\binom{2n}{2n-2}+\binom{2n}{2n-1}+\binom{2n}{2n}$$

Zadatom izrazu ćemo dodati i oduzeti prva dva i poslednji član razvijenog oblika prethodnog binoma:

$$\begin{aligned}
N &= \tbinom{2n}{2}+\tbinom{2n}{3}+\ldots+\tbinom{2n}{2n-2}+\tbinom{2n}{2n-1}\\
&= \pm\tbinom{2n}{0}\pm\tbinom{2n}{1}+\tbinom{2n}{2}+\tbinom{2n}{3}+\ldots+\tbinom{2n}{2n-2}+\tbinom{2n}{2n-1}\pm\tbinom{2n}{2n}\\
&= (1+1)^{2n}-\tbinom{2n}{0}-\tbinom{2n}{1}-\tbinom{2n}{2n}\\
&= 4^n-1-2n-1=4^n-2(n+1).
\end{aligned}$$

Primer28

Primer

Odrediti broj reči dužine n koje ne sadrže podreči 000 i 001. Postaviti rekurentnu relaciju, bez rešavanja.

Neka je a_n broj reči dužine n koje ne sadrže podreči 000 i 001. Ako je $n = 1, 2, 3$, broj takvih reči je

$$a_1 = 2 \qquad a_2 = 4 \qquad a_3 = 6.$$

To su: 0,1,00,01,10,11,010,011,100,101,110,111.

Primer28

Primer

Odrediti broj reči dužine n koje ne sadrže podreči 000 i 001. Postaviti rekurentnu relaciju, bez rešavanja.

Neka je sada $n \geq 3$. Svaka reč počine sa 0 ili sa 1:

(i) Ako reč počinje sa 1, broj reči dužine n koje ne sadrže 000 i 001 jednak je broju reči koje u nastavku ne sadrže 000 i 001, a taj broj je a_{n-1}.

(ii) Ako reč počinje sa 0, onda ona počine sa 00 ili sa 01:

- $(ii)_1$ Ako reč počinje sa 00, onda ona sadrži ili 000 ili 001. Znači, taj slučaj je nemoguć.
- $(ii)_2$ Ako reč počinje sa 01, onda je broj reči koje ne sadrže 000 i 001 jednak broju reči koje u nastavku ne sadrže te dve podreči, a taj broj je a_{n-2}.

Tako smo dobili rekurentnu relaciju

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 2, \qquad a_0 = 2 \qquad a_1 = 2$$

Primer29

Primer

Na koliko načina se može rasporediti 12 (jednakih) kuglica u 3 kutije koje su numerisane brojevima 1,2 i 3?

Neka su x_1, x_2 i x_3 redom brojevi kuglica u kutijama broj $1, 2$ i 3. Tada je broj načina da se kuglice rasporede u kutije jednak broju celobrojnih rešenja jednačine

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12, \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Broj rešenja ove jednačine jednak je broju reči dužine $12 + (3 - 1) = 14$ nad $\{0, 1\}$ u kojima ima tačno 12 jedinica (koje odgovaraju kuglicama) i dve nule (koje dele broj kuglica u prvoj kutiji od onih u drugoj, kao i broj onih u drugoj od onih u trećoj), a taj broj je jednak broju načina da se od 14 mesta izaberu dva na koja će se staviti nule:

$$\binom{14}{2} = \frac{14 \cdot 13}{2} = 91.$$

Primer30

Primer

Neka je $0 \le k \le m \le n$. *Dokazati da važi sledeća jednakost:*
$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$.

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{m}\binom{m}{k} &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{n!}{(n-m)!(m-k)!k!} \\
\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-m)!(m-k)!} = \frac{n!}{k!(n-m)!(m-k)!}
\end{aligned}
$$

Primer31

Primer

Odrediti broj reči dužine n koje ne sadrže podreči 000 i 010. Samo postaviti rekurentnu relaciju.

Neka je a_n broj reči dužine n koje ne sadrže podreči 000 i 010. Tada je

$$a_1 = 2 \qquad a_2 = 4 \qquad a_3 = 6 \qquad a_4 = 9.$$

Primer31

Primer

Odrediti broj reči dužine n koje ne sadrže podreči 000 i 010. Samo postaviti rekurentnu relaciju.

Svaka reč a_n počine sa 1 ili sa 00 ili sa 01:

(i) Ako reč počine sa 1, broj reči je jednak a_{n-1}.

(ii) Ako reč počinje sa 00, onda ta reč mora početi sa 0011, a takvih reči ima a_{n-4}.

(iii) Ako rev̌ počinje sa 01, onda ta reč mora početi sa 011, a takvih reči ima a_{n-3}.

Tako dobijamo rekurentnu relaciju:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4}, n \geq 4$$
$$a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 6$$

Primer32 (samo IN i SIIT)

Primer

Napisati otvoreni oblik generatorne funkcije $\frac{1}{1+2z} \cdot \frac{1}{1-3z}$.

Možemo primetiti da je

$$\frac{1}{1+2z} \cdot \frac{1}{1-3z} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1+2z} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{1-3z}$$

Razvijanjem u otvoreni oblik dobijamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+2z} \cdot \frac{1}{1-3z} &= \frac{2}{5}\sum_{n\geq 0}(-1)^n 2^n z^n + \frac{3}{5}\sum_{n\geq 0}(-1)^n(-1)^n 3^n z^n \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{2}{5}(-1)^n 2^n z^n + \sum_{n\geq 0}\frac{3}{5}3^n z^n \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{3^{n+1}+(-1)^n 2^{n+1}}{5} z^n.
\end{aligned}$$

Primer

Koliko pozitivnih celih brojeva se mora izabrati da bismo bili sigurni da su među njima bar dva sa istim ostatkom pri deljenju sa 7?

Ostaci pri deljenju sa 7 pripadaju skupu

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Ako izaberemo 8 brojeva i svako dodelimo njegov ostatak pri deljenju sa 7, prema Dirihleovom principu, nar dva izabrana broja će imati isti ostatak.

Primer

Dokazati

$$\binom{n+2}{m} = \binom{n}{m-2} + 2\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m}$$

Koristeći Paskalov identitet,

$$\begin{aligned}
& \binom{n}{m-2} + 2\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} \\
= \quad & \binom{n}{m-2} + \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} \\
= \quad & \binom{n+1}{m-1} + \binom{n+1}{m} \\
= \quad & \binom{n+2}{m}
\end{aligned}$$

Primer

Niz Katalanovih brojeva definisan je sa

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, n \geq 1$$

1. *Odrediti članove niza* C_1, C_2, C_3, C_4.
2. *Pokazati da tako definisan niz niz zadovoljava rekurentnu relaciju* $C_n = \frac{4n-2}{n+1}C_{n-1}$, *za svako* $n \geq 2$.

- $C_1 = \frac{1}{1+1}\binom{2}{1} = 1$
- $C_2 = \frac{1}{2+1}\binom{4}{2} = 2$
- $C_3 = \frac{1}{3+1}\binom{6}{3} = 5$
- $C_4 = \frac{1}{4+1}\binom{8}{4} = 14$

Nastavak rešenja

$C_n = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{4n-2}{n+1}\frac{1}{(n-1)+1}\binom{2(n-1)}{n-1} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{4n-2}{n+1}\frac{1}{n}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{n+1}\frac{2n(2n-1)(2n-2)!}{n(n-1)!n(n-1)!} = \frac{2(2n-1)}{n+1}\frac{1}{n}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} \\
\Leftrightarrow \quad & 0 = 0
\end{aligned}$$

Primer

Izračunati

$$\sum_{m=1}^{7} \binom{8}{m} 8^m$$

$$\sum_{m=1}^{7} \binom{8}{m} 8^m = (1+8)^8 - \binom{8}{0} - \binom{8}{8} 8^8 = 9^8 - 8^8 - 1$$

Primer

Niz borjeva je definisan sa

$$a_n = 3^n - 2^n, n \geq 0.$$

Pokazati da tako definisan niz zadovoljava rekurentnu relaciju

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}.$$

$$\begin{aligned}
& 3^n - 2^n = 5(3^{n-1} - 2^{n-1}) - 6(3^{n-2} - 2^{n-2}) \\
\Leftrightarrow \quad & 3^n - 2^n = 5\left(\frac{3^n}{3} - \frac{2^n}{2}\right) - 6\left(\frac{3^n}{3^2} - \frac{2^n}{2^2}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & 3^n - 2^n = \frac{5}{3}3^n - \frac{5}{2}2^n - \frac{2}{3}3^n - \frac{3}{2}2^n \\
\Leftrightarrow \quad & 3^n - 2^n = 3^n - 2^n \\
\Leftrightarrow \quad & \top
\end{aligned}$$

Primer

Zaokružiti linearne homogene rekurentne relacije drugog reda sa konstantnim koeficijentima:

1. $\boxed{a_n = 8a_{n-1} - 7a_{n-2}}$
2. $a_n = 16a_{n-1}^2 - 16a_{n-2}$
3. $a_n = 9a_{n-1}^2$
4. $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 2$
5. $a_n = a_{n-1} - 3a_{n-2} + 3a_{n-3} - a_{n-4}$

Primer

Rešiti rekurentnu relaciju

$$a_0 = 1, a_1 = -1, a_n = 4a_{n-2}, n \geq 2$$

Karakteristična jednačina: $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2 \wedge x_2 = -2$.
Opšte rešenje: $a_n = A(2^n) + B(-2)^n$
Rešenje:

$$\begin{array}{c} A + B = 1 \\ 2A - 2B = -1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} B = 1 - A \\ 2A - 2(1 - A) = 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} B = \frac{3}{4} \\ A = \frac{1}{4} \end{array}$$

$$a_n = \frac{1}{4} \cdot 2^n + \frac{3}{4} \cdot (-2)^n, n \geq 0$$

Primer

Izračunati

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} 3^{n-m}$$

Prema binomnoj formuli, za $x = -1$ i $y = 3$ dobijamo

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} 3^{n-m} = ((-1) + 3)^n = 2^n$$

Primer

Rešiti rekurentnu relaciju

$$a_0 = 1, a_1 = 2, a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}, n \geq 2$$

Karakteristična jednačina: $x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i$
Opšte rešenje: $a_n = A(1+i)^n + B(1-i)^n$
Rešenje:

$$\begin{array}{c} A + B = 1 \\ A(i+i) + B(1-i) = 2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} B = 1 - A \\ A(1+i) + (1-A)(1-i) = 2 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{c} B = 1 - A \\ 2iA = 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} B = 1 + \frac{1}{2}i \\ A = -\frac{1}{2}i \end{array}$$

$$a_n = -\frac{1}{2}i(1+i)^n + (1 + \frac{1}{2}i)(1-i)^n$$

Primer

Osam parova sličnih čizmi je bačeno na gomilu. Koliko pojedinačnih čizmi se mora izvući sa gomile da bi se sigurno među njima pojavio bar jedan odgovarajući par?

Pridružićemo svakoj čizmi broj para (bez obzira da li je leva ili desna)

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

Ako izvučemo 9 čizmi, onda će prema Dirihleovom principu, bar dve imati isti broj u oznaci.

Primer

1. *Napisati jednu homogenu rekurentnu relaciju reda 5 sa konstantnim koeficijentima.*
2. *Napisati jednu homogenu linearnu rekurentnu relaciju reda 5 sa konstantnim koeficijentima.*
3. *Napisati jednu nehomogenu linearnu rekurentnu relaciju reda 5 sa konstantnim koeficijentima.*

1. $a_n = 5a_{n-5}^2$
2. $a_n = 5a_{n-5}$
3. $a_n = 5a_{n-5} + 5n$

Primer

Napisati opšte rešenje linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima ako je njena karakteristična jednačina oblika

$$x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-1)^2(x^2+4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = 1 \wedge x_3 = 2i \wedge x_4 = -2i \end{aligned}$$

$$a_n = A + Bn + C(2i)^n + D(-2i)^n$$

Primer

Izračunati

$$\sum_{\substack{i+j+k=5\\ i,j,k\geq 0}} \binom{5}{i,j,k} 2^{i+j+k}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i+j+k=5\\ i,j,k\geq 0}} \binom{5}{i,j,k} 2^{i+j+k} &= \sum_{\substack{i+j+k=5\\ i,j,k\geq 0}} \binom{5}{i,j,k} 2^i 2^j 2^k\\ &= (2+2+2)^5 = 6^5\end{aligned}$$

Primer

Izračunati $\binom{-3}{k}$.

$$\begin{aligned}
\binom{-3}{k} &= \frac{(-3)(-4)\dots(-3-k+1)}{k!} \\
&= \frac{(-1)\cdot 3\cdot(-1)\cdot 4\dots(-1)\cdot(k+2)}{k!}\cdot\frac{2}{2} \\
&= \frac{(-1)^k(k+2)!}{2k!} \\
&= \frac{(-1)^k(k+2)(k+1)}{2} = (-1)^k\binom{k}{2}
\end{aligned}$$