DUŠKO JOJIĆ

ELEMENTI ENUMERATIVNE KOMBINATORIKE

Banja Luka

Sadržaj

Predgovor

1

O KOMBINATORICI

1.1 Šta je to kombinatorika?

Dati precizan i kratak odgovor na pitanje "Šta je to kombinatorika?" nije lako. U raznim knjigama i enciklopedijama može se pronaći sljedeća definicija:

Kombinatorika je dio matematike koji proučava diskretne (*konačne ili prebrojive*) *skupove i strukture.*

Kako se konačne strukture pojavljuju u svim oblastima matematike, ova rečenica i nije baš najbolji odgovor na postavljeno pitanje.

U knjigama o kombinatorici se nalaze definicije kojima se pokušava opisati šta je to čime se bavi kombinatorika. Tako se u [12] kaže:

"*Kombinatorika se bavi problemima egzistencije i enumeracije objekata i struktura koji ispunjavaju neke zadate uslove*"

Matematičari koji se bave kombinatorikom često vole da kažu, na primjer u [20]:

"Kombinatorika je dio matematike u kojem se koriste i proučavaju kombinatorni argumenti."

Pri tome se *kombinatornim argumentom* najčešće naziva neko kreativno razmišljanje ili inteligentno opažanje u rješavanju nekog problema koje ne zahtijeva poznavanje nekog komplikovanog matematičkog aparata.

Prethodne definicije ćemo pokušati ilustrovati i pojasniti sa nekoliko konkretnih problema kojima se bavi kombinatorika.

- **Odrediti koliko elemenata ima neki konačan skup.**

Posmatrajmo sljedeći zadatak:
Neka je zadan skup A sa n elemenata. Koliko ima funkcija $f : A \to A$ koje su bijekcije?

Odgovor na ovo pitanje je proizvod svih brojeva od 1 do n

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n = n!.$$

U [7] se kaže da je za ovu formulu (kao i formulu za broj k-članih podskupova nekog n-članog skupa) znao indijski matematičar Baskara oko 1150. godine, a vjerovatno i Bramagupta već u šestom vijeku[1].
Dio kombinatorike koji se bavi određivanjem broja elemenata u konačnim skupovima naziva se **enumerativna kombinatorika**. Iz naslova ove knjige je lako zaključiti da ćemo se na stranicama koje slijede uglavnom baviti problemima enumerativne kombinatorike.

- **Egzistencija neke strukture sa zadanim svojstvima.**

Da li je moguće u tabelu $n \times n$ upisati brojeve od 1 do n^2, tako da zbir brojeva u svakom redu, u svakoj koloni i na obje dijagonale bude uvijek isti?

Tabela $n \times n$ sa traženim svojstvom se naziva **magični kvadrat** reda n. Lako je utvrditi da magični kvadrat reda dva ne postoji. Magični kvadrat reda tri

2	7	6
9	5	1
4	3	8

je bio poznat u staroj Kini još u prvom vijeku.
Konstrukcija magičnih kvadrata neparnog reda nije previše komplikovana:

- U sredinu prvog reda upišemo broj 1.
- Ostale brojeve upisujemo redom po dijagonali, jedno polje desno i jedno polje gore od posljednjeg upisanog broja.
- Ako polje u koje trebamo upisati novi broj "izlazi" iz $n \times n$ kvadrata, prebacimo ga u posljednji red (ako je izašao iz prvog reda) ili u prvu kolonu (ako je izašao iz posljednje kolone).

[1] Neki specijalni slučajevi ovih formula se mogu pronaći u zapisima iz drugog vijeka prije nove ere.

- Ako je polje na koje želimo upisati novi broj već zauzeto, taj broj upisujemo jedno polje ispod posljednjeg upisanog broja.

  Konstruišimo magični kvadrat reda tri pomoću ovog algoritma:

	1	

	1	
		2

	1	
3		
		2

	1	
3		
4		2

	1	
3	5	
4		2

	1	6
3	5	
4		2

	1	6
3	5	7
4		2

8	1	6
3	5	7
4		2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

  Magični kvadrat reda pet dobijen ovim algoritmom je

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Algoritmi pomoću kojih se konstruišu magični kvadrati parnog reda (naravno, osim kvadrata reda dva) se mogu naći u [6]. Ti algoritmi su dosta komplikovani i zato ih ovde ne navodimo.

- **Optimizacija neke strukture**

Koliko najviše podskupova n-članog skupa možemo odabrati tako da nijedan od tih skupova nije sadržan u nekom od ostalih koje smo odabrali?

Očigledno je da familija svih k-članih podskupova zadanog skupa ispunjava traženi uslov. Broj svih k-članih podskupova nekog skupa od n elemenata je binomni koeficijent

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+2)\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}=\binom{n}{k}.$$

Dalje, nije teško provjeriti da je "srednji" binomni koeficijent $\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$ veći ili jednak od ostalih $\binom{n}{k}$. Stoga, ako posmatramo familije sastavljene od svih k-članih podskupova (za $k=0,1,\ldots,n$), najviše elemenata ima familija koja sadrži sve podskupove sa $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ elemenata.

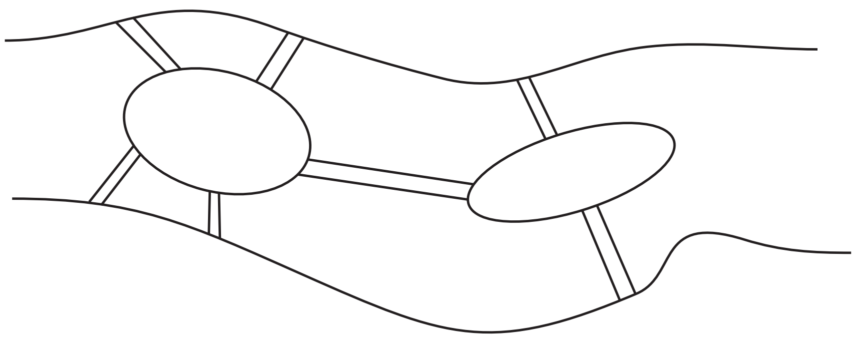
Da je ta familija i najbrojnija sa traženim svojstvom, dokazao je Emanuel Šperner[2] 1927. godine.

To je jedan od prvih rezultata **ekstremalne kombinatorike**.

- **Ispitivanje da li neka struktura ima željeno svojstvo**

Da li se neka slika koja se sastoji od konačno mnogo linija (graf) može nacrtati tako da se olovka ne diže sa papira i da se svaka duž nacrta samo jednom?

Jedan od najpoznatijih zadataka u istoriji kombinatorike je problem Kenigsberških mostova. Grad Kenigsberg (danas Kalinjingrad, Rusija) se nalazi na rijeci Pregel, na dvije obale i na dva ostrva. Ta četiri kopna su povezana sa sedam mostova (vidi sliku 1.1). Stanovnici Kenigsberga su željeli prošetati gradom tako da pređu sve mostove, ali svaki most samo jednom.



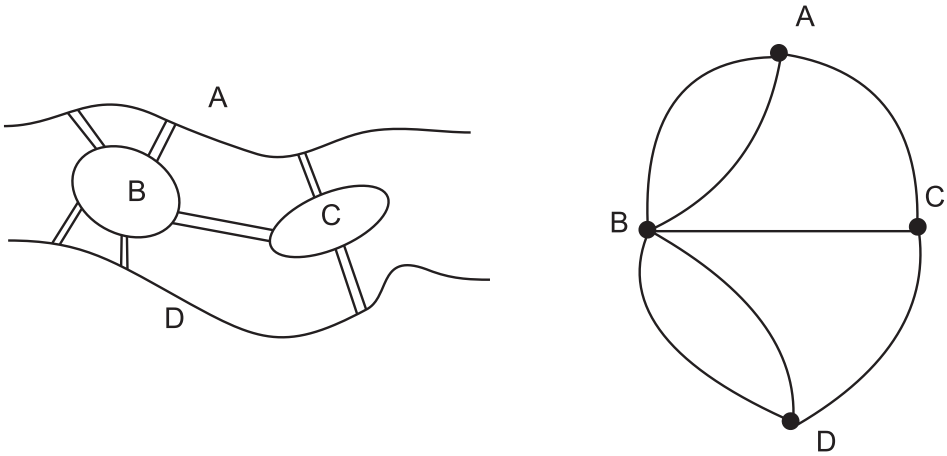
Slika 1.1. *Mostovi u Kenigsbergu.*

Međutim, koliko god su se trudili, to im nije uspijevalo. Pitali su se da li je takva šetnja uopšte moguća?

Odgovor na to pitanje je dao Leonard Ojler[3], svakako jedan od najboljih i najproduktivnijih matematičara svih vremena. Ojler je primijetio da je dio šetnje po kopnu nebitan za ostvarivanje željenog cilja. Stoga, svaki povezan dio kopna u Kenigsbergu može da se "skupi" u jednu tačku.

[2] Emanuel Sperner (1905-1980)
[3] Leonhard Euler (1707-1783)

Na taj način mapa Kenigsberga postane graf na slici 1.2. Mostovi u Kenigsbergu su postali linije (ivice tog grafa).



Slika 1.2. *Graf koji predstavlja mapu Kenigsberga.*

Sada je tražena šetnja po Kenigsbergu, u kojoj se svaki most pređe tačno jednom, u stvari crtanje grafa sa slike 1.2 tako da se svaka ivica nacrta samo jednom ne dižući olovku sa papira.

Dalje, Ojler je primijetio da ako takva šetnja postoji, svako kopno koje nije početak ili kraj šetnje je parnim brojem mostova povezano sa ostalim dijelovima grada.

Razlog za to je jednostavan: kada preko nekog mosta stignemo na dio kopna koji nije kraj šetnje, preko nekog drugog mosta moramo to kopno napustiti!

Kako iz svakog od četiri tjemena grafa na slici 1.2 "izlazi" neparan broj ivica, crtanje takvog grafa na opisan način nije moguće, pa tako nije moguća ni željena šetnja po Kenigsbergu.

Vrijednost Ojlerovog rješenja je u tome što daje potreban i dovoljan uslov kada takva šetnja može da postoji u proizvoljnom grafu. Ojler je ovaj rezultat prvi put prezentovao 26. 8. 1735. godine u Petrogradskoj akademiji nauka, a rad "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis" je objavljen 1741. godine. Taj rad se smatra početkom **teorije grafova**.

- **Pronalaženje zanimljivih osobina neke konačne strukture**

Particija broja n je uređena k-torka prirodnih brojeva $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ za koju vrijedi

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_k \text{ i } a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n.$$

Brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_k$ su dijelovi ili sabirci u particiji $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Particije broja n su važni matematički objekti sa mnogo zanimljivih i neočekivanih svojstava. Jedno od tih svojstava je i sljedeće:

Svih particija broja n u neparne sabirke ima isto koliko i svih particija broja n u različite sabirke!

Na primjer, particije broja osam u različite sabirke su

$$(8); (7,1); (6,2); (5,3); (5,2,1); (4,3,1) \ \text{ – ukupno šest particija.}$$

Svih šest particija broja osam u neparne sabirke su

$$(7,1); (5,3); (5,1,1,1); (3,3,1,1); (3,1,1,1,1,1); (1,1,1,1,1,1,1,1).$$

Ako sa d_n označimo broj particija n u različite sabirke, a sa o_n broj particija n u neparne sabirke, tada je $d_8 = o_8 = 6$. Da je $d_n = o_n$ za sve prirodne brojeve n dokazao je Leonard Ojler pomoću funkcija generatrisa.

Ojler je posmatrao formalne stepene redove $\sum_{n \in \mathbb{N}} d_n x^n$ i $\sum_{n \in \mathbb{N}} o_n x^n$ i pokazao je da su ti redovi jednaki, pa su zato i odgovarajući koeficijenti u tim redovima jednaki!

* * * * * * * * * * * *

Iz nekoliko prethodnih primjera, možemo zaključiti da su neki vrijedni rezultati iz kombinatorike dobijeni još u vrijeme Leonarda Ojlera. Međutim, dugo vremena je kombinatorika bila na granici između rekreativne matematike i ozbiljne matematičke discipline. Jedan od razloga zašto se kombinatorika smatrala "manje vrijednim" dijelom matematike je taj što u kombinatorici, sve do nedavno, nije bilo dubokih ideja i teških teorema.

Umjesto toga, u kombinatorici postoji veliki broj ideja, metoda i tehnika pomoću kojih se mogu rješavati razni problemi. Te tehnike igraju istu ulogu koju velike i važne teoreme imaju u ostalim granama matematike.

U posljednjih tridesetak godina, kombinatorika je doživjela veliku ekspanziju i postala je ravnopravna sa ostalim oblastima matematike. Svakako je jedan od najvažnijih razloga za taj spektakularan razvoj potreba za rješavanjem mnoštva problema kombinatorne prirode u raznim oblastima matematike. Ričard Stenli[4] i Anders Bjerner[5] u [9] kažu da je kombinatorika Pepeljuga na čiju je nogu savršeno pristala staklena cipelica princa računarskih nauka.

Rezultati iz kombinatorike se danas primjenjuju i u mnogim drugim naukama koje na prvi pogled nemaju mnogo veze sa matematikom (genetika, hemija, ekonomija, medicina, ...).

Kako su zadaci koji se rješavaju postajali sve teži, kombinatorika je "posuđivala" ideje iz ostalih oblasti matemematike, najčešće iz algebre, geometrije, topologije, ... Danas je sasvim uobičajeno da se u rješavanju kombinatornih problema koristi prilično komplikovan matematički aparat.

Važni i zanimljivi rezultati, moćne tehnike i medote rješavanja problema sa gotovo neiscrpnim mogućnostima primjena su neke oblasti kombinatorike (teorija grafova, algebarska kombinatorika, kombinatorna geometrija, diskretna geometrija, ...) pretvorili u atraktivne i samostalne matematičkie discipline.

[4] Richard Stanley (1944-)
[5] Anders Björner (1947-)

1.2 Osnovni zadatak enumerativne kombinatorike.

Brojanje je jedna od najstarijih matematičkih aktivnosti ljudskog roda. Rješavajući razne probleme u matematici ali i u mnogim drugim naukama potrebno je odgovoriti na sljedeće pitanje:

Koliko elemenata ima neki konačan skup?

U ovoj knjizi broj elemenata konačnog skupa X označavaćemo sa $|X|$.

Enumerativna kombinatorika je dio kombinatorike u kojem se proučavaju metode i tehnike pomoću kojih se može odgovoriti na to pitanje. Osnovni zadatak enumerativne kombinatorike možemo zapisati na sljedeći način:

OSNOVNI ZADATAK:
Neka je zadan niz konačnih skupova $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Ako je $a_n = |A_n|$, potrebno je odrediti niz cijelih brojeva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Prethodni zadatak se može riješiti na više različitih, manje ili više zadovoljavajućih, načina. Sa nekoliko konkretnih primjera ćemo ilustrovati kako se može odgovoriti na osnovno pitanje enumerativne kombinatorike.

- **Broj a_n se izrazi konkretnom formulom.**

Jedan od načina da se odgovori na postavljeno pitanje je pronalaženje eksplicitne formule za sve a_n. Na primjer, ako je A_n skup svih bijekcija na skupu od n elemenata, tada je $a_n = |A_n| = n!$.

Na prvi pogled se čini da je pronalaženjem eksplicitne formule za a_n zadatak riješen. Međutim, ponekad je ta formula komplikovana i stoga nije od koristi za velike brojeve. Pogledajmo sljedeći primjer.

Neka je $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ i neka je

$$A_n = \{f : [n] \to [n] | f \text{ je bijekcija i za sve } i \in [n] \text{ vrijedi } f(i) \neq i\}$$

skup bijekcija na $[n]$ koje nemaju fiksnu tačku.

Traženi broj bijekcija $f : [n] \to [n]$ bez fiksne tačke je

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}. \tag{1.1}$$

Odgovor na pitanje koliko elemenata ima u skupu A_n jeste konkretan, ali za velike n nije lako izračunati koji je to broj.

- **Broj a_n se odredi približno.**

Ponekad uopšte nije moguće dati "konkretan odgovor" na pitanje koliko ima elemenata u nekom konačnom skupu. Na primjer, teško da ćemo nekad dobiti eksplicitan odgovor na sljedeća pitanja:

- Koliko ima svih grupa reda n?
- Koliko ima svih particija broja n?
- Koliko ima neizomorfnih grafova sa n tjemena?
- Koliko ima različitih relacija poretka na skupu od n elemenata?

Kada već ne možemo konkretno odrediti brojeve a_n, jedan od načina da saznamo nešto o brojevima a_n je da odredimo njihovu približnu vrijednost.

Čak i kada imamo eksplicitnu formulu za a_n, ponekad nam u praksi to nije dovoljno. Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz definisan formulom (1.1), to jest a_n je broj bijekcija bez fiksne tačke.

Uz malu pomoć analize, može se izračunati da je

$$\left|a_n - \frac{n!}{e}\right| = n!\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\right| = n!\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\right| < \frac{1}{n+1}.$$

Tako možemo zaključiti da je a_n najbliži cijeli broj razlomku $n!/e$, što je za konkretno računanje svakako korisniji odgovor od eksplicitne formule (1.1).

- **Niz $(\mathbf{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ se opiše pomoću rekurzivne relacije**

Ponekad je n-ti član niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ moguće izračunati formulom u koju se uvrsti nekoliko prethodnih članova niza. Takva formula se naziva **rekurzivna relacija** za niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Često se kao rješenje nekog kombinatornog problema pojave **Fibonačijevi brojevi.**[6] Istorijski, prvi put se ti brojevi povezuju sa problemom razmnožavanja zečeva.

Na početku mjeseca čovjek je dobio par zečeva. Svaki mjesec, počevši od drugog mjeseca života, svaki par zečeva dobije novi par mladih zečeva. Koliko će zečeva čovjek imati poslije n mjeseci? Pretpostavlja se da zečevi ne umiru.

[6] Leonardo Pisano Bogollo Fibonacci (1170-1250)

Broj parova zečeva poslije n-mjeseci označimo sa F_n. Tih F_n parova zečeva su živi i u sljedećem mjesecu, a mlade će u sljedećem mjesecu dobiti F_{n-1} parova koji imaju bar dva mjeseca života. Stoga, za proizvoljan prirodan broj n vrijedi

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \text{ uz početne uslove } F_1 = F_2 = 1.$$

To je rekurzivna relacija kojom su Fibonačijevi brojevi potpuno opisani. Nekoliko prvih Fibonačijevih brojeva je lako izračunati

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_9 = 21, \ldots.$$

Formula za opšti član niza $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

O tome kako se ta formula dobije i o rekurzivnim relacijama uopšte, biće više riječi u osmoj glavi.

- **Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zapišemo pomoću funkcije generatrisa.**

Proizvoljnom nizu brojeva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ možemo dodijeliti formalni stepeni red

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n.$$

Taj red je **obična funkcija generatrisa** za niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Ako znamo funkciju $F(x)$, broj a_n možemo izračunati kao koeficijent uz x^n u razvoju funkcije $F(x)$ u red. Ako i ne znamo funkciju $F(x)$ eksplicitno, iz nekih svojstava reda $F(x)$ se može izvesti dosta činjenica o nizu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

U otkrivanju osobina reda $F(x)$ se često koriste rezultati iz drugih oblasti matematike. Funkcije generatrise su jedan od prvih primjera primjene ideja algebre i analize u rješavanju kombinatornih problema. I danas su funkcije generatrise jedna od najmoćnijih tehnika u rješavanju problema enumerativne kombinatorike. Deveta glava ove knjige je posvećena funkcijama generatrise. U posljednjoj glavi se nalaze neke zanimljive i važne primjene funkcija generatrise u rješavanju problema enumerativne kombinatorike.

2

OSNOVNI PRINCIPI I METODE PREBROJAVANJA

2.1 Princip sume i princip proizvoda

Neka je naš zadatak odrediti broj elemenata nekog konačnog skupa A. Prirodna ideja je taj skup podijeliti u nekoliko manjih dijelova, tako da se svaki element skupa A nalazi u tačno jednom od tih dijelova. Ako je skup A podijeljen na n dijelova i ako je d_i broj elemenata u i-tom dijelu, zadatak je riješen. Tada je $|A| = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$.

Ova jednostavna ideja se naziva **princip sume**.

TEOREMA 2.1.1 (Princip sume). *Neka su $D_1, D_2, \ldots, D_n$ konačni skupovi koji su u parovima disjunktni, to jest, za sve $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ vrijedi $D_i \cap D_j = \emptyset$. Tada je:*

$$|D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n| = |D_1| + |D_2| + \cdots + |D_n|.$$

Ponekad je skup kojem želimo odrediti broj elemenata direktan proizvod nekoliko manjih skupova. Broj elemenata u takvom skupu dobijamo pomoću **principa proizvoda**.

TEOREMA 2.1.2 (Princip proizvoda). *Neka su $D_1, D_2, \ldots, D_n$ konačni skupovi. Direktan proizvod tih skupova ima $|D_1||D_2|\cdots|D_n|$ elemenata, odnosno*

$$|D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n| = |D_1||D_2|\cdots|D_n|.$$

Ove teoreme nećemo dokazivati[1], nego ćemo početi sa nekoliko jednostavnih primjena principa sume i principa proizvoda.

[1] Ukoliko prihvatimo da su tvrđenja tačna za dva skupa, matematičkom indukcijom je lako dokazati tačnost ovih teorema i za proizvoljan broj skupova. Dokaz za $n = 2$ bi zahtijevao formalnu definiciju šta je to broj elemenata nekog skupa, vidjeti u [23].

Primjer 2.1.3. U učionici se nalazi šest studenata, pet asistenata, tri profesora i četiri sekretarice. Na koliko načina se iz te učionice može odabrati:

(a) jedna osoba?
(b) jedan student, jedan asistent, jedan profesor i jedna sekretarica?

Rješenje: Označimo skupove studenata, asistenata, profesora i sekretarica u učionici (redom) sa A, B, C i D.

(a) Primijetimo da su skupovi A, B, C i D disjunktni. Biranje jedne osobe iz učionice je, u stvari, izbor jednog elementa iz skupa $A \cup B \cup C \cup D$. Na osnovu principa sume broj elemenata tog skupa je

$$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| = 6 + 5 + 3 + 4 = 18.$$

(b) Izbor po jednog predstavnika iz svakog skupa je izbor jednog elementa iz $A \times B \times C \times D$. Na osnovu principa proizvoda, zaključujemo da je broj mogućih izbora jednak $|A \times B \times C \times D| = 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 = 360$.

$\diamondsuit$

Primjer 2.1.4. Sljedeće zadatke takođe možemo riješiti primjenom principa sume i principa proizvoda.

1. Na koliko načina se na šahovskoj tabli 8×8 može odabrati jedno bijelo i jedno crno polje? Isto pitanje, ali sada tražimo da odabrana polja budu u različitim vrstama i kolonama?
2. Kvadrat stranice n je pomoću pravih koje su paralelne stranicama kvadrata podijeljen na n^2 kvadrata stranice jedan. Koliki je ukupan broj kvadrata na toj slici?
3. Na koliko načina možemo postaviti figuru kralja na jedno polje šahovske table 8×8, a zatim odigrati potez?

Rješenje:

1. Ako je C skup crnih a B skup bijelih polja na šahovskoj tabli, vrijedi $|C| = |B| = 32$. Izbor jednog crnog i jednog bijelog polja je izbor elementa iz $C \times B$, pa je broj načina da se to uradi jednak $32 \cdot 32 = 1024$. Ako zabranimo da odabrana polja budu u istoj vrsti ili koloni, tada crno polje biramo kao i ranije na 32 načina, dok bijelo polje možemo odabrati na $32 - 8 = 24$ načina. Koristeći princip proizvoda dobijamo da je broj izbora koje tražimo jednak $32 \cdot 24 = 768$.

2. Pretpostavimo da je posmatrani kvadrat $[0,n] \times [0,n]$ u koordinatnom sistemu. Neka je S traženi skup svih kvadrata. Sa S_k označimo podskup od S koji čine kvadrati čija je stranica dugčka k. Lako je primijetiti da je S disjunktna unija skupova $S_1, S_2, \dots, S_n$.
Kvadrat stranice k je potpuno određen ako znamo koordinate (i,j) donjeg lijevog tjemena. Primijetimo da tačka (i,j) može biti tjeme takvog kvadrata ako i samo ako

$$(i,j) \in \{0,1,\dots,n-k\} \times \{0,1,\dots,n-k\}.$$

Na osnovu principa proizvoda dobijamo da je $|S_k| = (n-k+1)^2$.
Sada iskoristimo princip sume i dobićemo rješenje zadatka:

$$|S| = |S_n| + |S_{n-1}| + \cdots + |S_2| + |S_1| = 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2,$$

odnosno

$$|S| = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Iz svakog od četiri ugaona polja kraljem se mogu povući po tri poteza; iz svakog od preostala 24 polja na rubu table može se povući pet poteza; iz ostalih 36 polja, koja nisu na rubu table, kraljem se može odigrati po osam poteza. Kombinujući metode sume i proizvoda, dobijamo da je traženi broj poteza

$$4 \cdot 3 + 24 \cdot 5 + 36 \cdot 8 = 12 + 120 + 288 = 420.$$

$\diamondsuit$

2.2 Princip bijekcije

Zamislite da se nalazite na autobuskoj stanici čiji su peroni označeni brojevima od 1 do 40. Ako vas neko upita *"Koliko ima autobusa na stanici?"*, a vi primijetite da su svi peroni zauzeti, za tačan odgovor nije nužno da brojite autobuse. Ovo opažanje je suština **principa bijekcije**.

TEOREMA 2.2.1 (princip bijekcije). *Ako između dva konačna skupa postoji bijekcija, tada ti skupovi imaju isti broj elemenata.*

U praksi, princip bijekcije koristimo na sljedeći način. Neka je X skup kojem želimo odrediti broj elemenata. Ako uspijemo pronaći bijekciju $\Phi : X \to A$ između X i nekog skupa A kojem znamo kardinalni broj, na osnovu prethodne teoreme vrijedi $|X| = |A|$, i naš zadatak je riješen.

Primjer 2.2.2. Neka je S neprazan konačan skup. Dokazati da je broj podskupova skupa S koji imaju paran broj elemenata jednak broju podskupova od S koji imaju neparan broj elemenata!

Rješenje: Uvedimo sljedeće oznake:

$$\mathcal{P}_p(S) = \{A \subseteq S : |A| - \text{ paran}\}\ ,\ \mathcal{P}_n(S) = \{A \subseteq S : |A| - \text{ neparan}\}.$$

Odaberimo proizvoljan element $x \in S$ i za svaki $A \subseteq S$ definišimo

$$\Phi(A) = \begin{cases} A \setminus \{x\}, & \text{ako je } x \in A; \\ A \cup \{x\}, & \text{ako } x \notin A. \end{cases}$$

Skupovi A i $\Phi(A)$ se razlikuju za jedan element, pa su $|A|$ i $|\Phi(A)|$ različite parnosti. Dakle, restrikcije funkcije Φ slikaju skup $\mathcal{P}_p(S)$ na $\mathcal{P}_n(S)$, odnosno $\mathcal{P}_n(S)$ na $\mathcal{P}_p(S)$.

Nije teško pokazati da je Φ bijekcija (dovoljno je primijetiti da je $\Phi \circ \Phi$ identičko preslikavanje[2]). Na osnovu principa bijekcije zaključujemo da je $|\mathcal{P}_p(S)| = |\mathcal{P}_n(S)|$.

◇

Ilustrujmo princip bijekcije jednostavnom, ali u kombinatorici veoma često korištenom teoremom.

TEOREMA 2.2.3. *Neka su A i B konačni skupovi. Broj svih funkcija sa A u B je $|B|^{|A|}$, to jest*

$$|\{f | f : A \to B\}| = |B|^{|A|}.$$

Dokaz. Neka je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Svakoj funkciji $f : A \to B$ možemo dodijeliti uređenu n-torku $\Phi(f)$ elemenata iz B:

$$\Phi(f) = (f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)) \in \underbrace{B \times B \times \cdots \times B}_{n \text{ puta}}.$$

Nije teško provjeriti da je Φ bijekcija između skupa svih funkcija sa A u B i direktnog proizvoda n-kopija skupa B. Stoga je, na osnovu principa bijekcije i principa proizvoda, broj svih funkcija sa A u B jednak

$$\big|\{f | f : A \to B\}\big| = \big|\underbrace{B \times B \times \cdots \times B}_{n \text{ puta}}\big| = |B|^{|A|}.$$

□

[2] Ako su $f : A \to B$ i $g : B \to A$ takva preslikavanja da su $f \circ g$ i $g \circ f$ identička na B odnosno A, tada su f i g bijekcije. Specijalno, svaka **involucija** (preslikavanje $f : A \to A$ za koje je $f \circ f$ identičko preslikavanje) je bijekcija.

Prethodna teorema se često pojavljuje u sljedećem obliku:

POSLJEDICA 2.2.4. *Neka je L skup koji sadrži s simbola (slova). Broj različitih riječi (nizova) dužine k koje su sastavljene od simbola iz L je s^k.*

Dokaz. Riječ $a = a_1a_2 \dots a_k$ identifikujemo sa funkcijom $a : [k] \to L$, gdje je $a(i) = a_i$. Lako se provjeri da je time opisana bijekcija između traženog skupa riječi i skupa svih funkcija sa $[k]$ u L. Iz prethodne teoreme znamo da tih funkcija ima s^k.

□

Kada konstruišemo bijekciju između skupa X (čiji broj elemenata želimo odrediti) i nekog skupa A za koji znamo da ima m elemenata, kažemo da smo našli **kombinatorni dokaz** da je $|X| = m$. Čak i kada broj elemenata skupa X odredimo i na neki drugi način, od interesa je pronaći kombinatorni dokaz. Mnogo zanimljivih problema (među njima su i neki još neriješeni!) u kojima se traži konstrukcija bijekcije između dva konačna skupa zainteresovani čitalac može naći u [32].

U posljednjem primjeru primjene principa bijekcije se bavimo particijama broja n. Podsjetimo se da je **particija broja** n u k dijelova uređena k-torka $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ prirodnih brojeva takvih da je $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_k$ i $a_1 + a_2 + \dots + a_k = n$.

Primjer 2.2.5. Dokaži da particija broja n u k dijelova ima isto koliko i particija broja n u kojima je najveći sabirak jednak k.

Rješenje: U ovom primjeru je bijekciju najlakše opisati "geometrijski".

Ako je λ particija $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ broja n, predstavimo je kao polje od n tačaka raspoređenih u k vrsta (a_1 tačaka u prvoj vrsti, a_2 tačaka u drugoj, a_3 u trećoj ...). Pri tome su prve tačke u svakoj vrsti s lijeve strane poravnate.
Ovakav zapis se naziva Fererov[3] dijagram particije λ.

Naprimjer, Fererov dijagram particije $(7, 5, 3, 2, 2, 2, 1, 1)$ je na slici 2.1 lijevo.

Primijetimo da Fererov dijagram particije λ ima a_1 kolona (najveći broj u λ). Ako je λ particija koja ima k sabiraka (dakle, njen Fererov dijagram ima k vrsta) i u kojoj je a_1 najveći sabirak, kada zamjenimo vrste i kolone u njenom Fererovom dijagramu, dobićemo particiju $\widetilde{\lambda}$ broja n

[3] Norman Macleod Ferrers, (1829-1903)

Slika 2.1. *Fererovi dijagrami za* $\lambda = (7,5,3,2,2,2,1,1)$ *i* $\widetilde{\lambda} = (8,6,3,2,2,1,1)$

u kojoj je najveći sabirak k i koja ima a_1 sabiraka. U našem primjeru, particija $\widetilde{\lambda}$ je $(8,6,3,2,2,1,1)$, i njen Fererov dijagram je desno na slici 2.1.

Kako je preslikavanje $\lambda \mapsto \widetilde{\lambda}$ involucija, opisali smo bijekciju između skupa particija broja n u k sabiraka i particija broja n kojima je najveći sabirak jednak k.

Formalno, ova bijekcija se može zapisati na sljedeći način:

$$\text{particija } (a_1, a_2, \ldots, a_k) \text{ se slika u } (b_1, b_2, \ldots, b_{a_1}),$$

gdje je $b_j := |\{i \in [k] : a_i \geqslant j\}|$.

$\diamondsuit$

2.3 Metoda dvostrukog prebrojavanja

Ako elemente nekog skupa X prebrojimo na dva različita načina (ali oba puta tačno!), svakako moramo dobiti isti rezultat. To je suština **metode dvostrukog prebrojavanja**. Posmatrajmo sljedeći jednostavan primjer.

Primjer 2.3.1. Koliko ima dijagonala u konveksnom n-touglu?

Rješenje: Neka je d_n traženi broj dijagonala. Ako je V skup tjemena, a D skup dijagonala u n-touglu, vrijedi $|V| = n$ i $|D| = d_n$. Uočimo skup

$$X = \{(v,d) : v \in V, d \in D, d \text{ sadrži } v\} \subseteq V \times D.$$

Primijetimo da je svako tjeme iz V sadržano u tačno $n-3$ dijagonale i da svaka dijagonala sadrži tačno dva tjemena. Ako u paru $(v,d) \in X$ prvo odaberemo tjeme v, pa onda dijagonalu koja ga sadrži, dobijemo da je $|X| = n(n-3)$. Ako prvo odaberemo dijagonalu, pa onda tjeme koje je pripada toj dijagonali dobićemo $|X| = 2d_n$. Stoga je

$$|X| = n(n-3) = 2d_n, \text{ odnosno } d_n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

$\diamondsuit$

Formalno, metodu dvostrukog prebrojavanja iskazujemo sljedećom teoremom.

TEOREMA 2.3.2 (Metoda dvostrukog prebrojavanja). *Neka su dati skupovi $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ i neka je $S \subseteq A \times B$. Dalje, neka je $x_i = |\{(x,y) \in S : x = a_i\}|$ za sve $i = 1, 2, \ldots, n$, odnosno $y_j = |\{(x,y) \in S : y = b_j\}|$ za sve $j = 1, 2, \ldots, m$. Tada je*

$$|S| = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{m} y_j.$$

Dokaz. Uočimo sljedeće podskupove skupa S:

$$A_i = \{(x,y) \in S : x = a_i\} \text{ za } i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$B_j = \{(x,y) \in S : y = b_j\} \text{ za } j = 1, 2, \ldots, m.$$

Primijetimo da za sve i i j vrijedi $|A_i| = x_i$ odnosno $|B_j| = y_j$. Dalje, iz definicije skupova A_i (odnosno B_j) znamo da su u parovima disjunktni i da je

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_m.$$

Tvrđenje teoreme slijedi na osnovu principa sume. $\square$

Evo još jednog zadatka koji se može riješiti metodom dvostrukog prebrojavanja.

Primjer 2.3.3. U prostoriji se nalazi n ljudi. Poznato je da:

- Svaka osoba u toj prostoriji ima tačno k poznanika.
- Svaka dva čovjeka koji se poznaju imaju r zajedničkih poznanika.
- Svaka dva čovjeka koji se ne poznaju imaju tačno m zajedničkih poznanika.

Dokaži da tada vrijedi

$$m(n-k) - k(k-r) + k - m = 0.$$

Rješenje: Neka je x jedna od osoba iz te prostorije. Posmatrajmo skup

$$P_x = \{(y,z) : \text{ osobe } x \text{ i } y \text{ te } y \text{ i } z \text{ se poznaju, a } x \text{ i } z \text{ se ne poznaju}\}.$$

Ako prvo biramo y, to možemo uraditi na k načina. Osobu z koju y poznaje biramo na $k-1-r$ načina (od k poznanika y ne smijemo odabrati osobu x i r zajedničkih poznanika od x i y). Tako dobijemo da je $|P_x| = k(k-r-1)$.

Ako prvo biramo z, kojeg x ne poznaje, to možemo uraditi na $n-k-1$ način. Sada se y (kojeg poznaju i x i z) može odabrati na m načina. Stoga je

$$|P_x| = m(n-k-1) = k(k-r-1),$$

odakle lako dobijemo traženu jednakost.

$\diamondsuit$

Skupu S iz teoreme 2.3.2 se može dodijeliti $n \times m$ matrica $[s_{ij}]$, gdje je

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ ako } (a_i, b_j) \in S; \\ 0, \text{ ako } (a_i, b_j) \notin S. \end{cases}$$

Brojeve x_i i y_j iz teoreme 2.3.2 možemo interpretirati kao zbir svih brojeva u i-toj vrsti, odnosno u j-toj koloni. Uz takvu interpretaciju, metoda dvostrukog prebrojavanja se može zapisati i ovako

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} s_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{m} y_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} s_{ij} \right).$$

Naravno, prethodno tvrđenje vrijedi za sve $m \times n$ matrice $[s_{ij}]$.

Ovu varijantu metode dvostrukog prebrojavanja koristimo u sljedećem primjeru.

Primjer 2.3.4. Konačan niz realnih brojeva ima sljedeće svojstvo: Zbir bilo kojih sedam uzastopnih članova tog niza je negativan, a zbir bilo kojih jedanaest uzastopnih članova tog niza je pozitivan broj. Koliko najviše članova može da ima taj niz?

Rješenje: Neka je $x_1, x_2, \ldots, x_n$ najduži niz sa opisanim svojstvom. Ako bi taj niz imao sedamnaest članova, mogli bi posmatrati sljedeću matricu 7×11:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \\ x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & x_{17} \end{bmatrix}.$$

Iz uslova zadatka znamo da je zbir brojeva u svakoj vrsti te matrice pozitivan, dok je zbir brojeva u svakoj koloni negativan. Kako je to nemoguće, to znači da naš niz ne može imati sedamnaest članova! Niz sa šesnaest članova koji ima traženo svojstvo je

$$5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5.$$

$\diamondsuit$

2.4 Rekurzivne relacije

Prisjetimo se da je naš zadatak odrediti neki niz cijelih brojeva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Jedan od efikasnih načina da to uradimo je da pronađemo formulu koja svaki član tog niza izrazi pomoću nekoliko prethodnih. Takva formula se naziva **rekurzivna relacija** za niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. O rekurzivnim relacijama će više riječi biti u glavi 8, a u ovom poglavlju želimo da pomoću nekoliko primjera ukažemo na značaj ove metode.

Primjer 2.4.1 (broj podskupova). Koliko podskupova ima skup od n elemenata?

Rješenje: Kako nam za broj podskupova nije bitna priroda elemenata posmatranog skupa, pretpostavimo da brojimo podskupove skupa $[n]$.

Neka je A_n skup svih podskupova skupa $[n]$, i neka je $a_n = |A_n|$. Sve podskupove skupa A_n možemo podijeliti u dvije grupe s obzirom na to da li sadrže broj n ili ne.

(a) Podskupovi od $[n]$ koji ne sadrže broj n su svi podskupovi skupa $[n-1]$. Stoga, takvih podskupova ima a_{n-1}.
(b) Preslikavanje $S \mapsto S \setminus \{n\}$ je bijekcija između podskupova skupa $[n]$ koji sadrže n i svih podskupova skupa $[n-1]$. Tako smo pokazali da i svih podskupova od $[n]$ koji sadrže broj n ima a_{n-1}.

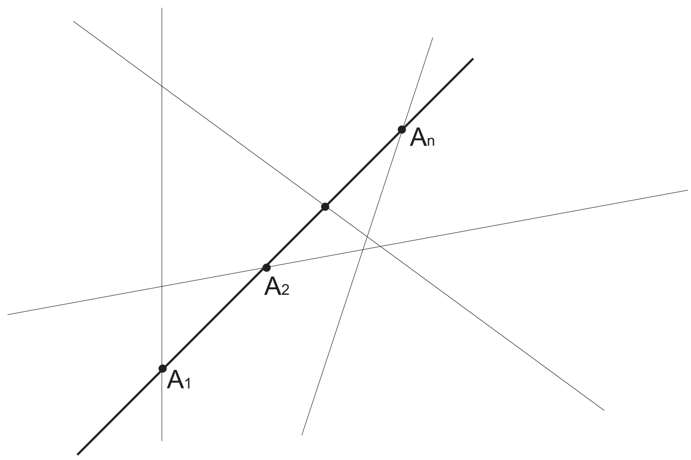
Dakle, po principu sume, za sve $n > 1$ vrijedi $a_n = 2a_{n-1}$. Ako ovu rekurzivnu relaciju primijenimo dovoljan broj puta, dobićemo $a_n = 2^{n-1}a_1$. Kako je $a_1 = 2$, možemo zaključiti da skup od n elemenata ima 2^n različitih podskupova.

$\diamondsuit$

Rekurzivne relacije su korisne i u zadacima iz kombinatorne geometrije. Evo jednog od najjednostavnijih primjera.

Primjer 2.4.2. U ravni se nalazi n pravih. Među njima nema paralelnih i nikoje tri prave se ne sijeku u istoj tački. Na koliko dijelova (regiona) tih n pravih "podijeli" ravan?

Rješenje: Pretpostavimo da se u ravni nalazi n pravih za koje vrijede pretpostavke iz zadatka. Neka je a_n broj dijelova na koje je ravan podijeljena tim pravama.



Slika 2.2. *Podjela ravni pravama među kojima nema paralelnih i nikoje tri ne prolaze kroz istu tačku.*

Sada dodajmo novu pravu (na slici 2.2 to je prava tamnija od ostalih) tako da i dalje vrijede pretpostavke. Nova prava siječe sve već postojeće prave (nema paralelnih!) u n različitih tačaka $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (nikoje tri ne prolaze kroz istu tačku!), vidi sliku 2.2.

Tih n tačaka dijele tu novu pravu na $n + 1$ dio (segment ili polupravu). Svaki od tih dijelova nove prave presječe jedan od već postojećih a_n dijelova ravni na dva nova. Dakle, dodavanjem nove prave nastane $n + 1$ novi region na koje je podjeljena ravan.

Stoga, za brojeve $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vrijedi

$$a_{n+1} = a_n + n + 1.$$

Kako je $a_1 = 2$, uz malo računanja dobijemo da je traženi broj dijelova na koje je ravan podijeljena jednak

$$a_n = \frac{n^2+n+2}{2}.$$

$\diamondsuit$

Evo još jednog zadatka koji se može riješiti pomoću rekurzivnih relacija.

Primjer 2.4.3. Koliko nizova dužine n može da se napravi od cifara iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ tako da se svake dvije susjedne cifre u nizu razlikuju za jedan?

Rješenje: Neka je X_n skup svih traženih nizova dužine n. Podijelimo skup X_n u tri dijela:

- skup nizova iz X_n koji završavaju sa 0 ili sa 4 označimo sa A_n;
- skup nizova iz X_n koji završavaju sa 1 ili sa 3 označimo sa B_n;
- skup nizova iz X_n koji završavaju sa 2 označimo sa C_n.

Dalje rasuđujemo ovako:

(a) Ako se niz iz X_n završava ciframa 0 ili 4, tada je pretposljednji broj u tom nizu 1 (odnosno 3). Zato je $|A_n| = |B_{n-1}|$.
(b) Ako se niz iz X_n završava cifrom 1 tada je pretposljednji broj u tom nizu 0 ili 2. Ako niz iz X_n završava cifrom 3, pretposljednji broj u nizu je 2 ili 4. Zato je $|B_n| = |A_{n-1}| + 2|C_{n-1}|$.
(c) Ako se niz iz X_n završava cifrom 2, pretposljednji broj u nizu je 1 ili 3. Stoga je $|C_n| = |B_{n-1}|$.

Odavde je $|B_n| = |A_{n-1}| + 2|C_{n-1}| = 3|B_{n-2}|$. Kako je $|B_1| = 2$ a $|B_2| = 4$, to je $|B_{2n}| = 3^{n-1}\cdot 4$ i $|B_{2n+1}| = 3^n \cdot 2$. Sada je

$$|X_n| = |A_n| + |B_n| + |C_n| = 2\cdot|B_{n-1}| + |B_n|,$$

odnosno

$$|X_n| = \begin{cases} 14\cdot 3^{k-1}, \text{za } n = 2k+1; \\ 8\cdot 3^{k-1}, \ \ \text{za } n = 2k. \end{cases}$$

$\diamondsuit$

2.5 Tri važna primjera

Rješavajući zadatke iz enumerativne kombinatorike, često je potrebno odgovoriti na sljedeća pitanja:

(a) Na koliko načina možemo sve elemente nekog konačnog skupa rasporediti u niz?
(b) Na koliko načina iz zadanog skupa sa n elemenata možemo uočiti njih nekoliko, to jest, na koliko načina iz n-članog skupa možemo odabrati neki podskup?
(c) Na koliko načina iz posmatranog skupa sa n elemenata možemo odabrati tačno k elemenata?

Brojevi koji se pojave u odgovorima na ova pitanja nazivaju se osnovni kombinatorni koeficijenti.

Permutacija nekog n-članog skupa se može definisati kao raspored svih elemenata tog skupa u niz dužine n.

TEOREMA 2.5.1 (rasporedi ili permutacije). *Broj permutacija skupa sa n elemenata je*

$$n! = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1.$$

Dokaz. Neka je $X = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ skup predmeta koje raspoređujemo u niz. Pretpostavimo da su mjesta na koja raspoređujemo elemente iz X označena brojevima iz $[n]$. Predmet P_1 možemo postaviti na bilo koje od tih n mjesta, recimo na mjesto $m_1 \in [n]$. Sljedeći predmet P_2 sada možemo postaviti na $n-1$ preostalo mjesto iz $[n]\setminus\{m_1\}$.

Kada smo postavili predmete $P_1, P_2, \ldots, P_i$ zauzeto je tačno i mjesta. Stoga, predmet P_{i+1} možemo postaviti na neku od preostalih $n-i$ pozicija. Na kraju, za predmet P_n će ostati samo jedno mjesto.
Po principu proizvoda, broj rasporeda n predmeta na n mjesta je

$$n! = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1.$$

□

Broj $n!$ čitamo "**en faktorijel**". Po dogovoru[4] smatramo da je $0! = 1$.

[4] Taj dogovor možemo objasniti sljedećim primjerom. Ako u nekom razredu ima m dječaka i n djevojčica i ako želimo da u jednu vrstu rasporedimo dječake a u drugu djevojčice, to možemo uraditi na $n!m!$ načina (princip proizvoda). Ako u tom razredu nema dječaka (tj. ako je $m=0$), odgovor na pitanje je $n!$. Uz naš dogovor da je $0! = 1$ broj $m!n!$ je i dalje rješenje zadatka.

Ponekad ćemo koristiti **dvostruke faktorijele** definisane kao:

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2) \cdot 2n = 2^n \cdot n!,$$

$$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!}.$$

PRIMJEDBA 2.5.2. Ako je $<$ relacija na skupu X tako da za svaka dva $P, P' \in X$, $P \neq P'$ vrijedi $P < P'$ ili $P' < P$ kažemo da je $<$ **linearan poredak** na X ili **linearno uređenje skupa** X.

Permutacija skupa $X = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ se može interpretirati i kao uređena n-torka $\pi = (P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_n}) \in X^n$ u kojoj su svi elementi različiti. Zaista, ako iz π uklonimo zagrade, dobijamo niz $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_n}$ u kojem se pojave svi elementi iz X. Za različite elemente P i P' iz skupa X kažemo da je $P <_\pi P'$ ako je u tom nizu P prije P'.

Dakle, permutacija skupa X se može interpretirati i kao linearno uređenje tog skupa. Tako je $n!$ odgovor i na pitanje koliko ima različitih linearnih uređenja na skupu sa n elemenata.

Za prirodan broj $r \leqslant n$ uređena r-torka $(P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_r})$ iz X^r u kojoj su svi elementi različiti se naziva r-**permutacija** skupa X. Broj svih r-permutacija n-članog skupa računamo na sličan način kao i u teoremi 2.5.1.

POSLJEDICA 2.5.3 (r-permutacije). *Broj svih r-permutacija u n-članom skupu $X = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ je*

$$n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Dokaz. Prvi element P_{i_1} u uređenoj r-torci možemo odabrati na n načina. Element P_{i_2} na drugom mjestu može biti neki od preostalih $n-1$ elemenata iz X. Posljednji element P_{i_r} je jedan od $n-r+1$ elemenata iz X koji se nisu pojavili na prvih $r-1$ mjesta. Broj svih r-permutacija skupa X dobijemo primjenom principa proizvoda.

□

Više o permutacijama se može naći u četvrtoj glavi.

Izbor nekoliko elemenata iz zadanog skupa je, u stvari, izbor nekog podskupa. Na pitanje koliko podskupova ima skup od n elemenata smo već odgovorili u primjeru 2.4.1.

TEOREMA 2.5.4 (broj podskupova). *Skup od n elemenata ima tačno 2^n različitih podskupova.*

Ovu teoremu ćemo dokazati na još dva načina.

Dokaz. Neka je $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ proizvoljan n-člani skup i neka je $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$ partitivni skup od A.

Prvi način: Za svaki $S \subseteq A$ definišemo funkciju

$$f_S : A \to \{0,1\} \text{ sa } f_S(a_i) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } a_i \notin S; \\ 1, & \text{ako je } a_i \in S. \end{cases}$$

Tako smo definisali bijekciju $A \mapsto f_A$ između $\mathcal{P}(A)$ i skupa svih funkcija sa A u $\{0,1\}$. Na osnovu principa bijekcije i teoreme 2.2.3 zaključujemo da je $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Drugi način. Kada biramo elemente iz A za podskup $S \subseteq A$, za svaki od elemenata imamo dvije mogućnosti: a_i može, ali i ne mora biti odabran. Primijetimo da je $S \subseteq A$ potpuno određen ako za sve $a_i \in A$ donesemo odluku da li $a_i \in S$ ili $a_i \notin S$. Sada, na osnovu principa proizvoda, zaključujemo da je podskup iz A moguće odabrati na 2^n načina.

□

Sada ćemo prebrojati na koliko načina iz posmatranog skupa možemo odabrati podskup željene veličine.

TEOREMA 2.5.5 (broj k-članih podskupova). *Broj svih k-članih podskupova skupa od n elemenata je*

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Dokaz. Neka je S proizvoljan skup sa n elemenata. Skup svih k-članih podskupova od S označimo sa $\binom{S}{k}$. Kako svi n-člani skupovi imaju isti broj k-članih podskupova, taj broj označimo sa

$$\binom{n}{k} = \binom{|S|}{k} = \left|\binom{S}{k}\right|.$$

Prazan skup je jedini podskup od S koji ima 0 elemenata, a cijeli skup S je jedini podskup sa n elemenata. Zato je $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$.

Da bismo odredili broj $\binom{n}{k}$ za svaki k, posmatrajmo skup

$$P = \{(x, A) : A \in \binom{S}{k}, x \in A\}.$$

Broj elemenata u skupu P prebrojimo na dva načina:

(*i*) Ako prvo odaberemo $x \in S$ (to možemo uraditi na n načina), skup A koji sadrži x treba dopuniti sa $k-1$ elementom od $n-1$ preostalih iz $S \setminus \{x\}$. To možemo uraditi na $\binom{n-1}{k-1}$ način.

(*ii*) Ako prvo biramo skup A, to možemo uraditi na $\binom{n}{k}$ načina. Sada, jedan element $x \in A$ možemo odabrati na k načina.

Tako smo dobili da je

$$n\binom{n-1}{k-1} = |P| = k\binom{n}{k},$$

pa vrijedi sljedeća rekurzivna relacija:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

Ako ovu relaciju primijenimo k puta, dobijamo da je:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}\binom{n-k}{0} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

□

Brojevi $\binom{n}{k}$ se nazivaju **binomni koeficijenti** i često ćemo ih susretati u ovoj knjizi. Za sada ćemo dokazati da vrijedi sljedeća teorema.

TEOREMA 2.5.6.

(*i*) *Za proizvoljan prirodan broj n vrijedi*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

(*ii*) *Za sve prirodne brojeve $n \geqslant k \geqslant 1$ je*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Dokaz.

(*i*) Partitivni skup od $[n]$ je disjunktna unija skupova

$$\binom{[n]}{0}, \binom{[n]}{1}, \ldots, \binom{[n]}{n}.$$

Tražena formula se dobije pomoću principa sume i tvrđenja iz teorema 2.5.5 i 2.5.4.

(*ii*) Sve k-člane podskupove od $[n]$ podijelimo u dvije grupe. Podskupovi od $[n]$ koji ne sadrže n su takođe k-člani podskupovi skupa $[n-1]$, i njih ima $\binom{n-1}{k}$.

Sada opišimo bijekciju između skupa svih $(k-1)$-članih podskupova od $[n-1]$ i skupa k-članih podskupova skupa $[n]$ koji sadrže broj n. Ta bijekcija je "dodavanje" broja n u $(k-1)$-člane podskupove od $[n-1]$. Zato je broj k-članih podskupova od $[n]$ koji sadrže n jednak $\binom{n-1}{k-1}$.
Formula koju želimo dokazati se sada dobije pomoću principa sume.

□

2.6 Zadaci

1. U nekom restoranu služe tri vrste predjela, sedam vrsta glavnih jela i pet vrsta kolača. Na koliko načina se može odabrati kompletan obrok, to jest, predjelo, glavno jelo i desert? Na koliko načina se može odabrati "jeftiniji" obrok od samo dva dijela, ako glavno jelo mora biti uključeno?
2. Koliko ima neparnih prirodnih brojeva većih od 1000 a manjih od 10000 kod kojih su sve cifre različite?
3. Na koliko načina se na tablu $n \times n$ može postaviti k različitih topova koji se ne napadaju? Šta ako su topovi isti?
4. Zašto broj $\binom{13}{1}\binom{51}{4}$ nije odgovor na pitanje: *Na koliko načina se može odabrati pet karata tako da bar jedna karta bude tref?*
   Odredi tačan odgovor!
5. Koliko ima brojeva od 1 do 10000 u čijem se zapisu bar jednom upotrijebi cifra 1?
6. Bacaju se tri različite kockice za jamb. Dokaži da je broj različitih ishoda kod kojih je zbir brojeva koji su "pali" na kockicama manji od 11 jednak polovini broja svih mogućih ishoda!

7. Koliko ima uređenih parova (m, n) prirodnih brojeva kojima je najmanji zajednički sadržalac $2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^3$?
8. Koliko ima uređenih parova skupova (A, B) takvih da je $A \subseteq B \subseteq [n]$?
9. Da li je moguće da u nekom društvu broj ljudi sa neparnim brojem poznanika bude neparan?
10. Dijete ima "kockice" za slaganje koje su sve međusobno različite po: materijalu (drvo i plastika), veličini (male, srednje i velike), boji (crvene, plave, zelene i žute) i obliku (okrugle, trouglaste, kvadratne i pravougaone). Ukupno ima $96 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4$ kockica. Koliko ima kockica koje se od *drvenog, velikog, plavog kvadrata* razlikuju u tačno dvije osobine?
11. Koliko ima funkcija $f : [n] \to [n]$ bez fiksne tačke?
12. Neka je $\mathcal{F}$ neka familija podskupova konačnog skupa X. Ako svi skupovi iz $\mathcal{F}$ imaju tačno k elemenata i ako se svaki element iz X nalazi u tačno r skupova, dokaži da je $|\mathcal{F}| \cdot k = |X| \cdot r$.
13. Koliko ima petocifrenih prirodnih brojeva djeljivih sa tri, kojima je srednja cifra jednaka 6?
14. Koliko ima različitih $m \times n$ tabela popunjenih brojevima -1 ili 1 u kojima je proizvod elemenata u svakoj vrsti i svakoj koloni jednak 1.
15. Sedmocifreni telefonski broj $abcdefg$ je *lak za pamćenje* ako je $(a, b, c) = (d, e, f)$ ili $(a, b, c) = (e, f, g)$. Koliko ima takvih telefonskih brojeva sastavljenih od cifara $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$?
16. Na koliko načina možemo odabrati dva podskupa od $[n]$ čija je unija cijeli skup $[n]$?
17. Koliko ima parova susjednih brojeva u skupu $\{1000, 1001, \ldots, 2000\}$ kod čijeg sabiranja nema prenošenja cifara?
18. Dokaži da u skupu prirodnih brojeva manjih od milion ima jednak broj onih kojima je zbir cifara jednak 20 i onih kojima je zbir cifara jednak 34.
19. Brojeve $21, 31, 41, 51, 61, 71$ i 81 treba poredati u niz tako da zbir svaka četiri susjedna broja bude djeljiv sa 3. Na koliko načina se to može uraditi?
20. Koliko ima uređenih k-torki $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ podskupova skupa $[n]$ kod kojih je $X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_k = \emptyset$?
21. Koliko različitih raznostraničnih trouglova se može napraviti od duži čije su stranice $1, 2, \ldots, n$?

22. Koliko brojeva u skupu $\{9^k : k \in [4000]\}$ počinje cifrom 9? Poznato je da 9^{4000} ima 3817 cifara!
23. Na sastanku se nalazi $12k$ ljudi. Svaka osoba se rukovala sa tačno $3k+6$ ostalih. Za bilo koja dva čovjeka na tom sastanku, broj ljudi koji se rukovao sa obojicom je uvijek isti. Koliko je ljudi bilo prisutno na tom sastanku?
24. Familija podskupova $S = \{A_1, A_2, \dots, A_t\}$ skupa $[n]$ je separabilna ako za sve $x, y \in [n]$, postoji skup $A_i \in S$ takav da je $|A_i \cap \{x, y\}| = 1$. Dalje, S je pokrivajuća ako je svaki $x \in [n]$ sadržan u nekom od skupova iz S. Koliko najmanje elemenata može da ima neka separabilna, pokrivajuća familija podskupova od $[n]$.

2.7 Rješenja zadataka

1. $3 \cdot 7 \cdot 5 = 105$, odnosno $3 \cdot 7 + 7 \cdot 5 = 56$.
2. $5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 2240$.
3. $n^2(n-1)^2 \cdots (n-k+1)^2$, odnosno $\frac{n^2(n-1)^2 \cdots (n-k+1)^2}{k!}$.
4. Neka rješenja (ona u kojima se pojavi više od jedne tref karte) se u $\binom{13}{1}\binom{51}{4}$ broje više puta. Tačno rješenje je $\binom{52}{5} - \binom{39}{5}$.
5. $10^4 - 9^4$.
6. Neka su x, y i z brojevi koji su pali na kockama. Preslikavanje $(x, y, z) \leftrightarrow (7-x, 7-y, 7-z)$ je bijekcija između ishoda kod kojih je zbir manji od 11 i onih kod kojih je taj zbir bar 11.
7. Brojevi m i n su oblika $2^a 3^b 5^c$, gdje je $0 \le a \le 5$, $0 \le b \le 7$ i $0 \le c \le 3$. U bar jednom od m i n, eksponenti brojeva a, b i c imaju vrijednosti $5, 7$ i 3. Stoga je rješenje $11 \cdot 15 \cdot 7 = 1155$.
8. 3^n. Svaki $x \in [n]$ je u nekom od disjunktnih skupova A, $B \setminus A$ ili B^c.
9. Ne. Neka je m broj neuređenih parova poznanika u tom društvu, i neka je $d(x)$ broj poznanika osobe x. Posmatrajmo skup

$$P = \{(x, \{x, y\}) : x \text{ i } y \text{ su ljudi iz tog društva koji se poznaju}\}.$$

Ako elemente skupa P prebrojimo na dva načina, dobićemo

$$2m = d(x) + d(y) + d(z) + \cdots .$$

Zato je broj ljudi sa neparnim brojem poznanika uvijek paran.
10. $1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 29$.

11. Za sve i je $f(i) \in [n] \setminus \{i\}$, pa po principu proizvoda takvih funkcija ima $(n-1)^n$.
12. Primijenimo princip dvostrukog prebrojavanja na skup $\{(x, A) : x \in A, A \in \mathcal{F}\}$.
13. Koliko i svih četverocifrenih koji su djeljivi sa tri, dakle 3000.
14. $2^{(m-1)\cdot(n-1)}$. Tabelu $(m-1) \times (n-1)$ možemo popuniti proizvoljno, a elementi u posljednjoj vrsti i koloni su time određeni.
15. Broj $defg$ možemo napraviti na 10000 načina. Osim za 10 brojeva $defg$, kod kojih su sve cifre iste, za abc imamo na raspolaganju dvije mogućnosti. Dakle, postoji $2 \cdot 9990 + 10 = 19990$ lako pamtljivih brojeva.
16. Ako je $A \cup B = [n]$, za svaki element iz $[n]$ postoje tri mogućnosti: ili je u skupu $A \setminus B$, ili je u $B \setminus A$ ili u $A \cap B$. Dva uređena para (A, B) i (B, A) daju istu podjelu $[n]$ u dva podskupa, osim u slučaju kada je $A = B = [n]$. Rješenje zadatka je
$$\frac{3^n - 1}{2} + 1 = \frac{3^n + 1}{2}.$$
17. To su parovi kod kojih je manji broj oblika $1abc, 1ab9, 1a99$ ili 1999, gdje su a, b, c iz $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Stoga je traženi broj $5^3 + 5^2 + 5 + 1 = 156$.
18. Preslikavanje koje broju $a_1 \cdot 10^6 + a_2 \cdot 10^5 + a_3 \cdot 10^4 + a_4 \cdot 10^3 + a_5 \cdot 10 + a_6$ dodijeli $(9 - a_1) \cdot 10^6 + (9 - a_2) \cdot 10^5 + (9 - a_3) \cdot 10^4 + (9 - a_4) \cdot 10^3 + (9 - a_5) \cdot 10 + (9 - a_6)$ je bijekcija između skupa brojeva kojima je zbir cifara jednak 20 i skupa brojeva kojima je zbir cifara 34.
19. Prvi i peti, drugi i šesti te treći i sedmi broj niza pri djeljenju sa 3 daju isti ostatak. Broj u sredini mora biti djeljiv sa 3 i to je neki broj iz skupa $\{21, 51, 81\}$. Po jedan od brojeva iz $\{31, 61\}$, $\{41, 71\}$ i "preostala" dva broja iz $\{21, 51, 81\}$ čine prva tri člana niza (raspoređeni proizvoljno). Stoga je odgovor $3 \cdot 2^3 \cdot 3!$.
20. Svaki i iz $[n]$ može biti sadržan u bilo koliko X_j, osim u svima. Po principu proizvoda, odgovor je $(2^k - 1)^n$.
21. Neka je $A_i = \{(x, y, i) : 1 \leq x < y < i \leq n, x + y > i\}$. Vrijedi
$$|A_i| = \begin{cases} (m-1)^2, & \text{za } i = 2m; \\ m(m-1), & \text{za } i = 2m+1. \end{cases}$$
Ukupan broj trougova je
$$|A_4| + |A_5| + \cdots + |A_n| = \begin{cases} \frac{p(p-1)(4p+1)}{6}, & \text{ako je } n = 2p+1; \\ \frac{p(p-1)(4p-5)}{6}, & \text{ako je } n = 2p. \end{cases}.$$

22. Ako 9^k počinje sa 9, on ima isto cifara kao i 9^{k-1}, inače je broj cifara u 9^k za jedan veći nego u 9^{k-1}. U 3999 koraka (9^1 do 9^{4000}) broj cifara je povećan za 3816. Stoga je broj cifara koje počinju sa 9 jednak (računajući i prvu devetku!) $3999 - 3816 + 1 = 184$.
23. Posmatrajmo skup

$$X = \{(A, B, C) : A \text{ se rukovao } B \text{ i } C, B \text{ i } C \text{ se nisu rukovali}\}.$$

Sa n označimo broj ljudi koji se rukovao sa dvojicom na tom skupu. Sada elemente skupa X možemo brojati na dva načina ovako:
- Ako prvo biramo osobu A, zatim B pa onda C, to je moguće uraditi na $12k(3k + 6)(3k + 5 - n)$ načina.
- Ako prvo biramo osobu B, zatim osobu C i na kraju A dobićemo da traženih trojki ima $12k(9k - 7)n$.

Tako je

$$|X| = 12k(3k + 6)(3k + 5 - n) = 12k(9k - 7)n,$$

odnosno,

$$n = \frac{(3k + 6)(3k + 5)}{(12k - 1)}.$$

Odavde zaključujemo da je n djeljiv sa tri, i iz uslova da je

$$\frac{4n}{3} = k + 4 - \frac{3k - 44}{12k - 1} \text{ cijeli broj dobijamo da je } k = 3.$$

dakle, na sastanku je bilo prisutno 36 ljudi.
24. Neka je $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_t\}$ separabilna pokrivajuća familija. Za svaki $x \in [n]$ posmatramo niz $(x_1, x_2, \ldots, x_t)$, gdje je $x_i = 0$ ako $x \notin A_i$, a $x_i = 1$ za $x \in A_i$. Kako je S pokrivajuća familija, ne pojavljuje se niz $(0, 0, \ldots, 0)$ i zato je $n \leqslant 2^t - 1$, odnosno $t \geqslant 1 + \log_2 n$. Sljedeća konstrukcija pokazuje da je moguće naći traženu familiju sa $t = 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$ skupova. Svaki od brojeva $x \in [n]$ zapišimo u binarnom sistemu (pojavi se $1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$ cifara). Ako sada definišemo

$$A_i = \{x \in [n] : \text{ u binarnom zapisu } x \text{ na } i - \text{tom mjestu je cifra } 1\}$$

lako je provjeriti da je $\{A_1, A_2, \ldots, A_t\}$ separabilna pokrivajuća familija.

3

MATEMATIČKA INDUKCIJA

3.1 Princip matematičke indukcije

U rješavanju osnovnog zadatka enumerativne kombinatorike je potrebno odrediti niz cijelih brojeva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ponekad je korisno[1] nekoliko prvih brojeva u tom nizu izračunati "na prste". To nam može pomoći da naslutimo tačnu vrijednost za sve a_n.

Na primjer, neka je a_n zbir recipročnih vrijednosti proizvoda elemenata u svim nepraznim podskupovima od $[n]$:

$$a_n = \sum_{\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}\subseteq[n]} \frac{1}{x_1x_2\cdots x_k}.$$

Računajući nekoliko prvih članova niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dobijamo

$$a_1 = \frac{1}{1} = 1, a_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1\cdot 2} = 2,$$

$$a_3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} = 3.$$

Tako možemo naslutiti da je $a_n = n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Princip matematičke indukcije je moćno sredstvo pomoću kojeg često našu pretpostavku možemo i dokazati. Riječ *indukcija* je latinskog porijekla i znači *prenošenje* ili *uvođenje*. U matematici riječ indukcija se koristi kada se sa konkretnih tvrđenja (koja vrijede za nekoliko pojedinačnih slučajeva) prelazi na opšta (koja vrijede za sve slučajeve).

[1] To je posebno korisno ako nam ništa pametnije ne pada na pamet!

Ipak, prilikom tog uopštavanja moramo biti veoma oprezni. Naime, to što neko tvrđenje vrijedi za mnogo konkretnih slučajeva, nikako ne znači da će vrijediti uvijek. Ako neko tvrđenje vrijedi za sve prirodne brojeve manje od milion, to ne znači da vrijedi i za milion, a pogotovo ne znači da vrijedi za sve prirodne brojeve.

Posmatrajmo sljedeća dva primjera:

(a) Za proizvoljan prirodan broj n neka je S_n broj definisan sa

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} + \frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

Izračunajmo S_n za nekoliko prvih prirodnih brojeva:

$$S_1 = \frac{1}{2}\ ,\ S_2 = \frac{2}{3}\ ,\ S_3 = \frac{3}{4}\ ,\ S_4 = \frac{4}{5}\ ,\ \ldots.$$

Sada se nameće zaključak da je

$$S_n = \frac{n}{n+1} \text{ za sve } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Neka je zadan polinom $p(x) = x^2 + x + 41$. Primijetimo da je

$$p(1) = 43, p(2) = 47, p(3) = 53, p(4) = 61, p(5) = 71, p(6) = 83, \ldots.$$

Dakle, vrijednosti polinoma $p(x)$ u nekoliko prvih prirodnih brojeva su prosti brojevi. Da li su možda vrijednosti polinoma $p(x)$ prosti brojevi za sve $x \in \mathbb{N}$?

Tvrđenje (a) je zaista tačno. Naime, za sve $k \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Stoga je

$$S_n = \tfrac{1}{1\cdot 2} + \tfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \tfrac{1}{k\cdot(k+1)} + \cdots + \tfrac{1}{(n-1)\cdot n} + \tfrac{1}{n\cdot(n+1)} =$$

$$= \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \cdots - \tfrac{1}{k} + \tfrac{1}{k} - \tfrac{1}{k+1} + \cdots + \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1} = \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{n+1} = \tfrac{n}{n+1}.$$

Sa druge strane, zaključak u (b) je pogrešan:

$$p(41) = 41^2 + 41 + 41 = 41\cdot 43, \text{ što svakako nije prost broj.}$$

Neformalno govoreći, princip matematičke indukcije možemo ilustrovati sljedećim primjerom.

Zamislimo da šetamo ulicom i da nam u susret dolazi kolona automobila. Neka je prvi automobil u toj koloni crven. Ako znamo da će poslije svakog crvenog automobila opet naići automobil crvene boje, lako je zaključiti da su svi automobili koji nam dolaze u susret crveni.

Formalno, princip matematičke indukcije možemo iskazati na sljedeći način. Neka je $\big(P(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ niz tvrđenja koje posmatramo.
Jedan od načina da pokažemo da su sva tvrđenja u tom nizu tačna je:

(**baza indukcije**) Dokazati da je prvo tvrđenje u tom nizu tačno;

(**korak indukcije**) Za proizvoljan prirodan broj k pretpostavimo da je tačno tvrđenje $P(k)$ u tom nizu. Koristeći tu pretpostavku dokažemo da je tačno i tvrđenje $P(k+1)$ neposredno iza njega.

Svakako je jedan od razloga efikasnosti matematičke indukcije i taj što se u dokazu tačnosti $P(k+1)$ smije koristiti pretpostavka o tačnosti $P(k)$ bez dokazivanja!

Na jeziku matematičke logike princip matematičke indukcije možemo zapisati ovako:

$$\Big(P(1) \wedge (\forall k \in \mathbb{N})\,[P(k) \Rightarrow P(k+1)]\Big) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})P(n).$$

Sljedeća korespondencija nam daje vezu između ove formalne definicije i primjera sa automobilima:

$$\begin{array}{rcl} \text{prvi automobil je crven} & \leftrightarrow & \text{prvo tvrđenje je tačno} \\ \\ \text{kada je crven } k\text{-ti automobil} & & \text{kada je neko tvrđenje} \\ \text{i sljedeći automobil} & \leftrightarrow & P(k) \text{ tačno, i sljedeće} \\ (k+1) \text{ je crvene boje} & & \text{tvrđenje } P(k+1) \text{ je tačno} \\ \\ \text{svi automobili su crveni} & \leftrightarrow & \text{sva tvrđenja su tačna.} \end{array}$$

U literaturi se može pronaći da je metoda matematičke indukcije prvi put spomenuta 1575. godine u dokazu formule za zbir prvih n neparnih brojeva (Frančesko Mauroliko, *Arithmeticorum libri duo*). To će biti i naš prvi primjer primjene matemtičke indukcije.

Primjer 3.1.1. Dokazati da je suma prvih n neparnih prirodnih brojeva jednaka n^2.

Rješenje: Primijetimo da je n-ti neparni broj $2n-1$. Neka je $P(n)$ tvrđenje:

$$P(n) \vdots\, 1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1)=n^2.$$

Kako vrijedi $1=1$, to je tvrđenje $P(1)$ tačno (ili prvi automobil jeste crven).

Sada ćemo, koristeći pretpostavku da tvrđenje vrijedi za proizvoljan prirodan broj k, pokazati istinitost tvrđenja za $k+1$.
Ako je tvrđenje $P(k)$ tačno, tada za $k \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$1+3+5+\cdots+(2k-3)+(2k-1)=k^2.$$

Tu pretpostavku koristimo da izračunamo zbir prvih $k+1$ neparnih brojeva.

$$1+3+\cdots+(2k-3)+(2k-1)+(2k+1)=\Big(1+3+\cdots+(2k-1)\Big)+(2k+1)=$$

$$=(\text{na osnovu pretpostavke o } P(k)) = k^2+(2k+1)=(k+1)^2.$$

Dakle, pokazali smo da vrijedi $(\forall k \in \mathbb{N})(P(k) \Rightarrow P(k+1))$, to jest, kada je k-ti automobil crven i onaj iza njega je crven. Pomoću principa matematičke indukcije zaključujemo da je za sve $n \in \mathbb{N}$ zbir prvih n neparnih brojeva jednak n^2.

$\diamondsuit$

Sada ćemo se vratiti na primjer sa početka ovog poglavlja.

Primjer 3.1.2. Dokaži da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$a_n = \sum_{\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}\subseteq[n]} \frac{1}{x_1x_2\cdots x_k} = n.$$

Rješenje: Za $n=1$ tvrđenje je tačno. Pretpostavimo da za neki prirodan broj n vrijedi $a_n=n$. Ako pri računanju a_{n+1} sabirke grupišemo u dva dijela, u zavisnosti od toga da li odgovarajući podskup od $[n+1]$ sadrži $n+1$ ili ne, dobijamo:

$$a_{n+1} = \left(\sum_{\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}\subseteq[n]} \frac{1}{x_1x_2\cdots x_k}\right) + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\sum_{\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}\subseteq[n]} \frac{1}{x_1x_2\cdots x_k}\right).$$

Kada iskoristimo induktivnu pretpostavku, dobićemo da je

$$a_{n+1} = n + \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} = n + 1.$$

$\diamondsuit$

Pomoću principa matematičke indukcije možemo na još jedan način izračunati broj linearnih uređenja (permutacija) na skupu od n elemenata.

Primjer 3.1.3. Broj linearnih uređenja na skupu od n elemenata je jednak $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$.

Rješenje: Za skup sa jednim elementom tvrđenje iz teoreme očigledno vrijedi. Pretpostavimo da je $n!$ broj linearnih uređenja na proizvoljnom skupu sa n elemenata. Ako je $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$, sva linearna uređenja na X možemo dobiti tako što

1) Prvo linearno uredimo skup $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ u niz $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$. Na osnovu induktivne pretpostavke to možemo uraditi na $n!$ načina.
2) Sada odaberimo poziciju za element x_{n+1}. Taj element može biti ili ispred x_{i_1}, ili između x_{i_1} i x_{i_2}, ili između x_{i_2} i x_{i_3}, $\ldots$, ili između $x_{i_{n-1}}$ i x_{i_n}, ili iza x_{i_n}. Dakle, postoji $n+1$ moguće mjesto za x_{n+1}.

Po principu proizvoda dobijamo da je broj linearnih uređenja na skupu od $n+1$ elemenata jednak $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$.

$\diamondsuit$

U primjeni matematičke indukcije trebamo biti oprezni. Poznat je sljedeći primjer nekorektne primjene indukcije.
Posmatrajmo niz tvrđenja:

$P(n)$: ako na livadi pase n konja, svi konji na toj livadi su iste boje.

"Dokaz" ovog (očigledno pogrešnog) niza tvrđenja provodimo pomoću matematičke indukcije:

$P(1)$ je svakako tačan iskaz: ako je samo jedan konj na livadi, onda su *svi konji na livadi* iste boje kao i taj konj.

Pretpostavimo da vrijedi za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$, i "pokažimo" da tada vrijedi i za $n+1$.

Neka je na livadi $n+1$ konj: $\{K_1, K_2, \ldots, K_n, K_{n+1}\}$. Prvih n konja $\{K_1, K_2, \ldots, K_n\}$ su iste boje (po induktivnoj pretpostavci). Takođe, i n konja $\{K_2, K_3, \ldots, K_n, K_{n+1}\}$ su po pretpostavci iste boje. Kako se ovi skupovi konja sijeku (K_2 se nalazi u oba skupa), matematičkom indukcijom smo pokazali da su svi konji na livadi iste boje.

Svi ćemo se složiti da ne moraju svi konji biti iste boje. Gdje je onda greška u rasuđivanju?
Iskaz $P(1)$ je zaista tačan. Međutim, implikacija $P(1) \Rightarrow P(2)$ nije tačna! Zaista, skupovi $\{K_1, K_2, \ldots, K_n\}$ i $\{K_2, K_3, \ldots, K_n, K_{n+1}\}$ se ne sijeku za $n = 1$. Prevara je u zaključku da se konj K_2 nalazi u oba posmatrana skupa. To jeste tačno za sve implikacije $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, osim za $k = 1$!

Dakle, dovoljno je da jedna od implikacija $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ ne bude tačna, pa da ne možemo zaključiti da su sva tvrđenja $P(n)$ tačna.

PRIMJEDBA 3.1.4. Uočimo dva svojstva skupa prirodnih brojeva:

(i) Jedan je najmanji prirodan broj.
(ii) Za svaki prirodni broj $n \in \mathbb{N}$ postoji jedinstven sljedbenik $n' = n+1$.

Prostije rečeno, skup prirodnih brojeva ima početak (to je broj jedan), i prirodni brojevi su "uređeni" u niz, to jest za svaki $n \in \mathbb{N}$ se tačno zna koji broj je "poslije njega". Nije teško zaključiti da se princip matematičke indukcije može primijeniti na sve skupove[2] koji imaju svojstva (i) i (ii).

Ta svojstva imaju skupovi oblika $\{n \in \mathbb{Z} : n \geqslant m\}$, gdje je m proizvoljan cijeli broj. Princip matematičke indukcije na takvom skupu možemo zapisati ovako

$$\Big(P(m) \wedge (\forall k \in \mathbb{Z}, k \geqslant m)\,[P(k) \Rightarrow P(k+1)]\Big) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{Z}, n \geqslant m) P(n).$$

Takvu situaciju srećemo u sljedećem primjeru.

Primjer 3.1.5. Dokazati da za proizvoljan prirodan broj n veći od četiri vrijedi $2^n > n^2$.

Rješenje: Za $n = 5$ tvrđenje je tačno: $2^5 = 32 > 25 = 5^2$.
Pretpostavimo da je $2^n > n^2$ za neki prirodan broj $n > 4$. Vrijedi

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > (\text{pretp.}) > 2n^2 > (\text{za } n \text{ veći od } 4) > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da za sve prirodne brojeve n veće od 4 vrijedi $2^n > n^2$.

[2] Aksioma matematičke indukcije je dio definicije skupa prirodnih brojeva, vidjeti [23].
Ako je $S \subseteq \mathbb{N}$ takav da vrijedi: $1 \in S$ i za sve n, $(n \in S) \Rightarrow ((n+1) \in S)$, tada je $S = \mathbb{N}$.

Da za sve $n \in \mathbb{N}, n > 4$, vrijedi $2^n > n^2$ možemo dokazati i kombinatorno. Podsjetimo se da je n^2 broj elemenata u $[n] \times [n]$ i da je 2^n broj podskupova skupa $[n]$.
Uređenom paru $(a, b) \in [n] \times [n]$ dodijelimo skup $S_{(a,b)} \subset [n]$ na sljedeći način:

$$S_{(a,b)} = \begin{cases} [n] \setminus \{a, b\}, & \text{ako je } a < b; \\ \{a, b\}, & \text{ako je } a > b. \\ \{a\}, & \text{ako je } a = b. \end{cases}$$

Lako je primijetiti da je za $n > 4$ preslikavanje $(a, b) \mapsto S_{(a,b)}$ dobro definisana injekcija. Kako to preslikavanje očigledno nije bijekcija, to skup $[n] \times [n]$ ima manje elemenata od skupa svih podskupova od $[n]$.

$\diamondsuit$

PRIMJEDBA 3.1.6. Neka je zadan niz tvrdnji $(P(n))_{n\in\mathbb{N}}$. U nekim slučajevima, za dokaz tvrđenja $P(n)$ treba pretpostaviti da su tačne sve prethodne tvrdnje $P(1), P(2), \ldots, P(n-1)$. U literaturi se ovaj princip naziva **jaka** ili **stroga** indukcija.

To samo izgleda strožije od zahtjeva u "običnoj" indukciji. Može se pokazati (naravno, matematičkom indukcijom!) da je jaka indukcija ekvivalentna sa običnom indukcijom.

Formalno, princip stroge matematičke indukcije se može zapisati na sljedeći način:

$$\Big(P(1) \wedge (\forall k \in \mathbb{N})\big[\big(P(1) \wedge \cdots \wedge P(k)\big) \Rightarrow P(k+1)\big]\Big) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})P(n).$$

Evo jednog primjera u kojem ćemo koristiti ovu varijantu matematičke indukcije.

Primjer 3.1.7. Neka $a_0 = 0$ i neka je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zadan sljedećom relacijom:

$$a_{n+1} = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + n + 1.$$

Dokazati da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n = 2^n - 1$.

Rješenje: Primijetimo da je $a_1 = 1$. Pretpostavimo da je $a_i = 2^i - 1$ za sve $i = 1, 2, \ldots, n$. Uz tu pretpostavku je

$$a_{n+1} = (2-1)+(2^2-1)+\cdots+(2^n-1)+n+1 = 1+2+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1,$$

pa je tvrđenje dokazano.

$\diamondsuit$

Ponekad, da bismo uspješno koristili indukciju, trebamo "pojačati" tvrđenje koje dokazujemo.

Primjer 3.1.8. Dokaži da za sve prirodne brojeve $n > 1$ vrijedi

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{3}{4}.$$

Rješenje: Ako pokušamo ovu nejednakost dokazati indukcijom, nećemo uspjeti. Umjesto zadane, pokušajmo dokazati strožiju nejednakost

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{3}{4} - x_n,$$

gdje je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ neki niz sa pozitivnim članovima. Prednost dokazivanja "jače" tvrdnje je u tome što brojeve x_n možemo odabrati sami. Biramo ih tako da nam omoguće primjenu principa matematičke indukcije! Da bi iz tačnosti nejednakosti za n zaključili da vrijedi i za $n + 1$ biće dovoljno da je

$$\frac{3}{4} - x_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{3}{4} - x_{n+1}, \text{ odnosno da je } \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant x_n - x_{n+1}.$$

Lako je provjeriti da niz $x_n = \frac{1}{n}$ ispunjava traženi zahtjev. Sada je lako matematičkom indukcijom dokazati da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{3}{4} - \frac{1}{n}.$$

To ostavljamo za vježbu. Primijetimo da je time dokazana i polazna nejednakost.

$\diamondsuit$

3.2 Neke primjene matematičke indukcije

Često se matematička indukcija koristi da bi konstruisali niz objekata sa zadanim svojstvom.

TEOREMA 3.2.1. *Postoji beskonačno mnogo prostih brojeva.*

Ova teorema se može dokazati na mnogo načina (u [2] se može naći šest različitih dokaza!). Sljedeći dokaz, koji se pripisuje Euklidu[3], je vjerovatno prvi primjer indirektne primjene principa matematičke indukcije.

[3] Euclid, oko 300 godine p.n.e.

Dokaz. Pretpostavimo da je skup prostih brojeva konačan, to jest da su $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$ svi prosti prirodni brojevi.
Uočimo broj $N = p_1 \cdot p_2 \cdots p_{n-1} \cdot p_n + 1$.

Lako je primijetiti da nijedan prost broj p_i ne dijeli N, jer bi tada broj $1 = N - p_1 \cdot p_2 \cdots p_{n-1} \cdot p_n$ bio djeljiv sa p_i. Stoga mora da postoji "novi" prost broj p koji dijeli N. Kako je taj prost broj p različit od svih p_i, to je naša pretpostavka o tome da ima samo n prostih brojeva pogrešna.

□

U suštini, u prethodnoj teoremi smo dokazali tvrđenje

ako postoji n prostih brojeva, tada postoji i $n+1$ prost broj.

Ovo se može prepoznati kao korak matematičke indukcije.

Matematička indukcija je efikasna i u rješavanju raznih kombinatorno-geometrijskih problema. Evo jednog od najjednostavnijih primjera.

Primjer 3.2.2. U prostoru je zadano n ravni koje sve prolaze kroz istu tačku, ali nikoje tri ne sadrže istu pravu. Dokazati da te ravni dijele prostor na $n(n-1)+2$ regiona!

Rješenje: Neka je a_n broj regiona na koji je prostor podijeljen sa n ravni. Lako je primijetiti da je $a_1 = 2$.

Pretpostavimo da je n ravni koje se nalaze u opisanom položaju podijelilo prostor na $n(n-1)+2$ regiona, to jest da je $a_n = n(n-1)+2$.

Sada dodajmo novu ravan π. Presjek već postavljenih n ravni sa π je n pravih koje prolaze kroz istu tačku. Tih n pravih je podijelilo ravan π na $2n$ dijelova. Svaki od tih dijelova, presječe jedan "stari" region od a_n postojećih na dva dijela. Tako je

$$a_{n+1} = a_n + 2n = n(n-1) + 2 + 2n = (n+1)n + 2.$$

◇

Sljedeća teorema je uopštenje tvrđenja iz primjera 2.4.2. Hiperravan u $\mathbb{R}^d$ je afini potprostor dimenzije $d-1$. Svaka hiperravan podijeli $\mathbb{R}^d$ na dva poluprostora. U ravni hiperravan je prava, u prostoru je hiperravan "obična" ravan, itd . . . . Algebarski, hiperravan u $\mathbb{R}^d$ je skup rješenja netrivijalne linearne jednačine sa d nepoznatih.

TEOREMA 3.2.3 (Šlefli[4]). *Neka je zadato n hiperravni u $\mathbb{R}^d$ u opštem položaju.[5] Tih n hiperravni će podijeliti $\mathbb{R}^d$ na*

$$\binom{n}{d} + \binom{n}{d-1} + \cdots + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}$$

različitih regiona.

Ovo je primjer gdje ćemo koristiti matematičku indukciju po dva indeksa n i d.

Dokaz. Neka je $a_{n,d}$ traženi broj regiona. Za $d = 1$ hiperravni su tačke. Kako n različitih tačaka podijeli pravu na $n + 1$ region, za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_{n,1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{0}$.

Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za proizvoljan broj hiperravni u dimenzijama manjim od d. Indukcijom po broju hiperravni n dokazujemo da formula iz teoreme vrijedi i za $a_{n,d}$. Jedna hiperravan podijeli $\mathbb{R}^d$ na dva dijela, pa je $a_{1,d} = \binom{1}{1} + \binom{1}{0} = 2$. Pretpostavimo da teorema vrijedi za $n - 1$ hiperravni u opštem položaju u $\mathbb{R}^d$.

Slično kao i u primjeru 2.4.2, zapitajmo se za koliko se $a_{n-1,d}$ poveća dodavanjem nove hiperravni π. Sve postojeće hiperravni u $\mathbb{R}^d$ sijeku π, i presjeci su $(d-2)$-dimenzionalne ravni (hiperravni u π). Po induktivnoj pretpostavci za $d-1$, tih $n-1$ ravni dimenzije $d-2$ podijele novu ravan π na $a_{n-1,d-1}$ regiona. Svaki od tih $(d-1)$-dimenzionalnih regiona donese jedan novi region u podijeli $\mathbb{R}^d$. Stoga vrijedi da je

$$a_{n,d} = a_{n-1,d} + a_{n-1,d-1}.$$

Na osnovu induktivne pretpostavke za $a_{n-1,d}$ i $a_{n-1,d-1}$ vrijedi

$$a_{n,d} = a_{n-1,d} + a_{n-1,d-1} = \binom{n-1}{0} + \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0}\right] + \left[\binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1}\right] + \cdots + \left[\binom{n-1}{d} + \binom{n-1}{d-1}\right].$$

Iz formule (ii) u teoremi 2.5.6 dobijamo

$$a_{n,d} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{d}.$$

□

[4] Ludwig Schläfli (1814-1895)

[5] Za potrebe ove teoreme, biti u opštem položaju znači da je za sve $k \leqslant d$ presjek bilo kojih k hiperravni $(d-k)$-dimenzionalan potprostor od $\mathbb{R}^d$, a presjek bilo kojih $d+1$ hiperravni je prazan skup.

Matematička indukcija se takođe često koristi u dokazivanju nejednakosti. Jedna od najpoznatijih i najvažnijih nejednakosti je ona između aritmetičke i geometrijske sredine.

TEOREMA 3.2.4 (A-G nejednakost). *Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivni realni brojevi. Aritmetička sredina tih brojeva*

$$A = A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

je uvijek veća ili jednaka od njihove geometrijske sredine

$$G = G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su svi x_i jednaki.

Sljedeći elegantan dokaz se u [2] pripisuje Košiju[6].

Dokaz. Posmatrajmo niz tvrđenja $P(n)$ (koji je ekvivalentan sa A-G nejednakosti):

$$P(n)\text{: za } x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ iz } \mathbb{R}^+ \text{ je } x_1 x_2 \cdots x_n \leqslant \Big(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\Big)^n.$$

Za $n = 2$ tvrđenje vrijedi jer je

$$x_1 x_2 \leqslant \Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big)^2 \text{ ekvivalentno sa } (x_1 - x_2)^2 \geqslant 0.$$

Ljepota Košijevog dokaza je u sljedećoj varijaciji metoda matematičke indukcije:

Ako za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$(*)$ $P(n) \Rightarrow P(n-1)$,

$(**)$ $\Big(P(2) \wedge P(n)\Big) \Rightarrow P(2n)$,

tada su sve tvrdnje $P(n)$ tačne, odnosno A-G nejednakost vrijedi. Provjeriti da su implikacije $(*)$ i $(**)$ tačne je "tehnički dio" posla.

Dokažimo tvrđenje $(*)$. Neka je $a := \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i}{n-1}$. Tada je

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1} x_i\right) \cdot a \leqslant (\text{ zbog } P(n)) \leqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i + a}{n}\right)^n = a^n,$$

pa nakon skraćivanja sa a vrijedi

[6] Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857)

$$\prod_{i=1}^{n-1} x_i \leqslant a^{n-1} = \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Da dokažemo implikacije (∗∗), uočimo da zbog $P(n)$ vrijedi

$$\prod_{i=1}^{2n} x_i = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\prod_{i=n+1}^{2n} x_i\right) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}\right)^n \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{x_i}{n}\right)^n.$$

Sada iskoristimo pretpostavku da vrijedi $P(2)$, pa dobijamo

$$\prod_{i=1}^{2n} x_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}\right)^n \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{x_i}{n}\right)^n \leqslant \left(\sum_{i=1}^{2n} \frac{x_i}{2n}\right)^{2n},$$

čime je dokazano i tvrđenje (∗∗). Ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ tada je očigledno $A = G$. Ukoliko nisu svi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ međusobno jednaki, pretpostavimo da vrijedi $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ i da je $x_1 < x_n$. Tada je $x_1 < A < x_n$ i stoga vrijedi $(A - x_1)(x_n - A) > 0$, odnosno $x_1 x_n < A(x_1 + x_n - A)$. Sada možemo zaključiti da je

$$x_1 x_2 \cdots x_n < x_2 x_3 \cdots x_{n-1} A(x_1 + x_n - A) \leqslant \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n$$

Posljednja nejednakost u prethodnom redu se dobije primjenom $A - G$ nejednakosti na $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, A, x_1 + x_n - A$. □

3.3 Zadaci

1. Dokaži da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$
2. Opiši sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je $f(m+n) = f(m) + f(n)$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$.
3. Dokaži Bernulijevu nejednakost:
Za sve $x \in \mathbb{R}, x \geqslant -1$ i za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.
4. U ravni se nalazi n pravih ($n > 1$) tako da među njima nema paralelnih. Nađite grešku u sljedećem "razmišljanju":

Indukcijom po n pokazaćemo da se sve sijeku u jednoj tački. Za $n = 2$ to je očigledno. Pretpostavimo da tvrđenje vrijedi za n pravih i posmatrajmo prave $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$. Po pretpostavci, $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$ se sijeku u tački A, a prave $p_2, p_3, \ldots, p_n, p_{n+1}$ se sijeku u nekoj tački B. Kako prave p_2 i p_n sadrže tačke A i B to je $A = B$, pa sve prave prolaze kroz jednu tačku!

5. Neka je a realan broj za koji vrijedi $a+\frac{1}{a} \in \mathbb{Z}$. Dokaži da je $a^n+\frac{1}{a^n}$ takođe cijeli broj!
6. Za koje prirodne brojeve n vrijedi $3^n > n^4$?
7. Dokaži da za sve prirodne brojeve n vrijedi

$$2\sqrt{n+1}-2 < 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2\sqrt{n}-1.$$

8. Neka je n proizvoljan prirodan broj. Naći sve korijene polinoma

$$p_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x(x+1)}{2!}+\cdots\frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}{n!}.$$

9. Neka je P neki prost n-tougao, ne nužno konveksan. Dokaži da je P moguće podijeliti na trouglove (triangulisati) pomoću dijagonala!
10. Za proizvoljan prirodan broj n definišemo

$$f(n)=1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\cdots+\tfrac{1}{2n-1}-\tfrac{1}{2n}\ ,\ g(n)=\tfrac{1}{n+1}+\tfrac{1}{n+2}+\cdots+\tfrac{1}{2n}.$$

Dokaži da je $f(n)=g(n)$ za sve $n \in \mathbb{N}$.
11. Dokaži da su svi prirodni brojevi oblika

$$1007, 10017, 100117, 1001117, 10011117, \ldots$$

djeljivi sa 53.
12. U ravni se nalazi $3n$ tačaka tako da nikoje tri nisu kolinearne. Dokaži da postoji n disjunktnih trouglova sa tjemenima u tačkama $A_1, A_2, \ldots, A_{3n}$!
13. Na teniskom turniru je učestvovalo 2^n igrača i svako je igrao sa svakim. Dokaži da je moguće naći $n+1$ igrača i poredati ih u niz tako da je svaki igrač u tom nizu pobijedio sve igrače poslije njega!
14. Dokaži da je

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\cdots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}}} < 3.$$

15. Šezdeset i četiri kuglice su složene u nekoliko kutija. Dozvoljeno je odabrati dvije kutije sa p i q loptica, $p \geqslant q$, pa iz kutije sa p kuglica prebaciti q kuglica u drugu kutiju. Da li je na taj način moguće sve kuglice premjestiti u jednu kutiju?

16. U prostoru je zadano $2n$ tačaka i neke od njih su spojene dužima. Ako je povučeno bar n^2+1 duži, dokaži da postoje tri duži koji čine trougao!
17. Za proizvoljan prirodan broj n definišemo $p(n)$ kao proizvod cifara broja n. Nađi sve prirodne brojeve n za koje je $p(n) = n^2-10n-22$.
18. Opiši sve prirodne brojeve koji se mogu napisati kao zbir nekoliko uzastopnih prirodnih brojeva.
19. Neka je n prirodan broj veći od jedan. Neka je M skup intervala oblika $[a, b]$, gdje su $a, b \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant a < b \leqslant n$, za koji vrijedi sljedeće: ako je $I, I' \in M$ tada je $I \cap I' = \emptyset$, ili $I \subseteq I'$ ili $I' \subseteq I$. Koliko najviše intervala može da ima u M?
20. Neka je $p(x)$ polinom stepena d. Za sve $n \in \mathbb{N}$ definišemo $q(n) = p(1) + p(2) + \cdots + p(n)$. Dokaži da je q polinom stepena $d + 1$.
21. Posmatrajmo beskonačnu matricu čije su vrste i kolone indeksirane prirodnim brojevima. Da li je moguće upisati u tu matricu prirodne brojeve tako da svaka vrsta i svaka kolona sadrži svaki prirodni broj tačno jednom?
22. Zadani su prirodni brojevi $x_1, x_2, \ldots, x_m$ i $y_1, y_2, \ldots, y_n$ takvi da je
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = y_1 + y_2 + \cdots + y_n = s < mn.$$
Dokaži da se sa obe strane jednakosti može obrisati nekoliko sabiraka tako da jednakost i dalje ostane da vrijedi!
23. Neka je $R_1, R_2, \ldots$ familija konačnih nizova prirodnih brojeva definisana sa
$$R_1 = (1), \text{ ako je } R_{n-1} = (x_1, x_2, \ldots, x_s), \text{onda je}$$
$$R_n = (1, 2, \ldots, x_1, 1, 2, \ldots, x_2, \ldots, 1, 2, \ldots, x_s, n).$$
Tako je $R_2 = (1, 2)$,$R_3 = (1, 1, 2, 3)$, $R_4 = (1, 1, 1, 2, 1, 2, 3, 4)$. Dokaži da za sve $n > 1$ vrijedi k-ti član slijeva u R_n je 1 ako i samo ako je k-ti član zdesna u R_n različit od 1.

3.4 Rješenja zadataka

1. Indukcijom po n. Za korak indukcije je dovoljno uočiti da je
$$\big(1 + 2 + \cdots + n + (n+1)\big)^2 - \big(1 + 2 + \cdots + n\big)^2 = (n+1)^3.$$
2. Indukcijom po $n \in \mathbb{N}$ pokažemo da su jedine takve funkcije $f(n) = c \cdot n$.

3. Pokažimo korak indukcije:
$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geqslant (1+nx)(1+x) \geqslant 1+(n+1)x$.
4. Greška je u koraku indukcije za $n=2$. Implikacija $P(2) \Rightarrow P(3)$ nije tačna.
5. Korak indukcije:
$$a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}} = \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^n + \frac{1}{a^n}\right) - \left(a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}\right).$$
6. Možemo pokazati da iz $3^n > n^4$ slijedi $3^{n+1} > (n+1)^4$ za sve prirodne brojeve $n > \frac{1}{\sqrt[4]{3}-1}$, pa implikacije $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ vrijede za sve $n \geqslant 4$. Iz $3^8 = 9^4$, odnosno $3^8 > 8^4$, zaključujemo da je $3^n > n^4$ za sve $n \geqslant 8$. Za $n \in \{2,3,4,5,6,7\}$ se provjeri da ne vrijedi $3^n > n^4$.
7. Ovo se može dokazati direktno, bez indukcije. Iskoristimo da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:
$$2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}};$$
$$2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) = \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} > \frac{1}{\sqrt{n}}.$$
8. Može se indukcijom po n pokazati da je
$$p_n(x) = \frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{n!}.$$
Stoga su $-1, -2, \ldots, -n$ nule polinoma p_n.
9. Dokazaćemo tvrđenje indukcijom po broju tjemena poligona P. Postoje tri susjedna tjemena A, B i C (AB i BC su ivice poligona P) takvi da je ugao $\angle ABC$ manji od opruženog. Ovo možemo zaključiti ako posmatramo najmanji konveksan poligon koji sadrži P. Ako je za neko tjeme X dijagonala BX u unutrašnjosti poligona, tada je sa BX poligon P podijeljen na P_1 i P_2 koje možemo triangulisati po pretpostavci.
Ukoliko sve dijagonale iz tjemena B "izlaze" van poligona P, tada je AC dijagonala unutar P. U suprotnom bi postojala tjemena P koja su unutar $\triangle ABC$. Kroz sva takva tjemena povučemo prave paralelne sa AC. Tjeme X kroz koje prolazi takva prava najbliža B je takvo da BX ne izlazi van P, što je kontradikcija. Tada se "otkidanjem" trougla ABC dobija $(n-1)$-tougao koje se po pretpostavci može triangulisati.

10. Vrijedi

$$f(n+1) - f(n) = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} = g(n+1) - g(n),$$

pa tvrđenje slijedi indukcijom po n.

11. Primijetimo da je $1007 = 53 \cdot 19$. Razlika dva susjedna broja u tom nizu je oblika $901 \cdot 10^n = 53 \cdot 17 \cdot 10^n$.

12. Koristimo indukciju po n. Pretpostavimo da tvrđenje vrijedi za n i pokažimo da vrijedi i za $n+1$. Neka je P najmanji m-tougao koji sadrži sve zadane tačke (konveksan omotač $3n$ zadatih tačaka). Bez smanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je duž A_1A_2 ivica poligona P.
Od svih tačaka $A_3, A_4, \ldots, A_{3n+3}$ odaberimo tačku A_i, za koju je ugao $\measuredangle A_iA_1A_2$ najmanji. U poluravni sa granicom A_1A_i u kojoj nije tačka A_2 se nalazi $3n$ tačaka. Po pretpostavci se od tih $3n$ tačaka može napraviti n disjunktnih trouglova, koji će sa trouglom $A_1A_2A_i$ činiti $n+1$ traženih disjunktnih trouglova.

13. Tvrđenje dokazujemo indukcijom po n. Pretpostavimo da vrijedi za turnir sa 2^n igrača i posmatrajmo turnir sa 2^{n+1} igrača. Odaberimo igrača sa najviše pobjeda (on je pobijedio bar pola, odnosno bar 2^n učesnika turnira) i postavimo na početak niza. Po induktivnoj pretpostavci, od 2^n igrača koje je on pobjedio možemo naći $n+1$ igrača koji ispunjavaju uslove zadatka i poredati ih iza njega.

14. Pokazaćemo da za fiksiran $n \in \mathbb{N}$ i za sve $m \leqslant n$ vrijedi

$$\sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{(m+2)\sqrt{\cdots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}}} < m+1.$$

Koristimo indukciju "unazad". Očigledo, tvrđenje vrijedi za $m = n$. Ako pretpostavimo da vrijedi za $m+1$ dobijamo

$$\sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{(m+2)\sqrt{\cdots\sqrt{n-1\sqrt{n}}}}}} < \sqrt{m(m+2)} < m+1.$$

15. Pokazaćemo da vrijedi: Ako je broj kuglica 2^n uvijek je moguće na opisan način sve kuglice prebaciti u jednu kutiju.
To dokazujemo indukcijom po n. Za korak indukcije trebamo pokazati da će se poslije konačno mnogo "dozvoljenih presipanja" postići da u

svakoj kutiji ima paran broj kuglica. Tada se u svim kutijama dvije po dvije kuglice "slijepe", pa primijenimo induktivnu pretpostavku.

16. Indukcijom ćemo pokazati sljedeće tvrđenje:
Ako se od povučenih duži ne može formirati trougao, tada je broj duži najviše n^2.
Neka je AB jedna od povučenih duži koja spaja dvije zadane tačke A i B. Broj duži koje spajaju neke od preostalih $2n-2$ posmatranih tačaka (po induktivnoj pretpostavci) može biti najviše $(n-1)^2$. Kako nema trougla, ne mogu i A i B biti spojene sa nekom od preostalih tačaka. Ukupan broj duži je stoga najviše $(n-1)^2 + (2n-2) + 1 = n^2$.
17. Indukcijom po broju cifara od n možemo pokazati da za sve prirodne brojeve vrijedi $p(n) \leqslant n$. Tako se dobije da je $n \leqslant 12$. Provjerom dobijamo da je $n = 12$ jedini takav prirodan broj.
18. Svaki neparan broj je očigledno moguće napisati kao zbir uzastopnih: $2n+1 = n + (n+1)$.
Ako je prirodan broj oblika $n = 2^m(2r+1)$, tada je

$$n = (r + 1 - 2^m) + \cdots + (r-1) + r + (r+1) + \cdots + (r + 2^m).$$

Negativni brojevi u prethodnoj sumi se ponište sa odgovarajućim pozitivnim (negativnih ima manje!). Tako smo broj n napisali kao zbir uzastopnih prirodnih brojeva. Jedini brojevi koji se ne mogu napisati kao zbir nekoliko uzastopnih prirodnih brojeva su oblika 2^m, za neki $m \in \mathbb{N}$. Zaista, svaki broj oblika

$$k + (k+1) + \cdots + (k+r) = \frac{(r+1)(2k+r)}{2}$$

ima neki neparan faktor.
19. Indukcijom po n možemo pokazati da je $|M| \leqslant n-1$.
20. Indukcijom po stepenu d. Dovoljno je pokazati za $p(x) = x^d$. Iz polinoma $\frac{1}{d+1}\big((x+1)^{d+1} - x^{d+1}\big)$ dobijemo n^d i onda koristimo pretpostavku indukcije.
21. Indukcijom po n pokazaćemo sljedeće tvrđenje. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ možemo konstruisati matricu M_n tipa $2^n \times \mathbb{N}$ za koju vrijedi:
(a) U svakoj vrsti M_n se svaki prirodan broj pojavi tačno jednom.
(b) U svakoj koloni M_n se svaki prirodan broj pojavi najviše jednom
(c) Podmatrice $2^n \times 2^n$ od M_n generisane sa kolonama $k \cdot 2^n + 1, k \cdot 2^n + 2, \ldots, (k+1)2^n$ (gdje je $k \in \mathbb{N}_0$) su sastavljene od brojeva $k \cdot 2^n + 1, k \cdot 2^n + 2, \ldots, (k+1)2^n$, za $k \in \mathbb{N}_0$.

Očigledno je da matrica

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 \; 2 \; 3 \cdots \; n \; n+1 \cdots \end{bmatrix}$$

ispunjava uslove $(a),(b)$ i (c). Pretpostavimo da matrica

$$M_n = \left[\, A_1 \middle| A_2 \middle| A_3 \middle| A_4 \middle| \cdots \,\right],$$

gdje su $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ matrice $2^n \times 2^n$, ispunjava tražene zahtjeve. Sada uočimo da i za matricu

$$M_{n+1} = \left[\begin{array}{cc|cc|c} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & \cdots \\ A_2 & A_1 & A_4 & A_3 & \cdots \end{array}\right]$$

vrijede $(a),(b)$ i (c).

Niz matrica M_n nam je dovoljan da bi konstrisali matricu koju tražimo: m-ta vrsta tražene matrice je jednaka m-toj vrsti matrica M_n za sve $n \in \mathbb{N}$, za koje je $2^n \geqslant m$.

22. Tvrđenje dokazujemo indukcijom po $m+n$. Iz uslova zadatka slijedi $m, n \geqslant 2$. Za $m+n=4$ tvrđenje je očigledno. Pretpostavimo da vrijedi za sve m i n takve da je $m+n<k$ i pokažimo da vrijedi i za brojeve m i n kojima je zbir jednak k. Pretpostavimo da su x_1 i y_1 najveći sabirci na lijevoj i desnoj strani i da je $x_1 \geqslant y_1$. Tada je

$$(x_1 - y_1) + x_2 + \cdots + x_m = y_2 + y_3 + \cdots + y_n = s_1.$$

Kako je $s_1 = s - y_1 < s - \frac{s}{n} < \frac{mn(n-1)}{n} = m(n-1)$, na prethodnu jednakost možemo primijeniti induktivnu pretpostavku.

23. Uočimo familiju nizova $A_{n,i}$, za $n \in N, 1 \leqslant i \leqslant n$ definisanu sa

$$A_{n,1} = (1), A_{n,n} = (n), A_{n,i} = (A_{n-1,i-1}, A_{n-1,i-1}).$$

Primjetimo da su za sve n i i nizovi $A_{n,i}$ i $A_{n,n-i+1}$ iste dužine. Indukcijom po n se može pokazati da za sve $1 \leqslant i \leqslant n$ vrijedi

$$A_{n-1,i} = (x_1, x_2, \ldots, x_t) \Rightarrow A_{n,i} = (1, 2, \ldots, x_1, \ldots, 1, 2, \ldots, x_t).$$

Indukcijom po n se može dokazati da je $R_n = (A_{n,1} A_{n,2} \ldots, A_{n,n})$. I tvrđenje iz zadatka dokazujemo indukcijom po n. Ako je k-ti član niza R_n broj u, a k-ti član sdesna u tom nizu broj v, tada vrijedi $u \in A_{n,i} \Rightarrow u \in A_{n,n-i+1}$. Dalje, simetričan položaj u i v garantuje da vrijedi ako je u iz $A_{n-1,k-1}$ (ili iz $A_{n-1,k}$) onda je v iz $A_{n-1,n-k}$ (ili iz $A_{n-1,n-k-1}$). To znači da brojevi u i v imaju simetrične pozicije i u R_{n-1}, pa možemo iskoristiti induktivnu pretpostavku.

4

PERMUTACIJE I SIMETRIČNA GRUPA

4.1 Bijekcije i injekcije

U poglavlju 2.5 permutacije nekog n-članog skupa X smo definisali kao rasporede svih elemenata iz X na n mjesta. Ako i elemente iz skupa X i mjesta na koja ih raspoređujemo označimo brojevima $1, 2, \dots, n$, tada svaki raspored elemenata skupa X na n mjesta (ili linearno uređenje skupa X) predstavlja bijekciju $\pi : [n] \to [n]$.

Vrijedi i obrnuto, svaka bijekcija na skupu $[n]$ definiše raspored elemenata iz X na n mjesta. Stoga, možemo reći da je permutacija preslikavanje $\pi : [n] \to [n]$ koje je bijekcija.

Dakle, permutacija se može definisati kao raspored n predmeta na n mjesta, kao linearano uređenje na konačnom skupu, ili kao bijekcija na skupu $[n]$.

Jedan od načina da se pregledno zapiše permutacija $\pi : [n] \to [n]$ je pomoću tablice:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(i) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Kako je π bijekcija, u donjoj vrsti tabele π se pojave svi brojevi od 1 do n, i to svaki broj tačno jednom.

Za sve permutacije skupa $[n]$ prva vrsta u prethodnoj tablici je uvijek ista, pa je permutacija π potpuno određena sa drugom (donjom) vrstom.

Stoga, permutaciju π možemo zapisati i kao niz (riječ) $\pi_1\pi_2 \dots \pi_n$ ili kao uređenu n-torku $(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(i), \dots, \pi(n))$ u kojoj se pojave svi brojevi od 1 do n.

U teoremi 2.5.1 i primjeru 3.1.3 smo pokazali da skup svih permutacija na skupu $[n]$ ima $n!$ elemenata.

Neka je X skup od n elemenata i neka je $r \leqslant n$ neki prirodan broj. U primjedbi 2.5.2 smo definisali r-permutaciju[1] skupa X kao niz (riječ) $x_1x_2\ldots x_r$ dužine r u kojem se nalaze međusobno različiti elemenati skupa X. Ako elemente skupa X označimo brojevima iz $[n]$, kao i kod permutacija, r-permutacije skupa X možemo interpretirati kao injekcije $f : [r] \to [n]$.

Sljedeće tvrđenje smo već dokazali u posljedici 2.5.3.

TEOREMA 4.1.1. *Neka su r i n prirodni brojevi i neka je $r \leqslant n$. Broj injekcija $f : [r] \to [n]$ je*

$$n(n-1)\cdots(n-r+2)(n-r+1) = \tfrac{n!}{(n-r)!}.$$

Ako je $r = n$, tada su r-permutacije skupa od n elemenata isto što i obične permutacije.

Evo nekoliko zadataka u kojima se kao rješenje pojavi broj permutacija, odnosno r-permutacija nekog skupa.

Primjer 4.1.2. Odgovori na sljedeća pitanja:

1. Koliko ima petocifrenih brojeva kojima su sve cifre različite i koji su djeljivi sa pet?
2. Na koliko načina šest muškaraca i pet žena može da stane u red, ako osobe istog pola ne smiju biti susjedi?
3. Koliko ima permutacija $f : [n] \to [n]$ kod kojih je $f(1) < f(2)$?

Rješenje:

1. Ako je broj djeljiv sa pet, njegova posljednja cifra je nula ili pet. Ako je posljednja cifra nula, tada su prve četiri cifre neka 4-permutacija skupa $[9]$. Tih permutacija ima $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$.
   Ako je posljednja cifra tog broja 5, prva je neki element a iz $[9] \setminus \{5\}$ (osam mogućnosti za to). Preostale tri cifre su neka 3-permutacija skupa $\big([9] \setminus \{a, 5\}\big) \cup \{0\}$. Takvih brojeva ima $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 2688$.
   Po principu sume, petocifrenih brojeva djeljivih sa pet, kojima su sve cifre različite ima $3024 + 2688 = 5712$.

[1] U ranijoj literaturi, r-permutacije skupa X su se nazivale varijacije r-te klase skupa od n elemenata.

2. Iz uslova zadatka zaključujemo da muškarci stoje na neparnim a žene na parnim mjestima. Raspored muškaraca na neparna mjesta je jedna od 6! permutacija skupa muškarca. Slično, žene na parna mjesta možemo rasporediti na 5! načina. Po principu proizvoda, broj traženih rasporeda je $6! \cdot 5!$.

3. Svih bijekcija (permutacija) skupa $[n]$ ima $n!$. Svakoj permutaciji $f : [n] \to [n]$ dodijelimo permutaciju $f' : [n] \to [n]$ definisanu sa $f'(i) = n + 1 - f(i)$. Lako je primijetiti da je preslikavanje $f \mapsto f'$ involucija, pa stoga i bijekcija. Dalje, vrijedi i

$$f(1) < f(2) \text{ ako i samo ako je } f'(1) > f'(2).$$

Po principu bijekcije, broj permutacija za koje je $f(1) < f(2)$ je jednak broju permutacija kod kojih je $f(1) > f(2)$. Stoga, tačno polovina svih permutacija ima traženo svojstvo, pa je odgovor $n!/2$.

$\diamondsuit$

Primjer 4.1.3. Neka je $n = 2k + 1$ neparan prirodan broj. Koliko ima permutacija $\pi : [n] \to [n]$ za koje je zbir

$$|\pi(1) - 1| + |\pi(2) - 2| + \cdots |\pi(n) - n|$$

maksimalan?

Rješenje: Kada se "oslobodimo" apsolutnih vrijednosti, dobiće se izraz sa $2n$ članova. Od tih $2n$ članova njih $n = 2k + 1$ je pozitivno. Kako je π bijekcija, svaki broj od 1 do n se u tom izrazu pojavi tačno dva puta.

Tražena suma će biti maksimalna ako su pozitivni brojevi u tom izrazu što je moguće veći. Dakle, da bi suma bila maksimalna, pozitivni brojevi u tom izrazu moraju biti $k+2, k+3, \ldots, 2k, 2k+1$ (njih ukupno $2k$, jer se svaki pojavi dva puta) i broj $k + 1$ (koji se pojavi jednom).

Tako dobijamo da je izraz $|\pi(1) - 1| + |\pi(2) - 2| + \cdots |\pi(n) - n|$ najviše

$$-1-1-\cdots-k-(k+1)+(k+1)+(k+2)+\cdots+(2k+1) = 2k(k+1) = \tfrac{n^2-1}{2}.$$

Neka je π permutacija za koju je posmatrana suma maksimalna. Posmatrajmo šta može da bude $\pi(k + 1)$. Razlikujemo tri slučaja:

(a) Neka je $\pi(k + 1) = i < k + 1$. Takav broj i možemo odabrati na k načina. Ako želimo da posmatrana suma bude maksimalna, tada je $k+1 = f(j)$, za neki $j > k+1$ (i taj j se može odabrati na k načina).

Da bi suma bila maksimalna, brojevi $1, 2, \ldots, k$ se sa π slikaju u $k+2, k+3, \ldots, 2k+1$. Postoji $k!$ takvih preslikavanja (bijekcija). Dalje, restrikcija preslikavanja π definiše bijekciju između skupova $\{k+2, k+3, \ldots, 2k+1\} \setminus \{j\}$ i $\{1, 2, \ldots, k,\} \setminus \{i\}$. Postoji $(k-1)!$ takvih preslikavanja.

Na osnovu principa proizvoda, zaključujemo da ovakvih bijekcija na skupu $[n]$ ima $k^2 k!(k-1)! = k(k!)^2$.

(b) Neka je $\pi(k+1) = j$, gdje je $j > k+1$. Na sličan način kao u prethodnom slučaju se može pokazati da je broj takvih bijekcija takođe $k(k!)^2$.

(c) Ako je $\pi(k+1) = k+1$ tada se brojevi iz $\{1, 2, \ldots, k,\}$ slikaju sa π u $\{k+2, k+3 \ldots, 2k+1\}$ i obrnuto. Takvih preslikavanja ima $(k!)^2$.

Primijenimo princip sume i dobijamo da je traženi broj permutacija za koje je posmatrana suma maksimalna jednak

$$2k(k!)^2 + (k!)^2 = (2k+1) \cdot (k!)^2 = n\left[\left(\tfrac{n-1}{2}\right)!\right]^2.$$

$\diamondsuit$

4.2 Simetrična grupa

Skup svih bijekcija (permutacija) na skupu $[n]$ označimo sa $\mathbb{S}_n$. Ako sa $\circ$ označimo kompoziciju preslikavanja, nije teško provjeriti da vrijedi:

- Ako su π, σ permutacije iz $\mathbb{S}_n$ tada je i $\pi \circ \sigma \in \mathbb{S}_n$.
- Za sve π, σ, τ iz $\mathbb{S}_n$ vrijedi $\pi \circ (\sigma \circ \tau) = (\pi \circ \sigma) \circ \tau$.
- Ako je $Id : [n] \to [n]$ identiteta (za sve $m \in [n]$ je $Id(m) = m$), tada je $Id \circ \pi = \pi \circ Id = \pi$, za sve $\pi \in \mathbb{S}_n$.
- Za sve $\pi \in \mathbb{S}_n$ postoji $\sigma \in \mathbb{S}_n$ tako da je $\pi \circ \sigma = \sigma \circ \pi = Id$. Za permutaciju σ kažemo da je **inverz** od π i pišemo $\sigma = \pi^{-1}$.

Iz prethodne primjedbe[2] slijedi:

TEOREMA 4.2.1. *Skup svih permutacija skupa $[n]$ s obzirom na kompoziciju funkcija je grupa.*

---

[2] Ako je na skupu G definisana binarna operacija $* : G \times G \to G$ za koju vrijedi

- za sve $x, y, z \in G$ je $x * (y * z) = (x * y) * z$ ($*$ je asocijativna),
- postoji $e \in G$ takav da je $x * e = e * x = x$ za sve $x \in G$ (e je neutralan element),
- za svaki $x \in G$ postoji $y \in G$ takav da je $x * y = y * x = e$ (svaki $x \in G$ ima inverz),

kažemo da je G grupa obzirom na operaciju $*$.

Ta grupa se naziva **simetrična grupa** i to je jedan od najvažnijih objekata u cijeloj matematici. Zanimljivo je da su simetrična grupa $\mathbb{S}_n$ i neke njene osobine bile predmet proučavanja mnogo prije nego što je pojam grupe formalno definisan.

U ovom poglavlju ćemo opisati nekoliko svojstava grupe $\mathbb{S}_n$ koja se koriste u daljem tekstu.

Kompozicija dvije permutacije $\pi \circ \sigma$ se zapisuje kraće sa $\pi\sigma$ i naziva se proizvod permutacija π i σ.

DEFINICIJA 4.2.2. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_k$ različiti brojevi iz skupa $[n]$. Sa $(a_1 a_2 \cdots a_k)$ označimo permutaciju $f \in \mathbb{S}_n$ za koju je

$$f(a_1) = a_2, f(a_2) = a_3, \ldots, f(a_{k-1}) = a_k, f(a_k) = a_1,$$

a za sve ostale $i \in [n] \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ je $f(i) = i$. Takva permutacija π se naziva **ciklus dužine** k (ili kraće k-ciklus.) Ciklus dužine dva se naziva **transpozicija**.

PRIMJEDBA 4.2.3. Neka je π proizvoljna permutacija u grupi $\mathbb{S}_n$. **Orbita elementa** i u permutaciji π je skup

$$\{\pi^m(i) : m \in \mathbb{N}\} \subseteq [n].$$

Taj skup je svakako konačan, pa postoji najmanji prirodan broj $s \in \mathbb{N}$ takav da je $\pi^s(i) = i$. Tako je orbita elementa i skup $\{i, \pi(i), \ldots, \pi^{s-1}(i)\}$.

Ciklus $C = (i\ \pi(i)\ \ldots\ \pi^{s-1}(i))$ je **ciklus permutacije** π **određen sa** i.

Za dva različita elementa $i, j \in [n]$, ciklusi (orbite) permutacije f određeni sa i odnosno sa j su ili disjunktni ili jednaki!

Proizvod ciklusa je proizvod u grupi $\mathbb{S}_n$, dakle kompozicija permutacija. Na primjer, u $\mathbb{S}_5$ je

$$(135)(123) = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 3\,2\,5\,4\,1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,3\,1\,4\,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,5\,3\,4\,1 \end{pmatrix} = (125),$$

dok je $(123)(135) = (235)$.

Za cikluse $\pi = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_k)$ i $\sigma = (b_1\ b_2\ \cdots\ b_l)$ kažemo da su disjunktni ako je $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \cap \{b_1, b_2, \ldots, b_l\} = \emptyset$. Lijepa osobina disjunktnih ciklusa je da međusobno komutiraju, odnosno za sve $i \in [n]$ vrijedi $\pi(\sigma(i)) = \sigma(\pi(i))$.

TEOREMA 4.2.4. *Svaka permutacija se može napisati kao proizvod disjunktnih ciklusa.*

Dokaz. Neka je π proizvoljna permutacija iz $\mathbb{S}_n$ i neka je C_1 ciklus određen brojem 1. Ako je $C_1 = \pi$ dokaz je završen. Ukoliko je $C_1 \neq \pi$ tada postoji element $i \in [n]$ koji ne pripada orbiti broja 1. Sada uočimo ciklus C_2 određen elementom i. Lako je provjeriti da su ciklusi C_1 i C_2 disjunktni. Ako je $f = C_1C_2$, dokazali smo tvrđenje teoreme. Ukoliko je $f \neq C_1C_2$, prethodni postupak ponavljamo. Kako je $[n]$ konačan skup, poslije konačno koraka (recimo k), dobićemo da je $\pi = C_1C_2 \cdots C_k$.

$\square$

Rastav neke permutacije u proizvod disjunktnih ciklusa je jedinstven do na raspored, to jeste, dva zapisa permutacije kao proizvoda disjunktnih ciklusa se mogu razlikovati samo u rasporedu ciklusa. Na primjer:

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 5\,9\,7\,1\,4\,6\,8\,3\,2 \end{pmatrix} = (154)(29)(378)(6) = (29)(6)(154)(378).$$

PRIMJEDBA 4.2.5. Kako je

$$(a_1a_2 \dots a_k) = (a_2a_3 \dots a_ka_1) = \cdots = (a_ka_1a_2 \dots a_{k-1}),$$

to proizvoljan ciklus možemo započeti bilo kojim njegovim elementom. Dakle, u svakom ciklusu dužine k, prvi element možemo proizvoljno odabrati. Na primjer, vrijedi

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 5\,9\,7\,1\,4\,6\,8\,3\,2 \end{pmatrix} = (154)(29)(378)(6) = (415)(92)(783)(6).$$

Ako u svakom ciklusu neke permutacije π postavimo najveći element ciklusa na početak, a zatim cikluse uredimo tako da početni elementi u ciklusima rastu, dobićemo **standardnu reprezentaciju** permutacije π. Standardna reprezentacija za

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 5\,9\,7\,1\,4\,6\,8\,3\,2 \end{pmatrix} \text{ je } (541)(6)(837)(92).$$

POSLJEDICA 4.2.6. *Svaka permutacija se može napisati kao proizvod transpozicija.*

Dokaz. Ako je $C = (a_1a_2 \dots a_r)$ proizvoljan ciklus uočimo da je:

$$(a_1a_2 \dots a_k) = (a_1a_2)(a_2a_3) \dots (a_{k-1}a_k) = (a_1a_k)(a_1a_{k-1}) \dots (a_1a_2).$$

Tvrđenje slijedi na osnovu teoreme 4.2.4.

$\square$

Iz prethodne posljedice je lako zaključiti da zapis permutacije π kao proizvoda transpozicija nije jedinstven.

DEFINICIJA 4.2.7. **Red permutacije** $\pi \in \mathbb{S}_n$ je najmanji prirodan broj m za koji je $\pi^m = Id$.

Očigledno je red k-ciklusa jednak k.

TEOREMA 4.2.8. *Neka je $\pi = C_1 C_2 \cdots C_k$ rastav permutacije π u proizvod disjunktnih ciklusa. Ako su $n_1, n_2, \ldots, n_k$ dužine ciklusa $C_1, C_2, \ldots, C_k$, tada je red permutacije π najmanji zajednički sadržalac brojeva $n_1, n_2, \ldots, n_k$.*

Dokaz. Neka je m najmanji zajednički sadržalac brojeva $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Tada vrijedi

$$\pi^m = (C_1 C_2 \cdots C_k)^m = \text{ciklusi su disjunktni} = C_1^m C_2^m \cdots C_k^m = Id.$$

Sa druge strane, ako je $\pi^r = C_1^r C_2^r \cdots C_k^r = Id$, lako se može zaključiti da je broj r djeljiv sa svim n_i. Najmanji takav broj je m.

□

DEFINICIJA 4.2.9. Neka je π permutacija iz $\mathbb{S}_n$. **Znak permutacije** π je

$$sgn(\pi) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j}.$$

Za svaki par (i, j), takav da je $1 \leqslant i < j \leqslant n$, razlika $i - j$ ili $j - i$ se pojavi tačno jednom u brojiocu razlomka iz definicije $sgn(\pi)$ (u onom kojem je imenilac jednak $|\pi^{-1}(i) - \pi^{-1}(j)|$). Zato je $sgn(\pi) \in \{-1, 1\}$.

Ako je znak permutacije jednak jedan, kažemo da je permutacija **parna**, inače je permutacija **neparna**.

PRIMJEDBA 4.2.10. Dakle, da bi smo odredili znak permutacije π, dovoljno je znati znakove svih činilaca u zapisu $sgn(\pi)$. Za sve $i < j$ razlomak

$$\frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j}$$

je negativan ako je $\pi(i) > \pi(j)$, odnosno pozitivan, ako je $\pi(i) < \pi(j)$. Za par (i, j) kažemo da je **inverzija** permutacije π ako je $i < j$ a $\pi(i) > \pi(j)$. Ako sa $inv(\pi)$ označimo broj inverzija u permutaciji π, iz prethodnog razmatranja zaključujemo da tada vrijedi

$$sgn(\pi) = (-1)^{inv(\pi)}.$$

Dakle, permutacija π je parna ako i samo ako je $inv(\pi)$ paran broj.

LEMA 4.2.11. *Za svake dvije permutacije π i σ vrijedi*

$$sgn(\pi\sigma) = sgn(\pi)sgn(\sigma).$$

Dokaz. Primijetimo da je

$$sgn(\pi\sigma) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{\pi(\sigma(i)) - \pi(\sigma(j))}{i-j} =$$

$$= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{\pi(\sigma(i)) - \pi(\sigma(j))}{\sigma(i)-\sigma(j)} \cdot \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} = sgn(\pi)sgn(\sigma).$$

□

PRIMJEDBA 4.2.12. Na osnovu posljedice 4.2.6 znamo da se svaka permutacija može napisati kao proizvod transpozicija. Neka je $\pi = \tau_1\tau_2\cdots\tau_k$. Kako je transpozicija neparna permutacija, na osnovu leme 4.2.11 dobijamo da je $sgn(\pi) = (-1)^k$. Proizvoljnu permutaciju možemo napisati kao proizvod transpozicija na više različitih načina. Broj transpozicija u tom zapisu ne mora biti isti, ali je uvijek iste parnosti.

Dakle, permutacija π je parna ako i samo ako se može napisati kao proizvod parnog broja transpozicija.

Stoga je ciklus dužine k je parna permutacija ako i samo ako je k neparan. Permutacija π je parna ako i samo ako je pri dekompoziciji π u proizvod disjunktnih ciklusa paran broj ciklusa parne dužine.

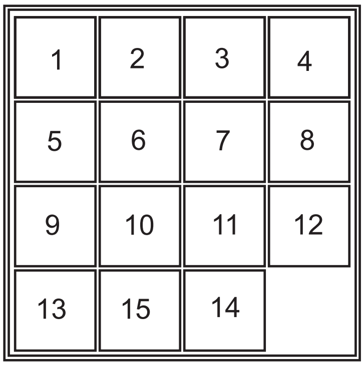
TEOREMA 4.2.13. *Ako je $n \geqslant 2$, broj parnih permutacija u $\mathbb{S}_n$ je jednak broju neparnih permutacija.*

Dokaz. Posmatrajmo preslikavanje $\pi \mapsto (12)\pi$. Lako je provjeriti da je ovo preslikavanje involucija. Takođe, iz leme 4.2.11 zaključujemo da su permutacije π i $(12)\pi$ različitog znaka. Stoga je preslikavanje $\pi \mapsto (12)\pi$ bijekcija koja parne permutacije slika u neparne, a neparne u parne.

□

PRIMJEDBA 4.2.14 (Lojdova zagonetka). Poznati autor mozgalica, Sem Lojd je postavio 1891. godine sljedeći problem:

U kvadrat 4×4 je smješteno 15 jediničnih kvadratića označenih brojevima od 1 do 15, dok je donje desno polje ostalo prazno. Kvadrati sa brojevima su složeni "skoro po redu"−jedino su kvadrati 14 i 15 zamijenili mjesta, vidi sliku 4.1.



Slika 4.1. *Lojdova zagonetka*

Problem: *Pomjerajući kvadrate koji su susjedni praznom u "prazan prostor" složiti sve brojeve od* 1 *do* 15 *po redu?*

Ovaj problem je izazvao veliku pažnju i Lojd je ponudio nagradu od 1000 dolara za pravilno rješenje ove zagonetke. Međutim, nije morao da se plaši za svoj novac, jer problem nije moguće riješiti!

Ova tvrdnja se pokaže tako što pomoću leme 4.2.11 pratimo kako se mijenja znak permutacije prilikom pomjeranja kvadrata!.

Označimo prazno polje sa 16 i zamislimo da su "ispod kvadratića" napisani brojevi od 1 do 15. Svakom rasporedu kvadratića na tabli 4×4 odgovara permutacija iz $\mathbb{S}_{16}$. Polaznom rasporedu kvadratića na tabli odgovara permutacija $\pi = (14\ 15)$ (cikluse dužine jedan ne pišemo), što je neparna permutacija. Poredak brojeva po redu, što želimo postići, odgovara identičkoj permutaciji koja je parna.

Jedno pomjeranje kvadrata i u prazan prostor je množenje transpozicijom $(i\ 16)$. Ako (u želji da složimo polja po redu) prazno polje "prošetamo" po tabli i vratimo ga u donji desni ugao, napravili smo paran broj poteza. To je ekvivalentno množenju $\pi = (14\ 15)$ sa parnim brojem transpozicija.
Međutim, sve ovako dobijene permutacije su neparne, i nije moguće na ovaj način dobiti identičku permutaciju. To je razlog zašto ovu zagonetku nije moguće riješiti!

4.3 O nekim numeričkim parametrima simetrične grupe

U ovom poglavlju razmatramo neke probleme enumerativne kombinatorike koji se prirodno pojave kada se proučava simetrična grupa. Neka je permutacija π iz $\mathbb{S}_n$ napisana kao proizvod disjunktnih ciklusa. Broj ciklusa dužine i u tom proizvodu označimo sa c_i.

Tip permutacije π je uređena n-torka $type(\pi) = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Ako je $type(\pi) = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ primijetimo da je tada

$$c_1 + 2c_2 + \cdots + ic_i + \cdots + nc_n = n.$$

Drugim riječima, tada je

$$(\underbrace{n, n, \ldots, n}_{c_n \text{ puta broj } n}, \ldots, \underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{c_2 \text{ dvojki}}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{c_1 \text{ jedinica}})$$

particija[3] broja n.

Za permutacije π i σ iz $\mathbb{S}_n$ kažemo da su **konjugovane** ako postoji $\tau \in \mathbb{S}_n$ tako da vrijedi $\pi = \tau\sigma\tau^{-1}$.

TEOREMA 4.3.1. *Permutacije π i σ su konjugovane ako i samo ako su istog tipa.*

Dokaz. Neka je $\pi = \tau\sigma\tau^{-1}$ i neka je C ciklus u π određen sa $i \in [n]$. Ako je C ciklus dužine m, tada iz $\pi^m(i) = (\tau\sigma\tau^{-1})^m(i) = \tau\sigma^m\tau^{-1}(i) = i$ možemo zaključiti da je $\sigma^m\left(\tau^{-1}(i)\right) = \tau^{-1}(i)$.

Ako je ciklus u σ određen sa τ dužine r tada iz $\sigma^r(\tau^{-1}(i)) = (\tau^{-1}\pi\tau)^r\tau^{-1}(i) = \tau^{-1}\pi^r(i) = \tau^{-1}(i)$ dobijamo da je $r = m$. Nastavljajući ovako, možemo zaključiti da konjugovane permutacije imaju istu strukturu ciklusa, to jest, isti tip.

Ukoliko je $type(\pi) = type(\sigma)$, permutacije π i σ možemo napisati kao proizvod ciklusa $\pi = C_1C_2\cdots C_r$ i $\sigma = C_1'C_2'\cdots C_r'$ tako da su za sve i ciklusi C_i i C_i' iste dužine. Ako je $C_i = (a_1a_2\ldots a_s)$ a $C_i' = (b_1b_2\ldots b_s)$, definišemo permutaciju τ sa $\tau(b_i) = a_i$. Ovo uradimo za sve cikluse C_i i C_i' (uključujući i cikluse dužine jedan). Lako se provjeri da je tada $\pi = \tau\sigma\tau^{-1}$, pa su permutacije π i σ konjugovane.

$\square$

[3] Ovaj zapis nije baš korektan. Kako je $c_n \leqslant 1$, broj n se u toj particiji pojavi najviše jednom.

Može se pokazati da je konjugovanost relacija ekvivalencije na $\mathbb{S}_n$. Sve permutacije konjugovane sa π čine klasu konjugacije. Klase konjugacije u $\mathbb{S}_n$ su ili disjunktne ili jednake. Sljedeće tvrđenje je očigledna posljedica dosadašnjeg razmatranja.

POSLJEDICA 4.3.2. *Različitih klasa konjugacije u $\mathbb{S}_n$ ima isto koliko i particija broja n.*

Sada ćemo odrediti koliko permutacija ima u konkretnoj klasi konjugacije u $\mathbb{S}_n$.

TEOREMA 4.3.3. *Broj permutacija tipa $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ u $\mathbb{S}_n$ je*

$$\frac{n!}{1^{c_1} \cdot c_1! \cdot 2^{c_2} \cdot c_2! \cdot \cdots \cdot n^{c_n} \cdot c_n!}.$$

Dokaz. Za fiksiranu n-torku $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ brojeva iz $\mathbb{N}_0$ za koje vrijedi

$$c_1 + 2c_2 + \cdots + ic_i + \cdots + nc_n = n$$

uočimo skup

$$\mathbb{S}_{\mathbf{c}} = \{\pi \in \mathbb{S}_n : type(\pi) = \mathbf{c}\} \subseteq \mathbb{S}_n.$$

Neka je permutacija $\pi = \pi(1)\pi(2)\cdots\pi(n)$ zapisana kao riječ. Definišimo preslikavanje

$$\Phi : \mathbb{S}_n \to \mathbb{S}_{\mathbf{c}}$$

tako da prvih c_1 elemenata u nizu $\pi(1)\pi(2)\cdots\pi(n)$ "proglasimo" ciklusima dužine 1. Sljedećih $2c_2$ članova tog niza "pretvorimo" u c_2 ciklusa dužine 2, narednih $3c_3$ elemenata pretvorimo u cikluse dužine tri, itd. ...

$$\Phi(\pi) = \Phi(\pi(1)\pi(2)\cdots\pi(n)) =$$
$$= \underbrace{(\pi_1)(\pi_2)\cdots(\pi_{c_1})}_{c_1}\underbrace{(\pi_{c_1+1}\pi_{c_1+2})\cdots(\pi_{c_1+2c_2-1}\pi_{c_1+2c_2})}_{c_2}\cdots$$

Da odredimo $|\Phi^{-1}(\sigma)|$, to jest, koliko će istih permutacija iz $\mathbb{S}_n$ "pogoditi" neku permutaciju u $\mathbb{S}_{\mathbf{c}}$, primijetimo sljedeće:
Neka je $\sigma = \Phi(\pi)$ proizvoljna permutacija tipa $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Napišimo je kao proizvod ciklusa, tako da su ciklusi uređeni po veličini, to jest " kraći" ciklusi su u tom zapisu prije "dužih".

Neka je $\tau = \tau_1\tau_2\dots\tau_n$ neka permutacija iz $\Phi^{-1}(\sigma)$ zapisana kao riječ.

(a) Ako u σ proizvoljno permutujemo c_i ciklusa dužine i, ne narušavajući poredak ciklusa po veličini, dobićemo istu permutaciju. Na takav način, cikluse dužine i u σ možemo permutovati na $c_i!$ načina. Permutaciji ciklusa u σ odgovara permutovanje odgovarajućih blokova po i susjednih elemenata u permutaciji τ. To su elementi koji se sa Φ slikaju u cikluse od σ dužine i. Na taj način smo dobili $c_1!c_2!\cdots c_n!$ permutacija koje se sa Φ slikaju u σ.

(b) Izbor početnog elementa u nekom ciklusu od σ odgovara cikličkom permutovanju susjednih elemenata od τ koji se sa Φ slikaju u taj ciklus. U svakom ciklusu permutacije σ, prvi element ciklusa dužine i možemo odabrati (vidjeti primjedbu 4.2.5) na i različitih načina. Na taj način dobijemo $1^{c_1}2^{c_2}\cdots n^{c_n}$ permutacija u $\Phi^{-1}(\sigma)$.

Na primjer, za permutaciju $\sigma = (1)(23)(456)(789)$ iz $\mathbb{S}_{(1,1,2)}$ vrijedi

$$\sigma = \Phi(123456789) = \Phi(123789456) = \Phi(123897645).$$

Na osnovu principa proizvoda, zaključujemo da je za proizvoljan $\sigma \in \mathbb{S}_{\mathbf{c}}$

$$|\Phi^{-1}(\sigma)| = 1^{c_1}c_1!2^{c_2}c_2!\cdots k^{c_k}c_k!\cdots n^{c_n}c_n!.$$

Sada elemenate skupa

$$\{(\pi, \Phi(\pi)) : \pi \in \mathbb{S}_n\}$$

prebrojimo na dva načina. Permutaciju $\pi \in \mathbb{S}_n$ možemo odabrati na $n!$ načina, a njena slika $\Phi(\pi)$ je jedinstveno određena.
Permutaciju $\Phi(\pi) \in \mathbb{S}_{\mathbf{c}}$ biramo na $|\mathbb{S}_{\mathbf{c}}|$ načina, a permutacija iz $\mathbb{S}_n$ kojima je to slika ima $1^{c_1}c_1!2^{c_2}c_2!\cdots k^{c_k}c_k!\cdots n^{c_n}c_n!$. Stoga je

$$n! = |\mathbb{S}_{\mathbf{c}}| \cdot 1^{c_1}c_1!2^{c_2}c_2!\cdots k^{c_k}c_k!\cdots n^{c_n}c_n!.$$

□

Sa $c(n,k)$ označimo broj permutacija u $\mathbb{S}_n$ koje imaju tačno k ciklusa. Taj broj se naziva **Stirlingov broj prve vrste bez znaka**.

TEOREMA 4.3.4. *Brojevi $c(n,k)$ zadovoljavaju sljedeću rekurzivnu relaciju*

$$c(n,k) = (n-1)c(n-1,k) + c(n-1,k-1),$$

uz početne uslove $c(n,k) = 0$ za $n \leqslant 0$ ili $k \leqslant 0$ (osim za $k = n = 0$ kada je $c(0,0) = 1$).

Dokaz. Kada permutaciji iz $\mathbb{S}_{n-1}$ sa $k-1$ ciklusa dopišemo ciklus (n) dužine jedan, dobije se permutacija iz $\mathbb{S}_n$ sa k ciklusa. Na taj način dobijemo sve permutacije skupa $[n]$ sa k ciklusa kod kojih je n fiksna tačka; njih je ukupno $c(n-1,k-1)$.

Sada pretpostavimo da n nije fiksna tačka permutacije π iz $\mathbb{S}_n$ koja ima tačno k ciklusa. Možemo uočiti da je takva permutacija π dobijena dopisivanjem n iza nekog od elemenata iz $[n-1]$ u neki od k ciklusa permutacije skupa $[n-1]$. Svakoj od $c(n-1,k)$ permutacija iz $[n-1]$ broj n se može dopisati na $n-1$ način.

Stoga je broj svih permutacija iz $\mathbb{S}_n$ sa tačno k ciklusa kojima n nije fiksna tačka jednak $(n-1)\cdot c(n-1,k)$. Sada se rekurzivna relacija iz teoreme dobije pomoću principa sume.

□

Važna numerička karakteristika neke permutacije je i broj inverzija. Prisjetimo se da je $inv(\pi)$ označavao broj inverzija, odnosno, za permutaciju $\pi \in \mathbb{S}_n$ je

$$inv(\pi) = |\{(i,j) : 1 \leqslant i < j \leqslant n, \pi(i) > \pi(j)\}|.$$

PRIMJEDBA 4.3.5. Za sve $i \in [n-1]$ neka je $X_i = \{0,1,\ldots,n-i\}$ i neka je $T_n = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}$. Za permutaciju $\pi \in \mathbb{S}_n$ i broj j iz $[n-1]$ sa a_j označimo broj inverzija u π kojima je "slika druge koordinate" jednaka j:

$$a_j = |\{k \in [n] : k < \pi^{-1}(j), \pi(k) > j\}|.$$

Ako je permutacija π zapisana kao riječ $\pi_1\pi_2\ldots\pi_n$ tada je a_j broj članova koji su lijevo od j i koji su veći od j.
Niz $\mathcal{I}(\pi) = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ se naziva **tabla inverzija** permutacije π. Primijetimo da je $0 \leqslant a_i \leqslant n-i$ za sve $i \in [n]$ i da je

$$inv(\pi) = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}.$$

Preslikavanje $\mathcal{I} : \mathbb{S}_n \to T_n$ je bijekcija, pa je svaka permutacija jedinstveno određena svojom tablom inverzija.

Ako je $inv(\pi) = (4,0,2,2,0,3,0,1)$ tabla inverzija neke permutacije $\pi = \pi_1\pi_2\ldots\pi_9$, iz $a_1 = 4$ možemo zaključiti da se prije broja jedan pojave tačno četiri broja veća od jedan. Stoga je broj jedan na $\pi_5 = 1$. Ponavljajući ovaj postupak, lako se dobije da je $\pi = 2\ 5\ 7\ 3\ 1\ 4\ 9\ 8\ 6$.

Dakle, tabla inverzija je još jedan način kako možemo zapisati permutacije iz $\mathbb{S}_n$.

TEOREMA 4.3.6. *Za sve $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ vrijedi:*

$$\sum_{\pi \in \mathbb{S}_n} x^{inv(\pi)} = (1+x+\cdots x^{n-1})\cdots(1+x+\cdots+x^i)\cdots(1+x+x^2)(1+x).$$

Dokaz. U razvoju polinoma $(1+x+x^2+\cdots x^{n-1})\cdots(1+x+x^2)(1+x)$ se pojavi $n!$ sabiraka oblika $x^{a_1}x^{a_2}\cdots x^{a_{n-1}}$, gdje je $a_i \in \{0, 1, \ldots, n-i\}$.

Na osnovu prethodne primjedbe, postoji jedinstvena permutacija π kojoj je $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ tabla inverzija. Zahvaljujući korespondenciji

$$x^{inv(\pi)} = x^{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}} = x^{a_1}x^{a_2}\cdots x^{a_{n-1}}$$

između sabiraka na lijevoj i desnoj strani jednakosti, možemo zaključiti da je tvrđenje teoreme tačno.

□

Iz prethodne teoreme možemo zaključiti da je koeficijent uz x^k u razvoju $(1+x)(1+x+x^2)\cdots(1+x+\cdots+x^i)\cdots(1+x+x^2+\cdots x^{n-1})$ jednak broju permutacija iz $\mathbb{S}_n$ sa tačno k inverzija.

Taj broj označimo sa $b(n, k)$.

TEOREMA 4.3.7. *Neka su $k, n \in \mathbb{N}$. Za $k \leqslant n$ vrijedi*

$$b(n+1, k) = b(n+1, k-1) + b(n, k).$$

Ako je $k > n$ tada vrijedi

$$b(n+1, k) = b(n+1, k-1) + b(n, k) - b(n, k-n-1).$$

Dokaz. Neka je $B_{n+1,k}$ skup svih permutacija iz $\mathbb{S}_{n+1}$ sa tačno k inverzija. Prvo razmotrimo slučaj kada je $k \leqslant n$. Sve takve permutacije podijelimo u dvije grupe razlikujući ih po tome da li je $n+1$ fiksna tačka ili ne:

$$P_{n+1,k} = \{\pi \in B_{n+1,k} : \pi(n+1) = n+1\},$$

$$Q_{n+1,k} = \{\pi \in B_{n+1,k} : \pi(n+1) \neq n+1\}.$$

Ako permutaciju iz $P_{n+1,k}$ napišemo kao riječ, na kraju se nalazi $n+1$. Brisanjem $n+1$ sa posljednjeg mjesta, dobićemo permutaciju iz $B_{n,k}$. Kako je ovo preslikavanje bijekcija, vrijedi $|P_{n+1,k}| = |B_{n,k}|$.

Neka je $\pi \in Q_{n+1,k}$ i neka se $n+1$ nalazi na i-tom mjestu. Zamjenom $\pi_i = n+1$ i susjednog elementa π_{i+1}, dobije se permutacija iz $\mathbb{S}_{n+1}$ sa jednom inverzijom manje. Uz uslov $k \leqslant n$, to daje bijekciju[4] između $Q_{n+1,k}$ i $B_{n+1,k-1}$. Stoga je $|Q_{n+1,k}| = |B_{n+1,k-1}|$, pa dobijamo

$$|B_{n+1,k}| = |B_{n,k}| + |B_{n+1,k-1}|,$$

odakle slijedi rekurzivna relacija za $b(n,k)$ kada je $k \leqslant n$.

Ako je $k > n$, permutacije iz $B_{n+1,k-1}$ koje počinju sa $n+1$ se ne mogu dobiti od neke permutacije iz $Q_{n+1,k}$ "guranjem" $n+1$ jedno mjesto unazad. No, brisanjem $n+1$ sa prvog mjesta neke permutacije iz $B_{n+1,k-1}$ dobija se permutacija iz $B_{n,k-n-1}$ (i ovo je bijekcija), pa je zato

$$|Q_{n+1,k}| = |B_{n+1,k-1}| - |B_{n,k-n-1}|.$$

Sada se lako dobije rekurzivna relacija za brojeve $b(n,k)$ i za $k > n$.

□

U sljedećoj tabeli su prikazane neke vrijednosti za brojeve $b(n,k)$.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1										
2	1	1									
3	1	2	2	1							
4	1	3	5	6	5	3	1				
5	1	4	9	15	20	22	20	15	9	4	1
6	1	5	14	29	49	71	90	101	101	90	71

DEFINICIJA 4.3.8. Neka je $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_n$ permutacija iz $\mathbb{S}_n$. **Pad** u permutaciji π je $i \in [n-1]$ za koji vrijedi $\pi_i > \pi_{i+1}$.
Sa $D(\pi) = \{i \in [n-1] | \pi_i > \pi_{i+1}\}$ označimo **skup padova** u π. **Broj padova** u permutaciji π označavamo sa $des(\pi) = |D(\pi)|$.

Na primjer, za $\pi = 5136472 \in \mathbb{S}_7$ je $D(\pi) = \{1,4,6\}$ i $des(\pi) = 3$.

Broj permutacija u $\mathbb{S}_n$ sa tačno $k-1$ padova je **Ojlerov broj** $A(n,k)$:

$$A(n,k) = |\{\pi \in \mathbb{S}_n : des(\pi) = k-1\}|.$$

[4] Iz uslova $k \leqslant n$ slijedi da se $n+1$ ne može nalaziti na prvom mjestu neke permutacije iz $B_{n+1,k-1}$.

TEOREMA 4.3.9. *Ojlerovi brojevi zadovoljavaju sljedeću rekurzivnu relaciju:*

$$A(n, k+1) = (k+1)A(n-1, k+1) + (n-k)A(n-1, k).$$

Dokaz. Neka je $\pi = \pi_1\pi_2 \dots \pi_{n-1}$ permutacija iz $\mathbb{S}_{n-1}$ koja ima k padova. Ako broj n dodamo na kraj π (tada vrijedi $\pi_{n-1} < n$), ili između π_i i π_{i+1} za $i \in D(\pi)$ (tada je $\pi_i > \pi_{i+1}$ i $\pi_i < n > \pi_{i+1}$), broj padova u π se neće promjeniti. Tako od svake permutacije iz $\mathbb{S}_{n-1}$ sa k padova dobijemo $k+1$ permutaciju iz $\mathbb{S}_n$ sa k padova.

Ako $\pi = \pi_1\pi_2 \dots \pi_{n-1}$ iz $\mathbb{S}_{n-1}$ ima $k-1$ pad, da bi dopisivanjem elementa n dobili permutaciju iz $\mathbb{S}_n$ sa k padova, broj n treba upisati na početak ili između π_i i π_{i+1} za $i \in [n-2]$ koji nije u skupu $D(\pi)$. Tako se od $\pi \in \mathbb{S}_{n-1}$ sa $k-1$ padova dobije $n-k$ permutacija iz $\mathbb{S}_n$ sa k padova. Primjenom principa sume dobijamo rekurzivnu relaciju za Ojlerove brojeve.

□

Ojlerove brojeve možemo zapisati i kao koeficijente **Ojlerovog polinoma**

$$A_n(x) = \sum_{\pi \in S_n} x^{1+des(\pi)} = \sum_{k=1}^{n} A(n, k)x^k.$$

Nekoliko prvih Ojlerovih polinoma su:

$$A_1(x) = x, A_2(x) = x + x^2, A_3(x) = x + 4x^2 + x^3,$$

$$A_4(x) = x + 11x^2 + 11x^3 + x^4,$$

$$A_5(x) = x + 26x^2 + 66x^3 + 26x^4 + x^5,$$

$$A_6(x) = x + 57x^2 + 302x^3 + 302x^4 + 57x^5 + x^6,$$

$$A_7 = x + 120x^2 + 1191x^3 + 2416x^4 + 1191x^5 + 120x^6 + x7.$$

Zanimljivo je da su svi korijeni Ojlerovih polinoma realni brojevi. Dokaz te tvrdnje, kao i mnogo više detalja o kombinatornim svojstvima simetrične grupe se može naći u [11].

4.4 Zadaci

1. Na koliko načina se m dječaka i n djevojčica može poredati u red? Koliko ima tih rasporeda u kojima su sve djevojčice poredane jedna do druge?
2. Koliko ima parnih prirodnih brojeva koji se mogu napisati pomoću cifara 1,2,3,4,5,6 ako se svaka cifra upotrijebi tačno jednom?
3. Na koliko načina mogu tri Grka, četiri Rusa i pet Rumuna stati u red tako da sunarodnici stoje jedan do drugog?
4. Koliko četverocifrenih brojeva ima sve cifre različite? Koliko je takvih brojeva parno, a koliko ih se piše samo s neparnim ciframa?
5. a) Koliko ima permutacija u $\mathbb{S}_n$ sa samo jednim ciklusom?
   b) Koliko u $\mathbb{S}_n$ ima permutacija reda dva?
   c) Koliko ima permutacija u $\mathbb{S}_6$ sa tačno dva ciklusa?
6. Za permutaciju $\pi = 796421385 \in \mathbb{S}_9$ odredi broj ciklusa, red, broj padova, tablu i broj inverzija.
7. Za koji niz $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ je broj permutacija u $\mathbb{S}_n$ tipa $\mathbf{c}$ maksimalan?
8. Koliko ima permutacija u $\mathbb{S}_n$ sa tačno tri inverzije?
9. Koliko ima permutacija u $\mathbb{S}_n$ u kojima je broj 1 u ciklusu dužine k?
10. Na koliko načina možemo odabrati permutaciju $\pi \in \mathbb{S}_n$, a onda neki podskup skupa njenih ciklusa?
11. Opiši sve permutacije $\pi \in \mathbb{S}_n$ za koje postoji $\sigma \in \mathbb{S}_n$ takav da je $\pi = \sigma^2$?
12. Paran broj ljudi je sjedio za okruglim stolom. Poslije pauze, svi su se vratili za sto, ne nužno na isto mjesto gdje su bili. Dokaži da postoje dva čovjeka između kojih sjedi isti broj ljudi kao i prije pauze!
13. Koliko ima permutacija u $\mathbb{S}_n$ u kojima je broj 1 prije 2, a broj 3 prije 4? Koliko ima permutacija u $\mathbb{S}_n$ kojima je 1 prije brojeva 2 i 3?
14. Koliko najmanje a koliko najviše inverzija može da ima permutacija iz $\mathbb{S}_n$ koja ima tačno $n-2$ pada?
15. Neka je π permutacija iz $\mathbb{S}_{2n+1}$ sa tačno n padova u kojoj su pad i rast naizmjenični. Koliko najmanje a koliko najviše inverzija može da bude u takvoj permutaciji?
16. U razredu je k dječaka i $n-k$ djevojčica. Ako se oni poredaju u red, sa S označimo broj parova susjednih učenika različitog pola. Nađi prosječnu vrijednost za S ako se posmatraju svi mogući rasporedi!
17. Izračunati

$$\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\mathbb{S}_n}\big((\pi_1-\pi_2)^2+(\pi_2-\pi_3)^2+\cdots+(\pi_{n-1}-\pi_n)^2\big).$$

18. Za proizvoljan $S=\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}\subseteq[n]$, $i_1<i_2<\cdots<i_k$ odredi $\alpha_S:=|\{\pi\in\mathbb{S}_n|D(\pi)\subseteq S\}|$.
19. Broj a_i je početni maksimum u permutaciji $\pi=a_1a_2\ldots a_i\ldots a_n\in\mathbb{S}_n$ ako je $a_i>a_j$ za sve $j<i$. Dokaži da je broj permutacija u $\mathbb{S}_n$ sa tačno k početnih maksimuma jednak $c(n,k)$.
20. Koliko ima permutacija u $\mathbb{S}_n$ u kojima je k odabranih elemenata u istom ciklusu?
21. Koliko ima permutacija u $\mathbb{S}_n$ kojima su svi ciklusi parne dužine?
22. Neka je n paran broj. Dokaži da je broj permutacija u $\mathbb{S}_n$ kojima su svi ciklusi parne dužine jednak broju permutacija u $\mathbb{S}_n$ čiji su svi ciklusi neparne dužine!
23. Dokaži da za Ojlerove brojeve vrijedi $A(n,k+1)=A(n,n-k)$.
24. Neka je $A_n(x)$ Ojlerov polinom za $\mathbb{S}_n$. Izračunaj $A_n'(1)$.
25. Neka je n prirodan broj. Niz prirodnih brojeva $x_1,x_2,\ldots,x_n$ dužine n je dobar ukoliko vrijedi sljedeće
    ako se u tom nizu pojavi $k>1$, mora se pojaviti i $k-1$. Takođe, prvo pojavljivanje broja $k-1$ je prije posljednjeg pojavljivanja broja k.
    Koliko ima dobrih nizova dužine n?
26. U jednoj igri učestvuje n, $n>1$ igrača. Svaki od igrača ima jednu loptu. Svih $\binom{n}{2}$ parova igrača, po nekom redoslijedu, zamijene lopte koje imaju u tom trenutku. Za igru ćemo reći da je *lijepa* ako na kraju niko nema loptu koju je imao na početku. Sa druge strane, igra je *dosadna*, ako na kraju svaki igrač ima istu loptu koju je imao na početku igre.
    Odredi za koje $n\in\mathbb{N}$ postoji lijepa (odnosno dosadna) igra!

4.5 Rješenja zadataka

1. Odgovori su $(m+n)!$, odnosno $(m+1)!n!$.
2. Rješenje je $3\cdot 5!=360$.
3. Na $3!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 5!=103\,680$ načina.
4. Rješenja su: $9\cdot 9\cdot 8\cdot 7=4536$ četverocifrenih brojeva kojima su sve cifre različite; među njima je $9\cdot 8\cdot 7+8\cdot 8\cdot 7\cdot 4=2296$ parnih i $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=120$ sa neparnim ciframa.

5. a) $(n-1)!$.
   b) $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}(2k-1)!!$.
   c) $\binom{6}{1} \cdot 4! + \binom{6}{2} \cdot 3! + \binom{6}{3} \cdot 2! \cdot 2! = 314$.
6. Permutacija $\pi = 796421385 = (1736)(295)(4)(8)$ ima 4 ciklusa, red je 12, ima 5 padova, tabla inverzija je $\mathcal{I}(\pi) = (5, 4, 4, 3, 4, 2, 0, 1)$ i $inv(\pi) = 23$.
7. Za $\mathbf{c} = (1, 0, \ldots, 0, 1, 0)$.
8. Koristićemo tablu inverzija. Postoji $\binom{n-1}{3}$ tabli sa tri jedinice, $2\binom{n-1}{2} - (n-2)$ tabli sa jednom jedinicom i jednom dvicom (ne može broj dva biti na kraju table), i $n-3$ table sa jednom tricom (ostali članovi u tabli inverzija su nule). Dakle, za $n \geqslant 3$ rješenje je
$$\binom{n-1}{3} + 2\binom{n-1}{2} - (n-2) + (n-3) = \binom{n+1}{3} - n.$$
9. $\binom{n-1}{k-1}(k-1)!(n-k)! = (n-1)!$.
10. Ako u odabranim ciklusima ima k elemenata, broj takvih izbora je $\binom{n}{k}k!(n-k)! = n!$. Stoga je $\sum_{k=0}^{n} n! = (n+1)!$ odgovor na postavljeno pitanje.
11. Kako je
$$(a_1 a_2 \ldots a_{2n} a_{2n+1}) = (a_1 a_{n+2} a_2 a_{n+3} \ldots a_{2n+1} a_{n+1})^2,$$
neparni ciklusi u π se mogu napisati kao kvadrati. Paran ciklus ne može biti kvadrat nekog ciklusa (parnost permutacija). Međutim, primijetimo da vrijedi
$$(a_1 a_2 \ldots a_{2n})(b_1 b_2 \ldots b_{2n}) = (a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots a_{2n} b_{2n})^2.$$
Stoga, sve permutacije $\pi \in \mathbb{S}_n$ koje za svaki paran broj r imaju paran broj ciklusa dužine r mogu biti kvadrati neke permutacije.
12. Mjesta za stolom označimo sa $0, 1, \ldots, 2n-1$. Mjesta gdje ljudi sjede poslije pauze su neka permutacija ovih brojeva $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{2n-1}$. Dokažimo da postoje $i \neq j$ takvi da je $i - j \equiv \pi_i - \pi_j (\mathrm{mod}\ 2n)$, odnosno $i - \pi_i \equiv j - \pi_j (\mathrm{mod}\ 2n)$. Ako takvi ne postoje, brojevi $i - \pi_i (\mathrm{mod}\ 2n)$ za $i = 0, 1, \ldots, 2n-1$ imaju sve vrijednosti $0, 1, \ldots, 2n-1$. Tada je $\sum_{i=0}^{n}(i - \pi_i) \equiv n(2n-1) (\mathrm{mod}\ 2n)$. Međutim, u $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{2n-1}$ se pojave svi elementi od 0 do $2n-1$, pa ta suma mora biti 0!
13. $\binom{n}{4}\binom{4}{2}(n-4)! = \frac{n!}{4}$, odnosno $\binom{n}{3} \cdot 2 \cdot (n-3)! = \frac{n!}{3}$.

14. Permutacija $n(n-1)\cdots 4312$ ima $n-2$ pada i $\binom{n}{2}-1$ inverzija, dok $\lceil\frac{n}{2}\rceil\left(\lceil\frac{n}{2}\rceil-1\right)\cdots 321n(n-1)\cdots(\lceil\frac{n}{2}\rceil+1)$ ima $n-2$ pada i $\binom{\lceil\frac{n}{2}\rceil}{2}+\binom{n-\lceil\frac{n}{2}\rceil}{2}$ inverzija.
15. Permutacija $2143\ldots 2n(2n-1)(2n+1)$ ima n (najmanje) inverzija, a permutacija $(2n+1)(2n-1)2n(2n-3)(2n-2)\ldots 12$ ima $\binom{2n+1}{2}-n$ (najviše) inverzija.
16. Uočimo mjesta i i $i+1$. Dječaka i djevojčicu za ta mjesta možemo odabrati na $2k(n-k)$ načina. Ostale učenike možemo rasporediti na $(n-2)!$ načina. Postoji $n-1$ par susjednih mjesta, pa je traženi broj
$$S=\frac{2k(n-k)(n-2)!(n-1)}{n!}=\frac{2k(n-k)}{n}.$$
17. Elementi skupa $\{i,j\}$ se pojave kao susjedi u $2(n-1)!$ permutacija i sumi doprinesu $(i-j)^2$. Broj k^2 se može dobiti kao $(i-j)^2$ za $i,j\in[n]$ na $(n-k)$ načina. Tako je tražena suma
$$\frac{1}{n!}2(n-1)!\sum_{k=1}^{n-1}k^2(n-k)=\frac{(n-1)n(n+1)}{6}.$$
18. Prvih i_1 elemenata permutacije sa padovima u S biramo na $\binom{n}{i_1}$ način i uredimo po veličini, jer tu nema pada. Sljedećih i_2-i_1 biramo na $\binom{n-i_1}{i_2-i_1}$ načina, itd $\ldots$. Stoga je
$$\alpha_S=\binom{n}{i_1}\cdot\binom{n-i_1}{i_2-i_1}\cdot\binom{n-i_2}{i_2-i_3}\cdots=\frac{n!}{i_1!\cdot(i_2-i_1)!\cdot\cdots\cdot(n-i_k)!}.$$
19. Neka je π permutacija iz $\mathbb{S}_n$ sa k ciklusa. Napišimo π u standardnom obliku (u svakom od ciklusa postavimo najveći broj na početak, i poredajmo cikluse π po veličini "početnih" brojeva). Ako obrišemo zagrade, dobićemo permutaciju (zapisanu kao riječ), u kojoj su početni maksimumi bivši počeci ciklusa. Ovo je bijekcija između permutacija sa k ciklusa i permutacija sa k početnih maksimuma.
20. Broj takvih permutacija ne zavisi od odabranih elemenata, pa možemo pretpostaviti da smo odabrali $n-k+1, n-k+2,\ldots,n-1,n$. Permutaciju u kojoj su ti elemanti u istom ciklusu preslikamo bijekcijom opisanom u prethodnom zadatku. Tako smo dobili bijekciju između traženog skupa i skupa permutacija u kojima je n prije $n-k+1,n-k+2,\ldots,n-1$. Tih permutacija ima
$$\binom{n}{k}(k-1)!(n-k)!=\frac{n!}{k}.$$

21. Ako je n neparan taj broj je nula. Za paran $n = 2k$ nacrtajmo $2k$ tačaka u ravni i spojimo po dvije linijama u parove. To možemo uraditi na $(2k-1)!!$ načina. Ako to uradimo još jednom, dobićemo graf kojem su komponente povezanosti ciklusi parne dužine. Komponente povezanosti tog grafa interpretiramo kao cikluse permutacije iz $\mathbb{S}_n$. Cikluse orijentišemo tako da iz neke tačke "izlazimo" sa linijom koju smo prvu nacrtali. Tako je traženi broj permutacija jednak $\left[(2k-1)!!\right]^2$.
22. Ako je π permutacija sa ciklusima neparne dužine (ima ih paran broj), napišimo je u standardnom obliku. Posljednji broj iz prvog ciklusa prebacimo na kraj drugog, posljednji broj trećeg ciklusa prebacimo na kraj četvrtog, itd....
Na taj način dobijemo permutaciju sa ciklusima parne dužine. Kako je ovo preslikavanje bijekcija, zadatak je riješen.
23. Neka je $\pi = \pi_1\pi_2 \dots \pi_n$ permutacija sa $k-1$ padova. Ako se svaki π_i zamijeni sa $n - \pi_i$, dobije se permutacija sa $n-k-1$ padova. Ovo preslikavanje je očigledno involucija, pa tako i bijekcija.
24. Kako je $A'_n(1) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot A(n,k)$ svaku permutaciju $\pi \in \mathbb{S}_n$ brojimo $des(\pi)+1$ put, odnosno, $A'_n(1) = \sum_{\pi\in\mathbb{S}_n}(des(\pi)+1)$. Svaki dvočlani skup $\{i,j\}$ bude pad u $(n-1)!$ permutacija, pa je
$$A'_n(1) = \binom{n}{2} \cdot (n-1)! + n! = \binom{n+1}{2}(n-1)!.$$
25. Neka je $x_1, x_2, \dots, x_n$ dobar niz dužine n i neka je m najveći broj u tom nizu. Iz definicije dobrog niza znamo da se u tom nizu pojave svi brojevi iz $[m]$. Za sve $k = 1, 2, \dots, m$ uočimo skupove $A_k = \{j \in [n] : x_j = k\}$. Ti skupovi su međusobno disjunktni, njihova unija je $[n]$. Ako u svakom od A_k elemente uredimo u opadajući niz $\overline{A}_k$, dobićemo permutaciju iz $\mathbb{S}_n$ podijeljenu u opadajuće blokove $\overline{A}_1\overline{A}_2 \dots \overline{A}_m$ tako da je $\min A_{k-1} < \max A_k$ za sve k. Ovo daje bijekciju između dobrih nizova i svih permutacija iz $\mathbb{S}_n$.
26. Zamjenu lopte igrača p i q možemo interpretirati kao transpoziciju $(p\ g) \in \mathbb{S}_n$. U terminima simetrične grupe, igra je lijepa ako se svih $\binom{n}{2}$ transpozicija može urediti u niz $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{\binom{n}{2}}$ tako da je proizvod $\tau_1\tau_2 \cdots \tau_{\binom{n}{2}}$ permutacija bez fiksne tačke.
Slično, igra je dosadna ako se sve transpozicije iz $\mathbb{S}_n$ mogu rasporediti u niz tako da im je proizvod identička permutracija. Pokažimo da za sve $n > 1$ postoji lijepa igra, osim za $n = 3$. Za $n = 2$ je trivijalno, za $n = 3$ lijepa igra ne postoji jer je $(ab)(ac)(bc) = (ac)$.

Neka je $n > 3$ Posmatrajmo permutaciju $\Pi_n \in \mathbb{S}_n$

$$\Pi_n = (12)(13)(23)(14)(24)\cdots(1n)(2n)\cdots((n-1)\ n).$$

Indukcijom po n se može pokazati da za paran $n = 2k$ vrijedi

$$\Pi_n = \Pi_{n-1}(1n(n-1)\ldots 2) = (1n)(2\ (n-1))\cdots(k\ (k+1))$$

što je permutacija bez fiksne tačke. Ako je $n = 2k+1$ neparan broj, permutacija bez fiksne tačke će biti

$$\Pi_{n-1}(1n)(2n)\cdots(kn)((n-1)\ n)((n-2)\ n)\cdots((k+1)\ n).$$

Ako želimo da proizvod svih transpozicija bude identička permutacija, tada $\binom{n}{2}$ mora biti paran broj, odnosno broj n je oblika $n = 4k$ ili $n = 4k+1$. Pokažimo da postoji dosadna igra za sve takve brojeve. Za $n = 4k$ sve igrače podijelimo u grupe po četiri. Unutar iste grupe lopte razmjenjuju na sljedeći način

$$(34)(13)(24)(23)(14)(12) = Id.$$

Kako je proizvod transpozicija

$$(47)(37)(46)(16)(28)(38)(27)(26)(45)(48)(17)(18)(35)(36)(25)(15)$$

identička permutacija, to opisuje razmjenu lopti između igrača iz različitih grupa.
U dokazu tvrđenja za $n = 4k+1$ jedan igrač je osta neraspoređen. Relacija

$$(3x)(34)(4x)(13)(24)(23)(14)(1x)(12)(2x) = Id$$

oisuje kako taj igrač x razmjenjuje loptu sa igračima iz svake grupe tako da igra ostane dosadna.

5

BINOMNI I POLINOMNI KOEFICIJENTI

5.1 O binomnim koeficijentima

U dosadašnjim primjerima smo mogli zapaziti da se u rješenju nekog zadatka iz kombinatorike često pojave brojevi $\binom{n}{k}$. Razlog je u tome što su binomni koeficijenti $\binom{n}{k}$ odgovor na pitanje:

Koliko k-članih podskupova ima skup od n elemenata?

To smo već dokazali u teoremi 2.5.5. Evo još jednog dokaza te tvrdnje.

TEOREMA 5.1.1. *Neka je X skup sa n elemenata. Ako je $0 \leqslant k \leqslant n$, broj svih k-članih podskupova skupa X je binomni koeficijent*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}. \tag{5.1}$$

Dokaz. Neka je $\binom{X}{k}$ skup svih k-članih podskupova od X.
U teoremi 4.1.1 smo pokazali da je broj svih k-permutacija u skupu X jednak $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Sve k-permutacije skupa X možemo dobiti i na sljedeći način:

Prvo odaberemo proizvoljan element iz $\binom{X}{k}$ (to je k-člani podskup od X) na $\left|\binom{X}{k}\right|$ načina, a zatim ga linearno uredimo na $k!$ načina. Po principu dvostrukog prebrojavanja je

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \left|\binom{X}{k}\right| \cdot k!, \text{ odnosno } \left|\binom{X}{k}\right| = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

□

Binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ čitamo[1] "*en nad ka*".

Primjer 5.1.2. Prepoznati koji su binomni koeficijenti odgovori na sljedeća pitanja!

(a) U ravni je zadan skup tačaka $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Ako nikoje tri od tih tačaka nisu kolinearne, koliko ima trouglova kojima su tjemena tačke iz S?
(b) Koliko ima puteva od tačke $(0,0)$ do tačke $(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ u koordinatnoj ravni, ako su dozvoljeni koraci u tom putu za jedan desno ili za jedan gore, to jest, od tačke (a,b) možemo stići u $(a, b+1)$ ili u $(a+1, b)$?
(c) Na polici se nalazi 30 knjiga. Na koliko načina možemo odabrati njih deset tako da među odabranim knjigama nema susjednih?

Rješenje:
(a) Među tačkama iz S ne postoje tri kolinearne, pa je svaki tročlani podskup od S skup tjemena jednog trougla. Stoga, traženih trouglova ima isto koliko i tročlanih podskupova od S, dakle $\binom{n}{3}$.

(b) Korak $(0,1)$ u posmatranom putu možemo zapisati slovom G ("gore"), a korak $(1,0)$ sa D ("desno"). Svaki put od $(0,0)$ do (m,n) možemo zapisati kao niz od $m+n$ slova G ili D, pri čemu se slovo D pojavi tačno m puta (potrebno je napraviti m koraka desno).

Izbor m pozicija za slovo D u nizu dužine $m+n$ je izbor m-članog podskupa od skupa od $m+n$ elemenata. Tako je ukupan broj traženih puteva $\binom{m+n}{m}$.

(c) Zamislimo da smo odabrali tih deset knjiga od trideset (tako da između njih nema susjednih) i da ih istovremeno "izvlačimo" sa police. Kada smo ih "skoro izvukli", predomislimo se i vratimo ih nazad. Tada, u stvari, na polici stoji 20 knjiga, i mi dodajemo deset novih tako da nikoje dvije od tih novih nisu susjedne (princip bijekcije!).

Kako te nove knjige možemo rasporediti na 21 mjesto, rješenje zadatka je $\binom{21}{10}$.

$\diamondsuit$

U sljedećoj teoremi opisaćemo neka osnovna svojstva binomnih koeficijenata.

[1] Na engleskom se $\binom{n}{k}$ čita "n choose k", što u prevodu znači *od n biram k*. Time se naglašava da je to broj k-članih podskupova u n-članom skupu.

TEOREMA 5.1.3 (Osnovna svojstva binomnih koeficijenata). *Za binomne koeficijente vrijede sljedeće relacije:*

(*i*) *Za sve* $n \geqslant k \geqslant 0$ *je* $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(*ii*) *Za sve* $n \geqslant k \geqslant 1$ *je* $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

(*iii*) *Za sve* $n \geqslant k \geqslant 1$ *je* $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

(*iv*) *Za sve* $n \geqslant k \geqslant 0$ *je*
$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}.$$

Dokaz. Tvrđenja $(i), (ii)$ i (iii) se mogu lako dobiti direktno iz formule (5.1). To ostavljamo za vježbu, a sada ćemo dati kombinatorne dokaze tih formula.

(*i*) Preslikavanje koje k-članom podskupu $S \subseteq [n]$ dodjeli njegov komplement $[n] \setminus S$ je bijekcija između $\binom{[n]}{k}$ i $\binom{[n]}{n-k}$.

(*ii*) Ako prebrojimo elemente skupa
$$\{(x, S) : x \in S, S \subseteq [n], |S| = k\}$$
na dva načina (kao u teoremi 2.5.5) dobijamo $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$, odnosno $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

(*iii*) Sve k-člane podskupove od $[n]$ podijelimo u dvije grupe, s obzirom na to da li sadrže n ili ne. Podskupova iz $\binom{[n]}{k}$ koji sadrže n ima $\binom{n-1}{k-1}$, a onih koji ne sadrže n ima $\binom{n-1}{k}$ (vidjeti i formulu (ii) u teoremi (2.5.6)).

(*iv*) Tvrđenje možemo dokazati uzastopnom primjenom formule (iii):
$$\binom{n+k+1}{k} = \binom{n+k}{k} + \binom{n+k}{k-1} =$$
$$= \binom{n+k}{k} + \binom{n+k-1}{k-1} + \binom{n+k-1}{k-2} = \cdots =$$
$$= \binom{n+k}{k} + \binom{n+k-1}{k-1} + \cdots + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{0}.$$

Ovu formulu možemo dokazati i kombinatorno, tako što ćemo svakom od binomnih koeficijenata iz formule (iv) "naći" odgovarajuću kombinatornu interpretaciju.
Broj $\binom{n+k+1}{k}$ prepoznamo kao broj svih k-članih podskupova skupa $[n+k+1]$.
Za proizvoljan broj $i = 0, 1, 2, \ldots, k$ posmatrajmo sve k-člane podskupove od $[n+k+1]$ kojima je $n+i+1$ najveći broj kojeg ne sadrže.
Dakle, ti skupovi sadrže sve brojeve $n+i+2, n+i+3, \ldots, n+k+1$. Takvi skupovi sadrže tačno i elemenata iz skupa $[n+i]$, pa je broj takvih skupova jednak $\binom{n+i}{i}$. Traženi identitet se sada dobije primjenom principa sume.

□

PRIMJEDBA 5.1.4 (Paskalov[2] trougao). Lijep način da se binomni koeficijenti zapišu je pomoću beskonačne trougaone tablice. Na "ivicama" tog trougla se nalaze jedinice koje odgovaraju binomnim koeficijentima $\binom{n}{0}$ i $\binom{n}{n}$, za sve $n \in \mathbb{N}_0$. Tablicu dalje popunjavamo na sljedeći način:

Broj koji je "u unutrašnjosti trougla" dobije se sabiranjem dva broja lijevo i desno iznad njega. Primjenom matematičke indukcije i pomoću svojstva (iii) iz prethodne teoreme, zaključujemo da su brojevi u $(n+1)$-oj vrsti ovako formirane tablice binomni koeficijenti $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Ova tablica se naziva **Paskalov trougao**. Slična tablica je bila poznata još u staroj Kini, nekoliko vijekova prije Paskalovog rođenja.

Iz tvrđenja (i) u teoremi 2.5.6 slijedi da je zbir brojeva u $(n+1)$-voj vrsti jednak 2^n.
Simetričnost Paskalovog trougla je posljedica formule $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

[2] Blaise Pascal (1623 - 1662)

Posmatrajući Paskalov trougao možemo uočiti da niz brojeva u svakoj vrsti Paskalovog trougla prvo raste (do "sredine" te vrste), a zatim opada. Preciznije, vrijedi sljedeća teorema:

TEOREMA 5.1.5. *Za paran prirodan broj n vrijedi:*

$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\frac{n}{2}-1} < \binom{n}{\frac{n}{2}} > \binom{n}{\frac{n}{2}+1} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}$.

Slično, za neparan $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \binom{n}{\frac{n+1}{2}} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}$.

Dokaz. Očigledno vrijedi

$$\binom{n}{k} > \binom{n}{k-1} \text{ ako i samo ako je } \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} > 1.$$

Kako je količnik susjednih binomnih koeficijenata

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{n!(k-1)!(n-k+1)!}{n!k!(n-k)!} = \frac{n-k+1}{k},$$

dobijamo da binomni koeficijenti rastu dok je $k < \frac{n+1}{2}$:

$$\binom{n}{k} > \binom{n}{k-1} \Leftrightarrow \frac{n-k+1}{k} > 1 \Leftrightarrow n+1 > 2k.$$

Iz simetrije $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, možemo zaključiti da će binomni koeficijenti za $k > \frac{n+1}{2}$ opadati. Tvrđenje teoreme dobijamo razlikujući slučajeve kada je broj n paran, odnosno neparan.

$\square$

Elemente iz partitivnog skupa $\mathcal{P}([n])$ možemo upoređivati pomoću relacije $\subseteq$. **Antilanac** u $\mathcal{P}([n])$ je familija podskupova od $[n]$ u kojoj nijedan skup nije sadržan u nekom drugom skupu te familije. Drugačije rečeno, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}([n])$ je antilanac ako vrijedi

$$A \in \mathcal{A}, B \subsetneq A \Rightarrow B \notin \mathcal{A}.$$

Na primjer, svi k-člani podskupovi od $[n]$, njih $\binom{n}{k}$, čine antilanac.

Od svih takvih antilanaca, po prethodnoj teoremi, najveći je onaj sa $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ elemenata[3], u kojem se nalaze svi $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$-člani podskupovi od $[n]$.

[3] Za neparan n istu veličinu ima i antilanac koji sadrži sve podskupove sa $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ elemenata.

Da li je to i najveći antilanac u $\mathcal{P}([n])$? Da li se može naći neki veći antilanac koji bi sadržavao podskupove od [n] sa različitim brojem elemenata? Odgovor na ovo pitanje daje sljedeća teorema.

TEOREMA 5.1.6 (Šperner). *Neka je $\mathcal{A}$ antilanac u partitivnom skupu od $[n]$. Tada je $|\mathcal{A}| \leqslant \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.*

Dokaz. Maksimalan lanac podskupova u $\mathcal{P}([n])$ je niz

$$C : \emptyset \subset \{a_1\} \subset \{a_1, a_2\} \subset \cdots \subset \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\} \subset [n].$$

Svakom takvom lancu možemo dodijeliti permutaciju $\pi_C = a_1 a_2 \ldots a_n$. Tako definisano preslikavanje je bijekcija, pa je $n!$ broj svih maksimalnih lanaca u $\mathcal{P}([n])$.

Neka je $X \subseteq [n]$ sa k elemenata i neka je $\mathcal{C}_X$ skup svih maksimalnih lanaca koji sadrže X. Ako je $C \in \mathcal{C}_X$, tada se u π_C prvo pojavi k elemenata iz X, a zatim preostalih $n-k$. Stoga, svih maksimalnih lanaca koji sadrže neki zadan k-člani skup X ima $k! \cdot (n-k)!$.

Kako je $\mathcal{A}$ antilanac, to svaki maksimalan lanac u $\mathcal{P}([n])$ može da sadrži najviše jedan element iz antilanca $\mathcal{A}$. Zato je

$$n! \geqslant \sum_{X \in \mathcal{A}} |\mathcal{C}_X| = \sum_{X \in \mathcal{A}} |X|! \cdot (n - |X|)!.$$

Dijeljenjem sa $n!$ dobijamo da je

$$1 \geqslant \sum_{X \in \mathcal{A}} \frac{1}{\binom{n}{|X|}} \geqslant (\text{na osnovu teoreme 5.1.5}) \geqslant \sum_{X \in \mathcal{A}} \frac{1}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} = \frac{|\mathcal{A}|}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}},$$

pa za svaki antilanac $\mathcal{A}$ vrijedi $|\mathcal{A}| \leqslant \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

□

Ako je n u prethodnoj teoremi paran broj, jednakost se postiže ako i samo ako antilanac $\mathcal{A}$ sadrži sve podskupove od $[n]$ sa $\frac{n}{2}$ elemenata.

Za neparan n postoje dva maksimalna antilanca u $\mathcal{P}([n])$. Jedan antilanac čine svi podskupovi od $[n]$ sa $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ elemenata, a drugi sadrži sve podskupove od $[n]$ sa $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1$ elemenata.

Pokažimo još jednu zanimljivu osobinu binomnih koeficijenata.

TEOREMA 5.1.7. *Za proizvoljne prirodne brojeve n i k postoje jedinstveni cijeli brojevi $a_k > a_{k-1} > \cdots > a_2 > a_1 \geqslant 0$ takvi da vrijedi*

$$n = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \cdots + \binom{a_2}{2} + \binom{a_1}{1}. \tag{5.2}$$

Dokaz. Na skupu svih rastućih k-torki skupa prirodnih brojeva

$$\binom{\mathbb{N}}{k} = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : x_i \in \mathbb{N}\ ,\ x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k\right\}$$

definišemo relaciju poretka $<_R$ ovako:
$(x_1, x_2, \ldots, x_k) <_R (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ ako i samo ako postoji $i \leqslant k$ tako da je $x_k = y_k, x_{k-1} = y_{k-1}, \ldots, x_{i+1} = y_{i+1}, x_i < y_i$.
Lako je primijetiti da je $<_R$ linearno uređenje na skupu $\binom{\mathbb{N}}{k}$. Na primjer, dvadeset i sedam prvih elemenata u $\binom{\mathbb{N}}{4}$ je:

$$1234 < 1235 < 1245 < 1345 < 2345 < 1236 < 1246 < 1346 < 2346 <$$

$$< 1256 < 1356 < 2356 < 1456 < 2456 < 3456 < 1237 < 1247 < 1347 <$$

$$< 2347 < 1257 < 1357 < 2357 < 1457 < 2457 < 3457 < 1267 < 1367.$$

Neka je uređena k-torka $\tau = (a_1 + 1, a_2 + 1, \ldots, a_k + 1)$ iz $\binom{\mathbb{N}}{k}$ u poretku $<_R$ na mjestu $n + 1$. Prije te k-torke se nalazi:

- $\binom{a_k}{k}$ elemenata kojima je posljednji član manji od $a_k + 1$.
- $\binom{a_{k-1}}{k-1}$ elemenata kojima je posljednji član jednak $a_k + 1$, a pretposljednji je manji od $a_{k-1} + 1$.
- $\binom{a_{k-2}}{k-2}$ elemenata kojima su posljednji i pretposljednji članovi jednaki a_k+1 i $a_{k-1}+1$, dok je član na $k-2$ mjestu manji od $a_{k-2}+1$, itd . . ..

Kako se prije τ nalazi tačno n elementa u $\binom{\mathbb{N}}{k}$, traženi prikaz broja n kao u formuli (5.2) se dobije primjenom principa sume. Na primjer, dvadeset i sedmi član u $\binom{\mathbb{N}}{4}$ je $(1, 3, 6, 7)$ pa je

$$26 = \binom{6}{4} + \binom{5}{3} + \binom{2}{2} + \binom{0}{1}.$$

□

Sada ćemo definisati uopštene binomne koeficijente. Primijetimo da izraz na desnoj strani formule (5.1) ima smisla i kada je n proizvoljan realan broj.

DEFINICIJA 5.1.8. Za proizvoljan realan broj α i $k \in \mathbb{N}_0$ definišemo **uopšteni binomni koeficijent** $\binom{\alpha}{k}$ sa

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2) \cdots (\alpha - k + 1)}{k!}. \tag{5.3}$$

Za primjenu u kombinatorici je važno primijetiti da za cijele brojeve n, uopšteni binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ možemo interpretirati pomoću običnih binomnih koeficijenata. Direktno iz definicije dobijamo da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\binom{-n}{k} = \frac{-n(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.$$

I obične binomne koeficijente možemo izraziti pomoću uopštenih:

$$\text{za sve } n, k \in \mathbb{N}, n \geqslant k \text{ vrijedi } \binom{n}{k} = (-1)^{n-k} \binom{-k-1}{n-k}.$$

Od koristi je znati vrijednosti uopštenih binomnih koeficijenata $\binom{\alpha}{k}$ za neke racionalne brojeve α. Uz malo računanja, može se dobiti

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdots \frac{-2n+3}{2}}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n n!} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!(2n-2)!!}{2^n n!(2n-2)!!} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1}.$$

Na sličan način možemo dokazati da je

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \binom{2n}{n}. \tag{5.4}$$

5.2 Multiskupovi

U nekim situacijama pojam skupa nije dovoljno efikasan da nam pruži potpunu informaciju o problemu koji posmatramo. Na primjer, skup svih rješenja jednačine $x(x-1)^3(x-2)^2 = 0$ je $\{0, 1, 2\}$, ali u tom odgovoru nema podatka o multiplicitetu pojedinih nula. Stoga je prirodno sva rješenja prethodne jednačine zapisati kao "skup" u kojem se neki elementi ponavljaju više puta: $\{0, 1, 1, 1, 2, 2\}$.

Takva struktura se naziva multiskup.

Slično, skup djelitelja broja 24 je $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$. U tom odgovoru ne nalazimo informaciju "koliko puta" broj 2 dijeli 24, pa je opet zgodno posmatrati multiskup svih djelitelja $\{1, 2, 2, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.

Formalno, **konačan multiskup** na skupu S se definiše kao funkcija $m : S \to \mathbb{N}_0$ koja elementu $x \in S$ dodijeli multiplicitet $m(x)$ elementa x. Broj $m(x)$ kaže koliko puta se element x ponavlja u multiskupu m.

Ako je $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ i ako je $m(x_i) = a_i$, uobičajeno je da se multiskup m zapiše sa $M = \{x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \ldots, x_k^{a_k}\}$. Zbir svih multipliciteta elemenata iz M se naziva kardinalni broj multiskupa M, odnosno $|M| = \sum_{x \in S} m(x)$.

Reći ćemo da je multiskup M' na skupu S' **podmultiskup** od M ako je $S' \subseteq S$ i ako je $m'(x) \leqslant m(x)$ za sve $x \in S'$.

TEOREMA 5.2.1. *Broj različitih podmultiskupova nekog multiskupa* $M = \{x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \ldots, x_k^{a_k}\}$ *je* $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1)$.

Dokaz. Ako je $m' : \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \to \mathbb{N}_0$ neki podmultiskup od M, tada je $m'(x_i) \in \{0, 1, \ldots, a_i\}$. Dakle, za $m'(x_i)$ imamo na raspolaganju $a_i + 1$ različit izbor. Sada tvrđenje teoreme slijedi iz principa proizvoda. □

Ako je $m(x) = 1$ za sve $x \in S$, tada je multiskup M običan skup. Primijetimo da je teorema 2.5.4 specijalan slučaj prethodnog tvrđenja.

Primjer 5.2.2. Dokaži da je prirodan broj n potpun kvadrat ako i samo ako ima neparan broj različitih djelitelja.

Rješenje: Neka je n proizvoljan prirodan broj. Broj n se može napisati kao proizvod[4] prostih brojeva $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k}$.

To rastavljanje broja n na proizvod prostih faktora definiše multiskup $M = \{p_1^{s_1}, p_2^{s_2}, \ldots, p_k^{s_k}\}$. Očigledno, broj n je potpun kvadrat ako i samo ako su svi brojevi s_i parni.

Primijetimo da je broj m djelitelj od n ako i samo ako je rastavljanje broja m u proizvod prostih faktora oblika $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$, pri čemu je $m_i \leqslant s_i$. Stoga je svakom djelitelju broja n moguće dodijeliti podmultiskup $M' = \{p_1^{m_1}, p_2^{m_2}, \ldots, p_k^{m_k}\}$ od M.

Na osnovu principa bijekcije zaključujemo da različitih djelitelja broja n ima koliko i podmultiskupova od $M = \{p_1^{s_1}, p_2^{s_2}, \ldots, p_k^{s_k}\}$. Iz teoreme 5.2.1 znamo da je taj broj jednak $(s_1 + 1)(s_2 + 1) \cdots (s_k + 1)$.

Taj broj je neparan ako i samo ako su svi s_i parni, odnosno ako i samo ako je broj n potpun kvadrat.

♢

[4] Taj proizvod se naziva kanonska faktorizacija broja n.

Neka je zadan multiskup $M = \{x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \dots, x_k^{a_k}\}$ sa m elemenata, to jest, neka je $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = m$. **Permutacija multiskupa** M je uređena m-torka elemenata skupa $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ u kojoj se element x_i pojavi tačno a_i puta.

TEOREMA 5.2.3. *Neka je $M = \{x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \dots, x_k^{a_k}\}$ multiskup sa $m = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ elemenata. Broj permutacija multiskupa M je*

$$\frac{m!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \dots \cdot a_k!}.$$

Dokaz. Mjesta na kojima se pojavi x_1 (njih tačno a_1) odaberemo na $\binom{m}{a_1}$ načina. Dalje, od preostalih $m - a_1$ mjesta, one na kojima se pojavi x_2 biramo na $\binom{m-a_1}{a_2}$ načina. Nastavljajući ovo razmatranje, zaključujemo da je broj permutacija multiskupa M jednak

$$\binom{m}{a_1} \cdot \binom{m - a_1}{a_2} \cdot \binom{m - a_1 - a_2}{a_3} \cdots \binom{a_k}{a_k} = \frac{m!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \dots \cdot a_k!}.$$

□

Broj permutacija multiskupa se označava se sa

$$\binom{m}{a_1, a_2, \dots, a_k} = \frac{m!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \dots \cdot a_k!}.$$

Taj broj se naziva **polinomni koeficijent**.

Evo nekoliko zadataka u kojima se broji koliko permutacija imaju odgovarajući multiskupovi.

Primjer 5.2.4. Odgovori na sljedeća pitanja:

(a) Koliko različitih riječi se može dobiti premještanjem slova u riječi MATEMATIKA?
(b) Koliko ima takvih riječi u kojima nisu sva tri A susjedna (u riječi se ne pojavi AAA)?
(c) Koliko ima takvih riječi u kojima se poredak suglasnika ne mijenja?

Rješenje:

(a) Tražene riječi su permutacije multiskupa $\{M^2, A^3, T^2, E^1, I^1, K^1\}$. Na osnovu teoreme 5.2.3, broj permutacija tog multiskupa je $\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}$.

(b) Permutacije u kojima su tri A zajedno su permutacije multiskupa $\{M^2, AAA^1, T^2, E^1, I^1, K^1\}$ (tri susjedna slova A smatramo jednim slovom). Takvih permutacija ima $\frac{8!}{2!\cdot 2!}$. Stoga, riječi u kojima tri slova A nisu susjedna ima tačno

$$\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!} - \frac{8!}{2!\cdot 2!}.$$

(c) Od deset mogućih mjesta odaberemo pet na koja se rasporede slova M, T, M, T, K (u tom poretku). To možemo uraditi na $\binom{10}{5}$ načina. Na preostalih pet mjesta rasporedimo jednu permutaciju samoglasnika, odnosno multiskupa $\{A^3, E^1, I^1\}$. Po principu proizvoda, broj traženih riječi je $\binom{10}{5} \cdot \frac{5!}{3!}$.

$\diamondsuit$

Od interesa su i multiskupovi kod kojih je dozvoljeno da multiplicitet elemenata bude beskonačan, to jest, svaki element iz osnovnog skupa S se može ponavljati proizvoljan broj puta.

TEOREMA 5.2.5. *Broj različitih k-članih podmultiskupova multiskupa $M = \{1^\infty, 2^\infty, \ldots, n^\infty\}$ je $\binom{n+k-1}{k}$.*

Dokaz. Broj $\binom{n+k-1}{k}$ možemo "prepoznati" kao broj svih k-članih podskupova skupa $[n + k - 1]$. Neka je $1 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_k \leqslant n$. Preslikavanje

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \mapsto \{x_1, x_2 + 1, \ldots, x_k + k - 1\}$$

je bijekcija između skupa svih k-članih podmultiskupova od M i skupa svih k-članih podskupova $[n+k-1]$. Tvrđenje teoreme slijedi iz principa bijekcije.

$\square$

Uobičajeno je broj svih k-članih podmultiskupova skupa $M = \{1^\infty, 2^\infty, \ldots, n^\infty\}$ označiti sa $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$. U prethodnoj teoremi smo pokazali da vrijedi

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k}.$$

5.3 Kompozicije

Ako je broj n napisan kao zbir nekoliko prirodnih brojeva, odnosno, ako je

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$$

kažemo da je uređena k-torka $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ ili "uređena" suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ **kompozicija** broja n.
Na primjer, sve kompozicije broja 5 su:

$$\begin{array}{llllll}
5 & 4+1 & 1+1+3 & 1+1+1+2 & 1+1+1+1+1. \\
 & 3+2 & 1+2+2 & 1+1+2+1 & \\
 & 2+3 & 1+3+1 & 1+2+1+1 & \\
 & 1+4 & 2+1+2 & 2+1+1+1 & \\
 & & 2+2+1 & & \\
 & & 3+1+1 & &
\end{array}$$

Definicija kompozicije broja n je samo na prvi pogled "slična" definiciji particije broja n. Kod particija broja n sabirci su uređeni po veličini. Nije teško primijetiti da su kompozicije broja n u k dijelova u stvari rješenja jednačine $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ u skupu prirodnih brojeva.

TEOREMA 5.3.1. *Neka su n i k prirodni brojevi i neka je $n \geqslant k$. Postoji $\binom{n-1}{k-1}$ kompozicija broja n u tačno k sabiraka. Ukupan broj kompozicija od n je 2^{n-1}.*

Dokaz. Neka je S_k skup svih kompozicija broja n u tačno k sabiraka:

$$S_k = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k : a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n\}.$$

Definišimo preslikavanje $\Phi : S_k \to \binom{[n-1]}{k-1}$ na sljedeći način:
kompoziciji $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ se dodijeli $(k-1)$-člani podskup od $[n-1]$

$$\Phi\big((a_1, a_2, \ldots, a_k)\big) = \{a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}\}.$$

Preslikavanje Φ je injekcija, jer iz

$$\Phi\big((a_1, a_2, \ldots, a_k)\big) = \Phi\big((b_1, b_2, \ldots, b_k)\big) = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$$

dobijamo $a_1 = x_1 = b_1; a_2 = x_2 - x_1 = b_2;\ \ldots\ ; a_k = n - x_{k-1} = b_k$.
Dalje, neka je $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\} \subseteq [n-1]$ i neka je

$$1 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} \leqslant n - 1.$$

Tada je $x_{i+1} - x_i > 0$ za sve $i = 1, 2, \ldots, k$, i vrijedi

$$x_1 + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_{k-1} - x_{k-2}) + (n - x_{k-1}) = n, \text{ odnosno}$$

$$\Phi\big((x_1, x_2 - x_1, \ldots, x_{k-1} - x_{k-2}, n - x_{k-1})\big) = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}.$$

Time smo pokazali da je preslikavanje Φ i surjekcija. Dakle, opisali smo bijekciju između kompozicija broja n u tačno k sabiraka i $(k-1)$-članih podskupova skupa $[n-1]$. Stoga je broj kompozicija n u tačno k sabiraka jednak $\binom{n-1}{k-1}$.

Pomoću principa sume i tvrđenja (i) iz teoreme 2.5.6, zaključujemo da je broj svih kompozicija broja n jednak 2^{n-1}.

□

Rješenje jednačine $x_1 + x_2 + \cdots x_k = n$ u skupu $\mathbb{N}_0$ se naziva **slaba kompozicija** broja n.

POSLJEDICA 5.3.2. *Postoji $\binom{n+k-1}{k-1}$ slabih kompozicija broja n u k sabiraka.*

Dokaz. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_k$ neki nenegativni cijeli brojevi za koje je $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$. Ako uvedemo nove promjenljive $y_i = x_i + 1$, tada su svi y_i prirodni brojevi. Dalje, vrijedi $y_1 + y_2 + \cdots + y_k = n + k$. Tako smo uspostavili bijekciju između slabih kompozicija broja n u k dijelova i kompozicija broja $n + k$ u k dijelova. Na osnovu principa bijekcije i prethodne teoreme zaključujemo da slabih kompozicija broja n u k sabiraka ima $\binom{n+k-1}{k-1}$.

□

PRIMJEDBA 5.3.3. U literaturi se često broj kompozicija i slabih kompozicija broja n u k sabiraka računa i na sljedeći način:

Svakom rješenju jednačine $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ u skupu $\mathbb{N}$ odgovara postavljanje $k - 1$ pregrada između n jedinica, tako da:

- Prije prve pregrade se nalazi tačno x_1 jedinica.
- Između prve i druge pregrade se nalazi x_2 jedinica.
- Između druge i treće pregrade se nalazi x_3 jedinica, i tako redom ...

Na primjer:

$$3 + 1 + 1 + 2 \leftrightarrow 111 \;\Big|\; 1 \;\Big|\; 1 \;\Big|\; 11.$$

Dakle, svakoj kompoziciji broja n u k dijelova dodijelimo jedan raspored $k - 1$ pregrada na $n - 1$ mjesto između napisanih jedinica. Stoga je broj rješenja jednačine $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ jednak broju $(k-1)$-članih podskupova skupa od $n-1$ elemenata, što je $\binom{n-1}{k-1}$.

Na sličan način, svakom rješenju jednačine $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ u skupu $\mathbb{N}_0$ odgovara neki raspored $k-1$ pregrada između n jedinica; s tom razlikom da na isto mjesto može da se postavi više pregrada. Takođe, dozvoljeno je postavljati pregrade ispred prve i poslije posljednje jedinice. Na primjer:

$$0+2+0+0+3+0+1+1 \leftrightarrow \Big|11\Big|\Big|\Big|111\Big|\Big|1\Big|1.$$

Dakle, bira se $(k-1)$-člani podmultiskup skupa od $n+1$ elemenata. Stoga je, na osnovu teoreme 5.2.5 traženi broj $\left(\binom{n+1}{k-1}\right) = \binom{n+k-1}{k-1}$.

Primijetimo da vrijedi

$$\left(\binom{n}{m}\right) = \binom{n+m-1}{m} = \binom{n+m-1}{n-1} = \left(\binom{m+1}{n-1}\right).$$

Primjer 5.3.4. Dokazati jednakost $\left(\binom{n}{m}\right) = \left(\binom{m+1}{n-1}\right)$ kombinatorno!

Rješenje: Izbor m-članog podmultiskupa iz $\{1^\infty, 2^\infty, \ldots, n^\infty\}$ možemo predstaviti kao postavljanje $n-1$ "pregrade" između m tačaka. Multiplicitet elementa i je broj tačaka između pregrada $i-1$ i i. Evo primjera takvog zapisa za $m=6$ i $n=9$:

$$\{1^0, 2^3, 3^0, 4^0, 5^2, 6^0, 7^1, 8^0, 9^0\} \longleftrightarrow \Big|\bullet\bullet\bullet\Big|\Big|\Big|\bullet\bullet\Big|\Big|\bullet\Big|\Big|.$$

Ako $\bullet$ i $\Big|$ u maloprije opisanoj korespodenciji zamijene mjesta, dobiće se niz u kojem se $\bullet$ pojavi $n-1$ put a $\Big|$ se pojavi m puta.

To odgovara izboru $(n-1)-$članog podmultiskupa iz multiskupa $\{1^\infty, 2^\infty, \ldots, m^\infty, (m+1)^\infty\}$. U maloprije posmatranom primjeru ta korespondencija izgleda ovako:

$$\Big|\bullet\bullet\bullet\Big|\Big|\Big|\bullet\bullet\Big|\Big|\bullet\Big|\Big| \longleftrightarrow \bullet\Big|\Big|\Big|\bullet\bullet\bullet\Big|\Big|\bullet\bullet\Big|\bullet\bullet \longleftrightarrow \{1^1, 2^0, 3^0, 4^3, 5^0, 6^2, 7^2\}.$$

Tako je konstruisana bijekcija između m-članih podmultiskupova nekog multiskupa od n elemenata i $n-1$ članih podmultiskupova multiskupa od $m+1$ elemenata, što je kombinatorni dokaz da je $\left(\binom{n}{m}\right) = \left(\binom{m+1}{n-1}\right)$.

$\diamondsuit$

5.4 Binomna i polinomna formula

Formule za kvadrat i kub binoma:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2; (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

su dobro poznate još iz osnovne škole. Te formule su samo specijalan slučaj sljedeće teoreme.

TEOREMA 5.4.1 (Binomna formula). *Za svaki prirodan broj n vrijedi:*

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{i}x^{n-i}y^i + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + y^n,$$

odnosno

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^i = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i}.$$

Dokaz. **Prvi način:**
Indukcijom po $n \in \mathbb{N}$. Za $n = 1$ formula je očigledno tačna. Pretpostavimo da je formula tačna za proizvoljan prirodan broj n. Sada računamo:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = \text{(po pretpostavci)} =$$

$$(x+y)\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(x^{i+1}y^{n-i} + x^i y^{n-i+1}\right) =$$

$$= x^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}\right]x^i y^{n+1-i} + y^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}x^i y^{n+1-i}.$$

Dakle, uz pretpostavku da tvrđenje vrijedi za n, pokazali smo da vrijedi i za $n+1$. Na osnovu matematičke indukcije zaključujemo da je formula iz teoreme tačna za sve prirodne brojeve.
Drugi način:
Drugi dokaz je kombinatoran. Ako izmnožimo svih n zagrada u $(x+y)^n$ dobićemo polinom u promjenljivim x i y sa 2^n sabiraka stepena n:

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{n \text{ zagrada}} =$$

$$= \underbrace{x\cdot x\cdots x + x\cdots x\cdot y + \cdots + y\cdot x\cdot x\cdots y\cdot x + \cdots + y\cdot y\cdots y}_{2^n \text{ sabiraka stepena } n}.$$

U prethodnoj sumi, sabirak $y \cdot x \cdot x \cdots y \cdot x$ odgovara izboru promjenljive y iz prve zagrade, promjenljive x iz druge i treće zagrade, ..., izboru y iz pretposljednje; te izboru x iz posljednje zagrade.

Kako su množenje i sabiranje komutativne operacije, koeficijent uz $x^k y^{n-k}$ je jednak broju sabiraka u prethodnoj sumi u kojima se x pojavi tačno k puta. Dakle, koeficijent uz $x^k y^{n-k}$ u polinomu $(x+y)^n$ je jednak broju načina kako se iz skupa od n zagrada u $(x+y)^n$ može odabrati njih k iz kojih biramo promjenljivu x (iz preostalih zagrada biramo y). Na osnovu teoreme 2.5.5, koeficijent uz $x^k y^{n-k}$ je $\binom{n}{k}$.

□

Brojevi $\binom{n}{k}$ se nazivaju binomni koeficijenti, jer se pojave kao koeficijenti u razvoju binoma $(x+y)^n$.

PRIMJEDBA 5.4.2. Uvrštavanjem odgovarajućih vrijednosti za promjenljive x i y u binomnu formulu možemo dobiti razne veze između binomnih koeficijenata. Naprimjer, ako je $x = y = 1$ dobijamo tvrđenje (i) iz teoreme 2.5.6:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}.$$

Ako u binomnu formulu uvrstimo $x = 1$ a $y = -1$ dobije se

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}, \text{ odnosno}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots .$$

Tako smo još jednom dokazali da podskupova od $[n]$ sa parnim (odnosno neparnim) brojem elemenata ima isti broj, vidjeti primjer 2.2.2. Kako svih podskupova od $[n]$ ima 2^n, podskupova sa parnim brojem elemenata ima 2^{n-1}.

Prisjetimo se da smo formulom (5.3) definisali uopšteni binomni koeficijent $\binom{\alpha}{k}$ za proizvoljan $\alpha \in \mathbb{R}$. Stoga se možemo zapitati da li postoji neka formula za razvoj binoma $(x+1)^\alpha$ i u slučaju kada α nije prirodan broj.

Lako je izračunati da je n-ti izvod polinoma $(x+1)^\alpha$ jednak

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(x+1)^{\alpha-n}.$$

Koristeći Tejlorovu formulu za razvoj funkcije $f(x) = (1+x)^\alpha$ oko tačke $x = 0$ dobijamo sljedeću teoremu.

TEOREMA 5.4.3. *Neka je α proizvoljan realan broj. Za sve $x \in \mathbb{R}, |x| < 1$ vrijedi*

$$(x+1)^\alpha = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \binom{\alpha}{n} x^n$ se **naziva binomni red**. Ako je α iz prethodne teoreme prirodan broj, iz definicije uopštenog binomnog koeficijenta slijedi da je za $n > \alpha$ izraz $\binom{\alpha}{n} = 0$. Tada je red na desnoj strani u stvari polinom stepena α, kao i u binomnoj formuli.

Za $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}_0$ binom $(x+1)^\alpha$ je beskonačan stepeni red. Na primjer, pomoću prethodne teoreme dobijamo:

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} (-1)^n \binom{-1}{n} x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} x^n. \tag{5.5}$$

$$(1-4x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} 4^n x^n = \text{iz } (5.4) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \binom{2n}{n} x^n. \tag{5.6}$$

Još jedno uopštenje binomne formule je dato sljedećom teoremom.

TEOREMA 5.4.4 (polinomna formula). *Za prirodne brojeve m i n vrijedi*

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n = \sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_m=n \\ n_1,n_2,\ldots,n_m\in\mathbb{N}_0}} \binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_m} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}.$$

Prisjetimo da smo u teoremi 5.2.3 pokazali da je

$$\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_m} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdots n_m!}$$

broj permutacija multiskupa $\{x_1^{n_1}, x_2^{n_2}, \ldots, x_m^{n_m}\}$.

Dokaz. Koristićemo istu ideju kao i u kombinatornom dokazu binomne formule. Ako izmnožimo svih n zagrada u $(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n$, dobijamo sumu sa m^n sabiraka. Svaki od tih sabiraka je jedna permutacija nekog n članog multiskupa nad skupom $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$.
Zbog komutativnosti množenja i sabiranja, koeficijent uz $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}$ je jednak broju sabiraka u kojima se x_1 pojavi tačno n_1 puta, x_2 se pojavi tačno n_2 puta, itd $\ldots$. Stoga je koeficijent uz $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}$ jednak broju permutacija multiskupa $\{x_1^{n_1}, x_2^{n_2}, \ldots, x_m^{n_m}\}$. Na osnovu teoreme 5.2.3 dobijamo da je taj koeficijent jednak $\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_m}$.

$\square$

Evo nekoliko primjena polinomne formule.

TEOREMA 5.4.5 ("san brucoša"). *Neka je p prost broj. Tada za proizvoljne cijele brojeve $x_1, x_2, \dots, x_m$ vrijedi:*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^p \equiv x_1^p + x_2^p + \cdots + x_m^p (mod \quad p). \tag{5.7}$$

Dokaz. Za proizvoljan prost broj p polinomni koeficijent $\binom{p}{n_1, n_2, \dots, n_m}$ je djeljiv sa p, osim u slučaju kada je neki $n_j = p$ a ostali $n_i = 0$. Kako je $\binom{p}{0,0,\dots,0,p,0,\dots,0} = 1$, tvrđenje u teoremi dobijemo kada polinomnu formulu primijenimo na $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^p$. □

POSLJEDICA 5.4.6 (mala Fermaova[5] teorema). *Za proizvoljan cijeli broj m i neki prost broj p vrijedi*

$$m^p \equiv m (mod \quad p).$$

Dokaz. U formulu (5.7) uvrstimo $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 1$. □

5.5 Identiteti i sume

U primjedbi 5.4.2 smo već zapazili da se binomna formula može koristiti u izračunavanju suma u kojima se pojave binomni koeficijenti.

Na primjer, ako u binomnu formulu uvrstimo $x = 2$ i $y = 1$, možemo zaključiti da je

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} 2 + \binom{n}{2} 2^2 + \cdots + \binom{n}{n} 2^n = 3^n.$$

Primjer 5.5.1. Izračunati

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}.$$

Rješenje: U računanju zadane sume, može biti korisno prisjetiti se nekih identiteta za binomne koeficijente. Ako ovu sumu pomnožimo i podijelimo sa $n+1$, primijenimo tvrđenje (ii) iz teoreme 5.1.3 i formulu (i) iz teoreme 2.5.6 dobićemo

$$\sum_{i=0}^{n} \tfrac{1}{i+1} \binom{n}{i} = \tfrac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \tfrac{n+1}{i+1} \binom{n}{i} = \tfrac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i+1} = \tfrac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

[5] Pierre de Fermat (1601 - 1665)

$\diamondsuit$

Neke identitete sa binomnim koeficijentima možemo dobiti iz binomne formule i algebarskih operacija sa polinomima. Osnovna ideja koja se koristi je činjenica da jednaki polinomi uz iste stepene promjenljive x imaju jednake koeficijente.

TEOREMA 5.5.2 (Vandermond[6]). *Neka su m i n prirodni brojevi i neka je $m \geqslant n$. Tada vrijede sljedeći identiteti:*

(a)

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{m+n}{r}.$$

(b)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{k} = \binom{m+n}{n}.$$

Dokaz. Prvo ćemo ove identitete dokazati algebarski.

(a) Očigledno vrijedi $(1+x)^n \cdot (1+x)^m = (1+x)^{n+m}$. Zato je koeficijent uz x^r na obe strane jednakosti isti. Na desnoj strani, koeficijent uz x^r u razvoju $(x+1)^{n+m}$ je $\binom{n+m}{r}$.
Na lijevoj strani, x^r se može dobiti kao proizvod $\binom{n}{k}x^k$ iz razvoja $(x+1)^n$ i $\binom{m}{r-k}x^{r-k}$ iz razvoja $(x+1)^m$, za sve $k = 0, 1, \ldots, r$.

(b) Formula slijedi iz jednakosti slobodnih članova na lijevoj i desnoj strani jednakosti

$$(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^m = \frac{(1+x)^{n+m}}{x^m}.$$

Formule (a) i (b) iz prethodne teoreme možemo dokazati i kombinatorno. Posmatrajmo skup od m različitih knjiga i n različitih olovaka. Odgovorimo na sljedeća pitanja:

(a) *Na koliko načina iz tog skupa od $m+n$ elemenata možemo odabrati njih r?*
Svakako, ako od $m+n$ predmeta biramo njih r, to možemo uraditi na $\binom{n+m}{r}$ načina. Broj načina da u tih r odabrananih predmeta bude tačno k olovaka (tada je odabrano $r-k$ svesaka) je $\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$. Kako k može uzeti sve vrijednosti od 0 do r, iz principa dvostrukog prebrojavanja slijedi formula (a).

[6] Alexandre-Théophile Vandermonde (1735 - 1796)

(*b*) *Na koliko načina iz tog skupa možemo odabrati jednak broj sveski i olovaka?*
Suma na lijevoj strani formule u (*b*) je očigledno odgovor na to pitanje.
Izraz na desnoj strani te formule prepoznajemo kao broj različitih n-članih podskupova tog skupa. Ako smo u nekom n-članom podskupu izabrali k knjiga, to znači da smo odabrali $n-k$ olovaka. Broj takvih podskupova je $\binom{m}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{m}{k}\binom{n}{k}$. Kada iz nekog takvog podskupa izbacimo tih $n-k$ odabranih olovaka, pa onda dodamo k preostalih, dobićemo podskup u kojem ima jednak broj sveski i olovaka.
Može se lako provjeriti da je sa ovim opisana bijekcija između svih n-članih podskupova posmatranog skupa i svih podskupova u kojima je broj sveski jednak broju olovaka. Na osnovu principa bijekcije, zaključujemo da vrijedi formula (*b*).

□

Ponekad u računanju suma i dokazivanju identiteta koristimo izvode i integrale. Na primjer, ako izračunamo izvode polinoma na lijevoj i desnoj strani binomne formule

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$$

dobijamo

$$n(1+x)^{n-1} = n + 2\binom{n}{2}x + \cdots + k\binom{n}{k}x^{k-1} + \cdots + nx^{n-1}. \tag{5.8}$$

Kada u prethodnu jednakost uvrstimo $x = -1$ dokazali smo da je

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k \cdot \binom{n}{k} = 0.$$

Primjer 5.5.3. Dokazati da je $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$.

Rješenje: Tražena jednakost se dobije kada u (5.8) uvrstimo $x = 1$. Ovaj identitet možemo dokazati i kombinatorno. Dovoljno je prebrojati elemente skupa $\{(x,S) : S \subseteq [n], x \in S\}$ na dva različita načina.

◊

Ako računamo određen integral od a do b na lijevoj i desnoj strani binomne formule

$$(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{i}x^i + \cdots + x^n$$

dobijamo

$$\int_a^b (1+x)^n dx = \int_a^b \left(1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n\right) dx,$$

odnosno

$$\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\Big/_a^b = \left(x + \binom{n}{1}\frac{x^2}{2} + \cdots + \binom{n}{k}\frac{x^{k+1}}{k+1} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Big/_a^b.$$

Ako u prethodnu formulu uvrstimo $a = 0, b = 1$, na još jedan način smo dokazali identitet $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ iz primjera 5.5.1.

Primjer 5.5.4. Izračunaj $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\binom{n}{k}$.

Rješenje: Kada obje strane jednakosti $x(1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}$ integriramo od nula do jedan dobićemo

$$\left(\frac{x(1+x)^{n+1}}{n+1} - \frac{(1+x)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\right)\Big/_0^1 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k+2}}{k+2}\Big/_0^1.$$

Tako je

$$\sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k+2}\binom{n}{k} = \tfrac{2^{n+1}}{n+1} - \tfrac{2^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \tfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \tfrac{n2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}.$$

◊

Primjer 5.5.5. Dokazati identitet $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$.

Rješenje: Prvo ćemo identitet dokazati pomoću algebre i analize. Uočimo da je $\dfrac{1}{1-4x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$, i primijenimo formule (5.5) i (5.6). Tako se dobije da je

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} 4^n x^n = \left[\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \binom{2k}{k} x^k\right] \cdot \left[\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \binom{2k}{k} x^k\right].$$

Traženu formulu dobijemo upoređujući koeficijente uz x^n na obe strane.

Kombinatorni dokaz je dosta komplikovaniji. Prepričaćemo dokaz iz [37], gdje je ideja pripisana Ajri Geselu[7].

Posmatrajmo sve nizove dužine $2n$ u skupu $\{-1, 1\}$. Lako je zaključiti da svih takvih nizova ima $2^{2n} = 4^n$.

Sada odaberimo proizvoljan $k \leqslant n$ i posmatrajmo skup:

$$T_k = \Big\{(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) : x_i = \pm 1, \sum_{i=1}^{2k} x_i = 0, \text{ za } r > k \text{ je } \sum_{i=1}^{2r} x_i \neq 0\Big\}.$$

Drugim rječima, skup T_k čine nizovi kod kojih se na prvih $2k$ mjesta pojavi tačno k jedinica (k puta se pojavi i broj -1). Dalje, poslije $2k$-tog simbola, broj 1 i -1 nikada neće biti isti.

Prvih $2k$ članova takvog niza možemo popuniti na $\binom{2k}{k}$ načina. Uspijemo li pokazati da se ostatak od $2n-2k$ članova niza iz T_k može popuniti na tačno $\binom{2n-2k}{n-k}$ načina, identitet je dokazan.

Broj $\binom{2n-2k}{n-k}$ možemo prepoznati kao broj nizova ± 1 dužine $2(n-k)$ u kojima se pojavi jednak broj 1 i -1.

Dakle, "u potrazi" smo za bijekcijom između skupova R i S, gdje je[8]:

$$R = \Big\{(a_1, a_2, \ldots, a_{2n-2k}) \in \{-1, 1\}^{2n-2k} : \forall r \in [n-k] \text{ je } \sum_{i=1}^{2r} a_i \neq 0\Big\},$$

$$S = \Big\{(a_1, a_2, \ldots, a_{2n-2k}) \in \{-1, 1\}^{2n-2k} : \sum_{i=1}^{2n-2k} a_i = 0\Big\}.$$

Opisaćemo bijekciju $F : S \to R$ između ova dva skupa. Neka je $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{2n-2k})$ proizvoljan element iz S. Neka je i najmanji broj iz $[2n-2k]$ za koji vrijedi

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_i \geqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_j \text{ , za sve } j \in [2n-2k].$$

[7] Ira Martin Gessel (1951-)

[8] Skup R čine nizovi iz $\{-1, 1\}$ dužine $2(n-k)$ u kojima se uvijek na nekoliko prvih mjesta broj 1 pojavi različit broj puta od broja -1. Elementi skupa S su nizovi iz $\{-1, 1\}$ dužine $2(n-k)$ u kojima se 1 i -1 pojave isti broj puta.

Uočimo niz

$$(b_1, b_2, \ldots, b_{2n-2k}) = (a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_{2n-2k}, -a_i, -a_{i-1}, \ldots, -a_1).$$

Iz konstrukcije niza $(b_1, b_2, \ldots, b_{2n-2k})$ možemo zaključiti da su sve njegove parcijalne sume manje ili jednake nuli. Ako su sve parcijalne sume ovog niza negativne, taj niz pripada R i možemo definisati da je $F(\mathbf{a}) = (b_1, b_2, \ldots, b_{2n-2k})$.

Ako je j najmanji broj za koji je $b_1 + b_2 + \cdots + b_j = 0$, tada se u prvih j članova novog niza nalazi jednak broj simbola 1 i -1. Takav niz ne pripada R i treba ga "popraviti". Uočimo novi niz

$$F(\mathbf{a}) = -(b_1, b_2, \ldots, b_{j-1}, -b_j, b_{j+1}, \ldots, b_{2n-2k}).$$

Sve parcijalne sume tog novog niza su veće od nule, pa $F(\mathbf{a})$ pripada skupu R.

Može se pokazati da je svaki korak u konstrukciji preslikavanja F invertibilan, pa F zaista jeste bijekcija. Time je tvrđenje dokazano.

$\diamondsuit$

5.6 Zadaci

1. Odredi prirodan broj n za koji je $\binom{2n+1}{2} = 3\binom{n}{3}$.
2. Dokaži da za binomne koeficijente vrijedi:
   a) $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$,
   b) $\binom{2n}{2k}\binom{2n-2k}{n-k}\binom{2k}{k} = \binom{2n}{n}\binom{n}{k}^2$,
   c) $\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1}$.
3. Neka je n neparan broj. Dokaži da među brojevima $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots \binom{n}{\frac{n-1}{2}}$ ima neparan broj neparnih!
4. Koliko sabiraka u razvoju $(x+y+z)^{10}$ ima samo jednu, koliko tačno dvije, a koliko ih ima sve tri promjenljive?
5. Za koje $n_1, n_2, \ldots, n_k$ je broj $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ maksimalan?
6. Koliko se različitih petocifrenih prirodnih brojeva može napisati pomoću cifara broja 72 477 672, pri čemu se svaka cifra se može upotrebiti najviše onoliko puta koliko se pojavila u datom broju?
7. Na koliko načina se može rasporediti n jednakih kuglica u m različitih kutija tako da tačno k kutija bude prazno?

8. Dato je n različitih zastavica i k jarbola na koje se zastavice postavljaju. Signal je određen raspodjelom zastavica na jarbole i rasporedom zastavica na svakom jarbolu, pri čemu se sve zastavice moraju postaviti, a neki jarboli mogu biti i bez zastavica. Koliko se različitih signala može napraviti?
9. Koliko ima petocifrenih prirodnih brojeva kojima je proizvod cifara jednak 120?
10. Koliko ima m-članih podskupova skupa $[n]$ koji ne sadrže uzastopne brojeve?
11. Neka je V skup tjemena konveksnog n-tougla. Odredi broj k-touglova sa tjemenima iz skupa V među kojima nema susjednih!
12. Koliko ima najkraćih puteva (kreće se samo za jedan desno ili za jedan gore) od koordinatnog početka do tačke $(10, 10)$, koji prolaze kroz segment $(3, 3)(4, 3)$, a ne prolaze kroz tačku $(8, 7)$?
13. Na koliko načina kralj sa donjeg lijevog polja šahovske table 8×8 može stići u gornje desno polje, ako se pomjera tako da u svakom koraku bude što bliže cilju?
14. Koliko različitih rješenja ima jednačina $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 98$ u skupu neparnih prirodnih brojeva?
15. Student je na ispitu iz kombinatorike rješavao 5 zadataka. Za svaki zadatak može dobiti najviše 20 bodova. Student je redom osvojio 5, 10, 15, 5 i 8 bodova; ukupno 43. Na koliko načina mu asistent može pokloniti sedam potrebnih bodova za prolaz?
16. Pauk ima osam nogu, osam čarapa i osam cipela. Na koliko načina se može obuti, ako na svaku nogu mora obuti čarapu prije cipele?
17. Izračunaj sume
    a) $\sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r}\binom{r}{k}$,
    b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$,
    c) $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{2i}\binom{n}{2k+1-2i}$,
    d) $\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}^2$,
    e) $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{4n}{4i+1}$,
    f) $\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}^2$.
18. U nekom konveksnom n-touglu su povučene sve dijagonale. Nikoje tri dijagonale se ne sijeku u istoj tački. Na koliko dijelova je podijeljen taj n-tougao?
19. Koliko smo u prethodnom zadatku nacrtali trouglova kojima su tjemena presjeci dijagonala ili tjemena n-tougla?

20. Posmatrajmo sve nizove dužine n sastavljene od elemenata skupa $\{0, 1, 2, 3\}$. Koliko ima takvih nizova kod kojih je broj nula paran?
21. Dokaži da je:

a) $$\sum_{k=0, k \text{ je paran}}^{n} \binom{n}{k} 2^k = \frac{3^n + (-1)^n}{2},$$

b) $$\sum_{k=0, \text{ je neparan}} \binom{n}{k} 5^k = \frac{6^n - (-4)^n}{2}.$$

22. Koliko ima nizova nula i jedinica dužine 15 u kojima se par 00 pojavi dva, par 01 tri, par 10 četiri, a par 11 pet puta?
23. Koliko se puta neki broj k pojavi u svih 2^{n-1} kompozicija broja n?
24. Dokaži da je:
    a) $n\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{n}{k} = m(-1)^{m-1}\binom{n}{m}$,
    b) $\sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} = \binom{2n+1}{n}$,
    c) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{-1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{n}\frac{2^i}{i}$.
25. Dokaži da je

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

26. Neka je m proizvoljan prirodan broj i neka je $n = mk$. Izračunaj

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{0} + \binom{n}{k} + \binom{n}{2k} + \cdots + \binom{n}{n}}{2^n}.$$

27. Koliko ima funkcija $f : [n] \to [n]$ takvih da za sve $i < j$ vrijedi $f(i) \leqslant f(j)$?
28. Dokaži da je $\binom{n}{k}$ paran ako i samo ako postoji pozicija na kojoj su u binarnim zapisima n i k redom nula, odnosno jedan!

5.7 Rješenja zadataka

1. $n = 7$.
2. Tvrđenja slijede direktno iz definicije binomnih koeficijenata. Pokušajte naći i kombinatornu interpretaciju ovih identiteta!
3. Zbir svih tih brojeva je $2^{n-1} - 1$.
4. 3, 27 i 36.
5. Brojevi n_i moraju biti "podjednaki": za sve $i \neq j$ je $|n_i - n_j| \leq 1$.
6. Traženi brojevi su permutacije odgovarajućih multiskupova. Rješenje je
$$3 \cdot \frac{5!}{4!} + \frac{5!}{3! \cdot 2!} + 3 \cdot \frac{5!}{3! \cdot 1! \cdot 1!} + 2\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} + 2\frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!}.$$
7. Prazne kutije odaberemo na $\binom{m}{k}$ načina. Rasporeda n kuglica u $m-k$ kutija ima koliko i kompozicija n u $m-k$ sabiraka. Tako je rješenje zadatka $\binom{m}{k} \cdot \binom{n-1}{m-k-1}$.
8. Sve zastavice poredajmo u niz na $n!$ načina. Onda, od $n+1$ mogućih mjesta između zastavica (uključujući ono ispred prve i poslije posljednje zastavice) odaberimo $k-1$ mjesto za pregradu. Zastavice između dvije pregrade se u tom poretku kače na jarbol. Stoga je traženo rješenje
$$n! \left(\!\!\binom{n+1}{k-1}\!\!\right) = n! \cdot \binom{n+k-1}{k-1}$$
9. $5! + 3 \cdot \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{3!} = 320$.
10. Preslikavanje $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \mapsto \{x_1, x_2 - 1, x_3 - 2, \ldots, x_m - m + 1\}$ je bijekcija između posmatranih podskupova i svih m-članih podskupova skupa $[n-m+1]$. Tako je rješenje $\binom{n-m+1}{m}$.
11. Neka je v neko tjeme tog n-tougla. Ako je u k-touglu koji pravimo tjeme v odabrano, još biramo $k-1$ tjeme među kojima nema susjednih na $\binom{n-k-1}{k-1}$ načina (vidjeti prethodni zadatak). Ako tjeme v nije odabrano, biramo k tjemena od $n-1$ (bez susjednih) na $\binom{n-k}{k}$ načina. Tako se dobije da je rješenje $\binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}$.
12. $\binom{6}{3}\left[\binom{13}{6} - \binom{8}{4}\binom{5}{2}\right]$.
13. Ako je k broj poteza "ukoso", tada je jedna šetnja kralja permutacija multiskupa $\{K^k, D^{7-k}, G^{7-k}\}$. Ukupan broj takvih šetnji je $\sum_{k=0}^{7} \frac{(14-k)!}{k!((7-k)!)^2}$.
14. $\binom{51}{3}$.

15. $\binom{11}{4} - 1 - 4 = 325$.

16. $\frac{16!}{2^8}$.

17. a) Primijetimo da je tražena suma broj elemenata u skupu $\{(A, B) : A \subseteq B \subseteq [n], |A| = k\}$. Ako broj elemenata u tom skupu prebrojimo tako da prvo odaberemo skup A dobijemo $\sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r}\binom{r}{k} = 2^{n-k}\binom{n}{k}$.

    b) Iskoristimo Vandermondov identitet i dobićemo $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$,

    c) Pretpostavimo da se u kutiji nalazi n crvenih i n bijelih kuglica. Suma koju posmatramo broji izbore $2k+1$ kuglica, tako da je broj crvenih kuglica paran. Ukupan broj izbora $2k+1$ kuglica od $2n$ zadatih je $\binom{2n}{2k+1}$, a polovina tih izbora ima paran broj crvenih kuglica. Tako je $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{2i}\binom{n}{2k+1-2i} = \frac{1}{2}\binom{2n}{2k+1}$,

    d) $\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}^2 = n^2 \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}^2 = n^2\binom{2n-2}{n-1}$,

    e) Neka je $S = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{4n}{4i+1}$. Koristeći $\binom{4n}{4i+1} = \binom{4n}{4(n-i-1)+3}$ dobijemo da je

$$2S = \binom{4n}{1} + \binom{4n}{3} + \binom{4n}{5} + \cdots + \binom{4n}{4n-3} + \binom{4n}{4n-1} = \frac{2^{4n}}{2},$$

    odnosno tražena suma je 2^{4n-2}.

    f) Koristićemo $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k} = n\binom{2n-1}{n-1}$ i rezultat iz (b).

    Tako je tražena suma $\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}^2 = (n+2)\binom{2n-1}{n}$.

18. Ako dijagonale crtamo jednu po jednu, na početku crtanja svaka dijagonala "napravi" novi region. Svaka presječna tačka, koja se dobije kada jedna dijagonala presječe drugu, takođe znači novi region. Tako je rješenje $1 + \binom{n}{2} - n + \binom{n}{4}$.

19. Trougao može da nema nijedno tjeme polaznog n-tougla, da ima jedno, dva ili sva tri. Računanjem broja trouglova za svaki od tih slučajeva dobijamo rješenje $\binom{n}{6} + 5\binom{n}{5} + 4\binom{n}{4} + \binom{n}{3}$.

20. Broj nizova sa parnim brojem nula je $P_n = \binom{n}{0}3^n + \binom{n}{2}3^{n-2} + \cdots$. Broj nizova N_n sa neparnim brojem nula je $\binom{n}{1}3^{n-1} + \binom{n}{3}3^{n-3} + \cdots$. Kako je $P_n + N_n = 4^n$, a $P_n - N_n = 2^n$, dobija se da je broj nizova sa parnim brojem nula $\frac{4^n+2^n}{2}$.

21. Koristićemo istu ideju kao i u prethodnom zadatku.

    (a) Posmatrajmo nizove dužine n sastavljene od $0, 1$ i 2 u kojima je

ukupan broj jedinica i dvica paran.
(b) Posmatrajmo nizove dužine n sastavljene od $0, 1, 2, 3, 4$ i 5 u kojima je ukupan broj elemenata koji nisu nula neparan.

22. U nizu se pojavljuju grupe jedinica i nula naizmjenično četiri puta, na početku su jedinice a na kraju nule: **10101010**. Još treba rasporediti dvije nule i pet jedinica.
To se može učiniti na $\left(\binom{4}{2}\right) \cdot \left(\binom{4}{5}\right) = 560$ načina.
23. Ako je k na početku ili na kraju, tada se pojavi u $2 \cdot 2^{n-k-1}$ kompozicija, dok se k "u sredini" pojavi $(n-k-1)2^{n-k-2}$ puta. Ukupno, broj k se pojavi $(n-k+3)2^{n-k-2}$ puta.
24. a) $n\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{n}{k} = n\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\left[\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right] =$
$= (-1)^{m-1}n\binom{n-1}{m-1} = (-1)^{m-1}m\binom{n}{m}$.
b) Zamislimo da se u učionici nalazi $2n$ studenata i profesor. Njih $2n+1$ treba da podijeli n ulaznica za neki koncert. Broj načina na koji se to može uraditi je sigurno $\binom{2n+1}{n}$. Ako pretpostavimo da studenti sjede u n klupa po dvoje, sa k označimo broj klupa iz kojih će ulaznicu dobiti tačno jedan student. To možemo odabrati na $2^k\binom{n}{k}$ načina. Od preostalih $n-k$ "klupa" odaberemo $\lfloor\frac{n-k}{2}\rfloor$ u kojima će oba studenta dobiti kartu. Ako je $n-k$ neparan, preostalu kartu dobija profesor. Tako se takođe mogu raspodjeliti sve karte, pa se dobije tražena jednakost.
c) Neka je $S_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{-1}$. Tada je
$2S_{n+1} = \frac{1}{n+2}\left[2+\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n+1}{k}^{-1}+\binom{n+1}{k+1}^{-1}\right)\right] = \frac{2}{n+2}+S_n$.
25. $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n+1}{k} = S_n - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k} = S_n + \frac{1}{n+1}$.
26. Neka je $z = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}$. Vrijedi
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{m}(1+z^j)^n}{2^n} = 1 = m\lim_{n\to\infty}\frac{\binom{n}{0}+\binom{n}{k}+\binom{n}{2k}+\cdots+\binom{n}{n}}{2^n}$$
pa je traženi limes $\frac{1}{m}$.
27. Svako nenegativno rješenje $x_0+x_1+\cdots+x_{n-1}+x_n = n-1$ definiše jednu takvu funkciju: $f(1) = x_0+1, f(2) = f(1)+x_1, \cdots, f(n) = f(n-1)+x_{n-1}$. Stoga ih ima $\binom{2n-1}{n}$.
28. Ako je n paran a k neparan, $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ je paran, a binarni zapisi n i k se završavaju sa nula, odnosno jedan. U ostalim slučajevima, parnost $\binom{n}{k}$ je ista kao i parnost $\binom{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}$. Binarni zapisi $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ i $\lfloor\frac{k}{2}\rfloor$ se dobiju brisanjem posljednje cifre iz zapisa n i k.

6

DIRIHLEOV PRINCIP I OSNOVNI POJMOVI REMZIJEVE TEORIJE

6.1 Dirihleov princip

Dirihleov[1] **princip** je očigledno i svima razumljivo opažanje:
Ako *veliki broj* predmeta rasporedimo u *mali broj* kutija, tada će u nekoj kutiji biti *mnogo* predmeta.

I pored jednostavne formulacije, Dirihleov princip[2] je veoma moćno sredstvo u rješavanju raznih (ne samo kombinatornih) zadataka. Smatra se da je Dirihle prvi koristio ovu ideju u nekim problemima iz teorije brojeva. O najjednostavnijoj varijanti Dirihleovog principa govori sljedeća teorema.

TEOREMA 6.1.1. *Ako se m predmeta rasporedi u n kutija i ako je $m > n$, tada će u bar jednoj kutiji biti bar dva predmeta.*

Dokaz. Pretpostavimo da smo rasporedili sve predmete u n kutija i da pri tome ne postoji kutija koja sadrži bar dva predmeta.

Tada svaka od n kutija sadrži ili jedan predmet ili je prazna, pa je ukupan broj predmeta u svim kutijama najviše n. To je kontradikcija sa pretpostavkom da je ukupan broj predmeta veći od broja kutija. Zato mora da postoji neka kutija sa bar dva predmeta.

□

Iako je prethodna teorema očigledna i izgleda naivno, ako se vješto upotrebi može biti veoma efikasna. Vještina je da se u konkretnom zadatku pametno odabere šta će biti "predmeti", a šta "kutije".

---

[1] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)

[2] U literaturi na engleskom ovaj princip se naziva "pigeonhole" princip:
Ako se m golubova smjesti u n rupa (kućica), i ako je $m > n$, bar dva goluba će biti u istoj rupi.

Evo nekoliko zadataka koji se lako riješe pomoću Dirihleovog principa.

Primjer 6.1.2. Dokaži sljedeća tvrđenja:

1. U društvu od 13 ljudi uvijek postoje dva čovjeka rođena istog mjeseca.
2. U skupu od $n+1$ proizvoljnih cijelih brojeva uvijek postoje dva broja čija je razlika djeljiva sa n.
3. Iz skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 2n-1, 2n\}$ je odabran $n+1$ prirodan broj. Među odabranim brojevima postoje dva takva da je jedan od njih djeljiv sa drugim.

Rješenje: Evo i rješenja tih zadataka:

1. Ljude zamislimo kao predmete iz teoreme 6.1.1, a 12 mjeseci u godini kao kutije. Svakog čovjeka (predmet) "stavimo" u mjesec (kutiju) u kojem je rođen. Kako je broj ljudi veći od broja mjeseci, po Dirihleovom principu postoji jedan mjesec u kojem su rođena bar dva čovjeka.
2. Pri djeljenju nekog cijelog broja sa n mogući ostaci su $0, 1, 2, \ldots, \ldots, n-1$. Tih n ostataka imaće ulogu kutija. Na osnovu Dirihleovog principa, između proizvoljnih $n+1$ brojeva iz $\mathbb{Z}$ postoje bar dva koja pri dijeljenju sa n daju isti ostatak, to jest, nalaze se u istoj kutiji. Razlika tih brojeva je djeljiva sa n.
3. Svaki prirodan broj m možemo na jedinstven način napisati kao proizvod stepena broja dva i nekog neparnog broja: $m = 2^r \cdot n$. Zadane brojeve a_i napišimo u obliku $a_i = 2^{r_i} n_i$. Pri tome su svi n_i neparni brojevi manji od $2n$. Kako brojeva n_i ima $n+1$, a neparnih brojeva od 1 do $2n$ ima n, na osnovu Dirihleovog principa postoje

$$a_i = 2^{r_i} n_i,\ a_j = 2^{r_j} n_j, \text{ takvi da je } n_i = n_j.$$

   Ako je $r_i < r_j$, tada a_i dijeli a_j, a ako je $r_i > r_j$ onda a_j dijeli a_i.

$\diamondsuit$

Sada ćemo riješiti nekoliko težih zadataka.

Primjer 6.1.3.

1. Dokaži da za svaki prirodan broj n postoji stepen broja tri koji završava sa

$$\underbrace{00\ldots00}_{n \text{ nula}}1.$$

2. Unutar kvadrata stranice 70 cm je raspoređeno 50 tačaka. Dokaži da među njima postoje dvije tačke koje su udaljene manje od 15 cm.
3. Dokaži da se iz bilo kojeg skupa od deset dvocifrenih brojeva uvijek mogu odabrati dva disjunktna podskupa, tako da su zbirovi brojeva u tim podskupovima jednaki!

Rješenje: Naravno, i u rješavanju ovih zadataka koristimo Dirihleov princip.

1. U dovoljno dugačkom nizu brojeva oblika 3^k, $k \in \mathbb{N}$ pojaviće se dva broja koja pri djeljenju sa 10^{n+1} daju isti ostatak. Neka su to 3^r i 3^l, i neka je $r > l$. Tada je $3^r - 3^l$ djeljiv sa 10^{n+1}:
$$10^{n+1} \mid (3^r - 3^l), \text{ to jest } 10^{n+1} \mid (3^{r-l} - 1) \cdot 3^l.$$
Kako 10^{n+1} i 3^l nemaju zajedničkih faktora, broj $3^{r-l} - 1$ mora biti djeljiv sa 10^{n+1}. Zato broj 3^{r-l} završava sa $\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ nula}}1$.
2. Kvadrat stranice 70 cm podijelimo na 49 malih kvadrata stranice 10 cm. Po Dirihleovom principu, znamo da postoji kvadrat u kojem se nalaze bar dvije tačke. Primijetimo da je najveća udaljenost dvije tačke u nekom kvadratu dužina dijagonale. Kako je dijagonala kvadrata stranice 10 jednaka $10\sqrt{2} < 15$, pokazali smo tvrđenje.
3. Svih podskupova skupa od 10 elemenata ima $2^{10} = 1024$. Zbir brojeva u bilo kojem od tih podskupova je najviše $10 \cdot 99 = 990$. Kako je $990 < 1024$ postoje dva različita podskupa koji imaju isti zbir elemenata. Ako su ti skupovi disjunktni, oni su podskupovi koje tražimo. Ako ti skupovi nisu disjunktni, tražene podskupove dobijemo tako što izbacimo njihove zajedničke elemente.

$\diamondsuit$

Takođe, Dirihleov princip ima važnu ulogu i u dokazu nekih "ozbiljnih" teorema. Neka je $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ jedinična kružnica u ravni.

TEOREMA 6.1.4. *Neka je α neki realan broj takav da $\frac{\alpha}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dalje, neka je $f : S^1 \to S^1$ rotacija za ugao α i neka je P proizvoljna tačka na kružnici S^1. Tada, za svaku tačku $A \in S^1$ i za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj m takav da je dužina luka $\widehat{Af^m(P)}$ manja od ε.*

Dokaz. Za proizvoljan $\varepsilon > 0$ odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $2\pi/n < \varepsilon$. Za taj prirodan broj n podijelimo kružnicu S^1 na n jednakih dijelova.

Posmatrajmo skup $Z = \{f^k(P) : k \in \mathbb{N}\}$. Kako je $\frac{\alpha}{2\pi}$ iracionalan, sve tačke iz skupa Z su različite. Zato, po Dirihleovom principu, postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takve da su $f^i(P)$ i $f^j(P)$ unutar istog intervala.
Drugim riječima, dužina luka između $f^i(P)$ i $f^j(P)$ je manja od $2\pi/n$.

Neka je $d = |i - j|$. Susjedne tačke u nizu $P, f^d(P), f^{2d}(P), \ldots$ su udaljene manje od $2\pi/n < \varepsilon$. Stoga će u intervalu dužine ε oko tačke A sigurno biti neka tačka oblika $f^{kd}(P)$.

□

Slična ideja se koristi i u Dirihleovom dokazu teoreme o dobroj racionalnoj aproksimaciji iracionalnog broja. To je važan rezultat iz teorije brojeva, ali je njegov dokaz u stvari kombinatoran.

TEOREMA 6.1.5. *Neka je α iracionalan broj. Postoji beskonačno mnogo različitih razlomaka $\frac{p}{q}$ takvih da je*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Dokaz. Dokazaćemo sljedeće, dosta jače tvrđenje:

$$\text{Za sve } n \in \mathbb{N} \text{ postoji } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ takav da je } q \leqslant n \text{ i } \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{nq}. \quad (6.1)$$

Ukoliko pretpostavimo da vrijedi (6.1), lako je dokazati tvrđenje teoreme. Zaista, iz (6.1) znamo da postoji $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ takav da vrijedi $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{nq} \leqslant \frac{1}{q^2}$.

Kako je α iracionalan broj vrijedi $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > 0$, pa postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da je $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{n_1}$.

Ako ponovo primijenimo tvrđenje (6.1) za prirodan broj n_1, zaključujemo da postoji razlomak $\frac{p_1}{q_1}$ takav da je $\left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right| < \frac{1}{n_1 q_1} \leqslant \frac{1}{q_1^2}$.
Kako je

$$\left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right| < \frac{1}{n_1 q_1} < \frac{1}{n_1} < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|,$$

razlomci $\frac{p_1}{q_1}$ i $\frac{p}{q}$ su različiti. Ponavljajući ovaj postupak, dobićemo beskonačno dobrih racionalnih aproksimacija za α.

Još treba da pokažemo tačnost tvrđenja iz (6.1). To ćemo uraditi pomoću Dirihleovog principa. Zamislimo da smo realnu pravu "namotali" na kružnicu čiji je obim jedan. Pri tom namotavanju, svi cijeli brojevi "padaju" u istu tačku, recimo A.

Na sličan način kao i u dokazu teoreme 6.1.4, zaključićemo da među tačkama na kružnici koje reprezentuju brojeve $\alpha, 2\alpha, \ldots, (n+1)\alpha$, postoje dvije koje su "lučno" udaljene za manje od $\frac{1}{n}$. Ako su to tačke koje odgovaraju brojevima $n_1\alpha$ i $n_2\alpha$, tada je za prirodan broj $q = |n_1 - n_2| \leqslant n$ lučna udaljenost tačke $q\alpha$ i tačke A manja od $\frac{1}{n}$. Neka je p cijeli broj najbliži $q\alpha$. Kako i broju p na posmatranoj kružnici odgovara tačka A, to je $|q\alpha - p| < \frac{1}{n}$. Kada prethodnu nejednakost podijelimo sa q, dobićemo tvrđenje (6.1).

□

TEOREMA 6.1.6 (Erdeš[3]-Sekereš[4]). *Neka su zadati proizvoljni prirodni brojevi p i q. Ako je $n \geqslant (p-1)(q-1)+1$, svaki niz od n realnih brojeva ima ili monotono rastući podniz dužine p ili monotono opadajući podniz dužine q.*

Dokaz. Neka je $a_1, a_2, \ldots, a_n$ posmatrani niz realnih brojeva. Označimo sa R_m (odnosno O_m) dužinu maksimalnog rastućeg (odnosno opadajućeg) podniza kojem je posljednji član a_m. Možemo primijetiti da za $m < s$ vrijedi:

$$\text{ako je } a_m \leqslant a_s \text{ onda je } R_m < R_s, \text{ a ako je } a_m \geqslant a_s \text{ onda je } O_m < O_s.$$

Zato skup svih parova $\{(R_m, O_m) : m \in [n]\}$ ima n različitih elemenata.

Pretpostavimo da je tvrđenje iz teoreme netačno, to jest, da postoji niz dužine n koji nema rastući podniz dužine p niti ima opadajući podniz dužine q. Tada su sve moguće vrijednosti za (R_m, O_m) elementi iz $[p-1] \times [q-1]$. To je kontradikcija sa činjenicom da tih parova ima $n > (p-1)(q-1)$.

□

Moguće je konstruisati niz dužine $(p-1)(q-1)$ u kojem ne postoji rastući podniz dužine p niti opadajući podniz dužine q.

Sljedeća teorema je blago uopštenje osnovne verzije Dirihleovog principa.

[3] Paul Erdös (1913 - 1996)
[4] George Szekeres (1911 - 2005)

TEOREMA 6.1.7. *Neka su n, m i k prirodni brojevi i neka je $m > kn$. Ako je m predmeta raspoređeno u n kutija, tada postoji bar jedna kutija u kojoj se nalazi bar $k+1$ predmet.*

Dokaz je skoro isti kao u teoremi 6.1.1, pa ga ostavljamo za vježbu.

Primjer 6.1.8. Riješimo nekoliko zadataka u kojima se koristi ovaj oblik Dirihleovog principa.

1. Koliko ljudi treba da bude u jednoj prostoriji, da bismo sa sigurnošću mogli tvrditi da njih k slavi rođendan istog dana u nedjelji (ne nužno istog datuma)?
2. Unutar kocke stranice jedan se nalazi 100 tačaka. Dokaži da među njima postoje četiri tačke koje su tjemena tetraedra čija je zapremina manja od $\frac{1}{99}$.
3. Neka su $A_1, A_2, \cdots, A_m$ četveročlani podskupovi skupa $[100]$ takvi da vrijedi $|A_i \cap A_j| \leqslant 2$. Ako je $m > 40425$, dokaži da među tim skupovima postoji njih 49 čija je unija cijeli skup $[100]$.

Rješenje:

1. U ovom zadatku kutije su dani u sedmici. Ako bi svaki od sedam dana bio rođendan za tačno $k-1$ ljudi, tada može da postoji $7k-7$ ljudi među kojima nema njih k koji slave rođendan istog dana. Međutim, ako se pojavi još jedan čovjek, to jest, ako ima $7k-6 = 7\cdot(k-1)+1$ ljudi, iz prethodne teoreme znamo da postoji bar jedan dan kada rođendan slavi bar k ljudi.
2. Paralelnim ravnima podijelimo kocku na 33 podudarne četverostrane prizme zapremine $\frac{1}{33}$. Kako je $100 > 3\cdot 33$, na osnovu teoreme 6.1.7 zaključujemo da se u bar jednoj prizmi nalaze bar četiri tačke. Zapremina tetraedra određenog sa te četiri tačke je najviše $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{33}$.
3. Za sve $i = 1, 2, \ldots, m$ posmatrajmo sve dvočlane podskupove $\{x, y\} \subset A_i$. Takvih (ne nužno različitih!) podskupova ima $6m$. Svih dvočlanih podskupova skupa $[100]$ ima 4950. Uz pretpostavku da je $m \geqslant 40425$, postoje x i y takvi da se $\{x, y\}$ nalazi u bar 49 skupova A_i. Unija tih 49 skupova ima $2 + 49\cdot 2 = 100$ elemenata.

$\diamondsuit$

6.2 Elementi Remzijeve teorije

Neformalno govoreći, Remzijeva[5] teorija kaže da u dovoljno velikom broju objekata, uvijek postoji pravilna struktura unaprijed zadane veličine.

Osnovnu ideju možemo ilustrovati sa jednostavnim primjerom, koji se često pojavljivao kao zadatak na matematičkim takmičenjima.

Primjer 6.2.1. Dokazati da u grupi od šest ljudi uvijek vrijedi bar jedna od sljedeće dvije tvrdnje:

(A) Postoje tri čovjeka tako da se svaka dva poznaju.
(B) Postoje tri čovjeka tako da se nikoja dva čovjeka među njima ne poznaju.

Da li to mora da vrijedi i za grupu od pet ljudi?

Rješenje: Neka je A jedan čovjek iz te grupe. Ostalih pet ljudi podijelimo u dvije grupe: u jednoj su oni koji se poznaju sa A, dok su u drugoj grupi oni koji se ne poznaju sa A. Na osnovu Dirihleovog principa, u bar jednoj grupi postoje bar tri čovjeka.
Posmatrajmo situaciju kada osoba A ima tri poznanika. Ako među tom trojicom postoji par koji se poznaje, taj par zajedno sa osobom A, čini trojku znanaca. U tom slučaju je ispunjeno tvrđenje **(A)**. Ako se nikoja dvojica poznanika od A ne poznaju, onda ta tri poznanika od A čine trojku u kojoj se nikoja dva ne poznaju, odnosno vrijedi tvrđenje **(B)**.

Sličnim razmatranjem, zadatak riješimo ako grupa ljudi koji se ne poznaju sa osobom A ima tri čovjeka.

Prethodno razmatranje se može zgodno opisati "grafički". Ljude predstavimo kao tačke u ravni, tako da su svake tri tačke u tom skupu nekolinearne. Ako se dva čovjeka poznaju, odgovarajuće tačke spojimo sa punom linijom, a ako se ne poznaju sa isprekidanom. Tako su svake dvije tačke spojene punom ili isprekidanom linijom.

Upravo smo pokazali da se u skupu od šest tačaka, u kojem su svake dvije tačke spojene punom ili isprekidanom linijom, uvijek može naći kompletan trougao kojem su sve ivice su ili "pune" ili "isprekidane"!

U grupi od pet ljudi tvrđenje iz prethodnog primjera ne mora da vrijedi: Ako su stranice petougla su pune a dijagonale isprekidane, nema kompletnog trougla!

$\diamondsuit$

[5] Frank Plumpton Ramsey (1903 - 1930)

Motivisani prethodnim primjerom možemo postaviti pitanje:
Da li za proizvoljne prirodne brojeve p i q postoji prirodan broj $R(p,q)$ tako da u svakom društvu sa bar $R(p,q)$ ljudi postoji

- ili njih p, tako da se svaka dvojica među njima poznaju,
- ili njih q između kojih se nikoja dvojica ne poznaju?

I ovo pitanje ima istu geometrijsku interpretaciju kao i u primjeru 6.2.1. Naime, pitamo se da li za svaki skup od bar $R(p,q)$ tačaka u ravni u kojem nikoje tri tačke nisu kolinearne, i u kojem su svake dvije tačke spojene ili punom ili isprekidanom linijom vrijedi:

- ili postoji p-tougao u kojem su sve stranice i sve dijagonale pune;
- ili postoji q-tougao u kojem su sve dijagonale i stranice isprekidane?

Na početku primijetimo da za sve $p,q \geqslant 2$ vrijedi $R(p,2) = p$ i $R(2,q) = q$. Primjer 6.2.1 nam kaže da je $R(3,3) = 6$.

Za proizvoljne prirodne brojeve p i q, u ovom trenutku, ne znamo da li broj $R(p,q)$ uopšte postoji! Možda je moguće n tačaka u ravni (ma koliko n bio veliki!) spojiti punim i isprekidanim linijama tako da ne postoji kompletan p-tougao od punih linija, niti kompletan q-tougao od isprekidanih linija?

TEOREMA 6.2.2 (Remzi). *Neka su p i q prirodni brojevi veći od jedan. Ako postoje brojevi $R(p,q-1)$ i $R(p-1,q)$, tada postoji i $R(p,q)$ i vrijedi:*

$$R(p,q) \leqslant R(p,q-1) + R(p-1,q). \tag{6.2}$$

Dokaz. Uočimo skup od $n = R(p,q-1) + R(p-1,q)$ ljudi, i u tom skupu odaberimo jednog čovjeka. Preostalih $n-1$ ljudi rasporedimo u dvije grupe:

(i) u prvoj grupi su svi oni koji poznaju odabranog,
(ii) drugu grupu čine ljudi koji ne poznaju odabranog čovjeka.

Po Dirihleovom principu, ili se u prvoj grupi nalazi bar $R(p-1,q)$ ljudi, ili ih u drugoj grupi ima bar $R(p,q-1)$.

Ako u prvoj grupi postoji $R(p-1,q)$ ljudi, na osnovu definicije broja $R(p-1,q)$, vrijedi bar jedno od sljedeća dva tvrđenja:

- Među njima postoji $p-1$ osoba tako da se svake dvije od njih poznaju. Kada im se doda odabrani čovjek, koji ih sve poznaje, to je traženih p ljudi između kojih se svi poznaju.

- Među tim ljudima postoji q osoba među kojima se nikoja dva ne poznaju.

Na sličan način pokažemo da nejednakost (6.2) vrijedi i ako u drugoj grupi postoji $R(p, q-1)$ ljudi.

Iz nejednakosti (6.2) se indukcijom po $p+q$ može lako pokazati da za sve p i q postoji $R(p, q)$.

□

Broj $R(p, q)$, čiju smo egzistenciju za sve p i q upravo pokazali, naziva se **Remzijev broj**.

Na osnovu nejednakosti (6.2) možemo zaključiti da je $R(4,3) \leqslant R(4,2) + R(3,3) = 10$. Međutim, to nije tačna vrijednost za Remzijev broj $R(4,3)$.

Primjer 6.2.3. Dokazati da je $R(4,3) = 9$.

Rješenje: Pretpostavimo da u grupi od devet ljudi postoji osoba A koja poznaje bar šest ljudi. Kako je $R(3,3) = 6$, među tom šestoricom ili postoje trojica neznanaca (čime je dokaz završen), ili postoje tri među kojima se svi poznaju. Ta trojica poznanika, zajedno sa osobom A čine traženu četvorku poznanika.

Na sličan način zadatak možemo riješiti ako postoji osoba B koja ne poznaje bar četiri čovjeka u toj grupi. Za tu četvoricu, zbog $R(4,2) = 4$ vrijedi ili se sva četvorica međusobno poznaju (što je opet kraj dokaza), ili postoji par koji se ne poznaje. Ako se tom paru neznanaca doda B, dobili smo trojku ljudi koji se ne poznaju.

Jedini slučaj koji nije obuhvaćen prethodnim razmatranjem je kada svaka od devet osoba ima tačno pet poznanika i tačno tri neznanca. Međutim, takva grupa ljudi ne može da postoji (vidjeti zadatak 9 iz drugog poglavlja). Naime, ako bi to bilo moguće, broj parova poznanika (punih duži u geometrijskoj interpretaciji) u tom društvu je $\frac{9 \cdot 5}{2}$, što nije prirodan broj.

♢

Za velike brojeve p i q, razlika između stvarne vrijednosti Remzijevog broja $R(p, q)$ i one "procjenjene" primjenom nejednakosti (6.2) je još i veća.

Ono što je svakako veoma zanimljivo je da se tačne vrijednosti Remzijevih brojeva i za relativno male brojeve p i q veoma teško računaju. Na primjer, tačne vrijednosti za $R(5,5)$ i $R(6,4)$ su još nepoznate!

Danas je poznato da vrijedi

$$43 \leqslant R(5,5) \leqslant 49 \text{ i } 35 \leqslant R(6,4) \leqslant 41.$$

U dosadašnjim razmatranjima smo posmatrali skup X sa r elemenata i sve dvočlane podskupove tog skupa smo dijelili u dvije grupe (u geometrijskoj interpretaciji smo sve duži bojali sa dvije boje). Elementi skupa X su bili ljudi ili tačke u ravni, a grupe su bile "puna" i "isprekidana" linija, odnosno, poznanici ili neznanci.

Ako je broj r dovoljno velik, na osnovu teoreme 6.2.2 znamo:

- ili postoji p-člani podskup od X u kojem su svi dvočlani podskupovi obojeni jednom bojom,
- ili postoji q-člani podskup skupa X kojem su svi dvočlani podskupovi obojeni drugom bojom.

Ovo razmatranje se može na prirodan način uopštiti. Možemo sa nekoliko boja $b_1, b_2, \dots, b_c$ obojiti sve k-člane podskupove od X. Ako skup X ima dovoljno veliki broj elemenata, da li možemo očekivati da uvijek (za bilo kakvo bojenje k-članih podskupova od X) postoji $Y \subseteq X$ željene veličine, kojem su svi k-člani podskupovi obojeni istom bojom?

Odgovor na to pitanje daje sljedeća teorema.

TEOREMA 6.2.4 (Uopšteni Remzijevi brojevi). *Neka su dati prirodni brojevi k, c, a_1, $a_2, \dots, a_{c-1}, a_c$. Tada postoji najmanji prirodan broj $R = R(k, c; a_1, \dots, a_c)$ takav da vrijedi:*

ako se svi k-člani podskupovi nekog skupa od R elemenata oboje sa c boja $b_1, b_2, \dots, b_c$ tada postoji $i \in [c]$ i neki a_i-člani podskup posmatranog skupa kojem su svi k-člani podskupovi obojeni sa istom bojom b_i.

Brojevi $R(k, c; a_1, \dots, a_c)$ se nazivaju **uopšteni Remzijevi brojevi**. U ovoj terminologiji je $R(p, q) = R(2, 2; p, q)$. Dalje, možemo primijetiti da je Dirihleov princip samo specijalan slučaj Remzijeve teorije. U terminima uopštenih Remzijevih brojeva teoreme 6.1.1 i 6.1.7 se mogu zapisati ovako

$$R(1, r; 2, 2, \dots, 2) = r + 1, R(1, r; , m, m \dots, m) = r(m-1) + 1.$$

Dokaz. Egzistencija uopštenog Remzijevog broja se pokaže na sličan način kao i u dokazu teoreme 6.2.2. Koristimo indukciju po k i po $a_1 + a_2 + \cdots + a_c$. Na osnovu induktivne pretpostavke, znamo da postoje brojevi

$$A_i = R(k, c; a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i - 1, a_{i+1}, \ldots, a_c), \text{ za sve } i = 1, 2, \ldots, c.$$

Takođe, po induktivnoj pretpostavci postoji broj

$$R = R(k-1, c; A_1, \ldots, A_c) + 1.$$

Neka je X proizvoljan skup sa R elemenata i $f : \binom{X}{k} \to \{b_1, b_2, \ldots, b_c\}$ proizvoljno bojenje svih k-članih podskupova od X. Odaberimo proizvoljan $x \in X$ i uočimo skup $Z = X \setminus \{x\}$.

Neka je $g : \binom{Z}{k-1} \to \{b_1, b_2, \ldots, b_c\}$ bojenje $(k-1)$-članih podskupova od Z definisano sa $g(S) = f(S \cup \{x\})$.

Po induktivnoj pretpostavci, postoji $i \in [c]$ i $T \subset Z$ sa A_i elemenata čiji su svi $(k-1)$-člani podskupovi obojeni bojom b_i.

Kako A_i ima $R(k, c; a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i - 1, a_{i+1}, \ldots, a_c)$ elemenata, iz definicije uopštenih Remzijevih brojeva znamo da postoji $j \in [c]$ i $Y \subset T$ sa a_j elemenata (osim za $j = i$, kada skup Y ima $a_i - 1$ elemenata) čiji su svi k-člani podskupovi obojeni sa bojom b_j. Ako je $j = i$ i $|Y| = a_i - 1$, u taj skup dodamo element x i dobićemo a_i-člani podskup od X sa traženim svojstvom.

$\square$

Tačne vrijednosti uopštenih Remzijevih brojeva je još teže odrediti nego vrijednosti "običnih" $R(p, q)$. Jedini netrivijalan uopšten Remzijev broj čija se tačna vrijednost zna je $R(2, 3; 3, 3, 3) = 17$.

Međutim, i sama egzistencija Remzijevih brojeva je veoma zanimljiva i ima mnogo primjena. Navedimo nekoliko atraktivnih i dobro poznatih primjena Remzijeve teorije u teoriji brojeva i geometriji.

TEOREMA 6.2.5 (Šur[6]). *Za proizvoljan $m \in \mathbb{N}$ postoji prirodan broj $s = S(m)$ takav da za svaku podjelu skupa $[s] = \{1, 2, \ldots, s-1, s\}$ u m disjunktnih podskupova $A_1, A_2, \ldots, A_m$ postoje $x, y \in [s]$ takvi da brojevi x, y i $x + y$ pripadaju istom skupu A_i.*

Dokaz. Neka je s Remzijev broj $R(2, m; 3, 3, \ldots, 3)$. Pretpostavimo da je $[s] = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ neka particija skupa $[s]$ u m disjunktnih podskupova.

Dvočlane podskupove skupa $[s]$ bojimo sa m boja na sljedeći način:

$$\{x, y\} \text{ je obojen sa bojom } i \text{ ako i samo ako je } |x - y| \in A_i.$$

[6] Issai Schur (1875 - 1941)

Iz definicije broja $R(2, m; 3, 3, \ldots, 3)$ znamo da postoji podskup $\{a, b, c\} \subset [s]$ takav da su svi dvočlani podskupovi obojeni sa i. Ako je $a < b < c$, tada brojevi $x = b - a, y = c - b$ i $z = c - a$ pripadaju istom podskupu A_i. Lako je provjeriti da je $x + y = z$.

□

Sljedeća primjena Remzijeve teorije je iz kombinatorne geometrije. Neka je X skup tačaka u ravni. Konveksan omotač skupa X je najmanji konveksan skup koji sadrži sve tačke iz X. Ako je skup X konačan, njegov konveksan omotač je konveksan m-tougao P sa tjemenima iz X, tako da P sadrži sve tačke iz X.

Za tačke $A_1, A_2, \ldots, A_n$ u ravni kažemo da su konveksno nezavisne ako su te tačke tjemena konveksnog n-tougla, odnosno ako je n-tougao $A_1 A_2 \ldots A_n$ konveksan omotač skupa $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.

TEOREMA 6.2.6 (Erdeš-Sekereš). *Za svaki prirodan broj n postoji broj C_n, takav da bilo koji skup od C_n tačaka u ravni u opštem položaju (to znači da nikoje tri nisu kolinearne) sadrži konveksno nezavisan n-člani podskup.*

Drugim riječima, između C_n tačaka u ravni koje su u opštem položaju, možemo odabrati njih n koje su tjemena nekog konveksnog n-tougla.

U dokazu prethodne teoreme koriste se dvije jednostavne leme.

LEMA 6.2.7. *Ako je zadano pet tačaka u ravni, tako da nikoje tri nisu kolinearne, tada među njima postoje četiri konveksno nezavisne tačke.*

Dokaz. Ako je konveksan omotač tih pet zadanih tačaka petougao ili četverougao, nema potrebe da nešto dokazujemo. Pretpostavimo da je konveksan omotač tih tačaka trougao u čijoj se unutrašnjosti nalaze dvije preostale tačke. Tada su duž koja spaja te dvije tačke i jedna od stranica trougla dvije naspramne stranice nekog konveksnog četverougla. Tjemena tog četverougla su konveksno nezavisna.

□

LEMA 6.2.8. *U ravni se nalazi n tačaka među kojima nikoje tri nisu kolinearne. Ako su svi četveročlani podskupovi tog skupa tačaka konveksno nezavisni, tada je svih n tačaka konveksno nezavisno.*

Dokaz. Neka su zadane tačke $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ako tvrđenje teoreme nije tačno, konveksan omotač tih tačaka je neki m-tougao, gdje je

$m < n$. Bez smanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da je konveksan omotač posmatranog skupa $A_1A_2\dots A_m$. Tada se tačka A_n nalazi u nekom od trouglova $\triangle A_1A_2A_3$, $\triangle A_1A_3A_4$, $\dots, \triangle A_1A_{m-1}A_m$. Tjemena trougla koji sadrži tačku A_n, zajedno sa A_n, čine četiri tačke koje nisu konveksno zavisne. To je kontradikcija sa pretpostavkom, pa su tačke $A_1, A_2, \dots, A_n$ tjemena n-tougla.

□

Dokaz teoreme 6.2.6: Neka je X skup tačaka u ravni koje su u opštem položaju. Sve četveročlane podskupove od X obojimo crvenom i bijelom bojom po sljedećem pravilu:

Ako je $S = \{A, B, C, D\} \subseteq X$ i ako su tačke A, B, C, D konveksno nezavisne, skup S obojimo crveno, inače ga obojimo bijelo.

Ukoliko u X ima bar $R(4, 2; n, n)$ tačaka, znamo da postoji $Y \subset X$ takav da je $|Y| = n$ i svi četveročlani skupovi tačaka iz Y su obojeni istom bojom. Na osnovu leme 6.2.7, za $n \geqslant 5$, znamo da ne mogu biti svi podskupovi obojeni bijelom bojom. Dakle, svaki četveročlani podskup od Y je obojen crveno, odnosno, svake četiri tačke iz Y su konveksno nezavisne.
Na osnovu leme 6.2.8 slijedi da je Y konveksno nezavisan skup.

□

Ima smisla posmatrati i varijantu Remzijeve teoreme za beskonačne skupove.

TEOREMA 6.2.9. *Neka su dati prirodni brojevi k i c i beskončan skup X. Ako se svi k-člani podskupovi skupa X oboje sa c boja, postoji beskonačan podskup Y od X, takav da su svi k-člani podskupovi od Y obojeni istom bojom.*

Za $k = 1$ dobijamo očigledno tvrđenje: ako beskonačan skup podijelimo na nekoliko disjunktnih podskupova $A_1, A_2, \dots, A_c$, tada će bar jedan od tih podskupova biti beskonačan. Dakle, za $k = 1$, prethodnu teoremu možemo nazvati Dirihleov princip za beskonačne skupove.

Dokažimo prethodnu teoremu za $k = 2$. Neka je X beskonačan skup i neka su svi dvočlani podskupovi od X obojeni sa c boja. Svaki beskonačan skup X sadrži prebrojiv podskup $X_0 = \{x_1, x_2, \dots\}$.

Pokazaćemo da postoji niz beskonačnih podskupova $Y_1, Y_2, \dots$ od X_0 i niz različitih elemenata $y_1, y_2, \dots$ skupa X_0 tako da vrijedi:

1. $Y_1 \supset Y_2 \supset Y_3 \supset \cdots$.
2. $y_i \notin Y_i$ i za sve $z \in Y_i$ skupovi $\{y_i, z\}$ su obojeni istom bojom.

3. $y_i \in Y_j$ za sve $j < i$.

Na početku, neka je $Y_0 = X_0$. Ako smo konstruisali $y_1, \ldots, y_{i-1}$ i $Y_1, \ldots, Y_{i-1}$, za y_i odaberimo proizvoljan element iz Y_{i-1}. Posmatrajmo sve skupove oblika $\{y_i, z\}$, gdje je $z \in Y_{i-1} \setminus \{y_i\}$. Na osnovu beskonačnog Dirihleovog principa, postoji beskonačan $Y_i \subset Y_{i-1}$ takav da su za sve $z \in Y_i$ skupovi $\{y_i, z\}$ obojeni istom bojom.

Sada primijetimo da za fiksan prirodan broj i i za sve $j \in \mathbb{N}, j > i$, boja skupa $\{y_i, y_j\}$ zavisi samo od i. Tu boju označimo sa c_i. Kako je skup boja konačan, postoji beskonačan skup $M \subset \mathbb{N}$, takav da su za sve $m \in M$ boje c_m iste. Traženi skup je

$$Y = \{y_m : m \in M\}.$$

Jedan od najpoznatijih rezultata u teoriji brojeva, teorema Van der Vardena[7] iz 1927. godine, je tvrđenje blisko Remzijevoj teoriji.

TEOREMA 6.2.10 (Van der Varden). *Za sve $k, r \in \mathbb{N}$ postoji prirodan broj $w = W(k, r)$, takav da za svako bojenje brojeva iz $[w]$ sa r boja postoji jednobojan aritmetički niz dužine k.*

Elegantan i kratak dokaz ove teoreme, u kojem se koristi samo Dirihleov princip, je dat u radu [18]. Postoji i beskonačna varijanta van der Vardenove teoreme.

TEOREMA 6.2.11. *Ako je skup cijelih brojeva podijeljen na konačno mnogo disjunktnih podskupova, tada se za svaki $n \in \mathbb{N}$ u nekom od podskupova nalazi aritmetički niz dužine n.*

Dokaz ove teoreme, kao i detaljan pregled Remzijeve teorije (brojne primjene, ocjene Remzijevih brojeva, ...) se mogu naći u knjizi [17].

6.3 Zadaci

1. Na svakom stablu u šumi ima manje listova nego što ima stabala u šumi. Da li moraju da postoje dva stabla sa istim brojem listova?
2. Dokaži da u svakom konveksnom poliedru postoje dvije pljosni sa istim brojem ivica!
3. Familija podskupova skupa $[n]$ ima svojstvo da se svaka dva skupa te familije sijeku. Koliko najviše elemenata može da bude u toj familiji?

[7] Bartel Leendert van der Waerden (1903 - 1996)

4. Koliko najmanje brojeva treba odstraniti iz skupa $\{2, 3, 4, \ldots, 2010\}$, tako da nijedan od brojeva koji su ostali nije jednak proizvodu neka druga dva preostala broja?
5. Na tablu 10×10 je postavljen 41 top. Dokaži da je među njima moguće odabrati pet topova koji se ne napadaju!
6. Tabla 6×6 je pokrivena dominama 2×1. Dokaži da se ta tabla može presjeći po granici neke dvije susjedne vrste ili kolone, tako da se nijedna domina ne presječe!
7. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_{1066}$ podskupovi konačnog skupa X i neka svaki od njih sadrži bar polovinu elemenata iz X. Dokaži da postoji deset elemenata $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ iz X, tako da svaki skup A_i sadrži bar jedan od tih deset elemenata.
8. U nizu od m prirodnih brojeva se nalazi tačno n različitih. Ako je $m \geq 2^n$ dokaži da je proizvod nekoliko uzastopnih brojeva u tom nizu potpun kvadrat!
9. Sve tačke u ravni su obojene sa konačno mnogo boja. Dokaži da postoji pravougaonik kojem su tjemena obojena istom bojom.
10. Dokaži da se između $n + 2$ proizvoljnih cijelih brojeva mogu naći dva čija je razlika ili čiji je zbir djeljiv sa $2n$.
11. U krugu poluprečnika jedan je povučeno nekoliko tetiva. Ako svaki prečnik siječe najviše k tih tetiva, dokaži da je ukupna dužina tih tetiva manja od $k\pi$!
12. Za svaki prirodan broj n postoji beskonačno mnogo Fibonačijevih brojeva djeljivih sa n.
13. Unutar kocke čija je ivica dugačka 9 cm se nalazi 1981 tačka. Dokaži da postoje dvije tačke na udaljenosti manjoj od jedan!
14. Neka je $\mathcal{S}$ skup od 25 tačaka u ravni, takav da svaki tročlani podskup od $\mathcal{S}$ sadrži bar dvije tačke na udaljenosti manjoj od 1. Dokazati da postoji 13-člani podskup skupa $\mathcal{S}$ koji možemo pokriti krugom poluprečnika 1.
15. Neka je $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ i neka je $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$ i neka je
$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \cup \{b_1, b_2, \ldots, b_n\} = \{1, 2, \ldots, 2n-1, 2n\}.$$
Izračunaj $|b_1 - a_1| + |b_2 - a_2| + \cdots + |b_n - a_n|$.
16. Dokaži da za Remzijev broj $R(p, q)$ vrijedi
$$R(p, q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}.$$

17. Dva kruga sa zajedničkim centrom, jedan manji od drugog, podijeljeni su prečnicima na po 200 podudarnih isječaka. U većem krugu je 100 isječaka obojeno crvenom, a 100 plavom bojom. U manjem krugu je svaki isječak obojen proizvoljno sa jednom od ove dvije boje. Dokazati da je moguće zarotirati mali krug tako da bar na 100 susjednih isječaka manjeg i većeg kruga boje budu iste!
18. Neka je n neparan prirodan broj veći od jedan i neka su $c_1, c_2, \ldots, c_n$ proizvoljni cijeli brojevi. Za permutaciju $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n) \in \mathbb{S}_n$ definišemo
$$S(\pi) = \sum_{i=1}^{n} c_i \pi_i.$$
Dokaži da postoje permutacije $\pi, \sigma \in \mathbb{S}_n$ takve da je $S(\pi) - S(\sigma)$ djeljiv sa $n!$.
19. Dokaži da svaki niz realnih brojeva ima monoton podniz!
20. Neka je $\mathcal{F}$ familija podskupova nekog skupa od n elemenata i neka je $|\mathcal{F}| = 2^{n-1}+1$. Dokaži da postoje $S, T \in \mathcal{F}$ takvi da je $|S \setminus T| = 1$. Da li isto tvrđenje mora da vrijedi i ako je $|\mathcal{F}| = 2^{n-1}$?
21. U prostoru se nalazi devet tačaka među kojima nikoje četiri nisu koplanarne. Odrediti najmanji broj n sa sljedećim svojstvom:
Ako odaberemo n duži koje spajaju zadane tačke, pa ih proizvoljno obojimo sa dvije boje, tada postoji jednobojan trougao!
22. Neka su A i B cjelobrojne matrice 2×2. Ako su A, $A+B$, $A+2B$, $A+3B$, $A+4B$ regularne matrice čiji su inverzi cjelobrojne matrice, dokaži da je $A+5B$ regularna i da je $(A+5B)^{-1}$ takođe cjelobrojna!
23. Zadan je skup od 1985 ne obavezno različitih prirodnih brojeva. Nijedan od tih brojeva nije djeljiv sa prostim brojem većim od 23 Dokaži da među zadatim brojevima postoje četiri čiji je proizvod četvrti stepen nekog prirodnog broja!
24. Tačke u prostoru su obojene sa jednom od tri zadate boje. Dokaži da postoji bar jedna boja koja realizuje sve udaljenosti, odnosno, za sve $d > 0$ postoje dvije tačke obojene tom bojom čija je udaljenost jednaka d.

6.4 Rješenja zadataka

1. Ne mora. Ako ima n stabala u šumi na njima može da bude $0, 1, \ldots, n-1$ listova.
2. Ako poliedar ima n pljosni, te pljosni mogu imati $3, 4, \ldots, n-1$ ivica.

3. Neka je $A \subseteq [n]$. U familiji sa traženim svojstvom može da se nalazi najviše jedan od skupova A ili $[n] \setminus A$. Stoga, takva familija može da ima najviše 2^{n-1} elemenata. Familiju sa toliko elemenata čine svi podskupovi $[n]$ koji sadrže jedan fiksan element.
4. Dovoljno je ukloniti brojeve $2, 3, 4, \ldots, 44$.
Kako vrijedi $45 \cdot 45 = 2025 > 2010$, nijedan od preostalih brojeva nije proizvod neka dva broja iz skupa $\{45, 46, 47, \ldots, 2010\}$. U trojkama
$$(2, 87, 2 \cdot 87), (3, 86, 3 \cdot 86), \ldots, (44, 45, 44 \cdot 45)$$
se nalaze različiti brojevi, i iz svake mora biti izbačen jedan da bi uslov zadatka bio ispunjen. Stoga se moraju ukloniti bar 43 broja.
5. Primjenom Dirihleovog principa, može se pokazati da postoji pet kolona sa (redom) bar $5, 4, 3, 2, 1$ topova. Iz kolone u kojoj ima bar jedan top odaberemo jednog, iz one u kojoj imaju bar dva možemo odabrati jednog koji ga ne napada, iz kolone koja ima bar tri možemo odabrati nekog koji ne napada prethodne, itd...
6. Svaka domina presječe tačno jednu liniju između dvije vrste ili kolone. Kako je postavljeno 18 domina, a ima 10 graničnih linija, "prosjek" presjeka je $1,8$. Međutim, primijetimo da je broj presjeka neke granice sa dominama mora biti paran!
7. Iz uslova $|A_i| > \frac{|X|}{2}$, možemo zaključiti da postoji element $x_1 \in X$ koji se nalazi u bar p_1 skupova od 1066 posmatranih ($p_1 \geqslant 534$). Ostale skupove, njih $q_1 = 1066 - p_1$ (najviše 532), označimo sa $B_1, B_2, \ldots, B_{q_1}$. Po pretpostavci, svaki od njih ima bar polovinu elemenata iz $X \setminus \{x_1\}$. Stoga postoji element $x_2 \in X \setminus \{x_1\}$ koji se nalazi u bar polovini od q_1 preostalih skupova. Dalje razmatranje možemo pratiti u sljedećoj tabeli:

$x_{i+1} \in X$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
skupovi bez x_i	532	265	132	65	32	15	7	3	1	0

8. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ različiti brojevi koji se pojave u posmatranom nizu $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Za sve $j = 1, 2, \ldots, m$ definišimo n-torku $E_j = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$ sa
$$\varepsilon_i = \begin{cases} 0, a_i \text{ se pojavi paran broj puta u } x_1, x_2, \ldots, x_j; \\ 1, \text{inače.} \end{cases}$$
Ako za neki $j \in [m]$ vrijedi $E_j = (0, 0, \ldots, 0)$, broj $x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_j$ je potpun kvadrat. U suprotnom, zbog $m \geqslant 2^n$, postoje $j_1, j_2 \in [m]$, $j_1 < j_2$ takvi da je $E_{j_1} = E_{j_2}$.
Tada je broj $x_{j_1+1} \cdot x_{j_1+2} \cdot \cdots \cdot x_{j_2}$ potpun kvadrat.

9. Neka su tačke ravni obojene sa n boja. Posmatrajmo skup:

$$X = \{(p,q) : 0 \leqslant p \leqslant n, 0 \leqslant q \leqslant n\binom{n+1}{2} + 1\} \subseteq \mathbb{Z}^2.$$

Za sve $i = 0, 1, \ldots, n\binom{n+1}{2} + 1$, na svakoj horizontalnoj pravoj $y = i$ postoje dvije isto obojene tačke iz skupa X. Na pravoj $y = i$ postoji $\binom{n+1}{2}$ različitih mjesta za te dvije istobojne tačke. Kako na raspolaganju imamo n boja, postoji najviše $n\binom{n+1}{2}$ jednobojnih parova (p,q). Horizontalnih pravih ima jedna više, pa postoje dvije prave u kojima su dva jednobojna para na istoj poziciji obojena istom bojom.

10. Posmatranih $n+2$ brojeva dijelimo u $n+1$ skupova $A_0, A_1, \ldots, A_n$:

$$A_i = \{m : \text{ ostatak pri djeljenju sa } 2n \text{ je } i \text{ ili } 2n - i\}.$$

U bar jednom skupu A_i se nalaze dva elementa. Te elemente oduzmemo (ako im je ostatak pri djeljenju sa $2n$ isti), odnosno saberemo ako su im ostaci i i $2n - i$.

11. Ako je zbir dužina tih tetiva veći ili jednak $k\pi$, tada je zbir dužina odgovarajućih kružnih lukova veća od $k\pi$. Za svaki od tih lukova, uočimo i njemu centralno simetričan luk obzirom na centar kružnice. Zbir dužina svih tih lukova je veći od $2k\pi$. Stoga, mora da postoji tačka na kružnici, koja je pokrivena sa $k+1$ lukova. Prečnik koji sadrži tu tačku siječe više od k posmatranih tetiva.

12. Različitih "parova ostataka" pri djeljenju sa n ima n^2. Stoga postoji beskonačno mnogo parova susjednih Fibonačijevih brojeva koji pri djeljenju sa n daju iste ostatke, odnosno postoje $i > j$ takvi da je (F_i, F_{i+1}) i (F_j, F_{j+1}) takvi da je $F_i \equiv F_j (\text{mod } n)$ i $F_{i+1} \equiv F_{j+1} (\text{mod } n)$. Tada je $F_{i-1} \equiv F_{j-1} (\text{mod } n)$. Ponavljajući ovaj postupak dobijemo $F_{i-j} \equiv 0 (\text{mod } n)$.

13. Ako su sve tačke udaljene više od 1, tada su kugle oko tih tačaka poluprečnika $\frac{1}{2}$ disjunktne. Te kugle su sadržane u kocki stranice 10, kojoj se centar poklapa sa centrom polazne kocke. To je kontradikcija sa

$$1981 \frac{4\left(\frac{1}{2}\right)^3 \pi}{3} = 1981 \cdot \frac{\pi}{6} > 1000.$$

14. Neka su A i B najudaljenije tačke u $\mathcal{S}$. Za sve $X \in \mathcal{S}$ vrijedi $|AX| \leqslant 1$ ili $|BX| \leqslant 1$. Neka su k_A i k_B krugovi oko A, odnosno B poluprečnika jedan. Bar jedan od njih sadrži bar 13 tačaka.

15. Ako je $a_k \leqslant n$ a $a_{k+1} > n$ tada je $b_k > n$ i $b_{k+1} \leqslant n$. Stoga je posmatrana suma jednaka

$$(b_1 - a_1) + \cdots + (b_k - a_k) + (a_{k+1} - b_{k+1}) + \cdots + (a_n - b_n).$$

Kako vrijedi $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \cup \{b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$, u prethodnoj sumi ispred brojeva $1, 2, \ldots, n$ se nalazi znak minus, dok je ispred ostalih znak plus. Tražena suma je n^2.

16. Indukcijom, uz primjenu nejednakosti (6.2).

17. Postoji 200 različitih položaja malog i velikog kruga. Ako rotiramo mali krug za $360°$, svaki od 200 isječaka u malom krugu (bez obzira na to kojom je bojom obojen) će biti iste boje sa susjednim isječkom velikog kruga tačno 100 puta. To je $200 \cdot 100 = 20000$ "poklapanja" u 200 položaja malog kruga, pa mora da postoji položaj sa bar 100 "poklapanja".

18. Ako tvrđenje zadatka nije tačno tada se pri djeljenju $S(\pi)$ sa $n!$ pojave svi ostaci od 0 do $n! - 1$. Tako je

$$\sum_{\pi \in \mathbb{S}_n} S(\pi) \equiv 0+1+2+\cdots+(n!-1) = \frac{n!(n!-1)}{2} \equiv \frac{n!-1}{2} (\mathrm{mod}\ n!).$$

Sa druge strane, uz proizvoljan koeficijent c_i se svaki od brojeva iz $[n]$ pojavi $(n-1)!$ puta. Tako je

$$\sum_{\pi \in \mathbb{S}_n} S(\pi) = (c_1 + c_2 + \cdots + c_n)(1 + 2 + \cdots + n)(n-1)! \equiv 0 (\mathrm{mod}\ n!),$$

što je kontradikcija sa pretpostavkom.

19. Posmatrajmo proizvoljan niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u skupu $\mathbb{R}$. Parove (x_i, x_j) bojimo sa tri boje: crveno ako je $x_i < x_j$, plavo ako je $x_i = x_j$ i bijelo ako je $x_i > x_j$. Na osnovu beskonačne verzije Remzijeve teoreme, postoji beskonačno članova niza kod kojih su svi parovi obojeni istom bojom. Ti članovi čine monoton podniz.

20. Posmatrajmo skup parova $\{(A, A \cup \{1\}) : A \subset [n], 1 \notin A\}$. Kako tih parova ima 2^{n-1} bar jedan "čitav" par je u $\mathcal{F}$, i to su traženi skupovi. Svih podskupova od $[n]$ koji imaju neparan broj elemenata ima 2^{n-1} To je primjer familije sa 2^{n-1} podskupova koja nema traženo svojstvo.

21. Postoji 36 duži koje spajaju parove zadanih tačaka. Ako u bojenju izostavimo samo tri duži, tada postoji šest tačaka između kojih su sve duži obojene. Na osnovu primjera 6.2.1, znamo da postoji jednobojan trougao. Dakle, vrijedi $n \leqslant 33$. Pokažimo da je moguće

obojiti 32 duži tako da ne postoji jednobojan trougao. Iz primjera 6.2.1 znamo da možemo obojiti 10 duži koje spajaju pet posmatranih tačaka, tako da nema jednobojnog trougla. Sada, dodajemo jednu po jednu tačku od četiri preostale na sljedeći način:
Preostalu tačku A spojimo sa svima već posmatranim tačkama osim sa jednom tačkom B, koja je spojena sa svima ostalim. Duž AX obojimo bojom sa kojom je obojena i duž BX. Tako dobijemo ukupno $10+4+5+6+7=32$ obojene duži među kojima nema jednobojnog trougla.

22. Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definisana sa $f(t)=\mathsf{det}(A+tB)$ je polinom drugog stepena u t. Ako su X i X^{-1} regularne cjelobrojne matrice, tada je $\mathsf{det}X=\pm 1$. Stoga su $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)$ jednaki 1 ili -1. Polinom drugog stepena koji u tri različita broja ima iste vrijednosti je konstantan!. Stoga je $\mathsf{det}(A+5B)=\pm 1$, pa $(A+5B)^{-1}$ postoji i cjelobrojna je.
23. Svaki takav broj a se može napisati kao proizvod
$$a=2^{a_1}\cdot 3^{a_2}\cdot 5^{a_3}\cdot 7^{a_4}\cdot 11^{a_5}\cdot 13^{a_6}\cdot 17^{a_7}\cdot 19^{a_8}\cdot 23^{a_9}.$$
Proizvod $a\cdot b$ je potpun kvadrat ako su a_i i b_i iste parnosti za sve $i=1,2,\ldots,9$. Postoji $2^9=512$ različitih nizova $(x_1,x_2,\ldots,x_9)$ s obzirom na parnost koordinata. Uzastopnom primjenom Dirihleovog principa, između zadanih 1985 brojeva možemo odabrati[8] 736 različita para $\{x_i,y_i\}$ takve da im je proizvod potpun kvadrat, odnosno $x_i\cdot y_i=z_i^2$. Sada, na isti način zaključimo da među brojevima $z_1,z_2,\ldots,z_{736}$ postoje dva čiji je proizvod potpun kvadrat.
24. Neka su tačke obojene crvenom, plavom i bijelom bojom. Pretpostavimo da tvrđenje zadatka nije tačno. Tada postoje brojevi c, p i b takvi da se te udaljenosti ne mogu realizovati crvenom,plavom i bijelom bojom. Uočimo tetraedre $C_1C_2C_3C_4$ (stranice c), $P_1P_2P_3P_4$ (stranice p) i$B_1B_2B_3C_B$ (stranice b). Neka su $\overrightarrow{c}_i$, $\overrightarrow{p}_i$ i $\overrightarrow{b}_i$ vektori položaja odgovarajućih tačaka za $i=1,2,3,4$. Uočimo 64 tačke T_{ijk} takve da je $\overrightarrow{OT}_{ijk}=\overrightarrow{a}_i+\overrightarrow{b}_j+\overrightarrow{c}_k$.
Za svaki od 16 parova indeksa (i,j) tetraedar $T_{ij1}T_{ij2}T_{ij3}T_{ij4}$ je stranice c (dobije se translacijom $C_1C_2C_3C_4$ za $\overrightarrow{a_i}+\overrightarrow{b_j}$). Najviše jedno tjeme u svakom od tih tetraedara je crveno. Zbog toga, među tačkama T_{ijk} postoji najviše 16 crvenih. Slično se pokaže da među tačkama T_{ijk} može biti najviše 16 plavih i 16 bijelih. Dobili smo kontradikciju, jer postoje 64 tačke T_{ijk}.

[8] Kada smo odabrali 735 parova, ostalo je još 515 brojeva!

7

FORMULA UKLJUČENJA-ISKLJUČENJA

7.1 Računanje sa Venovim dijagramima

Još u nižim razredima osnovne škole koristili smo Venove[1] dijagrame da bismo riješili zadatke sljedećeg tipa.

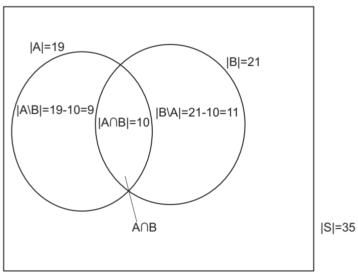
Primjer 7.1.1. U nekom razredu od 35 učenika njih 19 trenira košarku, fudbal trenira njih 21, dok oba sporta trenira 10 učenika. Koliko se učenika u tom razredu ne bavi ni sa jednim od ta dva sporta? Koliko učenika trenira samo jedan sport od ta dva, ali ne oba?

Rješenje: Uvedimo sljedeće oznake:

A – skup učenika koji treniraju košarku;

B – skup učenika koji treniraju fudbal.

Iz teksta zadatka znamo da je $|A| = 19$, $|B| = 21$ i $|A \cap B| = 10$. Skupove A i B predstavimo Venovim dijagramima i u odgovarajuće dijelove (vidi sliku 7.1) upišemo podatke koje znamo.



Slika 7.1. *Skupovi iz primjera 7.1.1 predstavljeni Venovim dijagramima.*

[1] John Venn (1834-1923)

Dalje računamo

$|A\backslash(A\cap B)| =$ broj učenika koji treniraju samo košarku $= 19-10 = 9$,

$|B\backslash(A\cap B)| =$ broj učenika koji treniraju samo fudbal $= 21-10 = 11$.

Dobijene podatke upišemo u odgovarajuće dijelove Venovih dijagrama na slici 7.1.
Sada uočimo da je broj učenika koji treniraju fudbal ili košarku jednak $|A \cup B|$ i računajmo ovako:

$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|, \text{ odnosno}$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{7.1}$$

Dakle, broj učenika u tom razredu koji treniraju fudbal ili košarku je $19 + 21 - 10 = 30$. Ako je S skup svih učenika u razredu, vrijedi

$$|S \setminus (A \cup B)| = |S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B| \tag{7.2}$$

Stoga je broj učenika koji ne treniraju ni fudbal ni košarku $35-30 = 5$.

Broj učenika koji treniraju samo jedan sport se lako "pročita" iz Venovih dijagrama na slici 7.1

$$|A \setminus (A \cap B)| + |B \setminus (A \cap B)| = 9 + 11 = 20.$$

$\diamondsuit$

Relacije (7.1) i (7.2) su najprostiji primjeri formule uključenja-isključenja. Osnovna ideja iz ovog primjera se lako "uopštava" na tri skupa.

TEOREMA 7.1.2 (Formula uključenja-isključenja za tri skupa.). *Neka su A, B i C podskupovi nekog konačnog skupa S. Tada vrijedi:*

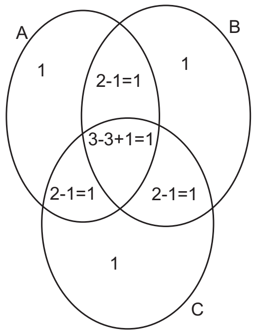
$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|,$$

odnosno

$$|S\backslash(A\cup B\cup C)| = |S|-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-|A\cap B\cap C|.$$

Za sada dajemo skicu dokaza[2] ove teoreme pomoću slike 7.2.

[2] U sljedećem poglavlju se nalazi dokaz formule uključenja-isključenja za n skupova.



Slika 7.2. *"Dokaz" teoreme 7.1.2 pomoću slike.*

U odgovarajuću oblast Venovog dijagrama na slici 7.2 upišemo koliko puta se elementi iz te oblasti broje u prvoj formuli iz teoreme 7.1.2.

Riješimo još jedan zadatak u kojem ćemo koristiti predstavljanje skupova Venovim dijagramima.

Primjer 7.1.3. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 1000 koji nisu djeljivi ni sa jednim od brojeva 2, 3 i 5? Koliko ima prirodnih brojeva manjih od hiljadu koji su djeljivi sa tačno jednim od brojeva 2, 3 ili 5?

Rješenje: Neka je

$$S = \{1, 2, 3, \ldots, 998, 999\}, A = \{2, 4, 6, \ldots, 996, 998\} = \{n \in [999] : 2|n\},$$

$$B = \{3, 6, 9, \ldots, 996, 999\} = \{n \in [999] : 3|n\},$$

$$C = \{5, 10, 15, \ldots, 990, 995\} = \{n \in [999] : 5|n\}.$$

Tada je

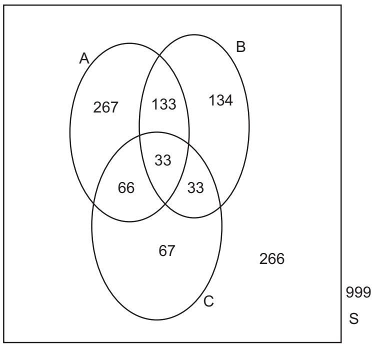
$$|S| = 999, |A| = \left\lfloor \frac{999}{2} \right\rfloor = 499, |B| = \left\lfloor \frac{999}{3} \right\rfloor = 333, |C| = \left\lfloor \frac{999}{5} \right\rfloor = 199.$$

Dalje računamo $|A \cap B| = \left\lfloor \frac{999}{6} \right\rfloor = 166, |A \cap C| = \left\lfloor \frac{999}{10} \right\rfloor = 99,$

$$|B \cap C| = \left\lfloor \frac{999}{15} \right\rfloor = 66, |A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{999}{30} \right\rfloor = 33.$$

Na osnovu teoreme 7.1.2 dobijamo

$$|S \setminus (A \cup B \cup C)| = 999 - 499 - 333 - 199 + 166 + 99 + 66 - 33 = 266.$$



Slika 7.3. *Venovi dijagrami skupova u primjeru 7.1.3.*

Pravilnim popunjavanjem Venovih dijagrama na slici 7.3 dobićemo odgovor na drugo pitanje: $267+134+67=468$.

$\diamondsuit$

7.2 Formula uključenja-isključenja

Formule uključenja-isključenja iz prethodnog poglavlja je lako uopštiti tako da se mogu primjenjivati na probleme u kojima posmatramo n skupova.

TEOREMA 7.2.1 (formula uključenja-isključenja). *Neka su dati konačni skupovi $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Broj elemenata u uniji tih skupova je:*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} (-1)^{k-1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| =$$

$$\big(|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_n|\big) - \big(|A_1 \cap A_2| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n|\big) +$$
$$+\big(|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|\big) - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Dokaz. Jedan od načina da se dokaže prethodna formula je indukcijom po broju skupova n. To ostavljamo zainteresovanim čitaocima, a ovdje dajemo dokaz kombinatorne prirode.

Neka je x proizvoljan element iz unije svih skupova A_i. Pretpostavimo da se taj element nalazi u tačno k skupova A_i.
"Doprinos" elementa x u sumi na desnoj strani jednakosti koju želimo dokazati je

$$\binom{k}{1}-\binom{k}{2}+\binom{k}{3}+\cdots+(-1)^{r-1}\binom{k}{r}+\cdots+(-1)^{k-1}\binom{k}{k}.$$

Kada u gornju sumu dodamo i oduzmemo broj 1, pa iskoristimo binomnu formulu, dobićemo da je doprinos elementa x na desnoj strani jednak $1-(1-1)^k=1$, baš koliki je i doprinos tog elementa na lijevoj strani.

□

Ako su svi skupovi A_i iz prethodne teoreme podskupovi nekog "velikog" skupa S, tada se iz prethodne teoreme lako izračuna broj elemenata iz S koji nisu ni u jednom od skupova A_i:

$$|S\setminus\bigcup_{i=1}^{n}A_i|=|S|-\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}(-1)^{k-1}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}|. \quad (7.3)$$

PRIMJEDBA 7.2.2. Sume na desnoj strani ovih formula izgledaju dosta komplikovane. Primijetimo da u izrazu

$$(-1)^{k-1}\big(|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k|+\cdots+|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}|+\cdots+|A_{n-k+1}\cap\cdots\cap A_n|\big),$$

što je jedna od zagrada na desnoj strani jednakosti u teoremi 7.5, ima tačno $\binom{n}{k}$ sabiraka.

Ako svi presjeci po k skupova imaju isti broj elemenata, odnosno ako za sve $k\in[n]$ i sve $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$ vrijedi

$$\big|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\big|=p_k,$$

tada su svi sabirci unutar iste zagrade u formuli iz teoreme 7.2.1 jednaki. U tom slučaju se formula uključenja-isključenja iz teoreme 7.2.1 i formula (7.3) mogu zapisati mnogo jednostavnije:

$$\big|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\big|=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}p_k,$$

$$\big|S\setminus\bigcup_{i=1}^{n}A_i\big|=\big|S\big|-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}p_k.$$

Nekoliko važnih i zanimljivih rezultata se može dobiti primjenom formule uključenja-isključenja.

Permutacija bez fiksnih tačaka se naziva **deranžman**. Dakle, deranžman je bijekcija $f:[n]\to[n]$, takva da za sve $i\in[n]$ vrijedi $f(i)\neq i$. Sa D_n označimo broj deranžmana u $\mathbb{S}_n$. Da odredimo brojeve D_n koristićemo formulu uključenja-isključenja.

Primjer 7.2.3 (Broj deranžmana). Odrediti broj deranžmana u $\mathbb{S}_n$.

Rješenje: Sa A_i označimo skup svih permutacija iz $\mathbb{S}_n$ kojima je i fiksna tačka, to jest

$$A_i = \{\pi \in \mathbb{S}_n : \pi(i) = i\}.$$

Primijetimo da je $D_n = \left|\mathbb{S}_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)\right|$. Uočimo proizvoljnih k indeksa $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$. Permutacije iz $\mathbb{S}_n$ koje se nalaze u $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ su tačno one kojima su $i_1, i_2, \ldots, i_k$ fiksne tačke. Postoji očigledna bijekcija između permutacija iz $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ i svih permutacija skupa $[n] \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$. Stoga je

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = (n-k)!.$$

Koristeći oznake kao u primjedbi 7.2.2, u ovom primjeru je $p_k = (n-k)!$. Sada iskoristimo formulu iz primjedbe 7.2.2:

$$D_n = |\mathbb{S}_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)| = n! - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n}{i} (n-i)!,$$

odnosno,

$$D_n = n! \cdot \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!}.$$

$\diamondsuit$

Primjer 7.2.4 (Broj surjekcija). Neka je $Sur_{n,m}$ skup svih surjekcija sa $[n]$ na $[m]$. Odrediti broj elemenata skupa $Sur_{n,m}$.

Rješenje: Opet ćemo koristiti formulu uključenja-isključenja.

Za sve $i \in [m]$, sa A_i označimo skup preslikavanja $f : [n] \to [m]$ koja "ne pogode" broj i, to jest:

$$A_i = \{f : [n] \to [m] | \text{ za sve } j \in [n] \text{ je } f(j) \neq i\}.$$

Sada primijetimo da je

$$Sur_{n,m} = [m]^{[n]} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m).$$

Odaberimo k različitih indeksa $i_1, i_2, \cdots, i_k$ iz skupa $[m]$. U skupu $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ se nalaze funkcije koje "promaše" sve $i_1, i_2, \ldots, i_k$, to jest $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k} = \{f | f : [n] \to [m] \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}\}$.

Zato je $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = (m-k)^n$. Na osnovu primjedbe 7.2.2, dobijamo da je

$$|Sur_{n,m}| = m^n - \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{i-1} \binom{m}{i} (m-i)^n = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m}{i} (m-i)^n.$$

$\diamondsuit$

Jedna od važnih funkcija u teoriji brojeva je **Ojlerova funkcija** $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Za proizvoljan prirodan broj n definišemo

$$\varphi(n) = \left|\{m \leqslant n : m \text{ i } n \text{ su relativno prosti brojevi}\}\right|.$$

Na primjer, brojevi $1, 5, 7, 11, 13, 17, 19$ i 23 su relativno prosti sa 24, pa vrijedi $\varphi(24) = 8$. Dalje, za proizvoljan prost broj p je očigledno $\varphi(p) = p - 1$. Kako izračunati $\varphi(n)$ za bilo koji prirodan broj n? Tu nam takođe može pomoći formula uključenja-isključenja.

Primjer 7.2.5 (Ojlerova funkcija). Neka je n proizvoljan prirodan broj, i neka je $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$ kanonska faktorizacija broja n, to jest jedinstven način kako se n može napisati kao proizvod prostih brojeva. Dokaži da je

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right). \tag{7.4}$$

Rješenje: Svaki broj iz $[n]$ koji nije relativno prost sa n mora biti djeljiv sa nekim od prostih brojeva $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Za sve $i = 1, 2, \ldots, k$ posmatrajmo skupove:

$$A_i = \{p_i, 2p_i, \ldots, \tfrac{n}{p_i}, n\} - \text{ skup brojeva iz } [n] \text{ koji su djeljivi sa } p_i.$$

Neki broj iz $[n]$ je relativno prost sa n ako i samo ako ne pripada nijednom od skupova A_i. Stoga je

$$\varphi(n) = \big|[n] \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k)\big|.$$

Dalje, iz definicije skupova A_i, možemo zaključiti da vrijedi

$$|A_i| = \frac{n}{p_i}, |A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}, \ldots, |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r}| = \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_r}}, \ldots.$$

Sada, na osnovu formule uključenja-isključenja dobijamo

$$\varphi(n) = n - \tfrac{n}{p_1} - \tfrac{n}{p_2} - \cdots \tfrac{n}{p_k} + \tfrac{n}{p_1 p_2} + \cdots + (-1)^r \tfrac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_r}} + \cdots,$$

što možemo prepoznati kao desnu stranu u formuli (7.4).

$\diamondsuit$

Primijetimo da u ovom primjeru nismo mogli koristiti olakšanu varijantu formule uključenja-isključenja iz primjedbe 7.2.2.

Jedno od važnih svojstava Ojlerove funkcije je multiplikativnost. To je direktna posljedica formule (7.4).

POSLJEDICA 7.2.6. *Neka su prirodni brojevi m i n relativno prosti. Tada je $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.*

Od koristi može biti i sljedeća varijanta formula uključenja-isključenja. Neka je S neki konačan skup čije elemente posmatramo, i neka je $\mathcal{O}$ konačan skup osobina koje mogu, ali ne moraju, imati elementi skupa S. Za $R \subseteq \mathcal{O}$ definišemo

$f(R) =$ broj elemenata u S koji imaju sve osobine iz R i nijednu drugu,

$g(R) =$ broj elemenata skupa S koje imaju sve osobine iz R, a možda i još neke druge.

Iz definicija funkcija f i g možemo zaključiti da je $g(R) = \sum\limits_{T:R\subset T} f(T)$. Lako je pokazati da je tada

$$f(R) = \sum_{T:R\subset T} (-1)^{|T\setminus R|} g(T). \tag{7.5}$$

Zaista, ako u desnoj strani formule (7.5) funkciju g izrazimo preko f, a zatim promjenimo poredak sabiranja, dobijamo

$$\sum_{T:R\subseteq T} (-1)^{|T\setminus R|} g(T) = \sum_{T:R\subseteq T} (-1)^{|T\setminus R|} \sum_{L:T\subseteq L} f(L), \text{ odnosno}$$

$$\sum_{T:R\subseteq T} (-1)^{|T\setminus R|} g(T) = \sum_{L:R\subseteq L} f(L) \sum_{T:R\subseteq T\subseteq L} (-1)^{|T\setminus R|}. \tag{7.6}$$

Kako je broj podskupova $T \subseteq L$ koji sadrže sve elemente iz R i još i elemenata iz $L \setminus R$ jednak $\binom{|L\setminus R|}{i}$, dobijamo

$$\sum_{T:R\subseteq T\subseteq L}(-1)^{|T\setminus R|}=\sum_{i=0}^{|L\setminus R|}\binom{|L\setminus R|}{i}(-1)^i=\begin{cases}0, \text{ ako je } R\subsetneq L;\\ 1, \text{ ako je } R=L.\end{cases}$$

Uvrstimo li prethodnu relaciju u (7.6), dobićemo formulu (7.5).

PRIMJEDBA 7.2.7. Formula (7.5) je blago uopštenje formule uključenja-isključenja. Skup svih osobina $\mathcal{O}$ identifikujemo sa $[n]$, a sa A_i označimo skup elemenata iz S koji imaju svojstvo i.
Za proizvoljan $R=\{r_1,r_2,\ldots,r_k\}\subset[n]$ tada vrijedi

$$g(R)=|A_{r_1}\cap A_{r_2}\cap\cdots\cap A_{r_k}| \text{ i } g(\emptyset)=|S|.$$

Uočimo da je $f(\emptyset)=$ broj elemenata koji nemaju nijednu osobinu iz $\mathcal{O}$, odnosno

$$f(\emptyset)=\big|S\setminus\bigcup_{i=1}^{n}A_i\big|.$$

Relaciju (7.3) možemo prepoznati kao specijalan slučaj formule (7.5).

7.3 Permutacije sa zabranjenim pozicijama

Poznato je da postoji bijekcija između skupa svih permutacija iz $\mathbb{S}_n$ i svih rasporeda n topova na šahovsku tablu $n\times n$, tako da se nikoja dva topa ne napadaju. Za proizvoljnu permutaciju $\pi\in\mathbb{S}_n$, topove postavimo na polja $(1,\pi(1)),(2,\pi(2)),\ldots,(n,\pi(n))$.

Kako je π bijekcija, u svakoj koloni i svakoj vrsti $n\times n$ table se nalazi tačno po jedan top. Skup

$$\mathit{\Gamma}_\pi=\{(1,\pi(1)),(2,\pi(2)),\ldots,(n,\pi(n))\}\subset[n]\times[n],$$

se naziva grafik permutacije π.

Uz ovu identifikaciju, broj deranžmana D_n možemo prepoznati kao broj rasporeda n nenapadajućih topova na $n\times n$ tablu, tako da nijedan top nije na dijagonali $(1,1),(2,2),\ldots,(n,n)$.

Slično pitanje se može posmatrati i za proizvoljan podskup table $[n]\times[n]$.

DEFINICIJA 7.3.1. Neka je $B\subseteq[n]\times[n]$. Za $k\in\{0,1,2\ldots,k-1,k\}$ definišemo brojeve r_k i N_k na sljedeći način:

- r_k je broj načina kako se na polja iz B može rasporediti tačno k nenapadajućih topova;
- N_k je broj rasporeda n nenapadajućih topova na $n \times n$ tablu, tako da se tačno k tih topova nalazi na poljima iz B, odnosno

$$N_k = \Big| \{\pi \in S_n : |\pi \in S_n : |\Gamma_\pi \cap B| = k\} \Big|.$$

Na primjer, ako je $B = \{(1,1),(2,2),\ldots,(n,n)\} \subset [n] \times [n]$, direktnim računanjem dobijamo $r_k = \binom{n}{k}$. Da odredimo N_k, primijetimo da nakon što postavimo k topova na polja iz B, preostalih $n-k$ topova raspoređujemo na polja koja nisu u B. Tako je, u konkretnom slučaju

$$N_k = \binom{n}{k} D_{n-k} = \frac{n!}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \frac{1}{j!}.$$

U opštem slučaju, veza između brojeva r_k i N_j je opisana sljedećom teoremom.

TEOREMA 7.3.2. *Za sve $j = 0, 1, \ldots, n$ vrijedi*

$$N_j = \sum_{k=j}^{n} (-1)^{k-j} (n-k)! \binom{k}{j} r_k.$$

Dokaz. Neka je $B \subsetneq [n] \times [n]$. Za proizvoljan $T \subset B$ definišemo

$$f(T) = \Big|\{\pi \in \mathbb{S}_n : \Gamma_\pi \cap B = T\}\Big| \;,\; g(T) = \Big|\{\pi \in \mathbb{S}_n : \Gamma_\pi \cap B \supseteq T\}\Big|.$$

Primijetimo da je $f(T)$ broj rasporeda n nenapadajućih topova na $[n] \times [n]$ tabli, tako da su jedini topovi na poljima iz B oni koji stoje na poljima iz T.

Dalje, $g(T)$ je broj takvih rasporeda u kojima na poljima iz T sigurno stoje topovi (a mogu na još nekim poljima iz B). Ako se u skupu T nalaze dva polja iz iste vrste ili kolone, tada je $g(T) = f(T) = 0$.

Na osnovu verzije formule uključenja-isključenja iz relacije (7.5) znamo da je

$$f(T) = \sum_{T \subseteq S \subseteq B} (-1)^{|S \setminus T|} g(S).$$

Iz definicije brojeva N_j i $f(T)$ vrijedi

$$N_j = \sum_{T \subseteq B,\ |T|=j} f(T) = \sum_{T \subseteq B,\ |T|=j} \; \sum_{T \subseteq S \subseteq B} (-1)^{|S \setminus T|} g(S).$$

Ukoliko želimo broj N_j izraziti pomoću brojeva r_k, potrebna nam je veza između brojeva r_k i $g(S)$.

Ako je S podskup od B koji ne sadrži polja iz iste vrste ili kolone, lako je izračunati da je $g(S) = (n - |S|)!$. Stoga je

$$\sum_{S \subseteq B, |S|=k} g(S) = r_k(n-k)!.$$

Dalje, jedan k-člani skup $S \subseteq B$ sadrži $\binom{k}{j}$ podskupova T sa j elemenata. Tako je

$$N_j = \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} \sum_{S \subseteq B,\ |S|=k} (-1)^{k-j} g(S) = \sum_{k=j}^{n} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} r_k (n-k)!.$$

□

Specijalno, za $j = 0$ dobijamo da je broj postavljanja n topova na $[n] \times [n]$ tablu tako da se nijedan top ne nalazi na B jednak

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k r_k (n-k)! \tag{7.7}$$

Sljedeći problem je postavio E. Lukas[3] je 1891. godine ("problème des ménages").

Primjer 7.3.3 (Problem bračnih parova). Na koliko načina se n bračnih parova može rasporediti oko okruglog stola, tako da muškarci i žene sjede naizmjenično i da niko ne sjedi pored svog bračnog druga?

Rješenje: Ovaj zadatak možemo interpretirati pomoću permutacija sa zabranjenim pozicijama na sljedeći način. Neka muškarci sjednu oko stola na proizvoljan način, tako da između svake dvojice ostane tačno jedno prazno mjesto.

Prazna mjesta označimo redom sa brojevima $1, 2, \ldots, n$. Dalje, muškarca koji sjedi desno od mjesta i, a i njegovu ženu takođe, označimo sa brojem i. Neka je $\pi(i)$ mjesto na koje će sjesti žena označena sa i.

Raspored žena oko stola, tako da budu ispunjeni uslovi zadatka, možemo prepoznati kao permutaciju $\pi \in \mathbb{S}_n$, za koju vrijedi:

[3] François Edouard Anatole Lucas (1842 - 1891)

$$\pi(1) \notin \{n,1\}, \pi(2) \notin \{1,2\}, \ldots, \pi(i) \notin \{i-1,i\}, \ldots, \pi(n) \notin \{n-1,n\}.$$

Uz takvo označavanje, broj traženih rasporeda bračnih parova je tačno broj N_0 za $n \times n$ tablu i podskup

$$B = \{(1,1),(1,n),(2,1),(2,2),\ldots,(i,i-1),(i,i),\ldots,(n,n-1),(n,n)\}.$$

Da bi mogli koristiti formulu (7.7), potrebno je odrediti brojeve r_k. To jest, treba da izbrojimo na koliko načina se na polja iz B može rasporediti k nenapadajućih topova. Posmatrajmo skup

$$C_k = \{(\sigma,p) : \sigma - \text{raspored } k \text{ topova na } B, p \in B \text{ polje bez topa iz } \sigma\}.$$

Sada prebrojimo elemente iz skupa C_k na dva načina. Ako prvo odaberemo raspored topova σ, pa onda neupotrebljeno polje, dobijamo $|C_k| = (2n-k)r_k$.

Sa druge strane, polje p iz B možemo odabrati na $2n$ načina. Dalje, postavljanje k nenapadajućih topova na B tako da se ne koristi polje p je ekvivalentno izboru k polja od preostalih $2n-1$, tako da nikoja dva odabrana polja nisu susjedna (vidjeti zadatak 10 iz poglavlja 5.6).

Tako smo dobili da je

$$(2n-k)r_k = 2n\binom{2n-k}{k}, \text{ odnosno } r_k = \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}.$$

Stoga je traženi broj rasporeda oko okruglog stola jednak

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!.$$

◇

7.4 Zadaci

1. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10^6, koji su djeljivi sa 7, a nisu djeljivi sa 10,12 i 25?
2. Na koliko načina se šest čkololada i osam bombona može podijeliti na četvero djece, tako da svako dijete dobije bar neki slatkiš? Pri tome, neke bombone i neke čokolade mogu ostati neraspoređene.
3. Koliko ima permutacija u $\mathbb{S}_n$ sa tačno k fiksnih tačaka?

4. Koliko ima permutacija $\pi_1\pi_2\ldots\pi_n \in \mathbb{S}_n$ u kojim je $\pi_{n-1} > n-1$ ili $\pi_{n-2} > n-2$?

5. Na koliko načina se svih devet polja 3×3 table može obojiti crvenom ili bijelom bojom tako da nijedna 2×2 tabla nije obojena samo crveno?

6. Koliko ima permutacija $\pi_1\pi_2\ldots\pi_{2n}$ u skupu $\mathbb{S}_{2n}$ u kojima, za sve $i = 1, 2, \ldots, n$, broj $2i$ nije neposredno poslije $2i-1$?

7. Koliko ima permutacija u $\mathbb{S}_n$ koje nemaju ciklus dužine l?

8. Skup $S \subset \mathbb{N}$ je "čist od duplikata" ako vrijedi $k \in S \Rightarrow 2k \notin S$. Odrediti koliko najviše elemenata može imati podskup od $[n]$ koji je čist od duplikata!

9. Na košulji površine jedan se nalazi pet zakrpa. Ako je površina svake od zakrpa veća od $\frac{1}{2}$, dokaži da postoje dvije zakrpe kojima je zajednička površina bar $\frac{1}{5}$!

10. Neka su zadani prirodni brojevi p, q i r. Kvadar dimenzija $p \times q \times r$ je podijeljen na kocke stranice jedan. Odredi kroz koliko jediničnih kockica prolazi dijagonala kvadra? Broje se samo one kockice kojima dijagonala prolazi "kroz unutrašnjost".

11. Koliko ima permutacija multiskupa $M = \{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}$ u kojima susjedni elementi nisu jednaki?

12. Koliko ima permutacija multiskupa $M = \{1^n, 2^n, 3^n\}$ u kojima nema n uzastopnih elemenata koji su jednaki?

13. Dokaži da je

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{n-k}{k}m^k(m+1)^{n-2k} = \frac{m^{n+1}-1}{m-1}.$$

14. Koliko ima različitih ishoda pri bacanju n različitih kockica za jamb, ako se zna da je zbir "palih" brojeva jednak m?

15. Koliko ima permutacija u $\mathbb{S}_n$ u kojima $i+1$ nije neposredno iza i za sve $i = 1, 2, \ldots, n-1$?

16. Koliko ima k-članih podskupova skupa $[n]$ u kojima nema s uzastopnih brojeva?

17. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ podskupovi konačnog skupa S. Uvedimo sljedeće oznake

$$T_k = |\{x \in S : x \text{ se nalazi u tačno } k \text{ skupova } A_1, A_2, \ldots, A_n\}|,$$

$$B_k = |\{x \in S : x \text{ se nalazi u bar } k \text{ skupova } A_1, A_2, \ldots, A_n\}|,$$

$$P_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|.$$

Dokaži da vrijedi:
a) $T_k = \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} P_i$
b) $B_k = \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \binom{i-1}{k-1} P_i$
c) $P_k = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} T_i,$
d) $P_k = \sum_{i=k}^{n} \binom{i-1}{k-1} B_i$

18. (Bonferonijeva nejednakost) Dokaži da uz oznake iz prethodnog zadatka vrijedi:

$$(-1)^r \left(T_m - \left[P_m - \binom{m+1}{m} P_{m+1} + \cdots (-1)^{r-1} \binom{m+r-1}{m} P_{m+r-1} \right] \right) \ge 0.$$

19. Neka je A skup permutacija $x_1 x_2 \ldots x_{2n}$ iz $\mathbb{S}_{2n}$ u kojima vrijedi $|x_i - x_{i+1}| = n$ za neki $i = 1, 2, \ldots, 2n-1$.
Dokaži da je $|A| > |\mathbb{S}_{2n} \setminus A|$.
20. Koliko ima permutacija multiskupa $M = \{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}$ u kojima (za sve $i \in [n]$) nisu oba i na pozicijama $2i-1$ i $2i$?
21. Za $S \subseteq [n-1]$ sa $\alpha(S)$ označimo broj permutacija iz $\mathbb{S}_n$ kojima je skup padova sadržan u S a sa $\beta(S)$ broj permutacija kojima je skup padova jednak S. Nađi vezu između $\alpha(S)$ i $\beta(S)$ i formule za ove brojeve!
22. Na koliko načina se na tablu $n \times n$ može postaviti n kraljeva tako da se u svakoj vrsti i svakoj koloni nalazi po jedan kralj, i da se kraljevi međusobno ne napadaju?

7.5 Rješenja zadataka

1. Brojeva manjih od 10^6 koji su djeljivi sa 7 ima 142857. Neka su A_1, A_2 i A_3, tim redom, podskupovi od $\{7, 14, 21, \ldots, 7 \cdot 142856, 7 \cdot 142857\}$ koje čine brojevi djeljivi sa 10, 12 i 25. Vrijedi $|A_1| = 14285, |A_2| = 11904, |A_3| = 5714, |A_1 \cap A_2| = 2380, |A_1 \cap A_3| = 2857, |A_2 \cap A_3| = 476, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 476$. Primjenom formule uključenja-isključenja dobijemo da je rješenje zadatka broj 116191.

2. Neka je A_i raspored slatkiša tako da i-to dijete ne dobije ništa. Vrijedi $|A_1| = \left(\binom{7}{3}\right)\left(\binom{9}{3}\right) = \binom{9}{3} \cdot \binom{11}{3} = 13860$, $|A_1 \cap A_2| = \left(\binom{7}{2}\right)\left(\cdot\binom{9}{2}\right) = \binom{8}{2} \cdot \binom{10}{2} = 1260$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 7 \cdot 9 = 63$, dok je $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1$. Svih rasporeda slatkiša ima $\left(\binom{7}{4}\right)\left(\binom{9}{4}\right) = \binom{10}{4} \cdot \binom{12}{4} = 103950$. Stoga je, na osnovu formule uključenja-isključenja, traženi broj jednak

$$103950 - 4 \cdot 13860 + 6 \cdot 1260 - 4 \cdot 63 + 1 = 55819.$$

3. $\binom{n}{k} D_{n-k}$.
4. Permutacija u kojima je $\pi_{n-1} > n-1$ ima $(n-1)!$, a onih u kojima je $\pi_{n-2} > n-2$ ima $2(n-1)!$. Permutacija kod kojih vrijede obje nejednakosti ima $(n-2)!$. Traženi broj permutacija je $3(n-1)! - (n-2)!$.
5. Sa $A_{i,j}$ označimo bojenja table u kojima su sva četiri polja 2×2 kvadrata sa gornjim lijevim poljem (i,j) obojena crvenom bojom. Svih bojenja ima 2^9, i ako primjenimo formulu uključenja-isključenja dobićemo rješenje

$$2^9 - 4 \cdot 2^5 + (4 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2) - 4 \cdot 2^1 + 2^0 = 417.$$

6. Koristićemo formulu iz primjedbe 7.2.2. Neka je A_i skup pe-rmutacija u kojima je $2i$ neposredno nakon $2i-1$.
   Kako je $p_k = |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = (2n-k)!$, dobijemo da je rješenje
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (2n-k)!.$$
7. U grupi $\mathbb{S}_n$ ima $\frac{1}{k!}\binom{n}{l,l,\ldots,l,n-kl}(l-1)!^k(n-kl)! = \frac{n!}{l^k k!}$ permutacija sa bar k ciklusa dužine l. Stoga je rješenje
$$n! \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{l} \rfloor} (-1)^k \frac{1}{k! l^k}.$$
8. $n - [\frac{n}{2}] + [\frac{n}{4}] - [\frac{n}{8}] + \cdots$
9. Neka je P_i površina i-te zakrpe, $P_{i,j}$ površina presjeka i-te i j-te zakrpe, $P_{i,j,k}$ površina presjeka zakrpa i, j i k, ... Za sve $i \in [5]$ vrijedi $P_i \geq \sum_j P_{i,j} - \sum_{j,k} P_{i,j,k} + \sum_{j,k,l} P_{i,j,k,l} - P_{1,2,3,4,5}$.
   Ako za sve i saberemo ove nejednakosti, dobije se

$\sum_i P_i - 2\sum_{1\le i<j\le 5} P_{i,j} + 3\sum_{1\le i<j<k\le 5} P_{i,j,k} - 4\sum_{1\le i<j<k\le 5} P_{i,j,k} + 5P_{1,2,3,4,5} \ge 0.$

Iz teksta zadatka znamo da je

$1-\sum_{1\le i\le 5} P_i + \sum_{1\le i<j\le 5} P_{i,j} - \sum_{1\le i<j<k\le 5} P_{i,j,k} + \sum_{1\le i<j<k<l\le 5} P_{i,j,k,l} - P_{1,2,3,4,5} \ge 0.$

Ako ovu nejednakost pomnožimo sa 3 i dodamo pretposljednjoj nejednakosti dobićemo

$$3-2\sum_{1\le i\le 5} P_i + \sum_{1\le i<j\le 5} P_{i,j} - \sum_{1\le i<j<k<l\le 5} P_{i,j,k,l} + 2P_{1,2,3,4,5} \ge 0.$$

Kako je površina presjeka četiri zakrpe uvijek veća ili jednaka od površine presjeka svih pet, to je

$$3-2\sum_{1\le i\le 5} P_i + \sum_{1\le i<j\le 5} P_{i,j} \ge 0.$$

To nije moguće ako je $P_i \ge \frac{1}{2}$ a $P_{i,j} < \frac{1}{5}$.

10. Dijagonala "izlazi" iz jediničnih kockica u tačkama (x, y, z) u kojima je bar jedna koordinata cjelobrojna. Stoga je broj presječenih kockica $p+q+r-NZD(p,q)-NZD(p,r)-NZD(q,r)+NZD(p,q,r)$.
11. Neka je A_i skup permutacija u kojima su dva i susjedna. Tada je $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}$ i traženi broj je
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}.$$
12. $\binom{3n}{n,n,n} - 3\binom{2n+1}{n,n,1} + 3\binom{n+2}{n,1,1} + 3!$.
13. Posmatrajmo sve nizove elemenata skupa $\{0, 1, \ldots, m\}$ dužine n u kojima su poslije prve nule svi članovi jednaki nuli. Za $i \in [n-1]$, neka je A_i skup takvih nizova u kojima je na i-tom mjestu nula, a iza nje nije nula. Presjek $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ je prazan ako su neki odabrani indeksi i_j i i_{j+1} susjedni brojevi, a inače u tom presjeku ima $m^k(m+1)^{n-2k}$ nizova. Kako k-članih podskupova skupa $[n-1]$ koji nemaju uzastopne brojeve ima $\binom{n-k}{k}$, identitet se dobije primjenom formule uključenja-isključenja.
14. Bacanja možemo identifikovati sa brojem rješenja jednačine $x_1+x_2+\cdots+x_n = m$, $x_i \in \mathbb{N}, x_i \le 6$. Neka je p_k broj rješenja ove jednačine u kojima je bar nekih k sabiraka veće od 6. Vrijedi $p_k = \binom{m-6k-1}{n-1}$, pa je rješenje zadatka

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-n}{6} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{m-6k-1}{n-1}.$$

15. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (n-k)!.$
16. Ako je A takav skup, tada se skupu $A^c = \{b_1, b_2, \ldots, b_{n-k}\}$ može dodijeliti rješenje $\big((b_1-1), (b_2-b_1-1), \cdots, (b_{n-k}-b_{n-k-1}-1), (n-b_{n-k})\big)$ jednačine $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-k+1} = k$ u $\mathbb{N}_0$ u kojem su svi $x_i < s$. Rješenja te jednačine u kojima je bar r brojeva većih od $s-1$ ima $p_r = \binom{n-rs}{n-k}$. Stoga je rješenje

$$\sum_{r=0}^{n-k-1} (-1)^r \binom{n-k-1}{r} \binom{n-rs}{n-k}.$$

17. a) Uočimo $x \in S$ koji se nalazi u tačno r skupova. Doprinos tog elementa u T_k je jedan akko je $r = k$. U sumi na desnoj strani doprinos tog elementa je

$$\sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \binom{r}{i} = \binom{r}{k} \sum_{i=0}^{r-k} (-1)^i \binom{r-k}{i} = \begin{cases} 0, \text{ za } r \neq k; \\ 1, \text{ za } r = k. \end{cases}$$

   b) Slijedi iz $B_k = T_k + T_{k+1} + \cdots + T_n$.
   c) Na dva načina se broji skup parova $(x, \{i_1, i_2, \ldots, i_k\})$ gdje je $x \in S$, $x \in A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}$
   d) Iz prethodne relacije i $T_k = B_k - B_{k+1}$.
18. Koristimo formulu (c) iz prethodnog zadatka. Svi koeficijenti uz T_i su pozitivni, pa je i cijeli izraz pozitivan.
19. Neka je $A_i = \{\pi \in \mathbb{S}_{2n} : i \text{ i } n+i \text{ su susjedni}\}$. Uočimo da vrijedi $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = (2n-k)!2^k$.
Broj permutacija koje nisu u skupu A je

$$\textstyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (2n-k)! 2^k \leq (2n)! - \binom{n}{1}(2n-1)! \cdot 2 + \binom{n}{2}(2n-2)! \cdot 2^2 = 4\binom{n}{2}(2n-2)!.$$

Kako je $\frac{4\binom{n}{2}(2n-2)!}{(2n)!} = \frac{n-1}{2n-1} < \frac{1}{2}$, to znači da je u A više permutacija nego u $\mathbb{S}_n \setminus A$.
20. Neka je A_i skup permutacija M u kojima su oba i na pozicijama $2i-1$ i $2i$. Vrijedi

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = \frac{(2n-2k)!}{2^{n-k}},$$

pa je traženi broj $\left| \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)^c \right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(2n-2k)!}{2^{n-k}}.$

21. Za $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$, gdje je $1 \leqslant s_1 < s_2 < \cdots < s_k \leqslant n-1$ vrijedi (zadatak 18 u četvrtoj glavi) $\alpha(S) = \binom{n}{s_1, s_2 - s_1, \ldots, n - s_k}$. Formulom uključenja-isključenja dobijamo

$$\beta(S) = \sum_{T : T \subseteq S} (-1)^{|S \setminus T|} \alpha(T) = \sum_{\{i_1, i_2, \ldots, i_j\} \subset S} (-1)^{k-j} \binom{n}{i_1, \ldots, n - i_j}.$$

22. Ako je π_i vrsta u kojoj se nalazi kralj u i-toj koloni, tada je traženi raspored kraljeva permutacija $\pi_1 \pi_2 \ldots \pi_n \in \mathbb{S}_n$ u kojoj za sve $i \in [n-1]$ vrijedi $|\pi_i - \pi_{i+1}| \neq 1$. Za sve $i \in [n-1]$, neka je

$$A_i = \{\pi \in \mathbb{S}_n : |\pi_i - \pi_{i+1}| = 1\}.$$

Za sve $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq [n-1]$, neka je $A_I = A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}$. Broj elemenata u A_I ne zavisi samo od $|I|$, nego i od broja maksimalnih intervala u I. Ako je $I = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \cdots \cup [a_r, b_r]$, to jest, ako je I sastavljen od r disjunktnih intervala, tada je $|A_I| = 2^r (n-k)!$. Da bi mogli primijeniti formulu uključenja-isključenja, još treba da prebrojimo koliko ima k-članih podskupova od $[n-1]$ koji su sastavljeni od r intervala. Svaki k-člani podskup od r intervala predstavlja jednu kompoziciju broja k u r sabiraka. Dalje, te intervale postavimo između preostalih $n-k-1$ brojeva iz $[n-1]$(mogu biti i na početku ili na kraju). Traženi broj k članih skupova od $[n-1]$ koji su sastavljeni od tačno k-intervala je $\binom{k-1}{r-1}\binom{n-k}{r}$. Sada, pomoću formule uključenja-isključenja dobijemo da je traženi broj

$$n! + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (n-k)! \sum_{r=1}^{k} \binom{k-1}{r-1} \binom{n-k}{r} 2^r.$$

8

REKURZIVNE RELACIJE

8.1 Primjeri rekurzivnih relacija

Podsjetimo se još jednom šta je osnovni zadatak enumerativne kombinatorike:

Odrediti broj elemenata u svim skupovima iz posmatrane familije konačnih skupova $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, odnosno, potrebno je odrediti niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ (gdje je $a_n = |A_n|$).

Često je prvi korak u rješavanju tog problema pronalaženje formule koja opisuje vezu između broja a_n i nekoliko njegovih prethodnika a_{n-1}, a_{n-2}, $\dots, a_{n-k}$. Ako takva formula vrijedi za sve $n \geqslant k$, dobili smo **rekurzivnu relaciju** kojom smo opisali niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Formalno, ako je $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ i ako za sve $n \in \mathbb{N}_0, n \geqslant k$ vrijedi

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k})$$

kažemo da je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rješenje rekurzivne relacije k-tog reda.

Rekurzivne relacije smo već koristili u knjizi: da prebrojimo sve podskupove skupa $[n]$, sve podskupove od $[n]$ sa tačno k elemenata, broj svih premutacija skupa $[n]$ (vidjeti primjere 2.4.1 i 3.1.3, te teoremu 2.5.5), ...

Sa još nekoliko primjera ilustrovaćemo kako se rekurzivne relacije mogu koristiti u rješavanju kombinatornih zadatka.

Primjer 8.1.1. Koliko ima nizova dužine n napisanih ciframa $0, 1$ i 2 u kojima je broj upotrijebljenih nula neparan?

Rješenje: Neka je A_n skup svih traženih nizova dužine n i neka je $a_n = |A_n|$. Ako u svim nizovima iz A_n koji završavaju sa 1 ili 2 obrišemo

poslednju cifru, dobićemo nizove dužine $n-1$ sa neparnim brojem nula, to jeste, tako dobijeni nizovi su iz A_{n-1}.
Stoga, nizova u A_n kojima je posljednja cifra 1 ili 2 ima $2a_{n-1}$.

Ako niz iz A_n završava sa nulom, brisanjem te posljednje nule nastaće niz dužine $n-1$ koji ima paran broj nula, to jest, ovako dobijeni niz iz $\{0,1,2\}^{n-1}$ nije u A_{n-1}. Svih nizova dužine $n-1$ u skupu $\{0,1,2\}$ ima 3^{n-1}, pa je broj nizova sa parnim brojem nula jednak $3^{n-1}-a_{n-1}$. Primjenimo li princip sume, dobićemo da je

$$a_n = 2a_{n-1} + 3^{n-1} - a_{n-1} = a_{n-1} + 3^{n-1}.$$

Ovu rekurzivnu relaciju nije teško riješiti. Kako je $a_1 = 1$, ako ovu rekurzivnu relaciju primjenimo $n-1$ put dobićemo

$$a_n = 1 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}.$$

$\diamondsuit$

Sada ćemo pokazati da rekurzivne relacije mogu biti od koristi, čak i kada smo odredili tačnu vrijednost za sve elemente niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Involucija na skupu $[n]$ je bijekcija $f:[n]\to[n]$ takva da je $f\circ f = Id$. Drugim riječima, involucija na $[n]$ je permutacija iz $\mathbb{S}_n$ kojoj su svi ciklusi dužine jedan ili dva. Broj involucija sa tačno k ciklusa dužine dva je $\binom{n}{2k}(2k-1)!!$. Koristeći princip sume, zaključujemo da je broj involucija u $\mathbb{S}_n$ jednak $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}(2k-1)!!$.

Primjer 8.1.2. Neka je a_n broj involucija u $\mathbb{S}_n$.

(a) Odredi rekurzivnu relaciju za niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(b) Dokaži da je broj a_n paran za sve $n>1$.
(c) Dokaži da za sve $n>1$ vrijedi $a_n > \sqrt{n!}$.

Rješenje:

(a) Involucija u kojima je $f(n)=n$ ima a_{n-1}. Ako je $f(n)\neq n$, tada je $f(n)=i$ i $f(i)=n$, za neki broj i iz $[n-1]$. Dalje, restrikcija f na ostalih $n-2$ elemenata je takođe involucija. Stoga je tražena rekurzivna relacija

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}.$$

(b) Ako izračunamo $a_2 = 2$ i $a_3 = 4$, možemo primijetiti da su parni. Tvrđenje o parnosti svih brojeva a_n se lako dokaže matematičkom indukcijom iz rekurzivne formule.

(c) Za $a_2 = 2$ i $a_3 = 4$ vrijedi $2 > \sqrt{2!}$ i $4 > \sqrt{3!}$. Uz pretpostavku da vrijedi $a_{n-1} > \sqrt{(n-1)!}$ i $a_{n-2} > \sqrt{(n-2)!}$, iz rekurzivne relacije dobijamo

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2} > \sqrt{(n-1)!} + (n-1)\sqrt{(n-2)!} =$$
$$= (1 + \sqrt{n-1})\sqrt{(n-1)!} > \sqrt{n!}.$$

$\diamondsuit$

I komplikovane rekurzivne relacije, koje uopšte nije moguće riješiti, ponekad mogu biti veoma korisne.

Primjer 8.1.3. Za proizvoljnu particiju λ i za zadan prirodan broj m definišemo:

$f_m(\lambda) =$ broj dijelova particije λ koji su jednaki m;
$g_m(\lambda) =$ broj različitih dijelova particije λ koji se pojave bar m puta.

Na primjer, $f_2(533221111) = 2$ i $g_2(533221111) = 3$. Skup svih particija broja n označimo sa $Par(n)$. Dokazati da je

$$\sum_{\lambda \in Par(n)} f_m(\lambda) = \sum_{\lambda \in Par(n)} g_m(\lambda).$$

Rješenje: Uvedimo sljedeće oznake:

$$F_m(n) = \sum_{\lambda \in Par(n)} f_m(\lambda); \; G_m(n) = \sum_{\lambda \in Par(n)} g_m(\lambda).$$

Lako je primijetiti da su početne vrijednosti za $F_m(n)$ i $G_m(n)$ jednake:

$$F_m(n) = G_m(n) = 0 \text{ za } n < m, \text{ odnosno } F_m(m) = G_m(m) = 1.$$

Sada ćemo pokazati da za brojeve $F_m(n)$ i $G_m(n)$ vrijede iste rekurzivne relacije.

$$F_m(n) = p_{n-m} + F_m(n-m), \tag{8.1}$$

odnosno

$$G_m(n) = p_{n-m} + G_m(n-m). \tag{8.2}$$

Broj p_{n-m}, koji se pojavi u ovim formulama je broj svih particija od $n-m$, odnosno, $p_{n-m} = |Par(n-m)|$.

Neka su zadani prirodni brojevi m i n, i neka je $n > m$. Svakoj particiji μ broja $n-m$ možemo "dodati" m i tako dobiti particiju od λ iz $Par(n)$ koja ima dio jednak m. Lako se provjerava da je opisana konstrukcija bijekcija.
Pri toj konstrukciji, dijelovi particije $\mu \in Par(n-m)$ koji su jednaki m se ne mijenjaju, pa se svaka permutacija iz $Par(n-m)$ (kada joj dodamo m) "broji" u $F_m(n)$ još $f_m(\mu)$ puta. Sabiranjem po svim $\mu \in Par(n-m)$ dobijamo da vrijedi (8.1).

Da dokažemo formulu (8.2), posmatrajmo sljedeću konstrukciju: svakoj particiji μ broja $n-m$ dodamo tačno m jedinica i tako dobijemo particiju iz $Par(n)$ koja ima bar jedan sabirak (dio) koja se ponavlja bar m puta. Takođe, tih m jedinica možemo dodati i na jednake sabirke particije $\mu \in Par(n-m)$ koji se pojave bar m puta.
Tako dobijamo da vrijedi i (8.2).

Kako su početne vrijednosti za $F_m(n)$ i $G_m(n)$ jednake i kako ti brojevi zadovoljavaju iste rekurzivne relacije, možemo zaključiti da je $F_m(n) = G_m(n)$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$.

$\diamondsuit$

8.2 Linearne homogene rekurzivne relacije sa konstantnim koeficijentima

Nažalost, ne postoji algoritam koji opisuje kako se rješava proizvoljna rekurzivna relacija. Postoje rekurzivne relacije koje uopšte nije moguće riješiti, to jest, nije moguće naći eksplicitnu formulu za n-ti član posmatranog niza. U ovom poglavlju ćemo pokazati da za jednu klasu rekurzivnih relacija postoji jednostavan algoritam kojim se dobijaju sva rješenja tih relacija.

Linearna homogena rekurzivna relacija k-tog reda sa konstantim koeficijentima je relacija oblika

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}, \tag{8.3}$$

gdje je $n \geqslant k$, konstante $c_1, c_2, \ldots, c_k$ su realni[1] brojevi i vrijedi $c_k \neq 0$.

[1] U svim primjerima koje budemo posmatrali koeficijenti su realni brojevi. Ovakve relacije u kojima su koeficijenti kompleksni se rješavaju na sličan način.

PRIMJEDBA 8.2.1. Objasnimo zašto se ovakve rekurzivne relacije nazivaju ovako "jednostavno".

(a) Riječ *linearna* znači da se u relaciji (8.3) pojave samo prvi stepeni brojeva a_n. Ne pojavljuju se stepeni a_n^k za $k > 1$, niti proizvodi $a_n a_m$. Posljedica linearnosti je sljedeća činjenica:

Ako su nizovi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rješenja relacije (8.3), tada je i niz $(a_n + a'_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rješenje te relacije.

(b) Riječ *homogena* u imenu znači da za relaciju vrijedi:
Ako je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rješenje relacije (8.3), tada je za sve $\lambda \in \mathbb{R}$ i niz $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ takođe rješenje te relacije.

Ovo je lako provjeriti uvrštavanjem članova niza $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ u (8.3). Ako bi desnoj strani relacije (8.3) dodali neki realan broj različit od nule, relacija više ne bi bila homogena.

(c) Kažemo da je relacija (8.3) *rekurzivna relacija k-tog reda* zato što je, za sve $n \geqslant k$, član a_n određen sa vrijednostima k prethodnih članova.

(d) Koeficijenti uz $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}$ u relaciji (8.3) su realni brojevi, dakle *konstante* koje ne zavise od n.

PRIMJEDBA 8.2.2. Ako su dva niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rješenja relacije (8.3) i ako za sve $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$ vrijedi $a_i = b_i$ tada su ti nizovi jednaki. Dakle, dva rješenja relacije (8.3) koja se podudaraju na prvih k mjesta su jednaka.

Sada ćemo opisati kako se mogu odrediti sva rješenja relacije (8.3).

PRIMJEDBA 8.2.3. Pretpostavimo da je rješenje te relacije niz oblika $a_n = \alpha^n$, za sve $n \in \mathbb{N}_0$. Uvrštavanjem $a_n = \alpha^n$ u (8.3) i dijeljenjem sa α^{n-k} zaključujemo da je je broj α rješenje jednačine

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_{k-1} x - c_k = 0. \tag{8.4}$$

Jednačina (8.4) se naziva **karakteristična jednačina** za polaznu rekurzivnu relaciju (8.3).

Lako je primijetiti da vrijedi i obrnuto:
Ako je λ rješenje karakteristične jednačine, tada je niz $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rješenje za (8.3).

Dalje, ako su λ i μ rješenja jednačine (8.4), na osnovu (a) i (b) iz primjedbe 8.2.1, možemo zaključiti da je i niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definisan sa $a_n = A\cdot\lambda^n + B\cdot\mu^n$ rješenje[2] za polaznu rekurzivnu relaciju (8.3).

Važnost karakteristične jednačine je u tome što pomoću njenih korijena možemo opisati sva rješenja rekurzivne relacije koju posmatramo.

TEOREMA 8.2.4. *Neka je zadana homogena linearna rekurzivna relacija sa konstantnim koeficijentima*

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k}$$

i neka je

$$x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} - \cdots - c_k = 0$$

njoj asocirana karakteristična jednačina. Ako ta jednačina ima k različitih korijena $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, sva rješenja zadane rekurzivne relacije su oblika:

$$a_n = C_1\cdot\alpha_1^n + C_2\cdot\alpha_2^n + \cdots + C_k\alpha_k^n. \tag{8.5}$$

Dokaz. Već smo u primjedbi 8.2.3 pokazali da su nizovi zadani sa

$$a_n^{(1)} = \alpha_1^n, a_n^{(2)} = \alpha_2^n, \ldots, a_n^{(k)} = \alpha_k^n,$$

i sve njihove linearne kombinacije $C_1\cdot\alpha_1^n + C_2\cdot\alpha_2^n + \cdots + C_k\alpha_k^n$ rješenja posmatrane rekurzivne relacije.

Pokažimo još da su baš sva rješenja posmatrane rekurzivne relacije tog oblika. Neka je niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ proizvoljno rješenje, to jest, za sve $n\in\mathbb{N}, n\geqslant k$ vrijedi

$$f_n = c_1f_{n-1} + c_2f_{n-2} + \cdots + c_kf_{n-k}.$$

Mi tražimo koeficijente λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$ tako da za sve $n\in\mathbb{N}_0$ vrijedi

$$f_n = \lambda_1\cdot\alpha_1^n + \lambda_2\cdot\alpha_2^n + \cdots + \lambda_k\cdot\alpha_k^n.$$

Uslov da se f_n i $\lambda_1\cdot\alpha_1^n + \lambda_2\cdot\alpha_2^n + \cdots + \lambda_k\cdot\alpha_k^n$ podudaraju za $n = 0, 1, \ldots, k-1$ se može zapisati kao sistem linearnih jednačina:

[2] Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je linearna kombinacija rješenja $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(\mu^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

$$\begin{array}{lllll}
\lambda_1 & +\lambda_2 & +\cdots+\lambda_k & = & f_0\\
\lambda_1\cdot\alpha_1 & +\lambda_2\cdot\alpha_2 & +\cdots+\lambda_k\cdot\alpha_k & = & f_1\\
\lambda_1\cdot\alpha_1^2 & +\lambda_2\cdot\alpha_2^2 & +\cdots+\lambda_k\cdot\alpha_k^2 & = & f_2\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
\lambda_1\cdot\alpha_1^{k-1} & +\lambda_2\cdot\alpha_2^{k-1} & +\cdots+\lambda_k\cdot\alpha_k^{k-1} & = & f_{k-1}
\end{array}$$

Realni brojevi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ koje tražimo su rješenja ovog sistema jednačina.
Determinanta ovog sistema je dobro poznata Vandermondova determinanta:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k\\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_k^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \cdots & \alpha_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\alpha_i - \alpha_j).$$

Kako su sva rješenja karakteristične jednačine različita vrijedi $D \neq 0$, pa posmatrani sistem jednačina ima jedinstvena rješenja $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

Stoga su $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(\lambda_1\cdot\alpha_1^n+\lambda_2\cdot\alpha_2^n+\cdots+\lambda_k\cdot\alpha_k^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ dva rješenja posmatrane rekurzivne relacije, koja se podudaraju za $n = 0, 1, \ldots, k-1$. Na osnovu primjedbe 8.2.2 zaključujemo da je

$$f_n = \lambda_1\cdot\alpha_1^n + \lambda_2\cdot\alpha_2^n + \cdots + \lambda_k\cdot\alpha_k^n \text{ za sve } n \in \mathbb{N}.$$

□

PRIMJEDBA 8.2.5. Na "jeziku" linearne algebre dokaz prethodne teoreme se može ispričati na sljedeći način:

Uočimo (beskonačno dimenzionalni) vektorski prostor

$$V = \{f | f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}\}\text{- prostor svih nizova realnih brojeva,}$$

i njegov potprostor W koji čine nizovi koji su rješenja relacije (8.3)

$$W = \{f \in V | f(n) = c_1\cdot f(n-1) + c_2\cdot f(n-2) + \cdots + c_k\cdot f(n-k)\}.$$

Kako je $f(n)$ potpuno određen sa $f(n-1), f(n-2), \ldots, f(n-k)$ možemo primijetiti da je dimenzija potprostora W najviše k. Ako karakteristični polinom ima k različitih korijena $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, lako se uvjeriti da su svi $f_i(n) = \alpha_i^n$, $i = 1, 2, \ldots, k$ elementi podprostora W.

Kako su još sve funkcije f_i linearno nezavisni vektori u W, oni čine jednu bazu za W. Stoga je proizvoljno rješenje rekurzivne relacije linearna kombinacija $f_1, f_2, \ldots, f_k$.

Sada ćemo pomoću teoreme 8.2.4 naći eksplicitnu formulu za n-ti Fibonačijev broj.

Primjer 8.2.6 (Fibonačijevi brojevi). Riješi rekurzivnu relaciju

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \text{ uz početne uslove } F_1 = 1, F_2 = 1$$

Rješenje: Kako je ovo homogena linearna rekurzivna relacija, posmatramo njoj asociranu karakterističnu jednačinu $x^2 - x - 1 = 0$. Njena rješenja su $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, pa rješenje zadate rekurzivne relacije tražimo u obliku

$$F_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

Da bi dobili što jednostavniji sistem linearnih jednačina za C_1 i C_2, možemo smatrati da je $F_0 = 0$. Uočimo da to ne mijenja rješenje posmatrane rekurzivne relacije[3]. Konstante C_1 i C_2 određujemo iz početnih uslova $F_0 = 0, F_1 = 1$. Rješavanjem sistema jednačina

$$\begin{aligned} C_1 + {} & \qquad C_2 = 0 \\ \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) C_1 + {} & \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) C_2 = 1 \end{aligned}$$

dobijamo $C_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}, C_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Tako smo odredili n-ti Fibonačijev broj

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

♢

Primjer 8.2.7. Koliko ima riječi dužine n napisanih slovima A, B i C, u kojima dva slova A nisu susjedi?

Rješenje: Neka je a_n broj nizova sa traženim svojstvom. Lako se provjeri da je $a_1 = 3$ i da je $a_2 = 8$.
Svih a_n nizova dužine n se može dobiti na jedan od dva načina:

- dopisivanjem slova B ili C na kraj neke od a_{n-1} riječi dužine $n-1$,
- dopisivanjem BA ili CA na kraj neke od a_{n-2} riječi dužine $n-2$.

[3] Jednostavno, na početak niza Fibonačijevih brojeva smo dodali nulu. I dalje je svaki broj u nizu jednak zbiru dva člana koja mu prethode.

Stoga je rekurzivna relacija za posmatrani niz $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$. Rješenja karakteristične jednačine $x^2 - 2x - 2 = 0$ su $1 \pm \sqrt{3}$. Opšte rješenje posmatrane rekurzivne relacije dobije se iz formule (8.5):

$$a_n = C_1 \left(1 + \sqrt{3}\right)^n + C_2 \left(1 - \sqrt{3}\right)^n.$$

Sada treba odrediti koeficijente C_1 i C_2 iz početnih uslova. Opet ćemo koristiti mali trik: ako proglasimo da je $a_0 = 1$ rekurzivna relacija i dalje vrijedi, a računanje je dosta lakše. Dakle, tražimo brojeve C_1 i C_2 koji su rješenja sistema:

$$\begin{aligned} C_1 + \phantom{\left(1 - \sqrt{3}\right)} C_2 &= 1 \\ \left(1 + \sqrt{3}\right) C_1 + \left(1 - \sqrt{3}\right) C_2 &= 3. \end{aligned}$$

Dobijemo da su to $C_1 = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$ i $C_2 = \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}$. Tako je traženi broj jednak

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \left(1 + \sqrt{3}\right)^n + \frac{\sqrt{3} - 2}{2\sqrt{3}} \left(1 - \sqrt{3}\right)^n.$$

$\diamondsuit$

Sada ćemo opisati rješenja homogene linearne rekurzivne relacije kada se u njenoj karakterističnoj jednačini pojave višestruki[4] korijeni.

TEOREMA 8.2.8. *Neka je zadana homogena linearna rekurzivna relacija sa konstantnim koeficijentima*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},$$

i neka je

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k = 0$$

njoj asocirana karakteristična jednačina. Ako ta jednačina ima r različitih korijena $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$, i ako je v_i višestrukost korijena α_i, tada korijenu α_i odgovara v_i rješenja

$$\alpha_i^n,\ n \cdot \alpha_i^n,\ n^2 \cdot \alpha_i^n,\ \cdots, n^{v_i - 1} \cdot \alpha_i^n.$$

Sva rješenja zadane rekurzivne relacije su oblika:

$$C_{1,1}\alpha_1^n + C_{1,2} n \alpha_1^n + \cdots + C_{1,v_1} n^{v_1 - 1} \alpha_1^n + \cdots + C_{r,1}\alpha_r + \cdots + C_{r,v_r} n^{v_r - 1} \alpha_r.$$

[4] Broj α je nula polinoma $f(x)$ višestrukosti (multipliciteta) m ako je $f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0$, a $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Skica dokaza:

Kao i u slučaju kada su korijeni karakteristične jednačine različiti (teorema 8.2.4), prvo ćemo pokazati da su za sve $i = 1, 2, \ldots, r$ i za sve $m = 0, 1, 2, \ldots, v_i - 1$ nizovi $(n^m \alpha_i^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ rješenja posmatrane rekurzivne relacije.

Neka je α_i nula polinoma $P(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k$ višestrukosti v_i veće od jedan. Tada je α_i takođe rješenje jednačina $P'(x) = 0$ i $xP'(x) = 0$. Sada možemo primijetiti da je $(n\alpha_i^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ rješenje zadane relacije. Na sličan način računamo i dalje.

Neka je m prirodan broj manji od v_i. Ako m puta naizmjenično u $P(x) = 0$ izračunamo izvod pa pomnožimo sa x dobićemo da je α_i rješenje jednačine

$$k^m x^k - c_1(k-1)^m x^{k-1} - c_2(k-2)^m x^{k-2} - \cdots - c_{k-2} 2^m x^2 - c_{k-1} x = 0.$$

Tako smo pokazali da su za $i = 1, 2, \ldots, r$ i $m = 0, 1, 2, \ldots, v_i - 1$ svi nizovi $\left(n^m \alpha_i^n\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ zaista rješenje posmatrane rekurzivne relacije.

U primjedbi 8.2.5 smo zapazili da je skup svih rješenja relacije koju posmatramo potprostor dimenzije k. Da bi dokazali teoremu, dovoljno je još pokazati da su sva posmatrana rješenja linearno nezavisna.

Ako su svi različiti korjeni karakteristične jednačine $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ različiti po modulu, tada rješenja $\left(n^m \alpha_i^n\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ rastu "različitim brzinama", pa nije moguće da neko od tih rješenja bude linearna kombinacija ostalih.

Ukoliko među $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ postoje brojevi istog modula, tada moramo imitirati dokaz teoreme 8.2.4.

Nažalost, determinanta koja se posmatra da bi pokazali linearnu nezavisnost uočenih rješenja je dosta komplikovanija nego u teoremi 8.2.4:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1 & \cdots & \alpha_k & \alpha_k & \cdots & \alpha_k \\ \alpha_1^2 & 2\alpha_1^2 & \cdots & 2^{v_1-1}\alpha_1^2 & \cdots & \alpha_k^2 & 2\alpha_k^2 & \cdots & 2^{v_k-1}\alpha_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{k-1} & (k-1)\alpha_1^{k-1} & \cdots & (k-1)^{v_1-1}\alpha_1^{k-1} & \cdots & \alpha_k^{k-1} & (k-1)\alpha_k^{k-1} & \cdots & (k-1)^{v_k-1}\alpha_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

Ta determinanta je jedno od uopštenja Vandermondove determinante[5]. Naš cilj je dokazati da je i ta determinanta različita od nule.

[5] Ako je $v_1 = v_2 = \cdots = v_r = 1$ dobije se obična Vandermondova determinanta.

Pretpostavimo da je α_1 korijen višestrukosti veće od jedan. Izvlačeći α_1 iz odgovarajućih kolona, elementarnim operacijama na kolonama, i ponavljanjem tog postupka v_1-1 put, dobićemo da je blok koji odgovara α_1 u posmatranoj determinanti oblika

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \alpha_1^2 & 2\alpha_1 & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ \alpha_1^3 & 3\alpha_1^2 & 3\alpha_1 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \alpha_1^{v_1-1} & (v_1-1)\alpha_1^{v_1-2} & \binom{v_1-1}{2}\alpha_1^{v_1-3} & \cdots & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \alpha_1^{k-1} & (k-1)\alpha_1^{k-2} & \binom{k-1}{2}\alpha^{k-3} & \cdots & \binom{k-1}{v_1-1}\alpha_1^{k-m} & \cdots \end{vmatrix}.$$

Iz posmatrane determinante smo izvukli $2!3!\cdots(v_1-2)!\alpha_1^{1+2+\cdots+(v_1-1)}$.

Ako isti postupak primijenimo na sve korjene α_i višestrukosti veće od jedan, još nam je preostalo izračunati determinantu $D_{\alpha_1,v_1;\alpha_2,v_2;\ldots;\alpha_r,v_r}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ \alpha_1 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \alpha_r & 1 & \cdots \\ \alpha_1^2 & 2\alpha_1 & \cdots & 0 & \cdots & \alpha_r^2 & 2\alpha_r & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \alpha_1^{v_1-1} & (v_1-1)\alpha_1^{v_1-2} & \cdots & 1 & \cdots & \alpha_r^{v_1-1} & (v_1-1)\alpha_r^{v_1-2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \alpha_1^{k-1} & (k-1)\alpha_1^{k-2} & \cdots & \binom{k-1}{v_1-1}\alpha_1^{k-m} & \cdots & \alpha_r^{k-1} & (k-1)\alpha_r^{k-2} & \cdots \end{vmatrix}.$$

Sada redom, za sve $i = n-1, n-2, \ldots, 1$, pomnožimo i-tu vrstu determinante $D_{\alpha_1,v_1;\alpha_2,v_2;\ldots;\alpha_r,v_r}$ sa α_1 i dodamo je vrsti ispod nje. Poslije odgovarajućih operacija na kolonama, dobijemo da je

$$D_{\alpha_1,v_1;\alpha_2,v_2;\ldots;\alpha_r,v_r} = \prod_{j=2}^{r}(\alpha_j-\alpha_i)^{v_j} \cdot D_{\alpha_1,v_1-1;\alpha_2,v_2;\ldots;\alpha_r,v_r}.$$

Ako ovu relaciju primijenimo potreban broj puta na sve α_i višestrukosti veće od jedan, problem se svodi na računanje obične Vandermondove determinante.

Tako smo dobili da je determinanta sistema proizvod nekog broja različitog od nule i

$$\prod_{i=1}^{r} \alpha_i^{\binom{v_i}{2}} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r} (\alpha_j - \alpha_i)^{v_i v_j}.$$

Dakle, determinanta koja nas zanima nije nula, pa se i u ovom slučaju sva rješenja posmatrane rekurzivne relacije mogu dobiti kao linearna kombinacija rješenja koja odgovaraju korijenima karakteristične jednačine.

Sada riješimo jednu rekurzivnu relaciju u kojoj karakteristična jednačina ima višestruke korjene.

Primjer 8.2.9. Riješiti rekurzivnu relaciju

$a_{n+3} = 5a_{n+2} - 8a_{n+1} + 4a_n,$ uz početne uslove $a_0 = 5, a_1 = 1, a_2 = 23.$

Rješenje: Asocirana karakteristična jednačina je

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0,$$

a njena rješenja su $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 2.$
Na osnovu teoreme 8.2.8, rješenje rekurzivne relacije tražimo u obliku

$$a_n = C_1 + C_2 \cdot 2^n + nC_3 \cdot 2^n.$$

Koeficijente C_1, C_2 i C_3 dobićemo iz početnih uslova, kao rješenje sistema jednačina:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 \phantom{{}+2C_3} &= 5 \\ C_1 + 2C_2 + 2C_3 &= 1 \\ C_1 + 4C_2 + 8C_3 &= 23. \end{aligned}$$

Ta rješenja su

$$C_1 = 39, C_2 = -34, C_3 = 15,$$

pa je rješenje zadane rekurzivne relacije

$$a_n = 39 - 34 \cdot 2^n + 15n \cdot 2^n.$$

$\diamondsuit$

8.3 Linearne nehomogene rekurzivne relacije sa konstantnim koeficijentima

U ovom poglavlju ćemo posmatrati još jednu klasu rekurzivnih relacija koju dosta lako možemo riješiti. Neka je $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ proizvoljna funkcija. **Nehomogena linearna rekurzivna relacija k-tog reda** je relacija oblika

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + f(n), \tag{8.6}$$

gdje je $n \geqslant k$, konstante $c_1, c_2, \ldots, c_k$ su realni brojevi i vrijedi $c_k \neq 0$.

Primijetimo da izostavljanjem $f(n)$ iz relacije (8.6) dobijamo homogenu linearnu relaciju koju smo naučili riješiti u prošlom poglavlju.

PRIMJEDBA 8.3.1. Ako su nizovi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(b_n^{'})_{n\in\mathbb{N}_0}$ rješenja relacije (8.6), tada je niz $(b_n - b_n^{'})_{n\in\mathbb{N}_0}$ rješenje odgovarajuće homogene rekurzivne relacije

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}. \tag{8.7}$$

Dakle, svaka dva rješenja polazne rekurzivne relacije (8.6) se razlikuju za neko rješenje asocirane homogene relacije (8.7). Stoga je svako rješenje posmatrane nehomogene relacije (8.6) oblika

$$a_n = a_n^H + a_n^P,$$

gdje je a_n^H rješenje odgovarajuće homogene rekurzivne relacije (8.7), a a_n^P jedno (**partikularno**) rješenje polazne nehomogene relacije.

U terminima linearne algebre, skup svih rješenja rekurzivne relacije (8.6) je afini potprostor W' prostora svih nizova. Taj potprostor se može dobiti translacijom potprostora W koji čine rješenja odgovarajuće homogene relacije za neki vektor a_n^P iz W', to jest $W' = W + a_n^P$.

Iz prethodnog razmatranja, sva rješenja linearne nehomogene rekurzivne relacije dobijemo tako što:

- Nađemo **sva** rješenja odgovarajuće homogene relacije (8.7).
- Nađemo **jedno** (partikularno) rješenje nehomogene relacije (8.6).
- **Sva** rješenja tražene relacije su oblika $a_n = a_n^H + a_n^P$.

Kako linearnu rekurzivnu relaciju (8.7) znamo riješiti, jedini problem je još kako da “pogodimo” jedno rješenje relacije (8.6)?

Ideja je da partikularno rješenje tražimo u obliku u kojem je i funkcija $f(n)$ koja "kvari" homogenost. U sljedećoj tablici dajemo "spisak" partikularnih rješenja za neke tipove funkcije f.

$f(n)$	pretpostavljeno partikularno rješenje a_n^P
$const.$	A
$c \cdot n + r$	$A \cdot n + B$
$c_k \cdot n^k + \cdots + c_1 \cdot n + c_0$	$A_k \cdot n^k + \cdots + A_1 \cdot n + A_0$
c^n	$A \cdot c^n$

Nepoznate koeficijente u pretpostavljenom partikularnom rješenju a_n^P odredićemo iz uslova da je to jedno rješenje relacije (8.6).

Primjer 8.3.2. Riješi rekurzivnu relaciju

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + 2 + 3n \text{ uz početne uslove } a_0 = a_1 = 1.$$

Rješenje: Asocirana homogena relacija $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ ima rješenja oblika $a_n^H = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$.

Partikularno rješenje tražimo u obliku $a_n^P = An + B$. Tako dobijamo

$$A(n+2) + B = 5\big(A(n+1) + B\big) - 6(An + B) + 2 + 3n,$$

odnosno

$$2An - 3A + 2B = 3n + 2.$$

Upoređujući koeficijente uz n i slobodan član na obje strane prethodne jednakosti dobijamo

$$2A = 3, 2B - 3A = 2, \text{ odnosno } A = \frac{3}{2}, B = \frac{13}{4}.$$

Zato je $a_n^P = \frac{3}{2}n + \frac{13}{4}$, a sva rješenja zadate relacije su

$$a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n + \frac{3}{2}n + \frac{13}{4}.$$

Sada koeficijente C_1 i C_2 odredimo iz početnih uslova:

$$a_0 = C_1 + C_2 + \frac{13}{4} = 1$$

$$a_1 = 2C_1 + 3C_2 + \frac{3}{2} + \frac{13}{4} = 1.$$

Tako dobijamo $C_1 = -3$ i $C_2 = \frac{3}{4}$, odnosno rješenje zadate rekurzivne relacije je

$$a_n = -3 \cdot 2^n + \frac{3}{4}3^n + \frac{3}{2}n + \frac{13}{4}.$$

$\diamondsuit$

Kada je pretpostavljeno partikularno rješenje a_n^P polazne relacije istovremeno i rješenje asocirane homogene relacije ovakav postupak ne daje rješenje. Razlog za to je što je tada $a_n^P \in W \cap W'$, pa je u tom slučaju potprostor rješenja odgovarajuće homogene jednačine W invarijantan na translaciju za a_n^P.

No, to se lako može popraviti. Neka je α korijen karakteristične jednačine višestrukosti v koji se pojavi i kao pretpostavljeno partikularno rješenje.
Tada su nizovi $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (n\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}_0}, \ldots, (n^{v-1}\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rješenja odgovarajuće homogene relacije, to jest, ti nizovi pripadaju potprostoru W.

Zato partikularno rješenje a_n^P tražimo u obliku $(n^v \cdot \alpha^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, što sigurno ne pripada potprostoru W.

Primjer 8.3.3. Riješi rekurzivnu relaciju

$$a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 6n^2 - 4n - 17,$$

uz početne uslove $a_0 = 3, a_1 = 15, a_2 = 41$.

Rješenje: Kako asocirana homogena jednačina $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ ima korijene $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$, to je njeno opšte rješenje

$$a_n^H = C_1 + C_2 \cdot 2^n + C_3 \cdot 3^n.$$

Kako je 1 korijen karakteristične jednačine višestrukosti jedan, odgovarajuće partikularno rješenje tražimo u obliku $a_n^P = n\cdot(An^2+Bn+C)$.

Kada ovo rješenje uvrstimo u polaznu relaciju, dobijemo

$$(n+3)\big(A(n+3)^2+B(n+3)+C\big)-6(n+2)\big(A(n+2)^2+B(n+2)+C\big)+$$

$$+11(n+1)\big(A(n+1)^2+B(n+1)+C\big)-6n(An^2+Bn+C) = 6n^2-4n-17.$$

Upoređujući koeficijente uz n^2, n i slobodan član, dobićemo sistem linearnih jednačina:

$$\begin{array}{llll} (9A+B) & -6(6A+B) & +11(3A+B) & -6B = 6 \\ (27A+6B+C) & -6(12A+4B+C) & +11(3A+2B+C) & -6C = -4 \\ (27A+9B+3C) & -6(8A+4B+2C) & +11(A+B+C) & = -17 \end{array}$$

Rješenja tog sistema su $A = 1, B = 2, C = 1/2$. Dakle, rješenja rekurzivne relacije su oblika $a_n = c_1 + c_2 \cdot 2^n + C_3 \cdot 3^n + n^3 + 2n^2 + \frac{n}{2}$. Iz početnih uslova dobijamo sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} C_1 + \ C_2 \ + \ C_3 &= \ 3 \\ C_1 + 2C_2 + 3C_3 &= 11.5 \\ C_1 + 4C_2 + 9C_3 &= \ 24 \end{aligned}$$

čija su rješenja koeficijenti $C_1 = -31/4, C_2 = 13, C_3 = -9/4$. Tako je rješenje zadane rekurzivne relacije

$$a_n = -\frac{31}{4} + 13 \cdot 2^n - \frac{9}{4} \cdot 3^n + n^3 + 2n^2 + \frac{n}{2}.$$

$\diamondsuit$

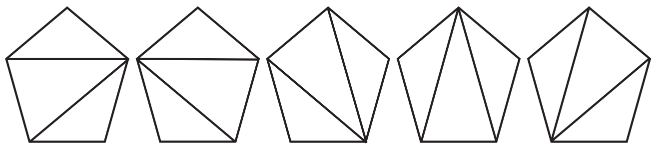
Kao i u većini knjiga, u svim primjerima korijeni karakterističnih jednačina su realni. Algoritam za rješavanje linearnih rekurzivnih relacija je isti i kada su ti korjeni komleksni, i nekoliko takvih primjera se nalazi u zadacima na kraju ove glave.

8.4 Broj triangulacija konveksnog poligona

Naći eksplicitno rješenje nelinearnih rekurzivnih relacija u opštem slučaju može biti veoma težak zadatak. U ovom poglavlju posmatraćemo i riješiti jednu zanimljivu i važnu nelinearnu rekurzivnu relaciju. Ta relacija se često pojavi kao rješenje velikog broja naizgled potpuno različitih enumerativnih problema. Određivanje broja triangulacija konveksnog n-tougla je samo jedna od manifestacija ove relacije.

Neka je $P_n = A_1 A_2 \ldots A_n$ konveksan n-tougao u ravni. **Triangulacija bez dodatnih tjemena** tog n-tougla je podjela P_n na trouglove pomoću dijagonala, tako da za svaka dva trougla u toj podijeli vrijedi

- ili su disjunktni;
- ili imaju samo jedno zajedničko tjeme;
- ili dijele jednu zajedničku ivicu.



Slika 8.1. *Sve triangulacije petougla.*

Sa T_n označimo broj takvih triangulacija u n-touglu. Lako je izbrojati da je $T_3 = 1, T_4 = 2, T_5 = 5$. Na slici 8.1 je svih pet različitih triangulacija petougla.

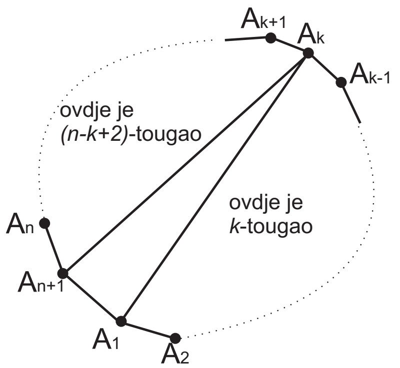
Po dogovoru se smatra da je $T_1 = 0$ i $T_2 = 1$.
Sada ćemo opisati rekurzivnu relaciju koju zadovoljavaju brojevi T_n.

TEOREMA 8.4.1. *Niz $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je rješenje rekurzivne relacije:*

$$T_{n+1} = T_2 \cdot T_n + T_3 \cdot T_{n-1} + \cdots + T_n \cdot T_2,\ \textit{za sve } n \geqslant 2, \tag{8.8}$$

uz početne uslove $T_1 = 0, T_2 = 1$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{T}_{n+1}$ skup svih triangulacija nekog konveksnog $(n+1)$-tougla $P_{n+1} = A_1A_2\ldots A_nA_{n+1}$. Uočimo stranu A_1A_{n+1} u poligonu P_{n+1}. U svakoj triangulaciji $T \in \mathcal{T}_{n+1}$, duž A_1A_{n+1} je stranica nekog trougla.



Slika 8.2. *Triangulacija $(n+1)$-tougla u kojoj se pojavi trougao $A_1A_kA_{n+1}$.*

Za sve $k = 2, 3, \ldots, n-1, n$, sa $\mathcal{T}_{n+1}^k$ označimo podskup $\mathcal{T}_{n+1}$ u kojem je ivica A_1A_{n+1} sadržana u trouglu $\triangle A_1A_kA_{n+1}$ (vidi sliku 8.2).

Ako je $\triangle A_1A_kA_{n+1}$ jedan trougao u nekoj triangulaciji, do potpune triangulacije poligona P_{n+1} još treba odabrati triangulacije k-tougla $A_1A_2\dots A_k$ i $(n+2-k)$-tougla $A_kA_{k+1}\dots A_nA_{n+1}$, što se može vidjeti na slici 8.2. Zato[6] je $|\mathcal{T}_{n+1}^k| = T_kT_{n-k+2}$.

Kako je $\mathcal{T}_{n+1}$ disjunktna unija skupova $\mathcal{T}_{n+1}^2, \mathcal{T}_{n+1}^3, \dots, \mathcal{T}_{n+1}^n$, tvrđenje teoreme slijedi na osnovu principa sume.

□

Rekurzivnu relaciju (8.8) ne možemo riješiti metodama iz prethodnog poglavlja jer nije linearna. Postoji nekoliko načina da se odrede brojevi T_n. Jedan od njih je opisan u dokazu sljedeće teoreme.

TEOREMA 8.4.2. *Za svaki prirodan broj $n \geqslant 2$ vrijedi*

$$T_n = \frac{1}{n-1}\binom{2(n-2)}{n-2}.$$

Dokaz. Neka je $P_n = A_1A_2\dots A_n$ neki konveksan n-tougao i neka je $\mathcal{T}_n$ skup svih triangulacija poligona P_n. Posmatrajmo skup

$$S = \{(T,d,A) : T \in \mathcal{T}_n, d \text{ je dijagonala } P_n \text{ korištena u } T, A \text{ je tjeme } d\}.$$

Prvo odaberimo neku triangulaciju T poligona P_n. U toj triangulaciji smo upotrebili $n-3$ dijagonale, i svaka od tih dijagonala ima dva tjemena. Stoga je

$$|S| = 2(n-3)\cdot T_n.$$

Sa druge strane, ako prvo fiksiramo tjeme $A = A_1$, za dijagonalu koja sadrži A možemo odabrati A_1A_3, $A_1A_4, \dots, A_1A_{n-1}$. Za odabranu dijagonalu A_1A_k, gdje je $k \in \{3,4,\dots,n-1\}$, postoji $T_k \cdot T_{n-k}$ triangulacija koje sadrže dijagonalu d. Dakle, postoji

$$T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \dots + T_{n-1}T_3$$

uređenih trojki iz S u kojima se pojavi tjeme A_1. Zbog simetrije, isto vrijedi i ako za A odaberemo neko drugo tjeme n-tougla P_n. Stoga je

$$|S| = n(T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \dots + T_{n-1}T_3).$$

Tako smo dobili da je

$$\tfrac{2(n-3)}{n}T_n = T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \dots + T_{n-1}T_3.$$

[6] Ako je $k = 2$ ili $k = n$ koristimo "dogovor" da je $T_2 = 1$.

Ako u (8.8) uvrstimo $T_2 = 1$ i iskoristimo prethodnu relaciju dobićemo

$$T_{n+1} - 2T_n = T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \cdots + T_{n-1}T_3 = \tfrac{2(n-3)}{n}T_n,$$

odnosno

$$T_{n+1} = \frac{2(2n-3)}{n}T_n.$$

Uzastopnom primjenom prethodne relacije dobija se

$$T_{n+1} = \tfrac{2(2n-3)}{n}T_n = \tfrac{2(2n-3)\cdot 2(2n-5)}{n\cdot(n-1)}T_{n-1} = \cdots = \tfrac{2^{n-1}(2n-3)!!}{n!}T_2.$$

Ako i brojilac i imenilac prethodnog razlomka pomnožimo sa $(n-1)!$ dobijamo

$$T_{n+1} = \frac{\big(2(n-1)\big)!}{n(n-1)!(n-1)!} = \frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}.$$

□

8.5 O nekim specijalnim brojevima

Rješavajući razne kombinatorne probleme, primijetićemo da se pojedine rekurzivne relacije pojave veoma često. Zbog toga su rješenja tih rekurzivnih relacija važni brojevi u kombinatorici i imaju posebna imena. U ovom poglavlju ćemo posmatrati neke od tih specijalnih brojeva.

FIBONAČIJEVI BROJEVI

Podsjetimo se da su Fibonačijevi brojevi $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rješenja rekurzivne relacije

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ uz početne uslove } F_0 = 0, F_1 = 1.$$

Nekoliko prvih članova ovog niza je dosta lako izračunati:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597\ldots$$

Znamo da je $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ n-ti Fibonačijev broj.

Skoro je nevjerovatno koliko se često Fibonačijevi brojevi pojavljuju u svijetu oko nas.
Navedimo nekoliko primjera:

- Poznato je da muška pčela (trut) ima samo majku, a ženska pčela ima i oca i majku. Tako trut ima jednog direktnog pretka (samo mamu); ima dva pretka generaciju prije (jednu babu i jednog djeda); dalje ima dvije prababe i jednog pradjeda; tri čukunbabe i dva čukundjeda, ...
  Lako je primijetiti da je broj predaka nekog truta prije n generacija Fibončijev broj F_{n+1}, od toga je F_n ženskih i F_{n-1} muških predaka.

- Fibonačijevi brojevi su bili poznati i mnogo vremena prije Fibonačija. U staroindijskim epovima, pisanim na sanskritu, glasovi se mogu izgovarati dugačko i kratko. Izgovor dugačkog glasa traje duplo duže od kratkog.

  Indijski matematičari su računali broj stihova jednake dužine a različite strukture. Za nekoliko početnih vrijednosti, evo strukture i broja stihova (kratak glas označimo sa K, a dugi sa D).

dužina stiha	struktura stiha	broj stihova
1	K	1
2	KK, D	2
3	KKK , KD , DK	3
4	$KKKK$, KKD, KDK, DKK, DD	5
5	KKKKK, KKKD, KKDK, KDKK, DKKK, DDK, DKD, KDD	8

  Lako je pokazati da je broj stihova dužine n Fibonačijev broj F_{n+1}.

- Fibonačijevi brojevi se pojave i u botanici. Lišće se na grani ili stabljici neke biljke raspoređuje periodično po spirali. Odnos ugaonog rastojanja između dva susjedna lista i punog ugla je (zbog periodičnosti) neki racionalan broj. Kod brijesta je taj odnos $\frac{1}{2}$, kod bukve $\frac{1}{3}$, kod hrasta $\frac{2}{5}$, kod kruške $\frac{3}{8}, \ldots$
  Zanimljivo je da je to ugaono rastojanje uvijek oblika $\frac{F_n}{F_{n+2}} \cdot 2\pi$.
  Jedno od objašnjenja za takav raspored lišća je da na taj način svaki list dobije maksimalnu količinu sunčeve svjetlosti.

- **Zlatni presjek** u matematici, arhitekturi i umjetnosti je podjela neke cjeline na dva dijela različitih veličina tako da je

  "*odnos većeg dijela prema manjem jednak odnosu cjeline prema većem dijelu*".

  Taj odnos se o značava sa ϕ, i nije ga teško izračunati. Iz uslova

$$\frac{\text{veći}}{\text{manji}} = \phi = \frac{\text{veći} + \text{manji}}{\text{veći}} = 1 + \frac{1}{\phi}$$

lako se dobija da je broj ϕ pozitivno rješenje kvadratne jednačine $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, odnosno $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.
Rasprostranjenost broja ϕ u matematici, arhitekturi, slikarstvu, muzici (i još mnogo drugih oblasti) izaziva divljenje i nevjericu. Vezu između Fibonačijevih brojeva i zlatnog presjeka je pronašao Johan Kepler. On je pokazao da je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$. Prethodni limes možemo dobiti ako Fibonačijev broj F_n zapišemo kao

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^n - \left(\frac{-1}{\phi}\right)^n\right).$$

Odatle se dobije da je Fibonačijev broj F_n cijeli broj koji je najbliži $\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$, ili precizno $F_n = \left\lfloor \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor$.

Primjer 8.5.1. Evo nekoliko kombinatornih zadataka u kojima se kao rješenja pojave Fibonačijevi brojevi.

1. Koliko ima svih podskupova skupa $[n]$ koji ne sadrže uzastopne prirodne brojeve?
2. Koliko ima kompozicija broja n u brojeve 1 i 2, odnosno, koliko rješenja ima jednačina

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

   ako je $k \in \mathbb{N}$, a svi $x_i \in \{1, 2\}$?
3. Koliko ima kompozicija broja n u kojima su svi sabirci veći od jedan?

Rješenje: Neka je a_n traženi broj u svakom od ovih zadataka. Pokazaćemo da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \tag{8.9}$$

odnosno da rješenja ovih zadataka zadovoljavaju istu rekurzivnu relaciju kao i Fibonačijevi brojevi.

1. Sve podskupove od $[n+2]$ u kojima nema uzastopnih brojeva podijelimo u dvije grupe:
   Prvu grupu čine podskupovi koji ne sadrže $n+2$. To su i podskupovi od $[n+1]$ bez uzastopnih elemenata, i ima ih a_{n+1}.

U drugoj grupi su podskupovi koji sadrže $n+2$. Ti podskupovi ne sadrže $n+1$. "Brisanje" broja $n+2$ je bijekcija između ovakvih podskupova od $[n+2]$ i podskupova od $[n]$ u kojima nema uzastopnih. Stoga se u ovoj grupi nalazi a_n posmatranih podskupova od $[n+2]$. Dakle, rješenja ovog zadatka zadovoljavaju relaciju (8.9). Kako je $a_1 = 2 = F_3$, $a_2 = 3 = F_4$, to je $a_n = F_{n+2}$.

2. I u ovom primjeru, skup svih traženih kompozicija broja $n+2$ podijelimo u dvije grupe. Prvu neka čine kompozicije $n+2$ u kojima je posljednji sabirak jednak 1, a drugu one kojima je posljednji sabirak jednak 2. Izostavljanjem posljednjeg sabirka, dobijemo da za brojeve a_n takođe vrijedi rekurzivna relacija (8.9). Kako je $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, to je $a_n = F_{n+1}$.
3. Kompozicija kojima je posljednji sabirak dva ima a_{n-2}, a onih kojima je posljednji sabirak veći od dva ima a_{n-1} (taj posljednji umanjimo za jedan). Stoga, za članove niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vrijedi rekurzivna relacija (8.9), uz početne uslove $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. Broj kompozicija sa traženim svojstvom je F_{n-1}.

$\diamondsuit$

KATALANOVI BROJEVI

Katalanovi[7] brojevi $(C_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ su rješenja rekurzivne relacije

$$C_n = C_0C_{n-1}+C_1C_{n-2}+\cdots+C_{n-1}C_0, \text{ uz početne uslove } C_0 = C_1 = 1.$$

Prvih nekoliko Katalanovih brojeva su

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4869, 16796, 58786, 208012\ldots$$

U prethodnom poglavlju smo pokazali da je C_n jednak broju triangulacija konveksnog $(n+2)$-tougla, i našli smo opštu formulu za ove brojeve

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Katalanovi brojevi se pojave veoma često kao rješenje raznih kombinatornih problema. Ričard Stenli je u [35] opisao 173 različita zadatka čija su rješenja Katalanovi brojevi.

[7] Eugène Charles Catalan (1814 - 1894)

Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ niz konačnih skupova i neka je $a_n = |A_n|$. Jedan od načina da se pokaže da su članovi niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ baš Katalanovi brojevi je da dokažemo da vrijedi

$$a_0 = a_1 = 1 \text{ i } a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \cdots + a_{n-1}a_0,$$

to jest, da nizovi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(C_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zadovoljavaju istu rekurzivnu relaciju, uz iste početne uslove.

Drugi način da dokažemo da je $a_n = C_n$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$ je kombinatorni:

- pronaći niz skupova $(B_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ u kojem za sve n vrijedi $|B_n| = C_n$, i
- za sve $n \in \mathbb{N}_0$ uspostaviti bijekcije $f_n : A_n \to B_n$.

Dva dobro poznata primjera gdje su rješenja Katalanovi brojevi su: postavljanje zagrada da bi odredili redoslijed množenja $n+1$ faktora i računanje broja binarnih stabala sa $n+1$ listova.

Primjer 8.5.2. Pretpostavimo da u nekoj strukturi operacija množenja nije asocijativna. Ako želimo pomnožiti $n+1$ element $x_1x_2\cdots x_nx_{n+1}$ u toj strukturi, redoslijed množenja se odredi postavljanjem $(n-1)$-og para zagrada. Sa a_n označimo broj različitih postavljanja zagrada u množenju $x_1x_2\cdots x_nx_{n+1}$.
Lako se provjeri da je $a_0 = a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5$.

Na primjer, za $n = 3$, postoji pet mogućih rasporeda zagrada:

$$((x_1x_2)x_3)x_4,\ (x_1(x_2x_3))x_4\ ,\ (x_1x_2)(x_3x_4)\ ,\ x_1((x_2x_3)x_4)\ ,\ x_1(x_2(x_3x_4)).$$

Dokaži da za svaki prirodan broj n vrijedi $a_n = C_n$.

Rješenje: Možemo primijetiti da je svaki od posmatranih proizvoda oblika

$$(x_1x_2\cdots x_i)\cdot(x_{i+1}x_{i+2}\cdots x_{n+1})$$

za neki $i = 1, 2, \ldots, n$. Još je potrebno rasporediti zagrade u proizvode $x_1x_2\cdots x_i$ i $x_{i+1}x_{i+2}\cdots x_{n+1}$. Kako je to moguće uraditi na a_{i-1}, odnosno a_{n-i} načina, možemo zaključiti da vrijedi

$$a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \cdots + a_{n-1}a_0.$$

Dakle, brojevi a_n zadovoljavaju istu rekurzivnu relaciju i imaju iste početne uslove kao i Katalanovi brojevi. Stoga je $a_n = C_n$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$.

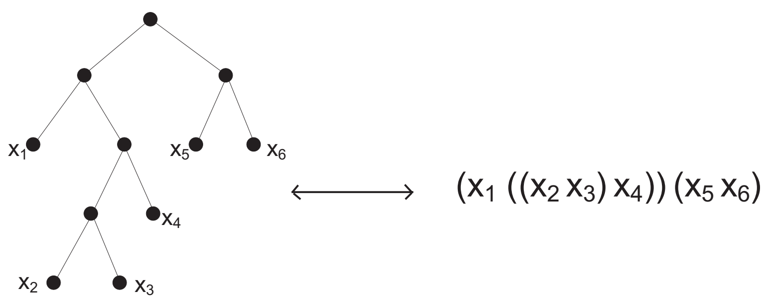
$\diamondsuit$

Primjer 8.5.3. Binarno stablo je struktura koja se često pojavi u matematici i računarstvu. Može se opisati kao stablo (povezan graf bez ciklusa) u kojem svako tjeme osim listova (tjeme sa samo jednim susjedom) ima tačno dva susjeda ("sljedbenika").

Neka je b_n broj binarnih stabala sa tačno $n+1$ listova. Dokazati da za sve $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $b_n = C_n$.

Rješenje: U svaki od $n+1$ listova upišemo promjenjive x_1, x_2, $\ldots, x_{n+1}$. Možemo primijetiti da je sa binarnim stablom u potpunosti opisan redoslijed množenja u izrazu $x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1}$.

Vrijedi i obrnuto, raspored množenja u $x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1}$ definiše binarno stablo sa $n+1$ listova. Ovo daje bijekciju između posmatranih stabala i raspoređivanja zagrada u prethodnom problemu, vidjeti sliku 8.3.



Slika 8.3. *Bijekcija između binarnih stabala i postavljanja zagrada.*

Tako smo pokazali da je $b_n = C_n$, to jest, Katalanovi brojevi su rješenje i ovog problema.

$\diamondsuit$

Uz malo računanja, možemo dobiti još jedan zapis za Katalanove brojeve. Primijetimo da vrijedi:

$$C_n = \tfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \tfrac{n+1-n}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \tfrac{n}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Kako je $\tfrac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \tfrac{2n}{n+1}\binom{2n-1}{n-1} = \tfrac{2n}{n+1}\binom{2n-1}{n} = \binom{2n}{n+1}$, dobijamo da je

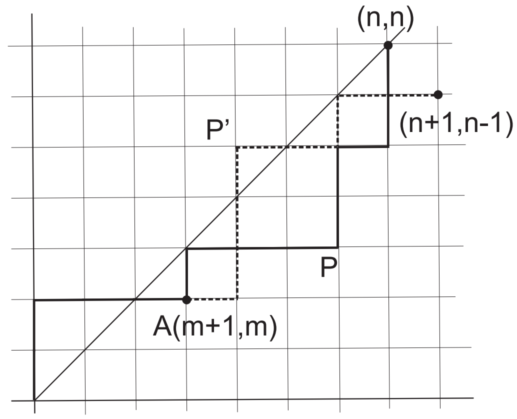
$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}.$$

Potražimo kombinatornu interpretaciju za ovako napisane Katalanove brojeve.

Primjer 8.5.4. Poznato je da je broj najkraćih puteva od $(0,0)$ do (n,n) u cjelobrojnoj mreži jednak $\binom{2n}{n}$. Koliko ima takvih puteva koji "ne silaze" ispod dijagonale $y = x$, to jest kod koje su sve cjelobrojne tačke (p,q) na putu takve da je $p \leqslant q$?

Rješenje: Od svih $\binom{2n}{n}$ najkraćih puteva od $(0,0)$ do (n,n) treba oduzeti sve one koji se "spuste" ispod dijagonale. Puteve koji silaze ispod dijagonale prebrojimo pomoću sljedećeg trika:

Neka je P takav put. Uočimo prvu cjelobrojnu tačku puta P koja je ispod dijagonale; recimo da je to $A(m+1,m)$. Primijetimo da od tačke A do tačke (n,n) u putu P ima još $n-m$ koraka GORE i $n-m-1$ korak DESNO. Sada, put P preuredimo tako da svaki put poslije tačke A umjesto GORE odemo DESNO, a umjesto DESNO idemo GORE.



Slika 8.4. *Putevi od* $(0,0)$ *do* (n,n) *koji se spuste ispod* $y = x$ *se pretvore u puteve od* $(0,0)$ *do* $(n+1,n-1)$

Tako smo dobili novi put P' sa $n+1$ koraka DESNO i $n-1$ korak *GORE*. Zato je P' put od $(0,0)$ do $(n+1,n-1)$. Primjer ove konstrukcije se može vidjeti na slici 8.4.

Lako je primijetiti da je maloprije opisana bijekcija između puteva od $(0,0)$ do (n,n) koji se spuste ispod dijagonale i svih puteva od $(0,0)$ do $(n+1,n-1)$ (tih puteva ima $\binom{2n}{n+1}$). Stoga je broj traženih puteva

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}.$$

$\diamondsuit$

STIRLINGOVI BROJEVI

Sa $c(n,k)$ smo označavali broj permutacija u $\mathbb{S}_n$ koje imaju tačno k ciklusa. Taj broj se naziva i Stirlingov broj prve vrste bez znaka.
Stirlingov broj prve vrste definišemo sa

$$s(n,k) = (-1)^{n-k}c(n,k).$$

Iz teoreme 4.3.4 dobijamo da Stirlingovi brojevi $s(n,k)$ zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k)$$

U sljedećoj tablici se nalaze Stirlingovi brojevi $s(n,k)$ za neke "male" vrijednosti parametara n i k:

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	0	1							
2	0	-1	1						
3	0	2	-3	1					
4	0	-6	11	-6	1				
5	0	24	-50	35	-10	1			
6	0	-120	274	-225	85	-15	1		
7	0	720	-1764	1624	-735	175	-21	1	
8	0	-5040	13068	-13132	6769	-1960	322	-28	1

Particija skupa X u k dijelova je podjela svih elemenata X u k nepraznih, disjunktnih podskupova od X. Drugim riječima, particija skupa X u k blokova (dijelova) je k-člana familija $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ podskupova od X tako da je

$$X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k, A_i \neq \emptyset, A_i \cap A_j = \emptyset \text{ za sve } 1 \leqslant i < j \leqslant k.$$

Za sve $k \leqslant n$ **Stirlingov broj druge vrste** $S(n,k)$ je broj particija skupa od n elemenata u tačno k blokova.

TEOREMA 8.5.5. *Stirlingovi brojevi druge vrste zadovoljavaju sljedeću rekurzivnu relaciju*

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k).$$

Dokaz. Sve particije skupa $[n]$ u k blokova podijelimo u dvije grupe:

(i) Prvu grupu čine particije u kojima je $\{n\}$ jednočlan blok. Kako se ostalih $n-1$ elemenata treba rasporediti u $k-1$ blokova, ovih particija ima $S(n-1,k-1)$.

(ii) U drugoj grupi su particije u kojima broj n nije "sam" u bloku. Te particije nastanu dodavanjem broja n u jedan od k blokova neke od $S(n-1,k)$ particija skupa $[n-1]$ u k blokova.

Rekurzivnu relaciju za $S(n,k)$ dobijemo koristeći princip sume.

□

Neke vrijednosti za Stirlingove brojeve druge vrste su date u sljedećoj tabeli:

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

PRIMJEDBA 8.5.6. Srpski matematičar Jovan Karamata[8] je uveo notaciju za Stirlingove brojeve pomoću uglastih i vitičastih zagrada

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = c(n,k) = (-1)^{n-k} s(n,k), \quad \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = S(n,k).$$

Ovu notaciju je kasnije popularisao Donald Knut[9], na primjer u [19]. Rekurzivne relacije za ovako zapisane Stirlingove brojeve podsjećaju na relacije za binomne koeficijente:

[8] Jovan Karamata (1902 - 1967)
[9] Donald Ervin Knuth (1938-)

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}, \text{ odnosno}$$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = k\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}, \text{ za sve } n \in \mathbb{N}.$$

PRIMJEDBA 8.5.7. Za Stirlingov broj druge vrste $S(n,k)$ možemo lako naći i tačnu formulu. Taj broj se pojavi pri enumeraciji surjekcija sa skupa $[n]$ u skup $[k]$. Jedan od načina kako možemo zadati surjekciju $f:[n]\to[k]$ je da uočimo particiju skupa $[n]$ u k dijelova na $S(n,k)$ načina, a zatim na $k!$ načina odaberemo bijekciju koja tih k blokova slika u $[k]$.

Tako dobijemo da je broj surjekcija sa $[n]$ u $[k]$ jednak $S(n,k)k!$. Na osnovu primjera 7.2.4 slijedi da je

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n.$$

Neke vrijednosti za Stirlingove brojeve prve i druge vrste nije teško dobiti zahvaljujući odgovarajućoj kombinatornoj interpretaciji.

Primjer 8.5.8. Dokaži da sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$s(n,n) = S(n,n) = 1, s(n,1) = (-1)^{n-1}(n-1)!, s(n,n-1) = -\binom{n}{2},$$

$$S(n,n-1) = \binom{n}{2}, S(n,2) = 2^{n-1}-1.$$

Rješenje: Iz definicije Stirlingovih brojeva očigledno vrijedi $s(n,n) = 1$ i $S(n,n) = 1$. Direktnim računanjem, ili primjenom teoreme 4.3.3 dobijamo da vrijedi:

- permutacija u $\mathbb{S}_n$ sa samo jednim ciklusom ima $(n-1)!$, pa je $s(n,1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$
- broj permutacija u $\mathbb{S}_n$ sa $n-1$ ciklusa (to su u stvari transpozicije) je $\binom{n}{2}$, odnosno vrijedi da je $s(n,n-1) = -\binom{n}{2}$.

Broj $S(n,n-1)$ dobijemo kada izaberemo dva elemenata iz $[n]$ koji će biti u istom bloku, što možemo učiniti na $\binom{n}{2}$ načina.

Uočimo skup $X = \{(A,B) : A\cup B = [n], A\neq\emptyset, B\neq\emptyset, A\cap B=\emptyset\}$. Kako je skup $B = [n]\setminus A$, i kako je A podskup od $[n]$ takav da je $A\neq\emptyset, A\neq[n]$, to je $|X| = 2^n - 2$.

Da bismo odredili $S(n,2)$ primijetimo da svakoj particiji $\{A,B\}$ skupa $[n]$ odgovaraju dva različita uređena para iz X. Tako je

$$S(n,2) = \frac{|X|}{2} = 2^{n-1} - 1.$$

$\diamondsuit$

PRIMJEDBA 8.5.9. Svaki polinom stepena najviše n se uobičajeno zapisuje[10] pomoću monoma $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Za svaki $r \in \mathbb{N}_0$ definišemo polinome $x^{\underline{r}}$ i $x^{\overline{r}}$ sa

$$x^{\underline{r}} = x(x-1)\cdots(x-r+1) \text{ i } x^{\overline{r}} = x(x+1)\cdots(x+r-1).$$

Polinomi $x^{\underline{r}}$ i $x^{\overline{r}}$ se nazivaju padajući i rastući stepeni od x.

Ako obične stepene od x pokušamo izraziti preko $x^{\underline{r}}$ kao koeficijenti će se pojaviti Stirlingovi brojevi druge vrste, a ako $x^{\underline{r}}$ zapišemo kao obične polinome, kao koeficijenti se pojave Strilingovi brojevi prve vrste! Na primjer

$$x^{\underline{5}} = x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x \text{ , i } x^5 = x^{\underline{5}} + 10x^{\underline{4}} + 25x^{\underline{3}} + 15x^{\underline{2}} + 15x^{\underline{1}}$$

Dokažimo da za sve $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) x^{\underline{k}} \text{ , odnosno } x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) x^k. \tag{8.10}$$

Prethodne relacije se lako pokažu indukcijom uz pomoć rekurzivnih relacija za Stirlingove brojeve. Pretpostavimo da su formule (8.10) tačne za n i računajmo:

$$x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (x-k+k) S(n,k) \cdot x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} \Big(S(n,k) x^{\underline{k+1}} + k S(n,k) x^{\underline{k}} \Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \big(S(n,k-1) + k S(n,k) \big) x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n+1} S(n+1,k) x^{\underline{k}}.$$

Na sličan način dobijamo i

$$x^{\underline{n+1}} = x^{\underline{n}} \cdot (x-n) = \sum_{k=0}^{n} \Big(s(n,k) x^{k+1} - n s(n,k) x^n \Big) =$$

[10] U linearnoj algebri bi rekli da su $1, x, x^2, \ldots, x^n$ baza za vektorski prostor svih polinoma stepena najviše n.

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \big(s(n,k-1) - ns(n,k)\big)x^k = \sum_{k=0}^{n+1} s(n+1,k)x^k.$$

Ako se u formulama (8.10) x zamijeni sa $-x$ i ako primijetimo da vrijedi $x^{\underline{n}} = (-1)^n(-x)^{\overline{n}}$, dobićemo

$$x^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}S(n,k)x^{\overline{k}}, \text{ odnosno } x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}s(n,k)x^k.$$

BELOVI BROJEVI

Ze sve $n \in \mathbb{N}_0$ definišemo Belov[11] broj B_n kao broj svih particija skupa $[n]$ u nekoliko blokova. Po definiciji je $B_0 = 1$. Možemo primijetiti da je B_n broj različitih relacija ekvivalencije na skupu sa n elemenata. Prvih nekoliko Belovi brojeva su

$$1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, 678570, 4213597, \ldots$$

Iz kombinatorne interpretacije Stirlingovih brojeva druge vrste i definicije Belovih brojeva je lako primijetiti da vrijedi

$$B(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k).$$

Primjer 8.5.10. Dokaži da Belovi brojevi zadovoljavaju sljedeću rekurzivnu relaciju

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i.$$

Rješenje: Posmatrajmo blok u kojem se nalazi broj $n+1$. Ako se u tom bloku još nalazi $n-i$ brojeva iz $[n]$, te brojeve možemo odabrati na $\binom{n}{i}$ načina. Od preostalih i brojeva iz skupa $[n]$ može se napraviti još B_i particija.

$\diamondsuit$

PARTICIJE BROJA

Još jednom se podsjetimo šta je to particija broja n. Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_k$ prirodni brojevi, takvi da je

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n, \text{ i } a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_2 \geqslant a_1$$

[11] Eric Temple Bell (1883-1960)

uređena k-torka $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ je **particija broja** n u k dijelova. Broj svih particija broja n se označi sa p_n, a broj particija n u k dijelova označimo sa $p_{n,k}$. Po dogovoru smatramo da je $p_0 = 1$. Evo nekoliko početnih vrijednosti niza $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ za $n \leqslant 17$:

$$1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, 77, 101, 135, 176, 231, 297, \ldots$$

Brojevi p_n rastu veoma brzo. Na primjer, zna se da je $p_{100} =$ 190 569 292, a $p_{200} =$ 3 972 999 029 388. Osim u kombinatorici, particije broja su važne i u teoriji brojeva, algebri, teoriji reprezentacija, ... U četvrtoj glavi smo vidjeli da je p_n broj klasa konjugacije u $\mathbb{S}_n$.

Brojevi $p_{n,k}$ zadovoljavaju dosta jednostavnu rekurzivnu relciju[12]

$$p_{n,k} = p_{n-1,k-1} + p_{n-k,k}.$$

Nažalost, ne postoji jednostavna rekurzivna relacija za brojeve p_n. Rekurzivna relacija kojom se p_n izrazi preko nekoliko prethodnih koristi petougle brojeve. To je još jedan od veličanstvenih rezultata Leonarda Ojlera.

Petougli brojevi su brojevi oblika $\frac{k(3k-1)}{2}$, gdje je k proizvoljan cijeli broj. Primijetimo da su ti brojevi uvijek pozitivni.
Za $k = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$ dobijamo sljedeće petougle brojeve

$$0, 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, 70, 77, 92, \ldots.$$

TEOREMA 8.5.11. *Za proizvoljan prirodan broj $n \in \mathbb{N}$, veći od jedan vrijedi*

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2} - p_{n-5} - p_{n-7} + p_{n-12} + p_{n-15} - p_{n-22} - p_{n-26} + \cdots$$

ili preciznije

$$p_n = \sum_{k=1} (-1)^{k-1} \left(p_{n - \frac{k(3k-1)}{k}} + p_{n - \frac{k(3k+1)}{2}} \right). \tag{8.11}$$

Na primjer,

$$p_{18} = p_{17} + p_{16} - p_{13} - p_{11} + p_6 + p_3 = 297 + 231 - 101 - 56 + 11 + 3 = 385.$$

Dokaz prethodne teoreme na srpskom jeziku se može pronaći u [27].

[12] Particija n u k dijelova u kojima se pojavi broj 1 ima $p_{n-1,k-1}$ (brisanje 1 daje bijekciju). Ako su svi sabirci particije n u k dijelova veći od jedan, kada se od svakog sabirka oduzme jedan, dobijemo particiju broja $n-k$ u k sabiraka.

8.6 Zadaci

1. Na koliko načina n konja u nekom derbiju može proći kroz cilj? Moguće je da nekoliko konja prođe kroz cilj istovremeno.
2. Neka je a_n broj particija n u stepene broja dva. Nađi rekurzivnu relaciju za niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Naći rješenja sljedećih rekurzivnih relacija:
   a) $2a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 15 \cdot 2^n$, uz početne uslove $a_0 = 0, a_1 = 6$.
   b) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2^n$, uz početne uslove $a_0 = 3, a_1 = 8$.
   c) $a_{n+3} - a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = 24n$ uz početne uslove $a_0 = 0, a_1 = a_2 = 2$.
   d) $3a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n = 32 \cdot 3^n + \frac{1}{3^n}$, uz početne uslove $a_0 = 4, a_1 = \frac{19}{12}$.
   e) $a_{n+1} - 5a_n = 4n^2 + 2n + 5$, uz početni uslov $a_0 = -1$.
   f) $a_{n+3} - 7a_{n+2} + 15a_{n+1} - 9a_n = n$, uz početne uslove $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -\frac{7}{4}$.
   g) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 13a_n + 10n - 12$, uz početne uslove $a_0 = 1, a_1 = 4$.
   h) $a_{n+4} = -2a_{n+2} - a_n$ uz početne uslove $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$.
4. Neka je $a_n = n - 1$ za $n = 1, 2, 3, 4$. Ako je

$$a_{2n-1} = a_{2n-2} + 2^{n-2}, a_{2n} = a_{2n-5} + 2^n \text{ za sve } n \geq 3$$

   dokaži da je

$$a_{2n} = \left[\frac{17}{7}2^{n-1}\right] - 1, \text{ odnosno } a_{2n-1} = \left[\frac{12}{7}2^{n-1}\right] - 1.$$

5. Odredi niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ako je $a_0 = 1$ i za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n = 2\sum_{k=0}^{n-1} a_k$.
6. Koliko ima nizova dužine n čiji su članovi elementi skupa $\{0, 1, 2\}$ i u kojima nikoje dvije nule nisu susjedne?
7. Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je zadan rekurzivnom formulom $a_{n+3} = a_{n+2} - 2a_{n+1} + 4a_n$, uz početne uslove $a_1 = a_2 = a_3 = 1$. Odredi sve članove tog niza koji su djeljivi sa tri!
8. Neka je $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n$, uz početni uslov $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 4$. Dokaži da su svi članovi niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ potpuni kvadrati!
9. Koliko ima nizova nula i jedinica dužine n u kojima ne postoje tri uzastopne iste cifre?
10. Svaki prirodan broj se može napisati kao zbir različitih Fibonačijevih brojeva, među kojima nema uzastopnih!

11. Koliko ima n-tocifrenih prirodnih brojeva u kojima nikoje tri susjedne cifre nisu iste?
12. Dokaži da za Fibonačijeve brojeve F_n (zadani su sa $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$) vrijedi:
    a) $\binom{n}{1}F_1 + \binom{n}{2}F_2 + \cdots + \binom{n}{n}F_n = F_{2n}$
    b) $F_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots$
    c) $F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n$
    d) za $m + n \geq 2$ je $F_{m+n} > F_m F_n$,
13. Sljedeće brojeve izraziti pomoću Fibonačijevih brojeva!
    a) Broj kompozicija n u neparne sabirke.
    b) Broj nizova $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nula i jedinica u kojima je $x_1 \geq x_2 \leq x_3 \geq x_4 \leq \cdots$.
    c) Zbir $\sum a_1 a_2 \cdots a_k$, gdje se sabira po svim 2^{n-1} kompozicija od n.
    d) Zbir $\sum (2^{a_1-1} - 1) \cdot (2^{a_2-1} - 1) \cdots (2^{a_k-1} - 1)$ u kojem se sumira po svih 2^{n-1} kompozicija broja n.
    e) Zbir $\sum 2^{|\{i : a_i = 1\}|}$ gdje se sumira po svih 2^{n-1} kompozicija od n.

14. Neka je D_n broj deranžmana u $\mathbb{S}_n$. Dokaži da vrijedi:
    a) $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$,
    b) $D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$,
    c) $D_{n+1} = (n+1)D_n + (-1)^{n+1}$.
15. Izračunaj Stirlingov broj $S(n, 3)$.
16. Dokaži da za Stirlingove brojeve $S(n, k)$ vrijede sljedeće rekurzivne relacije:
    a) $S(n+1, k+1) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} S(i, k)$,
    b) $S(n+1, k+1) = \sum_{i=k}^{n} (k+1)^{n-i} S(i, k)$,
    c) $S(m+n+1, n) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot S(m+i, i)$,
    d) $S(n, k) = \sum 1^{a_1-1} 2^{a_2-1} \cdots k^{a_k-1}$, gdje se sumira po svim kompozicijama broja n,
    e) $\binom{k+r}{k} S(n, k+r) = \sum_{i=k}^{n-r} \binom{n}{i} S(i, k) S(n-i, r)$.
17. Koliko ima nizova $a_1 a_2 \ldots, a_n$ u skupu $[k]$ u kojima se pojave svi elementi iz $[k]$, i kod kojih je prvo pojavljivanje elementa i uvijek prije elementa $i+1$ (za sve $i = 1, 2, \ldots, k-1$).
18. Dokaži da za $c(n, k)$ (Stirlingove brojeve prve vrste bez znaka) vrijede sljedeće rekurzivne relacije:

a) $c(n+1,k+1) = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} c(n,i)$
b) $c(n+1,k+1) = n! \sum_{i=k}^{n} \frac{c(i,k)}{i!}$
c) $c(m+n+1,n) = \sum_{i=0}^{n}(m+i)c(m+i,i)$
d) $\binom{l+m}{m} c(n,l+m) = \sum_{k=l}^{n} \binom{n}{k} c(k,l)c(n-k,m)$

19. Dokaži da je broj particija $[n]$ u blokove u kojima nema uzastopnih elemenata jednak Belovom broju B_{n-1}!
20. Dokaži da je Katalanov broj C_n odgovor na sljedeća pitanja!
   a) Koliko ima nizova dužine $2n$ sastavljenih od n brojeva 1 i n brojeva -1 u kojima su sve parcijalne sume nenegativne?
   b) Koliko ima nizova $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ u kojima je $a_i < i$?
   c) Na krugu je zadano $2n$ tačaka. Na koliko načina se mogu spojiti sa tetivama koje se ne sijeku?
   d) Koliko ima neuređenih parova puteva u cjelobrojnoj mreži od tačke $(0,0)$ dužine n sa koracima $(1,0)$ i $(0,1)$ koji imaju zajedničke samo početnu i krajnju tačku?
   e) Koliko ima permutacija $a_1 a_2 \ldots a_n$ u $\mathbb{S}_n$ u kojima ne postoje $i < j < k$ takvi da je $a_i > a_j > a_k$?
21. Koliko ima particija broja n u kojima su svi sabirci veći od jedan?
22. Neka je n neki prirodan broj. Koliko ima prirodnih brojeva kojima je zapis u bazi $n+1$ sastavljen od različitih cifara i u kojem se svaka cifra osim prve razlikuje za jedan od neke cifre koja je lijevo (ne nužno neposredno ispred) od nje?
23. Neka su dati prirodni brojevi m i n. Raspored n predmeta u m kutija se može interpretirati kao funkcija $f : P \to K$, gdje je P skup predmeta, a K skup kutija. Treba odrediti koliko ima svih funkcija, koliko ima injekcija, a koliko surjekcija. Pri tome, i predmeti i kutije mogu biti ili različiti ili međusobno jednaki. Dakle, na ovo pitanje treba dati 12 odgovora!
24. Izračunati zbir $\sum a_1 a_2 \cdots a_n$, gdje se sumira po svim n-torkama prirodnih brojeva takvih da je $a_1 = 1, a_{i+1} \leq a_i + 1$, za sve $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

8.7 Rješenja zadataka

1. Neka je a_n traženi broj ishoda. Ako je k konja podijelilo prvo mjesto, preostalih $n-k$ konja kroz cilj može proći na a_{n-k} načina. Stoga je

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}, \text{ uz početne uslove } a_0 = 1, a_1 = 1.$$

Tačnu vrijednost za a_n možemo izraziti pomoću Stirlingovih brojeva druge vrste $a_n = \sum_{k=1}^{n} k! S(n,k)$.

2. Prvo primijetimio da je $a_1 = 1$ i $a_n = a_{n-1}$ za sve neparne brojeve n veće od jedan. Ako se u particiji parnog broja n u stepene broja dva pojavi broj jedan, taj broj se mora pojaviti bar još jednom. Ako se broj jedan ne pojavi, dijeleći sve sabirke sa dva dobijemo particiju broja $\frac{n}{2}$. Zato, za paran n vrijedi

$$a_n = a_{n-2} + a_{\frac{n}{2}}, \text{ uz početne uslove } a_1 = 1, a_2 = 2$$

3. a) $a_n = 3 \cdot 2^n - 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.
   b) $a_n = 3 \cdot 2^n + 7n2^{n-3} + n^2 2^{n-3}$.
   c) $a_n = 2n^3 - 9n^2 + 11n - 1 + (-1)^n$.
   d) $a_n = \frac{1}{3^n} + 2(-1)^n + 3^n + \frac{n}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.
   e) $a_n = \frac{3}{4}5^n - n^2 - n - \frac{7}{4}$.
   f) $a_n = 2 - 3^n + \frac{n}{4}3^n + \frac{n(n+1)}{8}$.
   g) $a_n = (2+3i)^n + (2-3i)^n + n - 1$.
   h) $a_n = -\frac{3}{2}i^{n+1} + (-\frac{1}{2} + i)ni^n + \frac{3}{2}i(-i)^n - (\frac{1}{2} + i)n(-i)^n$.
4. Tvrđenje možemo dokazati indukcijom po n.
5. Za $n > 1$ vrijedi $a_n = 2a_{n-1} + 2(a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-2}) = 3a_{n-1}$, pa je $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.
6. Neka je a_n broj takvih nizova dužine n. Ako je posljednja cifra različita od nule, takvih nizova ima $2a_{n-1}$, a ako je posljednja cifra nula takvih nizova ima $2a_{n-2}$. Rekurzivna relacija za taj niz je $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$, uz početne uslove $a_1 = 3$, $a_2 = 8$. Rješenje ove rekurzivne relacije je

$$a_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot (1-\sqrt{3})^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot (1+\sqrt{3})^n.$$

7. $a_{n+3} = a_{n+2} - 2a_{n+1} + 4a_n$ je "modulo 3" isto što i $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$.
   Taj niz modulo tri je $1,1,1,0,2,0,2,1,0,0,1,1,2,1,1,1,0,1,\ldots$. Nakon ponavljanja tri susjedne jedinice, zaključujemo da je niz periodičan sa periodom 13. Tako su svi članovi niza koji su djeljivi sa tri $a_{13k+4}, a_{13k+6}, a_{13k+9}$, a_{13k+10}, za $k \in \mathbb{N}_0$.
8. Može se pokazati indukcijom da je $a_n = F_n^2$.

9. Broj takvih nizova označimo sa a_n. Lako se provjeri da je $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 6$. Ako se niz završava sa dva ista simbola, dobije se dopisivanjem 00 ili 11 na niz dužine $n-2$ (u zavisnosti od toga koja je cifra u tom nizu posljednja). Ako se niz dužine n završava sa dvije različite cifre, dobije se dopisivanjem 0 ili 1 na neki takav niz dužine $n-1$ Stoga je $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Stoga je $a_n = 2F_{n+1}$.
10. Indukcijom po n. Neka je $F_k \le n < F_{k+1}$. Vrijedi $n_1 = n - F_k < F_{k-1}$ (inače je $n = F_{k+1}$). Sada iskoristimo induktivnu pretpostavku za n_1.
11. Ako je a_n broj koji tražimo, vrijedi $a_{n+2} = 9a_{n+1} + 9a_n$. Početni uslovi su $a_1 = 9$ i $a_2 = 90$. Rješenje te rekurzivne relacije je

$$a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{13}}{26}\right)\left(3-\sqrt{13}\right)^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{13}}{26}\right)\left(3+\sqrt{13}\right)^n \right].$$

12. a) Iz $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$, koristeći da je $F_0 = 0$ i binomnu formulu, dobijamo da je tražena suma
$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right] =$
$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.
Tvrđenje slijedi iz $\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.
    b) Nije teško pokazati da suma binomnih koeficijenata na desnoj strani zadovoljava istu rekurzivnu relaciju i iste početne uslove kao i Fibonačijevi brojevi.
    c) Indukcijom po n. Vrijedi

$$F_{n+1}F_{n-1} - {F_n}^2 = (F_n + F_{n-1})F_{n-1} - {F_n}^2 = F_{n-1}^2 - F_n(F_n - F_{n-1}) =$$

$$= F_{n-1}^2 - F_nF_{n-2} = -(F_nF_{n-2} - {F_n}^2) = -(-1)^{n-1} = (-1)^n$$

    d) Korak indukcije: $F_{m+n} = F_{m+n-1} + F_{m+n-2} > F_mF_{n-1} + F_mF_{n-2} = F_mF_n$.
13. a) Ako je posljednji sabirak jednak jedan, obrišemo ga, a ako je veći od jedan umanjimo ga za dva. Tako je $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, uz početne uslove $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, pa je rješenje F_n.
    b) Neka je a_n traženi broj. Pretpostavimo da je n neparan. Ako je $x_n = 0$ tada je i $x_{n-1} = 0$ (jer je $x_{n-1} \le x_n$), i brisanjem te dvije posljednje nule dobijamo a_{n-2} nizova dužine n. Ako je posljednja cifra 1, njenim brisanjem se dobija a_{n-1} nizova dužine $n-1$ sa

traženim svojstvom. Na sličan način se posmatra i slučaj kada je n paran, pa se zaključi da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, uz početne uslove $a_1 = 2$, $a_2 = 3$. Traženi broj je F_{n+2}.

c) Kompoziciju broja n u k sabiraka predstavimo pomoću $k-1$ pregrada postavljenih između n tačaka. Suma na desnoj strani je broj načina kako u svakom od k blokova možemo odabrati po jednu tačku. Ako k odabranih tačaka i $k-1$ pregradu pretvorimo u jedinice, a ostale tačke u dvice dobijamo kompoziciju $2n-1$ u jedinice i dvice. Na osnovu primjera 8.5.1, traženi broj je F_{2n}.

d) Ako je $a_i > 1$ sabirak kompozicije broja n, od njega napravimo kompoziciju broja $2a_i$ u jedinice i dvice na sljedeći način. Na prvom mjestu je 1, na posljednjem je 2, a poslije svake "parne" jedinice (osim posljednje) opet dođe jedan. Poslije neparne jedinice može da piše 1 ili 2. Na primjer, ako je $a_i = 3$ kompozicije broja šest koje posmatramamo su $11112, 1122$ i 1212. Takvih kompozicija broja $2a_i$ ima $2^{a_i-1} - 1$. Na ovaj način možemo dobiti sve kompozicije broja $2n$ u 1 i 2 koje počinju sa 1 a završavaju sa 2. Ima ih F_{2n-2}.

e) U kompoziciji $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ svaku jedinicu zamijenimo sa 2 ili sa dvije jedinice $1, 1$. Ostale sabirke $a_i > 1$ zamijenimo sa nizom $1, 2, 2, \ldots, 2, 1$ (tačno $a_i - 1$ dvica). Tako smo dobili kompoziciju broja $2n$ u jedinice i dvice. Traženi broj je F_{2n+1}.

14. a) Broj permutacija u $\mathbb{S}_n$ sa tačno k fiksnih tačaka je $\binom{n}{k} D_{n-k}$.

b) Na n načina se može odabrati $i \in [n]$ u koji će se preslikati $n+1$. Ako se i element $n+1$ slika u i, brisanjem transpozicije $(i(n+1))$ dobija se deranžman iz $\mathbb{S}_{n-1}$. Ako je slika $n+1$ različita od i, uz preoznačavanje se dobije deranžman iz $\mathbb{S}_n$.

c) Može se lako dobiti iz prethodne relacije. Kombinatorni dokaz ove relacije je dosta komplikovan.

15. Od svake particije skupa $[n]$ u šest dijelova možemo napraviti šest uređenih trojki nepraznih disjunktnih podskupova od $[n]$. Postoji 3^n uređenih trojki (A, B, C) disjunktnih podskupova od $[n]$ čija je unija cijeli $[n]$. Njih $3 \cdot 2^n$ ima na nekom mjestu prazan skup, i tačno tri takve uređene trojke imaju na dva mjesta prazan skup. Tako dobijemo da je

$$S(n,3) = \frac{3^n - 3 \cdot 2^n + 3}{6} = \frac{3^{n-1} + 1}{2} - 2^{n-1}.$$

16. a) Posmatrajmo particije skupa $[n+1]$ u $k+1$ blokova u kojima je broj $n+1$ u istom bloku sa još tačno $n-i$ elemenata iz $[n]$.

Tih $n-i$ elemenata možemo odabrati na $\binom{n}{i}$ načina, a ostalih i rasporedimo u k blokova. jednakost slijedi iz principa sume.

b) Particije skupa $[n+1]$ u $k+1$ blokova (kojih ima $S(n+1,k+1)$) podijelimo u skupove X_i po sljedećem kriteriju: $\pi \in X_i$ akko restrikcija π na $[i]$ ima tačno k blokova, a restrikcija π na $[i+1]$ ima $k+1$ blokova. Ako je $\pi \in X_i$, elemente iz $[i]$ možemo rasporediti u k blokova na $S(i,k)$ načina. Element $i+1$ je u novom bloku, a ostalih $n-i$ elemenata se proizvoljno rasporedi u $k+1$ blok na $(k+1)^{n-i}$ načina.

c) Sa $i \cdot S(m+i,i)$ brojimo particije skupa $[m+n+1]$ u n blokova u kojima su elementi iz $[n-i]$ u jednočlanim blokovima, a $n-i+1$ nije. Posljednjih $m+i$ elemenata se podijeli u i blokova, a broj $n-i+1$ se "ubaci" u neki od tih novih i blokova.

d) Može se dokazati indukcijom iz osnovne rekurzivne relacije za Stirlingove brojeve.

e) Obje strane broje uređene parove (π,σ), gdje je π particija skupa $[n]$ u tačno $k+r$ blokova, a σ particija skupa blokova od π u k dijelova. U tih k blokova se može nalaziti najmanje k a najviše $n-r$ elemenata.

17. Svakom takvom nizu dodjelimo particiju $[n]$ u tačno k dijelova: u i-tom bloku su oni $j \in [n]$ za koje je $a_j = i$. Stoga je odgovor Stirlingov broj druge vrste $S(n,k)$.

18. Ove identitete dokažemo na sličan način kao i one sa Stirlingovim brojevima druge vrste.

19. Svaki blok $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ particije $[n-1]$ pretvorimo u blokove $\{a_1, a_2+1\}, \{a_2, a_3+1\}, \ldots, \{a_{k-1}, a_k+1\}$. Dvočlane blokove koji se sijeku spojimo u novi blok, a elemente iz $[n]$ koji se ne pojavljuju u ovim blokovima posmatramo kao jednočlane blokove particije $[n]$ koja ne sadrži susjedne elemente.

20. a) Ako broj 1 interpretiramo kao korak "gore", a broj -1 kao korak "desno", dobili smo bijekciju između posmatranih nizova i puteva od $(0,0)$ do (n,n) koji ne silaze ispod prave $y=x$.

b) Puteva od $(0,0)$ do (n,n) koji se nikada "ne penju" iznad prave $y=x$ takođe ima Katalanov broj. Nizu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ odgovara takav put kod kojeg se između pravih $x=i-1$ i $x=i$ nalazi $a_i - 1$ jediničnih kvadratića.

c) Od $2n$ zadanih tačaka odaberimo jednu. Krećemo iz te tačke, obilazimo kružnicu, i kada naiđemo na prvu tačku neke tetive, upišemo broj 1, a kada naiđemo na drugu tačku sa te tetive upišemo broj -1. Ovo daje bijekciju između povlačenja tetiva sa traženim svojstvom i nizova iz (a).

d) Unija ta dva puta je granica lika L u ravni između pravih $x = 0$ i $x = t$, koji je sastavljen od jediničnih kvadratića raspoređenih u t kolona. Neka je a_i broj kvadratića u i-toj koloni, i neka je b_i dužina zajedničkog presjeka i-te i $(i+1)$.-ve kolone (vrijedi $b_i \geq 1$). U nizu

$$\underbrace{1,1,\ldots,1}_{a_1},\underbrace{-1,-1\ldots,-1}_{a_1-b_1+1},\underbrace{1,1,\ldots,1}_{a_2-b_1+1}\underbrace{-1,-1,\ldots,-1}_{a_2-b_2+1}\cdots$$

$$\cdots,\underbrace{-1,-1\ldots,-1}_{a_{n-1}-b_{n-1}+1},\ \underbrace{1,1,\ldots,1}_{a_n-b_{n-1}+1}\ \underbrace{-1,-1,\ldots,-1}_{a_n}$$

se pojavi $2n$ brojeva (obim lika L). Brojevi 1 i -1 se pojave jednak broj puta, a sve parcijalne sume su nenegativne. To daje bijekciju između neuređenih parova puteva koje posmatramo i nizova iz (a).

e) Neka je $\pi = \pi_1\pi_2\ldots\pi_n \in \mathbb{S}_n$ permutacija sa traženim svojstvom. Za sve $i \in [n-1]$ definišemo $c_i = |\{j > i : \pi_i > \pi_j\}|$.
Neka je $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$ skup indeksa iz $[n-1]$ za koje je $c_{j_t} > 0$. Pomoću tih nizova definišemo put od $(0,0)$ do (n,n) koji je stalno ispod prave $y = x$:
Idemo desno od $(0,0)$ do $(c_{j_1}+j_1-1,0)$, zatim gore od $(c_{j_1}+j_1-1,0)$ do $(c_{j_1}+j_1-1,j_1)$; onda opet desno do $(c_{j_2}+j_2-1,j_1)$ pa gore do $(c_{j_2}+j_2-1,j_2)$, ... Na kraju, ako je potrebno, idemo desno od $(c_{j_k}+j_k-1,j_k)$ do (n,j_k), pa onda gore do (n,n).

21. Ako svakoj particiji broja n u kojoj se pojavi sabirak 1 tu jedinicu obrišemo, dobićemo neku particiju broja $n-1$. Stoga je odgovor $p_n - p_{n-1}$.

22. Traženi broj označimo sa a_n. Ako se u zapisu ne pojavljuje cifra n, takvih brojeva ima a_{n-1}. Ako se pojavi cifra n, taj zapis u k-tocifrenom broju je sastavljen od cifara $n, n-1, \ldots, n-k+1$. Postoji tačno $\binom{k-1}{i}$ takvih k-tocifrenih brojeva koji počinju sa $n-i$. Dakle, k-tocifrenih brojeva koji sadrže n u zapisu ima 2^{k-1} (osim za $k = n+1$, kada ih ima $2^n - 1$.). Stoga vrijedi $a_n = a_{n-1} + 2^{n+1} - 2$, odnosno $a_n = 2^{n+2} - 2n - 4$.

23.

predmeti	kutije	sve f	injekcije	surjekcije
isti	iste	$p_{n,1} + p_{n,2} + \cdots + p_{n,m}$	1	$p_{n,m}$
isti	različite	$\left(\binom{n+1}{m-1}\right)$	$\binom{m}{n}$	$\left(\binom{n-m+1}{m-1}\right)$
različiti	iste	$S(n,1) + \cdots + S(n,m)$	1	$S(n,m)$
različiti	različite	m^n	$\frac{m!}{(m-n)!}$	$m!S(n,m)$

Injekcije brojimo samo za $n \leq m$.

24. Neka je $A_{m,n} = \sum a_1 a_2 \cdots a_n$, gdje se sumira po svim n-torkama prirodnih brojeva takvih da je $a_1 = m, a_{i+1} \leq a_i + 1$, za sve $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Vrijedi

$$A_{m,n} = m \cdot \big(A_{1,n-1} + A_{2,n-1} + \cdots + A_{m+1,n-1}\big).$$

Indukcijom se može pokazati da je $A_{m,n} = (2n-1)!!\binom{m+2n-2}{2n-1}$, pa je odgovor na pitanje $(2n-1)!!$.

9

FUNKCIJE GENERATRISE

9.1 Formalni stepeni redovi i obične funkcije generatrise

Funkcije generatrise[1] ili kraće generatrise su jedan od najkorisnijih i najvažnijih objekata u enumerativnoj kombinatorici. Osnovna ideja je dosta jednostavna. Nizu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ se na prirodan način dodijeli formalni stepeni red (što je ponekad i funkcija). Na taj način se beskonačno mnogo brojeva tog niza zamijeni sa jednim objektom. Matematički aparat za rad sa funkcijama i stepenim redovima je veoma dobro razvijen, a generatrise omogućuju da se taj aparat koristi i za rješavanje problema iz kombinatorike.

DEFINICIJA 9.1.1. Neka je zadan niz kompleksnih brojeva[2] $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. **Obična funkcija generatrise** pridružena tom nizu je formalni stepeni red

$$A(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n + \cdots = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n,$$

čiji su koeficijenti članovi niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Da je $A(x)$ obična funkcija generatrise za niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ zapisaćemo kraće sa $A(x) \overset{\{ofg\}}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty$.

Dvije obične funkcije generatrise

$$A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n, B(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n x^n$$

[1] Engleski termin ”generating functions” se prevodi kao funkcije generatrise, generativne funkcije, funkcije izvodnice ...

[2] Iako smo funkcije generatrise definisali za nizove kompleksnih brojeva, svi primjeri koje ćemo posmatrati u ovoj knjizi su sa realnim nizovima.

su jednake ako su im jednaki odgovarajući koeficijenti, odnosno, kažemo da je $A(x) = B(x)$ ako i samo ako za sve $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $a_n = b_n$.

Neka je m neki prirodan broj i neka je

$$a_n = \begin{cases} \binom{m}{n}, \text{ za } n \in \mathbb{N}_0, n \leqslant m; \\ 0, \quad \text{inače.} \end{cases}$$

Tada je obična funkcija generatrise za taj niz

$$A(x) = \binom{m}{0} + \binom{m}{1} \cdot x + \cdots + \binom{m}{m} x^m = (1+x)^m.$$

Primijetimo da je obična funkcija generatrise za neki niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ polinom ako i samo ako taj niz ima samo konačno mnogo članova različitih od nule.

PRIMJEDBA 9.1.2. Za nas je formalni stepeni red $A(x)$ algebarski objekt i nije nam bitna konvergencija reda $A(x)$. Red $A(x)$ je važan samo kao objekt koji potpuno "kodira" niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Ipak, znanja o stepenim redovima iz analize mogu biti od koristi. Posmatrajmo niz u kojem je $a_n = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$. Funkcija generatrise tog niza je

$$A(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} x^n.$$

Možemo se prisjetiti da za $|x| < 1$ geometrijski red $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} x^n$ konvergira ka $\frac{1}{1-x}$, odnosno vrijedi

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots.$$

Kako su svi koeficijneti u ovom stepenom redu jednaki jedan, možemo zaključiti da je naš formalni stepeni red jednak razvoju funkcije $f(x) = \frac{1}{1-x}$ u stepeni red.

Drugim riječima, vrijedi $A(x) = \frac{1}{1-x}$.

Kao i u primjeru maloprije, kada znamo da neki stepeni red $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n x^n$ konvergira ka nekoj funkciji $f(x)$, možemo reći da je $f(x)$ funkcija generatrisa za niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Korisno se prisjetiti još nekih stepenih redova iz analize:

(i) Za sve $\alpha \in \mathbb{R}$ i za $|x| < 1$ vrijedi $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha$.

(ii) Za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

(iii) Za $|x| < 1$ je $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$.

Na osnovu prethodne primjedbe zaključujemo

$$(1+x)^\alpha \overset{\{ofg\}}{\longleftrightarrow} \{\tbinom{\alpha}{n}\}_0^\infty \ ; \ e^x \overset{\{ofg\}}{\longleftrightarrow} \{\tfrac{1}{n!}\}_0^\infty \ ; \ \ln(1+x) \overset{\{ofg\}}{\longleftrightarrow} \{\tfrac{(-1)^{n-1}}{n}\}_1^\infty.$$

Dakle, konvergencija posmatranog reda nam omogući da red zapišemo kao funkciju u "zatvorenoj" formuli. Međutim, iako konvergira samo za $x = 0$ i $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} n!x^n$ je dobro definisan stepeni red (generatrisa za broj permutacija).

Uz pretpostavku konvergencije, znamo da za redove brojeva vrijedi:

(i) $\sum_{n\geqslant 0} a_n + \sum_{n\geqslant 0} b_n = \sum_{n\geqslant 0}(a_n + b_n)$;

(ii) $k \cdot \sum_{n\geqslant 0} a_n = \sum_{n\geqslant 0} k \cdot a_n$;

(iii) $\sum_{n\geqslant 0} a_n \cdot \sum_{n\geqslant 0} b_n = \sum_{n\geqslant 0} \big(\sum_{i=0}^n a_i \cdot b_{n-i}\big)$.

I odgovarajuće operacije sa generatrisama se definišu na sličan način.

DEFINICIJA 9.1.3. Neka su redovi $A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n \cdot x^n$ i $B(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n \cdot x^n$ obične funkcije generatrise za nizove $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Tada je

$$C(x) = A(x) + B(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} (a_n + b_n)x^n$$

obična funkcija generatrise za niz $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, gdje je $c_n = a_n + b_n$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$.

Dalje, ako je k neki realan broj, tada je $D(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}_0} ka_nx^n$ obična funkcija generatrise za niz $(d_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, gdje je $d_n = k \cdot a_n$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$.

DEFINICIJA 9.1.4. Konvolucija ili **proizvod nizova** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je novi niz $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definisan sa $c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$.

Obična funkcija generatrise za konvoluciju nizova $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je **proizvod** ili **konvolucija redova** $C(x) = A(x) \cdot B(x)$:

$$C(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} c_nx^n = \sum_{n\geqslant 0} \big(a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \cdots + a_nb_0\big)x^n. \quad (9.1)$$

PRIMJEDBA 9.1.5. Skup svih formalnih stepenih redova sa koeficijentima u $\mathbb{C}$ obzirom na sabiranje i množenje se označava sa $\mathbb{C}[[x]]$. Lako je provjeriti da je $\mathbb{C}[[x]]$ prsten sa jedinicom.

Za stepeni red $A(x)$ kažemo da ima **multiplikativni inverz** (inverz obzirom na množenje) ako postoji $B(x)$ takav da je $A(x) \cdot B(x) = 1$. Uobičajeno je red $B(x)$ označiti sa $A^{-1}(x)$.

Na primjer, lako je provjeriti da je

$$(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots) = 1.$$

Tako je $1-x$ multiplikativni inverz za $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x^n$. Ovo je još jedan razlog zašto je

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots = (1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x}.$$

TEOREMA 9.1.6. *Formalni stepeni red* $A(x) = a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$ *ima multiplikativni inverz u* $\mathbb{C}[[x]]$ *ako i samo ako je* $a_0 \neq 0$.

Dokaz. Neka je $B(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_nx^n$ multiplikativni inverz za $A(x)$. Tada, na osnovu definicije množenja redova (9.1), vrijedi $a_0b_0 = 1$, pa mora biti $a_0 \neq 0$.

Sada pokažimo da je uslov $a_0 \neq 0$ dovoljan da $A(x)$ ima multiplikativni inverz. Posmatrajmo stepeni red $B(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + \cdots$, gdje su koeficijenti b_n definisani sa

$$b_0 = \frac{1}{a_0}, b_1 = -\frac{a_1b_0}{a_0}, \cdots, b_n = -\frac{a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0}{a_0}, \cdots$$

Množenjem ovih redova se provjeri da je $B(x)$ zaista multiplikativni inverz za $A(x)$.

Iz konstrukcije $B(x)$ možemo zaključiti da je multiplikativni inverz za formalni stepeni red $A(x)$ jedinstven.

□

Primjer 9.1.7. Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ niz realnih brojeva za koji vrijedi $a_0 = 1$, $a_0a_n + a_1a_{n-1} + \cdots + a_na_0 = 1$. Odrediti opšti član tog niza!

Rješenje: Posmatrajmo običnu funkciju generatrise za taj niz:

$$A(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots.$$

Iz definicije proizvoda generatrisa znamo da vrijedi

$$A(x)\cdot A(x)=\sum_{n\in\mathbb{N}_0}(a_0a_n+a_1a_{n-1}+\cdots+a_na_0)x^n=1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x}.$$

Stoga je

$$A(x)=(1-x)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n\in\mathbb{N}_0}(-1)^n\binom{\frac{-1}{2}}{n}x^n.$$

Kako je broj a_n jednak koeficijentu uz x^n, iz formule (5.4) dobijamo

$$a_n=(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}=\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}.$$

$\diamondsuit$

PRIMJEDBA 9.1.8. Neka su dati formalni stepeni redovi $A(x)=\sum_{n\in\mathbb{N}_0}a_nx^n$ i $B(x)=\sum_{n\in\mathbb{N}_0}b_nx^n$. **Kompoziciju redova** B i A je prirodno definisati kao red $B\circ A$ koji se dobije tako što u $B(x)$ umjesto x^n napišemo $A(x)^n$:

$$\begin{aligned}(B\circ A)(x)&=\textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}_0}b_n\left(A(x)\right)^n=\\&=b_0+b_1(a_0+a_1x+\cdots)+\cdots+b_n(a_0+a_1x+\cdots)^n+\cdots\end{aligned}$$

Međutim, $B\circ A$ nije dobro definisan formalni stepeni red za sve redove $A(x)$. Ako $B(x)$ nije polinom i ako je $a_0\neq 0$, pri računanju koeficijenta uz x^n u $(B\circ A)(x)$ se pojavi beskonačna suma, što u prstenu $\mathbb{C}[[x]]$ nije moguće izračunati.

Ukoliko je $a_0=0$, tada za sve $k>n$ sabirci $b_k(a_1x+a_2x^2+\cdots+)$ ne doprinose koeficijentu uz x^n. Stoga je koeficijent uz x^n u $(B\circ A)(x)$ zbir samo konačno mnogo brojeva. Dakle, kompozicija $(B\circ A)(x)$ je dobro definisana ako je $a_0=A(0)=0$ ili ako je $B(x)$ običan polinom.

Na primjer, za formalni stepeni red $A(x)=\sum_{n\in\mathbb{N}_0}a_nx^n$ vrijedi

$$1+A(x)+A^2(x)+\cdots+A^n(x)+\cdots=\frac{1}{1-A(x)}$$

ako i samo ako je $a_0=0$.
Iz analize znamo da red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{(x+1)^n}{n!}$ konvergira ka e^{x+1}, ali taj red se ne može dobiti kao kompozicija formalnih stepenih redova.

Za formalni stepeni red $B(x)$ kažemo da je **kompozicioni inverz** reda $A(x)$ ako je

$$(B\circ A)(x)=(A\circ B)(x)=x. \tag{9.2}$$

Sljedeća teorema govori o tome kada neka funkcija generatrise ima kompozicioni inverz.

TEOREMA 9.1.9. *Ako za redove $A(x)$ i $B(x)$ vrijedi (9.2) tada je $A(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots$, a $B(x) = b_1x + b_2x^2 + \cdots$. Pri tome je $a_1 \neq 0$ i $b_1 \neq 0$.*

Dokaz. Neka su posmatrani redovi $A(x) = a_mx^m + a_{m+1}x^{m+1} + \cdots$ i $B(x) = b_nx^n + b_{n+1}x^{n+1} + \cdots$.

Da bi kompozicije $A \circ B$ i $B \circ A$ bile definisane, mora da vrijedi $m, n > 0$.
Dalje, iz $(B \circ A)(x) = b_na_m^nx^{mn} + \cdots = x$ možemo zaključiti da je $m = n = 1$ i da su a_1 i b_1 različiti od nule.

□

Na sličan način kao i u teoremi 9.1.6, može se pokazati da svaka funkcija generatrise oblika $A(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots +$, gdje je $a_1 \neq 0$ ima jedinstven kompozicioni inverz. Dakle, uslov da je $a_0 = 0$ i $a_1 \neq 0$ je potreban i dovoljan da bi postojao kompozicioni inverz za $A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_nx^n$.

Jedna od prvih primjena generatrisa je u rješavanju rekurzivnih relacija. Opšta strategija u rješavanju rekurzivne relacije pomoću generatrisa je sljedeća:
Neka je zadana neka rekurzivna relacija $a_n = F(a_{n-1}, \ldots, a_{n-r})$ za niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Evo osnovnih koraka u rješavanju te relacije:

- nizu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ dodijelimo običnu funkciju generatrise $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$;
- relaciju $a_n = F(a_{n-1}, \ldots, a_{n-r})$ pomnožimo sa x^n i sumiramo po svim $n \in \mathbb{N}_0$ za koje to ima smisla;
- obje strane dobijene relacije izrazimo preko $A(x)$;
- odredimo nepoznatu funkciju $A(x)$;
- ako želimo eksplicitnu formulu za a_n, funkciju $A(x)$ razvijemo u stepeni red i "pročitamo" koeficijent uz x^n.

Primjer 9.1.10. Neka je zadan niz $a_{n+1} = 3a_n + 4$, uz početni uslov $a_0 = -1$. Koristeći funkcije generatrise nađi formulu za a_n.

Rješenje: Zadanom nizu asocirajmo običnu funkciju generatrise $A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_nx^n$. Ako relaciju $a_{n+1} = 3a_n + 4$ pomnožimo sa x^{n+1} za sve $n \in \mathbb{N}_0$, a zatim napravimo formalnu sumu, dobićemo:

$$a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots = 3x(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)+4x(1+x+x^2+\cdots).$$

Kako je $a_0 = -1$ i kako je $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$, to je

$$A(x) + 1 = 3xA(x) + \tfrac{4x}{1-x}, \text{ odnosno } A(x) = \tfrac{5x-1}{(1-x)(1-3x)}.$$

Opšti član niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ dobijemo tako što nađemo razvoj funkcije $A(x)$ u stepeni red. U tu svrhu rastavimo $A(x)$:

$$A(x) = \frac{5x-1}{(1-x)(1-3x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1-3x}.$$

Nepoznate koeficijente a i b je najlakše odrediti ako pomnožimo prethodnu relaciju sa $(1-x)$ (pa onda sa $1-3x$) i uvrstimo $x = 1$ (odnosno $x = \frac{1}{3}$). Tako dobijamo da je $a = -2$ i $b = 1$, odnosno

$$A(x) = \frac{-2}{1-x} + \frac{1}{1-3x} = -2\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x^n + \sum_{n\in\mathbb{N}_0} 3^n x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} (3^n - 2)x^n.$$

Sada zaključujemo da je $a_n = 3^n - 2$ rješenje polazne rekurzivne relacije.

$\diamondsuit$

Sada možemo dosta jednostavno riješiti rekurzivnu relaciju za Katalanove brojeve C_n.

Primjer 9.1.11. Riješiti rekurzivnu relaciju

$$C_n = C_0C_{n-1}+C_1C_{n-2}+\cdots+C_{n-1}C_0, \text{ uz početne uslove } C_0 = C_1 = 1.$$

Rješenje: Neka je

$$C(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} C_nx^n = 1+x+2x^2+5x^3+14x^4+42x^5+132x^6+429x^7+\cdots$$

obična funkcija generatrise za niz $(C_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Primijetimo da je desna strana rekurzivne relacije $C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_0$ koeficijent uz x^{n-1} u $C^2(x)$. Množenjem rekurzivne relacije iz zadatka sa x^n i sabiranjem za sve $n \in \mathbb{N}$, dobijamo da je

$$C(x) - 1 = xC^2(x), \text{ odnosno } C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Ako bismo u prethodnoj formuli za $C(x)$ ispred korijena odabrali znak $+$, dobili bismo da je $lim_{x\to 0}C(x) = +\infty$. Kako znamo da je $C(0) =$

$C_0 = 1$, u prethodnoj formuli za $C(x)$ ispred korijena biramo znak minus.

Koristeći razvoj $(1-4x)^{\frac{1}{2}}$ u red dobijamo da je

$$C_n = \text{ koef. uz } x^{n+1} \text{ u } \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} = -\frac{1}{2}\binom{\frac{1}{2}}{n+1}(-4)^{n+1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\cdots\frac{-(2n-1)}{2}\cdot\frac{(-4)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

$\diamondsuit$

U prsten formalnih stepenih redova $\mathbb{C}[[x]]$ možemo prenijeti i definiciju diferenciranja stepenih redova iz analize.

DEFINICIJA 9.1.12. Neka je $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_nx^n$ formalni stepeni red. **Formalni izvod** za taj red je

$$\frac{d}{dx}A(x) = A'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots = \sum_{n\in\mathbb{N}} na_nx^{n-1}.$$

Nije teško pokazati da za računanje ovako definisanog izvoda formalnih stepenih redova vrijede ista pravila kao i za računanje izvoda običnih funkcija:

(a) $(\lambda A(x))' = \lambda A'(x)$

(b) $(A(x) \pm B(x))' = A'(x) \pm B'(x)$

(c) $(A(x)B(x))' = A'(x)B(x) + A(x)B'(x)$

(d) $\left(A(x)B^{-1}(x)\right)' = \left(\frac{A(x)}{B(x)}\right)' = \frac{A'(x)B(x)-A(x)B'(x)}{(B(x))^2}$

Neka je $A(x)$ funkcija generatrise za niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Ako izračunamo $A'(x)$ a zatim pomnožimo sa x dobija se

$$xA'(x) = a_1x + 2a_2x^2 + \cdots + na_nx^n + \cdots .$$

Ako to uradimo još jednom, dobijamo da je

$$x(xA'(x))' = a_1x + 2^2a_2x^2 + \cdots + n^2a_nx^n + \cdots$$

Dogovorimo se da $x \cdot \frac{d}{dx}A$ kraće zapišemo kao $(xD)A$. Upravo smo pokazali da vrijedi

$$A(x) \overset{\{ofg\}}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty \Rightarrow (xD)A(x) \overset{\{ofg\}}{\longleftrightarrow} \{na_n\}_0^\infty \text{ i } (xD)^2 A(x) \overset{\{ofg\}}{\longleftrightarrow} \{n^2 a_n\}_0^\infty.$$

Na primjer, računajući

$$x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots = x(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

dobijamo da je $\frac{x}{(1-x)^2} \overset{\{ofg\}}{\longleftrightarrow} \{n\}_0^\infty$.

Iz definicija osnovnih operacija sa formalnim stepenim redovima i prethodnog razmatranja, lako dobijamo sljedeća pravila za brzo računanje nekih običnih funkcija generatrise.

PRIMJEDBA 9.1.13 (Pravila za računanje običnih funkcija generatrise). Neka je $A(x) \overset{\{ofg\}}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty$. Tada je:

pravilo 1

$$\frac{A(x) - a_0 - a_1 x - \cdots - a_{h-1}x^{h-1}}{x^h} \overset{\{ofg\}}{\longleftrightarrow} \{a_{n+h}\}_0^\infty \tag{9.3}$$

pravilo 2

$$(xD)^k A(x) \overset{\{ofg\}}{\longleftrightarrow} \{n^k a_n\}_0^\infty \tag{9.4}$$

pravilo 3

$$\frac{A(x)}{1-x} \overset{\{ofg\}}{\longleftrightarrow} \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i \right\}_0^\infty \tag{9.5}$$

pravilo 4

$$A^m(x) \overset{\{ofg\}}{\longleftrightarrow} \left\{ \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=n} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k} \right\}_0^\infty \tag{9.6}$$

Primjer 9.1.14. Naći funkciju generatrise za Fibonačijeve brojeve F_n.

Rješenje: Neka je $F(x) = \sum_{n\in N_0} F_n x^n$ generatrisa za niz $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Za sve $n \in \mathbb{N}$, rekurzivnu relaciju $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pomnožimo sa x^{n-1} i sve te jednakosti saberimo. Kako je $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$, primjenom pravila 1 (relacija (9.3)) dobijamo da je

$$\frac{F(x) - x}{x^2} = \frac{F(x)}{x} + F(x), \text{ odnosno } F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

$\diamondsuit$

Primjer 9.1.15. Naći sumu reda $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^3-2n+5}{n!}$.

Rješenje: Kako je e^x obična funkcija generatrise za niz $\frac{1}{n!}$, primjenom pravila 2 (relacija (9.4)), te sabiranjem odgovarajućih redova dobijamo da je

$$(xD)^3e^x - 2(xD)e^x + 5e^x = x^3e^x + 3x^2e^x - xe^x + 5e^x \overset{\{ofg\}}{\longleftrightarrow} \{\tfrac{n^3-2n+5}{n!}\}_0^\infty.$$

Kada u funkciju generatrise za posmatrani niz uvrstimo $x = 1$ dobijemo da je suma zadatog reda jednaka $5e$.

$\diamondsuit$

Primjer 9.1.16. Neka je $H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Brojevi H_n se nazivaju harmonijski. Naći običnu funkciju generatrise za $\{H_n\}_1^\infty$.

Rješenje: Prisjetimo se da je

$$-\ln(1-x) \overset{\{ofg\}}{\longleftrightarrow} \{\tfrac{1}{n}\}_1^\infty.$$

Prmjenom pravila 3 (formula (9.5)) dobijamo da je tražena funkcija $-\frac{\ln(1-x)}{1-x}$.

$\diamondsuit$

9.2 Eksponencijalne funkcije generatrise

U nekim slučajevima obične funkcije generatrise nisu od pomoći u pokušaju da saznamo više o nizu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Na primjer, rekurzivna relacija

$$a_{n+1} = (n+1)\left[(-1)^{n-1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - a_n\right], \text{ uz uslov } a_0 = 2 \qquad (9.7)$$

se ne može riješiti pomoću običnih funkcija generatrise.

To je jedan od razloga zašto se posmatra još jedna "vrsta" funkcija generatrise.

DEFINICIJA 9.2.1. Neka je zadan niz kompleksnih brojeva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. **Eksponencijalna funkcija generatrise** pridružena tom nizu je formalni stepeni red

$$A(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \frac{a_2}{2!} \cdot x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n!} \cdot x^n + \cdots = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

To ćemo označavati i sa $A(x) \overset{\{efg\}}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty$.

Na primjer, lako je primijetiti da je

$$e^x \overset{\{efg\}}{\longleftrightarrow} \{1\}_0^\infty \text{ , dok je } \frac{1}{1-x} \overset{\{efg\}}{\longleftrightarrow} \{n!\}_0^\infty. \tag{9.8}$$

Sada pokažimo kako možemo riješiti rekurzivnu relaciju (9.7) sa početka ovog poglavlja.

Neka je $A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{a_n}{n!}x^n$ eksponencijalna funkcija generatrise za posmatrani niz. Ako relaciju (9.7) pomnožimo sa $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$, pa dobijene jednakosti saberemo saberemo, zaključićemo da je

$$A(x) - 2 = -xA(x) - x\sum_{n\in\mathbb{N}_0}(-1)^n\tfrac{x^n}{n!} - \sum_{n\in\mathbb{N}_0}(-1)^{n+1}\tfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ako se prisjetimo da je $\sum_{n\in\mathbb{N}_0}(-1)^n\frac{x^n}{n!} = e^{-x}$, dobićemo da vrijedi

$$A(x) - 2 = -xA(x) - xe^{-x} + (1 - e^{-x}), \text{ odnosno}$$

$$A(x) = \tfrac{3}{1+x} - e^{-x} = 3\sum_{n\in\mathbb{N}_0}(-1)^n x^n - \sum_{n\in\mathbb{N}_0}(-1)^n\frac{x^n}{n!}.$$

Uporedimo li koeficijente uz x^n dobijamo

$$\frac{a_n}{n!} = 3\cdot(-1)^n - \frac{(-1)^n}{n!}, \text{ odnosno } a_n = (-1)^n(3n! - 1).$$

Eksponencijalne funkcije generatrise sabiramo i množimo na isti način kao i formalne stepene redove.

DEFINICIJA 9.2.2. Neka su dati redovi $F(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{a_n}{n!}x^n$ i $G(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{b_n}{n!}x^n$ eksponencijalne funkcije generatrise za nizove $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Tada je

$$F(x) + G(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{a_n + b_n}{n!}x^n \overset{\{efg\}}{\longleftrightarrow} \{a_n + b_n\}_0^\infty, \text{ dok je}$$

$$F(x)G(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}\frac{b_{n-k}}{(n-k)!}\right)x^n = \sum_{n\in N_0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k b_{n-k}\right)\frac{x^n}{n!}.$$

Dakle, $F(x)G(x) \overset{\{efg\}}{\longleftrightarrow} \left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k b_{n-k}\right\}_0^\infty$.

Pomalo neobičan niz $\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k b_{n-k}\right\}_0^{\infty}$ kojem je $F(x)G(x)$ eksponencijalna funkcija generatrise se prilično često pojavi u rješavanju raznih kombinatornih problema. Razlog za to treba tražiti u sljedećoj teoremi.

TEOREMA 9.2.3. *Neka je c_n broj načina da se na nekom n-članom skupu definiše neka struktura (nazovimo je crvena) i neka je b_n broj načina da se na n-članom skupu definiše neka druga, recimo bijela, struktura. Sa a_n označimo broj načina da se skup $[n]$ podijeli u dva disjunktna podskupa B i C, $B \cup C = [n]$, a zatim da se na skupu B zada bijela, a na skupu C crvena struktura. Ako su $A(x), B(x)$ i $C(x)$ eksponencijalne funkcije generatrise za nizove $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ tada vrijedi $A(x) = B(x)C(x)$*

Dokaz. Skup C sa k elemenata možemo iz $[n]$ odabrati na $\binom{n}{k}$ načina. Na svakom odabranom k-članom skupu "crvenu" strukturu možemo zadati na c_k načina."Bijelu" strukturu na $B = [n] \setminus C$ možemo zadati na b_{n-k} načina. Stoga je broj svih "crveno-bijelih" struktura a_n na skupu $[n]$ jednak

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}c_k b_{n-k}.$$

Iz definicije množenja eksponencijalnih funkcija generatrise zaključujemo da je $A(x) = B(x)C(x)$.

□

U slučaju da množimo više eksponencijalnih funkcija, lako se pokaže da vrijedi sljedeće tvrđenje.

POSLJEDICA 9.2.4. *Neka su $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_k(x)$ eksponencijalne funkcije generatrise za nizove $(f_n^1)_{n\in\mathbb{N}_0}, (f_n^2)_{n\in\mathbb{N}_0}, \ldots, (f_n^k)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Ako za sve $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi*

$$h_n = \sum_{\substack{n_1+\cdots+n_k=n \\ n_i\in\mathbb{N}_0}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} f_{n_1}^1 f_{n_2}^2 \cdots f_{n_k}^k$$

i ako je $H(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} h_n x^n$ eksponencijalna funkcija generatrise za niz $(h_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ tada je

$$H(x) = F_1(x) \cdot F_2(x) \cdots F_k(x).$$

Primjer 9.2.5. Neka je X skup sa n elemenata. Sa a_n označimo broj načina da se prvo skup X podijeli u dva disjunktna podskupa B i C, $B \cup C = X$, zatim da se odabere neki podskup iz B, i da se elementi iz C linearno urede. Odrediti eksponencijalnu funkciju generatrisa za niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Rješenje: Koristećemo oznake iz prethodne teoreme. Broj načina da se iz k-članog skupa odabere proizvoljan podskup je $b_k = 2^k$, dok je broj načina da se k-člani skup linearno uredi $c_k = k!$. Sada je tražena funkcija generatrise

$$A(x) = B(x)C(x) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{2^n}{n!} x^n\right) \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x^n\right) = \frac{e^{2x}}{1-x}.$$

$\diamondsuit$

Broj a_n iz prethodnog primjera nije teško naći i kombinatorno

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k (n-k)!.$$

U primjeru 7.2.3 smo pomoću formule uključenja-isključenja odredili broj deranžmana. Pogledajmo kako se to može uraditi na još jedan način.

Primjer 9.2.6. Odrediti broj deranžmana D_n pomoću eksponencijalnih generatrisa.

Rješenje: Neka je $D(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{D_n}{n!} x^n$ eksponencijalna funkcija generatrise za niz $(D_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Primijetimo da je broj permutacija u $\mathbb{S}_n$ sa tačno k fiksnih tačaka jednak $\binom{n}{k} D_{n-k}$.

Na osnovu principa sume vrijedi $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$. Dakle, eksponencijalna generatrisa za niz čiji je opšti član $n!$ je jednaka proizvodu generatrisa čiji su opšti članovi D_n i 1. Iz relacija (9.8) dobijamo

$$\frac{1}{1-x} = e^x D(x), \text{ odnosno } D(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

Tako je broj deranžmana D_n jednak koeficijentu uz $\frac{x^n}{n!}$ u razvoju $\frac{e^{-x}}{1-x}$, odnosno

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Na sličan način možemo dati i kombinatornu interpretaciju za proizvod običnih funkcija generatrise.

PRIMJEDBA 9.2.7. Neka je c_n broj načina kako se može na nekom linearno uređenom skupu od n elemenata može definisati neka struktura (recimo crvena) i neka je b_n broj načina da se na n-članom linearno uređenom skupu definiše neka druga (bijela) struktura.

Sa a_n označimo broj načina da se linearno uređen skup $([n], <)$ podijeli u dva disjunktna (ne nužno neprazna) podskupa C i B, $C \cup B = [n]$, tako da je svaki element iz C manji od svih elemenata iz B, a zatim se na skupu C zada crvena struktura, a na skupu B bijela. Očigledno je

$$a_n = b_n c_0 + b_{n-1} c_1 + b_{n-2} c_2 + \cdots + b_k c_{n-k} + \cdots + b_0 c_n$$

Ako su $A(x), B(x)$ i $C(x)$ obične funkcije generatrise za nizove $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ iz relacije (9.1) znamo da vrijedi $A(x) = B(x)C(x)$.

Prethodno razmatranje nam može pomoći u odluci koju vrstu funkcije generatrisa upotrijebiti u konkretnom problemu.

Primjer 9.2.8. Student treba da napiše seminarski rad na tačno n stranica. Na svakoj stranici može da bude samo tekst ili samo slika. Rad može da bude podijeljen u nekoliko poglavlja, ali u svakom poglavlju mora da bude i slika i tekst. Na koliko načina student može aranžirati slike i tekst u poglavlja tako da ispuni postavljene uslove?

Rješenje: Neka je a_n traženi broj načina na koji student može napisati rad i neka je $A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$. Smatramo da je $a_0 = 1$ (postoji jedan način da student napiše seminarski rad sa nula stranica).

Jedno poglavlje sa m strana može se napisati na $b_m = 2^m - 2$ načina (treba odabrati neprazan podskup različit od $[m]$ za slike, ostalo je tekst). Možemo smatrati da je $b_0 = 0$. Neka je $B(x)$ obična funkcija generatrise za niz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, odnosno

$$B(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (2^n - 2)x^n = \frac{2x}{1-2x} - \frac{2x}{1-x} = \frac{2x^2}{(1-2x)(1-x)}$$

Na osnovu primjedbe 9.2.7 zaključićemo da je broj načina da se rad napiše u tačno k poglavlja jednak koeficijentu uz x^n u $B^k(x)$. Kako je studentu dozvoljeno da sam odabere koliko poglavlja ima njegov rad, vrijedi

$$A(x) = 1 + B(x) + B^2(x) + \cdots + B^k(x) + \cdots = \frac{1}{1 - B(x)}.$$

Kompozicija funkcija je dobro definisana jer je $b_0 = 0$. Sada je

$$A(x) = \frac{1}{1 - \frac{2x^2}{(1-x)(1-2x)}} = \frac{(1-2x)(1-x)}{1-3x} =$$

$$= \frac{2x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}x + \frac{7}{9} + \frac{2}{9}}{1-3x} = \frac{7}{9} - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}\sum_{n\in\mathbb{N}_0} 3^n x^n$$

Tako smo dobili da je za $n > 1$ broj traženih načina jednak $a_n = 2\cdot 3^{n-2}$.

$\diamondsuit$

Pokušajte naći kombinatorni dokaz da je $2\cdot 3^{n-2}$ rješenje ovog problema.

I za eksponencijalne funkcije generatrisa su definisani formalni izvodi. Ako je $A(x) \overset{\{efg\}}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty$, računajući formalni izvod stepenog reda $A(x)$ dobijamo

$$\frac{d}{dx}A(x) = A'(x) = a_1 + a_2x + \frac{a_3}{2}x^3 + \cdots + \frac{a_n}{(n-1)!}x^n + \cdots = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{a_{n+1}}{n!}x^n.$$

Tako smo dobili da je

$$A'(x) \overset{\{efg\}}{\longleftrightarrow} \{a_{n+1}\}_0^\infty, \text{ odnosno } A^{(k)}(x) \overset{\{efg\}}{\longleftrightarrow} \{a_{n+k}\}_0^\infty.$$

Ako je $A(x) \overset{\{efg\}}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty$, slično kao i u pravilu 2 za računanje sa običnim funkcijama generatrisa (vidi formulu (9.4)), može se pokazati da je tada $xA'(x) \overset{\{efg\}}{\longleftrightarrow} \{na_n\}_0^\infty$.

Računanje izvoda, pa onda množenje sa x označimo sa xD. Ako to primjenimo k puta na $A(x)$ dobićemo da je $(xD)^k A(x) \overset{\{efg\}}{\longleftrightarrow} \{n^k a_n\}_0^\infty$.

Primjer 9.2.9. Naći eksponencijalnu funkciju generatrise za Belove brojeve.

Rješenje: Pokazali smo da Belovi brojevi zadovoljavaju sljedeću rekurzivnu relaciju

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}\ , \text{ uz početni uslov } B_0 = 1.$$

Neka je $B(x) \overset{\{efg\}}{\longleftrightarrow} \{B_n\}_0^\infty$. Množenjem rekurzivne relacije sa $\frac{x^n}{n!}$ i sumiranjem po svim $n \in \mathbb{N}_0$, dobijamo

$$B'(x) = e^x \cdot B(x), \text{ odnosno } \ln B(x) = e^x \text{ i na kraju } B(x) = ce^{e^x}.$$

Iz uslova $B(0) = B_0 = 1$ dobijamo $c = e^{-1}$ pa je tražena eksponencijalna funkcija generatrise za Belove brojeve $B(x) = e^{e^x - 1}$.

$\diamondsuit$

9.3 Neke primjene funkcija generatrise

U dokazivanju identiteta sa binomnim koeficijantima smo već koristili činjenicu da su dva polinoma jednaka ako i samo ako imaju jednake odgovarajuće koeficijente.
Vidjeli smo da isto tvrđenje vrijedi i za formalne stepene redove.

Neka su koeficijenti $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ neke funkcije generatrise $A(X)$ rješenja nekog kombinatornog problema. Ako na neki način (manipulišući sa stepenim redovima) pokažemo da je $A(x) = B(x)$, tada su i koeficijenti $B(x)$ rješenja istog problema. Ukoliko znamo odrediti koeficijente u $B(x)$, naš zadatak je riješen.

PRIMJEDBA 9.3.1. Posmatrajmo formalni stepeni red

$$A(x) = (x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots)^k = \sum_{a_i\in\mathbb{N}} x^{a_1+a_2+\cdots+a_k} = \sum_{a_1+\cdots+a_k=n} x^n.$$

Primijetimo da se u prethodnoj sumi x^n pojavi onoliko puta koliko ima načina da se n napiše kao zbir k prirodnih brojeva. Drugim riječima, koeficijent uz x^n u $A(x)$ je baš broj kompozicija n u tačno k sabiraka. Kako je

$$(x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots)^k = x^k(1-x)^{-k},$$

taj broj je jednak koeficijentu uz x^{n-k} u $(1-x)^{-k}$. Dakle, na još jedan način smo pokazali da je broj kompozicija n u k sabiraka jednak

$$(-1)^{n-k}\binom{-k}{n-k} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Primjer 9.3.2. Na koliko načina se može 54 jabuke podijeliti Ivanu, Jovanu, Goranu i Zoranu tako da:

- Ivan i Jovan dobiju isti broj jabuka,
- Goran dobije bar šest jabuka,
- Zoran dobije neparan broj jabuka,
- sve jabuke su raspoređene.

Rješenje: Neka Ivan i Jovan dobiju po k jabuka. Broj jabuka koji njih dvojica zajedno dobiju možemo poistovjetiti sa izborom x^{2k} iz $(1+x^2+x^4+\cdots x^{2n}+\cdots)$. Dalje, broj jabuka koje dobije Goran poistovjetimo sa izborom odgovarajućeg stepena x iz $(x^6+x^7+\cdots+x^n+\cdots)$, a broj jabuka koje treba da dobije Zoran sa izborom odgovarajućeg stepena x iz $(x+x^3+x^5+\cdots x^{2n+1}+\cdots)$. Traženi broj podjela koji ispunjavaju postavljene uslove sada prepoznamo kao koeficijent uz x^{54} u razvoju

$$(1+x^2+x^4+\cdots x^{2n}+\cdots)(x^6+x^7+\cdots+x^n+\cdots)(x+x^3+x^5+\cdots)=$$

$$x^7\cdot(1+x+x^2+\cdots x^n+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots x^{2n}+\cdots)^2=\frac{x^7}{(1-x)(1-x^2)^2}.$$

Da bismo riješili zadatak, treba odrediti koeficijent uz x^{47} u razvoju $(1-x)^{-1}(1-x^2)^{-2}$.
Ako smo u razvoju $(1-x^2)^{-2}$ odabrali $\binom{-2}{j}(-x)^{2j}$, tada iz $(1-x)^{-1}$ trebamo odabrati $\binom{-1}{47-2j}(-x)^{47-2j}$.

Tako je rješenje zadatka

$$\sum_{j=0}^{23}\binom{-1}{47-2j}(-1)^{47-2j}\binom{-2}{j}(-1)^{2j}=1+2+\cdots+24=300.$$

$\diamondsuit$

Primjer 9.3.3. Na koliko načina Ana, Ena, Ema i Una mogu podijeliti među sobom 12 jabuka i 16 jagoda tako da Ana dobije bar tri jagode i bar jednu jabuku, a da ostale tri djevojčice dobiju bar dvije jabuke i najviše pet jagoda? Sve voće mora biti raspoređeno!

Rješenje: Traženi broj načina za podjelu jabuka je koeficijent uz x^{12} u $(x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)(x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots)^3=\frac{x^7}{(1-x)^4}$ što je $\binom{-4}{5}(-1)^5=\binom{8}{5}$.
Broj podjela jagoda koji ispunjava postavljene uslove je koeficijent uz x^{16} u

$$(x^3+x^4+\cdots+x^n+\cdots)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^3=\frac{x^3}{(1-x)}\cdot\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^3.$$

Uz malo računanja dobijamo da je taj koeficijent

$$(-1)^{13}\binom{-4}{13}-3(-1)^{7}\binom{-4}{7}+3(-1)^{5}\binom{-4}{1}=\binom{16}{3}-3\cdot\binom{10}{7}+3\cdot\binom{4}{1}.$$

Tako smo dobili da je traženi broj podjela jednak

$$\binom{8}{5}\cdot\left[\binom{16}{3}-3\cdot\binom{10}{7}+3\cdot\binom{4}{1}\right]=6880.$$

♢

Ako je u raspodjeli važan i raspored, a ne samo broj dobijenih predmeta, tada je korisno posmatrati eksponencijalne funkcije generatrisa.

Koeficijent uz $\frac{x^n}{n!}$ u razvoju $e^{kx}=(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots)^k$ je jednak $\sum\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k}$, gdje sumiramo po svim slabim kompozicijama n u k dijelova.

Kako je $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k}$ tačno broj permutacija multiskupa $\{1^{n_1},2^{n_2},\ldots,k^{n_k}\}$, našli smo kombinatornu interpretaciju za koeficijente u razvoju e^{kx}.

Primjer 9.3.4. Na brodu se nalazi po dvanaest jednakih crvenih, bijelih, plavih i zelenih zastavica. Na signalni jarbol se može postaviti njih dvanaest tako da se pošalje signal ostalim brodovima. Na koliko načina se to može uraditi ako je broj upotrebljenih plavih zastavica neparan a broj zelenih paran?

Zadatak riješiti pomoću funkcija generatrise.

Rješenje: Traženi broj možemo interpretirati kao koeficijent uz $\frac{x^{12}}{12!}$ u

$$\underbrace{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2}_{\text{crvene i bijele zastavice}}\underbrace{\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)}_{\text{plave zastavice}}\underbrace{\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)}_{\text{zelene zastavice}}.$$

Ako se prisjetimo da je

$$1+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\, x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\frac{e^x-e^{-x}}{2},$$

rješenje je koeficijent uz $\frac{x^{12}}{12!}$ u razvoju $e^{2x}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{1}{4}(e^{4x}-1)$.

Lako je izračunati da je to 4^{11}. Pokušajte naći kombinatorno rješenje ovog zadatka.

♢

Kada smo u prethodnoj glavi govorili o particijama brojeva, rekli smo da ne postoji egzaktna formula za p_n. Vidjeli smo da je čak i rekurzivna relacija za niz $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ veoma komplikovana. Međutim, nije teško naći funkciju generatrisa za taj niz.

TEOREMA 9.3.5. *Za sve $n \in \mathbb{N}_0$ neka p_n označva broj particija broja n. Obična funkcija generatrise za niz $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je*

$$\prod_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{1-x^k} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} p_n x^n.$$

Dokaz. Primijetimo da je proizvod

$$\prod_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{1-x^k} = (1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)\cdots(1+x^k+x^{2k}+\cdots)\cdots$$

dobro definisan u prstenu formalnih stepenih redova. Bez obzira što je riječ o proizvodu beskonačno stepenih redova, da bismo za neki fiksan $n \in \mathbb{N}_0$ odredili koeficijent uz x^n, dovoljno je posmatrati samo prvih n zagrada.

Tvrđenje teoreme će biti dokazano tako što ćemo se uvjeriti da je koeficijent uz x^n u tom proizvodu jednak p_n. Neka je $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ proizvoljna particija broja n u kojoj se broj 1 pojavi tačno f_1 put, broj 2 tačno f_2 puta, ...

Tu particiju možemo zapisati sa $\lambda = (1^{f_1}, 2^{f_2}, \ldots, r^{f_r})$. Brojeve koji se ne pojavljuju (one i kod kojih je $f_i = 0$) možemo izostaviti iz zapisa. Primijetimo da vrijedi

$$f_1 \cdot 1 + f_2 \cdot 2 + \cdots + f_r \cdot r = n.$$

Za tu particiju λ uočimo sabirak u razvoju $\prod_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{1-x^k}$ u kojem

- iz prve zagrade $(1 + x + x^2 + \cdots)$ odaberemo monom x^{f_1},
- iz druge zagrade $(1 + x^2 + x^4 + \cdots)$ odaberemo monom $x^{2\cdot f_2}$,
- $\vdots$
- iz r-te zagrade $(1 + x^k + x^{2k} + \cdots)$ odaberemo monom $x^{r\cdot f_r}$.

Množenjem odabranih monoma dobijamo

$$x^{f_1} \cdot x^{2\cdot f_2} \cdots x^{k\cdot f_k} = x^{f_1+2\cdot f_2+\cdots+k\cdot f_k} = x^n.$$

Dakle, za svaku particiju broja n se dobije jedan x^n u razvoju $\prod_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{1-x^k}$.

Sa druge strane, ako želimo izračunati razvoj $\prod_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{1-x^k}$, tada iz prve zagrade odaberemo x^{a_1}, iz druge $x^{2\cdot a_2}$, ..., iz k-te zagrade odaberemo $x^{k\cdot a_k}$, ... Iz konačno zagrada biramo x^m, $m > 0$, iz preostalih biramo 1. Primijetimo da je $x^{a_1} \cdot x^{2\cdot a_2} \cdots x^{r\cdot a_r} = x^n$ ako i samo ako je $(1^{a_1}, 2^{a_2}, \ldots, r^{a_r})$ particija broja n.

Tako je koeficijent uz x^n u posmatranom stepenom redu jednak baš broju particija broja n, čime je dokazano da je $\prod_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{1-x^k}$ obična funkcija generatrise za niz $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

□

Neka je d_n broj particija broja n u različite brojeve, a o_n broj particija n u neparne brojeve. Na primjer, za broj sedam takve particije su

$$\begin{array}{lcr}
7 & = & 7 \\
6+1 & = & 5+1+1 \\
5+2 & = & 3+3+1 \\
4+3 & = & 3+1+1+1+1 \\
4+2+1 & = & 1+1+1+1+1+1+1 \\
\text{particije u različite} & & \text{particije u neparne}
\end{array}$$

Tako je $d_7 = o_7 = 5$. To nije slučajno. Jedna od prvih primjena funkcija generatrise u proučavanju particija je sljedeća teorema:

TEOREMA 9.3.6 (L. Ojler). *Broj particija n u neparne dijelove je jednak broju particija n u različite dijelove.*

Dokaz. Na isti način kao u teoremi 9.3.5 možemo izračunati obične funkcije generatrisa za nizove $(o_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(d_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

$$O(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} o_n x^n = (1+x+x^2+\cdots)(1+x^3+x^5+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)\cdots$$

odnosno $O(x) = \prod_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{1-x^{2i+1}}$.

Dalje, primijetimo da je

$$D(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} d_n x^n = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots = \prod_{i\in\mathbb{N}} (1+x^i).$$

Kako za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $1 + x^n = \frac{1-x^{2n}}{1-x^n}$ to je

$$D(x) = \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^8}{1-x^4} \cdots = \text{ nakon skraćivanja } = O(x).$$

□

Kada neku teoremu u kombinatorici dokažemo primjenom nekih drugih metoda i tehnika, uvijek je zanimljivo pitanje da li postoji i kombinatorni dokaz te teoreme.

Sljedeća bijekcija između particija broja n u neparne sabirke i particija broja n u različite sabirke je u [9] pripisana Silvesteru[3].
Koristi se činjenica da se svaki prirodan broj može na jedinstven način napisati kao zbir različitih stepena broja 2. Na primjer,

$$\begin{aligned} 2010 &= 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 16 + 8 + 2 = \\ &= 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^1 \end{aligned} .$$

Neka je $\lambda = (1^{f_1}, 3^{f_3}, \ldots, r^{f_r})$ particija broja n u neparne sabirke. Ako svaki od f_i napišemo kao zbir različitih stepena broja 2, iz

$$n = f_1 \cdot 1 + f_3 \cdot 3 + \cdots + f_r \cdot r$$

dobićemo n napisan kao zbir različitih sabiraka.

Inverz ovog preslikavanja možemo opisati sljedećom konstrukcijom. Neka je $n = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k$ particija broja n u različite sabirke. Grupišimo sabirke broja n u grupe, tako da svi sabirci u istoj grupi imaju isti najveći neparan djelitelj.
Ti djelitelji su sabirci u particiji n u neparne dijelove.

Pokažimo ovu konstrukciju na jednom primjeru. Particija broja 242 u neparne dijelove je $\lambda = (21^5, 11^9, 5^6, 3^4, 1^6)$. Na opisan način dobijemo

$$252 = (4+1) \cdot 21 + (8+1) \cdot 11 + (4+2) \cdot 5 + 4 \cdot 3 + (4+2) \cdot 1 =$$

$$= 88 + 84 + 21 + 20 + 12 + 11 + 10 + 4 + 2.$$

Za particiju $\mu = (88, 84, 21, 20, 12, 11, 10, 4, 2)$ broja n u različite dijelove, računamo

$$252 = (84{+}21){+}(88{+}11){+}(20{+}10){+}12{+}(4{+}2) = 5{\cdot}21{+}9{\cdot}11{+}6{\cdot}5{+}4{\cdot}3{+}6{\cdot}1.$$

Ovo je kombinatorni dokaz da je $o_n = d_n$.

Još mnogo različitih rezultata o particijama brojeva se može dokazati pomoću funkcija generatrise. Rekurzivna relacija (8.11) za particije broja n se dobije tako što se primijeti da se u razvoju $\prod_{n \in \mathbb{N}} (1 - x^n)$ (to

[3] James Joseph Sylvester (1814 - 1897)

je multiplikativni inverz za funkciju generatrisa niza $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$) pojavi x^n ako i samo ako je n pentagonalni broj.

Rodžers[4]-Ramanudžanovi[5] identiteti su među najpoznatijim i najzanimljivijim rezultatima o particijama brojeva.

TEOREMA 9.3.7 (prvi Rodžers-Ramanudžanov identitet). *Neka je f_n broj particija broja n u kojima se sabirci razlikuju bar za dva, a neka je g_n broj particija broja n u sabirke oblika $5k+1$ i $5k+4$. Za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $f_n = g_n$.*

TEOREMA 9.3.8 (drugi Rodžers-Ramanudžanov identitet). *Neka je u_n broj particija broja n u kojima se sabirci razlikuju bar za dva, i jedinica nije sabirak. Dalje, neka je v_n broj particija broja n u sabirke oblika $5k+2$ i $5k+3$. Za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $u_n = v_n$.*

Dugo vremena je tražen kombinatorni dokaz ovih identiteta. Pronašli su ga 1980. godine Garsia[6] i Milne[7] (vidjeti [15]), ali je dosta komplikovan.

9.4 Zadaci

1. Ako su $F(x)$ i $E(x)$ obična i eksponencijalna funkcija generatrise za niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ odredi običnu i eksponencijalnu funkciju generatrisa za sljedeće nizove:
   a) $(\lambda a_n + c)_{n\in\mathbb{N}_0}$ za $\lambda, c \in \mathbb{R}$.
   b) $(na_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$
   c) $0, 0, 1, a_3, a_4, \ldots,$
   d) $a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, \ldots$
   e) $(a_{n+m})_{n\in\mathbb{N}_0}$ za neki fiksan $m \in \mathbb{N}$
   f) $(a_{n+2} - 3a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$
2. Neka su A i B neki realni brojevi. Pomoću funkcija generatrise, nađi rješenje rekurzivne relacije $a_n = A \cdot a_{n-1} + B^n$ uz početni uslov $a_0 = 1$!
3. Nađi običnu funkciju generatrisa za sljedeće nizove:
   a) $a_n = \binom{2n}{n}, n \in \mathbb{N}_0$
   b) $a_n = \binom{2n+1}{n}, n \in \mathbb{N}_0$

[4] Leonard James Rogers (1862-1933)
[5] Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887-1920)
[6] Adriano Garsia (1928-)
[7] Stephen Milne ()

c) $a_n = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, n \in \mathbb{N}_0$

4. Na koliko načina se može iz velikog skladišta crvenih, plavih i bijelih lopti odabrati 10 lopti tako da:
   a) plavih lopti ima paran broj,
   b) odabrane su najviše dvije crvene lopte,
   c) postoje bar dvije lopte svake boje?
   Zadatak riješiti pomoću funkcija generatrise!
5. Pomoću funkcija generatrise riješi rekurzivnu relaciju $a_{n+1} = a_n + n^2$, uz početni uslov $a_0 = 1$.
6. Neka je a_n broj particija broja n u tačno tri sabirka. Nađi običnu funkciju generatrisa za $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. Naći funkciju generatrisa za niz zadan rekurzivno:
   $a_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$, $a_0 = 1$.
8. U novčaniku imamo 7 novčanica od jedne marke, 5 novčanica od dvije marke, 4 novčanice od pet maraka, šest novčanivca od deset maraka i tri novčanice od dvadeset maraka. Novčanice iste vrijednosti smatramo istim. Neka je a_n broj načina kako možemo platiti račun od n maraka. Napiši funkciju generatrisa za taj niz.
9. Niz a_n je zadan rekurzivno:
$$a_0 = 1, a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a_k \text{ za } n > 0.$$
   Naći eksponencijalnu funkciju generatrisa tog niza.
10. Pomoću eksponencijalne funkcija generatrise riješi rekurzivnu relaciju $a_{n+1} = a_n + na_{n-1}$, uz početni uslov $a_0 = a_1 = 1$.
11. Naći običnu funkciju generatrisa za niz $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} + n2^n$, uz uslove $a_0 = 1$ i $a_1 = 2$.
12. Naći eksponencijalnu funkciju generatrisa za broj riječi dužine n iz multiskupa $\{A^\infty, B^\infty, C^2\}$ u kojima je broj slova B paran i u kojima je bar dva slova A.
13. Niz je zadan rekurzivnom formulom $(n+2)a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, uz početne uslove $a_0 = a_1 = 1$. Nađi običnu funkciju generatrisa za taj niz!
14. Neka je $a_{n+1} = a_n - 2na_{n-1}$, za sve $n \geq 0$, uz $a_0 = 1, a_{-1} = 0$. Nađi eksponencijalnu funkciju generatrisa za taj niz.
15. Pomoću eksponencijalne funkcije generatrisa riješi rekurzivne relacije:
    a) $a_{n+1} = 3na_n + n!$, uz početni uslov $a_0 = 0$.
    b) $b_{n+1} = nb_n + 3^n n!$, uz početni uslov $b_0 = 0$.

16. Neka je s_n broj nizova $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ u kojima je $1 \le x_i \le n$ za sve $i = 1, 2, \dots, n$, i $x_{i+1} \ge 2x_i$ za $i = 1, 2, \dots, k-1$. Dužina niza nije određena. Kako je dozvoljen i prazan niz, vrijedi $s_0 = 1$. Ako je $S(x)$ obična funkcija generatrise za niz s_n dokaži da je $(1-x)S(x) = (1+x)S(x^2)$.
17. Neka je n paran broj, i neka je e_n broj permutacija u kojma su svi ciklusi parni, a o_n broj permutacija u $\mathbb{S}_n$ u kojima su svi ciklusi neparni. Koristeći eksponencijalne funkcije generatrisa dokaži da za sve parne n vrijedi $e_n = o_n$.
18. Neka je $f(m,n)$ broj puteva u koordinatnoj mreži od $(0,0)$ do (m,n) sa koracima $(0,1), (1,0)$ i $(1,1)$. Nađi $\sum_{n\ge 0}\sum_{m\ge 0} f(m,n)x^m y^n$. Nađi formulu za $\sum_{n\ge 0} f(n,n)x^n$.
19. Neka je k neki prirodan broj. Nađi zatvorenu formulu za $S_k(x) = \sum_{n\ge k} S(n,k)x^n$. Pomoću te formule dokaži da je
$$S(n,k) \equiv \binom{n - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1}{n-k} (\text{mod } 2).$$
20. Neka su $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ i $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ dva različita skupa prirodnih brojeva. Ako je skup svih $\binom{n}{2}$ suma oblika $a_i + a_j$, za $1 \le i < j \le n$ isti kao skup takvih suma elemenata iz skupa B dokaži da je n stepen broja 2.

9.5 Rješenja zadataka

1. a) $\lambda F(x) + \frac{c}{1-x}$, $\lambda E(x) + ce^x$

   b) $xF'(x)$, $xE'(x)$

   c) $F(x) - a_0 - a_1x - (a_2 - 1)x^2$, $E(x) - a_0 - a_1 x - \frac{x^2}{2}(a_2 - 1)$

   d) $\frac{F(x)+F(-x)}{2}$, $\frac{E(x)+E(-x)}{2}$

   e) $\frac{F(x)-\sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i}{x^m}$, $D^m E(x)$

   f) $\frac{F(x)-a_0-a_1x}{x^2} - 3\frac{F(x)-a_0}{x} - F(x)$, $E''(x) - 3E'(x) - E(x)$

2. Funkcija generatrise za niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je
$$A(x) = \frac{1}{(1-Ax)(1-Bx)} = \frac{1}{A-B}\left(\frac{A}{1-Ax} - \frac{B}{1-Bx}\right),$$
pa je $a_n = \frac{A^{n+1}-B^{n+1}}{A-B}$.

3. a) $A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$
   b) $B(x) = \frac{1}{2x}(A(x) - 1) = \frac{1-4x-\sqrt{1-4x}}{-2x+8x^2}$
   c) $C(x) = A(x^2) + \frac{1}{2x}(A(x^2) - 1) = \frac{1-2x-\sqrt{1-4x^2}}{-2x+4x^2}$
4. a) 36
   b) 30
   c) 15
5. Obična funkcija generatrise je$A(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{x^2+x^3}{(1-x)^4}$, a opšti član niza je $a_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$.
6. $\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$.
7. $\frac{1-x}{1-2x}$.
8. $\frac{1-x^8}{1-x}\frac{1-x^{12}}{1-x^2}\frac{1-x^{25}}{1-x^5}\frac{1-x^{70}}{1-x^{10}}\frac{1-x^{80}}{1-x^{20}}$.
9. Eksponencijalna funkcija generatrise niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je $A(x) = \frac{1}{2-e^x}$.
10. Ako je $A(x)$ eksponencijalna funkcija generatrise za posmatrani niz, vrijedi $A''(x) = (1 + x)A'(x) + A(x)$. Kada riješimo diferencijalnu jednačinu, dobijemo da je $A(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}}$. Koeficijent uz $\frac{x^n}{n!}$ u razvoju $e^{x+\frac{x^2}{2}}$ u red je $a_n = \sum_{i\geq 0} \binom{n}{2j} \frac{(2j)!}{2^j j!}$ (vidi i primjer 8.1.2).
11. $\frac{1-4x+12x^2-8x^3}{(1-2x)^2(1-2x-2x^2)}$.
12. $\frac{x^2+2x+2}{4}\left(e^x - (1 + x)\right)\left(e^x + e^{-x}\right)$.
13. Iz rekurzivne relacije za niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ dobijamo da za funkciju generatrisa $A(x)$ vrijedi $\frac{A'(x)}{A(x)} = 1 + x$, pa je $A(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}}$.
14. $A(x) = e^{x-x^2}$.
15. $a_n = b_n = \frac{1}{2}(n - 1)!(3^n - 1)$.
16. Niz s_n zadovoljava sljedeću rekurzivnu relaciju: $s_n = s_{n-1} + s_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, uz početni uslov $s_0 = 1$.
17. Označimo sa $O(x)$, $E(x)$ i $R(x)$ eksponencijalne funkcije generatrisa za brojeve o_n, e_n i r_n (pri čemu je $r_n = n!$ za paran n a nula za neparne). Može se pokazati da je $R(x) = E(x)O(x)$.
    Kako je
    $$R(x) = \frac{1}{1 - x^2} \text{ i } O(x) = \sum_{m\in\mathbb{N}_0} \frac{((2m - 1)!!)^2}{(2m)!} x^{2m} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$
    (vidjeti zadatke 21 i 22 u četvrtoj glavi), dobijemo $E(x) = O(x)$.

18. $\sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} f(m,n)x^m y^n = \dfrac{1}{1-x-y-xy}$.

$f(n,n) = \sum_k \binom{n+k}{n-k,k,k} = \sum_k \binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}$, pa je

$\sum_n f(n,n)x^n = \sum_k \binom{2k}{k} \sum_n \binom{n+k}{2k} x^n =$

$= \sum_k \binom{2k}{k} \dfrac{x^k}{(1-x)^{2k+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-6x+x^2}}$.

19. Iz rekurzivne relacije za brojeve $S(n,k)$ dobijemo da vrijedi $S_k(x) = \frac{x}{1-kx}S_{k-1}$. Indukcijom po k dobijemo

$$S_k(x) = \sum_{n\geq 0} S(n,k)x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}.$$

Iz prethodne formule je

$$\sum_{n\geq 0} S(n,k)x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} (\mathrm{mod}\ 2),$$

pa slijedi drugo tvrđenje.

20. Posmatrajmo $A(x) = x^{a_1} + x^{a_2} + \cdots + x^{a_n}$ i $B(x) = x^{b_1} + x^{b_2} + \cdots + x^{b_n}$. Iz uslova zadatka znamo da je $A^2(x) - A(x^2) = B^2(x) - B(x^2)$. Kako su A i B različiti skupovi vrijedi

$$A(x) + B(x) = \frac{A^2(x) - B^2(x)}{A(x) - B(x)} = \frac{A(x^2) - B(x^2)}{A(x) - B(x)}.$$

Iz $A(1) = B(1) = n$ dobijamo da je $A(x) - B(x)$ polinom po x djeljiv sa $x-1$. Neka je $A(x) - B(x) = (x-1)^k f(x)$, gdje je $f(1) \neq 0$. Sada je

$$A(x) + B(x) = \frac{(x^2-1)^k f(x^2)}{(x-1)^k f(x)} = \frac{(1+x)^k f(x^2)}{f(x)}, \text{ odnosno}$$

$$A(1) + B(1) = 2n = 2^k.$$

10

ODABRANE TEME

10.1 Eksponencijalna i kompoziciona formula

Herbert Vilf[1] u [40] eksponencijalnu formulu naziva *glavna teorema za prebrojavanje*. Lakoća kojom se naizgled veoma komplikovani kombinatorni problemi mogu riješiti primjenom te formule (ili nekih njenih varijanti) je jedan od razloga zašto je tako ”zvučno ime” za ovu formulu opravdano. Eksponencijalna formula je u enumerativnoj kombinatorici značajna i zbog brojnih primjena.

Naime, često je potrebno riješiti ovakav zadatak:

Neka je f_m broj načina da se na skupu od m elemenata zada neka struktura. Skup sa n elemenata treba podijeliti na k disjunktnih dijelova (particija skupa u k blokova), a zatim na svakom od tih dijelova treba zadati posmatranu strukturu. Na koliko načina je to moguće uraditi?

Sljedeća dva primjera pokazuju da smo probleme tog tipa već posmatrali:

- *Koliko ima particija skupa $[n]$ u k dijelova?*
  U ovom slučaju se na dijelovima ne zadaje nikakva struktura, pa je $f_m = 1$.
- *Koliko ima permutacija u $\mathbb{S}_n$ sa tačno k ciklusa?*
  Skup $[n]$ se podijeli na k djelova, a na svakom od njih se definiše ciklička permutacija. Broj cikličklih permutacija na skupu od m elemenata je $f_m = (m-1)!$.

[1] Herbert Wilf (1931-)

Primijetimo da odgovore na postavljena pitanja u ova dva primjera već znamo. To su Stirlingovi brojevi druge vrste $S(n,k)$, odnosno Stirlingovi brojevi prve vrste bez znaka $c(n,k)$.

U opštem slučaju, problem se može riješiti pomoću funkcija generatrisa na sljedeći način:

Neka je $h_{n,k}$ odgovor na postavljeno pitanje, odnosno, neka je $h_{n,k}$ broj načina da se n-člani skup razbije na k djelova, pa zatim da se na svakom od tih dijelova zada tražena struktura. Brojeve $h_{n,k}$ zapišemo pomoću funkcije generatrisa sa dvije promjenljive:

$$\mathcal{H}(x,y) = \sum_{n,k\in\mathbb{N}_0} h_{n,k}\frac{x^n}{n!}y^k.$$

Neka je f_m broj načina kako se na m-članom skupu može zadati posmatrana struktura (važno je upamtiti da je $f_0 = 0$) i neka je $F(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} f_n \frac{x^n}{n!}$ eksponencijalna funkcija generatrisa za niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

TEOREMA 10.1.1 (Eksponencijalna formula). *Neka su $F(x)$ i $\mathcal{H}(x,y)$ maloprije opisane funkcije generatrisa. Tada je*

$$\mathcal{H}(x,y) = e^{yF(x)}.$$

Dokaz. Neka je k fiksan prirodan broj. Uređena particija n-članog skupa X u k dijelova je uređena k-torka nepraznih, disjunktnih podskupova $(T_1, T_2, \ldots, T_k)$ čija je unija cijeli skup X. Blokove proizvoljne k-člane particije skupa $[n]$ možemo permutovati na $k!$ načina.
Sada nije teško uočiti vezu između brojeva $h_{n,k}$ i f_m:

$$h_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{(T_1,T_2,\ldots,T_k)\text{-uređ. particija } [n]} f_{|T_1|} f_{|T_2|} \cdots f_{|T_k|}.$$

Kako je $f_0 = 0$, to vrijedi

$$h_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{n_1+\cdots+n_k=n \\ n_i\in\mathbb{N}_0}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} f_{n_1} f_{n_2} \cdots f_{n_k}.$$

Za fiksan $k \in \mathbb{N}_0$ sa $H_k(x)$ označimo eksponencijalnu funkciju generatrisa za niz $(h_{n,k})_{n\in\mathbb{N}_0}$. Na osnovu prethodne relacije i posljedice 9.2.4 dobijamo da je

$$H_k(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} h_{n,k}\frac{x^n}{n!} = \frac{F^k(x)}{k!}.$$

Sada je $\mathcal{H}(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} H_k(x)y^k$, odnosno,

$$\mathcal{H}(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} h_{n,k}\frac{x^n}{n!}\right)y^k = \sum_{k\in\mathbb{N}_0}\frac{F^k(x)y^k}{k!} = e^{yF(x)}.$$

□

Zanimljiv dokaz eksponencijalne formule, u kojem su svi koraci kombinatorno motivisani, zainteresovani čitalac može naći u trećoj glavi knjige [40]. Većina primjera atraktivne primjene eksponencijalne formule u ovom poglavlju je "posuđena" iz [40].

U rješavanju zadataka su veoma korisne sljedeće posljedice eksponencijalne formule.

POSLJEDICA 10.1.2. *Neka je f_m broj načina kako se na skupu od m elemenata može zadati neka struktura i neka je $F(x)$ eksponencijalna funkcija generatrisa za niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.*

(*i*) *Neka je n fiksan prirodan broj i neka je $h_{n,k}$ broj načina da se skup $[n]$ podijeli na k dijelova, a zatim da se na svakom od tih dijelova zada posmatrana struktura. Tada je $h_{n,k}$ jednak koeficijentu uz $\frac{x^n}{n!}$ u razvoju $\frac{F^k(x)}{k!}$ u formalni stepeni red.*

(*ii*) *Neka je h_n broj svih načina da se skup $[n]$ podijeli u nekoliko blokova, pa da se na svakom od njih zada tražena struktura, odnosno $h_n = \sum_k h_{n,k}$. Eksponencijalna funkcija generatrisa $H(x)$ za niz h_n je*

$$H(x) = \mathcal{H}(x,1) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} h_n\frac{x^n}{n!} = e^{F(x)}$$

(*iii*) *Neka je T neki podskup skupa prirodnih brojeva i neka je $E_T(x) = \sum_{n\in T}\frac{x^n}{n!}$. Neka je $h_{T,n}$ broj načina kako se skup $[n]$ može podijeliti na nekoliko dijelova tako da je broj dijelova element skupa T, a onda da se na svakom od tih dijelova zada tražena struktura. Tada je*

$$H_T(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} h_{T,n}\frac{x^n}{n!} = E_T(F(x)).$$

Sada posmatrajmo dva dobro poznata primjera sa početka poglavlja.

Particije skupa u k blokova.
Neka je $h_{n,k}$ broj particija skupa $[n]$ u tačno k dijelova. Na blokovima particije "ne radimo ništa", pa je $f_m = 1$ za sve $m \in \mathbb{N}$ i

$$F(x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{m!} x^m = e^x - 1.$$

Na osnovu eksponencijalne formule je

$$\mathcal{H}(x, y) = e^{y(e^x - 1)}.$$

U ovom primjeru je $h_{n,k} = S(n, k)$ Stirlingov broj druge vrste. Iz formule (i) u posljedici 10.1.2 dobijamo

$$h_{n,k} = S(n, k) = \text{ koeficijent uz } \frac{x^n}{n!} \text{ u } \frac{(e^x - 1)^k}{k!}.$$

Primijetimo da smo usput dokazali da za neki fiksan $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{n \geq k} S(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x - 1)^k}{k!}.$$

Broj $h_n = \sum_{k \in \mathbb{N}} h_{n,k}$ je n-ti Belov broj B_n. Na osnovu formule (ii) iz posljedice 10.1.2 dobijamo na još jedan način eksponencijalnu funkciju generatrisa za Belove brojeve:

$$\mathcal{H}(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} B_n \frac{x^n}{n!} = e^{e^x - 1}.$$

Permutacije sa k ciklusa.
Neka je $h_{n,k}$ broj permutacija iz $\mathbb{S}_n$ sa tačno k ciklusa. Postoji tačno $f_m = (m-1)!$ permutacija na skupu od m elemenata sa jednim ciklusom, pa je

$$F(x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{(m-1)!}{m!} x^m = \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{x^m}{m} = -\ln(1 - x).$$

Na osnovu eksponencijalne formule je $\mathcal{H}(x, y) = e^{-y \ln(1-x)} = \dfrac{1}{(1-x)^y}$.

Broj $h_{n,k}$ je Strlingov broj druge vrste bez znaka. Na osnovu (i) iz posljedice 10.1.2 zaključujemo da je

$$h_{n,k} = c(n, k) = \text{ koeficijent uz } \frac{x^n}{n!} \text{ u stepenom redu } \frac{1}{k!} \ln^k \left(\frac{1}{1 - x} \right).$$

Primjer 10.1.3. Koliko ima permutacija u $\mathbb{S}_n$ sa parnim brojem ciklusa u kojima su svi ciklusi neparne dužine?

Rješenje: Koristićemo oznake iz posljedice 10.1.2. Primijetimo da je $f_m = 0$ za paran m i $f_m = (m-1)!$ za neparan m. Eksponencijalna funkcija generatrisa za niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je

$$F(x) = \sum_{m\text{-neparan}} \frac{x^m}{m} = \frac{1}{2}\big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\big) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Kako broj ciklusa mora biti paran, koristićemo formulu (iii) iz 10.1.2. Prvo računamo:

$$E_T(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0, n\text{-paran}} \frac{x^n}{n!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Sada je

$$H_T(x) = E_T\big(F(x)\big) = \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{2^{2n}}.$$

Traženi broj permutacija u $\mathbb{S}_n$ je koeficijent uz $\frac{x^n}{n!}$ u $H_T(x)$, što je

$$\binom{n}{\frac{n}{2}} \frac{n!}{2^n}, \text{ za paran prirodan broj } n, \text{ i nula za neparan } n.$$

$\diamondsuit$

Broj $\binom{n}{\frac{n}{2}}\frac{1}{2^n}$ za paran $n \in \mathbb{N}$ možemo prepoznati kao vjerovatnoću da pri bacanju simetričnog novčića n isti broj puta padnu i pismo i glava. Stoga, pomoću prethodnog primjera možemo napraviti prilično zanimljiv zadatak:

Neka je n prirodan broj. Vjerovatnoća da u bacanju simetričnog novčića jednak broj puta padnu pismo i glava je jednaka vjerovatnoći da slučajno odabrana permutacija iz $\mathbb{S}_n$ ima samo cikluse neparne dužine, i to paran broj njih!

Primjer 10.1.4. Neka a_n i b_n označavaju broj permutacija u $\mathbb{S}_n$ čiji su svi ciklusi neparni, odnosno parni. Naći eksponencijalne funkcije generatrisa za nizove $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i opisati vezu između a_n i b_n!

Rješenje: Eksponencijalne funkcije generatrisa $A(x)$ i $B(x)$ za ove nizove potražićemo pomoću eksponencijalne formule.

U određivanju $A(x) \overset{\{efg\}}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty$, trebamo primijetiti da je $f_m = (m-1)!$ za neparan m, a $f_m = 0$ za paran. Primjenom eksponencijalne formule dobijamo da je

$$F(x) = \frac{1}{2}\big(ln(1+x) - ln(1-x)\big), \text{ odnosno } A(x) = e^{F(x)} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

U traženju $B(x)$ brojimo permutacije čiji su svi ciklusi parni. U tom slučaju je $f_m = (m-1)!$ za paran m a $f_m = 0$ za neparan. Stoga je

$$F(x) = -\frac{1}{2}\left(ln(1+x) + ln(1-x)\right), \text{ odnosno } B(x) = e^{F(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Kako vrijedi

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 1 + x, \text{ dobijamo da je } A(x) = (1+x) \cdot B(x).$$

Sada lako zaključujemo da je

$$\frac{a_n}{n!} = \frac{b_n}{n!} + \frac{b_{n-1}}{(n-1)!}, \text{ odnosno } a_n = b_n + nb_{n-1}.$$

Za neparne brojeve n je $b_n = 0$, pa smo dobili da vrijedi

$$a_n = \begin{cases} b_n, & \text{za paran } n; \\ nb_{n-1}, & \text{za neparan } n. \end{cases}$$

$\diamondsuit$

Problem koji smo rješavali eksponencijalnom formulom se može još dodatno otežati. Od praktičnog interesa može biti i situacija kada se, pored strukture na svakom bloku, i na skupu blokova zadaje neka "nova struktura".

Neka je r_n broj načina da se skup od n elemenata podijeli na nekoliko blokova, na svakom od tih blokova se zada struktura prve vrste (na bloku veličine m na f_m načina), a zatim se na skupu blokova zada neka druga struktura (na skupu od k blokova se ta struktura zadaje na g_k načina). Uz ove oznake vrijedi sljedeća teorema:

TEOREMA 10.1.5 (kompoziciona formula). *Neka su $R(x)$, $F(x)$ i $G(x)$ eksponencijalne funkcije generatrisa za nizove $(r_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(g_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Tada je $R(x) = G\big(F(x)\big)$.*

Dokaz. Uz ranije uvedene oznake, sa $r_{n,k}$ označimo broj načina kako se skup $[n]$ može podjeliti na k djelova, na svakom od tih blokova zadati strukturu prve vrste, a zatim zadati strukturu druge vrste na tih k blokova (na g_k načina).

Tada vrijedi, slično kao i u teoremi 10.1.1,

$$r_{n,k} = \frac{g_k}{k!} \sum_{(T_1,T_2,\ldots,T_k)\text{- uređ. particija } [n]} f_{|T_1|} f_{|T_2|} \cdots f_{|T_k|}.$$

Dalje, imitirajući dokaz eksponencijalne formule, fiksiramo $k \in \mathbb{N}$ i posmatramo

$$R_k(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} r_{n,k} \frac{x^n}{n!} = g_k \frac{F^k(x)}{k!}.$$

Sada, sumiranjem po $k \in \mathbb{N}_0$, dobijamo da je

$$R(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} R_k(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} g_k \frac{F^k(x)}{k!} = G\big(F(x)\big).$$

□

Lako je primijetiti da je eksponencijalna formula "samo" specijalan slučaj prethodne teoreme. Zaista, teorema 10.1.1 se dobije iz prethodne kada je $g_k = 1$ za sve $k \in \mathbb{N}_0$, odnosno, kada na blokovima ne posmatramo strukturu druge vrste.

Primjer 10.1.6. Špil od n karata želimo podijeliti u nekoliko dijelova (grupa), u svakom dijelu karte urediti linearno, a zatim sve grupe rasporediti oko okruglog stola. Neka je r_n broj načina kako se ovo može uraditi. Nađi eksponencijalnu funkciju generatrisa za niz $(r_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i tačnu vrijednost za r_n.

Rješenje: Koristićemo oznake iz prethodne teoreme. Lako je izračunati da je $f_m = m!$, $g_k = (k-1)!$, pa je

$$F(x) = \frac{x}{1-x}, G(x) = 1-\ln(1-x), \text{ i na kraju, } R(x) = 1-\ln\left(\frac{1-2x}{1-x}\right).$$

Odavde dobijamo da je $R(x) = 1 + \ln(1-x) - \ln(1-2x)$, odnosno,

$$R(x) = 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} (2^n - 1)\frac{x^n}{n} = 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} (2^n - 1)(n-1)!\frac{x^n}{n!}.$$

Stoga je traženi broj podjela karata jednak $r_n = (2^n - 1)(n-1)!$.

$\diamondsuit$

Primijetimo da se sve permutacije iz $\mathbb{S}_n$ mogu dobiti tako da skup $[n]$ podijelimo na blokove (to će biti ciklusi), pa na svakom bloku zadamo cikličku permutaciju. Sada, na svakom od ciklusa se može zadati neka struktura, a onda na skupu svih ciklusa tako dobijene permutacije iz $\mathbb{S}_n$ se može zadati neka druga struktura.

Opet pretpostavimo da se na ciklusu dužine m struktura prve vrste može zadati na f_m načina, a da se na k ciklusa struktura druge vrste može zadati na g_k načina. Ukupan broj takvih struktura na permutacijama skupa $[n]$ se može opisati pomoću permutacione kompozicione formule.

TEOREMA 10.1.7. *Neka su $F(x)$ i $G(x)$ eksponencijalne funkcije generatrisa za nizove $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(g_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, pri čemu je*

- *f_m broj načina da se na ciklusu dužine m zada struktura prve vrste,*
- *g_k broj načina da se na k ciklusa zada neka druga struktura.*

Sa h_n označimo broj načina da se odabere permutacija skupa $[n]$; na svakom od njenih ciklusa definišemo strukturu prve vrste; i na kraju, na skupu ciklusa definišemo strukturu druge vrste. Tada je eksponencijalna funkcija generatrisa za niz $(h_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ opisana formulom

$$H(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} h_n\frac{x^n}{n!} = G\left(\sum_{m\in\mathbb{N}} f_m\frac{x^m}{m}\right).$$

Dokaz. Možemo primijetiti da je

$$h_n = \sum_{\pi=C_1C_2\cdots C_k\in\mathbb{S}_n} f_{|C_1|}f_{|C_2|}\cdots f_{|C_k|}g_k.$$

Kako se na bloku veličine j ciklička permutacija može zadati na $(j-1)!$ načina, to je

$$h_n = \sum_{(T_1,T_2,\ldots,T_k)\text{-uređ. particija } [n]} \Big((|T_1|-1)!f_{|T_1|}\Big)\cdots\Big((|T_k|-1)!f_{|T_k|}\Big)g_k.$$

Tvrđenje teoreme se dobije sličnim rasuđivanjem kao i u teoremi 10.1.5.
□

Ako se na blokovima ne uvodi nikakva struktura (tada je g_k=1 za sve $k \in \mathbb{N}_0$ i $G(x) = e^x$) dobijemo permutacionu eksponencijalnu formulu:

$$H(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} h_n \frac{x^n}{n!} = e^{\sum_{m \in \mathbb{N}} f_m \frac{x^m}{m}}. \tag{10.1}$$

Primjer 10.1.8. Neka je zadan prirodan broj d. Sa a_n označimo broj permutacija u $\mathbb{S}_n$ čiji je d-ti stepen identiteta. Naći eksponencijalnu funkciju generatrisa za niz $(a_n)_n \in \mathbb{N}$.

Rješenje: Rezultat dobijamo direktno primjenom formule (10.1). Na ciklusima permutacije ne uvodimo nikakvu strukturu, ali u obzir dolaze samo oni ciklusi čija je dužina djelitelj broja d. Stoga je $f_m = 1$ ako $m|d$, a $f_m = 0$ inače. Uvrstimo li ovo u (10.1) dobićemo da je tražena funkcija generatrisa

$$H(x) = e^{\sum_{m \in \mathbb{N}, m|d} \frac{x^m}{m}}.$$

♢

10.2 Sistem različitih predstavnika i latinski kvadrati

Neka su zadani konačni skupovi $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Sljedeće pitanje se često pojavi u praksi:

Da li je moguće iz svakog od tih skupova odabrati po jedan element tako da svi odabrani elementi budu različiti?

Drugim riječima, mi tražimo uređenu n-torku $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tako da vrijedi

- $x_i \in A_i$ za sve $i = 1, 2, \ldots, n$ (element x_i je *predstavnik* skupa A_i)
- za $i \neq j$ vrijedi $x_i \neq x_j$ (svih n elemenata x_i su *različiti*).

Ako takva n-torka $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ postoji, nazivamo je **sistem različitih predstavnika** za skupove $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Evo nekoliko primjera iz svakodnevnog života u kojima je važno pronaći sistem različitih predstavnika:

- Zamislimo da n radnika traži posao na birou za zapošljavanje. Neka je A_i skup ponuđenih (slobodnih) poslova koje može da obavi i-ti radnik. Svih n radnika je moguće zaposliti ako i samo ako skupovi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ imaju sistem različitih predstavnika.
- Neka u nekom mjestu živi n djevojaka i neka svaka od njih ima nekoliko poznanika; skup poznanika i-te djevojke označimo sa A_i. Svaka djevojka će moći da nađe muža kojeg poznaje ako i samo ako skupovi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ imaju sistem različitih predstavnika.

PRIMJEDBA 10.2.1. Lako je primijetiti sljedeće:

Ako je $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sistem različitih predstavnika za skupove $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tada za bilo kojih k skupova $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ vrijedi

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\} \subseteq A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_k}, \text{ to jeste } |A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_k}| \geqslant k.$$

Dakle, ako n skupova ima sistem različitih predstavnika, tada unija bilo kojih k tih skupova ima bar k elemenata.

Interesantno je da je uslov iz prethodne primjedbe i dovoljan da neka familija skupova ima sistem različitih predstavnika. To je dokazano u sljedećoj teoremi.

TEOREMA 10.2.2 (Hol[2]). *Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ neki konačni skupovi. Ti skupovi imaju sistem različitih predstavnika ako i samo ako unija bilo kojih k posmatranih skupova sadrži bar k elemenata, odnosno:*

$$\text{za sve } \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq [n] \text{ je } |A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}| \geqslant k. \qquad (10.2)$$

Dokaz. Neophodnost uslova (10.2) pokazana u primjedbi 10.2.1.
Pokažimo da je pretpostavka iz teoreme i dovoljna. Egzistenciju sistema različitih predstavnika, uz pretpostavku (10.2), dokazujemo indukcijom po broju skupova n.

Očigledno je da jedan neprazan skup ima sistem različitih predstavnika. Pretpostavimo da sve familije sa manje od n skupova, za koje je ispunjen uslov (10.2), imaju sistem različitih predstavnika. Pokažimo da tada i svaka familija skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$ za koju vrijedi (10.2) ima sistem različitih predstavnika.

Prije toga, uvedimo novu oznaku:
za proizvoljan $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq [n]$ neka je $A_I = A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_k$.
Primijetimo da je $A_\emptyset = \emptyset$.

[2] Philip Hall (1904 - 1982)

Sada se uslov (10.2) može zapisati sa:

$$\text{za sve } I \subset [n] \text{ vrijedi } |A_I| \geqslant |I| \tag{10.3}$$

Za skup $J \subset [n]$ kažemo da je **kritičan** za familiju skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ako je $|A_J| = |J|$.

Dalje, razlikujemo dva slučaja:

1° *Jedini kritičan skup indeksa je $\emptyset$ i možda još i cijeli skup $[n]$.*

Kako jednočlani podskupovi od $[n]$ nisu kritični, to za sve $i \in [n]$ vrijedi $|A_i| = |A_{\{i\}}| > 1$. Odaberimo proizvoljan $x_n \in A_n$ i za sve $i = 1, 2, \ldots, n-1$ definišimo $B_i = A_i \setminus \{x_n\}$. Sada posmatrajmo familiju skupova $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$.

Za sve $i \in [n]$ skupovi A_i i B_i se razlikuju najviše za x_n, to jest za jedan element. Kako za neprazan $I \subset [n-1]$ skup indeksa I nije kritičan, to vrijedi:

$$|B_I| \geqslant |A_I| - 1 \geqslant |I|.$$

Familija skupova $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ ispunjava uslov (10.3). Stoga, na osnovu induktivne pretpostavke, za skupove $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ postoji sistem različitih predstavnika $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. U tom sistemu se ne pojavljuje x_n. Kako je $x_n \in A_n$, to je $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ sistem različitih predstavnika za skupove $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

2° *Postoji kritičan skup indeksa, različit od $\emptyset$ i $[n]$.*

Neka je $J \subset [n]$ najmanji neprazan kritičan skup indeksa za posmatranu familiju skupova. Na osnovu induktivne pretpostavke, familija skupova $\{A_j\}_{j \in J}$ ima sistem različitih predstavnika $(x_j)_{j \in J}$.

Za sve $i \in [n] \setminus J$ definišimo $B_i := A_i \setminus A_J$. Za $K \subset [n] \setminus J$ vrijedi

$$|B_K| = |A_{K \cup J}| - |A_J| \geqslant |K \cup J| - |J| = |K|.$$

Prethodna nejednakost se dobije ako uočimo da je $|A_{K \cup J}| \geqslant |K \cup J|$ (uslov (10.3) vrijedi za $A_1, A_2, \ldots, A_n$) i $|A_J| = |J|$ (jer je skup indeksa J kritičan).

Po induktivnoj pretpostavci znamo da familija skupova $\{B_j\}_{j \in [n] \setminus J}$ ima sistem različitih pretstavnika. Kada im se doda sistem različitih predstavnika $(x_j)_{j \in J}$ za familiju $\{A_j\}_{j \in J}$, dobije se sistem različitih predstavnika za skupove $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

□

Primjer 10.2.3. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ podskupovi skupa $[n]$ takvi da postoji prirodan broj r za koji vrijedi

(i) $|A_i| = r$;
(ii) svaki element $i \in [n]$ leži u tačno r posmatranih skupova.

Dokaži da skupovi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ imaju sistem različitih predstavnika!

Rješenje: Za proizvoljan $I \subset [n]$ posmatrajmo skupove

$$X = \{(x, i) : x \in [n], x \in A_i \text{ za neki } i \in I\} \text{ i } A_I = \cup_{i \in I} A_i.$$

Za svaki $i \in I$ skup A_i ima tačno r elemenata, pa je $|X| = |I| \cdot r$. Sa druge strane, proizvoljan element $x \in A_I$ se nalazi u najviše r skupova čiji su indeksi u I (ne moraju svi j za koje $x \in A_j$ biti u I). Zato je $|I| \cdot r = |X| \leqslant |A_I| \cdot r$, pa dobijamo da je $|I| \leqslant |A_I|$. Na osnovu teoreme 10.2.2 zaključujemo da postoji sistem različitih predstavnika za skupove $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

$\diamondsuit$

Ako znamo da neka familija skupova ima sistem različitih predstavnika, zanimljivo pitanje je i odrediti broj svih sistema različitih predstavnika u toj familiji. Pri tome, dva različita sistema različitih predstavnika mogu imati iste elemente:

$(1, 2, 3)$ i $(3, 1, 2)$ su različiti sistemi za $\{1, 3\}, \{1, 2\}$ i $\{2, 3\}$.

Primjer 10.2.4. Neka je n proizvoljan prirodan broj i neka su zadani skupovi

$$A_i = [n] \setminus \{i\} \text{ za sve } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Odredi broj sistema različitih predstavnika u familiji $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Rješenje: Primijetimo da je $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sistem različitih predstavnika za zadane skupove ako i samo ako je $x_i \neq i$ i $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = [n]$. Drugim riječima, postoji bijekcija između sistema različitih predstavnika ove familije skupova i skupa permutacija $x_1 x_2 \ldots x_n \in \mathbb{S}_n$ koje nemaju fiksnu tačku.

Na osnovu primjera 7.2.3 zaključujemo da je broj sistema različitih predstavnika za ovu familije skupova jednak $n! \cdot \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!}$.

$\diamondsuit$

POSLJEDICA 10.2.5. *Neka su zadani skupovi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ za koje je uslov* (10.3) *ispunjen* (*znamo ti skupovi imaju sistem različitih predstavnika*)*. Ako svaki od skupova A_i ima bar r elemenata, tada je broj sistema različitih predstavnika za $A_1, A_2, \ldots, A_n$ najmanje*

$$\begin{cases} r!, & \text{ako je } r \leqslant n; \\ r(r-1)\cdots(r-n+1), & \text{inače.} \end{cases} \tag{10.4}$$

Dokaz. Tvrđenje dokazujemo indukcijom po n. Za $n = 1$ tvrđenje vrijedi, jer očigledno postoji r različitih sistema za skup A_1 sa bar r elemenata. Pretpostavimo da tvrđenje vrijedi za manje od n skupova, i prebrojimo izbore sistema različitih predstavnika u oba slučaja iz dokaza Holove teoreme 10.2.2.

U prvom slučaju, uz pretpostavku $|A_i| \geqslant r$, element $x_n \in A_n$ možemo odabrati na bar r načina. Skupovi $B_i = A_i \setminus \{x_n\}$ imaju bar $r-1$ element, i kada na njih primijenimo pretpostavku indukcije, dobijamo da vrijedi formula (10.4).

U drugom slučaju, za kritičan skup J mora da vrijedi $r \leqslant |J| \leqslant n$. Po induktivnoj pretpostavci, familija skupova $\{A_j\}_{j\in J}$ ima bar $r!$ sistema različitih predstavnika. Svaki od njih se može dopuniti do sistema različitih predstavnika cijele familije $A_1, A_2, \ldots, A_n$, pa formula (10.4) vrijedi.

□

Sada ćemo dati odgovor na pitanje o broju sistema različitih predstavnika za skupove $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kada je $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = n$.

DEFINICIJA 10.2.6. Neka je $A = \big(a_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ neka $n\times n$ matrica. **Permanenta matrice** A je

$$perA = \sum_{\pi\in\mathbb{S}_n} a_{1\pi_1}a_{2\pi_2}\cdots a_{n\pi_n}.$$

Može se reći da je permanenta matrice jednaka determinanti kod koje smo "zaboravili" na znakove. U računanju determinante, sabirak koji odgovara permutaciji π se množi sa ± 1, u zavisnosti od toga da li je π parna ili neparna permutacija. Dakle, definicija permanente je značajno jednostavnija od one za determinantu.

Međutim, cijena te jednostavnosti u definiciji su poteškoće pri računanju permanenti. Na primjer, ako se neka vrsta (kolona) matrice A doda nekoj drugoj vrsti (koloni), vrijednost permanente se može promijeniti. Zato se $perA$ ne može računati svođenjem A na trougaonu matricu.

Iz definicije permanente nije teško zaključiti da se $perA$ može računati razvijanjem po i-toj vrsti (ili j-toj koloni) matrice A.

Neka je A_{ij} matrica dobijena od A brisanjem i-te vrste i j-te kolone. Tada je

$$perA = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot perA_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot perA_{kj}.$$

TEOREMA 10.2.7. *Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ proizvoljni podskupovi skupa $[n]$. Neka je $A = (a_{ij})$ matrica $n \times n$ definisana sa*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ ako } j \in A_i; \\ 0, \text{ ako } j \notin A_i. \end{cases}$$

Broj sistema različitih predstavnika u $A_1, A_2, \ldots, A_n$ je jednak permanenti matrice $A = \big(a_{ij}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Dokaz. Uređena n-torka $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je sistem različitih predstavnika za $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ako i samo ako je

(a) $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$, to jest, svi x_i su različiti. Kako svi x_i pripadaju skupu $[n]$, to je $x_1 x_2 \ldots x_n$ permutacija iz $\mathbb{S}_n$.

(b) Za sve $i \in [n]$ je $x_i \in A_i$, odnosno, u matrici A je $a_{ix_i} = 1$.

Ako je $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sistem različitih predstavnika za $A_1, A_2, \ldots, A_n$, iz (a) i (b) slijedi da je sabirak $a_{1x_1} a_{2x_2} \cdots a_{nx_n}$ u razvoju $perA$ jednak jedan.

Takođe, ako je za neko $\pi \in \mathbb{S}_n$ sabirak $a_{1\pi_1} a_{2\pi_2} \cdots a_{n\pi_n}$ u razvoju $perA$ jednak jedan, lako je zaključiti da je tada $(x_{\pi_1}, x_{\pi_2} \ldots x_{\pi_n})$ sistem različitih predstavnika za skupove $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

□

Latinski kvadrat reda n je $n \times n$ matrica čiji su članovi elementi skupa $[n]$, a u svakoj vrsti i svakoj koloni se svaki od brojeva $1, 2, \ldots, n$ pojavi tačno jednom[3]. Drugim riječima, vrste i kolone te matrice su permutacije iz $\mathbb{S}_n$.

Ako je $n \times n$ tabela "djelimično popunjena" elementima iz $[n]$ (nije poznato svih n^2 njenih članova), i ako se svaki broj nalazi u najviše jednoj vrsti i jednoj koloni, nazivamo je **parcijalni latinski kvadrat**.

Specijalno, **latinski pravougaonik** $k \times n$ je parcijalni latinski kvadrat u kojem je popunjeno tačno k prvih vrsta.

[3] U definiciji latinskog kvadrata, umjesto brojeva iz skupa $[n]$, u $n \times n$ matricu možemo raspoređivati elemente bilo kojeg n-članog skupa.

Jedan od zanimljivih problema vezanih za latinske kvadrate je problem kompletiranja latinskog kvadrata:

Da li se neki parcijalni latinski kvadrat $n \times n$ može dopuniti do kompletnog latinskog kvadrata?

Posmatrajmo nekoliko primjera.
Ako je ispunjena samo prva vrsta $n \times n$ matrice, na primjer sa brojevima $123 \dots n$, lako je popuniti cijelu matricu cikličkim pomjeranjem: u i-toj vrsti su upisani brojevi $i\ (i+1)\ \dots\ (n-1)\ n\ 1\ \dots\ (i-1)$.

1	2	3	$\cdots$	i	$i+1$	$\cdots$	$n-1$	n
2	3	4	$\cdots$	$i+1$	$i+2$	$\cdots$	n	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
i	$i+1$	$i+2$	$\cdots$	$2i-1$	$2i$	$\cdots$	$i-2$	$i-1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
n	1	2	$\cdots$	$i-1$	i	$\cdots$	$n-2$	$n-1$

Ovim smo takođe dokazali da za proizvoljan prirodan broj n postoji latinski kvadrat $n \times n$.

Dalje, lako[4] je primijetiti da se svaki $(n-1) \times n$ latinski pravougaonik može na jedinstven način dopuniti do latinskog kvadrata. Tada se na i-om mjestu u posljednjoj vrsti se nalazi jedini broj iz $[n]$ koji nedostaje u i-toj koloni.

Međutim, parcijalni latinski kvadrat

1	2	3	$\cdots$	$n-1$	
			$\cdots$		n
			$\cdots$ $\cdots$		
			$\cdots$		

se očigledno ne može dopuniti do latinskog kvadrata.

TEOREMA 10.2.8. *Neka su k i n prirodni brojevi takvi da je $1 \leqslant k < n$. Svaki latinski pravougaonik $k \times n$ se može proširiti do latinskog pravougaonika $(k+1) \times n$.*

[4] Svaki broj $i \in [n]$ se nalazi u tačno $n-1$ vrsta.

Dokaz. Sa A_i označimo elemente iz skupa $[n]$ koji se ne pojavljuju u i-toj koloni latinskog pravougaonika $k \times n$. Latinski pravougaonik se može proširiti sa novom vrstom ako i samo ako skupovi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ imaju sistem različitih predstavnika.
Primijetimo da za sve $i \in [n]$ vrijedi $|A_i| = n - k$ i da se svaki $x \in [n]$ pojavi u tačno $n-k$ skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Sada, na osnovu primjera 10.2.3, možemo zaključiti da skupovi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ imaju sistem različitih predstavnika. Tako je posmatrani latinski pravougaonik moguće dopuniti sa novom kolonom.

□

Ako posmatramo latinski pravougaonik $k \times n$ i iskoristimo prethodnu teoremu $n-k$ puta, dobićemo sljedeći rezultat.

POSLJEDICA 10.2.9. *Proizvoljan latinski pravougaonik se može dopuniti do latinskog kvadrata.*

Da je svaki parcijalni latinski kvadrat sa manje od n upisanih polja moguće dopuniti do latinskog kvadrata pokazano je u [30].

Jednostavnom primjenom posljedice 10.2.5 moguće je procjeniti broj latinskih kvadrata reda n.

TEOREMA 10.2.10. *Broj latinskih kvadrata reda n je najmanje*

$$n! \cdot (n-1)! \cdot (n-2)! \cdots 3! \cdot 2! \cdot 1!.$$

Dokaz. Prvu vrstu možemo odabrati na $n!$ načina. Na osnovu formule (10.4), drugu vrstu biramo na bar $(n-1)!$ način, treću na $(n-2)!$ načina, itd ....

□

Neka je L_n broj latinskih kvadrata reda n. Čini se da je nalaženje tačne vrijednosti za L_n dosta težak zadatak. Tačna vrijednosti za L_n su poznate za $n \leqslant 9$. Danas su poznate sljedeće ocjene (vidjeti 17 glavu u [21]) za L_n:

$$\frac{(n!)^{2n}}{n^{n^2}} \leqslant L_n \leqslant \prod_{k=1}^{n} (k!)^{\frac{n}{k}}$$

10.3 Enumeracija pri dejstvu grupe

Pretpostavimo da skup kojem želimo odrediti broj elemenata ima neku unutrašnju simetriju. Tada ima smisla dva elementa tog skupa nazvati istim ili ekvivalentnim ako se jedan može transformisati u drugi pomoću tih simetrija. Prirodno je postaviti pitanje

Koliko ima neekvivalentnih (različitih) objekata u tom skupu?

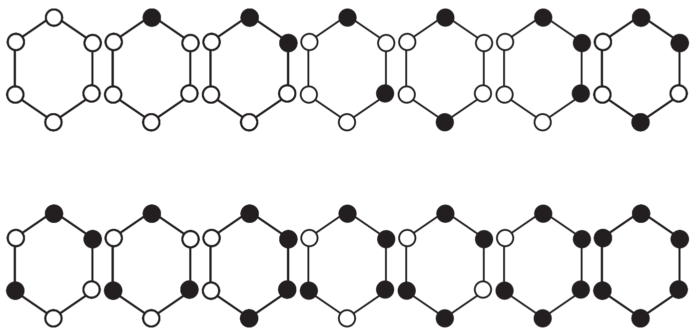
Najveći doprinos u pronalaženju metoda koje daju odgovor na ovo pitanje je dao mađarski matematičar Đerđ Polja[5]. Kako je nekoliko godina ranije slične ideje imao i Redfild[6], danas se skup tehnika koje se koriste u rješavanju ovih zadataka naziva i Polja-Redfild teorija.

Da bismo bolje shvatili prirodu problema koje želimo da rješavamo, počnimo sa jednim sasvim jednostavnim primjerom.

Primjer 10.3.1. Sva tjemena pravilnog šestougla se boje sa dvije boje. Dva bojenja smatramo istim ako se jedno može dobiti od drugog rotacijom šestougla oko centra opisane kružnice. Koliko ima različitih bojenja?

Šta će se desiti ako i bojenja koja se jedno od drugog mogu dobiti osnim simetrijama šestougla smatramo istim?

Rješenje: Pretpostavimo da tjemena pravilnog šestougla bojimo sa crnom i bijelom bojom.
U ovom slučaju odgovor možemo dobiti "ispisujući" sva rješenja:

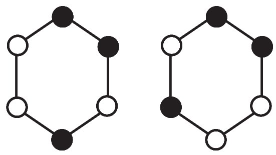


Slika 10.1. *Sva različita bojenja tjemena pravilnog šestougla sa dvije boje.*

[5] George Pólya (1887 - 1985)
[6] John Howard Redfield (1879 - 1944)

Lako je provjeriti da se dva bojenja na slici 10.1 ne mogu identifikovati rotacijama. Dalje, bilo koje bojenje tjemena pravilnog šestougla sa dvije boje se rotacijom može identifikovati sa nekim bojenjem na slici 10.1. Stoga postoji 14 različitih bojenja tjemena pravilnog šestougla sa dvije boje.

Ako ekvivalentnim bojenjima smatramo i ona koja se mogu dobiti osnim simetrijama pravilnog šestougla, tada su i dva bojenja na slici 10.2 ista.



Slika 10.2. *Dva bojenja koja su različita pri rotacijama, a ista ako se dozvole i osne simetrije.*

U tom slučaju postoji tačno 13 različitih bojenja tjemena pravilnog šestougla.

$\diamondsuit$

Iz ovog jednostavnog primjera možemo zaključiti da broj različitih bojenja zavisi i od broja simetrija skupa koji posmatramo.

U prethodnom primjeru nismo brojali sva moguća bojenja tjemena šestougla. Umjesto toga, na skupu svih bojenja smo definisali relaciju ekvivalencije i onda izbrojali klase ekvivalencije.

Pri tom, relacija ekvivalencije je definisana nekom "unutrašnjom simetrijom" objekta koji se posmatra. Ista ideja se koristi i u rješavanju komplikovanijih zadataka ovog tipa.

Sam autor ove teorije, Đerđ Polja je ovu metodu nazivao "Brojanje neekvivalentnih konfiguracija s obzirom na zadatu grupu permutacija." Može se reći da je ova teorija primjer kako se matematički aparat iz algebre može efikasno koristiti u rješavanju problema iz kombinatorike.

Počećemo sa definicijama nekih osnovnih pojmova.

Neka je X neki skup i neka je $\mathbb{S}_X$ grupa svih permutacija skupa X:

$$\mathbb{S}_X = \{\pi : X \to X | \pi \text{ je bijekcija } \}.$$

Reći ćemo da neka grupa $(G,*)$ **dejstvuje** na skupu X ako je svakom elementu grupe $g \in G$ dodijeljena neka permutacija $\pi_g \in \mathbb{S}_X$ (π_g je bijekcija na X) tako da za sve $g,h \in G$ i sve $x \in X$ vrijedi

$$\pi_{g*h}(x) = \big(\pi_g \circ \pi_h\big)(x).$$

Drugim riječima, dejstvo grupe G na skupu X je homomorfizam sa grupe G u $\mathbb{S}_X$. Stoga neutralan element grupe G odgovara identičkom preslikavanju na X.

Evo nekoliko primjera dejstva grupe.

1. Neka je $G = (\mathbb{R},+)$ i neka G dejstvuje na skupu $X = \mathbb{R}^2$ na sljedeći način:
$$\pi \in G, (x,y) \in X, \pi\left((x,y)\right) = (x+\pi, y).$$
Geometrijski, realan broj π dejstvuje na koordinatnu ravan X tako što svaku tačku (x,y) translira desno za π.
2. Ista grupa $G = (\mathbb{R},+)$ na skupu $X = \mathbb{R}^2$ može dejstvovati i sasvim drugačije: realan broj σ dejstvuje na X tako što svaku tačka (x,y) zarotira u smjeru kazaljke na satu za σ radijana.
3. Na skupu tjemena pravilnog n-tougla $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ dejstvuju prirodno dvije grupe:
   - Grupa svih izometrija pravilnog n-tougla se naziva **diedarska grupa** $\mathbb{D}_n$. Ta grupa je reda $2n$, sa n osnih simetrija i n rotacija.
   - Grupa rotacija. To je podgrupa $\mathbb{D}_n$ koju čine samo rotacije. Izomorfna je sa cikličnom grupom[7] $\mathbb{Z}_n$.
4. Dejstvo bilo koje grupe je potpuno određeno ako nam je poznato dejstvo generatora. Na primjer, dejstvo grupe $G = \mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$ na skupu $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ je potpuno određeno ako opišemo kako dejstvuje generator 1. Ako je njemu dodijeljena permutacija π_1
$$\pi_1 = \begin{pmatrix} a\ b\ c\ d\ e\ f \\ b\ c\ a\ e\ f\ d \end{pmatrix}$$
tada je, iz definicije dejstva grupe određena i permutacija π_2:
$$\pi_2 = \pi_{1+1} = \pi_1 \circ \pi_1 = \begin{pmatrix} a\ b\ c\ d\ e\ f \\ c\ a\ b\ f\ d\ e \end{pmatrix}.$$

[7] Cikličku grupu $\mathbb{Z}_n$ možemo identifikovati sa skupom $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ na kojem je zadana operacija $+_n$, pri čemu je $x +_n y$ ostatak pri djeljenju $x+y$ sa n.

5. Dejstvo grupe $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ na $X = \{a, b, c, d\}$ je zadano sa

$$\pi_{(1,0)} = \begin{pmatrix} a\ b\ c\ d \\ b\ a\ c\ d \end{pmatrix}; \pi_{(0,1)} = \begin{pmatrix} a\ b\ c\ d \\ a\ b\ d\ c \end{pmatrix}.$$

6. Ista grupa $G = \mathbb{Z}_2$ na istom skupu X može dejstvovati i ovako

$$\pi_{(1,0)} = \begin{pmatrix} a\ b\ c\ d \\ b\ a\ c\ d \end{pmatrix}; \pi_{(0,1)} = \begin{pmatrix} a\ b\ c\ d \\ c\ d\ a\ b \end{pmatrix}.$$

Kako priroda elemenata skupa X ne utiče na rješenje kombinatornog problema, konačan skup X identifikovćemo sa $[n]$, a grupu permutacija $\mathbb{S}_X$ sa simetričnom grupom $\mathbb{S}_n$. U kombinatorici nas ne zanima sama grupa G, već nas interesuje šta dejstvo grupe G učini sa konačnim skupom X. Zato se apstraktna grupa G može identifikovati sa slikom G pri homomorfizmu koji definiše dejstvo G na X. Stoga, u daljem tekstu smatramo da je G podgrupa simetrične grupe $\mathbb{S}_n$.

DEFINICIJA 10.3.2. Neka grupa G dejstvuje na skupu X. Za svaki $x \in X$ definišu se dva važna pojma:

- **orbita elementa** x**:** $Gx = \{\pi(x) | \pi \in G\} \subseteq X$.
- **stabilizator elementa** x**:** $G_x = \{\pi \in G | \pi(x) = x\} < G$.

Orbita $x \in X$ je podskup skupa X koji čine svi elementi u koje se x može preslikati permutacijama iz G. Stabilizator elementa x je podgrupa G koju čine permutacije kojima je x fiksna tačka.

Takođe, za sve $\pi \in G$ se definiše skup fiksnih tačaka sa

$$Fix(\pi) = \{x \in X : \pi(x) = x\} \subseteq X.$$

Ako G dejstvuje na skupu X i ako su $x, y \in X$, lako je pokazati da su orbite Gx i Gy jednake ili su disjunktne. Stoga, dejstvo grupe G na X definiše relaciju ekvivalencije:

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{ postoji } \pi \in G \text{ tako da je } \pi(x) = y.$$

Primijetimo da su klase ekvivalencije baš orbite pri dejstvu G na X. Skup svih orbita na X pri dejstvu grupe G označimo sa X/G.

Primjer 10.3.3. Odredi orbite i stabilizatore u maloprije posmatranim primjerima dejstva grupa.

Rješenje:

1. Orbitu elementa (x_0, y_0) čine sve tačke sa horizontalne prave $y = y_0$. Sve orbite pri ovom dejstvu su horizontalne prave. Stabilizator je trivijalna podgrupa.

2. Ako je $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, orbita je kružnica sa centrom u koordinatnom početku. Stabilizator tog elementa je $\{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
   Tačka $(0, 0)$ je fiksna tačka za sve elemente iz grupe G i njen stabilizator je cijela grupa.

3. U oba slučaja je cijeli skup X jedna orbita. Kada se to desi kažemo da je dejstvo G na skupu X **tranzitivno**. Pri dejstvu grupe rotacija stabilizator svakog elementa je trivijalna podgrupa.
   Ako se posmatra dejstvo diedarske grupe $\mathbb{D}_n$ na skupu tjemena, stabilizator svakog tjemena x_i je dvočlan. Pored identitete tu je i osna simetrija čija osa prolazi kroz tačku x_i.

4. Ovdje su orbite $\{a, b, c\}$ i $\{d, e, f\}$. Stabilizator svakog elementa je trivijalan.

5. U ovom slučaju su orbite $\{a, b\}$ i $\{c, d\}$. Stabilizator elementa a je $G_a = \{Id, \pi_{(0,1)}\}$.

6. Postoji samo jedna orbita, odnosno, dejstvo grupe G je tranzitivno. Stabilizator svakog elementa iz X je trivijalan.

$\diamondsuit$

LEMA 10.3.4. *Neka konačna grupa G dejstvuje na skupu X. Tada za proizvoljan $x \in X$ vrijedi*

$$|Gx| \cdot |G_x| = |G|.$$

Dokaz. Za zadani $x \in X$ posmatrajmo multiskup $M = \{\pi(x) : \pi \in G\}$ sa tačno $|G|$ elemenata. Tvrđenje leme se dobije kada uočimo da elementi orbite Gx čine osnovni skup na kojem je multiskup M definisan, i da je svaki $y \in M$ multipliciteta $|G_x|$.

Zaista, ako je $y = \pi(x) \in M$, tada je $y \in Gx$. Za svaki σ iz stabilizatora G_x i $(\pi \circ \sigma)(x) \in M$. Skup $\{\pi \circ \sigma | \sigma \in G_x\} \subseteq G$ ima $|G_x|$ različitih elemenata.

Dalje, ako za neki $\tau \in G$ vrijedi $\tau(x) = y$, tada je $\pi^{-1} \circ \tau \in G_x$. Stoga je svaki element $y \in M$ multipliciteta $|G_x|$.

$\square$

Sada možemo opisati osnovno sredstvo za određivanje broja orbita pri dejstvu grupe G na skup X. Sljedeće tvrđenje je poznato pod imenom Bernsajdova[8] lema, mada se u mnogo izvora može pronaći (recimo u [1] ili [35]) da je to rezultat Frobeniusa[9]. Taj rezultat u slučaju tranzitivnog dejstva grupe je bio poznat i Košiju.

LEMA 10.3.5 (Bernsajd). *Neka je X konačan skup i neka na njemu dejstvuje konačna grupa G. Broj orbita pri tom dejstvu je*

$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}|Fix(\pi)|.$$

Dokaz. Posmatrajmo skup $\mathcal{F}\,\{(x,\pi) : x\in X, \pi\in G, \pi(x)=x\}$. Pomoću principa dvostrukog prebrojavanja dobijamo

$$|\mathcal{F}| = \sum_{\pi\in G}|Fix(\pi)| = \sum_{x\in X}|G_x|.$$

Ukoliko iskoristimo rezultat iz leme 10.3.4, dobićemo da vrijedi

$$\sum_{\pi\in G}|Fix(\pi)| = \sum_{x\in X}\frac{|G|}{|Gx|}, \text{ odnosno } \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}|Fix(\pi)| = \sum_{x\in X}\frac{1}{|Gx|}.$$

Ako je O neka orbita iz X/G dužine k, razlomak $\frac{1}{k}$ se pojavi u sumi $\sum_{x\in X}\frac{1}{|Gx|}$ po jednom za svaki element $x\in O$, dakle k puta ukupno. Stoga, svaka orbita iz X/G u toj sumi doprinese 1, pa je

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}|Fix(\pi)| = \sum_{x\in X}\frac{1}{|Gx|} = \sum_{O\in X/G}1 = |X/G|.$$

□

Sada možemo riješiti problem enumeracije različitih bojenja nekog skupa pri dejstvu konačne grupe. Neka je X konačan skup sa n elemenata i neka je G podgrupa $\mathbb{S}_X$. Ako je $B=\{b_1,b_2,\dots,b_m\}$ skup boja koje imamo na raspolaganju, uočimo da grupa G dejstvuje i na skupu

$$Y = \{f | f : X\to B\}$$

koji čine sva bojenja elemenata skupa X sa bojama iz B. Dejstvo grupe G na skupu Y je prirodno definisano sa

[8] William Burnside (1852 - 1927)

[9] Ferdinand Georg Frobenius (1849 - 1917)

$$\big(\pi(f)\big)(x) = f\big(\pi(x)\big). \tag{10.5}$$

Dva bojenja f_1, f_2 elemenata iz X smatramo istim pri dejstvu grupe G ako postoji $\pi \in G$ takav da je $\pi(f_1) = f_2$. Drugim riječima, bojenja f_1 i f_2 su ista obzirom na dejstvo grupe G ako i samo ako su u istoj orbiti Y pri dejstvu G. Dakle, broj različitih bojenja elemenata iz X sa bojama iz B je jednak broju elemenata u Y/G. Taj broj možemo odrediti pomoću Bernsajdove leme.

Sljedeće opažanje će biti korisno u tom računanju.

PRIMJEDBA 10.3.6. Pretpostavimo da elemente n-članog skupa X bojimo sa m boja iz B. Prisjetimo se da su elementi grupe G identifikovani sa permutacijama iz $\mathbb{S}_n$.

Neko bojenje $f : X \to B$ iz Y je fiksirano sa permutacijom π (to jest, $f \in Fix_Y(\pi)$) ako i samo ako je f konstantno na svim ciklusima permutacije π. Ako je $c(\pi)$ broj ciklusa u permutaciji π tada je $|Fix_Y(\pi)| = m^{c(\pi)}$.

Na osnovu Bernsajdove leme zaključujemo da je broj svih različitih bojenja skupa X sa m boja pri dejstvu grupe G jednak

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\pi \in G} m^{c(\pi)}. \tag{10.6}$$

Primjer 10.3.7. Odgovoriti na pitanja iz primjera 10.3.1 sa početka poglavlja pomoću Bernsajdove leme!

Rješenje: Grupa koja dejstvuje na tjemenima $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ je grupa rotacija $\{Id, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$. U sljedećoj tablici računamo potrebne podatke za primjenu formule (10.6):

$\pi \in \mathbb{Z}_6$	π kao permutacija iz S_X	$m^{\lvert Fix_Y(\pi)\rvert}$
Id	(1)(2)(3)(4)(5)(6)	2^6
r	(123456)	2^1
r^2	(135)(246)	2^2
r^3	(14)(25)(36)	2^3
r^4	(153)(264)	2^2
r^5	(165432)	2^1

Stoga je broj različitih bojenja tjemena pravilnog šestougla sa dvije boje pri dejstvu grupe rotacija jednak

$$\frac{1}{6}\left(2^6 + 2\cdot 2^1 + 2\cdot 2^2 + 2^3\right) = \frac{84}{6} = 14.$$

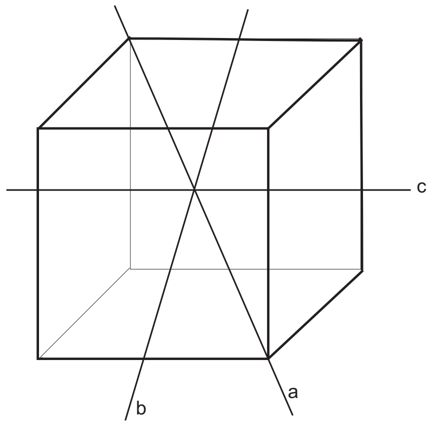
Ako želimo izračunati broj različitih bojenja pri dejstvu diedarske grupe $\mathbb{D}_6$, primjenom formule (10.6) dobijamo

$$\frac{1}{12}\left(2^6 + 2 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 2^3 + 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4\right) = \frac{156}{12} = 13.$$

$\diamondsuit$

Primjer 10.3.8. Šest strana kocke želimo obojiti sa tri boje. Dva bojenja smatramo istim ako se rotacijama kocke[10] jedno može transformisati u drugo. Koliko ima različitih bojenja?

Rješenje: Grupa rotacija kocke G ima 24 elementa. Opišimo ih:



Slika 10.3. *Rotacije kocke.*

tip a: rotacije oko glavne dijagonale (prava a na slici 10.3). Postoje četiri takve prave i oko svake od njih po dvije neidentičke rotacije, za 120° i 240°.

tip b: rotacije za 180° oko prave koja prolazi kroz polovišta naspramnih ivica (na slici 10.3 to je prava b). Postoji šest takvih pravih i ukupno šest rotacija ovog tipa.

Kod prave koja sadrži centre naspramnih strana kocke (prava c na slici 10.3) postoje dvije "vrste" rotacija. Postoje tri takve prave.

[10] Rotacija kocke je rotacija prostora $\mathbb{R}^3$ oko neke prave kojom se kocka slika u samu sebe.

tip c_1: rotacije oko c za 90° (odnosno 270° stepeni) koje su reda tri. Ukupno ima šest takvih rotacija.
tip c_2: rotacije oko c za 180° koje su reda dva. Postoje tri ovakve rotacije.
tip e: Identičko preslikavanje je takođe u grupi rotacija kocke.

Lako je primijetiti da permutacije istog tipa fiksiraju isti broj bojenja strana kocke. Da bismo mogli primijeniti formulu (10.6) izračunajmo $|Fix_Y(\pi)|$ za sve $\pi \in G$:

tip perm.	br. perm. tog tipa	br. ciklusa $c(\pi)$	doprinos u (10.6)
a	8	2	$8 \cdot 3^2$
b	6	3	$6 \cdot 3^3$
c_1	6	3	$6 \cdot 3^3$
c_2	3	4	$3 \cdot 3^4$
e	1	6	3^6

Sada dobijamo da je traženi broj različitih bojenja kocke sa tri boje jednak

$$\frac{1}{24}(72 + 162 + 162 + 243 + 729) = \frac{1368}{24} = 57.$$

$\diamondsuit$

Dakle, sada znamo odgovoriti na pitanje koliko ima različitih bojenja konačnog skupa X pri dejstvu $G < \mathbb{S}_X$ sa bojama iz skupa B.

Međutim, možemo postaviti i još konkretnije pitanje:
Koliko ima bojenja strana kocke sa crvenom, plavom i bijelom bojom, u kojima se crvena boja upotrebi tri puta, plava dva i bijela jedan put?

Još opštije je sljedeće pitanje:

Neka je X skup sa n elemenata i neka na X dejstvuje konačna grupa G. Neka je B skup boja kojima se boje elementi iz X. Koliko ima različitih bojenja elemenata iz X pri dejstvu grupe G u kojima se boja b_1 upotrebi n_1 puta, boja b_2 se upotrebi n_2 puta, ..., boja b_k se upotrebi n_k puta? Pri tome je $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

Primijetimo da u ovom slučaju skup boja može da bude i beskonačan!

Odgovor na postavljeno pitanje ćemo potražiti u obliku funkcija generatrisa. Neka je $B = \{b_1, b_2, \ldots, \}$ dozvoljen skup boja za bojenje n-članog skupa X na kojem dejstvuje grupa $G < \mathbb{S}_X$.

Za niz ili uređenu m-torku $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ (u zavisnosti od toga da li je skup boja B končan ili nije), za koju je $\sum_{k\in\mathbb{N}} n_k = n$ sa $\kappa(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ označimo broj različitih bojenja X u kojima se boja b_1 upotrebi n_1 put, boja b_2 se upotrebi n_2 puta, itd ....

Dakle, odgovor na postavljeno pitanje su koeficijenti polinoma ili stepenog reda (ako je skup boja beskonačan)

$$F_G(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{(n_1,n_2,\ldots);\ \sum n_k = n} \kappa(n_1, n_2, n_3, \ldots) x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \cdots .$$

Primjer 10.3.9. Odrediti polinome $F_{\mathbb{Z}_6}$ i $F_{\mathbb{D}_6}$ pri bojenju tjemena šestougla sa dvije boje.

Rješenje: Direktnim prebrojavanjem sa slike 10.1 dobijamo

$$F_{\mathbb{Z}_6}(x_1, x_2) = x_1^6 + x^5 x_2 + 3x_1^4 x_2^2 + 4x_1^3 x_2^3 + 3x_1^2 x_2^4 + x_1 x_2^5 + x_2^6.$$

Taj polinom je neznatno drugačiji, ako se posmatraju bojenja sa dvije boje pri dejstvu diedarske grupe $\mathbb{D}_n$:

$$F_{\mathbb{D}_6}(x_1, x_2) = x_1^6 + x^5 x_2 + 3x_1^4 x_2^2 + 3x_1^3 x_2^3 + 3x_1^2 x_2^4 + x_1 x_2^5 + x_2^6.$$

$\diamondsuit$

Iz polinoma (ili reda) F_G se lako dobije broj različitih bojenja elemenata skupa X sa bojama iz B pri dejstvu grupe $G < \mathbb{S}_X$. To je naprosto zbir svih koeficijenata F_G, odnosno $F_G(1, 1, \ldots)$. U prethodnom primjeru je $F_{\mathbb{Z}_6}(1, 1) = 14$ i $F_{\mathbb{D}_6}(1, 1) = 13$.

Da bi odredili F_G posmatraćemo jedan drugi polinom - **ciklus indikator** grupe G.

DEFINICIJA 10.3.10 (ciklus indikator). Neka je G podgrupa simetrične grupe $\mathbb{S}_n$. Ako je $type(\pi) = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ tip neke permutacije π iz G (prisjetimo se da je c_k broj k-ciklusa u π), tada se permutaciji π dodijeli monom $Z_\pi = z_1^{c_1} z_2^{c_2} \cdots z_n^{c_n}$. Polinom

$$Z_G(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi\in G} Z_\pi.$$

u promjenljivim $z_1, z_2, \ldots, z_n$ se naziva ciklus indikator grupe G.

Primjer 10.3.11. Izračunati ciklus indikatore grupa iz primjera 10.3.1 (grupe $\mathbb{Z}_6$ i $\mathbb{D}_6$) i 10.3.8 (G je grupa rotacija kocke).

Rješenje: Svaku od posmatranih grupa identifikujemo sa odgovarajućom podgrupom simetrične grupe. Za sve elemente grupe odredimo strukturu ciklusa. Na primjer, četiri rotacije tipa a u primjeru 10.3.8 imaju dva ciklusa dužine tri, šest rotacija tipa c_1 imaju dva ciklusa dužine jedan i jedan ciklus dužine četiri, tri rotacije tipa c_2 imaju dva ciklusa dužine jedan i dva ciklusa dužine dva, itd.... Tako dobijamo

$$Z_{\mathbb{Z}_6} = \frac{1}{6}\left(z_1^6 + z_2^3 + 2z_3^2 + 2z_6\right);$$

$$Z_{\mathbb{D}_6} = \frac{1}{12}\left(z_1^6 + 4z_2^3 + 2z_3^2 + 2z_6 + 3z_1^2 z_2^2\right);$$

$$Z_G = \frac{1}{24}(z_1^6 + 8z_3^2 + 6z_2^3 + 6z_1^2 z_4 + 3z_1^2 z_2^2).$$

$\diamondsuit$

Koristeći ranije uvedene oznake sada možemo izreći glavni rezultat u teoriji Polje i Redfilda.

TEOREMA 10.3.12 (Polja, 1937). *Polinom F_G se dobije tako što promjenljivu z_i u ciklus indikatoru Z_G zamijenimo sa sumom $x_1^i + x_2^i + \cdots$, odnosno:*

$$F_G(x_1, x_2, \ldots) = Z_G(x_1 + x_2 + \cdots, x_1^2 + x_2^2 + \cdots, \ldots, x_1^n + x_2^n + \cdots).$$

Prije dokaza, ilustrujmo kako se prethodna teorema koristi na već poznatom primjeru. Primijenimo je na bojenja strana kocke sa tri boje pri dejstvu grupe rotacija kocke. Ako iskoristimo rješenje iz primjera 10.3.11 dobićemo:

$$F_G(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{24}\Big((x_1+x_2+x_3)^6 + 8(x_1^3+x_2^3+x_3^3)^2 + 6(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^3 +$$

$$+6(x_1 + x_2 + x_3)^2(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) + 3(x_1 + x_2 + x_3)^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2\Big).$$

Broj različitih bojenja strana kocke sa tri crvene, dvije plave i jednom bijelom stranom možemo prepoznati kao koeficijent uz $x_1^3 x_2^2 x_3$ u razvoju ovog polinoma! Uz malo računanja, dobijamo da postoje tri takva bojenja.

Dokaz. Neka je X skup od n elemenata i neka na X dejstvuje neka grupa G. Podsjetimo se da je G podgrupa simetrične grupe $\mathbb{S}_n$.
Dalje, neka je $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ skup boja i neka je $Y = \{f | f : X \to B\}$ skup svih bojenja elemenata iz X sa bojama iz B.

Za niz $\eta = (n_1, n_2, n_3, \ldots)$ u kojem je $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots = n$ uočimo

$$Y_\eta = \{f \in Y |\text{ za sve } k \text{ je } |f^{-1}(b_k)| = n_k\} \subseteq Y.$$

Dakle, skup Y_η čine ona bojenja elemenata skupa X sa bojama iz B u kojima se boja b_k pojavi koristila tačno n_k puta.
Dejstvo permutacija iz grupe G na bojenjima iz Y je opisano u (10.5).
Uočimo da za sve $\pi \in G$ i $f \in Y$ bojenja f i $\pi(f)$ svaku boju iz B upotrebe isti broj puta.
Dakle, ako je $f \in Y_\eta$, tada je i $\pi(f) \in Y_\eta$, pa je sa (10.5) dobro definisano i dejstvo grupe G na skupu Y_η!

Broj orbita u Y_η pri dejstvu grupe G je baš $\kappa(n_1, n_2, \ldots)$, odnosno koeficijent uz $x^{n_1}x^{n_2}\cdots$ u polinomu (redu) F_G. Taj broj možemo odrediti koristeći Bernsajdovu lemu.
Primjetimo da je bojenje f iz Y_η fiksno za π iz G, odnosno $f \in Fix_{Y_\eta}(\pi)$, ako i samo ako vrijedi:

- f je konstanta na svim ciklusima u π, to jest, elementi iz istog ciklusa permutacije π su obojeni istom bojom.
- za svaki k se boja b_k pojavi n_k puta.

Posmatrajmo polinom (ili red)

$$F_\pi = \prod_j (x_1^j + x_2^j + \cdots)^{c_j(\pi)} = Z_\pi(x_1 + x_2 + \cdots, x_1^2 + x_2^2 + \cdots, \ldots).$$

Ako polinom F_π zapišemo kao zbir monoma, primijetimo da se monom $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots$ u F_π pojavi tačno $|Fix_{Y_\eta}(\pi)|$ puta.

Zaista, izbor nekog x_k^j iz činioca $(x_1^j + x_2^j + \cdots)^{c_j(\pi)}$ odgovara bojenju j elemenata jednog od $c_j(\pi)$ ciklusa dužine j sa bojom b_k. Ako se u tom monomu pojavi $x_k^{n_k}$, tada je boja b_k upotrebljena ukupno n_k puta.

Stoga je

$$F_\pi = \sum_\eta |Fix_{Y_\eta}(\pi)| x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots.$$

Sumiranjem po svim $\pi \in G$ i djeljenjem sa $|G|$ dobijamo

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G} F_\pi = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G} Z_\pi(x_1+x_2+\cdots, x_1^2+x_2^2+\cdots,\ldots) =$$

$$= Z_G(x_1+x_2+\cdots, x_1^2+x_2^2+\cdots,\ldots).$$

Sa druge strane, kada promjenimo poredak sumiranja, dobijemo

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G} F_\pi = \sum_{\eta=(n_1,n_2,\ldots)}\left(\frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}|Fix_{Y_\eta}(\pi)|\right)x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots =$$

$$= \text{ na osnovu Bernsajdove leme primjenjene na } Y_\eta = F_G(x_1,x_2,\ldots).$$

□

Sada ćemo pomoću teoreme 10.3.12 riješiti jedan zanimljiv problem. **Ogrlica dužine n** je aranžman n dragulja na kružnici, tako da je udaljenost dva susjedna dragulja uvijek ista. Ako na raspolaganju imamo b različitih vrsta dragulja, i ako postoji dovoljan broj dragulja svake vrste, zanima nas koliko različitih ogrlica[11] dužine n možemo napraviti!

Dvije ogrlice smatramo istim ako se rotacijom jedne može dobiti druga. Dakle, grupa koja dejstvuje na skupu svih ogrlica sa n dragulja je ciklička grupa izomorfna sa $\mathbb{Z}_n$.

Da bismo mogli primijeniti teoremu10.3.12, potrebno je odrediti ciklus indikator $Z_{\mathbb{Z}_n}$. U tome će nam pomoći sljedeća lema.

LEMA 10.3.13. *Neka je n proizvoljan prirodan broj. Za svaki $d \in \mathbb{N}$ koji dijeli broj n, u cikličnoj grupi $\mathbb{Z}_n$ postoji $\varphi(d)$ elemenata reda d (φ je Ojlerova funkcija). Ako $\mathbb{Z}_n$ interpretiramo kao podgrupu $\mathbb{S}_n$, tada svaki element reda d ima $\frac{n}{d}$ ciklusa dužine d.*

Dokaz. Red elementa $m \in \mathbb{Z}_n$ je najmanji prirodan broj d takav da je $m \cdot d = k \cdot n$ za neki prirodan broj k. Ako je (m,n) najveći zajednički djelitelj brojeva m i n, tada je

$$d \cdot \frac{m}{(m,n)} = k \cdot \frac{n}{(m,n)}.$$

Kako su brojevi $\frac{m}{(m,n)}$ i $\frac{n}{(m,n)}$ relativno prosti, a d najmanji prirodan broj sa traženim svojstvom, to je $d = \dfrac{n}{(n,m)}$ i $k = \dfrac{m}{(m,n)}$.

[11] Ako dragulje zamislimo kao tačke, ogrlicu dužine n sa b vrsta dragulja možemo interpretirati kao bojenje tjemena pravilnog n-tougla sa b boja

Dakle, red proizvoljnog elementa $m \in \mathbb{Z}_n$ je $\frac{n}{(n,m)}$, što je svakako djelitelj broja n.

Sada nas još zanima, za proizvoljan broj d koji dijeli n, koliko u grupi $\mathbb{Z}_n$ ima različitih elemenata reda d?
Iz prethodnog razmatranja možemo zaključiti da je svaki $m \in \mathbb{Z}_n$ reda d oblika

$$m = k \cdot \frac{n}{d}, \text{ pri čemu su brojevi } k \text{ i } d \text{ relativno prosti i } k \leqslant d.$$

Različitih izbora za takav $k \in \mathbb{N}$ ima tačno $\varphi(d)$. Očigledno, sve orbite nekog elementa π reda d su oblika $\{x, \pi(x), \pi^2(x), \ldots, \pi^{d-1}(x)\}$ i dužine d. Tih orbita ima $\frac{n}{d}$.

□

Iz prethodne leme dobijamo da je

$$Z_{\mathbb{Z}_n}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) z_d^{\frac{n}{d}}.$$

Sada primjenimo formulu iz teoreme 10.3.12 i dobićemo

$$F_{\mathbb{Z}_n}(x_1, x_2, \ldots, x_b) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d)(x_1^d + x_2^d + \cdots + x_b^d)^{\frac{n}{d}}.$$

Specijalno, broj ogrlica dužine n sačinjenih od b vrsta dragulja (i uz pretpostavku da svake vrste ima dovoljno!) dobijemo kada u $F_{\mathbb{Z}_n}$ uvrstimo $x_1 = x_2 = \cdots = x_b = 1$:

$$\frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) b^{\frac{n}{d}}.$$

Ako u prethodnu formulu uvrstimo $n = 6$ i $b = 2$ dobićemo rješenje iz primjera 10.3.1 sa početka poglavlja

$$\frac{1}{6}(\varphi(1)2^6 + \varphi(2)2^3 + \varphi(3)2^2 + \varphi(6)2^1) = \frac{84}{6} = 14.$$

10.4 Parcijalno uređeni skupovi

U raznim oblastima matematike važnu ulogu imaju skupovi u kojima se, na neki prirodan način, elementi mogu upoređivati po veličini. Za takve skupove kažemo da su parcijalno uređeni. Evo i formalne definicije parcijalno uređenih skupova.

DEFINICIJA 10.4.1. Neka je P neprazan skup i neka je $\leqslant$ relacija na skupu P koja je

- *refleksivna*: za sve $x \in P$ vrijedi $x \leqslant x$;
- *antisimetrična*: ako vrijedi $x \leqslant y$ i $y \leqslant x$ tada je $x = y$;
- *tranzitivna*: ako je $x \leqslant y$ i $y \leqslant z$ tada je i $x \leqslant z$.

Uređen par $(P, \leqslant)$ se naziva **parcijalno uređen skup** ili kraće **poset**.

Relacija $\leqslant$ se naziva **poredak** ili **uređenje** na skupu P. Ako je iz konteksta jasno o kojem poretku je riječ, govorićemo o posetu P, bez naglašavanja o kojem je poretku riječ.

Dva elementa x i y nekog poseta P su uporedivi ako je $x \leqslant y$ ili $y \leqslant x$, inače su neuporedivi. Riječ *parcijalno* u imenu ove strukture naglašava da nisu nužno svaka dva elementa iz skupa P uporediva.

Ako je $x \leqslant y$, a nije $x = y$ kažemo da je x manji od y i to se uobičajeno zapiše sa $x < y$.

Ako je skup P konačan kažemo da je P konačan poset. Svi poseti koje budemo posmatrali će biti konačni i to nećemo posebno naglašavati.

Evo nekoliko primjera poseta:

1. Na skupu $[n]$ možemo posmatrati uobičajen poredak $\leqslant$. U posetu $([n], \leqslant)$ su svaka dva elementa uporediva, to jest, ovaj poset je linearno uređen.
2. Za sve $n \in \mathbb{N}$ sa $\mathbb{B}_n$ označimo poset na partitivnom skupu od $[n]$. Relacija poretka u posetu $\mathbb{B}_n$ je inkluzija $\subseteq$.
3. Za proizvoljan prirodan broj n, označimo sa D_n skup svih djelitelja broja n. Poredak na skupu D_n je relacija biti djeljiv, što se uobičajeno označi sa $|$. Dakle, broj x je "manji" od y u posetu D_n ako i samo ako x dijeli y.
4. Neka je Π_n skup svih particija skupa $[n]$. Poredak na Π_n se može definisati ovako: $\pi \leqslant \sigma$ ako i samo ako je svaki blok particije σ unija nekih blokova particije π.

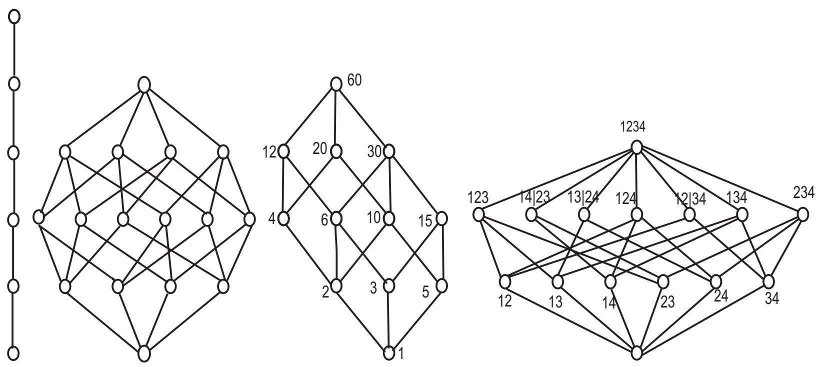
Počećemo sa definicijama nekih osnovnih pojmova o posetima. Zainteresovani čitalac više informacija o posetima može pronaći u [34].

Ako je x element nekog poseta P i ako ne postoji y iz P takav da je $y < x$ kažemo da je x **minimalan element** u posetu P. Na sličan način se definiše i **maksimalan element** u posetu P $-$ to je element od kojeg nijedan element iz poseta P nije veći. Svaki konačan poset ima minimalan i maksimalan element, ali ti elementi ne moraju biti jedinstveni. Ako su u posetu P minimalan i maksimalan element jedinstveni, uobičajeno je te elemente označiti sa $\hat{0}_P$ i $\hat{1}_P$.

Ako je $(P, \leqslant)$ neki poset i ako je $Q \subseteq P$ **indukovan potposet** $(Q, \leqslant)$ se definiše prirodno: za x, y iz Q vrijedi $x \leqslant y$ u Q ako i samo ako je $x \leqslant y$ u P. Za x, y iz P za koje vrijedi $x \leqslant y$ definišemo **zatvoren interval** $[x, y]$ kao potposet od P indukovan skupom $\{z \in P : x \leqslant z \leqslant y\}$. Slično se definiše i **otvoren interval** $(x, y) = \{z \in P : x < z < y\}$. Specijalno je $(x, x) = \emptyset$.

Ako u posetu P vrijedi $x < y$ i $(x, y) = \emptyset$, kažemo da y **natkriva** x i to zapišemo sa $x \prec y$. Svaki konačan poset je lako rekonstruisati iz relacije natkrivanja. Ta činjenica se koristi da se poset predstavi grafički.

Haseov dijagram[12] poseta P je graf čija su tjemena elementi iz P. Ako je $x < y$ tada se tačka koja odgovara elementu x nalazi ispod tačke koja odgovara y. Dalje, ako je $x \prec y$ tada su tačke koje odgovaraju elementima x i y spojene ivicom. Haseovi dijagrami poseta koje smo maloprije posmatrali[13] su na slici 10.4.



Slika 10.4. *Primjeri poseta* $([6], \leqslant)$, $\mathbb{B}_4$, D_{60} i Π_4

[12] Helmut Hasse (1898-1979)

[13] Zbog preglednosti, nisu označeni svi elementi u Haseovim dijagramima. U oznakama elemenata poseta Π_4 su izostavljeni svi jednočlani blokovi.

Lanac C u posetu P je podskup od P u kojem su svaka dva elementa uporediva. **Dužina lanca** C se označava sa $\ell(C)$ i definišemo da je $\ell(C) = |C| - 1$. Lanac C u posetu P je **maksimalan** ako ne postoji $x \in P \setminus C$ takav da je $C \cup \{x\}$ takođe lanac u P.

Poset P je **graduisan** ako su svi maksimalni lanci u posetu P iste dužine i ako poset P ima jedinstvene najmanji i najveći element $\hat{0}_P$ i $\hat{1}_P$. U graduisanom posetu, za svaki $x \in P$, svi maksimalni lanci u intervalu $[\hat{0}, x]$ su iste dužine.
To svojstvo poseta definiše **funkciju ranga** $r : P \to \mathbb{N}_0$, gdje je $r(x) = \ell(C)$ za neki maksimalan lanac C u intervalu $[\hat{0}, x]$.

Funkciju ranga na graduisanom posetu P možemo opisati i ovako:

$$r(\hat{0}_P) = 0, \text{ i ako su } x, y \in P \text{ takvi da } x \prec y \text{ tada je } r(y) = r(x) + 1.$$

Antilanac u posetu P je podskup od P u kojem nikoja dva elementa nisu uporediva.

PRIMJEDBA 10.4.2. Ako je C lanac, a A antilanac u posetu P, tada vrijedi $|C \cap A| \leqslant 1$.
Očigledna posljedica ove primjedbe su sljedeća dva tvrđenja:

(i) Ako poset P ima lanac sa r elemenata tada se P ne može napisati kao disjunktna unija manje od r antilanaca.
(ii) Ako poset P ima antilanac od m elemenata tada se P ne može napisati kao disjunktna unija manje od m lanaca.

Može se pokazati da u prethodnim tvrđenjima vrijede jednakosti. Dakle, svaki poset se može podijeliti na onoliko antilanaca (lanaca) kolika je veličina najvećeg lanca (antilanca) u P.

TEOREMA 10.4.3. *Ako najduži lanac u posetu P ima r elemenata tada se P može napisati kao unija r disjunktnih antilanaca.*

Dokaz. Svakom elementu x iz poseta P dodijelimo visinu $v(x) :=$ dužina najdužeg lanca kojem je maksimalan element x.
Uočimo skupove $A_i := \{x \in P : v(x) = i\}$. Kako je najduži lanac u P dužine r, to je $A_i = \emptyset$ za $i \geqslant r$. Očigledno je da su elementi u istom A_i neuporedivi, pa je

$$P = A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_{r-1}.$$

traženo razlaganje P na antilance.

□

TEOREMA 10.4.4 (Dilvort[14]). *Ako najbrojniji antilanac u posetu P ima m elemenata, tada se P može napisati kao unija m disjunktnih lanaca.*

Dokaz. Tvrđenje ćemo dokazati indukcijom po broju elemenata u P. Posmatraćemo dva slučaja:

1° Postoji antilanac A sa m elemenata koji sadrži bar jedan element koji nije minimalan i bar jedan element koji nije maksimalan u P.

Tada se mogu uočiti neprazni skupovi

$$G = \{x \in P : \text{ postoji } a \in A \text{ takav da je } a \leqslant x\},$$

$$D = \{y \in P : \text{ postoji } a \in A \text{ takav da je } y \leqslant a\}.$$

Tada je $G \cap D = A$, a skupovi D i G imaju manje elemenata od P. Na indukovane posete D i G možemo primijeniti induktivnu pretpostavku. Primijetimo da je A antilanac najveće dužine i u posetima D i G.

Ako su $C_1' \cup C_2' \cup \cdots \cup C_m' = D$ i $C_1'' \cup C_2'' \cup \cdots \cup C_m'' = G$ dekompozicije poseta D i G u disjunktne lance, svaki od tih lanaca sadrži tačno jedan element iz A.

Nadovezujući lance C_i' iz D i C_j'' iz G koji sadrže isti element iz A, dobićemo particiju poseta P u m disjunktnih lanaca.

2° Svaki maksimalan antilanac sa m elemenata sadrži samo sve minimalne ili samo sve maksimalne elemente poseta P.

U ovom slučaju uočimo minimalan element $x \in P$ i maksimalan $y \in P$ takav da je $x \leqslant y$. U posetu $P' = P \setminus \{x, y\}$ antilanac može imati najviše $m-1$ elemenata, jer bi inače postojao antilanac u posetu P sa m elemenata koji ne sadrži sve minimalne niti sve maksimalne elemente iz P. Sada iskoristimo induktivnu pretpostavku i zaključimo da je poset P' moguće podijeliti u najviše $m-1$ lanaca.

Kada se tim lancima doda i lanac $x \leqslant y$, dobili smo podjelu poseta P u m disjunktnih lanaca.

□

Teorema Hola o sistemima različitih predstavnika se lako može izvesti iz Dilvortove teoreme.

[14] Robert Palmer Dilworth (1914 - 1993)

Još jedan dokaz teoreme 10.2.2 :

Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ konačni skupovi. Posmatrajmo poset P koji čine svi elementi iz $\cup_{i\in[n]}A_i$ i još n "specijalnih" elemenata $x_1, x_2, \ldots x_n$ koji ne pripadaju nijednom od A_i.

Poredak na posetu P definišemo ovako:

elementi iz $\cup_{i\in[n]}A_i$ su minimalni, dok je x_i veći od svih elemenata iz A_i, to jest $a < x_i$ ako i samo ako $a \in A_i$.

Uslov iz Holove teoreme

$$\text{za sve } \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq [n] \text{ vrijedi } |A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}| \geqslant k$$

nam garantuje da najveći antilanac A u tom posetu ne može imati više od $| \cup_{i\in[n]} A_i|$ elemenata.

Stoga, elementi iz $\cup_{i\in[n]}A_i$ čine antilanac maksimalne veličine u P. Iskoristimo tvrđenje teoreme 10.4.4, i primijetimo da u dekompoziciji P u disjunktne lance svaki x_i pripada tačno jednom od tih lanaca. Uočimo n lanaca oblika $\{a_i < x_i\}$. Minimalni elementi tih lanaca čine sistem različitih predstavnika.

$\square$

Sada ćemo pokazati kako se neke numeričke karakteristike poseta mogu računati uz malu pomoć linearne algebre. Za proizvoljan poset P sa *Int*(P) označimo skup svih zatvorenih, nepraznih intervala u posetu P.

DEFINICIJA 10.4.5. Algebra incidencije $I(P)$ na posetu P je skup svih funkcija $f : \mathit{Int}(P) \to \mathbb{C}$. Umjesto $f([x, y])$ pisaćemo kraće $f(x, y)$. Množenje u algebri $I(P)$ je preslikavanje $f * g$ definisano sa:

$$\big(f * g\big)(x, y) = \sum_{z\in[x,y]} f(x, z) \cdot g(z, y).$$

Preslikavanje $f * g$ se naziva konvolucija funkcija f i g.

Ako je $(P, \leqslant)$ neki poset, **linearna ekstenzija** poretka na posetu P je proširenje relacije $\leqslant$ tako da svaka dva elementa u P budu uporedivi. Drugim riječima, linearna ekstenzija P je permutacija $x_1, x_2, \ldots, x_n$ njegovih elemenata u kojoj se svaki element iz P pojavi prije svih onih od kojih je manji (to jeste, vrijedi $x_i < x_j \Rightarrow i < j$). Na primjer,

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}$$

je jedna linearna ekstenzija poseta $\mathbb{B}_3$.

PRIMJEDBA 10.4.6. Neka je $x_1, x_2, \ldots, x_n$ neka linearna ekstenzija poretka na posetu P. Funkcija $f : Int(P) \to \mathbb{C}$ se može identifikovati sa $n \times n$ matricom $F = \big(f_{ij}\big)$ u kojoj je

$$f_{ij} = \begin{cases} f(x_i, x_j), & \text{ako je } x_i \leqslant x_j; \\ 0, & \text{ako } x_i \text{ i } y_j \text{ nisu uporedivi.} \end{cases}$$

Množenje elemenata u algebri $I(P)$ sada možemo prepoznati kao obično množenje matrica. Dalje, možemo zapaziti da je matrica pridružena proizvoljnoj funkciji $f \in I(P)$ uvijek gornje-trougaona. To je posljedica činjenice da su indeksi za vrste i kolone matrice linearna ekstenzija poseta P.

Iz prethodne primjedbe je lako zaključiti da je funkcija $\delta : Int(P) \to \mathbb{C}$ definisana sa

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ ako je } x = y; \\ 0, \text{ inače.} \end{cases}$$

jedinica u algebri $I(P)$. To znači da za sve $f \in I(P)$ vrijedi $f * \delta = \delta * f = f$.

Za funkciju $f \in I(P)$ kažemo da je invertibilna u algebri $I(P)$ ako i samo ako postoji $g \in I(P)$ tako da je $f * g = g * f = \delta$. Ako takva funkcija g postoji označava se sa f^{-1} i naziva inverz od f. Koristeći matričnu reprezentaciju elemenata algebre $I(P)$ iz primjedbe 10.4.6. možemo zaključiti da je $f \in I(P)$ invertibilna ako i samo ako za sve $x \in P$ vrijedi $f(x, x) \neq 0$.
Pomoću algebre incidencije možemo odrediti broj lanaca, broj maksimalnih lanaca i broj multilanaca u nekom intervalu $[x, y]$.
Multilanac dužine k od x do y je niz (multiskup) $x = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_k = y$ elemenata iz P.

Zeta funkcija na posetu P je definisana sa $\zeta(x, y) = 1$ ako je $x \leqslant y$ u posetu P, a ako su x i y neuporedivi tada je $\zeta(x, y) = 0$.

TEOREMA 10.4.7. *Broj multilanaca dužine k od x do y je $\zeta^k(x, y)$.*

Dokaz. Koristimo indukciju po k. Za $k = 1$ postoji tačno jedan lanac $x = x_0 \leqslant x_1 = y$ dužine jedan (ako je $x \leqslant y$) ili nijedan (ako su x i y neuporedivi). Naravno, broj multilanaca dužine jedan je jednak $\zeta(x, y)$. Primijetimo da je

$$\zeta^2(x, y) = \sum_{z \in [x,y]} \zeta(x, z)\zeta(z, y) = \sum_{z \in [x,y]} 1 = \big|[x, y]\big|,$$

što je tačno broj multilanaca dužine dva od x do y. Dalje, možemo računati

$$\zeta^k(x,y) = \big(\zeta^{k-1} * \zeta\big)(x,y) = \sum_{z\in[x,y]} \zeta^{k-1}(x,z)\zeta(z,y).$$

Na osnovu induktivne pretpostavke dobijamo da je

$$\zeta^k(x,y) = \sum_{x=x_0\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_k=y} 1.$$

Stoga je broj multilanaca dužine k u intervalu $[x,y]$ jednak $\zeta^k(x,y)$.

□

PRIMJEDBA 10.4.8. Na sličan način se može dokazati da je broj lanaca dužine k od x do y jednak $\big(\zeta-\delta\big)^k(x,y)$.

TEOREMA 10.4.9. *Broj svih lanaca u* $[x,y]$ *je* $\big(2\delta-\zeta\big)^{-1}(x,y)$.

Dokaz. Neka je k dužina najdužeg lanca u $[x,y]$. Iz primjedbe 10.4.8 znamo da je tada $(\zeta-\delta)^{k+1}(x,y)=0$. Stoga, u algebri $I(P)$ vrijedi

$$\Big(\big(\delta+\big(\delta-\zeta\big)\big) * \Big[\delta+\big(\zeta-\delta\big)+\cdots+\big(\zeta-\delta\big)^k\Big]\Big)(x,y) = \delta(x,y).$$

Iz prethodne jednakosti dobijamo da je

$$\big(2\delta-\zeta\big)^{-1}(x,y) = \delta(x,y)+\big(\zeta-\delta\big)(x,y)+\big(\zeta-\delta\big)^2(x,y)+\cdots\big(\zeta-\delta\big)^k(x,y).$$

Tvrđenje teoreme slijedi iz primjedbe 10.4.8.

□

U prethodnoj teoremi se pokazalo inverz neke prirodno definisane funkcije iz algebre incidencije može biti od koristi u određivanju nekih kombinatornih svojstava poseta P. Posebno važnu i čestu primjenu ima inverz zeta funkcije.

DEFINICIJA 10.4.10 (Mebijusova[15] funkcija). Mebijusova funkcija μ na posetu P je inverz zeta funkcije ζ. Iz uslova $\mu*\zeta=\delta$ dobijamo da je

$$\delta(x,y) = \sum_{z\,:\,x\leqslant z\leqslant y} \mu(x,z) = \begin{cases} 1, \text{ ako je } x=y; \\ 0, \text{ ako je } x<y. \end{cases}$$

[15] August Ferdinand Möbius (1790 - 1868)

Iz prethodne jednakosti možemo zaključiti da je Mebijusova funkcija na posetu P definisana sa $\mu(x,x)=1$, za sve $x \in P$, dok za $x<y$ vrijedi

$$\mu(x,y) = -\sum_{z\,:\,x\leqslant z<y} \mu(x,z).$$

Evo nekoliko poseta kod kojih je lako izračunati Mebijusovu funkciju.

(i) Neka je $([n], \leqslant)$ lanac sa n elemenata. Iz definicije Mebijusove funkcije je očigledno da za $x \leqslant y$ u ovom posetu vrijedi

$$\mu(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x=y; \\ -1, & \text{ako je } x \prec y \text{ ;} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(ii) U posetu $\mathbb{B}_n$ za $A \subseteq B$ vrijedi $\mu(A,B) = (-1)^{|B\setminus A|}$.

To se može pokazati indukcijom po $|B \setminus A|$. Ako je $|B \setminus A| = k$, iz definicije 10.4.10 i iz induktivne pretpostavke dobijamo

$$\mu(A,B) = -\sum_{C:A\subseteq C\subsetneq B} \mu(A,C) = -\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i}(-1)^i = (-1)^k.$$

Za proizvoljne posete $(P, \leqslant_P)$ i $(Q, \leqslant_Q)$ definišemo **direktni proizvod** kao novi poset na skupu $P \times Q$. U tom posetu je

$$(x,y) \leqslant (x',y') \text{ ako i samo ako je } x \leqslant_P x' \text{ i } y \leqslant_Q y'.$$

TEOREMA 10.4.11. *Neka su μ_P i μ_Q Mebijusove funkcije na posetima P i Q. Tada, za Mebijusovu funkciju na posetu $P \times Q$ vrijedi*

$$\mu_{P\times Q}\big((x,y),(x',y')\big) = \mu_P(x,x')\mu_Q(y,y').$$

Dokaz. Pokazaćemo da funkcija $P \times Q \mapsto \mathbb{C}$ koja uređenom paru $((x,y),(x',y'))$ dodijeli $\mu_P(x,x')\mu_Q(y,y')$ zadovoljava uslove iz definicije 10.4.10. Ako je $x=x'$ i $y=y'$ to je očigledno. Ako je $x \neq x'$ ili $y \neq y'$ tada je

$$0 = \left(\sum_{p:x\leqslant p\leqslant x'} \mu_P(x,p)\right)\left(\sum_{q:y\leqslant q\leqslant y'} \mu_Q(y,q)\right) = \sum_{(p,q)} \mu_P(x,p)\mu_Q(y,q).$$

U posljednjoj sumi, sabiramo po svim (p,q) iz $[(x,y),(x',y')]$. Ovako definisana funkcija je inverz zeta funkcije, pa tvrđenje teoreme slijedi iz jedinstvenosti inverza u algebri $I(P)$.

$\square$

Neka su $n_1, n_2, \ldots, n_k$ prirodni brojevi i neka je $([n_i], \leqslant)$ lanac dužine n_i. Poset $P = [n_1] \times [n_2] \times \cdots \times [n_k]$ možemo identifikovati sa skupom uređenih k-torki $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, pri čemu je $1 \leqslant x_i \leqslant n_i$ i vrijedi

$$\mathbf{x} \leqslant_P \mathbf{y} \text{ ako i samo ako je } x_i \leqslant y_i \text{ za sve } i \in [n].$$

Mebijusovu funkciju poseta P možemo odrediti koristeći teoremu 10.4.11:

$$\mu_P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} (-1)^{\sum_{i=1}^{k}(y_i - x_i)}, & \text{ako je } y_i - x_i \text{ jednak } 0 \text{ ili } 1 \text{ za sve } i; \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Ako je kanonska faktorizacija prirodnog broja $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$ tada se poset njegovih djelitelja D_n može identifikovati sa $P = [n_1] \times [n_2] \times \cdots \times [n_k]$. U tom posetu je $x \leqslant y$ ako i samo ako $x|y$. Mebijusova funkcija u posetu D_n je

$$\mu(x, y) = \begin{cases} (-1)^t, & \text{ako je } \frac{y}{x} \text{ proizvod } t \text{ različitih prostih brojeva;} \\ 0, & \text{ako kvadrat nekog prostog broja dijeli } \frac{y}{x}. \end{cases}$$

Tako se Mebijusova funkcija ovog poseta može prepoznati kao Mebijusova funkcija iz teorije brojeva:

$$\mu(r) = \begin{cases} (-1)^t, & \text{ako je } r \text{ proizvod } t \text{ različitih prostih brojeva;} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{10.7}$$

Primijetimo da je $\mu(r) = \mu_{D_r}(1, r)$.

TEOREMA 10.4.12. *Neka je P proizvoljan konačan poset i neka $\hat{P}$ označava poset koji se dobije kada u P dodamo $\hat{0}$ i $\hat{1}$. Ako je c_k broj lanaca $\hat{0} < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < \hat{1}$ dužine k između $\hat{0}$ i $\hat{1}$, tada vrijedi*

$$\mu_{\hat{P}}(\hat{0}, \hat{1}) = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \cdots .$$

Dokaz.

$$\mu_{\hat{P}}(\hat{0}, \hat{1}) = \zeta_{\hat{P}}^{-1}(\hat{0}, \hat{1}) = (\delta + (\zeta - \delta))^{-1}(\hat{0}, \hat{1}) =$$

$$= \delta(\hat{0}, \hat{1}) - (\zeta - \delta)(\hat{0}, \hat{1}) + (\zeta - \delta)^2(\hat{0}, \hat{1}) - \cdots = c_0 - c_1 + c_2 - \cdots .$$

Posljednja jednakost slijedi na osnovu primjedbe 10.4.8.

□

Prethodna teorema je zanimljiva jer povezuje Mebijusovu funkciju i Ojlerovu karakteristiku, jedan važan pojam u algebarskoj topologiji. O vezi između kombinatorike i topologije se govori u [8], [25] i [41].

Sljedeće tvrđenje je još jedan od razloga zašto je funkcija Mebijusa toliko značajna.

TEOREMA 10.4.13 (Mebijusova formula inverzije). *Neka je P neki poset i neka je $f : P \to \mathbb{C}$. Ako definišemo funkciju $g : P \to \mathbb{C}$ sa $g(x) = \sum_{y \leqslant x} f(y)$ tada za sve $x \in P$ vrijedi*

$$f(x) = \sum_{y \leqslant x} \mu(y, x) g(y).$$

Dokaz. Neka je $x_1, x_2, \ldots, x_n$ neka linearna ekstenzija poseta P. Funkcije f i g možemo zapisati kao vektore iz $\mathbb{C}^n$:

$$\mathbf{f} = \big(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\big) \text{ i } \mathbf{g} = \big(g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_n)\big).$$

Neka je $\mathbf{Z} = (z_{ij})$ matrični zapis zeta funkcije (gornje-trougaona, $z_{ij} = 1 \Leftrightarrow x_i \leqslant x_j$, inače je $z_{ij} = 0$) poseta P. Definiciju funkcije g iz formulacije teoreme sada možemo iskazati pomoću proizvoda matrica:

$$\mathbf{g} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{Z}. \tag{10.8}$$

Inverzna matrica za $\mathbf{Z}$ je matrica $\mathbf{M} = \big(m_{ij}\big)$, gdje je

$$m_{ij} = \begin{cases} \mu(x_i, x_j), & \text{ako je } x_i \leqslant x_j; \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Množenjem formule (10.8) sa $\mathbf{M}$ dobijamo da je $\mathbf{f} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{M}$.

□

Iz dokaza prethodne teoreme lako se zaključi da za funkcije f i g vrijedi

$$g(x) = \sum_{y \leqslant x} f(y) \text{ za sve } x \in P \Leftrightarrow f(x) = \sum_{y \leqslant x} \mu(y, x) g(y) \text{ za sve } x \in P.$$

Na sličan način, množeći matricom $\mathbf{M}$ slijeva izraz $\mathbf{g}^\tau = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{f}^\tau$ zaključujemo da vrijedi

$$g(x) = \sum_{y \geqslant x} f(y) \text{ za sve } x \in P \Leftrightarrow f(x) = \sum_{y \geqslant x} \mu(y, x) g(y) \text{ za sve } x \in P.$$

Važnost teoreme 10.4.13, između ostalog je u tome što su neke poznate teoreme njen specijalni slučaj. Sljedeća teorema je važna u teoriji brojeva.

TEOREMA 10.4.14. *Neka su* $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *takve da za sve* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$. *Tada je* $f(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d)\, g(d)$, *gdje je* μ *Mebijusova funkcija iz teorije brojeva, definisiana u formuli (10.7).*

Za funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ se definiše operator diferenciranja Δ sa:

$$\Delta f(n) = f(n) - f(n-1).$$

Po dogovoru se smatra da je $f(0) = 0$. Operator Δ se može shvatiti kao diskretna varijanta izvoda funkcije f. Slično, diskretna zamjena za integral funkcije je operator S:

$$Sf(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i).$$

Osnovna teorema diferencnog računa je

TEOREMA 10.4.15. *Za proizvoljnu funkciju* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *vrijedi*

$$\Delta S f(n) = f(n).$$

Sljedeća teorema je važno uopštenje formule uključenja-isključenja (vidjeti relaciju (7.5)).

TEOREMA 10.4.16. *Neka su* f *i* g *funkcije koje podskupovima od* $[n]$ *dodjeljuju kompleksne brojeve i neka je*

$$g(R) = \sum_{T:R\subseteq T} f(T) \textit{ za sve } R \subseteq [n].$$

Tada vrijedi

$$f(R) = \sum_{T:R\subseteq T} (-1)^{|T\setminus R|} g(T) \textit{ za sve } R \subseteq [n].$$

Prethodne tri teoreme nije teško dokazati direktno, ali za tim nema potrebe. Jednostavno uočimo da ih možemo dobiti primjenom Mebijusove formule inverzije na posete $(D_n, |)$, $([n], \leqslant)$ i $(\mathbb{B}_n, \subseteq)$.

O značaju Mebijusove funkcije i raznim primjenama više se može pročitati u [29], [1] i [36].

10.5 Neki enumerativni problemi iz teorije grafova

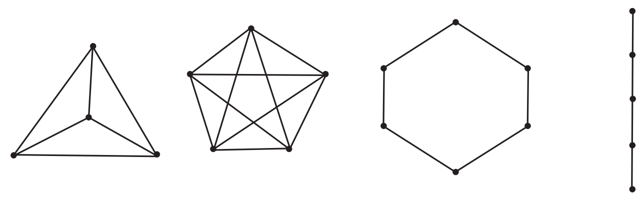
U ovom poglavlju posmatramo nekoliko interesantnih i važnih problema enumerativne kombinatorike koji su se pojavili u teoriji grafova. Neki od tih problema će poslužiti za ilustraciju snage i efikasnosti metoda prebrojavanja o kojima je bilo riječi u ovoj glavi.

Na početku dajemo definicije osnovnih pojmova koje ćemo koristiti. Zaineresovani čitaoci više detalja o tim pojmovima, i o grafovima uopšte, mogu naći u [28] i [39].

Formalno, **prost graf** $G = (V, E)$ je uređen par sastavljen od nepraznog skupa V (**tjemena** grafa G) i skupa E (**ivice** grafa G), pri čemu je E podskup skupa svih dvočlanih podskupova od V. Ivicu $e = \{u, v\} \in E$ u grafu G uobičajeno je kraće zapisati sa $e = uv$. Ako je $e = uv \in E$, kažemo da su tjemena u i v **susjedna** u grafu G (ivica e spaja tjemena u i v). Evo nekoliko primjera grafova:

- kompletan graf sa n tjemena: $K_n = ([n], \binom{[n]}{2})$,
- put sa n tjemena: $P_n = ([n], \{12, 23, \ldots, (n-1)n\})$,
- ciklus sa n tjemena: $C_n = ([n], \{12, 23, \ldots, (n-1)n, 1n\})$.

Uobičajeno je graf predstaviti crtežom u ravni, tako da tjemena grafa budu tačke u ravni, a ivice duži ili krive koje spajaju susjedna tjemena. Na slici 10.5 su grafovi K_4, K_5, C_6 i P_5.



Slika 10.5. Grafovi K_4, K_5, C_6, P_5.

Graf $G_1(V_1, E_1)$ je **izomorfan** sa grafom $G_2(V_2, E_2)$ ako postoji bijekcija $f : V_1 \to V_2$ takva da vrijedi:

$$uv \in E_1 \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E_2.$$

Za tjeme $v \in V$ u grafu G, **stepen tjemena** v je broj $d(v)$ tjemena iz V koji su susjedni sa v. Ako su $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sva tjemena grafa G, **niz stepena** tjemena tog grafa je uređena n-torka $(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n))$.

Ako su u i v tjemena grafa G, **put** od u do v je niz različitih tjemena $u = v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1} = v$ u grafu G, tako da za sve $i \in [k]$ vrijedi $v_i v_{i+1} \in E$.

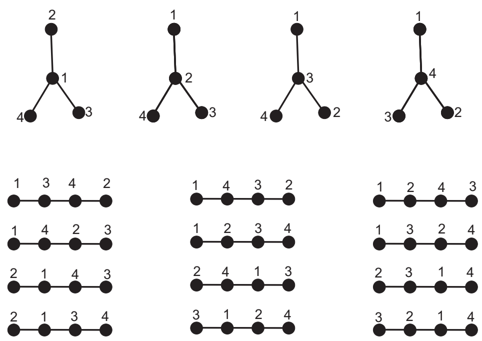
Graf $G = (V, E)$ je **povezan** ako za svaka dva tjemena u i v postoji put od u do v. Graf G je **šuma** (ili acikličan) ako ne sadrži zatvoren put (**ciklus**) $v_1 v_2 \ldots v_k v_1$. Povezan, acikličan graf se naziva **stablo**. Tjeme stepena jedan u stablu se naziva **list**.

Neka je G graf sa n tjemena. Može se pokazati da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

- G je stablo,
- G je povezan graf sa $n-1$ ivicom,
- G je acikličan graf sa $n-1$ ivicom.

BROJ OZNAČENIH STABALA

Jedan od najpoznatijih i najljepših rezultata u kombinatorici je Kejlijeva[16] formula za broj označenih stabala. Označeno stablo sa n tjemena ima fiksiran skup tjemena, uobičajeno je to skup $[n]$. Dva označena stabla su ista ako su im skupovi grana jednaki. Na slici 10.6 se nalazi 16 različitih označenih stabala sa četiri tjemena.



Slika 10.6. *Sva označena stabla sa četiri tjemena.*

TEOREMA 10.5.1 (Kejli, 1889). *Postoji tačno n^{n-2} označenih stabala sa n tjemena.*

Pored toga što daje elegantan i jednostavan odgovor na prirodno postavljeno pitanje, ova teorema je zanimljiva i lijepa i zato što se može dokazati koristeći različite kombinatorne ili algebarske metode.

[16] Arthur Cayley (1821-1895)

- **Dokaz bijekcijom:**

Broj n^{n-2} je lako prepoznati kao broj svih uređenih $(n-2)$-torki elemenata skupa $[n]$. Kejlijeva teorema će biti dokazana ako se pokaže da postoji bijekcija između skupa svih označenih stabala sa n tjemena i skupa $[n]^{n-2}$. Hajnc Prifer[17] je 1918. godine opisao kako se svakom označenom stablu T sa n tjemena može dodijeliti Priferov niz $a_T = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ iz skupa $[n]^{n-2}$ tako da preslikavanje $T \mapsto a_T$ bude bijekcija.

Preslikavanje koje označenom stablu T dodijeli niz a_T može se konstruisati na sljedeći način:

Neka je v list u T sa najmanjom oznakom i neka je oznaka njegovog susjeda a_1. Ta oznaka a_1 je prvi član Priferovog niza. Sada posmatrajmo stablo $T - \{v\}$, uočimo list sa najmanjom oznakom, i upamtimo oznaku a_2 njegovog susjeda u $T \setminus \{v\}$ (ta tjemena su susjedna i u polaznom stablu T). Oznaka a_2 je drugi član Priferovog niza za stablo T. Ovaj postupak ponavljamo $n-2$ puta; sve dok ne ostane samo jedna ivica u T.

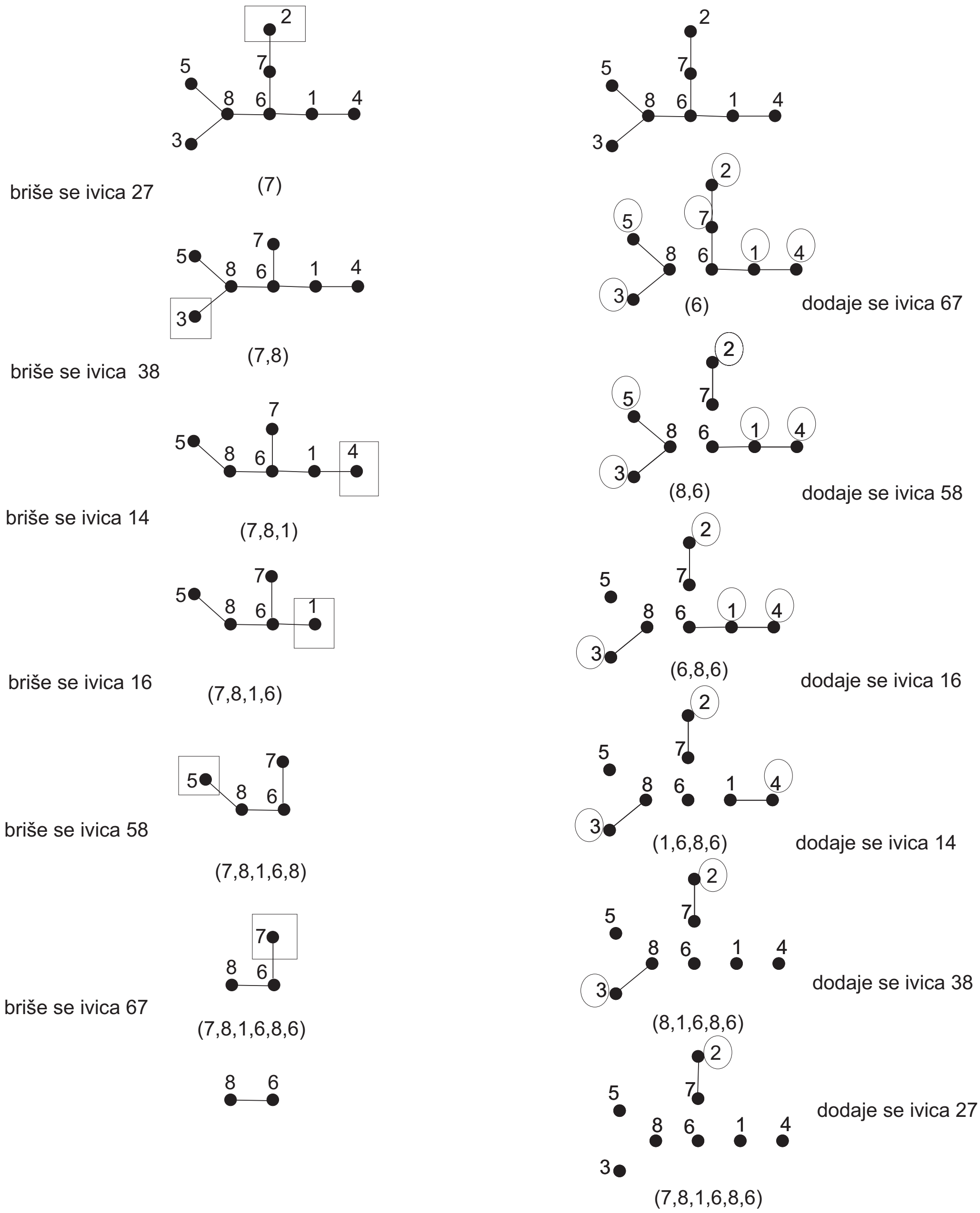
Indukcijom po broju tjemena lako se može pokazati da se u Priferovom nizu $\mathbf{a}_T = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ stabla T svako tjeme v pojavi tačno $d(v) - 1$ puta. Dakle, jedina tjemena stabla T koja se ne pojave u Priferovom nizu $\mathbf{a}_T$ su listovi.

Da je prethodno opisano preslikavanje bijekcija, pokaže se tako što se opiše inverzno preslikavanje koje svakom nizu iz $[n]^{n-2}$ dodijeli stablo.

Ako je $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}) \in [n]^{n-2}$, tom nizu dodijelimo stablo $T_{\mathbf{a}}$ na sljedeći način: Neka je v_1 najmanji broj koji se ne pojavi u nizu $\mathbf{a}$. Tjeme v_1 spojimo sa tjemenom a_1. Dalje, uočimo najmanji broj v_2 iz $[n] \setminus \{v_1\}$ koji se ne pojavljuje u nizu $(a_2, a_3, \ldots, a_{n-2})$. Tjeme v_2 spojimo sa tjemenom a_2. Ovaj postupak ponovimo $n-2$ puta i dobijemo acikličan graf sa $n-2$ ivica i dvije komponente povezanosti (dva stabla sa ukupno n tjemena). Na kraju, dva tjemena koja se nisu pojavila u skupu $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}\}$ (po jedno u svakoj od komponenti dosad konstruisanog grafa) spojimo ivicom i dobijemo stablo $T_{\mathbf{a}}$.

Koraci u konstrukciji stabla od zadanog niza su inverzni onima pri konstrukciji Priferovog niza od polaznog stabla, pa je $T \mapsto \mathbf{a}_T$ bijekcija. Jedan primjer korespondencije označenog stabla i Priferovog niza je na slici 10.7.

[17] Ernst Paul Heinz Prüfer (1896-1934)



Slika 10.7. *Primjer korespondencije između označenih stabala i Priferovih nizova.*

- **Dokaz pomoću polinomne formule:**

LEMA 10.5.2. *Niz* $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ *je niz stepena nekog stabla sa* n *tjemena ako i samo ako vrijedi*

$$d_i \in \mathbb{N} \text{ za sve } i \in [n],\ d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2n - 2.$$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Kako svako tjeme u stablu ima bar jednog susjeda, svi d_i su prirodni brojevi. Brojeći elemente skupa

$$\{(v, e) : v \in V, e \in E, \text{ tjeme } v \text{ je incidentno sa ivicom } e\}$$

na dva načina, možemo zaključiti da je u svakom grafu zbir stepena svih tjemena jednak dvostrukom broju ivica. Specijalno, u stablu je taj zbir jednak $2n - 2$.

($\Leftarrow$) Koristimo indukciju po n. Za $n = 2$ tvrđenje je očito. Uz pretpostavku da tvrđenje vrijedi za $n-1$ pokazaćemo da vrijedi i za $n \in \mathbb{N}$ veći od 2.

Ako je zbir n prirodnih brojeva $d_1, d_2, \ldots, d_n$ manji od $2n$, bar jedan od njih je jednak jedan. Bez smanjenja opštosti pretpostavimo da je $d_n = 1$. Dalje, uočimo $j \in [n-1]$ takav da je $d_j > 1$ i posmatrajmo niz $\mathbf{d}' = (d_1, d_2, \ldots, d_{j-1}, d_j - 1, d_{j+1}, \ldots, d_{n-1})$. Po induktivnoj pretpostavci, postoji stablo sa $n - 1$ tjemena kojem je $\mathbf{d}'$ niz stepena tjemena. Kada u to stablo dodamo novo tjeme n tako da to tjeme bude list spojen sa tjemenom j, dobijemo stablo kojem je niz stepena tjemena naš polazni niz.

□

LEMA 10.5.3. *Neka je* $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ *niz stepena nekog stabla sa* n *tjemena. Ako je* $\beta_{\mathbf{d}}$ *skup svih označenih stabala sa* n *tjemena kojima je* $\mathbf{d}$ *niz stepena tjemena, tada je*

$$|\beta_{\mathbf{d}}| = \frac{(n-2)!}{(d_1 - 1)!(d_2 - 1)! \cdots (d_n - 1)!}.$$

Dokaz. Opet koristimo indukciju po n. Za $n = 2$ postoji jedno stablo kojem je $(1, 1)$ stepeni niz. Pretpostavimo da lema vrijedi za sve brojeve manje od n. Bez smanjenja opštosti pretpostavimo da je tjeme n list, to jest, da je $d_n = 1$. Ako je tjeme j susjed lista n tada je

$\mathbf{d}' = (d_1, d_2, \ldots, d_{j-1}, d_j - 1, d_{j+1}, \ldots, d_{n-1})$ niz stepena za stablo sa $n - 1$ tjemena.

Takvih stabala ima po induktivnoj pretpostavci

$$|\beta_{\mathbf{d}'}| = \frac{(n-3)!(d_j-1)}{(d_1-1)!(d_2-1)!\cdots(d_j-1)!\cdots(d_{n-1}-1)!}.$$

Formalno, prethodna formula vrijedi i za stabla u kojima je j list, jer je tada $d_j = 1$. Neka je $\beta_{\mathbf{d},j}$ skup stabala kojima je $\mathbf{d}$ niz stepena tjemena i u kojima je list n susjedan sa j. Po principu sume je

$$|\beta_{\mathbf{d}}| = \sum_{j=1}^{n-1} |\beta_{\mathbf{d},j}| = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-3)!(d_j-1)}{(d_1-1)!(d_2-1)!\cdots(d_{n-1}-1)!}.$$

Tvrđenje leme se dobije kada uočimo da je

$$(d_1-1)+(d_2-1)+\cdots+(d_{n-1}-1) = (2n-3)-(n-1) = n-2.$$

□

Sada lako računamo broj svih označenih stabala sa n tjemena

$$\sum_{\mathbf{d}=(d_1,d_2,\ldots,d_n)} |\beta_{\mathbf{d}}| = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!\cdots(d_j-1)!\cdots(d_n-1)!} =$$

$$= [\text{smjena } m_i = d_i - 1] = \sum_{\substack{\text{za sve } i \text{ je } m_i \in \mathbb{N}_0,\\ m_1+\cdots+m_n = n-2}} \binom{n-2}{m_1, m_2, \cdots, m_n} = n^{n-2}.$$

Posljednja jednakost u prethodnoj formuli se dobije kada u polinomnu formulu za $(x_1+x_2+\cdots+x_n)^{n-2}$ uvrstimo $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$.

- **Dokaz pomoću formule uključenja-isključenja:**

Neka je $\mathcal{T}_n$ skup svih označenih stabala sa n tjemena i neka je $L_i \subseteq \mathcal{T}_n$ koji čine stabla iz $\mathcal{T}_n$ u kojima je tjeme označeno sa i list. Očigledno je

$$\mathcal{T}_n = L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n.$$

Iz formule uključenja-isključenja dobijamo

$$\big|\mathcal{T}_n\big| = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \big|L_i\big| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \big|L_i \cap L_j\big| + \sum_{i<j<k} \big|L_i \cap L_j \cap L_k\big| - \cdots. \quad (10.9)$$

Kako list i može biti susjedan sa bilo kojim od preostalih $n-1$ tjemena, to je $|L_i| = (n-1)|\mathcal{T}_{n-1}|$ za sve $i \in [n]$.

Dalje, skup $L_{i_1} \cap L_{i_2} \cap \cdots \cap L_{i_k}$ čine stabla iz $\mathcal{T}_n$ kojima su tjemena $i_1, i_2, \ldots, i_k$ listovi. Svaki od tih k listova "visi" na nekom od tjemena označenog stabla sa $n-k$ preostalih tjemena. Stoga je

$$|L_{i_1} \cap L_{i_2} \cap \cdots \cap L_{i_k}| = (n-k)^k |\mathcal{T}_{n-k}|.$$

Kada se ovo uvrsti u formulu (10.9) dobijamo da je

$$|\mathcal{T}_n| = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)^k |\mathcal{T}_{n-k}|. \tag{10.10}$$

Sada se prisjetimo se da je broj surjekcija sa skupa $[m]$ u skup $[n]$ jednak

$$n^m + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m.$$

Ako je $m < n$ taj broj je očito nula. Uvrštavanjem $m = n-2$ u prethodnu formulu dobijamo

$$n^{n-2} = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)^k (n-k)^{n-k-2}.$$

Ukoliko pretpostavimo da za sve $k < n$ vrijedi $|\mathcal{T}_k| = k^{k-2}$ (za $k \leqslant 3$ to se lako provjeri), desna strana prethodne formule je ista kao i desna strana formule (10.10). Stoga su i lijeve strane tih formula iste, pa je $|\mathcal{T}_n| = n^{n-2}$.

- **Dokaz pomoću rekurzivnih relacija**

Neka je $T_{n,k}$ skup označenih šuma (grafovi bez ciklusa) sa n tjemena i k komponenti povezanosti (stabala) u kojima su tjemena $1, 2, \ldots, k$ u različitim komponentama povezanosti.

Primijetimo da je $T_{n,1}$ skup svih označenih stabala sa n tjemena. Ako u nekoj šumi iz $T_{n,k}$ tjeme 1 ima i susjeda, brisanjem tjemena 1, i uz novo označavanje ostalih tjemena dobijamo šumu iz $T_{n-1,k+i-1}$. Stoga vrijedi

$$|T_{n,k}| = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} |T_{n-1,k+i-1}| \tag{10.11}$$

Kako za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $|T_{n,n}| = 1$, početne vrijednosti za $T_{n,k}$ su $|T_{0,0}| = 1$ i $|T_{n,0}| = 0$ za $n \geqslant 1$. Indukcijom ćemo pokazati da za sve

$n \in \mathbb{N}$ i $0 \leqslant k \leqslant n$ vrijedi $|T_{n,k}| = kn^{n-k-1}$. Iz formule (10.11) i induktivne pretpostavke dobijamo

$$|T_{n,k}| = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (k+i-1)(n-1)^{n-1-k-i} = (\text{smjena } j = n-k-i) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (n-j-1)(n-1)^{j-1} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (n-1)^{j} - \sum_{j=1}^{n-k} \binom{n-k}{j} j(n-1)^{j-1} =$$

$$= n^{n-k} - (n-k) \sum_{j=0}^{n-k-1} \binom{n-k-1}{j} (n-1)^{j-1} =$$

$$n^{n-k} - (n-k)n^{n-k-1} = kn^{n-k-1}.$$

Zanimljivo je da je Kejli broj označenih stabala pronašao pokušavajući da odredi broj zasićenih ugljovodonika sa istom empirijskom, a različitim strukturnim formulama.

BROJ POVEZANIH GRAFOVA.

Jednostavno je prebrojati koliko ima svih grafova kojima je skup tjemena $[n]$. Svaki dvočlani skup $\{i, j\} \subset [n]$ može (a i ne mora) biti ivica takvog grafa. Stoga je broj svih grafova sa n tjemena jednak $2^{\binom{n}{2}}$. Međutim, odrediti koliko ima povezanih grafova sa n tjemena je mnogo teži zadatak. U rješavanju tog problema pomoći će nam eksponencijalna formula.

Sa f_m označimo broj povezanih grafova sa m tjemena, a sa $h_n = 2^{\binom{n}{2}}$ broj svih grafova sa n tjemena.

Svaki nepovezan graf je "sastavljen" od nekoliko povezanih grafova. Maksimalni "povezani" dijelovi grafa se nazivaju **komponente povezanosti**. Dakle, proizvoljan graf sa n tjemena se dobije tako da skup tjemena podijelimo u nekoliko podskupova, pa na svakom od njih zadamo povezan graf. U terminima eksponencijalne formule, struktura koja se zadaje na podskupu tjemena je povezan graf..

Tako su ispunjeni uslovi da se u rješavanju ovog problema upotrebi eksponencijalna formula. Ako su $F(x)$ i $H(x)$ eksponencijalne funkcije generatrisa za nizove $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tada je na osnovu tvrđenja (ii) iz posljedice 10.1.2:

$$H(x) = e^{F(x)}.$$

Ako ovu jednakost logaritmujemo, diferenciramo i pomnožimo sa x dobijamo

$$xH'(x) = xF'(x) \cdot H(x).$$

Upoređujući koeficijente uz $\frac{x^n}{n!}$ u redovima na lijevoj i desnoj strani prethodne jednakosti, možemo zaključiti da vrijedi

$$nh_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k f_k h_{n-k}.$$

Tako smo dobili rekurzivnu relaciju (istina, dosta komplikovanu) za broj povezanih grafova sa n tjemena

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f_k 2^{\binom{n-k}{2}} = n2^{\binom{n}{2}}.$$

Direktnim brojanjem je lako provjeriti da je $f_1 = 1$; $f_2 = 1; f_3 = 4$. Međutim, već je f_4 i f_5 teško izračunati "napamet". Iz prethodne formule, uz malo računanja, dobijamo $f_4 = 38$ i $f_5 = 728$.

I sljedeći primjer pokazuje koliko je eksponencijalna formula efikasna u rješavanju enumerativnih zadataka vezanih za grafove.

Primjer 10.5.4. Neka je h_n broj grafova sa n tjemena kojima su sve komponente povezanosti putevi. Naći eksponencijalnu funkciju generatrisa za niz $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Rješenje: Zadatak ćemo riješiti pomoću eksponencijalne formule. Ako je f_m broj puteva na sa m tjemena, lako je zaključiti da je

$$f_m = \frac{m!}{2} (\text{ za } m \geqslant 2)\ f_1 = 1, \text{ pa je } F(x) = x + \sum_{n\geqslant 2} \tfrac{x^n}{2} = \tfrac{2x-x^2}{2(1-x)}.$$

Ako je h_n broj grafova sa n tjemena kojima su komponente povezanosti putevi, primjenom eksponencijalne formule dobijamo da je eksponencijalna funkcija generatrisa za taj niz

$$H(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{h_n}{n!} x^k = e^{F(x)} = e^{\frac{2x-x^2}{2(1-x)}}.$$

Prvih nekoliko članova ovog reda je

$$H(x) = 1 + x + 2\frac{x^2}{2!} + 7\frac{x^3}{3!} + 34\frac{x^4}{4!} + 206\frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$\diamondsuit$

Koeficijent uz $\frac{x^n}{n!}$ je broj grafova sa n tjemena kojima su komponente povezanosti putevi.

BROJ NEIZOMORFNIH GRAFOVA.

Na skupu svih grafova kojima je skup tjemena $[n]$, simetrična grupa $\mathbb{S}_n$ dejstvuje na prirodan način:

permutacija $\pi = \pi_1\pi_2\ldots\pi_n \in \mathbb{S}_n$ slika graf $G = ([n], E)$ u graf $\pi(G) = G' = ([n], E')$, gdje je

$$E' = \{\pi_i\pi_j : ij \in E\}.$$

Neka su G i H dva grafa sa skupom tjemena $[n]$. Ti grafovi su izomorfni ako i samo ako se nalaze u istoj orbiti pri dejstvu $\mathbb{S}_n$. Dakle, brojanjem orbita pri dejstvu $\mathbb{S}_n$ na skupu svih grafova sa n tjemena dobićemo odgovor na pitanje:

Koliko ima neizomorfnih grafova sa n tjemena?

Sa $X = \binom{[n]}{2}$ označimo skup svih mogućih ivica grafa kojem je $[n]$ skup tjemena (to su ivice kompletnog grafa K_n). Svaki graf $G = ([n], E)$ definiše funkciju $c_G : X \to \{0, 1\}$, gdje je:

$$c_G(\{i, j\}) = 1 \text{ ako je } ij \in E, \text{ odnosno } c_G(\{i, j\}) = 0 \text{ ako } ij \notin E.$$

Dakle, svaki graf sa n tjemena možemo interpretirati kao bojenje ivica iz X sa dvije boje.

Na skupu svih bojenja elemenata X (ivice K_n) sa dvije boje grupa $\mathbb{S}_n$ dejstvuje na sljedeći način:

$$\big(\pi(c)\big)(\{i, j\}) = c\big(\{\pi(i), \pi(j)\}\big).$$

Lako je primijetiti da su grafovi G i H izomorfni ako i samo ako su odgovarajuća bojenja c_G i c_H u istoj orbiti.

Tako je broj neizomorfnih grafova sa n tjemena jednak broju orbita pri dejstvu grupe $\mathbb{S}_n$ na skupu svih bojenja elemenata skupa X sa dvije boje. Da odredimo taj broj koristićemo teoremu 10.3.12.

Neka je g_k broj neizomorfnih grafova sa n tjemena i tačno k ivica. To je broj orbita pri dejstvu $\mathbb{S}_n$ na skup bojenja elemenata iz X u kojima je "boja 1" upotrebljena tačno k puta. Ako u formulu iz teoreme 10.3.12 uvrstimo $x_1 = 1$ i $x_2 = x$, dobićemo da je funkcija generatrisa (u stvari, polinom) za niz $(g_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$

$$G_n(x) = \sum_k g_k x^k = F(1,x) = Z_{\mathbb{S}_n}(1+x, 1+x^2, 1+x^3, \ldots).$$

PRIMJEDBA 10.5.5. Da bismo mogli koristiti formulu iz teoreme 10.3.12, potrebno je odrediti strukturu ciklusa proizvoljne permutacije π iz $\mathbb{S}_n$ pri dejstvu na $X = \binom{[n]}{2}$.

(i) Ako je C ciklus permutacije $\pi \in \mathbb{S}_n$ sa m elemenata, elementi ciklusa C čine $\binom{m}{2}$ dvočlanih podskupova. Dejstvo π na tim podskupovima je određeno sa dejstvom ciklusa C. Bez smanjenja opštosti, pretpostavimo da je $C = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$. Razlikovaćemo dva slučaja:

1° Broj elemenata u ciklusu C je neparan.
Tada, pri dejstvu π na X ciklusu C odgovara $\frac{m-1}{2}$ ciklusa dužine m. U našem primjeru to su

$$(a_1a_2, a_2a_3, \ldots, a_ma_1), (a_1a_3, a_2a_4, \ldots, a_1a_{m-1}, a_2a_m), \ldots$$

$$\ldots, (a_1a_{\frac{m-1}{2}}, a_2a_{\frac{m+1}{2}}, \ldots, a_1a_{\frac{m+1}{2}}, \ldots, a_{\frac{m-1}{2}}a_m)$$

2° Broj elemenata u ciklusu C je paran. Na dvočlanim podskupovima iz C permutacija π ima $\frac{m}{2} - 1$ ciklus dužine m i jedan ciklus dužine $\frac{m}{2}$. U našem primjeru ciklus dužine $\frac{m}{2}$ je

$$(a_1a_{\frac{m}{2}+1}, a_2, a_{\frac{m}{2}+3}, \ldots, a_{\frac{m}{2}-1}, a_m)$$

a ciklusi dužine m su

$$(a_1a_2, a_2a_3, \ldots, a_ma_1), (a_1a_3, a_2a_4, \ldots, a_1a_{m-1}, a_2a_m), \ldots$$

$$\ldots, (a_1a_{\frac{m}{2}}, a_2a_{\frac{m}{2}+1}, \ldots, a_1a_{\frac{m}{2}+2}, \ldots, a_{\frac{m}{2}-1}a_m).$$

(ii) Neka su $C = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ i $C' = (b_1, b_2, \ldots, b_{m'})$ različiti ciklusi u π. Tada postoji mm' skupova oblika $\{a_i, b_j\} \in X$, gdje je $i \in [m], j \in [m']$. Ako π počne dejstvo u nekom od tih skupova, na primjer, a_1b_1, ciklus

$$(a_1b_1, a_2b_2, \ldots)$$

se "zatvori" nakon r koraka ako i samo ako $m|r$ i $m'|r$. Najmanji takav r je najmanji zajednički sadržalac brojeva m i m', odnosno $r = \frac{mm'}{(mm')}$, gdje je (mm') najveći zajednički djelilac brojeva m i m'. Stoga, pri dejstvu π na skupove oblika $\{a_i, b_j\}$ ima (mm') ciklusa dužine $\frac{mm'}{(mm')}$.

Iz prethodnog razmatranja možemo zaključiti da permutacije iz $\mathbb{S}_n$ istog tipa (iste klase konjugacije) imaju i istu strukturu ciklusa pri dejstvu na X.
U sljedeće dvije tabele dajemo pregled strukture ciklusa za permutacije iz $\mathbb{S}_4$ i $\mathbb{S}_5$.

$\pi \in \mathbb{S}_4$	*type*(π) u $\mathbb{S}_4$	broj perm. tog tipa	struktura π u X
(1)(2)(3)(4)	1^4	1	1^6
(12)(3)(4)	$2^1 1^2$	6	$2^2 1^2$
(12)(34)	2^2	3	$2^2 1^2$
(123)(4)	$3^1 1^1$	8	3^2
(1234)	4^1	6	$4^1 2^1$

Stoga je traženi polinom:

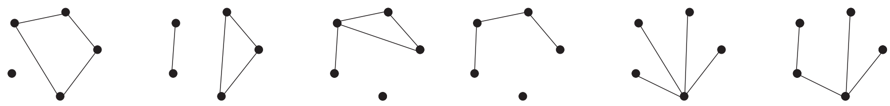
$$G_4(x) = \frac{1}{24}\big((1+x)^6 + 6(1+x)^2(1+x^2)^2 + 3(1+x)^2(1+x^2)^2 +$$

$$+8(1+x^3)^2 + 6(1+x^2)(1+x^4)\big) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 2x^4 + x^5 + x^6.$$

$\pi \in \mathbb{S}_5$	*type*(π) u S_5	broj perm. tog tipa	struktura π u X
(1)(2)(3)(4)(5)	1^5	1	1^{10}
(12)(3)(4)(5)	$2^1 1^3$	10	$2^3 1^4$
(12)(34)(5)	$2^2 1^1$	15	$2^4 1^2$
(123)(4)(5)	$3^1 1^2$	20	$3^3 1^1$
(123)(45)	$3^1 2^1$	20	$6^1 3^1 1^1$
(1234)(5)	$4^1 1^1$	30	$4^2 2^1$
(12345)	5^1	24	5^2

Polinom koji opisuje broj neizomorfnih grafova sa pet tjemena je

$$G_5(x) = 1 + x + 2x^2 + 4x^3 + 6x^4 + 6x^5 + 6x^6 + 4x^7 + 2x^8 + x^9 + x^{10}.$$



Slika 10.8. *Svi neizomorfni grafovi sa* 5 *tjemena i* 4 *ivice.*

Na slici 10.8 se nalazi šest neizomorfnih grafova sa pet tjemena i četiri ivice.

HROMATSKI POLINOM GRAFA

Pravilno bojenje grafa $G = (V, E)$ sa n boja je preslikavanje $c : V \to [n]$ pri kojem su svaka dva susjedna tjemena obojena različito. Drugim riječima, ako je uv ivica u grafu G, tada je $c(u) \neq c(v)$. Za dovoljno velik prirodan broj m sa $\chi_G(m)$ označimo broj različitih bojenja grafa G sa m boja. Na primjer, lako je izračunati

$$\chi_{K_n}(m) = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1), \chi_{P_n} = m(m-1)^{n-1}.$$

Pokazaćemo da je funkcija $m \mapsto \chi_G(m)$ polinom sa promjenljivom m. Zato se $\chi_G(m)$ naziva **hromatski polinom** grafa G.

Ako graf G ima nekoliko komponenti povezanosti, recimo $G_1, G_2, \ldots, G_k$, lako je provjeriti da vrijedi

$$\chi_G(m) = \chi_{G_1}(m)\chi_{G_2}(m)\cdots\chi_{G_k}(m).$$

Stoga, u daljem tekstu posmatramo samo povezane grafove.

Svakom grafu G dodijelimo poset $L(G)$ na sljedeći način. Elementi poseta $L(G)$ su particije skupa tjemena takve da su grafovi indukovani tjemenima unutar istog bloka povezani podgrafovi od G. To znači da za svaka dva tjemena koja su u istom bloku postoji put u kojem se pojave samo tjemena iz tog bloka koji ih sadrži.

Za $\pi, \sigma \in L(G)$ kažemo da je $\pi \leqslant \sigma$ ako se svaki blok u σ može dobiti kao unija nekih blokova iz π. Minimalan element $\hat{0}_L$ u posetu $L(G)$ je particija u kojoj su svi blokovi jednočlani. Kako je G povezan, maksimalalan element $\hat{1}_L$ tog poseta je particija sa samo jednim blokom.

Sada ćemo definisati funkcije $f, g : L(G) \to \mathbb{C}$. Za particiju π sa $g(\pi)$ označimo broj svih bojenja tjemena G sa m boja u kojima su tjemena iz istog bloka u π obojena istom bojom. Ako broj blokova u π označimo sa $|\pi|$, tada je $g(\pi) = m^{|\pi|}$.

Sa $f(\pi)$ označimo broj bojenja tjemena u G tako da vrijedi

- sva tjemena u istom bloku π su obojena istom bojom, i
- ako su u i v susjedna tjemena u G i ako pripadaju različitim blokovima π tada su obojeni različitim bojama.

Primijetimo da je broj $\chi_G(m)$ koji tražimo zapravo jednak $f(\hat{0}_L)$.

Neka je π particija iz $L(G)$ i neka su tjemena grafa G obojena tako da su tjemena iz istog bloka π obojena sa istom bojom. Takvo bojenje se "broji" u funkciji $g(\pi)$. Ako su u i v tjemena koja "narušavaju"[18] bojenje koje se broji sa f, njihove blokove spojimo. To ponovimo toliko puta dok ne dobijemo particiju $\sigma \geqslant \pi$ koja se broji u funkciji f.

Na osnovu prethodnog razmatranja zaključujemo da za svako bojenje tjemena grafa koje se broji u $g(\pi)$ postoji jedinstvena particija $\sigma \geqslant \pi$ u kojoj se isto bojenje tjemena broji u $f(\sigma)$.

Tako smo pokazali da za proizvoljnu particiju $\pi \in L(G)$ vrijedi

$$g(\pi) = \sum_{\sigma \geqslant \pi} f(\sigma).$$

Ako na prethodnu jednakost primijenimo Mebijusovu formulu inverzije dobićemo

$$f(\pi) = \sum_{\sigma \geqslant \pi} \mu(\pi, \sigma) g(\sigma).$$

Specijalno, vrijedi

$$\chi_G(m) = f(\hat{0}_L) = \sum_{\pi \in L(G)} \mu(\hat{0}_L, \pi) m^{|\pi|} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\pi \in L(G), |\pi| = k} \mu(\hat{0}_L, \pi) \right) m^k.$$

Tako smo pokazali da je $\chi_G(m)$ zaista polinom po m.

Ovo svakako nije najlakši i najefikasniji način za računanje polinoma $\chi_G(m)$, vidjeti zadatak 33 na kraju ove glave.

[18] To znači da su u i v susjedna tjemena, obojena istom bojom i nalaze se u različitim blokovima particije π.

Međutim, proučavanje osobina Mebijusove funkcije na nekim klasama poseta ($L(G)$ je primjer semimodularnih poseta, vidjeti u [36]) je korisno, jer se može saznati više o polinomu χ_G. Na primjer, može se pokazati da znakovi koeficijenata u polinomu χ_G alterniraju. Tako je koeficijent uz $x^{|V(G)|}$ je jedan, a koeficijent uz $x^{|V(G)|-1}$ je $-|E(G)|$.

10.6 Zadaci

1. Naći eksponencijalnu funkciju generatrisa za broj permutacija kojima dužine ciklusa pripadaju skupu $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$. Pomoću nje naći rekurzivnu relaciju za niz h_n, gdje je h_n broj permutacija iz $\mathbb{S}_n$ čiji su ciklusi dužine dva ili tri.
2. Naći eksponencijalnu funkciju generatrisa za broj particija skupa $[n]$ u blokove tako da je broj elemenata u svakom bloku prost?
3. Naći eksponencijalnu funkciju generatrisa za broj permutacija iz $\mathbb{S}_n$ kod koje svi ciklusi imaju bar četiri elementa!
4. Naći eksponencijalnu funkciju generatrisa za broj grafova sa neparnim brojem komponenti povezanosti u kojima su sva tjemena stepena jedan ili dva.
5. Odredi eksponencijalnu funkciju generatrisa za broj 2-regularnih grafova.
6. Neka je $\{R, S, T\}$ neka particija skupa $[n]$. Pokaži da je broj uređenih trojki (σ, G, H), (gdje je σ involucija na R, G i H 2-regularni grafovi sa tjemenima S odnosno T) jednak $n!$.
7. Neka je a_n broj načina da se na skupu $[n]$ napravi neka particija, a zatim da se u svakom od blokova odabere neprazan podskup. Naći eksponencijalnu funkciju generatrisa za niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
8. Neka je a_n broj permutacija u $\mathbb{S}_n$ kojima dužina ciklusa nije djeljiva sa tri. Odredi a_n.
9. a) Neka je a_m broj načina kako se na linearno uređenom skupu od m elemenata može zadati neka struktura (vrijedi $a_0 = 0$), a b_n broj načina da se uređena n-torka podijeli na nekoliko dijelova, a zatim na svakom od tih dijelu zada posmatrana struktura. Ako su $A(x)$ i $B(x)$ obične funkcije generatrisa za nizove $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tada je
$$B(x) = \frac{1}{1 - A(x)}.$$

b) Pomoću formule iz (a), odrediti na koliko je načina moguće brojeve iz $[n]$ podjeliti u nekoliko intervala, a zatim sve brojeve obojiti sa jednom od dvije zadane boje tako da brojevi iz istog intervala budu iste boje!

10. a) Na koliko načina možemo n ljudi podjeliti u k grupa, a zatim ljude u svakoj grupe poredati u red?

b) Dokazati da je

$$1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1} x^k \frac{u^n}{n!} = e^{\frac{xu}{1-u}}$$

c) Za proizvoljan $a \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!} \binom{n+(a-1)k-1}{n-k} x^k \frac{u^n}{n!} = e^{\frac{xu}{(1-u)^a}}$$

11. Koliko ima stabala sa $n+1$ neoznačenih tjemena i sa n označenih ivica?
12. Neka je a_n broj listova u svim stablima sa n tjemena. Odredi a_n.
13. Neka su zadani skupovi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ takvi da je $|A_i| = i + 1$. Koliko najmanje sistema različitih predstavnika ima u toj familiji skupova?
14. Neka je $A_i = \{i-1, i, i+1\} \cap [n]$ za sve $i \in [n]$. Koliko sistema različitih predstavnika imaju skupovi $A_1, A_2, \ldots, A_n$?
15. Neka je A matrica čiji su svi članovi 0 ili 1. Najmanji broj linija (linija je vrsta ili kolona) potreban da se pokriju sve jedinice je jednak maksimalnom broju jedinica u toj matrici koje možemo odabrati tako ne postoje dvije odabrane jedinice u istoj liniji!
16. Neka je A cjelobrojna $n \times n$ matrica, $a_{ij} \geq 0$ za sve $i, j \in [n]$. Ako je zbir elemenata u svakoj vrsti i svakoj koloni jednak l tada je je A moguće napisati kao zbir l permutacionih[19] matrica.
17. Neka je su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ i $B_1, B_2, \ldots, B_n$ neke particije skupa $\{1, 2, \ldots, nm\}$ u n blokova, tako da svaki blok ima m elemenata. Dokaži da postoji permutacija $\pi \in \mathbb{S}_n$ takva da za sve $i \in [n]$ vrijedi $A_i \cap B_{\pi(i)} \neq \emptyset$.
18. Dva matematičara izvode sljedeći trik:

Iz špila od 52 karte neko odabere pet karata i dadne ih prvom

[19] Permutaciona matrica u svakoj vrsti i svakoj koloni ima tačno jednu jedinicu, ostalo su nule.

matematičaru. Ovaj sakrije jednu kartu, a ostale četiri složi u niz i pokaže drugom matematičaru. Drugi matematičar sigurno pogađa koja je karta sakrivena.
Objasni kako se izvodi ovaj trik!

19. Na gomili se nalazi $\binom{n+1}{2}$ krugova složenih u n redova. U prvom redu je n, u drugom $n-1$,..., a u posljednjem redu je jedan krug (možemo reći da su krugovi složeni u jednakostranični trougao). Na koliko načina je te krugove moguće obojati sa tri boje (bojenja pri dejstvu rotacija se smatraju istim)? Šta se desi ako identifikujemo i sva bojenja koja se jedno od drugog mogu dobiti pri dejstvu diedarske grupe $\mathbb{D}_3$?
20. Neka je G netrivijalna podgrupa $\mathbb{S}_n$ takva da za sve $\pi \in G, \pi \neq Id$ postoji jedinstvena fiksna tačka. Dokaži da postoji $i \in [n]$ tako da za sve $\pi \in \mathbb{S}_n$ vrijedi $\pi(i) = i$.
21. Koliko ima različitih puteva od $(0,0)$ do (n,n) (sa koracima desno i gore) ako dva puta smatramo istim ukoliko se jedan može dobiti od drugog simetrijom na pravu $y = x$ ili na tačku $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$.
22. U prostoru su zadane četiri nekoplanarne tačke. Koliko ima različitih paralelopipeda kojima su te tačke tjemena?
23. Na koliko načina je moguće obojiti tjemena pravilnog tetraedra sa n boja, ako se dva bojenja smatraju istim ako se jedno od drugog može dobiti nekom osnom rotacijom? Koliki je broj različitih bojenja ako identifikujemo i bojenja pomoću ravanskih refleksija?
24. Na koliko načina je moguaće obojiti 64 polja šahovske table sa dvije boje (dva bojenja su ista ako se mogu identifikovati rotacijama ploče)? Koliko ima takvih bojenja kod kojih su obje boje korištene jednak broj puta?
25. Diedarska grupa $\mathbb{D}_4$ dejstvuje na skupu polja šahovske table 8×8. Nađi broj načina da se odeberu parovi podskupova (A, B), $A \subseteq B$, ako se parovi (A, B) i (A', B') koji se jedan od drugog mogu dobiti dejstvom elementa iz $\mathbb{D}_4$ smatraju istim?
26. Izračunaj $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}_0} Z_{\mathbb{S}_n}(z_1, z_2, \ldots)x^n$.
27. Koliko ima dvočlanih lanaca a koliko ima dvočlanih antilanaca u $\mathbb{B}_n$?
28. Da li postoji poset P u kojem je najveća dužina maksimalnog lanca d, u kojem je svaki element sadržan u nekom lancu dužine d, ali P ima maksimalan lanac kraći od d? Ako za sve $x, y \in P$ takve da y

natkriva x postoji lanac dužine d koji sadrži x i y, dokaži da su svi maksimalni lanci u P dužine d.

29. Neka je P poset na skupu $[n]$. Dokaži da su sljedeća tvrđenja ekvivalentna
    a) P se može dobiti kao presjek d linearnih uređenja na $[n]$.
    b) P je izomorfan sa nekim potposetom $\mathbb{N}^d$.
30. Ako je u prethodnom zadatku $d = 2$ dokaži da su tvrđenja a) i b) ekvivalentna sa
    c) Postoji poset Q na $[n]$ takav da su x i y uporedivi u Q ako i samo ako nisu uporedivi u P.
31. Dokaži da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $n = \sum\limits_{d|n} \varphi(d)$.
32. Izračunati $\mu_{\Pi_n}(\hat{0}, \hat{1})$.
33. Neka je G proizvoljan graf i neka je $e = uv$ proizvoljna ivica tog grafa. Neka je $G' = G \backslash e$ (graf dobijen brisanjem ivice e), a $G'' = G/e$ graf dobijen kontrakcijom ivice e (tjemena u i v se "slijepe" u novo tjeme koje je spojeno sa svim susjedima u ili v). Dokaži da je
$$\chi_G(m) = \chi_{G'}(m) - \chi_{G''}(m).$$
34. Orijentacija grafa G je izbor jedne od dvije moguće orijentacije za svaku ivicu (za ivicu uv je $\overrightarrow{uv}$ ili je $\overrightarrow{vu}$). Orijentacija je aciklična ako se ne pojavi orijentisan ciklus. Dokaži da je broj acikličnih orijentacija grafa G jednak $(-1)^{|G|}\chi_G(-1)$.
35. Izračunaj hromatske polinome za
    a) stablo sa n tjemena
    b) ciklus C_n
    c) kompletan bipartitan graf $K_{m,n}$
    d) kompletan graf sa n tjemena iz kojeg su obrisane dvije ivice
36. U jednosmjernoj ulici se nalazi parking za n automobila. Na parking dolazi n automobila (jedan po jedan). Vozač i-tog automobila se želi parkirati na mjesto a_i. Ako je željeno mjesto slobodno, on se tu parkira, inače se parkira na prvo sljedeće slobodno mjesto. Ukoliko su sva mjesta zauzeta, vozač odlazi na neki drugi parking. Koliko ima nizova $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in [n]^n$ tako da se sva vozila mogu parkirati?
37. Ako je $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in [n]^n$ niz za koji se automobili iz prethodnog zadatka mogu parkirati, koliko ima "neuspješnih" pokušaja parkiranja?
38. Neka je k prirodan broj manji od n. Pretpostavimo da se $n + 1 - k$ automobil želi parkirati na parking sa n mjesta. Koliko ima nizova

$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-k+1}) \in [n]^{n-k+1}$ za koje se ta vozila mogu parkirati, ako se zna da je prvih $k-1$ mjesta na parkingu rezervisano?

39. Koliko ima nizova $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in [n]^n$ za koje se automobili u zadatku 36 mogu parkirati u kojima se broj jedan pojavi tačno k puta?
40. Neka je S podskup $\mathbb{R}^n$ sastavljen od svih vektora oblika

$$(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{a}, \underbrace{1,1,\ldots,1}_{b}, \underbrace{0,0,\ldots,0}_{c}), a,b,c \in \mathbb{N}_0, a+b+c=n.$$

Koliko ima n-članih podskupova skupa S koji su baza za $\mathbb{R}^n$?

10.7 Rješenja zadataka

1. $H(x) = e^{\frac{x^{n_1}}{n_1} + \frac{x^{n_2}}{n_2} + \cdots + \frac{x^{n_k}}{n_k}}$. Za $n_1 = 2$ i $n_2 = 3$ je $H(x) = e^{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}$. Pomoću izvoda se dobije $(x + x^2)H(x) = H'(x)$. Odavde je $h_{n+1} = nh_{n-1} + n(n-1)h_{n-2}$ za $n \geq 4$, $h_2 = 1, h_3 = 2$.
2. $e^{\sum_{p \text{ je prost}} \frac{x^p}{p!}}$
3. $H(x) = \dfrac{e^{-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}}}{(1-x)}$.
4. Za $n > 2$ broj puteva dužine n je $\frac{n!}{2}$, a broj ciklusa dužine n je $\frac{(n-1)!}{2}$. Kada se primjeni (iii) iz posljedice 10.1.2 dobiće se tražena funkcija

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x} - \ln(1-x) - 1 - 2x - \frac{x^2}{2}\right]\right).$$

5. $H(x) = \dfrac{e^{-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}}}{\sqrt{1-x}}$.
6. Ako je i_n broj involucija u S_n, a r_n broj regularnih grafova sa n tjemena, efg za te nizove su

$$I(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}}, R(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}}}{\sqrt{1-x}}.$$

Kako je $I(x)R^2(x) = \frac{1}{1-x}$, to je

$$\sum_{k+l+m=n} \frac{i_k r_l r_m}{k!l!m!} = 1, \text{ odnosno } \sum_{k+l+m=n} \frac{n!}{k!l!m!} i_k r_l r_m = n!$$

7. $e^{e^{2x}-e^x}$.
8. Efg za niz a_n je
$$e^{\sum_{k\geq 1}\frac{x^k}{k}-\sum_{k\geq 1}\frac{x^{3k}}{3k}}=\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{1-x}=(1+x+x^2)(1-x^3)^{-\frac{2}{3}}.$$
Stoga je
$$a_n=$$
9. a) Vrijedi $b_n=\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=n}a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}$.
   b) $A(x)=\frac{2x}{1-x}$, $B(x)=\frac{1-x}{1-3x}$, pa je traženi broj jednak $3^n-3^{n-1}=2\cdot 3^{n-1}$.
10. a) $\frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}$.
   b) Slijedi iz kompozicione formule primjenjene na (a).
   c) Vrijedi
$$\binom{n+(a-1)k-1}{n-k}=\left(\!\!\binom{n-k+1}{ak-1}\!\!\right)$$
što je broj načina kako se može staviti $ak-1$ pregrada između $n-k$ tačaka. Dodajmo jednu pregradu na početak i na kraj. Ispred pregrada sa rednim brojem k, $2k,\dots,a\cdot k$ dodajmo još po jednu tačku (ukupno n). Tačkama dodjelimo permutaciju od $[n]$ na $n!$ načina i posmatrajmo dio između pregrada $(j-1)a$ i ja. Dijeljenjem sa $k!$ (jer blokovi nisu uređeni) dobijamo da je $\frac{n!}{k!}\binom{n+(a-1)k-1}{n-k}$ broj načina kako se $[n]$ može podijeliti na k dijelova, na svakom dijelu se definiše linearni poredak $a_1,a_2,\dots,a_r$, i u svakom dijelu se doda $a-1$ pregrada (može prije a_1, ali ne smije poslije a_r). Sada se iskoristi kompoziciona formula.
11. Ako proizvoljno tjeme (odabrano na $n+1$ način) označimo sa 0, stablo orijentišemo "od nule", svakoj ivici odgovara jedinstveno tjeme. Oznake sa ivica se "pomjere" u odgovarajuće tjeme, i dobijamo jedno od $(n+1)^{n-1}$ označenih stabala sa $n+1$ tjemena. Traženi broj je $(n+1)^{n-2}$.
12. $n(n-1)^{n-2}$. Svako od n tjemena je list nekog stabla tako što se "nalijepi" na neko od $(n-1)$ tjemena nekog stabla (jednog od $(n-1)^{n-3}$) na preostaliim tjemenima.
13. 2^n.
14. Neka je a_n traženi broj. Razlikujući slučajeve kada iz A_1 biramo 1 ili 2, dobićemo da je $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$. Kako je $a_2=2$ i $a_3=3$ to je $a_n=F_n$.

15. Neka je m najmanji broj linija potreban da se pokriju sve jedinice u A i neka je M najveći broj jedinica uz A takvih da nijedna linija ne sadrži dvije jedinice. Za kokrivanje tih M jedinica treba M linija pa je sigurno $m \geqslant M$. Pretpostavimo da je sve jedinice moguće pokriti sa m linija, i da smo koristili v vrsta i k kolona ($m = v + k$). Koristeći preoznačavanje, možemo pretpostaviti da smo sve jedinice pokrili pomoću prvih v vrsta i prvih k kolona. Sada, za sve $i \in [n]$ posmatrajmo skupove $A_i = \{j > k : a_{ij} = 1\}$. Ako bi unija nekih k skupova imala manje od k elemenata, tada se tih k vrsta može zamijeniti sa manje od k kolona (kontradikcija sa činjenicom da je m minimalan!). Stoga, $A_1, A_2, \dots, A_v$ imaju sistem različitih predstavnika (v jedinica u posljednjih $n-k$ kolona). Slično se pokaže da ta matrica ima k jedinica u posljednjih $n-v$ vrsta. To je $k+v = m$ jedinica takvih da nijedna linija ne sadrži dvije.
16. Indukcijom po l. Definišemo $A_i = \{j \in [n] : a_{ij} \neq 0\}$. Kako je za svakih k skupova $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ zbir članova u odgovarajućim kolonama jednak kl, u bar k kolona postoje nenula elementi. Stoga skupovi $A_1, A_2, \dots, A_n$ imaju sistem različitih predstavnika, što odgovara nekoj permutacionoj matrici P.
    Sada posmatrajmo $A - P$.
17. Neka je $X = (x_{ij})_{i,j \in [n]}$, gdje je $x_{ij} = |A_i \cap A_j|$. Iskoristimo prethodni zadatak.
18. Neka je X skup svih četveročlanih nizova u zadanom špilu od 52 karte. Za svaki petočlani podskup $S = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}$ karata, sa A_S označimo skup nizova iz X koji se mogu dobiti od elemenata iz S. Vrijedi $|A_S| = 120$, i svaki element iz X je sadržan u 48 skupova A_S. Slično kao u primjeru 10.2.3 možemo zaključiti da posmatrana familija skupova ima sistem različitih predstavnika. Matematičari se unaprijed dogovore o sistemu različitih predstavnika, pa drugi matematičar zna koji je petočlani skup S indeks za A_S odakle je izabrana ”vidljiva’a četvorka!
19. $\frac{1}{3}\left(3^{\frac{n(n+1)}{2}} + 2 \cdot 3^{\left\lceil \frac{n(n+1)}{6} \right\rceil}\right)$, odnosno,
    $\frac{1}{6}\left(3^{\frac{n(n+1)}{2}} + 2 \cdot 3^{\left\lceil \frac{n(n+1)}{6} \right\rceil} + 3 \cdot 3^{\frac{\binom{n+1}{2} + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}{2}}\right)$ pri dejstvu $\mathbb{D}_3$.
20. Neka je G_i stabilizator elementa i. Iz uslova zadatka znamo da je $G \setminus \{Id\}$ disjunktna unija $(G_1 \setminus \{Id\}) \cup (G_2 \setminus \{Id\}) \cup \cdots \cup (G_n \setminus \{Id\})$.

Pretpostavimo da su $O_1, O_2, \ldots, O_r$ različite orbite pri dejstvu G na skup $[n]$ i da su $x_1, x_2, \ldots, x_r$ elementi iz tih orbita. Kako svi elementi iste orbite imaju stabilizator iste veličine, to je

$$|G| - 1 = |O_1|(|G_{x_1}| - 1) + |O_2|(|G_{x_2}| - 1) + \cdots + |O_r|(|G_{x_r}| - 1).$$

Nakon dijeljenja sa $|G|$ dobijemo da je

$$1 - \frac{1}{|G|} = (1 - \frac{1}{|G_{x_1}|}) + (1 - \frac{1}{|G_{x_2}|}) + \cdots + (1 - \frac{1}{|G_{x_r}|}),$$

odakle slijedi da ne mogu biti dva različita elementa čije su orbite veće od jedan.

21. Za neparno n simetrije u odnosu na tačku $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$ i na pravu $y = x$ ne fiksiraju nijedan put; kompozicija ove dvije simetrije fiksira 2^n puteva oblika $\underbrace{DGG \ldots DGD}_{n}\ \underbrace{GDG \ldots DDG}_{n}$. Stoga je traženi broj puteva za neparan n jednak $\frac{1}{4}\left[\binom{2n}{n} + 2^n\right]$
Za paran n, postoji još $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ puteva koji su invarijantni s obzirom na simetriju oko tačke $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$. Tako je za paran n broj traženih puteva $\frac{1}{4}\left[\binom{2n}{n} + 2^n + \binom{n}{\frac{n}{2}}\right]$.
22. 29
23. Grupa rotacionih simetrija i grupa svih simetrija pravilnog tertraedra imaju sljedeće ciklus indekse

$$\frac{1}{12}(z_1^4 + 8z_1z_3 + 3z_2^2), \text{ odnosno} \frac{1}{24}(z_1^4 + 8z_1z_3 + 3z_2^2 + 6z_1^2z_2 + 6z_4).$$

Rješenja zadatka su $\frac{n^4+11n^2}{12}$, odnosno $\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{24}$.
24. Ima $\frac{1}{4}\left[2^{64} + 2^{17} + 2^{32}\right]$ svih bojenja. Ima $\frac{1}{4}\left[\binom{64}{32} + 2 \cdot \binom{16}{8} + \binom{32}{16}\right]$ bojenja u kojem su po 32 polja iste boje.
25. Polja iz A obojimo crveno, polja iz $B \setminus A$ obojimo plavo, a sva ostala polja obojimo sa bijelom bojom. Broj različitih parova podskupova je jednak broju različitih bojenja 64 polja sa tri boje pri dejstvu D_4. Taj broj je jednak

$$\frac{1}{8}\left(3^{64} + 3 \cdot 3^{32} + 2 \cdot 3^{36} + 2 \cdot 3^{16}\right).$$

26. Za $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in {\mathbb{N}_0}^n$ takav da je $c_1 + 2c_2 + \cdots + nc_n = n$ koeficijent uz $x^n z_1^{c_1} z_2^{c_2} \cdots z_n^{c_n}$ je $\frac{1}{1^{c_1}c_1!2^{c_2}c_2!\cdots n^{c_n}c_n!}$. Zato je

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} Z_{\mathbb{S}_n}(z_1,z_2,\ldots)x^n =$$

$$\left(\sum_{c_1}\frac{z_1^{c_1}x^{c_1}}{c_1!}\right)\left(\sum_{c_2}\frac{z_2^{c_2}x^{2c_2}}{2^{c_2}c_2!}\right)\left(\sum_{c_3}\frac{z_2^{c_3}x^{3c_3}}{3^{c_3}c_3!}\right)\cdots = e^{z_1x+z_2\frac{x^2}{2}+z_3\frac{x^3}{3}+\cdots}$$

27. Broj dvočlanih lanaca je $3^n - 2^n$, a broj dvočlanih antilanaca je $4^{n-1} - 3^n + 2^{n-1}$.
28. U posetu $a_1 < a_2 < a_3$, $a_4 < a_3$, $a_4 < a_5 < a_6$ svaki element je u lancu dužine tri, a $a_4 < a_3$ je maksimalan lanac dužine dva. Drugo tvrđenje se dokaže indukcijom po d.
29. $(a \Rightarrow b)$
Neka je P presjek d linearnih uređenja $\pi_i = a_{i1}a_{i2}\ldots a_{in} \in \mathbb{S}_n$ za $i \in [d]$. Za $x \in [n]$ neka je $s(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$, gdje je x_i pozicija x u permutaciji π_i.
Lako je provjeriti da je $A = \{s(x) : x \in [n]\}$ izomorfan sa P.
$(b \Rightarrow a)$ Neka je P izomorfan sa $A \subset \mathbb{N}^d$. Skup A zapišemo kao $n \times d$ matricu (a_{ij}), a k-ta kolona te matrice definiše permutaciju $\pi_k = \pi_{k1}\pi_{k2}\ldots\pi_{kn}$ iz $\mathbb{S}_n$:
broj i se u π_k pojavi prije j ako je $a_{ik} < a_{jk}$ ili je $a_{ik} = a_{jk}$ a $i < j$ u posetu P.
Presjek linearnih uređenja $\pi_1, \pi_2 \ldots, \pi_d$ daje poset P.
30. $(a \Rightarrow c)$ Ako je P presjek dva linearna uređenja, definišemo da je $i <_Q j$ ako i samo ako je i manje od j u prvom, a j manje od i u drugom od tih uređenja.
$(a \Rightarrow c)$ Konstruišimo prvo linearno uređenje na P u kojem je i manje od j ako i samo ako je $i <_P j$ ili $i <_Q j$. U drugom linearnom uređenje je i manje od j ako je $i <_P j$ ili $j <_Q i$.
31. Neka je $n = p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}$ kanonska faktorizacija broja n. Relaciju kojim se računa Ojlerova funkcija

$$\varphi(n) = n - \tfrac{n}{p_1} - \tfrac{n}{p_2} - \cdots \tfrac{n}{p_k} + \tfrac{n}{p_1p_2} + \cdots + (-1)^r \tfrac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_r}} + \cdots$$

možemo zapisati sa $g(n) = \sum_{d|n}\mu(d,n)f(d)$, gdje je $g(x) = \varphi(x)$ a $f(x) = x$. Sada tvrđenje slijedi iz Mebijusove inverzije.
32. Prisjetimo se da je $\hat{0}$ particija $[n]$ sa n jednočlanih blokova , a $\hat{1}$ ima jedan blok sa n elemenata. Za proizvoljam prirodan broj x i $\pi \in \Pi_n$ sa $g(\pi)$ označimo broj funkcija $h : [n] \to [x]$ kod kojih su neprazni podskupovi $h^{-1}(\{1\}), h^{-1}(\{2\}), \ldots, h^{-1}(\{n\})$ tačno blokovi particije π. Na primjer, vrijedi $g(\hat{0}) = x(x-1)\cdots(x-n+1)$.

Ako definišemo funkciju $f : \Pi_n \to \mathbb{C}$ sa $f(\pi) = \sum_{\tau \geqslant \pi} g(\tau)$ koristeći Mebijusovu inverziju dobijamo da je $g(\pi) = \sum_{\tau \leqslant \pi} \mu(\pi\, \tau) f(\tau)$. Lako se uvjeriti da je $f(\pi) = x^{|\pi|}$, gdje je $|\pi|$ broj blokova u π. Sada, iz

$$x(x-1)\cdots(x-n+1) = g(\hat{0}) = \sum_{\tau} \mu(\hat{0}, \tau) x^{|\tau|}$$

zaključujemo da je tražena vrijednost Mebijusove funkcije koeficijent uz x. To je $(-)^{n-1}(n-1)!$.

33. Pravilna bojenja grafa G' sa m boja su i pravilna bojenja grafa G, osim u slučaju kada su u i v obojeni istom bojom. Ako se tjemena u i v identifikuju, takva bojenja su tačno pravilna bojenja grafa G''.
34. Može se pokazati da broj orijentacija na grafu G zadovoljava istu "rekurzivnu" relaciju za hromatski polinom iz prethodnog zadatka.
35. Koristeći definiciju hromatskog polinoma ili rješenje zadatka 33 dobijamo da je $\chi_G(m)$ jednak
    a) $m(m-1)^{n-1}$
    b) $(m-1)^n + (-1)^n(m-1)$
    c) $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} S(m,i)S(n,j)m^{\underline{i+j}}$
    d) $m(m-1)\cdots(m-n+4)(m-n+3)^2(m-n+2)$
36. Dodajmo još jedno mjesto za parkiranje i aranžirajmo parking kao kružni tok (poslije mjesta $n+1$ dolazi mjesto 1). Sada dozvolimo da se neko želi parkirati i na mjesto $n+1$. Za svaki niz $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in [n+1]^n$ automobili se mogu parkirati. Tih nizova ima $(n+1)^n$. Za "spisak želja" $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ automobili se mogu parkirati i na stari parking ako i samo ako je mjesto $n+1$ u kružnom parkingu ostalo slobodno.
    Grupa $\mathbb{Z}_{n+1}$ dejstvuje na spisku želja $[n+1]^n$ dodajući 1 na svaku koordinatu (u kružnom parkingu je $n+2=1$), odnosno , pomjerajući automobile na parkingu za jedan. U svakoj orbiti postoji tačno jedan spisak želja u kojem je mjesto $n+1$ slobodno. Traženi broj nizova je $(n+1)^{n-1}$.
37. $\binom{n}{2} - \sum_{i=1}^{n} a_i$
38. Koristićemo sličnu ideju kao i u zadatku 36. Kako u svakoj orbiti ima k nizova za koje će $n+1$ biti prazan, rješenje je $k \cdot (n+1)^{n-k}$.
39. Pomoću rješenja prethodnog zadatka dobijemo da je rješenje

$$\binom{n}{k} k n^{n-k-1} = \binom{n-1}{k-1} n^{n-k}.$$

40. Između koordinata vektora iz $\mathbb{R}^n$ (i prije prve i nakon posljednje koordinate) upišimo brojeve $1, 2, \ldots, n+1$. Svaki vektor iz S (osim nula-vektora, koji nije interesantan za bazu) je određen sa parom brojeva (p, q), gdje je p pozicija poslije koje počinje niz jedinica, a q je pozicija prije koje niz jedinica završava. (Zato skup S ima $\binom{n+1}{2} + 1$ vektora!).
Na taj način, vektoru iz S možemo dodijeliti ivicu pq u grafu kojem je skup tjemena $[n+1]$. Neki n-člani podskup od S je baza ako i samo ako je graf sa n ivica asociranim vektorima iz tog skupa acikličan! Zato baza u S ima koliko i označenih stabala na $[n+1]$, dakle $(n+1)^{n-1}$.

Literatura

1. Aigner M.: *A Course in Enumeration*, Graduate Texts in Mathematics 238, Springer-Verlag, Heidelberg Berlin, 2007.
2. Aigner M., Ziegler G. M.: *Proofs from THE BOOK*, Springer-Verlag, Heidelberg Berlin, 1998.
3. Anderson I.: *A first course in combinatorial Mathematics*, Oxford Univ. Press. Oxford.1989.
4. Andreescu T., Feng Z.: *A Path to Combinatorics for Undergraduates -Counting Strategies*, Birhäuser, Boston, 2004.
5. Andrews G. E.: *The Theory of Partitions*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. 2, Addison-Wesley, 1976.
6. Andrews W. S.: *Magic Squares and Cubes*, Cosimo Classics, 2004.
7. Biggs N.L., Lloyd K.E., Wilson R.J.: *The history of Combinatorics*, in: Handbook of Combinatorics, R. Graham, M. Grötschel and L. Lovász, (Eds), North-Holland, Amsterdam, 2163-2198, 1995.
8. Björner A.: *Topological Methods*, in: Handbook of Combinatorics, R. Graham, M. Grötschel and L. Lovász, (Eds), North-Holland, Amsterdam, 1819-1872, 1995.
9. Björner A., Stanley R. P., *A Combinatorial Miscellany* , preprint
10. Bóna M.: *A Walk Through Combinatorics*, World Scientific, Singapore, 2002.
11. Bóna M.: *Combinatorics of Permutations*, CRC Press - Chapman Hall, 2004.
12. Cameron P.J.: *Combinatorics: topics, techniques, algorithms*, Cambridge University Press, 1994.
13. Djukić D., Janković V., Matić I., Petrović N.: *The IMO Compendindium: A Collection of Problems Suggested for The International Mathematical Olympiads: 1959-2004* , Problem Books in Mathematics, Springer, 2006.
14. Engel A.: *Problem-Solving Strategies*, Problem Books in Mathematics, Springer.1998.
15. Garsia A., Milne S., A Rogers'Ramanujan bijection , J. Combin. Theory Ser. A, 31 (1981), 289-339.
16. Gessel I.M., Stanley R.P.:*Algebraic enumeration* in: Handbook of Combinatorics, R. Graham, M. Grötschel and L. Lovász, (Eds), North-Holland, Amsterdam, 1021-1061, 1995.
17. Graham, R.L.; Rothschild, B.L; Spencer, J. H.: *Ramsey Theory*, New York: John Wiley and Sons, (1990)

18. Graham R.L., Rothschild B.L.: *A short proof of van der Waerden's theorem on arithmetic progressions*, Proc. American Math. Soc. 42(2) 1974, 385-386.
19. Graham R.L., Knuth D.E., Patashnik O.: *Concrete mathematics*, 2nd edition, Addison-Wesley, 1994.
20. Kleitman D.J.: *On the future of combinatorics*, in S. S. Hecker and G.C. Rota, eds., Essays on the Future in Honor of Nick Metropolis, Birkhäuser, Boston, 2000, pp. 123 – 134.
21. van Lint J.H., Wilson R.M.: *A course in combinatorics*, Cambridge University Press, 1992.
22. Lovász L.: *Combinatorial Problems and Exercises*, Elsevier; Akademiai Kiado (Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences), second edition, 1994.
23. Mardešić S.: *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru*, Prvi dio, Školska knjiga, Zagreb, 1979
24. Matoušek J.: *Lectures on Discrete Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 212, Springer, 2002.
25. Matoušek J.: *Using the Borsuk-Ulam Theorem: Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry*, Springer, 2003.
26. Matoušek J., Nešetril J.: *Invitation to Discrete Mathematics*, Oxford University Press. 1998.
27. Paunić Dj.: *Funkcionalne jednačine klasičnih matematičkih funkcija*, Zavod za udžbenike, Društvo matematičara Srbije, 2009
28. Petrović V.: *Teorija grafova*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 1998.
29. Sagan B.: *Why the characteristic polynomial factors*, Bull. Am. Math. Soc., New Ser. 36, No.2, 113-133 (1999).
30. Smetaniuk B.: *A new construction of Latin squares I: A proof of the Evans conjecture*, Ars. Comb., 11 (1981),155Ũ172
31. Stanley R. P.: *Algebraic Combinatorics*, Lecture Notes, MIT.
32. Stanley R. P.: *Bijective proof problems*,preprint.
33. Stanley R. P.: *Combinatorics and Commutative Algebra*, Birkhäuser, Boston, MA, 1996.
34. Stanley R. P.: *Enumerative Combinatorics*, Vol. I, Paperback ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. 49. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
35. Stanley R. P.: *Enumerative Combinatorics*, Vol. II, Cambridge Studies in Advanced Mathematics. 62. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
36. Stanley R. P.: *Hyperplane Arrangements*,in Geometric Combinatorics (E. Miller, V. Reiner, and B. Sturmfels, eds.), IAS/Park City Mathematics Series, vol. 13, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007, pp. 389-496
37. Sved M., *Counting and Recounting: The Aftermath* , Math. Intelligencer, 6(4), 44-45, (1984).
38. Tošić R.:*Kombinatorika*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 1998.
39. Veljan, D. *Kombinatorika sa Teorijom Grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.
40. Wilf H.: *Generatingfunctionology*, Academic Press, 1994.
41. Živaljević R.: *Topological methods*, in Handbook of discrete and computational geometry, Boca Raton, FL: CRC Press, 209-224 (1997).

Indeks

Spisak oznaka