Електроенергетски софтверски инжењеринг 15. јун 2016.

Дискретна математика

Колоквијум I

1. На забави је било 10 девојака и 7 младића. Ако у неком плесу учествују сви младићи, колико има могућности за формирање плесних парова?

Решење: Са првим младићем може плесати 10 девојака, са другим 9, ..., са седмим 4 девојке па је решење $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.
II начин: На $\binom{10}{7}$ начина бирамо девојке које ће плесати, а затим на 7! начина формирамо плесне парове, што нам даје укупно $\binom{10}{7} \cdot 7!$ начина.

2. Одредити коефицијент уз x^{-6} у развоју израза $(16x^2 - \frac{1}{2x})^{12}$.

Решење: Важи $(16x^2 - \frac{1}{2x})^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (16x^2)^k (-2x)^{k-12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} 16^k (-2)^{k-12} x^{2k+k-12}$. Пошто се тражи коефицијент уз x^{-6} треба да буде испуњено $3k - 12 = -6$, па је $k = 2$. Сада је тражени кеофицијент $\binom{12}{2} 16^2 (-2)^{-10}$.

3. Колико има пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, 9\}$ које не садрже блокове 23, 45 и 678?

Решење: Уведимо ознаке

$$S_1 - \text{ пермутације које садрже блок 23}$$
$$S_2 - \text{ пермутације које садрже блок 45}$$
$$S_3 - \text{ пермутације које садрже блок 678.}$$

Сада је

$$N(S_1' S_2' S_3') = 9! - 8! - 8! - 7! + 7! + 6! + 6! - 5!.$$

4. Решити систем рекурентних релација

$$a_{n+1} + 2a_n + 4b_n = 0$$
$$b_{n+1} - 4a_n - 6b_n = 0,$$

уз почетне услове $a_0 = 1, b_0 = 0$.

Решење: Ако изразимо b_n из прве једначине добијамо $b_n = \frac{-a_{n+1} - 2a_n}{4}$. Заменом овако добијеног b_n у другу једначину добија се рекурентна релација

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0.$$

Њена карактеристична једначина $t^2 - 4t + 4 = 0$ има двоструку нулу $t = 2$, па према томе a_n има облик $A2^n + Bn2^n$. Како је $a_1 = -2a_0 - 4b_0 = -2$ добијамо систем

$$A = 1$$
$$2A + 2B = -2$$

одакле је $B = -2$. Сада је $a_n = 2^n(1 - 2n)$ и $b_n = \frac{-a_{n+1} - 2a_n}{4} = n2^{n+1}$.