Grupoidi i grupe

Definicija 1 *Neka je G neprazan skup. Ako je $*: G^2 \to G$ funkcija skupa G^2 u skup G, tada je $*$* ***binarna operacija*** *skupa G. Uređeni par $(G,*)$ naziva se* ***grupoid***.

Ispitivanje da li je $(G,*)$ grupoid faktički se svodi na ispitivanje zatvorenosti $*$ u skupu G.

Primer 1 *Da li su sledeći uređeni parovi grupoidi:* ***1)*** $(\mathbb{N},+)$ ***2)*** $(\mathbb{N},\cdot)$ ***3)*** $(\mathbb{N},-)$ ***4)*** $(\mathbb{Z},-)$ ***5)*** $(\mathbb{Z},\cdot)$ ***6)*** $(\mathbb{Z}\backslash\{0\},:)$ ***7)*** $(\mathbb{R},:)$ ***8)*** $(\mathbb{R}\backslash\{0\},:)$ ***9)*** $(\{-1,0,1\},\cdot)$ ***10)*** $(\{-1,1\},\cdot)$ ***11)*** $(\{-1,0,1\},+)$.

Definicija 2 *Grupoid $(G,*)$ je:*

(a) ***asocijativan*** *ako za operaciju $*$ važi da $(\forall x,y,z \in G) \quad (x*y)*z = x*(y*z)$;*

(b) ***komutativan*** *ako za operaciju $*$ važi da $(\forall x,y \in G) \quad x*y = y*x$;*

(c) sa ***neutralnim elementom*** *ako $(\exists e \in G)(\forall x \in G) \quad e*x = x*e = x$.*

Definicija 3 *$(G,*)$ je* ***grupa*** *ako važe sledeće aksiome:*

A1 : *$(G,*)$ je grupoid,*

A2 : *operacija $*$ je asocijativna,*

A3 : *postoji neutralni element $(e*x = x*e = x)$,*

A4 : *za svaki $x \in G$ postoji inverzni element $\left(x*x^{-1} = x^{-1}*x = e\right)$.*

Grupa u kojoj važi komutativnost (A5) zove se ***Abelova (komutativna) grupa***.

Definicija 4 *Uređen par $(G,*)$ je* ***polugrupa*** *ako su zadovoljeni A1 i A2. Uređen par $(G,*)$ je* ***monoid*** *ako su zadovoljeni A1, A2 i A3.*

Primer 2 *Da li su sledeći uređeni parovi grupe:* ***1)*** $(\mathbb{N},+)$ ***2)*** $(\mathbb{Z},+)$ ***3)*** $(\mathbb{Q},+)$ ***4)*** $(\mathbb{R},+)$ ***5)*** $(\mathbb{C},+)$ ***6)*** $(\{-2,-1,0,1,2\},+)$ ***7)*** $(\mathbb{Z},-)$ ***8)*** $(\mathbb{N},\cdot)$ ***9)*** $(\mathbb{Z},\cdot)$ ***10)*** $(\mathbb{Q},\cdot)$ ***11)*** $(\mathbb{Q}\backslash\{0\},\cdot)$ ***12)*** $(\mathbb{R}\backslash\{0\},\cdot)$ ***13)*** $(\mathbb{C}\backslash\{0\},\cdot)$ ***14)*** $(\mathbb{Q}^+,\cdot)$ ***15)*** $(\mathbb{R}^+,\cdot)$ ***16)*** $(\alpha,*)$, $\alpha*\alpha=\alpha$.

Zadatak 1 *Neka je $A \neq \emptyset$ i neka je operacija $*: A^2 \to A$ definisana sa $a*b = a$, za sve $a,b \in A$. Dokazati da je $(A,*)$ polugrupa.*

Rešenje: Treba dokazati zatvorenost i asocijativnost operacije $*$ u skupu A.

A1 : Treba proveriti da je rezultat operacije $a*b$ uvek u skupu A. Kako je $a*b = a \in A$.

A2 : Treba proveriti da li je $(\forall a,b,c \in A) \quad a*(b*c) = (a*b)*c$.
Leva strana: $a*(b*c) = a*b = a$, desna strana: $(a*b)*c = a*c = a$.

$\square$

Zadatak 2 *Proveriti da li je* $(\{1, i, -1, -i\}, \cdot)$ *Abelova grupa.*

Rešenje:

$\cdot$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

A1 : Zatvorenost važi ako je u tablici svaki element iz skupa $\{1, i, -1, -i\}$.

Vidi se iz tablice, da ovo važi.

A2 : Asocijativnost se ne vidi iz tablice. Treba proveriti jednakost $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ za svih 4^3 slučajeva.

U ovom slučaju znamo da asocijativnost važi, jer se asocijativnost množenja prenosi iz skupa svih kompleksnih brojeva na skup $\{1, i, -1, -i\}$.

A3 : Ako postoji vrsta jednaka graničnoj vrsti, tada je element ispred te vrste levi neutralni element. Ako postoji kolona jednaka graničnoj koloni, onda je element iznad te kolone desni neutralni element. Ako je element levi neutralni i desni neutralni, tada je neutralni element.

Neutralni element je 1.

A4 : Ako se neutralni element pojavljuje tačno jednom u svakoj vrsti i koloni i ako su oni simetrično raspoređeni u odnosu na glavnu dijagonalu, tada svaki element ima inverz.

Inverzni elementi su redom: $1^{-1} = 1$, $i^{-1} = -i$, $-1^{-1} = -1$ i $-i^{-1} = i$.

A5 : Ako je tablica simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu, onda važi komutativnost.

Vidi se iz tablice da komutativnost važi.

Prema tome, $(\{1, i, -1, -i\}, \cdot)$ jeste Abelova grupa. □

Zadatak 3 *Neka je* $G = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$. *Ispitati da li je* $(G, *)$ *komutativna grupa, ako je operacija* $*$ *definisana sa:*

$$(\forall a, b \in G) \quad a * b = a + b + ab.$$

Rešenje:

A1 : Neka su $a, b \in G$. Pošto je zbir i proizvod racionalnih brojeva racionalan broj, mora biti $a * b \in \mathbb{Q}$, pa treba još da dokažemo da je $a * b \neq -1$.

Pretpostavimo suprotno, da je $a * b = -1$. Dobijamo $-1 = a * b = a + b + ab = a(1 + b) + b$, pa je $a = \frac{-1-b}{1+b} = -1 \notin G$ čime dobijamo kontradikciju, odnosno mora da važi $a * b \neq -1$, tj. $a * b \in G$.

A2 : Neka su $a, b, c \in G$. Izrazićemo posebno $(a * b) * c$ i $a * (b * c)$, a zatim uporediti ove izraze:

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= (a + b + ab) * c \\ &= (a + b + ab) + c + (a + b + ab)c \\ &= a + b + ab + c + ac + bc + abc,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a*(b*c) &= a*(b+c+bc)\\
&= a+(b+c+bc)+a(b+c+bc)\\
&= a+b+c+bc+ab+ac+abc.
\end{aligned}
$$

Desne strane navedenih jednakosti su jednake (zbog komutativnosti sabiranja), pa moraju biti jednake i leve.

A5 : Operacija $*$ je komutativna jer za sve $a,b\in G$ važi

$$a*b=a+b+ab=b+a+ba=b*a.$$

A3 : Da bi neki element $e\in G$ bio neutralni element, mora za svako $a\in G$ da važi $e*a=e+a+ea=a$ i $a*e=a+e+ae=a$; utvrditi smo da je $*$ komutativna operacija pa je dovoljno da bude $e*a=a$, odnosno mora da važi $e(1+a)=0$ za sve $a\in G$, što je tačno (samo) za $e=0\in G$.

A4 : Ispitujemo egzistenciju inverznog elementa za proizvoljno $a\in G$. Da bi postojao inverzni element $a^{-1}\in G$ elementa a, za njega mora da važi $a^{-1}*a=e$. Dakle, mora da važi $a^{-1}*a=a^{-1}+a+a^{-1}a=0$, tj. $a^{-1}(1+a)=-a$. Odnosno mora da važi $a^{-1}=-\frac{a}{a+1}\in G$. Pošto je $a\in\mathbb{Q}$, $a\neq -1$, i zbir i količnik racionalnih brojeva su racionalni brojevi, sledi da $a^{-1}=-\frac{a}{a+1}\in\mathbb{Q}$, pa treba još da dokažemo da je $-\frac{a}{a+1}\neq -1$.

Pretpostavimo suprotno, da je $-\frac{a}{a+1}=-1$, dobijamo $-a=-a-1$, odnosno $0=-1$ što je nemoguće. Tako da dobijamo da za svako $a\in G$ postoji njemu inverzni element $a^{-1}=-\frac{a}{a+1}\in G$.

Dakle, $(G,*)$ jeste Abelova grupa. □

Zadatak 4 *Neka je* $A=\{(a,b)\mid a\in\mathbb{Q}\wedge b\in\mathbb{Q}\wedge a\neq 0\}$, *i neka je operacija* $*$ *definisana sa:*

$$(\forall (a,b),(c,d)\in A)\quad (a,b)*(c,d)=(ac,ad+b)$$

Ispitati da li je $(A,*)$ *grupa, i da li je komutativna.*

Rešenje:

A1 : Zatvorenost operacije $*$ na skupu A sledi jer za $(a,b),(c,d)\in A$ važi $ac\in\mathbb{Q}$ i $ad+b\in\mathbb{Q}$ (zbir i proizvod racionalnih brojeva je racionalan broj) i $ac\neq 0$ (jer je $a\neq 0$ i $c\neq 0$), pa je $(a,b)*(c,d)=(ac,ad+b)\in A$.

A2 : Neka su $(a,b),(c,d),(e,f)\in A$. Izrazićemo posebno $\big((a,b)*(c,d)\big)*(e,f)$ i $(a,b)*\big((c,d)*(e,f)\big)$, a zatim uporediti ove izraze:

$$
\begin{aligned}
\big((a,b)*(c,d)\big)*(e,f) &= (ac,ad+b)*(e,f)\\
&= \big((ac)e,(ac)f+(ad+b)\big)\\
&= (ace,acf+ad+b),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a,b)*\big((c,d)*(e,f)\big) &= (a,b)*(ce,cf+d)\\
&= \big(a(ce),a(cf+d)+b\big)\\
&= (ace,acf+ad+b).
\end{aligned}
$$

Desne strane navedenih jednakosti su jednake, pa moraju biti jednake i leve.

A5 : <u>1. način:</u> Neka su $(a,b),(c,d)\in A$. Izrazićemo posebno $(a,b)*(c,d)$ i $(c,d)*(a,b)$, a zatim uporediti ove izraze:

$$(a,b)*(c,d)=(ac,ad+b),$$
$$(c,d)*(a,b)=(ca,cb+d).$$

Desne strane navedenih jednakosti nisu jednake, pa komutativnost ne važi.

<u>2. način:</u> Operacija $*$ nije komutativna jer je npr.

$$(2,3)*(3,4)=(6,11)\neq(6,13)=(3,4)*(2,3).$$

A3 : Da bi $(e_1,e_2)\in A$ bio levi neutralni element, mora za svako $(x,y)\in A$ da važi

$$\begin{aligned}(e_1,e_2)*(x,y)=(e_1x,e_1y+e_2)=(x,y) \quad&\Rightarrow\quad e_1x=x\ \wedge\ e_1y+e_2=y\\ &\Rightarrow\quad e_1=1\ \wedge\ e_2=0\end{aligned}$$

Dakle, $(1,0)\in A$ je (jedinstveni) levi neutralni element polugrupe $(A,*)$.

Uređeni par $(1,0)\in A$ je i desni neutralni element polugrupe $(A,*)$, pošto važi

$$(x,y)*(1,0)=(x\cdot 1,x\cdot 0+y)=(x,y).$$

A4 : Levi inverzni element $(a,b)^{-1}=(a',b')\in A$ elementa (a,b) postoji ukoliko za njega važi

$$\begin{aligned}(a',b')*(a,b)=(1,0)\quad&\Rightarrow\quad (a'a,a'b+b')=(1,0)\\ &\Rightarrow\quad a'a=1\ \wedge\ a'b+b'=0\\ &\Rightarrow\quad a'=\frac{1}{a}\ \wedge\ b'=-\frac{b}{a}\end{aligned}$$

Kako je $a\neq 0$ sledi $\left(\frac{1}{a},-\frac{b}{a}\right)\in A$ i to je levi inverzni element elementa (a,b).

Par $\left(\frac{1}{a},-\frac{b}{a}\right)\in A$ je i desni inverzni element, pošto važi

$$(a,b)*\left(\frac{1}{a},-\frac{b}{a}\right)=\left(a\cdot\frac{1}{a},a\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)+b\right)=(1,0).$$

Prema tome, $(A,*)$ je (nekomutativna) grupa. □

Zadatak 5 *(a) Neka je* $A\neq\emptyset$. *Neka je* $\mathcal{F}_A=\{f\mid f:A\to A\}$ *i* $\circ$ *kompozicija funkcija na* $\mathcal{F}_A$. *Dokazati da je* $(\mathcal{F}_A,\circ)$ *monoid.*

(b) Neka je $B\neq\emptyset$. *Neka je* $\mathcal{F}_B=\left\{f\mid f:B\overset{\text{"1-1"}}{\underset{\text{"na"}}{\longrightarrow}}B\right\}$ *i* $\circ$ *kompozicija funkcija na* $\mathcal{F}_B$. *Dokazati da je* $(\mathcal{F}_B,\circ)$ *grupa.*

Rešenje:

(a) A1 : Zatvorenost operacije $\circ$ na skupu $\mathcal{F}_A$ sledi jer za $f,g\in\mathcal{F}_A$, tj. $f:A\to A$ i $g:A\to A$ važi $f\circ g\in\mathcal{F}_A$ jer je $f\circ g:A\to A$.

A2 : Kompozicija funkcija je asocijativna operacija.

A3 : Da bi $e\in\mathcal{F}_A$ bio levi neutralni element, mora za svako $f\in\mathcal{F}_A$ da važi

$$(e\circ f)(x)=e(f(x))=f(x),$$

odnosno mora da važi $e(x)=x$ za sve $x\in A$, što je tačno (samo) za identičku funkciju $i_A(x)=x$. Dakle, $i_A\in\mathcal{F}_A$ je (jedinstveni) levi neutralni element polugrupe $(\mathcal{F}_A,\circ)$.

Preslikavanje $i_A\in\mathcal{F}_A$ je i desni neutralni element polugrupe $(\mathcal{F}_A,\circ)$, pošto važi

$$(f\circ i_A)(x)=f(i_A(x))=f(x).$$

Prema tome, $(\mathcal{F}_A,\circ)$ je monoid.

(b) A1, A2 i A3 se pokazuju analogno kao pod (a).

A4 : Kako su funkcije u skupu $\mathcal{F}_B$ bijektivne funkcije, svaka funkcija $f \in \mathcal{F}_B$ ima sebi inverznu funkciju $f^{-1} \in \mathcal{F}_B$. Odnosno, važi

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = i_B.$$

Prema tome, $(\mathcal{F}_B, \circ)$ je grupa.

□

Zadatak 6 *Dopuniti, ako je moguće, date nepotpune Kejlijeve tablice do tablica grupovnih operacija.*

(a)

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a			
b		e	e

(b)

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a				e
b		e		
c			e	

.

Rešenje:

(a) Pošto u tablici grupovne operacije se u svakoj vrsti i svakoj koloni neutralni element mora pojavljivati tačno jednom, nepotpuna tablica se ne može dopuniti do tablice grupovne operacije jer će vrsta elementa b uvek sadržati dva elementa e.

(b) U tablici grupovne operacije neutralni element mora biti simetrično raspoređen u odnosu na glavnu dijagonalu. Iz date nepotpune tablice se vidi da je e levi neutralni element, pa mora biti i desni, odnosno mora biti neutralni element. Prema tome, e mora biti simetrično raspoređen u odnosu na glavnu dijagonalu. Odatle, zbog $b \circ a = e$ sledi da mora biti i $a \circ b = e$, ali se tada e u vrsti elementa a pojavljuje na dva mesta, tako da se ni ova tablica ne može dopuniti do tablice grupovne operacije.

□

Definicija 5 $(H, \cdot)$ *je podgrupa grupe* $(G, \cdot)$ *ako važi:*

1. $H \subseteq G$;
2. $(H, \cdot)$ *je grupa;*
3. *operacija* $\cdot$ *u* $(H, \cdot)$ *je restrikcija operacije* $\cdot$ *iz* $(G, \cdot)$.

Tvrđenje 1 (Lagranžova teorema) *Broj elemenata konačne grupe* $(G, \cdot)$ *deljiv je brojem elemenata njene podgrupe* $(H, \cdot)$, *odnosno važi*

$$\frac{|G|}{|H|} \in \mathbb{N}.$$

★ Svaka grupa ima bar dve podgrupe: podgrupu koja se sastoji samo od neutralnog elementa, i celu grupu koja je uvek sama sebi podgrupa (ovo su takozvane trivijalne podgrupe).

Zadatak 7 *Naći sve podgrupe Klajnove grupe.*

Rešenje:

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Treba da ispitamo da li osim $(\{e\},\cdot)$ i $(G,\cdot)$ ima i netrivijalnih podgrupa Klajnove grupe. Na osnovu Lagranžove teoreme broj elemenata podgrupe mora da deli broj elemenata grupe (podgrupa Klajnove grupe može da ima 1, 2 ili 4 elementa).

Neutralni element grupe mora biti neutralni element i u podgrupi, pa su kandidati za netrivijalne podgrupe $(\{e,a\},\cdot)$, $(\{e,b\},\cdot)$ i $(\{e,c\},\cdot)$. Restrikcije operacije $\cdot$ na skupovima $\{e,a\}$, $\{e,b\}$ i $\{e,c\}$ su redom

$\cdot$	e	a
e	e	a
a	a	e

$\cdot$	e	b
e	e	b
b	b	e

$\cdot$	e	c
e	e	c
c	c	e

te vidimo da ovo jesu tablice grupovnih operacija. Dakle, podgrupe Klajnove grupe su: $(\{e,a\},\cdot)$, $(\{e,b\},\cdot)$, $(\{e,c\},\cdot)$, $(\{e\},\cdot)$ i $(G,\cdot)$. □

Definicija 6 *Neka su $(H,*)$ i $(G,\circ)$ grupoidi, i neka je $f: H \to G$. Funkcija f je* **homomorfizam** *grupoida $(H,*)$ u grupoid $(G,\circ)$ ako za sve $x,y \in H$ važi*

$$f(x*y) = f(x)\circ f(y).$$

Ako je homomorfizam f bijektivna funkcija, tada se funkcija f naziva **izomorfizam***, i kažemo da je grupoid $(H,*)$* **izomorfan** *sa grupoidom $(G,\circ)$, pišemo $H \simeq G$.*

Zadatak 8 *Napisati Kejlijevu tablicu sabiranja i množenja po modulu 3 i proveriti da li je $(\mathbb{Z}_3,\cdot)$ monoid i $(\mathbb{Z}_3,+)$ grupa.*

Rešenje:

$(\mathbb{Z}_3,\cdot)$:

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$(\mathbb{Z}_3,+)$:

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$(\mathbb{Z}_3,\cdot)$ je monoid, jer:

A1 : Zatvorenost važi, pošto je u tablici svaki element iz skupa $\mathbb{Z}_3$.

A2 : Asocijativnost ove operacije sledi iz njene definicije[1] i asocijativnosti množenja u skupu celih brojeva. Odnosno,

$$\left(C_x \cdot C_y\right)\cdot C_z = C_{xy}\cdot C_z = C_{(xy)z} = C_{x(yz)} = C_x \cdot C_{yz} = C_x \cdot \left(C_y \cdot C_z\right).$$

A3 : Neutralni element je 1.

[1] Kako je deljenje po modulu 3 kongruencija u $(\mathbb{Z},\cdot)$ važi da $C_x \cdot_3 C_y = C_{xy}$, $x,y \in \mathbb{Z}$ a $C_x, C_y, C_{xy} \in \mathbb{Z}_3$, tj. množenjem klasa dobija se klasa, koju dobijamo množenjem predstavnika.

$(\mathbb{Z}_3, +)$ je grupa, jer:

A1 : Zatvorenost važi, pošto je u tablici svaki element iz skupa $\mathbb{Z}_3$.

A2 : Asocijativnost ove operacije sledi iz njene definicije[2] i asocijativnosti sabiranja u skupu celih brojeva. Odnosno,

$$\left(C_x + C_y\right) + C_z = C_{x+y} + C_z = C_{(x+y)+z} = C_{x+(y+z)} = C_x + C_{y+z} = C_x + \left(C_y + C_z\right).$$

A3 : Neutralni element je 0.

A4 : Inverzni elementi su redom: $-0 = 0$, $-1 = 2$ i $-2 = 1$.

$\square$

Zadatak 9 (Domaći zadatak) *Napisati Kejlijevu tablicu sabiranja i množenja po modulu* 4 *i proveriti da li je* $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$ *monoid i* $(\mathbb{Z}_4, +)$ *grupa.*

Rešenje:

$(\mathbb{Z}_4, \cdot)$:

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$(\mathbb{Z}_4, +)$:

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$(\mathbb{Z}_4, \cdot)$ je monoid, jer:

A1 : Zatvorenost važi, pošto je u tablici svaki element iz skupa $\mathbb{Z}_4$.

A2 : Asocijativnost ove operacije sledi iz njene definicije i asocijativnosti množenja u skupu celih brojeva. Odnosno,

$$\left(C_x \cdot C_y\right) \cdot C_z = C_{xy} \cdot C_z = C_{(xy)z} = C_{x(yz)} = C_x \cdot C_{yz} = C_x \cdot \left(C_y \cdot C_z\right).$$

A3 : Neutralni element je 1.

$(\mathbb{Z}_4, +)$ je grupa, jer:

A1 : Zatvorenost važi, pošto je u tablici svaki element iz skupa $\mathbb{Z}_4$.

A2 : Asocijativnost ove operacije sledi iz njene definicije i asocijativnosti sabiranja u skupu celih brojeva. Odnosno,

$$\left(C_x + C_y\right) + C_z = C_{x+y} + C_z = C_{(x+y)+z} = C_{x+(y+z)} = C_x + C_{y+z} = C_x + \left(C_y + C_z\right).$$

A3 : Neutralni element je 0.

A4 : Inverzni elementi su redom: $-0 = 0$, $-1 = 3$, $-2 = 2$ i $-3 = 1$.

$\square$

[2] Kako je deljenje po modulu 3 kongruencija u $(\mathbb{Z}, +)$ važi da $C_x +_3 C_y = C_{x+y}$, $x, y \in \mathbb{Z}$ a $C_x, C_y, C_{xy} \in \mathbb{Z}_3$, tj. sabiranjem klasa dobija se klasa, koju dobijamo sabiranjem predstavnika.

Zadatak 10 *Neka su f, g i h permutacije skupa $\{1,2,3\}$ definisane sa:*

$$f=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\quad h=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}.$$

Dokazati da je $(\{f,g,h\},\circ)$ grupa, ako je $\circ$ kompozicija funkcija.

Rešenje:

$\circ$	f	g	h
f	f	g	h
g	g	h	f
h	h	f	g

$(\{f,g,h\},\circ)$ je grupa, jer:

A1 : Zatvorenost važi, pošto je u tablici svaki element iz skupa $\{f,g,h\}$.

A2 : Kompozicija funkcija je asocijativna operacija.

A3 : Neutralni element je f.

A4 : Inverzni elementi su redom: $f^{-1}=f$, $g^{-1}=h$ i $h^{-1}=g$.

□

Zadatak 11 *Neka je $3\mathbb{Z}=\{3k \mid k\in\mathbb{Z}\}$ i neka je funkcija $f:\mathbb{Z}\to 3\mathbb{Z}$ definisana sa $f(k)=3k$, za sve $k\in\mathbb{Z}$. Ispitati da li je funkcija f izomorfizam grupa $(\mathbb{Z},+)$ i $(3\mathbb{Z},+)$.*

Rešenje: Najpre ćemo dokazati da su strukture $(\mathbb{Z},+)$ i $(3\mathbb{Z},+)$ grupe.

- $(\mathbb{Z},+)$ je grupa, jer:

  A1 : Kako je zbir celih brojeva ceo broj, zatvorenost važi.

  A2 : Sabiranje brojeva je asocijativna operacija.

  A3 : Neutralni element za sabiranje brojeva je $0\ (\in\mathbb{Z})$.

  A4 : Inverzni element za x je $-x$, za svako $x\in\mathbb{Z}$.

- $(3\mathbb{Z},+)$ je grupa, jer:

  A1 : Ako $x,y\in 3\mathbb{Z}$, onda postoje $k_1,k_2\in\mathbb{Z}$ takvi da je $x=3k_1$ i $y=3k_2$. Tada je
  $$x+y=3k_1+3k_2=3(k_1+k_2)=3k_3,\ k_3\in\mathbb{Z}\ \Rightarrow\ x+y\in 3\mathbb{Z}.$$

  A2 : Kako asocijativnost sabiranja važi na skupu celih brojeva, važi i na svakom njegovom podskupu, pa tako i na $3\mathbb{Z}$.

  A3 : Neutralni element je $0=3\cdot 0\in 3\mathbb{Z}$.

  A4 : Inverzni element za $x=3k\in 3\mathbb{Z}$ je $-x=-(3k)=3(-k)$, jer ako $k\in\mathbb{Z}$, onda i $-k\in\mathbb{Z}$.

Treba još ispitati da li je funkcija f izomorfizam (odnosno da li je bijekcija i homomorfizam).

"1-1": Pretpostavimo da je $f(x)=f(y)$, tj. $3x=3y$, odnosno $x=y$.

"na": Funkcija f će biti sirjektivna ako za svako $y\in 3\mathbb{Z}$ postoji takav $x\in\mathbb{Z}$ da važi $y=f(x)$. Kako je $y=3k$, za neko $k\in\mathbb{Z}$, sledi da je $x=k$.

hom: Za proizvoljne $x, y \in \mathbb{Z}$ treba pokazati da važi $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Koristeći definiciju funkcije f i distributivnost $\cdot$ prema $+$ u skupu celih brojeva dobijamo:

$$f(x+y) = 3(x+y) = 3x + 3y = f(x) + f(y).$$

$\square$

Teorema 1 *Svaka grupa $(G, \cdot)$ je izomorfna sa nekom podgrupom grupe svih permutacija skupa G u odnosu na kompoziciju funkcija.*

Zadatak 12 *Preko permutacija utvrditi da li su sledeći uređeni parovi grupe:*

(a) $(A, \cdot)$, *gde je* $A = \{a, b, c, d\}$ *i*

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

(b) $(B, *)$, *gde je* $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *i*

$*$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	4	5	6	1
3	3	4	1	6	2	5
4	4	5	6	1	3	2
5	5	6	2	3	1	4
6	6	1	5	2	4	3

Rešenje: Iz Kejlijevih tablica datih operacija vidimo:

(a) Operacija $\cdot$ je zatvorena na skupu A, neutralni element je a, inverzni elementi su redom $a^{-1} = a$, $b^{-1} = b$, $c^{-1} = c$ i $d^{-1} = d$, tako da još preostaje samo pitanje asocijativnosti operacije $\cdot$ na skupu A.

Svakom elementu iz A pridružujemo onu permutaciju skupa A koja odgovara njegovoj vrsti u tablici operacije $\cdot$, odnosno posmatramo skup permutacija $S_A = \{\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c, \sigma_d\}$ u odnosu na operaciju $\circ$, pri čemu je:

$$\sigma_a = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \quad \sigma_b = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix},$$
$$\sigma_c = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}, \quad \sigma_d = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix},$$

$\circ$	σ_a	σ_b	σ_c	σ_d
σ_a	σ_a	σ_b	σ_c	σ_d
σ_b	σ_b	σ_a	σ_d	σ_c
σ_c	σ_c	σ_d	σ_a	σ_b
σ_d	σ_d	σ_c	σ_b	σ_a

Dokažimo da je $(S_A, \circ)$ grupa:

A1 : Zatvorenost važi, pošto je u tablici svaki element iz skupa S_A.

A2 : Kompozicija funkcija je asocijativna operacija.

A3 : Neutralni element je σ_a.

A4 : Inverzni elementi su redom $\sigma_a^{-1} = \sigma_a$, $\sigma_b^{-1} = \sigma_b$, $\sigma_c^{-1} = \sigma_c$ i $\sigma_d^{-1} = \sigma_d$.

Funkcija $\varphi : A \to S_A$ data sa $\varphi = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \sigma_a & \sigma_b & \sigma_c & \sigma_d \end{pmatrix}$ je očigledno bijekcija, a jeste i homomorfizam jer je za sve $x, y \in A$

$$\varphi(x \cdot y) = \sigma_{x \cdot y} \stackrel{*}{=} \sigma_x \circ \sigma_y = \varphi(x) \circ \varphi(y),$$

pri čemu se iz tablica operacija $\cdot$ i $\circ$ jednostavno vidi da važi $(*)$. Prema tome, $(A, \cdot)$ je izomorfna grupi $(S_A, \circ)$, te je i sama grupa. Grupa $(S_A, \circ)$ je upravo podgrupa grupe svih permutacija skupa A o kojoj govori teorema **1**.

(b) Operacija $*$ je zatvorena na skupu B, neutralni element je 1, inverzni elementi su redom $1^{-1} = 1$, $2^{-1} = 6$, $3^{-1} = 3$, $4^{-1} = 4$, $5^{-1} = 5$ i $6^{-1} = 2$, tako da još preostaje samo pitanje asocijativnosti operacije $*$ na B. Odgovarajući skup permutacija iz teoreme **1** je $S_B = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$, gde je

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Uređeni par $(B, *)$ nije grupa jer je npr.

$$\sigma_3 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \neq \sigma_{3*2} = \sigma_4,$$

odnosno operacija $\circ$ nije zatvorena u skupu S_B jer $\sigma_3 \circ \sigma_2 \notin S_B$.

□

Zadatak 13 *Neka su*

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

redom rotacije za $0°$ *i* $180°$, *a zatim osne simetrije u odnosu na ose paralelne stranicama kvadrata čija su temena* $1,2,3,4$ *i koje taj kvadrat preslikavaju u samog sebe. Ispitati da li je* $(\{\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3\}, \circ)$ *grupa i ako jeste naći njene podgupe.*

Rešenje:

$\circ$	ρ	ρ_1	ρ_2	ρ_3
ρ	ρ	ρ_1	ρ_2	ρ_3
ρ_1	ρ_1	ρ	ρ_3	ρ_2
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ	ρ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_2	ρ_1	ρ

Struktura $(\{\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3\}, \circ)$ je Klajnova grupa, tako da:

A1 : Zatvorenost važi, pošto je u tablici svaki element iz skupa $\{\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3\}$.

A2 : Kompozicija funkcija je asocijativna operacija.

A3 : Neutralni element je ρ.

A4 : Inverzni elementi su redom $\rho^{-1} = \rho$, $\rho_1^{-1} = \rho_1$, $\rho_2^{-1} = \rho_2$ i $\rho_3^{-1} = \rho_3$.

U zadatku **7** su nađene podgrupe Klajnove grupe. □

Zadatak 14 *Ispitati sve aksiome komutativne grupe za strukturu* $(\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \circ)$, *gde su za* $i \in \{1,2,3,4\}$ *funkcije* $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definisane sa:*

$$f_1(x,y) = (-y, -x), \quad f_2(x,y) = (y, x), \quad f_3(x,y) = (x,y) \quad i \quad f_4(x,y) = (-x, -y).$$

Rešenje:

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_3	f_4	f_1	f_2
f_2	f_4	f_3	f_2	f_1
f_3	f_1	f_2	f_3	f_4
f_4	f_2	f_1	f_4	f_3

Popunjavanje tablice:

- Izračunamo sve potrebne kompozicije zadatih funkcija.
- Geometrijska interpretacija:

  f_1 – osna simetrija u odnosu na pravu $y = -x$,

  f_2 – osna simetrija u odnosu na pravu $y = x$,

  f_3 – identička funkcija,

  f_4 – centralna simetrija u odnosu na koordinatni početak.

Struktura $(\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \circ)$ je Klajnova grupa, jer:

A1 : Zatvorenost važi, pošto je u tablici svaki element iz skupa $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

A2 : Kompozicija funkcija je asocijativna operacija.

A3 : Neutralni element je f_3.

A4 : Inverzni elementi su redom $f_1^{-1} = f_1$, $f_2^{-1} = f_2$, $f_3^{-1} = f_3$ i $f_4^{-1} = f_4$.

A5 : Pošto je tablica simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu, komutativnost važi.

$\square$

Zadatak 15 *Ispitati sve aksiome komutativne grupe za strukturu* $(\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \circ)$, *gde su za* $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ *funkcije* $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definisane sa:*

$$f_1(x, y) = (-y, x), \quad f_2(x, y) = (x, y), \quad f_3(x, y) = (y, -x) \quad i \quad f_4(x, y) = (-x, -y).$$

Rešenje:

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_4	f_1	f_2	f_3
f_2	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_2	f_3	f_4	f_1
f_4	f_3	f_4	f_1	f_2

Popunjavanje tablice:

- Izračunamo sve potrebne kompozicije zadatih funkcija.
- Geometrijska interpretacija:

  f_1 – rotacija oko koordinatnog početka za ugao $\frac{\pi}{2}$,

  f_2 – identička funkcija,

  f_3 – rotacija oko koordinatnog početka za ugao $-\frac{\pi}{2}$,

  f_4 – centralna simetrija u odnosu na koordinatni početak.

Struktura $(\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \circ)$ jeste Abelova grupa, jer:

A1 : Zatvorenost važi, pošto je u tablici svaki element iz skupa $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

A2 : Kompozicija funkcija je asocijativna operacija.

A3 : Neutralni element je f_2.

A4 : Inverzni elementi su redom $f_1^{-1} = f_3$, $f_2^{-1} = f_2$, $f_3^{-1} = f_1$ i $f_4^{-1} = f_4$.

A5 : Pošto je tablica simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu, komutativnost važi.

$\square$

Zadatak 16 *Ispitati da li je* $(\{f,g,h\},\circ)$ *grupa, ako je* $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{1-x}$ *i* $h(x) = \frac{x-1}{x}$.

Rešenje:

$\circ$	f	g	h
f	f	g	h
g	g	h	f
h	h	f	g

Struktura $(\{f,g,h\},\circ)$ jeste grupa, jer:

A1 : Zatvorenost važi, pošto je u tablici svaki element iz skupa $\{f,g,h\}$.

A2 : Kompozicija funkcija je asocijativna operacija.

A3 : Neutralni element je f.

A4 : Inverzni elementi su redom $f^{-1} = f$, $g^{-1} = h$ i $h^{-1} = g$.

$\square$

Zadatak 17 *Neka je* $A_{a,b} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, *i neka je* $\mathcal{A} = \left\{ A_{a,b} \mid a,b \in \mathbb{R} \right\}$. *Za* $(\mathcal{A},\cdot)$ *ispitati sve aksiome komutativne grupe, gde je* $\cdot$ *standardno množenje matrica.*

Rešenje:

A1 : Zatvorenost operacije $\cdot$ na skupu $\mathcal{A}$ sledi jer za $A_{a,b}, A_{c,d} \in \mathcal{A}$ važi

$$A_{a,b} \cdot A_{c,d} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ bc+ad & -bd+ac \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{bmatrix} = A_{ac-bd,ad+bc},$$

gde su $ac-bd, ad+bc \in \mathbb{R}$ (zbir i proizvod realnih brojeva je realan broj), pa je $A_{a,b} \cdot A_{c,d} \in \mathcal{A}$.

A2 : Množenje matrica je asocijativna operacija.

A5 : Neka su $A_{a,b}, A_{c,d} \in \mathcal{A}$. Kako je $A_{a,b} \cdot A_{c,d} = A_{ac-bd,ad+bc}$, to je $A_{c,d} \cdot A_{a,b} = A_{ca-db,cb+da}$. Iz komutativnosti operacija $+$ i $\cdot$ u skupu realnih brojeva sledi

$$ca-db = ac-bd \quad \wedge \quad cb+da = ad+bc \quad \Rightarrow \quad A_{a,b} \cdot A_{c,d} = A_{c,d} \cdot A_{a,b}.$$

A3 : *Prvi način:*
Da bi $A_{e_1,e_2} \in \mathcal{A}$ bio levi neutralni element, mora za svako $A_{a,b} \in \mathcal{A}$ da važi

$$A_{e_1,e_2} \cdot A_{a,b} = A_{a,b} \quad \Rightarrow \quad A_{e_1a-e_2b,e_1b+e_2a} = A_{a,b}$$
$$\Rightarrow \quad e_1a - e_2b = a \wedge e_1b + e_2a = b$$

Ako je $a^2+b^2 \neq 0$, rešenje ovog sistema je $e_1 = 1 \in \mathbb{R}$ i $e_2 = 0 \in \mathbb{R}$. (Ako je $a = b = 0$, onda je $A_{0,0}$ nula matrica, pa za proizvoljnu matricu $A_{a,b} \in \mathcal{A}$ važi $A_{a,b} \cdot A_{0,0} = A_{0,0}$, pa to važi i za $A_{1,0}$.) Dakle, $A_{1,0} \in \mathcal{A}$ je (jedinstveni) levi neutralni element polugrupe $(\mathcal{A}, \cdot)$.

Matrica $A_{1,0} \in \mathcal{A}$ je i desni neutralni element polugrupe $(\mathcal{A}, \cdot)$, pošto važi

$$A_{a,b} \cdot A_{1,0} = A_{a\cdot 1 - b\cdot 0, a\cdot 0 + b\cdot 1} = A_{a,b}.$$

Drugi način:
Neutralni element za množenje u skupu svih kvadratnih matrica reda 2 je jedinična matrica $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Očigledno važi $I = A_{1,0} \in \mathcal{A}$, pa je to neutralni element i u $(\mathcal{A}, \cdot)$.

A4 : Levi inverzni element $A_{a,b}^{-1} = A_{a',b'} \in \mathcal{A}$ elementa $A_{a,b}$ postoji ukoliko za njega važi

$$\begin{aligned} A_{a',b'} \cdot A_{a,b} = A_{1,0} &\Rightarrow A_{a'a - b'b, a'b + b'a} = A_{1,0} \\ &\Rightarrow a'a - b'b = 1 \wedge a'b + b'a = 0 \\ &\Rightarrow a' = \frac{a}{a^2+b^2} \wedge b' = -\frac{b}{a^2+b^2},\ a^2+b^2 \neq 0 \end{aligned}$$

Matrica $A_{0,0}$ nema inverz.

Prema tome, $(\mathcal{A}, \cdot)$ nije grupa. $\square$