OSNOVNA PRAVILA, FORMULE I ZADACI IZ ANALITIČKE GEOMETRIJE

Jednačina prave p

$\boxed{\overrightarrow{OM}=\vec{r}=\vec{r}_M \text{ označava da je } \vec{r}=\vec{r}_M \text{ predstavnik vektora čija početna tačka je koordinatni početak } O=O(0,0,0).}$

Neka je $\vec{r}_M=\vec{r}=(x,y,z)$ vektorska promenljiva i $A(x_1,y_1,z_1)\in p\parallel\vec{p}=(p_1,p_2,p_3)$. Tada je

$M(x,y,z)\in p\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\|\vec{p}\Leftrightarrow\vec{r}_M-\vec{r}_A\|\vec{p}\Leftrightarrow\vec{r}-\vec{r}_A=t\vec{p}$, odnosno $\boxed{p:\ \vec{r}=\vec{r}_A+t\vec{p}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{p:\ \frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{p_2}=\frac{z-z_1}{p_3}=t}$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{p:\ x=x_1+tp_1\ \wedge\ y=y_1+tp_2\ \wedge\ z=z_1+tp_3}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{p:(\vec{r}-\vec{r}_A)\times\vec{p}=0}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{p:\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}_A\times\vec{p}}$

Jednačina ravni α

Neka je $\vec{r}_M=\vec{r}=(x,y,z)$ vektorska promenljiva i $Q(x_1,y_1,z_1)\in\alpha\perp\vec{n}=(A,B,C)=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$. Tada je

$\boxed{M(x,y,z)\in\alpha\Leftrightarrow\overrightarrow{QM}\perp\vec{n}\Leftrightarrow\overrightarrow{QM}\vec{n}=0\Leftrightarrow(\vec{r}_M-\vec{r}_Q)\vec{n}=0\Leftrightarrow\vec{n}\vec{r}=\vec{n}\vec{r}_Q\Leftrightarrow Ax+By+Cz+D=0,}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0}$ gde je $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}=(A,B,C)$ vektor normalan na ravan α, Q proizvoljna fiksna tačka ravni α, $\vec{r}$ promenljivi (tekući) vektor čiji vrh uvek pripada ravni α ako mu je početak u tački $O(0,0,0)$, A,B,C,D su realni brojevi za koje važi da je $A^2+B^2+C^2\neq0$ i $D=-\vec{n}\vec{r}_Q$.

Normalna projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac vektora $\vec{a}$ je vektor $\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x})=\frac{\vec{a}\vec{x}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\vec{x}}{|\vec{a}|}\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ $(|\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x})|=\frac{|\vec{a}\vec{x}|}{|\vec{a}|})$

Normalna algebarska projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac vektora $\vec{a}$ je skalar (broj) $\pm|\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x})|=\frac{\vec{a}\vec{x}}{|\vec{a}|}$

Za $|\vec{q}|=1$, $\mathbf{pr}_{\vec{q}}(\vec{x})=(\vec{q}\vec{x})\vec{q}$, a algebarska projekcija na pravac vektora $\vec{q}$ je $\vec{q}\vec{x}$.

> Za svaki vektor $\vec{a}$ koji ima isti pravac kao i vektor $\vec{b}$, važi da je $\vec{a}=\pm|\vec{a}|\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$, gde se uzima znak $+$ ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ istog smera i znak $-$ ako su suprotnog smera. Drugim rečima, svaki vektor se može napisati kao njegov intezitet puta jedinični vektor njegovoga pravca.

Deoba duži u datoj razmeri Ako je $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$ $(\lambda:1=AM:MB)$, tada je $\vec{r}_M=\frac{\vec{r}_A+\lambda\vec{r}_B}{1+\lambda}$.

Prodor prave kroz ravan

Zajednička tačka P ravni $\alpha:\vec{n}\vec{r}=\vec{n}\vec{r}_Q$ i prave $a:\vec{r}=\vec{r}_A+t\vec{a}$ dobija se tako što $\vec{r}=\vec{r}_A+t\vec{a}$ uvrstimo u $\vec{n}\vec{r}=\vec{n}\vec{r}_Q$ i rešimo dobijenu jednačinu po t. Tako dobijamo da je $t=\frac{(\vec{r}_Q-\vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}$. Ako sada tako dobijeno t uvrstimo u $\vec{r}=\vec{r}_A+t\vec{a}$, tada promenljvi (tekući) vektor $\vec{r}$ postaje $\vec{r}_P$, pa sledi da formula za $\vec{r}_P$ tj. za prodor P, prave $a:\vec{r}=\vec{r}_A+t\vec{a}$ kroz ravan $\alpha:\vec{n}\vec{r}=\vec{n}\vec{r}_Q$ tj. $\{P\}=\alpha\cap a$ je $\boxed{\vec{r}_P=\vec{r}_A+\frac{(\vec{r}_Q-\vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}.}$

Sve projekcije i kose i ortogonalne (normalne), na pravu i na ravan, dobijaju se kao posledice formule prodora!

> Svaki vektor $\vec{x}\neq0$ može se na jedinstven način napisati kao zbir vektora $\vec{p}$ i $\vec{q}$ tako da je $\vec{p}$ paralelan sa datom pravom $a:\vec{r}=\vec{r}_A+t\vec{a}$ i $\vec{q}$ paralelan sa datom ravni $\pi:\vec{n}\vec{r}=\vec{n}\vec{r}_Q$ i ako je $a\not\parallel\pi$. Tada mora biti $\vec{p}=\mathbf{pr}_{\vec{a},\pi}(\vec{x})=\frac{\vec{n}\vec{x}}{\vec{n}\vec{a}}\vec{a}$ i $\vec{q}=\mathbf{pr}_{\pi,\vec{a}}(\vec{x})=\vec{x}-\frac{\vec{n}\vec{x}}{\vec{n}\vec{a}}\vec{a}$, gde $\mathbf{pr}_{\pi,\vec{a}}(\vec{x})$ zovemo projekcija vektora $\vec{x}$ na ravan π u pravcu vektora $\vec{a}$ i $\mathbf{pr}_{\vec{a},\pi}(\vec{x})$ zovemo projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac vektora $\vec{a}$ u „prvcu ravni π" tj.
> $\mathbf{pr}_{\vec{a},\pi}(\vec{x})$ je kosa projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac vektora $\vec{a}$ u „prvcu ravni π".
> $\mathbf{pr}_{\pi,\vec{a}}(\vec{x})$ je kosa projekcija vektora $\vec{x}$ na ravan π u prvcu vektora $\vec{a}$.

Projekcija (ortogonalna) tačke na pravu

Neka je prava a određena tačkom A koja joj pripada i vektorom $\vec{a}$ sa kojim je paralelna. Projekcija M' tačke M na pravu $a:\vec{r}=\vec{r}_A+t\vec{a}$ dobija se tako što postavimo ravan α kroz tačku M normalno na na pravu a i tražimo prodor parave a kroz ravan α po prethodnoj formuli. Tako dobijamo da je $\boxed{\vec{r}_{M'}=\vec{r}_A+\frac{(\vec{r}_M-\vec{r}_A)\vec{a}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}.}$

Projekcija (ortogonalna) tačke na ravan

Projekcija M' tačke M na ravan $\alpha:\vec{n}\vec{r}=\vec{n}\vec{r}_Q$ dobija se tako što kroz tačku M postavimo pravu normalnu na ravan α i prodorna tačka te prave kroz ravan α biće tražena tačka M' $\boxed{\vec{r}_{M'}=\vec{r}_M+\frac{(\vec{r}_Q-\vec{r}_M)\vec{n}}{\vec{n}\vec{n}}\vec{n}.}$

Osnovna pravila za rešavanje zadataka iz analitičke geometrije.

1. Jedinični vektor bilo kojega pravca (ili prave p) se dobija kada **bilo koji** vektor $\vec{p}$ paralelan sa pravom (pravcem) p, podelimo sa njegovim sopstvenim intezitetom tj. jedinični vektor je $\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$.

2. Svaki vektor je proizvod njegovog inteziteta i jediničnog vektora paralelnog i istog smera sa njim.

3. U većini zadataka, **potreban vektor** u rešavanju, **dobija se kao vektorski proizvod neka dva data nekolinearna vektora koji su oba normalna na traženi vektor.**

4. Dati su vektori $\vec{r}_A,\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ i realni brojevi $|\overrightarrow{AB}|=d_1,|\overrightarrow{BC}|=d_2$ i $|\overrightarrow{CD}|=d_3$, tako da je $\vec{a}\parallel AB$, $\vec{b}\parallel BC$ i $\vec{c}\parallel CD$. Tada $\vec{r}_D$ izražen u zavisnosti od datoga je $\vec{r}_D=\vec{r}_A\pm d_1\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\pm d_2\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\pm d_3\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$, gde se ispred sabiraka uzimaju znaci $+$ ako su vektori $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ istog smera sa redom vektorima $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}$, a u suprotnom znaci $-$

Primeri:

1. Odrediti temena A i B jednakostraničnog trougla ABO, gde tačke A i B pripadaju pravoj $p : \vec{r} = \vec{r}_P + t\vec{p}$ i $O(0,0,0) \notin p$. **Rešenje:** Neka je S projekcija koordinatnog početka $O(0,0,0)$ na pravu p. Tada je $\vec{r}_S = \vec{r}_P + \frac{((0,0,0)-\vec{r}_P)\vec{p}}{\vec{p}\vec{p}}\vec{p} = \vec{r}_P - \frac{\vec{r}_P\vec{p}}{\vec{p}\vec{p}}\vec{p}$ i $\vec{r}_{A,B} = \vec{r}_S \pm \frac{|\vec{r}_S|}{\sqrt{3}}\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$

1A. Odrediti temena A, B i C kvadrata $OABC$, ako A i B pripadaju pravoj $p : \vec{r} = (-9,-9,0) + t(8,1,4)$, $\vec{r}_A \perp p$ i $\overrightarrow{AB} \cdot (8,1,4) > 0$. **Rešenje:** Tačka A je projekcija koordinatnog početka $O(0,0,0)$ na pravu p, pa je $\vec{r}_A = (-9,-9,0) + \frac{((0,0,0)-(-9,-9,0))(8,1,4)}{(8,1,4)(8,1,4)}(8,1,4) = (-1,-8,4)$, $\vec{r}_B = \vec{r}_A + |\vec{r}_A|\frac{(8,1,4)}{|(8,1,4)|} = (7,-7,8)$ i $\vec{r}_C = (8,1,4)$.

1B. Izraziti vektore pložaja $\vec{r}_A$, $\vec{r}_C$ i $\vec{r}_B$ temena A, C i B kvadrata $OACB$ u zavisnosti od $\vec{r}_P = (-17,-10,-4)$ i $\vec{p} = (-8,-1,-4)$, ako dijagonala AB pripada pravoj $p : \vec{r} = \vec{r}_P + t\vec{p}$. **Rešenje:**
Presek S dijagonala OC i AB kvadrata $OACB$ je projekcija koordinatnog početka $O(0,0,0)$ na pravu p,
$\vec{r}_S = \vec{r}_P + \frac{(\vec{r}_O-\vec{r}_P)\vec{p}}{\vec{p}\vec{p}}\vec{p} = (-17,-10,-4) + \frac{\big((0,0,0)-(-17,-10,-4)\big)(-8,-1,-4)}{(-8,-1,-4)(-8,-1,-4)}(-8,-1,-4) = (-1,-8,4)$,
$\vec{r}_{A,B} = \vec{r}_S \pm |\vec{r}_S|\frac{(-8,-1,-4)}{|(-8,-1,-4)|} =$, pa je $\vec{r}_A = (7,-7,8)$, $\vec{r}_B = (-9,-9,0)$ i $\vec{r}_C = 2\vec{r}_S = \vec{r}_A + \vec{r}_B - \vec{r}_O = (-2,-16,8)$.

2. Odrediti $\vec{r}_C$ u zavisnosti od $\vec{r}_A$ i $\vec{r}_B$, tako da trougao ABC bude jednakostraničan i da tačke $OABC$ budu komplanarne, gde je O koordinatni početak. **Rešenje:** $\vec{r}_C = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{AB}|\frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}$, gde je $\vec{d} = (\vec{r}_A \times \overrightarrow{AB}) \times \overrightarrow{AB}$

3. Odrediti $\vec{r}_C$ i $\vec{r}_D$ u zavisnosti od $\vec{r}_A$ i $\vec{r}_B$, tako da ravan kvadrata $ABCD$ sadrži $O(0,0,0)$. **Rešenje:** $\vec{r}_C = \vec{r}_B \pm |\overrightarrow{AB}|\frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}$ i $\vec{r}_D = \vec{r}_A \pm |\overrightarrow{AB}|\frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}$, gde je $\vec{d} = (\vec{r}_A \times \overrightarrow{AB}) \times \overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

4. Neka je ravan α definisana sa $\alpha : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$ i neka su tačke A i C određene sa svojim vektorima položaja $\vec{r}_A$ i $\vec{r}_C$, tako da je $\overrightarrow{AC} \nparallel \vec{n}$. U zavisnosti od vektora $\vec{n}, \vec{r}_Q, \vec{r}_A$ i $\vec{r}_C$ izraziti vektore položaja tačaka B i D temena kvadrata $ABCD$, gde je AC njegova dijagonala i ravan kvadrata $ABCD$ normalna na ravan α.
Rešenje: Neka je β ravan kvadrata $ABCD$ tj. normalna na α i prolazi kroz AC. Tada vektor normale ravni β je $\vec{n}_\beta = \overrightarrow{AC} \times \vec{n}$ i vektor paralelan sa BD je $\vec{d} = \overrightarrow{AC} \times (\overrightarrow{AC} \times \vec{n})$, pa je $\vec{r}_{B,D} = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_C) \pm \frac{1}{2}|\vec{r}_A - \vec{r}_C|\frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}$.

5. Ravan α sadrži tačku Q i normalna je na vektor $\vec{n}$, a prava p sadrži tačku P i paralelna je sa vektorom $\vec{p}$, pri čemu je $p \nparallel \alpha$ i $Q \notin p$. U funkciji od $\vec{r}_Q$, $\vec{n}$, $\vec{r}_P$ i $\vec{p}$ izraziti temena A, B, C jednakostraničnog trougla ABC ivice 1, čija sva temena leže u ravni α, težište T trougla pripada i pravoj p, a teme A je maksimalno udaljeno od tačke Q.
Rešenje: Težište T trougla je presek prave p i ravni α, te je $\vec{r}_T = \vec{r}_P + \frac{(\vec{r}_Q-\vec{r}_P)\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{p}}\vec{p}$. Ako je A_1 sredina stranice BC, tada je $TA = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ i $TA_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Kako je teme A je maksimalno udaljeno od tačke Q, sledi da su A, Q, T kolinearne i T je između A i Q, pa je $\vec{r}_A = \vec{r}_T + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\overrightarrow{QT}}{|\overrightarrow{QT}|}$, $\vec{r}_{A_1} = \vec{r}_T + \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{\overrightarrow{TQ}}{|\overrightarrow{TQ}|}$, $\vec{r}_{B,C} = \vec{r}_{A_1} \pm \frac{1}{2}\frac{\overrightarrow{AT}\times\vec{n}}{|\overrightarrow{AT}\times\vec{n}|}$.

6⋆. Neka su mimoilazne prave a i b određene redom svojim jednačinama $\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}$ i $\vec{r} = \vec{r}_B + t\vec{b}$ i neka je $\vec{a} \perp \vec{b}$ tj. $\vec{a}\vec{b} = 0$. **(a)** Naći vektore položaja temena pravilnog tetraedra $MNPQ$ u zavisnosti od $\vec{r}_A, \vec{a}, \vec{r}_B, \vec{b}$, ako se temena nalaze na pravama a i b. **(b)** Izračunati koordinate temena M, N, P, Q tetraedra ako je $\vec{r}_A = (-4,1,4)$, $\vec{a} = (1,1,0)$, $\vec{r}_B = (-7,11,-15)$, $\vec{b} = (-7,7,-8)$.
Rešenje (a) Neka ravan α sadrži pravu a i neka je normalna na pravu b. Takva ravan α postoji samo zato što je $a \perp b$. Presečna tačka prave b i ravni α je tačka S čiji vektor položaja je $\vec{r}_S = \vec{r}_B + \frac{(\vec{r}_A-\vec{r}_B)\vec{b}}{\vec{b}\vec{b}}\vec{b}$. Ako zamenimo uloge pravama a i b u predhodnom računanju dobija se tačka $\vec{r}_T = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_B-\vec{r}_A)\vec{a}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}$. Znači da je ST zajednička normala pravih a i b, pri čemu je $S \in b$ i $T \in a$. Sada je dalje očevidno $\vec{r}_{M,N} = \vec{r}_T \pm |\vec{r}_T - \vec{r}_S|\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ i $\vec{r}_{P,Q} = \vec{r}_S \pm |\vec{r}_T - \vec{r}_S|\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$. **(b)** $\vec{r}_T = (-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, 4)$, $\vec{r}_S = (\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, -3)$, $\vec{r}_M = (4,9,4)$, $\vec{r}_N = (-5,0,4)$, $\vec{r}_P = (0,4,1)$, $\vec{r}_Q = (7,-3,7)$.

7. Neka ravan $\alpha : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$ nije normalna na z - osu i neka tačka $A \notin \alpha$ je određena sa $\vec{r}_A$. U zavisnosti od $\vec{r}_Q, \vec{r}_A, \vec{n}$ izraziti $\vec{r}_B, \vec{r}_C, \vec{r}_D$ tako da je $ABCD$ kvadrat, $AB \perp \alpha$, $B \in \alpha$ i BC paralelno sa xOy ravni.
Rešenje $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q-\vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{n}\vec{n}}\vec{n}$, $\vec{r}_C = \vec{r}_B \pm |\overrightarrow{AB}|\frac{\vec{n}\times\vec{k}}{|\vec{n}\times\vec{k}|}$, gde je $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ i $\vec{k} = (1,0,0)$.

8. Dokazati da je trougao ABC jednakostraničan ako i samo ako važi $2\vec{r}_C - \vec{r}_A - \vec{r}_B = \pm\sqrt{3}\,\vec{n} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$, gde je vektor $\vec{n}$ jedinični vektor i normalan na ravan trougla ABC tj. $\vec{n} = \frac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}$.

9. Neka tačka V određena sa vektorom položaja $\vec{r}_V$ ne pripada pravoj $p : \vec{r} = \vec{r}_P + t\vec{p}$. U zavisnosti od $\vec{r}_V$, $\vec{r}_P$ i $\vec{p}$ naći vektore položaja $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_C$ i $\vec{r}_D$ temena prave pravilne četvorostrane piramide $VABCD$, ako temena A i C pripadaju pravoj p i dijagonala AC osnove $ABCD$ je jednaka visini piramide. **Rešenje** Neka je tačka T projekcija tačke V na pravu p. Tada je

$\vec{r}_T = \vec{r}_P + \frac{(\vec{r}_V - \vec{r}_P)\vec{p}}{\vec{p}\vec{p}}\vec{p}$ $\qquad \vec{r}_{A,C} = \vec{r}_T \pm \frac{1}{2}|\vec{r}_V - \vec{r}_T|\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ $\qquad \vec{r}_{B,D} = \vec{r}_T \pm \frac{1}{2}|\vec{r}_V - \vec{r}_T|\frac{(\vec{r}_V - \vec{r}_T)\times\vec{p}}{|(\vec{r}_V - \vec{r}_T)\times\vec{p}|}$.

10. Neka tačka V ne pripada pravoj $p: \vec{r} = \vec{r}_P + t\vec{p}$. U zavisnosti od $\vec{r}_V, \vec{r}_P$ i $\vec{p}$ naći vektore položaja $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C$ temena pravilnog tetraedra $VABC$, ako $A \in p$ i $T \in p$, gde je T težište trougla ABC.
Rešenje Neka je tačka T projekcija tačke V na pravu p i S sredina od BC. Tada je
$\vec{r}_T = \vec{r}_P + \frac{(\vec{r}_V - \vec{r}_P)\vec{p}}{\vec{p}\vec{p}}\vec{p}$, $\vec{r}_A = \vec{r}_T \pm \frac{\sqrt{2}}{2}|\vec{r}_V - \vec{r}_T|\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$, $\vec{r}_S = \vec{r}_T \mp \frac{\sqrt{2}}{4}|\vec{r}_V - \vec{r}_T|\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$, $\vec{r}_{B,C} = \vec{r}_S \pm \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}|\vec{r}_V - \vec{r}_T|\frac{(\vec{r}_V - \vec{r}_T)\times\vec{p}}{|(\vec{r}_V - \vec{r}_T)\times\vec{p}|}$.

11. U zavisnosti od $\vec{r}_A$ i $\vec{n}$ napisati vektore položaja temena B, C, D kvadrata $ABCD$ koji pripada ravni α koja je normalna na jedinični vektor $\vec{n}$ i sadrži tačku A, a teme C je najbliže kordinatnom početku.
Rešenje Tačka C je normalna projekcija koordinatnog početka O na ravan α, pa je

$$\vec{r}_C = \frac{\vec{r}_A\vec{n}}{\vec{n}\vec{n}}\vec{n}, \quad \vec{r}_{B,D} = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_C) \pm \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|\frac{\vec{n}\times\overrightarrow{AC}}{|\vec{n}\times\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_C) \pm \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|\frac{\vec{n}\times\overrightarrow{AC}}{|\vec{n}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_C \pm \vec{n}\times\overrightarrow{AC}).$$

12. Neka datoj ravani $\alpha: \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$ pripada kvadratna osnova $ABCD$ prave pravilne četvorostrane piramide $VABCD$, gde je V dati vrh piramide i T težište osnove $ABCD$. U zavisnosti od $\vec{n}, \vec{r}_V$ i $\vec{r}_Q$, izraziti vektore položaja temena $ABCD$, ako je teme A kolinearno sa koordinatnim početkom O i tačkom $V \notin \alpha$.
Rešenje T je projekcija tačke V na ravan α, a tačku A presek prave $p = p(O, V)$ i ravni α odnosno $\vec{r}_T = \vec{r}_V + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_V)\vec{n}}{\vec{n}\vec{n}}\vec{n}$ i $\vec{r}_A = \vec{r}_V + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_V)\vec{n}}{\vec{r}_V\vec{n}}\vec{r}_V$. Dalje je $\vec{r}_C = 2\vec{r}_T - \vec{r}_A$ i $\vec{r}_{B,D} = \vec{r}_T \pm |\vec{r}_T - \vec{r}_A| \cdot \frac{(\vec{r}_A - \vec{r}_T)\times\vec{n}}{|(\vec{r}_A - \vec{r}_T)\times\vec{n}|}$.

13. Data je prava $p: \vec{r} = \vec{r}_P + t\vec{p}$ i vektor $\vec{n} \not\perp \vec{p}$. **(a)** Odrediti temena pravilnog šestougla $ABCDEF$ čije teme A pripada pravoj p, centar je koordinatni počethaku O i ravan šestougla jenormalna na $\vec{n}$. **(b)** Za $\vec{r}_P = (5, 5, 8)$, $\vec{p} = (-3, 1, 1)$ i $\vec{n} = (-3, 0, 20)$ izračunati koordinate tačke A. **Rešenje (a)** Jednačina ravni α šestougla je $\alpha: \vec{r}\vec{n} = 0$. Pa je $A = \alpha \cap p$, odnosno $\vec{r}_A = \vec{r}_P + \frac{-\vec{r}_P\vec{n}}{\vec{n}\vec{p}}\vec{p}$. Iz $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OD}$ sledi $\vec{r}_D = -\vec{r}_A$. Neka je Q projekacija tačke B i tačke F na duž AO, a R projekacija tačke C i tačke E na duž OD. Tada je $\vec{r}_Q = \frac{1}{2}\vec{r}_A$ i $\vec{r}_R = \frac{1}{2}\vec{r}_D$. Vektori $\overrightarrow{QB}$, $\overrightarrow{QF}$, $\overrightarrow{RC}$ i $\overrightarrow{RE}$ su normalni i na $\vec{n}$ i na $\vec{r}_A \parallel \overrightarrow{AD}$, tj. paralelni su sa $\vec{m} = \vec{r}_A \times \vec{n}$, te je $\vec{r}_{B,F} = \vec{r}_Q \pm \frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{r}_A|\frac{\vec{m}}{|\vec{m}|}$ i $\vec{r}_{C,E} = \vec{r}_R \pm \frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{r}_A|\frac{\vec{m}}{|\vec{m}|}$. **(b)** Uvrštavanjem datih vektora dobijamo $\vec{r}_A = (20, 0, 3)$.

14. Data je ravan $\alpha: \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$ i prava $a: \vec{r} = \vec{r}_L + t\vec{\ell}$, pri čemu je $\vec{\ell}\vec{n} \neq 0$ i $\vec{\ell}\times\vec{n} \neq 0$. U zavisnosti od $\vec{r}_L$,$\vec{r}_Q$, $\vec{\ell}$ i $\vec{n}$ odrediti vektore položaja temena kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ivice dužine 5, ako teme A pripada preseku prave i ravni, teme B pripada pravi i ravan kvadrata $ABCD$ je normalna na ravan α. Koliko ima rešenja?
Rešenje A je prodor prave a kroz α, te je $\vec{r}_A = \vec{r}_L + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_L)\vec{n}}{\vec{\ell}\vec{n}}\vec{\ell}$, a zbog $B \in a$ sledi $\vec{r}_B = \vec{r}_A \pm 5\frac{\vec{\ell}}{|\vec{\ell}|}$. Vektor $\vec{m}$ normale ravni kvadrata $ABCD$ mora biti normalan i na $\vec{n}$ i na $\vec{\ell}$, te je $\vec{m} = \vec{n}\times\vec{\ell}$, a vektori $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{BC}$ moraju biti paralelni sa $\vec{p} = \vec{m}\times\vec{\ell}$, te je $\vec{r}_D = \vec{r}_A \pm 5\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ i $\vec{r}_C = \vec{r}_B \pm 5\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$. $\vec{r}_{A_1,B_1,C_1,D_1} = \vec{r}_{A,B,C,D} \pm 5\frac{\vec{m}}{|\vec{m}|}$. Ima 8 rešenja.

15*. Date su tačke A i C i vektor $\vec{n}$ normalan na ravan pravougaonoka $ABCD$ čiji odnos stranica je $\sqrt{2}$. Odrediti $\vec{r}_B$ i $\vec{r}_D$ u zavisnosti od $\vec{r}_A$, $\vec{r}_C$ i $\vec{n}$. **Rešenje** Neka je npr. $AB : BC = \sqrt{2} : 1$ tj. $AB = \sqrt{2}BC$, i neka je tačka Q projekcija tačke B na duž AC. Iz sličnosti trouglova ABC i BQC sledi da je $\frac{BC}{AC} = \frac{QC}{BC}$, odakle sledi da je $QC = \frac{BC^2}{AC}$, gde je $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2BC^2 + BC^2 = 3BC^2$ odnosno $BC^2 = \frac{1}{3}AC^2$, odakle sledi $QC = \frac{\frac{1}{3}AC^2}{AC} = \frac{1}{3}AC$. Sledi $\vec{r}_Q = \vec{r}_C + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{3}\vec{r}_A + \frac{2}{3}\vec{r}_C$. Kako je $QB = \sqrt{BC^2 - QC^2} = \sqrt{\frac{1}{3}AC^2 - \frac{1}{9}AC^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}AC$, sledi da je $\vec{r}_{B,D_1} = \vec{r}_Q + \overrightarrow{QB} = \vec{r}_Q \pm \frac{\sqrt{2}}{3}\left|\overrightarrow{AC}\right|\frac{\overrightarrow{AC}\times\vec{n}}{\left|\overrightarrow{AC}\times\vec{n}\right|}$. Iz $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ sledi $\vec{r}_{D,B_1} = \vec{r}_A - \vec{r}_B + \vec{r}_C$.
Za $AB : BC = \sqrt{2} : 1$ rešenje je A, B, C, D, a za $AB : BC = 1 : \sqrt{2}$ rešenje je A, B_1, C, D_1.

16. Data je prava $p: \vec{r} = \vec{r}_P + t\vec{p}$ i tačka $A \notin p$. U zavisnosti od vektora $\vec{r}_A$, $\vec{r}_P$ i $\vec{p}$ izraziti vektore položaja temena kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$, tako da dijagonala BD osnove $ABCD$ pripada pravoj p. **Rešenje:** Tačku S, presek dijagonala kvadrata $ABCD$, dobijamo kao projekciju tačke A na pravu p tj. $\vec{r}_S = \vec{r}_P + \frac{(\vec{r}_A - \vec{r}_P)\vec{p}}{\vec{p}\vec{p}}\vec{p}$. Dalje sledi da je $\vec{r}_{B,D} = \vec{r}_S \pm |\overrightarrow{AS}|\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$, pa iz $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SC}$ dobijamo $\vec{r}_C = 2\vec{r}_S - \vec{r}_A$. Kako je $\vec{n} = \frac{\vec{p}\times\overrightarrow{AC}}{|\vec{p}\times\overrightarrow{AC}|}$ jedinični vektor normale ravni $ABCD$, sledi $\vec{r}_{A_1,B_1,C_1,D_1} = \vec{r}_{A,B,C,D} \pm |\overrightarrow{AB}|\vec{n}$. Ima dva rešenja.

17*. Data je ravan $\alpha: \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$, prava $p: \vec{r} = \vec{r}_P + t\vec{p}$, tačka A, $p \nparallel \alpha$, $A \notin p$ i $A \notin \alpha$. U zavisnosti od $\vec{n}$, $\vec{p}$, $\vec{r}_A$, $\vec{r}_Q$ i $\vec{r}_P$ izraziti vektore položaja temena jednakokrakog trougla ABC čije teme B pripada pravoj p, teme C pripada ravni α i stranica AB je osnovica trougla koja je paralelna sa ravni α pri čemu ravan trougla ABC zaklapa sa ravni α ugao od $\frac{\pi}{4}$. **Rešenje** Iz $B \in p$ i $AB \parallel \alpha$ sledi da tačku B možemo dobiti kao prodor prave p kroz ravan koja sadrži tačku A i paralelna je sa α, pa je $\vec{r}_B = \vec{r}_P + \frac{(\vec{r}_A - \vec{r}_P)\vec{n}}{\vec{p}\vec{n}}\vec{p}$. Ako je S sredina duži AB tada je $\vec{r}_S = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)$. Ako je tačka T projekcija tačke S na ravan α, tada je $\vec{r}_T = \vec{r}_S + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_S)\vec{n}}{\vec{n}\vec{n}}\vec{n}$. Kako je ABC jednakokraki trougao sa kracima AC i BC, teme C treba, osim ravni α, da pripada i simetralnoj ravni osnovice AB, odnosno treba da pripada pravoj m koja leži u ravni α, sadrži tačku T, a pravac joj je normalan na pravac prave AB. Vektor pravca prave m je $\vec{m} = \vec{n}\times\overrightarrow{AB}$. Iz uslova da ravan trougla treba sa ravni α da zaklapa ugao $\frac{\pi}{4}$ sledi da je STC jednakokraki pravougli trougao sa pravim uglom kod temena T, što znači da je $ST = TC$, te tako dobijamo $\vec{r}_{C_{1,2}} = \vec{r}_T \pm |\overrightarrow{ST}| \frac{\vec{m}}{|\vec{m}|}$.

18. U zavisnosti od vektora $\vec{n}$ i vektora položaja $\vec{r}_A$ i $\vec{r}_B$ susednih temena A i B kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$, izraziti vektore položaja temena kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kod koje je ravan dijagonalnog preseka ABC_1D_1 normalna na vektor $\vec{n}$. **Rešenje** Kako su $\overrightarrow{BC_1}$ i $\overrightarrow{AD_1}$ vektori dijagonala kvadrata omotača kocke normalni na vektore $\vec{n}$ i $\overrightarrow{AB}$, sledi $\vec{r}_{C_1,D_1} = \vec{r}_{B,A} \pm \sqrt{2}|\overrightarrow{AB}| \frac{\overrightarrow{AB} \times \vec{n}}{|\overrightarrow{AB} \times \vec{n}|}$ Tačke $\vec{r}_S = \frac{1}{2}(\vec{r}_{C_1} + \vec{r}_B)$ i $\vec{r}_T = \frac{1}{2}(\vec{r}_{D_1} + \vec{r}_A)$ su sredine duži BC_1 i AD_1, te sledi da je $\vec{r}_{B_1,C} = \vec{r}_S \pm \frac{\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{AB}| \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ i $\vec{r}_{A_1,D} = \vec{r}_T \pm \frac{\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{AB}| \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$.

TESTOVI

1. Koje od tvrđenja je tačno ako je $\vec{a} \neq 0$. **1)** $\boldsymbol{pr}_{\vec{a}}\vec{b} = \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{c}$ **2)** $\boldsymbol{pr}_{\vec{a}}\vec{b} = \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c})$ **3)** $\boldsymbol{pr}_{\vec{a}}\vec{b} = \vec{c} \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\vec{c}$ **4)** $\boldsymbol{pr}_{\vec{a}}\vec{b} = \vec{c} \Rightarrow \vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{c}$ **5)** $\boldsymbol{pr}_{\vec{a}}\vec{b} = \vec{c} \Leftarrow \vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{c}$ **6)** $\boldsymbol{pr}_{\vec{a}}\vec{b} = \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{c}$
2. Ako je $\vec{n} \neq 0$, tada važi: **1)** $\alpha\vec{n} = \beta\vec{n} \Rightarrow \alpha = \beta$ **2)** $\alpha\vec{n} = \beta\vec{n} \Leftarrow \alpha = \beta$ **3)** $\alpha\vec{n} = \beta\vec{n} \Leftrightarrow \alpha = \beta$
3. Za svaki vektor $\vec{n}$, važi: **1)** $\alpha\vec{n} = \beta\vec{n} \Rightarrow \alpha = \beta$ **2)** $\alpha\vec{n} = \beta\vec{n} \Leftarrow \alpha = \beta$ **3)** $\alpha\vec{n} = \beta\vec{n} \Leftrightarrow \alpha = \beta$
4. Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni vektori, tada važi:
   1) $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$ **2)** $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \Leftarrow \alpha = \beta = 0$ **3)** $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$
5. Za sve nenula vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$, važi:
   1) $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$ **2)** $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \Leftarrow \alpha = \beta = 0$ **3)** $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$
6. Funkcija $\mathbf{pr}_{\vec{a}} : V \to \{\alpha\vec{a} | \alpha \in \mathbb{R}\}$, $\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \frac{\vec{a}\vec{x}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}$, $\vec{a} \neq 0$ ($V-$ skup svih slobodnih vektora) je:
   1) dobro definisana **2)** injektivna **3)** sirjektivna **4)** bijektivna **5)** projektovanje na pravu
7. Funkcija $\mathbf{pr}_{\vec{a}} : V \to V$, $\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \frac{\vec{a}\vec{x}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}$, $\vec{a} \neq 0$ ($V-$ skup svih slobodnih vektora) je:
   1) dobro definisana **2)** injektivna **3)** sirjektivna **4)** bijektivna **5)** projektovanje na pravu
8. Funkcija $\mathbf{pr}_{\pi} : V \to V$, $\mathbf{pr}_{\pi}(\vec{x}) = \vec{x} - \mathbf{pr}_{\vec{n}}(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{\vec{n}\vec{x}}{\vec{n}\vec{n}}\vec{n}$, $\vec{n} \neq 0$ ($V-$ skup svih slobodnih vektora) je:
   1) dobro definisana **2)** injektivna **3)** sirjektivna **4)** bijektivna **5)** projektovanje na ravan
9. Ako je $Ax+By+C=0$ jednačina prave u ravni xOy i $A \neq B$, tada vektori paralelni sa tom pravom su:
   a) (A, B) **b)** $(A, -B)$ **c)** $(-A, B)$ **d)** (B, A) **e)**$(B, -A)$ **f)** $(-A, -B)$ **g)** $(-B, -A)$ **h)** $(-B, A)$
10. Ako je $Ax+By+C=0$ jednačina prave u ravni xOy i $A \neq B$, tada vektori normalni na tu pravu su:
    a) (A, B) **b)** $(A, -B)$ **c)** $(-A, B)$ **d)** (B, A) **e)**$(B, -A)$ **f)** $(-A, -B)$ **g)** $(-B, -A)$ **h)** $(-B, A)$
11. Za prave $m : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{5}$ i $n : \frac{x-5}{-6} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-10}$ važi: **a)** mimoilazne su $(m \cap n = \emptyset \wedge m \nparallel n)$
    b) paralelne su i različite $(m \parallel n \wedge m \neq n)$ **c)** poklapaju se $(m = n)$ **d)** seku se $(m \cap n = \{M\})$
12. Za prave $m : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{5}$ i $n : \frac{x-5}{-6} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-4}{-10}$ važi: **a)** mimoilazne su $(m \cap n = \emptyset \wedge m \nparallel n)$
    b) paralelne su i različite $(m \parallel n \wedge m \neq n)$ **c)** poklapaju se $(m = n)$ **d)**seku se $(m \cap n = \{M\})$
13. Za prave $m : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{5}$ i $n : \frac{x-5}{-6} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-1}$ važi: **a)** mimoilazne su $(m \cap n = \emptyset \wedge m \nparallel n)$
    b) paralelne su i različite $(m \parallel n \wedge m \neq n)$ **c)** poklapaju se $(m = n)$ **d)** seku se $(m \cap n = \{M\})$
14. Za prave $m : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{5}$ i $n : \frac{x-4}{-6} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-4}{-1}$ važi: **a)** mimoilazne su $(m \cap n = \emptyset \wedge m \nparallel n)$
    b) paralelne su i različite $(m \parallel n \wedge m \neq n)$ **c)** poklapaju se $(m = n)$ **d)** seku se $(m \cap n = \{M\})$
15. Neka su dati vektori $\vec{r}_A$ i $\vec{a}$ i realan broj d. Ako je $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{a}$, $|\overrightarrow{AB}| = d$ i $\overrightarrow{AB}\,\vec{a} < 0$ tada je:
    1) $\vec{r}_B = \vec{r}_A + d \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ **2)** $\vec{r}_B = \vec{r}_A + d \cdot \vec{a}$ **3)** $\vec{r}_B = \vec{r}_A - d \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ **4)** $\vec{r}_B = \vec{r}_A - d \cdot \vec{a}$ **5)** $\vec{r}_B = \vec{r}_A \pm d \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
16. Neka su dati vektori $\vec{r}_A$ i $\vec{a}$ i realan broj d. Ako je $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{a}$, $|\overrightarrow{AB}| = d$, $|\vec{a}| = 1$ i $\overrightarrow{AB}\,\vec{a} < 0$ tada je:
    1) $\vec{r}_B = \vec{r}_A + d \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ **2)** $\vec{r}_B = \vec{r}_A + d \cdot \vec{a}$ **3)** $\vec{r}_B = \vec{r}_A - d \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ **4)** $\vec{r}_B = \vec{r}_A - d \cdot \vec{a}$ **5)** $\vec{r}_B = \vec{r}_A \pm d \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
17. Neka su dati vektori $\vec{r}_A$ i $\vec{a}$ i realan broj d. Ako je $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{a}$, $|\overrightarrow{AB}| = d$, $|\vec{a}| = 0,5$ i $\overrightarrow{AB}\,\vec{a} < 0$ tada je:
    1) $\vec{r}_B = \vec{r}_A + d \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ **2)** $\vec{r}_B = \vec{r}_A + 2d \cdot \vec{a}$ **3)** $\vec{r}_B = \vec{r}_A - d \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ **4)** $\vec{r}_B = \vec{r}_A - 2d \cdot \vec{a}$ **5)** $\vec{r}_B = \vec{r}_A \pm d \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
18. Jednačina $x + y = 1$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ jeste jednačina:
    1) samo prave **2)** samo ravni **3)** prve i ravni **4)** ili prave ili ravni, zavisno od još nekih uslova