DISKRETNA MATEMATIKA
- PREDAVANJE -

Jovanka Pantović

Tema 1

Definicija stabla

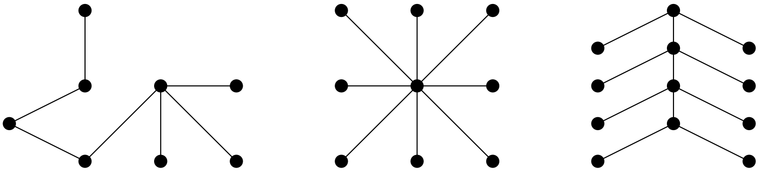
Stablo

Definition

Za prost graf $G = (V, E)$ kažemo da je stablo ako važi:

(i) G je povezan graf i

(ii) G je acikličan graf (bez kontura).



Tema 2

Karakterizacija stabla

Karakterizacija stabla

Theorem (Karakterizacija stabla)

Neka je $G = (V, E)$ prost graf. Sledeća tvrđenja sa ekvivalentna:

(i) *G je stablo.*

(ii) *Za svaka dva čvora $u, v \in V(G)$ postoji jedinstven put od u do v.*

(iii) *G je povezan i $|E(G)| = |V(G)| - 1$.*

(iv) *G je minimalan povezan graf.*

(v) *G je maksimalan acikličan graf.*

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \quad (i) \Leftrightarrow (iii) \quad (i) \Leftrightarrow (iv) \quad (i) \Leftrightarrow (v).$$

$(i) \Leftrightarrow (ii)$

Theorem

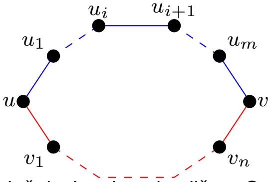
Neka je $G = (V, E)$ i $|V| = n \geq 2$. Tada je G stablo ako i samo ako za svaka dva čvora $u, v \in V$ postoji jedinstven uv-put.

Za $n = 2$ tvrđenje sledi direktno. Pretpostavićemo da je $n \geq 3$.

$(\Rightarrow)$

Pretpostavimo suprotno,

$$\begin{aligned} U_1 &= uu_1 \dots u_i u_{i+1} \dots u_m v \\ U_2 &= uv_1 \dots v_n v \end{aligned}$$



$$\{u_i, u_{i+1}\} \in U_1 \qquad \{u_i, u_{i+1}\} \notin U_2$$

Ovde ćemo prikazati slučaj kada je $u, v \notin \{u_i, u_{i+1}\}$, ostali slučajevi se izvode slično. Sada je

$$u_i \dots u_1 u v_1 \dots v_n v u_m \dots u_{i+1}$$

$u_i u_{i+1}$-šetnja u grafu $G - \{u_i, u_{i+1}\}$. Ako u grafu $G - \{u_i, u_{i+1}\}$ postoji $u_i u_{i+1}$-šetnja, onda postoji i $u_i u_{i+1}$-put. Dodavanjem grane $u_i u_{i+1}$ dobijamo konturu u grafu G, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je G stablo.

$(i) \Leftrightarrow (ii)$

Theorem

Neka je $G = (V, E)$ i $|V| \geq 2$. Tada je G stablo ako i samo ako za svaka dva čvora $u, v \in V$ postoji jedinstven uv-put.

$(\Leftarrow)$ Ako za svaka dva čvora $u, v \in V$ postoji uv-put, onda je G po definiciji povezan graf. Treba još pokazati da je G acikličan. Pretpostavimo suprotno, da u grafu G postoji kontura oblika

$$w_1 w_2 w_3 \dots w_l w_1.$$

Tada postoje bar dva puta od w_1 do w_l:

$$w_1 w_l \qquad\qquad w_1 w_2 w_3 \dots w_l$$

što je u kontradikciji sa pretpostavkom da za svaka dva čvora postoji jedinstven put od jednog do drugog.
To znači da je naša pretpostavka netačna i da je G acikličan graf.

Pomoćna lema

Lemma

Neka je $G = (V, E)$ stablo i neka je $|V| = n \geq 2$. Tada postoje bar dva čvora stepena 1.

Kako je G stablo, G je povezan graf. Pretpostavimo da je

$$u_1 u_2 \dots u_l \tag{1}$$

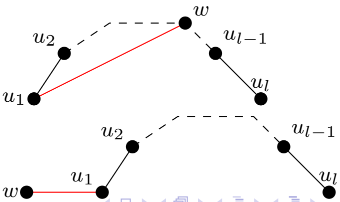
najduži put u grafu G (može biti više takvih puteva iste dužine). Pokazaćemo da je tada

$$d_G(u_1) = d_G(u_l) = 1.$$

Pretpostavimo da je $d_G(u_1) \geq 2$ (slično za $d_G(u_l) \geq 2$).
Tada postoji čvor w ($\neq u_2$)sa osobinom $u_1 w \in E$.

(i) Ako $w \in \{u_3, \dots, u_l\}$ onda G ima konturu, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je G stablo.

(ii) Ako $w \notin \{u_3, \dots, u_l\}$, onda je put $w u_1 u_2 \dots u_l$ duži od (1), što dovodi do kontradikcije.



Pomoćna lema

Lemma

Neka je $G = (V, E)$, $|V| = n \geq 2$, i neka je $d_G(u) = 1$ za neki čvor $u \in V$. Tada je G stablo ako i samo ako je $G - u$ stablo.

($\Rightarrow$) Pretpostavimo da je G stablo.
Da bismo pokazali da je $G - u$ stablo, treba pokazati sledeće: (i) $G - u$ je povezan; (ii) $G - u$ je acikličan.

(i) Posmatrajmo dva proizvoljna čvora $v, w \in V(G - u)$. Kako je G povezan, postoji vw-put u G. Ovaj put ne sadrži čvor stepena 1 koji je različit od v i w, što znači da ne sadrži u. Znači, taj put je ujedno i put u $G - u$, što pokazuje da je $G - u$ povezan.

(ii) Kako je G acikličan, to je i $G - u$ acikličan, zato što brisanjem grane iz acikličnog grafa ne možemo dobiti konturu.

Pomoćna lema

Lemma

Neka je $G = (V, E)$, $|V| = n \geq 2$, i neka je $d_G(u) = 1$ za neki čvor $u \in V$. Tada je G stablo ako i samo ako je $G - u$ stablo.

($\Leftarrow$) Neka je $G - u$ stablo.
Od acikličnog grafa, dodavanjem nazad lista u ne možemo dobiti konturu u tom grafu.
Svaki čvor konture ima stepen bar dva, a čvor u je stepena 1.
Svaka dva čvora koja su povezana u $G - u$ ostaju povezana i u G.
Ostaje još da pokažemo da postoji uw-put za svaki čvor $w \in V(G - u)$.
Kako je $d_G(u) = 1$ postoji $v \in V(G - u)$ sa osobinom $\{u, v\} \in E(G)$.
Iz pretpostavke da je $G - u$ stablo, sledi da je $G - u$ povezan graf, odakle za svako $w \in V(G - u)$ postoji wv-put u $G - u$.

Dodavanjem grane $\{u, v\}$ tom putu, dobijamo put u G.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$

Theorem

Neka je $G = (V, E)$ i $|V| = n \geq 2$. Tada je G stablo ako i samo ako je G povezan graf i $|E| = n - 1$.

($\Rightarrow$) (indukcijom po n)
$n = 2$: stablo sa 2 čvora ima jednu granu
$T_n \Rightarrow T_{n+1}$:
Neka je dato stablo

$$G = (V, E) \qquad |V| = n + 1$$

Neka je u list u tom stablu i $\{u, v\}$ (jedina) grana incidentna sa u :

$$G' = G - u = (V \setminus \{u\}, E \setminus \{\{u, v\}\})$$

$$|E| = |E(G')| + 1 = (n - 1) + 1 = n$$

$(i) \Leftrightarrow (iii)$

Theorem

Neka je $G = (V, E)$ i $|V| = n \geq 2$. Tada je G stablo ako i samo ako je G povezan graf i $|E| = n - 1$.

($\Leftarrow$) Indukcijom po n.
Baza $n = 2$: Povezan graf sa dva čvora i jednom granom je stablo.

Induktivni korak $T_{n-1} \Rightarrow T_n$: Ako je $E(G) = V(G) - 1$, onda postoji čvor u sa osobinom $d_G(u) \leq 1$. Kako je G povezan, mora važiti $d_G(u) = 1$ i graf $G' = G - u$ je povezan graf sa osobinom $|V(G')| = |V(G)| - 1 = n$ i $|E(G')| = |E(G)| - 1 = n - 1$. Prema induktivnoj pretpostavci je sada $G' - u$ stablo. Prema Lemi 7, G je stablo.

$(i) \Leftrightarrow (iv)$

Theorem

Neka je $G = (V, E)$ i $|V| = n \geq 2$. Tada,

G stablo
akko
G je povezan i brisanjem proizvoljne grane dobija se nepovezan graf.

($\Rightarrow$) Ako je G stablo, onda je G po definiciji povezan graf i acikličan graf.

Pretpostavimo suprotno, tj. da je $G - \{u, v\}$ povezan, za neku granu $\{u, v\} \in E$.
$\Downarrow$ (po definiciji povezanog grafa)
Postoji uv-put P u $G - \{u, v\}$ (a samim tim i u G) .
$\Downarrow$ (po definiciji konture)
$P + \{u, v\}$ je kontura u G (kontradikcija sa pretpostavkom da je G acikličan).

$(i) \Leftrightarrow (iv)$

Theorem

Neka je $G = (V, E)$ *i* $|V| = n \geq 2$. *Tada,*

G *stablo*
akko
G *je povezan i brisanjem proizvoljne grane dobija se nepovezan graf.*

($\Leftarrow$) Treba samo pokazati da je G acikličan.

Pretpostavimo da je G povezan i sadrži konturu C.

$\Downarrow$ (prema tvrđenju sa prethodnog predavanja)

$G - \{u, v\}$ povezan, $\{u, v\} \in C$

(kontradikcija sa pretpostavkom da se brisanjem bilo koje grane dobija nepovezan graf)

$(i) \Leftrightarrow (v)$

Theorem

Neka je $G = (V, E)$ i $|V| = n \geq 2$. Tada,

G je stablo
akko
G je acikličan i dodavanjem grane se dobija graf koji sadrži konturu.

$(\Rightarrow)$

G je stablo
$\Downarrow$
G je povezan
$\Downarrow$
Izaberimo $\{u, v\} \notin E(G)$. Postoji uv-put P u G.
$\Downarrow$
$P + \{u, v\}$ je kontura u $G + \{u, v\}$.

$(i) \Leftrightarrow (v)$

Theorem

Neka je $G = (V, E)$ i $|V| = n \geq 2$. Tada,

G je stablo
akko
G je acikličan i dodavanjem grane se dobija graf koji sadrži konturu.

($\Leftarrow$) Treba pokazati da je G povezan. Neka su u i v proizvoljni čvorovi iz V.
Imamo dva slučaja:

(i) Ako je $\{u, v\} \in E$, onda je ta grana ujedno i uv-put.

(ii) Ako $\{u, v\} \notin E$, onda $G + \{u, v\}$ sadrži konturu koja sadrži uv. Oduzimanjem sa konture grane uv dobijamo uv-put u G.

Karakterizacija stabla

Theorem (Karakterizacija stabla)

Neka je $G = (V, E)$ prost graf. Sledeća tvrđenja sa ekvivalentna:

(i) *G je stablo.*

(ii) *Za svaka dva čvora $u, v \in V(G)$ postoji jedinstven put od u do v.*

(iii) *G je povezan i $|E(G)| = |V(G)| - 1$.*

(iv) *G je minimalan povezan graf.*

(v) *G je maksimalan acikličan graf.*

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \quad (i) \Leftrightarrow (iii) \quad (i) \Leftrightarrow (iv) \quad (i) \Leftrightarrow (v).$$

Tema 3

Grafovi i konture

Lemma

Neka je $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| \geq n$, sa osobinom da su $G_1, \ldots, G_l$ njegove komponente povezanosti sa $k_1, \ldots, k_l$ čvorova, respektivno. Tada postoji $i \in \{1, \ldots, l\}$ sa osobinom $|E(G_i)| \geq k_i$.

Pp. suprotno,

$$\begin{aligned} n &\leq |E(G)| = |E(G_1)| + \ldots + |E(G_l)| \\ &< k_1 + \ldots k_l = n \end{aligned}$$

Theorem

Neka je $G = (V, E)$, *gde je* $|V| = n \geq 2$ *i* $|E| \geq n$.
Tada G *sadrži konturu.*

(i) G je povezan:
ako G nema konturu, onda je stablo $\Rightarrow$ G ima $n-1$ grana.

(ii) G nije povezan: neka su $G_1, \ldots, G_l$ komponente povezanosti grafa G sa osobinom

$$|V(G_1)| = k_1, \ldots, |V(G_l)| = k_l \qquad k_1 + \ldots + k_l = n.$$

Prema prethodnoj lemi, postoji komponenta povezanosit G_i za koju je $|E(G_i)| \geq k_i$.
Ako G_i nema konturu, onda je G_i stablo, a samim tim ima $k_i - 1$ granu, što je kontradikcija.
Znači, komponenta G_i ima konturu, a to je ujedno i kontura u grafu G.

Tema 4

Pokrivajuća stabla

Pokrivajuća stabla

Definicija

G_1 je pokrivajuće stablo grafa G ako je

(i) *G_1 je pokrivajući podgraf od G ($V(G_1) = V(G)$ i $E(G_1) \subseteq E(G)$)*

(ii) *G_1 je stablo.*

Zadatak

Koliko ima različitih pokrivajućih stabala (označenog) grafa K_4?

Pokrivajuća stabla

Teorema

Graf ima pokrivajuće stablo ako i samo ako je povezan.

($\Rightarrow$) Sledi direktno iz definicije stabla.
($\Leftarrow$)
Neka je G povezan.

- $|V(G)| = n \geq 2 \Rightarrow |E(G)| \geq n-1$ (u suprotnom graf ne bi bio povezan)
  Posmatraćemo dva slučaja:
  - $|E(G)| = n-1$: povezan graf sa $n-1$ čvorova je stablo
  - $|E(G)| = k \geq n$: sledeća lema.

Pokrivajuća stabla

Lema

Ako je G povezan graf sa osobinom $|V(G)| = n$. Ako je $k \geq n$ i $|E(G)| = k$ onda G ima pokrivajuće stablo.

Dokaz: (indukcijom po k)
Graf sa n čvorova i bar n grana ima konturu.

Baza $k = n$: Oduzimanjem iz grafa jedne grane konture, graf ostaje povezan i pokriva i dalje sve čvorove. Povezan graf sa $n - 1$ čvorova je stablo.

Induktivni korak $T_{k-1} \Rightarrow T_k$: Ako G sadrži konturu, onda možemo konstruisati povezan graf G' brisanjem proizvoljne grane konture. Primetimo da je $V(G') = V(G)$ i $E(G') \subseteq E(G)$. Kako je G' povezan, prema induktivnoj pretpostavci, G' ima pokrivajuće stablo, a to je ujedno i pokrivajuće stablo grafa G.

Tema 5

Algoritmi za konstrukciju pokrivajućeg stabla

Konstrukcija pokrivajućeg stabla

Zadatak

1. *Konstruisati pokrivajuće stablo pretraživanjem u dubinu.*
2. *Konstruisati pokrivajuće stablo pretraživanjem u širinu.*
3. *Krenuti od proizvoljnog čvora i u svakom koraku dodati granu za koju je jedan čvor već izabran, a drugi još uvek nije.*
4. *Urediti grane, a zatim tim redom dodavati grane koje ne prave konturu (inače preći na sledeću granu).*

Tema 6

Priferov niz

Priferov niz

Neka je $G = (V, E)$ stablo u kojem su čvorovi označeni prirodnim brojevima $1, \dots, n$. Za takvo stablo kažemo da je označeno. Priferov kod je niz

$$p(G) = (p_1, \dots, p_{n-2})$$

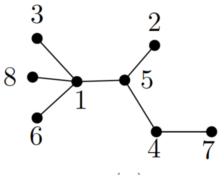
koji na jedinstven način karakteriše stablo G.

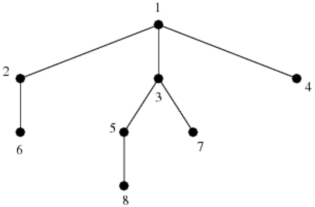
1. $G_0 = G$ i $i = 1$.
2. Izaberimo list u sa najmanjom oznakom i posmatrajmo dalje $G_i := G_{i-1} - u$
3. p_i je jednak oznaci čvora koji je susedan čvoru u
4. Ako je $i = n - 2$ onda je algoritam završen, inače i povećamo za 1 i vratimo se na korak 2.

Priferov niz

Zadatak

Odrediti Priferov niz za stablo na slici.





Priferov niz - rekonstrukcija označenog stabla

Neka je $p(G) = (p_1, \ldots, p_{n-2})$ Priferov niz dobijen od označenog stabla G.

- Za $l_1 = \min(\{1, \ldots, n\} \setminus \{p_1, \ldots, p_{n-2}\})$ kreiraj granu $\{l_1, p_1\} \in T(G)$.
- Za $i = 2..n-2$ i

$$\begin{aligned} l_i &= \min(\{1, \ldots, n\} \setminus (\{p_i, \ldots, p_{n-2}\} \cup \{l_1, \ldots, l_{i-1}\}) \\ &= \min((\{1, \ldots, n\} \setminus \{l_1, \ldots, l_{i-1}\}) \setminus \{p_i, \ldots, p_{n-2}\}) \end{aligned}$$

  kreiraj granu $\{l_i, p_i\} \in T(G)$.
- Poslednja grana je uv, gde je $u, v \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{l_1, \ldots, l_{n-2}\}$.

Zadatak

Konstruisati označeno stablo čiji je Priferov niz $(1, 2, 1, 2, 1, 2)$.

Zadatak

Konstruisati označeno stablo čiji je Priferov niz $(5, 1, 1, 4, 5, 1)$.

Priferov kod

Teorema

Kompletan graf K_n ima n^{n-2} različitih pokrivajućih stabala.

Dokaz sledi na osnovu principa bijekcije.

- Preslikavanje skupa svih stabala u skup Priferovih nizova je bijekcija.
- Broj nizov elemenata iz skupa $\{1, \ldots, n\}$ dužine n je n^{n-2}.