Chapter 1

Kombinatorna prebrajanja

1.1 Osnovni principi prebrojavanja

Za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$, skup prvih n prirodnih brojeva (bez nule) ćemo označiti sa $\mathbb{N}_n$. Znači,

$$\mathbb{N}_n := \{1, \ldots, n\}.$$

Pod **prebrojavanjem** elemenata nekog konačnog skupa $X \neq \emptyset$ podrazumevamo određivanje broja n za koji postoji bijektivno preslikavanje skupa X u skup $\mathbb{N}_n$. Ako postoji takav broj n, onda pišemo $|X| = n$. Za prazan skup ćemo kazati da ima 0 elemenata.

1.1.1 Princip sume

Lemma 1 *Ako su A i B disjunktni konačni skupovi ($A \cap B \neq \emptyset$), onda je*

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Dokaz. Za $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ i $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, sledi

$$A \cup B = \{a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n\}.$$

Kako je $A \cap B \neq \emptyset$,, možemo zaključiti da je $|A \cup B| = n + m$, zato što postoji bijektivno preslikavanje skupa $A \cup B$ u skup $\{1, 2 \ldots, n+m\}$:

$$a_1 \mapsto 1 \quad \ldots \quad a_m \mapsto m \quad b_1 \mapsto m+1 \quad \ldots \quad b_n \mapsto m+n.$$

□

Teorema 2 (princip sume) *Neka je* $n \geq 2$ *i* $A_1, \ldots, A_n$ *po parovima disjunktni konačni skupovi tj. za sve* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ *sa osobinom* $i \neq j$ *važi* $A_i \cap A_j = \emptyset$. *Tada je*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

Dokaz. (indukcijom po n)
$n = 2$: Sledi na osnovu Leme 1.
ind.pp. Pretpostavimo da je $|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + \ldots |A_n|$.
Dokazaćemo da tvrđenje važi za $n + 1$. Na osnovu Leme 1, imamo

$$|(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}| = |A_1 \cup \ldots \cup A_n| + |A_{n+1}|.$$

Na osnovu induktivne pretpostavke dalje sledi

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}| = |A_1| + \ldots + |A_n| + |A_{n+1}|,$$

što je i trebalo dokazati. □

Zadatak 3 *Student treba da izabere dva predmeta iz dve različite izborne grupe,* $A_1 = \{\texttt{algebra}, \texttt{analiza}, \texttt{dm}\}$ *i* $A_2 = \{\texttt{OOP}, \texttt{fizika}, \texttt{engleski}, \texttt{francuski}\}$. *Na koliko načina student može da izabere izborne predmete?*

Rešenje. Broj mogućnosti da student izabere izborne predmete je

$$\begin{aligned} &|(\{\texttt{algebra}\} \times A_2) \cup (\{\texttt{analiza}\} \times A_2) \cup (\{\texttt{dm}\} \times A_2)| \\ &\qquad = |\{\texttt{algebra}\} \times A_2| + |\{\texttt{analiza}\} \times A_2| + |\{\texttt{dm}\} \times A_2| \\ &\qquad = |A_2| + |A_2| + |A_2| = 3 \cdot |A_2| = 12. \end{aligned}$$

□

Zadatak 4 *Koliko rešenja ima nejednačina* $|x - y| \leq 3$ *ako je* $(x, y) \in \{1, 2, \ldots, 30\}^2$?

Rešenje. Za svako $x \in \{1, \ldots, 30\}$, neka je

$$A_x = \{y \in \{1, \ldots, 30\} : |x - y| \leq 3\} = \{y \in \{1, \ldots, 30\} : x - 3 \leq y \leq x + 3\}.$$

Tako dobijamo

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{1,2,3,4\} \quad A_2 = \{1,2,3,4,5\} \quad A_3 = \{1,2,3,4,5,6\} \\
A_4 &= \{1,2,3,4,5,6,7\} \quad A_5 = \{2,3,4,5,6,7,8\} \\
\ldots & \quad \ldots \\
A_{27} &= \{24,25,26,27,28,29,30\} \quad A_{28} = \{25,26,27,28,29,30\} \\
A_{29} &= \{26,27,28,29,30\} \quad A_{30} = \{27,28,29,30\}.
\end{aligned}$$

Skup svih rešenja posmatrane jednačine je

$$B_1 \cup \ldots \cup B_{30}$$

gde je

$$B_x = \{x\} \times A_x, \quad x \in \{1, \ldots, 30\}.$$

Na osnovu principa zbira,

$$\begin{aligned}
|B_1 \cup \ldots \cup B_{30}| &= |B_1| + \ldots + |B_{30}| = |A_1| + \ldots + |A_{30}| \\
&= 4 + 5 + 6 + 24 \cdot 7 + 6 + 5 + 4 = 198.
\end{aligned}$$

□

Zadatak 5 *Dat je pseudo-kod*

```
(1)  for i = 1 to n − 1
(2)    for j = i + 1 to n
(3)      if (a[i] > a[j]) then
(4)        swap a[i] and a[j];
```

Koliko puta će biti izvršeno poređenje iz koraka (3)*?*

Rešenje. Za svako $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ vršimo poređenje $a[i]$ sa svakim elementom skupa $\{a[j] : j \in \{i+1, \ldots, n\}\}$. Za izabrano $i \in \{1, \ldots, n\}$, neka je A_i skup koji sadrži indekse j za koje poredimo a_i i a_j :

$$A_i = \{i+1, \ldots, n\}.$$

Kako je za svako i broj elemenata skupa A_i jednak je $n - i$, broj izvršavanja koraka (3) jednak je

$$\begin{aligned}
&|(\{1\} \times A_1) \cup (\{2\} \times A_2) \cup \ldots \cup (\{n\} \cup A_n)| \\
&\qquad = |\{1\} \times A_1| + |\{2\} \times A_2| + \ldots + |\{n\} \cup A_n| \\
&\qquad = |A_1| + \ldots + |A_n| = (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \tfrac{n(n-1)}{2}.
\end{aligned}$$

□

Posledica 6 *Neka su $A_1, \ldots, A_n$ po parovima disjunktni skupovi i neka je $|A_i| = m$ za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tada je*

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}| = n \cdot m.$$

Dokaz. Primenom principa zbira dobijamo

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}| = |A_1| + \ldots + |A_{n-1}| = m + \ldots + m = n \cdot m.$$

□

1.1.2 Princip proizvoda

Lemma 7 *Neka su A i B konačni skupovi. Broj elemenata skupa $A \times B$ jednak je*

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Dokaz. Neka je $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ i $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Tada je

$$|A \times B| = |\{(a, b) : a \in A, b \in B\}| = \left| \bigcup_{a \in A} (\{a\} \times B) \right|.$$

Kako za $a_i \neq a_j$ važi $(\{a_i\} \times B) \cap (\{a_j\} \times B) = \emptyset$, prema Tvrđenju 2 dalje sledi

$$|A \times B| = \sum_{a \in A} |\{a\} \times B| = \sum_{a \in A} |B| = |B| \sum_{a \in A} 1 = |A| \cdot |B|.$$

□

Teorema 8 (princip proizvoda) *Neka je $n \geq 2$ i neka su $A_1, \ldots, A_n$ konačni skupovi. Tada je*

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \ldots |A_n|.$$

Dokaz. (indukcijom po n)
$n = 2$: Sledi na osnovu Leme 7.
ind.pp: Pretpostavimo da $|A_1 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_n|$.
Dokazaćemo da tvrđenje važi za $n + 1$. Na osnovu Leme 7, imamo

$$|(A_1 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1}| = |A_1 \times \ldots \times A_n| \cdot |A_{n+1}|.$$

Prema induktivnoj pretpostavci, sada je

$$|A_1 \times \ldots \times A_n \times A_{n+1}| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_n| \cdot |A_{n+1}|.$$

□

Zadatak 9 *Neka su $m_1, \ldots, m_n$ prirodni brojevi. Dat je pseudo-kod*

```
(1)  k = 0
(1)  for i_1 = 1 to m_1
(2)    for i_2 = 1 to m_2
(3)    ......
(4)        for i_n = 1 to m_n
(5)          k := k + 1
```

Koliko je k nakon izvršavanja datog koda?

Rešenje. Neka je $A_{i_j} = \{1, \ldots, m_j\}$, skup vrednosti koje uzima i_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Imajući u vidu da su petlje ugnježdene, svakom prolasku kroz korak (5) odgovara jedan element iz skupa $A_{i_1} \times A_{i_2} \times \ldots \times A_{i_n}$. Znači, korak (5) će biti izvršen k puta, gde je

$$k = |A_{i_1} \times A_{i_2} \times \ldots \times A_{i_n}| = |A_{i_1}| \cdot |A_{i_2}| \ldots |A_{i_n}| = m_1 \cdot m_2 \ldots m_n.$$

□

Zadatak 10 *Koliko ima petocifrenih brojeva*

(i) ukupno?

(ii) čije su sve cifre različite?

(iii) čije su svake dve susedne cifre različite?

Rešenje. Neka je A_i, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ skup cifara koje mogu biti na poziciji i.

(i) Petocifrene brojeve možemo predstaviti kao uređene petorke iz skupa

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5$$

gde je
$A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
Na osnovu principa proizvoda,

$$\begin{aligned} |A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5| &= |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot |A_4| \cdot |A_5| \\ &= 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000. \end{aligned}$$

(ii) $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$

(iii) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 59049$.

□

Zadatak 11 *Koliko ima reči dužine 5 nad azbukom od 30 slova?*

Rešenje. Svako slovo reči može biti proizvoljan element azbuke koja ima 30 elemenata. Ukupan broj takvih (smislenih ili besmislenih) reči je $30^5 = 24300000$. □

Zadatak 12 *Koliko ima različitih nizova bitova dužine 8?*

Rešenje. Nizovi bitova dužine 8 su elementi Dekartovog stepena A^8 skupa $A = \{0,1\}$. Kardinalnost tog skupa je $|A^8| = |A \times \ldots \times A| = |A|^8 = 2^8 = 256$. □

1.1.3 Dirichleov princip

Iako se Dirichleov princip prvi put pojavljuje 1624. godine u knjizi francuskog naučnika Jean Leurechona, njegov naziv se ipak pripisuje nemačkom matematičaru Dirichletu, nakon njegovih razmatranja istog principa 1834. godine. Princip tvrdi da ako imamo više golubova nego rupa u koje su se oni uvukli, onda sigurno postoji bar jedna rupa u koju su se uvukla bar dva goluba. Važno je napomenuti da je princip egzistencijalnog karaktera: on tvrdi da objekti sa nekom osobinom postoje, ali pri tome ne daje eksplicitnu konstrukciju tih objekata.

Teorema 13 *Ako je m objekata smešteno u n kutija i $m > n$, onda postoji kutija u kojoj se nalaze bar dva objekta.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da se u svakoj kutiji nalazi najviše 1 objekat. Kako je na raspolaganju n kutija, znači da je ukupan broj objekata najviše n, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je dato više objekata nego kutija. □

Corollary 14 *Neka je $|A| = m$, $|B| = n$ i $m > n$. Ako je f funkcija skupa A u skup B, onda f nije $1-1$.*

Dokaz. Pretpostavimo da funkcija $f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ reprezentuje smeštanje objekata iz skupa $\{1, \ldots, m\}$ u kutije sa oznakama iz skupa $\{1, \ldots, n\}$: slika $f(i) \in \{1, \ldots, n\}$ elementa $i \in \{1, \ldots, m\}$ je broj kutije u koju je smešten element i. Ako je $m > n$, prema Dirihleovom principu, postoje bar dva elementa iz $\{1, \ldots, m\}$ koja su preslikana u isti element iz $\{1, \ldots, n\}$, a to znači da f nije injektivno preslikavanje. □

Zadatak 15 *Dokazati da za svaki prirodan broj n postoji prirodan broj koji je deljiv sa n i čije cifre su iz skupa $\{0, 1\}$.*

Rešenje. Posmatrajmo n brojeva zapisanih samo koristeći cifru 1 :

$$1 \qquad 11 \qquad 111 \qquad \ldots \qquad \underbrace{11\ldots1}_{n}.$$

Imamo dve mogućnosti:

(i) Ako je neki od posmatranih brojeva deljiv sa n, onda je dokaz završen.

(ii) Ako svaki od n posmatranih brojeva pri deljenju sa n daje ostatak iz skupa $\{1, \ldots, n-1\}$, onda prema Dirihleovom principu postoje (bar) dva broja koja imaju isti ostatak. Neka su to brojevi sa m i l cifara, gde je $m \geq l$. Ako pretpostavimo da je

$$\underbrace{11\ldots1}_{m} = q_1 \cdot n + r \qquad \text{i} \qquad \underbrace{11\ldots1}_{l} = q_2 \cdot n + r$$

možemo zaključiti da je njihova razlika

$$\underbrace{11\ldots1}_{m} - \underbrace{11\ldots1}_{l} = q_1 \cdot n + r - (q_2 \cdot n + r) = q_1 \cdot n - q_2 \cdot n = (q_1 - q_2) \cdot n$$

deljiva sa n.

Pored toga, razlika data dva broja

$$\underbrace{11\ldots1}_{m} - \underbrace{11\ldots1}_{l} = \underbrace{11\ldots1}_{m-l}\underbrace{00\ldots0}_{l}$$

je broj zapisan pomoću cifara 0 i 1.

□

Teorema 16 *Ako je m objekata raspoređeno u n kutija, onda postoji bar jedna kutija sa bar $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ objekata.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da ne postoji kutija koja ima bar $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ objekata. To znači da u svakoj kutiji ima najviše $\lceil \frac{m}{n} \rceil - 1$ objekata.
Tada je ukupan broj objekata u kutijama jednak najviše

$$n \cdot \left(\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil - 1 \right)$$

a taj broj je strogo manji od

$$n \left(\frac{m}{n} + 1 - 1 \right) = m$$

što daje kontradikciju sa pretpostavkom da ima m objekata. □

1.1.4 Princip bijekcije

Teorema 17 (princip bijekcije) *Ako između dva konačna skupa A i B postoji bijekcija, onda je $|A| = |B|$.*

Dokaz. Ako je jedan od skupova A i B prazan, onda je i drugi prazan, odakle je $|A| = |B| = 0$. Neka je $|A| = m$, $|B| = n$ i neka je $f : A \to B$ bijektivno preslikavanje. Kako je f injektivno, sledi da je $m \leq n$. Imajući u vidu da je inverzno preslikavanje f^{-1} takođe bijektivno, zbog injektivnosti je $n \leq m$. Tako dobijamo da je $m = n$. □