Chapter 2

Teorija grafova

Za grafičko opisivanje mnogih problema iz primene korisno je uvesti skup čvorova i skup linija koje povezuju neke od njih, a koje pokazuju da među njima postoje odgovarajuće veze. Za tu svrhu je u matematici uveden pojam grafa.

Definicija 88 *Usmeren multigraf je uređena trojka $G = (V, E, \psi)$, gde je*

(i) $V \neq \emptyset$ *konačan skup čvorova,*

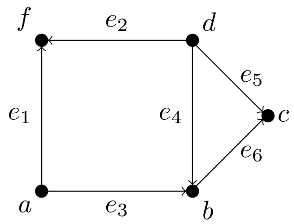
(ii) E *je skup grana, pri čemu je* $V \cap E = \emptyset$ *i*

(iii) $\psi : E \to \{(u, v) : u, v \in V, u \neq v\}$ *funkcija incidencije.*

Za grane e i e' sa osobinom $\psi(e) = \psi(e')$ kažemo da su paralelne. Treba napomenuti da ćemo proučavati samo konačne grafove, tj. grafove sa konačno mnogo čvorova, kao što je navedeno u prethodnoj definiciji. U literaturi postoji i pojam beskonačnog grafa, kao grafa sa beskonačnim skupom čvorova.

Primer 4 *Na slici je grafički prikazan graf $G = (V, E, \psi)$ u kojem je*

$$\begin{aligned} V &= \{a, b, c, d, f\} \\ E &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} \\ \psi &= \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ (a, f) & (d, f) & (a, b) & (d, b) & (d, c) & (b, c) \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Mi ćemo se uglavnom baviti grafovima u kojima grane nisu usmerene i u kojima nema ni paralelnih grana, a ni petlji. Za takav graf ćemo kazati da je prost.

Definicija 89 *(Prost, neusmeren) graf je uređen par $G = (V, E)$, gde je*

(i) $V \neq \emptyset$ *konačan skup čvorova i*

(ii) $E \subseteq \binom{V}{2}$ *je skup grana.*

Za dva čvora u i v neusmerenog prostog grafa kažemo da su susedna ako leže na krajevima neke grane e. Za takvu granu kažemo da je incidentna sa čvorovima u i v, a za granu e kažemo da povezuje čvorove u i v.
Skup čvorova grafa G ćemo označavati sa $V(G)$, a skup grana sa $E(G)$. Ako je $\{u, v\} \in E(G)$, kažemo da su čvorovi u i v susedni.

Lemma 90 *Neka je $G = (V, E)$ prost graf. Tada je*

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|.$$

Dokaz. Svaka grana je incidentna sa 2 čvora. To znači da sabiranjem stepena čvorova svaku granu brojimo dva puta. □

Teorema 91 *Graf ima paran broj čvorova neparnog stepena.*

Dokaz. Neka je $G = (V, E)$ i $V = V_1 \cup V_2$, gde su V_1 i V_2 redom skupovi čvorova parnog i neparnog stepena. Tada je

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = \sum_{v \in V_1} d_G(v) + \sum_{v \in V_2} d_G(v)$$

$$2|E| - \sum_{v \in V_1} d_G(v) = \sum_{v \in V_2} d_G(v)$$

Kako je zbir (razlika) dva parna broja paran broj, suma sa desne strane mora biti paran broj, odakle direktno sledi tvrđenje. □

Posledica 92 *Ako je broj čvorova grafa neparan, onda postoji bar jedan čvor parnog stepena.*

Dokaz. Kada bi svi čvorovi tog grafa bili neparnog stepena, onda bi u tom grafu bio neparan broj čvorova neparnog stepena, što je u kontradikciji sa prethodnim tvrđenjem. □

Posledica 93 *Ako graf ima n čvorova i manje od n grana onda postoji čvor v sa $d_G(v) \leq 1$.*

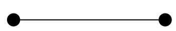
Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da za svaki čvor $v \in G$ važi $d_G(v) \geq 2$. Tada na osnovu prethodnih tvrđenja važi

$$2n > 2|E| = \sum_{v \in V} d_G(v) \geq \sum_{v \in V} 2 = 2 \cdot |V| = 2n$$

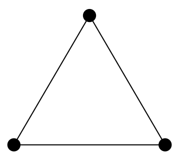
tj. $2n > 2n$, što je kontradikcija. □

2.0.1 Neke specijalne klase prostih grafova

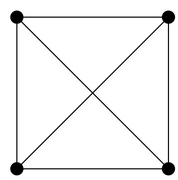
Kompletan graf K_n je prost graf u kojem je $E = \binom{V}{2}$, tj. za svaka dva čora postoji tačno jedna grana u grafu koja im je incidenta.



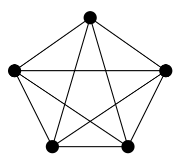
K_2



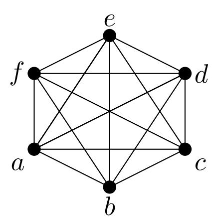
K_3



K_4



K_5

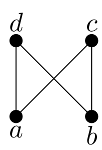


K_6

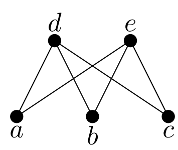
Bipartitan graf je graf $G = (V_1 \cup V_2, E)$ sa osobinama:

1. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
2. $E \subseteq \{\{v_1, v_2\} : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$.

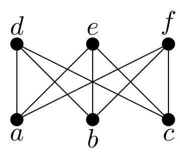
To znači da se skup čvorova može razdeliti na dva disjunktna podskupa, tako da je svaka grana incidentna sa jednim čvorom iz jednog skupa i drugim iz drugog. Ako E sadrži sve takve grane onda kažemo da je graf kompletan bipartitan i označavamo ga sa $K_{m,n}$ ako je $|V_1| = m$ i $|V_2| = n$.



$K_{2,2}$



$K_{3,2}$

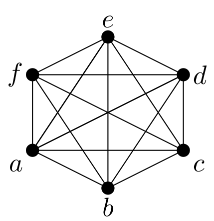


$K_{3,3}$

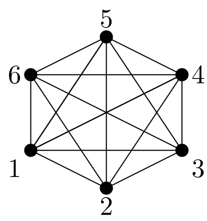
2.0.2 Jednakost i izomorfizam grafova

Jednaki grafovi. Možemo reći da iz definicije grafa direktno sledi da su dva grafa jednaka akko imaju jednake skupove čvorova i jednake skupove grana. Tako možemo reći da grafovi u sledećem primeru nisu jednaki.

Primer 5 *Grafovi G_1 i G_2 na slici nisu jednaki, zato što nemaju jednake skupove čvorova, tj.* $V(G_1) = \{a, b, c, d, e, f\} \neq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = V(G_2)$.



G_1



G_2

Možemo primetiti da oba grafa predstavljaju kompletan graf K_6 i da se razlikuju samo u oznakama čvorova.

Izomorfni grafovi. Za grafove koji imaju osobinu da preimenovanjem čvorova postaju jednaki kažemo da su izomorfni.

Definicija 94 *Neka su $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ prosti grafovi. Kažemo da je G_1 izomorfan sa G_2 ako postoji bijektivno preslikavanja $h : V_1 \to V_2$ sa osobinom*

$$\{u, v\} \in E_1 \text{ akko } \{h(u), h(v)\} \in E_2. \tag{2.1}$$

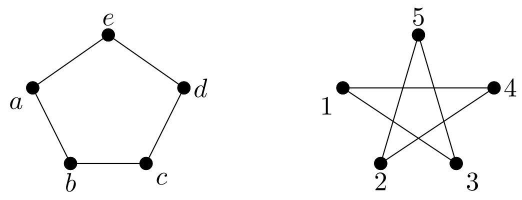
Za takvu funkciju h kažemo da je izomorfizam grafa G_1 u graf G_2.

Primer 6 *Grafovi iz prethodnog primera su izomorfni. Jedan izomorfizam je*

$$h = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Postoji ukupno 6! *bijektivnih preslikavanja* V_1 *u* V_2 *i sva ta preslikavanja su izomorfizmi* G_1 *u* G_2.

Primer 7 *Direktnom proverom, može se pokazati da su grafovi* $G_1 = (V_1, E_1)$ *i* $G_2 = (V_2, E_2)$ *izomorfni.*



G_1 G_2

Jedan izomorfizam je

$$h = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Teorema 95 *Relacija "je izomorfan" je relacija ekvivalencije na skupu grafova.*

Da bismo pokazali da su dva grafa izomorfna, dovoljno je konstruisati jedan izomorfizam. Mnogo je teže utvrditi da grafovi nisu izomorfni. Ako grafovi imaju jednak broj čvorova $|V_1| = |V_2| = n$, direktna primena definicije bi značila da se za svako od $n!$ bijektivnih preslikavanja skupa V_1 u skup V_2 pokaže da ekvivalencija (2.1) nije tačna. Jasno je da to zahteva mnogo koraka, čak i u slučajevima kada broj čvorova nije tako veliki. Naredna osobina daje neke potrebne uslove koji mogu pomoći pri ispitivanju da li su dva grafa izomorfna.

Teorema 96 *Neka su dati izomorfni grafovi* $G_1 = (V_1, E_1)$ *i* $G_2 = (V_2, E_2)$. *Tada je*

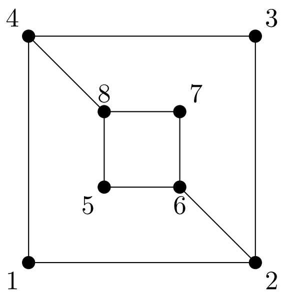
1. $|V_1| = |V_2|$,
2. $|E_1| = |E_2|$, *i*
3. $d_{G_1}(v) = d_{G_2}(h(v))$, *za svaki čvor* $v \in V_1$.

Dokaz Sve tri osobine slede direktno iz definicije izomorfnih grafova. Uvešćemo još jedan pojam, koji označava niz stepena čvorova u grafu.

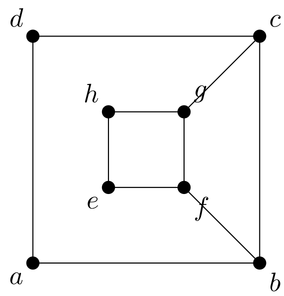
Definicija 97 *Za niz nenegativnih celih brojeva* $(d_1, \dots, d_n)$ *kažemo da je grafički niz ako postoji graf* $G = (V, E)$ *sa osobinom* $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ *i* $d_i = d_G(v_i)$ *za svako* $v_i \in V$.

Ako jedna od tri osobine iz Teoreme 96 ne važi, odmah se može tvrditi da grafovi nisu izomorfmni. Važno je primetiti da obratno tvrđenje ne važi. Grafovi mogu zadovoljavati sve tri osobine, a da nisu izomorfni. To je ilustrovano sledećim primerom.

Primer 8 *Grafovi* $G_1 = (V_1, E_1)$ *i* $G_2 = (V_2, E_2)$ *su dati svojim grafičkim reprezentacijama na sledećoj slici.*



G_2



G_2

Može se uočiti da je $|V_1| = |V_2| = 8$ *i* $|E_1| = |E_2| = 10$, *dok su grafički nizovi datih grafova* $(3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2)$. *Međutim, ova dva grafa nisu izomorfna. Čvor 2 u grafu* G_1 *je stepena 3 i ima dva suseda stepena 2 i jednog suseda stepena 3. Te osobine moraju biti očuvane prilikom bijektvinog preslikavanja čvorova* V_1 *na* V_2. *Zbog njegovog stepena, čvor 2 moramo preslikati na* b, c, f *ili* g. *Svaki od ova četiri čvora ima dv suseda stepena* 3 *i jednog suseda stepen 2.*

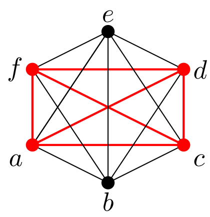
2.0.3 Operacije sa/na grafovima

U praksi se često javlja potreba za posmatranjem izdvojenih delova grafa, dodavanjem ilii čvorova/grana, spajanjem grafova i slično. Iz tog razloga u ovom delu ćemo uvesti neke dodatne pojmove.

Podgraf $G_1 = (V_1, E_1)$ grafa $G = (V, E)$ je graf sa osobinom $V_1 \subseteq V$ i $E_1 \subseteq E$. G_1 je pravi podgraf grafa G_2 ako je $V \neq V_1$. Ovde treba primetiti da je G_1 takođe graf, što znači da je $E_1 \subseteq \binom{V_1}{2}$.

Podgraf indukovan skupom čvorova $V_1 \subseteq V$ grafa $G = (V, E)$ je graf $G_1 = (V_1, E_1)$ sa osobinom $E_1 = \binom{E}{2} \cap \binom{V_1}{2}$, tj. sa osobinom da je $\{u, v\}$ grana u G_1 akko $u, v \in V_1$ i $\{u, v\} \in E$.

Primer 9 *Na slici je prikazan podgraf grafa K_6 koji je indukovan skupom čvorova $\{a, c, d, f\}$.*



K_6

Oduzimanjem grane $e \in E$ grafa $G = (V, E)$, u oznaci $G - e$, dobijamo graf

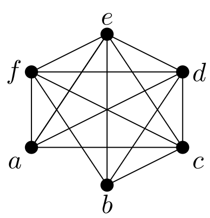
$$G - e = (V, E \setminus \{e\}).$$

Slično definišemo dodavanje grane e grafu G, u oznaci $G + e$, kao graf $G = (V, E \cup \{e\})$.

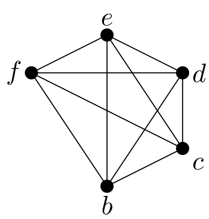
Oduzimanjem čvora $v \in V$ grafa $G = (V, E)$, u oznaci $G - v$ dobijamo graf

$$G - v = (V \setminus \{v\}, E_1), \quad E_1 = E \setminus \{\{u, v\} : \{u, v\} \in E\}.$$

Primer 10 *Na slici su prokazani grafovi $K_6 - \{a, b\}$ i $K_6 - a$.*



$K_6 - \{a, b\}$



$K_6 - a$