

FTN, Pripremna nastava

FTN Katedra za matematiku

septembar 2020.

Diferencijalni račun

Izvod funkcije

Potreba za izvodom funkcije javila se prilikom pokušaja da se pronadje univerzalni način za određivanje tangente krive u geometriji i brzine kretanja u mehanici

Neka je $y = f(x)$ realna funkcija definisana nad intervalom $(a, b) \subset \mathbb{R}$. **Pri-
raštaj argumenta funkcije** $f(x)$ u tački $x \in (a, b)$ označićemo sa Δx , pri čemu je $\Delta x \neq 0$.

Ako tačka $x + \Delta x$ pripada intervalu (a, b) onda je

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

priraštaj funkcije $f(x)$ u tački x , koji odgovara priraštaju argumenta Δx .

Ako postoji granična vrednost

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

tada se ona naziva **izvod funkcije** $f(x)$ u tački x i označava sa $f'(x)$ ili y' .

Znači

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Ako funkcija $f(x)$ ima izvod u svakoj tački $x \in X \subset (a, b)$, onda je sa $x \mapsto f'(x)$ definisana funkcija $f' : X \rightarrow \mathbb{R}$ koju zovemo **izvod funkcije** $f(x)$.

Tablica izvoda nekih elementarnih funkcija

funkcija $f(x)$	izvod $f'(x)$
$c = \text{const.}$	0
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

Osobine izvoda

Ako funkcije $u = u(x)$ i $v = v(x)$ imaju izvod u tački x , tada i funkcije $u(x) + v(x)$, $u(x) - v(x)$, $u(x) \cdot v(x)$, $\frac{u(x)}{v(x)}$, gde je $v(x) \neq 0$ i $\alpha \cdot u(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ imaju izvode u toj tački. Važi sledeće:

$$1. (u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x);$$

$$2. (u(x) - v(x))' = u'(x) - v'(x);$$

$$3. (u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x);$$

$$4. \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}, \quad v(x) \neq 0;$$

$$5. (\alpha \cdot u(x))' = \alpha \cdot u'(x), \quad \alpha \in \mathbb{R} - \text{konstanta}.$$

Rešeni zadaci

Odrediti prvi izvod sledećih funkcija:

1. $f(x) = 7x^4$.

Rešenje: $f'(x) = (7x^4)' = 7(x^4)' = 7 \cdot 4x^3 = 28x^3$.

2. $f(x) = 2x^3 + 6x - 5$.

Rešenje:
$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^3 + 6x - 5)' = (2x^3)' + (6x)' - (5)' \\ &= 2(x^3)' + 6(x)' - 0 = 2 \cdot 3x^2 + 6 \cdot 1 = 6x^2 + 6. \end{aligned}$$

3. $f(x) = \frac{1}{x^4}$.

Rešenje: $f'(x) = \left(\frac{1}{x^4}\right)' = (x^{-4})' = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = \frac{-4}{x^5}$.

$$4. f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} - \frac{4}{7x^8}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Rešenje: } f'(x) &= \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} - \frac{4}{7x^8} \right)' \\
 &= \left(\frac{1}{x} \right)' + 2 \left(\frac{1}{x^3} \right)' - \frac{4}{7} \left(\frac{1}{x^8} \right)' \\
 &= (x^{-1})' + 2(x^{-3})' - \frac{4}{7}(x^{-8})' \\
 &= -1x^{-1-1} + 2(-3)x^{-3-1} - \frac{4}{7}(-8)x^{-8-1} \\
 &= -1x^{-2} - 6x^{-4} + \frac{32}{7}x^{-9} \\
 &= -\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^4} + \frac{32}{7x^9}.
 \end{aligned}$$

$$5. f(x) = \sqrt{x}.$$

$$\text{Rešenje: } f'(x) = (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$6. f(x) = \sqrt[5]{x^8}.$$

$$\text{Rešenje: } f'(x) = (\sqrt[5]{x^8})' = (x^{\frac{8}{5}})' = \frac{8}{5}x^{\frac{8}{5}-1} = \frac{8}{5}x^{\frac{3}{5}} = \frac{8}{5}\sqrt[5]{x^3}.$$

$$7. f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Rešenje: } f'(x) &= \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)' = \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \right)' = (x^{-\frac{1}{3}})' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1} \\ &= -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} = \frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}. \end{aligned}$$

$$8. f(x) = 2\sqrt[4]{x^5} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^7}} + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Rešenje: } f'(x) &= 2(\sqrt[4]{x^5})' - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^7}}\right)' + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' \\ &= 2(x^{\frac{5}{4}})' - \frac{1}{3}(x^{-\frac{7}{3}})' + (x^{-\frac{1}{2}})' \\ &= 2 \cdot \frac{5}{4}x^{\frac{5}{4}-1} - \frac{1}{3}\left(-\frac{7}{3}\right)x^{-\frac{7}{3}-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} \\ &= \frac{5}{2}x^{\frac{1}{4}} + \frac{7}{9}x^{-\frac{10}{3}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{5}{2}\sqrt[4]{x} + \frac{7}{9\sqrt[3]{x^{10}}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}. \end{aligned}$$

$$9. f(x) = 5^x - 7^x.$$

$$\text{Rešenje: } f'(x) = (5^x)' - (7^x)' = 5^x \ln 5 - 7^x \ln 7.$$

10. $f(x) = 3e^x + 2\ln x$.

Rešenje: $f'(x) = 3(e^x)' + 2(\ln x)' = 3e^x + 2\frac{1}{x}$.

11. $f(x) = e^x \cdot x^2$.

Rešenje: $f'(x) = (e^x)'x^2 + e^x(x^2)' = e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2x^{2-1}$
 $= e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2x = e^x(x^2 + 2x)$.

12. $f(x) = x^3 \ln x$.

Rešenje: $f'(x) = (x^3)'\ln x + x^3(\ln x)'$
 $= 3x^2 \ln x + x^3 \frac{1}{x}$
 $= 3x^2 \ln x + x^2 = x^2(3\ln x + 1)$.

$$13. f(x) = \frac{x^2}{e^x}.$$

$$\begin{aligned} \text{Rešenje: } f'(x) &= \frac{(x^2)'e^x - x^2(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}} \\ &= \frac{e^x(2x - x^2)}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x}. \end{aligned}$$

$$14. f(x) = \frac{3^x}{\ln x}.$$

$$\begin{aligned} \text{Rešenje: } f'(x) &= \frac{(3^x)' \ln x - 3^x (\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{3^x \ln 3 \ln x - 3^x \frac{1}{x}}{\ln^2 x} \\ &= \frac{3^x (\ln 3 \cdot \ln x - \frac{1}{x})}{\ln^2 x}. \end{aligned}$$

15. $f(x) = 5\sqrt{x}\ln x$.

Rešenje: $f'(x) = 5((x^{\frac{1}{2}})' \ln x - \sqrt{x}(\ln x)')$

$$= 5 \left(\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} \ln x - \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$= 5 \left(\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \ln x - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

$$= 5 \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

$$= \frac{5}{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln x}{2} - 1 \right).$$

$$16. f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}} + 3\sqrt[3]{x^7}.$$

$$\begin{aligned} \text{Rešenje: } f'(x) &= \frac{(e^x)' \sqrt{x} - e^x (x^{\frac{1}{2}})'}{(\sqrt{x})^2} + 3(x^{\frac{7}{3}})' \\ &= \frac{e^x \sqrt{x} - e^x \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}}{x} + 3 \frac{7}{3} x^{\frac{4}{3}} \\ &= \frac{e^x \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)}{x} + 7\sqrt[3]{x^4}. \end{aligned}$$

Zadaci za samostalan rad

Odrediti prvi izvod sledećih funkcija:

$$1. f(x) = 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} - \frac{3}{\sqrt[4]{x^3}}.$$

$$\text{Rešenje: } f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^2} + \frac{9}{4\sqrt[4]{x^7}}.$$

$$2. f(x) = \ln x - \frac{2}{x^3}.$$

$$\text{Rešenje: } f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{6}{x^4}.$$

$$3. f(x) = 3e^x \cdot x^4.$$

$$\text{Rešenje: } f'(x) = 3e^x(x^4 + 4x^3).$$

$$4. f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{\ln x}.$$

$$\text{Rešenje: } f'(x) = \frac{\ln x - 3}{3\sqrt[3]{x^2} \ln^2 x}.$$

$$5. f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - \frac{1}{x^4}.$$

$$\text{Rešenje: } f'(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x \ln \frac{1}{4} + \frac{4}{x^5}.$$

$$6. f(x) = \frac{e^x}{x^4} - \sqrt[5]{x} \ln x.$$

$$\text{Rešenje: } f'(x) = \frac{e^x(x-4)}{x^5} - \frac{1}{5} \frac{\ln x}{\sqrt[5]{x^4}} - \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}.$$

7. Za funkciju $f(x) = \frac{x^5}{4} + 2e^x$ odrediti $f'(2)$.

Rešenje: $f'(2) = 20 + 2e^2$.

8. Za funkciju $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ odrediti $f'(3)$.

Rešenje: $f'(3) = \frac{-2}{27} + \frac{1}{4\sqrt[4]{27}}$.

Izvod složene funkcije

Neka je data složena funkcija $y = f(u)$ gde je $u = g(x)$. Ako funkcija $g(x)$ ima izvod u tački $x \in A$, a funkcija $f(u)$ ima izvod u tački u , tada je

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(u) \cdot g'(x).$$

Rešeni zadaci

- Izvod složene funkcije oblika $f(x) = (g(x))^n$ je

$$f'(x) = n(g(x))^{n-1} \cdot g'(x).$$

Odrediti prvi izvod sledećih složenih funkcija:

1. $f(x) = \ln^3 x.$

Rešenje: $f'(x) = ((\ln x)^3)' = 3(\ln x)^2(\ln x)' = 3(\ln^2 x) \frac{1}{x} = \frac{3 \ln^2 x}{x}.$

2. $f(x) = \sqrt{\ln x}.$

Rešenje: $f'(x) = ((\ln x)^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}(\ln x)^{-\frac{1}{2}}(\ln x)' = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}.$

3. $f(x) = \sqrt[3]{5x^3 - x}$.

Rešenje: $f'(x) = ((5x^3 - x)^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}(5x^3 - x)^{-\frac{2}{3}}(5x^3 - x)'$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{(5x^3 - x)^2}}(15x^2 - 1).$$

4. $f(x) = (e^x + 6\sqrt{x})^4$.

Rešenje: $f'(x) = 4(e^x + 6\sqrt{x})^3(e^x + 6\sqrt{x})'$

$$= 4(e^x + 6\sqrt{x})^3 \left(e^x + 6\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$
$$= 4(e^x + 6\sqrt{x})^3 \left(e^x + \frac{3}{\sqrt{x}} \right).$$

- Izvod složene funkcije oblika $f(x) = \ln g(x)$ je

$$f'(x) = \frac{1}{g(x)} g'(x).$$

Odrediti prve izvode sledećih složenih funkcija:

1. $f(x) = \ln(x^2 + 1).$

Rešenje: $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} (x^2 + 1)' = \frac{1}{x^2 + 1} 2x.$

2. $f(x) = \ln \frac{1}{x}.$

Rešenje:

Prvi način: $f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x} \right)' = x \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{1}{x}.$

Drugi način: $f(x) = \ln \frac{1}{x} = \ln x^{-1} = -\ln x.$

$$f'(x) = -(\ln x)' = -\frac{1}{x}.$$

3. $f(x) = \ln(3^x - \sqrt[3]{x}).$

Rešenje:
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3^x - \sqrt[3]{x}} (3^x - \sqrt[3]{x})' \\ &= \frac{1}{3^x - \sqrt[3]{x}} \left(3^x \ln 3 - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \right). \end{aligned}$$

$$4. f(x) = \ln \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right).$$

$$\begin{aligned}
 \text{Rešenje: } f'(x) &= \frac{1}{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}} \cdot \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right)' \\
 &= \frac{\sqrt{x}}{\ln x} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} \\
 &= \frac{\sqrt{x}}{\ln x} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} \\
 &= \frac{\sqrt{x}}{\ln x} \frac{2 - \ln x}{2\sqrt{x} \cdot x} \\
 &= \frac{2 - \ln x}{2x \ln x}.
 \end{aligned}$$

- Izvod složene funkcije oblika $f(x) = e^{g(x)}$ je

$$f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x).$$

Odrediti prvi izvod sledećih složenih funkcija:

1. $f(x) = e^{x^3}$.

Rešenje: $f'(x) = e^{x^3} \cdot (x^3)' = e^{x^3} \cdot 3x^2$.

2. $f(x) = e^{e^x}$.

Rešenje: $f'(x) = e^{e^x} \cdot (e^x)' = e^{e^x} \cdot e^x$.

$$3. f(x) = e^{\frac{x}{2^x}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Rešenje: } f'(x) &= e^{\frac{x}{2^x}} \cdot \left(\frac{x}{2^x}\right)' \\ &= e^{\frac{x}{2^x}} \frac{2^x - x \cdot 2^x \ln 2}{(2^x)^2} \\ &= e^{\frac{x}{2^x}} \frac{2^x(1 - x \ln 2)}{(2^x)^2} \\ &= e^{\frac{x}{2^x}} \frac{1 - x \ln 2}{2^x}. \end{aligned}$$

$$4. f(x) = e^{\sqrt[3]{x^4}}.$$

$$\text{Rešenje: } f'(x) = e^{\sqrt[3]{x^4}} \cdot (x^{\frac{4}{3}})' = e^{\sqrt[3]{x^4}} \cdot \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} e^{\sqrt[3]{x^4}} \sqrt[3]{x}.$$

- Izvod složene funkcije oblika $f(x) = a^{g(x)}$ je

$$f'(x) = a^{g(x)} \ln a \cdot g'(x).$$

Odrediti prvi izvod sledećih složenih funkcija:

1. $f(x) = 2^{x^3+x}$.

Rešenje: $f'(x) = 2^{x^3+x} \ln 2 \cdot (x^3 + x)' = 2^{x^3+x} \ln 2 \cdot (3x^2 + 1).$

$$2. f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x}{e^x}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Rešenje: } f'(x) &= \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x}{e^x}} \cdot \ln \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{x}{e^x}\right)' \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x}{e^x}} \ln \frac{3}{4} \cdot \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x}{e^x}} \ln \frac{3}{4} \cdot \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x}{e^x}} \ln \frac{3}{4} \cdot \frac{1-x}{e^x}. \end{aligned}$$

3. $f(x) = (0,5)^{e^x+x^2}$.

$$\begin{aligned} \text{Rešenje: } f'(x) &= (0,5)^{e^x+x^2} \cdot \ln 0,5 \cdot (e^x + x^2)' \\ &= (0,5)^{e^x+x^2} \cdot \ln 0,5 \cdot (e^x + 2x). \end{aligned}$$

4. $f(x) = 7^{\ln x}$.

$$\text{Rešenje: } f'(x) = 7^{\ln x} \cdot \ln 7 \cdot (\ln x)' = 7^{\ln x} \cdot \ln 7 \cdot \frac{1}{x}.$$

Zadaci za samostalan rad

1. $f(x) = \sqrt[3]{\ln x + x}$.

$$\text{Rešenje: } f'(x) = \frac{\frac{1}{x} + 1}{3\sqrt{(\ln x + x)^2}}.$$

$$2. f(x) = \sqrt[4]{e^{3x}}.$$

$$\text{Rešenje: } f'(x) = \left((e^x)^{\frac{3}{4}} \right)' = \frac{3e^x}{4\sqrt[4]{e^x}}.$$

$$3. f(x) = \ln(x^3 + 2x^2).$$

$$\text{Rešenje: } f'(x) = \frac{3x^2 + 4x}{x^3 + 2x^2}.$$

$$4. f(x) = e^{\frac{x^2}{e^x}}.$$

$$\text{Rešenje: } f'(x) = e^{\frac{x^2}{e^x}} \cdot \frac{2x - x^2}{e^x}.$$

$$5. f(x) = 8^{x^5+1}$$

$$\text{Rešenje: } f'(x) = 8^{x^5+1} \ln 8 \cdot 5x^4.$$

6. $f(x) = \ln \sqrt[5]{x^8}$.

Rešenje: $f'(x) = (\ln x^{\frac{8}{5}})' = \left(\frac{8}{5} \ln x\right)' = \frac{8}{5x}$.

7. $f(x) = 2^{2^x} + 3 \cdot \ln \ln x$.

Rešenje: $f'(x) = 2^{2^x} \cdot 2^x \ln^2 2 + \frac{3}{x \ln x}$.

8. $f(x) = \ln(\sqrt{x} - e^{2x} + 3 \ln x)$.

Rešenje: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - e^{2x} + 3 \ln x} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 2e^{2x} + \frac{3}{x}\right)$.

9. $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x^2}}$.

Rešenje: $f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x^2}} \cdot \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$.

10. $f(x) = \ln^8 x + \ln x^8$.

Rešenje: $f'(x) = \frac{8(\ln^7 x + 1)}{x}$.

11. Odrediti $f'(0)$ za funkciju $f(x) = e^{x^3+2x+1}$.

Rešenje: $f'(0) = 2e$.

12. Odrediti $f'(e)$ za funkciju $f(x) = \ln^2 x + \sqrt{\ln x}$.

Rešenje: $f'(e) = \frac{5}{2e}$.

Izvodi višeg reda

Neka funkcija $y = f(x)$ ima izvod $f'(x)$. Ako funkcija $f'(x)$ ima izvod, onda se on naziva **drugi izvod** ili **izvod drugog reda** funkcije f u tački x i označavamo ga sa $y'' = f''(x) = (f'(x))'$.

n -ti izvod funkcije se definiše kao izvod funkcije $f^{(n-1)}(x)$:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Rešeni zadaci

1. Odrediti $f''(x)$ ako je

a) $f(x) = \ln x$

b) $f(x) = 3x^2 + 1$

c) $f(x) = e^x + x^3$

Rešenje:

a) $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1},$

$$f''(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

$$\text{b)} \quad f'(x) = 3 \cdot 2x + 0 = 6x,$$

$$f''(x) = 6 \cdot 1 = 6.$$

$$\text{c)} \quad f'(x) = e^x + 3x^2,$$

$$f''(x) = e^x + 3 \cdot 2x = e^x + 6x.$$

2. Odrediti $f'''(x)$ ako je

$$\text{a)} \quad f(x) = 3x^7 - x^5 + 2$$

$$\text{b)} \quad f(x) = 4^x + e^x$$

$$\text{c)} \quad f(x) = \ln \frac{1}{x}$$

Rešenje:

$$\text{a) } f'(x) = 3 \cdot 7x^6 - 5x^4 + 0 = 21x^6 - 5x^4,$$

$$f''(x) = 21 \cdot 6x^5 - 5 \cdot 4x^3 = 126x^5 - 20x^3,$$

$$f'''(x) = 126 \cdot 5x^4 - 20 \cdot 3x^2 = 630x^4 - 60x^2.$$

$$\text{b) } f'(x) = 4^x \ln 4 + e^x,$$

$$f''(x) = 4^x \ln 4 \cdot \ln 4 + e^x = 4^x \ln^2 4 + e^x,$$

$$f'''(x) = 4^x \cdot \ln 4 \cdot \ln^2 4 + e^x = 4^x \ln^3 4 + e^x.$$

$$\text{c) } f'(x) = (-\ln x)' = -\frac{1}{x},$$

$$f''(x) = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2},$$

$$f'''(x) = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

3. Za funkciju $f(x) = 3e^x - x^5 + \sqrt{x}$, odrediti

a) $f''(4)$

b) $f'''(\frac{1}{9})$

Rešenje:

$$\text{a) } f'(x) = 3e^x - 5x^4 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},$$

$$f''(x) = 3e^x - 20x^3 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}} = 3e^x - 20x^3 - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},$$

$$f''(4) = 3e^4 - 20 \cdot 4^3 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{4^3}} = 3e^4 - 1280 - \frac{1}{32}.$$

$$\text{b) } f'''(x) = 3e^x - 60x^2 - \frac{1}{4} \left(-\frac{3}{2}\right) x^{-\frac{5}{2}} = 3e^x - 60x^2 + \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}},$$

$$f'''(\frac{1}{9}) = 3e^{\frac{1}{9}} - 60\frac{1}{81} + \frac{3}{8}\sqrt{9^5}.$$

Zadaci za samostalan rad

1. Za funkciju $f(x) = \frac{1}{2}x^8 - \frac{1}{3}x^6 + x + 2$ odrediti

a) $f'''(x)$

b) $f^{IV}(0)$.

Rešenje:

a) $f'''(x) = 168x^5 - 40x^3$

b) $f^{IV}(0) = 0$.

2. Za funkciju $f(x) = e^{2x} - 5\sqrt{x} + 4^x$ odrediti $f''(x)$.

Rešenje: $f''(x) = 4e^{2x} - \frac{5}{4\sqrt{x^3}} + 4^x \ln^2 4$.

3. Za funkciju $f(x) = \ln x - x^3 + 30x$ odrediti $f'''(x)$.

Rešenje: $f''(x) = -\frac{2}{x^3} - 6.$

4. Za funkciju $f(x) = \ln^2 x + \ln x^2$ odrediti:

a) $f''(x)$

b) $f'''(e)$.

Rešenje:

a) $f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), \quad f''(x) = -2\frac{\ln x}{x^2}.$

b) $f'''(e) = \frac{2}{e^3}.$

5. Za funkciju $f(x) = e^{x^2} + 2x^3 + \sqrt{x}$ odrediti $f''(x)$.

Rešenje: $f''(x) = 2e^{x^2}(1 + 4x^2) + 12x - \frac{1}{4\sqrt{x^3}}.$

6. Za funkciju $f(x) = \frac{x^7}{14} + \frac{e^{3x}}{9} + x^4$ odrediti $f^{IV}(x)$.

Rešenje: $f^{IV}(x) = 60x^3 + 9e^{3x} + 24.$