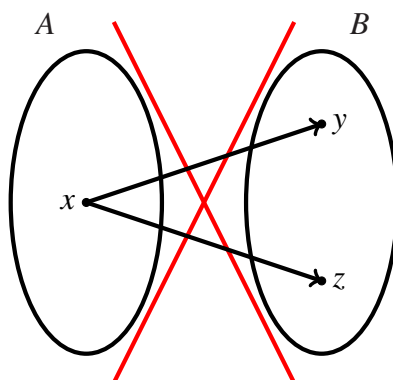


Funkcije

Definicija 1 Relacija $f \subseteq A \times B$ je **funkcija** ako i samo ako

$$(\forall x \in A)(\forall y, z \in B)((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f) \Rightarrow y = z.$$

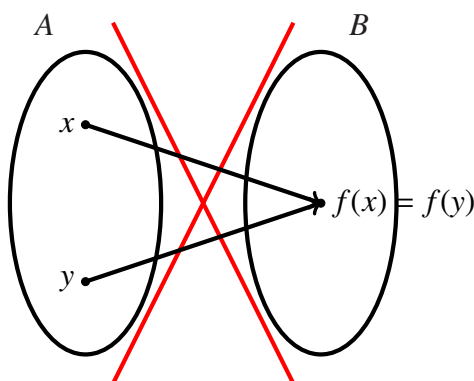
Kraće rečeno, ako su $a, b \in A$ i $a = b$, onda je i $f(a) = f(b)$. Slikovno, sledeća situacija je nedopustiva za funkciju:



Primer 1 $f = \{(1, x), (1, y), (3, z)\}$ nije funkcija!

★ Skup svih prvih komponenti funkcije f naziva se **domen** funkcije (skup originala) i označava se sa $\mathcal{D}(f)$, dok se skup svih drugih komponenti naziva **skup slika** i označava sa $\mathcal{A}(f)$.

Definicija 2 Funkcija je **injektivna** (ili 1 – 1) ako i samo ako ne postoje dva para čije su prve komponente različite, a druge iste.



Definicija 3 f je **funkcija skupa A u skup B** ako

- f je funkcija
- $\mathcal{D}(f) = A$ (Domen je jednak skupu A.)
- $\mathcal{A}(f) \subseteq B$ (Skup slika je podskup skupa B.)

Koristimo oznaku $f : A \rightarrow B$.

Definicija 4 Funkcija $f : A \rightarrow B$ je **sirjeektivna** ako i samo ako $\mathcal{A}(f) = B$. Koristimo oznaku $f : A \xrightarrow{na} B$

★ Ako je f injektivna funkcija skupa A u skup B , onda koristimo oznaku $f : A \xrightarrow{1-1} B$.

Definicija 5 Ako je $f : A \xrightarrow[na]{1-1} B$, onda je funkcija **bijektivna**.

Definicija 6 Ako je inverzna relacija f^{-1} funkcije f (koju dobijamo tako što se u svakom paru zamene mesta prvoj i drugoj komponenti) takođe funkcija, onda je f^{-1} **inverzna funkcija** funkcije f .

Primer 2 Za $f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$ inverzna funkcija je $f^{-1} = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$.

Teorema 1 Za funkciju f postoji njoj inverzna f^{-1} ako i samo ako je f injektivna.

Zadatak 1 Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{a, b, c\}$ i binarne relacije

$$f_1 = \{(1, a), (2, b)\}$$

$$f_3 = \{(1, c), (2, c), (3, b), (4, b)\}$$

$$f_2 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, a), (2, a)\}$$

$$f_4 = \{(1, c), (2, b), (3, b), (4, a)\}$$

Za sve $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ispitati:

- da li su f_i funkcije;
- da li su f_i funkcije skupa A u skup B ;
- da li su f_i injektivne;
- da li su f_i sirjektivne funkcije skupa A u skup B ;
- da li se može definisati injektivna funkcija skupa A u skup B ?

Rešenje:

	f je funkcija	$f_i : A \rightarrow B$	$1-1$	$f_i : A \xrightarrow{na} B$
f_1	DA	NE	DA	NE
f_2	NE	NE	NE	NE
f_3	DA	DA	NE	NE
f_4	DA	DA	NE	DA

f_1 a) Jeste funkcija, dva uređena para sa različitom prvom komponentom.

b) Pošto nema uređenog para sa prvom komponentom 3 i 4, f_1 nije funkcija skupa A u skup B .

c) Jeste injektivna, razlikuju se druge komponente.

d) Pošto nije funkcija skupa A u skup B nije ni sirjektivna funkcija skupa A u skup B .

f_2 Nije funkcija jer $(2, b) \in f_2$ i $(2, a) \in f_2$. Pošto f_2 nije funkcija onda ne zadovoljava osobine funkcije.

f_3 Jeste funkcija skupa A u skup B .

c) Nije 1 – 1 jer $(3, b) \in f_3$ i $(4, b) \in f_3$.

d) Nije surjektivna jer je njen skup slika pravi podskup od B .

f_4 Jeste surjektivna funkcija skupa A u skup B pošto joj je domen ceo skup A , a kodomen ceo skup B . Nije injektivna jer $(2, b) \in f_3$ i $(3, b) \in f_3$.

e) Ne može se definisati injektivna funkcija skupa A u skup B , pošto skup A ima više elemenata od skupa B tako da će uvek bar 2 originala imati istu sliku.

□

★ Da bi se mogla definisati injektivna funkcija skupa A u skup B mora da važi $|A| \leq |B|$, tj. skup A ne sme imati više elemenata nego skup B .

★ Relacije možemo zapisati i na sledeći način

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \end{pmatrix},$$

što znači da je relacija f sačinjena od uređenih parova oblika (a_i, b_i) za $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Relacija f je:

- funkcija akko su svaka dva elementa u prvoj vrsti različita;
- funkcija iz skupa A u skup B akko je $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = A$ i $\{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq B$;
- injektivna funkcija ako i samo ako su i u drugoj vrsti svaka dva elementa različita;
- surjektivna funkcija iz skupa A u skup B ako i samo ako je $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$.

Zadatak 2 Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{a, b, c, d\}$ i binarne relacije

$$f_1 = \{(1, b), (2, a), (3, c), (2, d)\}$$

$$f_3 = \{(1, c), (2, b), (3, d)\}$$

$$f_2 = \{(2, b), (3, b)\}$$

$$f_4 = \{(1, c), (2, a)\}$$

Za sve $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ispitati:

a) da li su f_i funkcije;

b) da li su f_i funkcije skupa A u skup B ;

c) da li su f_i injektivne;

d) da li su f_i surjektivne funkcije skupa A u skup B ;

e) da li se može definisati surjektivna funkcija skupa A u skup B ?

Rešenje:

	f je funkcija	$f_i : A \rightarrow B$	$1-1$	$f_i : A \xrightarrow{na} B$
f_1	NE	NE	NE	NE
f_2	DA	NE	NE	NE
f_3	DA	DA	DA	NE
f_4	DA	NE	DA	NE

f_1 Nije funkcija, pošto $(2, a) \in f_1$ i $(2, d) \in f_1$. Kako nije funkcija, f_1 ne zadovoljava osobine funkcije.

f_2 a) Jeste funkcija.

b) i d) Nije funkcija skupa A u skup B jer ne postoji uređen par čija je prva komponenta 1, pa samim tim ne može biti ni surjektivna funkcija skupa A u skup B .

c) Nije injektivna jer 2 i 3 imaju istu sliku.

f_3 a) i b) Jeste funkcija, čiji je domen skup A , a skup slika je podskup skupa B .

c) Jeste injektivna.

d) Nije surjektivna funkcija skupa A u skup B jer $c \in B$ nema svoj original.

f_4 Jeste funkcija, ali nije funkcija skupa A u skup B jer $3 \in A$ nema svoju sliku, pa samim tim nije ni surjektivna funkcija skupa A u skup B . Injektivnost je zadovoljena.

e) Ne može se definisati, pošto skup A ima manje elemenata od skupa B tako da će se jedan element skupa A preslikati u 2 elementa skupa B , ako bismo želeli da ispunimo uslov surjektivnosti, čime narušavamo osobinu funkcije.

□

★ Da bi se mogla definisati surjektivna funkcija skupa A u skup B mora biti $|A| \geq |B|$, tj. u skupu A mora biti bar onoliko elemenata koliko ih je u skupu B .

Zadatak 3 Za sledeće binarne relacije

$$f_1 = \{(x, x+1) | x \in \mathbb{N}\}$$

$$f_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$f_2 = \{(x, x-1) | x \in \mathbb{N}\}$$

$$f_4 = \{(x+1, x) | x \in \mathbb{N}\}$$

ispitati za sve $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a) da li su f_i funkcije;

b) da li su f_i funkcije skupa \mathbb{N} u skup \mathbb{N} ;

c) da li su f_i funkcije skupa $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ u skup \mathbb{N} ;

d) da li su f_i injektivne funkcije skupa \mathbb{N} u skup \mathbb{N} ;

e) da li su f_i surjektivne funkcije skupa \mathbb{N} u skup \mathbb{N} ;

f) da li su f_i bijektivne funkcije skupa \mathbb{N} u skup \mathbb{N} ?

Rešenje:

	f_i je funkcija	$f_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$	$f_i : \mathbb{N} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{N}$	$f_i : \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} \mathbb{N}$	$f_i : \mathbb{N} \xrightarrow{na} \mathbb{N}$	$f_i : \mathbb{N} \xrightarrow[na]{1-1} \mathbb{N}$
f_1	DA	DA	NE	DA	NE	NE
f_2	DA	NE	NE	NE	NE	NE
f_3	DA	NE	NE	NE	NE	NE
f_4	DA	NE	DA	NE	NE	NE

Sve četiri binarne relacije jesu funkcije.

f_1 b) Jeste funkcija skupa \mathbb{N} u skup \mathbb{N} , pošto je skup prvih komponenti ceo skup prirodnih brojeva, a skup dugih komponenti je $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, što je podskup od \mathbb{N} .

c) Nije, pošto je domen skup prirodnih brojeva, nadskup skupa $\mathbb{N} \setminus \{1\}$.

d) Zbog načina definisanja jasno se vidi da jeste $1-1$, pa je uz b) dobijeno $f_1 : \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} \mathbb{N}$.

e) Nije surjektivna pošto je skup slika $\mathbb{N} \setminus \{1\}$.

f) Pošto nije surjektivna nije ni bijektivna.

f_2 Ako počnemo sa brojem 1 vidimo da je prvi uređen par $(1,0)$ u f_2 i da su domen skup \mathbb{N} i skup slika jeste skup \mathbb{N}_0 . Znajući ovu činjenicu lako zaključujemo da funkcija f_2 ne ispunjava niti jednu od osobina traženih u zadatku.

f_3 Posmatrajući tri uređena para koji su u f_3 jasno vidimo da to jeste funkcija, ali i da domen i skup slika ove funkcije nisu beskonačni skupovi koji su nam potrebni za preostale osobine.

f_4 Još jedna funkcija zadata preko svoje inverzne čiji pravi oblik je $f_4 = \{(x, x-1) | x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$.

Iz oba načina zapisivanja jasno se vidi da je prvi uređeni par $(2, 1)$, domen je $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, a skup slika \mathbb{N} . Pošto ovo nije funkcija skupa \mathbb{N} u skup \mathbb{N} svi odgovori su negativni osim c).

Napomenimo da je $f_4 : \mathbb{N} \setminus \{1\} \xrightarrow[na]{1-1} \mathbb{N}$

□

Definicija 7 Neka su A, B i C neprazni skupovi i $f : A \rightarrow B$ i $g : B \rightarrow C$ date funkcije.

Funkciju $g \circ f$ skupa A u skup C definisanu sa

$$(\forall x \in A)(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

nazivamo **kompozicija funkcija** g i f .

Zadatak 4 Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i neka su $f, g : A \rightarrow A$ zadate sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Odrediti (ako je moguće): f^{-1} , g^{-1} , $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1}$ i $f^{-1} \circ g^{-1}$.

$$\begin{aligned}
\text{Rešenje: } f^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & g \circ f &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\
g^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & (g \circ f)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\
f \circ f &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & f^{-1} \circ g^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\
f \circ g &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

★ Vidimo da kompozicija funkcija nije komutativna operacija, tj. u opštem slučaju je

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

Međutim, kompozicija je asocijativna operacija, odnosno za sve funkcije f, g, h važi

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

(ako su odgovarajuće kompozicije definisane). Takođe, uvek važi

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Zadatak 5 Za funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisane sa $f(x) = 2x + 3$ i $g(x) = x^2 - 2$ naći funkcije

a) $(f \circ g)(x)$

d) $(g \circ g)(x)$

b) $(g \circ f)(x)$

e) $f^{-1}(x)$

c) $(f \circ f)(x)$

Rešenje:

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 2) = 2(x^2 - 2) + 3 = 2x^2 - 1$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = (2x + 3)^2 - 2 = 4x^2 + 12x + 7$

c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2x + 3) = 2(2x + 3) + 3 = 4x + 9$

d) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x^2 - 2) = (x^2 - 2)^2 - 2 = x^4 - 4x^2 + 2$

e) Kako je $f = \{(x, 2x + 3) | x \in \mathbb{R}\}$, to je $f^{-1} = \{(2x + 3, x) | x \in \mathbb{R}\}$.

Sada je

$$2x + 3 = t \Rightarrow \frac{t-3}{2} = x \Rightarrow f^{-1} = \left\{ \left(t, \frac{t-3}{2} \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(x, \frac{x-3}{2} \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

odnosno $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$.

□

Zadatak 6 Za funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ i $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisane sa $f(x) = \arctg x$ i $g(x) = \sqrt[3]{1+x}$ naći funkcije

a) $f^{-1}(x)$

d) $(g \circ f)^{-1}(x)$

b) $g^{-1}(x)$

e) $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

c) $(g \circ f)(x)$

Rešenje:

a) $f^{-1}(x) = \tg x$

b) $\sqrt[3]{1+x} = t \Rightarrow x = t^3 - 1 \Rightarrow g^{-1}(x) = x^3 - 1$

c) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\arctg x) = \sqrt[3]{1 + \arctg x}$

d) $\sqrt[3]{1 + \arctg x} = t \Rightarrow \arctg x = t^3 - 1 \Rightarrow x = \tg(t^3 - 1) \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(x) = \tg(x^3 - 1)$

e) $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = f^{-1}(x^3 - 1) = \tg(x^3 - 1)$

□

Zadatak 7 Naći domen, skup slika i inverznu funkciju (ako postoji) sledećih funkcija:

$f_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

$f_5 = \{(x, x^2) | x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$

$f_2 = \{(x, 3x+4) | x \in \mathbb{R}\}$

$f_6 = \{(x, 2^x) | x \in \mathbb{R}\}$

$f_3 = \{(x, x^3) | x \in \mathbb{R}\}$

$f_7 = \{(x, |x|) | x \in \mathbb{R}\}$

$f_4 = \{(x, x^2) | x \in \mathbb{R}\}$

$f_8 = \left\{ \left(x, \frac{2x-1}{5-3x} \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

Rešenje:

$\underline{f_1} \quad \mathcal{D}(f_1) = \{1, 2, 3\}$

$\mathcal{A}(f_1) = \{2, 3, 4\}$

$f_1^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$

$\underline{f_2} \quad \mathcal{D}(f_2) = \mathbb{R}$

$\mathcal{A}(f_2) = \mathbb{R}$

$3x+4=t \Rightarrow x = \frac{t-4}{3} \Rightarrow f_2^{-1} = \left\{ \left(t, \frac{t-4}{3} \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(x, \frac{x-4}{3} \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

$\underline{f_3} \quad \mathcal{D}(f_3) = \mathbb{R}$

$\mathcal{A}(f_3) = \mathbb{R}$

$x^3 = t \Rightarrow x = \sqrt[3]{t} \Rightarrow f_3^{-1} = \{(t, \sqrt[3]{t}) | t \in \mathbb{R}\} = \{(x, \sqrt[3]{x}) | x \in \mathbb{R}\}$

$$\underline{f_4} \quad \mathcal{D}(f_4) = \mathbb{R}$$

$$\mathcal{A}(f_4) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$f_4(-1) = f_4(1) = 1$, pa pošto funkcija nije injektivna, inverzna funkcija ne postoji.

$$\underline{f_5} \quad \mathcal{D}(f_5) = [0, +\infty)$$

$$\mathcal{A}(f_5) = [0, +\infty)$$

$$x^2 = t \Rightarrow x = \sqrt{t} \Rightarrow f_5^{-1} = \{(t, \sqrt{t}) \mid t \in [0, +\infty)\} = \{(x, \sqrt{x}) \mid x \in [0, +\infty)\}$$

$$\underline{f_6} \quad \mathcal{D}(f_6) = \mathbb{R}$$

$$\mathcal{A}(f_6) = \mathbb{R}^+$$

$$2^x = t \Rightarrow x = \log_2 t \Rightarrow f_6^{-1} = \{(t, \log_2 t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(x, \log_2 x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$\underline{f_7} \quad \mathcal{D}(f_7) = \mathbb{R}$$

$$\mathcal{A}(f_7) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$f_7(-1) = f_7(1) = 1$, pa pošto funkcija nije injektivna, inverzna funkcija ne postoji.

$$\underline{f_8} \quad \mathcal{D}(f_8) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\}$$

$$\mathcal{A}(f_8) = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$$

$$\frac{2x-1}{5-3x} = t \Rightarrow x = \frac{5t+1}{2+3t} \Rightarrow f_8^{-1} = \left\{\left(t, \frac{5t+1}{2+3t}\right) \mid t \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}\right\} = \left\{\left(x, \frac{5x+1}{2+3x}\right) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}\right\}$$

□

Zadatak 8 Za sledeće binarne relacije

$$f_1 = \{(x, \arctg x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$f_4 = \{(e^x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$f_2 = \{(x, 2x+1) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$f_5 = \{(x+1, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$f_3 = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$f_6 = \{(x, x+1) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

ispitati za sve $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a) da li su f_i funkcije;

b) da li su f_i funkcije skupa \mathbb{R} u skup \mathbb{R} ;

c) da li su f_i funkcije skupa $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ u skup \mathbb{R} ;

d) da li su f_i injektivne funkcije skupa \mathbb{R} u skup \mathbb{R} ;

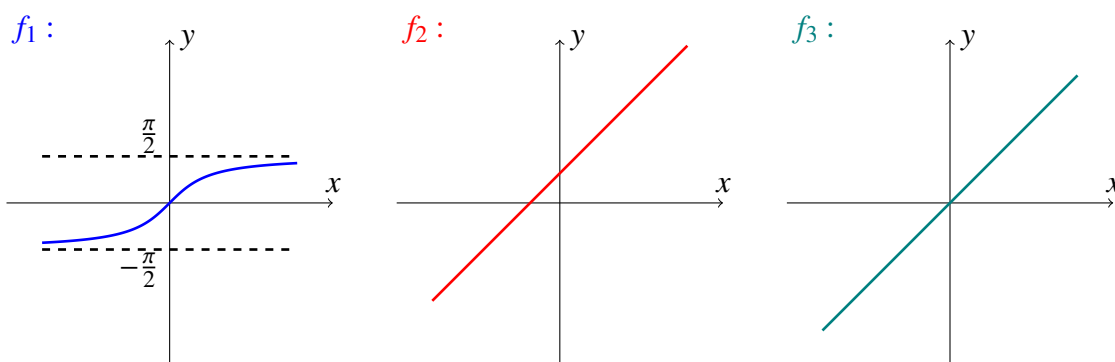
e) da li su f_i surjektivne funkcije skupa \mathbb{R} u skup \mathbb{R} ?

f) Pronaći f_i^{-1} ukoliko postoji.

Rešenje:

	f_i je funkcija	$f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$f_i : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$	$f_i : \mathbb{R} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$	$f_i : \mathbb{R} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$	$f_i^{-1}(x)$
f_1	DA	DA	NE	DA	NE	$\operatorname{tg} x!!$
f_2	DA	DA	NE	DA	DA	$\frac{x-1}{2}$
f_3	DA	DA	NE	DA	DA	x
f_4	DA	NE	NE	NE	NE	e^x
f_5	DA	DA	NE	DA	DA	$x+1$
f_6	DA	DA	NE	DA	DA	$x-1$

Dve osobine mogu se prokomentarisati generalno za sve zadate relacije. Svih šest relacija očigledno jesu funkcije, ali nisu funkcije skupa $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ u skup \mathbb{R} , pošto ni jedna nema skup $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ za domen (ili imaju ceo \mathbb{R} ili \mathbb{R}^+).



f_1 b) Domen elementarne funkcije $\operatorname{arctg} x$ jeste skup realnih brojeva.

d) i e) ona jeste injektivna i njen skup slika je $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, pa f_1 jeste injektivna funkcija skupa \mathbb{R} u skup \mathbb{R} , ali nije surjektivna.

f) Inverzna funkcija postoji, i to je $f^{-1} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ data sa $f^{-1}(x) = \operatorname{tg} x$.

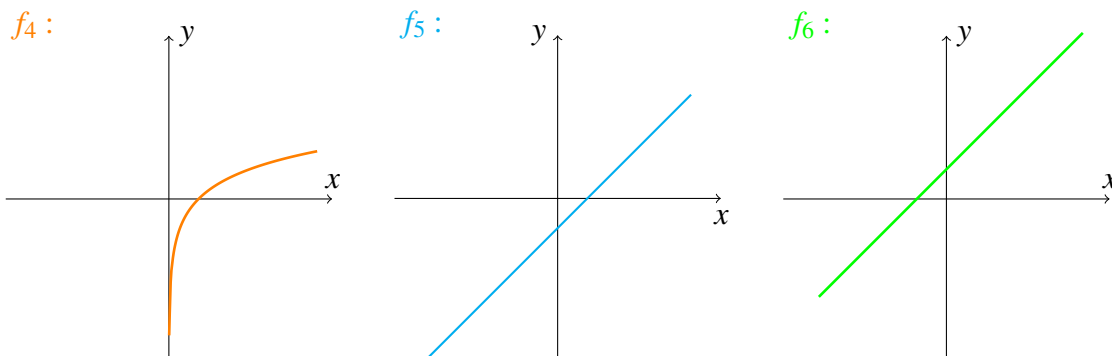
f_2 predstavlja linearnu funkciju, odnosno pravu, bez ikakvih ograničenja, koja nije paralelna koordinatnim osama, pa je samim tim bijekcija skupa \mathbb{R} u skup \mathbb{R} .

f) Inverznu funkciju tražimo kao i u prethodnim zadacima

$$2x + 1 = t \Rightarrow t = \frac{x-1}{2} \Rightarrow f_2^{-1} = \left\{ \left(t, \frac{t-1}{2} \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(x, \frac{x-1}{2} \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

odnosno $f_2^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$.

f_3 je takođe prava, primer identičkog preslikavanja za skup realnih brojeva. Kao i f_2 nije paralelna koordinatnim osama i radi se o bijektivnom preslikavanju. Inverzna je sama sebi.



f_4 zapravo predstavlja logaritamsku funkciju. Na ovaj način zadato je da f_4 predstavlja inverznu funkciju funkcije $g(x) = e^x$. Za $f_4 = \ln x$ domen je \mathbb{R}^+ , a skup slika je ceo skup \mathbb{R} . Pošto domen nije niti \mathbb{R} niti $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ odgovori na sva pitanja su negativni.

Napomena: Svaka logaritamska funkcija je bijektivno preslikavanje skupa \mathbb{R}^+ na skup \mathbb{R} , i za ovaj domen i kodomen odgovarajuća eksponencijalna funkcija je njena inverzna.

f_5 i f_6 su takođe prave. f_5 je inverzna funkcija funkcije $h(x) = x + 1$.

□

- ★ Kompozicija injektivnih funkcija je injektivna funkcija.
- ★ Funkcija f je injektivna ako i samo ako jednačina $t = f(x)$ nema više od jednog rešenja za bilo koju vrednost parametra t .
- ★ $f : A \rightarrow B$ je surjektivna ako i samo ako jednačina $t = f(x)$ ima bar jedno rešenje po x za svako t iz skupa B .

Zadatak 9 Za sledeće funkcije naći domen, inverznu funkciju i domen inverzne funkcije.

a) $f = \log_2 \frac{x}{1-x}$

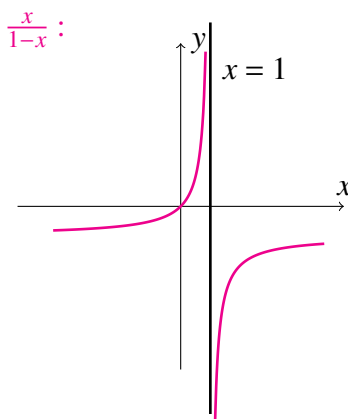
b) $g(x) = e^{3-2x}$

Rešenje:

- a) Argument logaritamske funkcije mora biti pozitivan, pa domen određujemo na sledeći način

$$\frac{x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1),$$

tj. $\mathcal{D}(f) = (0, 1)$. Grafik same razlomljene funkcije nam pokazuje da ona interval $(0, 1)$ preslikava u \mathbb{R}^+ i da je injektivna



Pošto smo od razlomljene funkcije dobili domen logaritamske, važi $\mathcal{A}(f) = \mathbb{R}$, a kako je funkcija f injektivna (kao kompozicija injektivnih funkcija) postoji inverzna funkcija i $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{A}(f) = \mathbb{R}$. Inverznu funkciju dobijamo na standardni način

$$\log_2 \frac{x}{1-x} = t \Rightarrow \frac{x}{1-x} = 2^t \Rightarrow x = 2^t - 2^t \cdot x \Rightarrow x = \frac{2^t}{1+2^t}$$

$$f^{-1} = \left\{ \left(t, \frac{2^t}{2^t+1} \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(x, \frac{2^x}{2^x+1} \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\},$$

tj. $f^{-1}(x) = \frac{2^x}{2^x+1}$ i važi $f : (0, 1) \xrightarrow{na} \mathbb{R}$

- b) Funkcija g je kompozicija eksponencijalne i linearne funkcije. Linearna funkcija je bijekcija iz \mathbb{R} na \mathbb{R} , a eksponencijalna je bijekcija iz \mathbb{R} na \mathbb{R}^+ , pa se radi o dobro definisanoj kompoziciji injektivnih funkcija. Stoga je $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$ i $\mathcal{A}(g) = \mathbb{R}^+$. Inverznu funkciju tražimo standardno i dobija se $g^{-1}(x) = \frac{3-\ln x}{2}$, odakle se još jasnije vidi da je domen inverzne funkcije $\mathcal{D}(g^{-1}) = \mathcal{A}(g) = \mathbb{R}^+$. Na kraju, važi i $g : \mathbb{R} \xrightarrow[na]{1-1} \mathbb{R}^+$.

□

Zadatak 10 Naći inverznu funkciju i domen inverzne funkcije za

$$f_1(x) = 2x + 3$$

$$f_5(x) = x^3$$

$$f_2(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$f_6(x) = \frac{1}{x}$$

$$f_3(x) = \arccos x$$

$$f_7(x) = \sqrt{1-x^2} \text{ za } x \in (0, 1)$$

$$f_4(x) = 2^x$$

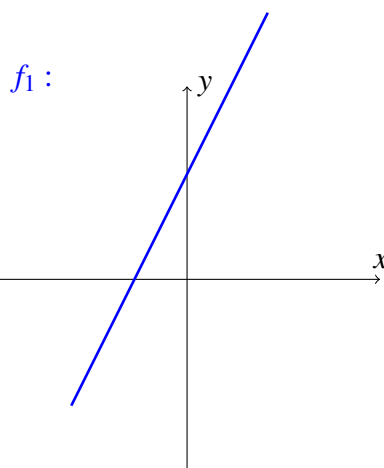
Rešenje:

$$\underline{f_1(x)} = 2x + 3$$

$$\mathcal{D}(f_1) = \mathbb{R}$$

$$f_1^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$$

$$\mathcal{D}(f_1^{-1}) = \mathbb{R}$$



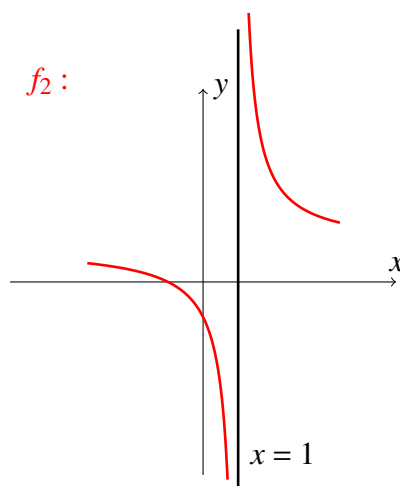
$$\underline{f_2(x)} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\mathcal{D}(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\begin{aligned} t = \frac{x+1}{x-1} &\Rightarrow tx - t = x + 1 \\ &\Rightarrow x = \frac{t+1}{t-1} \end{aligned}$$

$$f_2^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\mathcal{D}(f_2^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$



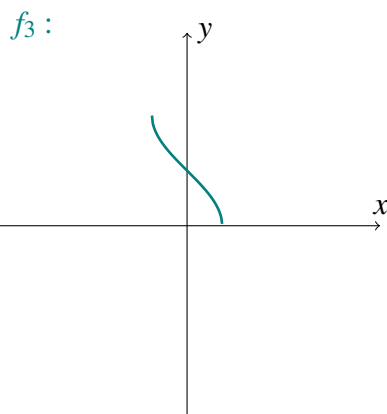
$$\underline{f_3(x)} = \arccos x$$

$$\mathcal{D}(f_3) = [-1, 1]$$

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$f_3^{-1}(x) = \cos x$$

$$\mathcal{D}(f_3^{-1}) = [0, \pi]$$

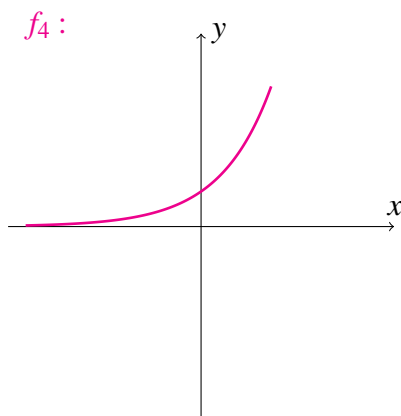


$$\underline{f_4(x)} = 2^x$$

$$\mathcal{D}(f_4) = \mathbb{R}$$

$$f_4^{-1}(x) = \log_2 x$$

$$\mathcal{D}(f_4^{-1}) = \mathbb{R}^+$$

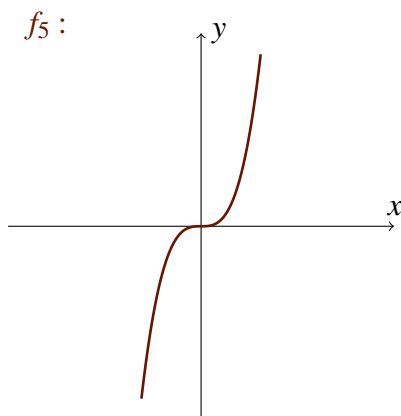


$$\underline{f_5(x)} = x^3$$

$$\mathcal{D}(f_5) = \mathbb{R}$$

$$f_5^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$\mathcal{D}(f_5^{-1}) = \mathbb{R}$$

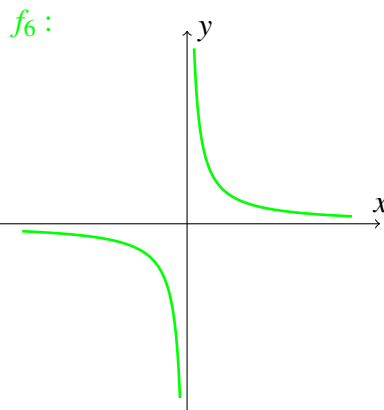


$$\underline{f_6(x)} = \frac{1}{x}$$

$$\mathcal{D}(f_6) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f_6^{-1}(x) = \frac{1}{x}$$

$$\mathcal{D}(f_6^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

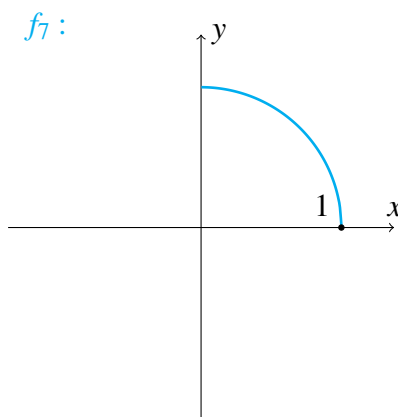


$$\underline{f_7(x)} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\mathcal{D}(f_7) = (0, 1)$$

$$f_7^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\mathcal{D}(f_7^{-1}) = (0, 1)$$



□

Zadatak 11 Neka je A najveći podskup od \mathbb{R} , a B najmanji podskup od \mathbb{R} za koje je funkcija $f : A \rightarrow B$ definisana sa $f(x) = \sqrt[3]{\ln(x^2 - 1)}$. Tada je $A = \underline{\hspace{2cm}}$, $B = \underline{\hspace{2cm}}$ i funkcija $f : A \rightarrow B$ je

- a) surjektivna, ali nije injektivna
- b) injektivna, ali nije surjektivna
- c) niti surjektivna, niti injektivna
- d) bijekcija

(zaokružiti tačan odgovor).

Rešenje: Ovo je jedan od standardnih problema na testu. Potrebno je odrediti domen (skup A) i skup slika (skup B) zadate funkcije i odgovoriti na pitanje njenih osobina.

Data funkcija je kompozicija kvadratne funkcije, logaritamske funkcije i trećeg korena, pri čemu su kvadratna funkcija i treći koren definisane za sve vrednosti iz \mathbb{R} dok je logaritamska

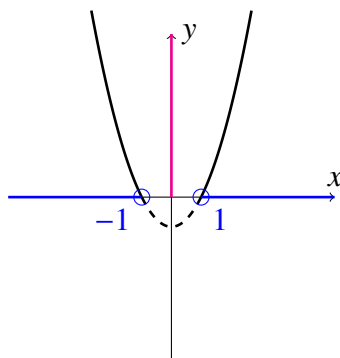
funkcija definisana samo za pozitivne vrednosti. Prema tome, mora da važi $x^2 - 1 > 0$, odakle je domen funkcije f

$$A = \mathcal{D}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

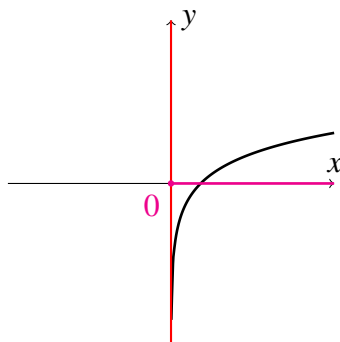
Zapišimo sada tri funkcije čijom kompozicijom dobijamo funkciju f :

$$g(x) = x^2 - 1, \quad h(x) = \ln x \quad \text{i} \quad l(x) = \sqrt[3]{x}.$$

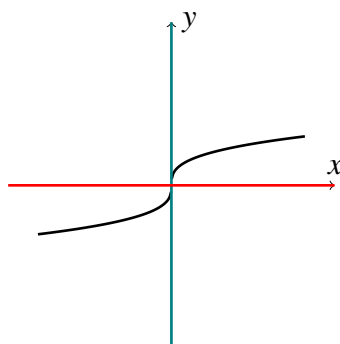
$g(x)$ Funkcija g skup A slika na skup $(0, \infty)$ (isprekidano je povučen deo grafika koji ne odgovara skupu koji preslikavamo).



$h(x)$ Funkcijom $y = \ln x$ skup $(0, \infty)$ preslikavamo na \mathbb{R} .



$l(x)$ Funkcija $y = \sqrt[3]{x}$ preslikava skup \mathbb{R} na skup \mathbb{R} .



Prema tome, $B = \mathcal{A}(f) = \mathbb{R}$.

S obzirom da je B skup slika, funkcija f je surjektivna, ali nije injektivna (zbog kvadratne funkcije), npr. $f(-2) = f(2) = \sqrt[3]{\ln 3}$. □

Zadatak 12 Neka je A najveći podskup od \mathbb{R} , a B najmanji podskup od \mathbb{R} za koje je funkcija $f : A \rightarrow B$ definisana sa $f(x) = -\ln(x^2 + 1)$. Tada je $A =$ _____, $B =$ _____, $f(0) =$ _____, $f(\text{_____}) = -\ln 2$ i funkcija $f : A \rightarrow B$ je

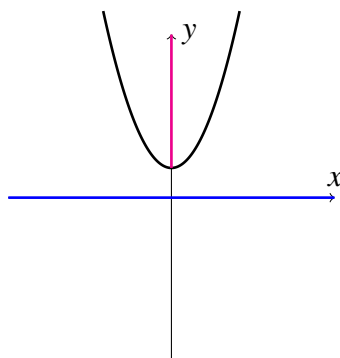
- a) surjektivna, ali nije injektivna
- b) injektivna, ali nije surjektivna
- c) niti surjektivna, niti injektivna
- d) bijekcija

(zaokružiti tačan odgovor).

Rešenje: Domen funkcije je $\mathcal{D}(f) = A = \mathbb{R}$, pošto je $x^2 + 1 > 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

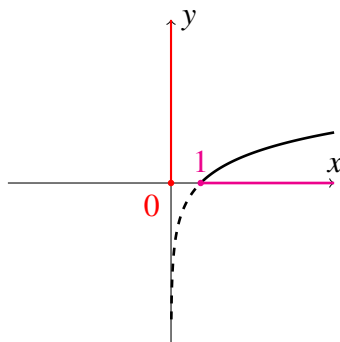
Sada funkciju možemo podeliti na tri dela (tri funkcije čiju kompoziciju vršimo), prvo $g(x) = x^2 + 1$, pa $h(x) = \ln x$ i na kraju $l(x) = -x$.

$g(x)$ Posmatramo grafik funkcije $g(x) = x^2 + 1$ i šta ona radi sa skupom A .



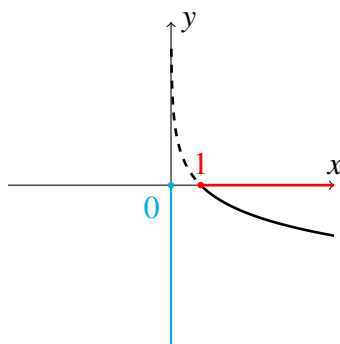
Funkcija $g(x)$ preslikava skup A u skup $[1, \infty)$.

$h(x)$ Pravimo restrikciju domena funkcije $y = \ln x$, posmatramo $[1, \infty)$.



Isprekidano je povučen deo grafika koji ne odgovara skupu koji preslikavamo. Pošto je $\ln 1 = 0$ i $y = \ln x$ je rastuća funkcija, sa $y = \ln x$ skup $[1, \infty)$ preslikavamo na $[0, \infty)$.

$l(x)$ Preslikavamo skup $[0, \infty)$ funkcijom $y = -\ln x$.



Funkcija $y = -\ln x$ skup $[0, \infty)$ preslikava na $(-\infty, 0]$ i to je naš skup B . Zaključak, na liniju za skup A pišemo domen funkcije f skup \mathbb{R} , a za skup B pišemo $(-\infty, 0]$. Funkcija je surjektivna, ali nije injektivna (zbog kvadratne funkcije i domena), npr. $f(-1) = f(1) = -\ln 2$. Dati primer je odgovor i na pitanje za koju vrednost iz domena funkcija daje sliku $-\ln 2$, pa je na tu liniju potrebno uneti i -1 i 1 . $f(0) = -\ln(0+1) = -\ln 1 = 0$, što je poslednja tražena vrednost. \square

Zadatak 13 Neka je A najveći podskup od \mathbb{R} , a B najmanji podskup od \mathbb{R} za koje je funkcija $f : A \rightarrow B$ definisana sa $f(x) = \ln(2 + \sqrt{x})$. Tada je $A = \underline{\hspace{2cm}}$, $B = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(4) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(\underline{\hspace{2cm}}) = \frac{1}{2}$ i funkcija $f : A \rightarrow B$ je

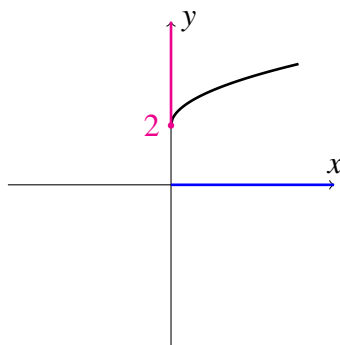
- a) surjektivna, ali nije injektivna
- b) injektivna, ali nije surjektivna
- c) niti surjektivna, niti injektivna
- d) bijekcija

(zaokružiti tačan odgovor).

Rešenje: Domen funkcije je $\mathcal{D}(f) = A = [0, \infty)$, pošto je $\sqrt{x} \geq 0$ za sve $x \in [0, \infty)$, što je skup vrednosti za koje je kvadratni koren definisan.

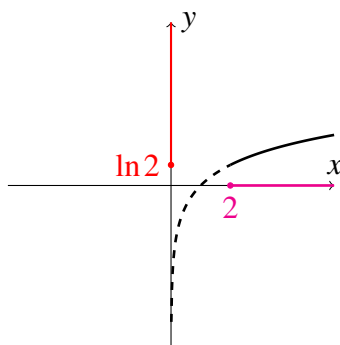
Sada funkciju možemo podeliti na dva dela (dve funkcije čiju kompoziciju vršimo), prvo $g(x) = 2 + \sqrt{x}$, pa $h(x) = \ln x$.

$g(x)$ Posmatramo grafik funkcije $g(x) = 2 + \sqrt{x}$ i kako ona preslikava skup A .



Funkcija $g(x)$ preslikava skup A u skup $[2, \infty)$.

$h(x)$ Pravimo restrikciju domena funkcije $y = \ln x$, posmatramo $[2, \infty)$.

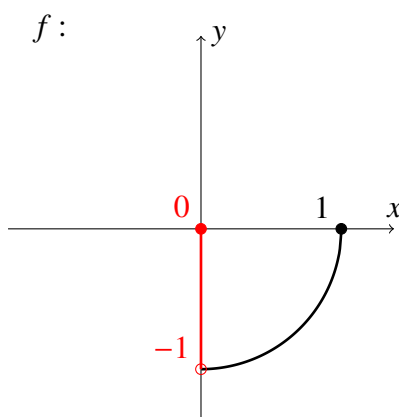


Isprekidano je povučen deo grafika koji ne odgovara skupu koji preslikavamo. Pošto je $\ln 2 > 0$ i $y = \ln x$ je rastuća funkcija, sa $h(x)$ skup $[2, \infty)$ preslikavamo na $[\ln 2, \infty)$.

Zaključak, na liniju za skup A pišemo domen funkcije f skup $[0, \infty)$, a za skup B pišemo $[\ln 2, \infty)$. Funkcija je bijektivna, jer je kompozicija injektivnih elementarnih funkcija, a domen i kodomen su napravljeni da ispoštuju definiciju surjektivne funkcije. Original koji odgovara slici $\frac{1}{2}$ ne postoji, pošto je $\frac{1}{2} < \ln 2$. $f(2) = \ln(2 + \sqrt{4}) = \ln 4$, što je poslednja tražena vrednost. \square

Zadatak 14 Neka je A najveći podskup od \mathbb{R}^+ , a B najmanji podskup od \mathbb{R} za koje je funkcija $f : A \rightarrow B$ definisana sa $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$. Tada je $A =$ _____, $B =$ _____. Odrediti, ako je moguće, inverznu funkciju i njen domen i kodomen.

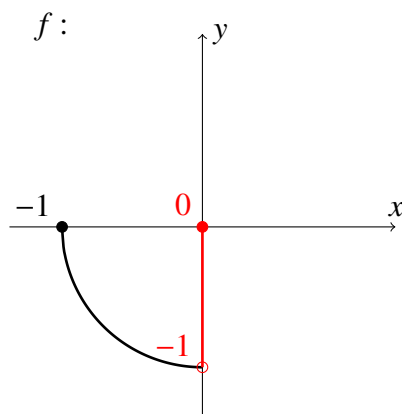
Rešenje: Funkcija potiče od jednačine jedinične kružnice $x^2 + y^2 = 1$. Na ovaj način biramo tačno četvrtinu kružnice i pravimo bijektivnu funkciju od izraza koji ne zadovoljava definiciju funkcije. Pošto uzimamo za A najveći podskup od \mathbb{R}^+ , domen je $\mathcal{D}(f) = A = (0, 1]$. Zbog minusa ispred korena u funkciji f , i činjenice da je $A = (0, 1]$, dobijamo četvrtinu kružnice iz četvrtog kvadranta.



Pošto je nula isključena iz domena, broja -1 nema u kodomenu, i time jasno dolazimo do skupa $B = (-1, 0]$. Što se tiče inverzne, nju u potpunosti određujemo preko domena i kodomena same funkcije, kao i standardne metode. Jasno $\mathcal{D}(f^{-1}) = B = (-1, 0]$ i $\mathcal{A}(f^{-1}) = A = (0, 1]$. Na kraju, inverzna funkcija se dobija na standardan način uz napomenu da nam oblik A određuje predznak ispred korena. U ovom slučaju pošto inverznom treba da dobijemo $A = (0, 1]$, pozitivne brojeve, imamo da je $f^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}$. \square

Zadatak 15 Neka je A najveći podskup od \mathbb{R}^- , a B najmanji podskup od \mathbb{R} za koje je funkcija $f : A \rightarrow B$ definisana sa $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$. Tada je $A = \underline{\hspace{2cm}}$, $B = \underline{\hspace{2cm}}$. Odrediti, ako je moguće, inverznu funkciju i njen domen i kodomen.

Rešenje: Pošto uzimamo za A najveći podskup od \mathbb{R}^- , domen je $\mathcal{D}(f) = A = [-1, 0)$. Zbog minusa ispred korena u funkciji f , i činjenice da je $A = [-1, 0)$, dobijamo četvrtinu kružnice iz trećeg kvadranta:



Kako je nula isključena iz domena, broja -1 nema u kodomenu, i time jasno dolazimo do skupa $B = (-1, 0]$. Što se tiče inverzne, nju u potpunosti određujemo preko domena i kodomena same funkcije, kao i standardne metode. Jasno $\mathcal{D}(f^{-1}) = B = (-1, 0]$ i $\mathcal{A}(f^{-1}) = A = [-1, 0)$. Na kraju, inverzna funkcija se dobija na standardan način uz napomenu da nam oblik A određuje predznak ispred korena. U ovom slučaju pošto inverznom treba da dobijemo $A = [-1, 0)$, negativne brojeve, imamo da je $f^{-1}(x) = -\sqrt{1-x^2}$. □

Primer 3 Neka su $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{x, y\}$. tada je

$ \{f f : A \rightarrow B\} = \underline{2^3 = 8}$	$ \{f f : A \xrightarrow{1-1} B\} = \underline{0}$
$ \{f f : A \xrightarrow{na} B\} = \underline{2^3 - 2 = 6}$	$ \{f f : B \rightarrow A\} = \underline{3^2 = 9}$
$ \{f f : B \xrightarrow{1-1} A\} = \underline{3 \cdot 2 = 6}$	$ \{f f : B \xrightarrow{na} A\} = \underline{0}$
$ \{f f : A \rightarrow A\} = \underline{3^3 = 27}$	$ \{f f : A \xrightarrow{1-1} A\} = \underline{3 \cdot 2 = 6}$
$ \{f f : A \xrightarrow{na} A\} = \underline{3! = 6}$	$ \{f f : A \xrightarrow[na]{1-1} A\} = \underline{3 \cdot 2 = 6}$
$ \{f f : B \rightarrow B\} = \underline{2^2 = 4}$	$ \{f f : B \xrightarrow{1-1} B\} = \underline{2}$
$ \{f f : B \xrightarrow{na} B\} = \underline{2}$	$ \{f f : B \xrightarrow[na]{1-1} B\} = \underline{2}$

★ $\binom{n}{k}$ je binomni koeficijent i računa se po formuli $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

Definicija 8 Funkcija $f : A \rightarrow B$ je rastuća, označavamo sa \nearrow , ako i samo ako za sve $a, b \in A$ važi $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$. Broj rastućih funkcija iz skupa A u skup B računa se po formuli $C_{|A|}^{|B|} = \binom{|B|}{|A|}$ (broj kombinacija bez ponavljanja).

Definicija 9 Funkcija $f : A \rightarrow B$ je neopadajuća, označavamo sa \nearrow , ako i samo ako za sve $a, b \in A$ važi $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$. Broj neopadajućih funkcija iz skupa A u skup B računa se po formuli $\overline{C}_{|A|}^{|B|} = \binom{|B|+|A|-1}{|A|}$ (broj kombinacija sa ponavljanjem).

Primer 4 Za skup $A = \{1, 2\}$ prebrojati rastuće funkcije u sledećim slučajevima.

$$|\{f|f : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2\} \wedge f \nearrow\}| = \underline{1}$$

$$|\{f|f : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3\} \wedge f \nearrow\}| = \underline{\binom{3}{2} = 3}$$

$$|\{f|f : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\} \wedge f \nearrow\}| = \underline{\binom{4}{2} = 6}$$

$$|\{f|f : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\} \wedge f \nearrow\}| = \underline{\binom{5}{2} = 10}$$

$$|\{f|f : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\} \wedge f \nearrow\}| = \underline{\binom{n}{2}}$$

Primer 5 Za skup $A = \{1, 2, 3\}$ prebrojati rastuće funkcije u sledećim slučajevima.

$$|\{f|f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2\} \wedge f \nearrow\}| = \underline{0}$$

$$|\{f|f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\} \wedge f \nearrow\}| = \underline{\binom{3}{3} = 1}$$

$$|\{f|f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\} \wedge f \nearrow\}| = \underline{\binom{4}{3} = 4}$$

$$|\{f|f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\} \wedge f \nearrow\}| = \underline{\binom{5}{3} = 10}$$

$$|\{f|f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\} \wedge f \nearrow\}| = \underline{\binom{n}{3}}$$

Primer 6 Za skup $A = \{1, 2\}$ prebrojati neopadajuće funkcije u sledećim slučajevima.

$$|\{f|f : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2\} \wedge f \searrow\}| = \underline{\binom{2+2-1}{2} = \binom{3}{2} = 3}$$

$$|\{f|f : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3\} \wedge f \searrow\}| = \underline{\binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = 6}$$

$$|\{f|f : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\} \wedge f \searrow\}| = \underline{\binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10}$$

$$|\{f|f : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\} \wedge f \searrow\}| = \underline{\binom{n+2-1}{2}}$$

Primer 7 Za skup $A = \{1, 2, 3\}$ prebrojati neopadajuće funkcije u sledećim slučajevima.

$$|\{f|f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2\} \wedge f \searrow\}| = \underline{\binom{2+3-1}{3} = \binom{4}{3} = 4}$$

$$|\{f|f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\} \wedge f \searrow\}| = \underline{\binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = 10}$$

$$|\{f|f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\} \wedge f \searrow\}| = \underline{\binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20}$$

$$|\{f|f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\} \wedge f \searrow\}| = \underline{\binom{n+3-1}{3}}$$