1. Писмени задатак из математике је радило 20 ученика.

   а) На колико начина радови могу бити оцењени? (Оцене које професор може дати су 1, 2, 3, 4 и 5.)

   б) Ако знамо да је сваку од могућих оцена добио бар по један ученик, одредити на колико начина је професор могао оценити радове.

а)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

$$\binom{20+5-1}{20} = \binom{24}{4}$$

б)

$$x_i \geq 1$$

$$y_i = x_i - 1 \geq 0 \quad i = 1,2,3,4,5$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 20 - 5 = 15$$

$$\binom{15+5-1}{15} = \binom{19}{4}$$

2. За природни број n израчунати $\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+3\binom{n}{2}+\cdots+(n+1)\binom{n}{n}$.

$$\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+3\binom{n}{2}+\ldots+(n+1)\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}=$$

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1}+2^{n}=(n+2)2^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=\underbrace{\cancel{0\cdot\binom{n}{0}}}_{0}+\boxed{1\cdot\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}+\ldots n\cdot\binom{n}{n}}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$$

3. Одредити број пермутација π скупа $\{1, 2, \ldots, 9\}$ таквих да је $\pi(n) = n$, за n непарно и $\pi(n) \neq n$, за n парно.

4 парне, 5 непарних

$N = \cancel{9!}\ 4!$ фиксирају непарне

Непарне су на своm месту

Остаје да видимо шта је са парним цифрама; где су оне

$S_2: \pi(2)=2 \qquad S_4: \pi(4)=4 \qquad S_6: \pi(6)=6 \qquad S_8: \pi(8)=8$

$N(S_2' S_4' S_6' S_8') = N - N(S_2) - N(S_4) - \ldots$
$+ N(S_2 S_4) + \ldots$

И овде је штанце
$1234\ldots9$

$N(S_2) = 3! = N(1)$

$N(2) = 2!$

5 непарних фиксирано
+ 2 парне фиксирано

$N(3) = 1!$
5 непарних + 3 парне

$\underbrace{\_\ \ 2\ \ \_\ \_\ \_\ \ldots\ \_}$

непарне су на својим местима
+ 2 на свом месту

$N(4) = 1 \qquad 1234\ldots9$
све цифре опет фиксиране

$N(S_2' S_4' S_6' S_8') = \underbrace{4!}_{N} - \binom{4}{1}\underbrace{3!}_{N(1)} + \binom{4}{2}\underbrace{2!}_{N(2)} - \binom{4}{3}\underbrace{1!}_{N(3)} + \underbrace{1}_{N(4)}$

2. Колико има петоцифрених природних бројева који имају тачно две парне цифре?

1° прва цифра непарна

$\binom{4}{2}$ начина за избор позиција парних цифара

3 непарне + 2 парне $\rightarrow 5^5$

$\rightarrow$ 5 могућности $\rightarrow$ 5 могућности

2° прва цифра парна

4 начина за избор прве цифре

$\binom{4}{1}$ бирамо место за 2. парну цифру

3 непарне + 1 парну $\rightarrow 5^4$

$$\binom{4}{2}\cdot 5^5 + 4\cdot 4\cdot 5^4$$

4. Решити систем рекурентних релација

$$10a_n = 9a_{n-1} - 2b_{n-1}$$
$$5b_n = -a_{n-1} + 3b_{n-1}, \rightarrow a_{n-1} = 3b_{n-1} - 5b_n$$

ако је $a_0 = 4, b_0 = 3$.

$$10(3b_n - 5b_{n+1}) = 9(3b_{n-1} - 5b_n) - 2b_{n-1}$$

$$30b_n - 50b_{n+1} = 27b_{n-1} - 45b_n - 2b_{n-1}$$

$$50b_{n+1} - 75b_n + 25b_{n-1} = 0 \quad / :25$$

$$2b_{n+1} - 3b_n + b_{n-1} = 0$$

$$b_1 = \frac{-a_0 + 3b_0}{5} = \frac{-4+9}{5} = 1$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$(2t-1)(t-1) = 0$$

$$t_1 = 1 \quad t_2 = \frac{1}{2}$$

$$b_n = A + B\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

2. На колико начина се из стандардног шпила са 52 карте може извући 4 карте, тако да међу њима буду бар 2 карте са знаком треф?

1° 2 ♣

$$\binom{13}{2}\binom{39}{2}$$

2° 3 ♣

$$\binom{13}{3}\binom{39}{1}$$

3° 4 ♣

$$\binom{13}{4}\binom{39}{0}$$

69 667

$$\to \binom{13}{2}\binom{50}{2}$$

5. Neka je a_n, $n \geq 1$, broj reči dužine n nad azbukom $\{0, 1, 2\}$ koje ne sadrže podreč 22. Postaviti rekurentnu relaciju koja opisuje niz $\{a_n\}$.

→ немамо узастопне двојке

a_n – број тражених речи

1° $0\,\underbrace{\qquad\qquad}_{}$ ($n-1$) $\quad a_{n-1}$

2° $1\,\underbrace{\qquad\qquad}_{}$ ($n-1$) $\quad a_{n-1}$

3° $2\ {0 \atop 1}\,\underbrace{\qquad\qquad}_{}$ ($n-2$) $\quad 2 \cdot a_{n-2}$

20 ______________ a_{n-2}

21 ______________ a_{n-2} $\Big\}\ 2 \cdot a_{n-2}$

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 2 \cdot a_{n-2}$$

$a_1 = 3$

$a_2 = 8 \quad (= 3^2 - 1 = 9 - 1)$

00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, $\cancel{22}$

$a_0 = 1$ (празна реч нема подреч 22)

2.86. Колико има начина да се оформи комисија од 4 мушкарца и 6 жена ако у комисији треба да буду најмање два мушкарца и барем дупло више жена?

М → 2, 3, 4

1° 2М, 4Ж

2° 2М, 5Ж

3° 2М, 6Ж

4° 3М, 6Ж

~~4М → 8Ж~~

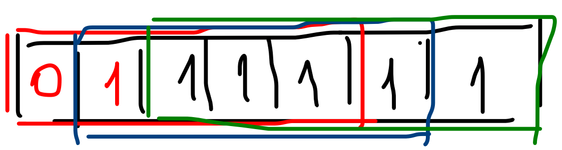
3. Koristeći princip uključenja-isključenja odrediti broj reči nad azbukom $\{0,1\}$ dužine 7 koje ne sadrže podreč 11111?

подреч дужине 5 $\qquad$ 2^7 укупно речи

Размишљање

S_1 – реч дужине 7 која има подреч 11111

$N(S_1') = N - N(S_1) = 2^7 - 3 \cdot 2^2$ ← не може бити овако



0,1 + $\boxed{}$

$3 \cdot 2^2$

00
01
10
11

↳ Проблем је што рецимо реч 1111111 рачунамо 3 пута, а треба само једанпут

4.31. Милица у касици има 10 новчића од 1 динар, 6 новчића од 2 динара, 5 новчића од 5 динара и 4 новчића од 10 динара. Под претпоставком да се новчићи са истом вредношћу не разликују, одредити на колико начина Милица може узети 8 новчића.

КОМБИНАЦИЈЕ СА ПОНАВЉАЊЕМ

$\rightarrow x_1 + x_2 + x_5 + x_{10} = 8$

$N = \binom{8+4-1}{4-1} = \binom{11}{3}$

$0 \le x_1 \le 10$ ✓

$0 \le x_2 \le 6 \rightarrow S_2 : x_2 \ge 7$

$0 \le x_5 \le 5 \rightarrow S_5 : x_5 \ge 6$

$0 \le x_{10} \le 4 \rightarrow S_{10} : x_{10} \ge 5$

$N(S_2' S_5' S_{10}') = N - N(S_2) - \dots$