GRANIČNE VREDNOSTI

Granične vrednosti nizova

Proizvoljno preslikavanje $a: N \to R$ zovemo realni niz, dok njegovu vrednost $a(n) = a_n$ nazivamo opšti ili n - ti član niza.

Broj a je granična vrednost realnog niza $\{a_n\}$ u R akko

$$(\forall \varepsilon \in R^+)(\exists n_0 \in N)(n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$$

odnosno, ako za svaki unapred dati pozitivan broj ε postoji prirodan broj $n_0(\varepsilon)$ počev od kog se svi članovi niza nalaze u ε okolini tačke a. Kažemo da niz $\{a_n\}$ konvergira ka broju a i pišemo $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$. To znači da se izvan svake ε okoline $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ nalazi samo konačno mnogo članova niza.

Tačka $a \in R$ je tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$ ako i samo ako se u svakoj ε okolini tačke a nalazi beskonačno mnogo članova niza.

Jedan niz može imati jednu ili više tačaka nagomilavanja, a može se desiti da nema nijednu tačku nagomilavanja. Granična vrednost niza je uvek tačka nagomilavanja niza, dok obrnuto ne važi.

Ako postoji realan broj G, takav da je $a_n \leq G,$ za svako $n \in N,$ onda se G naziva gornja granica (gornje ograničenje) niza $\{a_n\}$, i za taj niz kažemo da je ograničen sa gornje strane.

Ako postoji realan broj g takav da je $a_n \geq g,$ za svako $n \in N,$ onda se g naziva donja granica (donje ograničenje) niza $\{a_n\}$, i za taj niz kažemo da je ograničen sa donje strane. Ako je $g \leq a_n \leq G,$ za svako $n \in N,$ za niz kažemo da je ograničen.

Ako je niz $\{a_n\}$ ograničen sa gornje strane tada postoji najmanje gornje ograničenje M niza $\{a_n\}$ koje zovemo supremum niza ($M = \sup\{a_n\}$). Ako je niz $\{a_n\}$ ograničen sa donje strane tada postoji najveće donje ograničenje m niza $\{a_n\}$ koje zovemo infimum niza ($m = \inf\{a_n\}$).

Za realni niz $\{a_n\}$ kažemo da je:

a) monotono rastući, ako za svako $n \in N,$ važi $a_n < a_{n+1}$,

b) monotono opadajući, ako za svako $n \in N,$ važi $a_n > a_{n+1}$,

c) monotono neopadajući, ako za svako $n \in N,$ važi $a_n \leq a_{n+1}$,

d) monotono nerastući, ako za svako $n \in N,$ važi $a_n \geq a_{n+1}$.

Svaki monotono rastući (neopadajući) niz koji je ograničen sa gornje strane konvergira svom supremumu. Svaki monotono opadajući (nerastući) niz ograničen sa donje strane konvergira svom infimumu.

Ako je k fiksan prirodan broj, tada ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, sledi takođe da je i $\lim_{n\to\infty} a_{n+k} = a$.

U zadacima gde postoji $\lim_{x\to\infty} a_n = a$ i $f(x)$ je neprekidna funkcija u tački $x = a$ (definicija neprekidnosti funkcije data je kasnije) koristićemo činjenicu da je $\lim_{x\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{x\to\infty} a_n) = f(a)$. Ukoliko ne možemo da koristimo prethodnu činjenicu, to će biti napomenuto.

Neke osobine graničnih vrednosti nizova

Ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, tada je:

1) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b$,

2) $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$,

3) $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$,

4) Za $b_n \neq 0$ i $b \neq 0$ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$.

5) Ako je $a_n \leq b_n$ za $n \geq k$, $n \in N$ i neko $k \in N$ i ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ tada je $a \leq b$.

6) Ako su nizovi $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ i $\{c_n\}$ takvi da je $a_n \leq b_n \leq c_n$ za $n \geq k$ i $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$, tada je i $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_k}{b_0 n^m + b_1 n^{m-1} + \dots + b_n} = \begin{cases} 0, & m > k \\ \frac{a_0}{b_0}, & k = m \\ \pm\infty, & k > m \ (+\infty \ ako\ je\ a_0 > 0, -\infty\ ako\ je\ a_0 < 0) \end{cases}$$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ \infty, & q > 1 \end{cases}$$

Za $q = -1$ niz ima dve tačke nagomilavanja -1 i $+1$, pa je divergentan. Za $q < -1$ parni članovi teže ka ∞, a neparni ka $-\infty$ pa granična vrednost ne postoji.

- $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$, $\alpha \in R$, $a > 1$

- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0\,,\ a>1$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$

Osnovne jednakosti

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$$

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$2^2+4^2+\ldots+(2n)^2=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

$$1^2+3^2+\ldots+(2n+1)^2=\frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$$

Izračunati sledeće granične vrednosti:

1. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+4}{3n^3+5n^2+1}=0$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+4}{3n^3+5n^2+1}=\frac{2}{3}$

   c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^7-3n^4+8n^2-10}{6n^6-1}=\infty$

2. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+1}{5n^2+1}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{1}{n^2}}{5+\frac{1}{n^2}}\right)^{2n}=\text{"}\left(\frac{2}{5}\right)^{\infty}\text{"}=0$$

3. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3+2}{5n^3}\right)^{n^3}=\text{"}1^{\infty}\text{"}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{5n^3}\right)^{n^3}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{5n^3}{2}}\right)^{\frac{5n^3}{2}\cdot\frac{2}{5}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{5}}=e^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{e^2}$$

4. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1+2}{2n+1}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n+1}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{2}}\right)^{2n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{2}}\right)^{\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{2}{2n+1}\cdot 2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{2}}\right)^{\frac{2n+1}{2}}\right)^{\frac{4n}{2n+1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{2n+1}}=e^2$$

Napomena:

Ako tražimo graničnu vrednost niza $((1+\frac{1}{a_n})^{a_n})^{b_n}$, pri čemu je $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{a_n})^{a_n}=e$ i $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ ($a\in R$, a može da bude i $+\infty$, odnosno $-\infty$), tada pišemo da je $\lim\limits_{n\to\infty}((1+\frac{1}{a_n})^{a_n})^{b_n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=e^b$.

5. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\ldots+n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}}{n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}$$

6. $$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+5^{n+1}}{3^n-5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}+1\right)}{5^n\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n-1\right)}=\lim_{n\to\infty}5\cdot\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}+1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n-1}=-5$$

7. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1(1+1)+2(2+1)+\ldots+n(n+1)}{n^3}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2+1+2+\ldots+n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}}{n^3}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n^2+3n+1)+3(n^2+n)}{6n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+6n^2+4n}{6n^3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

8. $$\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+n}-n+n\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)-\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(\sqrt[3]{n^3+n}-n)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n}-\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(\sqrt[3]{n^3+n}-n\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{(n^3+n)^2}+n\sqrt[3]{n^3+n}+n^2}{\sqrt[3]{(n^3+n)^2}+n\sqrt[3]{n^3+n}+n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}-\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{n^3+n-n^3}{\sqrt[3]{(n^3+n)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+n}+n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}-\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt[3]{(n^3+n)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+n}+n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n^2})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)!+(n+1)!}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)!+(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+n^2+n}{n^2+n}=1$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3+2}{5n^3}\right)^{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{5n^3}\right)^{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{5n^3}{2}}\right)^{\frac{5n^3}{2}\cdot\frac{2}{5n^3}\cdot\sqrt{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{5n^3}}=e^0=1$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n}-(n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}}}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{n}}}}=1$$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi+n\pi\right)\right]^2=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sin\left(\pi\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\right)\cdot\cos(n\pi)+\cos\left(\pi\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\right)\cdot\sin(n\pi)\right]^2=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[(-1)^n\sin\left(\pi\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\right)\right]^2=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{\pi(n^2+n-n^2)}{\sqrt{n^2+n}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{\pi n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \dfrac{\pi}{2}$ i kako je funkcija $y=\sin^2 x$ neprekidna za svako x, to je

$$\lim_{n\to\infty} \sin^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\right) = \sin^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1.$$

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+n} - n\pi + n\pi\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\sin\left(\pi\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\right)\cdot \cos n\pi + \cos\left(\pi\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\right)\cdot \sin n\pi\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \sin\left(\pi\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\right) = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \sin\left(\pi\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \sin \frac{\pi(n^2+n-n^2)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \sin \frac{\pi\cdot n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \sin \frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n = 1$ za $n=2k,\ \ k\in N$ i $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n = -1$ za $n=2k-1,\ \ k\in N$ sledi da niz $(-1)^n$ nema graničnu vrednost, tj. nije konvergentan.

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} \sin \dfrac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \sin \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \sin \dfrac{\pi}{2} = 1$, zaključujemo da

$\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \sin \dfrac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$ ne postoji.

Napomena:

Ovde nismo mogli da za $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \sin \dfrac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$ primenimo pravilo da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ jer $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ ne postoji.

14. U zavisnosti od realnog parametra a diskutovati graničnu vrednost niza sa opštim članom $a_n = \left(\dfrac{n^2-2n+1}{n^2-n+2}\right)^{\frac{n^2-n+2}{an^2+(a-1)n-1}}$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-2n+1}{n^2-n+2}\right)^{\frac{n^2-n+2}{an^2+(a-1)n-1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-n+2-n-1}{n^2-n+2}\right)^{\frac{n^2-n+2}{an^2+(a-1)n-1}} =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{n^2-n+2}{n+1}}\right)^{-\frac{n^2-n+2}{n+1}\cdot\left(-\frac{n+1}{n^2-n+2}\right)\cdot\frac{n^2-n+2}{an^2+(a-1)n-1}}=e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{an^2+(a-1)n-1}}$$

Ako je $a=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{-n-1}} = e$.

Ako je $a\neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^0 = 1$.

☺