Optimizacija uz ograničenja tipa nejednakosti, uvođenje dodatne promenljive metod smene, ograničene varijacije, Lagranževih množitelja

Zoran D. Jeličić
Mirna N. Kapetina
30. oktobar 2020.

1 Uvodna razmatranja

U okviru ovog poglavlja razmatraćemo jedan opštiji slučaj optimizacije funkcije više promenljivih, kada su ograničenja data u vidu nejednakosti. Cilj nam je da nađemo optimalnu vrednost funkcije

$$y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ , \tag{1}$$

pod uslovom da su promenljive stanja x_i međusobno ograničene skupom nejednakosti

$$g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0 \quad \text{za} \quad k = 1, 2, \ldots, m\ . \tag{2}$$

U ovom slučaju odnos broja ograničenja m i broja promenljivih stanja n je potpuno proizvoljan, odnosno ne postoji matemtički ni logički zahtev koji nameće da je $m < n$, kao kod ograničenja tipa jednakosti.

U svim našim daljim razmatranjima, osim u uvodnom primeru, sva ograničenja moraju da budu u formi ≤ 0. Kao što ćete i videti svi algoritmi za rešavanje problema nejednakosti, strogo zahtevaju ovakvu relaciju.

Važno je istaći da u rešavanju optimizacionog problema postoje samo dva moguća scenarija: prvi rešenje je isto kao da ne postoje ograničenja tada strogo važe uslovi nejednakosti $g_k < 0$ ili se rešenje nalazi na granici, barem je jedno $g_k = 0$.

Najlakši način za rešavanje optimizacionih probelma sa ograničenjima tipa nejednakosti je da problem rešavamo slobodnom optimizacijom, a da zatim proverimo uslove iz ograničenja $g_k < 0$. Ako dobijeno rešenje ne zadovoljava barem jedno ograničenje onda rešenje tražimo na granici. Ovakav pristup je moguć samo u veoma jednostavnim slučajevima i jedan takav ćemo prikazati u nastavku.

Koncept da su rešenja ista kao da ne postoji ograničenje ili se rešnje nalazi na granici je opšti i ima svoju primenu u nelinarnom programiranju, linearnom programiranju, dinamičkoj optimizaciji... U slučaju statičke optimizacije, odnosno nelinearnog programiranja, isto rešenje kao da ne postoji ograničenje podrazumeva traženje nula prvog izvoda ili traženje prekida funkcije i/ili njenih izvoda. U tom slučaju kažemo da se rešenje nalazi unutar dozvoljene oblasti.

Primer 1. Slobodna optimizacije uz ograničenja tipa jednakosti

Zadat je kriterijum optimalnosti sa dve promenljive stanja

$$y(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 5x_2^2\ .$$

uz ograničenje

$$x_1 \geq 1 \,.$$

Ovaj problem je predstavljen na slici 1. Dalje rešenje tražimo u stacionarnim tačkama

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial x_1} &= 8x_1 = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} &= 10x_2 = 0 \,.\end{aligned}$$

Očigledno je da naš kandidat za ekstrem $x_1 = 0$ i $x_1 = 0$ ne zadovoljava ograničenje $x_1 \geq 1$ i onda se rešenje mora tražiti na samoj granici odnosno u tački $x_1 = 1$. Uzimajući u obzir ovu graničnu vrednost, kriterijum optimalnosti sada postaje

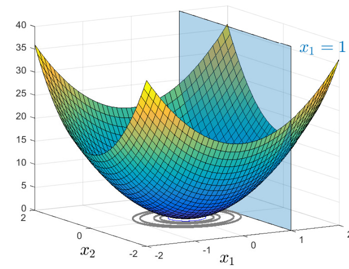
$$y(x_1, x_2) = 4 + 5x_2^2 \,,$$

a potrebni uslov ekstrema je

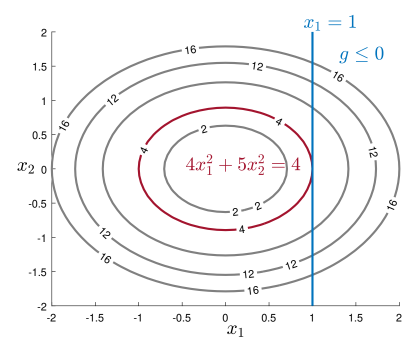
$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 10x_2 = 0$$

Konačno, tačka ekstrema je $x_1^* = 1$ i $x_2^* = 0$, vrednost kriterijuma optimalnosti $y(1,0) = 4$, a drugi izvod po promenljivoj x_2, $\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 10$ potvrđuje da se radi o minimumu. Grafički to je prikazano na slici 2.

Iz prethodnog primera se vidi da je rešavanje optimizacionih problema sa ograničenjima u dva koraka, slobodna optimizacija i provera ograničenja moguća u zaista jednostavnim primerima, da bi studija problema sa više promenljivih i ograničenja na ovaj način bila skopčana sa velikim poteškoćama. Namera nam je da u poglavljima, koja slede, postupak iznalaženja optimalnog rešenja uz prisustvo ograničenja tipa nejednakosti stavimo u formalniji oblik, gde je primena barem proceduralno pravolinijska.



Slika 1: Funkcije $y(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 5x_2^2$ i ograničenje $x_1 \geq 0$. Sa grafika se vidi da se minimum funkcije bez ograničenja nalazi u tački $(0, 0)$, da ta tačka ne zadovoljava nametnuto ograničenje, tada se rešenje traži na granici ograničenja, koje nije zadovljeno odnosno u tački $x_1^* = 1$ i $x_2^* = 0$.



Slika 2: Vrednosti funkcije $y(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 5x_2^2$ za različite vrednosti (x_1, x_2). Sa grafika se vidi da je vrednost minimuma funkcije bez ograničenja $y(0, 0) = 0$. Jasno se vidi da je najmanja dopustiva vrednost u $x_1^* = 1$ i $x_2^* = 0$ i da je tada $y(1, 0) = 4$.

1.1 *Uvođenje dodatne promenljive, svođenje nejednakosti na jednakost*

Osnovna ideja ovog postupka je da ograničenja tipa nejednakosti prevedemo u ograničenja tipa jednakosti i dalje rešavamo jednim od postupaka, koji su nam poznati iz prethodnog poglavlja. Cena ovog pristupa je povećanje dimenzionalnosti osnovnog problema, što u prisustvu velikog broja ograničenja zaista može da bude problem. Počećemo od ograničenja tipa nejednakosti u opštoj formi

$$g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0 \quad \text{za} \quad k = 1, 2, \ldots, m \tag{3}$$

Da bi ograničenje (3) preveli u jednakost moramo da uvedemo nenegativnu funkciju S_k na sledeći način

$$\Phi_k = g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) + S_k = 0 \quad \text{za} \quad k = 1, 2, \ldots, m\,, \tag{4}$$

očigledno je da dodatna funkcija ima sledeće osobine, za rešenje na granici $S_k = 0$, a za rešenje u dozvoljenoj oblasti $S_k > 0$. Da bi ova dodatna funkcija bila održiva i da ne bi menjala karakter optimizacionog problema, funkcija S_k mora da zavisi od novouvednih promenljivih , čiji broj odgovara broju ograničenja

Ove novouvedene promenljive suštinski ne utiču na studiju našeg optimizacionog problema i jedina namena im je da prevedu ograničenja nejednakosti u jednakosti, one se često nazivaju parazitske promenljive ili slabe promenljive (*Engl. slack*) jer sigurno nemaju značaj kao originalne varijable.

$$\Phi_k = g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) + S_k\left(x_{n+k}\right) = 0 \quad \text{za} \quad k = 1, 2, \ldots, m\,. \tag{5}$$

Bez dileme je najlogičnije da dodatne promenljive uvedemo u ograničenja kao kvadratne funkcije, čime bi obezbedili da su S_k nenegativne diferencijabilne funkcije

$$\Phi_k = g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) + x_{n+k}^2 = 0 \quad \text{za} \quad k = 1, 2, \ldots, m\,, \tag{6}$$

gde je očigledno da u graničnom slučaju $g_k = 0$ implicira $x_{n+k} = 0$, a rešenje unutar dozvoljene oblasti $g_k < 0$ znači da je $x_{n+k} \neq 0$.

Kao što smo u uvodu napomenuli, očevidno je da ovaj pristup povećava dimenzionalnost osnovnog problema, ali da se rešavanje svodi na dobro poznate postupke iz optimizacije ograničenja tipa jednakosti. U nastavku ćemo primenu metoda smene i ograničene varijacije ilustrovati isključivo kroz primere, a jedino ćemo metodu Lagranževih množitelja posvetiti pažnju i kroz teorijska razmatranja.

Primer 2. Metod smene, $x_1 \geq 1$

Primenom metoda smene naći ekstreme funkcije

$$y(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 5x_2^2\,.$$

uz ograničenje

$$x_1 \geq 1\,.$$

Formalizam uvođenja dodatnih promenljivih, nameće da ograničenje bude strogo u formi $g_k \leq 0$,

$$1 - x_1 \leq 0\,,$$

a zatim i da se nejednakost svede na jednakost

$$1 - x_1 + x_3^2 = 0\,.$$

Primenom metoda smene, možemo da eliminišemo promenljivu x_1 iz ograničenja i uvrstimo u kriterijum optimalnosti y

$$y = 4\left(1 + x_3^2\right)^2 + 5x_2^2\,.$$

Dalje rešavanje je u duhu optimizacije bez ograničenja

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial x_2} =&10x_2 \\ \frac{\partial y}{\partial x_3} =&16x_3\left(1+x_3^2\right) = 0 \; .\end{aligned}$$

Iz ovog sistema jednačina dobijamo $x_2^* = 0$ i $x_3^* = 0$, što znači i da je $x_1^* = 1$. Podsećamo da $x_3^* = 0$ implicira da se rešenje nalazi na granici, što je i očekivano iz studije samog problema. Dovoljni uslovi

$$\begin{aligned}D_1 =&10 \\ D_2 =&160 \; ,\end{aligned}$$

ukazuje da se radi o minimumu optimizacionog problema.

U nastavku ćemo razmotriti jedan sličan, ali suštinski potpuno različit problem.

Primer 3. Metod smene, $x_1 \leq 1$

Primenom metoda smene naći ekstreme funkcije

$$y(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 5x_2^2 \; .$$

uz ograničenje

$$x_1 \leq 1 \; .$$

Prevešćemo ovu nejednakost u jednakost, uvođenjem nove promenljive[1] x_4, pod znakom kvadrata u kriterijum optimalnosti

$$x_1 - 1 + x_4^2 = 0 \; .$$

Slično kao u prethodnom primeru, možemo da eliminišemo promenljivu x_1 iz ograničenja i uvrstimo u kriterijum optimalnosti y

$$y = 4\left(1 - x_4^2\right)^2 + 5x_2^2 \; .$$

Potrebni uslovi ekstrema sada daju

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial x_2} =&10x_2 \\ \frac{\partial y}{\partial x_4} =&-16x_4\left(1-x_4^2\right) = 0 \; .\end{aligned}$$

Iz ovog sistema jednačina dobijamo dva skupa mogućih rešenja $x_2^* = 0$ i $x_4^* = 0$, što znači i da je $x_1^* = 1$ ili $x_2^* = 0$ i $x_4^* \pm 1$, što znači i da je $x_1^* = 0$. Jasno je da se radi o dva suštinski različita rešenja, prvo rešenje implicira da je rešenje na granici $x_4^* = 0$, dok drugo rešenje podrazumeva stacionarnu tačku unutar oblasti $x_4^* \pm 1$. Radi

[1] Opredelili smo se za promenljivu x_4 umesto za očekivanu x_3 da bi izbegli moguću konfuziju sa prethodnim, veoma sličnim, problemom.

se o jednostavnom problemu i nemamo dileme da je rešenje unutar dozvoljene oblasti, međutim to treba i formalno dokazati, pa ćemo ispitati i dovoljne uslove

$$\begin{aligned} D_1 =& 10 \\ D_2 =& -160\left(1-3x_4^2\right)=0\ , \end{aligned}$$

koji upućuju na jedino moguće rešnje, odnosno minimum u tački $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$.

Primer 4. Metod ograničene varijacije

Metodom ograničene varijacije, želimo da nađemo ekstreme funkcije

$$y(x_1, x_2) = x_2^2 - 2x_1 - x_1^2\ .$$

Uz ograničenje

$$g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0\ .$$

Nastavljamo transformacijom nejednakosti u jednakost

$$\Phi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0\ .$$

Pod uslovom da je $J\left(\frac{\phi}{x_1}\right) \neq 0$, odnosno $x_1 \neq 0$, potrebni uslovi ekstrema su

$$J_2\left(\frac{y, \Phi}{x_2, x_1}\right) = 0 \quad \text{i} \quad J_3\left(\frac{y, \Phi}{x_3, x_1}\right) = 0\ .$$

Odnosno,

$$J_2\left(\frac{y, \Phi}{x_2, x_1}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_2} & \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x_2 & -2-2x_1 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{vmatrix} = 0\ .$$

Dalje je

$$4x_1x_2 + 2x_2\left(2+2x_1\right) = 0\ ,$$

ili

$$x_2\left(1+2x_1\right) = 0\ .$$

Iz drugog Jakobijana izračunavamo

$$J_2\left(\frac{y, \Phi}{x_3, x_1}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_3} & \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} & \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2-2x_1 \\ 2x_3 & 2x_1 \end{vmatrix} = 0\ ,$$

odnosno [2]

$$4x_3\left(1+x_1\right) = 0\ .$$

Rešavanjem sistema jednačina dobijenih iz Jakobijana i samog ograničenja tipa jednakosti $\Phi = 0$ dobijamo sledeći skup rešenja.

[2] Deo Jakobijana gde se traži parcijalni izvod kriterijuma optimalnosti po parazitskim promenljivima uvek će imati vrednost nula $\frac{\partial y}{\partial x_{n+k}} = 0$.

Stacionarne tačke	A	B	C	D
x_1	1	-1	-0.5	-0.5
x_2	0	0	0.866	-0.866
x_3	0	0	0	0
y	-3	1	1.5	1.5
karakter	Minimum	Prevoj	Maksimum	Maksimum

Tabela 1: Rešenje problema ograničene varijacije, karakter stacionarnih tačaka smo procenili samo na osnovu vrednosti funckije y

1.2 *Ograničenja tipa nejednakosti, metod Lagranževih, možitelja*

Slično kao u prethodnom poglavlju, metod Lagranževih množitelja ćemo predstaviti po koracima, koji objašnjavaju implementaciju ovog postupka.

Pod pretpostavkom da su funkcije (1) i (2) diferencijabilne do reda koji nam je potreban, iznalaženje potrebnih uslova da funkcija (1) ima ekstrem pod ograničenjima (2) sprovodi se u sledećoj proceduri

1. Ograničenja tipa nejednakosti (2) uvođenjem dodatnih promenljivih pod znakom kvadrata x_{n+k}^2 prevodimo u ograničenje tipa jednakosti

$$\Phi_k = g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) + x_{n+k}^2 = 0 \quad \text{za} \quad k = 1, 2, \ldots, m\,, \tag{7}$$

   time povećavamo dimenzionalnost problema na $n + m$, odnosno uz Lagranževe množitelje na $n + 2m$ što naravno povećava broj jednačina koje rešavamo.

2. Formirati prošireni kriterijum optimalnosti F u formi Lagranžijana

$$F = y(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \left(g_k + x_{n+k}^2 \right)\,, \tag{8}$$

   Dalje se rešavanje odvija u duhu optimizacije bez ograničenja, odnosno tražimo da je prvi izvod po svim promenljivima jednak nuli, što bi bio drugi, treći i četvrti korak ovog postupka.

3. Parcijalni izvodi po svim originalnim promenljivima da su jednaki nuli

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial y(x_i)}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k(x_i)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{za} \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{9}$$

   Iz sistema jednačina (9) možemo izračunati n promenljvih, ali kako je cena uopštenja kriterijuma optimalnosti povećanje dimenzionalnosti na $n + 2m$, nedostajućih $2m$ jednačina odredićemo iz uslova da su parcijalni izvodi po parazitskim promenljivima x_{n+k} i Lagranževim množiteljima jednaki nuli, što je potpuno u duhu ove teorije, koja sve promenljive tretira na isti način, tj.

4. Parcijalni izvod po svim novouvedenim promenljivima x_{n+k} da su jednaki nuli

$$\frac{\partial F}{\partial x_{n+k}} = 2\lambda_k x_{n+k} = 0 \quad \text{za} \quad k = 1, 2, \dots, m \,. \tag{10}$$

Jednačina $\lambda_k x_{n+k} = 0$ se očigledno uvek javlja u ovom koraku i zbog jednostavne strukture logično je započeti traženje potrebnog uslova ekstrema baš od ove jednačine. Moguća su tri rešenja:

(a) $\lambda_k = 0$ i $x_{n+k} \neq 0$
Iz (7) logično sledi da je rešnje u oblasti $g_k = -x_{n+k} < 0$.

(b) $\lambda_k \neq 0$ i $x_{n+k} = 0$
Iz (7) sledi da je rešnje na granici $g_k = 0$.

(c) $\lambda_k = 0$ i $x_{n+k} = 0$
Iz (7) sledi da je rešnje na granici $g_k = 0$.

5. Parcijalni izvodi po Lagranževim množiteljima da su jednaki nuli

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_k} = g_k(x_i) + x_{n+k}^2 = 0 \quad \text{za} \quad k = 1, 2, \dots, m \quad \text{za} \quad i = 1, 2, \dots, n \,. \tag{11}$$

Odnosno jednačine ograničenja (7).

6. Potrebni uslovi ekstrema se dobijaju rešavanjem sistema (9) - (11) uz proveru, da li sva dobijena rešenja zadovoljavaju ograničenja (2).

7. Dovoljni uslovi se proveravaju isto kao kod ograničenja tipa jednakosti, vodeći računa o povećanoj dimenzionalnosti zbog prisustva dodatnih promenljivih x_{n+k}.

Izloženi algoritam ilustrovaćemo na primeru.

Primer 5. Metod Lagranževih množitelja, ograničenja tipa nejednakosti

Metodom Lagranževih množitelja, želimo da nađemo ekstreme funkcije

$$y(x_1, x_2) = x_2^2 - 2x_1 - x_1^2 \,.$$

Uz ograničenje

$$g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \,.$$

Prvi korak je transformacija nejednakosti u jednakost

$$\Phi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0 \,.$$

Nastavljamo formiranjem Lagranžijana

$$F = x_2^2 - 2x_1 - x_1^2 = \lambda \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \right) \,.$$

Potrebni uslovi ekstrema se dobijaju parcijalnim izvodom Lagranževe funkcije kako po originalnim promenljivima:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_1} &= -2 - 2x_1 + 2\lambda x_1 = 0 \quad \text{ili} \quad 1 + x_1 - \lambda x_1 = 0\\ \frac{\partial F}{\partial x_2} &= 2x_2 + 2\lambda x_2 = 0 \quad \text{ili} \quad x_2\,(1+\lambda) = 0\ ,\end{aligned}$$

tako i po dopunskoj promnljivi x_3:

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} = 2\lambda x_3 = 0\ .$$

Rešavanjem sistema jednačina i ograničenja Φ, dobijamo sledeći (očekivani) skup rešenja

Stacionarne tačke	A	B	C	D
x_1	1	-1	-0.5	-0.5
x_2	0	0	0.866	-0.866
x_3	0	0	0	0
λ	2	0	-1	-1
y	-3	1	1.5	1.5
karakter	Minimum	Prevoj	Maksimum	Maksimum

Tabela 2: Rešenje problema metodom Lagranževih množitelja. **Interesantna je korelacija između karaktera stacionarnih tačaka i znaka Lagranževog množitelja, za pozitivne vrednosti λ stacionarna tačka je minimum, za negativne maksimum za vrednost nula prevojna tačka**. Ovu činjenicu ovde napomninjemo, ona ne predstavlja dovoljan uslov ekstrema, ali je osnov za sledeće poglavlje gde ćemo tu činjenicu i zakonomernost zaista i formalizovati.