MATRICE, DETERMINANTE I SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

16. septembar 2020

Matrice

Neformalno, ***matrica*** A ***formata*** $m \times n$ nad skupom realnih brojeva je „pravougaoni blok” realnih brojeva, tj.

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

gde je $a_{i,j} \in \mathbb{R}$. Dakle, element $a_{i,j}$ se nalazi u i-toj vrsti i j-toj koloni. Matrica je ***kvadratna*** ako je $m = n$.

✎ Sa $A = [a_{i,j}]_{m\times n}$ ćemo označavati matricu A formata $m \times n$ čiji su elementi $a_{i,j}$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

✎ ***Nula-matrica*** formata $m \times n$ je matrica čiji su svi elementi nule. Označavaćemo je sa $\mathbb{O}$, odnosno sa $\mathbb{O}_{m\times n}$ ako je potrebno naglasiti kog je formata, tj. u slučajevima kada to nije iz konteksta jasno. Na primer, $\mathbb{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ je nula-matrica formata 2×3.

✎ ***Jedinična matrica*** je kvadratna matrica formata $n \times n$ čiji su svi elementi na glavnoj dijagonali jedinice, a ostali elementi su nule. Označavaćemo je sa I, a takođe je uobičajena i oznaka E, odnosno sa $I_{n\times n}$ ako je potrebno naglasiti kog je formata, tj. u slučajevima kada to nije iz konteksta jasno. Na primer, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ je jedinična matrica formata 2×2.

Slede definicije, ilustrovane primerima, osnovnih računskih operacija sa matricama. U svim navedenim primerima, neka je

$$X = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} -6 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

1. ***Transponovana matrica*** matrice $A = [a_{i,j}]_{m\times n}$ je matrica $A^T = [a_{j,i}]_{n\times m}$, tj. matrica dobijena od A tako što svaka i-ta vrsta matrice A postaje i-ta kolona matrice A^T. Tako je na primer

$$X^T = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad Y^T = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad Z^T = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 3 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

2. Matrica se skalarom (iz istog polja iz kojeg su elementi matrice) množi tako što se svaki element matrice pomnoži tim skalarom. Za matricu $A = [a_{i,j}]_{m\times n}$ i skalar λ je proizvod skalara λ i matrice A matrica $C = [c_{i,j}]_{m\times n} = \lambda \cdot A$ (takođe formata $m \times n$) gde su elementi matrice $C = [c_{i,j}]_{m\times n}$ definisani sa

$$\forall i \in \{1,\dots,m\},\ \forall j \in \{1,\dots,n\}, \quad c_{i,j} = \lambda \cdot a_{i,j}.$$

Tako je na primer

$$2X = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 10 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}, \quad -3X = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 3 & -15 \\ -12 & -9 \end{bmatrix}, \quad -X = (-1)X = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

3. Matrice se mogu sabirati samo ako su istog formata. Za matrice $A = [a_{i,j}]_{m\times n}$ i $B = [b_{i,j}]_{m\times n}$, njihov zbir je matrica $C = [c_{i,j}]_{m\times n}$ (takođe formata $m \times n$) čiji su elementi jednaki zbiru elemenata matrica A i B sa odgovarajućih pozicija, tj. $A + B = C$ gde su elementi matrice $C = [c_{i,j}]_{m\times n}$ definisani sa

$$\forall i \in \{1,\dots,m\},\ \forall j \in \{1,\dots,n\}, \quad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

Od gore navedenih matrica X, Y, Z u U, sabirati se mogu samo matrica Z sa matricom U, matrica Y sa matricom W, kao i svaka matrica sa samom sobom. Tako je na primer

$$Z + U = U + Z = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -2 & 4 & 13 \end{bmatrix}, \quad X + X = 2X = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 10 \\ 8 & 6 \end{bmatrix},$$

a npr. za $\mathbb{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ je $Z + \mathbb{O} = \mathbb{O} + Z = Z$.

4. Razlika matrica $A = [a_{i,j}]_{m\times n}$ i $B = [b_{i,j}]_{m\times n}$ je zbir matrica A i $-B = [-b_{i,j}]_{m\times n}$, tj. $A - B = A + (-1) \cdot B = [a_{i,j} - b_{i,j}]_{m\times n}$. Oduzimati se mogu samo matrice istog formata. Tako je na primer

$$Z - U = \begin{bmatrix} -10 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad U - Z = \begin{bmatrix} 10 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

5. Matrice se mogu množiti samo ako je broj kolona prve matrice jednak broju vrsta druge matrice. Za matrice $A = [a_{i,j}]_{m\times k}$ i $B = [b_{i,j}]_{k\times n}$, njihov proizvod je matrica $C = [c_{i,j}]_{m\times n} = A \cdot B$ (broj vrsta je jednak broju vrsta prve matrice, a broj kolona je jednak broju kolona druge) čiji je svaki element $c_{i,j}$ jednak „proizvodu

i-te vrste matrice A i j-te kolone matrice B, tj. $A \cdot B = C$ gde su elementi matrice $C = [c_{i,j}]_{m\times n}$ definisani sa

$$\forall i \in \{1,\dots,m\},\ \forall j \in \{1,\dots,n\}, \quad c_{i,j} = \sum_{l=1}^{k} a_{i,l} \cdot b_{l,j}.$$

Slikovito rečeno, element $c_{i,j}$ matrice C (element u i-toj vrsti i j-toj koloni) se dobija tako što se „i-ta vrsta matrice A pomnoži sa j-tom vrstom matrice B", tj. elementi i-te vrste matrice A se redom pomnože sa elementima j-te vrste matrice B i zatim se svi dobijeni proizvodi saberu. Za gore navedene matrice postoje proizvodi $X \cdot Y$, $X \cdot Z$, $X \cdot U$, $X \cdot W$, $Y \cdot Y$, $Y \cdot Z$, $Y \cdot U$, $Y \cdot W$, $Z \cdot X$, $U \cdot X$, $W \cdot Y$, $W \cdot Z$, $W \cdot U$, $W \cdot W$. Tako je na primer

$$X \cdot Y = \begin{bmatrix} -2 & -10 \\ 13 & -12 \\ 40 & 2 \end{bmatrix}, \quad X \cdot Z = \begin{bmatrix} 15 & 7 & 28 \\ 11 & 14 & 42 \\ -21 & 13 & 16 \end{bmatrix},$$

$$Y \cdot Y = \begin{bmatrix} 57 & 10 \\ 20 & 12 \end{bmatrix}, \quad Y \cdot Z = \begin{bmatrix} -40 & 13 & 2 \\ -26 & -2 & -24 \end{bmatrix}$$

$$Y \cdot W = \begin{bmatrix} -13 & -18 \\ 2 & -26 \end{bmatrix}, \quad W \cdot Y = \begin{bmatrix} -23 & 6 \\ -1 & -16 \end{bmatrix}.$$

Takođe, npr. za $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ imamo $I \cdot Y = Y \cdot I = Y$, $I \cdot Z = Z$, dok $Z \cdot I$ ne postoji.

Determinante

Sistemi linearnih jednačina

Zadaci za vežbanje

Zadatak 1

Zadatak 2

Zadatak 3 *Za matrice* $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, *rešiti po nepoznatoj X matričnu jednačinu*

$$AX + B = C - 2I.$$

Zadatak 4 *Za matrice* $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, *rešiti po nepoznatoj X matričnu jednačinu*

$$AX = B.$$

Zadatak 5

Zadatak 6

Rešenja zadataka

Rešenje zadatka 1:

☑

Rešenje zadatka 2:

☑

Rešenje zadatka 3: Iz $AX + B = C - 2I$ sledi

$$\begin{aligned} AX = C - 2I - B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

dakle

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

odakle zaključujemo da matrica X mora biti formata 2×2, dakle oblika $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ za $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. Matrična jednačina

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

je ekvivalentna sa

$$\begin{bmatrix} -x + 2z & -y + 2t \\ -x + 3z & -y + 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

što je ekvivalentno sa sistemom linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x & + & 2z & & & & & = & -3 \\ -x & + & 3z & & & & & = & 1 \\ & & & - & y & + & 2t & = & 4 \\ & & & - & y & + & 3t & = & 0 \end{array}$$

čije je rešenje $x = 11$, $z = 4$, $y = -12$, $t = -4$. Dakle, rešenje polazne matrične jednačine je

$$X = \begin{bmatrix} 11 & -12 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

☑

Rešenje zadatka 4: Iz $AX = B$, odnosno

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

sledi da je matrica X formata 3×2, dakle $X=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \\ u & v \end{bmatrix}$ za neke $x,y,z,t,u,v\in\mathbb{R}$. Matrična jednačina

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \\ u & v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

je ekvivalentna sa

$$\begin{bmatrix} -x+2z & -y+2t \\ -x+3z+u & -y+3t+v \\ -x+3z+2u & -y+3t+2v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

što je ekvivalentno sa sistemom linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcr} -x & + & 2z & & & & & & & & & = & 2 \\ -x & + & 3z & + & u & & & & & & & = & 2 \\ -x & + & 3z & + & 2u & & & & & & & = & 3 \\ & & & & & - & y & + & 2t & & & = & -2 \\ & & & & & - & y & + & 3t & + & v & = & 1 \\ & & & & & - & y & + & 3t & + & 2v & = & -1 \end{array}$$

čije je rešenje $x=-4$, $z=-1$, $u=1$, $y=12$, $t=5$, $v=-2$. Dakle, rešenje polazne matrične jednačine je

$$X=\begin{bmatrix} -4 & 12 \\ -1 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

☑

Rešenje zadatka 5:

☑

Rešenje zadatka 6:

☑