DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

15. septembar 2020

Matematičke jednačine i nejednačine mogu biti raznih tipova. Tip jednačine ili nejednačine zavisi od tipa konstanti koji se pojavljuju u njima (npr. celi brojevi, realni brojevi, vektori, matrice, funkcije, itd.), matematičkih operacija i transformacija koje se pojavljuju u njima (npr. sabiranje i množenje brojeva, sabiranje i množenje matrica, vektorske operacije, izvodi, intergrali i druge transformacije funkcija, itd.), kao i tipova promenljivih (npr. celi brojevi, realni brojevi, vektori, matrice, funkcije, itd.).

➥ ***Domen*** rešavanja jednačine ili nejednačine je skup iz kojeg uzimaju vrednosti promenljive. Elementi domena moraju biti takvi da je za svaku vrednost promenljive iz domena jednačina ili nejednačina tačna ili netačna.

➥ ***Skup rešenja*** neke jednačine ili nejednačine je skup $\mathcal{R}$ *svih* elemenata domena čijim se uvrštavanjem u jednačinu ili nejednačinu na mestu promenljive dobija tačna jednakost ili nejednakost. Jednačina (nejednačina) je ***kontradiktorna*** ako joj je skup rešenja prazan skup. Jednačina (nejednačina) je ***određena*** ako joj je skup rešenja sadrži tačno jedan element. Jednačina (nejednačina) je ***neodređena*** ako joj je skup rešenja sadrži više od jednog elementa.

☞ Skup rešenja jednačine (nejednačine) može biti i beskonačan, i može biti i jednak svom domenu.

☞ U zadacima, formulacija „rešiti jednačinu” (ili nejednačinu) znači „odrediti skup svih rešenja jednačine” (ili nejednačine). U nekim zadacima i problemima se eksplicitno naglašava da tražimo samo jedno, bilo koje rešenje, ili samo ona rešenja koja zadovoljavaju neke dodatne uslove i sl. Međutim, ako to nije tako eksplicitno naglašeno, podrazumeva se da treba odrediti skup svih rešenja.

☞ U zadacima, formulacija „odrediti domen rešavanja jednačine” (nejednačine) podrazumeva „odrediti maksimalan skup koji može biti domen rešavanja jednačine” (nejednačine).

☞ Sve prethodno važi i za sisteme jednačina i nejednačina, a to je neki konačan skup jednačina i nejednačina. Rešiti sistem jednačina (nejednačinu) znači odrediti skup svih elemenata domena rešavanja čijim uvrštavanjem u sistem dobijamo da su tačne sve jednačine (nejednačine) sistema.

Sledi nekoliko tipova jednačina.

- ***Algebarske jednačine*** su jednačine u kojima kao konstante i promenljive figurišu brojevi (prirodni, celi, realni, kompleksni, elementi nekog intervala realnih brojeva itd.) Npr. jednačina $x^2 - x - 6 = 0$ je algebarska jednačina koja na domenu $\mathcal{D} = \{5, 6, 7, \ldots\}$ nema rešenja (kontradiktorna je), na domenu $\mathcal{D} = [0, \infty)$ ili $\mathcal{D} = \mathbb{N}$ ima jedinstveno rešenje $x = 3$ (određena je), a na domenima $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ i $\mathcal{D} = \mathbb{C}$ ima skup rešenja $\mathcal{R} = \{-2, 3\}$.

- ***Matrične jednačine*** su jednačine u kojima kao konstante i promenljive figurišu matrice i matrične operacije. Npr. posmatrajmo matričnu jednačinu

  $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

  na domenu svih matrica $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ formata 2×2 čiji su elementi realni brojevi x i y. Ova matrična jednačina je ekvivalentna sa sistemom

  $$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 3 \\ 2x & + & 2y & = & 6 \end{array}$$

  od dve jednačine sa dve promenljive nad skupom (domenom) realnih brojeva, te je skup rešenja gornje matrične jednačine beskonačan skup (jednačina je neodređena) $\mathcal{R} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 - \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.

- ***Vektorske jednačine*** su jednačine u kojima kao konstante i promenljive figurišu vektori, skalari (realni brojevi) i vektorske operacije. Npr. posmatrajmo vektorsku jednačinu

  $$(2, -1, 4) \cdot \vec{n} = 0$$

  na domenu svih vektora $\vec{n} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ čije su koordinate realni brojevi x, y i z. Ova vektorska jednačina je ekvivalentna sa algebarskom jednačinom

  $$2x - y + 4z = 0$$

  sa tri promenljive nad skupom (domenom) realnih brojeva, te je skup rešenja gornje vektorske jednačine beskonačan skup vektora (jednačina je neodređena) $\mathcal{R} = \left\{ \left(\frac{1}{2}\beta - 2\alpha, \beta, \alpha \right) \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$.

- ***Funkcionalne jednačine*** su jednačine u kojima kao konstante i promenljive figurišu funkcije i konstante kompatibilne sa operacijama koje se u jednačini pojavljuju, kao i operacije i transformacije definisane na funkcijama. Npr.

  $$[*] \qquad \sin^2 x + 2\cos(f(x)) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

  je jedna funkcionalna jednačina sa promenljivom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Rešiti ovu jednačinu znači naći sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koje je jednakost $[*]$ tačna za svako $x \in \mathbb{R}$.

Diferencijalne jednačine su specijalna vrsta funkcionalnih jednačina.

Definicija 1 ***Diferencijalne jednačine*** *su funkcionalne jednačine u koima se osim funkcija, nepoznate funkcije i osnovnih operacija sa funkcijama pojavljuju i izvodi nepoznate funkcije. Diferencijalna jednačina je reda $n \in \mathbb{N}$ ako je n-ti izvod nepoznate funkcije najveći njen izvod koji se pojavljuje u diferencijalnoj jednačini.*

Primer 1 *Sledi nekoliko primera diferencijalnih jednačina.*

(a) $\dfrac{f''(x) + 5f'(\sin(x))}{x^2 \cdot f'(x) + 3} + f(3x+5) = \left(f'''(x)\right)^2 \cdot f(x)$
je diferencijalna jednačina reda 3.

(b) $2f^{(V)}(x) + \sin^2 x f^{(IV)}(x) - x^2 \cdot f''(x) + (\sin x - x) f(x) = \sqrt[3]{3x-2} + \ln x$
je diferencijalna jednačina reda 5.

(c) $2f^{(IV)}(x) + 5f'''(x) - \dfrac{1}{2} f''(x) + \sqrt{5} f'(x) - f(x) = (3x-2)e^{2x}$
je diferencijalna jednačina reda 4.

(d) $f'(x) = (3x-2)e^{2x}$
je diferencijalna jednačina reda 1. ✔

Primer 2 *Posmatrajmo diferencijalu jednačinu*

$$\sin x \cdot f''(x) - 2\cos x \cdot f'(x) = -x\left(1 + \cos^2 x\right),$$

i ispitajmo koje su od sledećih funkcija njena rešenja.

(a) $f_1(x) = e^{2x} + 1.$

(b) $f_2(x) = \sin x.$

(c) $f_3(x) = x \cdot \sin x + 2.$

(d) $f_4(x) = x \cdot \sin x - 7.$

Proveru da li je neka funkcija rešenje diferencijalne jednačine vršimo direktnim uvrštavanjem funkcije i njenih izvoda u jednačinu.

(a) *Uvrštavanjem*

$f_1(x) = e^{2x} + 1,$

$f_1'(x) = 2e^{2x},$

$f_1''(x) = 4e^{2x},$

u jednačinu dobijamo da je

$$\begin{aligned}
&\sin x \cdot f_1''(x) - 2\cos x \cdot f_1'(x) \\
&\quad = 4\sin x \cdot e^{2x} - 4\cos x \cdot e^{2x} \\
&\quad = 4e^{2x}(\sin x - \cos x).
\end{aligned}$$

Međutim, jednakost

$4e^{2x}(\sin x - \cos x) = -x\left(1 + \cos^2 x\right)$

nije tačna za svako $x \in \mathbb{R}$. *Na primer, za* $x = 0$ *dobijamo*

$$\begin{aligned} &4e^{2x}(\sin x - \cos x) = -x\left(1 + \cos^2 x\right) \\ \Leftrightarrow \quad &4e^{2\cdot 0}(\sin 0 - \cos 0) = -0 \cdot \left(1 + \cos^2 0\right) \\ \Leftrightarrow \quad &4 \cdot 1 \cdot (0 - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad &-4 = 0 \end{aligned}$$

što je netačno. Dakle, funkcija f_1 *nije rešenje posmatrane diferencijalne jednačine.*

(b) *Uvrštavanjem*

$f_2(x) = \sin x,$

$f_2'(x) = \cos x,$

$f_2''(x) = -\sin x,$

u jednačinu dobijamo da je

$$\begin{aligned} &\sin x \cdot f_2''(x) - 2\cos x \cdot f_2'(x) \\ &\quad = -\sin^2 x - 2\cos^2 x = -\left(\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + \cos^2 x\right) = -\left(1 + \cos^2 x\right) \end{aligned}$$

Međutim, jednakost

$-\left(1 + \cos^2 x\right) = -x\left(1 + \cos^2 x\right)$

nije tačna za svako $x \in \mathbb{R}$. *Na primer, za* $x = \dfrac{\pi}{2}$ *dobijamo*

$$\begin{aligned} &-\left(1 + \cos^2 \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}\left(1 + \cos^2 \frac{\pi}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \quad &-(1 + 0) = -\frac{\pi}{2}(1 + 0) \\ \Leftrightarrow \quad &-1 = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

što je netačno. Dakle, funkcija f_2 *nije rešenje posmatrane diferencijalne jednačine.*

(c) *Uvrštavanjem*

$f_3(x) = x \cdot \sin x + 2,$

$f_3'(x) = \sin x + x \cdot \cos x,$

$f_3''(x) = 2\cos x - x \cdot \sin x,$

u jednačinu dobijamo da je

$$\begin{aligned} &\sin x \cdot f_3''(x) - 2\cos x \cdot f_3'(x) \\ &\quad = \sin x(2\cos x - x \cdot \sin x) - 2\cos x(\sin x + x \cdot \cos x) \\ &\quad = 2\sin x \cdot \cos x - x \cdot \sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x - 2x \cdot \cos^2 x \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -x \cdot \sin^2 x - 2x \cdot \cos^2 x \\
&= -x\left(\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + \cos^2 x\right) \\
&= -x\left(1 + \cos^2 x\right),
\end{aligned}
$$

za svako $x \in \mathbb{R}$. *Dakle, funkcija* f_3 *jeste rešenje posmatrane diferencijalne jednačine.*

(d) *Na potpuno isti način kao za funkciju* f_3 *pod* (c) *se proverom utvrđuje da i funkcija* f_4 *jeste rešenje posmatrane diferencijalne jednačine.* ✔

Po pravilu, diferencijalna jednačina ima beskonačno mnogo rešenja, kao i integral funkcije. Ako se uz diferencijalnu jednačinu posmatraju još i neki dodatni uslovi koje funkcija treba da zadovoljava, tada se može dobiti jedno rešenje diferencijalne jednačine koje zadovoljava te dodatne uslove.

Definicija 2 ***Opšte rešenje*** *diferencijalne jednačine je skup svih njenih rešenja.* ***Partikularno rešenje*** *diferencijalne jednačine je svaka funkcija koja je rešenje diferencijalne jednačine, tj. svaki element opšteg rešenja. Za neku diferencijalnu jednačinu n-tog reda, dodatni uslovi oblika*

$$f(x_0) = y_0, \quad f'(x_1) = y_1, \quad f''(x_2) = y_2, \quad \ldots \quad f^{(n-1)}(x_{n-1}) = y_{n-1}$$

se nazivaju ***početni uslovi****, a diferencijalna jednačina zajedno sa početnim uslovima se naziva* ***početni problem****.*

Primer 3 *Poznato je da je brzina raspadanja radijuma proporcionalna količini radijuma u posmatranom trenutku, sa koeficijentom proporcije* 2. *Neka je u trenutku* t_0 *bilo* R_0 *grama radijuma. Odredimo količinu radijuma u proizvoljnom trenutku t.*

Neka je $R(t)$ *količina radijuma u trenutku t, i neka je* $v(t)$ *brzina raspadanja radijuma* $R(t)$ *u trenutku t. Brzina raspadanja radijuma* $R(t)$ *u trenutku t je*

$$v(t) = \frac{dR(t)}{dt}.$$

Kako je koeficijent proporcionalnosti brzine raspadanja i količine radijuma 2, *dobijamo*

$$-2R(t) = \frac{dR(t)}{dt}.$$

gde se na desnoj strani ove jednačine nalazi znak $-$ *zato što se vremenom količina radijuma* $R(t)$ *smanjuje (opadajuća je funkcija) te mora biti* $R'(t) = \dfrac{dR(t)}{dt} < 0$. *Problem se svodi na rešavanje jednacine*

$$-2R(t) = \frac{dR(t)}{dt}$$

odnosno

$$-2R(t) = R'(t),$$

tj. na određivanje funkcije $R(t)$ *koja predstavlja zavisnost R od t, i za koju važi početni uslov* $R(t_0) = R_0$.

Jednačina $-2R(t) = \dfrac{dR(t)}{dt}$ *se rešava množenjem njenih obeju strana sa* $\dfrac{dt}{R}$ *čime se dobija* $\dfrac{dR}{R} = -2dt$*, a nakon integracije obeju strana dobijamo*

$$\int \frac{dR}{R} = -2\int dt.$$

Rešavanjem integrala dobijamo

$$\ln R = -2t + c$$

odnosno

$$R = e^{-2t+c}.$$

Dakle, opšte rešenje posmatrane diferencijalne jednačine je

$$R(t) = e^{-2t+c},$$

i na osnovu njega treba da odredimo partikularno rešenje koje zadovoljava početni uslov $R(t_0) = R_0$*. Uvrštavanjem početnog uslova u opšte rešenje dobijamo*

$$R_0 = e^{-2t_0+c} \quad \Leftrightarrow \quad \ln R_0 = -2t_0 + c \quad \Leftrightarrow \quad c = \ln R_0 + 2t_0.$$

Dakle, rešenje početnog problema je

$$R(t) = e^{-2t+\ln R_0+2t_0} = R_0 e^{2(t_0-t)}.$$ ✔