Chapter 3

Stabla

3.1 Karakterizacija stabla

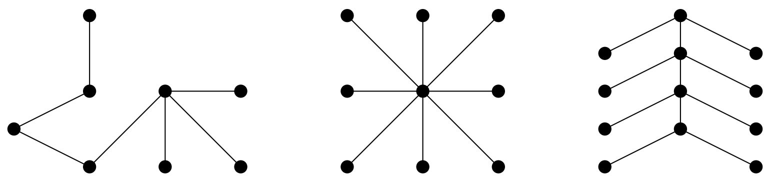
Za graf koji ne sadrži nijednu konturu, kažemo da je acikličan.

Definicija 113 *Za prost graf $G = (V, E)$ kažemo da je stablo ako važi:*

(i) G je povezan graf i

(ii) G je acikličan graf.

Na sledećoj slici su prikazana tri stabla.

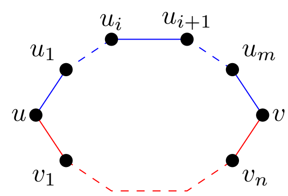


U nastavku ćemo dati niz ekvivalentnih tvrđenja koja karakterišu stablo.

Teorema 114 *Neka je $G = (V, E)$ i $|V| = n \geq 2$. Tada je G stablo ako i samo ako za svaka dva čvora $u, v \in V$ postoji jedinstven uv-put.*

Dokaz. Za $n = 2$ tvrđenje sledi direktno. Pretpostavićemo da je $n \geq 3$.
$(\Rightarrow)$

Pretpostavimo suprotno, da u stablu G postoje čvorovi u i v sa osobinom da između njih postoje dva različita uv-puta. Neka su to putevi U_1 i U_2, sa osobinom da $\{u_i, u_{i+1}\} \in U_1$, $\{u_i, u_{i+1}\} \notin U_2$:



$$U_1 = uu_1 \dots u_i u_{i+1} \dots u_m v$$
$$U_2 = uv_1 \dots v_n v$$

(ako su različiti putevi, onda postoji grana koja pripada jednom, a ne pripada drugom).
Ovde ćemo prikazati slučaj kada je $u, v \notin \{u_i, u_{i+1}\}$, ostali slučajevi se izvode slično. Sada je

$$u_i \dots u_1 u v_1 \dots v_n v u_m \dots u_{i+1}$$

$u_i u_{i+1}$-šetnja u grafu $G - \{u_i, u_{i+1}\}$. Ako u grafu $G - \{u_i, u_{i+1}\}$ postoji $u_i u_{i+1}$-šetnja, onda postoji i $u_i u_{i+1}$-put. Dodavanjem grane $u_i u_{i+1}$ dobijamo konturu u grafu G, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je G stablo.
($\Leftarrow$) Ako za svaka dva čvora $u, v \in V$ postoji uv-put, onda je G po definiciji povezan graf. Treba još pokazati da je G acikličan. Pretpostavimo suprotno, da u grafu G postoji kontura oblika

$$w_1 w_2 w_3 \dots w_l w_1.$$

Tada postoje bar dva puta od w_1 do w_l:

$$w_1 w_l \qquad\qquad w_1 w_2 w_3 \dots w_l$$

što je u kontradikciji sa pretpostavkom da za svaka dva čvora postoji jedinstven put od jednog do drugog. To znači da je naša pretpostavka netačna i da je G acikličan graf. $\square$

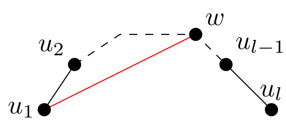
Lemma 115 *Neka je $G = (V, E)$ stablo i neka je $|V| = n \geq 2$. Tada postoje bar dva čvora stepena* 1.

Dokaz. Kako je G stablo, G je povezan graf. Pretpostavimo da je

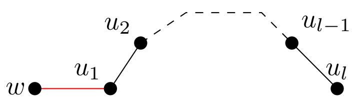
$$u_1 u_2 \dots u_l \tag{3.1}$$

najduži put u grafu G (može biti više takvih puteva iste dužine). Pokazaćemo da je tada $d_G(u_1) = d_G(u_l) = 1$. Pretpostavimo da je $d_G(u_1) \geq 2$ (slično za $d_G(u_l) \geq 2$). Tada postoji čvor w ($\neq u_2$)sa osobinom $u_1 w \in E$.

(i) Ako $w \in \{u_3, \dots, u_l\}$ onda G ima konturu, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je G stablo.



(ii) Ako $w \notin \{u_3, \ldots, u_l\}$, onda je put $wu_1u_2 \ldots u_l$ duži od (3.1), što dovodi do kontradikcije.



□

Lemma 116 *Neka je $G = (V, E)$, $|V| = n \geq 2$, i neka je $d_G(u) = 1$ za neki čvor $u \in V$. Tada je G stablo ako i samo ako je $G - u$ stablo.*

Dokaz. (⇒) Pretpostavimo da je G stablo. Da bismo pokazali da je $G - u$ stablo, treba pokazati sledeće: (i) $G - u$ je povezan; (ii) $G - u$ je acikličan.

(i) Posmatrajmo dva proizvoljna čvora $v, w \in V(G - u)$. Kako je G povezan, postoji vw-put u G. Ovaj put ne sadrži čvor stepena 1 koji je različit od v i w, što znači da ne sadrži u. Znači, taj put je ujedno i put u $G - u$, što pokazuje da je $G - u$ povezan.

(ii) Kako je G acikličan, to je i $G - u$ acikličan, zato što brisanjem grane iz acikličnog grafa ne možemo dobiti konturu.

(⇐) Neka je $G - u$ stablo. Od acikličnog grafa, dodavanjem nazad lista u ne možemo dobiti ciklus u tom grafu. Svaki čvor konture ima stepen bar dva, a čvor u je stepena 1. Svaka dva čvora koja su povezana u $G - u$ ostaju povezana i u G. Ostaje još da pokažemo da za postoji uw-put za svaki čvor $w \in V(G - u)$. Kako je $d_G(u) = 1$ postoji $v \in V(G - u)$ sa osobinom $\{u, v\} \in E(G)$. Iz pretpostavke da je $G - u$ stablo, sledi da je $G - u$ povezan graf, odakle za svako $w \in V(G - u)$ postoji wv-put u $G - u$. Dodavanjem grane $\{u, v\}$ tom putu, dobijamo put u G.
□

Teorema 117 *Neka je $G = (V, E)$ i $|V| = n \geq 2$. Tada je G stablo ako i samo ako je G povezan graf i $|E| = n - 1$.*

Dokaz. (⇒) Prema definiciji stabla, G je povezan graf. Indukcijom po n ćemo pokazati da je $|E| = n - 1$.
<u>Baza $n = 2$:</u> Stablo sa dva čvora ima tačno jednu granu.
<u>Induktivni korak $T_{n-1} \Rightarrow T_n$:</u> Ako je G stablo onda postoji čvor u sa osobinom $d_G(u) = 1$. Graf $G' = G - u$ ima osobinu

$$|V(G')| = |V(G)| - 1 = n - 1 \quad \text{i} \quad |E(G')| = |E(G)| - 1.$$

Ako je G stablo, onda je prema Lemi 116 G' stablo. Prema induktivnoj pretpostavci je $|E(G')| = n - 1$, a odatle je $|E(G)| = |E(G')| + 1 = n$.

($\Leftarrow$) Indukcijom po n.
Baza $n = 2$: Povezan graf sa dva čvora i jednom granom je stablo.
Induktivni korak $T_{n-1} \Rightarrow T_n$: Ako je $E(G) = V(G)-1$, onda prema Posledici 93 postoji čvor u sa osobinom $d_G(u) \leq 1$. Kako je G povezan, mora važiti $d_G(u) = 1$ i graf $G' - u$ je povezan graf sa osobinom $|V(G')| = |V(G)| - 1 = n$ i $|E(G')| = |E(G)| - 1 = n - 1$. Prema induktivnoj pretpostavci je sada $G' - u$ stablo. Prema Lemi 116, G je stablo. $\square$

Lemma 118 *Neka je $G = (V, E)$, gde je $|V| = n \geq 2$ i $|E| \geq n$. Neka su $V(G_1), \ldots V(G_l)$ komponente povezanosti grafa G sa $k_1, \ldots, k_l$ čvorova, respektivno. Tada postoji $i \in \{1, \ldots, l\}$ sa osobinom $|E(G_i)| \geq k_i$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da za svako $i \in \{1, \ldots, l\}$ važi $|E(G_i)| < k_i$. Tada je

$$n \leq |E(G)| = |E(G_1)| + \ldots + |E(G_l)| < k_1 + \ldots k_l = n \Leftrightarrow n < n$$

što dovodi do kontradikcije. $\square$

Teorema 119 *Neka je $G = (V, E)$, gde je $|V| = n \geq 2$ i $|E| \geq n$. Tada G sadrži konturu.*

Dokaz. Razmatramo dva slučaja.

(i) G je povezan: ako G nema konturu, onda je stablo $\Rightarrow$ G ima $n - 1$ grana.

(ii) G nije povezan: neka su $G_1, \ldots, G_l$ komponente povezanosti grafa G:

$$|V(G_1)| = k_1, \ldots, |V(G_l)| = k_l \qquad k_1 + \ldots + k_l = n.$$

Prema Lemi 118, postoji $i \in \{1, \ldots, l\}$ sa osobinom $|E(G_i)| \geq k_i$. Ako G_i nema konturu, onda je G_i stablo i ima $k_i - 1$ granu, što dovodi do kontradikcije. Znači, G_i ima konturu, a samim tim i G. $\square$

Teorema 120 *Neka je $G = (V, E)$ i $|V| = n \geq 2$. Tada je G stablo akko je G povezan i brisanjem proizvoljne grane se dobija nepovezan graf.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Ako je G stablo, onda je G po definiciji povezan graf. Neka je $\{u, v\} \in E$ proizvoljna grana. Ako pretpostavimo da je $G - \{u, v\}$ povezan,

onda postoji uv-put i dodavanjem grane uv bismo dobili konturu u G, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je G acikličan.
($\Leftarrow$) Ako je G povezan i brisanjem proizvoljne grane se dobija nepovezan graf, onda treba pokazati da je G acikličan. Pretpostavimo da je G povezan i sadrži konturu C. Tada za svaku granu $uv \in C$ sledi da je $G - \{u, v\}$ povezan, što je u suprotnosti sa pretpostavkom. □

Teorema 121 *Neka je $G = (V, E)$ i $|V| = n \geq 2$. Tada je G stablo akko je G acikličan i dodavanjem grane se dobija graf koji sadrži konturu.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Ako je G stablo, onda je G acikličan graf po definiciji. Posmatrajmo proizvoljna dva čvora u, v sa osobinom $uv \notin E(G)$. Kako je G povezan, postoji uv-put u G. Dodavanjem grane uv dobijamo konturu u $G + uv$.
($\Leftarrow$) Treba pokazati da je G povezan. Neka su u i v proizvoljni čvorovi iz V. Imamo dva slučaja:

(i) Ako je $uv \in E$, onda je to uv-put.

(ii) Ako $uv \notin E$, onda $G + uv$ sadrži konturu koja sadrži uv. Oduzimanjem sa konture grane uv dobijamo uv-put u G.

□

Teorema 122 (Karakterizacija stabla) *Neka je $G = (V, E)$ prost graf. Sledeća tvrđenja sa ekvivalentna:*

(i) G je stablo.

(ii) Za svaka dva čvora $u, v \in V(G)$ postoji jedinstven put od u do v.

(iii) G je povezan i $|E(G)| = |V(G)| - 1$.

(iv) G je povezan i brisanjem proizvoljne grane dobija se nepovezan graf (tj. Gje minimalan povezan graf).

(v) G je acikličan i dodavanjem grane se dobija graf koji sadrži konturu (tj. G je maksimalan acikličan graf).

Dokaz. Dokazali smo sledeći niz ekvivalencija:

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \quad (i) \Leftrightarrow (iii) \quad (i) \Leftrightarrow (iv) \quad (i) \Leftrightarrow (v).$$

Odatle možemo izvesti i sve ostale parove ekvivalencija. □

3.2 Pokrivajuća stabla

Kada se razmatraju problemi optimizacije na grafovima, često se dešava da optimalno rešenje ima ne-nula vrednosti samo na nekim podgrafovima koja su stabla i čiji skup čvorova je isti kao u plaznom grafu. Za takav podgraf kažemo da je pokrivajuće (ili razapinjuće ili razapeto) stablo.

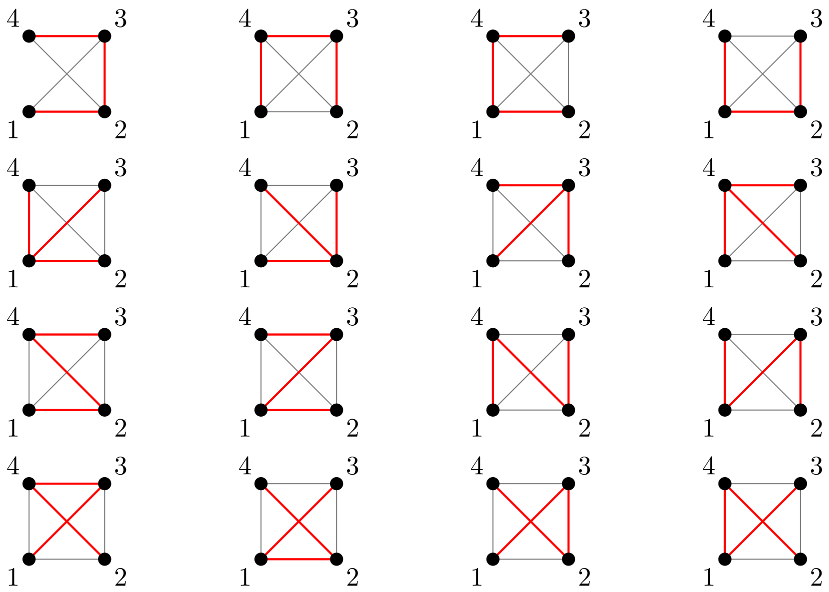
Definicija 123 *Graf G_1 je pokrivajuće stablo grafa G ako važe sledeće dve osobine:*

(i) G_1 je pokrivajući podgraf od G: $V(G_1) = V(G)$ i $E(G_1) \subseteq E(G)$;

(ii) G_1 je stablo.

Zadatak 124 *Koliko ima različitih pokrivajućih stabala grafa K_4?*

Rešenje. Zadatak ćemo rešiti konstruktivno, tako što ćemo konstruisati sva pokriajuća stabla grafa K_4.



Tako smo dobili konstruisali svih 16 pokruvajućih stabala grafa K_4, među kojima ima 4 neizomorfna stabla. □

Sa ciljem da uvedemo potreban i dovoljan uslov za egzistenciju pokrivajućeg grafa, dokazaćemo prvo jednu pomoćnu lemu.

Lemma 125 *Neka je $n \geq 3$. Ako je G povezan i $|E(G)| = k \geq n$, onda G ima pokrivajuće stablo.*

Dokaz. Indukcijom po k. Podsetimo se prvo da, prema Teoremi 119, graf sa n čvorova i bar n grana ima konturu.
Baza $k = n$: Oduzimanjem iz grafa jedne grane konture, graf ostaje povezan i pokriva i dalje sve čvorove. Povezan graf sa $n-1$ čvorova je stablo.
Induktivni korak $T_{k-1} \Rightarrow T_k$: Ako G sadrži konturu, onda možemo konstruisati povezan graf G' brisanjem proizvoljne grane konture. Primetimo da je $V(G') = V(G)$ i $E(G') \subseteq E(G)$. Kako je G' povezan, prema induktivnoj pretpostavci, G' ima pokrivajuće stablo, a to je ujedno i pokrivajuće stablo grafa G. □

Teorema 126 *Graf G ima pokrivajuće stablo ako i samo ako je povezan.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Ako G ima pokrivajuće stablo, onda postoji put između svaka dva čvora stabla, a onda je to put i u grafu G.
($\Leftarrow$) Neka je G povezan. Posmatraćemo dva slučaja.

1. $|V(G)| = 2$: Povezan graf sa dva čvora ima jednu granu i sopstveno je pokrivajuće stablo.
2. $|V(G)| = n \geq 3$: Za povezan graf važi da je $|E(G)| \geq n-1$.
   (a) Ako je $|E(G)| = n-1$, povezan graf sa $n-1$ grana je stablo. Znači, G je stablo, a ujedno i sopstveno pokrivajuće stablo.
   (b) Neka je $E(G)| = k \geq n$. U ovom slučaju tvrđenje važi na osnovu Leme 125.

□

3.2.1 Algoritmi za konstrukciju pokivajućeg stabla

U literaturi se može pronaći veliki broj algoritama za određivanje pokrivajućeg stabla u grafu. Mi ćemo u nastavku navesti dva, koja ćemo kasnije prilagoditi težinskim grafovima i problemu određivanja minimalnog pokrivajućeg stabla.

Algoritam1 Neka je $G = (V, E)$ povezan graf, gde je $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Prvi algoritam koji ćemo predstaviti prikazan je na Slici 3.1. U prvom koraku se bira proizvoljan čvor v_1. U svakom narednom koraku, podgrafu se dodaje jedan novi čvor koji nije prethodno izabran i za koji postoji grana u grafu koja je incidentna sa tim novim čvorom i jednim već izabranim čvorom. U podgraf se dodaje ta grana. Kako se u svakom koraku dodaje jedna grana i jedan čvor, algoritam staje nakon što je posle prvog koraka izvršeno još $n-1$ koraka algoritma (što kontroliše brojač i). Pokrivajuće stablo grafa je (V_n, E_n).

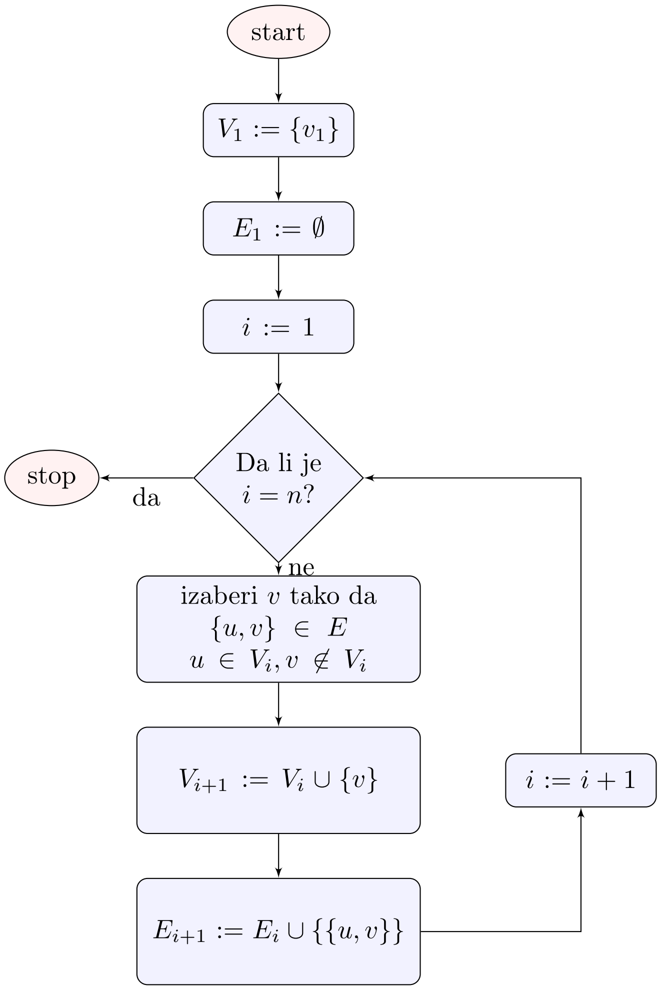


Figure 3.1: Algoritam1

Algoritam2 Neka je $G = (V, E)$ povezan graf, gde je $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ i neka su grane proizvoljno uređene u niz

$$(e_1, e_2, \ldots, e_m).$$

Algoritam za određivanje pokrivajućeg stabla dat je na slici 3.2. U prvom koraku, podgraf sadrži samo granu e_1. Svaki sledeći korak prvo proverava da li naredna grana pravi konturu dodavanjem u prethodno konstruisani podgraf. Ako ne pravi, onda se ta grana dodaje podgrafu, inače algoritam prelazi na proveru naredne grane u nizu. Algoritam staje u trenutku kada je izabrano $n-1$ grana. Tada je pokrivajuvajuće stablo (V, E_j) gde je $|E_j| = n-1$, za neko $j \in \{1, \ldots, m\}$.

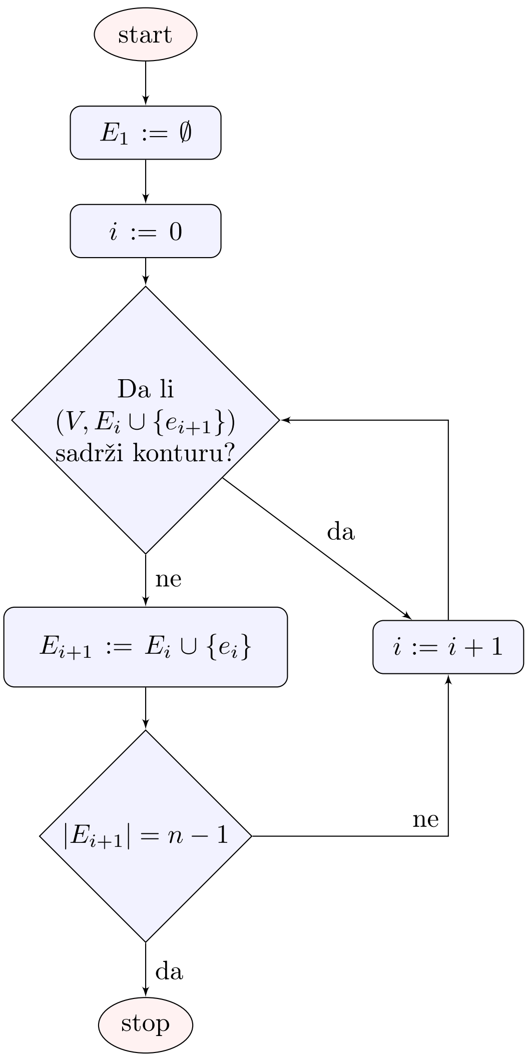
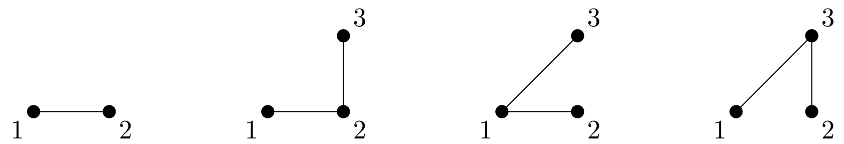


Figure 3.2: Algoritam2

3.3 Prüferov niz

U ovom delu ćemo prikazati jedan dokaz za određivanje broja označenih stabala.

Primer 15 *Za* $n = 2$ *imamo jedno, dok za* $n = 3$ *imamo 3 različita označena stabla, kao što je prikazano na slici.*



Označena stabla za $n = 4$ *prikazana su u Zadatku 124.*

Tvrđenje u nastavku obično se pripisuje Cayleyu, a mi ćemo dati dokaz koji su izveli Prüfer i Clarke. Dokaz se zasniva na principu bijekcije. Svakom označenom stablu sa n čvorova pridružuje se niz, tzv. Prüferov niz

$$(p_1, p_2, \ldots, p_{n-2}) \qquad 1 \le p_i \le n \qquad 1 \le i \le n-2.$$

Teorema 127 *Neka je* $n \geq 2$. *Broj različitih označenih stabala sa čvorovima* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *jednak je* n^{n-2}.

Dokaz. Ako je $n = 2$, imamo jedno označeno stablo i tvrđenje važi. Posmatraćemo sada $n \geq 3$ i pokazaćemo dva podtvrđenja: (i) svakom stablu sa čvorovima $\{1, \ldots, n\}$ možemo na jedinstven način pridružiti Prüferov niz $(p_1, \ldots, p_{n-2})$ koji čine $n-2$ cela broja iz skupa $\{1, \ldots, n\}$ (koja se mogu ponavljati); (ii) svaki niz $(p_1, \ldots, p_{n-2})$ sa osobinom $\{p_1, \ldots, p_{n-2}) \subseteq \{1, \ldots, n\}$ je Prüferov niz nekog stabla sa n čvorova.

(i) Niz ćemo formirati kao što je objašnjeno u nastavku.

1. Odrediti najmanju oznaku lista u stablu i za p_1 uzeti oznaku njemu susednog čvora. Oduzeti iz grafa list sa oznakom p_1 (i njemu incidentnu granu).
2. Ponavljati prvi korak, dok god ne ostanu samo dva čvora u stablu. Znači za p_i, $2 \le i \le n-2$, uzeti oznaku suseda lista (u novodobijenom stablu) sa najmanjom oznakom.

Tako smo svakom stablu pridružili Prüferov niz.

(ii) Neka je dat niz $(p_1, \ldots, p_{n-2})$. U nastavku ćem konstruisati stablo čiji je to Prüferov niz.

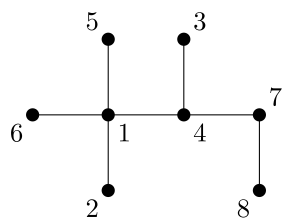
1. Neka je l_1 najmanji broj koji se ne pojavljuje u skupu $\{p_1, \ldots, p_{n-2}\}$. To je morao biti list koji se skida u prvom koraku algoritma. Znači, treba spojiti granom čvorove p_1 i l_1.

2. U svakom narednom koraku, tražimo vrednost l_i koja će odgovarati najmanjoj oznaci lista koji skidamo kada formiramo niz. To je u svakom koraku najmanja vrednost iz skupa koji dobijamo kada iz $\{1, \ldots, n\}$ oduzmemo naredne članove niza (čim se pojavljuju u nizu, znači da nisu mogli biti skinuti kao listovi sa najmanjom oznakom) i prethodno skinute listove, tj. $l_i = \min((\{1, \ldots, n\} \setminus \{l_1, \ldots, l_{i-1}\}) \setminus \{p_i, \ldots, p_{n-2}\})$. Grana koju formiramo je $\{l_i, p_i\}$.
3. Preostala dva čvora, koji se nisu pojavili u skupu identifikovanih listova, povežemo granom.

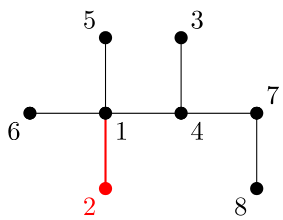
Pseudokod obratnog smera algoritma je sledeći:
Neka je $p(G) = (p_1, \ldots, p_{n-2})$ Priferov niz dobijen od označenog stabla G.

1. Za $l_1 = \min(\{1, \ldots, n\} \setminus \{p_1, \ldots, p_{n-2}\})$ kreiraj granu $\{l_1, p_1\} \in G$.
2. Za $i = 2$ do $i = n - 2$ ponavljaj sledeće korake:
   (a) odredi list
   $$\begin{aligned} l_i &= \min(\{1, \ldots, n\} \setminus (\{p_i, \ldots, p_{n-2}\} \cup \{l_1, \ldots, l_{i-1}\}) \\ &= \min(\{1, \ldots, n\} \setminus \{l_1, \ldots, l_{i-1}, p_i, \ldots, p_{n-2}\}) \end{aligned}$$
   (b) kreiraj granu $\{l_i, p_i\} \in T(G)$.
3. Poslednja grana je $\{u, v\}$, gde je $u, v \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{l_1, \ldots, l_{n-2}\}$.

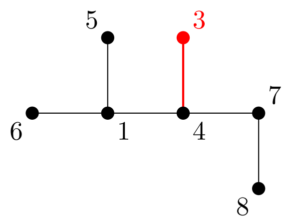
Zadatak 128 *Odrediti Prüferov niz za stablo sa slike.*



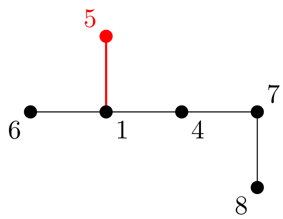
Rešenje. Prüferov niz za dato stablo je $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) = (1, 4, 1, 1, 4, 7)$. Određivanje redom pojedinačnih koordinata tog niza ilustrovano je grafički u nastavku.



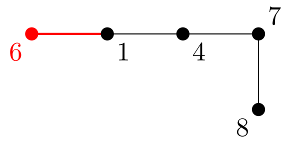
$$\begin{array}{lcl} l_1 & = & \min\{2,3,5,6,8\} = 2 \\ p_1 & = & 1 \end{array}$$



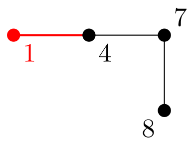
$$\begin{array}{lcl} l_2 & = & \min\{3,5,6,8\} = 3 \\ p_2 & = & 4 \end{array}$$



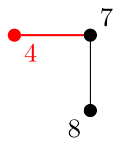
$$\begin{array}{lcl} l_3 & = & \min\{5,6,8\} = 5 \\ p_3 & = & 1 \end{array}$$



$$\begin{array}{lcl} l_4 & = & \min\{6,8\} = 6 \\ p_4 & = & 1 \end{array}$$



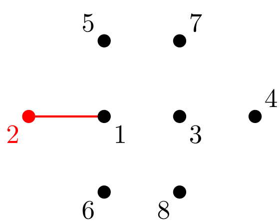
$$\begin{array}{lcl} l_5 & = & \min\{1,8\} = 1 \\ p_5 & = & 4 \end{array}$$



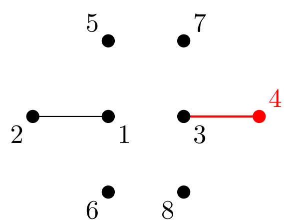
$$\begin{array}{lcl} l_6 & = & \min\{4,8\} = 4 \\ p_6 & = & 7 \end{array}$$

Zadatak 129 *Odrediti stablo čiji Pruüferov niz je* $(1,3,1,1,3,3)$.

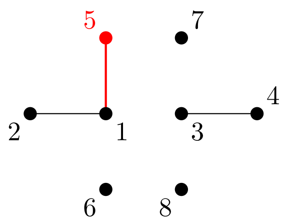
Rešenje. Prvo treba primetiti da je dužina niza $n-2=6$, odakle je broj čvorova stabla $n=8$. Daćemo grafički prikaz formiranja stabla. Uvedimo oznaku $V=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.



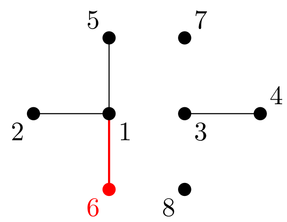
$$\begin{array}{lcl} l_1 & = & \min(V \setminus \{1,3\}) = 2 \\ \{l_1, p_1\} & = & \{1,2\} \end{array}$$



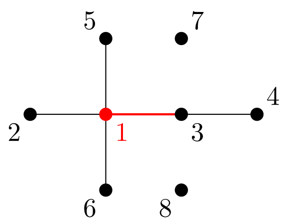
$$\begin{array}{lcl} l_2 & = & \min(V \setminus \{1,2,3\}) = 4 \\ \{l_2, p_2\} & = & \{3,4\} \end{array}$$



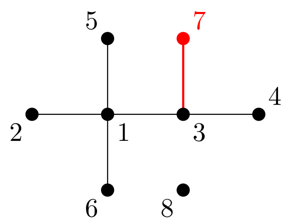
$$\begin{aligned} l_3 &= \min(V \setminus \{1,2,3,4\}) = 5 \\ \{l_3, p_3\} &= \{1,5\} \end{aligned}$$



$l_4 = \min(V \setminus \{1,2,3,4,5\}) = 6$
$\{l_4, p_4\} = \{1,6\}$



$l_5 = \min(V \setminus \{2,3,4,5,6\}) = 1$
$\{l_5, p_5\} = \{1,3\}$



$l_6 = \min(V \setminus \{1,2,3,4,5,6\}) = 7$
$\{l_6, p_6\} = \{3,7\}$

Kada iz skupa svih čvorova V konačno isključimo sve prethodno određene listove $\{1,2,4,5,6,7\}$, ostanu nam čvorovi 3 i 8, koje u poslednjem koraku treba spojiti granom. Tako dobijamo sledeće stablo: