Dužina luka krive

- *Pravougli koordinatni sistem*

Pretpostavimo da je u ravni definisana kriva AB sa $y = f(x)$, $a \le x \le b$, gde funkcija $f(x)$ ima neprekidan prvi izvod $f'(x)$ nad zatvorenim intervalom $[a,b]$.

Dužina luka krive $y = f(x)$ nad zatvorenim intervalom $[a,b]$ je $l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$.

10. Naći dužinu luka krive $y^2 - 2\ln y - 4x = 0$ od $x = \frac{1}{4}$ do $x = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{2}$.

$$x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y \Rightarrow x' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2y} = \frac{y^2-1}{2y}$$

$$x = \frac{1}{4} \Rightarrow y^2 - 2\ln y = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$x = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{2} \Rightarrow y^2 - 2\ln y = e^2 - 2 \Rightarrow y = e$$

$$y' = \frac{1}{x'} \Rightarrow dx = x'dy, \qquad \sqrt{1+(y')^2}dx = \sqrt{1+\frac{1}{(x')^2}}x'dy = \sqrt{1+(x')^2}dy$$

$$l = \int_1^e \sqrt{1+(x')^2}dy = \int_1^e \sqrt{1+(\frac{y^2-1}{2y})^2}dy = \int_1^e \sqrt{\frac{4y^2+y^4-2y^2+1}{4y^2}}dy = \int_1^e \sqrt{\frac{(y^2+1)^2}{(2y)^2}}dy =$$

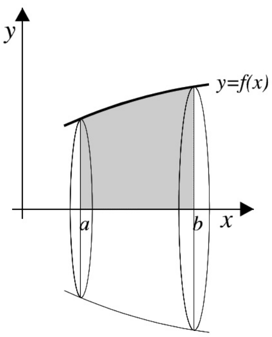
$$= \int_1^e \frac{y^2+1}{2y}dy = \frac{1}{2}\int_1^e ydy + \frac{1}{2}\int_1^e \frac{dy}{y} = \frac{1}{4}y^2\Big|_1^e + \frac{1}{2}\ln y\Big|_1^e = \frac{1}{4}(e^2-1) + \frac{1}{2}(1-0) = \frac{e^2+1}{4}$$

- *Polarni koordinatni sistem*

Ako je $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, jednačina krive AB u polarnom koordinatnom sistemu, gde funkcija $\rho = \rho(\varphi)$ ima neprekidan prvi izvod nad intervalom $[\alpha, \beta]$ tada je $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d\varphi$.

Zapremina obrtnih tela

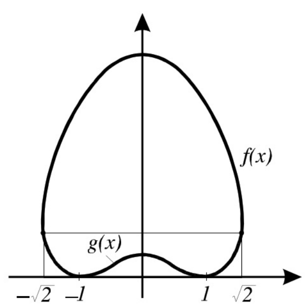
- *Pravougli koordinatni sistem*



Neka je funkcija $f:[a,b] \to R$ neprekidna nad intervalom $[a,b]$. Ako se krivolinijski trapez, čije stranice su interval $[a,b]$, delovi pravih $x=a$ i $x=b$ i kriva $y=f(x)$, $a \le x \le b$ obrće oko $x-$ose , dobija se obrtno telo.

Zapremina tela dobijenog obrtanjem krive $y=f(x)$ oko $x-$ose nad zatvorenim intervalom $[a,b]$ je $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$.

11. Naći zapreminu tela koje nastaje obrtanjem oko $x-$ose površi između krivih $f(x)=3-x^2+2\sqrt{2-x^2}$ i $g(x)=3-x^2-2\sqrt{2-x^2}$.



$D:\ 2-x^2 \ge 0 \Rightarrow x \in [-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

$g(x)=0 \Rightarrow 3-x^2 = 2\sqrt{2-x^2}\ \Big/^2$

$9-6x^2+x^4=8-4x^2$

$x^4-2x^2+1=0$

$(x^2-1)^2=0$

$x=\pm 1$

$f(0)=3+2\sqrt{2},\ g(0)=3-2\sqrt{2}$

$$V_1=\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f^2(x)dx,\ V_2=\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} g^2(x)dx$$

$$V=V_1-V_2=\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left[f^2(x)-g^2(x)\right]dx=\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}[f(x)-g(x)][f(x)+g(x)]dx=$$

$$=\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 4\sqrt{2-x^2}(6-2x^2)dx=2\pi\int_0^{\sqrt{2}} 8\sqrt{2-x^2}(3-x^2)\cdot\frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2-x^2}}dx=$$

$$=16\pi\int_0^{\sqrt{2}}\frac{(2-x^2)(3-x^2)}{\sqrt{2-x^2}}dx=16\pi\int_0^{\sqrt{2}}\frac{x^4-5x^2+6}{\sqrt{2-x^2}}dx$$

$$\int\frac{x^4-5x^2+6}{\sqrt{2-x^2}}dx=(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{2-x^2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}\ \Big/'$$

$$\frac{x^4-5x^2+6}{\sqrt{2-x^2}}=(3Ax^2+2Bx+C)\sqrt{2-x^2}+(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{2-x^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{2-x^2}} \qquad | \cdot \sqrt{2-x^2}$$

$$x^4-5x^2+6=(3Ax^2+2Bx+C)(2-x^2)-x(Ax^3+Bx^2+Cx+D)+\lambda$$

$$x^4-5x^2+6=-4Ax^4-3Bx^3+(6A-2C)x^2+(4B-D)x+2C+\lambda$$

$$-4A=1\Rightarrow A=-\frac{1}{4}$$

$$-3B=0\Rightarrow B=0$$

$$6A-2C=-5\Rightarrow C=\frac{7}{4}$$

$$4B-D=0\Rightarrow D=0$$

$$2C+\lambda=6\Rightarrow \lambda=\frac{5}{2}$$

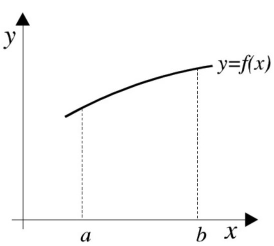
$$\int_0^{\sqrt{2}}\frac{x^4-5x^2+6}{\sqrt{2-x^2}}dx=(-\frac{1}{4}x^3+\frac{7}{4}x)\sqrt{2-x^2}\Big|_0^{\sqrt{2}}+\frac{5}{2}\int_0^{\sqrt{2}}\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}=\frac{5}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{5}{2}\arcsin 1-\frac{5}{2}\arcsin 0=\frac{5\pi}{4}$$

$$V=16\pi\cdot\frac{5\pi}{4}=20\pi^2$$

Površina omotača obrtnih tela

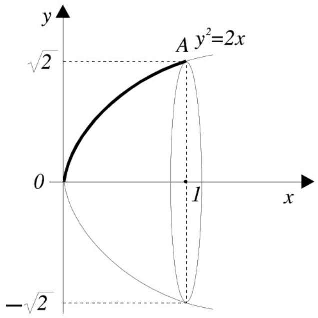
- *Pravougli koordinatni sistem*



Definišimo površinu omotača obrtnog tela, koje se dobija obrtanjem krivolinijskog trapeza, čije stranice su interval $[a,b]$, delovi pravih $x=a$ i $x=b$ i kriva $y=f(x)$, $a\le x\le b$, oko $x-$ose. Funkcija $f(x)$ je nenegativna i ima neprekidan prvi izvod nad zatvorenim intervalom $[a,b]$.

Površina M omotača obrtnog tela je $P=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx$.

12. Izračunati površinu omotača paraboličnog ogledala dubine 1m, prečnika $D=2\sqrt{2}$ m.



$A(1,\sqrt{2})$

$y^2 = ax$

$(\sqrt{2})^2 = a \Rightarrow a = 2 \Rightarrow y^2 = 2x$

$y = \pm\sqrt{2x}$

$y' = \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$

$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\dfrac{1}{2x}} = \dfrac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x}}$

$$M = 2\pi\int_0^1 \cancel{\sqrt{2x}}\cdot\frac{\sqrt{2x+1}}{\cancel{\sqrt{2x}}}dx = 2\pi\int_0^1 \sqrt{2x+1}dx = \begin{pmatrix} 2x+1=t \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{pmatrix} = \pi\int_1^3 \sqrt{t}dt = \frac{2\pi}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^3 = \frac{2\pi}{3}(\sqrt{27}-1)m^2$$

13. Naći $I = \int \dfrac{dx}{\cos x + 2}$ nad intervalom $(0,\dfrac{3\pi}{2})$.

opšta smena

Uvedimo smenu $tg\dfrac{x}{2} = t$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.

Za $x \in (0,\pi)$ je

$$I_1 = \int \frac{dx}{\cos x + 2} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+2} = 2\int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}} + c_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + c_1.$$

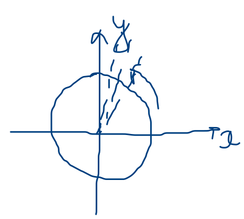
Slično za $x \in (\pi,\dfrac{3\pi}{2})$ je $I_2 = \displaystyle\int \frac{dx}{\cos x + 2} = \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + c_2$.

Kako je funkcija $f(x) = \dfrac{1}{\cos x + 2}$ neprekidna za svako x to za nju postoji neodređeni integral nad zadatim intervalom.

Dakle, $\lim\limits_{x\to\pi} I = \lim\limits_{x\to\pi^-} I_1 = \lim\limits_{x\to\pi^+} I_2$.

Kako je

$$\lim_{x\to\pi^-} I_1 = \lim_{x\to\pi^-}\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + c_1 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_1$$



$$\lim_{x\to\pi^+} I_2 = \lim_{x\to\pi^+} \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + c_2 = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_2,$$

sledi da je $\frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_1 = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_2$, odnosno da je $c_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + c_1$.

Dakle,

$$I = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + c & , \quad x \in (0,\pi) \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}} + c & , \quad x = \pi \\ \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + c, & x \in (\pi, \frac{3\pi}{2}). \end{cases}$$

Određeni integral kao funkcija granice

Neka je funkcija $f(x)$ integrabilna nad zatvorenim intervalom $[A,B]$ i neka je a proizvoljna tačka iz intervala $[A,B]$. Kada x uzima vrednost iz intervala $[A,B]$, onda je

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

funkcija definisana nad intervalom $[A,B]$. Naziva se integral sa promenljivom gornjom granicom ili određeni integral kao funkcija gornje granice.
Slično, možemo posmatrati funkciju

$$I_1(x) = \int_x^a f(t)\,dt,$$

koja je definisana za svako $x \in [A,B]$. Ona se zove određeni integral sa promenljivom donjom granicom ili određeni integral kao funkcija donje granice.
Ako je $f(x)$ neprekidna funkcija nad zatvorenim intervalom $[A,B]$, tada funkcija $I(x)$ ima izvod nad intervalom $[A,B]$. Pri tom važi

$$I'(x) = f(x),\ x \in [A,B].$$

Slično je $I_1'(x) = -f(x),\ x \in [A,B]$.

Teorema o srednjoj vrednosti

Neka $f, g \in R[a,b]$, $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, *i* $g(x) \ge 0$ ($g(x) \le 0$) *za* $x \in [a,b]$. *Tada postoji* $m \le \eta \le M$, *takvo da je*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \eta\int_a^b g(x)\,dx.$$

Ako je još $f \in C^0[a,b]$ ($C^0[a,b]$ *je skup svih neprekidnih funkcija nad zatvorenim intervalom* $[a,b]$), *onda postoji* $c \in [a,b]$, *takvo da je*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

14. Naći $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}\int_0^x \sqrt{t}\sin t\,dt$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{t}\cdot \sin t\,dt}{x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

Funkcija $f(x) = \sqrt{x}\cdot\sin x$ je neprekidna za svako $x \geq 0$ pa na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti postoji tačka $\xi \in [0, x]$ takva da je

$$\int_0^x \sqrt{t}\sin t\,dt = (x-0)\sqrt{\xi}\sin\xi \to 0 \text{ kada } x \to 0^+.$$

$$\int_0^x \sqrt{t}\cdot\sin t\cdot 1\,dt \overset{\text{T.O S.V.}}{=} f(\xi)\cdot\int_0^x 1\,dt = \sqrt{\xi}\cdot\sin\xi\cdot t\Big|_0^x = \sqrt{\xi}\cdot\sin\xi\cdot(x-0)$$

Primenjujemo Lopitalovo pravilo i dobijamo

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_0^x \sqrt{t}\sin t\,dt = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\sin x}{1} = 0.$$

☺