ВЕЖБЕ 4

ПЕРМУТАЦИЈЕ

1. Колико се различитих речи, без обзира на смисао, може написати од свих слова садржаних у речима

МАТЕМАТИКА

$$\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}$$

А ×3
М ×2
Т ×2

КОМБИНАТОРИКА

$$\frac{13!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!}$$

К ×2
О ×2
И ×2
А ×2

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-2}}{n_{k-1}}\binom{n_k}{n_k}=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!}=\binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_k}$$

ПОЛИНОМНИ
КОЕФИЦИЈЕНТ

2. На колико начина се два топа, два скакача, два ловца, краљ и краљица могу поставити у први ред шаховске табле, тако да ловци буду на пољима различите боје?

први ред: 4 бела и 4 црна поља

$$\underbrace{\binom{4}{1}\binom{4}{1}}_{\text{одабрали по једно бело и једно црно поље за ловце}}\frac{6!}{2!\,2!}$$

број начина да распоредимо остале фигуре

II начин:

од свих распореда одузмемо „лоше" распореде

$$\frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} - 2\cdot\binom{4}{2}\cdot\frac{6!}{2!\,2!}$$

бирамо 2 поља исте боје за ловце

бела или црна поља на којима су ловци

3. Написати пермутације скупа $\{1,2,3,4\}$ у лексикографском поретку.

$a_1a_2\ldots a_n$ претходи пермутацији $b_1b_2\ldots b_n$ у лексикографском поретку

$\exists k,\ 1\le k\le n \quad a_1=b_1, a_2=b_2,\ldots, a_{k-1}=b_{k-1}$ и $a_k<b_k$

1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432,
2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431,
3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421,
4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321

$\{1,2,\ldots,n\}$
$123\ldots n$ прва
$n(n-1)\ldots 21$ последња

k-та пермутација ће почети са $a_1=\left\lceil \frac{k}{(n-1)!} \right\rceil$

$a_2a_3\ldots a_n$ је k'-та пермутација скупа $\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{a_1\}$

$k' = k-(a_1-1)(n-1)!$

4. Одредити а) 28. б) 75. в) 100. пермутацију скупа $\{a,b,c,d,e\}$.

а) $k_1 = 28$ badec

$a_1 = \left\lceil \frac{28}{4!} \right\rceil = \left\lceil \frac{28}{24} \right\rceil = 2$ $\{a,b,c,d,e\}$

$k_2 = k_1 - (a_1 - 1)\cdot 4!$

$= 28 - (2-1)\cdot 24 = 4$

$a_2 = \left\lceil \frac{4}{3!} \right\rceil = \left\lceil \frac{4}{6} \right\rceil = 1$ $\{a,c,d,e\}$

$k_3 = 4 - 0 = 4$

$a_3 = \left\lceil \frac{4}{2!} \right\rceil = 2$ $\{c,d,e\}$

$k_4 = 4 - 1\cdot 2! = 2$

$a_4 = \left\lceil \frac{2}{1!} \right\rceil = 2$ $\{c,e\}$

б) $k_1 = 75$ dacbe

$a_1 = \left\lceil \frac{75}{4!} \right\rceil = \left\lceil \frac{75}{24} \right\rceil = 4$ $\{a,b,c,d,e\}$

$k_2 = 75 - 3\cdot 4! = 3$

$a_2 = \left\lceil \frac{3}{3!} \right\rceil = 1$ $\{a,b,c,e\}$

$k_3 = 3 - 0 = 3$

$a_3 = \left\lceil \frac{3}{2!} \right\rceil = 2$ $\{b,c,e\}$

$k_4 = 3 - 1\cdot 2! = 1$

$\{b,e\}$ $\boxed{be}$

eb

5. Одредити за сваку пермутацију ону која јој претходи и ону која следи након ње у лексикографском редоследу

1 3 2 4
а) 1 3 4 2
1 4 2 3

4 5 3 1 2
б) 4 5 3 2 1
5 1 2 3 4

1 2 5 4 3
в) 1 3 2 4 5
1 3 2 5 4

6 5 4 3 1 2
г) 6 5 4 3 2 1
Нема

2 3 5 8 7 1 6 4
д) 2 3 5 8 7 4 1 6
2 3 5 8 7 4 6 1

БИНОМНИ КОЕФИЦИЈЕНТИ И БИНОМНА ФОРМУЛА

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

- СИМЕТРИЧНОСТ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

- ПАСКАЛОВ ИДЕНТИТЕТ $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

БИНОМНИ ОБРАЗАЦ $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \cdot 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$$

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} - 2^0 \binom{n}{0} = 3^n - 1$$

1. $\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}=\binom{n+r+1}{r}$ Индукција по r

Б.И. $r=0$

$\binom{n+0}{0}=\binom{n}{0}=1=\binom{n+1}{0}$ ✓

И.Х. Претпоставимо да важи

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}=\binom{n+r+1}{r}$$

И.К. Покажимо да тврђење важи за $r+1$

$$\sum_{k=0}^{r+1}\binom{n+k}{k}=\underbrace{\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}}_{\text{И.Х.}}+\binom{n+r+1}{r+1}=\binom{n+r+1}{r}+\binom{n+r+1}{r+1}\overset{\text{Паскалов идентитет}}{=}\binom{n+r+2}{r+1}=\binom{n+(r+1)+1}{r+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^{n}$$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}$

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \cancel{k}\,\frac{n!}{\underset{(k-1)!}{\cancel{k!}}\,(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n\cdot(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}}_{\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-k+1)!}} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$$

смена: $i = k-1$

$$= n\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} = n\cdot 2^{n-1}$$

2. $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$

II начин: $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k \quad / ()'$

$$n \cdot (x+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}$$

За $x=1$ добијамо

$$n \cdot (1+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k \, 1^{k-1}$$

$$n \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k$$

3. $\sum_{k=0}^{n} (k+1) \binom{n}{k} = (n+2) 2^{n-1}$

$$\sum_{\boxed{k=0}}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

4. $$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\underbrace{k+1}_{(k+1)!}} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \overbrace{\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{n+1}}^{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} \underbrace{\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!}}_{\binom{n+1}{k+1}}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{\boxed{i=1}}^{n+1} \binom{n+1}{i} = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} - \binom{n+1}{0} \right) =$$

смена $i=k+1$

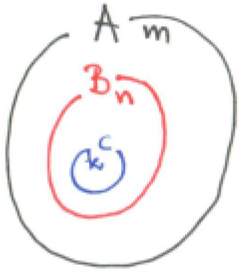
$$\frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} - 1 \right) = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

5. $\binom{m}{n}\binom{n}{k} = \binom{m}{k}\binom{m-k}{n-k}$

I начин: АЛГЕБАРСКИ ДОКАЗ

$$\binom{m}{n}\binom{n}{k} = \frac{m!}{\cancel{n!}(m-n)!}\cdot\frac{\cancel{n!}}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(m-k)!}{(m-k)!} = \underbrace{\frac{m!}{k!(m-k)!}}_{\binom{m}{k}}\cdot\underbrace{\frac{(m-k)!}{(m-n)!(n-k)!}}_{\binom{m-k}{n-k}}$$

5. $\binom{m}{n}\binom{n}{k} = \binom{m}{k}\binom{m-k}{n-k}$



II начин: КОМБИНАТОРНИ ДОКАЗ

Нека је дат скуп A, $|A| = m$

Број начина да одредимо скупове B и C за које важи $C \subseteq B \subseteq A$, $|B| = n$, $|C| = k$ је $\underbrace{\binom{m}{n}}_{B}\underbrace{\binom{n}{k}}_{C}$

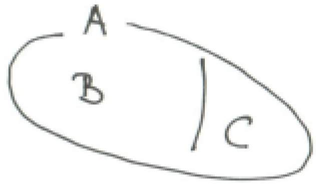
Прво од m елемената скупа A бирамо n елемената за подскуп B, а затим од тих n елемената бирамо k елемената који ће бити у C.

Исто то можемо урадити уколико прво на $\binom{m}{k}$ начина одаберемо елементе скупа C, а затим на $\binom{m-k}{n-k}$ начина бирамо преостале елементе скупа B.

$$\underbrace{\binom{m}{k}}_{C}\cdot\underbrace{\binom{m-k}{n-k}}_{\text{број начина да одаберемо преостале елементе скупа } B}$$

$$\binom{m}{n}\binom{n}{k} = \binom{m}{k}\binom{m-k}{n-k}$$

6. Доказати Вандермондову конволуцију



$$\binom{m}{0}\binom{n}{k}+\binom{m}{1}\binom{n}{k-1}+\ldots+\binom{m}{k}\binom{n}{0}=\binom{m+n}{k}$$

Посматрајмо дисјунктне скупове B и C, $|B|=m$, $|C|=n$

Нека је $A=B\cup C$.

Број начина да изаберемо k-точлани подскуп скупа A је $\binom{m+n}{k}$

$$\left.\begin{array}{ll}
0 \text{ из } B,\ k \text{ из } C & \binom{m}{0}\binom{n}{k} \\
1 \text{ из } B,\ k-1 \text{ из } C & \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} \\
2 \text{ из } B,\ k-2 \text{ из } C & \binom{m}{2}\binom{n}{k-2} \\
\vdots & \vdots \\
k-1 \text{ из } B,\ 1 \text{ из } C & \binom{m}{k-1}\binom{n}{1} \\
k \text{ из } B,\ 0 \text{ из } C & \binom{m}{k}\binom{n}{0}
\end{array}\right\} +$$

7. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} \overset{6.}{=} \binom{n+n}{n} = \binom{2n}{n}$$

Вандермондова конволуција $\binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \ldots + \binom{m}{k}\binom{n}{0} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$

8. Наћи коефицијент уз a^3b^2 у развоју израза $(3a-2b)^5$

$$(3a-2b)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (3a)^k (-2b)^{5-k} = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} 3^k (-2)^{5-k} \underbrace{a^k b^{5-k}}_{k=3}$$

коефицијент: $\binom{5}{3} 3^3 (-2)^2 = 1080$

$$\cancel{\binom{5}{3} 3^3 (-2)^2 a^3 b^2}$$

9. Наћи коефицијент уз x^5 у развоју израза $\left(3\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^{20}$

$$\left(3\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^{20}=\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}(3\sqrt{x})^k\underbrace{\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^{20-k}}_{(2\sqrt[3]{x})^{k-20}}=\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}3^k x^{k/2}\,2^{k-20}\,x^{\frac{k-20}{3}}=$$

$$\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}3^k 2^{k-20}\,x^{\boxed{\frac{k}{2}+\frac{k-20}{3}}}=5$$

$$\frac{k}{2}+\frac{k-20}{3}=5$$

$$5k=70$$

$$\Rightarrow \boxed{k=14}$$

коефицијент уз x^5:

$$\binom{20}{14}3^{14}2^{-6}$$

напомена: Могли смо радити и овако

$$\left(3\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^{20}=\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}(3\sqrt{x})^{20-k}\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}3^{20-k}2^{-k}\,x^{\frac{20-k}{2}}x^{-\frac{k}{3}}$$

$$\frac{20-k}{2}-\frac{k}{3}=5$$

$$\Rightarrow k=6$$

коефицијент уз x^5:

$$\binom{20}{6}3^{20-6}2^{-6}=\binom{20}{6}3^{14}2^{-6}=\binom{20}{14}3^{14}2^{-6}$$

10. Збир биномних коефицијената при развоју $(1+x)^n+(1+x)^{n+1}$ једнак је 1536. Одредити коефицијент уз x^6.

$$(1+x)^n+(1+x)^{n+1}=(1+x)^n\left(1+(1+x)\right)=(x+2)(1+x)^n=(x+2)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=$$

$$x\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i+2\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\underset{\substack{i+1=6\\ i=5}}{x^{i+1}}+2\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\underset{j=6}{x^j}$$

тражени коефицијент: $\binom{n}{5}+2\cdot\binom{n}{6}$

$$(1+x)^n+(1+x)^{n+1}=\boxed{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i+\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}x^j}\Rightarrow\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}+\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}=1536$$

$$2^n+2^{n+1}=1536$$

$$2^n(1+2)=1536$$

$$2^n\cdot 3=1536$$

$$2^n=512$$

$$\Rightarrow\boxed{n=9}$$

решење: $\binom{9}{5}+2\cdot\binom{9}{6}\overset{?}{=}\binom{9}{6}+\binom{10}{6}$

ПОЛИНОМНИ КОЕФИЦИЈЕНТИ И ПОЛИНОМНА ФОРМУЛА

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

ПОЛИНОМНА ФОРМУЛА

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{\boxed{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_k=n \\ 0\le n_i\le n}}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}$$

$\binom{n+k-1}{n}$ сабирака

$$\sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_k=n \\ 0\le n_i\le n}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_k=n \\ 0\le n_i\le n}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} \cdot 1^{n_1} \cdot 1^{n_2} \cdot \ldots \cdot 1^{n_k} = (\underbrace{1+1+\ldots+1}_{k\text{-пута}})^n = k^n$$

$$\sum_{\substack{i+j+k=n \\ 0\le i,j,k\le n}} \binom{n}{i,j,k} 2^j = \sum_{\substack{i+j+k=n \\ 0\le i,j,k\le n}} \binom{n}{i,j,k} 1^i \cdot 2^j \cdot 1^k = (1+2+1)^n = 4^n$$

домаћи: $\displaystyle\sum_{\substack{i+j+k=n \\ 0\le i,j,k\le n-1}} \binom{n}{i,j,k} 2^j$

1. Наћи коефицијент уз $x^2y^3z^2$ у развоју израза $(x+y+z)^7$.

$$(x+y+z)^7 = \sum_{\substack{i+j+k=7 \\ 0\le i,j,k\le 7}} \binom{7}{i,j,k} x^i y^j z^k$$

$i=2,\ j=3,\ k=2$

коефицијент: $\binom{7}{2,3,2} = \dfrac{7!}{2!\,3!\,2!}$

2. Наћи коефицијент уз x^{10} у развоју израза $(1-x^2+x^3)^{11}$

$$(1-x^2+x^3)^{11} = \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=11 \\ 0\le n_i \le 11}} \binom{11}{n_1,n_2,n_3} (-x^2)^{n_2} (x^3)^{n_3} = \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=11 \\ 0\le n_i \le 11}} \binom{11}{n_1,n_2,n_3} (-1)^{n_2} x^{\boxed{2n_2+3n_3}} = 10$$

$n_3 = 2n_1 - 12$

$2n_2+3n_3 = 10 \Rightarrow n_2 = \frac{10-3n_3}{2} = 23-3n_1$

$n_1+n_2+n_3 = 11$

$n_1 + \frac{10-3n_3}{2} + n_3 = 11$

$2n_1 + 10 - 3n_3 + 2n_3 = 22$

$n_3 = 2n_1 - 12$

- $n_1 = 0 \quad n_2 = 23 \quad \boxed{n_3 = -12}$ $n_i \geq 0$ ✗
- $n_1 = 1 \quad n_2 = 20 \quad n_3 = -10$ ✗

$n_3 \geq 0$	$n_2 \geq 0$
$2n_1 - 12 \geq 0$	$23 - 3n_1 \geq 0$
$n_1 \geq 6$	$3n_1 \leq 23$
	$n_1 \leq 7$

- $n_1 = 6 \quad n_2 = 5 \quad n_3 = 0$
- $n_1 = 7 \quad n_2 = 2 \quad n_3 = 2$

коефицијент уз x^{10}:

$$\binom{11}{6,5,0}(-1)^5 + \binom{11}{7,2,2}(-1)^2$$