1.3 Binomni koeficijenti i binomna formula

Napomena: Ovo je radna verzija materijala sa predavanja, koja će tokom semestra biti proširena i revidirana.

Definicija 37 *Neka su m i n celi brojevi sa osobinom $0 \leq m \leq n$. Binomni koeficijent $\binom{n}{m}$ je funkcija koja takvim parovima vrednosti n i m dodeljuje pozitivne cele brojeve na sledeći način:*

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m(m-1)\dots 2\cdot 1}, m \geq 1$$

Lemma 38 (faktorijelna reprezentacija) *Za cele brojeve n i m sa osobinom $0 \leq m \leq n$, važi*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Dokaz. Za $m \in \{0, n\}$ imamo

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!} = 1 = \binom{n}{0}.$$

Ako je $1 \leq m \leq n-1$ množenjem brojioca i imenioca sa $(n-m)!$ dobijamo:

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)(n-m)!}{m(m-1)\dots 2\cdot 1\cdot(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

□

Možemo primetiti da binomni koeficijent $\binom{n}{m}$ odgovara broju kombinacija bez ponavljanje klase m od n elemenata. Broj načina da se od n elemenata izabere m elemenata jednak je broju načina da se od n elemenata izabere (preostalih) $n-m$ elemenata. To je formalno zapisano u sledećoj lemi.

Lemma 39 (simetričnost) *Za cele brojeve n i m sa osobinom $0 \leq m \leq n$, važi*

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

Dokaz. Sledi direktno na osnovu prethodne leme. □

Lemma 40 (Paskalov identitet) *Za cele brojeve n i m, $1 \leq m \leq n$, važi*

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

Dokaz.

1. način (kombinatorno)
Posmatrajmo skup A sa $n \geq 1$ elemenata i izaberimo proizvoljno element $a \in A$. Neka je

– S_m - skup podskupova skupa A sa m elemenata:

$$|S_m| = \binom{n}{m}$$

– S_m^a - skup podskupova skupa A sa m elemenata koji sadrže a (svaki skup sadrži a, a preostalih $m-1$ elemenata biramo iz skupa $A \setminus \{a\}$:

$$|S_m^a| = \left|\binom{A \setminus \{a\}}{m-1}\right| = \binom{n-1}{m-1}$$

– $S_m^{\bar{a}}$ - skup podskupova skupa A sa m elemenata koji ne sadrže a (svih m elemenata biramo iz skupa $A \setminus \{a\}$:

$$|S_m^{\bar{a}}| = \binom{n-1}{m}$$

Tada je

$$S_m = S_m^a \cup S_m^{\bar{a}} \quad \text{i} \quad S_m^a \cap S_m^{\bar{a}} = \emptyset.$$

Prema principu zbira

$$|S_m| = |S_m^a| + |S_m^{\bar{a}}| \text{ tj. } \binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}.$$

2. način (algebarski)
Koristeći Lemu 38, dobijamo

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} &= \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} + \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} \\
&= \frac{m \cdot (n-1)! + (n-m) \cdot (n-1)!}{m!(n-m)!} \\
&= \frac{(m+n-m) \cdot (n-1)!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m}
\end{aligned}$$

□

Paskalov identitet se koristi za tabelarni prikaz binomnih koeficijenata, tzv. Paskalov trougao (moguće ga je prikazati i u obliku jednakostraničnog trougla, na čijim stranicama su jedinice):

(n,m)	0	1	2	3	4	5	$\dots$	$m'-1$	m'	$\dots$
0	1	–	–	–	–	–	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
1	1	1	–	–	–	–	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
2	1	2	1	–	–	–	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
3	1	3	3	1	–	–	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
4	1	4	6	4	1	–	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
5	1	5	10	5	1	–	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$			
n'	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\binom{n'-1}{m'-1}$	$\binom{n'-1}{m'}$	$\dots$
n'	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$		$\binom{n'}{m'}$	$\dots$

Teorema 41 (Binomna formula) *Neka je $x, y \in \mathbb{R}$ i $n \geq 1$ je proizvoljan ceo broj. Tada važi*

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= x^n + nx^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + nxy^{n-1} + y^n \\ &= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^{n-m}y^m.\end{aligned}$$

za proizvoljne $x, y \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

1. način (kombinatorno) Imajući u vidu da je

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\ldots(x+y)}_{n \text{ puta}},$$

desnu stranu možemo zapisati kao sumu proizvoda (monoma) koje dobijamo kada za činioce izaberemo iz svake zagrade x ili y. Znači, ako iz m ($m \geq 0$) zagrada izaberemo y, a iz $n-m$ zagrada izaberemo x dobijamo

$$x^{n-m}y^m.$$

Broj načina da izaberemo m zagrada iz kojih ćemo izabrati y jednak je $\binom{n}{m}$ (iz preostalih biramo x).

2. način (indukcijom po n)

$n = 1 : (x+y)^1 = x + y$

$T_n \Rightarrow T_{n+1}:$

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n(x+y) =&(x^n + nx^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + nxy^{n-1} + y^n)(x+y) \\
= & \begin{array}{cccccccccccc} x^{n+1} & + & nx^n y & + & \binom{n}{2}x^{n-1}y^2 & + & \ldots & + & \binom{n}{n-1}x^2y^{n-1} & + & xy^n & \\ & + & x^n y & + & \binom{n}{1}x^{n-1}y^2 & + & \ldots & + & \binom{n}{n-2}x^2y^{n-1} & + & nxy^n & + \end{array}
\end{aligned}
$$

Koristeći Paskalov indentitet, dobijamo

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} \quad = \quad & x^{n+1} + (n+1)x^n y + \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right) x^{n-1}y^2 + \ldots \\
& + \left(\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-2}\right) x^2 y^{n-1} + (n+1)xy^n + y^{n+1},
\end{aligned}
$$

što se primenom Leme 40 svodi na

$$
(x+y)^{n+1} = \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} x^{n+1-m} y^m.
$$

□

1.3.1 Polinomni koeficijenti i polinomna formula

Binomni koeficijenti mogu biti uošteni na polinomne koeficijente, kao što je to uvedeno sledećom definicijom.

Definicija 42 *Neka su dati celi brojevi $m_1, \ldots, m_l \geq 0$ i neka je $n = m_1 + \ldots + m_l$. Tada definišemo polinomni koeficijent na sledeći način:*

$$\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} = \frac{n!}{m_1! \cdot \ldots \cdot m_l!}$$

Na osnovu prethodne definicije, direktno slede sledeće osobine.

Teorema 43 *Neka su dati celi brojevi $m_1, \ldots, m_l \geq 0$ i neka je $n = m_1 + \ldots + m_l$.*

(i) $\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} = \binom{n}{m_1}\binom{n-m_1}{m_2}\binom{n-(m_1+m_2)}{m_3}\ldots\binom{m_l}{m_l}$;

(ii) Ako je $\{\{m_1, m_2, \ldots, m_l\}\} = \{\{k_1, k_2, \ldots, k_l\}\}$, onda je $\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} = \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_l}$;

(iii) Ako je $0 < m_1, \ldots, m_l < n$, onda važi
$\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} = \binom{n-1}{m_1-1, m_2, \ldots, m_l} + \binom{n-1}{m_1, m_2-1, \ldots, m_l} + \ldots$
$\ldots + \binom{n-1}{m_1, m_2, \ldots, m_l-1}$;

(iv) $\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_{l-1}, 0} = \binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_{l-1}}$

Dokaz.

(i) Ako se primeni definicija binomnih koeficijenata na desnu stranu, po jedan činilac iz imenioca se uvek skrati sa brojiocem iz naredno razlomka.

$$\begin{aligned}\binom{n}{m_1}\ldots\binom{m_l}{m_l} &= \frac{n!}{m_1!(n-m_1)!}\,\frac{(n-m_1)!}{m_2!(n-m_1-m_2)!}\ldots\frac{m_l!}{m_l!0!}\\ &= \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_l!} = \binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l}\end{aligned}$$

(ii) Treba primetiti da osobina znači da se u imeniocu nalaze isti faktorijeli, samo da su možda uređeni na različite načine. Kako je množenje komutativno i asocijatino, kojim god redom da množimo te faktorijele, na karju ćemo dobiti istu vrednost.

(iii) Algebarski, data jednakost može da se pokaž direktno primenom definicije, što ostavljamo studentima za vežbu.

Kombinatorno. Leva strana odgovara permutacijama sa ponavljanjem

$$P(m_1, \ldots, m_l),$$

što je broj načina da se uredi $m_1 + \ldots + m_l$ elemenata među kojima se npr. a_1 ponavlja m_1 puta, a_2 ponavlja m_2 puta, itd. Ako posmatramo desnu stranu, kombinatorna interpretacija je sledeća. Skup svih uređenja možemo podeliti na l podskupova, tako da svaki podksup sadži n torke sa istom prvom komponentom. Kako su ti podskupovi po parovima disjunktni, možemo primeniti princip zbira. Dalje samo treba zaključiti da je broj načina da se urede elementi tako da je na prvom mestu a_1 jednak broj načina da se uredi preostalih $n-1$ elemenata, pri čemu će biti jedan manje a_1 na raspolaganju, a to je

$$P(m_1 - 1, m_2, \ldots, m_l).$$

Slično se rezonuje o ostalim elementima koji se mogu pojaviti na prvom mestu.

(iv) Na osnovu definicije polinomnog koeficijenta i definicije faktorijela, dobijamo

$$\begin{aligned}\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_{l-1}, 0} &= \frac{n!}{m_1! \ldots m_{l-1}!0!} \\ &= \frac{n!}{m_1! \ldots m_{l-1}!} = \binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_{l-1}}\end{aligned}$$

□

Teorema 44 (Polinomna formula) *Neka su $x_1, \ldots, x_l$ $(l \geq 2)$ proizvoljni relani brojevi i neka je $n \geq 1$. Tada je*

$$(x_1 + \ldots + x_l)^n = \sum_{\substack{m_1 + \ldots + m_l = n \\ m_1 \geq 0 \ldots m_l \geq 0}} \binom{n}{m_1, \ldots, m_l} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_l^{m_l}$$

Zadatak 45 *Koliko sabiraka ima u razvijenom obliku* $(x_1 + \ldots + x_l)^n$*?*

Rešenje. Broj sabiraka je jednak broju rešenja jednačine $m_1 + \ldots + m_l = n$ sa osobinom $m_1 \geq 0 \ldots m_l \geq 0$ a taj broj je

$$\binom{n+l-1}{l-1}$$

Zadatak 46 *Izračunati* $\displaystyle\sum_{\substack{m_1+\ldots+m_l=n \\ m_1\geq 0\ldots m_l\geq 0}} \binom{n}{m_1,\ldots,m_l}$.

Rešenje. Ako je u polinmnoj formuli $x_1 = x_2 = \ldots = x_l = 1$, onda dobijamo

$$\sum_{\substack{m_1+\ldots+m_l=n \\ m_1\geq 0\ldots m_l\geq 0}} \binom{n}{m_1,\ldots,m_l} = (1+\ldots+1)^n = l^n$$

Zadatak 47 *Napisati u razvijenom obliku* $(x+y+z)^3$

Rešenje.

$$\begin{aligned}
(x+y+z)^3 &= \binom{3}{3,0,0}x^3y^0z^0 + \binom{3}{0,3,0}x^0y^3z^0 + \binom{3}{0,0,3}x^0y^0z^3 \\
&\quad \binom{3}{0,1,2}x^0y^1z^2 + \binom{3}{0,2,1}x^0y^2z^1 + \binom{3}{1,0,2}x^1y^0z^2 \\
&\quad \binom{3}{1,2,0}x^1y^2z^0 + \binom{3}{2,0,1}x^2y^0z^1 + \binom{3}{2,1,0}x^2y^1z^0 \\
&\quad \binom{3}{1,1,1}x^1y^1z^1 \\
&= x^3+y^3+z^3+3yz^2+3y^2z+3xz^2+3xy^2+3x^2z+3x^2y+6xyz
\end{aligned}$$

Zadatak 48 *Odrediti koeficijent uz* $x^2y^3z^5$ *u razvoju stepena trinoma* $(x+2y-z)^{10}$

Rešenje. Koeficijent uz $x^2y^3z^5$ je sadržan u sabirku

$$\binom{10}{2,3,5}x^2(2y)^3(-z)^5 = \frac{10!}{2!3!5!}x^2 2^3 y^3(-1)^5 z^5 = -20160x^2y^3z^5$$

Zadatak 49 *Odrediti koeficijent uz x u razvoju stepena trinoma* $(1+x-x^2)^{1749}$

Rešenje. Član koji odgovara (i,j,k) je oblika

$$T_{i,j,k} = \binom{1749}{i,j,k}x^j(-x^2)^k = \binom{1749}{i,j,k}(-1)^k x^{j+2k}.$$

Za $j,k \geq 0$ jednčina $j+2k=1$ ima samo jedno rešenje $(j,k)=(1,0)$, odakle je $T_{1748,1,0} = \binom{1749}{1748,1,0}$ i traženi koeficijent je 1749.

Zadatak 50 *Odrediti koeficijent uz x u razvoju stepena trinoma* $(2x^3-x+1)^4$.

Rešenje. Član koji odgovara (i,j,k) je oblika

$$T_{i,j,k} = \binom{4}{i,j,k}(2x^3)^i(-x)^j = -\binom{4}{i,j,k}2^i(-1)^j x^{3i+j}$$

Znači,

$$\begin{array}{ccccccc} i & + & j & + & k & = & 4 \\ 3i & + & j & + & & = & 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccccccc} i & + & j & + & k & = & 4 \\ & & 2j & + & 3k & = & 11 \end{array}$$

odakle je $(i,j,k) \in \{(0,1,3)\}$ i traženi koeficijent je $\binom{4}{0,1,3} = 4$.