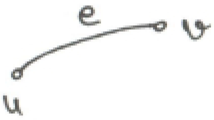
ВЕЖБЕ 8

Основни појмови теорије графова

Граф G је уређени пар $(V(G), E(G))$

$V(G)$ - скуп чворова

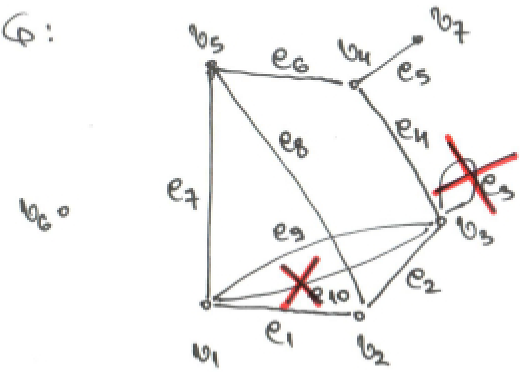
$E(G)$ - скуп грана



$G = (V(G), E(G), \Psi_G)$

Ψ_G - функција ИНЦИДЕНЦИЈЕ

G:



v_7 - висећи чвор

v_6 - изоловани чвор

e_3 - петља

e_9, e_{10} - паралелне гране

ПРОСТИ ГРАФОВИ!

$N_G(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$

скуп суседа чвора v у G

$N_G(v_3) = \{v_1, v_2, v_4\}$

$d_G(v) = |N_G(v)|$ степен чвора

$d_G(v_3) = 3$

$\delta(G) = \min\limits_{v \in V(G)} d_G(v)$

$\Delta(G) = \max\limits_{v \in V(G)} d_G(v)$

Регуларан → сви чворови истог степена

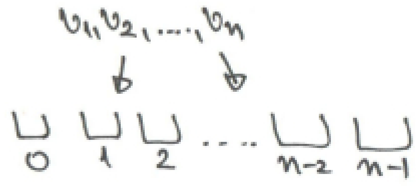
$$T: \sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|$$

1. У сваком графу постоје два чвора једнаког степена.

Нека је дат граф $G=(V,E)$, $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$

Знамо да важи $0\le d(v_i)\le n-1$, $\forall v_i\in V$

Имамо n чворова и n кутија.



- Ако имамо изоловани чвор у G онда немамо чвор степена $n-1$

  $\left.\begin{array}{l}n \text{ чворова}\\ n-1 \text{ кутија } (0,1,\dots,n-2)\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ДП}}$ бар 2 чвора су у истој кутији, тј. истог су степена

- Ако имамо чвор степена $n-1$, онда немамо изоловани чвор

  $\left.\begin{array}{l}n \text{ чворова}\\ n-1 \text{ кутију } (1,2,\dots,n-1)\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ДП}}$ бар 2 чвора су истог степена

  $\exists v_i, v_j$

  $d(v_i)=d(v_j)$

- Ако немамо ни изоловани, ни чвор степена $n-1$

  $\left.\begin{array}{l}n \text{ чворова}\\ n-2 \text{ кутије } (1,2,\dots,n-2)\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ДП}}$ бар 2 чвора су истог степена

2. Колико на скупу $V=\{1,2,\dots,n\}$ има

а) различитих графова

Максимално можемо имати $\binom{n}{2}$ грана у графу са n чворова.

$$2\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2 = 2^{\binom{n}{2}}$$

За сваку грану бирамо да ли се налази у графу или се не налази.

в) различитих графова са тачно m грана?

$$\binom{\binom{n}{2}}{m}$$

Од свих могућих грана бирамо којих m узимамо за граф

3. Нека је G граф са n чворова и $n-1$ грана. Доказати да у G постоји изоловани или висећи чвор.

Претпоставимо супротно, $\underbrace{d(v) \geq 2, \forall v \in V(G)}$,

$\iff \delta(G) \geq 2$

$e = |E| = n-1$

$n = |V|$

$$2|E| = \sum_{v \in V(G)} d(v)$$

$$2 \cdot (n-1) = \sum_{v \in V(G)} d(v) \geq 2 \cdot n$$

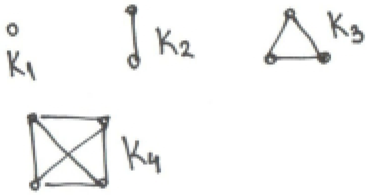
$$n-1 \geq n \quad ⚡$$

Закључујемо да $\exists v_i \in V(G)$

$d(v_i) < 2 \iff d(v_i) = 0 \vee d(v_i) = 1$

4. Одредити број чворова и грана за следеће графове

а) комплетан граф K_n



$|V(K_n)| = n$

$|E(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

$(n-1)$-регуларан граф

б) празан граф $\overline{K_n}$

$|V(\overline{K_n})| = n$!

$|E(\overline{K_n})| = 0$

0-регуларан граф

c) пут P_{n+1}

$|V(P_{n+1})| = n+1$

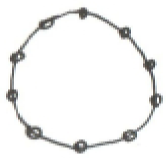
$|E(P_{n+1})| = n$ дужина пута

полурегуларан граф

$d(v_0) = d(v_n) = 1$

$d(v_i) = 2 \quad \forall i = 1, \dots, n-1$

d) контура C_n



$|V(C_n)| = n$

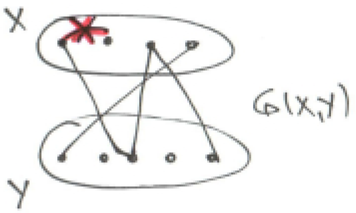
$|E(C_n)| = n$

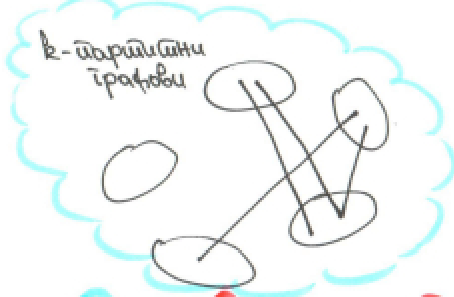
дужина контуре C_n je n!

2-регуларан граф

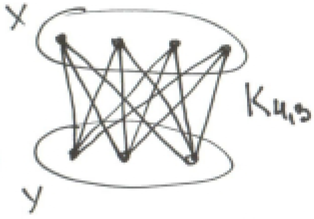
е) комплетан бипартитан граф $K_{m,n}$

бипартитан граф G $\quad X \cap Y = \emptyset \quad X \cup Y = V(G)$





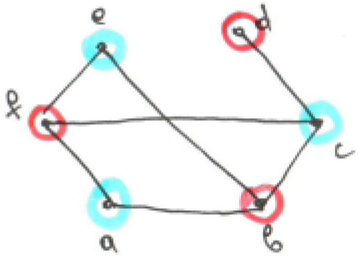
комплетан бипартитан граф $K_{m,n}$

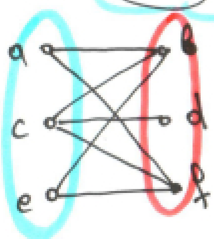


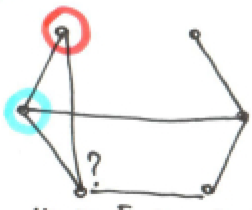
$|V(K_{m,n})| = m+n$

$|E(K_{m,n})| = m \cdot n$

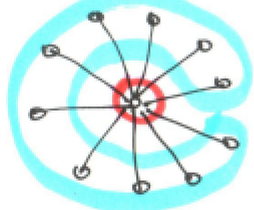
T: Граф је бипартитан акко не садржи непарне контуре.





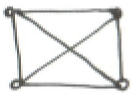


није бипартитан!

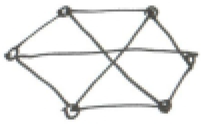


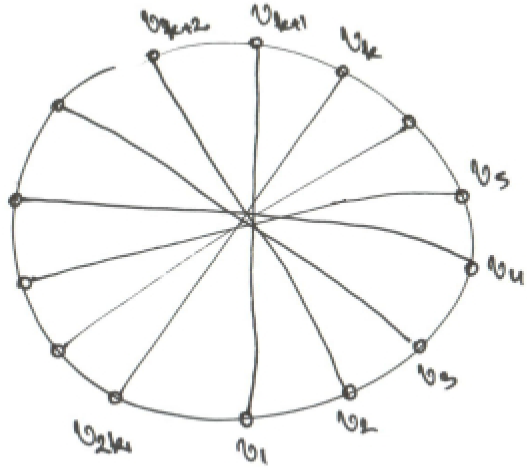
5. За сваки паран природан број $n \geq 4$ постоји кубни граф са n чворова.

• $n=4$



• $n=6$





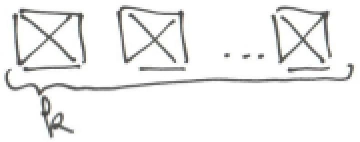
Посматрајмо контуру C_{2k}

Повучемо „дугачке" дијагонале

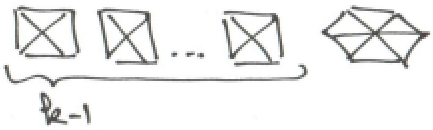
$v_i v_{k+i}$, $\forall i = 1,2,\dots,k$

II начин: $4k$ $4k+2$

1° $n=4k$



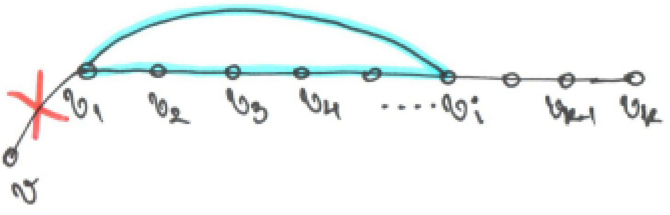
2° $n=4k+2$



6. Ако је у графу G степен сваког чвора бар 2, онда G садржи контуру.

$\delta(G)\geq 2 \iff \forall v\in V \ d(v)\geq 2$

Посматрајмо пут максималне дужине у графу G $v_1v_2v_3\ldots v_k$



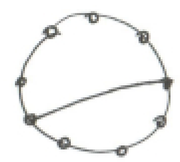
Због услова $\delta(G)\geq 2$ знамо да $\exists v\in V(G)$ т.д. $vv_1\in E(G)$

Ако је v чвор који није на путу, онда је пут $vv_1v_2\ldots v_k$ дужи од максималног. ↯

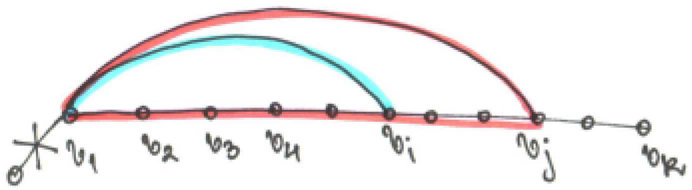
$\Rightarrow$ Сусед чвора v_1 је неки од чворова $v_3, v_4, \ldots, v_k$. Узмимо да је то чвор v_i.

Сада смо добили контуру $v_1v_2\ldots v_iv_1$

7. Ако је $\delta(G) \geq 3$, доказати да G садржи контуру са тетивом.



Посматрајмо пут максималне дужине у графу G.



Из услова $\delta(G) \geq 3$ знамо да $\exists\, v_i, v_j$, $3 \leq i < j \leq k$, т.д. $v_1v_i, v_1v_j \in E(G)$

Сада је $v_1v_2 \ldots v_i \ldots v_jv_1$ тражена контура, а v_1v_i је њена тетива

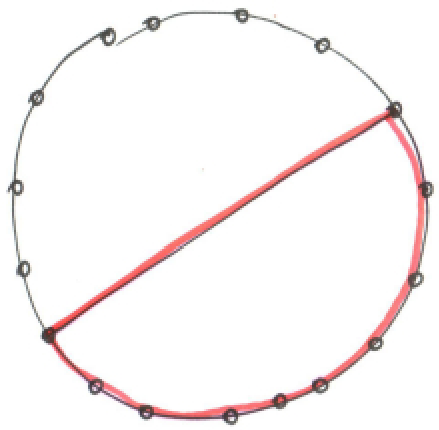
8. Ако је $\delta(G) \geq 3$, доказати да G садржи контуру парне дужине.

(7) $\Rightarrow$ G има контуру са тетивом

1° Контура парне дужине $\Rightarrow$ доказ је готов

2° Контура је непарна

Тетива дели непарну контуру на два дела различите парности. Уколико непарном делу додамо тетиву, добићемо контуру парне дужине.

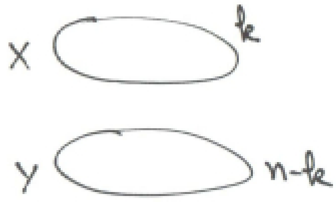


9. Ако је $\delta(G) \geq 2$, доказати да G садржи контуру дужине бар $\delta(G)+1$. (домаћи)

10. Ако је G бипартитан граф са n чворова и e грана, доказати да је $e \leq \frac{n^2}{4}$.

Нека је $G(X,Y)$ дати бипартитан граф

$|V(G)| = n = |X| + |Y|$



Нека је $|X| = k$. Сада је $|Y| = n-k$

$$\begin{aligned} |E(G)| &\leq |X| \cdot |Y| \\ &= k \cdot (n-k) \\ &= kn - k^2 \end{aligned}$$

Претпоставимо да класа X има мањи број чворова, тј. $k \leq \frac{n}{2}$

$$|E(G)| \leq kn - k^2 \leq \frac{n}{2} \cdot n - \frac{n^2}{4} = \frac{n^2}{2} - \frac{n^2}{4} = \frac{2n^2 - n^2}{4} = \frac{n^2}{4}$$

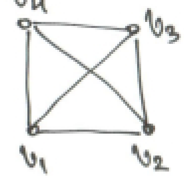
$G_1 = G_2 \iff V(G_1) = V(G_2) \wedge E(G_1) = E(G_2)$

$G_1 \cong G_2 \iff \exists$ изоморфизам f за које важи

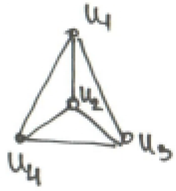
1° $f: V(G_1) \to V(G_2)$ бијекција

2° $uv \in E(G_1) \iff f(u)f(v) \in E(G_2)$

K_4

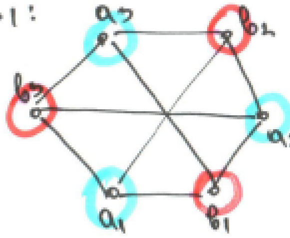


$\cong$



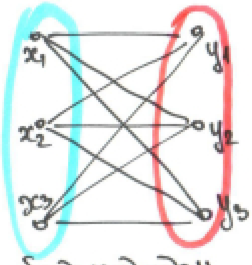
$f: \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ u_4 & u_2 & u_1 & u_3 \end{pmatrix}$

G_1:



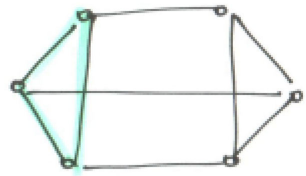
бипартитан

G_2:



бипартитан

G_3:



није бипартитан

$G_1 \cong G_2$

$a_i \mapsto x_i \quad b_i \mapsto y_i$

$G_2 \ncong G_3$

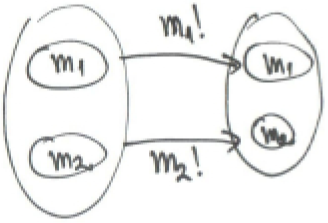
$G_1 \ncong G_3$

11. Колико има изоморфизама за два комплетна графа са по n чворова?

→ Треба одредити број бијективних пресликавања n-точланог скупа на n-точлани скуп.

$\Rightarrow n!$

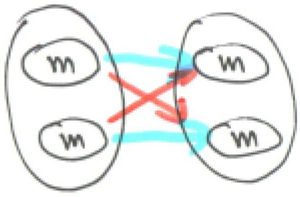
12. Доказати да су свака два комплетна бипартитна графа са класама по m_1 и m_2 чворова изоморфна. Колико има изоморфизама?



Треба само класе исте кардиналности пресликати једну на другу

$m_1! \cdot m_2!$ $\quad m_1 \neq m_2$

• Ако је $m_1 = m_2 = m$



$2 \cdot (m! \cdot m!) = 2 \cdot (m!)^2$

13. Колико има неизоморфних 2-регуларних графова са 10 чворова?

Контуре или уније контура

Најмања контура је C_3!

C_{10}

$C_5 \cup C_5$

$C_4 \cup C_6$ $\quad$ $C_3 \cup C_3 \cup C_4$

$C_3 \cup C_7$

$\cancel{C_2 \cup C_8}$

$\cancel{C_1 \cup C_9}$

Постоји 5 таквих графова.

Граф H је подграф графа G, $H \subset G$, ако је $V(H) \subseteq V(G) \wedge E(H) \subset E(G)$.

Граф H је **покривајући подграф** графа G, ако је $V(H) = V(G) \wedge E(H) \subset E(G)$

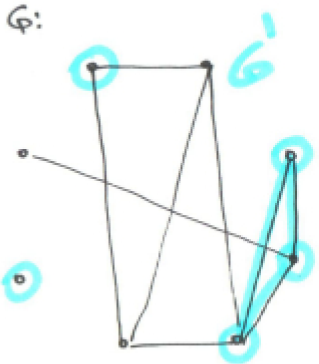
Индукован подграф

$G' = G[V']$

1° $V(G') = V'$

2° $E(G') = \{uv \mid u,v \in V' \wedge uv \in E\}$

G:



$G'' = G[E'']$

1° $V(G'') = \{v \mid \exists\, uv \in E''\}$

2° $E(G'') = E''$

$G \cup \bar{G} = K_n$

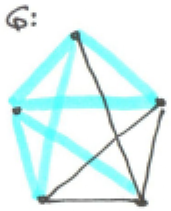
$|E(\bar{G})| + |E(G)| = \binom{n}{2}$

Комплемент графа G, у ознаци $\bar{G}$, је граф за који важи

$V(\bar{G}) = V(G)$

$E(\bar{G}) = \{uv \mid u,v \in V(G) \wedge uv \notin E(G)\}$

G:



$\bar{G}$: