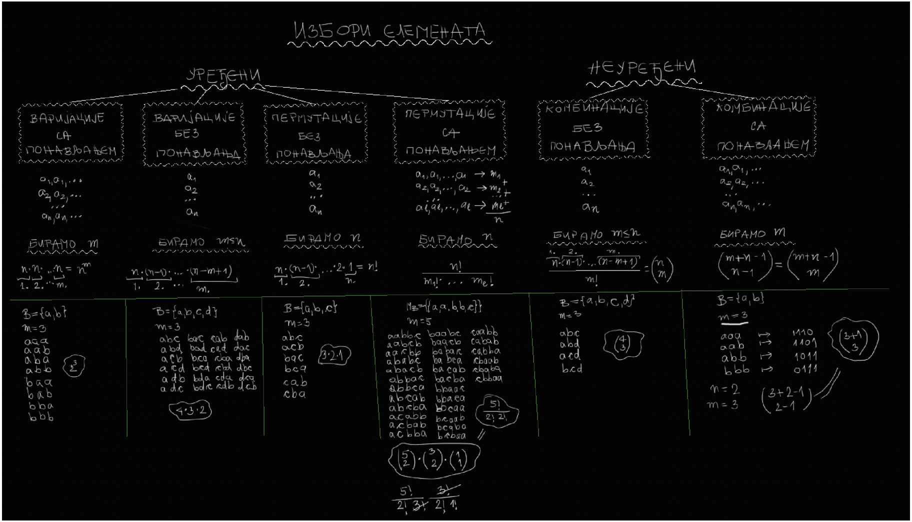
DISKRETNA MATEMATIKA

- PREDAVANJE -

Jovanka Pantović

Pregled


ИЗБОРИ ЕЛЕМЕНАТА
УРЕЂЕНИ
НЕУРЕЂЕНИ
ВАРИЈАЦИЈЕ СА ПОНАВЉАЊЕМ
ВАРИЈАЦИЈЕ БЕЗ ПОНАВЉАЊА
ПЕРМУТАЦИЈЕ БЕЗ ПОНАВЉАЊА
ПЕРМУТАЦИЈЕ СА ПОНАВЉАЊЕМ
КОМБИНАЦИЈЕ БЕЗ ПОНАВЉАЊА
КОМБИНАЦИЈЕ СА ПОНАВЉАЊЕМ
БИРАМО m
БИРАМО m≤n
БИРАМО n
БИРАМО n
БИРАМО m≤n
БИРАМО m

Tema 1

Varijacije sa ponavljanjem

Uređeni izbori elemenata sa ponavljanjem

Neka je $|B| = n$.

Definition

Varijacija sa ponavljanjem klase m skupa B jeste uređena m-torka $(b_1, \ldots, b_m)$ čija svaka komponenta pripada skupu B.

$$(b_1, \ldots, b_m) \in B \times \ldots \times B$$

Broj varijacija sa ponavljanjem klase m skupa od n elemenata je

$$\overline{V}(n, m) = |B \times \ldots \times B| = |B| \cdot \ldots \cdot |B| = |B|^m = n^m.$$

Uređeni izbori elemenata sa ponavljanjem

Kod varijacija sa ponavljanjem:

- važan je redosled i
- elementi se mogu ponavljati.

Uređeni izbori elemenata sa ponavljanjem

Primer

Napisati sve varijacije sa ponavljanjem klase 4 *skupa* $B = \{a, b\}$.

$$\begin{array}{cccc} aaaa & aaab & aaba & aabb \\ abaa & abab & abba & abbb \\ baaa & baab & baba & babb \\ bbaa & bbab & bbba & bbbb \end{array}$$

Uređeni izbori elemenata sa ponavljanjem

Primer

Na koliko načina se može izabrati pin kod od 4 cifre?

Neka je $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

b_1	b_2	b_3	b_4

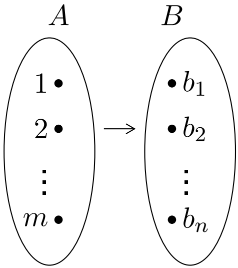
Broj traženih pin kodova jednak je

$$\overline{V}(10, 4) = 10^4.$$

Uređeni izbori elemenata sa ponavljanjem

Preslikavanje $b : \{1, \ldots, m\} \to B$:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \cdots & m \\ \hline \multicolumn{1}{c}{\downarrow} & \multicolumn{1}{c}{\downarrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\downarrow} \\ \multicolumn{1}{c}{B} & \multicolumn{1}{c}{B} & \multicolumn{1}{c}{\cdots} & \multicolumn{1}{c}{B} \end{array}$$



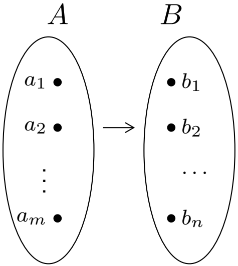
Broj preslikavanja $f : A \to B$

Teorema

Neka su A i B skupovi sa osobinom $|A| = m \geq 1$ i $|B| = n \geq 1$. Broj svih preslikavanja $f : A \to B$ jednak je n^m.

Neka je $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$.
Svako preslikavanje f dato je sa

$$(f(a_1), \ldots, f(a_m)) \in B \times \ldots \times B.$$



Preslikavanje

$$\{f : A \to B\} \to B \times \ldots \times B$$

je bijekcija. Na osnovu principa proizvoda

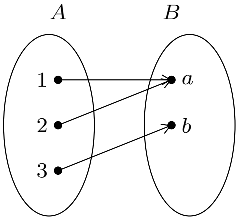
$$|\{f : A \to B\}| = |B \times \ldots \times B| = |B| \cdot \ldots \cdot |B| = n^m$$

Broj preslikavanja $f : A \to B$

Primer

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{a, b\}$. Napisati sva preslikavanja $f : A \to B$.

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \{(1,a),(2,a),(3,a)\}\\
f_2 &= \{(1,a),(2,a),(3,b)\}\\
f_3 &= \{(1,a),(2,b),(3,a)\}\\
f_4 &= \{(1,a),(2,b),(3,b)\}\\
f_5 &= \{(1,b),(2,a),(3,a)\}\\
f_6 &= \{(1,b),(2,a),(3,b)\}\\
f_7 &= \{(1,b),(2,b),(3,a)\}\\
f_8 &= \{(1,b),(2,b),(3,b)\}
\end{aligned}
$$



$$(f_2(1), f_2(2), f_2(3)) = (a, a, b)$$

Zadatak

Zadatak

Ako je $A = \{a_1, \ldots, a_n\}, n \geq 2$, *onda je* $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Posmatraćemo preslikavanje

$$\varphi : \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^n$$

sa osobinom $\varphi(X) = (b_1, \ldots, b_n)$, $X \subseteq A$, gde je

$$b_i = \begin{cases} 1 & , a_i \in X \\ 0 & , a_i \notin X \end{cases} .$$

φ je bijektivno preslikavanje $\qquad \Rightarrow \qquad |\mathcal{P}(A)| = 2^n.$

Zadatak

Zadatak

Neka je $A = \{a, b, c\}$*. Pokazati da je* $|\mathcal{P}(A)| = 2^3$.

Primer. Tada je

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

$$\begin{array}{lclclcl}
\varphi(\emptyset) & = & (0,0,0) & & \varphi(\{a,b\}) & = & (1,1,0) \\
\varphi(\{a\}) & = & (1,0,0) & & \varphi(\{a,c\}) & = & (1,0,1) \\
\varphi(\{b\}) & = & (0,1,0) & & \varphi(\{b,c\}) & = & (0,1,1) \\
\varphi(\{c\}) & = & (0,0,1) & & \varphi(\{a,b,c\}) & = & (1,1,1)
\end{array}$$

Tema 2

Varijacije bez ponavljanja

Uređeni izbori elemenata skupa bez ponavljanja

Neka je $|B| = n$.

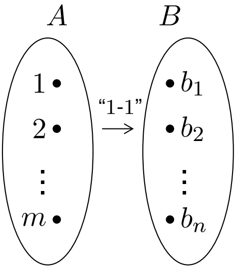
Definicija

Varijacija bez ponavljanje klase m (ili m-permutacija) skupa B jeste uređena m-torka elemenata iz B čije sve komponente su međusobno različite.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
1 & 2 & \cdots & m \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{\downarrow} & \multicolumn{1}{c}{\downarrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\downarrow} \\
\multicolumn{1}{c}{B} & \multicolumn{1}{c}{B} & \multicolumn{1}{c}{\cdots} & \multicolumn{1}{c}{B}
\end{array}$$

Broj injektivnih preslikavanja $f : A \to B$

Injektivno preslikavanje $b : \{1, \ldots, m\} \to B$:



Uređeni izbori elemenata skupa bez ponavljanja

Neka je $B = \{b_1, \dots, b_n\}$.

Teorema

Neka je $|A| = m$ *i* $n \geq m \geq 1$. *Broj* $1-1$ *preslikavanja* $f : A \to B$ *jednak je*

$$n(n-1)\dots(n-m+1).$$

Uređeni izbori elemenata skupa bez ponavljanja

Neka je $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$.

Teorema

Neka je $|A| = m$ $n \geq m \geq 1$. *Broj* $1-1$ *preslikavanja* $f : A \to B$ *jednak je* $n(n-1)\ldots(n-m+1)$.

Indukcijom po m.
m=1: Za $A = \{a\}$, postoje sledeća preslikavanja: $f(a) = b_1$, ...$f(a) = b_n$
T_m : Pretpostavimo da tvrđenje važi za $|A| = m$.
T_{m+1} :Treba pokazati da tvrđenje važi za $|A| = m+1$.
Injektivna preslikavanja su oblika

$$(b_1, f(a_2), \ldots, f(a_{m+1})), (b_2, f(a_2), \ldots, f(a_{m+1}))\ldots, (b_n, f(a_2), \ldots, f(a_{m+1})).$$

Na funkciju $g : \{a_2, \ldots, a_{m+1}\} \to B \setminus \{b_i\}$, $1 \leq i \leq n$, možemo primeniti induktivnu pretpostavku, tj. zaključujemo da je broj takvih injektivnih funkcija jednak

$$(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot((n-1)-m+1) = (n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m).$$

Prema principu zbira, broj funkcija $f : A \to B$ jednak je

$$n \quad \cdot \quad (n-1)\ldots(n-m) = n(n-1)\ldots(n-(m+1)+1).$$

Broj injektivnih preslikavanja $f : A \to B$

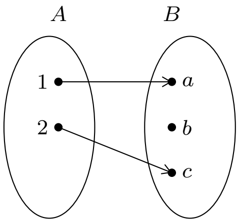
Primer

Neka je $A = \{1, 2\}$ *i* $B = \{a, b, c\}$*. Napisati sva injektivna preslikavanja* $f : A \to B$*.*

$$f_1 = \{(1, a), (2, b)\}$$
$$f_2 = \{(1, a), (2, c)\}$$

$$f_3 = \{(1, b), (2, a)\}$$
$$f_4 = \{(1, b), (2, c)\}$$

$$f_5 = \{(1, c), (2, a)\}$$
$$f_6 = \{(1, c), (2, b)\}$$



$$(f_2(1), f_2(2)) = (a, c)$$

Uređeni izbori elemenata skupa bez ponavljanja

Broj varijacija bez ponavljanja klase m od n elemenata jednak je:

$$V(n,m) = n(n-1)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Primer:

- broj reči dužine m, bez ponavljanja slova, nad azbukom od n slova

Zadatak

Zadatak

Koliko ima petocifrenih brojeva

(i) *čije su sve cifre različite?*

(ii) *čije su svake dve susedne cifre različite?*

(i) $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$

(ii) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 59049.$

Tema 3

Permutacije

Broj permutacija skupa

Permutacija je specijalni slučaj varijacije bez ponavljanja u kojoj se biraju svi dati elementi.

Definicija

Bijektivno preslikavanje konačnog skupa A u samog sebe je permutacija skupa A.

Broj permutacija skupa A od n elemenata jednak je

$$P(n) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Tema 4

Permutacije sa ponavljanjem

Broj permutacija multiskupa ("sa ponavljanjem")

Neka je dat konačan multiskup

$$M = \{\{\underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{m_1}, \ldots, \underbrace{a_l, \ldots, a_l}_{m_l}\}\}$$

Permutacija skupa M je uređena n torka elemenata skupa M u kojoj se svaki element pojavljuje tačno onoliko puta koliko se pojavljuje u M, gde je $n = m_1 + \ldots + m_l$.

Teorema

Broj permutacija multiskupa M jednak je

$$P(m_1, m_2, \ldots, m_l) = \frac{(m_1 + \ldots + m_l)!}{m_1! \cdot \ldots \cdot m_l!}$$

Broj permutacija multiskupa ("sa ponavljanjem")

Primer

Napisati sve permutacije multiskupa $M = \{\{a, a, a, b, b, c\}\}$.

Broj permutacija multiskupa M jednak je $\frac{6!}{3!2!} = 60$.

$aaabbc$	$aaabcb$	$aaacbb$	$aababc$	$aabacb$	$aabbac$	$aabbca$	$aabcab$	$aabcba$	$aacabb$
$aacbab$	$aacbba$	$abaabc$	$abaacb$	$ababac$	$ababca$	$abacab$	$abacba$	$abbaac$	$abbaca$
$abbcaa$	$abcaab$	$abcaba$	$abcbaa$	$acaabb$	$acabab$	$acabba$	$acbaab$	$acbaba$	$acbbaa$
$baaabc$	$baaacb$	$baabac$	$baabca$	$baacab$	$baacba$	$babaac$	$babaca$	$babcaa$	$bbaaac$
$bbaaca$	$bbacaa$	$bacaab$	$bacaba$	$bacbaa$	$bbaaac$	$bbaaca$	$bbacaa$	$bbcaaa$	$bcbaaa$
$caaabb$	$caabab$	$caabba$	$cabaab$	$cababa$	$cabbaa$	$cbaaab$	$cbaaba$	$cbabaa$	$cbbaaa$

Zadatak

Zadatak

Koliko različitih reči dužine 15 se može napisati od slova reči

A N A V O L I M I L O V A N A?

$$P(4, 2, 2, 2, 2, 2, 1) = \frac{15!}{4!2!2!2!2!2!}$$

Tema 5

Kombinacije bez ponavljanja

Neuređeni izbori elemenata bez ponavljanja

Definition

Kombinacija bez ponavljanja klase m (m-kombinacija) skupa B od n elemenata jeste m-točlani podskup skupa B od n elemenata.

Primer:

- izbor 7 od 39 brojeva za LOTO
- izbor 2 predstavnika od 15 studenata za takmičenje iz matematike

Neuređeni izbori elemenata bez ponavljanja

Primer

Na koliko načina se iz grupe od 5 studenata mogu izabrati 3 delegata koji će objasniti profesoru da časovi od 3 sata zahtevaju 10 sati za vežbu.

Neka su studenti Alek (A), Pera (P), Vlada (V), Filip (F) i Marko (M). Tada su moguće tročlane delegacije:

$$\begin{array}{ccccc} APV & APF & APM & AVF & AVM \\ AFM & PVF & PVM & PFM & VFM \end{array}$$

Neuređeni izbori elemenata bez ponavljanja

Neka je $|B| = n \geq 1$ i $\binom{B}{m}$ skup svih podskupova skupa B sa $m \geq n$ elemenata.

Teorema

Broj m-kombinacija bez ponavljanja skupa B jednak je

$$C(n,m) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!}$$

Svakoj m-kombinaciji bez ponavljanja odgovara $m!$ varijacija bez ponavljanja koje dobijamo uređivanjem izabranog podskupa od m elemenata. Odatle za broj svih m permutacija važi:

$$m! \cdot \left|\binom{B}{m}\right| = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$$

$$\left|\binom{B}{m}\right| = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Neuređeni izbori elemenata bez ponavljanja

Primer

Odrediti broj podskupova skupa A koji ima n elemenata.

Neka je $A_i = \{B : B \subseteq A \text{ i } |B| = i\}$ $0 \leq i \leq n$. Tada je

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{P}(A)| &= |A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n| \\
&= |A_0| + |A_1| + \ldots + |A_n| \\
&= 1 + C(n,1) + \ldots + C(n,n)
\end{aligned}
$$

Permutacije sa ponavljanjem preko kombinacija

Sada možemo primetiti vezu između permutacija sa ponavljanjem i kombinacija bez ponavljanja.

Teorema

Neka je $n = m_1 + \ldots + m_l$. *Tada je*

$$P(m_1, \ldots, m_l) = C(n, m_1) \cdot C(n - m_1, m_2) \cdot \ldots \cdot C(m_l, m_l).$$

$$C(n, m_1) \cdot C(n - m_1, m_2) \cdot \ldots \cdot C(m_l, m_l) =$$

$$= \frac{n!}{m_1!(n-m_1)!} \frac{(n-m_1)!}{m_2!(n-(m_1+m_2))!} \cdots \frac{m_l!}{m_l!0!}$$

$$= \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_l!} = P(m_1, \ldots, m_l)$$

Zadatak: Dati kombinatorno obrazloženje za jednakost iz tvrđenja.

Tema 6

Kombinacije sa ponavljanjem

Neuređeni izbori elemenata sa ponavljanja

Definition

Kombinacija sa ponavljanjem klase m (m-kombinacija) skupa B od n elemenata jeste m-točlani multiskup čiji elementi su iz skupa B (isti element može da se pojavi više puta). Broj svih takvih kombinacija ćemo označavati $\overline{C}(n, m)$.

Neuređeni izbori elemenata sa ponavljanja

Primer

U poslastičarnici su na raspolaganju sladoledi od vanile (v), maline (m) i pistaća (p). Na koliko načina se mogu izabrati 4 kugle sladoleda?

$vvvv$	111100	$vvpp$	110011	$mmmm$	011110
$vvvm$	111010	$vmmm$	101110	$mmmp$	011101
$vvvp$	111001	$vmmp$	101101	$mmpp$	011011
$vvmm$	110110	$vmpp$	101011	$mppp$	010111
$vvmp$	110101	$vppp$	100111	$pppp$	001111

$$\underbrace{11}_{v}0\underbrace{1}_{m}0\underbrace{1}_{p}$$

Neuređeni izbori elemenata sa ponavljanjem

Neka je

$$B = \{a_1, \dots, a_n\}.$$

Svakom multiskupu od m elemenata iz B možemo pridružiti uređenu $(m+n-1)$-torku sa m jedinica i $n-1$ nula.

$$\underbrace{\{\{a_1, \dots, a_2, a_2, a_2, \dots, a_n, a_n\}\}}_{m \text{ elemenata}} \mapsto \underbrace{1\dots1}_{a_1}\mathbf{0}\underbrace{1\dots1}_{a_2}\mathbf{0}\dots\mathbf{0}\underbrace{1\dots1}_{a_n}$$

Neuređeni izbori elemenata sa ponavljanjem

Teorema

Broj m-kombinacija sa ponavljanjem skupa od n elemenata jednak je

- $\overline{C}(n,m) = C(m+n-1, n-1)$
- $\overline{C}(n,m) = C(m+n-1, m)$
- $\overline{C}(n,m) = P(n-1, m)$.

- broj načina da se od $m+n-1$ mesta izabere $n-1$ mesto za nule
- broj načina da se od $m+n-1$ mesta izabere m mesta za jedinice
- broj načina da se uredi multiskup od m jedinica i $n-1$ nula

Zadatak

Zadatak

Koliko se (neuređenih) izbora od 4 *elementa može kreirati od slova azbuke* $A = \{v, m, p\}$, *ako se elementi mogu ponavljati?*

$$\binom{4 + (3-1)}{3-1} = \binom{6}{2} = 15.$$

Celobrojna rešenja linearne jednačine

Zadatak

Neka su $n > 0$ *i* $m \geq 0$ *nenegativni celi brojevi. Koliko rešenja ima jednačina*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$$

pod uslovom da je $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$.

Primetimo da postoji bijekcija između skupa rešenja i skupa uređenih $(m+n-1)$-torki 0 i 1:

$$\begin{gathered}\{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 + \ldots + x_n = m, x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\} \\ \downarrow \\ \{(a_1, \ldots, a_{m+n-1}) : a_1 + \ldots + a_{m+n-1} = m, a_i \in \{0, 1\}\}\end{gathered}$$

$$\underbrace{11\ldots1}_{x_1}0\ldots0\underbrace{11\ldots1}_{x_n}$$

Celobrojna rešenja linearne jednačine

Zadatak

Neka su $n > 0$ *i* $m \geq 0$ *dati prirodni brojevi. Koliko rešenja ima jednačina*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$$

pod uslovom da je $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$.

Broj rešenja jednak je broju $(n + m - 1)$-torki u kojima ima m jedinica i $n - 1$ nula:

$$\binom{m + (n-1)}{n-1} \text{ tj. } \binom{m + (n-1)}{m}$$

Znači od $m + n - 1$ komponenti biramo m komponenti za 1, odnosno biramo $n - 1$ komponenti za 0.

Zadatak

Zadatak

Rešiti jednačinu

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

nad skupom nenegativnih celih brojeva.

Broj permutacija elemenata multiskupa $\{\{0, 0, 1, 1, 1, 1\}\}$ jednak je:

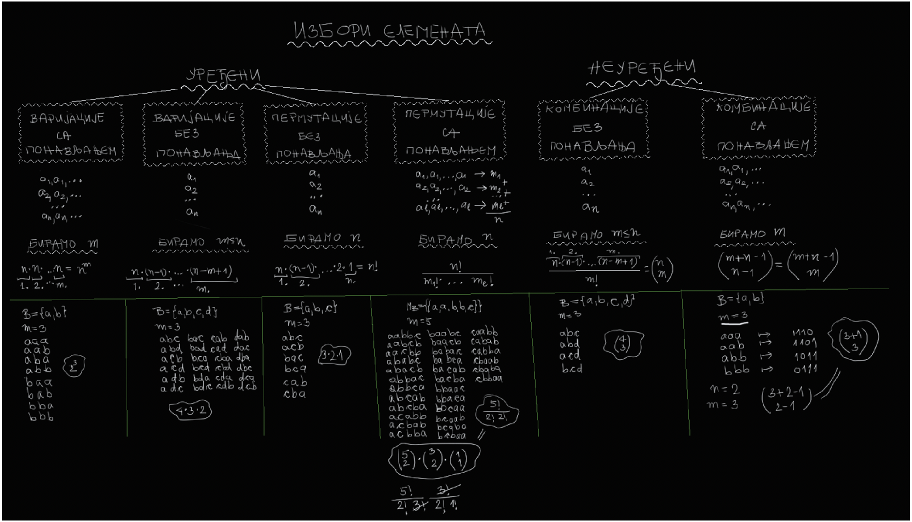
$$\binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15.$$

1. Na koliko se načina može ubaciti 16 kuglica u 4 kutije koje su označene brojevima 1,2,3,4 tako da
   1.1. u svakoj kutiji bude bar po jedna kuglica
   2.2. ne budu sve kuglice ubačene u jednu kutiju
2. Odrediti broj celobrojnih rešenja jednačine

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$$

ako je $x_1 \geq 3$ i $x_2 \geq 4$.

Pregled


ИЗБОРИ ЕЛЕМЕНАТА
УРЕЂЕНИ
НЕУРЕЂЕНИ
ВАРИЈАЦИЈЕ СА ПОНАВЉАЊЕМ
ВАРИЈАЦИЈЕ БЕЗ ПОНАВЉАЊА
ПЕРМУТАЦИЈЕ БЕЗ ПОНАВЉАЊА
ПЕРМУТАЦИЈЕ СА ПОНАВЉАЊЕМ
КОМБИНАЦИЈЕ БЕЗ ПОНАВЉАЊА
КОМБИНАЦИЈЕ СА ПОНАВЉАЊЕМ
БИРАМО m
БИРАМО m≤n
БИРАМО n
БИРАМО n
БИРАМО m≤n
БИРАМО m