

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Integralni račun

1. Izračunati:

- (a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx;$
- (b) $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx;$
- (c) $\int \frac{\ln 2x}{x \ln 4x} dx;$
- (d) $\int \frac{x - \sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2} dx.$

2. Izračunati:

- (a) $\int (x^2 + x) \ln(x) dx;$
- (b) $\int x^5 \sqrt{x^3 + 1} dx;$
- (c) $\int x^3 e^{x^2} dx;$
- (d) $\int \sin(\ln x) dx;$
- (e) $\int (x^2 + 2x) \cos x dx;$
- (f) $\int \frac{3x+1}{x^2+4x+5} dx;$
- (g) $\int \frac{3x-6}{x^2-4x+5} dx;$
- (h) $\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx;$
- (i) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}} dx;$
- (j) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}} dx;$
- (k) $\int \frac{x^3}{1 + \sqrt[3]{x^4+1}} dx;$

3. Izračunati:

- (a) $\int \frac{1}{x^6 \sqrt{x^2-1}} dx;$
- (b) $\int \frac{\sqrt{x^3+x^4}}{x^4} dx;$
- (c) $\int \sqrt[3]{3x-x^3} dx;$
- (d) $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx;$

4. Izračunati:

- (a) $\int \sin x \cos 3x \sin 3x \, dx;$
- (b) $\int \frac{1}{3 + 5 \cos x} \, dx;$
- (c) $\int \frac{1}{\sin x - 2 \cos x + 3} \, dx;$
- (d) $\int \frac{1}{\sin^4 x \cos^2 x} \, dx;$
- (e) $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} \, dx;$
- (f) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} \, dx;$
- (g) $\int \frac{e^{3x} - e^x}{e^{2x} + 1} \, dx.$

5. Izračunati:

- (a) $\int_2^{e+1} x \ln(x-1) \, dx;$
- (b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\tan^2 x}{(1+\tan x^2)} \, dx;$
- (c) $\int_0^4 |x^2 - 5x + 6| \, dx.$

6. Primenom određenog integrala odrediti graničnu vrednost niza $\{a_n\}$, gde je:

- (a) $a_n = n(\frac{1}{1+4n^2} + \frac{1}{2^2+4n^2} + \frac{1}{3^2+4n^2} + \dots + \frac{1}{5n^2});$
- (b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{2n^2+2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n^2+4n+4}} + \frac{1}{2n^2+6n+9} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{5}}.$

7. Izračunati površinu figure ograničene:

- (a) parabolom $y = \frac{x^2}{2}$ i kružnicom $x^2 + y^2 = 8;$
- (b) pravama $y = x, y = -x$ i tangentom krive $y = \sqrt{x^2 - 5}$ u tački $A(3, 2);$

Diferencijalne jednačine

8. Rešiti diferencijalne jednačine:

- (a) $y(1-x^2)dy - x(1-y^2)dx = 0;$
- (b) $xydx + (1+y^2)\sqrt{1+x^2}dy = 0.$

9. Odrediti partikularno rešenje diferencijalne jednačine koja zadovoljava zadati uslov:

- (a) $y' - xy' = 2(1+x^2y'), y(1) = 0;$
- (b) $(1+e^x)yy' = e^x, y(0) = 1.$

10. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine:

- (a) $xydy - y^2dx = (x+y)^2e^{-\frac{y}{x}}dx;$
- (b) $(x+y-2)dx + (x-y+4)dy = 0;$
- (c) $y' = \frac{2x+y-1}{4x+2y+5};$
- (d) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2;$
- (e) $(y^2+1)dx = (xy+y^2+1)dy;$
- (f) $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0;$
- (g) $2y' \ln x + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{y};$
- (h) $(3y^2 + 2xy + 2x)dx + (6xy + x^2 + 3)dy = 0;$
- (i) $(x \sin y + y)dx + (x^2 \cos y + x \ln x)dy = 0$ (Integracioni množitelj je oblika $\mu(x)$).

11. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine:

- (a) $xy'' - y' = e^x x^2$;
- (b) $yy'' + y'^2 = 2e^{-y}$;
- (c) $xyy'' + xy'^2 = 3yy'$;
- (d) $y'' + 6y' + 8y = 0$;
- (e) $y''' + 2y'' + y = 0$;
- (f) $y''' + 5y'' + y' + 5y = 0$.

12. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine:

- (a) $y'' + 2y' + 2y = 1 + x$;
- (b) $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$;
- (c) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x$;
- (d) $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{1 + \sin x}$;
- (e) $(2x + 1)^2 y'' + (4x + 2)y' - 4y = x^2$ za $2x + 1 > 0$.

13. Pokazati da se diferencijalna jednačina $(xy'' + y')x \ln^2 x + y = \ln^2 \ln x$ smenom $x = x(t)$ može svesti na jednačinu sa konstantnim koeficijentima i naći njeno opšte rešenje.