- Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

2 1 1 2 1 2 1 1 1

- Neka je $\mathcal{M}$ skup svih kvadratnih matrica čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $\det : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ 2) $\det : \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ 3) $\det : \mathcal{M} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$ 4) $\det : \mathcal{M} \xrightarrow[na]{1-1} \mathbb{R}$ 5) det je linearna

- Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je: 1) $\text{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$
2) $\text{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{N}$ 3) $\text{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ 4) $\text{rang} : \mathcal{M} \overset{1-1}{\to} \mathbb{N} \cup \{0\}$ 5) $\text{rang} : \mathcal{M} \overset{na}{\to} \mathbb{N} \cup \{0\}$

- Ako je matrica A' dobijena od matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ elementarnim transformacijama, tada je:
1) $|\det(A)| = \lambda |\det(A')|$ za neko $\lambda \in \mathbb{R}$ 2) $\text{rang}(A) = \text{rang}(A')$ 3) $A \cdot A' = I$ 4) $\det A = 0 \Leftrightarrow \det A' = 0$

- Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje kvadratne matrice A, B, C reda 3 i svaki skalar λ:
1) $A(BC) = (AB)C$ 2) $(B+C)A = BA + CA$ 3) $(AB)^2 = A^2B^2$ 4) $A - B = B - A$ 5) $\det(\lambda A) = \lambda^3 \det(A)$
6) $\det(AB) = \det(B)det(A)$ 7) $\text{rang}(AB) = \text{rang}(A)\text{rang}(B)$ 8) $\det(A \cdot B) = \det(A) + \det(B)$

- Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ su kolinearni ako i samo ako: 1) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
3) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$ 4) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 2$ 5) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 1$ 6) $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su zavisni
7) $(\exists \lambda \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \lambda \vec{b}$ 8) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 9) $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) \quad (\vec{a} = \lambda \vec{b} \ \vee \ \lambda \vec{a} = \vec{b})$ 10) $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = 0 \ \wedge \ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

- Neka je skup $\mathcal{A} = \Big\{(i,j) | i \in \{1,2,\ldots,m\} \wedge j \in \{1,2,\ldots,n\}\Big\}$. Tada za matricu M_{mn} nad poljem $\mathbb{R}$ važi:
1) $M_{mn} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ 2) $M_{mn} : \mathcal{A} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ 3) $M_{mn} : \mathcal{A} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$ 4) $M_{mn} : \mathcal{A} \xrightarrow[na]{1-1} \mathbb{R}$ 5) M_{mn} je linearna

- Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ su komplanarni ako i samo ako:
1) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 2$ 2) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 2$ 3) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ 4) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$
5) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ 6) $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \alpha \vec{b} + \beta \vec{c}$ 7) $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = 0 \ \wedge \ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$ 8) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je zavisna.

- Neka su matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$ i $B = [b_{ij}]_{nn}$ nad poljem $\mathbb{R}$. Tada postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je:
1) $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) \Rightarrow |\det(A)| = \lambda |\det(B)|$ 2) $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) \Rightarrow \det(A) = \lambda \det(B)$
3) $|\det(A)| = \lambda |\det(B)| \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(B)$ 4) $\det(A) = \lambda \det(B) \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(B)$

- Ako je A kvadratna matrica reda 3, tada je: 1) $\text{rang}A = 3 \Leftarrow \det A \neq 0$ 2) $\det A = 0 \Rightarrow \text{rang}A = 0$
3) $\det A = 0 \Leftrightarrow \text{rang}A \leq 2$ 4) $\det A = 0 \Rightarrow \text{rang}A = 3$ 5) $\text{rang}A = 3 \Rightarrow \det A \neq 0$ 6) $\text{rang}A = 3 \Leftarrow \exists A^{-1}$

- Neka su $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $n = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ matrice kolone nad poljem $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $(n^\top x)a = (an^\top)x$ 2) $(n^\top a)x = (xn^\top)a$ 3) $n^\top a = a^\top n$ 4) $na = an$ 5) $(n^\top x)a = n^\top(xa)$ 6) $a^\top n = 0 \Rightarrow a \perp n$
(Napomena: $(\forall \lambda \in \mathbb{R})$ $[\lambda] \cdot A \overset{def}{=} \lambda \cdot A = \lambda A$, za svaku matricu A).

- Za proizvoljne kvadratne regularne matrice A, B, C reda $n > 1$ važi:
1) $A(BC) = (AB)C$ 2) $AB = BA$ 3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 4) $\det(AB) = \det(A) + \det(B)$,
5) $A^2(B^2C^3) = (A^2B^2)C^3$ 6) $(A^2B^2)^{-1} = B^{-2}A^{-2}$ 7) $\det(A^3B) = (\det(A))^3 \cdot \det(B)$

- Ako je kvadratna matrica B dobijena od matrice A elementarnim transformacijama, tada je: 1) $\exists A^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \exists B^{-1}$
2) $\det(A) = \det(B)$ 3) $\det(A) \neq 0 \ \wedge \ \det(B) \neq 0$ 4) $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$ 5) $A \cdot B = I$ 6) $A = \alpha B$ za neki skalar α

- Koje od tvrđenja je tačno ako je A kvadratna matrica reda n: 1) $Rang(A) = 0 \Rightarrow det(A) = 0$
2) $det(A) = 0 \Leftrightarrow Rang(A) \leq n - 1$ 3) $Rang(A) = n \Rightarrow det(A) \neq 0$ 4) $Rang(A) = n \Rightarrow det(A) = 0$.

- Za proizvoljne **komutativne** regularne matrice A, B, C reda n važi (sa $\mathbb{O}$ je označena nula-matrica reda n): 1) $A + \mathbb{O} = \mathbb{O}$
2) $A \cdot \mathbb{O} = \mathbb{O}$ 3) $A + (B + C) = (A + B) + C$ 4) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ 5) $A + \mathbb{O} = A$ 6) $\text{rang}(AB) = \text{rang}(A)\text{rang}(B)$
7) $\text{rang}(A + B) = \text{rang}(A) + \text{rang}(B)$ 8) $AB = \mathbb{O} \ \Rightarrow \ (A = \mathbb{O} \ \vee \ B = \mathbb{O})$ 9) $AA^{-1} = A^{-1}A$ 10) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

- Neka su $\mathbf{a_1} = (a_{11}, \ldots, a_{n1})$, $\mathbf{a_2} = (a_{12}, \ldots, a_{n2}), \ldots$, $\mathbf{a_n} = (a_{1n}, \ldots, a_{nn})$ vektori kolne matrice
$A = A_{nn} = [a_{i,j}]_{nn}$ i neka je $V = \text{Lin}(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots \mathbf{a_n}) = \{\alpha_1\mathbf{a_1} + \alpha_2\mathbf{a_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{a_n} | \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$. Tada:
1) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang}A < n$ 2) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang}A \leq n$ 3) $(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots \mathbf{a_n})$ je zavisna $\Leftrightarrow \det A = 0$
4) $\dim V \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang}A \geq 1$ 5) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \dim V < n$ 6) $(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots \mathbf{a_n})$ je zavisna $\Leftrightarrow \text{rang}A < n$

- Odrediti rang r matrice A u sledeća 4 slučaja.

$$A = \begin{bmatrix} p & r & r & q \\ r & p & q & r \\ r & q & p & r \\ q & r & r & p \end{bmatrix}$$

a) $(p,q,r) = (0,0,0)$; **b)** $(p,q,r) = (1,1,-1)$; **c)** $(p,q,r) = (1,-1,0)$; **d)** $(p,q,r) = (1,-3,1)$;

a) r= 0 **b)** r= 1 **c)** r= 2 **d)** r= 3

- Neka je $A \sim B \Leftrightarrow$ kvadratne matrice A i B reda n su ekvivalentne. Zaokruži tačno.
1) $A \sim B \Rightarrow \big(\det A = 0 \Leftrightarrow \det B = 0\big)$ **2)** $A \sim B \Leftrightarrow |\det A| = |\det B|$ **3)** $A \sim B \Rightarrow det(A) = \det B$ **4)** $\det A = \det B \neq 0 \Rightarrow A \sim B$ **5)** $(\det A \neq 0 \wedge \det B \neq 0) \Rightarrow A \sim B$ **6)** Ako je $\lambda \neq 0$, tada važi da $\det A = \lambda \det B \Rightarrow A \sim B$ **7)** $A \sim B \Rightarrow \big(\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0\big)$

- Zaokruži tačan odgovor. Za proizvoljne kvadratne matrice A, B, C reda n važi:
1) $A(BC) = (AB)C$ **2)** $\det \lambda A = \lambda \det A$ **3)** $AB = BA$ **4)** $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ако постоји I
5) $\det(AB) = \det A + \det B$ **6)** $\det(A+B) = \det A + \det B$ **7)** $\det(AB) = \det A \det B$

- Neka $A \sim B$ znači da su matrice A i B ekvivalentne. Tada zaokruži tačan odgovor:
1) $A \sim B \Rightarrow \big(\text{rang}A = 0 \Leftrightarrow \text{rang}B = 0\big)$ **2)** $A \sim B \Rightarrow \det(A) = \det(B)$ **3)** $A \sim B \Rightarrow |\det(A)| = |\det(B)|$
4) $A \sim B \Leftrightarrow |\det(A)| = |\det(B)|$ **5)** $A \sim B \Leftrightarrow \big(\text{rang}A = 0 \Leftrightarrow \text{rang}B = 0\big)$ **6)** $\det(A) = \det(B) \Rightarrow A \sim B$

- Za koje vrednosti parametara $a, b, c \in \mathbb{R}$ su navedene funkcije linearne transformacije, i za one koje jesu, naći odgovarajuću matricu i diskutovati njen rang:

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \ f(x,y,z) = (a^2x + b^3y - cx^2, 3y^a - 4b^y)$ $a=1$ $b=c=0$ $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ 2

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \ f(x,y) = (x\sqrt{2}, a\sqrt{2})$ $a=0$ $M = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 1

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ f(x,y) = x + 1$ ______

- Ako je $f(0) = 0$, tada funkcija f: **1)** sigurno jeste linearna transformacija **2)** sigurno nije linearna transformacija **3)** može a ne mora biti linearna transformacija

- Zaokružiti funkcije koje su linearne transformacije:
1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \ f(x,y) = (x+y, \sin(x+y))$ **2)** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \ f(x,y) = (0,0,0)$
3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \ f(x,y,z) = (x+y, z, 2z)$ **4)** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ f(x,y) = x^2 + y^2$

- U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ navesti sve vektorske podprostore: (0,0) dimV = 0, СВЕ РАВНИ КРОЗ 0, СВЕ ПРАВЕ У 0, И ПРОСТОР

- Koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) | x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$ je podprostor: 2
a) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 2x_2 = \ldots = nx_n\}$ **b)** $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 = x_2^2\}$ **c)** $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$

- Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x - y, 2x + ay)$ je izomorfizam akko $a \in$ $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

- Za svaku linearnu transformaciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i svako $x, y, \lambda, v \in \mathbb{R}$ tačno je: **1)** $x = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ **2)** $f(0) = 0$ **3)** $f(0) = 1$ **4)** $f(xy) = f(x)f(y)$ **5)** $f(xy) = x\, f(y)$ **6)** $f(x) = ax$ za neko $a \in \mathbb{R}$ **7)** $f(\lambda + v) = f(\lambda) + f(v)$

- Neka je $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ proizvoljni vektor i neka je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definisana sa $f(x_1, x_2, x_3) = \vec{m} \cdot \vec{x}$, gde je vektor $\vec{m} = m_1\vec{i} + m_2\vec{j} + m_3\vec{k}$ dati slobodni vektor. Funkcija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je: $\vec{m} = 0$
1) linearna transformacija **2)** injektivna **3)** sirjektivna **4)** bijektivna **5)** izomorfizam

- Neka je $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ proizvoljni vektor i neka je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definisana sa $f(x_1, x_2, x_3) = \vec{m} \cdot \vec{x}$, gde je vektor $\vec{m} = \cos\alpha\, \vec{i} + \cos\beta\, \vec{j} + \cos\gamma\, \vec{k}$ dati slobodni vektor i α, β, γ uglovi je $\vec{m}$ obrazuje redom sa $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Funkcija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je:
1) linearna transformacija **2)** injektivna **3)** sirjektivna **4)** bijektivna **5)** izomorfizam **6)** $|\vec{m}| = 1$

- Neka je $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) = (x_1, x_2, x_3)$ tj. $\varphi(\vec{x}) = (\vec{x}\vec{i}, \vec{x}\vec{j}, \vec{x}\vec{k})$, gde su $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$
1) linearna transformacija **2)** injektivna **3)** sirjektivna **4)** bijektivna **5)** izomorfizam

- Neka je $\psi : \mathbb{R}^3 \to V$ definisana sa $\psi(x_1, x_2, x_3) = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_2\vec{k}$ tj. $\psi(\vec{x}\vec{i}, \vec{x}\vec{j}, \vec{x}\vec{k}) = \vec{x}$, gde su $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostori uređenih trojki i slobodnih vektora. Da li je funkcija $\psi : \mathbb{R}^3 \to V$
1) linearna transformacija **2)** injektivna **3)** sirjektivna **4)** bijektivna **5)** izomorfizam

- Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$? **1)** $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ **2)** $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$ **3)** $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 6 \\ -12 \end{bmatrix}$