ВЕЖБЕ 9

– Повезаност графова –

Шетња $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots v_{k-1} e_k v_k$
$= v_0 v_1 v_2 \ldots v_{k-1} v_k$

Стаза – нема понављања грана
Пут – нема понављања чворова

Чворови u и v су ПОВЕЗАНИ у G
$\iff \exists$ u-v пут у G

$\omega(G)$ – број компоненти повезаности графа G

G је ПОВЕЗАН $\iff \forall u,v \in V(G)$ u и v повезани
$\iff \omega(G) = 1$

$C_3 \cup C_3$ 

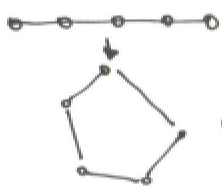
$d(v)$ – степен чвора v
$d(u,v)$ – растојање између u и v
$d(G)$ – дијаметар

Растојање између чворова u и v

$d_G(u,v)$ – дужина најкраћег u-v пута у G

Дијаметар графа G

$$d(G) = \max_{u,v \in V(G)} d_G(u,v)$$

P_5  $d(P_5) = 4$

C_5 $d(C_5) = 2$!

C_n $d(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

1. Нека је G повезан граф са n чворова и $\Delta(G) \leq 2$. Тада је $G \cong C_n$ или $G \cong P_n$.

$$\left.\begin{array}{l} G \text{ повезан} \Rightarrow \text{нема изоловане чворове} \\ \Delta(G) \leq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow d(v) \in \{1,2\},\ \forall v \in V(G)$$

- Ако G има висећи чвор, онда из услова задатка добијамо да је једино могуће да је $G \cong P_n$
- Ако G нема висећи чвор, сви чворови су степена 2, па је $G \cong C_n$.

2. Доказати да је за сваки граф G бар један од графова G и $\overline{G}$ повезан.

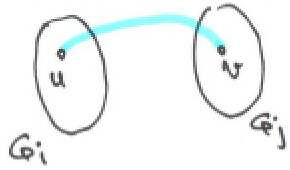
Ако је G повезан, тврђење је доказано.

Претпоставимо да је G неповезан, тј. $\omega(G)=k\geq 2$. Доказујемо да је тада $\overline{G}$ повезан.

Нека су $G_1, G_2, \dots, G_k$ компоненте повезаности графа G

Посматрајмо произвољне чворове $u,v \in V(\overline{G})=V(G)$

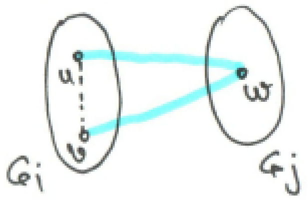
- Нека $u\in V(G_i)$, $v\in V(G_j)$



$uv\notin E(G)$ јер су у различитим компонентама повезаности чворови u и v

$uv\in E(\overline{G}) \Rightarrow u$ и v су повезани у $\overline{G}$

- Нека $u,v\in V(G_i)$



Како $\omega(G)=k\geq 2$, знамо да $\exists G_j$, $G_i\neq G_j$

$\Rightarrow \exists w\in V(G_j)$ $\quad uw\in E(\overline{G})$

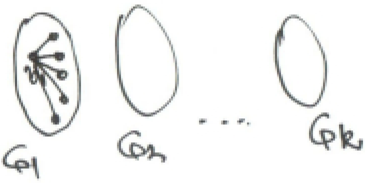
Исто као малопре добијамо $vw\in E(\overline{G})$

$\Rightarrow u-w-v$ је пут дужине 2 у $\overline{G}$

$\Rightarrow \overline{G}$ је повезан граф!

3. Ако је G граф са $n \geq 3$ чворова, такав да је $\delta(G) \geq \frac{n-1}{2}$, доказати да је G повезан.

Претпоставимо $\omega(G) = k \geq 2$. Нека су $G_1, G_2, \ldots, G_k$ компоненте повезаности графа G.



Посматрајмо G_i. Нека $v_i \in V(G_i)$

$$|V(G_i)| \geq \underbrace{1}_{v_i} + \underbrace{\frac{n-1}{2}}_{\text{суседи чвора } v_i} = \frac{n+1}{2}, \ \forall i = 1, 2, \ldots, k$$

$$\underset{\overset{\|}{n}}{|V(G)|} = |V(G_1)| + |V(G_2)| + \ldots + |V(G_k)| = \sum_{i=1}^{k} |V(G_i)| \geq 2 \cdot \frac{n+1}{2} = n+1$$

$$n \geq n+1 \ \lightning$$

$\Rightarrow$ G је повезан граф

II начин: Нека су $G_1, \ldots, G_k$, $k \geq 2$ компоненте повезаности графа G

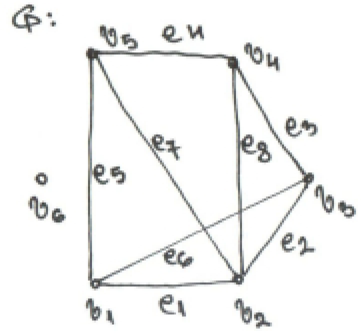
Нека је G_i компонента повезаности са најмањим бројем чворова $\Rightarrow |V(G_i)| \leq \frac{n}{k}$

Нека је $v \in V(G_i)$

$$d_{G_i}(v) = d_G(v) \leq \frac{n}{k} - 1 = \frac{n-k}{k} \overset{k \geq 2}{\leq} \frac{n-2}{2} < \frac{n-1}{2} \ \lightning \qquad \delta(G) \geq \frac{n-1}{2} \Leftrightarrow \forall u \in V(G) \ d(u) \geq \frac{n-1}{2}$$

– Графови и матрице –

G:



Матрица инциденције $B(G)$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \in e_j \\ 0, & v_i \notin e_j \end{cases}$$

$$B(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

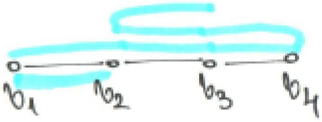
Матрица суседства $A(G)$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i v_j \in E(G) \\ 0, & v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

$$A(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

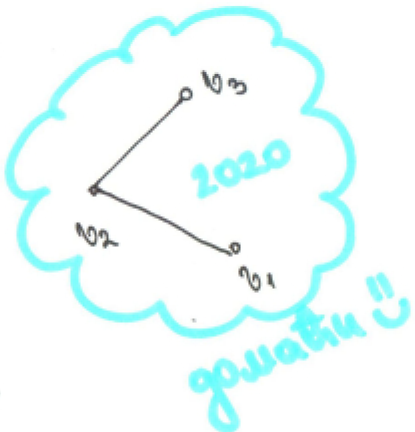
Т: Број различитих v_i-v_j шетњи дужине $k \geq 1$ у графу G једнак је елементу a_{ij} у матрици $A^k(G)$.

4. Одредити број свих $v_2 - v_3$ шетњи дужине 7 у графу



$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^7 = A^3 \cdot A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 13 & 0 & 8 \\ 13 & 0 & 21 & 0 \\ 0 & 21 & 0 & 13 \\ 8 & 0 & 13 & 0 \end{bmatrix}$$

$a_{23} = 21 \rightarrow$ Број шетњи дужине 7 у G од v_2 до v_3 је 21.

- Графички низови -

Низ је графички уколико постоји граф са тим низом степена чворова.

$(5,4,3,2,1)$ није графички низ

1° 5 чворова и $d(v_1)=5$ ↯

2° непаран број чворова непарног степена

3° немамо 2 чвора истог степена

6. Утврдити да ли су следећи низови графички. За оне који јесу конструисати одговарајуће графове.

а) (4, 4, 3, 2, 1)

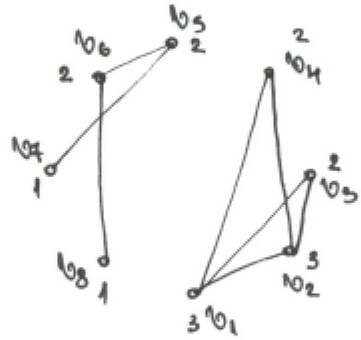
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
4	4	3	2	1
	3	2	1	0
		1	0	-1

-1 не може бити степен неког чвора

⇒ Низ није графички

б) (3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1)

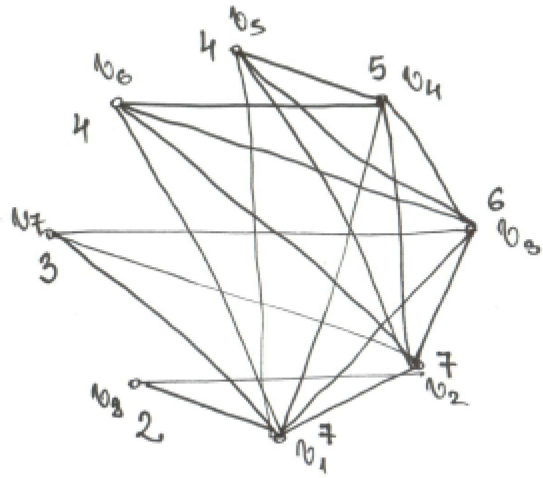
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
3	3	2	2	2	2	1	1
	2	1	1	2	2	1	1
		0	0	2	2	1	1
					1	0	1
							0



1011011100

c) (7,7,6,5,4,4,3,2)

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
7	7	6	5	4	4	3	2
	6	5	4	3	3	2	1
		4	3	2	2	1	0
			2	1	1	0	
				0	0		



d) (7,6,6,5,4,3,2,1)

e) (7,4,3,3,2,2,2,1,1,1)

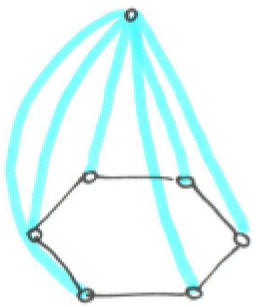
7. Доказати да постоје тачно два неизоморфна графа са низом степена $(6,3,3,3,3,3,3)$.

7 чворова $\Rightarrow$ један чвор је повезан са свим осталим

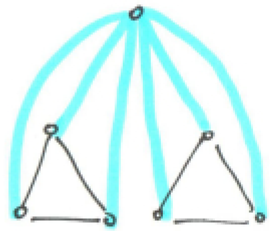
$$\begin{array}{ccccccc} 6 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

Добијамо 2-регуларан граф са 6 чворова брисањем чвора који је био повезан са свим осталим чворовима почетног графа

$C_6 \vee C_3 \cup C_3$



C_6



$C_3 \cup C_3$

СТАБЛА

Ацикличан граф = не садржи контуре

T_n - стабло са n чворова

СТАБЛО = ПОВЕЗАН + АЦИКЛИЧАН граф

Т: Свака два чвора у стаблу су повезана јединственим путем.

Т: Свако стабло са бар 2 чвора има бар 2 висећа чвора.

Т: Свако стабло са n чворова има тачно n-1 грану.

МИНИМАЛАН повезан граф.

МАКСИМАЛАН ацикличан граф

1. Доказати да је свако стабло са бар два чвора бипартитан граф.

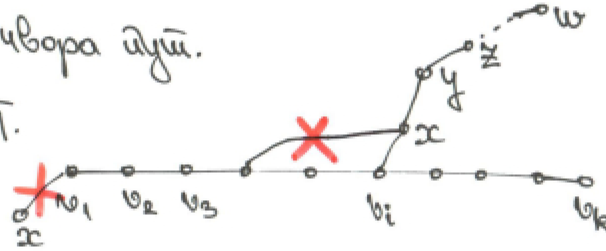
Знамо да је граф бипартитан акко не садржи непарне контуре.

Стабла не садрже никакве контуре, самим тим ни оне непарне.

$\Rightarrow$ Стабла су бипартитни графови.

Шума је ацикличан граф.

2. Доказати да је стабло са тачно два висећа чвора пут.



Нека је $v_1v_2\dots v_k$ најдужи пут у датом стаблу T.

Довољно је доказати да T нема више чворова.

Ако постоји још неки чвор x који је сусед v_1 (или v_k), добија се пут дужи од максималног ↯

⇒ Нови чвор мора бити сусед само неког чвора v_i, $i \in \{2,3,\dots,k-1\}$

- x висећи (3 висећа чвора ↯)
- x има неког суседа y који мора бити нови чвор (иначе добијамо контуру)
- y висећи ↯
- y има новог суседа z
- z висећи ↯
- z има новог суседа

⋮

Поступак је коначан (јер радимо са коначним графовима или смо добили пут који је дужи од максималног)

⇒ $\exists w$ висећи ↯ (добили 3 висећа чвора)

3. Нађи сва неизоморфна стабла са 7 чворова.

11 неизоморфних стабала са 7 чворова