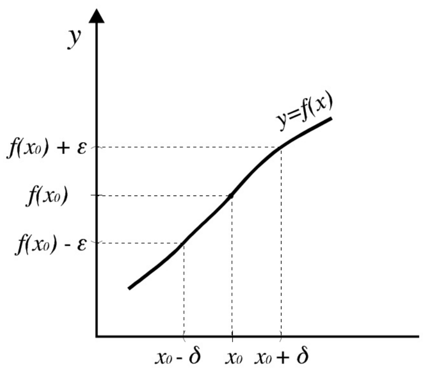
Neprekidnost funkcije

Funkcija $f : D \to R$ je neprekidna u tački $x_0 \in D$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Da bi funkcija bila neprekidna u tački x_0 treba da važi:



1) $x_0 \in D$, tj. funkcija je definisana u tački x_0,

2) ako je x_0 tačka nagomilavanja za D, tada postoji $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ i važi jednakost $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,

3) Ako je $x_0 \in D$ izolovana tačka tada je funkcija neprekidna u toj tački.

Ako funkcija nije neprekidna u tački x_0, onda je funkcija f prekidna u tački x_0, odnosno funkcija f ima prekid u tački x_0.

Ako je $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ funkcija je neprekidna sa leve strane.

Ako je $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ funkcija je neprekidna sa desne strane.

Funkcija f je neprekidna u tački x_0 ako i samo ako je neprekidna u tački x_0 sa leve i sa desne strane.

Vrste prekida

Neka funkcija f u tački x_0 ima prekid i neka je x_0 tačka nagomilavanja za oblast D.

1) Ako postoji $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, onda kažemo da funkcija f u tački x_0 ima prividan (otklonjiv) prekid $(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0))$.

2) Ako postoji $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, pri čemu je $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, onda kažemo da funkcija f u tački x_0 ima skok.

Prekid prve vrste je prividan prekid ili skok. Prekid druge vrste je svaki prekid koji nije prekid prve vrste (ako bar jedna od graničnih vrednosti $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ ili $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ ne postoji (kao konačna)).

1. Data je funkcija $f(x)=\begin{cases}(e+x)^{sinx}, & x\geq 0\\ sinx+A, & x<0\end{cases}$. Odrediti A tako da funkcija bude neprekidna.

$x_0 = 0$

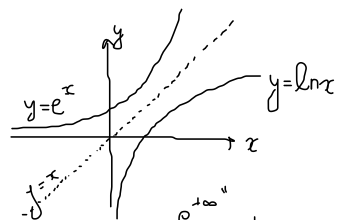
$\lim\limits_{x\to 0^+}(e+x)^{\sin x} = e^0 = 1 = f(0)$

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ uslov neprekidnosti

$f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-}(sinx + A)$

$\lim\limits_{x\to 0^-}(sinx + A) = A,\ \ f(0)=1 \Rightarrow A = 1$

2. Data je funkcija $f(x)=\begin{cases}(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ A, & x=0\\ -\dfrac{1}{1+lnx}, & x>0\end{cases}$. Odrediti A tako da funkcija bude neprekidna.



$\lim\limits_{x\to 0^-}(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}} = 0,$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-1}{1+lnx} = 0$

$A = f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-1}{1+lnx} \Rightarrow A = 0$

"$e^{+\infty}$" $= +\infty$ $\qquad$ "$\ln 0^+$" $= -\infty$

"$e^{-\infty}$" $= 0$ $\qquad$ "$\ln +\infty$" $= +\infty$

"$\dfrac{1}{e^{+\infty}}$" $=$ "$\dfrac{1}{\infty}$" $= 0$

3. Data je funkcija $f(x)=\begin{cases}arctg(1+\frac{1}{x}), & x\neq 0\\ A, & x=0\end{cases}$.

Da li se može odrediti konstanta A tako da funkcija bude neprekidna u tački $x=0$?

$\lim\limits_{x\to 0^+} arctg(1+\dfrac{1}{x}) = \dfrac{\pi}{2}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0^-} arctg(1+\dfrac{1}{x}) = -\dfrac{\pi}{2}$

Leva i desna granična vrednost nisu iste pa ne postoji $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Znači, ne postoji konstanta A takva da je funkcija $f(x)$ neprekidna u tački $x=0$.

4.

$$f(x) = \begin{cases} \left(\sin^2 2x + 1\right)^{\frac{\cos^3 x}{x^2}}, & x < 0 \\ A, & x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} + B^2, & x > 0 \end{cases}$$

$A, B = ?$

непрекидна у $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(e^{-\frac{1}{x}} + B^2\right) = 0 + B^2 = B^2$$

$$\lim_{x\to 0^-} \left(1 + \sin^2 2x\right)^{\frac{\cos^3 x}{x^2}} \overset{\text{"}1^{\infty}\text{"}}{=} \lim_{x\to 0^-} \underbrace{\left(\left(1+\sin^2 2x\right)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}\right)}_{e}^{\sin^2 2x \cdot \frac{\cos^3 x}{x^2}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin^2 2x}{x^2} \cdot \underbrace{\cos^3 x}_{\to 1}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{\to 1}\right)^2 \cdot 4} = e^4$$

$f(0) = A$ $\quad$ $\boxed{A = e^4} = B^2 \Rightarrow \boxed{B = \pm e^2}$

5.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , \ x \le 3 \\ (x-2)^{\frac{1}{(x-3)^2}} & , \ x > 3 \end{cases}$$

НЕПРЕКИДНОСТ У $x = 3$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x) = f(3)$$

$$\lim_{x \to 3^+} (x-2)^{\frac{1}{(x-3)^2}} \overset{\text{"}1^{\infty}\text{"}}{=} \lim_{x \to 3^+} \underbrace{\left(1+(x-3)\right)^{\frac{1}{x-3}}}_{e}{}^{\frac{1}{x-3}} = e^{\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{1}{x-3}} = \text{"}e^{+\infty}\text{"} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 3^-} (2x+1) = 7 = f(3)$$

$7 \neq +\infty \Rightarrow$ ПРЕКИД II ВРСТЕ

6.

$$f(x)=\begin{cases}(\sin x)^{tg^2 x}, & x<\frac{\pi}{2}\\ A, & x=\frac{\pi}{2}\\ Ae+\frac{B}{x}, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$A, B = ?$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left(Ae+\frac{B}{x}\right)=Ae+\frac{2B}{\pi}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=A$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\sin x)^{tg^2 x} \overset{"1^\infty"}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\underbrace{(1+\sin x-1)^{\frac{1}{\sin x-1}}}_{e}\cdot(\sin x-1)\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=$$

$$=e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\sin x-1)\cdot\frac{\underbrace{\sin^2 x}_{\to 1}}{1-\sin^2 x}}=e^{-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1-\cancel{\sin x}}{(1-\cancel{\sin x})(1+\sin x)}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\boxed{A=\frac{1}{\sqrt{e}}}$$

$$\frac{e}{\sqrt{e}}+\frac{2B}{\pi}=\frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow \boxed{B=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1-e}{\sqrt{e}}}$$