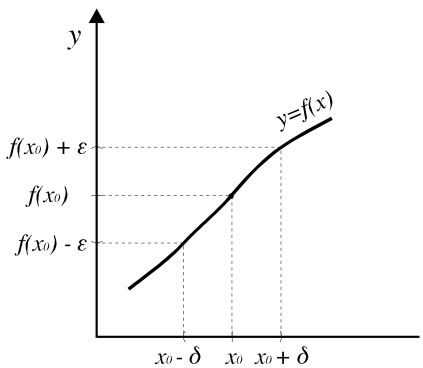
Neprekidnost funkcije

Funkcija $f : D \to R$ je neprekidna u tački $x_0 \in D$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow | f(x) - f(x_0) | < \varepsilon).$$

Da bi funkcija bila neprekidna u tački x_0 treba da važi:



1) $x_0 \in D$, tj. funkcija je definisana u tački x_0,
2) ako je x_0 tačka nagomilavanja za D, tada postoji $\lim_{x \to x_0} f(x)$ i važi jednakost $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,
3) Ako je $x_0 \in D$ izolovana tačka tada je funkcija neprekidna u toj tački.

Ako funkcija nije neprekidna u tački x_0, onda je funkcija f prekidna u tački x_0, odnosno funkcija f ima prekid u tački x_0.

Ako je $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ funkcija je neprekidna sa leve strane.

Ako je $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ funkcija je neprekidna sa desne strane.

Funkcija f je neprekidna u tački x_0 ako i samo ako je neprekidna u tački x_0 sa leve i sa desne strane.

Vrste prekida

Neka funkcija f u tački x_0 ima prekid i neka je x_0 tačka nagomilavanja za oblast D.

1) Ako postoji $\lim_{x \to x_0} f(x)$, onda kažemo da funkcija f u tački x_0 ima prividan (otklonjiv) prekid $(\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0))$.
2) Ako postoji $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ i $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, pri čemu je $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$, onda kažemo da funkcija f u tački x_0 ima skok.

Prekid prve vrste je prividan prekid ili skok. Prekid druge vrste je svaki prekid koji nije prekid prve vrste (ako bar jedna od graničnih vrednosti $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ ili $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ ne postoji (kao konačna)).

1. Data je funkcija $f(x)=\begin{cases}(e+x)^{sin x}, & x\geq 0\\ sin x + A, & x<0\end{cases}$. Odrediti A tako da funkcija bude neprekidna.

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$ uslov neprekidnosti

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}(sin x + A)$

$\lim\limits_{x\to 0^-}(sin x + A)=A,\ f(0)=1 \Rightarrow A=1$

2. Data je funkcija $f(x)=\begin{cases}(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ A, & x=0\\ -\dfrac{1}{1+ln x}, & x>0\end{cases}$. Odrediti A tako da funkcija bude neprekidna.

$\lim\limits_{x\to 0^-}(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}=0,$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-1}{1+ln x}=0$

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-1}{1+ln x}\Rightarrow A=0$

3. Data je funkcija $f(x)=\begin{cases}arctg(1+\dfrac{1}{x}), & x\neq 0\\ A, & x=0\end{cases}$.

Da li se može odrediti konstanta A tako da funkcija bude neprekidna u tački $x=0$?

$\lim\limits_{x\to 0^+} arctg(1+\dfrac{1}{x})=\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0^-} arctg(1+\dfrac{1}{x})=-\dfrac{\pi}{2}$

Leva i desna granična vrednost nisu iste pa ne postoji $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Znači, ne postoji konstanta A takva da je funkcija $f(x)$ neprekidna u tački $x=0$.