DIFERENCIJALNI RAČUN FUNKCIJA VIŠE PROMENLJIVIH

Ovde ćemo, zbog jednostavnosti, dati osnovne pojmove iz diferencijalnog računa realnih funkcija dve i tri realne promenljive. Slično važi i za realne funkcije više realnih promenljivih.

Totalni priraštaj funkcije $z = f(x,y)$ je $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$.

Parcijalni priraštaj funkcije $z = f(x,y)$ po promenljivoj x je $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$,

a po promenljivoj y je $\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$.

Parcijalni izvod funkcije $z = f(x,y)$ po promenljivoj x jednak je „običnom" izvodu pod pretpostavkom da je $y = const$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Totalni diferencijal prvog reda funkcije $z = f(x,y)$: $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$

Totalni diferencijal drugog reda funkcije $z = f(x,y)$:

$$d^2 z = d(dz) = d(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy)dx + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

Ako postoji parcijalni izvod $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(M)$ njega zovemo drugim parcijalnim izvodom ili parcijalnim izvodom drugog reda funkcije f u tački M, po promenljivama x_i, x_j (tim redom) kojeg označavamo sa $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M)$ ili $f_{x_i, x_j}(M)$. U slučaju kada je $i = j$ odgovarajući parcijalni izvod označavamo sa $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(M)$. Ako je $i \neq j$, parcijalni izvod zovemo mešovitim.

U opštem slučaju, mešoviti parcijalni izvodi, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M)$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(M)$, ako postoje, ne moraju da budu jednaki, ali ako postoje u nekoj okolini tačke $M(x,y)$ i ako su neprekidni u datoj tački M, onda su oni u toj tački jednaki, to jest važi jednakost $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(M)$.

Za funkciju dve promenljive postoje četiri parcijalna izvoda drugog reda, a za funkciju tri promenljive devet.

Za funkciju tri promenljive $u = f(x, y, z)$ slično važi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z u}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

Totalni diferencijal prvog reda funkcije $u = f(x, y, z)$: $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$

Totalni diferencijal drugog reda funkcije $u = f(x, y, z)$:

$$d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dxdy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dxdz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dydz$$

1. Naći parcijalne izvode funkcije $z = f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & , \quad (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0,0) \end{cases}$.

   Za $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{x^2 + y^2 - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = y\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{x^2 + y^2 - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = x\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta x \cdot 0}{(\Delta x)^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\dfrac{0 \cdot \Delta y}{0^2 + (\Delta y)^2} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

Napomenimo da ovde funkcija z ima parcijalne izvode prvog reda u tački $(0,0)$, a da u toj tački ima prekid.

Dakle, dok je kod funkcija jedne promenljive neprekidnost potreban uslov za postojanje prvog izvoda, kod funkcija dve i više promenljivih parcijalni izvodi mogu da postoje, a da u toj tački funkcija ima prekid!

2. Za funkciju $z = x^2 - 2xy^2 + y^3$ naći parcijalne izvode prvog i drugog reda, kao i totalni diferencijal prvog i drugog reda.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-2y^2 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-4xy+3y^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-4x+6y \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(-4xy+3y^2)=-4y$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=(2x-2y^2)dx+(3y^2-4xy)dy$$

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2=2dx^2-8ydxdy+(6y-4x)dy^2$$

3. Pokazati da funkcija $z(x,y)$ definisana implicitno $x+y+z=\ln(x^2+y^2+z^2)$ zadovoljava jednačinu $(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\frac{\partial z}{\partial y}=x-y$.

$$x+y+z=\ln(x^2+y^2+z^2)\ \Big/_{x}'$$

$$1+\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(2x+2z\frac{\partial z}{\partial x})$$

$$x^2+y^2+z^2+(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial z}{\partial x}=2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x-(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2-2z}$$

$$x+y+z=\ln(x^2+y^2+z^2)\ \Big/_{y}'$$

$$1+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(2y+2z\frac{\partial z}{\partial y})\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2-2z}$$

$$(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2xy-y(x^2+y^2+z^2)-2xz+z(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2-2z}+$$

$$+\frac{2yz-z(x^2+y^2+z^2)-2xy+x(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2-2z}=\frac{(x-y)\left[x^2+y^2+z^2-2z\right]}{x^2+y^2+z^2-2z}=x-y$$

4. (domaći) Dokazati da za funkciju $z(x,y)=(x^2+y^2)\cdot\sin(x^2+y^2)$ važi $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

5. Za funkciju $u=f(x^3y-z^2)$ naći $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$, ako je $f(t)$ tri puta diferencijabilna funkcija.

$u=f(t),\ t=x^3y-z^2$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(t)\cdot t'_x=f'(t)\cdot 3x^2y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(f'(t) \cdot 3x^2 y) = 3x^2(f''(t) \cdot t'_y \cdot y + f'(t) \cdot 1) = 3x^2(f''(t) \cdot x^3 y + f'(t))$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(3x^2(f''(t)x^3 y + f'(t))) = 3x^5 y \cdot f'''(t)(-2z) + 3x^2 f''(t)(-2z) = -6x^2 z(x^3 y \cdot f'''(t) + f''(t))$$

6. (domaći)
   a) Za funkciju $u(x, y, z) = x^{y^z}$ odrediti totalni diferencijal drugog reda.
   b) Ako je $u(x, y, z) = y \cdot f(x \cdot e^y \cdot \sin z)$ gde je $f(t)$ diferencijabilna funkcija, odrediti $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Tangentna ravan i normala površi

Jednačina tangentne ravni u nesingularnoj tački $P(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$ je

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Jednačina normale površi S zadate jednačinom $z = f(x, y)$ u tački $P(x_0, y_0, z_0)$ je

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

EKSTREMNE VREDNOSTI FUNKCIJA VIŠE PROMENLJIVIH

Neka je funkcija $z = f(x, y)$ diferencijabilna u nekoj oblasti D i neka je tačka $M_0(x_0, y_0)$ unutrašnja tačka iz te oblasti.

Potreban uslov za ekstrem u tački $M_0(x_0, y_0)$ je da je $(\frac{\partial z}{\partial x})_M = 0$ i $(\frac{\partial z}{\partial y})_M = 0$ ili da $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ u tački $M_0(x_0, y_0)$ ne postoje.

Tačke u kojima su parcijalni izvodi $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ jednaki nuli ili ne postoje nazivaju se kritične tačke funkcije $z = f(x, y)$.

Tačke u kojima je $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ nazivaju se stacionarne tačke.

Dovoljan uslov za ekstrem:

Neka je tačka $M_0(x_0, y_0)$ stacionarna tačka funkcije $z = f(x, y)$, tj. neka je $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ i $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Ako u nekoj okolini tačke $M_0(x_0, y_0)$, funkcija $z = f(x, y)$ ima neprekidne parcijalne izvode drugog reda, tada u tački $M_0(x_0, y_0)$:

- ako je $d^2 z > 0$ za $(dx, dy) \neq (0,0)$ funkcija $z = f(x, y)$ u tački $M_0(x_0, y_0)$ ima minimum,
- ako je $d^2 z < 0$ za $(dx, dy) \neq (0,0)$ funkcija $z = f(x, y)$ u tački $M_0(x_0, y_0)$ ima maksimum,
- ako $d^2 z$ menja znak za $(dx, dy) \neq (0,0)$ funkcija $z = f(x, y)$ u tački $M_0(x_0, y_0)$ nema ekstrem.

Ovaj kriterijum važi za bilo koju funkciju *n* promenljivih.

Posebno, za funkciju DVE promenljive važi i sledeći dovoljan uslov za ispitivanje ekstremne vrednosti. Ako je

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

tada funkcija $z = f(x, y)$ u tački $M_0(x_0, y_0)$

1) ima maksimum ako u tački $M_0(x_0, y_0)$ važi $rt - s^2 > 0$ i $r < 0$ (ili $t < 0$),
2) ima minimum ako u tački $M_0(x_0, y_0)$ važi $rt - s^2 > 0$ i $r > 0$ (ili $t > 0$),
3) nema ekstrem ako u tački $M_0(x_0, y_0)$ važi $rt - s^2 < 0$,
4) potrebna su dalja ispitivanja ako je $rt - s^2 = 0$.

1. Naći ekstremne vrednosti funkcije $z = \ln(y - 2xy) + xy - x$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y - 2xy}(-2y) + y - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{2x-1} + y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 + 2xy - y - 2x + 1 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y - 2xy}(1 - 2x) + x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y} + x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{y}$$

$$2 + 2xy - y - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow -y + \frac{2}{y} + 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0.$$

Rešenja poslednje jednačine su $y_1 = -1$ i $y_2 = 2$. Za x koordinatu dobija se $x_1 = 1$ i $x_2 = -\frac{1}{2}$. Dakle, stacionarne tačke su $A(1,-1)$ i $B(-\frac{1}{2},2)$.

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{2x-1} + y - 1\right) = -\frac{4}{(2x-1)^2}$$

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y} + x\right) = -\frac{1}{y^2} \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2}{2x-1} + y - 1\right) = 1$$

Tačka $A(1,-1)$: $\quad r = -4,\ t = -1,\ s = 1 \Rightarrow rt - s^2 = 4 - 1 = 3 > 0\ \wedge r < 0$

Funkcija $z(x,y)$ ima maksimum -2 u tački $A(1,-1)$.

Tačka $B(-\frac{1}{2},2)$: $\quad r = -1,\ t = -\frac{1}{4},\ s = 1 \Rightarrow rt - s^2 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} < 0$

Funkcija nema ekstem u tački $B(-\frac{1}{2},2)$.

2. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $u = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 4x + 6y + 6z$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow x + y + 2 = 0 \Rightarrow x = -y - 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 4y + 2x + 2z + 6 = 0 \Leftrightarrow 2y + x + z + 3 = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 4z + 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow 2z + y + 3 = 0 \Rightarrow z = \frac{-y-3}{2}$$

$$2y - y - 2 - \frac{y+3}{2} + 3 = 0 \Leftrightarrow y - \frac{y+3}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2y - y - 3 + 2 = 0 \Rightarrow y = 1, x = -3, z = -2$$

Stacionarna tačka je $A(-3,1,-2)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4,\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0 \text{ i } \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 2$$

$$d^2u(A) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(A)dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(A)dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(A)dz^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(A)dxdy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}(A)dxdz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}(A)dydz =$$

$$= 2dx^2 + 4dy^2 + 4dz^2 + 4dxdy + 4dydz = 2(dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 + 2dxdy + 2dydz) =$$

$$= 2(dx+dy)^2 + 2(dy+dz)^2 + 2dz^2 > 0, \qquad \text{za } (dx,dy,dz) \neq (0,0,0)$$

$\Rightarrow$ funkcija $u(x,y,z)$ ima minimum $u(-3,1,-2) = -9$ u tački $A(-3,1,-2)$.

☺