Priprema za kolokvijum

Anja Buljević
Aleksandra Mitrović
Smilja Stokanović

30. novembar 2020.

1 Zadaci

1. Primenom Karuš, Kun-Takerove metode odrediti stacionarne tačke i njihov karakter za funkciju: $x_1^2 + x_2^2 + 4x_2 - 6x_1 + 1$, ako važe ograničenja: $x_1 + 5x_2 + 4 = 0$ i $x_1^2 + 2x^2 - 2 \leq 0$.

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_2 - 6x_1 + 1$$
$$h(x) = x_1 + 5x_2 + 4 = 0$$
$$g(x) : x_1^2 + 2x_2^2 - 2 \leq 0 \ .$$

Prvi korak je formiranje novog kriterijuma optimalnosti F:

$$F = x_1^2 + x_2^2 + 4x_2 - 6x_1 + 1 + \lambda(x_1^2 + 2x_2^2 - 2) + \nu(x_1 + 5x_2 + 4).$$

Parcijalni izvodi funkcije F po promenljivim x_1 i x_2 se izjednačavaju sa nulom, pa se dobija sistem jednačina:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 - 6 + \nu + 2\lambda x_1 \quad (1)$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 + 4 + 5\nu + 2\lambda x_2 \ , \quad (2)$$

Na osnovu jednačina ograničenja, formira se sledeći sistem jednačina:

$$x_1 + 5x_2 + 4 = 0 \quad (3)$$
$$\lambda(x_1^2 + 2x_2^2 - 2) = 0 \quad (4)$$

Iz jednačine (4) imamo dva slučaja:

- $\lambda = 0$

$$2x_1 - 6 + \nu = 0 \quad (5)$$
$$2x_2 + 4 + 5\nu = 0 \quad (6)$$
$$x_1 + 5x_2 + 4 = 0 \quad (7)$$

U nastavku rešavamo sistem jednačina:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 6 + \nu &= 0/(-5) \\ 2x_2 + 4 + 5\nu &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -10x_1 + 2x_2 + 34 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + 4 &= 0/(10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 52x_2 &= -74 \\ x_2 &= -\frac{74}{52} \end{aligned}$$

x_1 možemo odrediti iz jednačine ograničenja:

$$x_1 = -4 - 5x_2 = -\frac{81}{26}$$

Nakon što smo odredili stacionarnu tačku, potrebno je da proverimo ograničenje g:

$$g(x) : x_1^2 + 2x_2^2 - 2 \leq 0 \ .$$

Uvrštavanjem vrednosti x_1 i x_2, zaključujemo da ograničenje g nije zadovoljeno.

- $x_1^2 + 2x^2 - 2 = 0$

$$\begin{aligned} x_1^2 + 2x^2 - 2 &= 0 \\ 2x_1 - 6 + \nu + 2\lambda x_1 &= 0 \\ 2x_2 + 4 + 5\nu + 2\lambda x_2 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + 4 &= 0 \rightarrow x_1 = -4 - 5x_2 \end{aligned}$$

Uvrštavanjem smene x_1, dobijamo sledeći izraz:

$$\begin{aligned} (-4 - 5x_2)^2 + 2x^2 - 2 &= 0 \\ 27x_2^2 + 40x_2 + 14 &= 0 \end{aligned}$$

Dobijamo dve stacionarne tačke:

$$\begin{aligned} &A(-1.65, 0.567) \\ &B(0.57, -0.914) \end{aligned}$$

Nakon što smo odredili stacionarne tačke, potrebno je još da proverimo njihov karakter, računanjem λ.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 6 + \nu + 2\lambda x_1 &= 0/(-5) \\ 2x_2 + 4 + 5\nu + 2\lambda x_2 &= 0 \ , \end{aligned}$$

$$-10x_1 + 2x_2 + 34 + \lambda(-10x_1 + 4x_2) = 0$$
$$\lambda = \frac{10x_1 - 2x_2 - 34}{4x_2 - 10x_1}$$

$$\lambda_A = -4.744$$
$$\lambda_B = 2.82$$

Za tačku A, vrednost λ je manja od nula, te zaključujemo da je ta tačka maksimum. Za tačku B, λ ima vrednost veću od nula, te je tačka B minimum.

2. U sklopu eksperimenta vršeno je mjerenje izlaza procesa, pri čemu su dobijeni sledeći rezultati: u trenucima $t = [0, 1, 2, 3]$, senzor izlaza procesa pokazao je vrijednosti $y = [5068]$. Rešiti optimizacioni problem i naći parabolu $(at^2 + bt + c)$, koja najbolje opisuje ponašanje izlaza procesa.

$$t = [0, 1, 2, 3]$$
$$y = [5, 0, 6, 8]$$

Poznato je da je jednačina parabole $y(t) = at^2 + bt + c$. Koristeći jednačinu parabole, možemo odrediti funkciju $y(t)$, za svaku vrednost t.

$$y_0 : c = 5$$
$$y_1 : a + b + c = 0$$
$$y_2 : 4a + 2b + c = 6$$
$$y_3 : 9a + 3b + c = 8$$

Metodom najmanjih kvadrata formiramo prošireni kriterijum optimalnosti F:

$$F = (c-5)^2 + (a+b+c)^2 + (4a+2b+c-6)^2 + (9a+3b+c-8)^2$$

Potrebno je da nađemo parcijalne izvode po svim nepoznatim:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 2(a+b+c) + 8(4a+2b+c-6) + 18(9a+3b+c-8)$$
$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2(a+b+c) + 4(4a+2b+c-6) + 6(9a+3b+c-8)$$
$$\frac{\partial F}{\partial c} = 2(c-5) + 2(a+b+c) + 2(4a+2b+c-6) + 2(9a+3b+c-8)$$

Dobijamo sistem od tri jednačine:

$$\begin{aligned} 196a + 72b + 28c - 192 &= 0 \\ 72a + 28b + 12c - 72 &= 0 \\ 28a + 12b + 8c - 38 &= 0 \end{aligned}$$

Rešavanjem ovog sistema, vrednosti dobijene za parametre su: $a = 1.75$, $b = -3.75$ i $c = 4.25$. Parabola koja najbolje opisuje ponašanje izlaza procesa je:

$$y = 1.75t^2 - 3.75t + 4.25$$

3. Fabrika proizvodi 3 vrste paketa A,B,C. Model A zahtjeva 8h obrade, 5h lakiranja i 6h sušenja. Model B zahtjeva 6h obrade, 4h lakiranja i 2h sušenja. Model C zahtjeva 5h obrade , 2h lakiranja i 4h sušenja. Stolar ima na raspolaganju 96h za obradu, 44h za lakiranje i 58h za sušenje. Zarada po jedinici modela A, B i C je 380 €, 260 € i 220 €. Kojom će se kombinacijom proizvodnje postići maksimalna dobit i koliko ona iznosi.

$$\begin{aligned} & f = 380A + 260B + 220C \\ & 8A + 6B + 5C \leq 96 \\ & 5A + 4B + 2C \leq 44 \\ & 6A + 2B + 4C \leq 58 \end{aligned}$$

Ograničenja tipa nejednakosti transformišemo u ograničenja tipa jednakosti dodavanjem dodatne promenljive:

$$\begin{aligned} & f - 380A - 260B - 220C = 0 \\ & 8A + 6B + 5C + x_1 = 96 \\ & 5A + 4B + 2C + x_2 = 44 \\ & 6A + 2B + 4C + x_3 = 58 \end{aligned}$$

Sada formiramo prvu simpleks tabelu:

		A	B	C	
x_1	96	8	6	5	12
x_2	44	5	4	2	8.8
x_3	58	6	2	4	9.66
f	0	-380	-260	-220	

Tabela 1: Prva simpleks tabela za zadatak 3.

		x_2	B	C	
x_1	25.6	$-\frac{8}{5}$	-0.4	1.8	14.2
A	$\frac{44}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	22
x_3	5.2	$-\frac{6}{5}$	-2.8	1.6	3.25
f	3344	76	44	-68	

Tabela 2: Druga simpleks tabela za zadatak 3.

		x_2	B	x_3	
x_1	19.75	-0.25	2.75	$-\frac{9}{8}$	7.18
A	7.5	0.5	1.5	$-\frac{1}{4}$	5
C	3.25	-0.75	$-\frac{7}{4}$	$\frac{5}{8}$	-1.85
f	3565	25	-75	$\frac{85}{2}$	

Tabela 3: Treća simpleks tabela za zadatak 3.

		x_2	A	x_3	
x_1	6				
B	5	0.66			
C	12				
f	3940	50	50	30	

Tabela 4: Četvrta simpleks tabela za zadatak 3.

Svi elementi u poslednjoj vrsti su pozitivni, pa to predstavlja kraj algoritma jer tražimo maksimum. Dobijene vrednosti su:

$$A = 0$$
$$B = 5$$
$$C = 12$$
$$f_{max} = 3940.$$

4. Tačka C se nalazi na kružnici poluprečnika 8, sa centrom u koordinatnom početku. Metodom Lagranževih množitelja, odrediti koordinate tačke, tako da zbir kvadrata rastojanja od te tačke do tačaka $A(0,2)$ i $B(8,2)$ bude minimalan.

$$d_1^2 = (x-0)^2 + (y-2)^2$$
$$d_2^2 = (x-8)^2 + (y-2)^2$$

Ograničenje je da se tačka nalazi na kružnici, poluprečnika 8.

$$x^2 + y^2 = 8^2$$

$$L = x^2 + (y-2)^2 + (x-8)^2 + (y-2)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 64)$$
$$L = x^2 + 2(y-2)^2 + (x-8)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 64)$$

Nakon što smo formirali prošireni kriterijum optimalnosti, tražimo parcijalne izvode po svim promenljivim i po λ:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2(x-8) + 2\lambda x = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 4(y-2) + 2\lambda y = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = (x^2 + y^2 - 64) = 0$$

Sada rečavamo sistem jednačina, kako bi smo odredili x i y:

$$4x - 16 + 2\lambda x = 0/(-y)$$
$$4y - 8 + 2\lambda y = 0/x$$
$$(x^2 + y^2 - 64) = 0$$
$$8x = 16y \rightarrow x = 2y$$

Uvrštavanjem smene $x = 2y$ u jednačinu ograničenja, dalje dobijamo :

$$4y^2 + y^2 - 64 = 0$$
$$5y^2 = 64$$
$$y = \pm\frac{8\sqrt{5}}{5}$$
$$x = \pm\frac{16\sqrt{5}}{5}$$

Dobijamo dve stacionarne tačke:

$$C_1 = (\frac{16\sqrt{5}}{5}, \frac{8\sqrt{5}}{5})$$
$$C_2 = (-\frac{16\sqrt{5}}{5}, -\frac{8\sqrt{5}}{5})$$

Potrebno je da ispitamo karakter ove dve tačke, pa formiramo matricu Q:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+2\lambda & 0 \\ 0 & 4+2\lambda \end{bmatrix}$$

$$D_1 = 4 + 2\lambda$$
$$D_2 = (4+2\lambda)^2$$

Vidimo da nam vrednost glavnih minora zavisi od vrednosti λ, pa računamo vrednost λ korištenjem sledećeg izraza:

$$\lambda = \frac{16-4x}{2x}$$
$$\lambda_{C1} = 3.59$$
$$\lambda_{C2} = -7.59$$

Vrednost glavnih minora za tačke C_1 i C_2 iznose:

- $C_1 = (\frac{16\sqrt{5}}{5}, \frac{8\sqrt{5}}{5})$
  D_1=11.18
  D_2=124.99
  Pošto su obe vrednosti i D_1 i D_2 veće od 0, tačka C_1 je minimum.
- $C_2 = (-\frac{16\sqrt{5}}{5}, -\frac{8\sqrt{5}}{5})$
  D_1=-11.18
  D_2=124.99
  Tačka C_2 je maksimum, jer je $D_1 < 0$, a $D_2 > 0$.

5. Metodom ograničenih varijacija odrediti stacionarne tačke funkcije $y = x_1 x_2 x_3$, ako važi ograničenje $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$.

$$y = x_1 x_2 x_3$$
$$h : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$$

Broj promenljivih je $n = 3$, a broj ograničenja je $m = 1$, pa sledi da su nam potrebne dve Jakobijeve matrice ($k = 2, k = 3$)

$$J_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_2} & \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} & \frac{\partial h}{\partial x_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 x_3 & x_2 x_3 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{vmatrix} = 2x_1^2 x_3 - 2x_2^2 x_3 = 0 \, ,$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_3} & \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_3} & \frac{\partial h}{\partial x_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 x_2 & x_2 x_3 \\ 2x_3 & 2x_1 \end{vmatrix} = 2x_1^2 x_2 - 2x_2 x_3^2 = 0 \, .$$

Kombinovanjem prethodno dobijenih jednačina sa jednačinom ograničenja dobija se sistem jednačina

$$2x_3(x_1^2 - x_2^2) = 0 \rightarrow x_3 = 0 \vee x_1^2 = x_2^2$$
$$2x_2(x_1^2 - x_3^2) = 0 \rightarrow x_2 = 0 \vee x_1^2 = x_3^2$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$$

Iz sistema jednačina, zaključujemo da ćemo imati četiri slučaja:

(a) $x_3 = 0 \wedge x_2 = 0$
$x_1^2 = 1 \rightarrow x_1 = \pm 1$
$A(1, 0, 0)$
$B(-1, 0, 0)$

(b) $x_3 = 0 \wedge x_1^2 = x_3^2$
$x_1 = 0$
$x_2^2 = 1 \rightarrow x_2 = \pm 1$
$C(0, 1, 0)$
$D(0, -1, 0)$

(c) $x_2 = 0 \wedge x_1^2 = x_2^2$
$x_1 = 0$
$x_3^2 = 1 \rightarrow x_3 = \pm 1$
$E(0, 0, 1)$
$F(0, 0, -1)$

(d) $x_1^2 = x_2^2 \wedge x_1^2 = x_3^2$
$3x_1^2 = 1$
$x_1^2 = \frac{1}{3}$
$x_3^2 = x_2^2 = \frac{1}{3}$
$G(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$
$H(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$
$I(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$
$J(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$
$K(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$
$L(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$
$M(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$
$N(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$