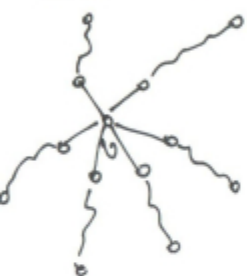


БЕХБЕ 10

СТАБЛА

1. Нека је T стабло и $\Delta(T) = k$. Докажи да T има бар k листних чворова.

$$\exists v \in V(T) \text{ } d(v) = k$$



II Начин:

n -број чворова

Претпоставимо супротно, да T има $l < k$ листних чворова.

$$2 \cdot (n-1) = \sum d(v) = l \cdot 1 + \sum_{2 \leq d(v) \leq k} d(v) + 1 \cdot k \geq l + 2 \cdot (n-l-1) + k$$

$n-l-1$ садржаја

$$= l + 2n - 2l - 2 + k = 2n - 2 + \underbrace{k-l}_{>0} > 2n - 2 = 2(n-1) \quad \text{↯}$$

\Rightarrow Стабло T садржи бар k листних чворова.

2. Докажем, что в графе G с n вершинами и e ребрами $2e = \sum_{d(v) \geq 3} (d(v) - 2)$.

n_1 - число вершин степени 1, n_2 - число вершин степени 2, n_3 - число вершин степени 3, n_4 - число вершин степени 4, ..., n_k - число вершин степени k .

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + \dots + n_k = n_1 + n_2 + k$$

$$2e = \sum d(v) = n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot 2 + n_3 \cdot 3 + n_4 \cdot 4 + \dots + n_k \cdot k$$

$$= n_1 + n_2 + \sum_{d(v) \geq 3} d(v)$$

$$\text{Знаем } e = n - 1$$

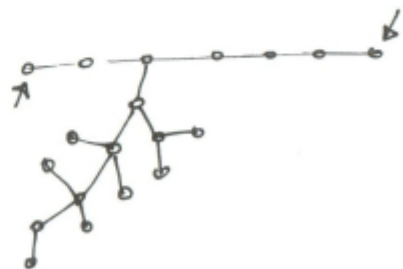
$$= n_1 + n_2 + k - 1$$

$$2(n_1 + n_2 + k - 1) = n_1 + 2n_2 + \sum_{d(v) \geq 3} d(v)$$

$$2n_1 + 2n_2 + 2k - 2 = n_1 + 2n_2 + \sum_{d(v) \geq 3} d(v)$$

$$n_1 = 2 + \sum_{d(v) \geq 3} d(v) - 2k = 2 + \sum_{d(v) \geq 3} (d(v) - 2)$$

k - число вершин степени k



3. Из сликана града је $5, 4, 3, 2, 1, 1, 1, \dots, 1$. Колико има јединица?

k - број висетних чворова у граду (иј. број јединица)

$$n = 4 + k$$

$$e = n - 1 = k + 3$$

$$2e = \sum d(v) = 5 + 4 + 3 + 2 + \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{k \text{ јединица}} = 14 + k$$

$$2 \cdot (k + 3) = 14 + k$$

$$\Rightarrow k = 8$$

4. Колико komponenta povezanih ima шума са 100 чворова и 90 грана?

Нека је $w(G) = k$

$$n = |V(G)| = 100$$

$$e = |E(G)| = 90$$

Свака komponenta повезаних шуме је стабло

G_i стабло у шуми, $i = 1, \dots, k$

$$n_i = |V(G_i)|$$

$$e_i = |E(G_i)| \quad e_i = n_i - 1$$

$$e = e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_k = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + (n_3 - 1) + \dots + (n_k - 1) = (n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k) - k = n - k$$

$$e = n - k$$

$$90 = 100 - k$$

$$\Rightarrow k = 10$$

Ако је G шума, важи важи

$$|V(G)| = |E(G)| + w(G)$$

6. Нека је G повезан граф.

а) Ако G има 17 ивица, колико највише чворова може да има?

За сваки повезан граф важи $e \geq n-1$.

$$e = 17$$

$$17 \geq n-1$$

$$n \leq 18$$

б) Ако G има 21 чвор, колико најмање ивица може да има?

$$e \geq n-1$$

$$n = 21$$

$$e \geq 21-1 = 20$$

7. Граф G има 4 компоненте и 24 иже. Колико највише чворова може G да има?

$$\omega(G) = 4$$

$$e = 24$$

Свака компонента повезаности нејовезантој графа је један „мали“ повезан граф

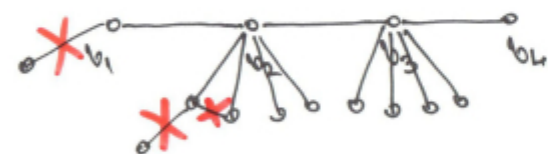
$n_i = |V(G_i)|$, $e_i = |E(G_i)|$, где су G_i , $i=1,2,3,4$ компоненте повезаности графа G

$$\left. \begin{array}{l} e_1 \geq n_1 - 1 \\ e_2 \geq n_2 - 1 \\ e_3 \geq n_3 - 1 \\ e_4 \geq n_4 - 1 \end{array} \right\} + \quad \begin{array}{l} e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \geq n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - 4 \\ e \geq n - 4 \\ 24 \geq n - 4 \\ n \leq 28 \end{array}$$

8. Колико висетних чворова има стабло дијаметра 3 са n чворова? контура C_n
max дужи је
дужине $n-1$
 $d(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$



Стабло не садржи контуре \Rightarrow дијаметар стабла представља дужину максималној путањи
Нека је $v_1 v_2 v_3 v_4$ максимална путања у датом стаблу



Сви остали чворови у стаблу (них $n-4$) су суседи чворова v_2 или v_3 и сви су висетни.

Уколико сви чворови не би били висетни добили бисмо путању која је дужи од максималној или контуру, што није могуће

Број висетних чворова је $n-4+2=n-2$

(сви чворови у стаблу осим v_2 и v_3 су висетни)

9. Колико има неизоморфних граfova дијаметра 3 са 103 вртца?

Најдужи максималне дужине у графу је најдужи дужине 3



$$e = 103 \Rightarrow n = 104$$

За најдужи максималне дужине смо "искористили" 4 вртца.

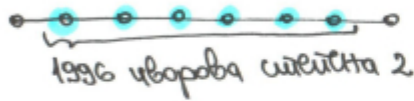
Осталих 100 вртцова су среди или u или v и они су висетли.

\Rightarrow Постоји 51 неизоморфно граfoва

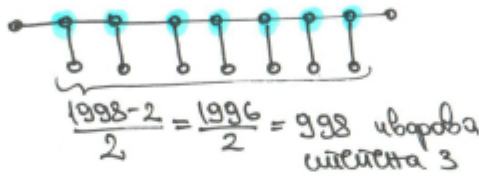
u	v
100	0
99	1
98	2
\vdots	\vdots
51	49
50	50
49	51
\vdots	\vdots
0	100

10. Za koje prirodne brojeve Δ ($\Delta > 1$) postoje takvo da
 uborovi koji nisu brojevi u skupu Δ ?

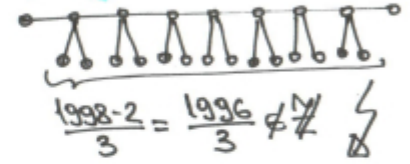
• $\Delta = 2$



• $\Delta = 3$



• ~~$\Delta = 4$~~



a) 1998

b) 2008

uborova koji su svi
 → aritmetička razlika

Šipratje: Postoji li broj $k+2$ ubora i na k ugrađenih uborova
 $\Delta-2$ brojeva ubora

$$2 \cdot (1998-1) = 2 \cdot 1997 = \sum_{n \in V} d(n) = k \cdot \Delta + (n-k) \cdot 1 = k \cdot \Delta + 1998 - k = k(\Delta-1) + 1998$$

$k \cdot (\Delta-1) = 1996 \rightarrow$ Zbog toga se dogodi
 na odgovarajuće djeljenje
 broja 1996

$$\begin{array}{r|l} 1996 & 2 \\ 998 & 2 \\ 499 & \end{array}$$

$$k \in \{1, 2, 4, 499, 998, 1996\}$$

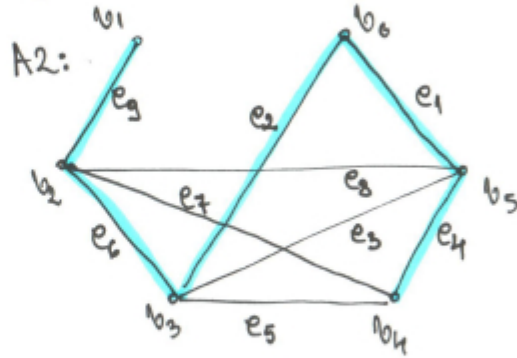
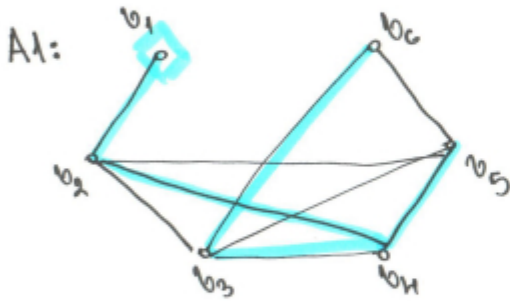
$$\Delta \in \{2, 3, 5, 500, 999, 1997\}$$



- ПОКРИВАЈУЋА СТАБЛА -

T је покривајуће стабло за граф $G \iff T$ је покривајући подграф графа G и T је стабло

T : Граф има покривајуће стабло ако је повезан.



- МИНИМАЛНО ПОКРИВАЈУЋЕ СТАБЛО -

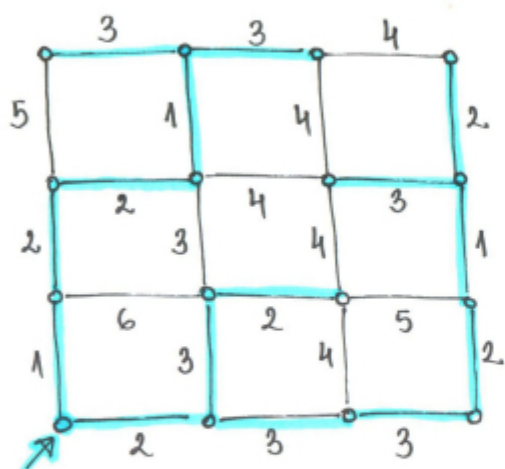
Метрички граф \rightarrow свакој иницијалној $e \in E(G)$ приписује се број $w(e)$ - тежина иницијалне e

$$w(G) = \sum w(e)$$

тежина графа G

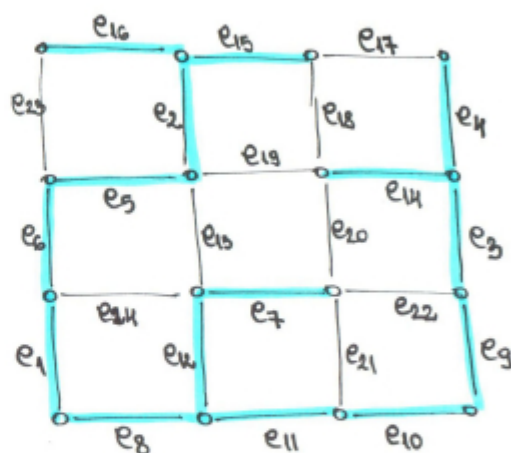
ПРОБЛЕМ: За дати повезан метрички граф одредити покривајуће стабло најмање тежине

11. Наћи минимално покривајуће стабло шенинског графа са слике



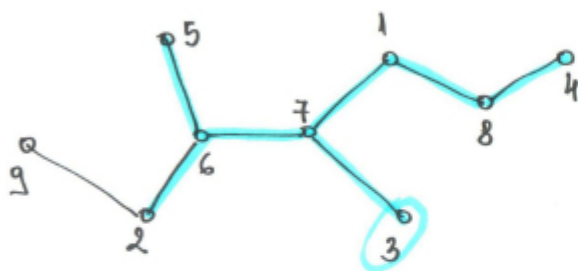
ПРИМОВ АЛГОРИТАМ (A1)

(БОРУВКА - ЖАРНИК - ПРИМ)



КРУСКАЛОВ АЛГОРИТАМ (A2)

12. ⁴Конструисајте Приферов низ следећих стабала

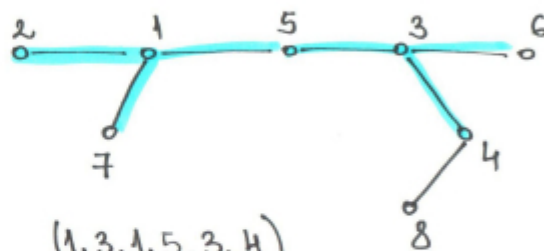


(7, 8, 6, 1, 7, 6, 2)

→ посетити чвор са најмањом ознаком
ако смо пређови суседа, а нека „директно“

T: Број различитих означених
стабала са n чворова је n^{n-2}

→ Број различитих Приферових
низова



(1, 3, 1, 5, 3, 4)

Приферов низ је јединствен за свако
стабло и има дужину $n-2$

Број појављивања чвора у низу је
 $\deg(v)-1$

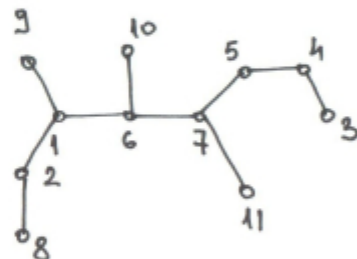
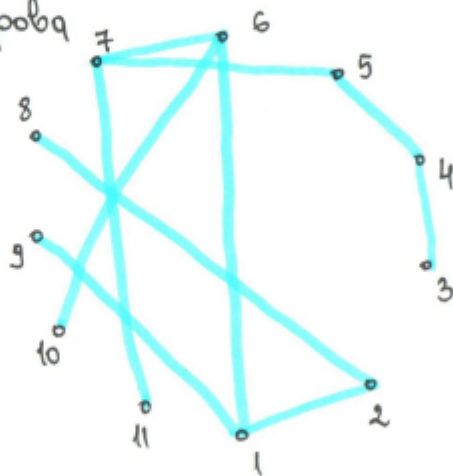
13. Конструисајте означено сјабло чији је Приферов низ

a) $(4, 5, 7, 2, 1, 1, 6, 6, 7)$

Приферов низ је дужине 9 \Rightarrow 11 чворова

~~$(4, 5, 7, 2, 1, 1, 6, 6, 7)$~~

~~$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$~~



14. Одредити сва стабла код којих
 а) су сви елементи Приферовог низа једнаки

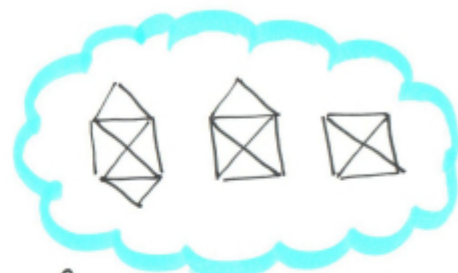
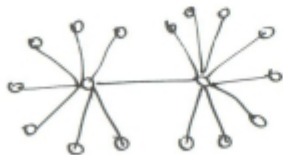


б) су сви елементи Приферовог низа различити



с) се у Приферовом низу појављују ипакто две различите вредности

гусеница



Замети: Нацртајте без
 одизања руке и какве
 по везе има са шеријом
 графова?

