1.4 Rekurentne relacije nizova

Nizovi brojeva mogu se uvesti rekurzivno pomoću rekurentnih relacija.

Definicija 60 *Neka je $\{a_0, a_1, \ldots\}$ niz brojvea. Rekurentna relacija niza $\{a_n\}$ je formula u kojoj je član a_n izražen u funkciji prethodnih članova. Ako je*

$$a_n = F(a_{n-1}, \ldots, a_{n-k})$$

kažemo da je rekurentna relacija reda k.

Ako su dati članovi niza $a_0, \ldots, a_{k-1}$, onda se na osnovu rekurentne relacije mogu odrediti članovi niza $a_k, a_{k+1}, \ldots$.

U narednim zadacima, bavićemo se samo kreiranjem rekurentnih relacija, ali ne i njihovim rešavanjem.

Zadatak 61 *Neka je dat aritmetički niz, čiji prvi član je a, a razlika je d. Napisati rekurentnu relaciju koja opisuje dati niz.*

Rešenje. Dobro je poznato da se članovi aritmetičkog niza mogu odrediti na osnovu sledećih relacija:

$$\begin{aligned} a_0 =& a \\ a_n =& a_{n-1} + d, n \geq 1. \end{aligned}$$

Zadatak 62 *Niz brojeva*

$$\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots\}$$

se naziva Fibonačijev niz. Prvi član jednak je 0, drugi 1, a svaki sledeći član jednak je zbiru prethodna dva. Napisati rekurentnu relaciju Fibonačijevog niza.

Rešenje. Označimo član na poziciji n sa f_n. Tada je

$$\begin{aligned} f_0 =& 0 \\ f_1 =& 1 \\ f_n =& f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 2. \end{aligned}$$

Zadatak 63 *Na jedan od tri uspravna štapa poređano je n (različitih) diskova u opadajućem redosledu veličina. Problem je premestiti sve diskove na drugi štap, sa što manje koraka, tako da na drugom štapu budu poređani u istom redosledu. U svakom koraku algoritma dozvoljeno je da se tačno jedan disk premesti na neki drugi štap, pri čemu nije dozvoljeno staviti ga na manji disk. Ako je h_n broj koraka algoritma, kreirati rekurentnu relaciju niza $\{h_n\}$.*

Rešenje. Pretpostavimo da su štapovi označeni sa X, Y, Z i da su diskovi inicijalno na štapu X.
Ako je $n = 1$, potreban je jedan korak da se disk prebaci na drugi štap, odakle je $h_1 = 1$.
Ako je $n = 2$, treba prebaciti manji (gornji) disk na štap Y, zatim veći disk na štap Z i na kraju disk sa štapa Y prebaciti na štap Z. Znači, $h_2 = 3$.
Ako posmatramo opšti slučaj, možemo fiksirati najveći disk na štapu X. Na njega se može staviti bilo koji drugi disk, a da ne dođe do nedozvoljenog rasporeda veličina. Sada se $n-1$ diskova koji su iznad njega može premestiti u h_{n-1} koraka na disk Y. Jedan korak nakon toga potreban je da se preostali, najveći disk, sa štapa X prebaci na štap Z. Na kraju je potrebno još h_{n-1} koraka da se diskovi sa štapa Y u istom redosledu poslažu na štap Z.

Znači,

$$\begin{aligned} h_1 &= 1 \\ h_n &= 2h_{n-1} + 1, h_n \geq 2. \end{aligned}$$

Zadatak 64 *Koliko ima različitih reči dužine n, $n \geq 1$, nad azbukom $\{0, 1\}$ koje ne sadrže podreč* 111.

Rešenje. Neka je f_n broj reči dužine n koje ne sadrže podreč 111.
Ako je $n = 1$, onda je $f_1 = 2$ (reči su 0 i 1).
Ako je $n = 2$, onda je $f_2 = 4$ (reči su $00, 01, 10, 11$).
Ako je $n = 3$, onda je $f_3 = 7$ (jedina nedozvoljena reč je 111).
Ako posmatramo proizvoljnu rež dužine n i fiksiramo na prvom mestu 0, onda takvih reči ima f_{n-1}. Sve reči koje u nastavku nemaju 111 neće imati tu podreč ni kada se na početak doda 0. Ako su prva dva mesta 10, onda takvih reči ima f_{n-2}. Ako reč dužine $n-2$ nema podstring 111, neće ga imati ni reč koju dobijamo kada na početak stavimo 10. Na kraju, ako posmatramo reči koje počinju sa 110, takvih reči dužine n bez podstringa 111 ima f_{n-3}. Primetimo da reč koja počinje sa 111 ne zadovoljava traženu osobinu.

Znači,

$$
\begin{aligned}
f_1 &= 2\\
f_2 &= 4\\
f_3 &= 7\\
f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3}, n \geq 4.
\end{aligned}
$$

Sada kada smo se upoznali sa pojmom rekuretne relacije, analiziraćemo neke moetode za rešavanje takvih relacija. Rešiti rekurentnu relaciju znači izraziti a_n kao fukciju koja zavisi od n. Nekada se to može postići direktno, primenom rekurentne relacije unazad, sve dok se ne stigne do inicijalnih članova niza.

Zadatak 65 *Rešiti rekurentnu relaciju*

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 2\\
a_n &= 5a_{n-1} + 2, \quad n \geq 1.
\end{aligned}
$$

Rešenje. Primenom rekurentne relacije, za $n \geq 1$, dobijamo

$$
\begin{aligned}
a_n &= 5a_{n-1} + 2\\
&= 5(5a_{n-2} + 2) + 2 = 5^2 a_{n-2} + 5 \cdot 2 + 2\\
&= 5^2(5a_{n-3} + 2) + 5 \cdot 2 + 2 = 5^3 a_{n-3} + 5^2 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 2\\
&\ldots\\
&= 5^n a_0 + 2 \cdot (5^{n-1} + 5^{n-2} + \ldots + 5 + 1)\\
&= 2 \cdot (5^n + 5^{n-1} + \ldots + 5 + 1) = 2 \cdot \frac{5^{n+1} - 1}{5 - 1} = \frac{1}{2}(5^{n+1} - 1).
\end{aligned}
$$

1.4.1 Homogene linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

Postupak rešavanja rekurentnih relacija postupkom supstitucije unazad ne može uvek dovesti do rešenja. Takav je, na primer, slučaj sa rekurentnom relacijom za Fibonačijev niz. U ovom delu ćemo posmatrati jednu posebnu klasu rekurentnih relacija koja se može rešiti postupkom koji podseća na rešavanje linearnih diferencijalnih jednačina višeg reda sa konstantnim koeficijentima.

Definicija 66 *Rekurentna relacija niza $\{a_n\}$ je linearna rekurentna relacija reda k sa konstantnim koeficijentima ako je oblika*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f(n),$$

gde su $c_1, \ldots, c_k$ konstante, $k \geq 1$, $c_k \neq 0$, a $f = f(n)$ je funkcija koja zavisi od n. Ako je $f(n) = 0$ za svako n, onda kažemo da je relacija homogena.

Svaka homogena linearna rekurentna relacija sa konstantnim koeficijentima ima trivijalno rešenje $a_n = 0$.

Posmatraćemo prvo homogenu linearnu rekurentnu relaciju sa konstantnim koeficijentima

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} \tag{1.1}$$

i pretpostavimo da postoji realan broj $x \neq 0$ sa osobinom

$$a_n = x^n, \text{ za sve } n \geq 0.$$

Zamenom u rekurentnu relaciju, dobijamo

$$\begin{aligned}
x^n =& c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_k x^{n-k} \Leftrightarrow \\
x^n =& x^{n-k}(c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \ldots + c_k) \Leftrightarrow \\
x^k =& c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \ldots + c_k
\end{aligned}$$

Za jednačinu

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \ldots - c_k = 0$$

kažemo da je karakteristična jednačina relacije (1.1).

Teorema 67 *Ako karakteristična jednačina rekurentne relacije*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

ima k (po parovima) različitih korena $x_1, \ldots, x_k$, onda je

(i) za proizvoljno izabrane vrednosti $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$,

$$a(n) = \alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n + \ldots \alpha_k x_k^n$$

je rešenje posmatrane rekurentne relacije;

(ii) konstante $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ su jedinstveno određene početnim uslovima

$$a(0) = a_0, \ldots, a(k-1) = a_{k-1}.$$

Dokaz.

(i) Ako posmatrani izraz zamenimo u rekurentnu relaciju, dobijamo sledeći niz ekvivalentnih jednakosti:

$$
\begin{aligned}
& \alpha_1 x_1^n + \ldots \alpha_k x_k^n = c_1(\alpha_1 x_1^{n-1} + \ldots \alpha_k x_k^{n-1}) \\
& \ldots\ldots \\
& \qquad\qquad +c_k(\alpha_1 x_1^{n-1} + \ldots \alpha_k x_k^{n-1}) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_1 x_1^{n-k}(x_1^k - c_1 x_1^{k-1} - \ldots - c_k) + \ldots \\
& \qquad\qquad\qquad +\alpha_k x_k^{n-k}(x_k^k - c_1 x_k^{k-1} - \ldots c_k) = 0
\end{aligned}
$$

Kako su $x_1, \ldots, x_k$ koreni karakteristične jednačine, izrazi u zagradama su jednaki 0, čime je dokaz završen.

(ii) Kako bi zadate inicijalne vrednosti pripadale nizu opisanom datom rekurentnom relacijom, one moraju zadovoljavati opšte rešenje rekurentne relacije. Tako dobijamo

$$
\begin{array}{lllllllll}
\alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \ldots & + & \alpha_k & = & a_0 \\
\alpha_1 x_1 & + & \alpha_2 x_2 & + & \ldots & + & \alpha_k x_k & = & a_1 \\
\ldots & & & & \ldots & & \ldots & & \\
\alpha_1 x_1^{k-1} & + & \alpha_2 x_2^{k-1} & + & \ldots & + & \alpha_k x_k^{k-1} & = & a_{k-1}
\end{array}
$$

Determinanta datog sistema jednačina je Vandermonde-ova determinanta

$$
D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ \ldots & & \ldots & \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \ldots & x_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le k} (x_j - x_i) \neq 0.
$$

Odatle direktno sledi da je posmatrani sistem jednačina određen i da ima jedinstveno rečenje.

Zadatak 68 *Rešiti rekurentnu relaciju koja opisuje Fibonačijev niz*

$$f_0 = 0 \qquad f_1 = 1 \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \ge 2$$

Rešenje. Karakteristična jednačina je

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \wedge x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Opšte rešenje je oblika

$$f(n) = \alpha_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Zamenom inicijalnih vrednosti u prethodnu jednkost, dobijamo sistem jednačina

$$\begin{array}{rcrcl} \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & 0 \\ \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\alpha_1 & + & \alpha_2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) & = & 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array}$$

iz kojeg sledi da je rešenje date rekurentne relacije

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Teorema 69 *Ako karakteristična jednačina*

$$x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} - \ldots - c_{k-1}x - c_k = 0.$$

ima korene $x_1, \ldots, x_l$ *redom višestrukosti* $k_1, \ldots, k_l$, *onda je*

(i) opšte rešenje posmatrane rekurentne relacije

$$\begin{array}{rcl} a(n) & = & (\alpha_{11} + n\alpha_{12} + \ldots n^{k_1-1}\alpha_{1k_1})x_1^n + \\ & & (\alpha_{21} + n\alpha_{22} + \ldots n^{k_2-1}\alpha_{2k_2})x_2^n + \\ & & \ldots \\ & & (\alpha_{l1} + n\alpha_{l2} + \ldots n^{k_l-1}\alpha_{lk_l})x_l^n \end{array}$$

(ii) konstante $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{lk_l}$ *su jedinstveno određene početnim uslovima.*

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu tvrđenja za jednostruke korene.

Zadatak 70 *Rešiti rekurentnu relaciju*

$$\begin{array}{c} a_0 = 2 \qquad\qquad a_1 = 1 \\ a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{array}$$

Rešenje. Karakteristična jednačina je

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2 \wedge x_2 = 2,$$

odakle je njeno opšte rešenje oblika

$$a(n) = (\alpha_1 + n\alpha_2) \cdot 2^n.$$

Ako zamenimo inicijalne vrednosti u prethodnu jednakost, dobijamo

$$\begin{array}{c} \alpha_1 = 2 \\ (\alpha_1+\alpha_2)\cdot 2 = 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -\frac{3}{2}. \end{array}$$

Odatle je rešenje rekurentne relacije

$$a_n = \left(2 - \frac{3}{2}n\right)\cdot 2^n.$$

1.4.2 Nehomogene linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

U ovom delu ćemo posmatrati rekurentne relacije oblika

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f(n), \tag{1.2}$$

gde su $c_1, \ldots, c_k$ konstante, $k \geq 1$, $c_k \neq 0$, a u kojim a $f(n)$ nije identički jednaka 0.

Za jednačinu koju dobijemo kada funkciju $f(n)$ zamenimo nulom,

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}, \tag{1.3}$$

kazaćemo da je odgovarajuća homogena jednačina.

Sledeće tvrđenje pokazuje da je, osim opšteg rešenja odgovarajuće homogene jednačine, dovoljno naći jedno rešenje nehomogene jednačine, da bismo odredili njeno opšte rešenje. Sa sličnim tvrđenjem čitaoc se susreo prilikom rešavanja nehomogenih sistema linearnih jednačina sa konstantnim koeficijentima, nehomogenih diferencijalnih jednačina višeg reda sa konstantnim koeficijentima i sl.

Teorema 71 *Ako je $a_n^{(p_1)}$ partikularno rešenje nehomogene linerne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima, tada je svako rešenje jednačine (1.2) oblika*

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p_1)}$$

gde je $a_n^{(h)}$ rešenje odgovarajuće homogene rekurentne relacije.

Dokaz. Ako je $a_n^{(p)}$ jedno proizvoljno (partikularno) rešenje jednačine (1.2), onda za njega važi

$$a_n^{(p_1)} = c_1 a_{n-1}^{(p_1)} + c_2 a_{n-2}^{(p_1)} + \ldots + c_k a_{n-k}^{(p_1)} + f(n). \tag{1.4}$$

Posmatrajmo sada proizvoljno rešenje $a_n^{(p)}$ jednačine (1.2). Za njega važi

$$a_n^{(p)} = c_1 a_{n-1}^{(p)} + c_2 a_{n-2}^{(p)} + \ldots + c_k a_{n-k}^{(p)} + f(n). \tag{1.5}$$

Ako od jednačine (1.5) oduzmemo jednačinu (1.4), dobijamo

$$a_n^{(p)} - a_n^{(p_1)} = c_1(a_{n-1}^{(p)} - a_{n-1}^{(p_1)}) + c_2(a_{n-1}^{(p)} - a_{n-1}^{(p_1)}),$$

što znači da je $a_n^{(p_1)} - a_n^{(p)}$ rešenje jednačine (1.3) tj. za svako rešenje nehomogene jednačine postoji rečenje $a_h^{(n)}$ homogene jednačine tako da se $a_n^{(p)}$ može izraziti pomoću $a_n^{(h)}$ i $a_n^{(p_1)}$ koristeći obrazac

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p_1)}.$$

Prethodno tvrđenje direktno indukuje metod za određivanja opšteg rešenja nehomogene rekurentne relacije. Ako se na bilo koji način može odrediti jedno rešenje nehomogene relacije, onda oblik opšteg rešenja direktno sledi. Sledeće tvrđenje daje metod za određivanje tog jednog partikularnog rešenja u slučaju kada nehomogeni deo ima jedan određeni specifičan oblik. U svim ostalim slučajevima metod nije primenjiv.

Teorema 72 *Neka je*

$$f(n) = (b_m n^m + b_{m-1}n^{m-1} + \ldots + b_1 n + b_0)s^n, \quad b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{R}.$$

Ako je s koren karakteristične jednačine višestrukosti l (ako nije koren $l = 0$), onda postoji partikularno rešenje oblika

$$a_p(n) = n^l(c_m n^m + c_{n-1}n^{m-1} + \ldots + c_1 n + c_0)s^n.$$

Teorema 73 *Ako su $a_n^{(p_1)}$ i $a_n^{(p_2)}$ redom rešenja nehomogenih rekurentnih relacija*

$$\begin{aligned} a_n &= c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f_1(n) \text{ i} \\ a_n &= c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f_2(n), \end{aligned}$$

onda je $a_n^{(p_1)} + a_n^{(p_2)}$ rešenje nehomogene rekurentne relacije

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f_1(n) + f_2(n).$$

Dokaz. Ako su $a_n^{(p_1)}$ i $a_n^{(p_2)}$ redom rešenja navedenih rekurentnih relacija, onda važi

$$\begin{aligned} a_n^{(p_1)} &= c_1 a_{n-1}^{(p_1)} + c_2 a_{n-2}^{(p_1)} + \ldots + c_k a_{n-k}^{(p_1)} + f_1(n) \text{ i} \\ a_n^{(p_2)} &= c_1 a_{n-1}^{(p_2)} + c_2 a_{n-2}^{(p_2)} + \ldots + c_k a_{n-k}^{(p_2)} + f_2(n). \end{aligned}$$

Sabiranjem prethodne dve jednakosti dobijamo

$$\begin{aligned} a_n^{(p_1)} + a_n^{(p_2)} &= c_1(a_{n-1}^{(p_2)} + a_{n-1}^{(p_1)}) + c_2(a_{n-2}^{(p_1)} + a_{n-2}^{(p_2)}) + \ldots + \\ & \quad c_k(a_{n-k}^{(p_1)} + a_{n-k}^{(p_2)}) + f_1(n) + f_2(n), \end{aligned}$$

čime je direktno pokazano da je $a_n^{(p_1)} + a_n^{(p_2)}$ rešenje rekurentne relacije

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f_1(n) + f_2(n).$$