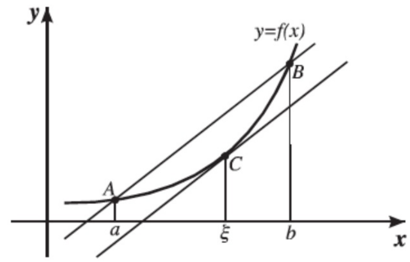
Lagranžova teorema

Ako je funkcija $f:[a,b]\rightarrow R$ neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a,b]$ i ima izvod nad otvorenim intervalom (a,b), tada postoji bar jedna tačka $\xi\in(a,b)$ takva da je

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$



3. Pokazati da jednačina $2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}=\frac{16\sqrt{2}-9}{2\pi}$ ima bar jedno rešenje u intervalu $(\frac{3}{\pi},\frac{4}{\pi})$.

Funkcija $F(x)=x^2\cos\frac{1}{x}$ je neprekidna nad intervalom $\left[\frac{3}{\pi},\frac{4}{\pi}\right]$ i diferencijabilna nad intervalom $(\frac{3}{\pi},\frac{4}{\pi})$ $(F'(x)=2x\cos\frac{1}{x}+\cancel{x^2}(-\sin\frac{1}{x})(-\frac{1}{\cancel{x^2}})=2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x})$ pa zadovoljava uslove Lagranžove teoreme, tj. postoji $\xi\in(\frac{3}{\pi},\frac{4}{\pi})$ takvo da $F(\frac{4}{\pi})-F(\frac{3}{\pi})=F'(\xi)(\frac{4}{\pi}-\frac{3}{\pi})$.

$$F(\frac{4}{\pi})-F(\frac{3}{\pi})=\frac{16}{\pi^2}\cos\frac{\pi}{4}-\frac{9}{\pi^2}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{16}{\pi^2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{9}{\pi^2}\frac{1}{2}=\frac{16\sqrt{2}-9}{2\pi^2}$$

$$\frac{16\sqrt{2}-9}{2\pi^{\cancel{2}}}=F'(\xi)\cdot\frac{1}{\cancel{\pi}}$$

$$\frac{16\sqrt{2}-9}{2\pi^{\cancel{2}}}=\left[2\xi\cos\frac{1}{\xi}+\sin\frac{1}{\xi}\right]\cdot\frac{1}{\cancel{\pi}}\Rightarrow 2\xi\cos\frac{1}{\xi}+\sin\frac{1}{\xi}=\frac{16\sqrt{2}-9}{2\pi}$$

Košijeva teorema

Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne nad zatvorenim intervalom $[a,b]$, imaju izvode nad otvorenim intervalom (a,b) i za svako $x\in(a,b)$ je $g'(x)\neq 0$, tada postoji bar jedna tačka $\xi\in(a,b)$, takva da je

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Lagranžova teorema je specijalan slučaj Košijeve teoreme.

Geometrijski značaj ove teoreme se sastoji u tome da pod datim uslovima postoji tangenta krive $y=f(x)$ u nekoj tački koja pripada intervalu $[a,b]$ i paralelna je sa sečicom koja prolazi kroz tačke $A(a,f(a))$ i $B(b,f(b))$.

Tejlorova teorema

Neka su funkcija $f(x)$ i svi njeni izvodi do $(n-1)$-og reda neprekidni nad zatvorenim intervalom $[A,B]$ i neka $f(x)$ ima n-ti izvod nad otvorenim intervalom (A,B). Neka je $a \in [A,B]$ proizvoljna tačka. Tada za svako $b \in [A,B]$, $b \neq a$ postoji bar jedna tačka $\xi \in (a,b)$, $b > a$, odnosno $\xi \in (b,a)$, $a > b$ takva da je

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n$$

$$R_n = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

Kada je funkcija $f(x)$ predstavljena na način

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i + R_n(x)$$

kažemo da je razvijena po Tejlorovoj formuli u tački a.

R_n – ostatak ili greška i predstavlja odstupanje funkcije $f(x)$ od Tejlorovog polinoma

$$T_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i$$

$$R_n(x) = f(x) - T_{n-1}(x)$$

Za $n = 1$ dobijamo Lagranžovu teoremu.

Maklorenova formula

Ako u Tejlorovoj formuli stavimo $a = 0$ dobićemo Maklorenovu formulu.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x),\ 0 < \theta < 1$$

Polinom $M_{n-1}(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0)$ se zove Maklorenov polinom, a $R_n(x)$ ostatak ili greška aproksimacije funkcije $f(x)$ Maklorenovim polinomom.

4. Aproksimirati funkciju $f(x) = x^2 e^{-x}$ Tejlorovim polinomom trećeg stepena u tački $x = 2$.

$$T_{3,2}(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1}(x-2) + \frac{f''(2)}{2}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3$$

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x} \ \Rightarrow f(2) = 4e^{-2}$$

$f(x) = x^2 e^{-x}$

$f'(x) = 2xe^{-x} + x^2(-e^{-x}) = e^{-x}(-x^2 + 2x) \Rightarrow f'(2) = 0$

$f''(x) = -e^{-x}(-x^2 + 2x) + e^{-x}(-2x + 2) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2) \Rightarrow f''(2) = -2e^{-2}$

$f'''(x) = -e^{-x}(+x^2 - 4x + 2) + e^{-x}(2x - 4) = e^{-x}(-x^2 + 6x - 6) \Rightarrow f'''(2) = 2e^{-2}$

$T_{3,2}(x) = \frac{4}{e^2} - \frac{\cancel{2}^{\,1}}{e^2 \cdot \cancel{2}}(x-2)^2 + \frac{1}{3e^2}(x-2)^3 = \frac{1}{e^2}\left(4 - (x-2)^2 + \frac{1}{3}(x-2)^3\right)$

5. Razviti funkciju $f(x) = arctg\, x + x^3 - 2x^2 + 1$ u Tejlorov polinom trećeg stepena u tački $x = 1$ i u Maklorenov polinom trećeg stepena.

$x^3 - 2x^2 + 1$ je polinom trećeg stepena, pa razvijamo samo funkciju $z(x) = arctg\, x$.

$z(x) = arctg\, x, \quad z(1) = arctg\, 1 = \frac{\pi}{4}, \quad z(0) = arctg\, 0 = 0$

$z'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad z'(1) = \frac{1}{2}, \qquad z'(0) = 1$

$z''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \qquad z''(1) = -\frac{1}{2}, \qquad z''(0) = 0$

$z'''(x) = -2\frac{(1+x^2)^{\cancel{2}} - x \cdot 2\cancel{(1+x^2)} \cdot 2x}{(1+x^2)^{\cancel{4}\,3}} = -2\frac{1 + x^2 - 4x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{-2 + 6x^2}{(1+x^2)^3},$

$z'''(1) = \frac{1}{2}, \qquad z'''(0) = -2$

$h(x) = x^3 - 2x^2 + 1, \quad h(1) = 0, \ h(0) = 1$

$h'(x) = 3x^2 - 4x, \quad h'(1) = -1, \ h'(0) = 0$

$h''(x) = 6x - 4, \quad h''(1) = 2, \ h''(0) = -4$

$h'''(x) = 6, \quad h'''(1) = h'''(0) = 6$

$T_{3,1,h}(x) = \frac{-1}{1}(x-1) + \frac{2}{2}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3$

$= -x + 1 + x^2 - 2x + 1 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$= x^3 - 2x^2 + 1$

$T_{3,1}(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{-\frac{1}{2}}{2!}(x-1)^2 + \frac{\frac{1}{2}}{3!}(x-1)^3 + x^3 - 2x^2 + 1$

$T_{3,1}(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + x^3 - 2x^2 + 1$

$M_3(x) = x - \frac{2}{6}x^3 + x^3 - 2x^2 + 1 = x - \frac{1}{3}x^3 + x^3 - 2x^2 + 1 = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + x + 1$

$M_{3,h}(x) = 1 + \frac{-4}{2!}x^2 + \frac{6}{3!}x^3$

$= x^3 - 2x^2 + 1$

6. (domaći)

a) Aproksimirati funkciju $f(x) = 1 + x + \sqrt{x^4 - x^5}$ Maklorenovim polinomom četvrtog stepena.

b) Naći približnu vrednost broja $\sqrt{\frac{2}{243}}$ koristeći rezultat pod a).

☺

$*$ а) $f(x) = \dfrac{1 - \ln x^2}{1 + \ln x^2}$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^{\cancel{2}}} \cdot 2\cancel{x}\left(1+\cancel{\ln x^2}\right) - \left(1-\cancel{\ln x^2}\right) \cdot \frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}}{\left(1+\ln x^2\right)^2} = \frac{-4}{x\left(1+\ln x^2\right)^2}$$

б) $\dfrac{1}{3(e-1)} = \dfrac{1}{x\left(1+\ln x^2\right)^2}$ ИМА РЕШЕНИЕ НА $(1,e)$

· $f(x)$ НЕПРЕКИДНА НАД $[1,e]$

· $f(x)$ ИМА ИЗВОД НАД $(1,e)$

Л.Т. $\Rightarrow$ $\exists \xi \in (1,e)$

$$\frac{f(e) - f(1)}{e-1} = f'(\xi)$$

$$\frac{-\frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{3}{3}}{e-1} = \frac{-4}{\xi\left(1+\ln \xi^2\right)^2}$$

$$\frac{\cancel{-4}}{3(e-1)} = \frac{\cancel{-4}}{\xi\left(1+\ln \xi^2\right)^2} \Rightarrow \frac{1}{3(e-1)} = \frac{1}{\xi\left(1+\ln \xi^2\right)^2}$$