Obrada teksta

© Goodrich, Tamassia, Goldwasser

Katedra za informatiku, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

2021.

String

- string je niz karaktera
- primeri stringova:
  - Python program
  - HTML dokument
  - DNK sekvenca
  - digitalna slika
- alfabet Σ je skup mogućih karaktera za familiju stringova
- primeri alfabeta:
  - ASCII
  - Unicode
  - $\{0, 1\}$
  - $\{A, C, G, T\}$

String

- neka je P string dužine m
  - podstring $P[i..j]$ od P je podsekvenca od P koja sadrži karaktere sa rangom između i i j
  - prefiks od P je podstring tipa $P[0..i]$
  - sufiks od P je podstring tipa $P[i..m-1]$
- za date stringove T (tekst) i P (šablon, *pattern*) *pattern matching* problem je pronalaženje podstringa od T koji je jednak P
- primene:
  - editori teksta
  - mašine za pretragu (*search engines*)
  - bioinformatika

Nalaženje podstringa grubom silom

- nalaženje grubom silom (*brute force*) poredi šablon P sa tekstom T za svaki mogući položaj P u odnosu na T sve dok se
  - ne pronađe poklapanje
  - ne testiraju sve pozicije
- gruba sila radi u $O(nm)$ vremenu
- primer najgoreg slučaja:
  - $T = aaa \ldots ah$
  - $P = aaah$
  - može da se pojavi u slikama i DNK sekvencama
  - retko u tekstovima

Nalaženje podstringa grubom silom

BruteForceMatch(T, P)

Input: tekst T dužine n i šablon P dužine m

Output: indeks početka podstringa u T jednakog P ili -1 ako nije pronađen

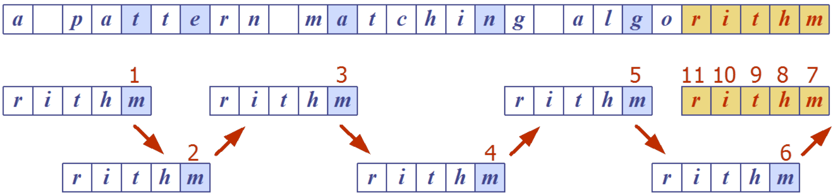
for $i \leftarrow 0$ **to** $n - m$ **do**
  $j \leftarrow 0$ {testiramo položaj i}
  while $j < m \wedge T[i+j] = P[j]$ **do**
    $j \leftarrow j + 1$
    if $j = m$ **then**
      return i {poklapanje na i}
    else
      break
return -1 {nije pronađen}

Gruba sila u Pythonu

```python
def find_brute_force(T, P):
  """Return the lowest index of T at which
     substring P begins (or else -1)."""
  n, m = len(T), len(P)  # introduce convenient notations
  for i in range(n-m+1): # try every potential starting index within T
    k = 0                # an index into pattern P
    while k < m and T[i + k] == P[k]: # kth character of P matches
      k += 1
    if k == m:           # if we reached the end of pattern,
      return i           # substring T[i:i+m] matches P
  return -1              # failed to find a match starting with any i
```

Boyer-Moore

- Boyer-Moore algoritam se zasniva na dva principa:
  - ogledalo: poredi P sa podsekvencom u T idući unazad
  - skok: ako se razlika otkrije u $T[i] = c$



Boyer-Moore: funkcija poslednjeg pojavljivanja

- Boyer-Moore algoritam formira last occurence funkciju L koja mapira alfabet Σ na cele brojeve gde je $L(c)$ definisano kao
  - najveći indeks i takav da $P[i] = c$
  - -1 ako takvog indeksa nema
- primer: $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ $\quad P = abacab$

c	a	b	c	d
$L(c)$	4	5	3	-1

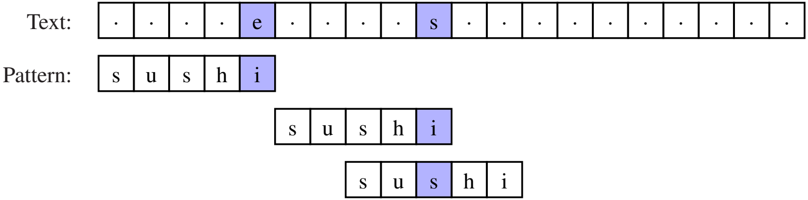
- može se predstaviti kao niz indeksiran numeričkim kodovima karaktera
- može se izračunati za $O(m + s)$ vreme gde je m dužina P a s je veličina Σ

Boyer-Moore

- bad character shift: preskoči sigurno neuspešna poređenja
- 0: ako P ne sadrži c: pomeri P tako da se poklope $P[0]$ i $T[i+1]$
- 1: ako P sadrži c i poslednja pojava c je levo od pozicije i: pomeri P tako da se $T[i]$ poklopi sa poslednjom pojavom c u P
- 2: ako P sadrži c i poslednja pojava c je desno od pozicije i: pomeri P za jedno mesto

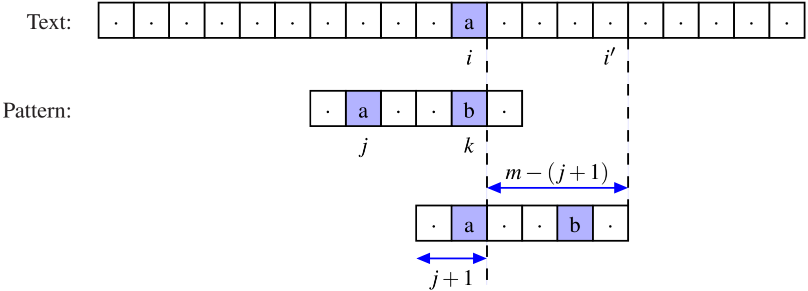
Boyer-Moore skok, slučaj 0

- slučaj 0 – ako P ne sadrži c:
- pomeri P tako da se poklope $P[0]$ i $T[i+1]$



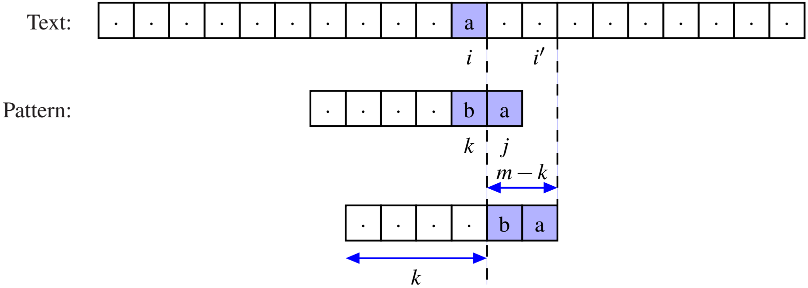
Boyer-Moore skok, slučaj 1

- slučaj 1 – ako P sadrži c i poslednja pojava c je levo od pozicije i:
- pomeri P tako da se $T[i]$ poklopi sa poslednjom pojavom c u P



Boyer-Moore skok, slučaj 2

- slučaj 2 – ako P sadrži c i poslednja pojava c je desno od pozicije i:
- rešenje A: pomeri P za jedno mesto
- rešenje B: pomeri P tako da se $T[i]$ poklopi sa sledećom pojavom c u P – last occurence funkcija više nije dovoljna!



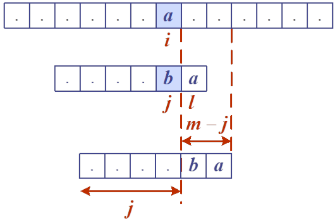
Boyer-Moore algoritam

BoyerMooreMatch(T, P, Σ)

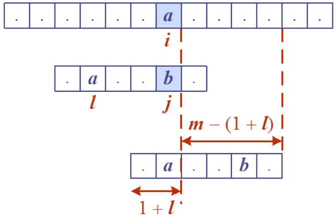
```
L ← lastOccurence(P, Σ)
i ← m − 1                                   {indeks u T}
j ← m − 1                                   {indeks u P}
repeat
    if T[i] = P[j] then
        if j = 0 then
            return i                        {poklapanje na i}
        else
            i ← i − 1
            j ← j − 1
    else
        l ← L[T[i]]                         {indeks poslednjeg pojavljivanja}
        i ← i + m − min(j, 1 + l)           {dva slučaja za skok}
        j ← m − 1
until i > n − 1
return −1                                   {nije pronađen}
```

Boyer-Moore

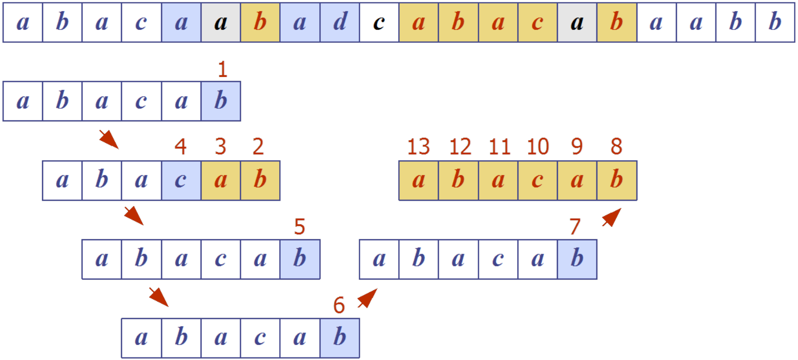
slučaj 1: $j \leq 1 + l$



slučaj 2: $1 + l \leq j$



Boyer-Moore: primer

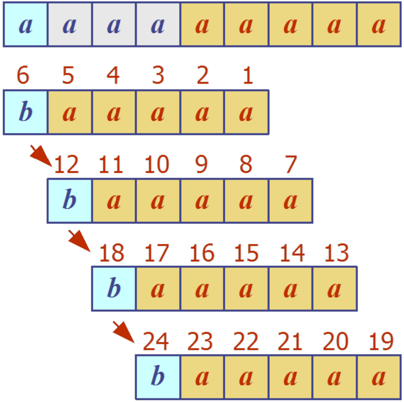


Boyer-Moore u Pythonu

```
def find_boyer_moore(T, P):
  """Return the lowest index of T at which substring P begins (or else -1)."""
  n, m = len(T), len(P)                     # introduce convenient notations
  if m == 0: return 0                       # trivial search for empty string
  last = {}                                 # build 'last' dictionary
  for k in range(m):
    last[ P[k] ] = k                        # later occurrence overwrites
  # align end of pattern at index m-1 of text
  i = m-1                                   # an index into T
  k = m-1                                   # an index into P
  while i < n:
    if T[i] == P[k]:                        # a matching character
      if k == 0:
        return i                            # pattern begins at index i of text
      else:
        i -= 1                              # examine previous character
        k -= 1                              # of both T and P
    else:
      j = last.get(T[i], -1)                # last(T[i]) is -1 if not found
      i += m - min(k, j + 1)                # case analysis for jump step
      k = m - 1                             # restart at end of pattern
  return -1
```

Boyer-Moore: analiza

- Boyer-Moore je $O(nm + s)$
- primer najgoreg slučaja:
  - $T = aaa \ldots a$
  - $P = baaa$
- najgori slučaj nije verovatan u tekstovima
- znatno brži od grube sile za tekstove na prirodnom jeziku

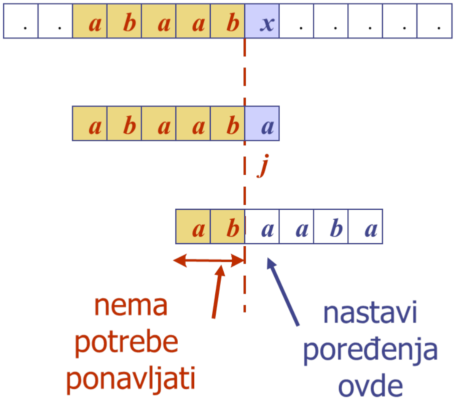


Boyer-Moore: analiza

- najgori slučaj za BM je $O(nm)$, isto kao i gruba sila
- za realne tekstove malo verovatan
- postoji i drugo pravilo za skok, good suffix shift, koje se zasniva na ideji koju koristi KMP algoritam (sledeći)

Knuth-Morris-Pratt

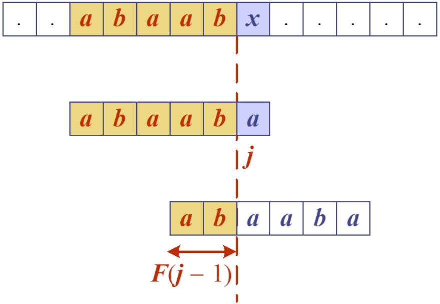
- Knuth-Morris-Pratt poredi tekst sa šablonom **sleva u desno** ali pomera šablon pametnije od grube sile
- kada se nađe razlika, koliko **najviše** možemo pomeriti šablon da izbegnemo suvišna poređenja?
- odgovor: najveći prefiks $P[0..j]$ koji je sufiks $P[1..j]$



KMP: funkcija neuspeha

- KMP analizira šablon da pronađe njegove prefikse unutar samog šablona
- funkcija neuspeha $F(j)$ je veličina najvećeg prefiksa $P[0..j]$ takvog da je ujedno i sufiks $P[1..j]$
- ako nema poklapanja za $P[j] \neq T[i]$ pomeramo $j \leftarrow F(j-1)$

j	0	1	2	3	4	5
$P[j]$	*a*	*b*	*a*	*a*	*b*	*a*
$F(j)$	0	0	1	1	2	3



Knuth-Morris-Pratt algoritam

- funkcija neuspeha se može prikazati nizom koji se izračuna za $O(m)$
- u svakoj iteraciji petlje, ili
  - i se poveća za 1, ili
  - pomeraj $i - j$ se poveća za najmanje 1 (primeti da $F(j-1) < j$)
- $\Rightarrow$ nema više od $2n$ iteracija u petlji
- $\Rightarrow$ KMP je $O(m+n)$

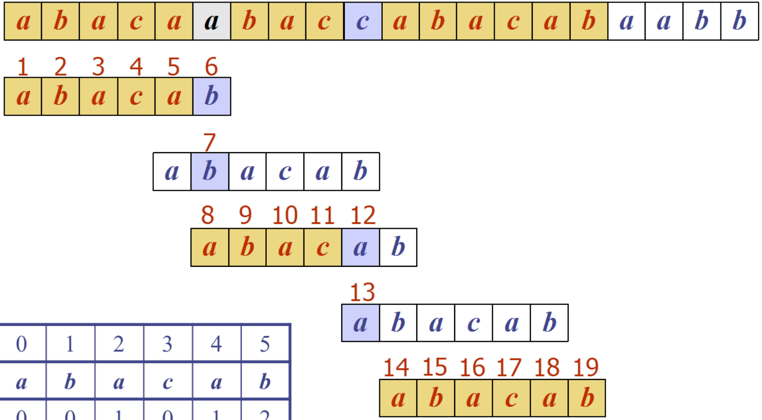
KMPMatch(T, P)
$F \leftarrow$ failureFunction(P)
$i \leftarrow 0$
$j \leftarrow 0$
while $i < n$ **do**
  if $T[i] = P[j]$ **then**
    if $j = m - 1$ **then**
      return $i - j$ {poklapanje}
    else
      $i \leftarrow i + 1$
      $j \leftarrow j + 1$
  else
    if $j > 0$ **then**
      $j \leftarrow F[j-1]$
    else
      $i \leftarrow i + 1$
return -1 {nije pronađen}

KMP: izračunavanje funkcije neuspeha

- funkcija neuspeha se može prikazati nizom koji se izračuna za $O(m)$
- slično kao i sam KMP algoritam
- u svakoj iteraciji petlje, ili
  - i se poveća za 1, ili
  - pomeraj $i - j$ se poveća za najmanje 1 (primeti da $F(j-1) < j$)
- $\Rightarrow$ nema više od $2n$ iteracija u petlji

failureFunction(P)
$F[0] \leftarrow 0$
$i \leftarrow 1$
$j \leftarrow 0$
while $i < m$ **do**
  if $P[i] = P[j]$ **then**
    $F[i] \leftarrow j + 1$ {poklapa se $j+1$ znakova}
    $i \leftarrow i + 1$
    $j \leftarrow j + 1$
  else if $j > 0$ **then**
    $j \leftarrow F[j-1]$ {koristi F da pomeriš P}
  else
    $F[i] \leftarrow 0$ {nema poklapanja}
    $i \leftarrow i + 1$

Knuth-Morris-Pratt: primer



j	0	1	2	3	4	5
$P[j]$	a	b	a	c	a	b
$F(j)$	0	0	1	0	1	2

Knuth-Morris-Pratt u Pythonu 1

```python
def find_kmp(T, P):
  """Return the lowest index of T
     at which substring P begins (or else -1)."""
  n, m = len(T), len(P)         # introduce convenient notations
  if m == 0: return 0           # trivial search for empty string
  fail = compute_kmp_fail(P)    # rely on utility to precompute
  j = 0                         # index into text
  k = 0                         # index into pattern
  while j < n:
    if T[j] == P[k]:            # P[0:1+k] matched thus far
      if k == m - 1:            # match is complete
        return j - m + 1
      j += 1                    # try to extend match
      k += 1
    elif k > 0:
      k = fail[k-1]             # reuse suffix of P[0:k]
    else:
      j += 1
  return -1                     # reached end without match
```

Knuth-Morris-Pratt u Pythonu $_2$

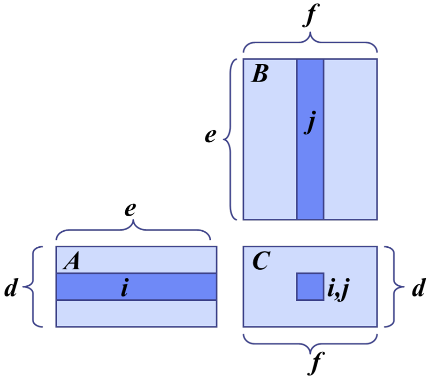
```python
def compute_kmp_fail(P):
  """Utility that computes and returns KMP 'fail' list."""
  m = len(P)
  fail = [0] * m    # by default, presume overlap of 0 everywhere
  j = 1
  k = 0
  while j < m:          # compute f(j) during this pass, if nonzero
    if P[j] == P[k]:  # k + 1 characters match thus far
      fail[j] = k + 1
      j += 1
      k += 1
    elif k > 0:         # k follows a matching prefix
      k = fail[k-1]
    else:               # no match found starting at j
      j += 1
  return fail
```

Dinamičko programiranje

- dinamičko programiranje je pristup dizajnu algoritama
- prvo primer: množenje matrica

$$C[i,j] = \sum_{k=0}^{e-1} A[i,k] \cdot B[k,j]$$

- vreme je $O(d \cdot e \cdot f)$



Množenje matrica

- računamo $A = A_0 \cdot A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}$
- A_i ima dimenzije $d_i \times d_{i+1}$
- koji redosled množenja izabrati?
- primer:
  - B je 3×100
  - C je 100×5
  - D je 5×5
  - $(B \cdot C) \cdot D$ traži 1500+75 = 1575 operacija
  - $B \cdot (C \cdot D)$ traži 1500+2500 = 4000 operacija

Raspoređivanje zagrada / gruba sila

- traženje rešenja grubom silom: isprobati sve moguće kombinacije zagrada za $A = A_0 \cdot A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}$
- izračunati broj operacija za svaku
- i izabrati najbolju
- vreme izvršavanja:
  - broj mogućih rasporeda zagrada je jednak broju različitih binarnih stabala sa n čvorova
  - **eksponencijalna** zavisnost!
  - tzv. Katalanov broj, iznosi skoro 4^n

Pohlepni pristup

- ideja #1: ponavljaj izbor onog proizvoda koji će imati **najviše** operacija
- protiv-primer:
  - A je 10×5
  - B je 5×10
  - C je 10×5
  - D je 5×10
  - ideja #1 daje $(A \cdot B) \cdot (C \cdot D)$,
    tj. 500+1000+500 = 2000 operacija
  - $A \cdot ((B \cdot C) \cdot D)$ je 500+250+250 = 1000 operacija

Pohlepni pristup

- ideja #2: ponavljaj izbor onog proizvoda koji će imati **najmanje** operacija
- protiv-primer:
  - A je 101×11
  - B je 11×9
  - C je 9×100
  - D je 100×99
  - ideja #2 daje $A \cdot ((B \cdot C) \cdot D)$,
    tj. 109989+9900+108900 = 228789 operacija
  - $(A \cdot B) \cdot (C \cdot D)$ je 9999+89991+89100 = 189090 operacija
- pohlepni pristup ne donosi optimalan izbor

„Rekurzivni“ pristup

- definišemo potprobleme
  - nađi najbolji raspored zagrada za podniz $A_i \cdot A_{i+1} \cdot \ldots A_j$
  - neka je $N_{i,j}$ broj operacija za ovaj potproblem
  - optimalno rešenje za ceo problem je $N_{0,n-1}$
- optimalnost potproblema: optimalno rešenje se može dobiti pomoću optimalnih potproblema
  - mora postojati poslednje množenje (koren stabla izraza) za optimalno rešenje
  - neka je to na i-tom indeksu: $(A_0 \cdot \ldots \cdot A_i) \cdot (A_{i+1} \cdot \ldots \cdot A_{n-1})$
  - optimalno rešenje za ceo problem $N_{0,n-1}$ je suma dva optimalna potproblema plus poslednje množenje
  - ako bi optimalno rešenje imalo bolje potprobleme, ne bi bilo optimalno

Karakteristična jednačina

- globalni optimum se definiše pomoću optimalnih potproblema u zavisnosti od indeksa poslednjeg množenja
- razmotrimo sve moguće vrednosti tog indeksa
  - A_i je dimenzije $d_i \times d_{i+1}$
  - karakteristična jednačina za $N_{i,j}$ je:

$$N_{i,j} = min_{i \leq k < j}\{N_{i,k} + N_{k+1,j} + d_i d_{k+1} d_{j+1}\}$$

- potproblemi nisu nezavisni, nego se preklapaju

Algoritam dinamičkog programiranja

- pošto se problemi preklapaju, nećemo koristiti rekurziju
- konstruisaćemo optimalne potprobleme od dole na gore (*bottom-up*)
- $N_{i,i}$ je lako - nema množenja, tj. 0 operacija, počnemo od njih
- onda pređemo na potprobleme dužine 2, 3, ...
- vreme izvršavanja je $O(n^3)$

Algoritam dinamičkog programiranja

matrixChain(S)

Input: sekvenca S matrica koje treba pomnožiti

Output: broj operacija u optimalnom rasporedu zagrada

for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
    $N_{i,i} \leftarrow 0$
for $b \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**
    for $i \leftarrow 0$ **to** $n-b-1$ **do**
        $j \leftarrow i+b$
        $N_{i,j} \leftarrow +\infty$
        for $k \leftarrow i$ **to** $j-1$ **do**
            $N_{i,j} \leftarrow min_k\{N_{i,k} + N_{k+1,j} + d_i d_{k+1} d_{j+1}\}$

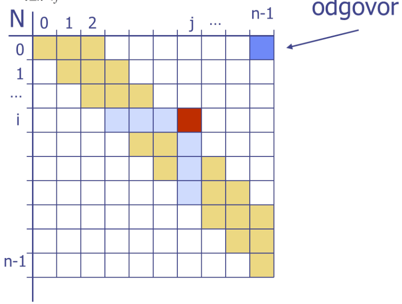
Python implementacija

```
def matrix_chain(d):
  """Return solution to the matrix chain problem.

  d is a list of n+1 numbers describing the dimensions of a chain of
  n matrices such that kth matrix has dimensions d[k]-by-d[k+1].

  Return an n-by-n table such that N[i][j] represents the minimum
  number of multiplications needed to compute the product of Ai
  through Aj inclusive.
  """
  n = len(d) - 1                    # number of matrices
  N = [[0] * n for i in range(n)] # initialize n-by-n result to zero
  for b in range(1, n):             # number of products in subchain
    for i in range(n-b):            # start of subchain
      j = i + b                     # end of subchain
      N[i][j] = min(N[i][k] + N[k+1][j] + d[i]*d[k+1]*d[j+1] \
        for k in range(i,j))
  return N
```

Vizuelizacija algoritma

- bottom-up prvo popuni dijagonalu
- $N_{i,j}$ se dobija na osnovu vrednosti iz i-tog reda i j-te kolone
- popunjavanje svake ćelije u tabeli je $O(n)$
- ukupno vreme je $O(n^3)$
- raspored zagrada dobijamo pamćenjem k u ćelijama tabele

$$N_{i,j} = \min_{i \le k < j} \{ N_{i,k} + N_{k+1,j} + d_i d_{k+1} d_{j+1} \}$$



Opšti postupak dinamičkog programiranja

- primenljivo na probleme čije rešavanje traži puno vremena (moguće eksponencijalni) ukoliko postoje:
  - jednostavni potproblemi: potproblemi se mogu definisati pomoću promenljivih j, k, l, m itd.
  - optimalni potproblemi: globalni optimum se može definisati pomoću optimalnih potproblema
  - preklapanje potproblema: potproblemi nisu nezavisni i treba ih konstruisati bottom-up

Podsekvence

- podsekvenca stringa $x_0 x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$ je string $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$ gde je $i_j < i_{j+1}$
- nije isto što i podstring!
- primer stringa: ABCDEFGHIJK
  - jeste podsekvenca: ACEGIJK
  - jeste podsekvenca: DFGHK
  - nije podsekvenca: DAGH

Problem najduže zajedničke podsekvence

- longest common subsequence (LCS)
- za stringove X i Y, LCS je najduža podsekvenca od X i Y
- primena: ispitivanje sličnosti DNK (alfabet je {A,C,G,T})
- primer: ABCDEFG i XZACKDFWGH imaju LCS: ACDFG

LCS grubom silom

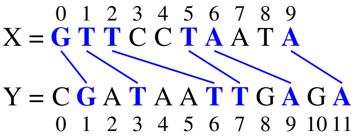
- primena grube sile na LCS:
  - pronađi sve podsekvence od X
  - izdvoj one koje su i podsekvence od Y
  - izaberi najdužu
- analiza:
  - ako je X dužine n, ima 2^n podsekvenci
  - ovo je eksponencijalno vreme!

LCS dinamičkim programiranjem

- neka je $L[i,j]$ LCS za $X[0..i]$ i $Y[0..j]$
- neka postoji indeks -1, tako da je $L[-1,k]=0$ i $L[k,-1]=0$; to znači da null deo X ili Y nema poklapanja sa drugim
- sada definišemo $L[i,j]$ u opštem slučaju:
    - ako je $x_i = y_j$ onda $L[i,j] = L[i-1,j-1]+1$ (imamo poklapanje)
    - ako je $x_i \neq y_j$ onda $L[i,j] = max\{L[i-1,j], L[i,j-1]\}$ (nemamo poklapanje)

LCS dinamičkim programiranjem

- slučaj $x_i = y_j$
- jednaki su poslednji znaci $X[0..i]$ i $Y[0..j]$
- taj poslednji znak mora biti deo najduže podsekvence (dokaz kontradikcijom)
- mora važiti $L[i,j] = L[i-1,j-1]+1$
- primer: $L_{10,12} = 1 + L_{9,11}$



LCS dinamičkim programiranjem

- slučaj $x_i \neq y_j$
- LCS ne može da sadrži i x_i i y_j
- LCS može da sadrži jednog od njih ili nijednog
- sada važi $L[i,j] = \max\{L[i-1,j], L[i,j-1]\}$
- primer: $L_{9,11} = \max\{L_{9,10}, L_{8,11}\}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X =	**G**	**T**	**T**	C	C	**T**	**A**	A	T		
Y =	C	**G**	A	**T**	A	A	**T**	**T**	G	**A**	G

LCS algoritam

LCS(X, Y)

Input: stringovi X i Y dužine n odnosno m

Output: $L[i, j]$ za $0 \leq i < n$ i $0 \leq j < m$

for $i \leftarrow 0$ **to** $n - 1$ **do**
  $N_{i,-1} \leftarrow 0$
for $j \leftarrow 0$ **to** $m - 1$ **do**
  $N_{-1,j} \leftarrow 0$
for $i \leftarrow 0$ **to** $n - 1$ **do**
  for $j \leftarrow 0$ **to** $m - 1$ **do**
    if $x_i = y_j$ **then**
      $L[i, j] \leftarrow L[i - 1, j - 1] + 1$
    else
      $L[i, j] \leftarrow max\{L[i - 1, j], L[i, j - 1]\}$
return L

LCS algoritam: vizuelizacija

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	0	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	0	0	1	1	2	2	2	3	3	3	3	3	3
4	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3	3	3
5	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3	3	3
6	0	1	1	1	2	2	2	3	4	4	4	4	4
7	0	1	1	2	2	3	3	3	4	4	5	5	5
8	0	1	1	2	2	3	4	4	4	4	5	5	6
9	0	1	1	2	3	3	4	5	5	5	5	5	6
10	0	1	1	2	3	4	4	5	5	5	6	6	6

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

X = **G** **T** **T** C C **T** **A** A T **A**

Y = C **G** A **T** A A **T** **T** G **A** G **A**

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

LCS algoritam: analiza

- algoritam ima dve ugnježdene petlje
  - spoljna ima n ciklusa
  - unutrašnja ima m ciklusa
  - telo unutrašnje petlje ima konstantno vreme
  - $\Rightarrow$ ukupno vreme je $O(nm)$
- odgovor je sačuvan u $L[n, m]$

Python implementacija $_1$

```
def LCS(X, Y):
  """Return table such that L[j][k] is
     length of LCS for X[0:j] and Y[0:k].
     """
  n, m = len(X), len(Y)
  L = [[0] * (m+1) for k in range(n+1)] # (n+1) x (m+1) table
  for j in range(n):
    for k in range(m):
      if X[j] == Y[k]:                  # align this match
        L[j+1][k+1] = L[j][k] + 1
      else:                             # choose to ignore one char
        L[j+1][k+1] = max(L[j][k+1], L[j+1][k])
  return L
```

Python implementacija $_2$

```
def LCS_solution(X, Y, L):
  """Return the longest common substring
     of X and Y, given LCS table L.
     """
  solution = []
  j,k = len(X), len(Y)
  while L[j][k] > 0:  # common characters remain
    if X[j-1] == Y[k-1]:
      solution.append(X[j-1])
      j -= 1
      k -= 1
    elif L[j-1][k] >= L[j][k-1]:
      j -=1
    else:
      k -= 1
  return ''.join(reversed(solution)) # return left-to-right
                                     # version
```

Pohlepna metoda

- pohlepna metoda je pristup dizajnu algoritama zasnovan na:
  - **konfiguracije**: različiti izbori, kolekcije ili vrednosti koje treba pronaći
  - **funkcija cilja**: vrednost (*score*) dodeljena konfiguracijama koju želimo da minimizujemo ili maksimizujemo
- najbolje funkcioniše za probleme koji imaju osobinu pohlepnog izbora:
  - globalno optimalno rešenje se može pronaći serijom lokalnih unapređenja polazeći od početne konfiguracije

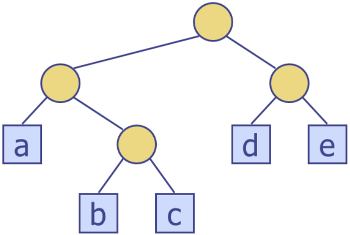
Kompresija teksta

- dati string X zapiši/kodiraj kao Y tako da Y zauzima manje memorije
  - štedi memoriju i/ili propusni opseg mreže
- odličan primer: Huffman-ovo kodiranje
  - izračunaj frekvenciju pojavljivanja svakog znaka
  - najčešće znakove kodiraj najkraćim kodovima
  - nijedan kôd nije prefiks nekog drugog
  - koristi optimalno stablo kodiranja za određivanje kodova

Stablo kodiranja

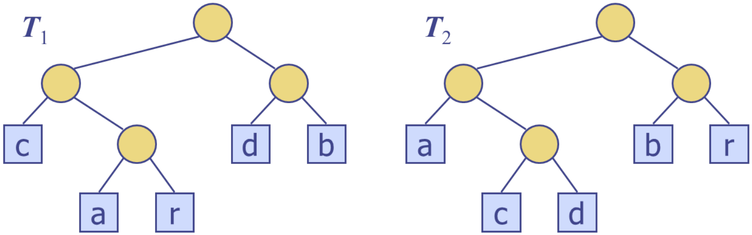
- kôd je preslikavanje karaktera iz alfabeta na binarni reprezent – kodnu reč
- prefiksni kôd je takav binarni kôd da nijedna kodna reč nije prefiks druge kodne reči
- stablo kodiranja predstavlja prefiksni kôd
  - listovi čuvaju karaktere iz alfabeta
  - kodna reč dobija se obilaskom putanje od korena do lista
  - 0 za levo dete i 1 za desno dete

00	010	011	10	11
a	b	c	d	e



Optimizacija stabla kodiranja

- za dati string X tražimo prefiksni kod takav da rezultat kompresije bude što kraći
  - česti karakteri treba da imaju kratke kodne reči
  - retki karakteri mogu da imaju duže kodne reči
- primer:
  - $X = abracadabra$
  - T_1 kodira X u 29 bita
  - T_2 kodira X u 24 bita



Huffman-ovo kodiranje

- za dati string X Huffman-ovo kodiranje konstruiše prefiksni kod koji minimizuje dužinu kôda od X
- radi u $O(n + dlogd)$ vremenu
  - n je dužina X
  - d je veličina alfabeta
- pomoćna struktura podataka: red sa prioritetom implementiran pomoću heapa

Huffman-ov algoritam

Huffman(X)

Input: string X dužine n sa d različitih znakova
Output: stablo kodiranja za X

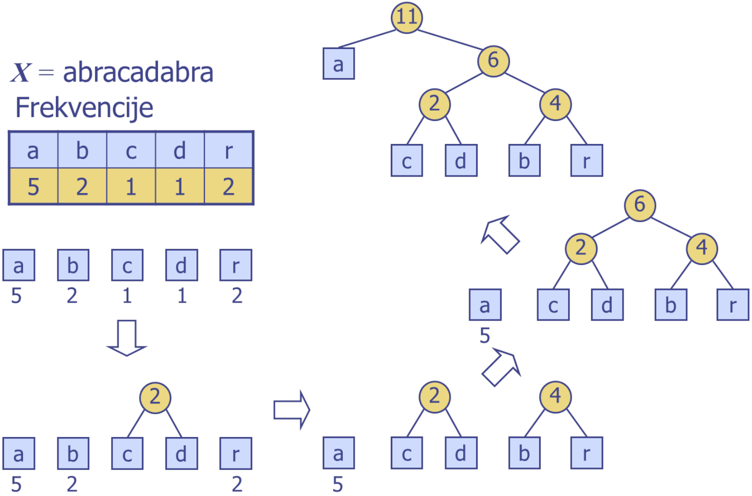
izračunaj frekvenciju $f(c)$ za svaki znak c iz X
Q je novi red sa prioritetom
for all $c \in X$ **do**
  kreiraj koren stabla T koji čuva c
  dodaj T u Q sa ključem $f(c)$
while len(Q)> 1 **do**
  $(f_1, T_1) \leftarrow Q$.remove_min()
  $(f_2, T_2) \leftarrow Q$.remove_min()
  kreiraj novo stablo T sa levim podstablom T_1 i desnim T_2
  dodaj T u Q sa ključem $f_1 + f_2$
$(f, T) \leftarrow Q$.remove_min()
return T

Huffman: primer 1

X = abracadabra

Frekvencije

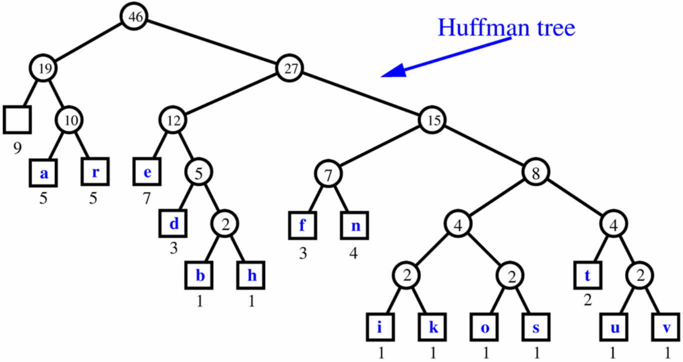
a	b	c	d	r
5	2	1	1	2



Huffman: primer 2

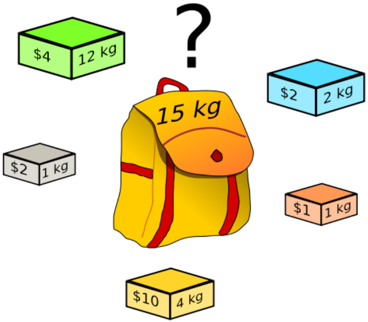
String: **a fast runner need never be afraid of the dark**

Character		a	b	d	e	f	h	i	k	n	o	r	s	t	u	v
Frequency	9	5	1	3	7	3	1	1	1	4	1	5	1	2	1	1



Problem ranca

- dat je skup S od n elemenata, svaki element i ima
  - b_i cenu (benefit)
  - w_i težinu
- **cilj**: izaberi elemente sa maksimalnom ukupnom vrednošću ali ukupnom težinom ne većom od W



Problem ranca

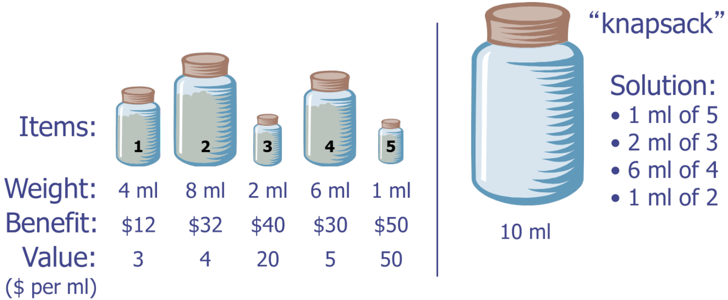
- ako je moguće uzeti razlomljene količine elemenata:
  - x_i je količina elementa i
  - cilj: maksimizovati

$$\sum_{i \in S} b_i \frac{x_i}{w_i}$$

  - uz ograničenje:

$$\sum_{i \in S} \leq W$$

Problem ranca: primer



Problem ranca: algoritam

- pohlepni izbor: izaberi element sa najvećom vrednošću (cena/težina)
  - pošto je $\sum_{i \in S} b_i(x_i/w_i) = \sum_{i \in S}(b_i/w_i)x_i$
  - radi u $O(nlogn)$ vremenu
- **korektnost**: pretpostavimo da postoji bolje rešenje
  - postoji element i sa većom vrednošću od izabranog elementa j ali je $x_i < w_i$ i $v_i < v_j$
  - ako zamenimo i sa j dobićemo bolje rešenje
  - koliko od i: $min\{w_i - x_i, x_j\}$
  - dakle, nema boljeg rešenja od pohlepnog

Problem ranca: algoritam

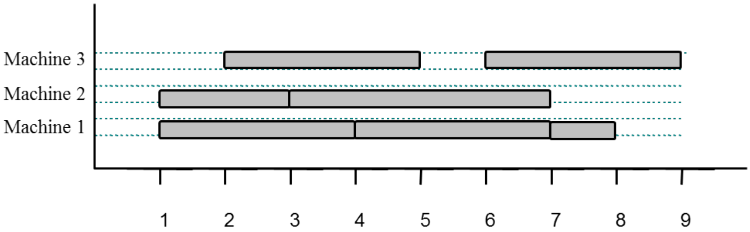
fractionalKnapsack(S, W)

Input: skup S elemenata w sa cenom b_i i težinom w_i, max težina W
Output: količina x_i elementa i da se maksimizuje cena uz max težinu W

for all $i \in S$ **do**
  $x_i \leftarrow 0$
  $v_i \leftarrow b_i / w_i$ {vrednost}
$w \leftarrow 0$ {ukupna težina}
while $w < W$ **do**
  ukloni element i sa najvećim v_i
  $x_i \leftarrow min\{w_i, W - w\}$
  $w \leftarrow w + min\{w_i, W - w\}$

Raspoređivanje zadataka

- za dati skup T od n zadataka svaki zadatak ima
  - vreme početka s_i
  - vreme završetka f_i (gde je $s_i < f_i$)
- **cilj**: obaviti sve zadatke sa minimalnim brojem mašina



Raspoređivanje zadataka: algoritam

- pohlepni izbor: razmatraćemo zadatke po vremenu početka i koristiti što manje mašina za ovaj redosled
  - vreme izvršavanja $O(nlogn)$
- **korektnost**: pretpostavimo da postoji bolji raspored
  - možemo koristiti $k-1$ mašina
  - algoritam koristi k
  - neka je i prvi zadatak planiran u postrojenju k
  - mašina i mora biti u konfliktu sa $k-1$ drugih zadataka
  - ali to znači da postoji konzistentan raspored koji koristi $k-1$ mašina

Raspoređivanje zadataka: algoritam

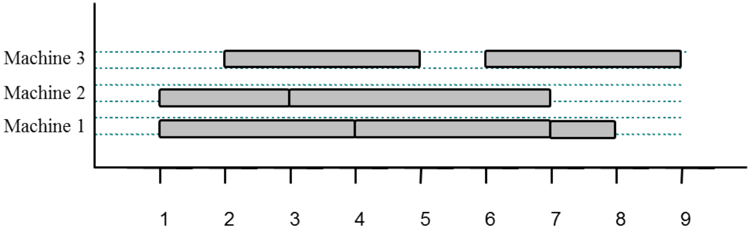
taskSchedule(T)

Input: skup T zadataka sa startnim vremenom s_i i vremenom završetka f_i
Output: raspored sa minimalnim brojem mašina

```
m ← 0                                          {broj mašina}
while T nije prazan do
    ukloni zadatak i sa najmanjim s_i
    if postoji mašina j za zadatak i then
        rasporedi zadatak i na mašinu j
    else
        m ← m + 1
        rasporedi zadatak i na mašinu m
```

Raspoređivanje zadataka: primer

- za dati skup T od n zadataka, svaki zadatak ima
  - vreme početka s_i
  - vreme završetka f_i (gde je $s_i < f_i$)
- **primer**: $[1,4],[1,3],[2,5],[3,7],[4,7],[6,9],[7,8]$
- izvršiti zadatke na minimalnom broju mašina

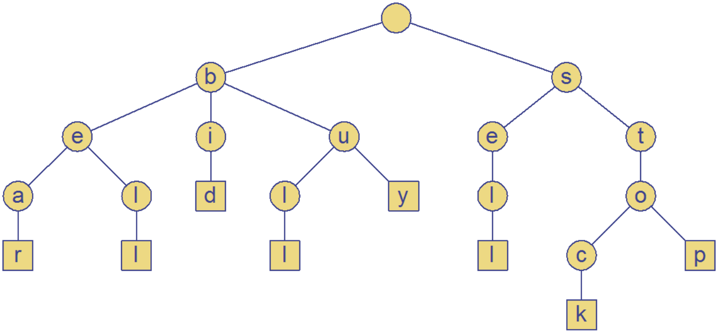


Predprocesiranje stringova

- predprocesiranje šablona ubrzava pattern matching
  - vreme za KMP je proporcionalno dužini teksta nakon predprocesiranja
- ako je tekst dugačak, ne menja se i često se pretražuje mogli bismo da predprocesiramo tekst umesto šablona
- trie (čita se kao „try“) je struktura podataka za čuvanje stringova, npr. svih reči u tekstu
  - vreme pretrage je proporcionalno dužini šablona

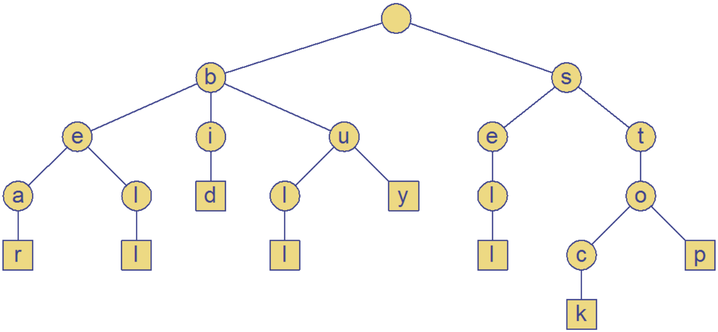
Standardni trie

- standardni trie za skup stringova S je stablo:
  - svaki čvor osim korena čuva jedan karakter
  - deca čvora su u alfabetskom redosledu
  - putanja od korena do lista daje čuvani string
- primer: S={bear, bell, bid, buy, sell, stock, stop}



Standardni trie: analiza

- standardni trie troši $O(n)$ prostora
- dodavanje, uklanjanje i pretraga su $O(dm)$
  - n ukupna dužina stringova u S
  - m dužina stringa u operaciji
  - d veličina alfabeta



Traženje reči u trie

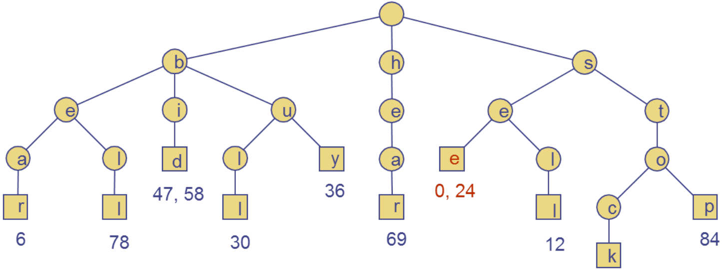
- dodaj reči iz teksta u trie
- svaki list je jedna reč
- list čuva indekse gde počinje reč

s	e	e		a		b	e	a	r	?		s	e	l	l		s	t	o	c	k	!	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23

s	e	e		a		b	u	l	l	?		b	u	y		s	t	o	c	k	!	
24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46

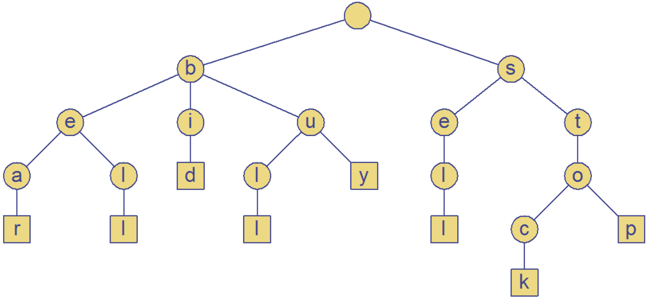
b	i	d		s	t	o	c	k	!		b	i	d		s	t	o	c	k	!	
47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68

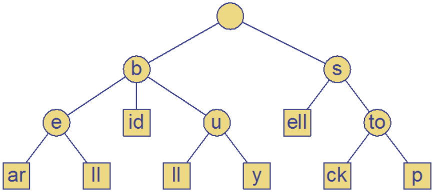
h	e	a	r		t	h	e		b	e	l	l	?		s	t	o	p	!
69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88



Kompresovani trie

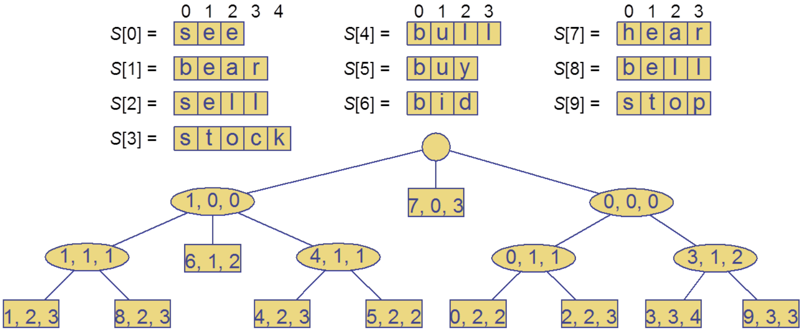
- kompresovani trie ima unutrašnje čvorove sa bar 2 deteta
- dobija se od standardnog kompresovanjem lanaca „redundantnih" čvorova





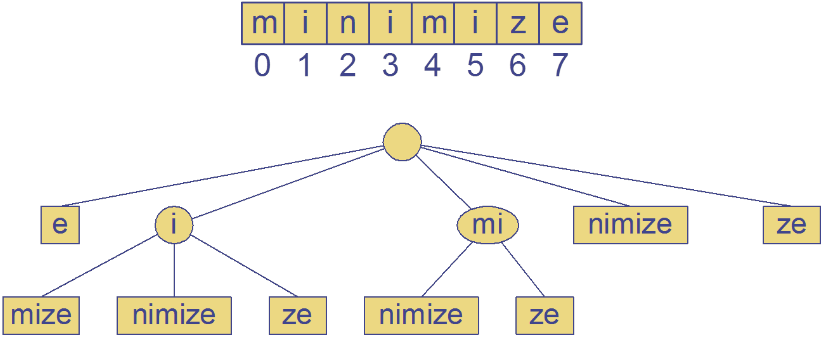
Kompaktna reprezentacija

- kompaktna reprezentacija kompresovanog trie-a za niz stringova
  - čvorovi čuvaju opsege indeksa umesto podstringove
  - troši $O(s)$ prostora gde je s broj stringova u nizu
  - služi kao pomoćna indeksna struktura



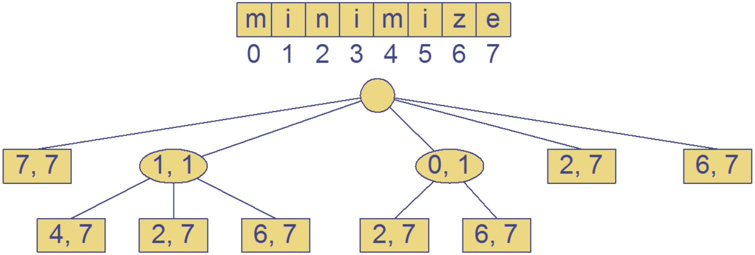
Sufiksni trie

- sufiksni trie stringa X je kompresovani trie svih sufiksa od X



Sufiksni trie: analiza

- string X dužine n, alfabet veličine d
  - troši $O(n)$ prostora
  - pretraga za $O(dm)$ vreme; m dužina traženog šablona
  - konstruiše se za $O(n)$ vreme



Kodni trie

- kodni trie predstavlja prefiksni kod
  - svaki list čuva karakter
  - kodna reč predstavlja putanju od korena do lista
  - 0 za levo dete, 1 za desno dete

00	010	011	10	11
a	b	c	d	e