# DISKRETNA MATEMATIKA

- PREDAVANJE -

Jovanka Pantović

# Tema 1

# Rekurentne relacije

# Rekurentne relacije

**Definicija**

*Neka je*

$$\{a_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$$

*niz brojeva. Rekurentna relacija niza* $\{a_n\}$ *je formula u kojoj se* $n$*-ti član niza definiše preko nekog podskupa skupa* $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$.

$$a_n = F(a_{n-1}, \ldots, a_{n-k})$$

Ako su dati $a_0, \ldots, a_{k-1}$, onda se na osnovu rekurentne relacije mogu odrediti ostali članovi tog niza.

# Tema 2

## Generisanje rekurentne relacije

# Fibonačijev niz

## Primer

*Posmatrajmo populaciju zečeva koja se ponaša na sledeći način:*

- *inicijalno postoje dva zeca, mužjak i ženka;*
- *par zečeva (mužjak i ženka) svakog meseca, počevši od puna dva meseca svog života, na svet donose par zečeva;*
- *zečevi ne umiru.*

*Koliko će biti parova zečeva nakon prve godine?*

Neka je $f_i$ broj parova zečeva na kraju $i$-tog meseca. Tada je

$$f_1 = 1 \qquad f_2 = 1 \qquad f_3 = 2 \qquad f_4 = 2 + 1 = 3 \qquad f_5 = 3 + 2 = 5$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 3$$

# Primer

## Primer

*Koliko ima različitih reči dužine $n$, $n \geq 1$, nad azbukom $\{0,1\}$ koje ne sadrže podreč $111$.*

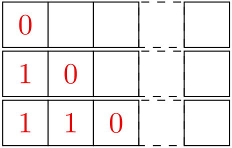
Neka je $f_i$ broj reči dužine $i$ koje ne sadrže podreč $111$.
Inicijalne vrednosti:

$$
\begin{array}{lllllllll}
n=1 & 0 & 1 & & & & & & \\
n=2 & 00 & 01 & 10 & 11 & & & & \\
n=3 & 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & \\
n=4 & 0000 & 0001 & 0010 & 0011 & 0100 & 0101 & 0110 & (f_3) \\
 & 1000 & 1001 & 1010 & 1011 & & & & (f_2) \\
 & 1100 & 1101 & & & & & & (f_1)
\end{array}
$$

# Primer

### Primer

*Koliko ima različitih reči dužine* $n$, $n \geq 1$, *nad azbukom* $\{0, 1\}$ *koje ne sadrže podreč* $111$.




$f_{n-1}$

$f_{n-2}$

$f_{n-3}$

$$f_1 = 2, f_2 = 4, f_3 = 7$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3}, n \geq 4$$

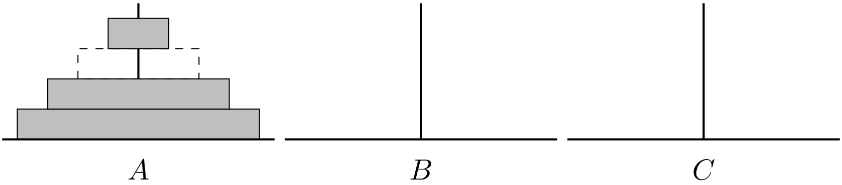
# Slagalica kule u Hanoju

## Primer

*Date su tri šipke i $n$ diskova. Diskovi su poređani na jedan štap, od najvećeg do najmanjeg (uvek manji na veći). Dozvoljeno je*

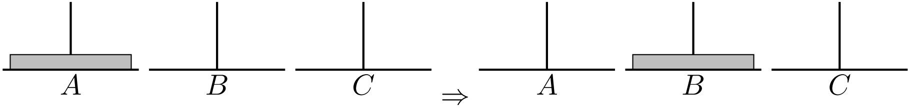
- *pomeriti u svakom koraku tačno jedan disk;*
- *veći disk nikada ne sme da se stavi na manji.*

*Koliko je najmanje koraka potrebno da se svi diskovi premeste na drugi štap?*

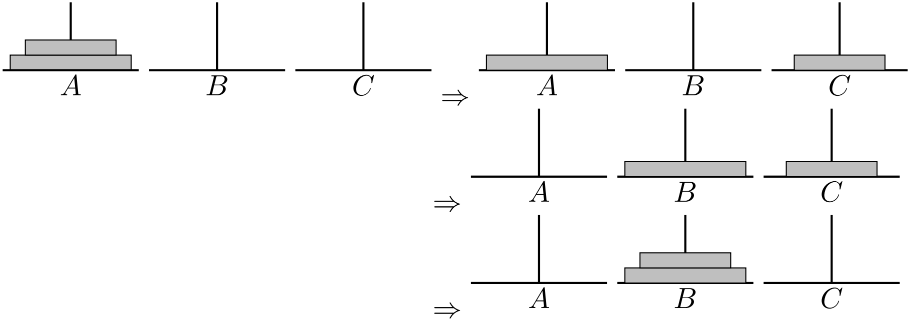


# Slagalica kule u Hanoju - inicijalne vrendosti

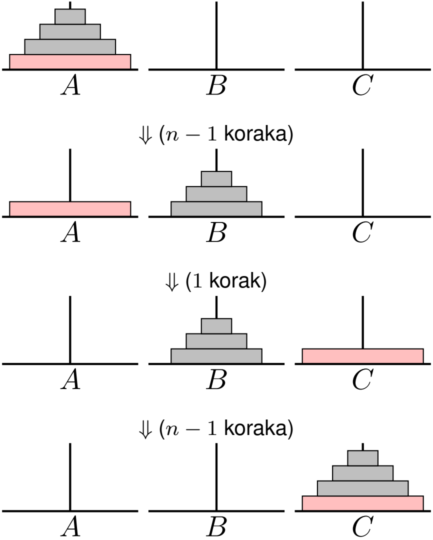
$n = 1$:




$n = 2$:



# Slagalica kule u Hanoju



# Slagalica kule u Hanoju

$$\begin{aligned} h_1 &= 1 \\ h_n &= 2h_{n-1} + 1, \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

# Tema 3

## Rešavanje rekurentne relacije

# Rešavanje rekurentnih relacija

### Definicija

*Neka je* $\{a_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ *niz brojeva. Rekurentna relacija za niz* $\{a_n\}$ *je formula u kojoj se* $n$*-ti član niza definiše preko nekog podskupa od* $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$.

Rešiti rekurentnu relaciju znači izraziti $a_n$ u zavisnosti od $n$, za svako $n \geq 0$ :

$$a_n = a(n)$$

# Rešavanje rekurentnih relacija

## Primer

*Data je rekurentna relacija*

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_n &= 5a_{n-1} + 2, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Za $n \geq 1$ dobijamo

$$\begin{aligned} a_n &= 5a_{n-1} + 2 \\ &= 5(5a_{n-2} + 2) + 2 = 5^2 a_{n-2} + 5 \cdot 2 + 2 \\ &= 5^2(5a_{n-3} + 2) + 5 \cdot 2 + 2 = 5^3 a_{n-3} + 5^2 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 2 \\ &\dots \\ &= 5^n a_0 + 2 \cdot (5^{n-1} + 5^{n-2} + \ldots + 5 + 1) \\ &= 2 \cdot (5^n + 5^{n-1} + \ldots + 5 + 1) = 2 \cdot \frac{5^{n+1} - 1}{5 - 1} = \frac{1}{2}(5^{n+1} - 1). \end{aligned}$$

# Rešavanje rekurentnih relacija

**Primer**

*Data je rekurentna relacija*

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_n &= 5a_{n-1} + 2, \quad n > 0. \end{aligned}$$

Rešenje rekurentne relacije je:

$$a_n \quad = \quad = \frac{1}{2}(5^{n+1} - 1), \quad n \geq 0$$

# Tema 4

## Linearne rekurentne relacije

# Linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

### Definicija

*Linearna rekurentna relacija reda $k$ sa konstantnim koeficijentima je relacija oblika*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f(n), n \geq k$$

*gde su $c_1, \ldots, c_k$ realni brojevi i $c_k \neq 0$.*

Ako je $f(n) = 0$ za svako $n \geq 0$, kažemo da je relacija homogena.

# Primeri

## Primer

| *rekurentna relacija* | *red* | *linearna* | *homogena* | *konstantni koeficijenti* |
|---|---|---|---|---|
| $h_n = 2h_{n-1} + 1$ | *1* | *da* | *ne* | *da* |
| $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ | *2* | *da* | *da* | *da* |
| $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}^2$ | *2* | *ne* | *da* | *da* |
| $a_n = na_{n-1}$ | *1* | *da* | *da* | *ne* |

# Linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

**Definicija**

*Linearna homogena rekurentna relacija reda $k$ sa konstantnim koeficijentima je relacija oblika*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}, n \geq k$$

*gde su $c_1, \ldots, c_k$ realni brojevi i $c_k \neq 0$.*

# Linearne homogene rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

Uvodimo smenu: $a_i = x^i, \quad x \neq 0$

$$\begin{aligned} x^n &= c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \ldots + c_kx^{n-k} \Leftrightarrow \\ x^n &= x^{n-k}(c_1x^{k-1} + c_2x^{k-2} + \ldots + c_k) \Leftrightarrow \\ x^k &= c_1x^{k-1} + c_2x^{k-2} + \ldots + c_k \end{aligned}$$

Karakteristična jednačina homogene linearne rekurentne relacije je oblika

$$\boxed{x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} - \ldots - c_{k-1}x - c_k = 0.}$$

# Linearne homogene rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

**Teorema**

*Neka karakteristična jednačina*

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \ldots - c_{k-1} x - c_k = 0.$$

*ima* $k$ *po parovima različitih korena* $x_1, \ldots, x_k$.

(i) *Za svaki izbor konstanti* $\alpha_1, \ldots \alpha_n$,

$$a(n) = \alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n + \ldots + \alpha_k x_k^n$$

*je rešenje posmatrane rekurentne relacije.*

(ii) *Konstante* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *su jedinstveno određene početnim uslovima*

$$a(0) = a_0, \ldots, a(k-1) = a_{k-1}.$$

# Linearne homogene rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

(1) $a_n = \alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n + \ldots + \alpha_k x_k^n$ jeste rešenje rekurentne relacije:

$$\begin{aligned}
c_1 a_{n-1} &+ c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} \\
&= c_1(\alpha_1 x_1^{n-1} + \ldots + \alpha_k x_k^{n-1}) + c_2(\alpha_1 x_1^{n-2} + \ldots + \alpha_k x_k^{n-2}) + \ldots \\
&\quad + c_k(\alpha_1 x_1^{n-k} + \ldots + \alpha_k x_k^{n-k}) \\
&= \alpha_1 x_1^{n-k}(c_1 x_1^{k-1} + \ldots + c_k) + \alpha_2 x_2^{n-k}(c_1 x_2^{k-1} + \ldots + c_k) \ldots \\
&\quad + \alpha_k x_k^{n-k}(c_1 x_k^{k-1} + \ldots + c_k) \\
&= \alpha_1 x_1^{n-k} x_1^k + \alpha_2 x_2^{n-k} x_2^k \ldots + \alpha_k x_k^{n-k} x_k^k \\
&= \alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n \ldots + \alpha_k x_k^n = a_n
\end{aligned}$$

# Linearne homogene rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

(2) Neka je $a(0) = a_0, \ldots, a(k-1) = a_{k-1}$ :

$$\begin{array}{lcccccccccc}
n=0: & \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \ldots & + & \alpha_k & = & a_0 \\
n=1: & \alpha_1 x_1 & + & \alpha_2 x_2 & + & \ldots & + & \alpha_k x_k & = & a_1 \\
 & \ldots & & \ldots & & & & & & \\
n=k-1: & \alpha_1 x_1^{k-1} & + & \alpha_2 x_2^{k-1} & + & \ldots & + & \alpha_k x_k^{k-1} & = & a_{k-1}
\end{array}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ & & \ldots & \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \ldots & x_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le k} (x_j - x_i) \neq 0$$

Sistem ima jedinstveno rešenje $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

## Primer

*Rešiti rekurentnu relaciju*

$$a_0 = -2 \qquad\qquad a_1 = 3$$
$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Karakteristična jednačina:

$$x^2 = x + 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \vee x_2 = 3$$

Opšte rešenje: $a(n) = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2 3^n$

Početni problem:

$$\begin{array}{rcrcr} \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & -2 \\ -2\alpha_1 & + & 3\alpha_2 & = & 3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcr} \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & -2 \\ & & 5\alpha_2 & = & -1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = -\frac{9}{5} \\ \alpha_2 = -\frac{1}{5} \end{array}$$

Rešenje rekurentne relacije: $a_n = -\frac{9}{5}(-2)^n - \frac{1}{5} \cdot 3^n, n \geq 0$

## Primer

*Rekurentna relacija za Fibonačijev niz:*

$$f_0 = 0 \qquad f_1 = 1 \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Karakteristična jednačina:

$$x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Opšte rešenje:

$$f(n) = \alpha_1 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \alpha_2 \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$\begin{array}{lrcrcl} n=0: & \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & 0 \\ n=1: & \frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha_1 & + & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\alpha_2 & = & 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \alpha_1 = -\alpha_2 \\ -\alpha_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \alpha_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array}$$

# Linearne homogene rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

**Teorema**

*Neka karakteristična jednačina*

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \ldots - c_{k-1} x - c_k = 0.$$

*ima korene* $x_1, \ldots, x_l$ *redom višestrukosti* $k_1, \ldots, k_l$.

(i) *Za svaki izbor konstanti* $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{lk_l}$,

$$\begin{aligned} a(n) \quad = \quad & (\alpha_{11} + n\alpha_{12} + \ldots n^{k_1-1}\alpha_{1k_1})x_1^n + \\ & (\alpha_{21} + n\alpha_{22} + \ldots n^{k_2-1}\alpha_{2k_2})x_2^n + \\ & \ldots \\ & (\alpha_{l1} + n\alpha_{l2} + \ldots n^{k_l-1}\alpha_{lk_l})x_l^n \end{aligned}$$

*je rešenje posmatrane rekurentne relacije.*

## Primer

*Rešiti rekurentnu relaciju*

$$
\begin{array}{cc}
a_0 = 2 & a_1 = 1 \\
a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, & n \geq 2
\end{array}
$$

Karakteristična jednačina:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 2$$

Opšte rešenje: $a(n) = (\alpha_1 + n\alpha_2) \cdot 2^n$

Početni problem:

$$
\begin{array}{r} \alpha_1 = 2 \\ (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot 2 = 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -\frac{3}{2} \end{array}
$$

Rešenje rekurentne relacije: $a_n = \left(2 - \frac{3}{2}n\right) \cdot 2^n,\ n \geq 0.$

## Primer

*Formirati rekurentnu relaciju čija karakteristična jednačina je*

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0.$$

$$x^3 = 6x^2 - 12x + 8 \Rightarrow k = 3$$

$$a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$$

Tema 5

# Linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

# Nehomogena i odgovarajuća homogena relacija

Linearna (nehomogena) rekurentna relacija reda $k$ sa konstantnim koeficijentima:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f(n)$$

Odgovarajuća homogena rekurentna relacija:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

# Nehomogene linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

## Teorema

*Ako je $a_n^{(p)}$ partikularno rešenje nehomogene linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima, tada je svako rešenje oblika*

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

*gde je $a_n^{(h)}$ rešenje odgovarajuće homogene rekurentne relacije.*

Ako je $a_n^{(p)}$ jedno proizvoljno (partikularno) rešenje, onda je

$$\begin{aligned} a_n^{(p_1)} &= c_1 a_{n-1}^{(p_1)} + c_2 a_{n-2}^{(p_1)} + \ldots + c_k a_{n-k}^{(p_1)} + f(n) \\ a_n &= c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f(n) \end{aligned}$$

$$a_n - a_n^{(p_1)} = c_1(a_{n-1} - a_{n-1}^{(p_1)}) + c_2(a_{n-1} - a_{n-1}^{(p_1)}) + \ldots + +c_k(a_{n-k} - a_{n-k}^{(p_1)})$$

$$a_n - a_n^{(p_1)} = a_n^{(h)}$$

# Primer

## Primer

*Odrediti sva rešenja rekurentne relacije*

$$a_n = 5a_{n-1} + 2n,$$

*a zatim odrediti rešenje za koje je* $a_1 = 3$.

Odgovarajuća homogena relacija:

$$a_n = 5a_{n-1}$$

Karakteristična jednačina:

$$k - 5 = 0 \Leftrightarrow k = 5$$

Rešenje odgovarajuća homogene relacije:

$$a_n^{(h)} = \alpha \cdot 5^n$$

# Primer

## Primer

*Odrediti sva rešenja rekurentne relacije*

$$a_n = 5a_{n-1} + 2n,$$

*a zatim odrediti rešenje za koje je* $a_1 = 3$.

Partikularno rešenje:

$$f(n) = 2n \quad \Rightarrow \quad a_n^{(p)} = bn + c$$

$$\begin{aligned} bn + c = 5(b(n-1) + c) + 2n \quad &\Leftrightarrow \quad bn + c = 5bn - 5b + 5c + 2n \Leftrightarrow (4b+2)n - 5b + 4c = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 4b + 2 = 0 \wedge -5b + 4c = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2} \wedge c = -\frac{5}{8} \end{aligned}$$

Opšte rešenje:

$$a_n = \alpha \cdot 5^n - \frac{1}{2}n - \frac{5}{8}$$

Za $a_1 = 3$:

$$3 = \alpha \cdot 5 - \frac{1}{2} - \frac{5}{8} \Leftrightarrow \alpha = \frac{33}{40} \Rightarrow a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = \frac{33}{40} \cdot 5^n - \frac{1}{2}n - \frac{5}{8}$$

# Primer (Rosen)

## Primer

*Odrediti sva rešenja rekurentne relacije*

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n.$$

Odgovarajuća homogena relacija:

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$$

Karakteristična jednačina:

$$k^2 - 5k + 6 = 0 \Leftrightarrow k = 2 \vee k = 3$$

Rešenje odgovarajuća homogene relacije:

$$a_n^{(h)} = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot 3^n$$

Partikularno rešenje:

$$f(n) = 7^n \Rightarrow a_n^{(p)} = b \cdot 7^n \Rightarrow b \cdot 7^n = 5 \cdot b \cdot 7^{n-1} - 6 \cdot b \cdot 7^{n-2} + 7^n \Rightarrow b = \frac{49}{20}$$

Opšte rešenje:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot 3^n + \frac{49}{20} \cdot 7^n$$

# Linearne nehomogene rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

**Teorema**

*Neka je*

$$f(n) = (b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \ldots + b_1 n + b_0) s^n, \quad b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{R}.$$

*Ako je $s$ koren karakteristične jednačine višestrukosti $l$ (ako nije koren $l = 0$), onda postoji partikularno rešenje oblika*

$$a_p(n) = n^l (c_m n^m + c_{n-1} n^{m-1} + \ldots + c_1 n + c_0) s^n.$$

## Primer

*Odrediti oblik partikularnog rešenja linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima*

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + f(n)$$

*ako je*

$$f(n) = 3^n \qquad f(n) = n3^n \qquad f(n) = n^2 2^n \qquad f(n) = (n^2+1)3^n$$

Odgovarajuće homogena rekurentna relacija:

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}.$$

Karakteristična jednačina:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3 \wedge x_2 = 3.$$

(i) $a_n^{(p)} = A \cdot n^2 \cdot 3^n$;
(ii) $a_n^{(p)} = (An + B) \cdot n^2 \cdot 3^n$;
(iii) $a_n^{(p)} = (An^2 + Bn + C) \cdot 2^n$;
(iv) $a_n^{(p)} = (An^2 + Bn + C) \cdot n^2 \cdot 3^n$.