

Studenti koji kod pitanja do zvezdica naprave više od osam grešaka nisu položili ispit! U svakom zadatku dato je više odgovora, a treba zaokružiti brojeve ispred tačnih odgovora. U jednom istom zadatku broj tačnih odgovora može biti 0,1,2,3,...,svi. U nekim zadacima ostavljena su prazna mesta za upisivanje odgovora. Na kraju testa su tri zadatka koji se rade u datoj svesci. Obavezno se predaje ovaj test i sveska. _____

- Pri deljenju polinoma $x^4 + x^2 + 1$ sa $x^2 - x + 1$ nad \mathbb{R} , količnik je _____, a ostatak je _____.

- Zaokružiti brojeve ispred tvrdjenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ za sve $a, b \in B$:
1) $(1')' = a' \cdot 0' + a + b$ **2)** $a + ab = 1' + a \cdot 0'$ **3)** $a \cdot 1' = bb'$ **4)** $1 + a' = 0' + b$ **5)** $(a')' \cdot (b')' = (a' + b')'$

- Odrediti realni i imaginarni deo, moduo, argument, i konjugovani broj kompleksnog broja $z = -1 + 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$:
 $Re(z) =$ _____, $Im(z) =$ _____, $|z| =$ _____, $\arg(z) =$ _____, $\bar{z} =$ _____, $z^{-1} =$ _____.

- Neka su funkcije $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ i $g : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ definisane sa $f(x) = \sqrt[3]{x}$ i $g(x) = \sqrt{1-x}$. Izračunati:

1) $f^{-1}(x) =$ _____ **2)** $g^{-1}(x) =$ _____ **3)** $(f \circ g)(x) =$ _____ **4)** $(f \circ g)^{-1}(x) =$ _____ **5)** $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) =$ _____

- $\arg(0) =$ _____, $\arg(-i\sqrt{2}) =$ _____, $\arg(-\sqrt{2}) =$ _____, $\arg(i\sqrt{2}) =$ _____, $\arg(\sqrt{2}) =$ _____, $\arg(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) =$ _____.

- Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred struktura koje su grupe.

1) $(\{-1, 1\}, \cdot)$ **2)** $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \cdot)$ **3)** (\mathbb{N}, \cdot) **4)** (\mathbb{Q}^+, \cdot) **5)** (\mathbb{R}, \cdot) **6)** $(\{-1, 0, 1\}, \cdot)$ **7)** $(\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\}, \circ)$

- Za svaku od datih relacija u skupu $A = \{1, 2, 3\}$ zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost S- simetričnost A- antisimetričnost T- tranzitivnost F- funkcija.

(relacija „nije manji od”) : R S A T F,

(relacija „veći od”) : R S A T F,

(relacija „deli”) : R S A T F,

$\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 1), (3, 2), (2, 1)\}$: R S A T F,

$\rho = \{(1, 3), (1, 2), (2, 1)\}$: R S A T F,

$\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$: R S A T F,

$\rho = \emptyset$: R S A T F,

$\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$: R S A T F.

- $\{e^{i(\arg z + \arg z^{-1})} | z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\} = \{$ _____ $\}$ $\{e^{i(\arg z - \arg(-z))} | z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\} = \{$ _____ $\}$

- Bijektivne funkcije su: **1)** $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = \log_3 x$ **2)** $f : (-\infty, -2) \rightarrow (-\infty, 4)$, $f(x) = -x^2 - 4x$
3) $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg x$ **4)** $f : (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) \rightarrow (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$, $f(x) = \sin x$ **5)** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$

- Ako je $z \in \mathbb{C}$ tada je $z^6 = 64 \Leftrightarrow z \in \{2, -2, 1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3},$ _____, _____ $\}$

- Ako je p polinom stepena 3 nad proizvoljnim poljem F tada: **1)** p je nesvodljiv nad F akko p nema korena u F **2)** ako p ima 3 korena u F onda je p svodljiv nad F **3)** ništa od prethodnog

- Zaokružiti grupoide sa neutralnim elementom, koji nisu grupe: **1)** $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \cdot)$ **2)** $(\{f | f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}, \circ)$
3) $(\mathbb{Z}_4, +)$ **4)** (\mathbb{Z}_4, \cdot) **5)** $(\{3k | k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$ **6)** $(\mathbb{R}[x], \cdot)$ **7)** $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ **8)** (\mathbb{Z}, \cdot)

- Bar jedan najveći zajednički delitelj za polinome $P(t) = 2(t-4)^7(t+9)^3(t-5)^5(t+17)^3$ i $Q(t) = 7(t-3)^2(t-15)(t-4)^3(t+17)^5$ je:

- Zaokružiti brojeve ispred algebarskih struktura koja su polja. **1)** $(\{f_k | f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R}\}, +, \circ)$
2) $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ **3)** $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ **4)** $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ **5)** $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ **6)** $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ **7)** $(\{f | f : \mathbb{R} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}\}, +, \circ)$

- Neka je $\mathcal{G} = (\{7^n | n \in \mathbb{N}\}_{\equiv 3}, \cdot)$, gde je \cdot množenje po modulu 3 u skupu $\{7^n | n \in \mathbb{N}\}_{\equiv 3}$.

1) \mathcal{G} je grupoid.

2) U \mathcal{G} postoji neutralni elemenat.

3) \mathcal{G} je grupa.

- Zaokružiti grupe : **1)** $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ **2)** $(\{-1, 1\}, \cdot)$ **3)** $(\{-1, i, 1, -i\}, \cdot)$ **4)** $(\{z | z^6 = 1, z \in \mathbb{C}\}, \cdot)$
5) $((0, 1), \cdot)$ **6)** $((-\infty, 0), \cdot)$ **7)** $((0, \infty), \cdot)$ **8)** $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ **9)** $(\{e^{i\theta} | \theta \in \mathbb{R}\}, \cdot)$

- Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom $t^3 + t + 1$ svodljiv nad njima. \mathbb{Q} \mathbb{R} \mathbb{C} \mathbb{Z}_3 \mathbb{Z}_5

- $\{dg(P) \mid P \text{ je nesvodljiv polinom nad poljem } \mathbb{C}\} = \{$ _____ $\}$

- $\{dg(P) \mid P \text{ je nesvodljiv polinom nad poljem } \mathbb{R}\} = \{$ _____ $\}$

- Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred jednakosti koje su tačne u skupu kompleksnih brojeva:
 - 1) $z\bar{z} = |z|^2$
 - 2) $Re(z) = \frac{1}{2}(z - |z|)$
 - 3) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$
 - 4) $\bar{z} \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \bar{z}$
 - 5) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
 - 6) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
 - 7) $z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = |z|^{-2}\bar{z}$
 - 8) $|z| = 1 \Rightarrow z^{-1} = \bar{z}$
- Zaokružiti brojeve ispred sirjektivnih funkcija:
 - 1) $f: (0, \frac{\pi}{4}) \rightarrow (0, \infty), f(x) = \operatorname{tg} x$
 - 2) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3 - x$
 - 3) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$
 - 4) $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), f(x) = x^2$
 - 5) $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), f(x) = x^2$
 - 6) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x$
- Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koja su tačna u svakom prstenu $(F, +, \cdot)$:
 - 1) $a + bc = (a + b)(a + c)$
 - 2) $(F \setminus \{0\}, +)$ je grupa
 - 3) (F, \cdot) je grupa
 - 4) operacija $+$ je distributivna prema \cdot
 - 5) $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$
 - 6) $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$
 - 7) $a \cdot 0 = 0$
 - 8) $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ je grupa
- Funkcija $f: (\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}) \rightarrow (-1, 1)$ definisana sa $f(x) = \cos x$ je:
 - 1) sirjektivna i nije injektivna
 - 2) injektivna i nije sirjektivna
 - 3) nije injektivna i nije sirjektivna
 - 4) bijektivna
- Navesti geometrijsku interpretaciju skupova A, B, C, D, E i sledećih kompleksnih funkcija $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ i $s: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, kao i odgovoriti na pitanje injektivnosti i sirjektivnosti funkcija f, g, h i s .

$f(z) = \frac{1}{2}\bar{z}(-1 + i\sqrt{3})$ je _____

$g(z) = ze^{i\frac{\pi}{7}}$ je _____

$h(z) = iI_m(z)$ je _____

$s(z) = |z|e^{i\arg(-z)} \wedge s(0) = 0$ je _____

$A = \{z | |z|^7 = i^8\}$ je _____

$B = \{z | z^7 = i^8\}$ je _____

$C = \{z | z = -\bar{i}z\}$ je _____

$D = \{e^{i(\arg z + \arg(\bar{z}))} | z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$ je _____

$E = \{z | iI_m(z) = iR_e(z)\}$ je _____
- Neka je $\{1, -2\}$ skup **svih** korena polinoma $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tada skup svih mogućnosti za a je _____, skup svih mogućnosti za b je _____ i skup svih mogućnosti za c je _____.
- Napisati primer (ukoliko postoji):
 - 1) Funkcije f čiji su originali i slike iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$: $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
 - 2) Injektivne funkcije f skupa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ u skup $\{1, 2, 3, 4\}$: $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
 - 3) Neinjektivne funkcije f skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ u skup $\{1, 2, 3, 4\}$: $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
 - 4) Sirjektivne funkcije f skupa $\{1, 2, 3\}$ u skup $\{1, 2, 3, 4\}$: $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
 - 5) Nesirjektivne funkcije f skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ u skup $\{1, 2, 3, 4\}$: $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
 - 6) Injektivne funkcije f skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ u skup $\{1, 2, 3, 4\}$: $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
 - 7) Sirjektivne funkcije f skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ u skup $\{1, 2, 3, 4\}$: $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
- Ako je $A = \left\{ dg(P) \mid P(x) = ax^3 + bx + c \text{ je polinom nad poljem realnih brojeva i } c \neq 0 \right\}$, tada je:
 - 1) $A = \{3\}$
 - 2) $A = \{3, 2\}$
 - 3) $A = \{3, 1\}$
 - 4) $A = \{3, 1, 0\}$
 - 5) $A = \{3, 2, 1, 0\}$

A ZADACI

25.11.2018.

1. Napisati SVE proste implikante i SVE minimalne disjunktivne normalne forme Bulove funkcije

$$f(x, y, z, u) = xyz u' + xy z' u' + xy' z u' + xy' z' u' + x' y' z' u' + x' y' z' u + x' y' z' u.$$

Napomena: tablicu nacrtati kao na slici desno.

	x	x'	
z			u
			u'
z'			u
	y	y'	y

2. Neka je $A = \{\rho e^{i\frac{2k}{7}\pi} | \rho > 0 \wedge k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}\} = \{\rho e^{i\frac{2k}{7}\pi} | \rho > 0 \wedge k \in \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}\}$.
 $A = \{\rho e^{i\frac{2k}{7}\pi} | \rho > 0 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$. Dokazati da je (A, \cdot) komutativna grupa, gde je \cdot množenje kompleksnih brojeva. Naći jednu 7-članu podgrupu grupe (A, \cdot) .

$$2'. A_\rho = \{\rho e^{i\frac{2k}{7}\pi} | k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}\} = \{\rho e^{i\frac{2k}{7}\pi} | k \in \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}\}, \rho > 0.$$

$A_\rho = \{\rho e^{i\frac{2k}{7}\pi} | k \in \mathbb{Z}\}, \rho > 0$. Dokazati da je (A_ρ, \cdot) je komutativna grupa samo za $\rho = 1$, gde je \cdot množenje kompleksnih brojeva. Naći podgrupe grupe (A_1, \cdot) . Napomena: $A = \bigcup_{\rho \in \mathbb{R}^+} A_\rho$

3. Neka je $p(x) = x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 12x + 8$ polinom nad poljem \mathbb{R} . Nad poljima \mathbb{C} i \mathbb{R} rastaviti $p(x)$ na proizvod nesvodljivih polinoma (faktorizati), ako se zna da je $1 + i$ jedan njegov kompleksni koren.