SV 29/2020 Katarina Vučić
SV 18/2020 Milica Sladaković

DOMAĆI 3

1. Neka je S_4 skup svih godina djeljivih sa 4,
S_{10} skup svih godina koje su djeljive sa 100,
S_{400} skup -//- -//- -//- -//- -//- 400.

S je skup svih godina u intervalu $[1501, 2501)$ i tada $|S| = 1000$

$|S_4| = \lfloor \frac{1000}{4} \rfloor = 250$ $|S_{10}| = \lfloor \frac{1000}{100} \rfloor = 10$ → svaki 4. član pripada S_{400}

Broj prestupnih godina je $|S_4| - |S_{10}| + |S_{400}|$ $|S_{400}| = \lfloor \frac{2501}{400} \rfloor - \lfloor \frac{1501}{400} \rfloor$
$= 250 - 10 + 3 = \underline{243}$ $= 6 - 3 = 3$

1

2. Svaki 4. cijeli pozitivan broj je djeljiv sa 4, te takvih brojeva koji su pritom manji od 2020 ima $\left\lfloor \frac{2020-1}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2019}{4} \right\rfloor = 504$

3. Ukupan broj riječi dužine 7 nad azbukom $\{0,1\}$ je 2^7.
Posmatrajmo sada sve mogućnosti razmještanja podriječi 11111.

$11111\_\_ \to A \qquad |A| = 2^2$
$\_\_11111 \to B \qquad |B| = 2^2 \qquad |A \cap B| = 1$
$\_11111\_ \to C \qquad |C| = 2^2 \qquad |B \cap C| = 2 \qquad |A \cap B \cap C| = 1$
$|A \cap C| = 2$

Takvih riječi ima $2^7 - |A \cup B \cup C| =$
$= 2^7 - (|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|)$
$= 2^7 - 3 \cdot 2^2 + 5 - 1 = 128 - 8 = 120$

* Svaki od skupova A, B i C ima fiksiran položaj za 11111 te za ostala dva mjesta ima 2^2 mogućnosti. Na osnovu toga se računa i broj članova presjeka datih skupova.

4. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$
$0 \le x_1 \le 6 \qquad 0 \le x_2 \le 7 \qquad 0 \le x_3 \le 8 \qquad 0 \le x_4 \le 6$

$S_1: x_1 \ge 6 \Rightarrow y_1 = x_1 - 6 \ge 0$
$y_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14 \Rightarrow N(S_1) = \binom{14+4-1}{4-1} = \binom{17}{3}$

$S_2: x_2 \ge 7 \Rightarrow y_2 = x_2 - 7 \ge 0$
$x_1 + y_2 + x_3 + x_4 = 13 \Rightarrow N(S_2) = \binom{13+4-1}{4-1} = \binom{16}{3}$

$S_3: x_3 \ge 8 \Rightarrow y_3 = x_3 - 8 \ge 0$
$x_1 + x_2 + y_3 + x_4 = 12 \Rightarrow N(S_3) = \binom{15}{3}$

$S_4: x_4 \ge 6 \Rightarrow y_4 = x_4 - 6 \ge 0$
$x_1 + x_2 + x_3 + y_4 = 14 \Rightarrow N(S_4) = \binom{17}{3}$

$S_1S_2: \quad y_1+y_2+x_3+x_4=7 \Rightarrow N(S_1S_2)=\binom{7+4-1}{4-1}=\binom{10}{3}$

$S_1S_3: \quad y_1+x_2+y_3+x_4=6 \Rightarrow N(S_1S_3)=\binom{9}{3}$

$S_1S_4: \quad N(S_1S_4)=\binom{11}{3}$

$S_2S_3: \quad N(S_2S_3)=\binom{8}{3}$

$S_2S_4: \quad N(S_2S_4)=\binom{10}{3}$ jer su rješenja ≥ 0

$S_3S_4: \quad N(S_3S_4)=\binom{9}{3}$

$S_1S_2S_3: \quad y_1+y_2+y_3+x_4=-1 \Rightarrow N(S_1S_2S_3)=0$

$S_1S_2S_4: \quad y_1+y_2+x_3+y_4=1 \Rightarrow N(S_1S_2S_4)=\binom{4}{3}=4$

$S_1S_3S_4: \quad y_1+x_2+y_3+y_4=0 \Rightarrow N(S_1S_3S_4)=\binom{3}{3}=1$

$S_2S_3S_4: \quad x_1+y_2+y_3+y_4=-1 \Rightarrow N(S_2S_3S_4)=0$

$S_1S_2S_3S_4: \quad y_1+y_2+y_3+y_4=-7 \Rightarrow N(S_1S_2S_3S_4)=0$

Ukupan broj rješenja bez zadanih uslova: $\binom{23}{3}$

Ukupan broj rješenja sa zadanim uslovima:

$$N(S_1'S_2'S_3'S_4')=\binom{23}{3}-\Big(\binom{17}{3}+\binom{16}{3}+\binom{15}{3}+\binom{17}{3}$$
$$-\binom{10}{3}-\binom{9}{3}-\binom{11}{3}-\binom{8}{3}-\binom{10}{3}-\binom{9}{3}$$
$$+0+4+1+0-0\Big)$$
$$=\binom{23}{3}-2\cdot\binom{17}{3}-\binom{16}{3}-\binom{15}{3}+\binom{11}{3}+2\cdot\binom{10}{3}+2\cdot\binom{9}{3}+\binom{8}{3}$$

5. Posmatrajmo 3 prazna skupa koje treba da popunimo elementima iz skupa $\{1,2,3,4,5\}$ tako da budu disjunktni i neprazni. Broj članova u takvim skupovima može biti sljedeći: $3+1+1$ ili $1+2+2$.

Prema tome, broj particija je:

$$\underbrace{\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{1}\cdot\frac{1}{2!}}_{3+1+1}+\underbrace{\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\frac{1}{2!}}_{1+2+2}=10\cdot 2\cdot\frac{1}{2}+5\cdot 6\cdot\frac{1}{2}=10+15=25$$

(biramo 3, biramo 1, ostatak je jednoznačno određen) (analogno)

$\Big\}$ redoslijed nebitan (i novi i preostali izbori biraju isti broj članova)

6. Pošto m elemenata raspoređujemo na $m-1$ particija, prema Dirihleovom principu, u jednoj particiji moraju biti dva člana (particije su neprazne). Da bi se izabrala ta dva elementa, postoji $\binom{m}{2}$ načina, te su ostali elementi jednoznačno pridruženi drugim particijama.

$$\Rightarrow S(m, m-1) = \binom{m}{2}$$

7. Na sličan način kao u prethodnom zadatku, m elemenata raspoređujemo na $m-2$ particija, te su mogućnosti sljedeće: u jednoj od particija će se naći 3 elementa ili u dvije particije će se nalaziti po 2 člana:

$$\Rightarrow S(m, m-2) = \binom{m}{3} + \frac{1}{2!}\binom{m}{2}\binom{m-2}{2}$$

8. Skup od m elemenata možemo podijeliti na dvije particije na više načina:

$$\underbrace{m-1+1}, \; \underbrace{m-2+2}, \; m-3, 3, \ldots, m-\left[\frac{m}{2}\right], \left[\frac{m}{2}\right]$$

tj. $\frac{1}{2}\left(\binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \ldots + \binom{m}{m-1}\right) = S(m, 2) =$

$$= \frac{1}{2}\left(\binom{m}{0} - \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \ldots + \binom{m}{m-1} + \binom{m}{m} - \binom{m}{m}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \ldots + \binom{m}{m}\right) - \frac{1}{2}\left(\binom{m}{0} + \binom{m}{m}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}1^{i} \cdot 1^{m-i} - \frac{1}{2}(1+1) = \frac{1}{2}(1+1)^m - \frac{1}{2} \cdot 2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2^m - 1 = 2^{m-1} - 1 = S(m, 2)$$