ВЕЖБЕ 3

Уређени избори

1. Колико има пермутација скупа $\{1,2,\dots,n\}$ у којима 2 стоји иза 1 ?

12345 ... n
13245 ... n
13425 ... n

A - скуп свих пермутација у којима 2 стоји иза 1

B - скуп свих пермутација у којима 1 стоји иза 2

$$\begin{array}{ll} & a_1a_2\dots a_{i-1}\,1\,a_{i+1}\dots a_{j-1}\,2\,a_{j+1}\dots a_n \in A \\ f: & \downarrow \\ & a_1a_2\dots a_{i-1}\,2\,a_{i+1}\dots a_{j-1}\,1\,a_{j+1}\dots a_n \in B \end{array}$$

$f: A \to B$ je бијекција $\Rightarrow |A| = |B|$

Укупан број пермутација скупа $\{1,2,\dots,n\}$ je $n!$

$$|A| + |B| = n!$$
$$2|A| = n!$$
$$|A| = \frac{n!}{2}$$

2. Колико има пермутација скупа $\{1,2,\dots,n\}$ у којима су елементи 1 и 2 суседни, а 1 и 3 нису суседни?

Од свих пермутација у којима су 1 и 2 суседни одузећемо оне где су додатно и 1 и 3 суседни.

1 и 2 суседни: $2\cdot(n-1)!$

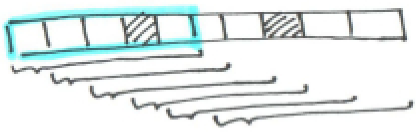
1 и 2 суседни и 1 и 3 су суседни: $2\cdot(n-2)!$

$\boxed{3\,1\,2}$

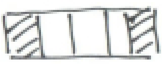
$$\underbrace{\boxed{2\,1\,3}\quad \underbrace{4,5,6,\dots,n}_{n-3}}_{n-2}$$

решење: $2\cdot(n-1)! - 2\cdot(n-2)!$

3. Колико има пермутација скупа $\{0,1,\dots,9\}$ у којима између цифара 2 и 3 стоје тачно три друге цифре?



...2...3...



- На 6 начина бирамо позиције у пермутацији где ћемо ставити 2 и 3
- На 2 начина размештамо 2 и 3 на изабране позиције ($2\dots3 \vee 3\dots2$)
- На 8! пермутујемо преостале 8 цифара на 8 места

решење: $6 \cdot 2 \cdot 8!$

$\underline{9} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10}$ петоцифрени бројеви

све осим 0

4. Колико има петоцифрених бројева

а) чије су све цифре различите

не сме прва цифра, али сме 0

$$\underline{9} \cdot \underline{9} \cdot \underline{8} \cdot \underline{7} \cdot \underline{6}$$

све цифре осим 0

б) чије су сваке две суседне цифре различите?

$$\underline{9} \cdot \underbrace{\underline{9} \cdot \underline{9} \cdot \underline{9} \cdot \underline{9}}_{\text{све цифре осим оне на претходном месту у броју}} = 9^5$$

све цифре осим 0

5. Колико се парних четвороцифрених бројева може записати помоћу цифара 1,3,4,6,7 ако у запису сваког броја суседне цифре морају бити различите?

$$\underbrace{4\cdot 4\cdot 4}_{\text{све цифре осим оне иза ње}}\cdot\underset{4\vee 6}{2}$$

Посматраћемо прво последњу цифру, а затим фиксирамо цифре од претпоследње ка првој.

6. Колико има шестоцифрених бројева који

а) се завршавају са две седмице

$$\underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{7}\ \underline{7}$$

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1$$

б) почињу са две једнаке цифре?

$$\underline{X}\ \underline{X}\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }$$

$$9 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$$

7. Колико има природних бројева мањих од 10^5 у чијем декадном запису су сваке две суседне цифре међусобно различите?

$\underline{9} = 9$

$\underline{9} \cdot \underline{9} = 9^2$

$\underline{9} \cdot \underline{9} \cdot \underline{9} = 9^3$

$\underline{9} \cdot \underline{9} \cdot \underline{9} \cdot \underline{9} = 9^4$

$\underline{9} \cdot \underline{9} \cdot \underline{9} \cdot \underline{9} \cdot \underline{9} = 9^5$

$$\underline{9 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5} = 9\,(1 + 9 + 9^2 + 9^3 + 9^4)$$
$$= 9 \cdot \frac{9^5 - 1}{9 - 1}$$

НЕУРЕЂЕНИ ИЗБОРИ

Нека је дат скуп X, $|X| = n$, и нека је k ненегативан цео број.

Број $\binom{|X|}{k} = \binom{n}{k}$ је број свих k-точланих подскупова скупа X.

$\binom{n}{k}$ је БИНОМНИ КОЕФИЦИЈЕНТ

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1) \cdot \cancel{(n-k)!}}{k! \, \cancel{(n-k)!}} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1}$$

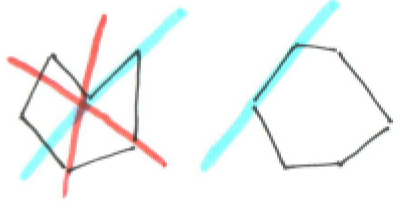
$\rightarrow$ број КОМБИНАЦИЈА БЕЗ ПОНАВЉАЊА

1. Одредити максималан број правих одређених са n задатих тачака у равни.

Максималан број правих добијамо када су тачке у тзв. ОПШТЕМ ПОЛОЖАЈУ, тј. ако не постоје 3 тачке које леже на истој правој.

$\binom{n}{2}$ $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ На n начина бирамо прву тачку праве. Затим на n-1 начин бирамо другу тачку. Резултат делимо са 2 јер је $p(A,B)=p(B,A)$

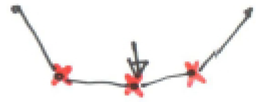
2. Одредити број дијагонала конвексног n-тоугла.



Број дужи које одређују темена конвексног n-тоугла је $\binom{n}{2}$ (1. задатак)

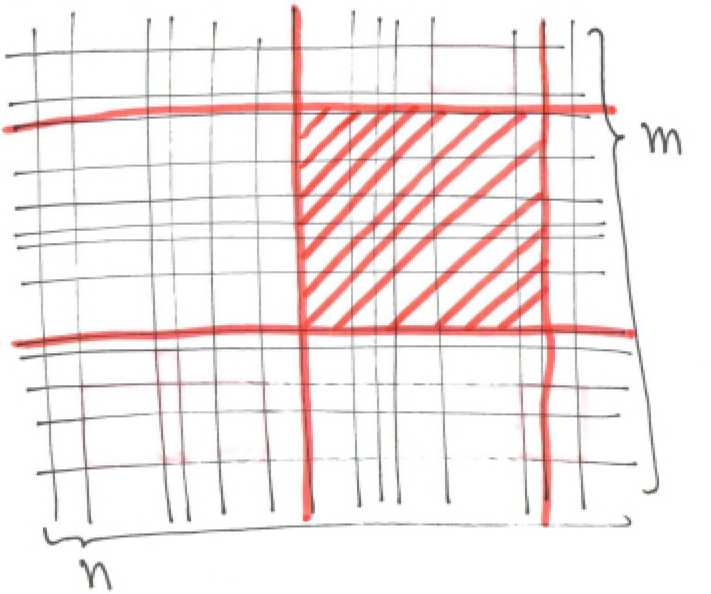
Странице су „лоше" дужи и њих има n.

решење: $\binom{n}{2} - n$



$$\frac{n(n-3)}{2}$$

3. Нацртано је m хоризонталних и n вертикалних правих. Колико има правоугаоника чија свака страница лежи на једној од нацртаних правих?



За правоугаоник нам требају 2 хоризонталне и 2 вертикалне праве.

2 —: $\binom{m}{2}$

2 |: $\binom{n}{2}$

решење: $\binom{m}{2}\cdot\binom{n}{2}$

4. Колико има четвороцифрених бројева у којима је свака цифра

а) мања од претходне

→ цифре су у ОПАДАЈУЋЕМ поретку

$\binom{10}{4}$ број начина да одаберемо 4 различите цифре из скупа $\{0,1,\dots,9\}$

Свака четворка представља тачно један четвороцифрени број код ког су цифре поређане у опадајућем поретку.

б) већа од претходне

→ цифре су у растућем поретку

$\binom{9}{4}$

Нулу избацујемо јер она због услова може бити само прва цифра, али тада немамо четвороцифрен број.

5. У групи од 20 шахиста налази се 5 велемајстора. На колико начина се могу формирати две екипе од по 10 шахиста тако да у првој екипи буде 2 велемајстора, а у другој 3?

I екипа: $\binom{5}{2}\binom{15}{8}$

II екипа: $\binom{3}{3}\binom{7}{7} = 1$

Прву екипу бирамо на $\binom{5}{2}\binom{15}{8}$ начина. Након што изаберемо прву екипу, друга је једнозначно одређена.

6. На колико начина од 2 математичара и 8 економиста можемо формирати петочлану комисију у којој ће бити бар један математичар?

$\binom{n}{1} = n$ $\binom{n}{0} = 1$

$\binom{n}{n} = 1$

1° $1M + 4E$

$\binom{2}{1}\binom{8}{4}$

2° $2M + 3E$

$\binom{2}{2}\binom{8}{3}$

решење: $2 \cdot \binom{8}{4} + \binom{8}{3}$

n „над" k

$n^k \cancel{=} \binom{n}{k}$

n „на" k

II начин:

Од свих комисија одузмемо „лоше" комисије

све комисије: $\binom{10}{5}$

„лоше" комисије су оне у којима нема математичара

$\binom{8}{5}$

$\binom{10}{5} - \binom{8}{5}$

7. На колико начина се могу изабрати три различита броја од 1 до 30 тако да њихов збир буде паран број?

$\{1, 2, \dots, 30\}$

15 је парних, а
15 је непарних

1° П+П+П : $\binom{15}{3}$

2° П+Н+Н : $\binom{15}{1}\binom{15}{2}$

од 15 непарних бирамо 2 непарна броја

од 15 парних бирамо један

решење: $\binom{15}{3}+\binom{15}{1}\binom{15}{2}$

8. На колико начина се могу изабрати три различита броја од 1 до 30 тако да њихов збир буде дељив са 3? (домаћи)

9. На колико начина се из скупа од 17 особа може изабрати 12 под условом

а) ако је изабрана особа А, тада мора бити изабрана и особа В

1° $A \checkmark \Rightarrow B \checkmark$ $\binom{15}{10}$ Бирамо још 10 особа од преосталих 15.

2° $A \times \Rightarrow B?$ $\binom{16}{12}$ Бирамо свих 12 особа од 16 (само особа А није на располагању)

решење: $\binom{15}{10}+\binom{16}{12}$

б) ако је изабрана особа А, тада не сме бити изабрана особа В

1° $A \checkmark \Rightarrow B \times$ $\binom{15}{11}$ Бирамо још 11 особа од 15 (А је већ изабран, а В не сме бити одабран)

2° $A \times \Rightarrow B?$ $\binom{16}{12}$

решење: $\binom{15}{11}+\binom{16}{12}$

10. Колико има низова од n нула и k јединица ($k \leq n+1$), таквих да никоје две јединице нису суседне?

00101001010

00101100010 ✗

Поређамо n нула у низ тако да између сваке две нуле остане једно празно место (једна „рупа").

$$\sqcup\, 0 \sqcup 0 \sqcup 0 \sqcup 0 \sqcup 0 \sqcup \ldots \sqcup 0 \sqcup 0\, \sqcup$$

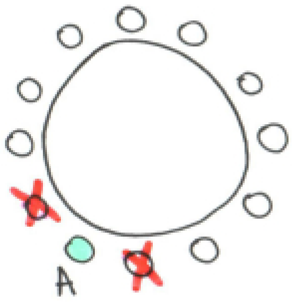
$n-1$ „рупа" између n нула

$(n-1)+2 = n+1$ празно место

Бирамо k од $n+1$ „рупа" у коју ћемо „убацити" јединице $\Rightarrow \binom{n+1}{k}$

11. За округлим столом краља Артура седи 12 витезова. Познато је да је сваки од њи у свађи са својим непосредним суседом за столом. На колико начина се може изабрати 5 витезова, тако да никоја два међу њима нису у свађи?

Уочимо витеза A



1° витез A је изабран

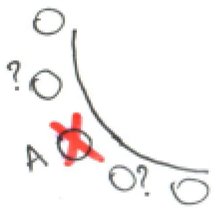
Треба одабрати још 4 витеза од укупно 9 (суседи витеза A не могу бити бирани).

витезови које треба одабрати $\to$ јединице   4 јединице

остали витезови у низу $\to$ нуле $9-4=5$ нула

10. задатак: $\binom{5+1}{4}=\binom{6}{4}$

2° витез A није изабран



Бирамо свих 5 витезова од њих 11 (само A није на располагању)

$\left.\begin{array}{l}5 \text{ јединица}\\ 11-5=6 \text{ нула}\end{array}\right\} \xRightarrow{10} \binom{6+1}{5}=\binom{7}{5}$

решење: $\binom{6}{4}+\binom{7}{5}$

k боја

извлачимо n лоптица

x_i – број извучених лоптица i-те боје $i=1,2,\dots,k$

$0\le x_i\le n$ $\forall i$

$$\boxed{\begin{gathered} x_1+x_2+x_3+\dots+x_k=n \\ 0\le x_i\le n \quad \forall i=1,2,\dots,k \end{gathered}}$$

o|ooo|oo|oo|ooo|....ooo|oo

n лоптица

k кутија $\Rightarrow$ $k-1$ преграда } Низ од кутица и преграда има $n+k-1$ елемент

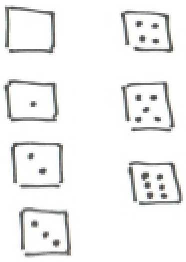
Број решења једначине $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ у скупу ненегативних целих бројева

$$\boxed{\binom{n+k-1}{n}=\binom{n+k-1}{k-1}}$$

Број неуређених избора n елемената са понављањем из скупа X, $|X|=k$.

$\Rightarrow$ **КОМБИНАЦИЈЕ СА ПОНАВЉАЊЕМ**

12. Домина је плочица за игру на коју су нацртане две сличице (не обавезно различите). Ако на располагању имамо 7 врста сличица, колико је различитих домина могуће направити помоћу њих?



x_i - број сличица са бројем i на једној домини

$$x_0+x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 = 2 \leftarrow$$ 2 сличице су на домини

$$0 \le x_i \le 2$$

$$\binom{2+7-1}{2} \quad \binom{2+7-1}{7} \quad \binom{2+7-1}{7-1} \quad \binom{2+7-1}{2-1}$$

$$\binom{2+7-1}{2} = \binom{8}{2} = \frac{8\cdot 7}{2} = 28$$

13. Колико има природних бројева мањих од 1000 000 чији је збир цифара 7?

Представимо природне бројеве који су мањи од 1000 000 на следећи начин:

$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$ $\quad x_i \in \{0,1,\dots,9\}$ $\rightarrow$ низови цифара дужине 6

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 7$

$\binom{7+6-1}{7} = \binom{7+6-1}{6-1}$

14. Из комплета који садржи 32 различите карте бира се 8 карата СА/БЕЗ враћања, тако да њихов редослед ЈЕСТЕ / НИЈЕ битан. Колико различитих избора има?

СА, ЈЕСТЕ: $32 \cdot 32 \cdot \ldots \cdot 32 = 32^8$ (варијације са понављањем)

БЕЗ, ЈЕСТЕ: $32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25$ (варијације без понављања)

БЕЗ, НИЈЕ: $\binom{32}{8}$ (комбинације без понављања)

СА, НИЈЕ: $\binom{32+8-1}{8}$ (комбинације са понављањем)

15. Колико целобројних решења има једначина $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=23$, уз услов $x_i>i$?

$$x_1+x_2+\dots+x_k=n \quad x_i\geq 0 \qquad \binom{n+k-1}{n}$$

$x_1>1 \quad x_1\geq 2 \quad y_1=x_1-2\geq 0$

$x_2>2 \quad x_2\geq 3 \quad y_2=x_2-3\geq 0$

$x_3>3 \quad x_3\geq 4 \quad y_3=x_3-4\geq 0$

$x_4>4 \quad x_4\geq 5 \quad y_4=x_4-5\geq 0$

$x_5>5 \quad x_5\geq 6 \quad y_5=x_5-6\geq 0$

$$\begin{aligned} y_1+y_2+y_3+y_4+y_5 &= (x_1-2)+(x_2-3)+(x_3-4)+(x_4-5)+(x_5-6)\\ &= x_1+x_2+x_3+x_4+x_5-20\\ &= 23-20=3 \end{aligned}$$

$$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=3$$
$$y_i\geq 0$$
$$\binom{3+5-1}{3}$$

Напомена: $x_1+x_2+\dots+x_k=n$, $x_i\in\mathbb{N}$

$x_i\geq 1 \quad y_i=x_i-1\geq 0 \quad \dots$

16. Колико решења у скупу ненегативних целих бројева има неједначина $x_1+x_2+\ldots+x_m \leq n$

$$\left.\begin{array}{ll} x_1+x_2+\ldots+x_m=0 & \binom{0+m-1}{0} \\ x_1+x_2+\ldots+x_m=1 & \binom{1+m-1}{1} \\ x_1+x_2+\ldots+x_m=2 & \binom{2+m-1}{2} \\ \vdots & \vdots \\ x_1+x_2+\ldots+x_m=n-1 & \binom{n-1+m-1}{n-1} \\ x_1+x_2+\ldots+x_m=n & \binom{n+m-1}{n} \end{array}\right\} + \; = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+m-1}{k}$$

II начин: $x_1+x_2+\ldots+x_m \leq n$ $\qquad x_{m+1} \in \{0,1,\ldots,n\}$

$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_m+x_{m+1}=n$ $\qquad x_{m+1} \geq 0$

$$\binom{n+(m+1)-1}{n} = \binom{n+m}{n}$$