Optimizacija uz ograničenja tipa jednakosti, metodi smene i ograničene varijacije

Anja Buljević
Aleksandra Mitrović
Smilja Stokanović

2. novembar 2020.

0.1 Metod direktne smene

Posmatra se kriterijum optimalnosti (funkcija cilja) oblika

$$y = f(\underline{x}) \, ,$$

gde je $\underline{x} = [x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_n]^T$ vektor promenljivih. U postavci problema figurišu i jednačine ograničenja tipa jednakosti

$$h_i(\underline{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

pri čemu važi $n > m$.

Zadaci

1. Odrediti minimum funkcije $f(\underline{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2$ uz ograničenje $h(\underline{x}) : x_1 + x_2 - 4 = 0$ koristeći metod smene.

   Rešenje.
   Iz jednačine ograničenja se može izraziti promenljiva x_1

   $$x_1 = 4 - x_2 \, , \tag{1}$$

   pa se uvrštavanjem u kriterijumsku funkciju dobija

   $$\begin{aligned} f(x_2) &= 2(4 - x_2)^2 + 3x_2^2 = 2(16 - 8x_2 + x_2^2) + 3x_2^2 = \\ &= 32 - 16x_2 + 2x_2^2 + 3x_2^2 = 5x_2^2 - 16x_2 + 32 \, . \end{aligned}$$

   Ispitivanje potrebnih i dovoljnih uslova ekstrema se svodi na traženje prvog i drugog izvoda po preostaloj promenljivoj x_2

   $$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 10x_2 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2^* = \frac{16}{10} = \frac{8}{5} \, ,$$

nakon čega se uvrštavanjem u (1) dobija

$$x_1^* = 4 - \frac{8}{5} = \frac{12}{5} \; .$$

Ispitivanjem znaka drugog izvoda u dobijenoj stacionarnoj tački $x^* = [\frac{12}{5} \;\; \frac{8}{5}]^T$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 10 > 0 \; ,$$

zaključujemo da stacionarna tačka $x^* = [\frac{12}{5} \;\; \frac{8}{5}]^T$ predstavlja minimum funkcije.

2. Primenom metode smene odrediti tačku u kojoj funkcije $f(\underline{x}) = 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_1^2 - 2x_2^2 - \frac{1}{3}x_3^2$ ima maksimum uz ograničenje $h(\underline{x}) : x_1 + x_2 + x_3 = 5$.

Rešenje.
Iz jednačine ograničenja sledi

$$x_3 = 5 - x_1 - x_2 \; , \tag{2}$$

pa se uvrštavanjem u kriterijumsku funkciju dobija

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) &= 6x_1 + 4x_2 + 2(5 - x_1 - x_2) - 3x_1^2 - 2x_2^2 - \frac{1}{3}(5 - x_1 - x_2)^2 = \\ &= \frac{22}{3}x_1 + \frac{16}{3}x_2 + \frac{5}{3} - \frac{10}{3}x_1^2 - \frac{7}{3}x_2^2 - \frac{2}{3}x_1x_2 \; . \end{aligned}$$

Izjednačavanjem prvih izvoda po promenljivim x_1 i x_2 sa nulom dobija se sistem jednačina

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{22}{3} - \frac{20}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{16}{3} - \frac{14}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_1 = 0, \end{aligned}$$

čija su rešenja $x_1^* = 1$ i $x_2^* = 1$. Uvrštavanjem dobijenih rešenja u (2) sledi

$$x_3^* = 5 - 1 - 1 = 3 \; .$$

Dobijena stacionarna tačka $x^* = [1 \;\; 1 \;\; 3]^T$ predstavlja maksimum funkcije što se pokazuje ispitivanjem dovoljnih uslova, odnosno formiranjem Heseove matrice

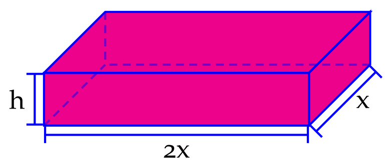
$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{20}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{14}{3} \end{bmatrix} \; ,$$

a potom računanjem glavnih minora

$$D_1 = -\frac{20}{3} < 0$$
$$D_2 = \frac{280}{9} - \frac{4}{9} = \frac{276}{9} > 0\,.$$

Kako je $D_1 < 0$ i $D_2 > 0$, zaključujemo da je matrica H negativno definitna, odnosno tačka $x^* = [1\ \ 1\ \ 3]^T$ je maksimum funkcije.

3. Kontejner treba da ima širinu x, dužinu $2x$, a zapremina treba da bude 10m^3. Trošak za materijal dna je 10 €/ m^2, a za materijal zidova je 6 €/ m^2. Koje su dimenzije kontejnera najjeftinije?



Slika 1: Kontejner dimenzija $2x \times x \times h$

Rešenje.
Kako se traže dimenzije kontejnera koji je najjeftiniji za izradu, formira se kriterijum optimalnosti oblika

$$f(x,h) = 2x \cdot x \cdot 10 + (2x \cdot h \cdot 2 + x \cdot h \cdot 2) \cdot 6\,,$$

gde prvi sabirak predstavlja troškove za izradu dna kontejnera, a drugi sabirak predstavlja troškove za izradu bočnih strana kontejnera. Sređivanjem prethodno formiranog izraza dobija se

$$f(x,h) = 20x^2 + 36xh\,. \tag{3}$$

Jednačina ograničenja se formira na osnovu uslova zadatka (zapremina treba da bude 10m^3)

$$V = 2x \cdot x \cdot h = 2x^2 \cdot h = 10 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{5}{x^2}\,. \tag{4}$$

Smenom u jednačinu (3) dobija se

$$f(x) = 20x^2 + 36x \cdot \frac{5}{x^2} = 20x^2 + 180x^{-1}\,.$$

Dalja procedura ispitivanja potrebnih i dovoljnih uslova ekstrema je identična kao u prethodnim primerima.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 40x - 180x^{-2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^* = \sqrt[3]{\frac{180}{40}} \approx 1.65\,.$$

Uvrštavanjem dobijene vrednosti u (5) dobija se

$$h^* = \frac{5}{1.65^2} \approx 1.83 \, .$$

Na osnovu znaka drugog izvoda

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 40 + 2 \cdot 180 x^{-3} = 40 + 2 \cdot 180 \cdot \frac{40}{180} = 120 > 0$$

zaključujemo da je izrada kontejnera najjeftinija za dobijene dimenzije x^* i h^*. Ukupni trošak će biti

$$f(1.65, 1.83) = 20 \cdot 1.65^2 + 36 \cdot 1.65 \cdot 1.83 \approx 163.152.$$

4. Odrediti optimum funkcije $z(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2$ uz ograničenje $h(\underline{x}) : x_1 x_2 = 2$.

Rešenje.
Iz jednačine ograničenja možemo izraziti

$$x_1 = \frac{2}{x_2} \, , \tag{5}$$

nakon čega se smenom u kriterijumsku funkciju dobija

$$z(x_2) = \frac{4}{x_2^2} + x_2^2 = 4x_2^{-2} + x_2^2 \, .$$

Sledi ispitivanje potrebnih uslova koje se svodi na izjednačavanje prvog izvoda dobijene kriterijumske funkcije sa nulom. Kombinovanjem sa jednačinom (5) dobijaju se stacionarne tačke.

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = -8x_2^{-3} + 2x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2^* = \pm\sqrt{2}$$

Smenom u (5) dobijamo vrednosti

$$x_1^* = \frac{2}{\pm\sqrt{2}} = \pm\sqrt{2} \, ,$$

pa su stacionarne tačke $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ i $B(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Ispitivanjem znaka drugog izvoda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 24x_2^{-4} + 2 = \frac{24}{4} + 2 = 8 > 0 \, ,$$

možemo zaključiti da stacionarne tačke $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ i $B(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ predstavljaju minimume.

5. Metodom smene naći minimum funkcije $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ ukoliko promenljive x_1 i x_2 treba da zadovolje ograničenje $h(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 4$.

Rešenje.
Koristeći jednačinu ograničenja, promeljivu x_1 možemo izraziti kao

$$x_1 = 4 - x_2 \; , \tag{6}$$

nakon čega se smenom u kriterijumsku funkciju dobija

$$f(x_2) = (4 - x_2)^2 + x_2^2 = 16 - 8x_2 + x_2^2 + x_2^2 = 2x_2^2 - 8x_2 + 16 \; .$$

Izjednačavanjem prvog izvoda po promenljivoj x_2 sa nulom dobija se

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_2 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2^* = 2 \; .$$

Nakon uvrštavanja dobijene vrednosti u (6) sledi

$$x_1^* = 4 - 2 = 2 \; ,$$

odnosno stacionarna tačka je $A(2, 2)$. Kako je drugi izvod

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 4 > 0 \; ,$$

zaključujemo da je u tački $A(2, 2)$ minimum funkcije.

0.2 *Metod ograničenih varijacija*

Kao i kod metode smene, posmatra se kriterijumska funkcija oblika

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \; ,$$

pri čemu su jednačine ograničenja

$$h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, m \; ,$$

i važi $n > m$. Na osnovu navedenog formira se Jakobijeva matrica čijim se izjednačavanjem sa nulom

$$J_k = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_k} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_m} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_k} & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_k} & \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} = 0, \quad k = m + 1, \ldots, n$$

dobijaju potrebni uslovi ekstrema funkcije više promenljivih sa ograničenjima tipa jednakosti.

Zadaci

1. Metodom ograničenih varijacija odrediti stacionarne tačke funkcije $y(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2$ uz ograničenje $h(x_1, x_2) : 1 - x_1^2 - x_2^2 = 0$.

   Rešenje.
   Broj promenljivih je $n = 2$, a broj ograničenja je $m = 1$, pa sledi da nam je potrebna samo jedna Jakobijeva matrica ($k = 2$)

   $$J_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_2} & \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} & \frac{\partial h}{\partial x_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2x_1 \\ -2x_2 & -2x_1 \end{vmatrix} = -2x_1 - 4x_1x_2 = 0 \, .$$

   Rešavanjem prethodno dobijenog izraza dobijamo

   $$-2x_1(1 + 2x_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^* = 0 \vee x_2^* = -\frac{1}{2} \, ,$$

   pa se smenom u jednačinu ograničenja dobijaju dva slučaja:

   I $x_1^* = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2^* = \pm 1$,
   odnosno u prvom slučaju se dobijaju dve stacionarne tačke $A(0, 1)$ i $B(0, -1)$;

   II $x_2^* = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1^* = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$,
   odnosno u drugom slučaju se dobijaju još dve stacionarne tačke $C(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ i $D(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$.

2. Metodom ograničenih varijacija odrediti stacionarne tačke funkcije $y(x_1, x_2, x_3) = 7x_1 - 6x_2 + 4x_3$ uz ograničenje $h(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 1 = 0$.

   Rešenje.
   Broj promenljivih je $n = 3$, a broj ograničenja je $m = 1$, pa sledi da su nam potrebne dve Jakobijeve matrice ($k = 2, k = 3$)

   $$J_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_2} & \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} & \frac{\partial h}{\partial x_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 7 \\ 4x_2 & 2x_1 \end{vmatrix} = -12x_1 - 28x_2 = 0 \, ,$$

   $$J_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_3} & \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_3} & \frac{\partial h}{\partial x_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6x_3 & 2x_1 \end{vmatrix} = 8x_1 - 42x_3 = 0 \, .$$

   Kombinovanjem prethodno dobijenih jednačina sa jednačinom ograničenja dobija se sistem jednačina

   $$\begin{aligned} 3x_1 + 7x_2 &= 0 \\ 4x_1 - 21x_3 &= 0 \\ x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 1 &= 0 \, , \end{aligned}$$

čija su rešenja

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= \pm\sqrt{\frac{441}{651}} \approx \pm 0.823 \\
x_2^* &= -\frac{3}{7} \cdot (\pm 0.823) \approx \mp 0.353 \\
x_3^* &= -\frac{4}{21} \cdot (\pm 0.823) \approx \pm 0.157 \; .
\end{aligned}
$$

Sledi da su stacionarne tačke $A(0.823, -0.353, 0.157)$ i $B(-0.823, 0.353, -0.157)$.

3. Metodom ograničenih varijacija odrediti stacionarne tačke funkcije $y(x_1, x_2) = -2x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 + 8x_1 + 3x_2$ uz ograničenje $h(x_1, x_2) : 3x_1 + x_2 - 10 = 0$.

   Rešenje.
   Broj promenljivih je $n = 2$, a broj ograničenja je $m = 1$, pa nam je potrebna jedna Jakobijeva matrica ($k = 2$)

$$
J_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_2} & \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} & \frac{\partial h}{\partial x_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2x_2 + x_1 + 3 & -4x_1 + x_2 + 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7x_1 - 7x_2 + 1 = 0 \; .
$$

   Na osnovu prethodno dobijene jednačine i jednačine ograničenja dobija se sistema jednačina

$$
\begin{aligned}
7x_1 - 7x_2 + 1 &= 0 \\
3x_1 + x_2 - 10 &= 0 \; ,
\end{aligned}
$$

   čije je rešenje stacionarna tačka $x^* = \begin{bmatrix} \frac{69}{28} & \frac{73}{28} \end{bmatrix}^T$.

4. Metodom ograničenih varijacija odrediti stacionarne tačke funkcije $z(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ukoliko su ograničenja $h_1(\underline{x})$: $x_1 + 2x_2 = 2$ i $h_2(\underline{x}) : x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 = 2$.

   Rešenje.
   Prvi korak je transformacija jednačina ograničenja

$$
\begin{aligned}
h_1(\underline{x}) &= x_1 + 2x_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 2x_2 - 2 = 0 \\
h_2(\underline{x}) &= x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2 = 0 \; .
\end{aligned}
$$

   Broj promenljivih je $n = 3$, a broj ograničenja je $m = 2$, pa nam je potrebna jedna Jakobijeva matrica ($k = 3$)

$$J_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_3} & \frac{\partial z}{\partial x_1} & \frac{\partial z}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_3} & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_3} & \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x_3 & 2x_1 & 2x_2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4x_3 & 2x_1 & 4x_2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2x_3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2x_1 & 4x_2 \end{vmatrix} + 4x_3 \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8x_1x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^* = 0 \lor x_3^* = 0 \, ,$$

pa se u kombinaciji sa jednačinama ograničenja dobijaju dva slučaja:

I $x_1^* = 0 \quad \rightarrow \quad h_1(\underline{x}) \;\Rightarrow\; x_2^* = 1, \;\; h_2(\underline{x}) \;\Rightarrow\; x_3^* = 0 \, ,$
odnosno u prvom slučaju se dobija stacionarna tačka $A(0, 1, 0)$;

II $x_3^* = 0$

$$h_1(\underline{x}) \;\Rightarrow\; x_1 = 2 - 2x_2,$$

pa se smenom u drugo ograničenje dobija

$$\begin{aligned} h_2(\underline{x}) \;\Rightarrow\; & (2 - 2x_2)^2 + 2x_2 - 2 = 0 \\ & 3x_2^2 - 4x_2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Rešenja dobijene kvadratne jednačine su ${x_2}_1^* = 1$ i ${x_2}_2^* = \frac{1}{3}$.
Iz prve jednačine ograničenja se dobija ${x_1}_1^* = 0$ i ${x_1}_2^* = \frac{4}{3}$.
Na kraju, u drugom slučaju su dobijene stacionarne tačke $B(0, 1, 0) = A$ i $C(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0)$.