Površina ravnih likova

Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija nad $[a,b]$. Potrebno je izračunati površinu krivolinijskog trapeza ograničenog krivom $y = f(x)$, x-osom i pravama $x = a$ i $x = b$.

I) Ako je $f(x) \geq 0$ za svako $x \in [a,b]$ tada je

$$P = \int_a^b f(x)\,dx.$$

II) Ako je $f(x) \leq 0$ za svako $x \in [a,b]$, tada je

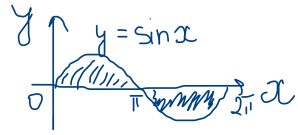
$$P = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

III) Ako funkcija $f(x)$ menja znak na intervalu $[a,b]$, tj. postoji tačka $c \in [a,b]$ takva da je $f(c) = 0$ i $f(x) \geq 0$ za svako $x \in [a,c]$ i $f(x) \leq 0$ za svako $x \in [c,b]$, tada je

$$P = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx.$$

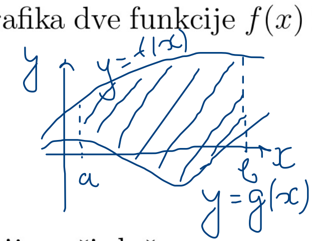
U slučaju da je $f(c) = 0$ i $f(x) \leq 0$ za svako $x \in [a,c]$ i $f(x) \geq 0$ za svako $x \in [c,b]$, tada je

$$P = -\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$



IV) Ako je potrebno izračunati površinu koja se nalazi između grafika dve funkcije $f(x)$ i $g(x)$ i važi da je $f(x) \geq g(x)$ za svako $x \in [a,b]$, tada je

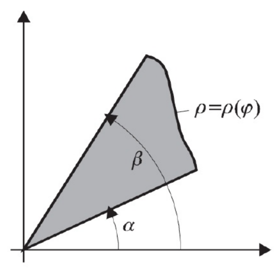
$$P = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)\,dx.$$



Slične formule važe i u slučaju da je $x = g(y)$, tada se integracija vrši duž $y-$ose.

U slučaju da je funkcija $y = f(x)$ zadata parametarski, $y = \psi(t)$ i $x = \varphi(t)$ za $t \in [\alpha,\beta]$, pri čemu je funkcija $\varphi(t)$ monotono rastuća i ima neprekidan prvi izvod nad $[\alpha,\beta]$ dok je $\psi(t)$ neprekidna nad $[\alpha,\beta]$ i $\psi(t) \geq 0$ za svako $t \in [\alpha,\beta]$, tada je

$$P = \int_\alpha^\beta \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt.$$

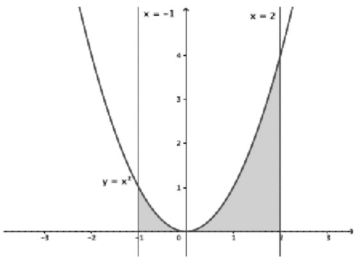


Ukoliko je u polarnom koordinatnom sistemu data kriva $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, $|\beta - \alpha| \leq 2\pi$, gde je $\rho = \rho(\varphi)$ neprekidna funkcija, tada površinu krivolinijskog trougla ograničenog ravnima $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ i krivom $\rho = \rho(\varphi)$ računamo

$$P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

1. Izračunati površinu ograničenu parabolom $y = x^2$, pravama $x = -1$ i $x = 2$ i $x-$osom.

   Rešenje: Tražena površina predstavljena je na slici.

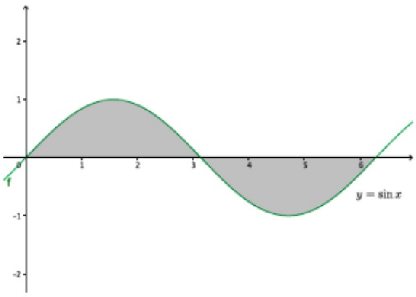


Interval integracije je $[-1, 2]$, a nad njim je funkcija $f(x) = x^2$ nenegativna, pa je

$$P = \int_{-1}^{2} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{8}{3} - \frac{-1}{3} = 3.$$

2. Izračunati površinu ograničenu grafikom funkcije $y = \sin x$ i delom $x-$ose za $x \in [0, 2\pi]$.

   Rešenje: Tražena površina je predstavljena na slici. Na intervalu $[0, 2\pi]$ postoji nula funkcije, tj. $y(\pi) = 0$ i važi da je $y \geq 0$ za svako $x \in [0, \pi]$ i $y \leq 0$ za svako $x \in [\pi, 2\pi]$.



$$\begin{aligned} P &= \int_0^{\pi} \sin x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx \\ &= (-\cos x)\Big|_0^{\pi} - (-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi} \\ &= -\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi \\ &= -(-1) + 1 + 1 - (-1) = 4 \end{aligned}$$

3. Izračunati površinu ograničenu parabolom $y = 2x - x^2$ i pravom $y = -x$.

   Rešenje: Prava $y = -x$ u tački $O(0, 0)$ seče x-osu.

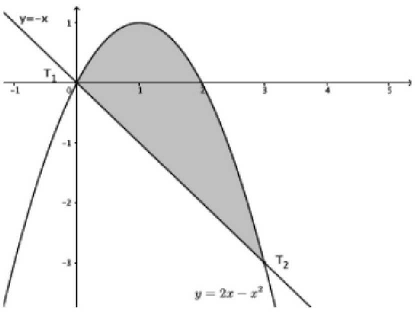
   Presek parabole sa $x-$osom $(y = 0)$ se dobija rešavanjem jednačine $2x - x^2 = 0$. Rešenja navedene jednačine su $x = 0$ ili $x = 2$, tako da parabola u tačkama $T_1(2, 0)$ i $O(0, 0)$ seče $x-$osu.

   Iz $y' = (2x - x^2)' = 2 - 2x = 0$ sledi da parabola u $x = 1$ može da ima ekstremnu vrednost. Kako je $y'' = -2 < 0$ za svako x, sledi da u $x = 1$ parabola dostiže maksimum. $y(1) = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1$, pa je tačka maksimuma $T(1, 1)$.

   Apscise presečnih tačaka funkcija $y = 2x - x^2$ i $y = -x$ su rešenja jednačine

$$2x - x^2 = -x \quad \Longleftrightarrow \quad x(3 - x) = 0,$$

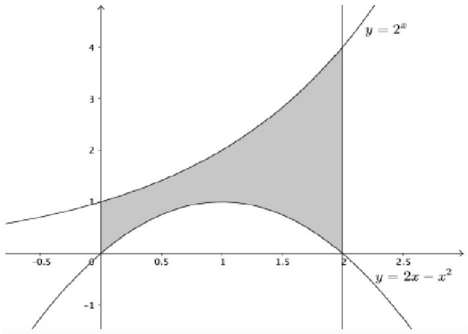
   odakle je $x = 0$ i $x = 3$. Iz $y = -x$ sledi da su tačke preseka parabole i prave tačke $O(0, 0)$ i $T_2(3, -3)$. Tražena površina je predstavljena na slici.



$$\begin{aligned} P &= \int_0^3 (2x - x^2 - (-x))\,dx \\ &= \int_0^3 (3x - x^2)\,dx = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

4. Izračunati površinu ograničenu pravama $x = 0$, $x = 2$ i graficima krivih $p_1 :\ y = 2x - x^2$ i $p_2 :\ y = 2^x$.

Rešenje: Tražena površina predstavljena je na slici. Interval integracije je $[0, 2]$. Presek parabole p_1 i $x-$ose su tačke $O(0, 0)$ i $T_1(2, 0)$. Za svako $x \in \mathbb{R}$ je $2^x > 2x - x^2$.



$$P = \int\limits_0^2 (2^x - (2x - x^2))\, dx = \frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3}$$

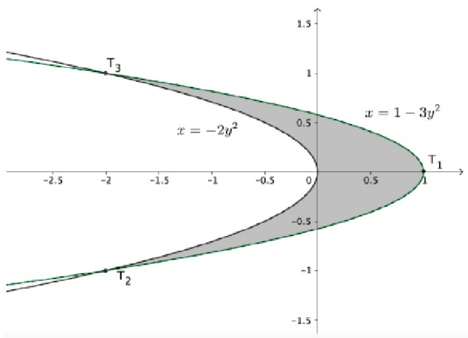
5. Izračunati površinu ograničenu parabolama $p_1 :\ x = -2y^2$ i $p_2 :\ x = 1 - 3y^2$.

Rešenje: U ovom slučaju integracija se vrši po promenljivoj y.

Teme parabole p_1 je u tački $O(0, 0)$, a parabole p_2 u tački $T_1(1, 0)$.

Presek parabole p_2 sa $y-$osom je rešenje jednačine $1 - 3y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = \frac{1}{3}$, odakle se dobijaju tačke $T_2(0, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ i $T_3(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Parabole p_1 i p_2 se seku u tačkama sa ordinatama $-2y^2 = 1 - 3y^2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$ $y = \pm 1$, tj. u tačkama $T_2(-2, 1)$ i $T_3(-2, -1)$, pa je interval integracije $[-1, 1]$.



$$P = \int\limits_{-1}^{1} (1 - 3y^2 - (-2y^2))\, dy$$

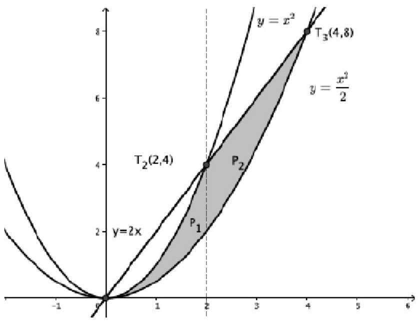
$$= \int\limits_{-1}^{1} (1 - y^2)\, dy = \frac{4}{3}$$

6. Izračunati površinu oblasti ograničene parabolama $p_1 :\ y = x^2$ i $p_2 :\ y = \dfrac{x^2}{2}$ i pravom $p :\ y = 2x$.

Rešenje: Apscise presečnih tačaka parabole p_1 i prave p su rešenja jednačine $x^2 = 2x$, tj. $x = 0$ ili $x = 2$. Iz $y = 2x$ sledi da su presečne tačke $O(0, 0)$ i $T_2(2, 4)$.

Apscise presečnih tačaka parabole p_2 i prave p su rešenja jednačine $\dfrac{x^2}{2} = 2x$, tj. $x = 0$ ili $x = 4$, pa su presečne tačke $O(0, 0)$ i $T_2(4, 8)$. Opet smo za određivanje oridanata presečnih tačaka koristili da je $y = 2x$.

Potrebno je površinu podeliti na dva dela.



$$P = P_1 + P_2,$$

$$P_1 = \int_0^2 (x^2 - \frac{x^2}{2})\,dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

i

$$P_2 = \int_2^4 (2x - \frac{x^2}{2})\,dx = \left(x^2 - \frac{1}{6}x^3\right)\Big|_2^4 = \frac{8}{3},$$

pa je

$$P = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4.$$

7. Izračunati površinu ograničenu krivom $y = \ln x^{-\frac{1}{x}}$, $x-$osom i pravama $x = \dfrac{1}{e}$ i $x = e$.

   Rešenje: Domen funkcije $y = \ln x^{-\frac{1}{x}}$ je $(0, \infty)$. Nalazimo presek grafika funkcije $y = \ln x^{-\frac{1}{x}}$ sa x-osom $(y = 0)$:

$$y = 0 \Leftrightarrow \ln x^{-\frac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x}\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \quad \Leftrightarrow x = 1,$$

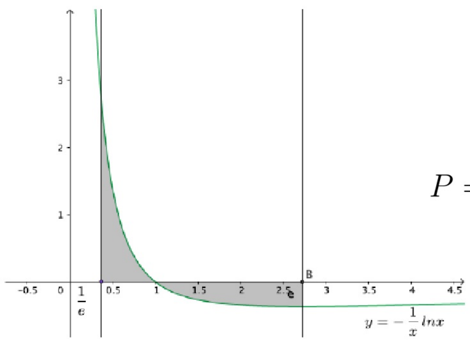
   tako da kriva $y = \ln x^{-\frac{1}{x}}$ seče $x-$osu u tački $T(1,0)$.

   Prvi izvod funkcije je $y' = \dfrac{\ln x - 1}{x^2}$. Iz

$$y' < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < e,$$

   sledi da na intervalu $[\frac{1}{e}, e]$ funkcija y monotono opada.

   Iz $y\left(\frac{1}{e}\right) = -e\ln\frac{1}{e} = -e\ln e^{-1} = e > 0$, $y(e) = -\frac{1}{e}\ln e = -\frac{1}{e} < 0$ i $y(1) = 0$ zaključuje se da je na intervalu $[\frac{1}{e}, 1]$ grafik funkcije iznad $x-$ose, dok je na intervalu $[1, e]$ ispod $x-$ose.



$$P = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \left(-\frac{\ln x}{x}\right)dx - \int_1^e \left(-\frac{\ln x}{x}\right)dx$$

$$P = P_1 + P_2 = \int_{1/e}^{1}\left(-\frac{\ln x}{x} - 0\right)dx + \int_1^e \left(0 - \left(-\frac{\ln x}{x}\right)\right)dx$$

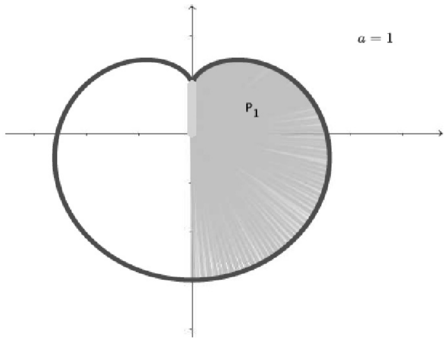
$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \begin{bmatrix} \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{bmatrix} = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

$$P = -\frac{\ln^2 x}{2}\Bigg|_{\frac{1}{e}}^{1} + \frac{\ln^2 x}{2}\Bigg|_{1}^{e} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

8. Izračunati površinu kardioide koja je zadata jednačinama

$$c : \begin{cases} x(t) = a(2\sin t - \sin 2t), \\ y(t) = a(2\cos t - \cos 2t). \end{cases}$$

Rešenje: Površina koju je potrebno izračunati predstavljena je na slici.



Međutim dovoljno je izračunati površinu P_1 koja se dobija za vrednost parametra $t \in [0, \pi]$, pa je

$$P = 2P_1.$$

$$\begin{aligned} P_1 &= \int\limits_0^\pi a(2\cos t - \cos 2t)\, a\,(2\cos t - 2\cos 2t)\, dt \\ &= 2a^2 \int\limits_0^\pi (2\cos^2 t - 3\cos t \cos 2t + \cos^2 2t)\, dt \\ &= 2a^2(2I_1 - 3I_2 + I_3), \end{aligned}$$

gde je

$$I_1 = \int\limits_0^\pi \cos^2 t\, dt, \quad I_2 = \int_0^\pi \cos t \cos 2t\, dt, \quad I_3 = \int_0^\pi \cos^2 2t\, dt.$$

Kako je

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int\limits_0^{\pi} \cos^2 t \, dt = \int\limits_0^{\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} \, dt = \frac{1}{2}t\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \cos 2t \, dt \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}, \\
I_2 &= \int\limits_0^{\pi} \cos t(\cos^2 t - \sin^2 t) \, dt = \int\limits_0^{\pi} \cos t(1 - 2\sin^2 t) \, dt \\
&= \sin t\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{3}\sin^3 t\Big|_0^{\pi} = 0, \\
I_3 &= \int\limits_0^{\pi} \cos^2 2t \, dt = \int\limits_0^{\pi} \frac{1+\cos 4t}{2} \, dt = \frac{1}{2}t\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \cos 4t \, dt \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{8}\sin 4t\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},
\end{aligned}
$$

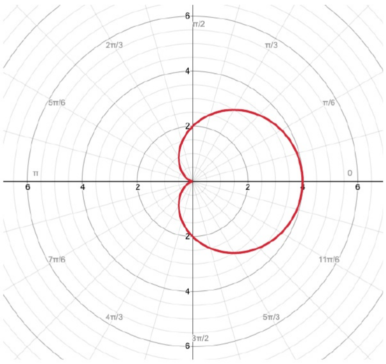
smena:
$m = \sin t$
$dm = \cos t dt$

dobija se da je površina $P_1 = 2a^2(\pi + \frac{\pi}{2}) = 3a^2\pi$, odakle je

$$P = 6a^2\pi.$$

9. Izračunati površinu ograničenu kardioidom $\rho = a(1+\cos\varphi)$, $a > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Rešenje: Površina koju je potrebno izračunati predstavljena je na slici.



$$P = 2P_1 = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) d\varphi =$$

$$= a^2 \int_0^{\pi} d\varphi + 2a^2 \int_0^{\pi} \cos\varphi d\varphi + \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi} (1+\cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= a^2\varphi\Big|_0^{\pi} + 2a^2\sin\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{2}\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi} = a^2\pi + \frac{1}{2}a^2\pi = \frac{3}{2}a^2\pi$$