Примењено софтверско инжењерство 18. јун 2017.

Дискретна математика

Колоквијум I

1. У 15 клупа у учионици треба распоредити 15 дечака и 15 девојчица тако да у свакој клупи седе један дечак и једна девојчица. На колико начина је то могуће учинити?

Решење: Дечаке размештамо у клупе на 15! начина и исто толико начина имамо за размештање девојчица у клупе. Када су сва деца распоређена у клупе, треба још видети да ли ће седети дечак–девојчица или девојчица–дечак, а то можемо учинити на 2 начина. Према томе, решење је $15! \cdot 15! \cdot 2$.

2. Доказати да важи $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{m}{k}\binom{n}{k} = n\binom{m+n-1}{n}$.

Решење:

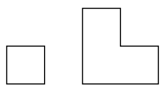
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{m}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k\frac{m!}{k!(m-k)!}\frac{n\cdot(n-1)!}{k!(n-k)!} = n\sum_{k=0}^{n}\frac{m!}{k!(m-k)!}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

Када искористимо Вандермондову конволуцију добијамо $n\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{n-1}{k-1} = n\binom{m+n-1}{n}$.

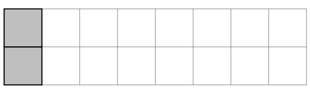
3. Колико има речи дужине 4 над азбуком $\{0,1,2\}$ које садрже тачно две јединице?

Решење: На $\binom{4}{2}$ начина можемо изабрати места на којима ће се налазити јединице. Сада се на преостала два места налазе 0 или 2, па је решење $\binom{4}{2}\cdot 2^2 = 24$.

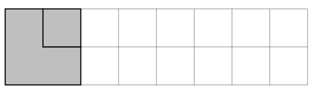
4. Правоугаоник величине $2\times n$ издељен је на $2n$ једнаких квадрата. Колико има начина да се прекрије правоугаоник ако се користе следеће плочице? (Плочице се могу ротирати за целобројне умношке правог угла.)



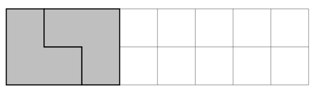
Решење: Нека је f_n број начина да се датим плочицама прекрије правоугаоник величине $2\times n$. Разликујемо 3 случаја у зависности од тога како можемо започети прекривање правоугаоника.



1°



2°



3°

1° Ако прекривање започнемо на овај начин остаје да се покрије још $2\times(n-1)$ део правоугаоника и то можемо учинити на f_{n-1} начина.

2° Сада треба прекрити још $2\times(n-2)$ квадрата, а како почетне плочице у приказани положај можемо ставити на 4 начина, укупан број прекривања је $4\cdot f_{n-2}$.

3° Плочице се у овај положај могу ставити на 2 начина и пошто остаје да се прекрије $2\times(n-3)$ дела правоугаоника, број прекривања је $2\cdot f_{n-3}$.

Добијамо рекурентну релацију

$$f_n = f_{n-1} + 4f_{n-2} + 2f_{n-3},$$

са почетним условима $f_0 = f_1 = 1$ и$f_2 = 5$. Карактеристича једначина за добијену рекурентну релацију је $t^3 - t^2 - 4t - 2 = 0$ и њени корени су $t_1 = -1$, $t_2 = 1+\sqrt{3}$ и

$t_3 = 1 - \sqrt{3}$. Сада је $f_n = A(-1)^n + B(1+\sqrt{3})^n + C(1-\sqrt{3})^n$. Увршћавањем почетних услова добијамо систем

$$\begin{aligned} A + B + C &= 1 \\ -A + B(1+\sqrt{3}) + C(1-\sqrt{3}) &= 1 \\ A + B(1+\sqrt{3})^2 + C(1-\sqrt{3})^2 &= 5. \end{aligned}$$

Решења система су $A = 1$, $B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $C = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Број начина да се датим плочицама прекрије правоугаоник $2 \times n$ је

$$f_n = (-1)^n + \frac{(1+\sqrt{3})^n}{\sqrt{3}} - \frac{(1-\sqrt{3})^n}{\sqrt{3}}.$$