1. U zavisnosti od parametra a i b diskutovati sistem jednačina $a(a-1)x+y+(a+1)u=1$ $a(a-1)x+(a-1)y+z+(2a-2)u=b+1$, $(a-2)y+(a+1)z+(2a-4)u=b+2$. **Rešenje:**

$$\begin{array}{ccccl} a(a-1)x & +y & & +(a+1)u & =1\\ a(a-1)x & +(a-1)y & +z & +(2a-2)u & =b+1\\ & (a-2)y & +(a+1)z & +(2a-4)u & =b+2 \end{array} \Bigg\| \begin{array}{ccccl} a(a-1)x & +y & & +(a+1)u & =1\\ & (a-2)y & +z & +(a-3)u & =b\\ & (a-2)y & +(a+1)z & +(2a-4)u & =b+2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccl} a(a-1)x & +y & & +(a+1)u & =1\\ & (a-2)y & +z & +(a-3)u & =b\\ & & az & +(a-1)u & =2 \end{array} \Bigg\|$$

I	$a\neq 0\wedge a\neq 1\wedge a\neq 2$	$\Rightarrow$	*jednostruko neodredjen*
II	$a=0\vee a=2$	$\Rightarrow$	*jednostruko neodredjen*
III	$a=1\wedge b=1$	$\Rightarrow$	*dvostruko neodredjen*
IV	$a=1\wedge b\neq 1$	$\Rightarrow$	*kontradiktoran*

2. U zavisnosti od parametra a i b diskutovati sistem jednačina

$$\begin{array}{ccccl} (a-3)x & +ay & +3z & -u & =0\\ (a-3)x & & +(-a+3)z & +u & =0\\ (a-3)x & & & +(a-2)u & =b \end{array} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{array}{ccccl} (a-3)x & +ay & +3z & -u & =0\\ & -ay & -az & +2u & =0\\ & -ay & -3z & +(a-1)u & =b \end{array} \quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccccl} (a-3)x & +ay & +3z & -u & =0\\ & -ay & -az & +2u & =0\\ & & (a-3)z & +(a-3)u & =b \end{array} \Bigg\|$$

I $a\neq 0\wedge a-3\neq 0\Rightarrow$ sistem je jednostruko neodredjen,
II $(a=3\wedge b=0)\Rightarrow$ sistem je dvostruko neodredjen i skup rešenja je $\{(x,-z,z,0)|x,z\in R\}$,
III $(a=3\wedge b\neq 0)\Rightarrow$ sistem je kontradiktoran,
IV $a=0\Rightarrow$ sistem je jednostruko neodredjen i skup rešenja je $\Big\{\Big(-\frac{b}{3},y,-\frac{b}{3},0\Big)|y\in R\Big\}$,

3. U zavisnosti od parametara a,b i c diskutovati sistem jednačina $-x+(a-2)y+az+(a+1)u=1$ $ax+(a-2)y+az-u=b$ $ax+(a-2)y-z+au=c$. **Rešenje:**

$$\begin{array}{ccccl} -x & +(a-2)y & +az & +(a+1)u & =1\\ ax & +(a-2)y & +az & -u & =b\\ ax & +(a-2)y & -z & +au & =c \end{array} \Bigg\| \begin{array}{ccccl} -x & +(a-2)y & +az & +(a+1)u & =1\\ & (a+1)(a-2)y & +a(a+1)z & +(a^2+a-1)u & =a+b\\ & (a+1)(a-2)y & +(a-1)(a+1)z & +a(a+2)u & =a+c \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccl} -x & +(a-2)y & +az & +(a+1)u & =1\\ & (a-2)(a+1)y & +a(a+1)z & +(a^2+a-1)u & =a+b\\ & & -(a+1)z & +(a+1)u & =c-b \end{array}$$

I $a\neq -1\wedge a\neq 2$ jednostruko neodredjen
II $a=-1\wedge c\neq b$ kontradiktoran
III $a=-1\wedge c=b$ dvostruko neodredjen.
IV $a=2$ jednostruko neodredjen

4. Dati su vektori $a=(1,-2,2,4)$, $b=(2,-4,6,0), c=(-4,8,-10,-8), d=(3,-6,9,0), e=(-3,2,-10,5)$. **a)** Odrediti dimenziju prostora V generisanog skupom vektora $A=\{a,b,c,d,e\}$. **b)** Naći linearnu zavisnost skupa vektora A. **c)** Napisati sve podskupove skupa A koji su baze vektorskog prostora V. **Rešenje:**

$$(**)\ \alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d+\varepsilon e=0 \ \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{cccccl} \alpha & +2\beta & -4\gamma & +3\delta & -3\varepsilon & =0\\ -2\alpha & -4\beta & +8\gamma & -6\delta & +2\varepsilon & =0\\ 2\alpha & +6\beta & -10\gamma & +9\delta & -10\varepsilon & =0\\ 4\alpha & & -8\gamma & & +5\varepsilon & =0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \alpha=2\gamma\\ \beta=\gamma-\frac{3}{2}\delta\\ \varepsilon=0 \end{array}$$

Uvršćavanjem ovih vrednosti α,β,ε u jednakost $(**)$ i uzimanjem $\gamma=1\wedge\delta=0$ i $\gamma=0\wedge\delta=1$ dobija se $2a+b+c=0\wedge-\frac{3}{2}b+d=0$, tj. $b=\frac{2}{3}d$ i $a=-\frac{1}{2}c-\frac{1}{3}d$, što znači da su a i b nepotrebni u generisanju prostora V pa je $\{c,d,e\}$ baza od V.

$$\boxed{\begin{array}{cccl} 2a & +b & +c & =0\\ & -3b & +2d & =0 \end{array}}$$

$\dim V=3$ i samo tročlani podskupovi skupa A su baze prostora V i to samo oni čija linearna kombinacija može biti jednaka svakom od preostala dva vektora skupa A. To su samo podskupovi $\{a,b,e\},\{a,c,e\},\{a,d,e\}$, $\{b,c,e\}$, i $\{c,d,e\}$. Zbog $\varepsilon=0$ vektor e se nalazi u svakom podskupu skupa A koji je baza prostora V.

5. Sve linearne zavisnosti skupa vektora $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ date su sa sledećim jednakostima:

$$\begin{array}{l} a+2b+3c+d+4e+7f=0\\ 4a+5b+6c+2d+5e+8f=0\\ 7a+8b+9c+3d+6e+9f=0, \end{array}$$

kao i njihovim linearnim kombinacijama. Naći sve podskupove datog skupa vektora koji su baze vektorskog prostora generisanog skupom vektora A.

Rešenje Dati sistem jednačina je ekvivalentan sa
$$\begin{array}{l} a+2b+3c+d+4e+7f=0\\ \quad -3b-6c-2d-11e-20f=0. \end{array}$$

Odavde je očevidno da $\{c,d,e,f\}$ jeste generatoran skup i da bilo koja linearna kombinacija datih jednakosti sadrži bar jedan od vektora a,b. Nijedan podskup skupa $\{c,d,e,f\}$ nije generatoran, jer bi, u protivnom dobili jednakost koja je linearna kombinacija datih jednakosti, a ne sadrži ni a ni b. Znači $\{c,d,e,f\}$ je minimalni skup generatora, tj. baza. Na isti način dobijamo da su baze još i: $\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$, $\{a,b,c,f\}$, $\{a,b,d,e\}$, $\{a,b,d,f\}$, $\{a,c,d,e\}$, $\{a,c,d,f\}$, $\{a,c,e,f\}$, $\{a,d,e,f\}$, $\{b,c,d,e\}$, $\{b,c,d,f\}$, $\{b,c,e,f\}$, $\{b,d,e,f\}$. Znači jedini četvoročlani podskup skupa $\{a,b,c,d,e,f\}$ koji nije baza je $\{a,b,e,f\}$. Ili jednostavnije, $\{a,c,d,f\}$ jeste baza jer sistem po nepoznatama b i e ima za determinantu $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -11 \end{vmatrix} = -10$ koja je različita od nule.

6. Neka je V vektorski prostor generisan sa skupom vektora $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$. Naći bar 2 potskupa skupa A koji su baza prostora V i bar 2 koji nisu, pri čemu su **sve** zavisnosti uređene sedmorke vektora definisane sa ovih pet jednakosti:

$$\begin{array}{rrrrrrrl} 3a & +3b & -c & +4d & +9e & -2f & & =0 \\ -a & -3b & +c & -2d & -5e & +2f & +g & =0 \\ 2a & +2b & -c & +3d & +7e & -2f & & =0 \\ a & +b & -c & +2d & +6e & -2f & & =0 \end{array}$$

Rešenje Dati sistem linearnih veza je ekvivalentan sa sledećim trougaonim oblikom tog sistema:

$$\begin{array}{rrrrrrrl} a & +b & & +d & & & & =0 \\ & -2b & & & & & +g & =0 \\ & & -c & +d & -2f & & & =0 \\ & & & & & e & & =0 \end{array}$$

Zbog je $e=0$, e ne može biti ni u jednoj bazi. Vektori d, f, g su dovoljni za generisanje prostora V, a linearno su nezavisni jer bi u protivnom postojala bar još jedna veza među njima nezavisna od datih, što je suprotno uslovu zadatka da su date **sve** veze medju vektorima iz A.

Znači $\dim(V)=3$ i (d,f,g) je jedna baza prostora V. Proverom preostalih kandidata za bazu (svi tročlani podskupovi skupa $\{a,b,c,d,f,g\}$) dobijamo da (a,b,c), (a,b,f), (a,c,d), (a,c,f), (a,c,g), (a,d,f), (a,f,g), (b,c,d), (b,c,f), (b,d,f), (c,d,g), (c,f,g), (d,f,g) jesu baze, a (a,b,d), (a,b,g), (a,d,g), (b,c,g), (b,d,g), (b,f,g), (c,d,f) nisu baze prostora V.

7. Neka su linearne transformacije f i g definisane sa jednakostima $f(x_1,x_2)=(x_1+2x_2,x_1+3x_2)$ i $g(x_1,x_2)=(2x_1-x_2,2x_1+x_2)$. **1)** Po definiciji kompozicije $\circ$ odrediti $(f\circ g)(x_1,x_2)=f(g(x_1,x_2))$. **2)** Napisati matrice M_f i M_g koje su odgovarajuće redom linearnim transformacijama f i g. **3)** Izračunati proizvod $M_f\cdot M_g$. **4)** Napisati linearnu transformaciju $h(x_1,x_2)$ kojoj odgovara matrica $M_f\cdot M_g$. **5)** Da li je $h=f\circ g$ tj. da li je $(\forall x_1,x_2\in\mathbb{R})\ h(x_1,x_2)=(f\circ g)(x_1,x_2)$? **6)** Naći M_f^{-1} i M_g^{-1} **7)** Naći f^{-1} i g^{-1} **8)** Da li su f i g izomorfizmi? **Rešenje:**

1) $(f\circ g)(x_1,x_2)=f(g(x_1,x_2))=f(2x_1-x_2,2x_1+x_2)=\Big(2x_1-x_2+2(2x_1+x_2),2x_1-x_2+3(2x_1+x_2)\Big)$, tj. $(f\circ g)(x_1,x_2)=(6x_1+x_2,8x_1+2x_2)$ **2)** $M_f=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}$, $M_g=\begin{bmatrix}2&-1\\2&1\end{bmatrix}$ **3)** $M_f\cdot M_g=\begin{bmatrix}6&1\\8&2\end{bmatrix}$

4) $h(x_1,x_2)=(6x_1+1x_2,8x_1+2x_2)$ **5)** DA **6)** $M_f^{-1}=\begin{bmatrix}3&-2\\-1&1\end{bmatrix}$ $M_g^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1\\-2&2\end{bmatrix}$

7) $f^{-1}(x,y)=(3x-2y,-x+y)$ i $g^{-1}(x,y)=\frac{1}{4}(x+y,-2x+2y)$ **8)** Da, jer je $\det M_f\neq 0$ i $\det M_g\neq 0$

8. Neka je $\vec{n}=(1,2,2)$ vektor normalan na ravan α i neka se proizvoljni slobodni vektor $\vec{x}=(x,y,z)\in V$ funkcijom f preslikava u vektor $f(\vec{x})=\frac{\vec{n}\times\vec{x}}{|\vec{n}|}$ ($\times$ je vektorski proizvod). **a)** Dokazati da za svako $k\in\mathbb{N}$ funkcije $f_k(x)=(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{k})(\vec{x})=\underbrace{f(f(\ldots(f}_{k}(\vec{x}))\ldots))$ su linearne transformacije i napisati njihove matrice.

b) Da li je $(\{f_k|k\in\mathbb{N}\},\circ)$ grupa? **c)** Da li je f_4 funkcija koja svaki slobodni vektor projektuje na ravan α?

Rešenje

a) Kako je $f(x,y,z)=\frac{\vec{n}\times\vec{x}}{|\vec{n}|}=\left(-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z,\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}z,-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y\right)$, sledi da f jeste linearna transformacija jer komponente od $\left(-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z,\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}z,-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y\right)$ su linearne funkcije promenljivih x,y,z bez slobodnih članova. Kako je kompozicija linearnih transformacija uvek linearna transformacija (teorema iz knjige), sledi da su sve funkcije f_k linearne transformacije.

Matrice tih linearnih transformacija su redom:

$$B=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0&-2&2\\2&0&-1\\-2&1&0\end{bmatrix},\ B^2=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}-8&2&2\\2&-5&4\\2&4&-5\end{bmatrix},\ B^3=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0&-2&2\\2&0&-1\\-2&1&0\end{bmatrix}=-B,\ B^4=-B^2,$$

$B^5=B,\ldots$ pa je dalje očevidno da je $(B^{4k+1},B^{4k+2},B^{4k+3},B^{4k})=(B,B^2,-B,-B^2)$ za svako $k\in\mathbb{N}$.

b) Pisanjem Kejlijeve tablice za $(\{B,B^2,-B,-B^2\},\cdot)$ sledi da to jeste ciklička gupa pa je i komutativna.

c) Na osnovu definicije vektorskog proizvoda lako se geometrijski uočava da funkcija f_4 jeste projektovanje proizvoljnog slobodnog vektora na ravan α. Može se proveriti i matričnim računom. Poznato je da $\frac{nn^\top}{n^\top n}$ je matrica koja vektore projektuje na pravac vektora $\vec{n}$, a $I - \frac{nn^\top}{n^\top n}$ na ravan α, koja je normalna na $\vec{n}$, gde je $\vec{n} = (1,2,2) = [1\ 2\ 2]^\top = n$ (Vidi u knjizi R.D. od 2011 godine 16.11, 16.18, 16.19) i sledi $B^4 = I - \dfrac{nn^\top}{n^\top n}$. Ako posmatramo u prostoru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$, tada pomenuta prava i ravan α normalna na nju moraju da prolaze kroz koordinatni početa, a ako se dešava u prostoru slobodnih vektora, tada ne mora.

9. Za linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je poznato da je $f(1,2) = (-1,3)$ i $f(1,1) = (2,-6)$.
(a) Izračunati $f(x,y)$ i matricu M linearne transformacije f.
(b) Odrediti rang linearne transformacije f. **(c)** Ispitati da li postoji inverzna linearna transformacija f^{-1}.
?**(d)** Napisati jednačinu skupa tačaka $f(\mathbb{R}^2) = \{f(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ i dati geometrijsku interpretaciju toga skupa. **Rešenje** Kako je

$(x,y) = \alpha(1,2) + \beta(1,1) = (\alpha+\beta, 2\alpha+\beta) \Leftrightarrow \begin{array}{ccccc} \alpha & + & \beta & = & x \\ 2\alpha & + & \beta & = & y \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \alpha = -x+y \\ \beta = 2x-y \end{array}$, sledi $f(x,y) =$
$f\Big((-x+y)(1,2) + (2x-y)(1,1)\Big) = (-x+y)f(1,2) + (2x-y)f(1,1) = (-x+y)(-1,3) + (2x-y)(2,-6)$

tj. $f(x,y) = (5x-3y, -15x+9y)$, $M = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -15 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad \operatorname{rang}(M) = 1 = \dim(f(\mathbb{R}^2))$.

Dakle, kako je $\det(M) = 0$, ne postoji inverzna linearna transformacija, a $f(\mathbb{R}^2)$ je 1-dimenzionalni podprostor od $\mathbb{R}^2$, tj. prava koja sadrži koordinatni početak. Jednačina je $(x,y) = t(-1,3), t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{x}{-1} = \frac{y}{3} \Leftrightarrow y = -3x$.

10. Neka je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna transformacija vektorskog prostora uređenih trojki realnih brojeva $\mathbb{R}^3$ u samog sebe za koju važi da je $\quad f(5,-8,-4) = (1,0,0), \quad f(6,-11,-6) = (0,1,0) \quad$ i $f(-6,12,7) = (0,0,1)$. **a)** Napisati vektore $(1,0,0), (0,1,0)$ i $(0,0,1)$ kao linearnu kombinaciju vektora $(5,-8,-4), (6,-11,-6)$ i $(-6,12,7)$. **b)** Odrediti $f(1,0,0)\ \ f(0,1,0)\ \ f(0,0,1)$. **c)** Odrediti $f(x,y,z)$. **d)** Napisati matricu M linearne transformacije f u standardnoj bazi i naći njen rang. **e)** Naći M^{-1}, M^{2011} i $f^{-1}(x,y,z)$. **Rešenje** Rešavanjem po α, β i γ jednačine $(1,0,0) = \alpha(5,-8,-4) + \beta(6,-11,-6) + \gamma(-6,12,7)$ tj. odgovarajućeg sistema linearnih jednačina $5\alpha + 6\beta - 6\gamma = 1, -8\alpha - 11\beta + 12\gamma = 0, -4\alpha - 6\beta + 7\gamma = 0$ dobijamo $(1,0,0) = 5(5,-8,-4) - 8(6,-11,-6) - 4(-6,12,7)$. Na isti način se dobija
$(0,1,0) = 6(5,-8,-4) - 11(6,-11,-6) - 6(-6,12,7)$ i $(0,0,1) = -6(5,-8,-4) + 12(6,-11,-6) + 7(-6,12,7)$.
Sledi
$$f(1,0,0) = f(5(5,-8,-4) - 8(6,-11,-6) - 4(-6,12,7)) =$$
$$f(1,0,0) = 5f(5,-8,-4) - 8f(6,-11,-6) - 4f(-6,12,7) =$$
$$f(1,0,0) = 5(1,0,0) - 8(0,1,0) - 4(0,0,1) = (5,-8,-4),$$
i na isti način $f(0,1,0) = (6,-11,-6)$ i $f(0,0,1) = (-6,12,7)$. Prema tome matrica M linearne transformacije f je $M = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -6 \\ -8 & -11 & 12 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$ i $f(x,y,z) = (5x+6y-6z, -8x-11y+12z, -4x-6y+7z)$, $\mathbf{rang}M = 3$, $M^{-1} = M$, $f^{-1}(x,y,z) = (5x+6y-6z, -8x-11y+12z, -4x-6y+7z)$, a kako iz $M^{-1} = M$ sledi $M^2 = I$, to je $M^{2011} = (M^2)^{1005}M = M$. Da li smo bez računaja odma mogli reći koliko je matrica M od f.

11. Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna transformacija za koju važi da je $f(5,-8,-4) = (0,1,1)$, $f(6,-11,-6) = (3,-1,1)$, $f(-6,12,7) = (3,0,2)$. **(a)** Odrediti $f(1,0,0)$, $f(0,1,0)$, $f(0,0,1)$ i odrediti linearnu transformaciju $f(x,y,z)$. Dokazati da je f jednoznačno određena i napisati njenu matricu. **(b)** Izračunati $f(f(\mathbf{w}))$ za proizvoljno $\mathbf{w} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. **(c)** Dokazati da je skup $V = \{f(\mathbf{w}) \mid \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3\}$ podprostor prostora $\mathbb{R}^3$ i naći njegovu dimenziju. **(d)** Napisati jednačinu skupa tačaka V.

Rešenje a) Matricu M linearne transformacije f u standardnoj bazi (e_1, e_2, e_3) dobijamo sledećim računom.
$$\begin{array}{l} f(\ \ 5,\ -8,\ -4\ ) = (0,\ \ 1,\ \ 1\ ) \\ f(\ \ 6,\ -11,\ -6\ ) = (3,\ -1,\ \ 1\ ) \\ f(\ -6,\ \ 12,\ \ 7\ ) = (3,\ \ 0,\ \ 2\ ) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rrrl} 5f(e_1) & -8f(e_2) & -4f(e_3) & = (0,\ 1,\ 1\ ) \\ 6f(e_1) & -11f(e_2) & -6f(e_3) & = (3,\ -1,\ 1\ ) \\ -6f(e_1) & 12f(e_2) & 7f(e_3) & = (3,\ 0,\ 2\ ) \end{array} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 6 & -11 & -6 \\ -6 & 12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ f(e_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0,1,1) \\ (3,-1,1) \\ (3,0,2) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ f(e_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 6 & -11 & -6 \\ -6 & 12 & 7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (0,1,1) \\ (3,-1,1) \\ (3,0,2) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ f(e_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-36,13,-11) \\ (-51,17,-17) \\ (57,-18,20) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rl} f(e_1) = & -36e_1 + 13e_2 - 11e_3 \\ f(e_2) = & -51e_1 + 17e_2 - 17e_3 \\ f(e_3) = & 57e_1 - 18e_2 + 20e_3 \end{array} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} -36 & -51 & 57 \\ 13 & 17 & -18 \\ -11 & -17 & 20 \end{bmatrix}.$$
Iz ovoga računa sledi pravilo za računanje matrice M transformacije f u standardnoj bazi. Ako je:

$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -6 \\ -8 & -11 & 12 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, tada je $M^\top = (A^\top)^{-1} \cdot B^\top$ tj. $\boxed{M = B \cdot A^{-1}}$. Dalje je $f(x,y,z) = (-36x - 51y + 57z, 13x + 17y - 18z, -11x - 17y + 20z)$, $f(1,0,0) = (-36, 13, -11)$, $f(0,1,0) = (-51, 17, -17)$, $f(0,0,1) = (57, -18, 20)$. Jedinstvenost transformacije f sledi iz $|A| \neq 0$.

b) Iz $M^2 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 6 \\ -49 & -68 & 75 \\ -45 & -68 & 79 \end{bmatrix}$, sledi $f\Big(f(x,y,z)\Big) = (6x + 6z, -49x - 68y + 75z, -45x - 68y + 79z)$.

c) Neka je $a, b \in V$ tj. postoje $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ za koje je $a = f(v_1)$ i $b = f(v_2)$. Sledi $\alpha a + \beta b = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = f(\alpha v_1 + \beta v_2) \in V$, što znači $\alpha a + \beta b \in V$. Dakle, V je potprostor prostora $\mathbb{R}^3$. Pri tome je $\dim(V) = \mathbf{rang} M = 2$. **d)** Iz nezavisnosti vektora $f(1,0,0) = (-36, 13, -11)$ i $f(0,1,0) = (-51, 17, -17)$ sledi da je $\Big((-36, 13, -11), (-51, 17, -17)\Big)$ baza prostora V, pa je $V = \{\alpha(-36, 13, -11) + \beta(-51, 17, -17) \;\Big|\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ tj. $\vec{r} = \alpha(-36, 13, -11) + \beta(-51, 17, -17)$ je tražena jednačina ravni V.

12. Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearna transformacija za koju važi da je $f(e_1) = f(1,0) = (a,c)$ i $f(e_2) = f(0,1) = (b,d)$. **a)** Naći $f(3,-5)$ **b)** Napisati $f(x,y)$ u zavisnosti od x, y, a, b, c, d. **c)** Napisati matricu A linearne transformacije f i matricu A^{-1} ukoliko postoji. **d)** Da li je f izomorfizam?
e) Odrediti (α, β) za koji je $f(\alpha, \beta) = (2, -1)$ u zavisnosti od parametara a, b, c i d (diskusija!).
Rešenje. a) $f(3,-5) = f(3e_1 - 5e_2) = 3f(e_1) - 5f(e_2) = 3(a,c) - 5(b,d) = (3a - 5b, 3c - 5d)$.
b) Analogno je $f(x,y) = (xa + yb, xc + yd) = A \cdot [x\ y]^\top$ **c)** $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ je matrica linearne transformacije f. Matrica A^{-1} postoji akko je $\det(A) = ad - bc \neq 0$, i tada je $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. **d)** Funkcija f je izomorfizam akko postoji A^{-1}, tj. akko $ad \neq bc$. **e)** Ako je $ad \neq bc$, tada je $f(\alpha, \beta) = (2, -1) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow A \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} 2d + b \\ -2c - a \end{bmatrix}$ tj. $\alpha = \frac{2d+b}{ad-bc}$ i $\beta = \frac{-2c-a}{ad-bc}$.

13. Neka su ravan α i prava ℓ određene sa njihovim jednačinama $\alpha : 2x + 3y - 3z = 0$ i $\ell : \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-1}$.
a) U zavisnosti od koordinata tačke $P(u,v,w)$ izraziti koordinate tačaka S i P', ako je PP' paralelno sa pravom ℓ, a sredina S duži PP' pripada ravni α.
b) Dokazati da funkcije $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ koje koordinate tačke P preslikavaju redom u koordinate tačaka S i P', jesu linearne transformacije i naći matrice A i B tih linearnih transformacija f i g.
c) Napisati matrice $A^2, A^{2000}, B^2, B, B^{2000}, A(B - I)$ u obliku $\alpha I + \beta A$ za neke realne brojeve α, β tj. kao linearne kombinacije jedinične matrice I i matrice A.
d) Da li će rezultati pod c) uvek biti isti, bez obzira na različite izbore ravni α i prave ℓ za koje važi da je $\alpha \cap \ell = \{O(0,0,0)\}$.
Rešenje. a) Neka je $n \parallel \ell$ i prava n i prolazi kroz tačku $P(u,v,w)$, tada je $n : \dfrac{x-u}{1} = \dfrac{y-v}{-2} = \dfrac{z-w}{-1} = t$. Izračunajmo sada prodornu tačku S prave n kroz ravan α. Uvrštavanjem parametarskih jednačina prave $n :\ x = t + u,\ y = -2t + v$ i $z = -t + w$ u jednačinu ravni α daje $t = 2u + 3v - 3w$, što vraćanjem u parametarske jednačine prave n daje traženu tačku $S(3u + 3v - 3w, -4u - 5v + 6w, -2u - 3v + 4w)$, pa je $f(u,v,w) = (3u + 3v - 3w, -4u - 5v + 6w, -2u - 3v + 4w)$. Koordinate tačke P' dobijamo iz formule za sredinu S duži PP' tj. iz $\vec{r}_{P'} = 2\vec{r}_S - \vec{r}_P$. Tako dobijamo $P'(5u + 6v - 6w, -8u - 11v + 12w, -4u - 6v + 7w)$, pa je $g(u,v,w) = (5u + 6v - 6w, -8u - 11v + 12w, -4u - 6v + 7w)$.
b) Kako su koordinate tačaka S i P' linearne funkcije promenljivih u, v i w bez slobodnih članova, to su f i g linearne transformacije. Odavde je očevidno

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -4 & -5 & 6 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -6 \\ -8 & -11 & 12 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix} \ \textit{ili}\ A = I - \frac{an^\top}{n^\top a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \end{bmatrix},$$

a $B = 2A - I$. Vidi u knjizi R.D. od 2011-te godine 16.11, 16.18, 16.19.
c) $A^2 = A,\ A^{2000} = A,\ B^2 = I,\ B = 2A - I\ B^{2000} = I$ i $A(B - I) = 0$.
Kako je funkcija f „kosa projekcija"to je ona očevidno idempotentna tj. $f \circ f = f$, a kako je funkcija g „kosa simetrija"to je ona očevidno involutorna tj. $g \circ g = i_d$ (i_d je identička funkcija).
d) Kako je f idempotentna i g involutorna za bilo koju pravu ℓ i ravan α koje prolaze kroz koordinatni početak, to sledi da je odgovor pod c) uvek isti.