1.3.3 Princip uključenja-isključenja

U ovom delu ponovo se vraćamo na algebru skupova. Kada smo uvodili princip zbira, posmatrali smo samo disjunktne skupove. Sada ćemo posmatrati prozivoljne skupove i, kao i do sada, krenućemo od slučaja dva skupa.

Lemma 51 *Za proizvoljne skupove A i B važi*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Dokaz. Skupovi $A \cap B$ i $A \setminus B$ (kao i parovi $A \cap B$, $B \setminus A$ i $A \setminus B$, $B \setminus A$) su disjunktni. To se može dokazati korišćenjem definicija skupovnih operacija, a takođe i sledeće jednakosti:

$$\begin{aligned} A &= (A \cap B) \cup (A \setminus B) \\ B &= (A \cap B) \cup (B \setminus A) \\ A \cup B &= (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) \end{aligned}$$

Sada na osnovu principa zbira možemo zaključiti da važe sledeće jednakosti:

$$\begin{aligned} |A| &= |(A \cap B) \cup (A \setminus B)| = |A \cap B| + |A \setminus B| \\ |B| &= |(A \cap B) \cup (B \setminus A)| = |A \cap B| + |B \setminus A| \\ |A \cup B| &= |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A| \end{aligned}$$

odakle je

$$|A| + |B| = |A \cap B| + |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A| = |A \cap B| + |A \cup B|$$

□

Zadatak 52 *Pretpostavimo da je u istom danu organizovan kolokvijum iz Diskretne matematike i kolokvijum iz Analize. Ako u grupi od 160 studenata, 93 studenta polažu Diskretnu matematiku, a 98 Analizu, koliko studenata će izaći na oba kolokvijuma?*

Rešenje. Označimo sa A skup studenata koji polažu kolokvijum iz Diskretne matematike, a sa B skup studenata koji polažu kolokvijum iz Analize. Tada je, na osnovu principa uključenja-isključenja

$$\begin{aligned} |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| &\Leftrightarrow 160 = 93 + 98 - |A \cap B| \\ &\Leftrightarrow |A \cap B| = 93 + 98 - 160 \Leftrightarrow |A \cap B| = 31. \end{aligned}$$

U nastavku ćemo posmatrati tri proizvoljna skupa. Dokaz sledeće leme ujedno ilustruje i induktivni korak dokaza principa uključenja-isključenja za proizvoljan broj skupova.

Lemma 53 *Za proizvoljne skupove A, B i C važi*

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Dokaz. Ako dva puta primenimo Lemu 51, dobijamo

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

Zadatak 54 *Odrediti broj nenegativnih celih brojeva manjih od 10000 koji sadrže cifre 2,4 i 8.*

Rešenje. Neka je A skup svih nenegativnih celih brojeva manjih od 10000. Tada je $|A| = 10000$. Neka je A_2 skup svih nenegativnih celih brojeva koji ne sadrže cifru 2, A_4 skup svih nenegativnih celih brojeva koji ne sadrže cifru 4 i A_8 skup svih nenegativnih celih brojeva koji ne sadrže cifru 8. Označimo sa B_2 skup svih nenegativnih celih brojeva koji sadrže cifru 2, B_4 skup svih nenegativnih celih brojeva koji sadrže cifru 4 i B_8 skup svih nenegativnih celih brojeva koji sadrže cifru 8. Tada je skup svih nenegativnih celih brojeva koji sadrže 2,4 i 8 ($B_2 \cap B_4 \cap B_8$) dobijamo kada od skupa svih nenegativnih celih brojeva manjih od 10000 (A), oduzmemo skup svih nenegativnih celih brojeva koji ne sadrže 2, 4 ili 8 ($A_2 \cup A_4 \cup A_8$), tj.

$B_2 \cap B_4 \cap B_8 = A \setminus (A_2 \cup A_4 \cup A_8)$ i odatle $|B_2 \cap B_4 \cap B_8| = |A| - |A_2 \cup A_4 \cup A_8|$.

Na osnovu principa uključenja isključenja, dobijamo

$$\begin{aligned} |A_2 \cup A_4 \cup A_8| &= |A_2| + |A_4| + |A_8| - |A_2 \cap A_4| - |A_2 \cap A_8| \\ &\quad -|A_4 \cap A_8| + |A_2 \cap A_4 \cap A_8| \\ &= 9^5 + 9^5 + 9^5 - 8^5 - 8^5 - 8^5 + 7^5 \\ &= 95650. \end{aligned}$$

Odatle je

$$|B_2 \cap B_4 \cap B_8| = 10000 - 95650 = 4350.$$

Teorema 55 *Neka je $n \geq 2$.*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

Dokaz. Indukcijom po n.
Baza: Za $n = 2$ tvrđenje sledi na osnovu Leme 51.
Induktivni korak: Primenom Leme 51 i induktivne pretpostavke dobijamo

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| &= \left|A_1 \cup \bigcup_{i=2}^{n} A_i\right| = |A_1| + \left|\bigcup_{i=2}^{n} A_i\right| - \left|\bigcup_{i=2}^{n}(A_1 \cap A_i)\right| \\
&= |A_1| + \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| \\
&\quad - \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} (A_1 \cap A_i)\right| \\
&= \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.
\end{aligned}$$

Koristeći princip uključenja isključenja možemo odrediti broj sirjktivnih preslikavanja skupa od m elemenata na skup od n elemenata.

Teorema 56 *Neka su A i B skupovi sa osobinom $|A| = m$, $|B| = n$ i $1 \leq n \leq m$. Broj sirjektivnih preslikavanja skupa A u skup B jednak je*

$$n^m - n(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}.$$

Dokaz.

Neka je $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Preslikavanje $f : A \to B$ koje nije "na" ima osobinu da postoji element skupa B koji nije u skupu slika elemenata iz skupa A, tj. f pripada jednom od sledećih skupova:

$$\begin{aligned}
B_1 &= \{f : A \to B \setminus \{b_1\}\} \\
B_2 &= \{f : A \to B \setminus \{b_2\}\} \\
&\cdots\cdots \\
B_n &= \{f : A \to B \setminus \{b_n\}\}.
\end{aligned}$$

Skup svih preslikavanja skupa A u skup B možemo razdeliti na skup svih preslikavanja koja su "na" i skup svih preslikavanja koja nisu "na". Tada je

$$\begin{aligned}
&\{f : A \to B\} = \{f : A \to B : f \text{ je "na" }\} \cup \{f : A \to B : f \text{ nije "na" }\} \\
\Leftrightarrow &\{f : A \to B\} = \{f : A \to B : f \text{ je "na" }\} \cup B_1 \cup \ldots \cup B_n
\end{aligned}$$

i na osnovu principa zbira

$$|\{f : A \to B\}| = \{f : A \to B : f \text{ je "na" }\}| + |B_1 \cup \ldots \cup B_n|.$$

Na osnovu principa uključenja isključenja sledi

$$\begin{aligned}|B_1 \cup \ldots \cup B_n| =& |B_1| + \ldots + |B_n| - |B_1 \cap B_2| - \ldots |B_{n-1} \cap B_n| + \ldots \\ &+ (-1)^{n-1}|B_1 \cap \ldots \cap B_n\}| \\ =&(n-1)^m + \ldots + (n-1)^m - (n-2)^m + \ldots + (n-2)^m + \ldots \\ &+ (-1)^{n-2} \\ =&n(n-1)^m - \binom{n}{2}(n-1)^m + \ldots + (-1)^{n-2}.\end{aligned}$$

Kako je broj preslikavanja skupa A u skup B jednak n^m, dobijamo

$$\begin{aligned}\{f : A \to B : f \text{ je "na" }\}| =& |\{f : A \to B\}| - |B_1 \cup \ldots \cup B_n| \\ =& n^m - n(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-1)^m - \ldots (-1)^{n-1}.\end{aligned}$$

1.3.4 Stirlingovi brojevi druge vrste

U ovom delu ćemo se baviti prebrojavanjem još jedne vrste kombinatornih objekata koje do sada nismo razmatrali. Problem je odrediti broj načina da se m različitih objekata rasporedi u n jednakih kutija, tako da nijedna kutija ne bude prazna.

Definicija 57 *Broj načina da se skup od m elemenata podeli na n nepraznih (po parovima) disjunktnih podskupova, u oznaci $S(m,n)$, naziva se Stirlingov broj druge vrste.*

Stirlingove brojeve druge vrste možemo odrediti koristći obrazac za broj sirjektivnih preslikavanja.

Teorema 58 *Neka je $0 < n \leq m$. Tada je*

$$S(m,n) = \frac{1}{n!}|\{f : A \to B : f \text{ je "na" }\}.$$

Dokaz. Ako je m elemenata raspoređeno u n jednakih (nepraznih) kutija, onda bismo te kutije mogli da označimo na $n!$ različitih načna. Svako označavanje odgovara jednom bijektivnom preslikavanju skupa elemenata na skup oznaka kutija. Tako je

$$n! \cdot S(m,n) = |\{f : A \to B : f \text{ je "na" preslikavanje }\}| \text{ tj.}$$

$$S(m,n) = \frac{1}{n!}|\{f : A \to B : f \text{ je "na" preslikavanje }\}|.$$

Prethodna formula nije od praktičnog značaja. Stirlingove brojeve druge vrste jednostavnije je izračunati koristeći osobine date u sledećem tvrđenju.

Teorema 59 *Neka su m i n celi brojevi sa osobinom $0 < n \leq m$. Tada je*

(i) $S(m,m) = 1$,

(ii) $S(m,1) = 1$,

(iii) $S(m,n) = S(m-1,n-1) + nS(m-1,n)$, $0 < n < m$.

Dokaz.

(i) Ako posmatramo skup $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, onda je jedino moguće razbijanje tog skupa na m nepraznih podskupova oblika $\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_m\}$.

(ii) *Ako posmatramo skup* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, *onda je jedino moguće razbijanje tog skupa na* 1 *neprazan podskup oblika* $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.

(iii) *Posmatrajmo skup* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ *i fiksirajmo* a_1. *Pretpostavimo da je skup* A *razbijen na podskupove* $B_1, \ldots, B_n$. *Imamo dve opcije:*

- *ako je* a_1 *jedini element nekog podskupa, onda je broj takvih razbijanja jednak broju razbijanja skupa* $A \setminus \{a_1\}$ *na* $n-1$ *podskupova. Takvih razbijanja ima* $S(m-1, n-1)$.
- *ako podskup koji sadrži* a_1 *sadrži bar još jedan element. U ovom slučaju, broj načina da razbijemo preostalih* $m-1$ *elemenata na* n *skupova jednak je* $S(m-1, n)$ *i za svako takvo razbijanje imamo* n *različitih načina da izaberemo podskup kojem ćemo dodati element* a_1. *Znači, broj takvih razbijanja jednak je* $nS(m-1, n)$.

Koristeći osobine iz prethodnog tvrđenja, možemo formirati tablicu Stirlingovih brojeva druge vrste.

(m, n)	0	1	2	3	4	5	6	$\ldots$
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	1	3	1				
4	0	1	7	6	1			
5	0	1	15	25	10	1		
6	0	1	31	90	65	15	1	
$\ldots$								$\ldots$