Matrice

Definicija 1 *Matrica tipa mn nad poljem F je funkcija*

$$M_{mn} : \{(i,j) | i \in \{1,2,...,m\}, j \in \{1,2,...,n\}\} \to F.$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n}$$

Matrice $A_{m\times n}$ i $B_{p\times q}$ su jednake akko $a_{ij} = b_{ij} \;\wedge\; m = p \;\wedge\; n = q$.

Nula matrica $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Jedinična matrica $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Operacije sa matricama

1. $[a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$
2. $\alpha[a_{ij}]_{m\times n} = [\alpha \cdot a_{ij}]_{m\times n}$
3. $A_{m\times k} \cdot B_{k\times n} = C_{m\times n}$

Primer 1 *a)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

b) $2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{bmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} ax+by+cz & au+bv+cw \\ dx+ey+fz & du+ev+fw \end{bmatrix}_{2\times 2}$

▲

Množenje matrica nije komutativna operacija $AB \neq BA$.
Podmatrice matrice $M_{m\times n}$ dobijamo izbacivanjem nekih njenih vrsta i kolona.
Minor reda r matrice $M_{m\times n}$ je determinanta neke njene kvadratne podmatrice reda r.

Rang matrice

1) Ako je $A = O \;\Rightarrow\; rang(A) = 0$.
2) Ako je $A \neq O \;\Rightarrow\; rang(A) = r$ ako postoji minor reda $r \neq 0$, a svi minori reda većeg od r su jednaki nuli.

Rang matrice je najveći red minora koji je različit od nule. Rang matrice je broj linearno nezavisnih vrsta ili kolona.

Ekvivalentne transformacije

1) Zamena mesta vrsta (kolona).

2) Množenje elemenata vrste (kolone) skalarom različitim od nule.

3) Dodavanje elemenata vrste (kolone) elementima druge vrste (kolone).

Ekvivalentnim transformacijama se ne menja rang matrice.

Determinanta matrice je jednaka nuli ako su vektori kolona linearno zavisni. Ako je $\det A = 0$ onda je $rang(A)$ manji od reda matrice A.
Rang matrice je dimenzija vektorskog prostora generisanog vrstama ili kolonama.

Primer 2 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{r} \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ 4\alpha + 5\beta + 7\gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta + 4\gamma = 0 \\ \hline \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ \beta - 5\gamma = 0 \\ -3\beta + \gamma = 0 \\ \hline \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ \beta - 5\gamma = 0 \\ -14\gamma = 0 \\ \hline \end{array}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$$

Pošto je sistem jednačina određen zaključujemo da su vektori kolone linearno nezavisni ⇒ rang matrice je 3 ⇒ dimenzija vektorskog prostora generisanog kolonama matrice je 3.

dimenzija prostora = red matrice - stepen neodređenosti sistema ▲

$$adjA = [A_{ij}]^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}^T$$

A_{ij} kofaktori

$[A_{ij}]$ - kofaktor matrica

Kofaktor matrica matrice A se dobija kada se svaki element matrice A zameni odgovarajućim kofaktorom $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

Minor M_{ij} je determinanta podmatrice dobijene brisanjem i-te vrste i j-te kolone.

Transponovana matrica matrice A, u oznaci A^T, se dobija tako što vrste matrice A postaju kolone matrice A^T sa istim rednim brojem.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Inverzna matrica

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adjA$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Zadatak 1 *Pomnožiti matrice:*

a) $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Zadatak 2 *Izračunati inverzne matrice:*

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ $\qquad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & -1 & -8 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ Pošto je $\det B = 0$ zaključujemo da matrica B nema svoju inverznu.

c) $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ $\qquad \det C = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -23$

$$C^{-1} = \frac{1}{-23} \begin{bmatrix} -3 & 5 & -2 \\ -5 & -7 & -11 \\ -4 & -1 & 5 \end{bmatrix}^T = -\frac{1}{23} \begin{bmatrix} -3 & -5 & -4 \\ 5 & -7 & -1 \\ -2 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\qquad \det D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$

$$D^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Napomena: Pri traženju adjugovane matrice formata 2×2 elementi na glavnoj dijagonali zamene mesta, a elementi na sporednoj promene znak.

Zadatak 3 *Izračunati rang sledećih matrica:*

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4&2\\-1&1&-1&-2&3\\0&3&2&2&5\\1&3&-1&-1&2\end{bmatrix}\overset{[1]}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&3&4&2\\0&3&2&2&5\\0&3&2&2&5\\0&1&-4&-5&0\end{bmatrix}\overset{[2]}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&3&4&2\\0&1&-4&-5&0\\0&0&14&17&5\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\ \text{rangA=3}$$

[1] - prva vrsta se dodaje drugoj i pomnožena sa -1 se dodaje četvrtoj vrsti;

[2] - četvrta vrsta pomnožena sa -3 se dodaje trećoj vrsti, treća vrsta pomnožena sa -1 se dodaje drugoj vrsti i četvrta i druga vrsta menjaju mesta;

$$B=\begin{bmatrix}-2&1&-1\\-4&2&-2\\2&-1&1\end{bmatrix}\ \text{svake dve vrste su linearno zavisne}\ \Rightarrow\ \text{rangB=1}$$

$$C=\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&3&1&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}\overset{[1]}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&3&0&1\\0&0&2&0\end{bmatrix}\Rightarrow\ \text{rangC=3}$$

[1] - treća i četvrta kolona menjaju mesta;

$$D=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&1\end{bmatrix}\ \text{dve vrste su linearno nezavisne}\ \Rightarrow\ \text{rangD=2}$$

$$E=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&0\\2&0&2\end{bmatrix}\ \text{prva i treća kolona jednake, a nezavisne sa drugom}\ \Rightarrow\ \text{rangE=2}$$

$$F=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}\ \text{jedna nenula kolona}\ \Rightarrow\ \text{rangF=1}$$

$$G=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\ \text{dve nezavisne kolone}\ \Rightarrow\ \text{rangG=2}$$

$$H=\begin{bmatrix}1&0&2\\\frac{1}{2}&0&1\end{bmatrix}\ \text{dve linearno zavisne vrste}\ \Rightarrow\ \text{rangH=1}$$

$$M=\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&3&1&0\\0&0&2&2\end{bmatrix}\Rightarrow\ \text{rangM=3}$$

$$N=\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&3&1&0\\-2&0&2&2\end{bmatrix}\overset{[1]}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&3&1&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}\overset{[2]}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&3&0&1\\0&0&2&0\end{bmatrix}\Rightarrow\ \text{rangN=3}$$

[1] - prva vrsta pomnožena sa 2 se dodaje trećoj vrsti;

[2] - treća i četvrta kolona menjaju mesta.

Zadatak 4 *Odrediti rang matrice A.*

$$A=\begin{bmatrix} p & r & r & q \\ r & p & q & r \\ r & q & p & r \\ q & r & r & p \end{bmatrix} \overset{[1]}{\sim} \begin{bmatrix} p-q & r & r & q \\ 0 & p & q & r \\ 0 & q & p & r \\ q-p & r & r & p \end{bmatrix} \overset{[2]}{\sim} \begin{bmatrix} p-q & r & r & q \\ 0 & p & q & r \\ 0 & q & p & r \\ 0 & 2r & 2r & p+q \end{bmatrix} \overset{[3]}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} p-q & 0 & r & q \\ 0 & p-q & q & r \\ 0 & q-p & p & r \\ 0 & 0 & 2r & p+q \end{bmatrix} \overset{[4]}{\sim} \begin{bmatrix} p-q & 0 & r & q \\ 0 & p-q & q & r \\ 0 & 0 & p+q & 2r \\ 0 & 0 & 2r & p+q \end{bmatrix} \overset{[5]}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} p-q & 0 & r & q \\ 0 & p-q & q & r \\ 0 & 0 & p+q & 2r \\ 0 & 0 & p+q+2r & p+q+2r \end{bmatrix} \overset{[6]}{\sim} \begin{bmatrix} p-q & 0 & r-q & q \\ 0 & p-q & q-r & r \\ 0 & 0 & p+q-2r & 2r \\ 0 & 0 & 0 & p+q+2r \end{bmatrix},$$

pri čemu smo primenjivali sledeće transformacije:

[1] - četvrta kolona pomnožena sa -1 se dodaje prvoj koloni;

[2] - prva vrsta se dodaje četvrtoj vrsti;

[3] - treća kolona pomnožena sa -1 se dodaje drugoj koloni;

[4] - druga vrsta se dodaje trećoj vrsti;

[5] - treća vrsta se dodaje četvrtoj vrsti;

[6] - četvrta kolona pomnožena sa -1 se dodaje trećoj koloni.

a) $(p,q,r)=(0,0,0) \;\Rightarrow\; rangA=0$

b) $(p,q,r)=(1,1,1) \;\Rightarrow\; rangA=1$

c) $(p,q,r)=(1,1,-1) \;\Rightarrow\; rangA=1$

d) $(p,q,r)=(1,1,2) \;\Rightarrow\; rangA=2$

e) $(p,q,r)=(1,-1,0) \;\Rightarrow\; rangA=2$

f) $(p,q,r)=(1,3,2) \;\Rightarrow\; rangA=3$

g) $(p,q,r)=(1,-3,1) \;\Rightarrow\; rangA=3$

h) $(p,q,r)=(1,2,1) \;\Rightarrow\; rangA=4$