2.19. Предтакмичење на фудбалском турниру се одвија у m група ($m > 1$), при чему је свака група састављена од $2k$ екипа ($k > 1$). У групама екипе играју свака са сваком и прве две екипе из сваке групе пролазе у завршну фазу турнира. У завршној фази екипе такође играју свака са сваком, с тим што екипе које су се већ састајале у предтакмичењу не играју нову утакмицу. Колико је укупно утакмица одиграно на овом фудбалском турниру?

$\binom{2k}{2}$ у свакој групи

$m\binom{2k}{2}$ у I фази

$\underbrace{\binom{2m}{2} - m}_{\text{II фази}}$

$m\binom{2k}{2} + \binom{2m}{2} - m$

2.34. На полици се налази 12 књига. На колико начина је могуће изабрати 5 књига тако да никоје две међу изабраним књигама нису стајале једна до друге на полици?

n нула

k јединица

$$\binom{n-1+2}{k} = \binom{n+1}{k}$$

5 књига које бирамо → јединице из нула

12 − 5 = 7 књига → нуле

$$\binom{8}{5}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

$$x_i \geq 1 \Rightarrow y_i = x_i - 1 \geq 0$$

3.19. Доказати да важи $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = (n^2+n)2^{n-2}$.

Решење:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} = n\sum_{k=1}^{n} k \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\sum_{k=1}^{n} k\binom{n-1}{k-1} \quad / \ \ast$$

Увођењем смене $i = k-1$ претходна сума постаје $n\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)\binom{n-1}{i}$.

Даље добијамо

$$\begin{aligned} n\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)\binom{n-1}{i} &= n\left(\sum_{i=0}^{n-1} i\binom{n-1}{i} + \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\right) \\ &= n((n-1)2^{n-2} + 2^{n-1}) \\ &= (n^2+n)2^{n-2}. \end{aligned}$$

$$\ast \quad n\sum_{k=1}^{n}(k-1+1)\binom{n-1}{k-1} = n\left(\sum_{k=1}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=2}^{n}\cancel{(k-1)}\frac{(n-1)!}{\cancel{(k-1)!}\,(n-1-k+1)!} \qquad (k-2)!$$

4. Izračunati

$$\sum_{n=1}^{2021} \binom{2021}{n} (-1)^n = \sum_{n=0}^{2021} \binom{2021}{n} (-1)^n - \binom{2021}{0} (-1)^0 =$$

$$\sum_{n=0}^{2021} \binom{2021}{n} (-1)^n \cdot 1^{2021-n} - 1 = (1-1)^{2021} - 1 = -1$$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30$, $x_i \geq 0$

c) $x_1 \leq 5$

d) $x_1 < 8$; $x_2 > 8$

c) $x_1 = 0$ $\quad x_1 = 1$ $\quad \ldots \quad x_1 = 5$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

II način: $S_1 : x_1 \geqslant 6$

$N(S_1') = N - N(S_1)$

d) $x_1 < 8$, $\underbrace{x_2 > 8}$

$x_2 \geqslant 9$

$y_2 = x_2 - 9 \geqslant 0$

$x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30 - 9 = 21$

$x_1 < 8 \iff x_1 \leq 7$

2.22. Колико има начина да се на две полице размести 15 књига ако на свакој полици треба да буду бар три књиге?

1: k 2: $15-k$

$k \in \{3, 4, 5, \ldots, 12\}$

$12-3+1=10$

$\binom{15}{k} k! \, (15-k)! = \frac{15!}{\cancel{k!} \, \cancel{(15-k)!}} \cancel{k!} \, \cancel{(15-k)!} = 15!$

$\longrightarrow 10 \cdot 15!$

12 асистената $\to$ 4 амфитеатра у сваки по 3

$$\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3} \quad ?$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array}$$