

1.

a) Ispitati monotonost i ograničenost niza $\{a_n\}$ datog sa

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{7a_n + 20}{a_n + 6}, n \in \mathbb{N}.$$

Da li je dati niz konvergentan? Odrediti njegovu graničnu vrednost ukoliko ona postoji.

b) Odrediti graničnu vrednost $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - \sqrt[3]{x^3 + x + 34}}{x^2 - 4x + 3}$.

2.

a) Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije

$$f(x) = \operatorname{arctg} e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}}.$$

b) Da li jednačina $\frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1} = 2 \left(\operatorname{arctg} \sqrt{e} + \ln \sqrt{\frac{e+1}{2e}} - \frac{\pi}{4} \right)$ ima rešenje na intervalu $\left(0, \frac{1}{2}\right)$?

Odgovor obrazložiti.

3.

a) Proveriti da li funkcija $u(x, y) = 3x^2y - x^3 - y^4$ ima ekstremnu vrednost u tačkama $A(6, 3)$ i $B(1, 2)$.

b) Proveriti da li funkcija $u(x, y) = xy^2z^3$ ima ekstremnu vrednost u tački $C(1, 1, 1)$ pod uslovom $x + 2y + 3z = 6$, gde su $x > 0, y > 0, z > 0$.

4.

a) Pomoću određenog integrala odrediti graničnu vrednost niza $\{b_n\}$ sa opštim članom

$$b_n = \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + 3 \sin \frac{3}{n} \dots + n \sin 1 \right).$$

b) Izračunati $\int \left(\frac{1}{\sin 2x + \cos x} + \frac{1}{(1+x)^3 \sqrt{1+2x-x^2}} \right) dx$.

5. a) Odrediti ono partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$y - xy' = a(1 + x^2y')$$

koje zadovoljava uslov $y(1) = 1$.

b) Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$(x-1)^2 y'' - (x-1)y' + 2y = (x-1)^3 \ln \frac{1}{1-x}, x < 1.$$