20. Neka je niz $\{a_n\}$ definisan na sledeći način $a_{n+1}=\frac{c}{2}+\frac{a_n^{\ 2}}{2}$, $a_1=\frac{c}{2}$, $c\in R^+$. Pokazati da je niz monotono rastući. Dokazati da je niz konvergentan ako i samo ako $c\in(0,1]$ i naći njegovu graničnu vrednost.

Pokazaćemo da je niz $\{a_n\}$ monotono rastući matematičkom indukcijom po $n\in N$.

Za $n=1$ treba pokazati da je $a_2-a_1>0$.

$$a_2=\frac{c}{2}+\frac{a_1^2}{2}=\frac{c}{2}+\frac{c^2}{8}$$

$$a_2-a_1=\frac{c}{2}+\frac{c^2}{8}-\frac{c}{2}=\frac{c^2}{8}>0$$

Za $n=k$ pretpostavimo da važi $a_k-a_{k-1}>0$.

Za $n=k+1$ treba pokazati da je $a_{k+1}-a_k>0$.

$$a_{k+1}-a_k=\frac{c}{2}+\frac{a_k^2}{2}-(\frac{c}{2}+\frac{a_{k-1}^2}{2})=\frac{a_k^2-a_{k-1}^2}{2}=\frac{(a_k-a_{k-1})(a_k+a_{k-1})}{2}>0$$

zbog pretpostavke i zbog $a_n>0$ za svako $n\in N$.

Na osnovu principa matematičke indukcije možemo tvrditi da je niz $\{a_n\}$ monotono rastući $\Rightarrow$ $a_1\le a_n$ za svako $n\in N$.

1) Niz je konvergentan $(\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A)$ $\Rightarrow$ $c\in(0,1]$

Iz $a_{n+1}=\frac{c}{2}+\frac{a_n^2}{2}$ sledi:

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\frac{c}{2}+\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}a_n^2 \Leftrightarrow A=\frac{c}{2}+\frac{A^2}{2}\Leftrightarrow A^2-2A+c=0.$$

Rešenja kvadratne jednačine su: $A_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4c}}{2}=1\pm\sqrt{1-c}$. Da bi ova rešenja bila realna mora važiti: $1-c\ge 0\Rightarrow c\le 1$ i $c\in R^+$ $\Rightarrow$ $c\in(0,1]$

2) $c\in(0,1]$ $\Rightarrow$ niz je konvergentan

Pokažimo da je niz $\{a_n\}$ ograničen sa gornje strane matematičkom indukcijom po n (brojem 1).

Za $n=1$ treba pokazati da je $a_1<1$.

$$a_1=\frac{c}{2}\le\frac{1}{2}<1$$

Za $n = k$ pretpostavimo da važi $a_k < 1$.

Za $n = k + 1$ treba pokazati da je $a_{k+1} < 1$.

$$a_{k+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_k^2}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{a_k^2}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Na osnovu principa matematičke indukcije možemo tvrditi da je $a_n < 1$, za svako $n \in N$.

Pošto je niz $\{a_n\}$ monoton i ograničen $\Rightarrow$ niz $\{a_n\}$ je konvergentan, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Moguće granične vrednosti su: $A_1 = 1 + \sqrt{1-c} \geq 1$ i $A_2 = 1 - \sqrt{1-c} \leq 1$.

Pošto je $a_n < 1$ za svako $n \in N$ $\Rightarrow$ $A \leq 1$ $\Rightarrow$ $A = 1 - \sqrt{1-c}$.

KOŠIJEVI NIZOVI

Za niz $\{a_n\}$ kažemo da je Košijev ako

$$(\forall \varepsilon \in R^+)(\exists n_0 \in N)(\forall m, n \in N)(n \geq n_0 \wedge m \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon)$$

ili

$$(\forall \varepsilon \in R^+)(\exists n_0(\varepsilon) \in N)(\forall n \in N)(\forall p \in N)(n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon).$$

Teorema: Svaki konvergentan niz je Košijev.

Teorema: Svaki Košijev niz $\{a_n\}$ u metričkom prostoru (X, d) je ograničen u datom prostoru.

Teorema: U metričkom prostoru R važi: niz $\{a_n\}$ je Košijev ako i samo ako je konvergentan.

Teorema: R je kompletan metrički prostor.

Teorema: Metrički prostor (X, d) je kompletan ukoliko je u njemu svaki Košijev niz konvergentan.

1. Dati su Košijevi realni nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$.

a) Ako je $a_n \in R_1 = R \setminus \{1\}$, ispitati da li je niz $\{a_n\}$ konvergentan

i) u prostoru R

ii) u prostoru R_1 (Posmatrati niz $\{a_n\}$ dat sa $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.)

b) Da li je niz $\{a_n \cdot b_n\}$

i) konvergentan

ii) Košijev?

a)

i) Niz $\{a_n\}$ je Košijev $\Rightarrow$ Niz $\{a_n\}$ je konvergentan u prostoru R.

ii)

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < a_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1 \notin R_1$$

Niz $\{a_n\}$ u prostoru R_1 nije konvergentan.

b) Nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ su Košijevi $\Rightarrow$ Nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ su konvergentni u prostoru R ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$).

i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b \Rightarrow$ Niz $\{a_n \cdot b_n\}$ je konvergentan.

ii) Pošto je niz $\{a_n \cdot b_n\}$ konvergentan onda je i Košijev.

2. Dat je niz $\{a_n\}$ sa opštim članom $a_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$. Pokazati da je niz $\{a_n\}$ divergentan.

Pokazaćemo da niz $\{a_n\}$ nije Košijev iz čega će slediti divergencija.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in N)(\exists n \in N)(\exists p \in N)(n \geq n_0 \wedge |a_{n+p} - a_n| > \varepsilon)$$

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+p} - (1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}) \right| =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+p} > \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + ... + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p}$$

Biramo $p = n$ i dobijamo $\left| a_{2n} - a_n \right| > \dfrac{n}{n+n} = \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2} = \varepsilon$.

Pošto niz $\{a_n\}$ nije Košijev zaključujemo da nije ni konvergentan.

3. Dati su opšti članovi nizova

$$a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n} \qquad \text{i} \qquad b_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln n}.$$

Pomoću Košijevog kriterijuma pokazati da je niz:

a) $\{a_n\}$ konvergentan b) $\{b_n\}$ divergentan.

a) Pokazaćemo da je niz $\{a_n\}$ Košijev.

$$\left| a_{n+p} - a_n \right| = \left| \frac{\sin 1}{2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n} + \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} - \left(\frac{\sin 1}{2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}\right) \right| =$$

$$= \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right| \le \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} \right| + \left| \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} \right| + \ldots + \left| \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right| \le$$

$$\le \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} + \frac{1}{2^{n+p+1}} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^p} + \ldots\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon \Leftrightarrow 2^n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n \ln 2 > \ln\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2} \Rightarrow n_0 = \left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2} \right] + 1$$

Niz $\{a_n\}$ je Košijev $\Rightarrow$ Niz $\{a_n\}$ je konvergentan.

b) Pokazaćemo da niz $\{b_n\}$ nije Košijev.

$$\left| b_{n+p} - b_n \right| = \left| \frac{1}{\ln 2} + \ldots + \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{\ln(n+1)} + \ldots + \frac{1}{\ln(n+p)} - \left(\frac{1}{\ln 2} + \ldots + \frac{1}{\ln n}\right) \right| =$$

$$= \frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + \ldots + \frac{1}{\ln(n+p)} > \frac{1}{\ln(n+p)} + \frac{1}{\ln(n+p)} + \ldots + \frac{1}{\ln(n+p)} =$$

$$= \frac{p}{\ln(n+p)} > \frac{p}{n+p}$$

Biramo $p = n \Rightarrow \left| b_{n+p} - b_n \right| = \left| b_{2n} - b_n \right| > \dfrac{n}{n+n} = \dfrac{1}{2} = \varepsilon \Rightarrow$ Niz $\{ b_n \}$ nije Košijev

$\Rightarrow$ Niz $\{ b_n \}$ nije konvergentan.

4. Proveriti da li je niz $a_n = \dfrac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \dfrac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{\cos n!}{n(n+1)}$ Košijev.

$$\left| a_{n+p} - a_n \right| = \left| \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{\cos n!}{n(n+1)} + \frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)} - \left(\frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{\cos n!}{n(n+1)} \right) \right| =$$

$$\left| \frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)} + \frac{\cos(n+2)!}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)} \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)} \right| + \left| \frac{\cos(n+2)!}{(n+2)(n+3)} \right| + \ldots + \left| \frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} =$$

$$= \frac{n+2-(n+1)}{(n+1)(n+2)} + \frac{n+3-(n+2)}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{n+p+1-(n+p)}{(n+p)(n+p+1)} =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$$

$\Rightarrow$ Niz $\{ a_n \}$ je Košijev.