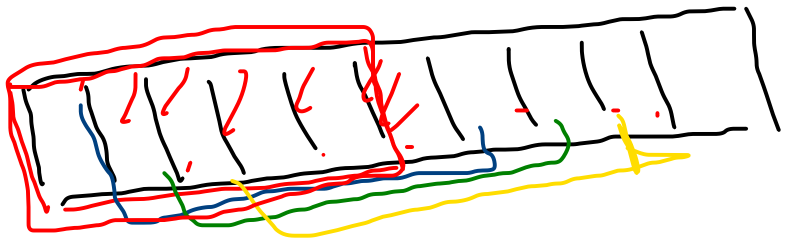

1, 2, 3, 4, 5, 6

$10 - 5 + 1 = 6$

$6 - 2 = 4$

2.68. У једном управном одбору са n чланова постоји председник и два потпредседника. На колико начина се чланови управног одбора могу разместити око округлог стола тако да оба потпредседника седе поред председника?

Решење: Посматрајмо председника и два потпредседника као блок од три елемента. Број начина да овај блок од три члана испермутујемо заједно са преосталим члановима управног одбора око округлог стола је $\frac{(n-3+1)!}{n-3+1} = (n-3)!$. Како у зависности од тога који потпредседник седи са леве, а који са десне стране потпредседника добијамо различите размештаје особа око округлог стола решење је $2 \cdot (n-3)!$.

3. Испит из Дискретне математике је у овом испитном року пријавило 142 студента. За распоређивање студената на испиту дежурни асистенти су добили четири амфитеатра. Одредити на колико начина асистенти могу распоредити студенте ако у првом амфитеатру има 56 места, другом 52, а у преостала два амфитеатра по 30 места. (Приликом распоређивања студената асистентима је битно само колико студената ће бити у ком амфитеатру, а не и који су где смештени.)

x_i - број студената у амф. A_i

$x_1+x_2+x_3+x_4=142$ $\quad N=\binom{142+4-1}{4-1}$

$0\le x_1\le 56$ $\quad S_1: x_1\ge 57$

$0\le x_2\le 52$ $\quad S_2: x_2\ge 53$

$0\le x_3\le 30$ $\quad S_3: x_3\ge 31$

$0\le x_4\le 30$ $\quad S_4: x_4\ge 31$

$N(S_1'S_2'S_3'S_4')=N-N(S_1)-N(S_2)-\dots$

y_i - број празних места

$y_1+y_2+y_3+y_4=26$ $\quad \binom{26+4-1}{4-1}$

2. Колико има петоцифрених природних бројева који имају тачно две парне цифре?

$\{0,2,4,6,8\}$ $\{1,3,5,7,9\}$

1° прва цифра непарна

$Н \underbrace{|\_\_\_\_|}$

$\binom{4}{2}$ начина да одаберемо где су парне цифре

2 парне + 3 непарне

$5^2 \cdot 5^3 \to 5^5$

$\to \binom{4}{2} 5^5$

$+$

2° прва цифра парна

2, 3, 4, 5

$П \underbrace{|\_\_\_\_|}$

$\to \binom{4}{1}$ бирамо позицију друге парне цифре

$\to$ 4 начина за одабир прве цифре

$\{2,4,6,8\}$ јер не може 0

3+1 цифра (3 непарне, 1 парна)

$5^3 \cdot 5^1 \to 5^4$

$\to 4 \cdot 4 \cdot 5^4$

укупно $n+2$

1° $1, 3, 5, 7, 9 \rightarrow a_{n+1}$

$\rightarrow 5 \cdot a_{n+1}$

b_n – непаран број парних цифара

бројеви!

2° $\cancel{0}, 2, 4, 6, 8$

$2\ \underbrace{\boxed{\qquad\qquad\qquad}}_{n+1}$ $\rightarrow$ непаран број парних цифара

$b_{n+1} = 9 \cdot 10^n - a_{n+1}$

$4 \cdot b_{n+1}$

$9 \cdot 10^{n+1} \leftarrow$ свих бројева са $n+2$ цифре

$a_{n+2} + b_{n+2} = 9 \cdot 10^{n+1}$

$\Rightarrow b_{n+2} = 9 \cdot 10^{n+1} - a_{n+2}$

$$\sum_{m=0}^{n} (m+1) \binom{n+1}{m+1} = (n+1)\, 2^n$$

$$\sum_{m=0}^{n} \cancel{(m+1)} \frac{(n+1)!}{\underbrace{\cancel{(m+1)}!}_{m!}\,(n+1-m-1)!} = \sum_{m=0}^{n} \frac{(n+1)!}{m!\,(n-m)!} = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \cdot (n+1)$$

$$(n+1) \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} = (n+1)\, 2^n$$

2M, 8E $\rightarrow$ 5 δοφ 1M

1° 1M 2° 2M

_ _ _

$\binom{2}{1}\binom{9}{4}$ X

1. Одредити број решења једначине

$$x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 10 \quad 50$$

у скупу ненегативних целих бројева.

$x_4 \in \{0,1,2,3\}$

$1^\circ \; x_4 = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 + 0 = 10$

$k \in \{0,1,2,3\}$

$x_1 + x_2 + x_3 = 10 - 3k$

$$\sum_{k=0}^{3} \binom{10-3k+2}{2}$$

$k \in \{0,1,\dots,16\}$

$x_1 + x_2 + x_3 + 3k = 50$

$x_1 + x_2 + x_3 = 50 - 3k$

$$\sum_{k=0}^{16} \binom{50-3k+2}{2}$$

1. Одредити максималан број правих које се могу конструисати кроз n задатих тачака од којих се p тачака налази на истој правој.

$\binom{n}{2}$ да су тачке биле у општем положају

$\binom{p}{2}$ → да нису све на истој правој

$\binom{n}{2} - \binom{p}{2} + 1$ ← права на којој је p тачака

II начин

- 1 → права са p тачака
- $n-p$ тачака које нису на правој $\binom{n-p}{2}$
- 1 тачка са праве и једна која није $\frac{p(n-p)}{2}$

$$1 + \binom{n-p}{2} + \frac{p(n-p)}{2}$$

2.45. Азбука садржи 5 самогласника (A, E, $И$, O, $У$) и 25 сугласника. Посматрају се речи дужине 8 над азбуком (без обзира на смисао) које садрже 3 самогласника, 5 сугласника и у којима нема понављања слова. Колико таквих речи почиње словом A и завршава се словом $Б$?

Решење: Како тражена реч треба да садржи укупно 3 самогласника и 5 сугласника, преостала 2 самогласника бирамо на $\binom{4}{2}$ начина, а преостале сугласнике на $\binom{24}{4}$ начина. Изабрали смо сва слова за реч и треба још испермутовати малопре изабрана слова на позиције од друге до седме, а то радимо на 6! начина. Укупан број тражених речи је сада $\displaystyle\binom{4}{2}\binom{24}{4}6!$.

4. Решити рекурентну релацију

$$f_n - 6f_{n-1} + 9f_{n-2} = 3, \; n \geq 2,$$

$3 \cdot 1^n$

ако је $f_0 = 1$ и $f_1 = 3$.

$t^2 - 6t + 9 = (t-3)^2$

$h_n = (A + nB)3^n$

$p_n = C \cdot 1^n = C$

$p_n = (A + n \cdot B) \cdot 1^n$

$p_n = C \cdot 1^n \cdot n^2$

$$\sum_{\substack{i+j+k=3\\ 0<i,j,k\leq 3}} \binom{3}{i,j,k} 2^i = \underbrace{\sum_{\substack{i+j+k=3\\ 0\leq i,j,k\leq 3}} \binom{3}{i,j,k} 2^i 1^j 1^k}_{(2+1+1)^3 = 4^3} -$$

$3 = 3+0$ X

$3 = 2+1+0$ X

$3 = 1+1+1$ ✓

$\cancel{i=0,\ j=0,\ k=3}$

$i=0,\ j=1,\ k=2$

$i=0,\ j=2,\ k=1$

$\cancel{i=0,\ j=3,\ k=0}$

$0, 1, 2$

$i=1,\ j=0,\ k=2$

$i=2,\ j=0,\ k=1$

$i=1,\ j=2,\ k=0$

$i=$

$$\sum_{0<i,j,k\leq 3} \binom{3}{i,j,k} 2^i = \underset{i=1,\, j=1,\, k=1}{\binom{3}{1,1,1} 2^1} = \frac{3!}{1!\,1!\,1!} \cdot 2 = 6 \cdot 2 = 12$$

3. Колико се различитих бројева може написати од цифара броја 12345413, ако никоје две исте цифре не стоје једна до друге?

$S_1 - 11$ $S_3 - 33$ $S_4 - 44$

$$\frac{8!}{2!2!2!}$$

$N(S_1'S_3'S_4')$

$\boxed{11}, 2, 3, 3, 4, 4, 5$

$N(S_1) = \frac{7!}{2!2!}$ - - -

$\boxed{} = 5\cdot 7^n + 2\cdot 3^n$

$n+3$

$\Rightarrow$ домножим 1 степени

$P_n = \cancel{A_1\cdot 7^n} + A_2\cdot 3^n$

$p_n = B_1\cdot 7^n$

$P_n = A\cdot n\cdot 1^n$

$P_n = A_1\cdot 7^n + \ldots$

$p_n = B_1\cdot 7^n\cdot n$

$P_n = (A_1 n^2 + A_2\cdot n + A_3)\cdot 1^n$

$P_n = A_1\cdot 7^n + A_2\cdot n\cdot 7^n$

$p_n = B_1\cdot 7^n\cdot n^2$

$P_n = \ldots A_1\cdot 3^n \ldots$

n^0 x $\quad n^1$ x $\quad \ldots + A_k\cdot n^{k-1}\cdot 7^n$

$p_n = B_1\cdot 7^n\cdot n^k$

1^n

$5 \Rightarrow 5\cdot 1^n$

$\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}\cdot 1^n$

$3\cdot 3^n \Rightarrow C\cdot 3^n\cdot n$

$3^{n-1} \Rightarrow \frac{3^n}{3} \Rightarrow C\cdot 3^n$