Statistika - primeri

SIIT / IIS

školska 2020/21

PRIMER 1 *Partitivni skup $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega)$ i $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega\}$ su σ-polja događaja nad Ω.*

Rešenje: Partitivni skup $\mathcal{F}_1$ sadrži <u>sve</u> podskupove skupa Ω, stoga su osobine (i), (ii), (iii) zadovoljene.

Familija $\mathcal{F}_2$ očigledno zadovoljava (i). Pošto je $\overline{\emptyset} = \Omega$ i $\overline{\Omega} = \emptyset$, zadovoljeno je (ii). Prebrojive unije elemenata mogu dati samo $\emptyset$ ili Ω, oba su u $\mathcal{F}_2$, (iii) je zadovoljeno.

PRIMER 2 *Za skup $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1,2\}, \{3,4,5,6\}\}$ je σ-polje događaja.*

<u>Rešenje:</u> Familija $\mathcal{F}$ očigledno zadovoljava (i). Pošto je $\overline{\emptyset} = \Omega$, $\overline{\Omega} = \emptyset$, $\overline{\{1,2\}} = \{3,4,5,6\}$, $\overline{\{3,4,5,6\}} = \{1,2\}$, zadovoljeno je (ii). Prebrojive unije elemenata mogu dati samo elemente $\mathcal{F}$, (iii) je zadovoljeno.

PRIMER 3 *Za skup $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ i $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1,2\}, \{3,4,5,6\}\}$, funkcija*

$$P = \begin{pmatrix} \emptyset & \Omega & \{1,2\} & \{3,4,5,6\} \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

je verovatnoća, odnosno, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je prostor verovatnoće.

Rešenje: Osobine 1. i 3. su očigledne. Zbog definicije verovatnoće i $0+1=1$, $1/3+2/3=1$, važi i 2.

PRIMER 4 *Neka je skup ishoda konačan:* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$*, i neka je* σ*-polje skup svih podskupova* $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$*.*

Neka je $p_k = P(\{\omega_k\}) \geq 0$*,* $k = 1, 2, \ldots, n$ *i* $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$*.*

Verovatnoća je definisana

$$P(A) = \sum_{k:\omega_k \in A} p_k.$$

Ovaj prostor zovemo ***diskretni prostor verovatnoće****.*

U ovom primeru bi samo trebalo pokazati osobinu 2. verovatnoće, jer su 1. i 3. očigledne. Osobina 2. sledi iz asocijativnosti i komutativnosti sabiranja.

PRIMER 5 *Ako u primeru 4 važi i* $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1/n$*, dobijamo* $P(A) = \#A/\#\Omega$*, to je* ***klasična definicija*** verovatnoće. *U klasičnoj definiciji verovatnoće se kaže da je verovatnoća* broj povoljnih podeljen sa brojem mogućih ishoda. *Klasična definicija verovatnoće se koristi kada imamo konačno mnogo jednako verovatnih ishoda, odnosno, kada se vrši slučajan izbor.*

Ovaj primer je samo specijalni slučaj definicije diskretnog prostora verovatnoće. U tekstualnim zadacima se koristi kada se vrši **slučajan izbor**.

PRIMER 6 *Neka je* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *Euklidski prostor.*

Neka je $\mathcal{F}$ *skup podskupova od* Ω *koji su merljivi merom* m *i neka je* $m(\Omega) > 0$.

Geometrijsku verovatnoću *za* $A \subseteq \Omega$ *definišemo:* $P(A) = m(A)/m(\Omega)$.

Onda je $(\Omega, \mathcal{F}, P(\cdot))$ *prostor verovatnoće.*

Zapravo je verovatnoća specijalni slučaj mere za koji važi osobina 3. Osobine 1. i 2. slede iz definicije mere, a osobina 3 je očigledna.

PRIMER 7 *Tri dečaka i tri devojčice sedaju na slučajan način u red sa 6 mesta. (Svi rasporedi sedenja su jednako verovatni.) Kolika je verovatnoća da nema dve osobe istog pola koje sede jedna do druge?*

Rešenje: povoljna sedenja su MŽMŽMŽ ili ŽMŽMŽM (M = dečak, Ž = devojčica). Dečake (M_M_M_) možemo rasporediti na $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina, isto devojčice (_Ž_Ž_Ž). Po principu proizvoda MŽMŽMŽ sedenja možemo napraviti na $3! \cdot 3!$ načina. Isto i ŽMŽMŽM sedenja.

Po principu zbira (imamo "ili", uniju) povoljnih sedenja ima $3!^2 + 3!^2 = 2 \cdot 3!^2$.

Mogućih sedenja ima 6!, tako da je tražena verovatnoća verovatnoća

$$P = \frac{2 \cdot 3!^2}{6!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{10}.$$

Primer 8 *Iz špila od 52 karte na slučajan način se izvlači jedna karta. Kolika je verovatnoća da je izvučena karta dama ili herc?*

Rešenje: Označimo događaje: $A =$ izvučena karta je dama (Q), $B =$ izvučena karta je herc ($\heartsuit$). Onda je AB događaj da je izvučena karta dama herc (Q$\heartsuit$).

Tražena verovatnoća je

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}.$$

Događaji A i B su nezavisni jer $P(A)P(B) = \frac{4}{52} \cdot \frac{13}{52} = \frac{1}{52} = P(AB)$.

Primer 9 *Novčić se baca tri puta. Bacanja su nazavisna. Izračunati verovatnoće p_k da će pasti k grbova za $k = 0,1,2,3$.*

Rešenje: $\Omega = \{GGG, GGP, GPG, GPP, PGG, PGP, PPG, PPP\}$.

Zbog nezavisnosti bacanja i jednake verovatnoće pisma (P) i grba (G), sledi da je u svakom bacanju verovatnoća grba i pisma jednaka $\frac{1}{2}$.

Zato je verovatnoća $P(\{GGG\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Isto $P(\{GGP\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, isto tako

$P(\{GPP\}) = P(\{PGG\}) = P(\{PGP\}) = P(\{PPG\}) = P(\{PPP\}) = \frac{1}{8}$.

$p_0 = P(\{PPP\}) = \frac{1}{8}$

$p_1 = P(\{GPP, PGP, PPG\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

$p_2 = P(\{GGP, GPG, PGG\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

$p_3 = P(\{GGG\}) = \frac{1}{8}$

Primer 10 *Novčić se baca dok se ne dobije grb. Izračunati ver. da bude paran broj bacanja.*

Rešenje: Skup svih ishoda je beskonačan i šifrovaćemo ga sa G (grb) i P (pismo):

$\Omega = \{G, PG, PPG, PPPG, \ldots\}$.

Događaj da je bio paran broj bacanja je $A = \{PG, PPPG, PPPPPG, \ldots\}$.

$P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$, formula za sumu beskonačnog geometrijskog reda.

Primer 11 *(Bernulijeva shema) Pozitivna realizacija eksperimenta u svim pokušajima ima istu verovatnoću $p \in (0,1)$. Eksperiment se vrši n puta. Kolika je verovatnoća da će biti k, za $0 \leq k \leq n$ pozitivnih realizacija?*

Verovatnoća elementarnog događaja sa k pozitivnih realizacija od n eksperimenata je

$$P(\{\overbrace{+ - - \cdots +}^{k \text{ plusova}}\}) = p^k (1-p)^{n-k}.$$

k od n eksperimenata može se odabrati na $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \cdots \cdot 1}$ načina.

Onda je $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Primer (9) je specijalni slučaj Bernulijeve sheme sa $p = \frac{1}{2}$, $n = 3$.

Primer 12 *U odeljenju od 30 đaka ima 12 dečaka. Na slučajan način se bira petočlana komisija. Kolika je verovatnoća da u komisiji ima (barem) 2 dečaka?*

Označimo događaje $A =$ izabrano je dva dečaka, $B =$ izabrano je barem dva dečaka.

2 od 12 dečaka se bira na $\binom{12}{2}$ načina. 3 od preostalih 18 đaka se bira na $\binom{18}{3}$ načina.

Po principu proizvoda broj komisija sa 2 dečaka je $\#A = \binom{12}{2}\binom{18}{3}$, a ukupan broj petočlanih komisija ja $\#\Omega = \binom{30}{5}$.

$P(A)=\frac{\binom{12}{2}\binom{18}{3}}{\binom{30}{5}}$, a preko suprotnog događaja $P(B)=1-\frac{\binom{12}{1}\binom{18}{4}}{\binom{30}{5}}-\frac{\binom{12}{0}\binom{18}{5}}{\binom{30}{5}}$.

PRIMER 13 *Oko kocke je opisana lopta. Na slučajan način se bira tačka u lopti. Kolika je verovatnoća da je izabrana tačka u kocki?*

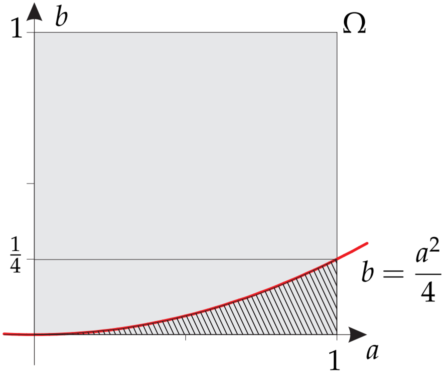
Ovde je pretpostavka da su sve tačke lopte jednako dostupne pa je u pitanju geometrijska verovatnoća.

Poluprečnik opisane lopte je pola telesne dijagonale kocke $r=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$, gde je a ivica kocke.

$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}$, gde je $m(\cdot)$ mera zapremine, A je kocka, Ω je lopta.

$P(A)=\frac{a^3}{\frac{4}{3}(\frac{1}{2}a\sqrt{3})^3\pi}=\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}=0.368.$

PRIMER 14 *Na slučajan način se biraju brojevi a i b u intervalu $[0,1]$. Kolika je verovatnoća da će jednačina $x^2+ax+b=0$ imati realna rešenja?*



U ovom zadatku zbog slučajnog izbora vrednosti a i b možemo smatrati da se radi o geometrijskoj verovatnoći, tako što će a-osa biti apscisa, b-osa ordinata i skup mogućih vrednosti jedinični kvadrat $\Omega = [0,1] \times [0,1]$.
Povoljne vrednosti, A, su uređeni parovi čije koordinate zadovoljavaju da im je diskriminanta $d = a^2 - 4b \geq 0$, što je ekvivalentno sa $b \leq a^2/4$.
Na slici levo događaj A je šrafiran. Mera je površina i $m(\Omega) = 1$.

$$P(A) = \int_0^1 \frac{a^2}{4}\, da = \frac{a^3}{12}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Primer 15 *Dve osobe dolaze na sastanak na dogovoreno mesto u slučajno odabranom momentu između 12 i 13 časova. Dogovor je da se čeka 20 minuta.*

Kolika je verovatnoća da će se sresti?

Rešenje: $\frac{5}{9}$

Primer 16 *(Bertranov paradoks) Izračunati verovatnoću da slučajno izabrana tetiva kružnice bude veća od stranice jednakostraničnog trougla upisanog u kružnicu.*

(a) Ako se jedan kraj tetive fiksira, a drugi se bira slučajno.

(b) Ako se fiksira pravac tetive.

(c) Ako se slučajno bira središte tetive (unutar kružnice).

Rešenje:

(a) $1/3$

(b) $1/2$

(c) $1/4$

PRIMER 17 *Simptom X se pojavljuje usled bolesti A, B i C. Poznato je da se bolest A, B i C pojavljuju kod redom 10%, 5%, 20% populacije. Bolesti A, B i C isključuju jedna drugu. Simptom X se u slučaju bolesti A razvija u 90% slučajeva, u slučaju bolesti B razvija se u 95% slučajeva, i u slučaju bolesti C razvija u 75% slučajeva.*

Kolika je verovatnoća da će se kod slučajno odabranog čoveka pojaviti simptom X?

Ako se pojavio simptom X, kolika je verovatnoća da ima bolest A, B, odnosno C?

Rešenje: Označimo događaje:
$A =$ izabrana osoba ima simptom X.
$H_1 =$ izabrana osoba ima bolest A,
$H_2 =$ izabrana osoba ima bolest B,
$H_3 =$ izabrana osoba ima bolest C,
$H_4 =$ izabrana osoba nema bolesti.

Iz tabele:
$P(A) = \sum_{i=1}^{4} P(H_i)\,P(A|H_i) = 0.2875$

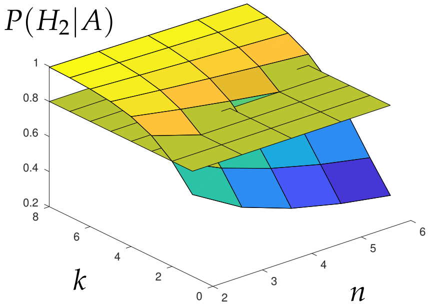
Date podatke smo uneli u tabelu i dopunili tabelu za Bejzove verovatnoće $P(H_i|A)$.

i	$P(H_i)$	$P(A\|H_i)$	$P(A\,H_i)$	$P(H_i\|A)$
1	0.10	0.90	0.0900	0.3130
2	0.05	0.95	0.0475	0.1652
3	0.20	0.75	0.1500	0.5217
4	0.65	0.00	0.0000	0.0000
	$\sum = 1$		$\sum = 0.2875$	

PRIMER 18 *Od n novčića jedan je neispravan: ima grb sa obe strane. Na slučajan način se bira novčić i baca k puta. Kolika je verovatnoća da svih k puta padne grb?*

Ako je svih k puta pao grb, kolika je verovatnoća da je u pitanju neispravan novčić?

Da li je poslednja verovatnoća veća za $n = 2, k = 2$ ili $n = 4, k = 4$?



Označimo: $A =$ palo k grbova,
$H_1 =$ izabran ispravan novčić, $H_2 =$ neispravan.

i	$P(H_i)$	$P(A\|H_i)$
1	$(n-1)/n$	$1/2^k$
2	$1/n$	1

$$P(A) = (n-1)/n \cdot 1/2^k + 1/n$$

$$P(H_2|A) = \frac{1/n}{(n-1)/n \cdot 1/2^k + 1/n} = \frac{2^k}{n-1+2^k}$$

$$P(H_2|A)\Big|_{n=2,k=2} = 4/5 = 0.8 <$$

$$< P(H_2|A)\Big|_{n=4,k=4} = 16/19 = 0.84$$

Primer 19 *Osobe A, B, C i D prenose informaciju koju dobiju u obliku iskaza DA ili NE u jednom od tri slučaja. Osoba A dobija informaciju, prenosi je osobi B, zatim ona osobi C, zatim ona osobi D i na kraju osoba D saopštava informaciju.*

Kolika je verovatnoća da je prva osoba prenela početnu informaciju ako se zna da je poslednja osoba prenela početnu informaciju?

Označimo $A, B, C, D =$ osoba A, B, C, D je prenela početnu informaciju. $\ldots$

$P(A|D) = 13/41.$

Uopštena formula preseka:

$$P(A_1\,A_2\cdots A_n) = P(A_1)\,P(A_2|A_1)\,P(A_3|A_1\,A_2)\cdots P(A_n|A_1\,A_2\cdots A_{n-1})$$

Primer 19a *U kutiji su 4 crvene i 5 zelenih kuglica. Na slučajan način se izvlače tri kuglice bez vraćanja. Kolika je verovatnoća da su izvučene redom crvena, zelena i crvena kuglica?*

Rešenje: Neka je Ω skup svih mogućih izvlačenja tri kuglice bez vraćanja.

Označimo: $A_1 =$ u prvom izvlačenju izvučena crvena,

Označimo: $A_2 =$ u drugom izvlačenju izvučena zelena,

Označimo: $A_3 =$ u trećem izvlačenju izvučena crvena.

Traži se verovatnoća $P(A_1\,A_2\,A_3) = P(A_1)\,P(A_2|A_1)\,P(A_3|A_1\,A_2) = \frac{4}{9}\,\frac{5}{8}\,\frac{3}{7} = \frac{5}{42} = 0.119.$

Primer 20 *Koliko treba da ima osoba u nekoj grupi pa da verovatnoća da barem dve osobe iz grupe imaju rođendan istog dana bude veća od $\frac{1}{2}$?*

Za grupu od n osoba označimo događaje:

$A =$ u grupi barem dve osobe imaju rođendan istog dana. Onda je

$\overline{A} =$ u grupi ne postoje dve osobe rođene istog dana.

Posmatrajmo osobe u grupi poređane u konačan niz $1, 2, \ldots, n$. Neka je

$A_i =$ osoba broj i nema rođendan istog dana kao osobe pre nje, $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 1\,\frac{364}{365}\,\frac{363}{365}\,\cdot\cdots\cdot\,\frac{366-n}{365} > \frac{1}{2}.$$

Ovu nejednačinu možemo rešiti pomoću spreadsheet tabele:

1	2	3	4	5	$\cdots$	20	21	22	23	24
0.00	0.00	0.01	0.02	0.03	$\cdots$	0.41	0.44	0.48	0.51	0.54

Vidimo da je odgovor $n \geq 23$.

Primer 21 *Koliko osoba treba da pitam za rođendan da bih sreo osobu koja ima rođendan istog dana kad i ja sa verovatnoćom većom od $\frac{1}{2}$?*

Označimo događaj $A =$ od n osoba u grupi barem jedna osoba ima rođendan kad i ja.

Onda je $\overline{A} =$ ni jedna osoba iz grupe nema rođendan kad i ja.

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\left(\tfrac{364}{365}\right)^n>\tfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\tfrac{364}{365}\right)^n<\tfrac{1}{2} \Leftrightarrow n>\ln\tfrac{1}{2}/\ln\tfrac{364}{365}=252.7.$$

Uopštena formula unije:

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{1\le i_1\le n}P(A_{i_1})-\sum_{1\le i_1<i_2\le n}P(A_{i_1}A_{i_2})+\sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n}P(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3})-$$

$$\cdots+(-1)^{(n-1)}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

Primer 22 *Nestalo je struje u pozorištu i svih n lica su u mraku (na slučajan način) uzeli kaput u garderobi. Kolika je verovatnoća da je barem jedno lice uzelo svoj kaput?*

Kojem broju teži dobijena verovatnoća kad $n\to\infty$?

Sva moguća uzimanja kaputa, Ω, smatramo jednakoverovatnim. Označimo događaje $A_i=$ osoba i, $i=1,2,\ldots,n$, je uzela svoj kaput. Onda je $A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$.
Za indekse $i_1,i_2,\ldots,i_k\in\{1,2,\ldots,n\}$ za koje je $i_1<i_2<\cdots<i_k$ važi $P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=\frac{(n-k)!}{n!}$. Pošto u k-tom sabirku desne strane uopštene formule unije imamo $\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$ jednakih sabiraka, onda je po uopštenoj formuli unije $P(A)=$

$$=\frac{n!}{(n-1!)\,1!}\frac{(n-1)!}{n!}-\frac{n!}{(n-2!)\,2!}\frac{(n-2)!}{n!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n!}{n!}\frac{1}{n!}=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.$$

Kad $n\to\infty$ dobijena verovatnoća teži ka $1-1/e$.

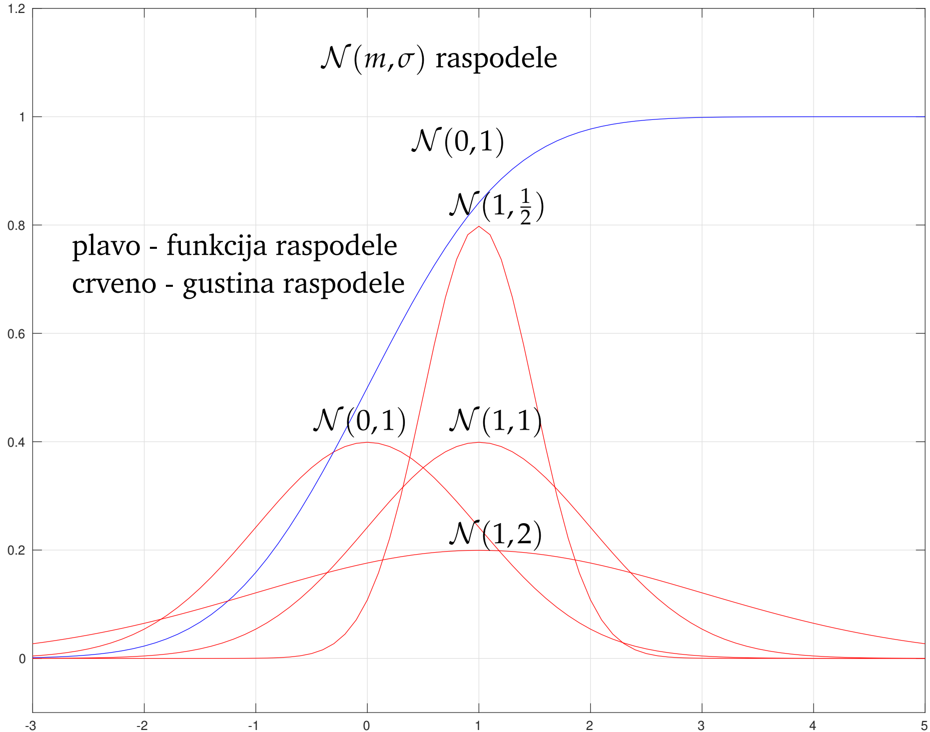
PRIMER 23 *Za prostor verovatnoće iz primera 3, možemo definisati slučajnu promenljivu koja registruje sa 1 da li je broj veći od 2 (inače je nula):*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vidimo da je $X^{-1}((-\infty, x]) = \begin{cases} \emptyset, & x < 0 \\ \{1,2\}, & 0 \le x < 1 \\ \{1,2,3,4,5,6\}, & x \ge 1 \end{cases}$

PRIMER 24 *Za slučajnu promenljivu X iz primera 23 funkcija raspodele je*

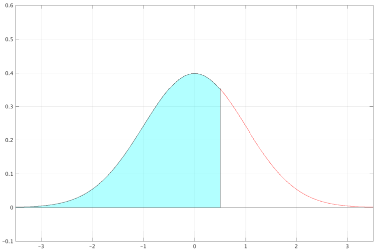
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{3}, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$



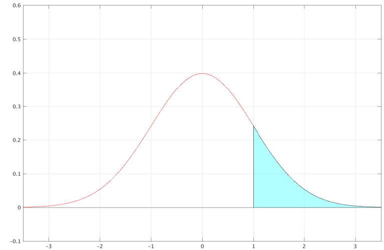
$\mathcal{N}(m,\sigma)$ raspodele
$\mathcal{N}(0,1)$
$\mathcal{N}(1,\frac{1}{2})$
plavo - funkcija raspodele
crveno - gustina raspodele
$\mathcal{N}(0,1)$
$\mathcal{N}(1,1)$
$\mathcal{N}(1,2)$
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

PRIMER 25 *Ako* $X : \mathcal{N}(0,1)$*, iz tablica funkcije* Φ *očitati vrednosti* $P(X \leq 0.55), P(X > 1), P(|X| < 2)$ *i naći vrednost* x *za koju je* $P(X \leq x) = F(x) = 0.975$*.*

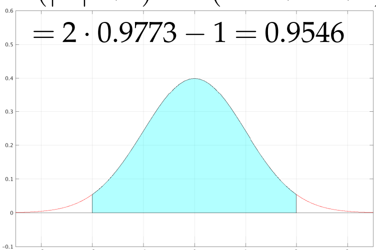
$$P(X \leq 0.55) = 0.7088$$



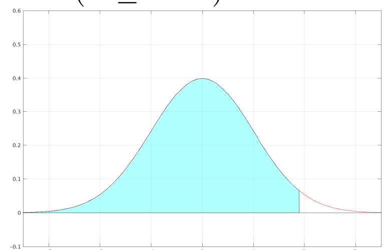
$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$



$$P(|X| < 2) = P(-2 < X < 2) =$$
$$= 2 \cdot 0.9773 - 1 = 0.9546$$



$$P(X \leq 1.960) = 0.975$$



PRIMER 26 *Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja broj koji padne na kockici za igru. Naći raspodelu slučajne promenljive $Y=(X-3)^2$.*

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}. \text{ Rešenje: } Y:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

PRIMER 27 *Neka $X:\mathcal{U}(0,1)$ i neka je $Y=-\ln X$. Naći raspodelu za Y.*

Rešenje: $X:\mathcal{U}(0,1) \Rightarrow \varphi_X(x)=\begin{cases} 1, & x\in(0,1) \\ 0, & x\notin(0,1) \end{cases}$ Traži se raspodela za Y.

$Y=f(X)=-\ln X:(0,1)\to(0,\infty)=Y(\Omega) \Rightarrow X=f^{-1}(Y)=e^{-Y}:(0,\infty)\to(0,1)$

$$\varphi_Y(y)=\begin{cases} x\notin(0,\infty): & 0 \\ x\in(0,\infty): & \varphi_X(f^{-1}(y))\,|(f^{-1}(y))'|=1\cdot|-e^{-y}|=e^{-y} \end{cases} \Rightarrow Y:\mathcal{E}(1)$$

PRIMER 28 *Neka $X:\mathcal{N}(0,1)$ i neka je $Y=aX+b$, $a\neq 0$. Naći raspodelu za Y.*

Rešenje: $X:\mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \varphi_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Traži se raspodela za Y.

$Y=f(X)=aX+b:(-\infty,\infty)\to(-\infty,\infty)=Y(\Omega) \Rightarrow$

$X=f^{-1}(Y)=\dfrac{Y-b}{a}:(-\infty,\infty)\to(-\infty,\infty).$

$$\varphi_Y(y) = \varphi_X(f^{-1}(y))\,|(f^{-1}(y))'| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-b}{a}\right)^2} \cdot \left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,|a|} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-b}{|a|}\right)^2} \Rightarrow Y : \mathcal{N}(b, |a|)$$

Primer 29 *Neka $X : \mathcal{N}(0,1)$ i neka je $Y = X^2$. Naći raspodelu za Y.*

Rešenje: $$F_Y(y) = P(Y < y) = P(X^2 < y) = \begin{cases} y < 0 : & 0 \\ y \geq 0 : & P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = 2\Phi(\sqrt{y}) - 1 \end{cases}$$

$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} y < 0 : & 0 \\ y \geq 0 : & (2\Phi(\sqrt{y}) - 1)' = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2} \end{cases} \Rightarrow Y : \chi^2_1$$

Primer 30 *Neka $X : \mathcal{N}(0.5,2)$. Izračunati verovatnoće $P(X \leq 0.55), P(X > 1), P(|X| < 2)$ i naći vrednost x za koju je $P(X \leq x) = F(x) = 0.975$.*

PRIMER 53 *U Mendelovim eksperimentima ukršteni pasulji su dali 315 okruglih žutih, 108 okruglih zelenih, 101 naboranih žutih i 32 naborana zelena zrna. Po njegovoj teoriji, njihov odnos bi trebao biti 9:3:3:1. Da li je njegova teorija ispravna? Kolika je p-vrednost?*

$9 + 3 + 3 + 1 = 16, \quad n = 315 + 108 + 101 + 32 = 556$

oblik	ož	oz	nž	nz	
p	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	
p	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	
o	315	108	101	32	
$\frac{(o-e)^2}{e}$	0.0161	0.1302	0.1046	0.2363	$\sum = 0.472$

$0.472 <$ `qchisq(.95,3)` $= 7.815$, ne odbacujemo H_0.

PRIMER 54 *U tabeli su dati brojevi studenata koji su položili i pali kolokvijum kod tri asistenta. Testirati hipotezu da su procenti položenih nezavisni od asistenta.*

	X	Y	Z	
pali	50	47	56	153
položili	5	14	8	27
ukupno	55	61	64	