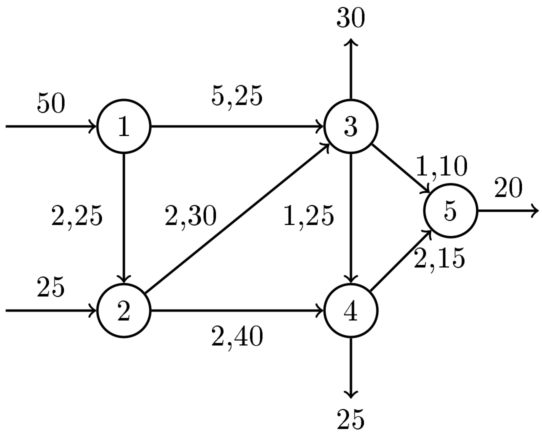
Нелинеарно програмирање и еволутивни алгоритми
Примјери мрежног и транспортног проблема

1. Три приградска насеља снабдијевају се водом из 2 резервоара. На слици су приказани токови воде кроз цјевоводе, цијена преноса воде кроз одређени цјевовод као и максимални капацитет цјевовода. Капацитет првог резервоара је 50 000l, а капацитет другог резервоара је 25 000l. Потребе приградских насеља су 30 000, 25 000 и 20 000l респективно. Израчунати минималну цијену снабдијевања водом ова три приградска насеља.



Рјешење:

Критеријум оптималности:

$$f = 5x_{13} + 2x_{12} + 2x_{23} + 2x_{24} + x_{34} + x_{35} + 2x_{45}$$

Ограничења:

$$\begin{aligned} x_{12} + x_{13} &= 50 \\ x_{24} + x_{23} - x_{12} &= 25 \\ -x_{13} - x_{23} + x_{34} + x_{35} &= -30 \\ -x_{24} - x_{34} + x_{45} &= -25 \\ -x_{45} - x_{35} &= -20 \end{aligned}$$

Ax = b

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{12} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{34} \\ x_{35} \\ x_{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 25 \\ -30 \\ -25 \\ -20 \end{bmatrix}$$

Слика 1: Рјешење задатка 1

```
A_eq =[1, 1, 0, 0, 0, 0, 0
        0, -1, 1, 1, 0, 0, 0
       -1, 0, -1, 0, 1, 1, 0
        0, 0, 0, -1, -1, 0, 1
        0, 0, 0, 0, 0, -1, -1];

b_eq = [50, 25, -30, -25, -20];

A = [];
b = [];
c = [5, 2, 2, 2, 1, 1, 2];

lB = zeros(1,7);
uB = [25, 25, 30, 40, 25, 10, 15];
[x,fx] = linprog(c, A, b, A_eq, b_eq, lB, uB);
```

Добијени резултати:

$$x^* = \begin{bmatrix} 25 \\ 25 \\ 15 \\ 35 \\ 0 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Минимална цијена снабдијевања водом: 305

* Посљедња једначина за ограничење је „вишак”.

Слика 2: Рјешење задатка 1 - без посљедње једначине

```
A_eq =[1, 1, 0, 0, 0, 0, 0
        0, -1, 1, 1, 0, 0, 0
       -1, 0, -1, 0, 1, 1, 0
        0, 0, 0, -1, -1, 0, 1];

b_eq = [50, 25, -30, -25];

A = [];
b = [];
c = [5, 2, 2, 2, 1, 1, 2];

lB = zeros(1,7);
uB = [25, 25, 30, 40, 25, 10, 15];
[x,fx] = linprog(c, A, b, A_eq, b_eq, lB, uB);
```

Добијени резултати су исти.

2. Компанија има складишта у Новом Саду и Београду из којих се транспортује исти материјал за прављење јастука у три фабрике које се налазе у Суботици, Зрењанину и Кикинди. Капацитет новосадског складишта је 300kg материјала, а београдског 600kg. По потписаном уговору компанија мора да транспортује недељно 325kg материјала у Суботицу, 300kg у Кикинду и 275kg у Зрењанин. Удаљености градова су приказане у табели 1. Цијена транспорта је 2din/km. Одредити минималне трошкове транспорта.

	Суботица	Кикинда	Зрењанин
Нови Сад	103	111	51
Београд	178	136	76

Табела 1: Удаљеност између градова [km]

Рјешење:

Критеријум оптималности:

$$f = 2*103x_{11} + 2*111x_{12} + 2*51x_{13} + 2*178x_{21} + 2*136x_{22} + 2*76x_{23}$$

Ограничења:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 300 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 600 \\ -x_{11} - x_{21} &= -325 \\ -x_{12} - x_{22} &= -275 \\ -x_{13} - x_{23} &= -300 \end{aligned}$$

Слика 3: Рјешење задатка 2

```
A_eq =[1, 1, 1, 0, 0, 0
        0, 0, 0, 1, 1, 1
       -1, 0, 0,-1, 0, 0
        0, -1, 0, 0, -1, 0];
b_eq = [300, 600,-325, -275];
A = [];
b = [];
c = [2*103, 2*51, 2*111, 2*178, 2*76,2*136];

[x, fx] = linprog(c, A, b, A_eq, b_eq, zeros(1,6), Inf*ones(1,6))
```

Добијени резултати:

$$x^* = \begin{bmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \\ 275 \\ 300 \end{bmatrix}$$

Минимални трошкови транспорта: 194100

3. Електропривреда Србије жели да изгради 2 нове електране које ће обезбиједити струју за 3 општине. Електране дневно могу да производу 500 и 800 милиона kWh. Општине дневно троше 600, 400 и 300 милиона kWh. Цијена дистрибуције 1 милиона kWh струје од електрана до општине дата је у табели. Наћи најјефтинији начин транспорта.

	O_1	O_2	O_3
E_1	800	500	500
E_2	400	600	800

Рјешење:

Критеријум оптималности:

$$f = 800x_{11} + 500x_{12} + 500x_{13} + 400x_{21} + 600x_{22} + 800x_{23}$$

Ограничења:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 500 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 800 \\ x_{11} + x_{21} &= 600 \\ x_{12} + x_{22} &= 400 \\ x_{13} + x_{23} &= 300 \end{aligned}$$

Слика 4: Рјешење задатка 3

```
A_eq = [1, 1, 1, 0, 0, 0
        0, 0, 0, 1, 1, 1
        1, 0, 0, 1, 0, 0
        0, 1, 0, 0, 1, 0];
b_eq = [500, 800,600, 400];
A = [];
b = [];
c = [800,500,500,400,600,800];

[x, fx] = linprog(c, A, b, A_eq, b_eq, zeros(1,6), Inf*ones(1,6));
```

Добијени резултати:

$$x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \\ 300 \\ 600 \\ 200 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Минимална цијена дистрибуције: 610 000

4. Компанија Бамби располаже са 3 магацина и 4 своје продавнице. Магацини посједују толико робе да могу да напуне 2, 6 и 7 камиона дневно, а продавнице могу да продају 3, 3, 4 и 5 камиона Бамбијевих производа дневно. Направити план вожње тако да се производи превезу од магацина до продавница за што краће вријеме. Вријеме потребно да одређени камион пређе од магацина до продавница изражено је у минутима и дато је у сљедећој табели:

магацин продавница	П1	П2	П3	П4
M_1	20	11	15	30
M_2	17	14	12	13
M_3	15	12	18	18

Рјешење:

Критеријум оптималности:

$$f = 20x_{11}+11x_{12}+15x_{13}+13x_{14}+17x_{21}+14x_{22}+12x_{23}+13x_{24}+15x_{31}+12x_{32}+18x_{33}+18x_{34}$$

Ограничења:

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 2 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 6 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 7 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 3 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 3 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 4 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 5 \\
x_{i,j} \geq 0, i = 1..3; j = 1..4
\end{aligned}
$$

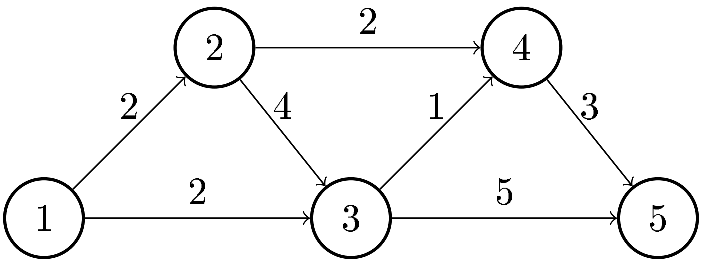
Слика 5: Рјешење задатка 4

```
A_eq = [1, 1, 1 ,1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
        0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0
        0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1
        1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0
        0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0
        0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0
        0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1];

b_eq = [2, 6, 7, 3, 3, 4, 5];
A = [];
b = [];
c = [20,11,15,13,17,14,12,13,15,12,18,18];

[x, fx] = linprog(c, A, b, A_eq, b_eq, zeros(1,12), ...
    Inf*ones(1,12))
```

$$
x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Минимално вријеме транспорта: 199

5. Три кутије се налазе у складишту 1, а двије кутије се налазе у складишту 2. Потребно је свих 5 кутија транспортовати у складиште 5. Цијене транспорта између свака два складишта написане су на гранама графа:



Пронаћи најјефтинији начин транспорта кутија до циљних одредишта.

Рјешење:

Критеријум оптималности:

$$f(x) = 2x_1 + 2x_2 + ... + 3x_7$$

Ограничења:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= 3 \\
-x_1 + x_3 + x_4 &= 2 \\
-x_2 - x_3 + x_5 + x_6 &= 0 \\
-x_4 - x_5 + x_7 &= 0 \\
-x_6 - x_7 &= -5 \\
x_i \geq 0, i = 1..7
\end{aligned}$$

Слика 6: Рјешење задатка 5

```
A_eq = [1, 1, 0, 0, 0, 0, 0
        -1, 0, 1, 1, 0, 0, 0
         0, -1, -1, 0, 1, 1, 0
         0, 0, 0, -1, -1, 0, 1
         0, 0, 0, 0, 0, -1, -1];
b_eq = [3, 2, 0, 0, -5];
A = [];
b = [];
c = [2, 2, 4, 2, 1, 5, 3];

[x, fx] = linprog(c, A, b, A_eq, b_eq, zeros(1,7), ...
    Inf*ones(1,7))
```

$$x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Минимална цијена транспорта: 28