Determinante

Neformalno, ***matrica*** A ***formata*** $m \times n$ nad poljem $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$ je „pravougaoni blok” elemenata polja $\mathbf{F}$, tj.

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

gde je $a_{i,j} \in F$. Dakle, element $a_{i,j}$ se nalazi u i-toj vrsti i j-toj koloni. Matrica je ***kvadratna*** ako je $m = n$.

★ Sa $A = [a_{i,j}]_{m \times n}$ ćemo označavati matricu A formata $m \times n$ čiji su elementi $a_{i,j}$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Definicija 1 ***Determinanta*** *je funkcija koja preslikava kvadratne matrice nad poljem F u F.*

★ Determinanta je jedna od najvažnijih karakteristika kvadratnih matrica.

★ Ako se ne naglasi drugačije, podrazumevamo da su determinante zadate nad poljem realnih brojeva.

Definicija 2
1. ***Minor*** *elementa $a_{i,j}$ matrice A, u oznaci $M_{i,j}$, je determinanta matrice formata $(n-1) \times (n-1)$ koja se dobija od matrice A izbacivanjem njene i-te vrste i j-te kolone.*
2. ***Kofaktor*** *elementa $a_{i,j}$ matrice A je $A_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$.*

Tvrđenje 1 *Pri izračunavanju determinanti koristićemo njihove sledeće osobine (teoreme):*

[D1] *Determinanta matrice i determinanta njoj transponovane matrice su jednake.*

Primer:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}.$$

[D2] *Ako dve vrste (kolone) zamene mesta determinanta menja znak.*

Primer:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

[D3] *Determinanta se množi skalarom (brojem) tako što se svi elementi neke vrste (kolone) pomnože tim skalarom.*

Primer:

$$3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix}.$$

[D4] *Ako su dve vrste (kolone) u matrici A jednake ili proporcionalne, tada je* $\det A = 0$.

Primer:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

[D5] *Ako su svi elementi neke vrste (kolone) matrice A jednaki nuli, tada je* $\det A = 0$.

Primer:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ g & h & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

[D6] *Determinanta se ne menja ako se elementi jedne vrste (kolone) pomnože skalarom različitim od nule i dodaju elementima druge vrste (kolone).*

Primer:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2a+g & 2b+h & 2c+i \end{vmatrix}.$$

[D7] *Determinantu matrice A razvijamo po k-toj vrsti, odnosno po k-toj koloni, na sledeći način:*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}A_{k,j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j}M_{k,j},$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}A_{i,k} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{i,k}M_{i,k}.$$

Primer:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}\cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -3\cdot(4-2) + 1\cdot(-4-0) = -10.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}\cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}\cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 2\cdot(3-0) - 4\cdot(1+3) = -10.$$

[D8] *Ako su u nekoj k-toj vrsti (ili koloni) svi elementi matrice* $A = \left[a_{i,j}\right]_{n\times n}$ *oblika* $a_{k,j} = b'_{k,j} + c'_{k,j}$, *tada je* $\det A = \det B + \det C$, *gde su elementi matrica* $B = \left[b_{i,j}\right]_{n\times n}$ *i* $C = \left[c_{i,j}\right]_{n\times n}$ *dati sa*

$$b_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & , \ i \neq k \\ b'_{i,j} & , \ i = k \end{cases}, \qquad c_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & , \ i \neq k \\ c'_{i,j} & , \ i = k \end{cases}.$$

Primer:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1+y_1 & x_2+y_2 & x_3+y_3 \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

[D9] *Za kvadratnu matricu A formata n važi* $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

Primer:

$$\begin{vmatrix} 5a & 5b & 5c \\ 5d & 5e & 5f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix} = 5^3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

[D10] *Ako su svi elementi kvadratne matrice A ispod (iznad)* glavne *dijagonale jednaki nuli, tada je* $\det A$ *proizvod elemenata sa njene glavne dijagonale.*

Primer:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-4) = -4.$$

[D11] *Za dve kvadratne matrice A i B formata n važi* $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Zadatak 1 *Izračunati determinante:*

(1) $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix}$, (2) $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$,

(3) $D_3 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$, (4) $D_4 = \begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix}$.

Rešenje:

(1) $D_1 = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (3-12)+(15+4)+2(-15-1) = -22.$

(2) $D_2 \overset{[1]}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} \overset{[2]}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{[3]}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = -2,$

pri čemu smo primenjivali sledeće transformacije:

[1] - prva vrsta pomnožena sa -2 se dodaje na drugu vrstu, i prva vrsta se dodaje na četvrtu;

[2] - druga vrsta se oduzima od treće, i druga vrsta pomnožena sa 2 se dodaje četvrtoj vrsti;

[3] - treća vrsta pomnožena sa $-\frac{2}{3}$ se dodaje četvrtoj vrsti;

[4] - determinanta koja ispod glavne dijagonale ima nule, jednaka je proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali.

(3) $D_3 \overset{[1]}{=} \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} \overset{[2]}{=} (d-c) \cdot \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix} \overset{[3]}{=} (d-c) \cdot (c-b) \cdot \begin{vmatrix} a & a \\ a & b \end{vmatrix} =$

$\overset{[4]}{=} (d-c) \cdot (c-b) \cdot (b-a) \cdot a,$

pri čemu smo primenjivali sledeće transformacije:

[1] - oduzimanje treće vrste od četvrte;

[2] - razvijanje determinante po četvrtoj vrsti;

[3] - oduzimanje druge vrste od treće, i nakon toga razvijanje determinante po trećoj vrsti;

[4] - ponovimo prethodni postupak ili determinantu izračunamo po definiciji.

(4) $$D_4 \overset{[1]}{=} \begin{vmatrix} 3a+b & 3a+b & 3a+b \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} \overset{[2]}{=} (3a+b)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} \overset{[3]}{=} (3a+b)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = \overset{[4]}{=} (3a+b)b^2,$$

pri čemu smo primenjivali sledeće transformacije:

[1] - dodavanje druge i treće vrste prvoj;

[2] - determinanta se množi skalarom tako što se elementi jedne vrste (ovde prve) pomnože tim skalarom;

[3] - dodajemo drugoj i trećoj vrsti prvu pomnoženu sa $-a$;

[4] - determinanta koja ispod glavne dijagonale ima nule, jednaka je proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali.

□

Sistemi linearnih jednačina

Sistem linearnih jednačina S nad poljem $\mathbf{R} = (R, +, \cdot)$ je oblika

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

gde su $a_{ij}, b_i \in R$, $i \in \{1,2,\ldots,m\}$, $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ koeficijenti, a $x_i \in R$, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ promenljive sistema.

★ Sa $\mathcal{R}_S$ ćemo označavati skup rešenja sistema linearnih jednačina S.

Ekvivalentne transformacije sistema, kojima se ne menja skup $\mathcal{R}_S$ rešenja sistema, su:

[ES1] zamena mesta jednačinama;

[ES2] zamena mesta sabircima u jednačinama;

[ES3] množenje jednačine konstantom $k \neq 0$ (gde je 0 „nula”, tj. neutralni element operacije + polja $\mathbf{R} = (R, +, \cdot)$);

[ES4] dodavanje jednačine pomnožene sa $k \in R$ nekoj drugoj jednačini.

Primenom ovih transformacija, Gausovim postupkom eliminacije od polaznog sistema pravimo ekvivalentan sistem u „trougaonom obliku”:

$$\begin{array}{rcl} c_{1,1}x_1 + c_{1,2}x_2 + c_{1,3}x_3 + \ldots + c_{1,k}x_k + \ldots + c_{1,n}x_n & = & d_1 \\ c_{2,2}x_2 + c_{2,3}x_3 + \ldots + c_{2,k}x_k + \ldots + c_{2,n}x_n & = & d_2 \\ c_{3,3}x_3 + \ldots + c_{3,k}x_k + \ldots + c_{3,n}x_n & = & d_3 \\ \ddots \quad \vdots \qquad\qquad \vdots & = & \vdots \\ c_{k,k}x_k + \ldots + c_{k,n}x_n & = & d_k \\ 0 & = & \lambda_{k+1} \\ & \vdots & \\ 0 & = & \lambda_m \end{array}$$

gde je $c_{i,j}, d_i, \lambda_l \in R$ za sve $i \in \{1,2,\ldots,k\}$, $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, $l \in \{k+1,k+2,\ldots,m\}$, i gde je $c_{i,i} \neq 0$ za sve $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ (gde je 0 „nula”, tj. neutralni element operacije + polja $\mathbf{R} = (R, +, \cdot)$).

Na osnovu trougaonog oblika donosimo zaključke o prirodi sistema i izračunavamo rešenja „zamenom unatrag” na sledeći način:

(1) ako je $\lambda_l \neq 0$ za neko $l \in \{k+1,k+2,\ldots,m\}$, tada je sistem ***kontradiktoran*** (protivrečan), odnosno nema rešenja, tj. $\mathcal{R}_S = \emptyset$;

(2) ako je $\lambda_l = 0$ za sve $l \in \{k+1,k+2,\ldots,m\}$ i $k = n$ (sve promenljive od x_1 do x_n se pojavljuju na glavnoj dijagonali), tada je sistem ***određen***, odnosno ima tačno jedno rešenje, tj. $\mathcal{R}_S = \left(x_1', x_2', \ldots, x_n'\right)$;

(3) ako je $\lambda_l = 0$ za sve $l \in \{k+1,k+2,\ldots,m\}$ i $k < n$, tj. osim promenljivih $x_1,\ldots,x_k$ koje se pojavljuju na glavnoj dijagonali, u sistemu figuriše još $n-k$ promenljivih, tada je sistem ***neodređen*** $n-k$ puta, odnosno pri izboru rešenja imamo $n-k$ stepeni slobode, tj. promenljive $x_{k+1},\ldots,x_n \in R$ mogu uzimati proizvoljne vrednosti, dok $x_1,\ldots,x_k$ izračunavamo (tj. izražavamo preko $x_{k+1},\ldots,x_n \in R$) metodom „zamene unatrag”; geometrijski, skup rešenja $n-k$ puta neodređenog sistema je $(n-k)$-dimenzionalni linearni objekat (prava, ravan, hiperravan,...), tj. lineal mnogostrukosti $n-k$ (videti deo o vektorskim prostorima).

★ Zaključke o prirodi sistema, kao i izračunavanje rešenja „zamenom unatrag”, možemo doneti *samo* na osnovu trougaonog oblika sistema, kod kojeg je, obratimo pažnju, $c_{i,i} \neq 0$ za sve $i \in \{1,2,\ldots,k\}$.

★ Ako u nekom zadatku nije drugačije naglašeno, podrazumevaćemo da se dati sistem posmatra nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$.

Ako je $b_i = 0$ za sve $i \in \{1,2,\ldots,m\}$, kažemo da je sistem ***homogen***. Homogen sistem ne može biti kontradiktoran, jer ima bar jedno rešenje $(0,0,\ldots,0)$. Ako je homogen sistem S linearnih jednačina

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{1,n}x_n & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{2,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{m,n}x_n & = & 0 \end{array}$$

nad poljem $\mathbf{R} = (R,+,\cdot)$ određen, njegov skup rešenja $\mathcal{R}_S$ je trivijalan nula-potprostor vektorskog prostora $(\mathbf{R}^n,\mathbf{R},+,\cdot)$, a ako je k puta neodređen, njegov skup rešenja $\mathcal{R}_S$ je k-dimenzionalan potprostor vektorskog prostora $(\mathbf{R}^n,\mathbf{R},+,\cdot)$ (videti deo o vektorskim prostorima).

Kramerove formule. Posmatrajmo tzv. „kvadratni sistem” S linearnih jednačina (sa jednakim brojem jednačina i promenljivih)

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}$$

nad poljem $\mathbf{R} = (R,+,\cdot)$. Označimo sa D_S „determinantu sistema”

$$D_S = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

i označimo sa

$$D_{x_i} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{1,i+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,i-1} & b_n & a_{1,i+1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

determinantu koja se dobija od determinante sistema D_S zamenom i-te kolone koeficijentima $b_1, b_2 \ldots, b_n$.

Teorema 1 *Kvadratni sistem S linearnih jednačina ima jedistveno rešenje (određen je) ako i samo ako je $D_S \neq 0$, i tada se to rešenje može dobiti primenom Kramerovih formula*

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D_S}, \quad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D_S}, \quad x_3 = \frac{D_{x_3}}{D_S}, \quad \ldots \quad x_n = \frac{D_{x_n}}{D_S}.$$

★ Kramerovim formulama možemo izračunavati rešenja sistema samo u slučaju kada on ima jedinstveno rešenje, tj. kada je $D_S \neq 0$. Ako je $D_S = 0$, tada o prirodi sistema možemo zaključiti samo da on nije određen, a ostale opcije moramo ispitivati Gausovim postupkom svođenja na trougaoni oblik, tj. tada *samo* iz trougaonog oblika možemo saznati da li je kontradiktoran ili k-puta neodređen.

★ Gausov postupak eliminacije i metod izračunavanja rešenja sistema „zamenom unatrag” je u opštem slučaju bolji metod iz sledećih razloga:

* univerzalan je, tj. možemo ga primenjivati na bilo koji sistem linearnih jednačina, dok Kramerovim formulama dobijamo rešenja sistema samo kada je on kvadratni (ima isti broj jednačina i promenljivih), i determinanta mu je različita od nule,
* efikasniji je u opštem slučaju, jer se njegovom primenom dobijaju rešenja sa manje računskih operacija nego primenom Kramerovih formula.

Zadatak 2 *Sledeće sisteme linearnih jednačina rešiti nad poljem realnih brojeva* $\mathbb{R}$.

$$S_1: \quad \begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & + & 2z & = & 6 \\ 2x & + & y & - & z & = & -1 \\ 4x & + & 2y & + & 3z & = & 8 \end{array}$$

$$S_2: \quad \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -2 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 4 \end{array}$$

$$S_3: \quad \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & - & 3u & = & -2 \\ 3x & + & 6y & - & 3z & - & 9u & = & 4 \end{array}$$

Rešenje:

(S_1) Sistem svodimo na trougaoni oblik koristeći Gausov postupak, a zatim rešenja izračunavamo zamenom unatrag:

$$S_1 \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} y & + & 3x & + & 2z & = & 6 \\ y & + & 2x & - & z & = & -1 \\ 2y & + & 4x & + & 3z & = & 8 \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\overset{[2]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} y & + & 3x & + & 2z & = & 6 \\ & - & x & - & 3z & = & -7 \\ & - & 2x & - & z & = & -4 \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\overset{[3]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} y & + & 3x & + & 2z & = & 6 \\ & - & x & - & 3z & = & -7 \\ & & & & 5z & = & 10 \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} z = \frac{10}{5} = 2 \\ x = 7 - 3z = 7 - 6 = 1 \\ y = 6 - 2z - 3x = 6 - 4 - 3 = -1 \end{array}}$$

[1] - promenljive x i y zamene mesta;

[2] - prvu jednačinu oduzmemo od druge, i prvu jednačinu pomnoženu sa -2 dodamo na treću;

[3] - drugu jednačinu pomnoženu sa -2 dodamo trećoj.

Prema tome, sistem S_1 je određen i skup rešenja glasi $\mathcal{R}_{S_1} = \{(1, -1, 2)\}$ (skup rešenja je skup uređenih trojki kod kojih redosled komponenti odgovara redosledu promenljivih u zadatom sistemu).

(S_2) Koristeći Gausov postupak dobijamo:

$$S_2 \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -2 \\ & - & 5y & + & 5z & = & 10 \end{array}} \overset{[2]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & = & -2 & + & z \\ & & y & = & -2 & + & z \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} y = -2+z \\ x = -2+z-2y = -2+z-2(-2+z) = 2-z \end{array}}$$

[1] - prvu jednačinu pomnoženu sa -3 dodamo drugoj;

[2] - drugu jednačinu podelimo sa -5, i zatim prebacimo na desnu stranu sve promenljive koje se ne pojavljuju na glavnoj dijagonali.

Prema tome, sistem S_2 je jednostruko neodređen i njegov skup rešenja glasi

$\mathcal{R}_{S_2} = \{(2-z, z-2, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{(2,-2,0) + z(-1,1,1) \mid z \in \mathbb{R}\}$

(skup rešenja je skup uređenih trojki oblika $(2-z, z-2, z)$, gde je z proizvoljan realan broj). Možemo primetiti da je skup rešenja $\mathcal{R}_{S_2}$ lineal mnogostrukosti 1 (videti deo o vektorskim prostorima), tj. prava u $\mathbb{R}^3$ koja sadrži tačku $(2,-2,0)$ i paralelna je sa vektorom $(-1,1,1)$.

(S_3) Koristeći Gausov postupak dobijamo:

$$S_3 \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & - & 3u & = & -2 \\ & & & & & & 0 & = & 10 \end{array}}$$

[1] - prvu jednačinu pomnoženu sa -3 dodamo drugoj.

Odavde zaključujemo da je sistem S_3 kontradiktoran, odnosno $\mathcal{R}_{S_3} = \emptyset$.

□

Zadatak 3 *Sistem linearnih jednačina S diskutovati po parametru $a \in \mathbb{R}$ i rešiti nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & = & -2 \\ 3x & + & y & - & z & = & 4 \\ 2x & - & y & + & z & = & a \end{array}$$

Rešenje: U ovom primeru u sistemu se pojavljuje parametar $a \in \mathbb{R}$, pa će i rešenje (tj. skup rešenja) zavisiti od tog parametra. Gausovim postupkom eliminacije sistem svodimo na trougaoni oblik:

$$S \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & = & -2 \\ & - & 5y & + & 5z & = & 10 \\ & - & 5y & + & 5z & = & a+4 \end{array}} \overset{[2]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & = & -2 \\ & - & 5y & + & 5z & = & 10 \\ & & & & 0 & = & a-6 \end{array}}$$

[1] - prvu jednačinu pomnoženu sa -3 dodamo drugoj, i prvu jednačinu pomnoženu sa -2 dodamo trećoj;

[2] - drugu jednačinu pomnoženu sa -1 dodamo trećoj.

Odavde vidimo da je u slučaju $a \neq 6$ sistem kontradiktoran ($\mathcal{R}_S = \emptyset$), a u slučaju $a = 6$ je

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & = & -2 \\ & - & 5y & + & 5z & = & 10 \end{array}} \overset{[3]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & = & -2 \\ & & y & - & z & = & -2 \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} y = -2+z \\ x = 2 \end{array}}$$

[3] - drugu jednačinu delimo sa -5.

Dakle, u slučaju $a = 6$ sistem S je jednostruko neodređen, i skup rešenja mu je

$$\mathcal{R}_S = \{(2, -2+z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{(2,-2,0) + z(0,1,1) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

(lineal jednostrukosti 1, odnosno prava koja sadrži tačku $(2,-2,0)$ i paralelna je sa vektorom $(0,1,1)$, videti deo o vektorskim prostorima). □

Zadatak 4 *Diskutovati po a i b, i rešiti nad poljem $\mathbb{R}$:*

$$S: \begin{array}{rcrcrcrcl} x &+& (a+1)y &-& (a+1)z &-& au &=& 1\\ ax &+& (a+1)y &+& az &-& 2u &=& 2\\ ax &+& (a+1)y &-& 2z &+& au &=& b\\ (a-1)x && &+& 3(a+1)z &-& 4u &=& 3-b \end{array}$$

Rešenje:

$$S \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcl} (a+1)y &+& x &-& (a+1)z &-& au &=& 1\\ (a+1)y &+& ax &+& az &-& 2u &=& 2\\ (a+1)y &+& ax &-& 2z &+& au &=& b\\ && (a-1)x &+& 3(a+1)z &-& 4u &=& 3-b \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\overset{[2]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcl} (a+1)y &+& x &-& (a+1)z &-& au &=& 1\\ && (a-1)x &+& (2a+1)z &+& (a-2)u &=& 1\\ && (a-1)x &+& (a-1)z &+& 2au &=& b-1\\ && (a-1)x &+& 3(a+1)z &-& 4u &=& 3-b \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\overset{[3]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcl} (a+1)y &+& x &-& (a+1)z &-& au &=& 1\\ && (a-1)x &+& (2a+1)z &+& (a-2)u &=& 1\\ && && -(a+2)z &+& (a+2)u &=& b-2\\ && && (a-2)z &-& (a-2)u &=& 2-b \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\overset{[4]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcl} (a+1)y &+& x &-& (a+1)z &-& au &=& 1\\ && (a-1)x &+& (2a+1)z &+& (a-2)u &=& 1\\ && && -(a+2)z &+& (a+2)u &=& b-2\\ && && && 0 &=& 0 \end{array}}$$

[1] - prva i druga kolona zamene mesta;

[2] - prva jednačina se oduzima od druge i treće;

[3] - druga jednačina se oduzima od treće i četvrte;

[4] - treću jednačinu dodamo na četvrtu.

Diskusija:

(1) Za $a \notin \{-1, 1, -2\}$ i svako $b \in \mathbb{R}$ sistem je 1 puta neodređen, i zamenom unatrag dobijamo skup rešenja:

$$\mathcal{R}_S = \left\{ \left(\tfrac{1-3a}{a-1}u + \tfrac{a+2-(2a+1)(2-b)}{(a-1)(a+2)}, 2\tfrac{a^2+a-2}{a^2-1}u + \tfrac{(3-b)a^2+2(2-b)a-2}{(a^2-1)(a+2)}, u + \tfrac{2-b}{a+2}, u \right) \,\middle|\, u \in \mathbb{R} \right\}.$$

(2) Za $a = -1$ je

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcl} x && &+& u &=& 1\\ -2x &-& z &-& 3u &=& 1\\ &-& z &+& u &=& b-2 \end{array}} \overset{[5]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcl} x && &+& u &=& 1\\ &-& z &-& u &=& 3\\ &-& z &+& u &=& b-2 \end{array}}$$

$$\overset{[6]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcl} x && &+& u &=& 1\\ &-& z &-& u &=& 3\\ && && 2u &=& b-5 \end{array}}$$

[5] - prvu jednačinu pomnoženu sa 2 dodamo drugoj;

[6] - drugu jednačinu oduzmemo od treće.

Vidimo da je sistem 1 puta neodređen, i skup rešenja mu je

$$\mathcal{R}_S = \left\{ \left(\tfrac{7-b}{2}, y, -\tfrac{b+1}{2}, \tfrac{b-5}{2} \right) \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

(3) Za $a = 1$ je

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcl} 2y + x & - & 2z & - & u & = & 1 \\ & & 3z & - & u & = & 1 \\ & - & 3z & + & 3u & = & b-2 \end{array}} \overset{[7]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2z & - & u & = & 1-2y \\ & & 3z & - & u & = & 1 \\ & & & & 2u & = & b-1 \end{array}}$$

[7] - drugu jednačinu dodamo trećoj, a zatim promenljivu y prebacimo na desnu stranu jednakosti.

Vidimo da je sistem 1 puta neodređen, i skup rešenja mu je

$\mathcal{R}_S = \left\{ \left(5\frac{b+1}{6} - 2y, y, \frac{b+1}{6}, \frac{b-1}{2} \right) \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}.$

(4) Za $a = -2$ je

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcl} -y & + & x & + & z & + & 2u & = & 1 \\ & - & 3x & - & 3z & - & 4u & = & 1 \\ & & & & & & 0 & = & b-2 \end{array}}$$

(4.1) za $b \neq 2$ sistem je kontradiktoran (dakle $\mathcal{R}_S = \emptyset$);

(4.2) za $b = 2$ sistem je 2 puta neodređen jer je

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcl} -y & + & x & + & z & + & 2u & = & 1 \\ & - & 3x & - & 3z & - & 4u & = & 1 \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcl} y & - & x & = & z + 2u - 1 \\ & & x & = & -z - \frac{4}{3}u - \frac{1}{3} \end{array}}$$

i skup rešenja mu je

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_S &= \left\{ \left(-z - \tfrac{4}{3}u - \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}u - \tfrac{4}{3}, z, u \right) \;\middle|\; z, u \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ z(-1,0,1,0) + u\left(-\tfrac{4}{3}, \tfrac{2}{3}, 0, 1\right) + \left(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{4}{3}, 0, 0\right) \;\middle|\; z, u \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

□

Zadatak 5 *Diskutovati po a i rešiti sistem jednačina S :*

$$\begin{array}{rcrcl} 3x & + & ay & = & 5 \\ x & + & y & = & 2 \\ ax & + & 2y & = & 4 \end{array}$$

Rešenje: Koristeći transformacije

[1] - prve dve jednačine zamene mesta,

[2] - prvu jednačinu pomnoženu sa -3 dodamo na drugu, i prvu jednačinu pomnoženu sa $-a$ dodamo na treću,

dobijamo

$$S \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 2 \\ 3x & + & ay & = & 5 \\ ax & + & 2y & = & 4 \end{array}} \overset{[2]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 2 \\ & & (a-3)y & = & -1 \\ & & (2-a)y & = & 4-2a \end{array}}$$

(1) U slučaju $a = 3$ (pri čemu drugoj i trećoj jednačini zamenimo mesta) imamo

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 2 \\ & - & y & = & -2 \\ & & 0 & = & -1 \end{array}}$$

pa vidimo da je u ovom slučaju sistem kontradiktoran, tj. skup rešenja je $\mathcal{R}_S = \emptyset$.

(2) U slučaju $a \neq 3$ je

$$S \overset{[3]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 2 \\ & & (a-3)y & = & -1 \\ & & 0 & = & 4-2a+\frac{2-a}{a-3} \end{array}}$$

[3] - drugu jednačinu pomnoženu sa $-\frac{2-a}{a-3}$ (gde je $a \neq 3$) dodamo na treću.

Iz $0 = 4-2a+\dfrac{2-a}{a-3} = \dfrac{-2a^2+10a-12+2-a}{a-3} = \dfrac{-2a^2+9a-10}{a-3}$ i $x_{1,2} = \dfrac{-9 \pm \sqrt{81-80}}{-4}$ dobijamo diskusiju:

(2.1) za $a \neq 2 \wedge a \neq \frac{5}{2}$ sistem je kontradiktoran;

(2.2) za $a = 2$ je

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 2 \\ & - & y & = & -1 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} y = 1 \\ x = 2-y = 1 \end{array}}$$

pa vidimo da je u ovom slučaju sistem određen, tj. skup rešenja je $\mathcal{R}_S = \{(1,1)\}$;

(2.3) Za $a = \dfrac{5}{2}$ je

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 2 \\ & - & \frac{1}{2}y & = & -1 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} y = 2 \\ x = 2-y = 0 \end{array}}$$

pa vidimo da je i u ovom slučaju sistem određen, tj. skup rešenja je $\mathcal{R}_S = \{(0,2)\}$.

□

Zadatak 6 *Po parametrima $a, b \in \mathbb{R}$ diskutovati sledeće sisteme linearnih jednačina:*

$$\boxed{\begin{array}{lrcrcr} S_1: & x & + & by & = & 0 \\ & ax & - & by & = & b \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{lrcrcr} S_2: & ax & + & ay & = & b \\ & bx & - & by & = & a \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{lrcrcr} S_3: & x & + & by & = & 1 \\ & bx & + & by & = & a \end{array}}$$

Rešenje:

(S_1) Kako je determinanta sistema $D_{S_1} = \begin{vmatrix} 1 & b \\ a & -b \end{vmatrix} = -b-ab = -b(1+a) \neq 0$ za $a \neq -1$ i $b \neq 0$, sistem je određen za $a \neq -1$ i $b \neq 0$.

(1) Za $a = -1$ je

$$S_1 \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcr} x & + & by & = & 0 \\ & & 0 & = & b \end{array}}$$

[1] - prvu jednačinu dodajemo drugoj,

te u ovom slučaju imamo da je sistem za $b \neq 0$ kontradiktoran, a za $b = 0$ je 1-puta neodređen (y se može birati na proizvoljan način).

(2) Za $b = 0$ je

$$S_1 \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcr} x & = & 0 \\ ax & = & 0 \end{array}}$$

te je u ovom slučaju sistem 1-puta neodređen (y se može birati na proizvoljan način).

Dakle, sistem je:

∗ kontradiktoran: $a = -1 \wedge b \neq 0$,

* određen: $a \neq -1 \wedge b \neq 0$,
* 1-puta neodređen: $b = 0$,
* 2-puta neodređen: nikad.

(S_2) Kako je determinanta sistema $D_{S_2} = \begin{vmatrix} a & a \\ b & -b \end{vmatrix} = -ab - ab = -2ab \neq 0$ za $a \neq 0$ i $b \neq 0$, sistem je određen za $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

(1) Za $a = 0$ je

$$S_2 \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcl} & & 0 & = & b \\ bx & - & by & = & 0 \end{array}}$$

te u ovom slučaju imamo da je za $b \neq 0$ sistem kontradiktoran, a za $b = 0$ je 2-puta neodređen (i x i y se mogu birati na proizvoljan način).

(2) Za $b = 0$ je

$$S_2 \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcl} ax & + & ay & = & 0 \\ & & 0 & = & a \end{array}}$$

te u ovom slučaju imamo da je za $a \neq 0$ sistem kontradiktoran, a za $a = 0$ je 2-puta neodređen (i x i y se mogu birati na proizvoljan način).

Dakle, sistem je:

* kontradiktoran: $(a = 0 \wedge b \neq 0) \vee (a \neq 0 \wedge b = 0)$,
* određen: $a \neq 0 \wedge b \neq 0$,
* 1-puta neodređen: nikad,
* 2-puta neodređen: $a = b = 0$.

(S_3) Kako je determinanta sistema $D_{S_3} = \begin{vmatrix} 1 & b \\ b & b \end{vmatrix} = b - b^2 = b(1-b) \neq 0$ za $b \neq 1$ i $b \neq 0$, sistem je određen za $b \neq 1$ i $b \neq 0$.

(1) Za $b = 1$ je

$$S_3 \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 1 \\ & & 0 & = & a-1 \end{array}}$$

[1] - prvu jednačinu oduzmemo od druge,

te u ovom slučaju imamo da je sistem za $a \neq 1$ kontradiktoran, a za $a = 1$ je 1-puta neodređen.

(2) Za $b = 0$ je

$$S_3 \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ 0 & = & a \end{array}}$$

te u ovom slučaju imamo da je sistem za $a \neq 0$ kontradiktoran, a za $a = 0$ je 1-puta neodređen (y se može birati na proizvoljan način).

Dakle, sistem je:

* kontradiktoran: $(b = 1 \wedge a \neq 1) \vee (b = 0 \wedge a \neq 0)$,
* određen: $b \neq 1 \wedge b \neq 0$,
* 1-puta neodređen: $(b = 1 \wedge a = 1) \vee (b = 0 \wedge a = 0)$,
* 2-puta neodređen: nikad.

□