Електроенергетски софтверски инжењеринг 2. јул 2016.

**Дискретна математика**

Колоквијум II

1. Нека је дат граф $G$ са 35 грана за који важи $\delta(G) \geq 3$. Колико највише чворова може да има граф $G$?

*Решење:* На основу основне теореме теорије графова имамо $2e = \sum d(v) \geq 3n$. Уврштавањем $e = 35$ добијамо $70 \geq 3n$, тј. $n \leq \frac{70}{3}$. Сада је $n \leq 23$.

2. Ако су чворови $u$ и $v$ једини чворови непарног степена у графу $G$, доказати да су тада $u$ и $v$ повезани.

*Решење:* Ако је граф $G$ повезан тада су $u$ и $v$ повезани по дефиницији. Претпоставимо да је $G$ неповезан. Ако су $u$ и $v$ из исте компоненте повезаности графа $G$, чворови су поново повезани јер је свака компонента повезаности повезан граф. Претпоставимо зато да $u \in V(G_i)$, $v \in V(G_j)$, $i \neq j$. Сада је чвор $u$ једини чвор непарног степена у подграфу $G_i$, што је немогуће.

3. У стаблу $T$ сви суседи висећих чворова имају степен бар 3. Доказати да постоје бар два висећа чвора у $T$ који имају заједничког суседа.

*Решење:* Посматрајмо најдужи пут $u_1 u_2 \ldots u_k$ у стаблу $T$. Сада чвор $u_2$ због услова задатка мора да има још једног суседа $v$. Чвор $v$ је висећи и не налази се на путу (иначе би имали контуру). Сада чворови $u_1$ и $v$ имају заједничког суседа $u_2$.

4. Доказати да је регуларан комплетан бипартитан граф Хамилтонов.

*Решење:* Из услова регуларности добијамо $d_G(v) = k$, $\forall v \in V(G)$. Пошто је у питању комплетан бипартитан граф закључујемо да класе морају бити исте кардиналности, па је $|V(G)| = 2k$. Како је $d_G(v) = \frac{|V(G)|}{2} = k$, $\forall v \in V(G)$, на основу теореме Дирака добијамо да је граф $G$ Хамилтонов.