Софтверско инжењерство и информационе технологије 4. децембар 2016.

Дискретна математика

Колоквијум I Група А

1. Доказати да у сваком скупу од 36 природних бројева морају постојати два броја чија је разлика дељива са 35.

Решење: Остатак при дељењу броја са 35 може бити 0,1,...,34. Како имамо 35 могућности за остатке, а бира се 36 бројева, на основу Дирихлеовог принципа закључујемо да 2 броја морају имати исти остатак при дељењу са 35. Нека је

$$x \equiv k(mod\ 35)$$
$$y \equiv k(mod\ 35).$$

Сада је $x - y \equiv 0(mod\ 35)$, па је разлика та два броја дељива са 35.

2. Одредити број решења система једначина

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_7 = 35$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

у скупу природних бројева.

Решење: Увођењем смене $y_i = x_i - 1$ полазни систем постаје

$$y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_7 = 28 \quad (1)$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 7, \quad (2)$$

уз услов $y_i \geq 0$. Знамо да је број решења једначине (2) једнак $\binom{7+2}{2} = \binom{9}{2}$. Уврштавањем (2) у једначину (1) добијамо једначину $y_4 + y_5 + y_6 + y_7 = 21$, која има $\binom{21+3}{3} = \binom{24}{3}$ решења. Сада је тражено решење $\binom{9}{2} \cdot \binom{24}{3}$.

3. На колико начина се 6 књига на енглеском, 7 књига на немачком и 5 књига на руском може распоредити на полицу тако да књиге на истом језику не буду груписане све заједно?

Решење: Обележимо

S_1- књиге на енглеском стоје све заједно

S_2- књиге на немачком стоје све заједно

S_3- књиге на руском стоје све заједно.

Сада је

$$N(S_1'S_2'S_3') = 18! - 6! \cdot 13! - 7! \cdot 12! - 5! \cdot 14! + 7! \cdot 6! \cdot 7! + 6! \cdot 5! \cdot 9! + 7! \cdot 5! \cdot 8! - 3! \cdot 6! \cdot 7! \cdot 5!.$$

4. Решити систем рекурентних релација

$$a_{n+1} = a_n - b_n$$
$$b_{n+1} = a_n + 3b_n,$$

уз почетне услове $a_0 = -1, b_0 = 5$.

Решење: Ако из прве једначине изразимо $b_n = a_n - a_{n+1}$ и убацимо у другу, добијамо $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$. Из карактеристичне једначине $t^2 - 4t + 4 = 0$ је $a_n = 2^n(A + nB)$. Како је $a_1 = a_0 - b_0 = -6$, решавајући систем

$$A = -1$$
$$2A + 2B = -6$$

добијамо $a_n = -2^n(1 + 2n)$. Сада је $b_n = a_n - a_{n+1} = 2^n(5 + 2n)$.

Софтверско инжењерство и информационе технологије 4. децембар 2016.

Дискретна математика

Колоквијум I Група Б

1. Доказати да у сваком скупу од 46 природних бројева морају постојати два броја чија је разлика дељива са 45.

Решење: Остатак при дељењу броја са 45 може бити 0,1,...,44. Како имамо 45 могућности за остатке, а бира се 46 бројева, на основу Дирихлеовог принципа закључујемо да 2 броја морају имати исти остатак при дељењу са 35. Нека је

$$x \equiv k(mod\ 45)$$
$$y \equiv k(mod\ 45).$$

Сада је $x - y \equiv 0(mod\ 45)$, па је разлика та два броја дељива са 45.

2. Одредити број решења система једначина

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_7 = 30$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$

у скупу природних бројева.

Решење: Увођењем смене $y_i = x_i - 1$ полазни систем постаје

$$y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_7 = 23 \tag{1}$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 5, \tag{2}$$

уз услов $y_i \geq 0$. Знамо да је број решења једначине (2) једнак $\binom{5+2}{2} = \binom{7}{2}$. Уврштавањем (2) у једначину (1) добијамо једначину $y_4 + y_5 + y_6 + y_7 = 18$, која има $\binom{18+3}{3} = \binom{21}{3}$ решења. Сада је тражено решење $\binom{7}{2} \cdot \binom{21}{3}$.

3. На колико начина се 8 књига на енглеском, 5 књига на немачком и 6 књига на руском може распоредити на полицу тако да књиге на истом језику не буду груписане све заједно?

Решење: Обележимо

S_1- књиге на енглеском стоје све заједно

S_2- књиге на немачком стоје све заједно

S_3- књиге на руском стоје све заједно.

Сада је

$$N(S_1'S_2'S_3') = 19! - 8! \cdot 12! - 5! \cdot 15! - 6! \cdot 14! + 8! \cdot 5! \cdot 8! + 8! \cdot 6! \cdot 7! + 5! \cdot 6! \cdot 10! - 3! \cdot 8! \cdot 5! \cdot 6!.$$

4. Решити систем рекурентних релација

$$a_{n+1} = 3a_n + b_n$$
$$b_{n+1} = -a_n + b_n,$$

уз почетне услове $a_0 = 5, b_0 = -1$.

Решење: Ако из прве једначине изразимо $b_n = a_{n+1} - 3a_n$ и убацимо у другу, добијамо $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$. Из карактеристичне једначине $t^2 - 4t + 4 = 0$ је $a_n = 2^n(A + nB)$. Како је $a_1 = 3a_0 + b_0 = 14$, решавајући систем

$$A = 5$$
$$2A + 2B = 14$$

добијамо $a_n = 2^n(5 + 2n)$. Сада је $b_n = a_{n+1} - 3a_n = -2^n(1 + 2n)$.