**A** **Prezime, ime, br. indeksa:** ______________________________ **26.01.2020.**

**Studijski program E1 E2 PR SW IT IN (zaokruži) KOLOKVIJUM 2**

**Studenti koji kod pitanja do zvezdica naprave više od 8 grešaka nisu položili ispit!** U svakom zadatku dato je više odgovora, a treba zaokružiti tačne odgovore tj. brojeve ispred tačnih odgovora. U jednom istom zadatku broj tačnih odgovora može biti 0,1,2,3,...,svi. U nekim zadacima ostavljena su prazna mesta za upisivanje odgovora.

- Ako je $|\vec a| = 9$, $\vec a \perp (\vec i \times \vec j)$ i $\vec a \perp (\vec j \times \vec k)$, tada je skup **svih** mogućnosti za $\vec a \in \{$ (0,9,0), (0,-9,0) $\}$.
- Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem linearnih jednačina $x - ay = 1 \ \wedge\ ax - ay = 1$ nad poljem realnih brojeva je: **1)** određen: $a \notin \{0,1\}$ **2)** kontradiktoran: $a=0$ **3)** jednostuko neodređen: $a=1$
- Za vektore $\vec r_A = \vec a = (-2,0,2)$ i $\vec r_B = \vec b = (0,-2,2)$ izračunati: **1)** $|\vec a| =$ $2\sqrt2$ **2)** $|\vec b| =$ $2\sqrt2$ **3)** $\vec a\cdot\vec b =$ 4 **4)** $|\vec a - \vec b| =$ $2\sqrt2$ **5)** $\vec a \times \vec b =$ (4,4,4) **6)** $\sphericalangle(\vec a, \vec b) =$ $\pi/3$ **7)** $P_{\triangle OAB} =$ $2\sqrt3$
- **Neavisne** uređene trojke u vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ su: ~~1)~~ $\big((2,3,-1),(2,3,1),(2,3,0)\big)$ **2)** $\big((1,-1,9),(0,-1,9),(0,1,9)\big)$ ~~3)~~ $\big((1,2,3),(4,5,6),(5,7,9,)\big)$ ~~4)~~ $\big((1,1,1),(2,2,2),(3,3,3)\big)$
- $\left(\begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$ $\left(\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$ $\begin{vmatrix}1&2&3\\3&3&6\\4&5&9\end{vmatrix} = 0$ $\begin{bmatrix}1&2\\-2&3\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix}3&2\\-2&1\end{bmatrix}$
- Matrice linearnih transformacija $f(x,y) = (y,y,y)$, $g(x,y,z) = (y, 2x)$, $h(x,y) = y$, $s(x) = (2x, 3x)$ su:
  $M_f = \begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}$ $M_g = \begin{bmatrix}0&1&0\\2&0&0\end{bmatrix}$ $M_h = \begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}$ $M_s = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$
- Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.
  $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&3&0&0\\3&3&0&-2\end{bmatrix}$ 3 $\begin{bmatrix}1&-1&3\\-2&2&-6\end{bmatrix}$ 1 $\begin{bmatrix}-1&5\\1&-5\\-1&5\end{bmatrix}$ 1 $\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ 0 $\begin{bmatrix}-1&2&2\\0&2&0\\2&0&4\end{bmatrix}$ 3 $\begin{bmatrix}-1&0&-1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix}3\end{bmatrix}$ 1 $\begin{bmatrix}0&0\\3&9\end{bmatrix}$ 1

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

- Neka tačke $P(3,0,0), Q(0,3,0)$ i $R(0,0,3)$ pripadaju ravni $\alpha$. **1)** Bar jedan vektor $\vec m$ paralelan sa $\alpha$ je $\vec m = ($2,-2,0$)$ **2)** Bar jedan vektor $\vec n$ normalan na ravan $\alpha$ je $\vec n = ($9 , 9 , 9$)$ **3)** Napisati $(A,B,C,D) = ($9, 9, 9, -27$)$, tako da je $Ax + By + Cz + D = 0$ jednačina ravni $\alpha$. **4)** Napisati koordinate tačke $S$ ravni $\alpha$ koja je najbliža koordinatnom početku. $S($1 , 1 , 1$)$ **5)** Izračunati površinu $P_{\triangle PQR}$ trougla $PQR$. $P_{\triangle PQR} =$ $\frac{3\sqrt3}{2}$
- Odrediti sve vrednosti realnih parametara $a$ i $b$ za koje je sistem linearnih jednačina
  $$\begin{aligned} ax \ + \ ay &= 0 \\ -\ (a+1)y &= a+1 \end{aligned}$$
  **1)** kontradiktoran: ______
  **2)** određen: $a \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$
  **3)** 1 puta neodređen: $a = 0 \vee a = -1$
  **4)** 2 puta neodređen: ______
- Neka je $ABCD$ paralelogram, a $BD$ dijagonala toga paralelograma. Izraziti vektore $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ kao linearne kombinacije vektora $\vec a = \overrightarrow{AC}$ i $\vec b = \overrightarrow{BD}$.
  $\overrightarrow{AB} = (\vec a - \vec b)/2$ $\overrightarrow{BC} = \frac{\vec a + \vec b}{2}$
- Napisati $\vec x = (2,3,4)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec a = (1,0,0)$, $\vec b = (0,1,0)$ i $\vec c = (0,0,1)$: $\vec x =$ $2\vec a + 3\vec b + 4\vec c$
- Koordinate normalne projekcije $A'$ tačke $A(2,2,2)$ na ravan određenu sa $x + y + z = 3$ su: $A'($ 1 , 1 , 1 $)$
- Normalna projekcija vektora $\vec x = \vec i + 2\vec j + 3\vec k$ na pravu $\ell : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{1}$ je vektor: $\mathbf{pr}_\ell(\vec x) = ($ 2 , 2 , 2 $)$
- Odrediti vektor $\vec x\,'$ koji je kosa projekcija vektora $\vec x = \vec i - \vec j + \vec k$ na ravan $\alpha : x + y + 4z = 5$ ako su zraci projektovanja paralelni sa pravom $a : \frac{x-6}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+7}{-1}$. $\vec x\,' =$
- Napisati vektor $\vec x = \vec i - \vec j + \vec k$ kao zbir vektora od kojih je jedan paralelan sa pravom $a : \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$, a drugi paralelan sa ravni $\alpha : x + y + 4z = 0$. $\vec x$ je jednoznačno odredjen? DA NE $\vec x = ($ $) + ($ $)$
- Karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix}1&2\\4&-1\end{bmatrix}$ su (ili njihov skup je ):
  ~~1)~~ $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ **2)** $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ ~~3)~~ $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ **4)** $\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$ **5)** $\Big\{\alpha(1,1)\Big|\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\Big\} \cup \Big\{\beta(1,-2)\Big|\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\Big\}$
- Izračunati $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ ako je $\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0)$: $(\alpha,\beta,\gamma) \in \{$ $\}$
- Izračunati $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ ako je $\alpha(1,1,2) + \beta(2,2,4) + \gamma(3,3,6) = (0,0,0)$: $(\alpha,\beta,\gamma) \in \{($ 1 , 1 , -1 $)|\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\}$
- Neka su $\vec x = x_1\vec i + x_2\vec j + x_3\vec k$, $\vec i, \vec j, \vec k$ slobodni vektori i $\vec i, \vec j, \vec k$ jedinični međusobno normalni i $\alpha, \beta$ i $\gamma$ uglovi koje vektor $\vec x$ obrazuje sa redom vektorima $\vec i, \vec j, \vec k$. Tada je:
  **1)** $(\vec x\vec i)\vec i + (\vec x\vec j)\vec j + (\vec x\vec k)\vec k = x_1\vec i + x_2\vec j + x_3\vec k$ **2)** $(\vec x\vec i, \vec x\vec j, \vec x\vec k) \in \mathbb{R}^3$ **3)** Projekcija vektora $\vec x$ na pravac vektora $\vec i$ je vektor $(\vec x\vec i)\vec i$ **4)** Algebarska projekcija vektora $\vec x$ na pravac vektora $\vec i$ je broj $\vec x\vec i$ ~~5)~~ $(\vec x\vec i)\vec i + (\vec x\vec j)\vec j + (\vec x\vec k)\vec k \in \mathbb{R}^3$ **6)** $\frac{\vec x}{|\vec x|}\vec i = \cos\alpha$, $\frac{\vec x}{|\vec x|}\vec j = \cos\beta$, $\frac{\vec x}{|\vec x|}\vec k = \cos\gamma$ **7)** $\frac{x_1}{|\vec x|} = \cos\alpha$, $\frac{x_2}{|\vec x|} = \cos\beta$, $\frac{x_3}{|\vec x|} = \cos\gamma$ **8)** $(|\vec x|\cos\alpha)\vec i + (|\vec x|\cos\beta)\vec j + (|\vec x|\cos\gamma)\vec k = \vec x$, **9)** $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$

- Neka je $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ generatorna u prostoru $V$, $(c_1, c_2, \dots, c_k)$ nezavisna za prostor $V$ i $\dim V = n$. Tada je
**1)** $m \leq k \leq n$ **2)** $n \leq k \leq m$ **3)** $m \leq k$ **4)** $k \leq m \leq n$ **5)** $k \leq n \leq m$ **6)** $n \leq m \leq k$

- Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke $A(1,1,1)$, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = 18$. Odrediti $\vec{r}_C$ ako je $\overrightarrow{AB} \| \vec{a} = (1,4,8)$, $\overrightarrow{BC} \| \vec{b} = (-8,1,4)$ i ako su smerovi vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ suprotni smerovima redom vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$.
$\vec{r}_C = (1,1,1) - 18\frac{(-8,1,4)}{9} - 18\frac{(1,4,8)}{9} = (1,1,1) - (-16,2,8) - (2,8,16) = (15,-9,-23)$

- Ako je $A$ kvadratna matrica reda 7, tada je: **1)** $\det A = 0 \Leftarrow$ **rang** A$= 0$ **2)** $\det A = 0 \Leftrightarrow$ **rang** A$\leq 6$, **3)** $\det A = 0 \Rightarrow$ **rang** A$= 7$ **4)** **rang** A$= 7 \Rightarrow \det A \neq 0$, **5)** **rang** A$= 7 \Leftarrow \det A \neq 0$, **6)** **rang** A$= 7 \Leftarrow \exists A^{-1}$.

- **Svaka** linearna transformacija različita od nula transformacije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je: **1)** sirjektivna **2)** injektivna **3)** bijektivna **4)** izomorfizam **5)** ništa od prethodnog

- **Napisati bar jednu**, ukoliko postoji, linearnu transformaciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ za koju važi da:
**1)** je injektivna $f(x) = (x, 2x)$ **2)** nije injektivna $f(x) = (0,0)$ **3)** nije sirjektivna $f(x) = (0,0)$

- **Napisati bar jednu**, ukoliko postoji, linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ za koju važi da
**1)** je injektivna $f(x,y) = (x, y, x+y)$ **2)** nije injektivna $f(x,y) = (0,0)$
**3)** je sirjektivna $f(x,y) =$ **4)** nije sirjektivna $f(x,y) = (0,0)$

- **Napisati bar jednu**, ukoliko postoji, linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ za koju važi da:
**1)** je injektivna $f(x,y,z) =$ **2)** nije injektivna $f(x,y,z) = (0,0)$
**3)** je sirjektivna $f(x,y,z) = (x+y, z)$ **4)** nije sirjektivna $f(x,y,z) = (0,0)$

- Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica formata $(8,3)$ čiji elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada funkcija rang je:
**1)** $\mathsf{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ **2)** $\mathsf{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{N}$ **3)** $\mathsf{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ **4)** $\mathsf{rang} : \mathcal{M} \overset{na}{\to} \mathbb{N} \cup \{0\}$ **5)** $\mathsf{rang} : \mathcal{M} \overset{na}{\to} \{0,1,2,3\}$

- Zaokružiti one skupove $V \subseteq \mathbb{R}^3$ za koje važi $(1,0,2) \in V$: **1)** $V = Lin\Big(\{(2,0,4)\}\Big)$
**2)** $V = Lin\Big(\{(-8,10,4),(4,-5,-2)\}\Big)$ **3)** $V = Lin\Big(\{(-8,10,4),(4,-5,-2),(0,0,0)\}\Big)$
**4)** $V = Lin\Big(\{(0,-1,1),(1,1,1)\}\Big)$ **5)** $V = Lin\Big(\{(0,0,0)\}\Big)$ **6)** $V = Lin\Big(\{(2,0,3),(4,0,5)\}\Big)$
**7)** $V = Lin\Big(\{(1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)\}\Big)$

- Ako su vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ **nekolinearni** tada je: **1)** $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ **2)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
**3)** $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$ **4)** $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 2$ **5)** $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 1$ **6)** $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su nezavisni
**7)** $(\exists \lambda \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \lambda\vec{b}$ **8)** $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ **9)** $(\forall \lambda \in \mathbb{R})\ \ (\vec{a} \neq \lambda\vec{b}\ \wedge\ \lambda\vec{a} \neq \vec{b})$ **10)** $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R})\, \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0\ \wedge\ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

- Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ su **komplanarni** ako je:
**1)** $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 2$ **2)** $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ **3)** $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$ **4)** $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$
**5)** $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$ **6)** $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$ **7)** $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0\ \Rightarrow\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ **8)** $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je zavisna.