Софтверско инжењерство и информационе технологије 27. новембар 2015.

Дискретна математика

Колоквијум I Група А

1. Доказати да ако се из скупа $\{1, 2, \ldots, 11\}$ извуче 7 различитих бројева, тада ће међу извученим бројевима увек постојати два броја чији је збир 12.

Решење: Важи $\{1,2,\ldots,11\} = \{1,11\} \cup \{2,10\} \cup \{3,9\} \cup \{4,8\} \cup \{5,7\} \cup \{6\}$. Како је потребно извући 7 бројева, на основу Дирихлеовог принципа следи да из бар једног двоелементног скупа морају бити извучена оба броја. Како је збир бројева у двоелементним скуповима баш 12, тврђење је доказано.

2. На колико начина је од 4 мушкарца и 7 жена могуће изабрати делегацију у којој ће бити једнак број мушкараца и жена?

Решење: Како делегација треба да има исти број мушкараца и жена, у делегацији може бити двоје, четворо, шесторо или осморо људи. Сада је тражено решење

$$\binom{4}{1}\binom{7}{1} + \binom{4}{2}\binom{7}{2} + \binom{4}{3}\binom{7}{3} + \binom{4}{4}\binom{7}{4}.$$

3. Милица у касици има 10 новчића од 1 динар, 6 новчића од 2 динара, 5 новчића од 5 динара и 4 новчића од 10 динара. Под претпоставком да се новчићи са истом вредношћу не разликују, одредити на колико начина Милица може узети 8 новчића из касице.

Решење: Задатак се своди на решавање једначине

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8,$$

уз услове $x_1 \le 10, x_2 \le 6, x_3 \le 5, x_4 \le 4$. Обележимо $S_1 : x_1 \ge 11, S_2 : x_2 \ge 7, S_3 : x_3 \ge 6$, $S_4 : x_4 \ge 5$. Сада је

$$\begin{aligned} N(S_1'S_2'S_3'S_4') &= \binom{8+3}{3} - 0 - \binom{1+3}{3} - \binom{2+3}{3} - \binom{3+3}{3} + 0 \\ &= \binom{11}{3} - \binom{4}{3} - \binom{5}{3} - \binom{6}{3}. \end{aligned}$$

4. Ако се зна да су сви чланови низа a_n различити решити рекурентну релацију

$$a_{n+2} = a_{n+1}a_n^6, a_0 = 1, a_1 = 3.$$

Решење: Логаритмујемо једначину

$$a_{n+2} = a_{n+1}a_n^6,$$

и добијамо

$$\log_3 a_{n+2} = \log_3 a_{n+1} + 6\log_3 a_n.$$

Увођењем смене $b_n = \log_3 a_n$, добијамо следећу рекурентну релацију

$$b_{n+2} = b_{n+1} + 6b_n,$$

уз почетне услове $b_0 = \log_3 1 = 0$ и $b_1 = \log_3 3 = 1$. Нуле карактеристичне једначине $t^2 - t - 6 = 0$ су $t_1 = -2$ и $t_2 = 3$, па рекурентна релација има облик $b_n = A(-2)^n + B3^n$. Сада из почетних услова добијамо систем једначина

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -2A + 3B &= 1. \end{aligned}$$

Добијамо да је $A = -\frac{1}{5}$ и $B = \frac{1}{5}$, одатле је $b_n = \frac{3^n - (-2)^n}{5}$. Враћањем смене добијамо $a_n = 3^{\frac{3^n-(-2)^n}{5}}$.

Софтверско инжењерство и информационе технологије 27. новембар 2015.

Дискретна математика

Колоквијум I Група Б

1. Доказати да ако се из скупа $\{1, 2, \ldots, 8\}$ извуче 5 различитих бројева, тада ће међу извученим бројевима увек постојати два броја чији је збир 9.

Решење: Важи $\{1, 2, \ldots, 8\} = \{1, 8\} \cup \{2, 7\} \cup \{3, 6\} \cup \{4, 5\}$. Како је потребно извући 5 бројева, на основу Дирихлеовог принципа следи да из бар једног двоелементног скупа морају бити извучена оба броја. Како је збир бројева у двоелементним скуповима баш 9, тврђење је доказано.

2. На колико начина је од 6 мушкараца и 4 жене могуће изабрати делегацију у којој ће бити једнак број мушкараца и жена?

Решење: Како делегација треба да има исти број мушкараца и жена, у делегацији може бити двоје, четворо, шесторо или осморо људи. Сада је тражено решење

$$\binom{6}{1}\binom{4}{1} + \binom{6}{2}\binom{4}{2} + \binom{6}{3}\binom{4}{3} + \binom{6}{4}\binom{4}{4}.$$

3. Милица у касици има 10 новчића од 1 динар, 6 новчића од 2 динара, 5 новчића од 5 динара и 4 новчића од 10 динара. Под претпоставком да се новчићи са истом вредношћу не разликују, одредити на колико начина Милица може узети 10 новчића из касице.

Решење: Задатак се своди на решавање једначине

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10,$$

уз услове $x_1 \leq 10, x_2 \leq 6, x_3 \leq 5, x_4 \leq 4$. Обележимо $S_1 : x_1 \geq 11, S_2 : x_2 \geq 7, S_3 : x_3 \geq 6$, $S_4 : x_4 \geq 5$. Сада је

$$\begin{aligned} N(S_1'S_2'S_3'S_4') &= \binom{10+3}{3} - 0 - \binom{3+3}{3} - \binom{4+3}{3} - \binom{5+3}{3} + 0 \\ &= \binom{13}{3} - \binom{6}{3} - \binom{7}{3} - \binom{8}{3}. \end{aligned}$$

4. Ако се зна да су сви чланови низа a_n различити решити рекурентну релацију

$$a_{n+2} = \frac{a_n^6}{a_{n+1}}, a_0 = 1, a_1 = 3.$$

Решење: Логаритмујемо једначину

$$a_{n+2} = \frac{a_n^6}{a_{n+1}},$$

и добијамо

$$\log_3 a_{n+2} = 6 \log_3 a_n - \log_3 a_{n+1}.$$

Увођењем смене $b_n = \log_3 a_n$, добијамо следећу рекурентну релацију

$$b_{n+2} = 6b_n - b_{n+1},$$

уз почетне услове $b_0 = \log_3 1 = 0$ и $b_1 = \log_3 3 = 1$. Нуле карактеристичне једначине $t^2 + t - 6 = 0$ су $t_1 = 2$ и $t_2 = -3$, па рекурентна релација има облик $b_n = A2^n + B(-3)^n$. Сада из почетних услова добијамо систем једначина

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ 2A - 3B &= 1. \end{aligned}$$

Добијамо да је $A = \frac{1}{5}$ и $B = -\frac{1}{5}$, одатле је $b_n = \frac{2^n - (-3)^n}{5}$. Враћањем смене добијамо $a_n = 3^{\frac{2^n - (-3)^n}{5}}$.