Електроенергетски софтверски инжењеринг 8. мај 2016.

Дискретна математика

Колоквијум I Група А

1. Из скупа $\{1, 2, \ldots, 30\}$ се насумично извлачи 12 бројева. Доказати да међу извученим бројевима увек постоје два броја чији је највећи заједнички делилац већи од 1.

Решење: Важи $\{1, 2, \ldots, 30\} = \{1\} \cup \{2, 4, 6, \ldots, 30\} \cup \{3, 9, 15, 21, 27\} \cup \{5, 25\} \cup \{7\} \cup \{11\} \cup \{13\} \cup \{17\} \cup \{19\} \cup \{23\} \cup \{29\}$. Добили смо 11 дисјунктних подскупова полазног скупа, па како треба извући 12 бројева на основу Дирихлеовог принципа закључујемо да бар два броја морају бити из неког од вишеелементних скупова. Сада су тражена два броја са НЗД већим од 1 извучени бројеви из неког вишеелементног скупа.

2. На колико начина 10 дечака и 5 девојчица могу стати у круг ако две девојчице не смеју да стоје једна до друге?

Решење: Дечаке у круг можемо поређати на 9! начина. Сада имамо 10 места између дечака, па девојчице можемо распоредити на $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ начина. Сада је решење $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 9!$.

3. На колико начина је могуће извући 6 карата из стандардног шпила од 52 карте ако међу извученим картама треба да буду заступљена сва четири знака?

Решење: Ставимо

$$\begin{array}{ll} S_1\text{: нема } \heartsuit & S_3\text{: нема } \spadesuit \\ S_2\text{: нема } \diamondsuit & S_4\text{: нема } \clubsuit \end{array}$$

Решење је сада

$$N(S_1'S_2'S_3'S_4') = \binom{52}{6} - \binom{4}{1}\binom{39}{6} + \binom{4}{2}\binom{26}{6} - \binom{4}{3}\binom{13}{6} + \binom{4}{4}0.$$

4. Колико има речи дужине n над азбуком $\{0, 1, 2\}$ које садрже паран број нула?

Решење: Уведимо ознаке:

f_n - број речи дужине n које имају паран број нула
g_n - број речи дужине n које имају непаран број нула.

Сада важе идентитети $f_n + g_n = 3^n$ и $f_n = g_{n-1} + 2f_{n-1}$ одакле добијамо рекурентну релацију

$$f_{n+1} - f_n = 3^n, f_0 = 1.$$

Стављајући да је $g(x)$ генераторна функција за низ f_n, из рекурентне релације добијамо

$$\frac{g(x) - 1}{x} - g(x) = \frac{1}{1 - 3x},$$

одакле је даље

$$g(x) = \frac{1 - 2x}{(1 - x)(1 - 3x)} = \frac{1}{2(1 - x)} + \frac{1}{2(1 - 3x)}.$$

Сада је $f_n = \frac{1}{2}(3^n + 1)$.

Електроенергетски софтверски инжењеринг 8. мај 2016.

Дискретна математика

Колоквијум I Група Б

1. Из скупа $\{1, 2, \ldots, 28\}$ се насумично извлачи 11 бројева. Доказати да међу извученим бројевима увек постоје два броја чији је највећи заједнички делилац већи од 1.

Решење: Важи $\{1, 2, \ldots, 28\} = \{1\} \cup \{2, 4, 6, \ldots, 30\} \cup \{3, 9, 15, 21, 27\} \cup \{5, 25\} \cup \{7\} \cup \{11\} \cup \{13\} \cup \{17\} \cup \{19\} \cup \{23\}$. Добили смо 10 дисјунктних подскупова полазног скупа, па како треба извући 11 бројева на основу Дирихлеовог принципа закључујемо да бар два броја морају бити из неког од вишеелементних скупова. Сада су тражена два броја са НЗД већим од 1 извучени бројеви из неког вишеелементног скупа.

2. На колико начина 12 девојчица и 6 дечака могу стати у круг ако два дечака не смеју да стоје један до другог?

Решење: Девојчице у круг можемо поређати на 11! начина. Сада имамо 12 места између девојчица, па дечаке можемо распоредити на $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ начина. Сада је решење $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 11!$.

3. На колико начина је могуће извући 7 карата из стандардног шпила од 52 карте ако међу извученим картама треба да буду заступљена сва четири знака?

Решење: Ставимо

$$\begin{array}{ll} S_1\text{: нема } \heartsuit & S_3\text{: нема } \spadesuit \\ S_2\text{: нема } \diamondsuit & S_4\text{: нема } \clubsuit \end{array}$$

Решење је сада

$$N(S_1'S_2'S_3'S_4') = \binom{52}{7} - \binom{4}{1}\binom{39}{7} + \binom{4}{2}\binom{26}{7} - \binom{4}{3}\binom{13}{7} + \binom{4}{4}0.$$

4. Колико има речи дужине n над азбуком $\{0, 1, 2\}$ које садрже непаран број нула?

Решење: Уведимо ознаке:

f_n - број речи дужине n које имају непаран број нула

g_n - број речи дужине n које имају паран број нула.

Сада важе идентитети $f_n + g_n = 3^n$ и $f_n = g_{n-1} + 2f_{n-1}$ одакле добијамо рекурентну релацију

$$f_{n+1} - f_n = 3^n, f_0 = 0.$$

Стављајући да је $g(x)$ генераторна функција за низ f_n, из рекурентне релације добијамо

$$\frac{g(x) - 0}{x} - g(x) = \frac{1}{1 - 3x},$$

одакле је даље

$$g(x) = \frac{x}{(1 - x)(1 - 3x)} = -\frac{1}{2(1 - x)} + \frac{1}{2(1 - 3x)}.$$

Сада је $f_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$.