ВЕЖБЕ 7

ГЕНЕРАТОРНЕ ФУНКЦИЈЕ

Генераторне функције → бесконачном низу реалних бројева додељујемо непрекидну ф-ју

$(1,1,1,\dots,1,\dots)$ $\qquad 1+x+x^2+\dots+x^n+\dots = \frac{1}{1-x}$ ← затворена форма

Нека је $(a_0,a_1,a_2,\dots,a_n,\dots)$ низ реалних бројева. Генераторна ф-ја овог низа је степени ред

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

$(a_0,a_1,a_2,\dots)$ $\quad g_a(x)$

$(b_0,b_1,b_2,\dots)$ $\quad g_b(x)$

- Сабирање

$(a_0+b_0, a_1+b_1, a_2+b_2,\dots)$

$$\begin{aligned} g(x) &= (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \dots \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots \\ &= g_a(x) + g_b(x) \end{aligned}$$

- Множење низа реалним бројем α

$\alpha(a_0,a_1,a_2,\dots) = (\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2,\dots)$

$$\begin{aligned} g(x) &= \alpha a_0 + \alpha a_1 \cdot x + \alpha a_2 \cdot x^2 + \dots \\ &= \alpha(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) \\ &= \alpha g_a(x) \end{aligned}$$

- $\alpha(a_0,a_1,a_2,\dots) + \beta(b_0,b_1,b_2,\dots) = (\alpha a_0+\beta b_0, \alpha a_1+\beta b_1, \alpha a_2+\beta b_2,\dots)$

$g(x) = \alpha g_a(x) + \beta g_b(x)$

$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots)$ $n \in N$

$g_a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \dots$

• померање низа **удесно**

$(a_0, a_1, a_2, \dots) \to (\underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_{n}, a_0, a_1, a_2, \dots)$

$$g(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n+1} + a_2 x^{n+2} + \dots$$
$$= x^n (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)$$
$$= x^n g_a(x)$$

• померање низа **улево**

$(a_0, a_1, a_2, \dots) \to (a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots)$

$$g(x) = a_n + a_{n+1} x + a_{n+2} x^2 + \dots$$
$$= \frac{g_a(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \dots - a_{n-1} x^{n-1}}{x^n}$$

• замена променљиве x са αx

$g_a(\alpha x) \to a_0 (\alpha x)^0 + a_1 (\alpha x)^1 + a_2 (\alpha x)^2 + \dots = a_0 + a_1 \alpha x + a_2 \alpha^2 x^2 + \dots$

Добијамо низ $(a_0, a_1 \alpha, a_2 \alpha^2, a_3 \alpha^3, \dots)$

• замена променљиве x са x^n

$g_a(x^n) \to a_0 (x^n)^0 + a_1 (x^n)^1 + a_2 (x^n)^2 + \dots = a_0 + a_1 x^n + a_2 x^{2n} + \dots$

Добија се низ $(a_0, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1 \text{ нула}}, a_1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1 \text{ нула}}, a_2, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1 \text{ нула}}, a_3, 0, \dots)$

$g_a(x^3) \to (a_0, 0, 0, a_1, 0, 0, a_2, 0, 0, a_3, 0, 0, a_4, 0, \dots)$

- **Диференцирање**

$g_a'(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots)' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$

$\to (a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, na_n, \dots)$

На k-том месту у низу је члан $(k+1)a_{k+1}$

- **Интеграљење**

$\int_0^x g_a(t)\,dt = \int_0^x (a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n + \dots)\,dt = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \dots$

$\to (0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \dots, \frac{a_n}{n+1}, \dots)$

На k-том месту $(k \geq 1)$ у низу је члан $\frac{a_{k-1}}{k}$

- **Множење** генераторних функција

$(a_0, a_1, a_2, \dots)$ $g_a(x)$

$(b_0, b_1, b_2, \dots)$ $g_b(x)$

$g_a(x) \cdot g_b(x)$ је генераторна ф-ја низа $(c_0, c_1, c_2, c_3, \dots)$

$c_0 = a_0b_0$, $c_1 = a_0b_1 + a_1b_0$, $c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$, …. $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}$

1. Одредити генераторне функције за низове са општим чланом → тражимо затворене форме генераторних функција

а) $a_k = k+1$

$(1,2,3,4,5,\ldots)$

$g(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$

$(1,1,1,\ldots)$ $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

$$= \frac{1}{1-x}$$

$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$

$$\Rightarrow g(x) = f'(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

б) $a_k = k$

$(0,1,2,3,4,\ldots)$

Ако транслирамо низ из а) за један корак удесно, добијамо низ $a_k = k$

$$g(x) = x \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

c) $a_k = 2k^2$

$(2\cdot 0, 2\cdot 1^2, 2\cdot 2^2, 2\cdot 3^2, \dots) = 2(0, 1^2, 2^2, 3^2, \dots)$

Знамо да је генераторна ф-ја за низ $b_k = k$ $(0,1,2,3,\dots)$ дата са $g_b(x) = 0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$
$= \frac{x}{(1-x)^2}$

$g_b'(x) = 1 + 2\cdot 2x + 3\cdot 3x^2 + 4\cdot 4x^3 + \dots$
$= 1 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \dots$

Генераторна ф-ја $g_b'(x)$ генерише низ $(1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots)$

$g_b'(x) = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{x'(1-x)^2 - x((1-x)^2)'}{(1-x)^4} = \frac{(1-x)^2 + x\cdot 2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$

Генераторна ф-ја низа $(0, 1^2, 2^2, 3^2, \dots)$ је $x \cdot \frac{1+x}{(1-x)^3}$ (претходни низ смо померили један корак удесно)

Генераторна ф-ја траженог низа $a_k = 2k^2$ је дата са

$g(x) = 2\cdot x \cdot \frac{1+x}{(1-x)^3}$

d) $a_k = (k-1)k(k+1)$

Посматрајмо низ $b_k = k+1$ $(1, 2, 3, \dots)$

$g_b(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots \overset{a)}{=} \frac{1}{(1-x)^2}$

- $g_c(x) = g_b'(x)$

$c_k = (k+1)\, b_{k+1} = (k+1)((k+1)+1) = (k+1)(k+2)$

$g_c(x) = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \left((1-x)^{-2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3}$

- $g_d(x) = g_c'(x)$

$d_k = (k+1)\, c_{k+1} = (k+1)((k+1)+1)((k+1)+2) = (k+1)(k+2)(k+3)$

$g_d(x) = \left(\frac{2}{(1-x)^3}\right)' = 2(-3)(1-x)^{-4}(-1) = \frac{6}{(1-x)^4}$

$k=0 \quad d_0 = 1\cdot 2\cdot 3 = 6 \quad a_0 = 0$

$k=1 \quad d_1 = 2\cdot 3\cdot 4 \quad a_1 = 0$

$k=2 \quad d_2 = 3\cdot 4\cdot 5 \quad a_2 = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$

Низ $a_k = (k-1)k(k+1)$ добијамо померањем низа $d_k = (k+1)(k+2)(k+3)$ за два корака удесно

$\Rightarrow g(x) = x^2 \cdot g_d(x) = \frac{6x^2}{(1-x)^4}$

2. Одредити генераторну функцију низа задатог са $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 4a_n$, $a_0=2, a_1=-1$.

Нека је $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ тражена генераторна функција.

$a_n \quad a_{n+1} \quad a_{n+2}$

Померање УЛЕВО

За одговарајуће генераторне функције важи р.р.

$$\frac{g(x) - a_0 - a_1x}{x^2} = 2\,\frac{g(x) - a_0}{x} - 4g(x) \;\Big/ \cdot x^2$$

$$g(x) - 2 + x = 2x\,(g(x) - 2) - 4x^2 g(x)$$

$$g(x) - 2x\,g(x) + 4x^2 g(x) = -4x - x + 2$$

$$g(x)\,(1 - 2x + 4x^2) = 2 - 5x$$

$$g(x) = \frac{2 - 5x}{1 - 2x + 4x^2}$$

3. Користећи генераторне функције решити рекурентну релацију $a_n=2a_{n-1}+1,\ a_0=0$

$a_n=2a_{n-1}+1$

$g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots$

$a_{n-1} \rightarrow a_n$

померање УДЕСНО

Рекурентну релацију $a_n=2a_{n-1}+1,\ n\geqslant 1$ можемо записати као р.р. $\boxed{a_{n+1}=2a_n+1,\ n\geqslant 0}$

$a_n \leftarrow a_{n+1}$

померање УЛЕВО!

$$\frac{g(x)-a_0}{x}=2\cdot g(x)+\frac{1}{1-x} \quad \Big/ \cdot x(1-x)$$

$$g(x)(1-x)=2x(1-x)g(x)+x$$

$$g(x)(1-x)-2x(1-x)g(x)=x$$

$$g(x)(1-x)(1-2x)=x$$

$$g(x)=\frac{x}{(1-x)(1-2x)}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1-2x}=\frac{A(1-2x)+B(1-x)}{(1-x)(1-2x)}$$

$$\begin{array}{l} -2A-B=1 \\ A+B=0 \\ \hline -A=1 \Rightarrow A=-1 \\ B=1 \end{array}$$

$$\frac{1}{\underset{\overset{\shortparallel}{1-(-2x)}}{1+2x}} \Rightarrow (-2)^n$$

$$g(x)=-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-2x}$$

$\frac{1}{1-x}$ је генераторна ф-ја низа са општим чланом 1

$\frac{1}{1-2x}$ је генераторна ф-ја низа са општим чланом 2^n

$$\Rightarrow \boxed{a_n=-1+2^n=2^n-1}$$

II начин:

$a_n = 2a_{n-1} + 1,\ n \geq 1,\ a_0 = 0$

$a_{n-1} \curvearrowright a_n$

померање удесно!

$a_n:\ g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$

$a_{n-1}:\ xg(x) = \quad a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \dots$

$1:\ \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

$a_n - 2a_{n-1} - 1 = 0$

$$g(x) - 2xg(x) - \frac{1}{1-x} = \underbrace{(a_0 - 1)}_{=-1} + \underbrace{(a_1 - 2a_0 - 1)}_{=0} x + \underbrace{(a_2 - 2a_1 - 1)}_{=0} x^2 + \underbrace{(a_3 - 2a_2 - 1)}_{=0} x^3 + \dots$$

$g(x)(1-2x) = -1 + \frac{1}{1-x}$

$g(x)(1-2x) = \frac{-1+x+1}{1-x} = \frac{x}{1-x}$

$g(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$ ... даље задатак решавамо исто као малопре.

$a_n = a_{n-2} + 4n$

$a_0 = 3,\ a_1 = 2$

померање улево:

$a_{n+2} = a_n + 4 \cdot (n+2)$!

ДОМАЋИ

1. Колико има речи дужине n над азбуком $\{0,1,2\}$ које садрже паран број нула?

f_n - број речи дужине n које садрже паран број нула

g_n - број речи дужине n које садрже непаран број нула

1° $1\ \boxed{\ n-1\ }\ f_{n-1}$

2° $2\ \boxed{\ n-1\ }\ f_{n-1}$

3° $0\ \boxed{\qquad}\ \cancel{(n-1)\ f_{n-2}}\ g_{n-1}$

$$f_n = 2f_{n-1} + g_{n-1}$$

$$f_n + g_n = 3^n \Rightarrow g_{n-1} = 3^{n-1} - f_{n-1}$$

$$f_n = 2f_{n-1} + 3^{n-1} - f_{n-1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f_n &= f_{n-1} + 3^{n-1} \\ f_0 &= 1 \end{aligned}}$$

НЕХОМОГЕНА р.р.

(празна реч)

Напомена:

$g_0 = 0$

$$f_{n+1} = f_n + 3^n, \quad f_0 = 1$$

$$\frac{g(x) - 1}{x} - g(x) = \frac{1}{1-3x} \quad / \cdot x$$

$$g(x) - 1 - x g(x) = \frac{x}{1-3x}$$

$$g(x)(1-x) = 1 + \frac{x}{1-3x}$$

$$g(x)(1-x) = \frac{1-3x+x}{1-3x}$$

$$g(x) = \frac{1-2x}{(1-x)(1-3x)} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1-3x)}$$

$$f_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3^n = \frac{3^n + 1}{2}$$

2. Доказати да је у сваком скупу број подскупова са непарним бројем елемената једнак броју подскупова са парним бројем елемената.

Нека је S произвољан скуп и нека $x \in S$

$\mathcal{A} = \{ A \in S \mid |A| \equiv 0 \pmod 2 \}$

$\mathcal{B} = \{ B \subseteq S \mid |B| \equiv 1 \pmod 2 \}$

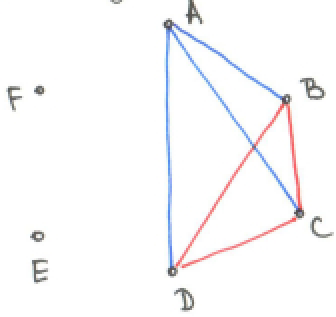
Тражимо пресликавање $f: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ које је бијекција.

Посматрајмо $A \in \mathcal{A}$ и дефинишемо

$$f(A) = \begin{cases} A \cup \{x\}, & x \notin A \\ A \setminus \{x\}, & x \in A \end{cases}$$

$f: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ је бијективно пресликавање $\Rightarrow |\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$

3. У групи од шест особа сваке две се или познају или не познају. Доказати да се међу њима увек могу наћи бар 3 особе тако да се све три међусобно познају или међусобно не познају.



Поставимо особе у темена правилног шестоугла

Обојимо дужи: познају се - плаво
не познају се - црвено

Задатак је готов уколико успемо да пронађемо једнобојни Δ

Уочимо особу A: $\left.\begin{array}{l}\text{5 дужи}\\ \text{2 боје}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{УДП}}$ бар 3 дужи које излазе из темена су обојене истом бојом

Нека су, б.у.о., дужи AB, AC и AD обојене плавом бојом.

Уколико је бар једна од дужи BC, CD или BD плава, добили смо Δ.

Уколико ниједна од све 3 дужи није плава, све три су црвене, и формирају Δ.

4. Колико има шестоцифрених бројева у којима парне и непарне цифре долазе наизменично?

1° прва цифра парна

$$\underset{п}{\underline{4}}\cdot\underset{н}{\underline{5}}\cdot\underset{п}{\underline{5}}\cdot\underset{н}{\underline{5}}\cdot\underset{п}{\underline{5}}\cdot\underset{н}{\underline{5}} \qquad 4\cdot 5^5$$

$+$

2° прва цифра непарна

$$\underset{н}{\underline{5}}\cdot\underset{п}{\underline{5}}\cdot\underset{н}{\underline{5}}\cdot\underset{п}{\underline{5}}\cdot\underset{н}{\underline{5}}\cdot\underset{п}{\underline{5}} \qquad 5\cdot 5^5$$

II начин: $9\cdot 5^5$

Прву цифру бирамо произвољно, а затим даље бирамо цифре да буду парно-непарно или непарно-парно у зависности од парности прве цифре.

5. Колико има седмоцифрених бројева који не садрже цифре 0,4,8, дељиви су са 4 и сваке две суседне цифре су међусобно различите?

1,2,3,5,6,7,9

Број је дељив са 4 ако му је двоструки завршетак дељив са 4.

12, 16, 32, 36, 52, 56, 72, 76, 92, 96

→ 10 двоструких завршетака који су дељиви са 4

$$\underset{6}{\_}\ \underset{6}{\_}\ \underset{6}{\_}\ \underset{6}{\_}\ \underset{6}{\_}\ \underbrace{\_\ \_}_{10} = 6^5 \cdot 10$$

6. Три студента деле собу. Они на располагању имају 4 шољице, 5 тањирића и 6 кашичица. На колико начина они могу да попију чај, ако сваки треба да користи једну шољицу, један тањирић и једну кашичицу?

4  5  6 

$4 \cdot 5 \cdot 6$ први студент

принцип производа

$3 \cdot 4 \cdot 5$ други студент

$2 \cdot 3 \cdot 4$ трећи студент

$(4 \cdot 5 \cdot 6) \cdot (3 \cdot 4 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 4)$

7. На колико начина се на шаховску таблу може поређати 8 независних топова (таквих да се никоја два не туку) ако

а) топове не разликујемо

Сваки топ заузима једну врсту и једну колону.

$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 1 = 8!$

Фиксирамо топове у врсте и у оквиру сваке врсте бирамо колону у којој се топ налази.

б) су топови нумерисани

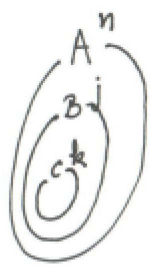
$8! \cdot 8!$

На 8! начина бирамо поља на којима ће бити топови (задатак под а)), а затим на 8! начина размештамо топове на изабрана поља.

8. Доказати да важи $\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j}\binom{j}{k} = \binom{n}{k} 2^{n-k}$, за природне бројеве $n \geq k$.

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j}\binom{j}{k} = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{k}\binom{n-k}{j-k} = \binom{n}{k} \sum_{j=k}^{n} \binom{n-k}{j-k} = \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} = \binom{n}{k} 2^{n-k}$$

смена $i = j-k$



9. Колико има пермутација цифара 0,1,...,9 у којима је прва цифра мања од 8, а последњ
већа од 1?

S_1: пермутације код којих је прва цифра већа или једнака од 8

S_2: пермутације код којих је последња цифра мања или једнака од 1

$$N(S_1'S_2') = 10! - 2\cdot 9! - 9!\cdot 2 + 2\cdot 8!\cdot 2$$

$$N(S_1'S_2') = N - N(S_1) - N(S_2) + N(S_1S_2)$$

$N = 10!$

$N(S_1) = \underbrace{2}_{8\vee 9}\cdot 9!$ $\quad N(S_2) = 9!\cdot \underbrace{2}_{0\vee 1}$ $\quad N(S_1S_2) = \underbrace{2}_{8\vee 9}\cdot 8!\cdot \underbrace{2}_{0\vee 1}$

10. У кантини кафа кошта 1 динар, а кисела вода и сок по 2 динара. На колико начина се у кантини може потрошити стипендија од n динара ако је битан редослед којим се наручују пића?

К - кафа
В - вода
С - сок

f_n - број начина да се потроши стипендија од n динара

1° К f_{n-1}

2° В f_{n-2}

3° С f_{n-2}

$$f_n = f_{n-1} + 2f_{n-2}$$

$f_1 = 1$ (К)

$f_2 = 3$ (КК, В, С)

$(f_0 = 1)$

За домаћи завршити задатак !!