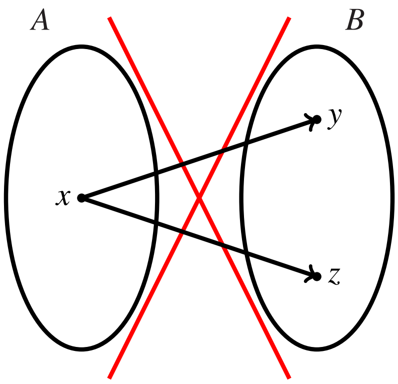
Funkcije

Definicija 1 *Relacija $f \subseteq A \times B$ je* ***funkcija*** *ako i samo ako*

$$(\forall x \in A)(\forall y, z \in B)\Big((x, y) \in f \land (x, z) \in f\Big) \Rightarrow y = z.$$

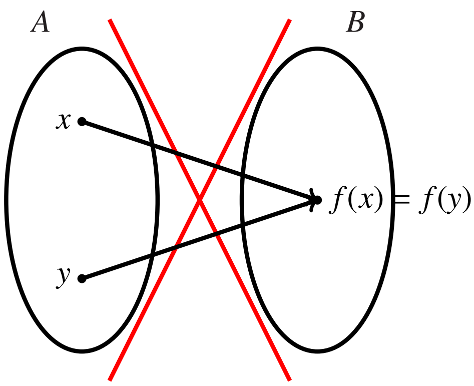
Kraće rečeno, ako su $a, b \in A$ i $a = b$, onda je i $f(a) = f(b)$. Slikovno, sledeća situacija je nedopustiva za funkciju:



Primer 1 $f = \{(1, x), (1, y), (3, z)\}$ *nije funkcija!*

★ Skup svih prvih komponenti funkcije f naziva se ***domen*** funkcije (skup originala) i označava se sa $\mathcal{D}(f)$, dok se skup svih drugih komponenti naziva ***skup slika*** i označava sa $\mathcal{A}(f)$.

Definicija 2 *Funkcija je* ***injektivna*** *(ili $1-1$) ako i samo ako ne postoje dva para čije su prve komponente različite, a druge iste.*



Definicija 3 *f je* ***funkcija skupa*** *A* ***u skup*** *B ako*

- *f je funkcija*
- *$\mathcal{D}(f) = A$ (Domen je jednak skupu A.)*
- *$\mathcal{A}(f) \subseteq B$ (Skup slika je podskup skupa B.)*

Koristimo oznaku $f : A \to B$.

Definicija 4 *Funkcija* $f : A \to B$ *je* **sirjektivna** *ako i samo ako* $\mathcal{A}(f) = B$. *Koristimo oznaku* $f : A \xrightarrow{na} B$

★ Ako je f injektivna funkcija skupa A u skup B, onda koristimo oznaku $f : A \xrightarrow{1-1} B$.

Definicija 5 *Ako je* $f : A \xrightarrow[na]{1-1} B$, *onda je funkcija* **bijektivna**.

Definicija 6 *Ako je inverzna relacija* f^{-1} *funkcije* f *(koju dobijamo tako što se u svakom paru zamene mesta prvoj i drugoj komponenti) takođe funkcija, onda je* f^{-1} **inverzna funkcija** *funkcije* f.

Primer 2 *Za* $f = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$ *inverzna funkcija je* $f^{-1} = \{(a,1),(b,2),(c,3)\}$.

Teorema 1 *Za funkciju* f *postoji njoj inverzna* f^{-1} *ako i samo ako je* f *injektivna.*

Zadatak 1 *Dati su skupovi* $A = \{1,2,3,4\}$ *i* $B = \{a,b,c\}$ *i binarne relacije*

$f_1 = \{(1,a),(2,b)\}$

$f_2 = \{(1,a),(2,b),(3,c),(4,a),(2,a)\}$

$f_3 = \{(1,c),(2,c),(3,b),(4,b)\}$

$f_4 = \{(1,c),(2,b),(3,b),(4,a)\}$

Za sve $i \in \{1,2,3,4\}$ *ispitati:*

a) da li su f_i *funkcije;*

b) da li su f_i *funkcije skupa A u skup* B;

c) da li su f_i *injektivne;*

d) da li su f_i *sirjektivne funkcije skupa A u skup* B;

e) da li se može definisati injektivna funkcija skupa A u skup B?

Rešenje:

	f je funkcija	$f_i : A \to B$	$1-1$	$f_i : A \xrightarrow{na} B$
f_1	DA	NE	DA	NE
f_2	NE	NE	NE	NE
f_3	DA	DA	NE	NE
f_4	DA	DA	NE	DA

$\underline{f_1}$ a) Jeste funkcija, dva uređena para sa različitom prvom komponentom.

b) Pošto nema uređenog para sa prvom komponentom 3 i 4, f_1 nije funkcija skupa A u skup B.

c) Jeste injektivna, razlikuju se druge komponente.

d) Pošto nije funkcija skupa A u skup B nije ni sirjektivna funkcija skupa A u skup B.

$\underline{f_2}$ Nije funkcija jer $(2,b) \in f_2$ i $(2,a) \in f_2$. Pošto f_2 nije funkcija onda ne zadovoljava osobine funkcije.

$\underline{f_3}$ Jeste funkcija skupa A u skup B.

c) Nije $1-1$ jer $(3,b) \in f_3$ i $(4,b) \in f_3$.

d) Nije sirjektivna jer je njen skup slika pravi podskup od B.

$\underline{f_4}$ Jeste sirjektivna funkcija skupa A u skup B pošto joj je domen ceo skup A, a kodomen ceo skup B. Nije injektivna jer $(2,b) \in f_3$ i $(3,b) \in f_3$.

e) Ne može se definisati injektivna funkcija skupa A u skup B, pošto skup A ima više elemenata od skupa B tako da će uvek bar 2 originala imati istu sliku.

□

★ Da bi se mogla definisati injektivna funkcija skupa A u skup B mora da važi $|A| \leq |B|$, tj. skup A ne sme imati više elemenata nego skup B.

★ Relacije možemo zapisati i na sledeći način

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \end{pmatrix},$$

što znači da je relacija f sačinjena od uređenih parova oblika (a_i, b_i) za $i \in \{1,2,3,...,n\}$.

Relacija f je:

- funkcija akko su svaka dva elementa u prvoj vrsti različita;
- funkcija iz skupa A u skup B akko je $\{a_1, a_2, ..., a_n\} = A$ i $\{b_1, b_2, ..., b_n\} \subseteq B$;
- injektivna funkcija ako i samo ako su i u drugoj vrsti svaka dva elementa različita;
- sirjektivna funkcija iz skupa A u skup B ako i samo ako je $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$.

Zadatak 2 *Dati su skupovi $A = \{1,2,3\}$ i $B = \{a,b,c,d\}$ i binarne relacije*

$f_1 = \{(1,b),(2,a),(3,c),(2,d)\}$ $\quad$ $f_3 = \{(1,c),(2,b),(3,d)\}$

$f_2 = \{(2,b),(3,b)\}$ $\quad$ $f_4 = \{(1,c),(2,a)\}$

Za sve $i \in \{1,2,3,4\}$ ispitati:

a) da li su f_i funkcije;

b) da li su f_i funkcije skupa A u skup B;

c) da li su f_i injektivne;

d) da li su f_i sirjektivne funkcije skupa A u skup B;

e) da li se može definisati sirjektivna funkcija skupa A u skup B?

Rešenje:

	f je funkcija	$f_i : A \to B$	$1-1$	$f_i : A \xrightarrow{na} B$
f_1	NE	NE	NE	NE
f_2	DA	NE	NE	NE
f_3	DA	DA	DA	NE
f_4	DA	NE	DA	NE

$\underline{f_1}$ Nije funkcija, pošto $(2,a) \in f_1$ i $(2,d) \in f_1$. Kako nije funkcija, f_1 ne zadovoljava osobine funkcije.

$\underline{f_2}$ *a*) Jeste funkcija.

b) i *d*) Nije funkcija skupa A u skup B jer ne postoji uređen par čija je prva komponenta 1, pa samim tim ne može biti ni sirjektivna funkcija skupa A u skup B.

c) Nije injektivna jer 2 i 3 imaju istu sliku.

$\underline{f_3}$ *a*) i *b*) Jeste funkcija, čiji je domen skup A, a skup slika je podskup skupa B.

c) Jeste injektivna.

d) Nije sirjektivna funkcija skupa A u skup B jer $c \in B$ nema svoj original.

$\underline{f_4}$ Jeste funkcija, ali nije funkcija skupa A u skup B jer $3 \in A$ nema svoju sliku, pa samim tim nije ni sirjektivna funkcija skupa A u skup B. Injektivnost je zadovoljena.

e) Ne može se definisati, pošto skup A ima manje elemenata od skupa B tako da će se jedan element skupa A preslikati u 2 elementa skupa B, ako bismo želeli da ispunimo uslov sirjektivnosti, čime narušavamo osobinu funkcije.

□

★ Da bi se mogla definisati sirjektivna funkcija skupa A u skup B mora biti $|A| \geq |B|$, tj. u skupu A mora biti bar onoliko elemenata koliko ih je u skupu B.

Zadatak 3 *Za sledeće binarne relacije*

$$f_1 = \{(x, x+1) \,|\, x \in \mathbb{N}\} \qquad f_3 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$

$$f_2 = \{(x, x-1) \,|\, x \in \mathbb{N}\} \qquad f_4 = \{(x+1, x) \,|\, x \in \mathbb{N}\}$$

ispitati za sve $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$

a) da li su f_i funkcije;

b) da li su f_i funkcije skupa $\mathbb{N}$ u skup $\mathbb{N}$;

c) da li su f_i funkcije skupa $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ u skup $\mathbb{N}$;

d) da li su f_i injektivne funkcije skupa $\mathbb{N}$ u skup $\mathbb{N}$;

e) da li su f_i sirjektivne funkcije skupa $\mathbb{N}$ u skup $\mathbb{N}$;

f) da li su f_i bijektivne funkcije skupa $\mathbb{N}$ u skup $\mathbb{N}$?

Rešenje:

	f_i je funkcija	$f_i:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$	$f_i:\mathbb{N}\setminus\{1\}\to\mathbb{N}$	$f_i:\mathbb{N}\xrightarrow{1-1}\mathbb{N}$	$f_i:\mathbb{N}\xrightarrow{na}\mathbb{N}$	$f_i:\mathbb{N}\xrightarrow[na]{1-1}\mathbb{N}$
f_1	DA	DA	NE	DA	NE	NE
f_2	DA	NE	NE	NE	NE	NE
f_3	DA	NE	NE	NE	NE	NE
f_4	DA	NE	DA	NE	NE	NE

Sve četiri binarne relacije jesu funkcije.

$\underline{f_1}$ b) Jeste funkcija skupa $\mathbb{N}$ u skup $\mathbb{N}$, pošto je skup prvih komponenti ceo skup prirodnih brojeva, a skup dugih komponenti je $\mathbb{N}\setminus\{1\}$, što je podskup od $\mathbb{N}$.

c) Nije, pošto je domen skup prirodnih brojeva, nadskup skupa $\mathbb{N}\setminus\{1\}$.

d) Zbog načina definisanja jasno se vidi da jeste $1-1$, pa je uz b) dobijeno $f_1:\mathbb{N}\xrightarrow{1-1}\mathbb{N}$.

e) Nije sirjektivna pošto je skup slika $\mathbb{N}\setminus\{1\}$.

f) Pošto nije sirjektivna nije ni bijektivna.

$\underline{f_2}$ Ako počnemo sa brojem 1 vidimo da je prvi uređen par $(1,0)$ u f_2 i da su domen skup $\mathbb{N}$ i skup slika jeste skup $\mathbb{N}_0$. Znajući ovu činjenicu lako zaključujemo da funkcija f_2 ne ispunjava niti jednu od osobina traženih u zadatku.

$\underline{f_3}$ Posmatrajući tri uređena para koji su u f_3 jasno vidimo da to jeste funkcija, ali i da domen i skup slika ove funkcije nisu beskonačni skupovi koji su nam potrebni za preostale osobine.

$\underline{f_4}$ Još jedna funkcija zadata preko svoje inverzne čiji pravi oblik je $f_4=\{(x,x-1)|x\in\mathbb{N}\setminus\{1\}\}$.

Iz oba načina zapisivanja jasno se vidi da je prvi urđeni par $(2,1)$, domen je $\mathbb{N}\setminus\{1\}$, a skup slika $\mathbb{N}$. Pošto ovo nije funkcija skupa $\mathbb{N}$ u skup $\mathbb{N}$ svi odgovori su negativni osim c).

Napomenimo da je $f_4:\mathbb{N}\setminus\{1\}\xrightarrow[na]{1-1}\mathbb{N}$

□

Definicija 7 *Neka su A,B i C neprazni skupovi i $f:A\to B$ i $g:B\to C$ date funkcije. Funkciju $g\circ f$ skupa A u skup C defnisanu sa*

$$(\forall x\in A)(g\circ f)(x)=g(f(x))$$

nazivamo **kompozicija funkcija** *g i f.*

Zadatak 4 *Neka je $A=\{1,2,3\}$ i neka su $f,g:A\to A$ zadate sa $f=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ i $g=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$. Odrediti (ako je moguće): f^{-1}, g^{-1}, $f\circ f$, $f\circ g$, $g\circ f$, $(g\circ f)^{-1}$ i $f^{-1}\circ g^{-1}$.*

Rešenje: $f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad (g \circ f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

□

★ Vidimo da kompozicija funkcija nije komutativna operacija, tj. u opštem slučaju je

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

Međutim, kompozicija je asocijativna operacija, odnosno za sve funkcije f, g, h važi

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

(ako su odgovarajuće kompozicije definisane). Takođe, uvek važi

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Zadatak 5 *Za funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisane sa $f(x) = 2x + 3$ i $g(x) = x^2 - 2$ naći funkcije*

a) $(f \circ g)(x)$

b) $(g \circ f)(x)$

c) $(f \circ f)(x)$

d) $(g \circ g)(x)$

e) $f^{-1}(x)$

Rešenje:

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 2) = 2(x^2 - 2) + 3 = 2x^2 - 1$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = (2x + 3)^2 - 2 = 4x^2 + 12x + 7$

c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2x + 3) = 2(2x + 3) + 3 = 4x + 9$

d) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x^2 - 2) = (x^2 - 2)^2 - 2 = x^4 - 4x^2 + 2$

e) Kako je $f = \{(x, 2x + 3) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$, to je $f^{-1} = \{(2x + 3, x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$.
Sada je

$$2x + 3 = t \Rightarrow \frac{t - 3}{2} = x \Rightarrow f^{-1} = \left\{\left(t, \frac{t-3}{2}\right) \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\left(x, \frac{x-3}{2}\right) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\}$$

odnosno $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 3}{2}$.

$\square$

Zadatak 6 *Za funkcije* $f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *i* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definisane sa* $f(x) = \operatorname{arctg} x$ *i* $g(x) = \sqrt[3]{1+x}$ *naći funkcije*

a) $f^{-1}(x)$

b) $g^{-1}(x)$

c) $(g \circ f)(x)$

d) $(g \circ f)^{-1}(x)$

e) $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

Rešenje:

a) $f^{-1}(x) = \operatorname{tg} x$

b) $\sqrt[3]{1+x} = t \ \Rightarrow\ x = t^3 - 1 \ \Rightarrow\ g^{-1}(x) = x^3 - 1$

c) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\operatorname{arctg} x) = \sqrt[3]{1 + \operatorname{arctg} x}$

d) $\sqrt[3]{1 + \operatorname{arctg} x} = t \ \Rightarrow\ \operatorname{arctg} x = t^3 - 1 \ \Rightarrow\ x = \operatorname{tg}(t^3 - 1) \ \Rightarrow\ (g \circ f)^{-1}(x) = \operatorname{tg}(x^3 - 1)$

e) $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = f^{-1}(x^3 - 1) = \operatorname{tg}(x^3 - 1)$

$\square$

Zadatak 7 *Naći domen, skup slika i inverznu funkciju (ako postoji) sledećih funkcija:*

$f_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

$f_2 = \{(x, 3x+4) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$f_3 = \{(x, x^3) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$f_4 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$f_5 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$

$f_6 = \{(x, 2^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$f_7 = \{(x, |x|) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$f_8 = \left\{\left(x, \frac{2x-1}{5-3x}\right) \middle| x \in \mathbb{R}\right\}$

Rešenje:

$\underline{f_1}$ $\mathcal{D}(f_1) = \{1,2,3\}$

$\mathcal{A}(f_1) = \{2,3,4\}$

$f_1^{-1} = \{(2,1),(3,2),(4,3)\}$

$\underline{f_2}$ $\mathcal{D}(f_2) = \mathbb{R}$

$\mathcal{A}(f_2) = \mathbb{R}$

$3x+4 = t \ \Rightarrow\ x = \frac{t-4}{3} \ \Rightarrow\ f_2^{-1} = \left\{\left(t, \frac{t-4}{3}\right) \middle| t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\left(x, \frac{x-4}{3}\right) \middle| x \in \mathbb{R}\right\}$

$\underline{f_3}$ $\mathcal{D}(f_3) = \mathbb{R}$

$\mathcal{A}(f_3) = \mathbb{R}$

$x^3 = t \ \Rightarrow\ x = \sqrt[3]{t} \ \Rightarrow\ f_3^{-1} = \left\{(t, \sqrt[3]{t}) \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{(x, \sqrt[3]{x}) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$

$\underline{f_4}$ $\mathcal{D}(f_4) = \mathbb{R}$

$\mathcal{A}(f_3) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$f_4(-1) = f_4(1) = 1$, pa pošto funkcija nije injektivna, inverzna funkcija ne postoji.

$\underline{f_5}$ $\mathcal{D}(f_5) = [0, +\infty)$

$\mathcal{A}(f_5) = [0, +\infty)$

$x^2 = t \;\Rightarrow\; x = \sqrt{t} \;\Rightarrow\; f_5^{-1} = \left\{(t,\ \sqrt{t}) \,|\, t \in [0, +\infty)\right\} = \left\{(x,\ \sqrt{x}) \,|\, x \in [0, +\infty)\right\}$

$\underline{f_6}$ $\mathcal{D}(f_6) = \mathbb{R}$

$\mathcal{A}(f_6) = \mathbb{R}^+$

$2^x = t \;\Rightarrow\; x = \log_2 t \;\Rightarrow\; f_6^{-1} = \{(t, \log_2 t) \,|\, t \in \mathbb{R}\} = \{(x, \log_2 x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$

$\underline{f_7}$ $\mathcal{D}(f_7) = \mathbb{R}$

$\mathcal{A}(f_7) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$f_7(-1) = f_7(1) = 1$, pa pošto funkcija nije injektivna, inverzna funkcija ne postoji.

$\underline{f_8}$ $\mathcal{D}(f_8) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\}$

$\mathcal{A}(f_8) = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

$\frac{2x-1}{5-3x} = t \;\Rightarrow\; x = \frac{5t+1}{2+3t} \;\Rightarrow\; f_8^{-1} = \left\{\left(t, \frac{5t+1}{2+3t}\right) \middle|\, t \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}\right\} = \left\{\left(x, \frac{5x+1}{2+3x}\right) \middle|\, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}\right\}$

$\square$

Zadatak 8 *Za sledeće binarne relacije*

$f_1 = \{(x, \operatorname{arctg} x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$

$f_2 = \{(x, 2x+1) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$

$f_3 = \{(x, x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$

$f_4 = \{(e^x, x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$

$f_5 = \{(x+1, x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$

$f_6 = \{(x, x+1) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$

ispitati za sve $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a) da li su f_i *funkcije;*

b) da li su f_i *funkcije skupa* $\mathbb{R}$ *u skup* $\mathbb{R}$;

c) da li su f_i *funkcije skupa* $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ *u skup* $\mathbb{R}$;

d) da li su f_i *injektivne funkcije skupa* $\mathbb{R}$ *u skup* $\mathbb{R}$;

e) da li su f_i *sirjektivne funkcije skupa* $\mathbb{R}$ *u skup* $\mathbb{R}$?

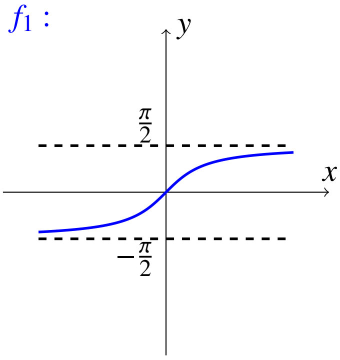
f) Pronaći f_i^{-1} *ukoliko postoji.*

Rešenje:

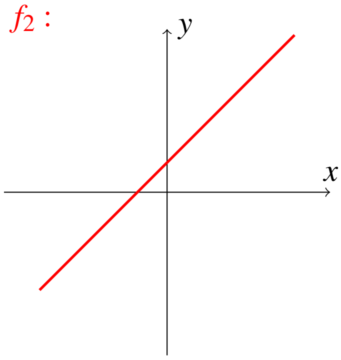
	f_i je funkcija	$f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	$f_i:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$	$f_i:\mathbb{R}\xrightarrow{1-1}\mathbb{R}$	$f_i:\mathbb{R}\xrightarrow{na}\mathbb{R}$	$f_i^{-1}(x)$
f_1	DA	DA	NE	DA	NE	$\operatorname{tg} x$!!
f_2	DA	DA	NE	DA	DA	$\frac{x-1}{2}$
f_3	DA	DA	NE	DA	DA	x
f_4	DA	NE	NE	NE	NE	e^x
f_5	DA	DA	NE	DA	DA	$x+1$
f_6	DA	DA	NE	DA	DA	$x-1$

Dve osobine mogu se prokomentarisati generalno za sve zadate relacije. Svih šest relacija očigledno jesu funkcije, ali nisu funkcije skupa $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ u skup $\mathbb{R}$, pošto ni jedna nema skup $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ za domen (ili imaju ceo $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{R}^+$).

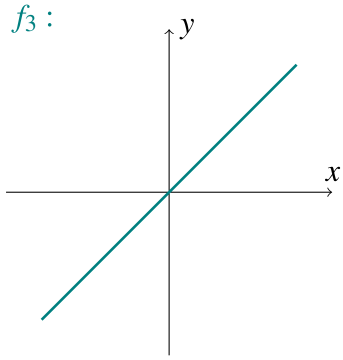
f_1 :



f_2 :



f_3 :



f_1 *b*) Domen elementarne funkcije $\operatorname{arctg} x$ jeste skup realnih brojeva.

d) i *e*) ona jeste injektivna i njen skup slika je $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, pa f_1 jeste injektivna funkcija skupa $\mathbb{R}$ u skup $\mathbb{R}$, ali nije sirjektivna.

f) Inverzna funkcija postoji, i to je $f^{-1}:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ data sa $f^{-1}(x)=\operatorname{tg} x$.

f_2 predstavlja linearnu funkciju, odnosnu pravu, bez ikakvih ograničenja, koja nije paralelna koordinatnim osama, pa je samim tim bijekcija skupa $\mathbb{R}$ u skup $\mathbb{R}$.

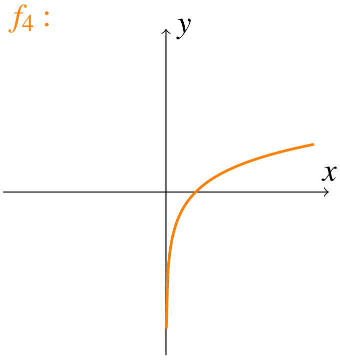
f) Inverznu funkciju tražimo kao i u prethodnim zadacima

$$2x+1=t \;\Rightarrow\; t=\frac{x-1}{2} \;\Rightarrow\; f_2^{-1}=\left\{\left(t,\frac{t-1}{2}\right)\middle|\, t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\left(x,\frac{x-1}{2}\right)\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\}$$

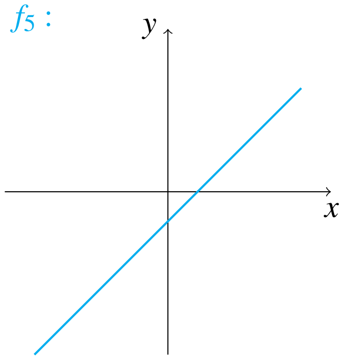
odnosno $f_2^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$.

f_3 je takođe prava, primer identičkog preslikavanja za skup realnih brojeva. Kao i f_2 nije paralelna koordinatnim osama i radi se o bijektivnom preslikavanju. Inverzna je sama sebi.

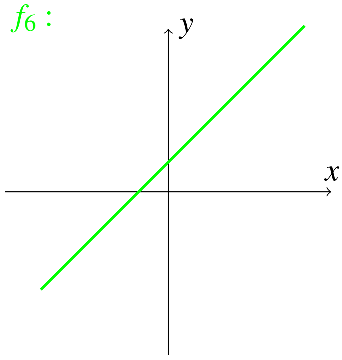
f_4 :



f_5 :



f_6 :



f_4 zapravo predstavlja logaritamsku funkciju. Na ovaj način zadato je da f_4 predstavlja inverznu funkciju funkcije $g(x) = e^x$. Za $f_4 = \ln x$ domen je $\mathbb{R}^+$, a skup slika je ceo skup $\mathbb{R}$. Pošto domen nije niti $\mathbb{R}$ niti $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ odgovori na sva pitanja su negativni.

Napomena: Svaka logaritamska funkcija je bijektivno preslikavanje skupa $\mathbb{R}^+$ na skup $\mathbb{R}$, i za ovaj domen i kodomen odgovarajuća eksponencijalna funkcija je njena inverzna.

f_5 i f_6 su takođe prave. f_5 je inverzna funkcija funkcije $h(x) = x + 1$.

$\square$

★ Kompozicija injektivnih funkcija je injektivna funkcija.

★ Funkcija f je injektivna ako i samo ako jednačina $t = f(x)$ nema više od jednog rešenja za bilo koju vrednost parametra t.

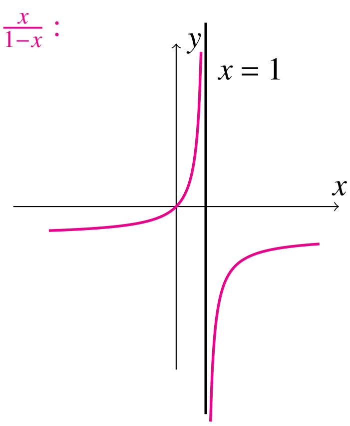
★ $f : A \to B$ je sirjektivna ako i samo ako jednačina $t = f(x)$ ima bar jedno rešenje po x za svako t iz skupa B.

Zadatak 9 *Za sledeće funkcije naći domen, inverznu funkciju i domen inverezne funkcije.*

a) $f = \log_2 \dfrac{x}{1-x}$ *b)* $g(x) = e^{3-2x}$

Rešenje:

a) Argument logaritamske funkcije mora biti pozitivan, pa domen određujemo na sledeći način
$$\frac{x}{1-x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (0,1),$$
tj. $\mathcal{D}(f) = (0,1)$. Grafik same razlomljene funkcije nam pokazuje da ona interval $(0,1)$ preslikava u $\mathbb{R}^+$ i da je injektivna



Pošto smo od razlomljene funkcije dobili domen logaritamske, važi $\mathcal{A}(f) = \mathbb{R}$, a kako je funkcija f injektivna (kao kompozicija injektivnih funkcija) postoji inverzna funkcija i $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{A}(f) = \mathbb{R}$. Inverznu funkciju dobijamo na standardni način
$$\log_2 \frac{x}{1-x} = t \;\Rightarrow\; \frac{x}{1-x} = 2^t \;\Rightarrow\; x = 2^t - 2^t \cdot x \;\Rightarrow\; x = \frac{2^t}{1+2^t}$$
$$f^{-1} = \left\{ \left(t, \frac{2^t}{2^t+1} \right) \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(x, \frac{2^x}{2^x+1} \right) \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\},$$
tj. $f^{-1}(x) = \frac{2^x}{2^x+1}$ i važi $f : (0,1) \xrightarrow[na]{1-1} \mathbb{R}$

b) Funkcija g je kompozicija eksponencijalne i linearne funkcije. Linearna funkcija je bijekcija iz $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$, a eksponencijalna je bijekcija iz $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}^+$, pa se radi o dobro definisanoj kompoziciji injektivnih funkcija. Stoga je $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$ i $\mathcal{A}(g) = \mathbb{R}^+$. Inverznu funkciju tražimo standardno i dobija se $g^{-1}(x) = \frac{3-\ln x}{2}$, odakle se još jasnije vidi da je domen inverzne funkcije $\mathcal{D}(g^{-1}) = \mathcal{A}(g) = \mathbb{R}^+$. Na kraju, važi i $g : \mathbb{R} \xrightarrow[na]{1-1} \mathbb{R}^+$.

$\square$

Zadatak 10 *Naći inverznu funkciju i domen inverzne funkcije za*

$$f_1(x) = 2x+3 \qquad f_5(x) = x^3$$

$$f_2(x) = \frac{x+1}{x-1} \qquad f_6(x) = \frac{1}{x}$$

$$f_3(x) = \arccos x \qquad f_7(x) = \sqrt{1-x^2} \text{ za } x \in (0,1)$$

$$f_4(x) = 2^x$$

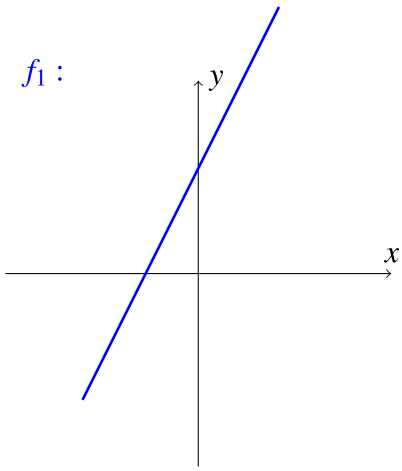
Rešenje:

$\underline{f_1(x)} = 2x+3$

$\mathcal{D}(f_1) = \mathbb{R}$

$f_1^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

$\mathcal{D}(f_1^{-1}) = \mathbb{R}$



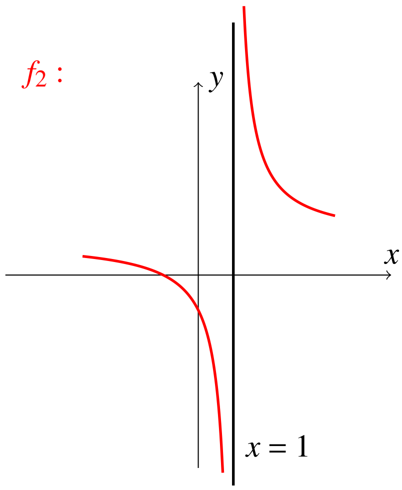
$\underline{f_2(x)} = \dfrac{x+1}{x-1}$

$\mathcal{D}(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$t = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow tx - t = x + 1$$
$$\Rightarrow x = \tfrac{t+1}{t-1}$$

$$f_2^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$\mathcal{D}(f_2^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$



$f_3(x) = \arccos x$

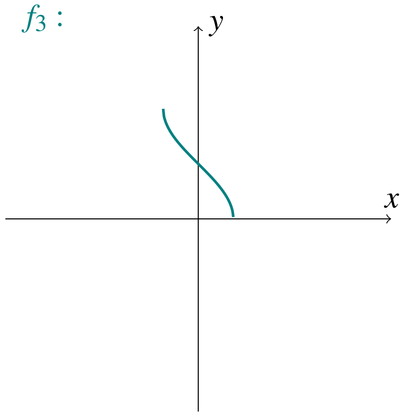
$\mathcal{D}(f_3) = [-1, 1]$

$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$

$f_3^{-1}(x) = \cos x$

$\mathcal{D}(f_3^{-1}) = [0, \pi]$

$f_3 :$



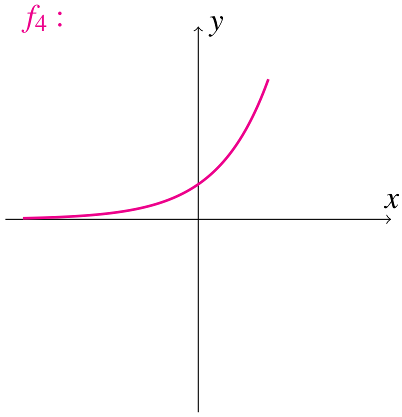
$f_4(x) = 2^x$

$\mathcal{D}(f_4) = \mathbb{R}$

$f_4^{-1}(x) = \log_2 x$

$\mathcal{D}(f_4^{-1}) = \mathbb{R}^+$

$f_4 :$



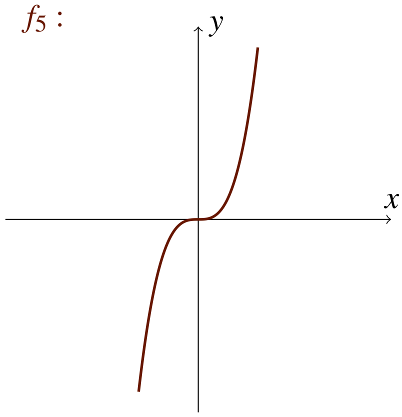
$f_5(x) = x^3$

$\mathcal{D}(f_5) = \mathbb{R}$

$f_5^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

$\mathcal{D}(f_5^{-1}) = \mathbb{R}$

$f_5 :$



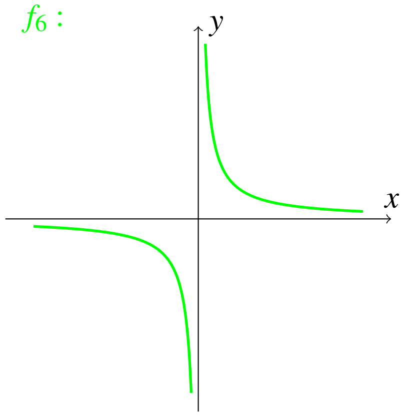
$\underline{f_6(x)} = \dfrac{1}{x}$

$\mathcal{D}(f_6) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f_6^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$

$\mathcal{D}(f_6^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f_6:$



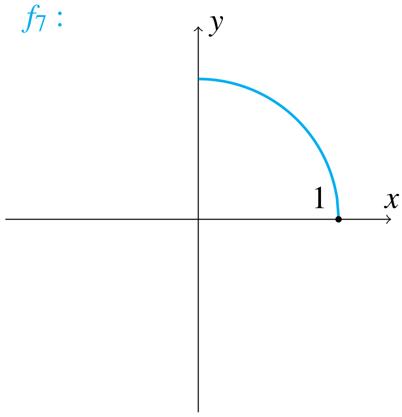
$\underline{f_7(x)} = \sqrt{1 - x^2}$

$\mathcal{D}(f_7) = (0, 1)$

$f_7^{-1}(x) = \sqrt{1 - x^2}$

$\mathcal{D}(f_7^{-1}) = (0, 1)$

$f_7:$



$\square$

Zadatak 11 *Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$, a B najmanji podskup od $\mathbb{R}$ za koje je funkcija $f : A \to B$ definisana sa $f(x) = \sqrt[3]{\ln(x^2 - 1)}$. Tada je $A =$ __________, $B =$ __________ i funkcija $f : A \to B$ je*

a) sirjektivna, ali nije injektivna

b) injektivna, ali nije sirjektivna

c) niti sirjektivna, niti injektivna

d) bijekcija

(zaokružiti tačan odgorvor).

Rešenje: Ovo je jedan od standardnih problema na testu. Potrebno je odrediti domen (skup A) i skup slika (skup B) zadate funkcije i odgovoriti na pitanje njenih osobina.

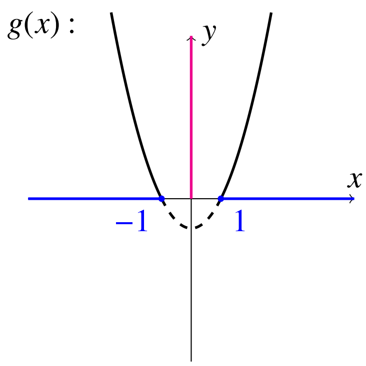
Data funkcija je kompozicija kvadratne funkcije, logaritamske funkcije i trećeg korena, pri čemu su kvadratna funkcija i treći koren definisane za sve vrednosti iz $\mathbb{R}$ dok je logaritamska funkcija definisana samo za pozitivne vrednosti. Prema tome, mora da važi $x^2 - 1 > 0$, odakle je domen funkcije f

$$A = \mathcal{D}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

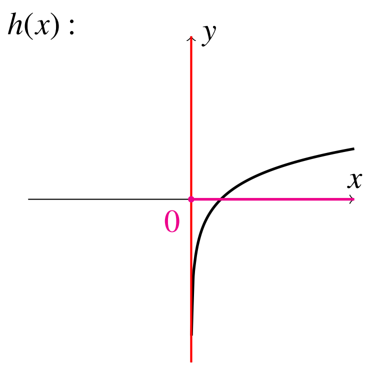
Zapišimo sada tri funkcije čijom kompozicijom dobijamo funkciju f:

$$g(x) = x^2 - 1, \quad h(x) = \ln g(x) \quad \text{i} \quad l(x) = \sqrt[3]{h(x)}.$$

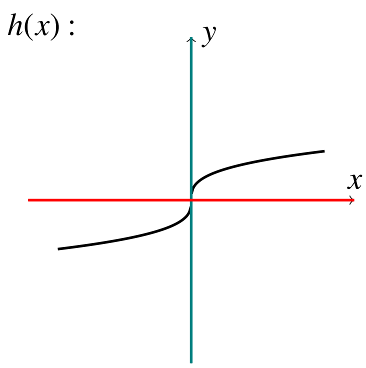
$\underline{g(x)}$ Funkcija g skup A slika na skup $(0, \infty)$ (isprekidano je povučen deo grafika koji ne odgovara skupu koji preslikavamo).



$\underline{h(x)}$ Funkcijom h skup $(0, \infty)$ preslikavamo na $\mathbb{R}$.



$\underline{l(x)}$ Funkcija l preslikava skup $\mathbb{R}$ na skup $\mathbb{R}$.



Prema tome, $B = \mathcal{A}(f) = \mathbb{R}$.

S obzirom da je B skup slika, funkcija f je sirjektivna, ali nije injektivna (zbog kvadratne funkcije), npr. $f(-2) = f(2) = \sqrt[3]{\ln 3}$. $\square$

Zadatak 12 *Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$, a B najmanji podskup od $\mathbb{R}$ za koje je funkcija $f : A \to B$ definisana sa $f(x) = -\ln(x^2+1)$. Tada je $A =$ __________, $B =$ __________, $f(0) =$ __________, $f($__________$) = -\ln 2$ i funkcija $f : A \to B$ je*

a) sirjektivna, ali nije injektivna

b) injektivna, ali nije sirjektivna

c) niti sirjektivna, niti injektivna

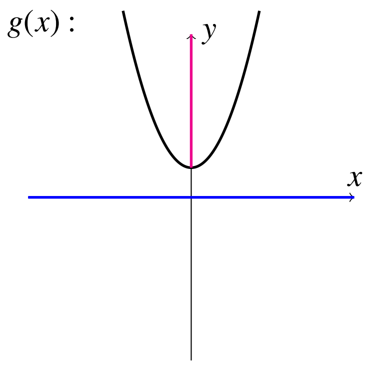
d) bijekcija

(zaokružiti tačan odgorvor).

Rešenje: Domen funkcije je $\mathcal{D}(f) = A = \mathbb{R}$, pošto je $x^2 + 1 > 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

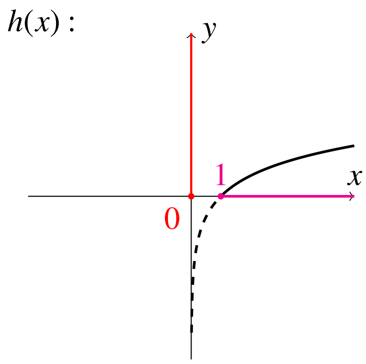
Sada funkciju možemo podeliti na tri dela (tri funkcije čiju kompoziciju vršimo), prvo $g(x) = x^2 + 1$, pa $h(x) = \ln g(x)$ i na kraju $l(x) = -h(x)$.

$\underline{g(x)}$ Posmatramo grafik funckije $g(x) = x^2 + 1$ i šta ona radi sa skupom A.



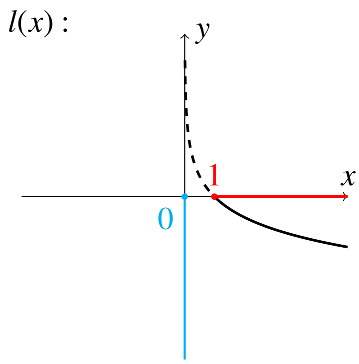
Od skupa A dobijamo tačno skup $[1, \infty)$ funkcijom $g(x)$.

$\underline{h(x)}$ preslikava skup $[1, \infty)$.



Isprekidano je povučen deo grafika koji ne odgovara skupu koji preslikavamo. Pošto je $\ln 1 = 0$ i ln je rastuća funkcija, sa $h(x)$ skup $[1, \infty)$ preslikavamo na $[0, \infty)$.

$\underline{l(x)}$ preslikava skup $[0, \infty)$.



Pošto je $h(x) = -\ln x$ skup $[0, \infty)$ postaje $(-\infty, 0]$ i to je naš skup B. Zaključak, na liniju za skup A pišemo domen funkcije f skup $\mathbb{R}$, a za skup B pišemo $(-\infty, 0]$. Funkcija je sirjektivna, ali nije injektivna (zbog kvadratne funkcije i domena), npr. $f(-1) = f(1) = -\ln 2$. Dati primer je odgovor i na pitanje za koju vrednost iz domena funkcija daje sliku $-\ln 2$, pa je na tu liniju potrebno uneti i -1 i 1. $f(0) = -\ln(0+1) = -\ln 1 = 0$, što je poslednja tražena vrednost. $\square$

Zadatak 13 *Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$, a B najmanji podskup od $\mathbb{R}$ za koje je funkcija $f : A \to B$ definisana sa $f(x) = \ln(2 + \sqrt{x})$. Tada je $A =$ __________, $B =$ __________, $f(4) =$ __________, $f($__________$) = \frac{1}{2}$ i funkcija $f : A \to B$ je*

a) sirjektivna, ali nije injektivna

b) injektivna, ali nije sirjektivna

c) niti sirjektivna, niti injektivna

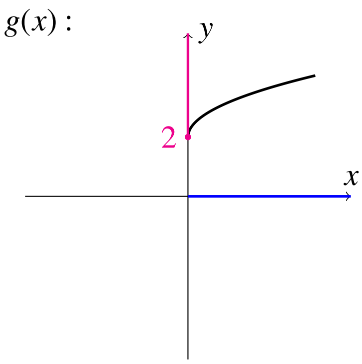
d) bijekcija

(zaokružiti tačan odgorvor).

Rešenje: Domen funkcije je $\mathcal{D}(f) = A = [0, \infty)$, pošto je $\sqrt{x} > 0$ za sve $x \in [0, \infty)$, što je skup vrednosti za koje je kvadratni koren definisan.

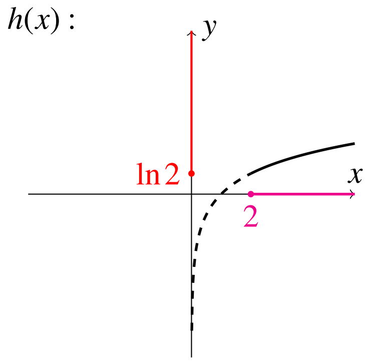
Sada funkciju možemo podeliti na dva dela (dve funkcije čiju kompoziciju vršimo), prvo $g(x) = 2 + \sqrt{x}$, pa $h(x) = \ln g(x)$.

$\underline{g(x)}$ Posmatramo grafik funckije $g(x) = 2 + \sqrt{x}$ i šta ona radi sa skupom A.



Od skupa A dobijamo skup $[2, \infty)$ funkcijom $g(x)$.

$\underline{h(x)}$ preslikava skup $[2, \infty)$.

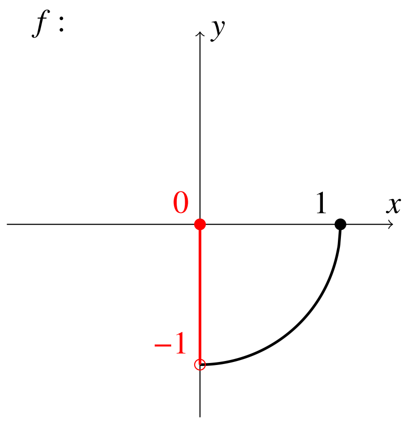


Isprekidano je povučen deo grafika koji ne odgovara skupu koji preslikavamo. Pošto je $\ln 2 > 0$ i ln je rastuća funkcija, sa $h(x)$ skup $[2, \infty)$ preslikavamo na $[\ln 2, \infty)$.

Zaključak, na liniju za skup A pišemo domen funkcije f skup $[0, \infty)$, a za skup B pišemo $[\ln 2, \infty)$. Funkcija je bijektivna, jer je kompozicija injektivnih elementarnih funkcija, a domen i kodomen su napravljeni da ispoštuju definiciju sirjektivne funkcije. Original koji odgovara slici $\frac{1}{2}$ ne postoji, pošto je $\frac{1}{2} < \ln 2$. $f(2) = \ln(2 + \sqrt{4}) = \ln 4$, što je poslednja tražena vrednost. □

Zadatak 14 *Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}^+$, a B najmanji podskup od $\mathbb{R}$ za koje je funkcija $f : A \to B$ definisana sa $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$. Tada je $A =$ __________, $B =$ __________. Odrediti, ako je moguće, inverznu funkciju i njen domen i kodomen.*

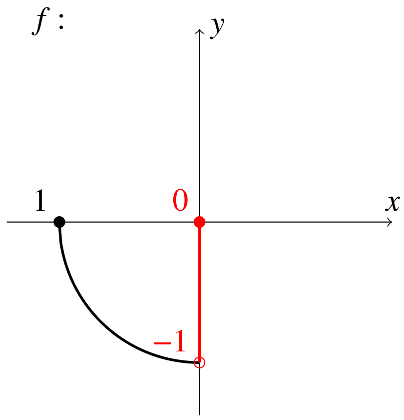
Rešenje: Funkcija potiče od jednačine jedinične kružnice $x^2 + y^2 = 1$. Na ovaj način biramo tačno četvrtinu kružnice i pravimo bijektivnu funkciju od izraza koji ne zadovoljava definiciju funkcije. Pošto uzimamo za A najveći podskup od $\mathbb{R}^+$, domen je $\mathcal{D}(f) = A = (0, 1]$. Zbog minusa ispred korena u funkciji f, i činjenice da je $A = (0.1]$ dobijamo četvrtinu kružnice iz četvrtog kvadranta.



Pošto je nula isključena iz domena, broja -1 nema u kodomenu, i time jasno dolazimo do skupa $B = (-1, 0]$. Što e tiče inverzne, nju potpuno određujemo preko domena i kodomena same funkcije. Jasno $\mathcal{D}(f^{-1}) = B = (-1, 0]$ i $\mathcal{A}(f^{-1}) = A = (0, 1]$. Na kraju, inverzna funkcija se dobija na standardan način uz napomenu da nam oblik A određuje predznak ispred korena. U ovom slučaju pošto inverznom treba da dobijemo A, pozitivne brojeve, imamo da je $f^{-1}(x) = \sqrt{1 - x^2}$. □

Zadatak 15 *Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}^-$, a B najmanji podskup od $\mathbb{R}$ za koje je funkcija $f : A \to B$ definisana sa $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$. Tada je $A =$ __________, $B =$ __________. Odrediti, ako je moguće, inverznu funkciju i njen domen i kodomen.*

Rešenje: Pošto uzimamo za A najveći podskup od $\mathbb{R}^-$, domen je $\mathcal{D}(f) = A = [-1, 0)$. Zbog minusa ispred korena u funkciji f, i činjenice da je $A = [-1, 0)$ dobijamo četvrtinu kružnice iz trećeg kvadranta:



Kako je nula isključena iz domena, broja -1 nema u kodomenu, i time jasno dolazimo do skupa $B = (-1, 0]$. Što e tiče inverzne, nju potpuno određujemo preko domena i kodomena same funkcije. Jasno $\mathcal{D}(f^{-1}) = B = (-1, 0]$ i $\mathcal{A}(f^{-1}) = A = [-1, 0)$. Na kraju, inverzna funkcija se dobija na standardan način uz napomenu da nam oblik A određuje predznak ispred korena. U ovom slučaju pošto inverznom treba da dobijemo A, negativne brojeve, imamo da je
$f^{-1}(x) = -\sqrt{1-x^2}$. □

Primer 3 *Neka su $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{x, y\}$. tada je*

$$\left|\{f | f : A \to B\}\right| = \underline{2^3 = 8}$$

$$\left|\{f | f : A \xrightarrow{na} B\}\right| = \underline{2^3 - 2 = 6}$$

$$\left|\{f | f : B \xrightarrow{1-1} A\}\right| = \underline{3 \cdot 2 = 6}$$

$$\left|\{f | f : A \to A\}\right| = \underline{3^3 = 27}$$

$$\left|\{f | f : A \xrightarrow{na} A\}\right| = \underline{2^3 - 2 = 6}$$

$$\left|\{f | f : B \to B\}\right| = \underline{2^2 = 4}$$

$$\left|\{f | f : B \xrightarrow{na} B\}\right| = \underline{2}$$

$$\left|\{f | f : A \xrightarrow{1-1} B\}\right| = \underline{0}$$

$$\left|\{f | f : B \to A\}\right| = \underline{3^2 = 9}$$

$$\left|\{f | f : B \xrightarrow{na} A\}\right| = \underline{0}$$

$$\left|\{f | f : A \xrightarrow{1-1} A\}\right| = \underline{3 \cdot 2 = 6}$$

$$\left|\{f | f : A \xrightarrow[na]{1-1} A\}\right| = \underline{3 \cdot 2 = 6}$$

$$\left|\{f | f : B \xrightarrow{1-1} B\}\right| = \underline{2}$$

$$\left|\{f | f : B \xrightarrow[na]{1-1} B\}\right| = \underline{2}$$

★ $\binom{n}{k}$ je binomni koeficijent i računa se po formuli $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

Definicija 8 *Funkcija $f : A \to B$ je rastuća, označavamo sa $\nearrow$, ako i samo ako za sve $a, b \in A$ važi $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$. Broj rastućih funkcija iz skupa A u skup B računa se po formuli $C_{|A|}^{|B|} = \binom{|B|}{|A|}$ (broj kombinacija bez ponavljanja).*

Definicija 9 *Funkcija $f : A \to B$ je neopadajuća, označavamo sa $\underline{\nearrow}$, ako i samo ako za sve $a, b \in A$ važi $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$. Broj neopadajućih funkcija iz skupa A u skup B računa se po formuli $\overline{C}^{|B|}_{|A|} = \binom{|B|+|A|-1}{|A|}$ (broj kombinacija sa ponavljanjem).*

Primer 4 *Za skup $A = \{1,2\}$ prebrojati rastuće funkcije u sledećim slučajevima.*

$$\left|\{f | f : \{1,2\} \to \{1,2\} \wedge f \nearrow\}\right| = \underline{1}$$

$$\left|\{f | f : \{1,2\} \to \{1,2,3\} \wedge f \nearrow\}\right| = \underline{\binom{3}{2} = 3}$$

$$\left|\{f | f : \{1,2\} \to \{1,2,3,4\} \wedge f \nearrow\}\right| = \underline{\binom{4}{2} = 6}$$

$$\left|\{f | f : \{1,2\} \to \{1,2,3,4,5\} \wedge f \nearrow\}\right| = \underline{\binom{5}{2} = 10}$$

$$\left|\{f | f : \{1,2\} \to \{1,2,3,...,n\} \wedge f \nearrow\}\right| = \underline{\binom{n}{2}}$$

Primer 5 *Za skup $A = \{1,2,3\}$ prebrojati rastuće funkcije u sledećim slučajevima.*

$$\left|\{f | f : \{1,2,3\} \to \{1,2\} \wedge f \nearrow\}\right| = \underline{0}$$

$$\left|\{f | f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\} \wedge f \nearrow\}\right| = \underline{\binom{3}{3} = 1}$$

$$\left|\{f | f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\} \wedge f \nearrow\}\right| = \underline{\binom{4}{3} = 4}$$

$$\left|\{f | f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4,5\} \wedge f \nearrow\}\right| = \underline{\binom{5}{3} = 10}$$

$$\left|\{f | f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3,...,n\} \wedge f \nearrow\}\right| = \underline{\binom{n}{3}}$$

Primer 6 *Za skup $A = \{1,2\}$ prebrojati neopadajuće funkcije u sledećim slučajevima.*

$$\left|\{f | f : \{1,2\} \to \{1,2\} \wedge f \underline{\nearrow}\}\right| = \underline{\binom{2+2-1}{2} = \binom{3}{2} = 3}$$

$$\left|\{f | f : \{1,2\} \to \{1,2,3\} \wedge f \underline{\nearrow}\}\right| = \underline{\binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = 6}$$

$$\left|\{f | f : \{1,2\} \to \{1,2,3,4\} \wedge f \underline{\nearrow}\}\right| = \underline{\binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10}$$

$$\left|\{f | f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3,...,n\} \wedge f \underline{\nearrow}\}\right| = \underline{\binom{n+2-1}{2}}$$

Primer 7 *Za skup $A = \{1,2,3\}$ prebrojati neopadajuće funkcije u sledećim slučajevima.*

$$\left|\{f | f : \{1,2,3\} \to \{1,2\} \wedge f \underline{\nearrow}\}\right| = \underline{\binom{2+3-1}{3} = \binom{4}{3} = 4}$$

$$\left|\{f | f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\} \wedge f \underline{\nearrow}\}\right| = \underline{\binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = 10}$$

$$\left|\{f | f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\} \wedge f \underline{\nearrow}\}\right| = \underline{\binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20}$$

$$\left|\{f | f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3,...,n\} \wedge f \underline{\nearrow}\}\right| = \underline{\binom{n+3-1}{3}}$$