### Metod varijacije konstanti

#### Primer

Naći opšte rešenje jednačine  $y''' - y'' = e^{x}$ .  $e^{x}$ ,  $e^{x}$ ,  $e^{x}$ ,  $e^{x}$ ,  $e^{x}$ 



1) 
$$y''' - y'' = 0 \Rightarrow k^3 - k^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 0, k_3 = 1$$
  
(y=e<sup>k\*</sup>)  $\Rightarrow y_h(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x$ 

Metodom varijacije konstanti dobijamo sistem  $y = c_1(x) + c_2(x)x + c_3(x)e^x = 0$   $c_1'(x) + c_2'(x)x + c_3'(x)e^x = 0$   $c_1'(x) + c_2'(x) + c_3'(x)e^x = 0$   $c_1'(x) + c_2'(x) + c_3'(x)e^x = 0$ 

$$c'_1(x) + c'_2(x)x + c'_3(x)e^x = 0$$

$$c'_1(x) + c'_2(x) + c'_3(x)e^x = 0$$

$$c'_1(x) + c'_2(x) + c'_3(x)e^x = 0$$

čijim rešavanjem i integracijom rešenja dobijamo

$$\begin{array}{lll} c_3'(x)=1 & \text{ folds} & \Rightarrow & c_3(x)=\underline{x}+C_3\checkmark\\ c_2'(x)=-c_3'(x)e^x=-e^x & \text{ folds} & \Rightarrow & c_2(x)=\underline{-e^x}+C_2\checkmark \end{array}$$

$$c_1'(x) = -c_2'(x)x - c_3'(x)e^x = (x-1)e^x \Rightarrow c_1(x) = (x-2)e^x + C_1$$

$$y_p(x) = (x-2)e^x$$

$$y_p(x) = (x-2)e^x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x-1|e^x dx = \begin{cases} x-1-e^x & \text{for } x = (x-1)e^x \\ & \text{for } x = (x-1)e^x \end{cases}$$

$$= (x-2)e^{x} + C_{1} \checkmark$$

$$= (x-2)e^{x} + C_{1} \checkmark$$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 + c_2x + c_3e^x + (x-2)e^x$$
.

# Metod jednakih koeficijenata

Ako je jednačina linearna sa konstantnim koeficijentima oblika

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x)$$

gde je funkcija  $f(x)_{ij}$  specijalnog oblika

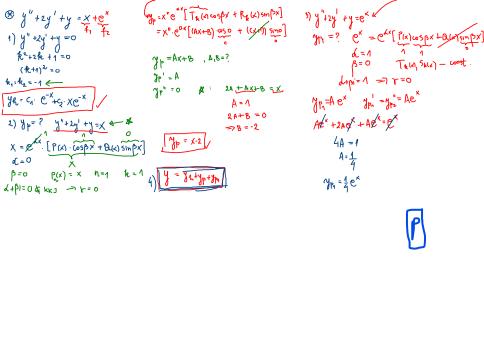
$$f(x) = e^{\alpha x} (\underline{P(x)} \cos \beta x + \underline{Q(x)} \sin \beta x), \quad \chi_{+\beta} \in \text{kkj}.$$
Senie tražimo u obliku

partikularno rešenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = x^p e^{\alpha x} (\underbrace{T_k(x)}_{cos} \cos \beta x + \underbrace{R_k(x)}_{cos} \sin \beta x)$$

pri čemu je

- $k = \max\{n, m\}$   $n = \deg P(x)$ ,  $m = \deg Q(x)$ , ako su oba polinoma različita od nula polinoma (ako je P(x) nula polinom onda je k = m, a ako je Q(x) nula polinom onda je k = n)
- r je višestrukost  $\alpha + i\beta$  kao korena karakteristične jednačine odgovarajuće homogene jednačine



## Metod jednakih koeficijenata

Korisna je činjenica: ako je

ako je
$$L_n[y] = \underbrace{f_1(x) + f_2(x)}_{N \cdot P.o.}$$

i ako je

 $y_1(x)$  partikularno rešenje jednačine  $L_n[y] = f_1(x)$  nad I,

 $y_2(x)$  partikularno rešenje jednačine  $L_n[y] = f_2(x)$  nad I,

tada je

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) \checkmark$$

nad intervalom / partikularno rešenje jednačine

$$L_n[y] = f_1(x) + f_2(x) \checkmark \checkmark$$

### Metod jednakih koeficijenata

#### Primer

Odrediti opšte rešenja jednačine  $y''' - y'' = e^x + \sin x + x$ 

Rešenje. Opšte rešenje homogenog dela jednačine je

$$y_h(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x \times \sqrt{\phantom{a}}$$

Jedno partikularno rešenje jednačine  $y'''-y''=e^x$  je  $y_{p_1}(x) = xe^x$ .

Jedno partikularno rešenje jednačine 
$$y''' - y'' = \sin x$$
 je  $y_{p_2}(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$ . Jedno partikularno rešenje jednačine  $y''' - y'' = x$  je

$$y_{p_3}(x) = -\frac{1}{6}x^2(x+3).$$
 Opšte rešenje je

 $y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + x e^x + \frac{1}{2} (\cos x + \sin x) - \frac{1}{6} x^2 (x+3).$ 

1) y"-y"=0
6,2-k2=0

$$\frac{1}{1} \frac{1}{1} \frac{1}{2} \frac{1}{1} + \frac{1}{2}y^{1} - y = e^{2x}$$

$$\frac{1}{1} \frac{1}{1} \frac{1}{2} \frac{1}{1} \frac{1}{2} = 0$$

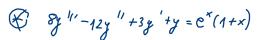
$$\frac{1}{1} \frac{1}{1} \frac{1}{1} \frac{1}{1} \frac{1}{0} = 0$$

$$\frac{1}{1} \frac{1}{1} \frac{1}{1} \frac{1}{1} \frac{1}{0} = -\frac{4}{1}$$

$$\frac{1}{1} \frac{1}{1} \frac{1}{1} \frac{1}{1} \frac{1}{1} \frac{1}{1} \frac{1}{0} = -\frac{4}{1}$$

$$\frac{1}{1} \frac{1}{1} \frac{1}{1} \frac{1}{1} \frac{1}{1} \frac{1}{1} \frac{1}{0} = -\frac{4}{1}$$

$$\frac{1}{1} \frac{1}{1} \frac{1}$$





## Ojlerova jednačina

Ojlerova jednačina je oblika

$$\Rightarrow (ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(ax+b) y' + a_n y = f(x)$$

gde su  $a_i$ , i = 1, 2, ..., n konstante i smenom

$$\Rightarrow (ax + b = e^t, ax + b > 0 \quad (ax + b = -e^t, ax + b < 0)$$

svodi se na jednačinu sa konstantnim koeficijentima.

## Ojlerova jednačina



### Primer

Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$x^3y''' + x^2y'' + 3xy - 8y = 0.$$

Za x > 0 smenom

$$x = e^{t} \Rightarrow y'_{x} = y'_{t}t'_{x} = \frac{1}{x}y'_{t},$$

$$y''_{x} = -\frac{1}{x^{2}}y'_{t} + \frac{1}{x^{2}}y''_{t} = \frac{1}{x^{2}}(y''_{t} - y'_{t})$$

$$y'''_{x} = -\frac{2}{x^{3}}(y''_{t} - y'_{t}) + \frac{1}{x^{3}}(y'''_{t} - y''_{t}) = \frac{1}{x^{3}}(y'''_{t} - 3y''_{t} + 2y'_{t})$$

dobija se linearna diferencijalna jednačina y'''-2y''+4y'-8y=0. čija karakteristična jednačina  $r^3-2r^2+4r-8$  ima korene  $r_1=2$ ,  $r_2=2i$ ,  $r_3=-2i$  pa je njen fundamentalni skup rešenja  $\{e^{2t},\sin 2t,\cos 2t\}$  tako da je fundamentalni skup rešenja Ojlerove jednačine  $\{x^2,\sin(2\ln|x|),\cos(2\ln|x|)\}, x\neq 0$  pa je opšte rešenje  $y=c_1x^2+c_2\sin(2\ln|x|)+c_3\cos(2\ln|x|)$ .