USLOVNI (VEZANI) EKSTREMI

Neka je data funkcija $f: D \to R$ definisana na skupu $D \subset R^2$ i neka je data funkcija $\varphi: D \to R$. Neka je skup $B = \{(x, y) \in D : \varphi(x, y) = 0\}$. Pretpostavimo da je skup B neprazan. Kažemo da je skup B određen uslovom ili vezom $\varphi(x, y) = 0$.

Ako je jednačina krive $L: \varphi(x, y) = 0$, tada se problem nalaženja uslovnih ekstrema funkcije $z = f(x, y)$ na krivoj L može formulisati na sledeći način: naći ekstrem funkcije $z = f(x, y)$ na skupu D pod uslovom da je $\varphi(x, y) = 0$.

Dakle, pri nalaženju uslovnog ekstrema funkcije $z = f(x, y)$ promenljive x i y se ne mogu posmatrati kao nezavisne promenljive. One su povezane relacijom $\varphi(x, y) = 0$, koja se zove jednačina veze. Da bi pronašli tačke koje mogu biti uslovni ekstremi funkcije $z = f(x, y)$ pod uslovom da je $\varphi(x, y) = 0$, formira se Lagranžova funkcija

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y).$$

Izjednačavanjem parcijalnih izvoda $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ i $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ funkcije $F(x, y, \lambda)$ sa nulom dobija se sistem od tri jednačine sa tri nepoznate:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= f_x(x, y) + \lambda\varphi_x(x, y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= f_y(x, y) + \lambda\varphi_y(x, y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= \varphi(x, y) = 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

čija rešenja su koordinate (x_0, y_0) stacionarnih tačaka i njima odgovarajuće vrednosti λ.

Dalje se posmatra znak totalnog diferencijala drugog reda Lagranžove funkcije

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2$$

u stacionarnim tačkama (x_0, y_0) i za njima odgovarajuće vrednosti λ, pod uslovom

pomoć: $$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 0,$$

za $(dx, dy) \neq (0,0)$. On daje dovoljan uslov za postojanje i određuje prirodu uslovnih ekstrema na sledeći način:

1. Ako je $d^2F(x_0, y_0) < 0$, za $(dx, dy) \neq (0,0)$, tada u tački (x_0, y_0) funkcija $f(x, y)$ ima **uslovni maksimum**.
2. Ako je $d^2F(x_0, y_0) > 0$, za $(dx, dy) \neq (0,0)$, tada u tački (x_0, y_0) funkcija $f(x, y)$ ima **uslovni minimum**.
3. Ako totalni diferencijal drugog reda Lagranžove funkcije u tački (x_0, y_0) za $(dx, dy) \neq (0,0)$ menja znak, funkcija $f(x, y)$ u toj tački **nema uslovni ekstrem**.

Postupak je sličan i ako želimo da nađemo ekstreme funkcije $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ pod uslovima

$$\begin{array}{l} \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \quad\vdots \\ \varphi_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{array}, \ 1 \leq m < n.$$

U tom slučaju formira se Lagranžova funkcija

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda_1\varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) + ... + \lambda_m\varphi_m(x_1, x_2, ..., x_n).$$

1. Naći ekstreme funkcije $z = y^2 - x^2 + 5$ pod uslovom $y + 2x - 16 = 0$.

$$F(x, y, \lambda) = y^2 - x^2 + 5 + \lambda(y + 2x - 16)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2x + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow x = \lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = y + 2x - 16 = 0 \Leftrightarrow -\frac{\lambda}{2} + 2\lambda - 16 = 0 \ \Big/\cdot 2 \ \Leftrightarrow 3\lambda - 32 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{32}{3}$$

Dakle, stacionarna tačka je $A(\frac{32}{3}, -\frac{16}{3})$.

Parcijalni izvodi drugog reda Lagranžove funkcije su:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -2, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0.$$

Diferenciranjem uslova $y + 2x - 16 = 0$ dobija se $dy + 2dx = 0$, tj. $dy = -2dx$.

$$d^2F(A) = -2dx^2 + 2dy^2$$

$$d^2F(A) = -2dx^2 + 2dy^2 = -2dx^2 + 8dx^2 = 6dx^2 > 0\,, \qquad \text{za } (dx, dy) \neq (0,0)\,,$$

pa zadata funkcija $z(x, y)$ ima uslovni minimum $-\dfrac{241}{3}$ u tački $A(\dfrac{32}{3}, -\dfrac{16}{3})$.

2. Broj 24 rastaviti na zbir tri broja tako da njihov proizvod bude maksimalan.

Funkcija čiji maksimum tražimo: $u(x, y, z) = xyz$

Uslov: $x + y + z = 24 \Leftrightarrow x + y + z - 24 = 0$

Lagranžova funkcija: $F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x + y + z - 24)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xz + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = xy + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y + z - 24 = 0$$

Množenjem prve jednačine sa -1 i dodavanjem drugoj i trećoj jednačini dobija se ekvivalentan sistem:

$$yz + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \lambda = -yz \qquad \Rightarrow \lambda = -64$$

$$xz - yz = 0 \quad \Rightarrow z(x - y) = 0 \Rightarrow x = y$$

$$xy - yz = 0 \quad \Rightarrow y(x - z) = 0 \Rightarrow x = z$$

$$x + y + z - 24 = 0 \qquad \Rightarrow x + x + x - 24 = 0$$

$$3x = 24 \Rightarrow x = y = z = 8$$

Stacionarna tačka je $A(8, 8, 8)$, za $\lambda = -64$.

pomoć

Diferenciranjem uslova $x + y + z - 24 = 0$ dobija se $dx + dy + dz = 0$, tj. $dz = -dx - dy$.

Parcijalni izvodi drugog reda Lagranžove funkcije su:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = z\,, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = y\,, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = x\,.$$

$$
\begin{aligned}
d^2F(A) &= 2(\overset{z}{8}dxdy + \overset{y}{8}dxdz + \overset{x}{8}dydz) = 16(dxdy + dxdz + dydz) \\
&= 16(dxdy - dx(dx+dy) - dy(dx+dy)) = 16(\cancel{dxdy} - dx^2 - \cancel{dxdy} - dxdy - dy^2) \\
&= -16(dx^2 + dxdy + dy^2) = -16(dx^2 + 2\cdot dx\cdot\frac{1}{2}dy + \frac{1}{4}dy^2 + \frac{3}{4}dy^2) \\
&= -16((dx + \frac{dy}{2})^2 + \frac{3}{4}dy^2) < 0, \qquad \text{za } (dx, dy) \neq (0,0).
\end{aligned}
$$

Dakle, funkcija ima uslovni maksimum u tački $A(8,8,8)$. $u_{umax} = 8^3$

3. Proveriti da li funkcija $u = xy + yz$ u tački $A(1,1,1)$ ima uslovni ekstrem ako je $x^2 + y^2 = 2$ i $y + z = 2$.

Lagranžova funkcija je

$$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xy + yz + \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) + \lambda_2(y + z - 2).$$

Računanjem njenih parcijalnih izvoda prvog reda i njihovim izjednačavanjem sa nulom dobijaju se jednačine:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y + 2\lambda_1 x = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = x + z + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = y + \lambda_2 = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = x^2 + y^2 - 2 = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = y + z - 2 = 0.$$

Date jednačine **jesu** zadovoljene za $x = y = z = 1$ i to ako je $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ i $\lambda_2 = -1$.

Parcijalni izvodi drugog reda Lagranžove funkcije su:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda_1, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda_1, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = 1.$$

POMOĆ 1

Diferenciranjem uslova $y + z = 2$ dobija se $dy + dz = 0$, odnosno $dz = -dy$.

Diferenciranjem uslova $x^2 + y^2 = 2$ dobija se $2xdx + 2ydy = 0$, pa je u stacionarnoj tački $dx + dy = 0$, odakle je $dx = -dy$. pomoć 1

$$
\begin{aligned}
d^2F(A) &= -dx^2 - dy^2 + 2dxdy + 2dydz = -(dx - dy)^2 + 2dydz = -(2dy)^2 - 2dy^2 \\
&= -4dy^2 - 2dy^2 = -6dy^2 < 0, \qquad \text{za } (dx, \overset{dz}{dy}) \neq (0, \overset{0}{0}).
\end{aligned}
$$

Dakle, zadata funkcija $u(x, y, z)$ ima uslovni maksimum 2 u tački A.

4. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $z = e^{xy}$, ako je $x + y = 10$.

Lagranžova funkcija je $F(x, y, \lambda) = e^{xy} + \lambda(x + y - 10)$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{xy} \cdot y + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = e^{xy} \cdot x + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y - 10 = 0$$

Množenjem prve jednačine sa -1 i dodavanjem drugoj jednačini dobija se

$$ye^{xy} + \lambda = 0$$

$$\underbrace{e^{xy}}_{>0}(x - y) = 0 \qquad \Rightarrow x = y$$

$$x + y = 10 \qquad\qquad \Rightarrow x = y = 5.$$

Dakle, za $\lambda = -5e^{25}$, stacionarna tačka je $A(5,5)$.

Parcijalni izvodi drugog reda Lagranžove funkcije su:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy} + \lambda) = e^{xy} + yxe^{xy} = e^{xy}(1 + xy).$$

pomoć

Diferenciranjem uslova $x + y = 10$ dobijamo $dx + dy = 0$, odakle je $dy = -dx$.

Totalni diferencijal drugog reda Lagranžove funkcije je

$$d^2F = y^2 e^{xy} dx^2 + 2e^{xy}(1 + xy)dxdy + x^2 e^{xy} dy^2.$$

U stacionarnoj tački je

$$d^2F(A) = e^{25}(25dx^2 + 2 \cdot 26dxdy + 25dy^2) = e^{25}(25dx^2 - 52dx^2 + 25dx^2)$$
$$= -2e^{25}dx^2 < 0, \quad \text{za } (dx, dy) \neq (0,0).$$

Sledi da funkcija $z = f(x, y)$, ako je $x + y = 10$, ima uslovni maksimum u tački $A(5,5)$.

$z_{u\max} = e^{25}$

☺