4. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $y = xe^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}}$ (bez nalaženja $f''(x)$).

1) Domen

$D = R \setminus \left\{ \sqrt[3]{2} \right\}$

2) Nule funkcije

$y = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3) Parnost

Domen nije simetričan u odnosu na koordinatni početak pa funkcija nije ni parna ni neparna.

4) Znak

$y > 0 \Rightarrow x \in (0, \sqrt[3]{2}) \cup (\sqrt[3]{2}, \infty)$

$y < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0)$

5) Asimptote

$$\lim_{x \to \sqrt[3]{2}^+} xe^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} = \infty \Rightarrow \text{prava } x = \sqrt[3]{2} \text{ je vertikalna asimptota sa desne strane}$$

$$\lim_{x \to \sqrt[3]{2}^-} xe^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} = 0 \ \ !tg\alpha$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \text{ funkcija nema horizontalnu asimptotu.}$$

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} = e^{\frac{1}{3}}$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - kx \right] = \lim_{x \to \pm\infty} x \left(e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} - e^{\frac{1}{3}} \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} - e^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{x}} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \text{Л.П.}$$

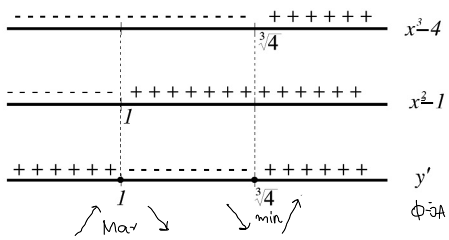
$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\overset{e^{\frac{1}{3}}}{e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}}} \cdot \frac{\overset{-x^2}{\cancel{3}x^2 \cdot \cancel{3}(\cancel{x^3}-2) - (\cancel{x^3}-1) \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}x^2}}{\cancel{9}(x^3-2)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{3}} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^4}{(x^3-2)^2} = 0$$

$\Rightarrow$ prava $y = \sqrt[3]{e} \cdot x$ je kosa asimptota

6) Monotonost i ekstremne vrednosti

$$y' = e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} \left[1 + x \frac{\cancel{3}x^2 \cdot \cancel{3}(\cancel{x^3}-2) - (\cancel{x^3}-1)\cancel{3} \cdot \cancel{3}x^2}{\cancel{9}(x^3-2)^2} \right] = e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} \left[1 - \frac{x^3}{(x^3-2)^2} \right] =$$

$$= e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} \cdot \frac{x^6 - 5x^3 + 4}{(x^3-2)^2} = \frac{(x^3-4)(x^3-1)}{\underbrace{(x^3-2)^2}_{>0}} \cdot \underbrace{e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}}}_{>0}$$



ф-ја непрекидна у $x=1$ и $x=\sqrt[3]{4}$

$y' > 0$ za $x \in (-\infty, 1) \cup (\sqrt[3]{4}, \infty)$ funkcija raste

$y' < 0$ za $x \in (1, \sqrt[3]{2}) \cup (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ funkcija opada

Funkcija ima minimum $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{e}$ za $x = \sqrt[3]{4}$. Funkcija ima maksimum 1 za $x = 1$.

7) Tangente funkcije

$$tg\alpha = \lim_{x\to\sqrt[3]{2}^-} y' = \lim_{x\to\sqrt[3]{2}^-} \frac{\overset{-2}{(x^3-4)}\overset{1}{(x^3-1)}}{(x^3-2)^2}\cdot e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} \overset{\frac{0}{0}}{=} -2\lim_{x\to\sqrt[3]{2}^-} \frac{(x^3-2)^{-2}}{e^{-\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{Л.П.}}{=}}$$

$$= -2\lim_{x\to\sqrt[3]{2}^-} \frac{\frac{-2\cdot 3x^2}{(x^3-2)^{\cancel{3}}}}{e^{-\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}}\cdot(-1)\cdot\frac{\cancel{3}x^2(\cancel{x^3}-2)\cdot\cancel{3}-(\cancel{x^3}-1)\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}x^2}{\cancel{9}\cancel{(x^3-2)}^2}} = \cancel{-}12\lim_{x\to\sqrt[3]{2}^-} \frac{\cancel{x^2}\cdot(x^3-2)^{-1}}{\cancel{-x^2}\cdot e^{-\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{Л.П.}}{=}}$$

$$= 12\lim_{x\to\sqrt[3]{2}^-} \frac{\frac{-3\cancel{x^2}}{\cancel{(x^3-2)^2}}}{e^{-\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}}\cdot\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{(x^3-2)^2}}} = -36\lim_{x\to\sqrt[3]{2}^-} \underset{0}{e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}}} = -36\cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

Upoređujemo funkciju sa asimptotom...

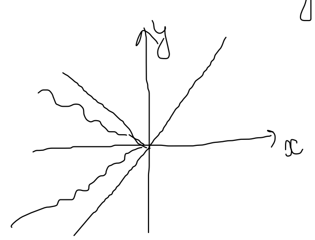
Za $x < 0$ eksponent funkcije je malo manji od $\frac{1}{3}$ pa je zato funkcija iznad asimptote.

$$f(-1) = -1\cdot e^{\frac{-1-1}{3(-1-2)}} - e^{\frac{2}{9}} = -\sqrt[9]{e^2} \approx -1{,}249$$

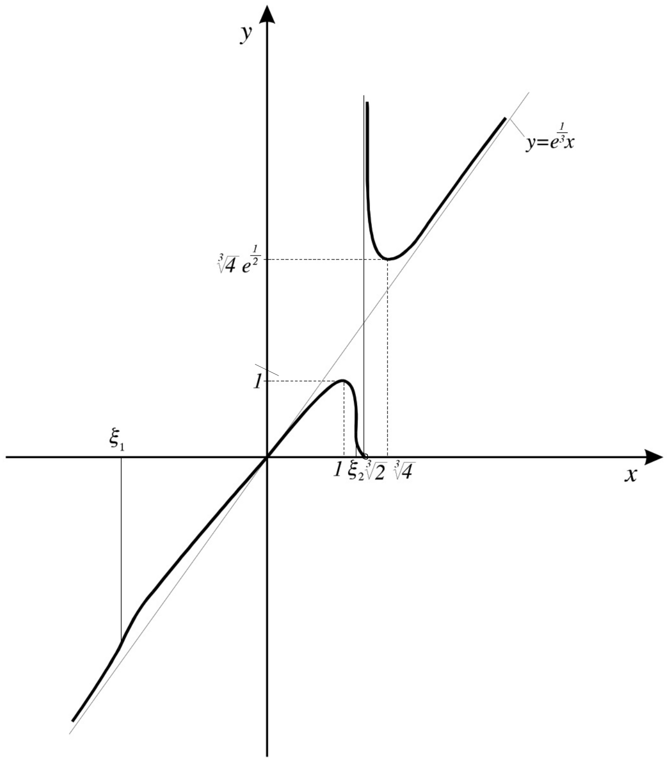
$$y = x\cdot e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}}$$

$$y(-1) = -1\cdot e^{\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{e} \approx -1{,}396$$

$y = x\cdot e^{\frac{1}{3}}$ К.А.



8) Grafik funkcije



$(\xi_1, f(\xi_1))$ i $(\xi_2, f(\xi_2))$ su prevojne tačke.

5. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = -(x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

1) Domen

$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

2) Nule funkcije

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

3) Parnost

$f(-x) = -(-x+2)e^{\frac{1}{-x}} \neq f(x) \wedge f(-x) = -(-x+2)e^{\frac{1}{-x}} \neq -f(x)$ ni parna ni neparna

4) Asimptote

$\lim_{x\to 0^-}(-(x+2)e^{\frac{1}{x}}) = 0 \;\; !tg\alpha$

$\lim_{x\to 0^+}(-(x+2)e^{\frac{1}{x}}) = -\infty \Rightarrow$ prava $x=0$ je vertikalna asimptota sa desne strane

$\lim_{x\to \pm\infty}(-(x+2)e^{\frac{1}{x}}) = \mp\infty \Rightarrow$ funkcija nema horizontalnu asimptotu

$$k=-\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+2}{x}e^{\frac{1}{x}}=-1$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}((-x-2)e^{\frac{1}{x}}+x)=\lim_{x\to\pm\infty}(-xe^{\frac{1}{x}}+x)-2\lim_{x\to\pm\infty}e^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}x(1-e^{\frac{1}{x}})-2=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}-2\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{\text{Л.П.}}{=}}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{\cancel{x^2}})}{-\frac{1}{\cancel{x^2}}}-2=\lim_{x\to\pm\infty}(-e^{\frac{1}{x}})-2=-3\Rightarrow \text{prava } y=-x-3 \text{ je kosa asimptota funkcije}$$

5) Monotonost i ekstremne vrednosti

$$f'(x)=-e^{\frac{1}{x}}(1-\frac{x+2}{x^2})=\frac{-x^2+x+2}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

$$-x^2+x+2=0\Leftrightarrow x_1=2,x_2=-1$$

- - - - - - - - - + + + + + + + - - - - - - - - - $-x^2+x+2$

-1 min 2 Max

НЕПРЕКИДНОСТ у $x=-1$ и $x=2$

$f'(x)>0$ za $x\in(-1,0)\cup(0,2)$ funkcija raste

$f'(x)<0$ za $x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ funkcija opada

Funkcija ima minimum $-\frac{1}{e}$ za $x=-1$. Funkcija ima maksimum $-4\sqrt{e}$ za $x=2$.

6) Tangente funkcije

$$tg\alpha=\lim_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}\frac{-x^2+x+2}{x^2}=2\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}2\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{x^2}}{e^{-\frac{1}{x}}}\overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\underset{\text{Л.П.}}{=}}2\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{-2}{x^{\cancel{3}}}}{e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{\cancel{x^2}}}=-4\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{x}}{e^{-\frac{1}{x}}}\overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\underset{\text{Л.П.}}{=}}$$

$$=-4\lim_{x\to0^-}\frac{-\frac{1}{\cancel{x^2}}}{e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{+1}{\cancel{x^2}}}=4\lim_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0\Rightarrow\alpha=0$$

7) Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke

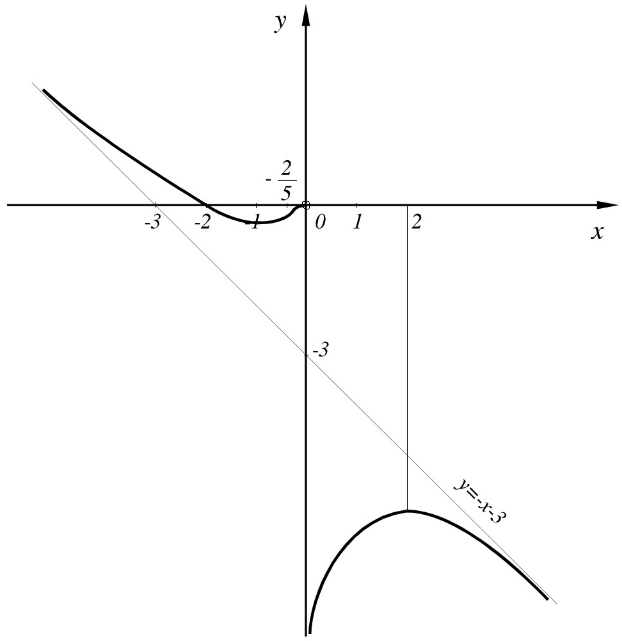
$$f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{-x^2+x+2}{x^4}+\frac{(-2x+1)x^2-2x(-x^2+x+2)}{x^4}\right)=e^{\frac{1}{x}}\frac{-5x-2}{x^4}$$

$f''(x)>0$ za $x\in(-\infty,-\frac{2}{5})$ funkcija je konveksna ☺

$f''(x)<0$ za $x\in(-\frac{2}{5},0)\cup(0,+\infty)$ funkcija je konkavna

Tačka $(-\frac{2}{5}, -\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}})$ je prevojna tačka.

8) Grafik funkcije



Jednačina tangente i normale

Prvi izvod funkcije u nekoj tački predstavlja koeficijent pravca tangente u posmatranoj tački. Jednačina tangente na krivu $f(x)$ u tački $M(x_0, y_0), y_0 = f(x_0)$ glasi $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, a normale $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$. Ako $f'(x_0) \neq 0$

Primer: Za funkciju $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ napisati jednačinu tangente i normale u $M(3, y_0)$.

$$y' = \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

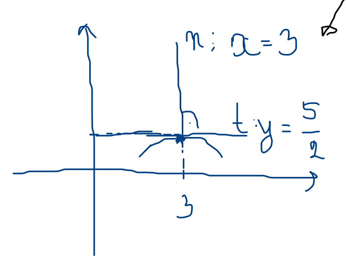
$$x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 2}{3 - 1} = \frac{5}{2}$$

$$y'(x_0) = y'(3) = \frac{3}{4}$$

Jednačina tangente: $y - \frac{5}{2} = \frac{3}{4}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

Jednačina normale: $y - \frac{5}{2} = -\frac{4}{3}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{13}{2}$

Ako $f'(x_0) = 0$



☺