[illegible]

Rešavanje nelinearnih jednačina

[illegible]

$$ax^2 + bx + c = 0$$

[illegible]

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

[illegible]

Uvodna napomena

[illegible]

Numeričke metode za rešavanje nelinearnih jednačina

[illegible]

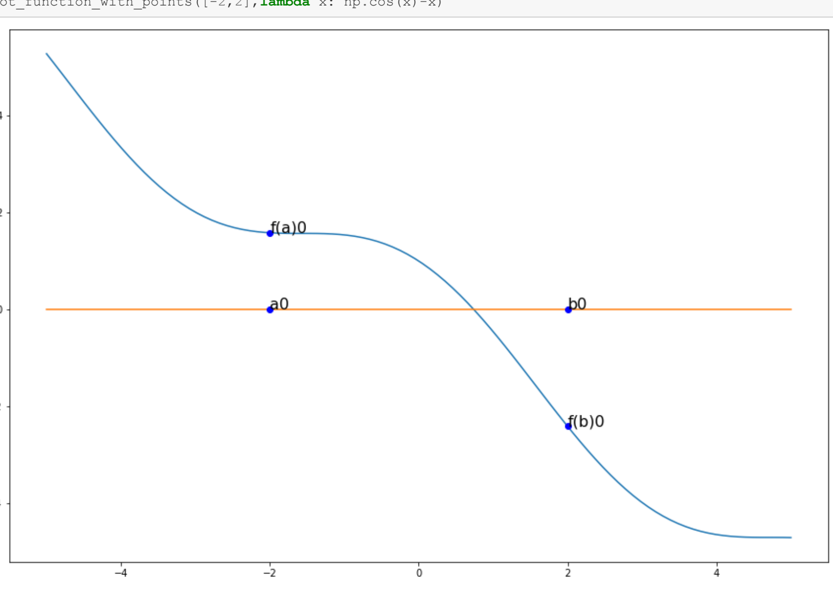
Metoda polovljenja

Najednostavnija metoda. Spada u zatorene metode, odnosno moramo da znamo neki početni interval $[a,b]$ u kome se nalazi rešenje.

Da bi mogli da koristimo metodu polovljenja, na intervalu $[a,b]$ funkcija $f(x)$ čiju nulu tražimo mora da bude neprekidna i da seče x-osu bar u jednoj tački (da ima nulu na tom zatvorenom intervalu).

Na primer, fukcija $cos(x) - x$ ima jednu nulu na intervalu $[-2,2]$

```
In [4]: plot_function_with_points([-2,2],lambda x: np.cos(x)-x)
```



Algoritam metode polovljenja

1. Proveravamo da li važi $f(a)f(b) < 0$, ako ne važi ovde završavamo algoritam

Ponavljamo

2. Odredimo polovinu interavala $[a,b]$:

$$c = \frac{a+b}{2}$$

3. Proveravamo da li važi $f(c) = 0$, ako važi pronašli smo rešenje i ovde završavamo algoritam.

4. Proveravamo u kom intervalu od dva ponuđena $[a,c]$ i $[c,b]$ funkcija menja znak, na primer proverimo da li važi:

$$f(a)f(c) < 0$$

.

5. Nastavljamo da delimo interval u kome funkcija menja znak, odnosno radimo jedno od $a = c$ ili $b = c$.

Kraj ponavljanja

6. Vraćamo c kao rešenje

Primer: Rešavamo jedančinu $x + 3 = 0$ na intervalu $[-4,0]$. Rešenje je $x = -3$.

Očigledno je da je $x + 3 = 0$ linearna jednačina, ali je namerno odbrana za lakšu ilustraciju metode.

Provera početnog uslova

```
In [6]: a=-4
        b=0
        f=lambda x: x+3
        fa=f(a)
        fb=f(b)
        print(fa)
        print(fb)
        fa*fb<0
```

```
-1
3
Out[6]: True
```

Iteracija 1.

```
In [7]: c=(a+b)/2
        fc=f(c)
        fc==0
Out[7]: False

In [8]: fa*fc<0
Out[8]: True

In [9]: b=c
```

Iteracija 2.

```
In [11]: fa=f(a)
         fb=f(b)
         c=(a+b)/2
         fc=f(c)
         print(c)
         print(f(c))
         fc==0
```

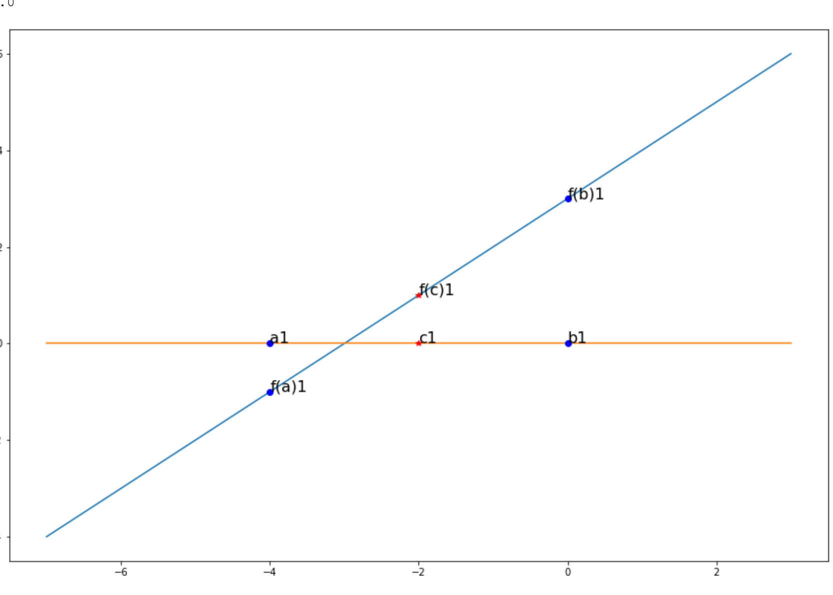
```
-3.0
0.0
Out[11]: True
```

Pogledaćemo prvo vizualizaciju metode polovljenja pre nego što krenemo na pisanje koda.

```
In [12]: def polovljenje_viz(a,b,maxIter,tacnost,funkcija):
             plot_function([a,b],funkcija)
             c=a
             if funkcija(a)*funkcija(b) < 0:
                 for i in range(1,maxIter+1):
                     draw_point([a,0],i,'bo',"a")
                     draw_point([b,0],i,'bo',"b")
                     draw_point([a,funkcija(a)],i,'bo',"f(a)")
                     draw_point([b,funkcija(b)],i,'bo',"f(b)")

                     c=(a+b)/2
                     fc=funkcija(c)

                     draw_point([c,0],i,'r*',"c")

                     if(fc==0 or np.abs(b-a)<tacnost):
                         break
                     else:
                         if funkcija(c)*funkcija(a) < 0:
                             b=c
                         else:
                             a=c
                     draw_point([c,fc],i,'r*',"f(c)")
                 return c
             return 'greska'
```

```
In [13]: x = polovljenje_viz(-4,0,1,10**-5,lambda x: x+3)
         print(x)
```

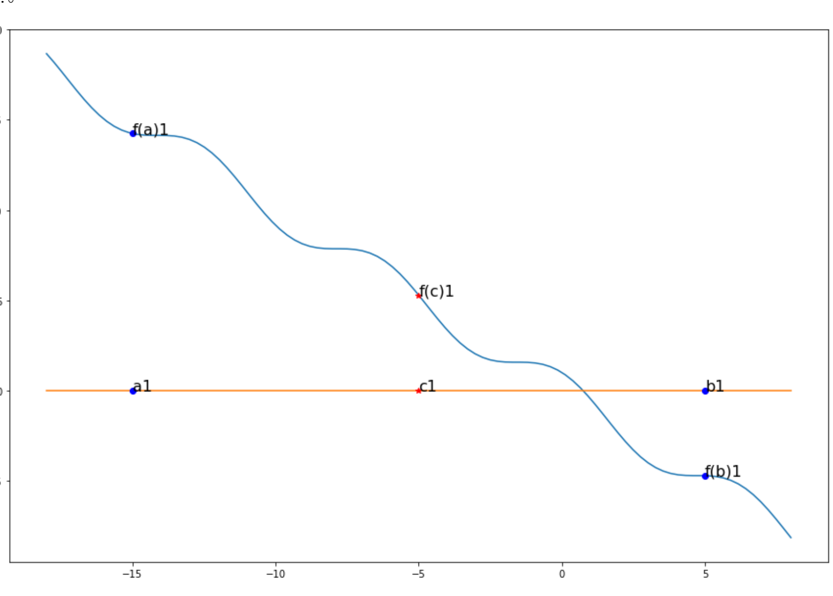
```
-2.0
```



Metodu ćemo sada ilustrovati na primer jedančine $cos(x) - x$ na intervalu $[-15,5]$.

```
In [14]: x = polovljenje_viz(-15,5,1,10**-5,lambda x: np.cos(x)-x)
         print(x)
```

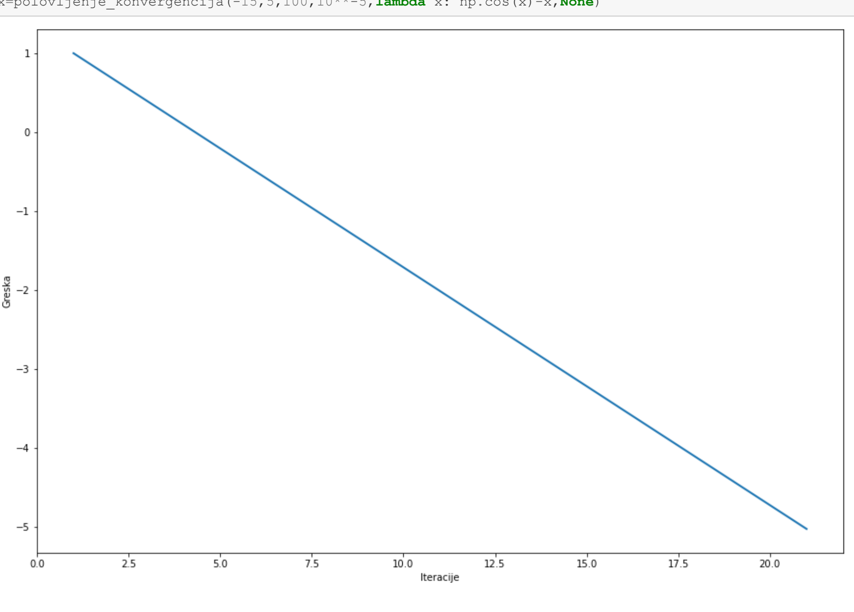
```
-5.0
```



Pogledati animaciju za metodu polovljenja sa slajdova.

Pišemo kod za metodu polovljenja.

[illegible]



[illegible]

Metoda sečice

Mana metode polovljenja to što ne koristi vrednosti već samo znak funkcije $f(x)$ u svom algoritmu.

Metoda sečice koristi funkciju vrednosti funkcije $f(x)$.

Ideja je da prilikom traženja nule $f(x)$ zamenimo pravom na malom intervalu (linearna interpolacija).

Umesto da tražimo nulu $f(x)$ koja može biti komplikovanog oblika, tražimo nulu prave koja je jednostavna.

Algoritam metode sečice

Imamo dve tačke x_1 i x_2 i funkciju $f(x)$ čiju nulu određujemo.

Cilj nam je da pronađemo tačku gde prava između tačaka $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ seče x-osu.

Ako imamo pravu $y = kx + n$ ona tačku u kojoj seče x-osu možemo odrediti na sledeći način:

$$y = kx + n$$
$$y = 0$$
$$0 = kx + n$$
$$x = -\frac{n}{k}$$

Određujemo sada jednačinu prave $y = kx + n$ kroz tačke $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$:

$$f(x_1) = kx_1 + n$$
$$f(x_2) = kx_2 + n$$

Oduzimamo drugu od prve jednačine:

$$f(x_1) - f(x_2) = k(x_1 - x_2)$$

Određujemo k:

$$k = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Određujemo n zamenom k u prvu jednačinu:

$$f(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} x_1 + n$$
$$n = f(x_1) - \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} x_1$$

Određujemo tačku x_3 kao tačku u kojoj prava između $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ sečce x-osu:

$$x_3 = -\frac{n}{k}$$
$$x_3 = -\frac{f(x_1) - \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} x_1}{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}}$$
$$x_3 = x_1 - \frac{f(x_1)}{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{(x_1-x_2)}}$$
$$x_3 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)}$$

Ako sada umesto $x_3, x_2 i x_1$ redom pišemo $x_{n+1}, x_n i x_{n-1}$ dobijamo opštu formulu za metodu sečice:

$$x_{n+1} = x_{n-1} - f(x_{n-1})\frac{x_{n-1} - x_n}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

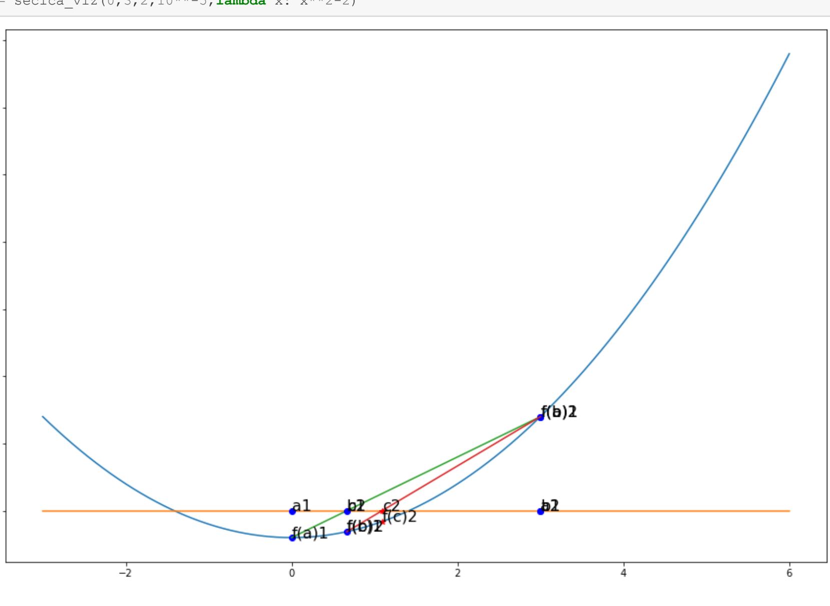
Primer: Primenićemo sada metodu sečice na funkciju $f(x) = x^2 - 2$ za početne vrenosti $x_1 = 0$ i $x_2 = 3$.

$$x_{n+1} = x_{n-1} - f(x_{n-1})\frac{x_{n-1} - x_n}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

$$x_3 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)}$$
$$f(x_1) = f(0) = 0^2 - 2 = -2$$
$$f(x_2) = f(3) = 3^2 - 2 = 7$$
$$x_3 = 0 - (-2)\frac{-0-3}{-2-7} = \frac{2}{3}$$

```
In [21]: def secica_viz(a,b,maxIter,tacnost,funkcija):
             plot_function([a,b],funkcija)
             for i in range(1,maxIter+1):
                 draw_point([a,0],i,'bo',"a")
                 draw_point([b,0],i,'bo',"b")
                 draw_point([a,funkcija(a)],i,'bo',"f(a)")
                 draw_point([b,funkcija(b)],i,'bo',"f(b)")

                 fa=funkcija(a)
                 fb=funkcija(b)

                 k=(fb-fa)/(b-a)
                 n=fb-k*b
                 c=-n/k

                 fc=funkcija(c)

                 if np.abs(fc)<tacnost:
                     break
                 tmp_x=np.linspace(np.min([a,b]),np.max([a,b]),100)
                 plt.plot(tmp_x,k*tmp_x+n)

                 draw_point([c,0],i,'r*',"c")

                 a=b
                 b=c
                 draw_point([c,fc],i,'r*',"f(c)")
             return c
```

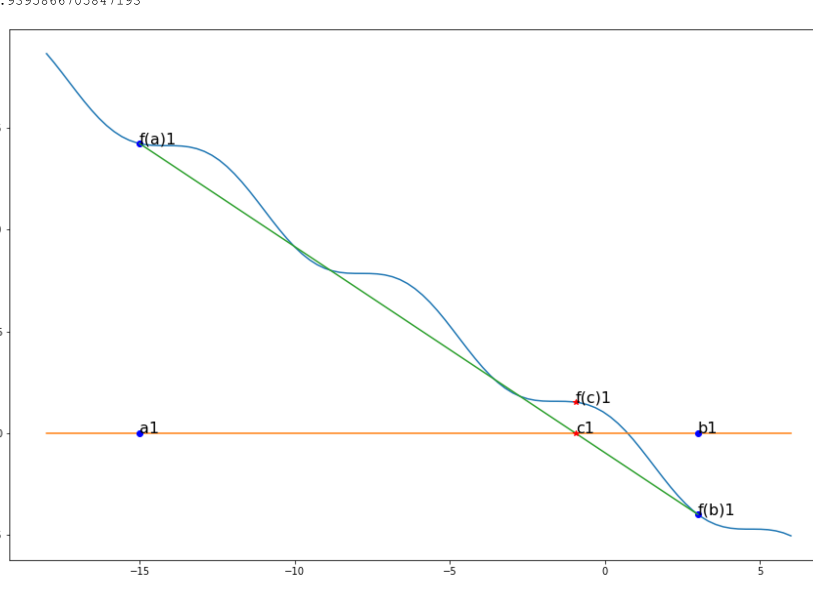
```
In [22]: x = secica_viz(0,3,2,10**-5,lambda x: x**2-2)
```



$$x_4 = x_2 - f(x_2)\frac{x_2 - x_3}{f(x_2) - f(x_3)}$$
$$f(x_2) = 7$$
$$f(x_3) = f(\frac{2}{3}) = (\frac{2}{3})^2 - 2 = -\frac{14}{9}$$
$$x_4 = 3 - 7\frac{3 - \frac{2}{3}}{7 + \frac{14}{9}} = 3 - 7\frac{3}{11} = \frac{12}{11}$$

```
In [23]: x = secica_viz(-15,3,1,10**-5,lambda x: np.cos(x)-x)
         print(x)
```

```
-0.9395866705847193
```



Pogledati animaciju za metodu sečice sa slajdova.

Pišemo kod za metodu sečice.

```
In [35]: def secica(a,b,maxIter,tacnost,funkcija):
             print("iter\tx1\t\tx2\t\tx3\t\tf(x3)")
             for i in range(1,maxIter+1):
                 fa=funkcija(a)
                 fb=funkcija(b)

                 k=(fb-fa)/(b-a)
                 n=fb-k*b
                 c=-n/k

                 fc=funkcija(c)

                 tmp_str = "%.1f \t %.8f \t %.8f \t %.8f \t %.8f" % (i,a,b,c,fc)
                 print(tmp_str)

                 if np.abs(fc)<tacnost:
                     break

                 a=b
                 b=c
             return c
```

```
In [36]: x = secica(-15,3,10,10**-5,lambda x: np.cos(x)-x)
         print(x)
```

```
iter    x1              x2              x3              f(x3)
1.0     -15.00000000    3.00000000      -0.93958667     1.52970843
2.0     3.00000000      -0.93958667     0.15221505      0.83622259
3.0     -0.93958667     0.15221505      1.46873690      -1.36685456
4.0     0.15221505      1.46873690      0.65192760      0.14298816
5.0     1.46873690      0.65192760      0.72928272      0.01636983
6.0     0.65192760      0.72928272      0.73928356      -0.00033210
7.0     0.72928272      0.73928356      0.73908470      0.00000072
0.7390847015697208
```

```
In [53]: x = secica(-15,3,10,10**-5,lambda x: np.cos(x)-x)
         print(x)
         x = polovljenje(-15,5,30,10**-5,lambda x: np.cos(x)-x)
         print(x)
```

```
iter    x1              x2              x3              f(x3)
1.0     -15.00000000    3.00000000      -0.93958667     1.52970843
2.0     3.00000000      -0.93958667     0.15221505      0.83622259
3.0     -0.93958667     0.15221505      1.46873690      -1.36685456
4.0     0.15221505      1.46873690      0.65192760      0.14298816
5.0     1.46873690      0.65192760      0.72928272      0.01636983
6.0     0.65192760      0.72928272      0.73928356      -0.00033210
7.0     0.72928272      0.73928356      0.73908470      0.00000072
0.7390847015697208
iter    a               b               c               |b-a|
1.0     -15.00000000    5.00000000      -5.00000000     20.00000000
2.0     -5.00000000     5.00000000      0.00000000      10.00000000
3.0     0.00000000      5.00000000      2.50000000      5.00000000
4.0     0.00000000      2.50000000      1.25000000      2.50000000
5.0     0.00000000      1.25000000      0.62500000      1.25000000
6.0     0.62500000      1.25000000      0.93750000      0.62500000
7.0     0.62500000      0.93750000      0.78125000      0.31250000
8.0     0.62500000      0.78125000      0.70312500      0.15625000
9.0     0.70312500      0.78125000      0.74218750      0.07812500
10.0    0.70312500      0.74218750      0.72265625      0.03906250
11.0    0.72265625      0.74218750      0.73242188      0.01953125
12.0    0.73242188      0.74218750      0.73730469      0.00976562
13.0    0.73730469      0.74218750      0.73974609      0.00488281
14.0    0.73730469      0.73974609      0.73852539      0.00244141
15.0    0.73852539      0.73974609      0.73913574      0.00122070
16.0    0.73852539      0.73913574      0.73883057      0.00061035
17.0    0.73883057      0.73913574      0.73898315      0.00030518
18.0    0.73898315      0.73913574      0.73905945      0.00015259
19.0    0.73905945      0.73913574      0.73909760      0.00007629
20.0    0.73905945      0.73909760      0.73907852      0.00003815
21.0    0.73907852      0.73909760      0.73908806      0.00001907
22.0    0.73907852      0.73908806      0.73908329      0.00000954
0.7390832901000977
```

Konvergencija metode sečice

Konvergencija metode sečice je super-linearna.

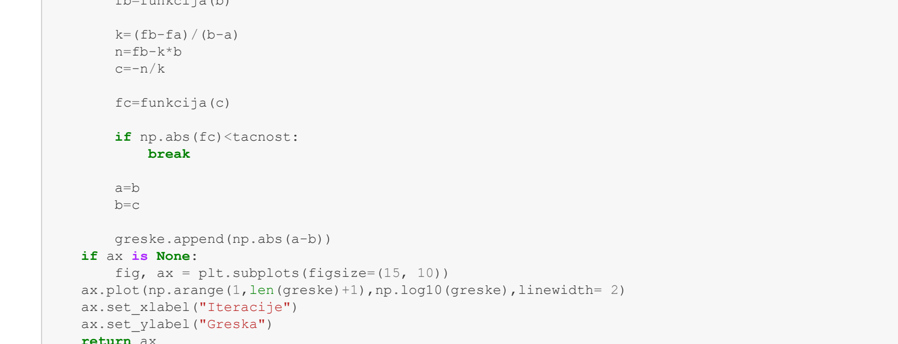
To znači da se odnos greške i iteracija menja linearno, tj. $greska = k * itreacija + n$, ali se k kod metode sečice smanjuje kroz iteracije, dakle konvergencija je sve brža. Na primer na početku može da važi $greska = k_1 \cdot itreacija + n$, a posle nekoliko iteracija $greska = k_2 \cdot itreacija + n$ itd.

Kod metode polovljenja vrednost k se ne menja kroz iteracije, odnosno trenutna greška je uvek polovina prethodne greške.

In [54]:
```python
def secica_konvergencija(a,b,maxIter,tacnost,funkcija,ax):
    greske=[]
    for i in range(1,maxIter+1):
        fa=funkcija(a)
        fb=funkcija(b)

        k=(fb-fa)/(b-a)
        n=fb-k*b
        c=-n/k

        fc=funkcija(c)

        if np.abs(fc)<tacnost:
            break

        a=b
        b=c

        greske.append(np.abs(a-b))
    if ax is None:
        fig, ax = plt.subplots(figsize=(15, 10))
    ax.plot(np.arange(1,len(greske)+1),np.log10(greske),linewidth= 2)
    ax.set_xlabel("Iteracije")
    ax.set_ylabel("Greska")
    return ax
```

In [55]:
```python
ax_secica = secica_konvergencija(-15,5,10,10**-15,lambda x: np.cos(x)-x,None)
polovljenje_konvergencija(-15,5,10,10**-15,lambda x: np.cos(x)-x,ax_secica)
```

Out[55]: `<AxesSubplot:xlabel='Iteracije', ylabel='Greska'>`



Sečica je otvorena metoda i nema garantovanu konvergenciju. Ona zavisi od odabira početnih vrednosti.

Metoda regula falsi

Regula falsi je modifkacija metode sečice koja kombinuje metodu polovljenja i metodu sečice.

Regula falsi zahteva zatvoren iterval u kome se nalazi rešenje kao uslov za pokretanje.

Tokom izvršvavanja sečica se povlači uvek kroz tačake između kojih funkcija menja znak.

Na ovom predvanju nećemo detaljno obrađivati metodu regula falsi. Kao dodatni neobavezan zadatak, možete napisati kod za metodu regula falsi pomoću kodova sa ovog predavanja.

Njutnova metoda

Njutnova metoda ili metoda tangente koristi istu logiku kao metoda sečice, ali se umesto sečice koristi tangenta.

Pretpostavka je da tangenta bolje prati funkciju od sečice pa će samim tim ovaj metod brže konvergirati od metode sečice.

Metod je otvoren i zahteva samo jednu početnu tačku. Samim tim konvergencija nije garantovana, ali je kvadratna kada metod konvergira.

Njutnova metoda je najbrža metoda koji učimo danas, ali (kao što ćete videti u nastavku) zahteva izvod funkcije koji nije uvek lako ni brzo izračunljiv.

Algoritam Njutnove metode

Krenućemo od jednačine tangente u nekoj tački x_1, a x_2 ćemo odrediti kao tačku u kojoj ta tangenta seče x-osu.

Jednačina tagente u tački x_i:

$$y_i = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i)$$

gde je $f'(x_i)$ izvod funkcije $f(x)$ u tački x_i.

Postavljamo $y_i = 0$, ubacujemo x_1 umesto x_i, i izražavamo tačku x_2 kao tačku x na tangenti za koju važi $y_i = 0$:

$$0 = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$
$$f'(x_1)x_2 = f(x_1) - f'(x_1)x_1$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Ako sada umesto x_2 i x_1 redom pišemo x_{n+1} i x_n dobijamo opštu formulu za Njutnovu metodu:

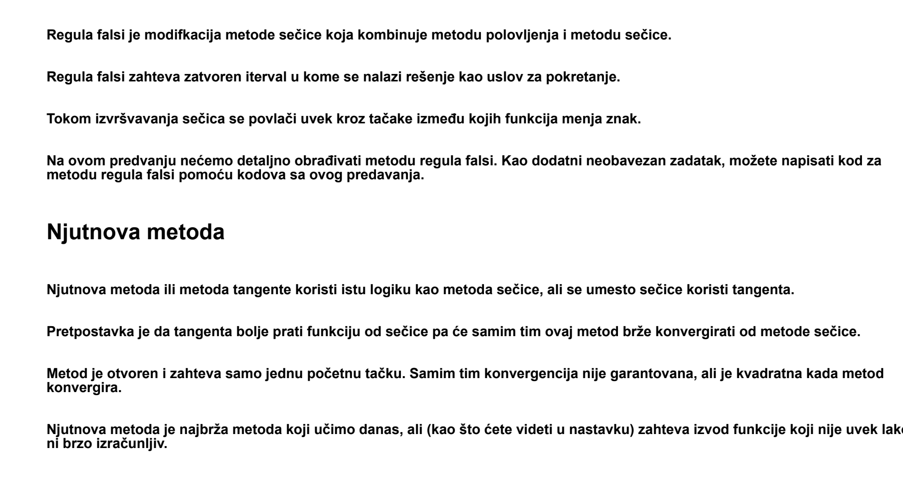
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Primer: Primenićemo sada metodu tangente na funkciju $f(x) = x^2 - 2$ za početnu vrenosti $x_1 = 9$. Da li možemo da odaberemo baš bilo koju tačku? Šta bi bilo da smo odabrali $x_1 = 0$?

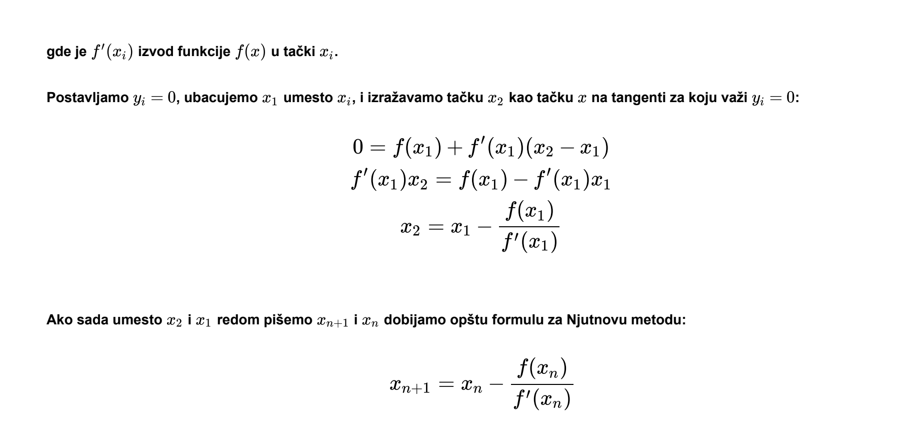
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$
$$f(9) = 9^2 - 2 = 79$$
$$f'(9) = 2 \cdot 9 = 18$$
$$x_2 = 9 - \frac{f(9)}{f'(9)}$$
$$x_2 = 9 - \frac{79}{18} = 4.6111$$

In [56]:
```python
def tangenta_viz(x1,maxIter,tacnost,funkcija,izvod):
    plot_function([x1-10.,x1+1.],funkcija)
    for i in range(1,maxIter+1):
        fx1=funkcija(x1)
        fizvodx1=izvod(x1)

        x2=x1-fx1/fizvodx1
        fx2=funkcija(x2)

        draw_point([x1,0],i,'bo',"x1");
        draw_point([x1,funkcija(x1)],i,'bo',"f(x1)");
        draw_point([x2,0],i,'r*',"x2");

        tmp_x=np.linspace(x2-3,x1+5,100)
        plt.plot(tmp_x,fx1+fizvodx1*(tmp_x-x1));

        if np.abs(fx2)<tacnost:
            break
        x1=x2
```

In [57]:
```python
tangenta_viz(9,1,10^-5,lambda x:x**2-2,lambda x:2*x)
```



[illegible]



[illegible]

Out[62]: 0.72265625

Metoda tangente divergira za početnu vrednost $x_1 = 5$. To je zato što je tačka $x_1 = 5$ skoro tačka prevoja, tj. važi $f'(5) = -sin(5) - 1 = -0.041$. Što možemo videti i na grafiku.

In [64]:
```python
plot_function([0,5],lambda x: np.cos(x)-x)
plt.plot(5,0,'bo')
plt.plot(5,np.cos(5)-5,'bo')
```

Out[64]: `[<matplotlib.lines.Line2D at 0x205264d3ef0>]`

Sada menjamo početnu tačku na $x_1 = 2.5$ i poredimo metode.

In [65]:
```python
tangenta(2.5,20,10**-5,lambda x: np.cos(x)-x,lambda x: -np.sin(x)-1)
secica(-2.5,2.5,20,10**-5,lambda x: np.cos(x)-x)
polovljenje(-2.5,2.5,10,10**-5,lambda x: np.cos(x)-x)
```

```
iter    x1             x2             f(x2)
1.0      2.50000000     0.43481317     0.47213558
2.0      0.43481317     0.76701271     -0.04702568
3.0      0.76701271     0.73925236     -0.00027988
4.0      0.73925236     0.73908514     -0.00000001
iter    x1             x2             x3             f(x3)
1.0      -2.50000000    2.50000000     -0.80114362    1.49702949
2.0      2.50000000     -0.80114362    0.22881284     0.74512352
3.0      -0.80114362    0.22881284     1.24947873     -0.93366173
4.0      0.22881284     1.24947873     0.68183216     0.09458720
5.0      1.24947873     0.68183216     0.73404919     0.00841883
6.0      0.68183216     0.73404919     0.73915090     -0.00011007
7.0      0.73404919     0.73915090     0.73908506     0.00000012
iter    a              b              c              |b-a|
1.0      -2.50000000    2.50000000     0.00000000     5.00000000
2.0      0.00000000     2.50000000     1.25000000     2.50000000
3.0      0.00000000     1.25000000     0.62500000     1.25000000
4.0      0.62500000     1.25000000     0.93750000     0.62500000
5.0      0.62500000     0.93750000     0.78125000     0.31250000
6.0      0.62500000     0.78125000     0.70312500     0.15625000
7.0      0.70312500     0.78125000     0.74218750     0.07812500
8.0      0.70312500     0.74218750     0.72265625     0.03906250
9.0      0.72265625     0.74218750     0.73242188     0.01953125
10.0     0.73242188     0.74218750     0.73730469     0.00976562
```

Out[65]: 0.7373046875

Vidimo da metoda tangente najbrže (za 4 iteracije) stiže do rešenja.

Konvergencija Njutnove metode

Njutnova metoda konvergira kvadratno, odnosno odnos iteracija i greške je kvadratna funkcija.

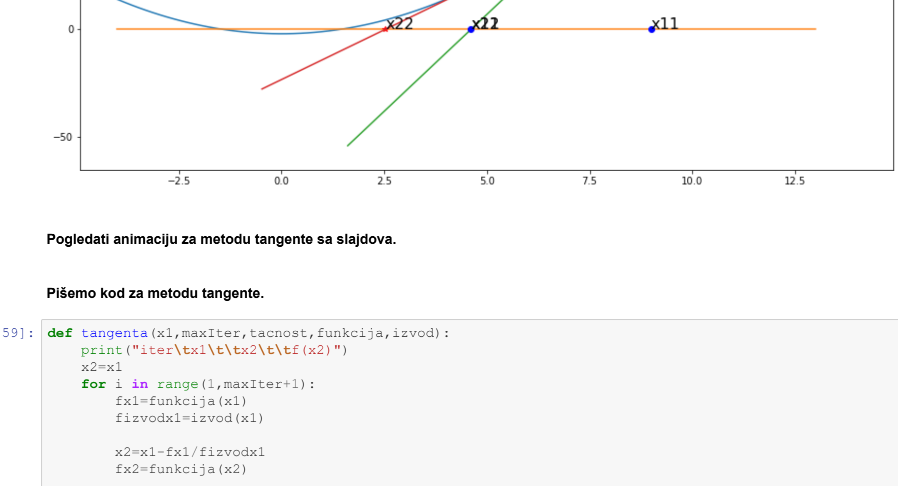
Kao što smo videli na jednom od prethodnih primera, konvergencija Njutnove metode nije garantovana i zavisi od izbora početnog rešenja.

Ako bismo u praksi hteli da što brže garantovano stignemo do tačnog rešenja, jedna od opcija bi bila da znamo bar grubo neki veći zatvoreni interval u kome je rešenje, pa da pokrenemo nekoliko iteracije metode polovljenja, pa onda kad suzimo interval odabremo neko početno rešenje i pokrenemo Njutnovu metodu.

In [67]:
```python
def tangenta_konvergencija(x1,maxIter,tacnost,funkcija,izvod,ax):
    greske=[]
    for i in range(1,maxIter+1):
        fx1=funkcija(x1)
        fizvodx1=izvod(x1)

        x2=x1-fx1/fizvodx1
        fx2=funkcija(x2)

        if np.abs(fx2)<tacnost:
            break
        x1=x2

        greske.append(np.abs(fx2))
    if ax is None:
        fig, ax = plt.subplots(figsize=(15, 10))
    ax.plot(np.arange(1,len(greske)+1),np.log10(greske),linewidth= 2)
    ax.set_xlabel("Iteracije")
    ax.set_ylabel("Greska")
    return ax
```

In [68]:
```python
ax = tangenta_konvergencija(2.5,20,10**-15,lambda x: np.cos(x)-x,lambda x: -np.sin(x)-1,None)
ax = secica_konvergencija(-2.5,2.5,20,10**-15,lambda x: np.cos(x)-x,ax)
polovljenje_konvergencija(-2.5,2.5,20,10**-15,lambda x: np.cos(x)-x,ax)
```

Out[68]: `<AxesSubplot:xlabel='Iteracije', ylabel='Greska'>`



In [ ]: