# DISKRETNA MATEMATIKA

- PREDAVANJE -

Jovanka Pantović

# Tema 1

## Šetnje u grafu

# Šetnje u grafu

### Definicija

*Neka je* $G = (V, E, \psi)$ *multigraf sa osobinom da za* $e_1, \ldots, e_n \in E$ *i* $v_0, \ldots, v_n \in V$ *važi* $\psi(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$.

# Šetnje u grafu

## Definicija

*Neka je* $G = (V, E, \psi)$ *multigraf sa osobinom da za* $e_1, \ldots, e_n \in E$ *i* $v_0, \ldots, v_n \in V$ *važi* $\psi(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$.

1. $v_0 v_n$*-šetnja:* $v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_n v_n$

# Šetnje u grafu

## Definicija

*Neka je* $G = (V, E, \psi)$ *multigraf sa osobinom da za* $e_1, \ldots, e_n \in E$ *i* $v_0, \ldots, v_n \in V$ *važi* $\psi(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$.

1. $v_0 v_n$*-šetnja:* $v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_n v_n$
2. $v_0 v_n$*-staza:* $v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_n v_n$ $\quad (\forall i, j : i \neq j \Rightarrow e_i \neq e_j)$

# Šetnje u grafu

## Definicija

*Neka je* $G = (V, E, \psi)$ *multigraf sa osobinom da za* $e_1, \dots, e_n \in E$ *i* $v_0, \dots, v_n \in V$ *važi* $\psi(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$ $(i \in \{1, \dots, n\})$.

1. $v_0 v_n$*-šetnja:* $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_n v_n$
2. $v_0 v_n$*-staza:* $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_n v_n$ $\quad (\forall i, j : i \neq j \Rightarrow e_i \neq e_j)$
3. $v_0 v_n$*-put:*

$$v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_n v_n \qquad (\forall i, j : i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j)$$

*(osim eventualno* $v_0 = v_n$*)*

# Šetnje u grafu

## Definicija

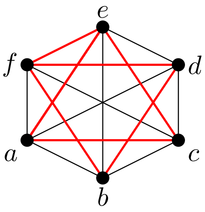
*Neka je* $G = (V, E, \psi)$ *multigraf sa osobinom da za* $e_1, \ldots, e_n \in E$ *i* $v_0, \ldots, v_n \in V$ *važi* $\psi(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$.

1. $v_0 v_n$*-šetnja:* $v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_n v_n$
2. $v_0 v_n$*-staza:* $v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_n v_n$ $\quad$ $(\forall i, j : i \neq j \Rightarrow e_i \neq e_j)$
3. $v_0 v_n$*-put:*
$$v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_n v_n \qquad (\forall i, j : i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j)$$
*(osim eventualno* $v_0 = v_n$*)*
4. *kontura:* $v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_n v_n$ $\quad$ $(\forall i, j : i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j)$ $\quad$ $v_0 = v_n$

# Primer

Za graf $K_6$ na slici, dajemo po jedan primer za svaku kategoriju.

1. šetnja: $aecaefdbf$;
2. staza: $aecafdbf$;
3. put: $aecfdb$;
4. kontura: $aecfdba$.

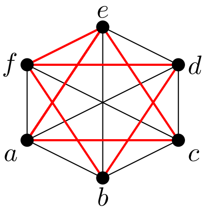



$aecaefdbf$

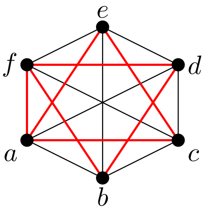
# Primer

Za graf $K_6$ na slici, dajemo po jedan primer za svaku kategoriju.

1. šetnja: $aecaefdbf$;
2. staza: $aecafdbf$;
3. put: $aecfdb$;
4. kontura: $aecfdba$.




$aecaefdbf$

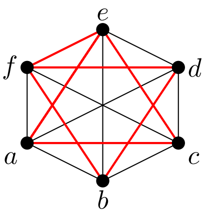



$aecafdbf$

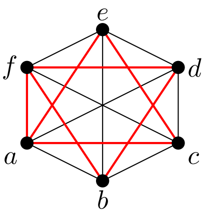
# Primer

Za graf $K_6$ na slici, dajemo po jedan primer za svaku kategoriju.

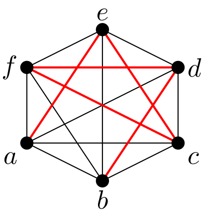
1. šetnja: $aecaefdbf$;
2. staza: $aecafdbf$;
3. put: $aecfdb$;
4. kontura: $aecfdba$.




$aecaefdbf$




$aecafdbf$

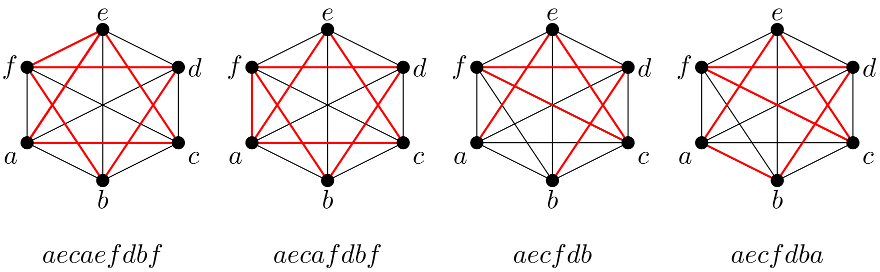



$aecfdb$

# Primer

Za graf $K_6$ na slici, dajemo po jedan primer za svaku kategoriju.

1. šetnja: $aecaefdbf$;
2. staza: $aecafdbf$;
3. put: $aecfdb$;
4. kontura: $aecfdba$.

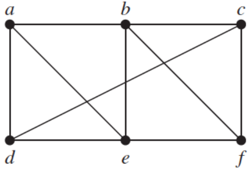


**Teorema**

*Ako u grafu postoji* $uv$*-šetnja (staza), onda postoji i* $uv$*-put.*

### Teorema

*Ako u grafu postoji $uv$-šetnja (staza), onda postoji i $uv$-put.*




$$aedabeabefbcd \Rightarrow a\textcolor{red}{edabeabefb}cd \Rightarrow abcd$$

# Tema 2

## Povezan graf

# Povezanost

**Definicija**

*Kažemo da su čvorovi $u$ i $v$ povezani ako postoji $uv$-put u $G$.*

# Povezanost

### Definicija

*Kažemo da su čvorovi $u$ i $v$ povezani ako postoji $uv$-put u $G$.*

*Svaki čvor je povezan sam sa sobom.*

# Povezanost

**Definicija**

*Kažemo da su čvorovi $u$ i $v$ povezani ako postoji $uv$-put u $G$.*

*Svaki čvor je povezan sam sa sobom.*

*Kažemo da je graf $G$ povezan ako za svaka dva čvora $u, v \in V(G)$ važi da su $u$ i $v$ povezani.*

### Lema

*Relacija "je povezan sa" je relacija ekvivalencije na skupu čvorova grafa.*

## Lema

*Relacija "je povezan sa" je relacija ekvivalencije na skupu čvorova grafa.*

(R) Refleksivnost sledi direktno iz definicije.

## Lema

*Relacija "je povezan sa" je relacija ekvivalencije na skupu čvorova grafa.*

(R) Refleksivnost sledi direktno iz definicije.

(S) Neka je $u \neq v$ i neka je $uv$-put u grafu oblika

$$uv_0 \dots v_{n-1}v.$$

## Lema

*Relacija "je povezan sa" je relacija ekvivalencije na skupu čvorova grafa.*

(R) Refleksivnost sledi direktno iz definicije.

(S) Neka je $u \neq v$ i neka je $uv$-put u grafu oblika

$$uv_0 \dots v_{n-1}v.$$

Tada je

$$vv_{n-1} \dots v_0u$$

$vu$-put u grafu.

## Lema

*Relacija "je povezan sa" je relacija ekvivalencije na skupu čvorova grafa.*

(R) Refleksivnost sledi direktno iz definicije.

(S) Neka je $u \neq v$ i neka je $uv$-put u grafu oblika

$$uv_0 \dots v_{n-1}v.$$

Tada je

$$vv_{n-1} \dots v_0u$$

$vu$-put u grafu.

(T) Pretpostavimo da u grafu $G$ postoje $uv$-put i $vw$-put:

$$uu_0 \dots u_{l-1}v \quad \text{i} \quad vv_0 \dots v_{n-1}w.$$

## Lema

*Relacija "je povezan sa" je relacija ekvivalencije na skupu čvorova grafa.*

(R) Refleksivnost sledi direktno iz definicije.

(S) Neka je $u \neq v$ i neka je $uv$-put u grafu oblika

$$uv_0 \dots v_{n-1}v.$$

Tada je

$$vv_{n-1} \dots v_0u$$

$vu$-put u grafu.

(T) Pretpostavimo da u grafu $G$ postoje $uv$-put i $vw$-put:

$$uu_0 \dots u_{l-1}v \quad \text{i} \quad vv_0 \dots v_{n-1}w.$$

Tada je sa

$$uu_0 \dots u_{l-1}vv_0 \dots v_{n-1}w$$

data jedna $uw$-šetnja (koja ne mora biti put).

## Lema

*Relacija "je povezan sa" je relacija ekvivalencije na skupu čvorova grafa.*

(R) Refleksivnost sledi direktno iz definicije.

(S) Neka je $u \neq v$ i neka je $uv$-put u grafu oblika

$$uv_0 \dots v_{n-1}v.$$

Tada je

$$vv_{n-1} \dots v_0u$$

$vu$-put u grafu.

(T) Pretpostavimo da u grafu $G$ postoje $uv$-put i $vw$-put:

$$uu_0 \dots u_{l-1}v \quad \text{i} \quad vv_0 \dots v_{n-1}w.$$

Tada je sa

$$uu_0 \dots u_{l-1}vv_0 \dots v_{n-1}w$$

data jedna $uw$-šetnja (koja ne mora biti put). Ako u grafu postoji $uw$-šetnja, onda postoji i $uw$-put.

# Broj komponenti povezanosti

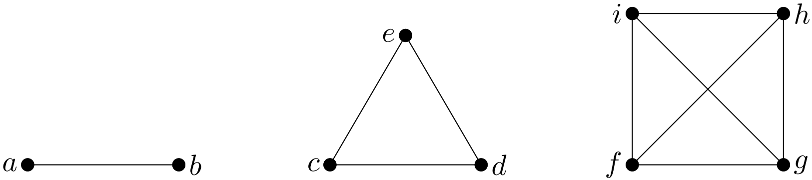
Broj komponenti povezanosti grafa $G$, u oznaci $\omega(G)$, jednak je broju klasa ekvivalencije u odnosu na relaciju povezanosti.

**Lemma**

*$G$ je povezan akko $\omega(G) = 1$.*

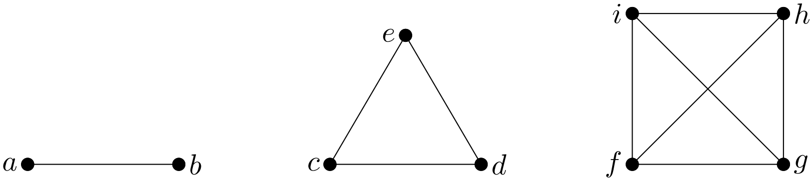
# Primer

Neka je $G = (\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}, E)$ graf na slici.



# Primer

Neka je $G = (\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}, E)$ graf na slici.




Broj komponenti povezanosti datog grafa je $\omega(G) = 3$.
Komponente povezanosti su indukovane sledećim skupovima čvorova:

$$\{a, b\}, \{c, d, e\}, \{f, g, h, i\}.$$

### Teorema

*Neka je* $n \geq 2.$
*Graf sa* $n$ *čvorova i manje od* $n-1$ *grana nije povezan.*

### Teorema

*Neka je* $n \geq 2$.
*Graf sa* $n$ *čvorova i manje od* $n-1$ *grana nije povezan.*

Dokaz: Indukcijom po $n$.
<u>Baza $n = 2$ :</u> Graf sa dva čvora i 0 grana nije povezan.

## Teorema

*Neka je $n \geq 2$.*
*Graf sa $n$ čvorova i manje od $n-1$ grana nije povezan.*

Dokaz: Indukcijom po $n$.
Baza $n = 2$ : Graf sa dva čvora i 0 grana nije povezan.
Induktivna pretpostavka: Pretpostavimo da nijedan graf sa $n$ čvorova i manje od $n-1$ grana nije povezan.

## Teorema

*Neka je $n \geq 2$.*
*Graf sa $n$ čvorova i manje od $n-1$ grana nije povezan.*

Dokaz: Indukcijom po $n$.
Baza $n = 2$ : Graf sa dva čvora i 0 grana nije povezan.
Induktivna pretpostavka: Pretpostavimo da nijedan graf sa $n$ čvorova i manje od $n-1$ grana nije povezan.
Induktivni korak: Neka je $G$ graf sa $n+1$ čvorova i manje od $n$ grana.

## Teorema

*Neka je $n \geq 2$.*
*Graf sa $n$ čvorova i manje od $n-1$ grana nije povezan.*

Dokaz: Indukcijom po $n$.
Baza $n = 2$ : Graf sa dva čvora i 0 grana nije povezan.
Induktivna pretpostavka: Pretpostavimo da nijedan graf sa $n$ čvorova i manje od $n-1$ grana nije povezan.
Induktivni korak: Neka je $G$ graf sa $n+1$ čvorova i manje od $n$ grana.
Postoji čvor $v$ stepena $d_G(v) \leq 1$.

### Teorema

*Neka je* $n \geq 2.$
*Graf sa* $n$ *čvorova i manje od* $n-1$ *grana nije povezan.*

Dokaz: Indukcijom po $n.$
<u>Baza $n = 2$ :</u> Graf sa dva čvora i 0 grana nije povezan.
<u>Induktivna pretpostavka:</u> Pretpostavimo da nijedan graf sa $n$ čvorova i manje od $n-1$ grana nije povezan.
<u>Induktivni korak:</u> Neka je $G$ graf sa $n+1$ čvorova i manje od $n$ grana.
Postoji čvor $v$ stepena $d_G(v) \leq 1.$
Ako je $d_G(v) = 0$ : broj komponenti povezanosti je bar dva i graf nije povezan.

### Teorema

*Neka je* $n \geq 2$.
*Graf sa* $n$ *čvorova i manje od* $n-1$ *grana nije povezan.*

Dokaz: Indukcijom po $n$.
Baza $n = 2$ : Graf sa dva čvora i 0 grana nije povezan.
Induktivna pretpostavka: Pretpostavimo da nijedan graf sa $n$ čvorova i manje od $n-1$ grana nije povezan.
Induktivni korak: Neka je $G$ graf sa $n+1$ čvorova i manje od $n$ grana.
Postoji čvor $v$ stepena $d_G(v) \leq 1$.
Ako je $d_G(v) = 0$ : broj komponenti povezanosti je bar dva i graf nije povezan.
Ako je $d_G(v) = 1$ :

## Teorema

*Neka je $n \geq 2$.*
*Graf sa $n$ čvorova i manje od $n-1$ grana nije povezan.*

Dokaz: Indukcijom po $n$.
Baza $n = 2:$ Graf sa dva čvora i 0 grana nije povezan.
Induktivna pretpostavka: Pretpostavimo da nijedan graf sa $n$ čvorova i manje od $n-1$ grana nije povezan.
Induktivni korak: Neka je $G$ graf sa $n+1$ čvorova i manje od $n$ grana.
Postoji čvor $v$ stepena $d_G(v) \leq 1$.
Ako je $d_G(v) = 0:$ broj komponenti povezanosti je bar dva i graf nije povezan.
Ako je $d_G(v) = 1:$

$$G' = G - v = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{\{u, v\}\})$$

## Teorema

*Neka je $n \geq 2$.*
*Graf sa $n$ čvorova i manje od $n-1$ grana nije povezan.*

Dokaz: Indukcijom po $n$.
Baza $n = 2$ : Graf sa dva čvora i 0 grana nije povezan.
Induktivna pretpostavka: Pretpostavimo da nijedan graf sa $n$ čvorova i manje od $n-1$ grana nije povezan.
Induktivni korak: Neka je $G$ graf sa $n+1$ čvorova i manje od $n$ grana.
Postoji čvor $v$ stepena $d_G(v) \leq 1$.
Ako je $d_G(v) = 0$ : broj komponenti povezanosti je bar dva i graf nije povezan.
Ako je $d_G(v) = 1$ :

$$G' = G - v = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{\{u, v\}\})$$

$$|V(G')| = n \quad |E(G')| = |E(G)| - 1 < n - 1 \quad \omega(G') = \omega(G)$$

Prema induktivnoj pretpostavci,

$$\omega(G') \geq 2 \Rightarrow \omega(G) \geq 2$$

### Teorema

*Neka je $G$ povezan i neka je $C$ kontura u $G$. Ako je $e$ grana konture, onda je $G - e$ povezan.*

### Teorema

*Neka je $G$ povezan i neka je $C$ kontura u $G$. Ako je $e$ grana konture, onda je $G - e$ povezan.*

Izaberimo proizvoljno dva čvora $u, v \in V$.

### Teorema

*Neka je $G$ povezan i neka je $C$ kontura u $G$. Ako je $e$ grana konture, onda je $G - e$ povezan.*

Izaberimo proizvoljno dva čvora $u, v \in V$. Kako je $G$ povezan, postoji $uv$-put

$$P = uv_1 \dots v_i v_{i+1} \dots v_{n-1} v.$$

## Teorema

*Neka je $G$ povezan i neka je $C$ kontura u $G$. Ako je $e$ grana konture, onda je $G - e$ povezan.*

Izaberimo proizvoljno dva čvora $u, v \in V$. Kako je $G$ povezan, postoji $uv$-put

$$P = uv_1 \dots v_i v_{i+1} \dots v_{n-1} v.$$

(i) Ako $e$ ne pripada $uv$-putu, onda je $P$ $uv$-put u $G - e$.

(ii) Ako $e$ pripada $uv$-putu, onda možemo pretpostaviti da je to grana $\{v_i, v_{i+1}\}$ i da je kontura $C$ oblika

$$C = v_i v_{i+1} u_1 \dots u_l v_i.$$

## Teorema

*Neka je $G$ povezan i neka je $C$ kontura u $G$. Ako je $e$ grana konture, onda je $G-e$ povezan.*

Izaberimo proizvoljno dva čvora $u, v \in V$. Kako je $G$ povezan, postoji $uv$-put

$$P = uv_1 \dots v_i v_{i+1} \dots v_{n-1} v.$$

(i) Ako $e$ ne pripada $uv$-putu, onda je $P$ $uv$-put u $G - e$.

(ii) Ako $e$ pripada $uv$-putu, onda možemo pretpostaviti da je to grana $\{v_i, v_{i+1}\}$ i da je kontura $C$ oblika

$$C = v_i v_{i+1} u_1 \dots u_l v_i.$$

To znači da u grafu $G - e$ postoji put $Q$ od $v_i$ do $v_{i+1}$ :

$$Q = v_i u_l u_{l-1} \dots u_1 v_{i+1}$$

## Teorema

*Neka je $G$ povezan i neka je $C$ kontura u $G$. Ako je $e$ grana konture, onda je $G - e$ povezan.*

Izaberimo proizvoljno dva čvora $u, v \in V$. Kako je $G$ povezan, postoji $uv$-put

$$P = uv_1 \dots v_i v_{i+1} \dots v_{n-1} v.$$

(i) Ako $e$ ne pripada $uv$-putu, onda je $P$ $uv$-put u $G - e$.

(ii) Ako $e$ pripada $uv$-putu, onda možemo pretpostaviti da je to grana $\{v_i, v_{i+1}\}$ i da je kontura $C$ oblika

$$C = v_i v_{i+1} u_1 \dots u_l v_i.$$

To znači da u grafu $G - e$ postoji put $Q$ od $v_i$ do $v_{i+1}$ :

$$Q = v_i u_l u_{l-1} \dots u_1 v_{i+1}$$

onda je

$$P_2 = uv_1 \dots v_{i-1} Q v_{i+2} \dots v_{n-1} v$$

šetnja u grafu $G - e$ od $u$ do $v$. Ako postoji šetnja u $G - e$, onda postoji $uv$-put $G - e$.

## Teorema

*Neka je $G$ povezan i neka je $C$ kontura u $G$. Ako je $e$ grana konture, onda je $G - e$ povezan.*

Izaberimo proizvoljno dva čvora $u, v \in V$. Kako je $G$ povezan, postoji $uv$-put

$$P = uv_1 \dots v_i v_{i+1} \dots v_{n-1} v.$$

(i) Ako $e$ ne pripada $uv$-putu, onda je $P$ $uv$-put u $G - e$.

(ii) Ako $e$ pripada $uv$-putu, onda možemo pretpostaviti da je to grana $\{v_i, v_{i+1}\}$ i da je kontura $C$ oblika

$$C = v_i v_{i+1} u_1 \dots u_l v_i.$$

To znači da u grafu $G - e$ postoji put $Q$ od $v_i$ do $v_{i+1}$ :

$$Q = v_i u_l u_{l-1} \dots u_1 v_{i+1}$$

onda je

$$P_2 = uv_1 \dots v_{i-1} Q v_{i+2} \dots v_{n-1} v$$

šetnja u grafu $G - e$ od $u$ do $v$. Ako postoji šetnja u $G - e$, onda postoji $uv$-put $G - e$. Znači, za svaka dva čvora u grafu $G - e$ postoji put koji ih povezuje.

**Definition**

Neka je $G$ povezan graf. Rastojanje $d(u,v)$, između čvorova $u$ i $v$ je dužina najkraćeg puta od $u$ do $v$, u slučaju da je $u \neq v$, inače je $0$.

- $d(u,v) \geq 0$
- $d(u,v) = 0$ akko $u = v$
- $d(u,v) = d(v,u)$
- $d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$

# Tema 3

## Reprezentacija grafa

# Reprezentacija grafa

1. Neka je $G = (V, E)$ prost graf i $m = |V|$.
   Matrica susedstva $A(G) = [a_{ij}]_{m \times m}$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \{i, j\} \in E \\ 0 & , \{i, j\} \notin E \end{cases}$$

2. Neka je $G = (V, E, \psi)$, $m = |V|$ i $|E| = n$.
   Matrica incidencije $M(G) = [a_{ie}]_{m \times n}$

$$a_{ie} = \begin{cases} 1 & \text{, grana } e \text{ je incidentna sa čvorom } i \\ 0 & \text{, grana } e \text{ nije incidentna sa čvorom } i \end{cases}$$

### Theorem

*Neka je $G = (V, E)$ prost graf, gde je $V = \{1, \ldots, n\}$, $n \geq 1$, i neka je $A$ matrica susedstva grafa $G$. Element $a_{ij}$ u matrici $A^k$, $k \geq 1$, jednak je broju različitih $ij$-šetnji dužine $k$ u tom grafu.*

(matematičkom indukcijom po $k$)

$k = 1 : a_{ij}$ je broj šetnji dužine 1

### Theorem

*Neka je $G = (V, E)$ prost graf, gde je $V = \{1, \ldots, n\}$, $n \geq 1$, i neka je $A$ matrica susedstva grafa $G$. Element $a_{ij}$ u matrici $A^k$, $k \geq 1$, jednak je broju različitih $ij$-šetnji dužine $k$ u tom grafu.*

(matematičkom indukcijom po $k$)

$k = 1$ : $a_{ij}$ je broj šetnji dužine 1

$T_{k-1} \Rightarrow T_k$ : Označimo sa $a_{ij}^{(k)}$ elemente matrice $A^k$.

### Theorem

*Neka je* $G = (V, E)$ *prost graf, gde je* $V = \{1, \ldots, n\}$, $n \geq 1$, *i neka je* $A$ *matrica susedstva grafa* $G$. *Element* $a_{ij}$ *u matrici* $A^k$, $k \geq 1$, *jednak je broju različitih* $ij$*-šetnji dužine* $k$ *u tom grafu.*

(matematičkom indukcijom po $k$)

$k = 1 : a_{ij}$ je broj šetnji dužine 1

$T_{k-1} \Rightarrow T_k$ : Označimo sa $a_{ij}^{(k)}$ elemente matrice $A^k$. Kako je $A^k = A \cdot A^{k-1}$, onda važi

### Theorem

*Neka je $G = (V, E)$ prost graf, gde je $V = \{1, \ldots, n\}$, $n \geq 1$, i neka je $A$ matrica susedstva grafa $G$. Element $a_{ij}$ u matrici $A^k$, $k \geq 1$, jednak je broju različitih $ij$-šetnji dužine $k$ u tom grafu.*

(matematičkom indukcijom po $k$)

$k = 1 : a_{ij}$ je broj šetnji dužine 1

$T_{k-1} \Rightarrow T_k$ : Označimo sa $a_{ij}^{(k)}$ elemente matrice $A^k$. Kako je $A^k = A \cdot A^{k-1}$, onda važi

$$a_{ij}^{(k)} = a_{i1}a_{1j}^{(k-1)} + a_{i2}a_{2j}^{(k-1)} + \ldots + a_{in}a_{nj}^{(k-1)} \tag{1}$$

## Theorem

*Neka je $G = (V, E)$ prost graf, gde je $V = \{1, \ldots, n\}$, $n \geq 1$, i neka je $A$ matrica susedstva grafa $G$. Element $a_{ij}$ u matrici $A^k$, $k \geq 1$, jednak je broju različitih $ij$-šetnji dužine $k$ u tom grafu.*

(matematičkom indukcijom po $k$)

$k = 1 : a_{ij}$ je broj šetnji dužine 1

$T_{k-1} \Rightarrow T_k$ : Označimo sa $a_{ij}^{(k)}$ elemente matrice $A^k$. Kako je $A^k = A \cdot A^{k-1}$, onda važi

$$a_{ij}^{(k)} = a_{i1}a_{1j}^{(k-1)} + a_{i2}a_{2j}^{(k-1)} + \ldots + a_{in}a_{nj}^{(k-1)} \tag{1}$$

Prema induktivnoj pretpostavci, $a_{lj}^{(k-1)}$ je jednak broju šetnji dužine $k - 1$ od čvora $k$ do čvora $j$ $(l \in \{1, \ldots, n\})$.

# Zadatak

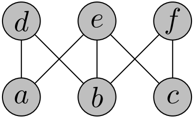
## Primer

*Koliko ima šetnji dužine 3 od $a$ do $d$ u grafu:*

# Zadatak

## Primer

*Koliko ima šetnji dužine 3 od $a$ do $d$ u grafu:*




Matrice $A, A^2$ $A^3$ su:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Znači, postoje tačno 4 šetnje dužine 3 od čvora $a$ do čvora $d$ :

$$adbd, adad, aebd, aead$$

### Posledica

*Neka je* $G = (V, E)$, $|V| = n$, *prost graf sa matricom susedstva* $A$. *Tada je* $G$ *povezan akko* $\sum_{k=0}^{n-1} A^k$ *ima samo ne nula elemente.*

### Posledica

$d(v_i, v_j) = \min\{k \geq 0 : a_{ij}^{(k)} \neq 0\}$.