Granične vrednosti funkcija

Neka je $f : X \to R$, $X \subset R$ realna funkcija jedne realne promenljive i neka je a tačka nagomilavanja za definicioni skup X. Za funkciju $y = f(x)$ se kaže da ima graničnu vrednost A u tački a ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X \setminus \{a\})(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon).$$

Tada pišemo $\lim_{x \to a} f(x) = A$.

Osnovne osobine graničnih vrednosti funkcija

Ako je $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ i $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$, tada je, pod uslovom da je x_0 tačka nagomilavanja preseka definicionih skupova funkcija $f(x)$ i $g(x)$:

1) $\lim_{x \to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = A \pm B$

2) $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = A \cdot B$

3) $\lim_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = c \cdot A$, $c = const.$

4) $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}$ za $g(x) \neq 0$ i $B \neq 0$

Ako u tački x_0 funkcija ima desnu i levu graničnu vrednost (jednostrane granične vrednosti) onda ona u toj tački ima graničnu vrednost ako su leva i desna granična vrednost jednake, tj. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ postoji ako $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$.

Korisne granične vrednosti:

- $\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
- $\lim_{x \to 0} \dfrac{\log_a(x+1)}{x} = \log_a e$
- $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Sve napomene koje smo dali pri traženju graničnih vrednosti nizova primenjuju se i za traženje graničnih vrednosti funkcija.

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x^3+x^2+x-3)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3+x^2+x-3}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+2x+3)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{x^2+2x+3}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{t^4-1}{t^3-1}=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{(t-1)(t^3+t^2+t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{t^3+t^2+t+1}{t^2+t+1}=\dfrac{4}{3}$

Smena: $\sqrt[12]{x}=t\Rightarrow x=t^{12},\ x\to1\Rightarrow t\to1$

3. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt[3]{x^3+x^2+15}}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt[3]{x^3+x^2+15}-3+3}{x^2-5x+6}=$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-5x+6}-\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+x^2+15}-3}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-5x+6}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}-$

$-\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+x^2+15}-3}{x^2-5x+6}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{(x^3+x^2+15)^2}+3\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+9}{\sqrt[3]{(x^3+x^2+15)^2}+3\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+9}=$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+5-9}{(x^2-5x+6)(\sqrt{x^2+5}+3)}-$

$-\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+x^2+15-27}{(x^2-5x+6)(\sqrt[3]{(x^3+x^2+15)^2}+3\cdot\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+9}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}\cdot$

$\cdot\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+5}+3}-\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+x^2-12}{x^2-5x+6}\cdot\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x^3+x^2+15)^2}+3\cdot\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+9}=$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}\cdot\dfrac{1}{6}-\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x^2+3x+6)}{(x-2)(x-3)}\cdot\dfrac{1}{27}=-4\cdot\dfrac{1}{6}+16\cdot\dfrac{1}{27}=-\dfrac{2}{27}$

4. $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{2x^2-3}{x+3}\right)^{\frac{x}{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x+3+2x^2-x-6}{x+3}\right)^{\frac{x}{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to2}\left(1+\dfrac{2x^2-x-6}{x+3}\right)^{\frac{x}{x^2-4}}=$

$\lim\limits_{x\to2}\left(1+\dfrac{2x^2-x-6}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{2x^2-x-6}\cdot\frac{2x^2-x-6}{x+3}\cdot\frac{x}{x^2-4}}=e^{\lim\limits_{x\to2}\frac{x}{x+3}\cdot\lim\limits_{x\to2}\frac{2x^2-x-6}{x^2-4}}=e^{\frac{2}{5}\cdot\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(2x+3)}{(x-2)(x+2)}}=$

$=e^{\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{4}}=e^{\frac{7}{10}}=\sqrt[10]{e^7}$

5. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-\ln e}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln\frac{x}{e}}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\ln\left(\dfrac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}}=\ln\lim\limits_{x\to e}\left(\dfrac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}}=$

$=\ln\lim\limits_{x\to e}\left(1+\dfrac{x}{e}-1\right)^{\frac{1}{x-e}}=\ln\lim\limits_{x\to e}\left(1+\dfrac{x-e}{e}\right)^{\frac{e}{x-e}\cdot\frac{1}{e}}=\ln e^{\lim\limits_{x\to e}\frac{1}{e}}=\ln e^{\frac{1}{e}}=\dfrac{1}{e}$

6. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}=\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\dfrac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\sin\dfrac{\pi x}{2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)}\cdot 1$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}{\frac{\pi}{2}(1-x)}\cdot\dfrac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{\pi}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}\cdot\dfrac{\sqrt{1+tgx}+\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1+tgx}+\sqrt{1+\sin x}}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+tgx-1-\sin x}{x^3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+tgx}+\sqrt{1+\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}\cdot\dfrac{1}{2}=$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\frac{x^2}{4}}\cdot 1=\dfrac{1}{4}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tg^2 x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\sin x-1)^{\frac{1}{\sin x-1}(\sin x-1)\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cdot\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{1-\sin^2 x}}=$

$=e^{1\cdot\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-(1-\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}}=e^{-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}}=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\dfrac{\ln(t+1)}{\ln a}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t\ln a}{\ln(t+1)}=\ln a\cdot\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\ln(t+1)}{t}}=\ln a\cdot\dfrac{1}{\ln e}=\ln a$

Smena: $a^x-1=t$, $a^x=t+1$, $x=\dfrac{\ln(t+1)}{\ln a}$, $x\to 0\Rightarrow t\to 0$

Proveriti da li postoje sledeće granične vrednosti.

10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x}{x-2}=\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x}{x-2}=-\infty$

Funkcija nema graničnu vrednost jer sa jedne strane teži $+\infty$, a sa druge $-\infty$. Napomenimo da funkcija ne teži ni $+\infty$, ni $-\infty$ kada $x\to 2$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$

Funkcija nema graničnu vrednost u tački $x=0$ jer su leva i desna granična vrednost različite.

12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{|x-1|}$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}1=1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{-(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}-1=-1$

Funkcija nema graničnu vrednost u tački $x=1$ jer su leva i desna granična vrednost različite.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\sin x|}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|\sin x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|\sin x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-\sin x}{x}=-1$

Funkcija nema graničnu vrednost u tački $x=0$ jer su leva i desna granična vrednost različite.

14. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3$

15. $\lim_{x\to 0}\frac{bx}{\sin ax}=b\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin ax}{ax}\cdot a}=\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}}=\frac{b}{a}\cdot 1=\frac{b}{a},\qquad a,b\in R, a\neq 0$

16. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}}{3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1}=\frac{2}{3}$

17. $\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\cdot\cos\frac{x+a}{2}\cdot\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}=\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=\cos\frac{2a}{2}\cdot 1=\cos a$

18. $\lim_{x\to 1}(\sin^2\frac{\pi x}{2})^{\frac{1}{(x-1)^3}}=\lim_{x\to 1}(1-\cos^2\frac{\pi x}{2})^{\frac{1}{-\cos^2\frac{\pi x}{2}}\cdot(-\cos^2\frac{\pi x}{2})\cdot\frac{1}{(x-1)^3}}=e^{-\lim_{x\to 1}\frac{\cos^2\frac{\pi x}{2}}{(x-1)^3}}=$

$=e^{-\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2})}{(x-1)^3}}=e^{-\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}(1-x)}{(x-1)^2(x-1)}}=e^{-\lim_{x\to 1}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}{\frac{\pi}{2}(1-x)\frac{2}{\pi}}\right]^2\cdot\frac{1}{x-1}}=$

$=e^{-\frac{\pi^2}{4}\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}}=\begin{cases}0 \text{ kada } x\to 1^+\\ \infty \text{ kada } x\to 1^-\end{cases}$

Dakle, granična vrednost $\lim_{x\to 1}(\sin^2\frac{\pi x}{2})^{\frac{1}{(x-1)^3}}$ ne postoji.