DISKRETNA MATEMATIKA

OSNOVE KOMBINATORIKE I TEORIJE GRAFOVA

Dragan Stevanović, Miroslav Ćirić
Prirodno-matematički fakultet u Nišu

Slobodan Simić
Matematički institut u Beogradu

Vladimir Baltić
Ekonomski fakultet u Beogradu

2. mart 2007

Sadržaj

Predgovor

Diskretna, WUS Austria, “konzorcijum” srpske diskretne matematike ...

Glava 1

Uvod

U ovoj glavi opisujemo osnovne matematičke pojmove koji će nam trebati u daljem radu. Polazimo od samih osnova, tako da ova glava sadrži četiri sekcije posvećene skupovima, funkcijama, relacijama i matematičkoj indukciji.

1.1 SKUPOVI

Osnovni matematički objekat je *skup*. Skup se zapisuje navodjenjem njegovih elemenata izmedju vitičastih zagrada { i }. Skup koji sadrži brojeve 1, 3 i 5 (i nijedan više) zapisuje se kao $\{1, 3, 5\}$. Ovaj skup se može zapisati i kao $\{3, 1, 5\}$, ali i kao $\{1, 3, 5, 3, 1\}$, jer se višestruko ponavljanje istog elementa ne uzima u obzir. Tri tačke $(\dots)$ u $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$ znače "i tako dalje, po istom obrascu", tj. ovaj zapis označava skup svih parnih prirodnih brojeva. Odgovarajući obrazac treba da bude očigledan. Na primer, $\{2^1, 2^2, 2^3, \dots\}$ je lako razumljivo kao skup svih stepena broja 2, dok je zapis $\{2, 4, 8, \dots\}$ manje očigledan.

Skupovi se obično označavaju velikim slovom, s tim što je za najvažniji skup matematike i čovečanstva uopšte, skup prirodnih brojeva $\{1, 2, 3, \dots\}$, rezervisano slovo $\mathbb{N}$. Još jedan važan skup je skup bez elemenata. Postoji samo jedan takav skup, označava se sa $\emptyset$ i naziva *prazan skup*. Primetimo da prazan skup može da bude element drugog skupa. Na primer, $\{\emptyset\}$ je skup koji sadrži prazan skup kao svoj element, pa nije isto što i $\emptyset$!

Činjenica da skup X sadrži element x zapisuje se pomoću simbola $\in$. Zapis $x \in X$ se čita kao "x je element X", "x pripada X", "X sadrži x", itd. U slučaju da element x ne pripada skupu X pišemo $x \notin X$.

Složeniji i interesantniji skupovi obično se dobijaju od poznatih skupova pomoću nekih pravila ili osobina. Takvi skupovi se zapisuju u sledećem obliku

$$A = \{x \colon x \text{ ima osobinu } P\}.$$

Često se koristi i oznaka

$$A = \{x \mid x \text{ ima osobinu } P\}.$$

PRIMER 1.1.1 Skup svih kvadrata prirodnih brojeva može da se zapiše kao

$$\{n \in \mathbb{N}\colon \text{ postoji } k \in \mathbb{N} \text{ tako da je } n = k^2\}.$$

ili kraće kao

$$\{k^2 \colon k \in \mathbb{N}\}.$$

■

NAPOMENA Pogrešno je misliti da svaka osobina P definiše skup. Do ovakvog zaključka je došao Bertrand Russell 1911. godine. Posmatrajmo sledeću situaciju: frizer u gradiću X treba da šiša sve gradjane koji se ne šišaju sami—treba li on, kao jedan od gradjana iz X, da šiša samog sebe? Do istog *paradoksa* se dolazi i ako definišemo sledeći skup:

$$A = \{X \colon X \text{ je skup koji ne sadrži samog sebe}\}.$$

Da li skup A sadrži samog sebe? Ako pretpostavimo da A sadrži samog sebe, tada po osobini elemenata skupa A važi da A ne sadrži samog sebe. S druge strane, ako pretpostavimo da A ne sadrži samog sebe, tada on zadovoljava osobinu elemenata skupa A, pa mora da pripada samom sebi. U svakom slučaju dolazimo do kontradikcije. Jedini izlaz je reći da A nije skup! Objekte kao što je skup A, matematičari obično zovu *familije* skupova.

Koristeći pojam pripadanja skupu, $\in$, možemo da definišemo mnoge relacije izmedju skupova i operacije na skupovima. Na primer, dva skupa X i Y su jednaka ako imaju iste elemente. U tom slučaju pišemo $X = Y$. Ako su X, Y skupovi, zapis $X \subseteq Y$ (rečima: "X je podskup Y") znači da svaki element X pripada skupu Y. Primetimo da je $X = Y$ ako i samo ako je $X \subseteq Y$ i $Y \subseteq X$.

Ako je $X \subseteq Y$, ali je $X \neq Y$, tada Y sadrži bar jedan element koji ne pripada X. U tom slučaju se kaže da je X *pravi podskup* Y i piše $X \subset Y$.

Ako $X \not\subseteq Y$ i $Y \not\subseteq X$, tada se kaže da su skupovi X i Y *neuporedivi*. Za skupove X i Y se kaže da su *disjunktni* ako nemaju zajedničkih elemenata. Skupovi $\{1, 3, 5\}$ i $\{2, 4, 6\}$ su disjunktni, dok skupovi $\{1, 3, 5\}$ i $\{2, 3, 4\}$ nisu disjunktni. Za niz skupova $X_1, X_2, X_3, \ldots$ se kaže da su uzajamno disjunktni, ako su svaka dva od njih disjunktna.

PRIMER 1.1.2 Skupovi

$$\begin{array}{ll} \{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\} & \text{su uzajamno disjunktni} \\ \{1,2\}, \{3,4\}, \{1,6\} & \text{nisu uzajamno disjunktni} \end{array}$$

■

Skup koji se sastoji od svih mogućih podskupova skupa X naziva se *partitivni skup* skupa X i označava sa $\mathcal{P}(X)$. Na primer, za $X = \{a, b, c\}$ imamo da je

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

NAPOMENA Primetimo da važi $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ i $X \in \mathcal{P}(X)$, ali da nije $X \subseteq \mathcal{P}(X)$!

OPERACIJE SA SKUPOVIMA

Najvažnije i najčešće operacije sa skupovima su *unija*, *presek*, *razlika*, *simetrična razlika* i *komplement*. Za skupove X i Y ove operacije se definišu na sledeći način:

$$\begin{aligned}
\textit{Unija:}\quad X\cup Y = &\quad \{z : z\in X \text{ ili } z\in Y\}\\
\textit{Presek:}\quad X\cap Y = &\quad \{z : z\in X \text{ i } z\in Y\}\\
\textit{Razlika:}\quad X\setminus Y = &\quad \{z : z\in X \text{ i } z\notin Y\}\\
\textit{Simetrična razlika:}\quad X\vartriangle Y = &\quad (X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)
\end{aligned}$$

Komplement $\overline{X}$ skupa X sadrži sve elemente koji ne pripadaju skupu X. Da bi ova definicija imala smisla (i da $\overline{X}$ ne bi sadržao i suvišne elemente kao što su ljudi, životinje, biljke, ...) svi skupovi sa kojima radimo moraju da budu podskupovi nekog većeg skupa, tzv. *univerzuma* U. Tada je

$$\textit{Komplement:}\quad \overline{X} = \quad \{z\in U : z\notin X\}.$$

Zgodno slikovno predstavljanje operacija sa skupovima je pomoću *Venovih dijagrama*. Pogledajte sliku 1.1. Ako zamislimo skupove X i Y kao unutrašnjosti odgovarajućih krugova, tada osenčene površine na slikama 1.1a,b,c,d,e redom predstavljaju skupove $X\cup Y$, $X\cap Y$, $X\setminus Y$, $X\vartriangle Y$ i $\overline{X}$.

Ovde idu Venovi dijagrami.

Slika 1.1: Operacije sa skupovima

Za ove operacije sa skupovima važe odredjeni zakoni. Najvažniji od njih su navedeni u sledećoj teoremi.

TEOREMA 1.1.3 Neka su X, Y i Z skupovi. Tada važi:

a) *Asocijativnost*:

$$\begin{aligned}
X\cup(Y\cup Z) &= (X\cup Y)\cup Z\\
X\cap(Y\cap Z) &= (X\cap Y)\cap Z
\end{aligned}$$

b) *Komutativnost*:

$$\begin{aligned}
X\cup Y &= Y\cup X\\
X\cap Y &= Y\cap X
\end{aligned}$$

c) *Apsorptivnost*:

$$\begin{aligned}
X\cap(X\cup Y) &= X\\
X\cup(X\cap Y) &= X
\end{aligned}$$

d) *Distributivnost*:

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$
$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$

e) *De Morganovi zakoni*:

$$X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$$
$$X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$$

Dokaz. Dokazaćemo samo prvi de Morganov zakon. Dokazivanje ostalih zakona može poslužiti čitaocu za vežbu.

Neka je $x \in X \setminus (Y \cup Z)$. To znači da $x \in X$, ali da $x \notin Y \cup Z$. Iz $x \notin Y \cup Z$ sledi da $x \notin Y$ i $x \notin Z$. Dalje, iz $x \in X$ i $x \notin Y$ sledi da $x \in X \setminus Y$ i slično iz $x \in X$ i $x \notin Z$ sledi da $x \in X \setminus Z$, pa važi da $x \in (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$. Kako ovo važi za svaki element skupa $X \setminus (Y \cup Z)$, zaključujemo da je

$$X \setminus (Y \cup Z) \subseteq (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z). \tag{1.1}$$

Neka je sada $x \in (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$. Ovo znači da $x \in X \setminus Y$ i $x \in X \setminus Z$. Odavde dobijamo da je $x \in X$, $x \notin Y$ i $x \notin Z$. Iz $x \notin Y$ i $x \notin Z$ sledi da $x \notin Y \cup Z$, pa dobijamo da $x \in X \setminus (Y \cup Z)$. Ovo takodje važi za svaki element skupa $(X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$, pa zaključujemo da je

$$(X \setminus Y) \cap (X \setminus Z) \subseteq X \setminus (Y \cup Z). \tag{1.2}$$

Iz (1.1) i (1.2) sledi da je

$$X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z).$$

□

Ako su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ skupovi, njihova unija $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$ može kraće da se zapiše kao

$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i.$$

Slično se presek $X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$ kraće zapisuje kao

$$\bigcap_{i=1}^{n} X_i.$$

Zakoni iz teoreme 1.1.3 važe i u slučaju kada imamo više skupova, i koristeći skraćeni zapis, oni glase:

Distributivnost:

$$
\begin{aligned}
X \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} Y_i \right) &= \bigcup_{i=1}^{n} (X \cap Y_i) \\
X \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} Y_i \right) &= \bigcap_{i=1}^{n} (X \cup Y_i)
\end{aligned}
$$

De Morganovi zakoni:

$$
\begin{aligned}
X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} Y_i \right) &= \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus Y_i) \\
X \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{n} Y_i \right) &= \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus Y_i)
\end{aligned}
$$

PROIZVOD SKUPOVA

Kao što već znamo, $\{x, y\}$ označava skup koji sadrži elemente x i y. Skup $\{x, y\}$ se ponekad naziva i *neuredjeni par* x i y. Primetimo da je $\{x, y\}$ isto što i $\{y, x\}$, kao i da $\{x, y\}$ ima samo jedan element ako je $x = y$.

U primenama se često nameće potreba za razlikovanjem elemenata u paru. Stoga uvedimo notaciju (x, y) za *uredjeni par* x i y. Pritom važi:

$$(x, y) = (z, t) \text{ ako i samo ako } x = z \text{ i } y = t.$$

NAPOMENA Zanimljivo je da uredjeni par može da se definiše pomoću neuredjenog para na sledeći način:

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Slično se definiše i *uredjena n-torka* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koja se sastoji od elemenata $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pritom važi:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \text{ ako i samo ako je } x_i = y_i \text{ za } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Poslednja operacija koju spominjemo je *proizvod* $X \times Y$ skupova X i Y. Proizvod skupova X i Y je skup svih uredjenih parova (x, y), gde $x \in X$ i $y \in Y$, ili preciznije,

$$X \times Y = \{(x, y) \colon x \in X, y \in Y\}.$$

PRIMER 1.1.4 Za $X = \{1, 2, 3\}$ i $Y = \{a, b\}$ imamo da je

$$
\begin{aligned}
X \times Y &= \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}, \\
Y \times X &= \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}.
\end{aligned}
$$

■

NAPOMENA Primetimo da u opštem slučaju $X \times Y$ nije isto što i $Y \times X$, tj. proizvod skupova nije komutativan.

Slično proizvodu dva skupa, proizvod $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ skupova X_1, X_2,...,X_n, ili kraće

$$\prod_{i=1}^{n} X_n,$$

definiše se kao skup svih uredjenih n-torki $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tako da za $i = 1, 2, \ldots, n$ važi $x_i \in X_i$.

Proizvod skupa X sa samim sobom kraće se označava stepenom uz X, tj.

$$X \times X = X^2, \quad X \times X \times X = X^3, \quad X \times X \times X \times X = X^4, \quad \ldots$$

ZADACI

1.2 FUNKCIJE

Sa funkcijama ili preslikavanjima, kako se drugačije zovu, sreli smo se već u srednjoškolskoj matematici. Tada smo naučili da se funkcija definiše pravilom preslikavanja koje elementima jednog skupa dodeljuje elemente drugog skupa. Na primer, jedna moguća funkcija je $f_1(n) = 2n - 1$, gde je $n \in N$. Isto tako se može zadati i funkcija $f_2(x) = 2x - 1$, gde je $x \in R$. Ovakvo predstavljanje funkcija naglašava samo pravilo preslikavanja. Pri tome se obično kaže kom skupu pripadaju argumenti funkcije (s tim što se ponekad koristimo logikom da n označava prirodan broj, dok x označava realan broj), medjutim skoro nikad se ne kaže kom skupu pripadaju vrednosti funkcija. Zbog toga je ovo *intuitivno predstavljanje* funkcija.

MATEMATIČKA DEFINICIJA FUNKCIJA

DEFINICIJA 1.2.1 Pod funkcijom se podrazumeva uredjena trojka (A, B, f), gde je $f \subseteq A \times B$, pri čemu za svako $x \in A$ postoji tačno jedno $y \in B$ tako da $(x, y) \in f$. Skup A se naziva *domen*, skup B se naziva *kodomen*, a f je *pravilo preslikavanja*. Činjenica da funkcija preslikava elemente domena A u elemente kodomena B pomoću pravila preslikavanja f se zapisuje pomoću

$$f : A \mapsto B,$$

a za $(x, y) \in f$ ravnopravno (i češće) pišemo $f(x) = y$. Samo pravilo preslikavanja f se zadaje formulom ili navodjenjem parova elemenata (x, y) koji pripadaju f.

DEFINICIJA 1.2.2 Skup $f(A) = \{f(x) \,|\, x \in A\}$ se naziva *slika* funkcije f.

PRIMER 1.2.3 Funkcija $f_1(n) = 2n - 1$ se pravilno zapisuje na sledeći način:

$$f_1 : N \mapsto N, \quad f_1(n) = 2n - 1,$$

dok se funkcija $f_2(x) = 2x - 1$ zapisuje pomoću

$$f_2 : R \mapsto R, \quad f_2(x) = 2x - 1.$$

■

PRIMER 1.2.4 Ako je $A = \{1, 2, 3\}$, a $B = \{1, 3, 5\}$, tada možemo definisati funkciju f_3 pomoću

$$f_3 : A \mapsto B, \quad f_3(a) = 2a - 1,$$

ili drugačije

$$f_3 : A \mapsto B, \quad f_3 = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5)\}.$$

U poslednjem slučaju smo funkciju definisali pomoću navodjenja svih parova elemenata koji joj pripadaju. ■

VRSTE FUNKCIJA

Važni i najčešće korišćeni tipovi funkcija u matematici su dati u sledećoj definiciji.

DEFINICIJA 1.2.5 Funkcija $f : A \mapsto B$ naziva se *1-1* ukoliko važi

$$(\forall x_1, x_2 \in A) \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Funkcija $f : A \mapsto B$ naziva se *na* ukoliko važi

$$(\forall y \in B)\,(\exists x \in A) \quad f(x) = y.$$

Funkcija $f : A \mapsto B$ naziva se *bijekcija* ili *obostrano jednoznačno preslikavanje* ako je funkcija istovremeno i 1-1 i na.

PRIMER 1.2.6 Funkcija $a : \{1,2\} \mapsto \{1,3,5\}$ data pravilom preslikavanja $a(x) = 2x - 1$ je 1-1, ali nije na, jer se nijedan element domena ne preslikava u element 5 iz kodomena. Funkcija $b : \{1,2,3\} \mapsto \{1,3\}$ data pravilom preslikavanja $b = \{(1,1),(2,3),(3,1)\}$ jeste na, ali nije 1-1, jer se elementi 1 i 3 domena preslikavaju u isti element kodomena. Na kraju, funkcija $c : \{1,2,3\} \mapsto \{1,3,5\}$ data pravilom preslikavanja $c(x) = 2x - 1$ jeste i 1-1 i na, pa zaključujemo da je to bijekcija. ■

Funkcija $f : A \mapsto B$ se može slikovno predstaviti tako što najpre predstave domen A i kodomen B funkcije, a onda se usmerenim linijama svaki element $x \in A$ poveže sa vrednošću $f(x) \in B$. Na sl. 1.2 su predstavljene funkcije a, b i c iz gornjeg primera.

Slikovno predstavljanje funkcija a, b i c.

Slika 1.2: Slikovno predstavljanje funkcija

OPERACIJE SA FUNKCIJAMA

S obzirom da su funkcije u stvari skupovi parova elemenata, sa njima možemo da vršimo sve operacije kao i sa skupovima. Medjutim, pored njih, postoje i operacije koje su namenjene samo funkcijama.

DEFINICIJA 1.2.7 Ako su date funkcije $f : A \mapsto B$ i $g : B \mapsto C$, tada se pod *slaganjem funkcija* f i g podrazumeva funkcija $g \circ f : A \mapsto C$ data pravilom preslikavanja

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \quad x \in A.$$

DEFINICIJA 1.2.8 Ako su dati funkcija $f : A \mapsto B$ i podskup $A' \subseteq A$, tada se pod *redukcijom funkcije* f na poddomen A', u oznaci $f|_{A'}$, podrazumeva funkcija $f' : A' \mapsto B$ data pravilom preslikavanja

$$f|_{A'}(x) = f(x), \quad x \in A'.$$

DEFINICIJA 1.2.9 Za proizvoljan skup A, funkcija $i_A : A \mapsto A$ data pravilom preslikavanja

$$i_A(x) = x, \quad x \in A$$

naziva se *identička funkcija na skupu A*.

DEFINICIJA 1.2.10 Ako je data funkcija $f : A \mapsto B$, tada se za funkciju $g : B \mapsto A$ kaže da je *inverzna funkcija* za funkciju f ako važi

$$g(f(x)) = x, \qquad x \in A,$$
$$f(g(y)) = y, \qquad y \in B,$$

tj. ako važi

$$g \circ f = i_A \quad \text{i} \quad f \circ g = i_B.$$

Inverzna funkcija za funkciju f se obično obeležava sa f^{-1}.

Inverzna funkcija ne postoji za svaku funkciju. To možemo videti i iz sledeće teoreme.

TEOREMA 1.2.11 Za funkciju $f : A \mapsto B$ postoji inverzna funkcija ako i samo ako je f bijekcija.

Dokaz. Pretpostavimo da funkcija $f : A \mapsto B$ ima inverznu funkciju $f^{-1} : B \mapsto A$ i dokažimo da je f bijekcija. Funkcija f je 1-1, jer ako je $f(x_1) = f(x_2) = y$ za $x_1 \neq x_2$, tada iz definicije inverzne funkcije sledi da je $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x_1)) = x_1$ i $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x_2)) = x_2$, što je kontradiktorno činjenici da je f^{-1} funkcija i da, prema tome, može da ima samo jednu vrednost za datu vrednostargumenta. S druge strane, funkcija f je na, jer za svako $y \in B$ važi $f(f^{-1}(y)) = y$.

Pretpostavimo sada da je f bijekcija i dokažimo da onda postoji funkcija h koja je njena inverzna funkcija. Funkciju h ćemo definisati na sledeći način:

$$h \subseteq B \times A, \quad (y, x) \in h \text{ ako i samo ako je } f(x) = y.$$

Primetimo da smo ovim, u stvari, samo definisali jedan podskup $h \subseteq B \times A$, pa stoga moramo tek da pokažemo da je h zaista funkcija, tj. da za svako $y \in B$ postoji tačno jedno $x \in A$ tako da je $h(y) = x$. Najpre, pošto je funkcija f na, to za $y \in B$ postoji $x \in A$ tako da je $f(x) = y$, pa po definiciji h važi i $(y, x) \in h$. Dalje, pošto je funkcija f i 1-1, ovakvo x je jedinstveno, pa smo se zaista uverili da je h funkcija i možemo slobodno da pišemo

$$h : B \mapsto A, \quad h(y) = x \text{ ako i samo ako je } f(x) = y.$$

Sada je jasno da važi $h(f(x)) = x$ i $f(h(y)) = y$, pa je h inverzna funkcija za f. $\square$

PERMUTACIJE

Pod *permutacijom* skupa A se podrazumeva svaka bijekcija $f : A \mapsto A$ skupa A na samog sebe. Skup svih permutacija skupa A obično se obeležava sa $\mathrm{S}ym\,(A)$. Za skup $\mathrm{S}ym\,(A)$ svih permutacija skupa A važi sledeća teorema, koja ilustruje algebarsku strukturu skupa $\mathrm{S}ym\,(A)$.

TEOREMA 1.2.12 Ako je dat skup A, tada za skup $\mathrm{S}ym\,(A)$ važe sledeće osobine:

a) *Zatvorenost:*

$$(\forall f, g \in \mathrm{S}ym\,(A)) \quad f \circ g \in \mathrm{S}ym\,(A);$$

b) *Asocijativnost:*

$$(\forall f, g, h \in \mathrm{S}ym\,(A)) \quad f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h;$$

c) *Postojanje neutralnog elementa:*

$$(\exists i_A \in \mathrm{S}ym\,(A))\,(\forall x \in A) \quad i_A(x) = x;$$

d) *Postojanje inverznog elementa:*

$$(\forall f \in \mathrm{S}ym\,(A))\,(\exists f^{-1} \in \mathrm{S}ym\,(A)) \quad f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = i_A.$$

□

ZADACI

1.3 RELACIJE

Relacija, u najkraćem, predstavlja odnos izmedju elemenata nekih skupova. Stroga matematička definicija je sledeća.

DEFINICIJA 1.3.1 Ako su dati skupovi $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k,\ k \in N$, tada se pod *relacijom* dužine k izmedju elemenata skupova $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k$ podrazumeva podskup $\rho \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$. Ako $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \rho$, tada kažemo da su elementi $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$ u relaciji ρ. S druge strane, ako je $A_1 = A_2 = \ldots = A_k = A$, tada kažemo da je ρ relacija dužine k na skupu A.

PRIMER 1.3.2 Razmotrimo sledeće skupove:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{ Ćira, Dragan, Marko }\},\\ B &= \{\text{ logika, algebra, diskretna matematika }\},\\ C &= \{\text{ ponedeljak, utorak, sreda, četvrtak, petak }\}. \end{aligned}$$

Tada

$$\begin{aligned} \rho = \{&(\text{Ćira, logika, utorak}),\\ &(\text{Dragan, algebra, utorak}),\\ &(\text{Dragan, diskretna matematika, četvrtak}),\\ &(\text{Marko, diskretna matematika, petak})\} \end{aligned}$$

predstavlja relaciju dužine 3, koja može da predstavlja obaveze profesora i asistenata u pogledu predmeta i datuma. ■

DEFINICIJA 1.3.3 Relacija $\rho \subseteq A \times B$ dužine 2 se naziva *binarna relacija.* Uobičajeno je da se za elemente $x \in A$ i $y \in B$ koji su u relaciji ρ umesto $(x, y) \in \rho$ piše $x\,\rho\,y$. Skup $\{a \in A \,|\, a\,\rho\,b \text{ za neko } b \in B\}$ se naziva *domen* relacije ρ, a skup $\{b \in B \,|\, a\,\rho\,b \text{ za neko } a \in A\}$ se naziva *kodomen* relacije ρ.

NAPOMENA Primetimo da je svaka funkcija $f : A \mapsto B$, takodje binarna relacija, jer je $f \in A \times B$.

PRIMER 1.3.4 Na skupu $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ možemo da definišemo binarnu relaciju ρ tako što ćemo da je $x\,\rho\,y$ ako je x manje od y i x deli y. Relaciju ρ tada čine sledeći parovi elemenata

$$\rho = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 6)\}.$$

Ova relacija je slikovno predstavljena na sl. 1.3a slično načinu na koji se predstavljaju funkcije, tako što se usmerenim linijama povežu parovi elemenata koji su u relaciji. ■

Načini predstavljanja relacije ρ.

Slika 1.3: Načini predstavljanja relacija

Medjutim, binarna relacija ρ na konačnom skupu A može se predstaviti još na dva načina:

- tablično - tako što se nacrta tablica čije vrste i kolone predstavljaju elemente A, a zatim se u preseku vrste x i kolone y stavlja 1 ukoliko je $x\,\rho\,y$, a 0 ukoliko nije $x\,\rho\,y$.

- pomoću orijentisanih grafova - tako što se svaki element skupa A predstavi čvorom, a zatim se čvorovi x i y povežu usmerenom linijom od x ka y ako je $x\,\rho\,y$.

Ova dva načina predstavljanja su prikazana na sl. 1.3b i sl. 1.3c.

Kao i funkcije, i relacije se mogu slagati.

DEFINICIJA 1.3.5 Neka su date relacije $\rho \subseteq A \times B$ i $\sigma \subseteq B \times C$. Tada se pod *slaganjem relacija* ρ i σ podrazumeva relacija $\rho \circ \sigma \subseteq A \times C$ odredjena sa

$$\rho \circ \sigma = \{(a, c) \,|\, \text{postoji } b \in B \text{ tako da je } a\,\rho\,b \text{ i } b\,\sigma\,c\}.$$

NAPOMENA S obzirom da su funkcije poseban slučaj relacija, i slaganje funkcija je poseban slučaj slaganja relacija. Medjutim, primetimo veoma bitnu razliku: slaganje funkcija $f : A \mapsto B$ i $g : B \mapsto C$ označava se sa $g \circ f$, dok se slaganje relacija $\rho \subseteq A \times B$ i $\sigma \subseteq B \times C$ označava sa $\rho \circ \sigma$. Znači, kod slaganja funkcija prvu funkciju stavljamo iza $\circ$, dok kod slaganja relacija prvu relaciju stavljamo ispred $\circ$.

Nadalje ćemo posmatrati samo binarne relacije kod kojih se domen i kodomen poklapaju i pritom posvetiti pažnju važnim vrstama relacija—relacijama ekvivalencije i relacijama poretka.

RELACIJE EKVIVALENCIJE

DEFINICIJA 1.3.6 Relacija ρ na skupu A je:

(i) *refleksivna*, ako
$$(\forall x \in A) \quad x\,\rho\,x;$$

(ii) *simetrična*, ako
$$(\forall x, y \in A) \quad x\,\rho\,y \;\Rightarrow\; y\,\rho\,x;$$

(iii) *tranzitivna*, ako
$$(\forall x, y, z \in A) \quad x\,\rho\,y \;\wedge\; y\,\rho\,z \;\Rightarrow\; x\,\rho\,z.$$

DEFINICIJA 1.3.7 Relacija ρ na skupu A je *relacija ekvivalencije* ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

PRIMER 1.3.8 Definišimo relaciju na skupu prirodnih brojeva, tako da su dva prirodna broja u relaciji ako i samo ako su jednaki. Ova relacija je refleksivna, jer je svaki broj jednak samom sebi, simetrična, jer iz $x = y$ sigurno sledi da je $y = x$, i tranzitivna, jer iz $x = y$ i $y = z$ sledi da je $x = z$. Relacija jednakosti je svakako najjednostavniji primer relacije ekvivalencije i njena svojstva su služila kao inspiracija za definiciju relacije ekvivalencije. ■

PRIMER 1.3.9 Relacija ρ na skupu prirodnih brojeva, tako da su dva prirodna broja u relaciji ρ ako je njihova razlika deljiva sa 4 (tj. ako daju isti ostatak pri deljenju sa 4) je takodje relacije ekvivalencije. Naime, ova relacija je refleksivna, jer $4|x-x=0$, simetrična, jer iz $4|x-y$ sledi da $4|y-x$, i tranzitivna, jer iz $4|x-y$ i $4|y-z$ sledi da $4|(x-y)+(y-z)=x-z$. ■

PRIMER 1.3.10 Neka su dati skup $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ i njegovi uzajamno disjunktni podskupovi $B_1 = \{1,2,3\}$, $B_2 = \{4,5\}$ i $B_3 = \{6,7\}$. Na skupu A možemo da definišemo relaciju ρ na sledeći način:

$$x\,\rho\,y \quad\Leftrightarrow\quad x \text{ i } y \text{ pripadaju istom podskupu } B_i.$$

Ova relacija je očigledno refleksivna i simetrična, a tranzitivnost sledi iz činjenice da ako je $x\,\rho\,y$ i $y\,\rho\,z$ tada x i z pripadaju istom podskupu kome pripada i y, a kako y pripada tačno jednom podskupu B_i, jer su oni uzajamno disjunktni, to i x i z pripadaju ovom istom podskupu B_i, pa zaključujemo da je $x\,\rho\,z$. Predstavljanje ove relacije pomoću orijentisanih grafova dato je na sl. 1.4. ■

Predstavljanje relacije ekvivalencije pomoću orijentisanih grafova

Slika 1.4: Primer relacije ekvivalencije

Poslednji primer ujedno ilustruje i sledeću definiciju.

DEFINICIJA 1.3.11 Neka je ρ relacija ekvivalencije na skupu A i neka je $x \in A$. Skup

$$C_x = \{y \in A \mid x\,\rho\,y\}$$

naziva se *klasa ekvivalencije* elementa x. Ponekad se koristi i oznaka $[x]$ za klasu ekvivalencije elementa x.

TEOREMA 1.3.12 Neka je ρ relacija ekvivalencije na skupu A. Tada važi:

a) $(\forall x, y \in A) \quad C_x = C_y \quad \vee \quad C_x \cap C_y = \emptyset.$

b) $A = \bigcup_{x \in A} C_x$.

Dokaz. **a)** Pretpostavimo da je $C_x \cap C_y \neq \emptyset$ i neka $z \in C_x \cap C_y$. Tada je $x \,\rho\, z$ i $y \,\rho\, z$, pa kako je relacija ρ simetrična i tranzitivna, dobijamo da je $x \,\rho\, y$. Sada iz $w \in C_x$ sledi da je $w \,\rho\, x$ i $x \,\rho\, y$, pa iz tranzitivnosti imamo $w \,\rho\, y$, tj. $w \in C_y$. Takodje važi i obrnuto, tj. iz $w \in C_y$ sledi da je $w \,\rho\, y$ i $y \,\rho\, x$, pa imamo i $w \,\rho\, x$, tj. $w \in C_x$. Ovo pokazuje da je sada $C_x = C_y$.

b) Kako za svako $x \in A$ važi da je $C_x \subseteq A$, to sledi i da je $\bigcup_{x \in A} C_x \subseteq A$. S druge strane, za svako $y \in A$ važi da je $y \in C_y \subseteq \bigcup_{x \in A} C_x$, pa zaključujemo da je $A = \bigcup_{x \in A} C_x$. □

Iz prethodne teoreme vidimo da su različite klase ekvivalencije uzajamno disjunktne, a da unija svih klasa ekvivalencije daje ceo skup. Podela skupa na podskupove sa ovakvim svojstvima drugačije se naziva *particija* skupa, tačnije

DEFINICIJA 1.3.13 Neka je A proizvoljan skup i $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$. Ukoliko važi

$$(\forall X, Y \in \mathcal{C}) \quad X = Y \quad \vee \quad X \cap Y = \emptyset$$

i

$$A = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X,$$

tada se $\mathcal{C}$ naziva *particija* skupa A.

Iz Teoreme 1.3.12 vidimo da klase ekvivalencije obrazuju particiju skupa. Medjutim, važi i obratno: svakoj particiji skupa odgovara relacija ekvivalencije na tom skupu čije su klase ekvivalencije upravo elementi particije.

TEOREMA 1.3.14 Neka je $\mathcal{C}$ particija skupa A. Definišimo relaciju ρ na skupu A pomoću

$$x \,\rho\, y \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ i } y \text{ pripadaju istom elementu particije } \mathcal{C}.$$

Tada je ρ relacija ekvivalencije čije su klase ekvivalencije upravo elementi particije $\mathcal{C}$.

Dokaz. Relacija ρ je refleksivna i simetrična po svojoj definiciji. Neka je sada $x \,\rho\, y$ i $y \,\rho\, z$. Pošto je $\mathcal{C}$ particija skupa A, postoji tačno jedan podskup $C \in \mathcal{C}$ tako da $y \in C$ (u suprotnom, ako bi postojala dva različita podskupa koji sadrže y onda bi oni imali neprazan presek, što je nemoguće). Sada iz $x \,\rho\, y$ sledi da $x \in C$ i iz $y \,\rho\, z$ sledi i da $z \in C$, tako da zaključujemo da važi $x \,\rho\, z$, jer pripadaju istom elementu C particije $\mathcal{C}$. Prema tome, ρ je relacija ekvivalencije.

S druge strane, kao što smo već videli, za svako $x \in A$ postoji tačno jedan podskup $C \in \mathcal{C}$ tako da $x \in C$. Klasu ekvivalencije C_x elementa x po definiciji čine svi oni elementi $y \in A$ koji takodje pripadaju C, odakle vidimo da je $C_x = C$, tj. klase ekvivalencije su upravo elementi particije $\mathcal{C}$. □

RELACIJE PORETKA

DEFINICIJA 1.3.15 Relacija ρ na skupu A je *antisimetrična* ako važi

$$(\forall x, y \in A) \quad x\,\rho\, y \;\wedge\; y\,\rho\, x \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

DEFINICIJA 1.3.16 Relacija ρ na skupu A je *relacija poretka* ako je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

Relacija poretka se takodje naziva i *uredjenje*, odnosno *parcijalno uredjenje*.

DEFINICIJA 1.3.17 Uredjeni par (A, ρ), gde je ρ relacija poretka na skupu A, naziva se *parcijalno uredjen skup*.

PRIMER 1.3.18 Relacija "manje ili jednako" $\leqslant$ na skupu $\mathbb{N}$ je relacija poretka, jer je

$$\begin{gathered}
(\forall x \in N) \quad x \leqslant x, \\
(\forall x, y \in N) \quad x \leqslant y \;\wedge\; y \leqslant x \quad \Rightarrow \quad x = y, \\
(\forall x, y, z \in N) \quad x \leqslant y \;\wedge\; y \leqslant z \quad \Rightarrow \quad x \leqslant z.
\end{gathered}$$

Kao i kod jednakosti, i u ovom slučaju su svojstva relacije $\leqslant$ vodila ka definiciji relacije poretka. ■

PRIMER 1.3.19 Relacija "deliti" $|$ na skupu $\mathbb{N}$ je relacija poretka, jer je

$$\begin{gathered}
(\forall x \in \mathbb{N}) \quad x \mid x, \\
(\forall x, y \in \mathbb{N}) \quad x \mid y \;\wedge\; y \mid x \;\Rightarrow\; x = y, \\
(\forall x, y, z \in \mathbb{N}) \quad x \mid y \;\wedge\; y \mid z \;\Rightarrow\; x \mid z.
\end{gathered}$$ ■

PRIMER 1.3.20 Za proizvoljan skup A relacija $\subseteq$ na skupu $\mathcal{P}(A)$ je relacija poretka, jer je

$$(\forall X \in \mathcal{P}(A)) \quad X \subseteq X,$$
$$(\forall X, Y \in \mathcal{P}(A)) \quad X \subseteq Y \ \wedge \ Y \subseteq X \quad \Rightarrow \quad X = Y,$$
$$(\forall X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)) \quad X \subseteq Y \ \wedge \ Y \subseteq Z \quad \Rightarrow \quad X \subseteq Z. \qquad \blacksquare$$

S obzirom na gornje primere relacija $\leqslant$ i $\subseteq$ u matematici je postalo uobičajeno da se relacija poretka označava simbolom $\preceq$. Sada ćemo definisati nekoliko često sretanih pojmova kod parcijalnih uredjenja.

DEFINICIJA 1.3.21 Neka je $(A, \preceq)$ parcijalno uredjenje i neka je $B \subseteq A$. Za element $a \in A$ se kaže da je *donja granica* za B ako je

$$(\forall x \in B) \quad a \preceq x.$$

Element $a \in A$ je *najmanji element* u B ako je $a \in B$ i a je donja granica za B.

Za element $a \in A$ se kaže da je *gornja granica* za B ako je

$$(\forall x \in B) \quad x \preceq a.$$

Element $a \in A$ je *najveći element* u B ako je $a \in B$ i a je gornja granica za B.

Primetimo da kod parcijalnog uredjenja mogu da postoje elementi koji nisu uporedivi, pa stoga mogu da postoje i podskupovi koji nemaju najmanji element, odnosno najveći element. Na primer, ako posmatramo relaciju poretka $\subseteq$ na skupu $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$, tada skup $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ nema niti najmanji, niti najveći element.

Svojstva relacije poretka $\leqslant$ na skupu $\mathbb{N}$ su poslužila kao inspiracija za još dve važne vrste uredjenja.

DEFINICIJA 1.3.22 Relacija poretka $\preceq$ na skupu A je *linearno uredjenje* ako za svaka dva elementa $x, y \in A$ važi $x \preceq y$ ili $y \preceq x$.

DEFINICIJA 1.3.23 Linearno uredjenje $\preceq$ na skupu A je *dobro uredjenje* ako svaki konačan podskup od A ima najmanji element u odnosu na uredjenje $\preceq$.

Za slikovno predstavljanje relacija poretka na konačnom skupu mogu se iskoristiti *Haseovi dijagrami*. Da bismo mogli da opišemo konstrukciju Haseovog dijagrama potrebna nam je sledeća pomoćna definicija.

DEFINICIJA 1.3.24 Neka je ρ relacija poretka na konačnom skupu A i neka je $x \in A$ proizvoljni element skupa A. Za element $y \in A$ se kaže da je *neposredni prethodnik* elementa x ako je $y \,\rho\, x$, $y \neq x$ i važi

$$(\forall z \in A) \quad y \,\rho\, z \ \wedge \ z \,\rho\, x \quad \Rightarrow \quad z = y \ \vee \ z = x.$$

Drugim rečima, y je neposredni prethodnik od x ako nijedan drugi element skupa A ne može da se smesti izmedju y i x.

Kada je data relacija poretka ρ na konačnom skupu A, tada za svaki element skupa A možemo da odredimo *nivo* u odnosu na relaciju ρ. Naime, element $x \in A$ je na nivou 0 ako nema neposrednog prethodnika. U suprotnom, element x je na nivou k, $k > 0$, ako ima bar jednog neposrednog prethodnika na nivou $k-1$, dok se svi ostali neposredni prethodnici nalaze na nivoima najviše $k-1$.

Sada se Haseov dijagram relacije ρ dobija na sledeći način: elementi skupa A se poredjaju po nivoima počev od nivoa 0 na dnu, do najvećeg nivoa na vrhu i svaki element se spaja linijom sa svim svojim neposrednim prethodnicima. Na sl. 1.5 su prikazani Haseovi dijagrami za relacije $\subseteq$ na skupu $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ i $|$ na skupu $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Haseov dijagram za dve relacije poretka

Slika 1.5: Haseov dijagram relacije poretka

Iz načina konstrukcije Haseovog dijagrama možemo da vidimo da su elementi na istom nivou neuporedivi. Iz ovoga zaključujemo da kod linearnog uredjenja, kod koga su svaka dva elementa uporediva, na svakom nivou postoji tačno jedan element. Stoga je Haseov dijagram linearnog uredjenja veoma jednostavan: on predstavlja niz elemenata skupa poredjanih jedan iznad drugog.

ZADACI

1.4 MATEMATIČKA INDUKCIJA

Matematička indukcija je jedan od najčešćih načina dokazivanja matematičkih tvrdjenja u diskretnoj matematici, ali se često sreće i u drugim granama matematike. S obzirom na njenu široku rasprostranjenost, važno je da se sa njom što bolje upoznamo.

PRINCIP MATEMATIČKE INDUKCIJE

Neka je $S(n)$ neko tvrdjenje koje zavisi od prirodnog broja n; na primer, $S(n)$ može da bude tvrdjenje "zbir prvih n neparnih brojeva jednak je n^2". Računajući ove zbirove možemo da proverimo da tvrdjenje važi za neke male vrednosti n. Na primer,

$$1 = 1^2, \quad 1+3 = 2^2, \quad 1+3+5 = 3^2, \quad 1+3+5+7 = 4^2,$$
$$1+3+5+7+9 = 5^2.$$

Čak i ako tvrdjenje proverimo pomoću računara za prvih milion vrednosti n, to još uvek nije dokaz. Ko zna, milion i prvi broj i dalje može da bude kontraprimer. Ispravnost ovog tvrdjenja dokazujemo pomoću *principa matematičke indukcije*, koji se sastoji u sledećem:

i) Dokazati da je $S(1)$ tačno;

ii) Dokazati da važi "ako je $S(n)$ tačno, tada je i $S(n+1)$ tačno"; pritom, dokaz mora da važi za proizvoljan prirodan broj n.

Dokaz pod (i) se zove *baza indukcije*, dok se dokaz pod (ii) zove *induktivni korak*.

PRIMER 1.4.1 U našem primeru, tvrdjenje $S(n)$ je

$$1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2.$$

Rešenje. Dokaz ovog tvrdjenja matematičkom indukcijom odvija se na sledeći način:

i) $S(1)$ je tačno, jer je $1 = 1^2$;

ii) Ako je za neki broj n tvrdjenje $S(n)$ tačno, tada važi

$$1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2.$$

Dodajući sa obe strane $2n+1$ dobijamo da važi

$$1 + 3 + \ldots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2,$$

što pokazuje da je i $S(n+1)$ tačno.

Ovim je dokaz završen. ■

Deluje jednostavno, zar ne? Da vidimo sada zbog čega je ovo zaista dokaz da tvrdjenje $S(n)$ važi za svaki prirodan broj n. U bazi indukcije najpre dokazujemo da je $S(1)$ tačno. Ako zatim stavimo vrednost $n = 1$ u induktivni korak tada dobijamo da je $S(2)$ takodje tačno. Ako sada novu vrednost $n = 2$ stavimo u induktivni korak, tada dobijamo da je $S(3)$ takodje tačno. Ponavljajući ovaj postupak, redom dobijamo da su tačna tvrdjenja $S(4)$, $S(5)$, $S(6)$, ... i vidimo da na ovaj način možemo da dokažemo da je tvrdjenje $S(n)$ tačno za svaki prirodan broj n. Tačnije, induktivni korak nam daje sledeći beskonačan niz implikacija:

$$S(1) \Rightarrow S(2) \Rightarrow S(3) \Rightarrow S(4) \Rightarrow S(5) \Rightarrow S(6) \Rightarrow \ldots \Rightarrow S(n) \Rightarrow \ldots$$

dok baza indukcije služi da započnemo kretanje po ovom nizu tako što dokazuje tačnost prvog tvrdjenja u njemu.

PRIMER 1.4.2 Dokazati da za svaki prirodan broj n važi $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Rešenje. Najpre dokazujemo bazu indukcije. Za $n = 1$ tvrdjenje se svodi na $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, što je tačno. Zatim prelazimo na dokaz induktivnog koraka. Stoga pretpostavimo da je tvrdjenje

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

tačno za neki prirodan broj n. Dodajući $n+1$ na obe strane dobijamo da važi

$$1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

što dokazuje da je tvrdjenje tačno i za broj $n+1$. Po principu matematičke indukcije, dokaz je završen. ■

PRIMER 1.4.3 Dokazati da je za svaki prirodan broj n vrednost izraza $5^n - 4n - 1$ deljiva sa 16.

Rešenje. Za $n = 1$ imamo da je $5^1 - 4 \cdot 1 - 1 = 0$, pa je svakako deljivo sa 16. Ako sada pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za neki prirodan broj n, tada je $5^n - 4n - 1$ deljivo sa 16. Šta se dešava sa ovim izrazom za $n+1$? Imamo da je

$$\begin{aligned} & 5^{n+1} - 4(n+1) - 1 = 5(5^n) - 4n - 5 = \\ = \; & 5(5^n - 4n - 1) + 20n + 5 - 4n - 5 = 5(5^n - 4n - 1) + 16n. \end{aligned}$$

Sada vidimo da je broj $5^{n+1} - 4(n+1) - 1$ zbir dva broja, od kojih je svaki deljiv sa 16, pa je i on sam deljiv sa 16. Znači, tvrdjenje je tačno i za broj $n+1$, pa je po principu matematičke indukcije dokaz završen. ■

Pri radu sa matematičkom indukcijom treba paziti da baza indukcije obezbedi važnost prvog tvrdjenja u beskonačnom nizu implikacija koji se dobija ponavljanjem induktivnog koraka. Možete li naći grešku u sledećem primeru?

PRIMER 1.4.4 Neka su $l_1, l_2, \ldots, l_n$, $n \geqslant 2$, različite prave u ravni, tako da nikoje dve nisu paralelne. Dokazati da se sve prave seku u istoj tački.

Lažni dokaz. Za $n = 2$ tvrdjenje je tačno, jer se svake dve neparalelne prave seku. Pretpostavimo zato da tvrdjenje važi za neki prirodan broj n i posmatrajmo tvrdjenje za $n+1$. Ako su date prave $l_1, l_2, \ldots, l_n, l_{n+1}$, tada po indukcijskoj pretpostavci sve prave osim poslednje (tj. prave $l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}, l_n$) imaju zajedničku tačku; označimo je sa A. Takodje, sve prave osim pretposlednje (tj. prave $l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}, l_{n+1}$) imaju zajedničku tačku; označimo je sa B. Prava l_1 se nalazi u obe grupe, pa sadrži obe tačke A i B. Slično se i prava l_{n-1} nalazi u obe grupe pa i ona sadrži obe tačke A i B. Kako se l_1 i l_{n-1} seku samo u jednoj tački, to mora da bude $A = B$. Prema tome, sve prave $l_1, l_2, \ldots, l_n$, l_{n+1} imaju zajedničku tačku A.

Rešenje. Iako u prethodnom "dokazu" sve izgleda u redu, tvrdjenje je očigledno netačno. U čemu je onda problem? Označimo tvrdjenje sa $S(n)$. Očigledno je da je $S(2)$ tačno, pa je baza indukcije u redu. Induktivni korak na prvi pogled deluje tačno. Ali kada ga malo bolje pogledamo, vidimo da je moguće zaključiti da se tačke A i B poklapaju samo ako su prave l_1 i l_{n-1} različite, tj. ako je $n \neq 2$. To znači da induktivni korak generiše niz implikacija

$$S(3) \Rightarrow S(4) \Rightarrow S(5) \Rightarrow S(6) \Rightarrow \ldots \Rightarrow S(n) \Rightarrow \ldots$$

ali baza indukcije ne dokazuje prvo tvrdjenje iz ovog niza, tako da dokaz indukcijom nije korektan.

Kada bi mogli da dokažemo da je $S(3)$ tačno, tada bi tvrdjenje važilo za sve prirodne brojeve. Medjutim, jasno je da tri različite prave u ravni ne moraju da se seku u jednoj tački, pa ni $S(3)$ ne može da bude tačno. ■

PRINCIP JAKE INDUKCIJE

U nekim slučajevima za dokaz tačnosti tvrdjenja $S(n+1)$ u induktivnom koraku jednostavnije je zameniti pretpostavku da je $S(n)$ tačno tvrdjenje pomoću jače pretpostavke da su sva prethodna tvrdjenja $S(1)$, $S(2)$, $\ldots$, $S(n)$ tačna. Ovakav modifikovani princip se naziva *princip jake indukcije*, a koristi se na sledeći način:

i) Dokazati da je $S(1)$ tačno tvrdjenje;

ii) Dokazati da važi "ako su sva tvrdjenja $S(1)$, $S(2)$, $\ldots$, $S(n)$ tačna, tada je i $S(n+1)$ tačno tvrdjenje".

Lako je videti da i ovaj princip garantuje tačnost tvrdjenja $S(n)$ za svaki prirodan broj n. Štaviše, postoji još mnogo drugih varijanti indukcije koje se sve sastoje iz baze indukcije i induktivnog koraka. Njihova glavna odlika je da induktivni korak generiše beskonačan niz implikacija koje služe da se "dodje" do tvrdjenja $S(n)$ za proizvoljan prirodni broj n, a baza indukcije služi da pokaže tačnost uslova u prvoj implikaciji takvog beskonačnog niza.

PRIMER 1.4.5 Definišimo *Fibonačijeve brojeve* F_1, F_2, F_3, $\ldots$ tako da je $F_1 = 1$ i $F_2 = 1$, dok je svaki sledeći član niza jednak zbiru dva prethodna člana, tj.

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geqslant 3.$$

Prema tome, prvih nekoliko Fibonačijevih brojeva je $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$ Dokazati da važi nejednakost

$$F_n \leqslant \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

Rešenje. Označimo broj $(1+\sqrt{5})/2$ sa ϕ, a tvrdjenje "$F_n \leqslant \phi^{n-1}$" pomoću $S(n)$. U ovom slučaju, baza indukcije će se sastojati od dokaza dva posebna tvrdjenja $S(1)$ i $S(2)$, dok će induktivni korak imati oblik "ako su tvrdjenja $S(n-1)$ i $S(n)$ tačna, tada je tačno i tvrdjenje $S(n+1)$". Razlog za ovakvu varijantu matematičke indukcije je način definisanja Fibonačijevih brojeva i jedno interesantno svojstvo broja ϕ.

Ako je $n = 1$, tada je $F_1 = 1 = \phi^0 = \phi^{n-1}$, pa je tvrdjenje $S(1)$ tačno. Ako je $n = 2$, tada je $F_2 = 1 < 1,6 < \phi^1 = \phi^{n-1}$, pa je i tvrdjenje $S(2)$ tačno.

Pretpostavimo sada da su za neki prirodan broj n tačna tvrdjenja $S(n-1)$ i $S(n)$. Tada je $F_{n-1} \leqslant \phi^{n-2}$ i $F_n \leqslant \phi^{n-1}$, pa je

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \leqslant \phi^{n-1} + \phi_{n-2} = \phi^{n-2}(\phi + 1).$$

Važno svojstvo broja ϕ, zbog koga smo i izabrali ovakvu varijantu indukcije, je da važi

$$\phi^2 = \phi + 1.$$

Sada je $F_{n+1} \leqslant \phi^{n-2}(\phi + 1) = \phi^n$, pa je i tvrdjenje $S(n+1)$ tačno. Ovim smo završili dokaz induktivnog koraka i samim tim dokazali da tvrdjenje $S(n)$ važi za sve prirodne brojeve n. ■

ALTERNATIVNI PRISTUP

Princip matematičke indukcije je ekvivalentan činjenici da je skup prirodnih brojeva dobro uredjen. Ova ekvivalencija se stoga može iskoristiti za nešto drugačije dokazivanje tvrdjenja koja važe za prirodne brojeve.

Pretpostavimo da imamo tvrdjenje $S(n)$ za koje važi da su tačna tvrdjenja $S(1)$ i tvrdjenje "ako je $S(n)$ tačno, tada je i $S(n+1)$ tačno". Drugačiji način da se dokaže da u tom slučaju $S(n)$ važi za sve prirodne brojeve n je sledeći:

> Pretpostavimo da postoji n tako da tvrdjenje $S(n)$ nije tačno i neka X označava skup svih prirodnih brojeva n za koje tvrdjenje $S(n)$ nije tačno. Kako je skup prirodnih brojeva dobro uredjen, to znači da ako je skup X neprazan, tada on ima najmanji element n_0. Kako je $S(1)$ tačno, imamo da je $n_0 > 1$. Pošto je n_0 najmanji element skupa X, to je $n_0 - 1 \notin X$ i tvrdjenje $S(n_0 - 1)$ je tačno. Sada iz induktivnog koraka za $n = n_0 - 1$ dobijamo da je tvrdjenje $S(n_0)$ tačno, tj. da je $n_0 \notin X$, što je kontradikcija. Ova kontradikcija pokazuje da je skup X prazan, tj. da je tvrdjenje $S(n)$ tačno za sve prirodne brojeve n.

Način dokazivanja gde počinjemo rečenicom "Neka je n_0 najmanji broj koji ne zadovoljava tvrdjenje koje želimo da dokažemo" i završavamo kontradikcijom ponekad zamenjuje matematičku indukciju. Oba načina u suštini rade isto, a stvar je okolnosti ili ličnog ukusa koji će se način koristiti.

ZADACI

Glava 2

Osnovne tehnike prebrojavanja

Kombinatorika, nauka o rasporedima objekata, je važan deo diskretne matematike. Proučavanje ove oblasti počelo je još u XVII veku, uporedo sa nastankom teorije verovatnoće, kada su se prva kombinatorna pitanja pojavila u vezi sa igrama na sreću.

Enumeracija, ili prebrojavanje, predstavlja važan deo kombinatorike koji se bavi prebrojavanjem skupa objekata sa odredjenim svojstvima. Skupove moramo prebrojavati da bismo rešili različite vrste problema. Na primer, prebrojavanjem se može utvrditi koliko ima načina da dobijemo fleš rojal (eng. *flush royale*) u prvom deljenju pokera. Ili možemo da odredimo da li smo predvideli dovoljno različitih telefonskih brojeva ili računarskih adresa da bi se zadovoljile potrebe za njima? Tehnikama prebrojavanja se odredjuje složenost algoritama, a obimno se koriste i prilikom utvrdjivanja verovatnoća dogadjaja.

Stoga je glavna tema ove glave razvijanje efikasnih metoda za prebrojavanje konačnih skupova. Elementi ovakvih skupova obično imaju strukturu koju je lako opisati matematičkim jezikom, ali su za njihovo prebrojavanje potrebni mnogo delotvorniji metodi od pukog nabrajanja svih elemenata. U prvom odeljku bavićemo se definicijom i osnovnim principima prebrojavanja, na koje smo se svi toliko navikli da retko obraćamo pažnju na njih. Zbog toga će prvih par rezultata iz ovog odeljka možda biti dosadno, ali su neophodni za strogo zasnivanje kombinatorike. Stvari će postati mnogo zanimljivije ubrzo nakon toga i već u prvom odeljku naučićemo da pokažemo da *u svakoj grupi od šest osoba, od kojih su svake dve prijatelji ili neprijatelji, postoje tri osobe koje su ili uzajamni prijatelji ili uzajamni neprijatelji.* U drugom i četvrtom odeljku posmatraćemo uredjene i neuredjene izbore elemenata skupa, koji će nam omogućiti da odgovorimo na pitanja *na koliko načina grupa od 5 devojaka i 8 mladića može da sedne u prvi red u bioskopu tako da sve devojke sede jedna* *pored druge ili tako da nikoje dve devojke ne sede jedna pored druge.* U šestom odeljku proučavaćemo osobine binomnih koeficijenata, a u sedmom odeljku ćemo pokazivati identitete sa binomnim koeficijentima. U osmom odeljku ćemo se baviti još jednim važnim principom prebrojavanja — principom uključenja i isključenja, pomoću koga ćemo moći da kažemo *na koliko je načina moguće podeliti kapute poslanicima tako da niko ne dobije svoj kaput.*

Još jedan važan deo kombinatorike je generisanje svih objekata odredjene vrste. Ovo je često neophodno u računarskim simulacijama. U trećem i u petom odeljku predstavićemo algoritme pomoću kojih je moguće generisati sve uredjene i neuredjene izbore elemenata skupa ili dobiti jedan takav izbor na slučajan način.

Priču o prebrojavanju nastavljamo i u sledećoj glavi, gde ćemo predstaviti metod funkcije generatrise, koji će biti naše najjače orudje medju metodima prebrojavanja.

2.1 PRINCIPI PREBROJAVANJA

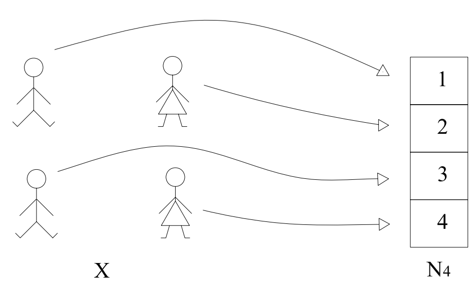
MATEMATIČKA DEFINICIJA PREBROJAVANJA

Šta mislimo kada kažemo da skup ima n elemenata? Podsetimo se, najpre, kako prebrojavamo jednostavne skupove. To radimo tako što redom pokazujemo na elemente skupa i izgovaramo reči "jedan, dva, tri, ...". Kada svaki element dobije svoj broj, stajemo i poslednji izgovoreni broj predstavlja broj elemenata u skupu.

Da bismo ovu *kaži-i-pokaži* tehniku preveli na jezik matematike, moramo da, za svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$, definišemo skup

$$\mathbb{N}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}.$$

Kaži-i-pokaži tehnika svakom elementu skupa X koga prebrojavamo pridružuje element skupa $\mathbb{N}_n$; drugim rečima, ona odredjuje funkciju f iz X u $\mathbb{N}_n$ (sl. 2.1).



Slika 2.1: Prebrojavanje studenata.

Jasno je da je funkcija f bijekcija, jer ukoliko nismo pogrešili pri brojanju, svaki element X dobija različiti broj i svaki broj iz $\mathbb{N}_n$ se dodeljuje nekom elementu iz X. Dakle:

DEFINICIJA 2.1.1 Ako je X konačan skup, n prirodan broj i postoji bijekcija iz X u $\mathbb{N}_n$, tada kažemo da X ima n elemenata.

Primetimo odmah da naša definicija prebrojavanja ne isključuje mogućnost da skup može istovremeno imati i m elemenata i n elemenata za $m \neq n$. U suštini, svi smo već iskusili situaciju kada smo brojali neki dosta veliki skup, recimo broj automobila na parkingu, i stalno dobijali različite odgovore. Sledeća teorema nam kaže da je ovo moguće samo zbog greške u brojanju, i da je broj elemenata skupa jedinstven.

TEOREMA 2.1.2 Ako su m i n prirodni brojevi tako da je $m < n$, tada ne postoji injekcija iz $\mathbb{N}_n$ u $\mathbb{N}_m$.

Iako je ova teorema maltene očigledna i ima dokaz u tri reda poput:

> *Pretpostavimo da postoji injekcija $f\colon \mathbb{N}_n \mapsto \mathbb{N}_m$. Tada su vrednosti $f(1)$, $f(2)$, $\dots$, $f(m)$ sve različite i moraju da uzimaju sve vrednosti od 1 do m. Čemu je onda jednako $f(m+1)$?*

mi ćemo ovde, vežbe radi, dati jedan strogo formalni dokaz ove teoreme.

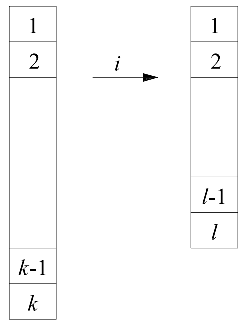
Dokaz. Dokaz ćemo izvesti polazeći od suprotnog: pretpostavićemo da takva injekcija postoji za neko n i iz toga izvesti kontradikciju.

Neka S označava skup prirodnih brojeva n za koje postoji injekcija iz $\mathbb{N}_n$ u $\mathbb{N}_m$ za neko $m < n$. Ako S nije prazan skup, onda postoji njegov najmanji element $k \in S$. Neka je i injekcija iz $\mathbb{N}_k$ u $\mathbb{N}_l$ za neko $l < k$. Ne može da bude $l = 1$, pošto svaka funkcija iz $\mathbb{N}_k$ u $\mathbb{N}_1$ može da uzme jedino vrednost 1 i stoga ne može da bude injekcija na skupu $\mathbb{N}_k$ za $k > 1$. Prema tome, $l-1$ je prirodan broj i situacija može da se prikaže kao na sl. 2.2.

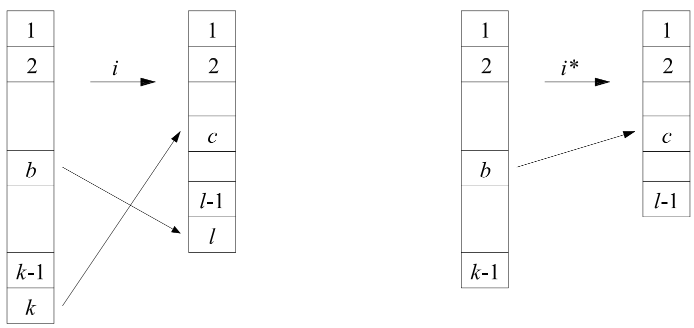
Ako nijedna od vrednosti $i(1), i(2), \dots, i(k-1)$ nije jednaka l, tada restrikcija i na skup $\mathbb{N}_{k-1}$ predstavlja injekciju iz $\mathbb{N}_{k-1}$ u $\mathbb{N}_{l-1}$. S druge strane, ako je $i(b) = l$ za neko b za koje je $1 \leqslant b \leqslant k-1$, tada mora biti $i(k) = c < l$, pošto je i injekcija. U ovom slučaju možemo da konstruišemo injekciju i^* iz $\mathbb{N}_{k-1}$ u $\mathbb{N}_{l-1}$ kao što je prikazano na sl. 2.3, tj.

$$i^*(b) = c, \quad i^*(r) = i(r) \quad (r \neq b).$$

U svakom slučaju, postojanje injekcije iz $\mathbb{N}_k$ u $\mathbb{N}_l$ povlači da postoji i injekcija iz $\mathbb{N}_{k-1}$ u $\mathbb{N}_{l-1}$. Samim tim važi i da je $k-1 \in S$, što je u kontradikciji sa činjenicom da je k najmanji element u S.



Slika 2.2: Pretpostavljena injekcija $i\colon \mathbb{N}_k \mapsto \mathbb{N}_l$.



Slika 2.3: Konstrukcija injekcije i^* kada je $i(b) = l$.

Prema tome, jedino je moguće da je S prazan skup i samim tim, tvrdjenje teoreme je dokazano. □

Iz ove teoreme sledi i da ne postoji bijekcija izmedju $\mathbb{N}_n$ i $\mathbb{N}_m$ za $n \neq m$. Stoga ne može ni da postoji skup X koji istovremeno ima i n i m elemenata, jer bismo tada iz bijekcija $\beta\colon X \mapsto \mathbb{N}_n$ i $\gamma\colon X \mapsto \mathbb{N}_m$ dobili i nemoguću bijekciju $\gamma \circ \beta^{-1}\colon \mathbb{N}_n \mapsto \mathbb{N}_m$. Prema tome, tvrdjenje "skup X ima n elemenata" može da važi za najviše jedan prirodan broj n.

NAPOMENA Zašto ovde spominjemo najviše jedan prirodan broj?

Pa, zato što moze da se desi da neki skup koji broji kombinatorne objekte nema uopste elemenata ili da ih ima beskonačno mnogo (tačnije, za skup X kažemo da ima *prebrojivo mnogo elemenata* ukoliko postoji bijekcija izmedju skupa X i skupa $\mathbb{N}$). U narednom pododeljku ćemo definisati broj elemenata skupa.

PRINCIP JEDNAKOSTI

Kada X ima n elemenata pišemo $|X| = n$ i kažemo da je *kardinalnost* (ili *veličina*) skupa X jednaka n. Često pišemo i

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

što je samo drugi način da se kaže da postoji bijekcija β iz X u $\mathbb{N}_n$ tako da je $\beta(x_i) = i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Za prazan skup posebno usvajamo da je

$$|\emptyset| = 0.$$

Sada dolazimo do prvog principa prebrojavanja — principa jednakosti.

TEOREMA 2.1.3 (Princip jednakosti) Ako izmedju dva konačna skupa A i B postoji bijekcija, tada je $|A| = |B|$.

Dokaz. Zbog postojanja bijekcije izmedju A i B, ako je bilo koji od skupova A i B prazan, tada je i drugi od tih skupova takodje prazan, pa važi $|A| = |B| = 0$.

U suprotnom, neka je $|A| = n$, $|B| = m$ za neke prirodne brojeve n i m i neka su $\alpha\colon A \mapsto \mathbb{N}_n$, $\beta\colon B \mapsto \mathbb{N}_m$ i $\gamma\colon A \mapsto B$ bijekcije. Tada je $\beta\circ\gamma\circ\alpha^{-1}$ bijekcija iz $\mathbb{N}_n$ u $\mathbb{N}_m$. Ako je $m < n$, tada je $\beta\circ\gamma\circ\alpha^{-1}$ ujedno i injekcija iz $\mathbb{N}_n$ u $\mathbb{N}_m$, što je u kontradikciji sa teoremom 2.1.2. Ako je $m > n$, tada je $\alpha\circ\gamma^{-1}\circ\beta^{-1}$ injekcija iz $\mathbb{N}_m$ u $\mathbb{N}_n$, što je opet u kontradikciji sa teoremom 2.1.2. Prema tome, mora da važi $m = n$. □

PRIMER 2.1.4 Skup *korektnih nizova zagrada* rekurzivno se definiše na sledeći način:

i) Prazan niz zagrada je korektan.

ii) Ako su A i B korektni nizovi zagrada, tada je i niz AB (dobijen spajanjem nizova A i B) korektan niz zagrada.

iii) Ako je A korektan niz zagrada, tada je i niz (A) korektan niz zagrada.

iv) Svaki korektan niz zagrada se može dobiti primenom pravila *i*)-*iii*).

Neka je A_n skup svih korektnih nizova sa n parova zagrada. Na primer:

$$A_3 = \{\ ()()(), ()(()), (())(), (()()), ((()))\ \}.$$

Iz prethodne definicije se vidi da je niz zagrada $z_1z_2\ldots z_{2n}$ korektan ako i samo ako je za svako $i = 1, 2, \ldots, 2n-1$, broj levih zagrada u podnizu $z_1z_2\ldots z_i$ veći ili jednak od broja desnih zagrada, dok u nizu $z_1z_2\ldots z_{2n}$ ima jednak broj levih i desnih zagrada.

Dalje, neka je B_n skup svih nizova $a_1, a_2, \ldots, a_n$ celih brojeva takvih da je $a_1 = 0$ i $0 \leqslant a_{i+1} \leqslant a_i + 1$. Na primer,

$$B_3 = \{\ 000, 001, 010, 011, 012\ \}.$$

Dokazati da je $|A_n| = |B_n|$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

Rešenje. Za dati niz $a_1, a_2, \ldots, a_n$ iz B_n, neka je $b_i = (a_i + 1) - a_{i+1} \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, pri čemu uzimamo da je $a_{n+1} = 0$. Nizu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sada se pridružuje niz zagrada iz A_n tako što se svaki element a_i zameni sa jednom levom zagradom i b_i desnih zagrada.

Naime, pridruženi niz zagrada je korektan, jer za svako $i = 1, 2, \ldots, n$, nakon zamene elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_i$ dobijeni niz zagrada sadrži i levih zagrada i

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \cdots + b_i &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_i + i) - (a_2 + a_3 + \cdots + a_{i+1}) \\ &= i + a_1 - a_{i+1} = i - a_{i+1} \\ &\leq i \end{aligned}$$

desnih zagrada. Ukupan broj zagrada u pridruženom nizu je

$$n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n = n + n - a_{n+1} = 2n.$$

■

Kasnije ćemo, u odeljku **??**, naučiti i da prebrojavamo korektne nizove zagrada.

PRINCIP ZBIRA

Sledeći princip je takodje veoma jednostavan i korišćen je pri prebrojavanju još od pradavnih vremena.

TEOREMA 2.1.5 (Princip zbira) Ako su A i B disjunktni konačni skupovi (tj. $A \cap B = \emptyset$), tada je

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Dokaz. Pošto su A i B konačni skupovi, možemo da ih zapišemo u standardnom obliku:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}, \qquad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_s\}.$$

Pošto su oni još i disjunktni, unija $A \cup B$ može da se zapiše u obliku:

$$A \cup B = \{c_1, c_2, \ldots, c_r, c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots, c_{r+s}\},$$

gde je

$$c_i = a_i,\ 1 \leqslant i \leqslant r, \quad \text{i} \quad c_{r+i} = b_i,\ 1 \leqslant i \leqslant s.$$

Prema tome, $|A \cup B| = r + s = |A| + |B|$. □

Ovaj princip se može proširiti na uniju proizvoljnog broja disjunktnih konačnih skupova A_1, A_2, ..., A_n:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

Dokaz ove činjenice je laka vežba za korišćenje matematičke indukcije.

PRIMER 2.1.6 Student može da izabere ispitno pitanje iz jedne od tri disjunktne grupe. Ove grupe sadrže 17, 23 i 19 pitanja, redom. Koliko ima različitih pitanja koja student može da izabere?

Rešenje. Neka A_i, $i = 1, 2, 3$, označava i-tu grupu ispitnih pitanja. Student bira pitanje iz skupa $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ koji, po principu zbira, ima

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| = 17 + 23 + 19 = 59$$

različitih pitanja. ■

PRIMER 2.1.7 Koja je vrednost promenljive k nakon izvršenja sledećeg koda?

```
k := 0
for i_1 := 1 to n_1
    k := k + 1
end for
for i_2 := 1 to n_2
    k := k + 1
end for
    ⋮
for i_m := 1 to n_m
    k := k + 1
end for
```

Rešenje. Početna vrednost promenljive k je nula. Blok koda se sastoji od m različitih **for** petlji. Svaki put kada se izvrši petlja, k se poveća za 1. Neka je A_i skup izvršenja i-te petlje. Tada je $|A_i| = n_i$, jer se i-ta petlja izvršava n_i puta. Pošto su sve petlje disjunktne, tj. nema ugnježdenih **for** petlji, princip zbira pokazuje da će konačna vrednost promenljive k biti

$$|A_1 + A_2 + \ldots + A_m| = n_1 + n_2 + \ldots + n_m.$$

■

PRINCIP PROIZVODA

Često smo u situaciji da brojimo stvari koje se lakše predstavljaju kao parovi objekata, nego kao pojedinačni objekti. Pretpostavimo, na primer, da je studentska služba na Odseku za matematiku sredjivala prijave studenata za oktobarski ispitni rok. Pritom su došli do situacije kao u tabeli 2.1.

	Algebra	Diskretna mat.	$\cdots$	Mat. analiza
Ana	✓	✓		
Branko		✓		✓
Ceca	✓			✓
$\vdots$				
Žika	✓	✓		✓

Tabela 2.1: Ispiti prijavljeni u oktobarskom roku.

Ako je student x prijavio ispit y tada je na odgovarajućoj poziciji (x, y) u tabeli postavljen znak ✓. Ukupan broj ovih znakova u tabeli je ujedno i broj ispitnih prijava. Sada je problem prebrojati skup S parova (x, y) takvih da je student x prijavio ispit y. U opštem obliku, ako su X i Y dati skupovi, problem je prebrojati podskup S skupa $X \times Y$.

Postoje dva načina prebrojavanja ispitnih prijava iz tabele 2.1. S jedne strane, možemo da prebrojimo predmete koje je prijavio svaki student ponaosob i saberemo rezultate, dok s druge strane, možemo da prebrojimo studente koji su prijavili svaki predmet ponaosob i saberemo rezultate. Naravno, očekujemo da će oba načina proizvesti isti broj.

Ova razmatranja možemo da preciziramo na sledeći način. Pretpostavimo da je podskup S skupa $X \times Y$ (gde su X i Y konačni skupovi) dat pomoću znakova ✓u opštem obliku tabele 2.2.

	$\cdot$	$\cdot$	y	$\cdots$	Zbir u vrsti
$\cdot$	✓		✓		$\cdot$
$\cdot$		✓		✓	$\cdot$
x	✓	✓		✓	$r_x(S)$
$\cdot$			✓		$\cdot$
$\cdot$	✓			✓	$\cdot$
Zbir u koloni	$\cdot$	$\cdot$	$c_y(S)$	$\cdots$	$\lvert S\rvert$

Tabela 2.2: Označeni podskup S skupa $X \times Y$.

Prvi način prebrojavanja je da, za svako x u X, nadjemo broj $r_x(S)$ pojavljivanja znaka ✓u vrsti x, tj.

$$r_x(S) = |\{(x, y) \in S \colon y \in Y\}|.$$

Ukupan zbir se dobija sabiranjem svih zbirova po vrstama:

$$|S| = \sum_{x \in X} r_x(S).$$

Drugi način je da, za svako y u Y, nadjemo broj $c_y(S)$ pojavljivanja znaka ✓u koloni y, tj.

$$c_y(S) = |\{(x, y) \in S \colon x \in X\}|.$$

U ovom slučaju ukupan zbir se dobija sabiranjem svih zbirova po kolonama:

$$|S| = \sum_{y \in Y} c_y(S).$$

Činjenica da imamo dva različita izraza za $|S|$ često se koristi u praksi za proveru rezultata računanja. Ona takodje ima veliku važnost i u teoriji, zato što ponekad možemo da dobijemo veoma neočekivane rezultate izjednačavanjem dva izraza od kojih svaki prebrojava isti skup samo na drugačiji način. Ovim dolazimo i do našeg trećeg principa prebrojavanja.

TEOREMA 2.1.8 Neka su X i Y konačni skupovi, i neka je S podskup $X \times Y$. Tada važi:

a) Broj elemenata skupa S je dat sa

$$|S| = \sum_{x \in X} r_x(S) = \sum_{y \in Y} c_y(S).$$

b) (Princip proizvoda) Broj elemenata skupa $X \times Y$ jednak je

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|.$$

Dokaz. **a)** Skup S se može predstaviti kao disjunktna unija skupova

$$S = \bigcup_{x \in X} \{(x, y) \in S \colon y \in Y\},$$

odakle, po principu zbira, dobijamo

$$|S| = \sum_{x \in X} |\{(x, y) \in S \colon y \in Y\}| = \sum_{x \in X} r_x(S).$$

Slično se dokazuje i rezultat za $c_y(S)$.

b) U ovom slučaju je $S = X \times Y$, pa je $r_x(S) = |Y|$ za svako x iz X. Iz dela (i) sada sledi da je $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$. □

Ovaj princip se može proširiti na proizvod proizvoljnog broja konačnih skupova $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|.$$

Dokaz ove činjenice je laka vežba za korišćenje matematičke indukcije.

PRIMER 2.1.9 Koliko postoji različitih nizova bitova 0 i 1 dužine 8?

Rešenje. Traženi nizovi bitova su elementi skupa $\{0,1\}^8$. Svaki od osam bitova može da se izabere na dva načina (ili 0 ili 1), pa princip proizvoda kaže da postoji ukupno $2^8 = 256$ različitih nizova bitova dužine 8. ■

NAPOMENA Niz bitova dužine 8 se naziva *bajt*.

PRIMER 2.1.10 Koja je vrednost promenljive k nakon izvršenja sledećeg koda?

```
k := 0
for i_1 := 1 to n_1
  for i_2 := 1 to n_2
    ⋮
    for i_m := 1 to n_m
        k := k + 1
    end for
    ⋮
  end for
end for
```

Rešenje. Početna vrednost promenljive k je nula. Svaki put kada se prodje kroz poslednju ugnježdenu petlju, k se poveća za 1. Neka je A_j skup prolaza kroz j-tu petlju kada dodjemo do bloka koji počinje naredbom **for** $i_j := 1$ **to** n_j, a završava se odgovorajućim **end for**. Imamo da je $|A_j| = n_j$, jer se tu kroz j-tu petlju prolazi jednom za svaki ceo broj i_j za koji je $1 \leqslant i_j \leqslant n_j$. Kako su sve petlje ugnježdene jedna u drugu, broj prolaza kroz sve petlje zajedno jednak je $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m|$. Sada po principu proizvoda dobijamo da je

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m| = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m,$$

što predstavlja i konačnu vrednost promenljive k. ■

PRIMER 2.1.11 Svaki korisnik računarskog sistema ima šifru, koja je dugačka od šest do osam znakova i gde je svaki znak ili veliko slovo engleske azbuke ili cifra. Svaka šifra mora da sadrži bar jednu cifru. Koliko mogućih šifri postoji?

Rešenje. Neka je $\check{S}$ ukupan broj mogućih šifara i neka $\check{S}_6$, $\check{S}_7$ i $\check{S}_8$ označavaju brojeve mogućih šifara sa 6, 7 i 8 znakova, redom. Po principu zbira, važi da je $\check{S} = \check{S}_6 + \check{S}_7 + \check{S}_8$. Sada ćemo naći $\check{S}_6$, $\check{S}_7$ i $\check{S}_8$.

Iako je moguće direktno izračunati $\check{S}_6$, mnogo je lakše najpre izračunati broj nizova dužine 6 koji se sastoje od velikih slova i cifara, uključujući i one bez cifara, a zatim od tog broja oduzeti broj nizova dužine 6 koji ne sadrže cifre. Po principu proizvoda, broj nizova dužine 6 je 36^6, a broj nizova koji ne sadrže cifre je 26^6. Prema tome,

$$\check{S}_6 = 36^6 - 26^6 = 2\,176\,782\,336 - 308\,915\,776 = 1\,867\,866\,560.$$

Slično je

$$\check{S}_7 = 36^7 - 26^7 = 78\,364\,164\,096 - 8\,031\,810\,176 = 70\,332\,353\,920$$

i

$$\check{S}_8 = 36^8 - 26^8 = 2\,821\,109\,907\,456 - 208\,827\,064\,576 = 2\,612\,282\,842\,880.$$

Sve u svemu,

$$\check{S} = \check{S}_6 + \check{S}_7 + \check{S}_8 = 2\,684\,483\,063\,360.$$

■

DIRIHLEOV PRINCIP

Pretpostavimo da je jato golubova doletelo u golubarnik. U svojoj originalnoj verziji, *Dirihleov princip* kaže da ako ima više golubova nego kućica u golubarniku, tada će se bar u jednoj kućici naći bar dva goluba. Zbog ovoga se na engleskom govornom području Dirihleov princip naziva *The Pigeonhole Principle*. Naravno, ovaj princip je primenljiv i na druge objekte, a ne samo na golubove.

TEOREMA 2.1.12 **Dirihleov princip.** Ako je $n+1$ ili više objekata smešteno u n kutija, tada se bar u jednoj kutiji nalaze bar dva objekta.

Dokaz. Pretpostavimo da svaka kutija sadrži najviše jedan objekat. Tada je ukupan broj objekata najviše n, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da ima bar $n+1$ objekata. □

Formalno gledano, ova teorema je posledica Teoreme 2.1.2. Ako imamo m objekata numerisanih brojevima $1, 2, \ldots, m$ i n kutija numerisanih brojevima $1, 2, \ldots, n$, tada se smeštanje objekata u kutije može predstaviti funkcijom $f\colon \mathbb{N}_m \mapsto \mathbb{N}_n$ tako da je $f(i) = j$ ako je objekat i smešten u kutiju j. Po Teoremi 2.1.2, ako je $m > n$, funkcija f ne može da bude injekcija, pa postoje dve različite vrednosti i_1 i i_2 tako da je $f(i_1) = f(i_2) = j$, što znači da kutija j sadrži bar dva objekta — i_1 i i_2!

PRIMER 2.1.13 Navedimo nekoliko direktnih primena Dirihleovog principa:

a) U svakom skupu od 13 ili više osoba, postoje bar dve koje su rodjene istog meseca.

b) U svakom skupu od 367 ili više osoba, postoje bar dve koje su rodjene istog datuma.

c) U svakom skupu od milion osoba, postoje bar dve koje imaju isti broj dlaka na glavi. ■

Naravno, postoje i nešto elegantnije primene Dirihleovog principa.

PRIMER 2.1.14 Dokazati da za svaki ceo broj n postoji umnožak od n koji se zapisuje samo pomoću cifara 0 i 1.

Rešenje. Neka je n pozitivan ceo broj. Posmatrajmo n celih brojeva

$$1, 11, 111, \ldots, \underbrace{11\cdots 11}_{n}.$$

Ako je neki od njih deljiv sa n, problem je rešen. U suprotnom, pri deljenju sa n svaki od ovih brojeva daje jedan od $n-1$ mogućih ostataka 1, 2, …, $n-1$. Kako u nizu ima n brojeva, to po Dirihleovom principu sledi da postoje dva broja u nizu, recimo

$$\underbrace{11\cdots 11}_{k} \quad \text{i} \quad \underbrace{11\cdots 11}_{l}, \quad k < l,$$

koja daju isti ostatak pri deljenju sa n. Tada je njihova razlika

$$\underbrace{11\cdots 11}_{l-k}\underbrace{00\cdots 00}_{k},$$

deljiva sa n. ■

PRIMER 2.1.15 Dokazati da ako je X skup osoba, tada postoje dve osobe u X koje imaju isti broj prijatelja u X. (Pretpostavlja se da ako je x prijatelj y, tada je i y prijatelj x.)

Rešenje. Smestimo osobe u prostorije, gde će se u prostoriji i naći sve osobe koje imaju i prijatelja. Ako skup X sadrži m osoba, tada ima m prostorija numerisanih brojevima 0, 1, …, $m-1$. U ovom trenutku još ne možemo da primenimo Dirihleov princip, jer je broj prostorija isti kao i broj osoba.

Medjutim, primetimo da bar jedna od prostorija 0 i $m-1$ mora uvek da bude prazna. Naime, ako postoji osoba x' koja ima $m-1$ prijatelja, tada je svaka osoba prijatelj osobe x', pa stoga ne postoji osoba koja ima 0 prijatelja. Slično, ako postoji osoba x'' koja ima 0 prijatelja, tada ne postoji osoba koja ima $m-1$ prijatelja.

Prethodno razmatranje nam pokazuje da je m osoba iz X u stvarnosti raspoređeno u $m-1$ prostorija (ili u prostorije $0, 1, \ldots, m-2$ ili u prostorije $1, 2, \ldots, m-1$), pa nam Dirihleov princip sada kaže da zaista postoje dve osobe x_1 i x_2 koje se nalaze u istoj prostoriji, odnosno, koje imaju isti broj prijatelja u X. ■

Primenom principa zbira dobija se nešto opštiji oblik Dirihleovog principa. Pretpostavimo da je odredjeni broj objekata smešten u n kutija i neka A_i označava skup objekata u kutiji i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Pošto su skupovi A_i disjunktni, ukupan broj objekata u kutijama je $|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$. Stoga, ako bi se u svakoj kutiji nalazilo najviše r objekata, tada bi ukupan broj objekata bio najviše

$$r + r + \ldots + r = nr.$$

Ili, drugim rečima:

TEOREMA 2.1.16 **Uopšteni Dirihleov princip.** Ako je m objekata smešteno u n kutija i $m > nr$, tada se bar u jednoj kutiji nalazi bar $r+1$ objekat.

□

PRIMER 2.1.17 **a)** Koliko najmanje karata treba izvući iz standardnog špila sa 52 karte da bi se medju izvučenim kartama sigurno nalazile četiri sa istim znakom?

b) Koliko najmanje karata treba izvući da bi se našle bar tri sa znakom srca?

Rešenje. **a)** Pretpostavimo da postoje četiri kutije i, kako se karte izvlače, tako se stavljaju u kutiju rezervisanu za odgovarajući znak. Iz uopštenog Dirihleovog principa, vidimo da je dovoljno izvući bar 13 $(= 4 \cdot 3 + 1)$ karata da bi bile izvučene bar tri istog znaka. Ovo je i najmanji traženi broj, jer je moguće da se medju 12 izvučenih karata nadju po tri karte od svakog znaka.

b) U ovom slučaju ne koristimo uopšteni Dirihleov princip, jer želimo da se uverimo da postoje tri karte odredjenog znaka, a ne tri karte nekog znaka! U najgorem slučaju, moguće je izvući sve pikove, sve trefove i sve karoe, što čini 39 karata, pre nego što izvučemo makar i jedno srce. Sledeće tri karte će biti sa znakom srca, pa je stoga $39 + 3 = 42$ najmanji broj karata koje treba izvući da bi se došlo do tri srca. ■

PRIMER 2.1.18 Pretpostavimo da računarska učionica ima 10 radnih stanica i 5 servera. Kablom se radna stanica može direktno vezati za server. Na strani servera u bilo kom trenutku samo jedna direktna veza može da bude aktivna. Želimo da garantujemo da u svakom trenutku bilo koji skup od 5 ili manje radnih stanica može istovremeno da pristupi različitim serverima preko direktnih veza. Iako je ovo moguće uraditi povezivanjem svake radne stanice direktno sa svakim serverom (što zahteva 50 veza), koji je najmanji broj direktnih veza potreban za ostvarenje ovog cilja?

Rešenje. Pretpostavimo da su radne stanica označene sa $w_1, w_2, \ldots, w_{10}$, a serveri sa $s_1, s_2, \ldots, s_5$. Povežimo direktnom vezom w_k sa s_k za $k = 1, 2, \ldots, 5$ i svaku od stanica $w_6, w_7, \ldots, w_{10}$ sa svakim od servera. Imamo ukupno 30 direktnih veza kojima je ostvaren naš cilj: u svakom skupu od 5 ili manje radnih stanica, radna stanica w_i sa $1 \leqslant i \leqslant 5$ može da pristupi serveru s_i, dok je broj radnih stanica w_j sa $6 \leqslant j \leqslant 10$ (one mogu da pristupe bilo kom slobodnom serveru) manji ili jednak broju preostalih slobodnih servera, pa i one mogu da pristupe različitim serverima.

Pretpostavimo sada da je dovoljno manje od 30 direktnih veza izmedju radnih stanica i servera. Tada bi neki server bio povezan sa najviše 5 radnih stanica (jer, ako su svi serveri povezani sa bar 6 radnih stanica, tada je broj direktnih veza bar $5 \cdot 6 = 30$). Preostale radne stanice, njih bar 5, su tada povezane direktnim vezama samo sa preostala četiri servera, pa stoga nije moguće da bilo kojih 5 od ovih radnih stanica istovremeno pristupi različitim serverima. Stoga je zaista potrebno najmanje 30 direktnih veza za ostvarenje našeg cilja. ■

Sledeći primer predstavlja veoma efektnu upotrebu Dirihleovog principa.

PRIMER 2.1.19 Tokom dvadeset dana fudbalski tim igra bar jednu utakmicu dnevno, ali ne više od 30 utakmica ukupno. Dokazati da postoji nekoliko uzastopnih dana tokom kojih je tim odigrao tačno 9 utakmica.

Rešenje. Neka je a_j broj utakmica odigranih od početka prvog dana do kraja j-tog dana. Niz $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$ je rastući niz različitih prirodnih brojeva, pri čemu je $1 \leqslant a_j \leqslant 30$. Niz $a_1 + 9, a_2 + 9, \ldots, a_{20} + 9$ je takodje rastući niz različitih prirodnih brojeva, pri čemu je $10 \leqslant a_j + 9 \leqslant 39$.

Četrdeset prirodnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_{20}, a_1 + 9, a_2 + 9, \ldots, a_{20} + 9$ su svi manji ili jednaki 39. Prema tome, po Dirihleovom principu, dva od ovih brojeva su jednaka. Pošto su svi brojevi a_j, $j = 1, 2, \ldots, 20$ medjusobno različiti i, takodje, brojevi $a_j + 9$, $j = 1, 2, \ldots, 20$ su medjusobno različiti, to onda postoje i i j tako da je $a_j = a_i + 9$. Ovo znači da je tačno 9 utakmica odigrano od $i + 1$-og dana do j-og dana. ■

Poslednji primer u ovoj sekciji pokazuje kako uopšteni Dirihleov princip može da se primeni na važan deo kombinatorike, *Remzijevu teoriju* (po engleskom matematičaru F.P. Ramsey (1903–1930) je ova oblast dobila ime). Ova teorija se bavi postojanjem podskupova sa specijalnim svojstvima u datom skupu.

PRIMER 2.1.20 Dokazati da u svakom skupu od šest osoba postoje tri osobe tako da se one uzajamno poznaju ili se uzajamno ne poznaju.

Rešenje. Neka je a proizvoljna osoba iz ovog skupa i smestimo preostalih pet osoba u dve prostorije: prva prostorija sadrži osobe koje poznaju a, a druga prostorija sadrži osobe koje ne poznaju a. Pošto je $5 > 2 \cdot 2$, jedna od ovih prostorija sadrži bar tri osobe.

Pretpostavimo da 1. prostorija sadrži osobe b, c i d (a možda i još neke). Ako se bilo koje dve od osoba b, c i d poznaju, recimo b i c, tada je $\{a, b, c\}$ podskup od tri osobe koje se uzajamno poznaju. U suprotnom, nikoje dve osobe iz skupa $\{b, c, d\}$ se ne poznaju, pa ovaj podskup takodje zadovoljava uslove tvrdjenja.

U slučaju da 2. prostorija sadrži tri ili više osoba, sličnim razmatranjem se dolazi do istog zaključka. ■

NAPOMENA U okviru Remzijeve teorije, za $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, *Remzijev broj* $R_{m,n}$ označava najmanji mogući broj ljudi tako da u svakoj grupi sa $R_{m,n}$ osoba postoji ili m osoba koje se medjusobno poznaju ili n osoba koje se medjusobno ne poznaju. Prethodni primer sada pokazuje da je $R(3,3) \leqslant 6$. U stvari, važi da je $R(3,3) = 6$, jer je moguće naći grupu od 5 osoba tako ne postoje niti tri osobe koje se medjusobno poznaju niti tri osobe koje se medjusobno ne poznaju (ovo ostavljamo kao vežbu čitaocu).

Najteži problem u Remzijevoj teoriji je nalaženje tačnih vrednosti $R(m,n)$. Nalaženjem pogodnih primera koji ne sadrže m medjusobnih poznanika niti n medjusobnih neznanaca moguće je dobiti donju granicu za $R(m,n)$. Medjutim, da bi mogao da se iskoristi za odredjivanje tačne vrednosti $R(m,n)$, ovakav primer mora da sadrži $R(m,n) - 1$ osoba!

Lako je pokazati da je $R(m,n) = R(n,m)$, kao i da je $R(2,n) = n$ za svako $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Medjutim, za $3 \leqslant m \leqslant n$ poznato je svega nekoliko tačnih vrednosti, dok su za mnoge druge vrednosti poznate samo granice. U tabeli 2.3 je predstavljeno trenutno znanje o Remzijevim brojevima za $3 \leqslant m \leqslant n$.

m \ n	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	36
4		18	25	35–41	49–61	56–84	73–115
5			43–49	58–87	80–143	101–216	125–316
6				102–165	113–298	127–495	169–780
7					205–540	216–1031	233–1713
8						282–1870	317–3583
9							565–6588

Tabela 2.3: Vrednosti i granice Remzijevih brojeva $R(m,n)$, $3 \leqslant m \leqslant n$.

Detaljniji uvod u Remzijevu teoriju čitalac može da nadje na adresama

`http://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey_theory`,
`http://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey's_theorem`,

a pregled poznatih rezultata u PDF dokumentu na adresi

`http://www.combinatorics.org/Surveys/#DS1`.

ZADACI

2.1.1 Na polici se nalazi 6 različitih knjiga na engleskom jeziku, 8 različitih knjiga na ruskom jeziku i 10 različitih knjiga na srpskom jeziku. Na koliko načina možemo izabrati 2 knjige tako da one budu na različitim jezicima?

2.1.2 Koliko 3-cifrenih brojeva možemo da formiramo od 6 cifara 2, 3, 4, 5, 6 i 8 ako:
a) cifre mogu da se ponavljaju?
b) cifre ne mogu da se ponavljaju?
c) broj treba da bude neparan i cifre ne mogu da se ponavljaju?
d) broj treba da bude paran i cifre ne mogu da se ponavljaju?
e) broj treba da bude deljiv sa 5 cifre ne mogu da se ponavljaju?
f) broj treba da sadrži cifru 5 i cifre ne mogu da se ponavljaju?
g) broj treba da sadrži cifru 5 i cifre mogu da se ponavljaju?

2.1.3 Koliko ima 5-tocifrenih prirodnih brojeva koji imaju tačno jednu cifru 6?

2.1.4 Koliko različitih delilaca ima broj 60000?

2.1.5 **a)** Odrediti na koliko načina možemo faktorisati broj 441 000 na 2 faktora, m i n tako da je $m > 1$, $n > 1$ i $\mathrm{NZD}(m, n) = 1$, pri čemu redosled faktora nije bitan (tj. proizvodi $m \cdot n$ i $n \cdot m$ predstavljaju isto faktorisanje).
b) Na koliko načina možemo faktorisati broj 441 000 na 2 prirodna faktora, pri čemu redosled faktora nije bitan?
c) Na koliko načina možemo faktorisati broj 441 000 na proizvoljan broj prirodnih faktora koji su uzajamno prosti u parovima, pri čemu redosled faktora nije bitan?

2.1.6 Neka je $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Odrediti broj svih funkcija $f : S \mapsto S$ koje nemaju fiksnu tačku.

2.1.7 Slepi čovek ima hrpu od 2 para sivih, 3 para braon, 5 parova plavih, 7 parova belih i 10 parova crnih čarapa. On ide na put i u kofer treba da spakuje odgovarajući broj čarapa.
a) Koliko čarapa treba da izabere da bi bio siguran da ima par iste boje?
b) Koliko njih treba da izabere da bi bio siguran da ima par plave boje?
c) Koji je minimalan broj čarapa koje treba da izabere da bi bio siguran da ima 8 čarapa iste boje?

2.1.8 Dokazati da u proizvoljnom skupu od $n + 1$ prirodnih brojeva postoje dva čija je razlika deljiva sa n.

2.1.9 Dokazati da u proizvoljnom skupu od 7 celih brojeva postoje dva broja x i y, tako da ili $x + y$ ili $x - y$ deljivo sa 10.

2.1.10 Dokazati da u proizvoljnom razbijanju (particiji) skupa $X = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ na dva podskupa, bar jedan od ta 2 podskupa sadrži aritmetičku progresiju dužine 3.

2.1.11 Dokazati da postoji $n \in \mathbb{N}$, tako da se decimalni zapis broja 3^n završava sa 0001.

2.1.12 **a)** Dokazati da u svakom podskupu sa $n+1$ elemenata skupa $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ postoje dva različita broja tako da jedan od njih deli drugi;
b) Dokazati da postoji podskup sa n elemenata skupa $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ tako da nijedan od njegovih elemenata ne deli neki drugi element.

2.1.13 Kada je Eva bila 14 dana izvan grada zvala je 17 puta Adama. Ako je ona svakog dana napravila bar 1 medjugradski poziv, dokazati da postoji period od nekoliko uzastopnih dana tokom kojih je ona napravila tačno 10 poziva.

2.1.14 U kvadratu stranice 2 dato je k tačaka.
a) Ako je $k = 5$ dokazati da postoje bar dve tačke tako da je njihovo rastojanje najviše $\sqrt{2}$.
a) Ako je $k = 4n^2 + 1$ dokazati da postoje bar dve tačke tako da je njihovo rastojanje najviše $\frac{\sqrt{2}}{n}$.

2.1.15 Dokazati da se medju 3 cela broja uvek mogu izabrati 2 (recimo a i b) takvi da je izraz $a^3b - ab^3$ deljiv sa 10.

2.1.16 Svaka tačka ravni obojena je crvenom ili belom bojom. Dokazati da postoji duž dužine 1 u toj ravni, čija su oba kraja obojena istom bojom.

2.1.17 Svaka tačka ravni obojena je crvenom ili belom bojom. Dokazati da postoji jednakokrako–pravougli trougao, kod koga su sva 3 temena obojena istom bojom.

2.1.18 Ravan je obojena sa 3 boje. Pokazati da postoje 2 tačke u ravni, koje su obojene istom bojom, a nalaze se na jediničnom rastojanju.

2.1.19 Ravan je obojena sa 2 boje. Dokazati da postoji jednakostraničan trougao, kod koga su sva 3 temena obojena istom bojom. Da li tvrdjenje važi ako se traži istobojni jednakostranični trougao stranice 1?

2.2 UREDJENI IZBORI ELEMENATA

Ponekad je poredak u kojem se elementi nalaze bitan, a ponekad nije. Na primer, reč *STOP* je različita od reči *POTS*, bez obzira što su obe reči formirane od slova iz skupa $\{O, P, S, T\}$. S druge strane, zbir brojeva $1 + 2 + 3$ je isti kao zbir $2+3+1$, bez obzira što je redosled ovih brojeva promenjen. U ovom odeljku ćemo naučiti kako da prebrojimo izbore elemenata kod kojih je poredak bitan, a kasnije ćemo proučavati izbore elemenata kod kojih poredak nije bitan. Takodje ćemo naučiti da je važno da li je ili nije dozvoljeno ponavljanje elemenata.

PRIMER 2.2.1 Posmatrajmo skup $\{A, B, C, D\}$. Na koliko načina možemo da izaberemo dva slova?

Rešenje. Postoje *četiri* moguća odgovora na ovo pitanje, u zavisnosti od toga da li je bitan poredak slova, kao i da li je dozvoljeno ponavljanje slova.

a) Ako je poredak bitan i dozvoljeno je ponavljanje slova, tada postoji 16 mogućih izbora:

$$\begin{array}{cccc} AA & BA & CA & DA \\ AB & BB & CB & DB \\ AC & BC & CC & DC \\ AD & BD & CD & DD \end{array}$$

b) Ako je poredak bitan, a ponavljanje nije dozvoljeno, tada postoji 12 mogućih izbora:

$$\begin{array}{cccc} & BA & CA & DA \\ AB & & CB & DB \\ AC & BC & & DC \\ AD & BD & CD & \end{array}$$

c) Ako poredak nije bitan, a dozvoljeno je ponavljanje, tada postoji 10 mogućnosti:

$$\begin{array}{cccc} AA & & & \\ AB & BB & & \\ AC & BC & CC & \\ AD & BD & CD & DD \end{array}$$

d) Ako poredak nije bitan, a nije dozvoljeno ni ponavljanje, tada postoji samo 6 mogućnosti:

$$\begin{array}{ccc} AB & & \\ AC & BC & \\ AD & BD & CD \end{array}$$

■

Ovaj primer pokazuje četiri osnovna tipa kombinatornih problema. U ovom i sledećem odeljku naučićemo da rešavamo sve ove tipove problema u *opštem slučaju*, tj. kada je problem izabrati m elemenata iz skupa sa n elemenata. U ovom odeljku uopštićemo slučajeve a) i b), dok ćemo u odeljku 2.4 Neuredjeni izbori elemenata prouciti slučajeve c) i d).

UREDJENI IZBORI SA PONAVLJANJEM

U prethodnom primeru smo videli da je u slučaju (a) broj izbora jednak $16 = 4^2$. Evo još jednog sličnog primera:

PRIMER 2.2.2 Koliko postoji različitih reči sa 5 slova (koristeći naše pismo sa 30 slova i uključujući i besmislene reči kao *kćndv*)?

Rešenje. Pošto se svako od 5 slova može nezavisno izabrati na 30 načina, nije teško videti da je odgovor 30^5. I, zaista, svaka reč sa 5 slova se može posmatrati kao preslikavanje skupa $\{1, 2, \ldots, 5\}$ u skup slova $\{a,b,c,\ldots,ž\}$: za svako od 5 mesta u reči, sa rednim brojevima $1, 2, \ldots, 5$, preslikavanje odredjuje slovo na tom mestu. ■

Nalaženje ovakvih jednostavnih prevodjenja svakodnevnih problema na jezik matematike jedna je od osnovnih veština matematičkog zanata. Sada nije teško videti da uredjeni izbor n elemenata sa ponavljanjem iz skupa M sa m elemenata u stvari odgovara preslikavanju skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u skup M.

TEOREMA 2.2.3 Neka je N skup sa n elemenata (koji može da bude i prazan, tj. $n \geqslant 0$) i neka je M skup sa m elemenata, $m \geqslant 1$. Broj svih mogućih preslikavanja $f\colon N \mapsto M$ jednak je m^n.

Dokaz. Do rezultata se može doći imitiranjem ideje iz prethodnog primera, ali ćemo iskoristiti priliku da se naviknemo na stroge matematičke dokaze.

Zato za dokaz koristimo metod matematičke indukcije po n. Šta teorema tvrdi za $n = 0$? U ovom slučaju, posmatramo sva preslikavanja f skupa $N = \emptyset$ u neki skup M. Definicija preslikavanja nam kaže da takvo f mora da bude skup uredjenih parova (x, y) tako da $x \in N = \emptyset$ i $y \in M$. Pošto prazan skup nema elemenata, f ne može da sadrži nijedan takav uredjeni par, pa je jedina mogućnost da je $f = \emptyset$ (nema uredjenih parova). S druge strane, $f = \emptyset$ zadovoljava definiciju preslikavanja (proverite!). Prema tome, postoji tačno jedno preslikavanje $f\colon \emptyset \mapsto M$. Ovo se slaže sa formulom, jer je $m^0 = 1$ za $m \geqslant 1$, pa zaključujemo da smo proverili slučaj $n = 0$ kao bazu indukcije.

Dalje, pretpostavimo da je teorema dokazana za sve $n \leqslant n_0$ i sve $m \geqslant 1$. Neka je $n = n_0 + 1$ i posmatrajmo skup N sa n elemenata i skup M sa m elemenata. Izaberimo proizvoljan element $a \in N$. Za opis preslikavanja $f\colon N \mapsto M$ potrebno je znati vrednost $f(a) \in M$ i preslikavanje $f'\colon N \setminus \{a\} \mapsto M$. Vrednost $f(a)$ može da se izabere na m načina, a za izbor f' imamo m^{n-1} mogućnosti po induktivnoj hipotezi, pa sada po principu proizvoda dobijamo da je ukupan broj mogućnosti za f jednak $m \cdot m^{n-1} = m^n$.

Ovde ide slika sa strane 49 iz Nešetrilove knjige!!!

□

NAPOMENA Uredjeni izbori elemenata u literaturi se nazivaju još i *varijacije*.

TEOREMA 2.2.4 Svaki skup X sa n elemenata ima tačno 2^n podskupova ($n \geqslant 0$).

Dokaz. Posmatrajmo proizvoljan podskup A skupa X i definišimo preslikavanje $f_A \colon X \mapsto \{0,1\}$. Za $x \in X$ odredjujemo

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{ako } x \in A \\ 0 & \text{ako } x \notin A. \end{cases}$$

Ovo preslikavanje se često sreće u matematici i naziva se *karakteristična funkcija* skupa A. Vizuelno,

Ovde ide slika sa strane 50 iz Nešetrilove knjige!!!

Različiti skupovi A imaju različite funkcije f_A, i obrnuto, svako preslikavanje $f \colon X \mapsto \{0,1\}$ odredjuje skup $A = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$ tako da je $f = f_A$. Prema tome, broj podskupova X je isti kao broj svih preslikavanja $X \mapsto \{0,1\}$, a to je 2^n po Teoremi 2.2.3. □

PRIMER 2.2.5 Da li medju brojevima $1, 2, \ldots, 10^{10}$ ima više onih koji sadrže cifru 9 u decimalnom zapisu ili onih koji je ne sadrže?

Rešenje. Ako broj ne sadrži cifru 9 u decimalnom zapisu, onda su sve njegove cifre u skupu $\{0, 1, \ldots, 8\}$. Ovakvih brojeva sa najviše deset cifara ima ukupno

$$9^{10} - 1 + 1 = 3\,486\,784\,401.$$

Naime, postoji 9 mogućnosti za svaku od deset cifara, pri čemu se broj sa manje od deset cifara dobija tako sto se na njegov početak stavi potreban broj nula. Razlog za "$-1+1$" u gornjem izrazu je što najpre izostavljamo broj sastavljen od svih deset nula, a zatim dodajemo broj 10^{10}.

Sada vidimo da brojeva koji sadrže cifru 9 u svom zapisu ima

$$10^{10} - 9^{10} = 6\,513\,215\,599,$$

znatno više nego brojeva koji ne sadrže cifru 9. ■

UREDJENI IZBORI BEZ PONAVLJANJA

Neka je $f\colon \{1,2,\ldots,n\} \mapsto M$ preslikavanje koje odgovara uredjenom izboru elemenata iz skupa M. Kada je ponavljanje elemenata dozvoljeno, moguće je izabrati isti element dva puta, tako da važi $f(r) = f(s)$ za različite r i s iz $\{1,2,\ldots,n\}$. Ako ponavljanje nije dozvoljeno, tada je $f(r) \neq f(s)$ za svako $r \neq s$, pa vidimo da uredjenim izborima elemenata bez ponavljanja odgovaraju *injektivna* preslikavanja (injektivna preslikavanja se nazivaju još i *"1-1"preslikavanja*).

TEOREMA 2.2.6 Neka je N skup sa n elemenata i neka je M skup sa m elemenata, $n, m \geqslant 0$. Broj svih injektivnih preslikavanja $f\colon N \mapsto M$ jednak je

$$\prod_{i=0}^{n-1}(m-i) = m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1).$$

Dokaz. Dokaz izvodimo indukcijom po n. Prazno preslikavanje je injektivno, pa stoga za $n = 0$ postoji tačno jedno injektivno preslikavanje, i ovo se slaže sa dogovorom da se vrednost praznog proizvoda definiše kao 1. Znači, formula važi za $n = 0$.

Iz Teoreme 2.1.2 znamo da ne postoji injektivno preslikavanje za $n > m$ i ovo se takodje slaže sa gornjom formulom (jer se tada u njoj pojavljuje činilac 0).

Posmatrajmo sada skup N sa n elemenata, $n \geqslant 1$, i skup M sa m elemenata, $m \geqslant n$. Fiksirajmo element $a \in N$ i izaberimo proizvoljno vrednost $f(a) \in M$ na jedan od m mogućih načina. Preostaje nam da izaberemo injektivno preslikavanje iz $N \setminus \{a\}$ u $M \setminus \{f(a)\}$. Po induktivnoj hipotezi, postoji $(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)$ mogućnosti za ovaj izbor, pa stoga vidimo da postoji ukupno $m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)$ injektivnih preslikavanja $f\colon N \mapsto M$. □

I ovde bi mogla da ide slika nalik prethodnima!!!

PRIMER 2.2.7 Klub ima 25 članova. Koliko ima načina da se izaberu predsednik, potpredsednik, sekretar i blagajnik kluba?

Rešenje. Predsednik kluba može da se izabere na 25 načina, izmedju preostalih osoba potpredsednik može da se izabere na 24 načina, sekretar na 23 i, konačno, blagajnik na 22 načina, tako da je broj različitih izbora jednak broju uredjenih izbora bez ponavljanja 4 osobe iz skupa sa 25 osoba, tj.

$$25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303\,600.$$

■

PRIMER 2.2.8 U kampanji pred predsedničke izbore, kandidat K treba da obidje sedam od petnaest gradova u Srbiji. Da bi postigao što bolji efekat pred izbore, kandidat je izabrao da svoju kampanju završi u Beogradu. Na koliko različitih načina se može realizovati kampanja?

Rešenje. S obzirom da je poslednji grad u kampanji već izabran, kandidat K u stvari treba da izabere prvih šest gradova koje će obići od preostalih četrnaest gradova u Srbiji. Kako je bitan redosled obidjenih gradova, broj ovih izbora jednak je

$$14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 2\,162\,160.$$

■

PERMUTACIJE

Bijektivno preslikavanje konačnog skupa X na samog sebe naziva se *permutacija* skupa X.

PRIMER 2.2.9 Primer permutacije skupa $\{1, 2, \ldots, 5\}$ je funkcija α definisana pomoću

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Skraćeno, ovu permutaciju ćemo pisati kao 24513.

Permutacija konačnog skupa kao bijektivno preslikavanje je ujedno i injekcija, što znači da permutacija predstavlja poseban slučaj uredjenog izbora elemenata bez ponavljanja kod koga se bira svih n od n elemenata. U skladu sa Teoremom 2.2.6, imamo sledeću direktnu posledicu.

POSLEDICA 2.2.10 Broj permutacija skupa X sa n elemenata jednak je

$$n! = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

□

Broj $n!$ se čita n *faktorijel*. Posebno za $n = 0$ važi $0! = 1$.

NAPOMENA Funkcija $n!$ jako brzo raste, brže od svake eksponencijalne funkcije. Za procenu njene vrednosti koristi se *Stirlingova formula* koja tvrdi da za veliko n važi

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Ova procena je vrlo dobra: na primer, već za $n = 8$ greška je samo $1,04\%$.

PRIMER 2.2.11 Pčela treba da skupi polen sa sedam različitih cvetova pre nego što se vrati u košnicu. Kada pčela uzme polen sa nekog cveta ona se više ne vraća na taj cvet. Na koliko načina ona može da obidje svih sedam cvetova?

Rešenje. Kada jednom skupi polen sa nekog cveta, pčela više nema razloga da se vraća na isti cvet. Zbog toga će pčela obići svaki cvet tačno jedanput, pa je traženi broj jednak broju uredjenih izbora bez ponavljanja 7 od 7 elemenata, odnosno, broju permutacija od 7 elemenata. Stoga je broj mogućih obilazaka jednak 7!=5 040. ■

PRIMER 2.2.12 Koliko ima permutacija cifara 12345678 koje sadrže cifre 123 jednu do druge u tom rasporedu?

Rešenje. Pošto cifre 123 moraju da se pojave kao jedan blok, odgovor možemo dobiti tako što ćemo naći broj permutacija šest objekata, naime, bloka 123 i pojedinačnih cifara 4, 5, 6, 7 i 8. Pošto ovih šest objekata može da se pojavi u proizvoljnom rasporedu, zaključujemo da postoji ukupno 6!=720 permutacija cifara 12345678 u kojima se cifre 123 pojavljuju kao jedan blok. ■

Permutacije se često sreću u matematici i imaju dosta korisnih primena. Evo nekih oblasti gde permutacije igraju važnu ulogu:

- U definiciji algebarskog pojma determinante reda n javlja se suma po svim permutacijama skupa od n elemenata:

  Neka je $A = (a_{ij})$ realna kvadratna matrica reda n (mozhemo je zamishljati kao kavadratnu shemu n sa n u koju je upisano n^2 brojeva). Tada je *determinanta* matrice A, u oznaci $|A|$, $\det(A)$ ili $\det A$, jednaka sledećoj sumi po svim permutacijama iz skupa $S_n = \mathrm{S}ym\,(\mathbb{N}_n)$:

  $$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\,\sigma(1)} \cdot a_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)},$$

  gde $\operatorname{sgn}\sigma$ označava znak permutacije (odnosno parnost permutacije).

  Slična je i definicija kombinatornog pojma permanenta. U slučaju kvadratne matrice reda n jedina razlika je što nema člana $\operatorname{sgn}\sigma$:

  $$\operatorname{per} A = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\,\sigma(1)} \cdot a_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)}.$$

  Permanent možemo izračunati pomoću Laplasovog razvoja po nekoj vrsti ili koloni, koji za razliku od determinanti, kod kojih se javlja član $(-1)^{i+j}$, ima sve članove pozitivne. Laplasov razvoj po elementima i–te vrste za permanent glasi:

$$\mathrm{per}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\mathrm{per}(A_{ij}) = a_{i1}\,\mathrm{per}(A_{i1}) + a_{i2}\,\mathrm{per}(A_{i2}) + \ldots + a_{in}\,\mathrm{per}(A_{in}),$$

gde je n red matrice A, a A_{ij} matrice koje se dobijaju od matrice A izbacivanjem i-te vrste i j-te kolone. Slično imamo Laplasov razvoj po elementima j–te kolone: $\mathrm{per}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\mathrm{per}(A_{ij})$.

Za ilustraciju rada sa permanentima videti Zadatak 2.2.19, kao i Primer 3.2.41 iz poglavlja "Rekurentne jednačine"(tu se permanent koristi za prebrojavanje permutacija sa ograničenjima). Više o permanentima možete naučiti iz kompletne knjige Henrika Minka (eng. Henryk Minc) o njima, [21].

- Grupe permutacija, sa slaganjem funkcija kao operacijom, predstavljaju jedan od osnovnih predmeta proučavanja u teoriji grupa, s obzirom da se svaka konačna grupa može utopiti u neku grupu permutacija.

  Grupe permutacija, kao i orbite permutacija čine osnove primene terije grupa u Kombinatorici. Klasični rezultati ove oblasti su Burnsajdova (eng. Burnside) teorema, Frobenijusova (eng. Frobenius) lema i Poljine (madj. Pólya) teoreme prebrojavanja. Pomoću ovih tvrdjenja moguće je izvršiti prebrojavanje (enumeraciju) znatnog broja veoma složenih kombinatornih objekata, ali one nalaze i primenu u teoriji grafova (npr. za odredjivanje broja neizomorfnih grafova).

  Pored toga, osnovni razlog za nemogućnost opšteg algebarskog rešenja jednačine petog stepena leži u osobinama grupe svih permutacija skupa sa pet elemenata.

- Permutacije se koriste kod projektovanja i proučavanja algoritama za sortiranje. Na primer, pomoću permutacija se može pokazati da svaki algoritam za sortiranje koji u svom radu koristi samo medjusobno poredjenje po dva elementa niza ne može da se, u opštem slučaju, izvrši za manje od $cn \log n$ koraka za neku konstantu $c > 0$.

- Raspored karata u špilu predstavlja jednu permutaciju karata. Mešanjem karata se pritom od jedne permutacije dobija druga permutacija karata. U profesionalnom kartanju se proces mešanja karata matematički proučava pomoću svojstava permutacija da bi odgovorilo na razna pitanja, kao na primer: Polazeći od nepromešanog špila, koliko je puta potrebno mešati karte deljenjem na dva dela i njihovim spajanjem (ako ste gledali bilo koji film o Las Vegasu, onda sigurno znate kako izgleda ovakvo mešanje karata) da bi špil bio potpuno izmešan?

- Permutacije se mogu iskoristiti i u matematičkoj estetici. Na slici 2.4 je prikazano Steinhaus-Johnson-Trotter tkanje. Ako pažljivo posmatrate, videćete da vertikalni preseci ovog tkanja predstavljaju sve permutacije konaca kojima je tkano, pri čemu se svake dve susedne permutacije razlikuju u samo dve susedne pozicije (to je "X" izmedju dva susedna vertikalna preseka).

Slika 2.4: Steinhaus-Johnson-Trotter tkanje različitim koncima.

Pored uobičajenog zapisa permutacije kao funkcije postoji i *ciklusni zapis* permutacije, koji je pogodniji u nekim primenama. Kako se dobija ciklusni zapis permutacije?

Primetimo da za permutaciju $\alpha = 24513$ važi

$$\alpha(1) = 2, \quad \alpha(2) = 4, \quad \alpha(4) = 1.$$

Permutacija α šalje element 1 u 2, 2 u 4 i 4 nazad u 1, i tada kažemo da ovi elementi čine *ciklus* (1 2 4) dužine 3. Slično, elementi 3 i 5 čine ciklus (3 5) dužine 2, pa je ciklusni zapis ove permutacije

$$\alpha = (1\ 2\ 4)(3\ 5).$$

Ciklusni zapis za proizvoljnu permutaciju π može da se dobije pomoću sledećeg postupka, koji se ponavlja sve dok svi elementi ne budu rasporedjeni u cikluse:

> Izabrati proizvoljan element a koji još nije rasporedjen u neki ciklus. Novi ciklus čine elementi
>
> $$(a \;\; \pi(a) \;\; \pi(\pi(a)) \;\; \pi(\pi(\pi(a))) \;\; \ldots \;\; \pi^{k-1}(a))$$
>
> koje redjamo sve dok ne dodjemo do najmanjeg prirodnog broja k za koji važi $\pi^k(a) = a$.

Postoje dva načina da promenimo ciklusni zapis bez uticaja na samu permutaciju. Najpre, svaki ciklus može da počne bilo kojim od svojih elemenata — na primer, (7 8 2 1 3) i (1 3 7 8 2) predstavljaju isti ciklus. Drugo, poredak ciklusa nije važan — na primer, (1 2 4)(3 5) i (3 5)(1 2 4) predstavljaju istu permutaciju. Bitni su podela elemenata skupa na cikluse, kao i njihov poredak unutar ciklusa, i oni su jedinstveno odredjeni ciklusnim zapisom.

Ciklusni zapis nam može dati korisne informacije o permutaciji.

PRIMER 2.2.13 Karte označene brojevima 1 do 12 poredjane su kao što je prikazano dole levo. Karte se skupljaju po vrstama i zatim se ponovo dele, ali po kolonama umesto po vrstama, tako da se dobija raspored kao dole desno.

1	2	3		1	5	9
4	5	6		2	6	10
7	8	9		3	7	11
10	11	12		4	8	12

Koliko puta mora da se izvrši ovaj postupak pre nego što se karte ponovo nadju u početnom rasporedu?

Rešenje. Neka je π permutacija koja predstavlja postupak premeštanja karata, tako da je $\pi(i) = j$ ako se karta j pojavljuje na mestu koje je pre premeštanja zauzimala karta i. Ako π predstavimo pomoću ciklusa dobijamo

$$\pi = (1)(2\ 5\ 6\ 10\ 4)(3\ 9\ 11\ 8\ 7)(12).$$

Ciklusi (1) i (12) znače da karte 1 i 12 sve vreme ostaju na svojim mestima. Preostala dva ciklusa imaju dužinu 5, tako da će se posle pet ponavljanja postupka sve karte naći na svojim početnim mestima. (Probajte.) Drugim rečima $\pi^5 = id$, gde π^5 predstavlja petostruko ponavljanje permutacije π, a id označava identičnu permutaciju, definisanu sa $id(j) = j$. ■

ZADACI

2.2.1 U radnji postoji k različitih vrsta razglednica, koje treba poslati prijateljima, kojih ima n.
a) Na koliko načina je moguće svakom prijatelju poslati tačno jednu razglednicu?
b) Koliko ima načina ako svakom prijatelju treba poslati različitu razglednicu?
c) Od svake vrste razglednica je kupljena tačno po jedna. Na koliko načina je moguće poslati razglednice prijateljima (prijatelj može dobiti bilo koji broj razglednica, uključujući i 0)?

2.2.2 Komitet od devet članova treba da izabere predsednika, sekretara i blagajnika. Koliko mogućih izbora postoji?

2.2.3 Odrediti broj nizova dužine r koji se mogu formirati od prvih 7 slova azbuke, ako je **a)** $r = 4$; **b)** $r = 9$ i slova **1**° mogu da se ponavljaju; **2**° ne mogu da se ponavljaju.

2.2.4 Odrediti broj načina da se rasporedi m žena i n muškaraca ($m < n$) za okruglim stolom, tako da nikoje 2 žene ne sede jedna do druge.

2.2.5 Da li medju brojevima $1, 2, \ldots, 9999999$ ima više onih koji sadrže cifru 5 u decimalnom zapisu ili onih koji je ne sadrže?

2.2.6 Neka je dat skup $S = \{s, i, c, g\}$. Koliko ima **a)** relacija u S; **b)** relacija koje nisu simetrichne u S; **c)** antisimetrichnih relacija u S?

2.2.7 Koliko se binarnih relacija može definisati na skupu sa n elemenata? Koliko postoji: **a)** refleksivnih, **b)** simetričnih, **c)** refleksivnih i simetričnih relacija?

2.2.8 Odrediti broj reči dužine n koje se mogu formirati od slova A, B, C, D i E, koje sadrže paran broj slova A. (Reči ne moraju imati neko značenje.)

2.2.9 U prizemlju zgrade od 7 spratova u lift su ušli Aca, Dušan, Luka, Marija i Nataša. Na koliko načina se lift može isprazniti tako da ni u jednom trenutku muškarac i žena ne budu sami u liftu?

2.2.10 Na koliko načina se može postaviti osam topova na šahovsku tablu tako da se oni medjusobno ne napadaju?

2.2.11 Ako je $n \geqslant 2$, koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u kojima su brojevi 1 i 2 susedni?

2.2.12 Napisati ciklusni zapis za permutaciju $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 4 & 6 & 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

2.2.13 Odrediti red permutacije $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 7 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}$.

2.2.14 Preferans špil od 32 karte je podeljen u dva jednaka dela i promešan *preplitanjem*, tako da ako je originalni poredak karata bio $1, 2, 3, 4, \ldots$, novi poredak je $1, 17, 2, 18, \ldots$. Koliko puta treba primeniti ovakvo mešanje da bi se špil vratio u originalni poredak?

2.2.15 Odrediti sve moguće relacije totalnog poretka nad skupom **a)** $S = \{1, 2, 3\}$; **b)** $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Koliko ih ukupno ima?

2.2.16 Koliko permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ ima samo jedan ciklus?

2.2.17 Koliko ima permutacija p skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ za koje je $p^2 = id$, $p \neq id$?

2.2.18 Kvadratni koren permutacije p je permutacija q tako da važi $p = q^2$. Naći formulu za broj kvadratnih korena permutacije p. Kakve permutacije imaju jedinstveni kvadratni koren?

2.2.19 Odrediti permanente sledećih matrica:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; **b)** $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; **c)** $C = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 & \ldots & 1 \cdot n \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & \ldots & 2 \cdot n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n \cdot 1 & n \cdot 2 & \ldots & n \cdot n \end{bmatrix}$;

d) J_n; **e)** $J_n - I_n$,

gde I_n i J_n predstavljaju jediničnu matricu reda n i matricu čiji su svi elementi jednaki 1 reda n.

2.3 GENERISANJE PERMUTACIJA

S obzirom na važnost permutacija kao kombinatornih objekata, u ovom delu ćemo se baviti njihovim generisanjem pomoću računara. Konkretno, odgovorićemo na sledeća pitanja:

a) Kako generisati sve permutacije n elemenata?

b) Kako generisati permutaciju sa datim rednim brojem?

c) Kako generisati slučajnu permutaciju n elemenata?

Primetimo da prva dva pitanja implicitno pretpostavljaju postojanje poretka na skupu permutacija (kako bismo inače znali koja je permutacija prva, koja k-ta, a koja poslednja?). Stoga, da bismo odgovorili na ova pitanja, neophodno je da najpre uvedemo relaciju poretka na skupu svih permutacija. Postoji više različitih načina da se definiše ovakva relacija, a najprirodniji od njih je *leksikografski poredak* permutacija.

DEFINICIJA 2.3.1 Permutacija $a_1a_2\dots a_n$ prethodi permutaciji $b_1b_2\dots b_n$ u leksikografskom poretku ako za neko k, $1 \leqslant k \leqslant n$, važi da je $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $\dots$, $a_{k-1} = b_{k-1}$, dok je $a_k < b_k$.

Drugim rečima, permutacija $a_1a_2\dots a_n$ prethodi permutaciji $b_1b_2\dots b_n$ (u leksikografskom poretku) ako je, na prvoj poziciji (sleva) na kojoj se permutacije razlikuju, broj u prvoj permutaciji manji od broja u drugoj permutaciji.

PRIMER 2.3.2 Permutacija 24135 skupa $\{1,2,3,4,5\}$ prethodi permutaciji 24351, jer se permutacije slažu na prve dve pozicije, dok je na trećoj poziciji broj 1 u prvoj permutaciji manji od broja 3 u drugoj permutaciji.

Slično, permutacija 35421 prethodi permutaciji 41235, jer već na prvoj poziciji imamo da je broj 3 u prvoj permutaciji manji od broja 4 u drugoj permutaciji. ■

PRIMER 2.3.3 Prva permutacija u leksikografskom poretku skupa $\{1,2,\dots,n\}$ je permutacija $123\dots n$, a poslednja je permutacija $n\dots 321$. ■

GENERISANJE SVIH PERMUTACIJA

Algoritam za generisanje svih permutacija skupa $\{1,2,3,\dots,n\}$ se zasniva na proceduri koja za datu permutaciju $a_1a_2\dots a_n$ generiše sledeću permutaciju u leksikografskom poretku. U tom slučaju, svih $n!$ permutacija će biti generisano ako podjemo od permutacije $123\dots n$ i zatim $n!-1$ puta pozovemo proceduru za generisanje sledeće permutacije.

Kako radi ova procedura? Pretpostavimo najpre da je $a_{n-1} < a_n$ u permutaciji $a_1a_2 \ldots a_{n-1}a_n$. Zamenimo mesta a_{n-1} i a_n da bismo dobili veću permutaciju $a_1a_2 \ldots a_na_{n-1}$. Nijedna druga permutacija ne može da sledi permutaciju $a_1a_2 \ldots a_{n-1}a_n$, a da prethodi permutaciji $a_1a_2 \ldots a_na_{n-1}$. Na primer, sledeća permutacija posle 423156 je 423165. S druge strane, ako je $a_{n-1} > a_n$, onda se sledeća permutacija ne može dobiti zamenom mesta ovih elemenata. Posmatrajmo stoga poslednja tri elementa. Ako je $a_{n-2} < a_{n-1}$, tada se poslednja tri elementa mogu prerasporediti tako da se dobije leksikografski sledeća permutacija: manji od brojeva a_{n-1} i a_n koji je veći od a_{n-2} stavimo na poziciju $n-2$, a zatim a_{n-2} i preostali broj postavimo u rastući poredak na pozicijama $n-1$ i n. Na primer, sledeća permutacija posle 423165 je 423516.

S druge strane, ako je $a_{n-2} > a_{n-1}$ (i $a_{n-1} > a_n$), tada se veća permutacija ne može dobiti zamenom mesta ovih elemenata. Na osnovu ovoga, može se dobiti opšti metod za nalaženje leksikografski sledeće permutacije: najpre, pronadjimo poziciju j tako da je $a_j < a_{j+1}$ i $a_{j+1} > a_{j+2} > \ldots > a_n$; zatim, na poziciju j stavimo najmanji od brojeva $a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_n$ koji je veći od a_j, a onda a_j i preostale brojeve poredjamo na pozicijama $j+1$ do n u rastućem poretku. Pseudo-kod ove procedure je dat u nastavku (tu je **swap** procedura koja menja vrednosti 2 broja).

```
procedure sledecapermutacija(a1 a2 ... an)
      // a1 a2 ... an je permutacija {1, 2, ..., n} različita od n ... 21
j := n − 1
while aj > aj+1
   j := j − 1
// po izlazu iz petlje j je najveći indeks sa aj < aj+1

k := n
while aj > ak
   k := k − 1
// po izlazu iz petlje ak je najmanji broj veći od aj sa k > j

swap(aj, ak)

// preuredi brojeve aj+1 ... an u rastući poredak
r := n
s := j + 1
while r > s
   begin
      swap(ar, as)
      r := r − 1
      s := s + 1
   end
end procedure
```

PRIMER 2.3.4 Koja je sledeća permutacija u leksikografskom poretku posle 42758631?

Rešenje. Poslednji par brojeva u ovoj permutaciji za koje je $a_j < a_{j+1}$ je $a_4 = 5$ i $a_5 = 8$. Najmanji broj veći od $a_4 = 5$ koji se nalazi iza njega je $a_6 = 6$. Zbog toga broj 6 dolazi na 4. poziciju, a brojevi $5, 8, 3$ i 1 se rasporedjuju na poslednje četiri pozicije u rastućem poretku. Prema tome, leksikografski sledeća permutacija je 42761358. ■

PRIMER 2.3.5 Generisati permutacije skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ u leksikografskom poretku.

Rešenje. Permutacije su date u sledećoj tabeli, poredjane po vrstama:

1234	1243	1324	1342	1423	1432
2134	2143	2314	2341	2413	2431
3124	3142	3214	3241	3412	3421
4123	4132	4213	4231	4312	4321

■

GENERISANJE ODREDJENE PERMUTACIJE

U slučaju da želimo da odredimo k-tu permutaciju u leksikografskom poretku, gde je $1 \leqslant k \leqslant n!$, opet je moguće primeniti gornju proceduru, tako što ćemo poći od permutacije $12\dots n$ i pozvati proceduru $k-1$ puta. Medjutim, postoji i jednostavniji način od toga.

Naime, jasno je da u leksikografskom poretku:

- prvih $(n-1)!$ permutacija počinje brojem 1,
- sledećih $(n-1)!$ permutacija počinje brojem 2,
- sledećih $(n-1)!$ permutacija počinje brojem 3, itd.

Stoga vidimo da će k-ta permutacija $a_1a_2\dots a_n$ počinjati brojem

$$a_1 = \left\lceil \frac{k}{(n-1)!} \right\rceil,$$

gde $\lceil x \rceil$ označava najmanji ceo broj veći ili jednak x (na primer, $\lceil 3,5 \rceil = 4$, $\lceil -3,5 \rceil = -3$, $\lceil 2 \rceil = 2$). Štaviše, ostatak permutacije $a_2 \dots a_n$ će predstavljati k'-tu permutaciju u leksikografskom poretku svih permutacija preostalih elemenata, gde je

$$k' = k - (a_1 - 1)(n-1)!.$$

Sada možemo induktivno da primenimo gornje zapažanje: permutacija $a_2 \dots a_n$ će počinjati $\left\lceil \frac{k'}{(n-2)!} \right\rceil$-elementom po redu iz rastućeg poretka preostalih elemenata. Treći, četvrti i ostale elemente permutacije možemo da odredimo na sličan način.

Ovakvom postupku odgovara rekurzivna procedura *permutacijaporedu*(k,m), čiji je pseudo-kod dat u nastavku. Promenljiva m predstavlja poziciju elementa permutacije koji se odredjuje u tom pozivu procedure. Pretpostavlja se da je a globalno definisani celobrojni niz, a n globalno definisani ceo broj.

```
procedure permutacijaporedu(k,m)
a[m] := ⌈k/(n−m)!⌉
if m < n then
  begin
    k' := k − (a[m] − 1)(n − m)!
    permutacijaporedu(k', m + 1)
    for i := m + 1 to n
      if a[i] ⩾ a[m] then
        a[i] := a[i] + 1
  end
end procedure
```

for petlja u gornjem pseudo-kodu zahteva dodatno objašnjenje. Naime, u slučaju da je $n > 1$ poziv procedure *permutacijaporedu*(k',$m+1$) će vratiti k'-tu permutaciju $a_{m+1}\dots a_n$ skupa $\{1, 2, \dots, n-1\}$. Kako je nama, u stvari, potrebna k'-ta permutacija skupa $\{1, \dots, a_m-1, a_m+1, \dots, n\}$, rešenje se sastoji u tome da, nakon rekurzivnog poziva, sve elemente permutacije $a_{m+1}\dots a_n$ koji su veći ili jednaki a_m uvećamo za 1.

PRIMER 2.3.6 Koja je 17. permutacija u leksikografskom poretku permutacija skupa $\{1, 2, 3, 4\}$?

Rešenje. Prvi element tražene permutacije je

$$a_1 = \left\lceil \frac{17}{3!} \right\rceil = 3,$$

a u ostatku postupka tražimo k'-tu permutaciju u leksikografskom poretku permutacija skupa $\{1, 2, 4\}$, gde je

$$k' = 17 - 2 \cdot 3! = 5.$$

Sada je

$$a_2 = \left\lceil \frac{5}{2!} \right\rceil = 3,$$

što znači da je element na drugoj poziciji permutacije u stvari treći element u rastućem poretku elemenata 1,2,4, a to je broj 4. Dalje je

$$k' = 5 - 2 \cdot 2! = 1,$$

što znači da tražimo leksikografski prvu permutaciju elemenata skupa $\{1, 2\}$, a to je permutacija 12.

Prema tome, tražena 17. permutacija je 3412. ■

GENERISANJE SLUČAJNE PERMUTACIJE

Konačno, ako želimo da odredimo slučajnu permutaciju skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, tada možemo da primenimo sledeću proceduru:

```
procedure slucajnapermutacija(a,n)
for i := 1 to n
   a[i] := i

for k := n downto 1
   swap(a[k], a[rand(k)])
end procedure
```

U prethodnoj proceduri koristimo sledeće 2 procedure: **swap** procedura menja vrednosti 2 broja, dok **rand**(k) daje slučajan broj izmedju 1 i k, uniformno rasporedjen. Prema tome, procedura najpre od svih n elemenata slučajno bira element koji će pojaviti na n-toj poziciji permutacije, a zatim od preostalih $n-1$ elemenata sa prvih $n-1$ pozicija slučajno bira element za $(n-1)$-vu poziciju permutacije, i tako redom dok svi elementi permutacije ne budu slučajno izabrani. Ova procedura se prvi put pojavila u sledećim člancima:

- R. Durstenfeld, *Algorithm 235: Random permutations*, CACM (1964), 420.
- G. de Balbine, *Note on random permutations*, Math. Comput. 21 (1967), 710–712.

NAPOMENA Na adresi

`http://www.theory.cs.uvic.ca/~cos/cos.html`

nalazi se *Combinatorial Object Server*, sajt koji sadrži implementacije algoritama za generisanje mnogih vrsta kombinatornih objekata (ne samo permutacija!) prostim navodjenjem njihovih parametara u okviru odgovarajućih web strana. Istražite ovaj pažnje vredan sajt! (P.S. Kodovi implementacija algoritama ipak nisu dostupni).

ZADACI

2.3.1 Rasporediti sledeće permutacije skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ u leksikografski redosled:

234561, 231456, 165432, 156423, 543216, 541236, 231465, 314562,

432561, 654321, 654312, 435612.

2.3.2 Ispisati sve (ima ih 24) različite permutacije skupa $X_4 = \{A, E, M, T\}$ i to u leksikografskom poretku.

2.3.3 Odrediti sve 2-slovne reči sa slovima iz skupa $\{a, b, c, d\}$ u leksikografskom poretku.

2.3.4 Odrediti broj reči koje se mogu dobiti od slova
a) M, A, T, R, I, C, A; **b)** K, V, A, D, R, A, T, N, A.
Za svaku od te 2 reči odrediti koja je po redu medju svim rečima od tih slova koje su date u leksikografskom poretku.

2.3.5 Odrediti **a)** 28-mu; **b)** 75-tu; **c)** 100-tu permutaciju skupa $\{a, b, c, d, e\}$.

2.3.6 Odrediti za svaku permutaciju koja je po redu, kao i koja joj prethodi i koja sledi nakon nje u leksikografskom redosledu:
a) 1342; **b)** 45321; **c)** 13245; **d)** 654321; **e)** 23587416.

2.3.7 Odrediti sve 3-permutacije (uredjene izbore sa 3 elementa) skupa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2.4 NEUREDJENI IZBORI ELEMENATA

NEUREDJENI IZBORI BEZ PONAVLJANJA

U jednoj od prethodnih sekcija smo za matematičko definisanje pojma uredjenog izbora k elemenata konačnog skupa X koristili preslikavanje f iz uredjenog skupa $\{1, 2, \ldots, k\}$ u skup X. Na ovaj način, bili smo u mogućnosti da kažemo da je element $f(1)$ izabran prvi, element $f(2)$ drugi, a element $f(k)$ poslednji.

S druge strane, kod neuredjenog izbora elemenata skupa X nije važno koji je element izabran prvi, a koji poslednji, tako da nema potrebe uvoditi preslikavanja. S obzirom da sada razmatramo neuredjene izbore elemenata bez ponavljanja vidimo da oni predstavljaju k-točlane podskupove skupa X.

DEFINICIJA 2.4.1 Neka je X skup, a k nenegativan ceo broj. Simbol

$$\binom{X}{k}$$

označava skup svih k-točlanih podskupova skupa X.

Na primer, $\binom{\{a,b,c\}}{2} = \{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$.

DEFINICIJA 2.4.2 Neka su $n \geqslant k$ nenegativni celi brojevi. Binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ je funkcija promenljivih n i k data pomoću

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)}{k!}.$$

Primetimo da simbol $\binom{x}{k}$ sada ima dva značenja, u zavisnosti od toga da li je x skup ili broj. Opravdanje za ovo preklapanje simbola nalazi se u sledećoj teoremi.

TEOREMA 2.4.3 Broj neuredjenih izbora k elemenata bez ponavljanja skupa X, tj. broj k-točlanih podskupova skupa X jednak je

$$\left|\binom{X}{k}\right| = \binom{|X|}{k}.$$

Dokaz. Neka je $n = |X|$. Prebrojaćemo *uredjene* izbore k elemenata skupa X bez ponavljanja na dva načina. S jedne strane, iz Teoreme 2.2.6 znamo da je ovaj broj jednak $n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$. S druge strane, od svakog k-točlanog podskupa $M \in \binom{X}{k}$ uredjivanjem njegovih elemenata možemo da dobijemo $k!$ različitih uredjenih izbora k elemenata i svaki uredjeni izbor k elemenata može da se dobije samo iz jednog k-točlanog podskupa M na ovaj način. Prema tome,

$$n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = k!\left|\binom{X}{k}\right|.$$

$\square$

NAPOMENA Posebne vrednosti binomnih koeficijenata su $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ i $\binom{n}{n} = 1$. Primetimo inače da se definicija 2.4.2 može proširiti na sve realne vrednosti n, tako da možemo da pišemo

$$\binom{-2,5}{3} = \frac{(-2,5)\cdot(-3,5)\cdot(-4,5)}{3\cdot 2\cdot 1} = -6,5625.$$

Ovu definiciju možemo da proširimo i na negativne vrednosti k i na vrednosti $n > k$ dogovorom da je

$$\binom{n}{k} = 0 \qquad \text{za} \quad k < 0 \quad \text{i} \quad k > n.$$

PRIMER 2.4.4 Tokom noći, lopov je upao u galeriju sa 20 umetničkih dela. Medjutim, on u svom rancu ima mesta za tačno 3 predmeta. Na koliko načina on može da izabere predmete koje će ukrasti?

Rešenje. Lopov treba da napravi neuredjeni izbor 3 elementa bez ponavljanja iz skupa od 20 elemenata. Po Teoremi 2.4.3, on to može da uradi na

$$\binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1\,140$$

načina. ■

PRIMER 2.4.5 Iz odeljenja od 9 dečaka i 11 devojčica treba izabrati komisiju za izbor najlepše djačke torbe koja će se sastojati od 3 dečaka i 4 devojčice. Na koliko načina je moguće formirati ovakvu komisiju?

Rešenje. Po principu proizvoda, ovaj broj je jednak proizvodu broja $\binom{9}{3}$ neuredjenih izbora 3 elementa bez ponavljanja iz skupa od 9 elemenata i broja $\binom{11}{4}$ neuredjenih izbora 4 elementa bez ponavljanja iz skupa od 11 elemenata:

$$\binom{9}{3} \cdot \binom{11}{4} = 84 \cdot 330 = 27\,720.$$

■

NEUREDJENI IZBORI SA PONAVLJANJEM

Ako dozvolimo ponavljanje u neuredjenom izboru elemenata skupa X, onda on više ne predstavlja običan podskup skupa X.

PRIMER 2.4.6 **a)** Koliko ima načina da se izaberu tri novčića iz kase koja sadrži novčiće od 1, 2, 5 i 10 dinara, ukoliko redosled biranja novčića nije bitan već samo broj izabranih novčića svake vrste i ako u kasi postoji bar tri novčića svake vrste?

b) Koliko ima načina da se izaberu pet novčanica iz kase koja sadrži novčanice od 10, 20, 50, 100, 200, 500 i 1000 dinara? Kao i u prethodnom pitanju, i u ovom slučaju redosled biranja novčanica nije bitan, novčanice iste vrednosti se ne mogu medjusobno razlikovati, a u kasi postoji bar pet novčanica svake vrste.

Rešenje. **a)** Postoji 20 načina, prikazanih u sledećoj tabeli:

1d 1d 1d	1d 1d 2d	1d 1d 5d	1d 1d 10d
	1d 2d 2d	1d 2d 5d	1d 2d 10d
		1d 5d 5d	1d 5d 10d
			1d 1d 10d
	2d 2d 2d	2d 2d 5d	2d 2d 10d
		2d 5d 5d	2d 5d 10d
			2d 10d 10d
		5d 5d 5d	5d 5d 10d
			5d 10d 10d
			10d 10d 10d

b) U ovom slučaju, broj mogućih izbora je dovoljno veliki da bi bilo vrlo nepraktično sve ih prikazati. Zbog toga ćemo detaljnije proučiti naš problem.

S obzirom da redosled izabranih novčanica nije bitan, kao i da se svaka vrsta novčanica može izabrati do pet puta, u ovom problemu treba da nadjemo broj neuredjenih izbora 5 elemenata sa ponavljanjem iz skupa od 7 elemenata.

Pretpostavimo da kasa ima sedam pregrada, po jednu za svaku vrstu novčanica. Na slici je ilustrovan izbor jedne novčanice od 50 dinara, dve novčanice od 200 dinara i po jedne novčanice od 500 dinara i od 1000 dinara:

		•		• •	•	•
10d	20d	50d	100d	200d	500d	1000d

Na sličan način, svaki izbor pet novčanica možemo da predstavimo pomoću pet markera rasporedjenih u pregradama kase. Ako sada obrišemo dno kase sa oznakama vrednosti novčanica, levu ivicu prve pregrade i desnu ivicu poslednje pregrade, vidimo da se svaki izbor pet novčanica može predstaviti pomoću rasporeda pet markera i šest ivica koje odredjuju pregrade kase:

$$| \quad | \bullet | \quad | \bullet \bullet | \bullet | \bullet$$

Broj ovakvih rasporeda jednak je broju izbora pet pozicija za markere od 11 mogućih pozicija, što predstavlja broj neuredjenih izbora 5 elemenata bez ponavljanja iz skupa od 11 elemenata, a on je jednak

$$\binom{11}{5} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 462.$$

■

Uopštenjem gornjeg pristupa možemo dokazati sledeću teoremu.

TEOREMA 2.4.7 Broj neuredjenih izbora k elemenata sa ponavljanjem skupa X jednak je

$$\binom{|X| + k - 1}{k}.$$

Dokaz. Svaki neuredjeni izbor k elemenata sa ponavljanjem skupa X može da se, na jedinstven način, predstavi pomoću niza od k markera i $|X|-1$ ivica. Ivice se koriste da označe pregrade koje odgovaraju pojedinim elementima skupa X, dok svaki marker označava izbor elementa koji odgovara pregradi u kojoj se marker nalazi.

> Na primer, neuredjeni izbor 6 elemenata iz skupa $X = \{a, b, c, d\}$ može da se predstavi pomoću niza od 6 markera i 3 ivice:
>
> $$\bullet \mid \bullet\bullet \mid \quad \mid \bullet\bullet\bullet$$
>
> Ovaj niz označava da je jednom izabran element a, dva puta element b, nijednom element c i tri puta element d.

Slično kao i u primeru, niz od k markera i $|X|-1$ ivica odgovara neuredjenom izboru bez ponavljanja k pozicija za markere od mogućih $|X|+k-1$ pozicija. Zbog toga je traženi broj upravo jednak

$$\binom{|X|+k-1}{k},$$

s obzirom da i svaki niz od k markera i $|X|-1$ ivica odgovara tačno jednom neuredjenom izboru k elemenata sa ponavljanjem skupa X. □

PRIMER 2.4.8 Na koliko načina se 12 istih lopti može rasporediti u 6 različitih kutija?

Rešenje. Broj mogućih rasporeda lopti je jednak broju neuredjenih izbora 12 elemenata sa ponavljanjem iz skupa od 6 elemenata, tj.

$$\binom{6+12-1}{12} = 6\,188.$$

■

PRIMER 2.4.9 Koja je vrednost promenljive k nakon izvršenja sledećeg koda?

```
k := 0
for i1 := 1 to n
   for i2 := 1 to i1
      for i3 := 1 to i2
         ⋮
         for im := 1 to im−1
            k := k + 1
         end for
         ⋮
      end for
   end for
end for
```

Rešenje. Primetimo da je početna vrednost promenljive k jednaka 0 i da se k uvećava za 1 svaki put kada se prodje kroz ugnježdenu petlju sa nizom brojeva i_1, i_2, ..., i_m takvim da je

$$1 \leqslant i_m \leqslant i_{m-1} \leqslant \ldots \leqslant i_2 \leqslant i_1 \leqslant n.$$

Broj ovakvih nizova brojeva jednak je broju načina da se m celih brojeva izabere sa ponavljanjem iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. (S jedne strane, niz i_1, i_2, ..., i_m predstavlja izbor m brojeva iz $\{1, 2, \ldots, n\}$; s druge strane, svaki izbor m brojeva iz $\{1, 2, \ldots, n\}$, nakon što se uredi u nerastući poredak, predstavlja jedan od traženih nizova.) Sada iz Teoreme 2.4.7 vidimo da će vrednost promenljive k nakon izvršenja koda biti jednaka

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

■

PRIMER 2.4.10 Koliko rešenja ima jednačina

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n,$$

gde su x_1, x_2, ..., x_k nenegativni celi brojevi?

Rešenje. Posmatrajmo skup $X = \{1, 2, \ldots, k\}$. Ako pretpostavimo da, za $1 \leqslant i \leqslant k$, broj x_i označava koliko je puta izabran element i iz skupa X, onda vidimo da svako rešenje $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ gornje jednačine označava tačno jedan neuredjeni izbor n elemenata sa ponavljanjem iz skupa sa k elemenata. Takodje važi i obratno: svaki neuredjeni izbor n elemenata sa ponavljanjem iz skupa sa k elemenata odredjuje tačno jedno rešenje $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ gornje jednačine.

Stoga rešenja jednačine ima koliko i ovakvih neuredjenih izbora, a to je

$$\binom{k+n-1}{n}.$$

■

NAPOMENA Prema Uslovu simetričnosti (Lema 2.6.2) iz odeljka 2.6 Osobine binomnih koeficijenta, imamo da je broj rešenja jednačine $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ jednak $\binom{k+n-1}{n} = \binom{k+n-1}{k-1}$.

PRIMER 2.4.11 Na polici se nalazi n knjiga. Na koliko načina se može izabrati k knjiga sa police, tako da nikoje dve izabrane knjige nisu bile susedne na polici?

Rešenje. Neka x_1 označava broj knjiga na polici ispred prve izabrane knjige, x_i, $2 \leqslant i \leqslant k$, broj knjiga na polici koje se nalaze izmedju $(i-1)$-ve i i-te izabrane knjige, a x_{k+1} broj knjiga na polici iza poslednje izabrane knjige. S obzirom da brojevi x_i, $1 \leqslant i \leqslant k+1$, prebrojavaju sve neizabrane knjige sa police, važi da je

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} = n - k.$$

S druge strane, iz uslova da izabrane knjige nisu bile susedne vidimo da važi

$$x_2, x_3, \ldots, x_k \geqslant 1,$$

dok je

$$x_1, x_{k+1} \geqslant 0.$$

Da bismo izbegli ovakvo izdvajanje posebnih slučajeva, zamislimo da smo na policu dodali još dve nove knjige: jednu ispred prve knjige na polici i jednu iza poslednje knjige na polici. Ako dozvolimo da x_1 i x_{k+1} prebrojavaju i ove dve nove knjige, onda će važiti:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} = n - k + 2,$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_{k+1} \geqslant 1.$$

Neka je sada $y_i = x_i - 1$, $1 \leqslant i \leqslant k+1$. Tada su y_i nenegativni celi brojevi za koje važi da je

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{k+1} = (n - k + 2) - (k + 1) = n - 2k + 1.$$

Iz prethodnog primera vidimo da je broj rešenja poslednje jednačine jednak

$$\binom{n-k+1}{n-2k+1}.$$

Ovo je ujedno i broj mogućih izbora k nesusednih knjiga sa police, s obzirom da niz brojeva y_i, $1 \leqslant i \leqslant k+1$, na jedinstven način odredjuje niz brojeva x_i, $1 \leqslant i \leqslant k+1$, a da on dalje na jedinstven način odredjuje izbor nesusednih knjiga. ■

PERMUTACIJE SA PONAVLJANJEM

Posebnu vrstu izbora čine permutacije familije elemenata, u kojoj se neki od elemenata sadrže više puta. Tada se mora povesti računa kako bi se izbeglo da se isti izbor prebrojava više puta. Razmotrimo sledeći problem:

PRIMER 2.4.12 Koliko različitih reči, uključujući besmislene, može da se sastavi od slova reči ABRAKADABRA?

Rešenje. Iako imamo 11 slova na raspolaganju, neka od njih su ista, tako da odgovor u ovom slučaju **nije** 11!. Naime, sada treba da prebrojimo permutacije familije slova u kojoj se slovo A pojavljuje 5 puta, slova B i R po dva puta, a slova D i K po jedanput. Ovakva permutacija će biti odredjena ukoliko znamo na kojih pet pozicija u reči se nalaze slova A, na koje dve pozicije slova B itd. Pet pozicija za slova A se može izabrati na $\binom{11}{5}$ načina, a zatim se izmedju preostalih šest pozicija dve pozicije za slova B mogu izabrati na $\binom{6}{2}$ načina. Nastavljajući dalje, od preostale četiri pozicije dve pozicije za slova R se može izabrati na $\binom{4}{2}$ načina, a od preostale dve pozicije jedna pozicija za slovo D se može izabrati na $\binom{2}{1}$ načina. Nakon ovoga nam preostaje samo jedna pozicija u reči za slovo K. Sada vidimo da je ukupan broj traženih permutacija jednak

$$\binom{11}{5}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{1} = 83\,160.$$

■

Uopštavajući rešenje gornjeg primera možemo da dokažemo sledeću teoremu.

TEOREMA 2.4.13 Broj permutacija familije sa n elemenata, u kojoj se prvi element sadrži n_1 puta, drugi element n_2 puta, $\ldots$, a k-ti element n_k puta (pri tome važi $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$), jednak je

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdot\ldots\cdot\binom{n-n_1-\ldots-n_{k-2}}{n_{k-1}}\cdot\binom{n_k}{n_k}.$$

Dokaz. Primetimo da postoji $\binom{n}{n_1}$ načina da se n_1 kopija prvog elementa rasporedi izmedju n pozicija u permutaciji. Nakon toga preostaje $n-n_1$ slobodnih pozicija, izmedju kojih n_2 kopija drugog elementa može da se rasporedi na $\binom{n-n_1}{n_2}$ načina, ostavljajući $n-n_1-n_2$ slobodnih pozicija. Nastavljajući na ovaj način rasporedjivanje kopija elemenata, možemo da vidimo da će na kraju kopije k-tog elementa moći da se rasporede na $\binom{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}{n_k} = \binom{n_k}{n_k} = 1$ načina. Po principu proizvoda, broj traženih permutacija je jednak

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdot\ldots\cdot\binom{n-n_1-\ldots-n_{k-2}}{n_{k-1}}\cdot\binom{n_k}{n_k}.$$

□

PRIMER 2.4.14 Uradimo ponovo prethodni primer sa ABRAKADABRA, ali sada na drugi način.

Rešenje. Zamislimo najpre da se sva slova u reči razlikuju, tako da imamo 5 različitih slova A itd. Na primer, možemo da ih učinimo različitim dodajući im indekse: $\mathrm{A_1B_1R_1A_2K_1A_3D_1A_4B_2R_2A_5}$. Sada imamo 11 različitih slova koja mogu da se preurede na 11! različitih načina. Posmatrajmo proizvoljnu reč sačinjenu od "neindeksirane" reči ABRAKADABRA, na primer BAKARADABAR. Od koliko različitih "indeksiranih" reči možemo da dobijemo ovu reč brisanjem indeksa? Indeksi 5 slova A mogu da se rasporede na 5! načina, indeksi 2 slova B mogu da se rasporede (nezavisno) na 2! načina, za 2 slova R takodje imamo 2! mogućnosti i konačno za po jedno slovo K i D imamo po 1! mogućnost. Prema tome, reč BAKARADABAR, kao i bilo koju drugu reč dobijenu od reči ABRAKADABRA, možemo da indeksiramo na 5!2!2!1!1! načina. Broj neindeksiranih reči, što je i rešenje problema, jednak je $\frac{11!}{5!2!2!1!1!}$. ■

Uopštavajući rešenje gornjeg primera uspostavićemo vezu izmedju broja kombinacija koje smo prebrojali na 2 različita načina.

LEMA 2.4.15

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdot\ldots\cdot\binom{n_k}{n_k} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!\cdot\ldots\cdot n_k!}.$$

Rešenje. Pomoću Faktorijelne reprezentacije binomnih koeficijenata (Lema 2.6.1 iz odeljka 2.6 Osobine binomnih koeficijenta) moguće je prikazati multinomijalne koeficijente na znatno jednostavniji način:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} &= \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdot\ldots\cdot\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k} \\
&= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdot\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}\cdot \\
&\quad \ldots\cdot\frac{(n-n_1-\ldots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-\ldots-n_{k-1}-n_k)!} \\
&= \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!\cdot\ldots\cdot n_k!}.
\end{aligned}$$

■

Kako bismo izbegli stalno ponavljanje dugačkog proizvoda binomnih koeficijenata iz prethodne teoreme, ili razlomka sa faktorijalima iz prethodne leme, uvešćemo sledeću definiciju.

DEFINICIJA 2.4.16 Multinomijalni koeficijent $\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ se definiše pomoću

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!\cdot\ldots\cdot n_k!}.$$

Još jedan tip izbora elemenata, čiji se broj predstavlja multinomijalnim koeficijentima, ilustrovan je sledećim primerom.

PRIMER 2.4.17 Na koliko načina se pokerašima Aci, Branku, Cakiju i Dejanu može podeliti po pet karata iz standardnog špila od 52 karte?

Rešenje. Na početku deljenja, Aci se pet karata može podeliti na $\binom{52}{5}$ načina. Branku se tada pet karata može podeliti na $\binom{47}{5}$ načina, s obzirom da je nakon podele karata Aci u špilu ostalo 47 karata. Slično, Cakiju se pet karata može podeliti na $\binom{42}{5}$ načina, a Dejanu na $\binom{37}{5}$ načina. Preostale 32 karte ostaju na stolu. Po principu proizvoda, ukupan broj različitih deljenja je jednak

$$\binom{52}{5}\binom{47}{5}\binom{42}{5}\binom{37}{5}\binom{32}{32} = \binom{52}{5,5,5,5,32}.$$

Ovo je primer koj ilustruje da u jednostavnom kombinatornom problemu možemo dobiti veoma velike rezultate. Kada bismo izračunali ovaj broj dobili bismo zaista ogroman broj: 1 478 262 843 475 644 020 034 240. ■

Prethodni primer predstavlja primer izbora u kome različite objekte treba smestiti u različite kutije: različiti objekti su 52 karte iz špila, a pet različitih kutija se koristi za karte svakog od četiri pokeraša kao i za ostatak špila.

TEOREMA 2.4.18 Broj načina da se n različitih objekata smesti u k različitih kutija, tako da se u kutiji i nalazi n_i objekata za $1 \leqslant i \leqslant k$, jednak je

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}.$$

Iako se do dokaza može doći uopštavanjem rešenja prethodnih primera, mi ćemo ipak iskoristiti zaobilazni put koji će nam pokazati da smo se mi, u stvari, već susreli sa ovim problemom, samo što je on tada imao drugačiju formulaciju.

Dokaz. Ako objekte poredjamo u niz, a kutije označimo brojevima $1,2,\ldots,k$, tada svakom rasporedu objekata po kutijama odgovara tačno jedna permutacija familije brojeva $1,2,\ldots,k$ u kojoj se broj i ponavlja n_i puta.

Naime, datom rasporedu objekata možemo da pridružimo permutaciju sa ponavljanjem koja se dobija tako što se svaki objekat iz niza zameni brojem kutije u koji je on rasporedjen. S druge strane, za datu permutaciju sa ponavljanjem njen pridruženi raspored možemo da odredimo ukoliko j-ti objekat iz niza rasporedimo u kutiju označenu j-tim brojem iz permutacije za $1 \leqslant j \leqslant n$.

Prema tome, ovo pridruživanje predstavlja bijekciju izmedju skupa svih rasporeda objekata u kutije i skupa svih permutacija sa ponavljanjem. Iz Teoreme 2.4.13 sada zaključujemo da je broj rasporeda objekata u kutije jednak

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}.$$

□

ZADACI

2.4.1 Od 16 ljudi, gde su po 4 iz Srbije, Rumunije, Bugarske i Makedonije, treba izabrati 6 u komitet. Koliko ima takvih izbora ako:

a) svaka zemlja mora da bude zastupljena u komitetu;

b) nijedna zemlja ne može imati više od 2 predstavnika u komitetu?

2.4.2 Po šahovskoj tabli kreće se top. On polazi iz donjeg levog ugla table i kreće se, jedno po jedno polje, po najkraćem putu do gornjeg desnog ugla table. Koliko postoji najkraćih puteva?

2.4.3 Koliko postoji permutacija špila od 52 karte u kojima se sva četiri asa nalaze medju prvih 10 karata?

2.4.4 Na koliko načina košarkaški trener može sastaviti ekipu od 5 košarkaša sa dva centra, dva beka i jednim krilom, ako na raspolaganju ima 10 košarkaša, od kojih trojica mogu biti samo centri, trojica samo bekovi, jedan samo krilo, dvojica krilo ili bek, a jedan krilo ili centar?

2.4.5 Na koliko načina se $2n$ vojnika (različitih po visini) može rasporediti u dve vrste tako da je svaki vojnik iz prve vrste niži od vojnika iza njega?

2.4.6 Na koliko načina se 8 istih svezaka, 9 istih olovaka i 10 istih knjiga mogu podeliti trojici učenika, tako da svaki učenik dobije bar po jedan predmet od svake vrste?

2.4.7 U kutiji se nalazi 36 žutih, 27 plavih, 18 zelenih i 9 crvenih kuglica, pri čemu se kuglice iste boje ne razlikuju medjusobno. Na koliko načina se može izabrati 10 kuglica?

2.4.8 Ukrotitelj izvodi 5 lavova i 4 tigra. Na koliko načina ih može rasporediti u vrstu ako tigrovi ne smeju biti jedan pored drugog?

(Svi tigrovi su medjusobno različiti i svi lavovi su medjusobno različiti!)

2.4.9 Dat je konveksan n-tougao, takav da nikoje dve od pravih koje su odredjene temenima n-tougla nisu paralelne i nikoje tri od datih pravih ne seku se u istoj tački, koja nije teme n-tougla. Odrediti broj presečnih tačaka pomenutih pravih koje se nalaze

a) unutar datog n-tougla,

b) van datog n-tougla?

2.4.10 Neka je X skup sa n elemenata. Dokazati da:

a) Postoji skup od $\binom{n}{n^*}$ podskupova skupa X tako da se nijedan od njih ne sadrži u nekom drugom, gde je $n^* = \frac{1}{2}n$ ako je n paran broj i $n^* = \frac{1}{2}(n-1)$ ako je n neparan broj.

b) U svakom skupu od bar $\binom{n}{n^*} + 1$ podskupova skupa X postoje dva različita podskupa tako da se jedan od njih sadrži u drugom.

2.5 GENERISANJE KOMBINACIJA

Kao i permutacije, kombinacije su takodje važni kombinatorni objekti koje je često potrebno konstruisati u praksi pomoću računara. Prvo pitanje na koje ćemo odgovoriti u ovoj sekciji je kako generisati sve kombinacije skupa sa n elemenata, bez obzira na broj elemenata koji te kombinacije sadrže. Medjutim, mnogo interesantniji problemi tiču se generisanja kombinacija koje sadrže k elemenata (tzv. *k-kombinacija*), tako da su glavna pitanja na koja ćemo odgovoriti u ovoj sekciji sledeća:

- Kako generisati sve k-kombinacije skupa sa n elemenata?
- Kako medju $\binom{n}{k}$ ovakvih kombinacija generisati kombinaciju sa datim rednim brojem?
- Kako generisati slučajnu k-kombinaciju?

Pre nego što počnemo sa predstavljanjem algoritama za generisanje, moramo da vidimo kako će se kombinacije predstavljati u memoriji računara. S obzirom da kombinacija u stvari predstavlja podskup datog skupa, jedan način predstavljanja je pomoću niza koji će sadržati sve elemente kombinacije. Drugi, efektniji, način je da kombinaciju, tj. podskup, predstavimo pomoću njegove karakteristične funkcije. Na taj način, svaku kombinaciju skupa sa n elemenata možemo da predstavimo pomoću niza od n bitova jednakih 0 ili 1. Ukoliko kombinacija sadrži k elemenata, tada njena binarna reprezentacija sadrži k bitova jednakih 1.

Sada se sve kombinacije skupa sa n elemenata mogu generisati tako što će se generisati binarne reprezentacije brojeva od 0 do $2^n - 1$, redom, a onda iz njih konstruisati kombinacije. Ako je data binarna reprezentacija broja i, $0 \leqslant i < 2^n - 1$, tada se binarna reprezentacija broja $i + 1$ dobija tako što pronadjemo poslednje pojavljivanje bita 0 u reprezentaciji (svi bitovi nakon toga su jednaki 1), a zatim ovaj bit promenimo u 1, a sve bitove nakon njega u 0. U nastavku je dat pseudo kod za ovu proceduru.

procedure *sledeca_binarna_reprezentacija*(n, $b_1 b_2 \dots b_n$)
    // pretpostavlja se da je $b_1 b_2 \dots b_n \neq 11 \dots 1$
$i := n$
while $b_i = 1$
  begin
    $b_i := 0$
    $i := i - 1$
  end
$b_i := 1$
end procedure

PRIMER 2.5.1 Koja je sledeća binarna reprezentacija nakon 110010111?

Rešenje. Bit 0 se poslednji put pojavljuje na šestom mestu ove reprezentacije. Zbog toga sledeću binarnu reprezentaciju dobijamo tako što na šesto mesto postavimo bit 1, a zatim na sedmo, osmo i deveto mesto postavimo bit 0, dobijajući tako reprezentaciju 110011000. ■

GENERISANJE SVIH k-KOMBINACIJA

Sve k-kombinacije skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ mogu se generisati u leksikografskom poretku takodje pomoću njihovih binarnih reprezentacija: algoritam počinje kombinacijom $\{1, 2, \ldots, k\}$ čija je reprezentacija

$$\underbrace{11\ldots1}_{k}00\ldots0$$

i redom generiše reprezentacije za svaku sledeću kombinaciju sve dok ne stigne do kombinacije $\{n-k+1, \ldots, n-1, n\}$, čija je reprezentacija

$$00\ldots0\underbrace{11\ldots1}_{k}.$$

Glavni sastojak ovog algoritma je procedura za odredjivanje binarne reprezentacije leksikografski sledeće kombinacije. Ova procedura se zasniva na činjenici da je, za bilo koji prefiks $b_1b_2\ldots b_{t-1}1$, $1 \leqslant t < n$, reprezentacija leksikografski prve kombinacije sa tim prefiksom

$$b_1b_2\ldots b_{t-1}1\ 11\ldots100\ldots0,$$

a reprezentacija leksikografski poslednje kombinacije

$$b_1b_2\ldots b_{t-1}1\ 00\ldots011\ldots1. \tag{2.1}$$

Nakon svih tih reprezentacija leksikografski sledeća kombinacija je jednaka

$$b_1b_2\ldots b_{t-1}0\ 111\ldots100\ldots0, \tag{2.2}$$

gde $111\ldots1$ u (2.2) sadrži jednu jedinicu više od $11\ldots1$ u (2.1).

Primetimo da za svaku reprezentaciju, osim za leksikografski poslednju kombinaciju 00...011...1, postoji jedinstveni prefiks $b_1b_2\ldots b_{t-1}1$ za koji ona ima oblik (2.1), tako da ostatak reprezentacije sadrži vezani niz nula, a zatim vezani niz jedinica (tu je bar jedna nula, dok jedinica ne mora ni da bude – tad je broj jedinica u ostatku reprezentacije jednak nuli). Procedura najpre nalazi taj prefiks i zatim odredjuje reprezentaciju leksikografski sledeću kombinacije – to je (2.2): jedinicu sa kraja prefiksa menja u nulu, odmah iza nje redja potreban broj jedinica i na kraju ostatak popunjava nulama. U nastavku je dat pseudo-kod ove procedure.

```
procedure sledeca_kombinacija(n, b1b2...bn)
    // pretpostavlja se da je b1b2...bn ≠ 00...011...1
i := n
while b_i = 1
    i := i − 1
j := n − i        // ovo je broj jedinica na kraju niza
while b_i = 0
    i := i − 1

// traženi prefiks je b1b2...b_{i−1}1
b_i := 0
for k := i + 1 to  i + j + 1
    b_k := 1
for k := i + j + 2 to n
    b_k := 0
end procedure
```

PRIMER 2.5.2 Koja je sledeća kombinacija skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ nakon $\{1, 2, 6, 7\}$?

Rešenje. Binarna reprezentacija kombinacije $\{1, 2, 6, 7\}$ je 1100011. Ona ima oblik (2.1) za prefiks 11, tako da je, prema prethodnoj proceduri, 1011100 reprezentacija leksikografski sledeće kombinacije $\{1, 3, 4, 5\}$. ■

PRIMER 2.5.3 Koja je sledeća kombinacija skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ nakon $\{1, 2, 3, 6\}$?

Rešenje. Binarna reprezentacija kombinacije $\{1, 2, 3, 6\}$ je 1110010. U ovom slučaju, oblik (2.1) se dobija za prefiks 111001 (primetimo da gornja procedura nema ništa protiv da se reprezentacija završava nulom). Sada je 1110001 reprezentacija leksikografski sledeće kombinacije $\{1, 2, 3, 7\}$. ■

NAPOMENA Glavna osobina prethodne procedure je njena jednostavnost. Medjutim, sigurno je da ona nije najbrža moguća. Ukoliko želite da steknete detaljniji uvid u različite i brže pristupe generisanju kombinacija, pročitajte dokument sa adrese

`http://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/fasc3a.ps.gz`,

koji sadrži prilično iscrpnu priču o generisanju kombinacija (na 65 strana) i predstavlja početnu verziju poglavlja koje će se pojaviti u četvrtom tomu sada već klasične serije knjiga *The Art of Computer Programming*, autora Donalda Knutha.

NAPOMENA Jedan od novijih radova u kome se predstavlja brži algoritam za generisanje svih k-kombinacija je:

- Frank Ruskey, Aaron Williams, *Generating combinations by prefix shifts*, COCOON 2005, The Eleventh International Computing and Combinatorics Conference, Kunming, China, 2005, Lecture Notes in Computer Science, 3595 (2005) 570-576.

(Jeste, Frank Ruskey je autor sajta *Combinatorial Object Server.*) Ovaj rad se može naći i na adresi

`http://www.cs.uvic.ca/~ruskey/Publications/Coollex/Coollex.pdf`.

U ovom radu se takodje daje i procedura za generisanje kombinacije sa datim rednim brojem.

NAPOMENA Da bi se omogućilo brže generisanje kombinacija u ovom i sličnim radovima ne koristi se leksikografski, već druge vrste poretka na skupu kombinacija. Naime, iako je leksikografski poredak lako razumljiv, nema jakog razloga zašto baš njega treba koristiti u praksi. Na primer, ako treba da se generišu sve kombinacije, onda nije preterano bitno da li će te kombinacije biti sortirane, već da li smo sigurni da su baš sve generisane.

Evo i zanimljivog predloga za čitaoce: istražite na Internetu šta je to *Grejov kod* (eng. *Gray code*)!

GENERISANJE ODREDJENE k-KOMBINACIJE

Pre nego što predjemo na algoritam za generisanje k-kombinacije skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ sa datim rednim brojem r, moramo da odgovorimo na jednostavno pitanje:

> Koliko ima k-kombinacija $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, koje počinju datim elementom?

Naravno, odgovor na ovo pitanje nije težak: ako je data vrednost a_1, tada je $\{a_2, \ldots, a_k\}$ jedna $(k-1)$-kombinacija skupa $\{a_1+1, a_1+2, \ldots, n\}$, pa je ukupan broj takvih kombinacija jednak $\binom{n-a_1}{k-1}$.

Prema tome, u leksikografskom poretku postoji:

- $\binom{n-1}{k-1}$ kombinacija koje počinju elementom 1;
- $\binom{n-2}{k-1}$ kombinacija koje počinju elementom 2;
- $\vdots$
- $\binom{k-1}{k-1}$ kombinacija koje počinju elementom $n-k+1$.

Sada možemo da vidimo da će k-kombinacija sa rednim brojem r u leksikografskom poretku počinjati onim elementom a_1 za koji važi da je

$$\sum_{i=1}^{a_1-1} \binom{n-i}{k-1} \quad < \quad r \quad \leqslant \quad \sum_{i=1}^{a_1} \binom{n-i}{k-1}. \tag{2.3}$$

Štaviše, $(k-1)$-kombinacija $\{a_2, \ldots, a_k\}$ će, u leksikografskom poretku, medju kombinacijama koje počinju elementom a_1, imati redni broj

$$r' = r - \sum_{i=1}^{a_1-1} \binom{n-i}{k-1}.$$

U tom slučaju, da bismo pronašli ostale elemente kombinacije dovoljno je rekurzivno odrediti koja $(k-1)$-kombinacija skupa $\{a_1+1, a_1+2, \ldots, n\}$ ima redni broj r'.

Prethodna zapažanja se lako prevode u rekurzivni algoritam, čiji je pseudokod dat u nastavku. Značenje promenljivih u pozivu procedure je sledeće:

- r je redni broj kombinacije;
- m je pozicija prvog neodredjenog elementa kombinacije u nizu a, koji sadrži sve elemente kombinacije.

U proceduri se pretpostavlja da je a globalno definisani celobrojni niz, a n i k globalno definisani celi brojevi. Rezultat procedure je niz $a = a_1 a_2 \ldots a_k$ i njim je u potpunosti odredjena r-ta u leksikografskom redosledu k-kombinacija skupa $\mathbb{N}_n$ — $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Da bi sam algoritam bio jednostavniji, pretpostavićemo i da je $a_0 = 0$ (tj. da je to definisano van tela procedure)!

procedure *kombinacija_po_redu*(r,m)
    // pretpostavlja se da je $k \leqslant n - a[m-1]$ i $r \leqslant \binom{n-a[m-1]}{k}$
if $m > k$
    return
// uslov za završetak rekurzije; tad je $a_1 a_2 \ldots a_k$ data kombinacija

$t := 1$ // t je redni broj $a[m]$ u skupu $\{a_{m-1}+1, \ldots, n\}$
$s' := 0$ // donja parcijalna suma iz (2.3) za i od 1 do $t-1=0$
$s := \binom{n-a[m-1]-t}{k-m}$
    // gornja parcijalna suma iz (2.3) za i od 1 do $t=1$

while $r > s$
  begin
    $t := t+1$
    $s' := s$
    $s := s + \binom{n-a[m-1]-t}{k-m}$
  end

$a[m] := a[m-1] + t$
$r' := r - s'$
kombinacija_po_redu$(r', m+1)$
end procedure

PRIMER 2.5.4 Koja je kombinacija 12. po redu u leksikografskom poretku 3-kombinacija skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

Rešenje. Imamo $n = 6$, $k = 3$ i $r = 12$. Iz (2.3) vidimo da ovom rednom broju odgovara 3-kombinacija čiji je prvi element jednak $a_1 = 2$ jer je

$$\binom{5}{2} = 10 < 12 \leqslant 16 = \binom{5}{2} + \binom{4}{2}.$$

Ostatak kombinacije $\{a_2, a_3\}$ sada predstavlja leksikografski drugu 2-kombinaciju skupa $\{3, 4, 5, 6\}$, a to je kombinacija $\{3, 5\}$. Prema tome, tražena 3-kombinacija je $\{2, 3, 5\}$. ■

GENERISANJE SLUČAJNE k-KOMBINACIJE

Postoje dva pristupa za generisanje slučajne k-kombinacije:

1) Generišimo slučajnu permutaciju i prvih k elemenata te permutacije proglasimo slučajnom kombinacijom;

2) Generišimo elemente kombinacije $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, redom:

   – element a_1 uzima slučajnu vrednost izmedju 1 i $n - k + 1$ (tako da iza njega ostane bar $k - 1$ slobodnih vrednosti za preostale elemente kombinacije);
   – element a_2 uzima slučajnu vrednost izmedju $a_1 + 1$ i $n - k + 2$;
   – element a_3 uzima slučajnu vrednost izmedju $a_2 + 1$ i $n - k + 3$;
   – $\vdots$
   – element a_k uzima slučajnu vrednost izmedju $a_{k-1} + 1$ i $n = n - k + k$.

Šta mislite, koji od ova dva pristupa će kombinacije generisati uniformno (tako da svaka kombinacija ima jednaku šansu da bude generisana)? Razmotrimo ih malo detaljnije:

- Kako se u prvom pristupu permutacije generišu uniformno, možemo očekivati da će se svaka permutacija pojaviti jednom u $n!$ poziva procedure. Koliko puta će onda, medju ovih $n!$ poziva, biti generisana proizvoljna kombinacija $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$?

  Upravo onoliko puta koliko ima i permutacija n elemenata čijih je prvih k elemenata jednako $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. S obzirom da prvih k elemenata možemo da rasporedimo na $k!$ načina, a da preostalih $n - k$ elemenata možemo da rasporedimo na $(n - k)!$ načina, broj ovakvih permutacija jednak je $k!(n - k)!$.

  Prema tome, prvi pristup generiše kombinacije na uniforman način.

- Za razliku od njega, u drugom pristupu će različite kombinacije imati različite šanse za pojavljivanje.

  Najpre, kombinacija $\{n-k+1, \ldots, n-1, n\}$ će imati najveću šansu za pojavljivanje: otprilike jednom na svakih $n-k+1$ puta! Razlog tome je što, ako je generator slučajnih brojeva uniforman, možemo očekivati da će a_1 dobiti vrednost $n-k+1$ jednom u svakih $n-k+1$ poziva procedure. U tom slučaju, vrednosti za $a_2, \ldots, a_k$ su već odredjene: one se moraju izabrati tako da je $a_2 = n-k+2, \ldots, a_{k-1} = n-1$, $a_k = n$.

  S druge strane, kombinacija $\{1, 2, \ldots, k\}$ će imati najmanju šansu za pojavljivanje:

  - možemo očekivati da će a_1 dobiti vrednost 1 jednom u svakih $n-k+1$ poziva procedure;
  - možemo očekivati da će a_2 dobiti vrednost 2 jednom u svakih $n-k+1$ slučajeva u kojima je $a_1 = 1$;
  - $\vdots$
  - možemo očekivati da će a_k dobiti vrednost k jednom u svakih $n-k+1$ slučajeva u kojima je $a_1 = 1, \ldots, a_{k-1} = k-1$.

  Prema tome, kombinacija $\{1, 2, \ldots, k\}$ će se pojavljivati otprilike jednom u svakih $(n-k+1)^k$ poziva procedure, što je daleko redje od kombinacije $\{n-k+1, \ldots, n-1, n\}$!

Sada jasno vidimo da drugi pristup ne generiše kombinacije na uniforman način i da njega, prema tome, ne treba koristiti u praksi.

NAPOMENA Nije na odmet još jednom napomenuti da se na adresi

`http://www.theory.cs.uvic.ca/~cos/cos.html`

nalazi *Combinatorial Object Server*, sajt sa implementacijama algoritama za generisanje mnogih vrsta kombinatornih objekata (ne samo kombinacija!) prostim navodjenjem njihovih parametara u okviru odgovarajućih web strana.

ZADACI

2.5.1 Odrediti sledeći niz bitova koji sledi nakon 10 1011 1111.

2.5.2 Neka je $S = \{a, b, c, d, e\}$. Odrediti za svaku kombinaciju koja joj prethodi i koja sledi nakon nje u algoritmu koji generiše sve kombinacije skupa S:

a) $\{a, c, d\}$; **b)** $\{a, c, d, e\}$; **c)** $\{a, d, e\}$; **d)** $\{a\}$; **e)** $\{b, e\}$.

2.5.3 Neka je $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Pronaći sledeće 3 kombinacije u algoritmu koji generiše sve kombinacije skupa S nakon:

a) $\{1, 5, 6\}$; **b)** $\{1, 2, 4, 6\}$; **c)** $\{1, 3, 6\}$; **d)** $\{4\}$; **e)** $\{2, 3, 4, 6\}$.

2.5.4 Naći sledeće 4 kombinacije u leksikografskom redosledu od 4 elementa skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ nakon kombinacije $\{1, 2, 5, 6\}$.

2.5.5 Generisati sve podskupove skupa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ sa 3 elementa.

2.5.6 Generisati sve podskupove skupa $\{a, b, c, d, e, f\}$ sa 5 elemenata.

2.5.7 Odrediti **a)** 28-mu; **b)** 75-tu; **c)** 100-tu kombinaciju sa 4 elementa skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

2.6 OSOBINE BINOMNIH KOEFICIJENATA

Binomni koeficijenti $\binom{n}{k}$ imaju neobično veliki broj primena i sasvim sigurno su jedan od najvažnijih kombinatornih pojmova. U ovoj sekciji ćemo proučiti neke od njihovih osnovnih osobina, a u sledećoj sekciji ćemo te osobine iskoristiti za dokazivanje jos nekih njihovih osobina, kao i za dokazivanje identiteta u kojima učestvuju binomni koeficijenti.

NAPOMENA Veoma zanimljiv sajt na adresi

`http://binomial.csuhayward.edu/`

je u potpunosti posvećen binomnim koeficijentima i zaista ga vredi istražiti.

FAKTORIJELNA REPREZENTACIJA

Binomni koeficijenti se najjednostavnije predstavljaju pomoću faktorijela.

LEMA 2.6.1 **Faktorijelna reprezentacija.** Za cele brojeve n i k,$n \geqslant k \geqslant 0$ važi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{2.4}$$

Dokaz. Ova jednakost se dobija proširenjem razlomka u Definiciji 2.4.2 binomnog koeficijenta sa $(n-k)!$. Naime,

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)!}{k(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \end{aligned}$$

□

Osim što se pomoću prethodne leme binomni koeficijenti mogu predstaviti pomoću faktorijela, ona takodje dopušta i obratnu mogućnost da kombinacije faktorijela predstavimo pomoću binomnih koeficijenata.

USLOV SIMETRIČNOSTI

Pomoću (2.4) lako se dokazuje i sledeća lema.

LEMA 2.6.2 **Uslov simetričnosti.** Za svaki ceo broj $n \geqslant 0$ i svaki ceo broj k važi

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \tag{2.5}$$

Dokaz. Iz jednakosti (2.4) dobijamo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.$$

□

Kombinatorno, jednakost (2.5) znači da je broj k-točlanih podskupova skupa X sa n elemenata jednak broju podskupova sa $n-k$ elemenata. Ovo se može proveriti i direktno — dovoljno je svakom k-točlanom podskupu dodeliti njegov komplement u X.

ADICIONA FORMULA

Pomoću (2.4) je takodje moguće dokazati i sledeću lemu.

LEMA 2.6.3 **Adiciona formula.** Za cele brojeve n i k važi

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \tag{2.6}$$

Dokaz. U ovom slučaju elegantniji dokaz se dobija kombinatornim tumačenjem obe strane jednakosti (2.6). Leva strana (2.6) predstavlja broj k-točlanih podskupova nekog n-točlanog skupa X. Izaberimo proizvoljni element $a \in X$. Sada k-točlane podskupove skupa X možemo da podelimo u dve grupe u zavisnosti od toga da li sadrže a ili ne. Podskupovi koji ne sadrže a su upravo svi k-točlani podskupovi skupa $X \setminus \{a\}$, pa je njihov broj $\binom{n-1}{k}$. Ako je A neki k-točlani podskup skupa X koji sadrži a, tada podskupu A možemo da mu pridružimo podskup $A' = A \setminus \{a\}$ koji sadrži $k-1$ elemenata. Može se proveriti da je ovo pridruživanje bijekcija izmedju svih k-točlanih podskupova skupa X koji sadrže a i svih podskupova sa $k-1$ elemenata skupa $X \setminus \{a\}$. Broj takvih podskupova je stoga jednak $\binom{n-1}{k-1}$. Sve u svemu, broj k-točlanih podskupova skupa X je jednak $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. $\square$

Prethodna lema važi i u slučajevima kada je $k < 0$ ili $k > n$, jer su tada svi binomni koeficijenti jednaki 0. Ona takodje važi i kada n nije ceo broj ili kada je $n < 0$, s tim što u ovim slučajevima ona više nema kombinatorno tumačenje.

Jednakost (2.6) se u stranoj literaturi naziva Paskalov identitet (eng. *Pascal's identity*). Jedan od glavnih razloga za to je što je blisko povezana sa tzv. *Paskalovim trouglom*:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & & \vdots & & & & & & \vdots & & &
\end{array}
$$

Paskalov trougao se dobija tako što se počne sa redom koji sadrži samo broj 1, a zatim se svaki sledeći red dobija tako što se ispod svakog para uzastopnih brojeva u prethodnom redu napiše njihov zbir, i na kraju se na oba kraja novog reda stavi broj 1.

Indukcijom uz pomoć jednakosti (2.6) može da se dokaže da $(n+1)$-vi red sadrži binomne koeficijente $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$. Paskalov trougao omogućava i da se proizvoljan binomni koeficijent izračuna koristeći samo sabiranje: naime, za nalaženje vrednosti $\binom{n}{k}$ dovoljno je izračunati samo one vrednosti koje se u Paskalovom trouglu nalaze gore levo i gore desno od $(k+1)$-ve pozicije u n-tom redu trougla.

BINOMNA TEOREMA

Najvažnije svojstvo binomnih koeficijenata iskazano je u sledećoj teoremi. Ona se često naziva i **Binomni razvoj** ili **Razvoj stepana binoma**.

TEOREMA 2.6.4 **Binomna teorema.** Za svaki nenegativni ceo broj n važi

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{2.7}$$

(ovo je jednakost dva polinoma sa promenljivama x i y, pa važi za proizvoljne vrednosti x i y).

Dokaz. Binomnu teoremu dokazujemo indukcijom po n. Za $n = 0$ obe strane jednakosti (2.7) su jednake 1. Pretpostavimo stoga da (2.7) važi za neko $n = n_0 \geqslant 0$ i dokažimo da tada (2.7) važi i za $n = n_0 + 1$. Dakle,

$$
\begin{aligned}
& (x+y)^{n_0+1} = (x+y)(x+y)^{n_0} \\
& \quad \text{(induktivna pretpostavka za } (x+y)^{n_0}\text{)} \\
= \; & (x+y)\sum_{k=0}^{n_0}\binom{n_0}{k}x^k y^{n_0-k} \\
= \; & x\sum_{k=0}^{n_0}\binom{n_0}{k}x^k y^{n_0-k} + y\sum_{k=0}^{n_0}\binom{n_0}{k}x^k y^{n_0-k} \\
= \; & \sum_{k=0}^{n_0}\binom{n_0}{k}x^{k+1} y^{n_0-k} + \sum_{k=0}^{n_0}\binom{n_0}{k}x^k y^{n_0-k+1} \\
& \quad \text{(promena granica promenljive } k \text{ u prvoj sumi)} \\
= \; & \sum_{k=1}^{n_0+1}\binom{n_0}{k-1}x^{k} y^{n_0-k+1} + \sum_{k=0}^{n_0}\binom{n_0}{k}x^k y^{n_0-k+1} \\
& \quad \text{(izdvajanje dva posebna slučaja)} \\
= \; & \binom{n_0}{n_0}x^{n_0+1}y^0 + \sum_{k=1}^{n_0}\binom{n_0}{k-1}x^k y^{n_0-k+1} \\
+ \; & \binom{n_0}{0}x^0 y^{n_0+1} + \sum_{k=1}^{n_0}\binom{n_0}{k}x^k y^{n_0-k+1} \\
& \quad \text{(koristimo } \tbinom{n_0}{n_0} = 1 = \tbinom{n_0+1}{n_0+1} \text{ i } \tbinom{n_0}{0} = 1 = \tbinom{n_0+1}{0}\text{)} \\
= \; & \binom{n_0+1}{n_0+1}x^{n_0+1}y^0 + \binom{n_0+1}{0}x^0 y^{n_0+1} \\
+ \; & \sum_{k=1}^{n_0}\left(\binom{n_0}{k-1} + \binom{n_0}{k}\right)x^k y^{n_0+1-k} \\
& \quad \text{(koristimo } \tbinom{n_0}{k-1} + \tbinom{n_0}{k} = \tbinom{n_0+1}{k}\text{)} \\
= \; & \binom{n_0+1}{n_0+1}x^{n_0+1}y^0 + \binom{n_0+1}{0}x^0 y^{n_0+1} + \sum_{k=1}^{n_0}\binom{n_0+1}{k}x^k y^{n_0+1-k} \\
& \quad \text{(vraćanje dva posebna slučaja)} \\
= \; & \sum_{k=0}^{n_0+1}\binom{n_0+1}{k}x^k y^{n_0+1-k}.
\end{aligned}
$$

□

PRIMER 2.6.5 Kako glasi izraz $(a+b)^4$ u razvijenom obliku?

Rešenje. Iz Binomne teoreme dobijamo da je

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}a^k b^{4-k}\\ &= \tbinom{4}{0}b^4+\tbinom{4}{1}ab^3+\tbinom{4}{2}a^2b^2+\tbinom{4}{3}a^3b+\tbinom{4}{4}a^4\\ &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.\end{aligned}$$

Primetimo da se koeficijenti 1 4 6 4 1 u binomnom razvoju javljaju kao 5-ta vrsta u Paskalovom trouglu. Uopšte, imamo da za razvoj $(a+b)^n$ koristimo $(n+1)$-vu vrstu u Paskalovom trouglu (pri čemu se stepeni uz a smanjuju, a uz b povećavaju). ■

PRIMER 2.6.6 Koji je koeficijent uz $x^{10}y^{12}$ u razvoju izraza $(x+y)^{22}$?

Rešenje. Iz Binomne teoreme sledi da je ovaj koeficijent jednak

$$\binom{22}{10}=\frac{22!}{10!12!}=646\,646.$$

■

PRIMER 2.6.7 Koji je koeficijent uz $x^{10}y^{12}$ u razvoju izraza $(3x-2y)^{22}$?

Rešenje. Najpre, primetimo da je ovaj izraz jednak $\big(3x+(-2y)\big)^{22}$. Sada iz Binomne teoreme sledi da je

$$\big(3x+(-2y)\big)^{22}=\sum_{k=0}^{22}\binom{22}{k}(3x)^k(-2y)^{22-k}.$$

Sabirak $x^{10}y^{12}$ u ovom izrazu se dobija za $k=10$, i njegov koeficijent je jednak

$$\binom{22}{10}3^{10}(-2)^{12}=\frac{22!}{10!12!}3^{10}2^{12}=156\,400\,843\,382\,784.$$

■

Ako u binomnoj teoremi stavimo $y=1$ tada dobijamo važan specijalni slučaj

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k. \tag{2.8}$$

Pomoću binomne teoreme možemo da dokažemo mnoge identitete sa binomnim koeficijentima. Ovim poslom ćemo se više baviti u sledećoj sekciji, a ovde ćemo navesti samo još dva jednostavna identiteta.

POSLEDICA 2.6.8 Za nenegativan ceo broj n važi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Dokaz. Koristeći binomnu teoremu sa $x = 1$ i $y = 1$ dobijamo

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Ova posledica ima i interesantan kombinatorni dokaz. U tu svrhu prebrojaćemo sve podskupove skupa X sa n elemenata na dva načina. S jedne strane, X ima 2^n različitih podskupova (Teorema 2.2.4). S druge strane, za svako $k = 0, 1, \ldots, n$, skup X ima $\binom{n}{k}$ podskupova sa tačno k elemenata. Zbog toga, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ takodje predstavlja ukupan broj podskupova skupa X, pa stoga važi jednakost iz tvrdjenja. $\square$

POSLEDICA 2.6.9 Za nenegativan ceo broj n važi

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Dokaz. Stavljanjem $x = -1$ i $y = 1$ u binomnu teoremu dobijamo

$$0 = 0^n = \big((-1)+1\big)^n = \sum_{k=0} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0} \binom{n}{k} (-1)^k.$$

$\square$

Sabiranjem, odnosno oduzimanjem, identiteta iz prethodne dve posledice dobijamo da važi i

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = 2^{n-1},$$
$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1}.$$

MULTINOMIJALNA TEOREMA

Podsetimo se da za multinomijalne koeficijente važi Lema 2.4.15, tj.

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

S obzirom da multinomijalni koeficijenti uopštavaju binomne koeficijente, moguće je dokazati i sledeću teoremu.

TEOREMA 2.6.10 **Multinomijalna teorema.** Za proizvoljne realne brojeve x_1, x_2, …, x_m i za svaki prirodan broj $n \geqslant 1$ važi

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1 + \ldots + k_m = n \\ k_1, \ldots, k_m \geqslant 0}} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot x_m^{k_m}.$$

Medjutim, iako se multinomijalna teorema može dokazati indukcijom po n, analogno dokazu binomne teoreme, elegantniji i direktniji dokaz se može dobiti tehnikama koje ćemo obraditi u sledećoj glavi, pa ćemo je tada i dokazati.

PRIMER 2.6.11 Kako glasi izraz $(x + y + z)^3$ u razvijenom obliku?

Rešenje. Po multinomijalnoj teoremi imamo da važi

$$\begin{aligned}
(x+y+z)^3 &= \binom{3}{3,0,0}x^3 + \binom{3}{0,3,0}y^3 + \binom{3}{0,0,3}z^3 + \\
&\quad \binom{3}{2,1,0}x^2y + \binom{3}{2,0,1}x^2z + \binom{3}{1,2,0}xy^2 + \\
&\quad \binom{3}{0,2,1}y^2z + \binom{3}{1,0,2}xz^2 + \binom{3}{0,1,2}yz^2 + \binom{3}{1,1,1}xyz \\
&= \frac{3!}{3!0!0!}x^3 + \frac{3!}{0!3!0!}y^3 + \frac{3!}{0!0!3!}z^3 + \\
&\quad \frac{3!}{2!1!0!}x^2y + \frac{3!}{2!0!1!}x^2z + \frac{3!}{1!2!0!}xy^2 + \\
&\quad \frac{3!}{0!2!1!}y^2z + \frac{3!}{1!0!2!}xz^2 + \frac{3!}{0!1!2!}yz^2 + \frac{3!}{1!1!1!}xyz \\
&= x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3xy^2+3y^2z+3xz^2+3yz^2+6xyz.
\end{aligned}$$

■

Desna strana multinomijalne formule obično ima dosta sabiraka, s obzirom da se sabira po svim predstavljanjima broja n pomoću m sabiraka, ali se ova teorema ionako najčešće koristi kako bismo odredili koeficijent uz neki odredjeni član.

PRIMER 2.6.12 Koji je koeficijent uz član $x^2y^3z^5$ u razvoju izraza $(x+y-z)^{10}$?

Rešenje. Primenjujući multinomijalnu teoremu na izraz $\big(x+y+(-z)\big)^{10}$ vidimo da je traženi koeficijent jednak

$$\binom{10}{2,3,5}(-1)^5 = -2\,520,$$

gde činilac $(-1)^5$ dolazi iz proizvoda $x^2y^3(-z)^5$. ■

ZADACI

2.6.1 Na koliko se načina može pročitati rečenica

ANA VOLI MILOVANA

na prikazanoj šemi? (Rečenica može da počne bilo kojim slovom A, a posle svakog slova prelazi se na njemu susedno slovo po horizontali ili vertikali u bilo kom smeru u kome se rečenica može nastaviti.)

A
ANA
ANANA
ANAVANA
ANAVOVANA
ANAVOLOVANA
ANAVOLILOVANA
ANAVOLIMILOVANA
ANAVOLILOVANA
ANAVOLOVANA
ANAVOVANA
ANAVANA
ANANA
ANA
A

2.6.2 Izračunati zbir koeficijenata polinoma po x koji predstavlja razvoj izraza $(3x-2)^{100}$.

2.6.3 Naći koeficijent uz:
a) x^{10} u razvoju izraza $(1-x^2+x^3)^{11}$.
b) x^3 u razvoju izraza $(1-x+2x^2)^9$.

2.6.4 Odrediti koeficijent uz $p^2q^3r^3s^4$ u razvoju izraza $(2p-3q+2r-s)^{12}$.

2.6.5 Neka je izmnožen izraz $(x+y+z)^n$ i neka su sabirci grupisani zajedno na uobičajeni način: na primer za $n=2$,

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx,$$

a videti i Primer 1.6.11. Koliko ima sabiraka na desnoj strani, ako je n proizvoljan prirodan broj?

2.6.6 Dokazati da je $\binom{n}{k} \leqslant \binom{n}{k+1}$ za $k \leqslant [n/2]$ i $\binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{k+1}$ za $k \geqslant [n/2]$.

2.6.7 Dokažite *Lajbnicovu formulu* za izvod proizvoda funkcija: neka su u, v realne funkcije jedne realne promenljive i neka $f^{(k)}$ označava k-ti izvod funkcije f. Tada je

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$$

(pod pretpostavkom da svi izvodi u formuli postoje). Slučaj $n = 1$ je standardna formula za izvod proizvoda, $(uv)' = u'v + uv'$, koja je poznata iz kursa Analize.

2.6.8 Neka ja p prost broj.

a) Dokazati da su svi brojevi $\binom{p}{1}, \binom{p}{2}, \ldots, \binom{p}{p-1}$ deljivi sa p.

b) Dokazati da je za svaki ceo broj a razlika $a^p - a$ deljiva sa p.

2.7 BINOMNI IDENTITETI

Binomni koeficijenti zadovoljavaju mnoštvo identiteta, i već vekovima se istražuju njihova svojstva. Cele knjige su posvećene samo njima, pa čak postoje i automatizovani metodi za dokazivanje identiteta sa binomnim koeficijentima. Jedan od takvih metoda je Princip zmijskog ulja (eng. Snake-oil metod), koji se bazira na manipulaciji sa funkcijama generatrisa koje ćemo upoznati u sledećoj glavi.

NAPOMENA Prilično opširan spisak ovakvih identiteta (od čega mnogi imaju dokaze) može se naći na adresi

`http://binomial.csuhayward.edu/Identities.html`

U klasičnoj kombinatorici postoje dva opšte prihvaćena načina za dokazivanje binomnih identiteta — analitički i kombinatorni. Pod *analitičkim dokazivanjem* se podrazumeva korišćenje poznatih binomnih identiteta za transformaciju izraza sa binomnim koeficijentima, dok se pod *kombinatornim dokazivanjem* podrazumeva nalaženje načina da se obe strane identiteta protumače kao izrazi koji prebrojavaju isti skup objekata na dva različita načina. U zavisnosti od slučaja, može biti lakše da se nadje analitički dokaz ili da se nadje kombinatorni dokaz. U ovoj sekciji ćemo uglavnom koristiti analitičke dokaze, ali ćemo pri njenom kraju dati i dva primera kombinatornih dokaza.

Pored najjednostavnijih svojstava (2.4), (2.5), (2.6), kao i veoma važne Binomne teoreme, za rad sa binomnim koeficijentima se često koriste i sledeće leme.

IZVLAČENJE IZ ZAGRADA

LEMA 2.7.1 Za ceo broj $k \neq 0$ i proizvoljan broj n važi

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}. \tag{2.9}$$

Dokaz. Ove jednakosti se lako dokazuju Faktorijelnom reprezentacijom (2.4) binomnih koeficijenata:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1},\\ \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)(n-k-1)!} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}.\end{aligned}$$

□

SUMACIONA FORMULA

LEMA 2.7.2 Za cele brojeve n i m, $n, m \geqslant 0$ važi

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{r+k}{k} = \binom{r}{0} + \binom{r+1}{1} + \ldots + \binom{r+n}{n} = \binom{r+n+1}{n}, \tag{2.10}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} = \binom{0}{m} + \binom{1}{m} + \ldots + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}. \tag{2.11}$$

Dokaz. Obe formule dokazujemo matematičkom indukcijom po n uz pomoć Adicione formule (2.6).

Za $n = 0$ obe strane jednakosti (2.10) su jednake 1. Pretpostavimo sada da jednakost (2.10) važi za neko $n = n_0$. Sada za $n = n_0 + 1$ imamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n_0+1}\binom{r+k}{k} &= \sum_{k=0}^{n_0}\binom{r+k}{k} + \binom{r+n_0+1}{n_0+1} && \text{(induktivna pretpostavka)}\\ &= \binom{r+n_0+1}{n_0} + \binom{r+n_0+1}{n_0+1} && \text{(adiciona formula)}\\ &= \binom{r+(n_0+1)+1}{n_0+1}.\end{aligned}$$

Što se tiče jednakosti (2.11) za $n = 0$ njena leva strana je jednaka $\binom{0}{m}$, dok je desna strana jednaka $\binom{1}{m+1}$. Tada su za $m = 0$ obe strane jednake 1, dok su za $m \neq 0$ obe strane jednake 0. U svakom slučaju, jednakost (2.11) važi za $n = 0$.

Pretpostavimo sada da ona važi za neko $n = n_0$. Tada za $n = n_0 + 1$ imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n_0+1} \binom{k}{m} &= \sum_{k=0}^{n_0} \binom{k}{m} + \binom{n_0+1}{m} \quad \text{(induktivna pretpostavka)} \\
&= \binom{n_0+1}{m+1} + \binom{n_0+1}{m} \quad \text{(adiciona formula)} \\
&= \binom{(n_0+1)+1}{m+1}.
\end{aligned}$$

□

Jednakost (2.11) se često pojavljuje u primenama. Na primer, za $m = 1$ dobijamo formulu za zbir prvih n prirodnih brojeva (koji se može iskoristiti i za odredjivanje zbira aritmetičke progresije):

$$\binom{0}{1} + \binom{1}{1} + \ldots + \binom{n}{1} = 0 + 1 + \ldots + n = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Pretpostavimo da želimo da nadjemo zbir $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$. Ako primetimo da je $k^2 = 2\binom{k}{2} + \binom{k}{1}$, tada dobijamo da je

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} \left(2\binom{k}{2} + \binom{k}{1} \right) = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}.$$

Rešenje, koje smo dobili u binomnim koeficijentima, možemo da vratimo u uobičajenu notaciju:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = 2\tfrac{(n+1)n(n-1)}{6} + \tfrac{(n+1)n}{2} = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

NAPOMENA Zbir $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ može da se dobije na sličan način; u suštini, *svaki* polinom $a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + \ldots + a_m k^m$ može da se izrazi u obliku $b_0\binom{k}{0} + b_1\binom{k}{1} + \ldots + b_m\binom{k}{m}$ za pogodno izabrane koeficijente $b_0, b_1, \ldots, b_m$.

NEGACIJA GORNJEG INDEKSA

LEMA 2.7.3 **Negacija gornjeg indeksa.** Za svaki ceo broj k i proizvoljan broj n važi

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}. \tag{2.12}$$

Dokaz. Ova se jednakost dobija iz definicije binomnog koeficijenta:

$$\begin{aligned}\binom{-n}{k} &= \frac{-n(-n-1)(-n-2)\cdot\ldots\cdot(-n-k+1)}{k(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}\\ &= \frac{(-1)^k n(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)}{k(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = (-1)^k\binom{n+k-1}{k}.\end{aligned}$$

□

Negacija gornjeg indeksa je često korisna transformacija gornjeg indeksa u binomnom koeficijentu.

PRIMER 2.7.4 Dokazati sumacionu formulu

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{r}{k} = \binom{r}{0}-\binom{r}{1}+\ldots+(-1)^n\binom{r}{n} = (-1)^n\binom{r-1}{n}. \tag{2.13}$$

Rešenje. Koristeći redom negaciju gornjeg indeksa (2.12) i prvu sumacionu formulu (2.10) dobijamo

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{r}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{-r+k-1}{k} = \binom{-r+n}{n} = (-1)^n\binom{r-1}{n}.$$

■

POJEDNOSTAVLJIVANJE PROIZVODA

LEMA 2.7.5 Za sve cele brojeve m i k i proizvoljan broj n važi

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} \tag{2.14}$$

Dokaz. Ovu jednakost je dovoljno dokazati u slučaju kada je n ceo broj i $n \geqslant m$. Pritom možemo da pretpostavimo da je $0 \leqslant k \leqslant m$, jer su u suprotnom obe strane jednakosti jednake 0. Sada imamo

$$\begin{aligned}\binom{n}{m}\binom{m}{k} &= \frac{n!m!}{m!(n-m)!k!(m-k)!}\\ &= \frac{n!(n-k)!}{k!(n-k)!(m-k)!(n-m)!} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}.\end{aligned}$$

□

Prethodnu jednakost smo dokazali samo za cele vrednosti n koje su veće od ili jednake sa m. Medjutim ona važi za sve realne vrednosti n. Naime, već smo dokazali da jednakost

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

važi za *beskonačno mnogo vrednosti* n. Obe strane ove jednakosti su *polinomi* po promenljivoj n. Nenula polinom stepena r može da ima najviše r različitih korena, tako da ako *dva polinoma stepena ne većeg od* r *imaju istu vrednost u* $r+1$ *ili više različitih tačaka, onda su ti polinomi identički jednaki* (ovo tvrdjenje možemo pokazati oduzimanjem ta 2 polinoma). Ovaj princip se može koristiti za proširenje važnosti mnogih identiteta sa celih brojeva na realne brojeve.

SUME PROIZVODA

Jednakosti u sledećoj lemi se koriste kada treba sumirati proizvod dva binomna koeficijenta u kojima se sumacioni indeks k nalazi na donjem mestu.

LEMA 2.7.6 Za svaki ceo broj n i svaki ceo broj $r \geqslant 0$ važi

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}, \tag{2.15}$$

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n+k} = \binom{r+s}{r+n}. \tag{2.16}$$

Kao što smo već rekli, pod kombinatornim dokazivanjem se podrazumeva tumačenje obe strane identiteta kao izraza koji prebrojavaju neki skup objekata na dva različita načina. Kod ove leme, kombinatorni dokaz pruža bolji uvid u njeno tvrdjenje.

Dokaz. Najpre ćemo dokazati jednakost (2.15)

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}.$$

Neka je dat skup X sa $r+s$ elemenata. Desna strana gornje jednakosti predstavlja broj n-točlanih podskupova skupa X.

Obojimo sada r elemenata skupa X u crvenu, a preostalih s elemenata u plavu boju. Drugi način da se izabere n-točlani podskup skupa X jeste da se izabere k crvenih elemenata i $n-k$ plavih elemenata. Za svako k postoji $\binom{r}{k}$ načina da se izaberu crveni elementi, i nezavisno od toga, $\binom{s}{n-k}$ načina da se izaberu plavi elementi. Sveukupno, n-točlani podskup skupa X može da se izabere na $\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n-k}$ načina, što je upravo leva strana gornje jednakosti.

Jednakost (2.16) dokazujemo tako što koristimo prethodnu jednakost i dva puta Uslov simetričnosti (Lema 2.6.2):

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n+k} = \sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{s-n-k} = \binom{r+s}{s-n} = \binom{r+s}{r+n}.$$

□

Sada ćemo na nekoliko primera pokazati kako se ova lema može iskoristiti pri radu sa binomnim identitetima.

PRIMER 2.7.7 Ako je r nenegativni ceo broj, koja je vrednost izraza $\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{k}k$?

Rešenje. Izvlačenjem iz zagrada (Lema 2.7.1) možemo da se oslobodimo spoljašnjeg k:

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{k}k = \sum_k \binom{r}{k}\binom{s-1}{k-1}\frac{s}{k}k = s\sum_k \binom{r}{k}\binom{s-1}{k-1}.$$

Sada može da se primeni jednakost (2.16) sa $n = -1$. Krajnje rešenje je

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{k}k = s\binom{r+s-1}{r-1}.$$

■

PRIMER 2.7.8 Dokazati da važi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Rešenje. Za dokaz koristimo Uslov simetričnosti (Lema 2.6.2) i jednakost (2.15) sa $r = n$, $s = n$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}.$$

■

PRIMER 2.7.9 Dokazati da važi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}2^{2n-2k} = \binom{4n}{2n}.$$

Rešenje. Nalaženje odgovarajućeg kombinatornog tumačenja ovog binomnog identiteta je malo teže.

Neka je dat skup $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{4n}\}$. Desna strana gornje jednakosti predstavlja broj podskupova skupa X sa $2n$ elemenata.

Sada treba ove podskupove prebrojati na drugačiji način. Neka je $A_i = \{x_{2i-1}, x_{2i}\}$ za $i = 1, 2, \ldots, 2n$. Skupovi A_i, $i = 1, 2, \ldots, 2n$ predstavljaju particiju skupa X. Neka je $M \subset X$ proizvoljan podskup sa $2n$ elemenata. Za svako $i = 1, 2, \ldots, 2n$ presek $M \cap A_i$ ima 0, 1 ili 2 elementa, medjutim važi da je

$$2n = |M| = \sum_{i=1}^{2n} |M \cap A_i|.$$

Neka je k broj skupova A_i tako da je $|M \cap A_i| = 2$. Iz prethodne jednakosti tada sledi da je broj skupova A_i tako da je $|M \cap A_i| = 1$ jednak $2n - 2k$, dok je broj skupova A_i tako da je $M \cap A_i = \emptyset$ jednak takodje k.

Posle ovog razmatranja konačno vidimo kako se drugačije mogu prebrojati podskupovi skupa X sa $2n$ elemenata. Naime, od ukupno $2n$ skupova A_1, A_2, $\ldots$, A_{2n} izabraćemo $2n - 2k$ skupova iz kojih ćemo izabrati po jedan element u podskup. Izbor ovih skupova možemo da napravimo na $\binom{2n}{2n-2k} = \binom{2n}{2k}$ načina. Kako svaki skup A_i ima po dva elementa, to za svaki od izabranih skupova postoje dva načina da izaberemo jedan element u podskup, pa je ukupan broj načina za to jednak 2^{2n-2k}. Konačno, od preostalih $2k$ skupova A_i treba izabrati još k skupova čija ćemo oba elementa izabrati u podskup, što se može uraditi na $\binom{2k}{k}$ načina, tako da je ukupan broj načina da se izabere podskup skupa X sa $2n$ elemenata jednak

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} 2^{2n-2k}.$$

■

NAPOMENA S obzirom na veliki broj binomnih identiteta, jedan od ciljeva matematičara tokom XX veka je bio da pronadju potpuno automatizovani metod za njihovo dokazivanje. Nadjeno je više takvih metoda, koji su mogli da se primenjuju na sve veći i veći broj tipova identiteta, a najveći uspeh je zabeležen 1995. godine kada je problem u potpunosti rešen! Opis softvera koji rešava ovaj problem, a i metoda koji su mu prethodili, može se naći u knjizi [24], čija je kompletna verzija dostupna na Internetu. Ah da, softver je takodje dostupan...

ZADACI

2.7.1 Dokazati sledeće identitete:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1};$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)\binom{n}{k} = (n+2) \cdot 2^{n-1};$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1)\binom{n}{k} = 0.$

2.7.2 Dokazati sledeće identitete pomoću kombinatornih argumenata:

a) $\displaystyle\binom{m+n}{2} - \binom{m}{2} - \binom{n}{2} = mn;$

b) $\displaystyle\binom{2n}{2} = 2 \cdot \binom{n}{2} + n^2.$

c) $\displaystyle\binom{3n}{3} = 3 \cdot \binom{n}{3} + 6n \cdot \binom{n}{2} + n^3.$

2.7.3 Dokazati identitet

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \ldots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

pomoću kombinatornih argumenata.

2.7.4 Naći vrednost izraza $\sum\limits_{k=0}^{n} k^4$.

2.7.5 Izračunati sumu $S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1)$.

2.7.6 Izračunati sledeće sume:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$; **b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\binom{k}{m}$; **c)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{k}{m}$; **d)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^2$.

2.7.7 Dokazati sledeće identitete:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^m \cdot \binom{n-1}{m};$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^k} = 2^n;$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k}^2 = n \cdot \binom{2n-1}{n-1}.$

2.7.8 Pokazati da važi jednakost $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{2n-p}{p} = \begin{cases} 1 & \text{za } n \equiv 0 \pmod 3 \\ 0 & \text{za } n \equiv 1 \pmod 3 \\ -1 & \text{za } n \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}.$

2.7.9 Dokazati sledeće identitete:

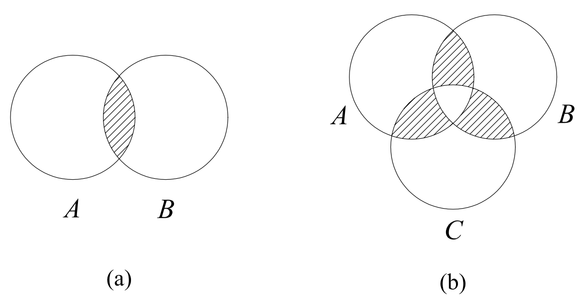
a) $$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}\binom{n}{k} = \binom{n}{m}2^{n-m};$$

b) $$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{m} = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}2^k.$$

2.8 PRINCIP UKLJUČENJA-ISKLJUČENJA

Jedan od osnovnih principa prebrojavanja — princip zbira (Teorema 2.1.5) tvrdi da je $|A \cup B| = |A| + |B|$ kada su A i B disjunktni skupovi. Ako A i B nisu disjunktni, sabiranjem $|A|$ i $|B|$ elemente preseka $|A \cap B|$ brojimo dva puta (Sl. 2.5a). Stoga, da bi dobili pravu vrednost $|A \cup B|$ moramo oduzeti $|A \cap B|$:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{2.17}$$



Slika 2.5: Preseci dva i tri skupa

Slično rasudjivanje primenjujemo i u slučaju tri skupa (Sl. 2.5b). Kada saberemo $|A|$, $|B|$ i $|C|$ elemente preseka $|A \cap B|$, $|B \cap C|$ i $|C \cap A|$ brojimo dva puta (ukoliko nisu u preseku sva tri skupa). Da ovo ispravimo, oduzimamo $|A \cap B|$, $|B \cap C|$ i $|C \cap A|$. Ali sada smo elemente $A \cap B \cap C$, koje smo u $|A| + |B| + |C|$ brojali tri puta, oduzeli takodje tri puta. Stoga, da bi dobili pravu vrednost $|A \cup B \cup C|$, moramo da dodamo $|A \cap B \cap C|$:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| = {} & (|A| + |B| + |C|) - (|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|) \\ & + |A \cap B \cap C|. \end{aligned} \tag{2.18}$$

PRIMER 2.8.1 Na drugoj godini Odseka za matematiku ima 50 studenata. Od njih će u oktobarskom ispitnom roku 24 izaći na matematičku analizu, 20 na algebru i 13 na diskretnu matematiku. Matematičku analizu i algebru će polagati 6 studenata, algebru i diskretnu matematiku 5 studenata, a analizu i diskretnu matematiku 4 studenta. Ako jedino Zlatko polaže sva tri ispita, koliko studenata neće izaći ni na jedan ispit?

Rešenje. Neka M, A i D označaju skupove studenata koji izlaze na matematičku analizu, algebru i diskretnu matematiku, redom. Iz gornjih uslova imamo da je

$$\begin{aligned}&|M| + |A| + |D| = 24 + 20 + 13 = 57,\\&|M \cap A| + |A \cap D| + |D \cap M| = 6 + 5 + 4 = 15,\\&|M \cap A \cap D| = 1.\end{aligned}$$

Iz jednakosti (2.18) imamo

$$|M \cup A \cup D| = 57 - 15 + 1 = 43,$$

pa je broj studenata koji neće izaći ni na jedan ispit jednak $50 - 43 = 7$. ■

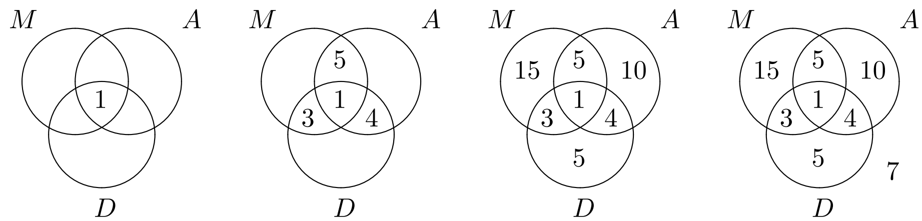
PRIMER 2.8.2 Od studenata iz prethodnog primera, koliko će izaći na tačno jedan ispit? A koliko će izaći na bar 2 ispita?

Rešenje. Označimo sledeće skupove:
$M\ A\ D$ - presek skupova M, A i D,
$M\ A\ \overline{D}$ - presek skupova M i A koji nije u D,
$M\ \overline{A}\ D$ - presek skupova M i D koji nije u A,
$M\ \overline{A}\ \overline{D}$ - elemente skupa M koji nisu ni u A, ni u D,
$\overline{M}\ A\ D$ - presek skupova A i D koji nije u M,
$\overline{M}\ A\ \overline{D}$ - elemente skupa A koji nisu ni u M, ni u D,
$\overline{M}\ \overline{A}\ D$ - elemente skupa D koji nisu ni u M, ni u A,
$\overline{M}\ \overline{A}\ \overline{D}$ - elemente koji nisu ni u M, ni u A, ni u D
(to su osnovni skupovi u odgovarajućim Venovim dijagramima).

Sada ćemo odrediti koliko svaki od ovih skupova ima elemenata:
$|MAD| = 1$ jer je tu samo Zlatko.
$|MA\overline{D}| = |(M \cap A) \setminus MAD| = |M \cap A| - |MAD| = 6 - 1 = 5$. Slično dobijamo i $|M\overline{A}D| = 3$ i $|\overline{M}AD| = 4$.
Sada imamo $|M\overline{A}\ \overline{D}| = |M \setminus (MAD \cup MA\overline{D} \cup M\overline{A}D)| = |M| - (|MAD| + |MA\overline{D}| + |M\overline{A}D|) = 24 - (1 + 5 + 3) = 15$. Slično dobijamo i $|\overline{M}A\overline{D}| = 10$ i $|\overline{M}\ \overline{A}D| = 5$.
Ukupan broj studenata koji izlaze na neki ispit dobijamo (ponovo – u prošlom primeru smo taj broj našli brže, ali nismo odredili broj elemenata u svakom od osnovnih skupova kod Venovih dijagrama) kao zbir svih ovih prethodno nadjenih

brojeva: $|M \cup A \cup D| = 1 + 5 + 3 + 4 + 15 + 10 + 5 = 43$, a kako ima ukupno 50 studenata to $50 - 43 = 7$ studenata ne izlazi ni na jedan ispit.

Faze prethodnog odredjivanja koliko ima studenata u kom skupu su prikazane na sl. 2.6.



Slika 2.6: Faze odredjivanja broja studenata po predmetima

Sada dobijamo da je broj studenata koji će izaći na tačno jedan ispit jednak

$$|M\overline{A}\,\overline{D} \cup \overline{M}A\overline{D} \cup \overline{M}\,\overline{A}D| = 15 + 10 + 5 = 30,$$

dok je broj studenata koji će izaći na bar dva ispita jednak

$$|MA\overline{D} \cup M\overline{A}D \cup \overline{M}AD \cup MAD| = 5 + 3 + 4 + 1 = 13.$$

■

KAKO ELEGANTNO ZAPISATI MATEMATIČKU FORMULU?

Prethodno rasudjivanje možemo da proširimo i na slučaj n konačnih skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Broj elemenata $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$ može da se dobije na sledeći način: najpre saberemo veličine svih skupova, zatim oduzmemo veličine svih preseka dva skupa, pa dodamo veličine svih preseka tri skupa, pa oduzmemo veličine svih preseka četiri skupa itd. U poslednjem koraku, ili dodajemo (za neparno n) ili oduzimamo (za parno n) veličinu preseka svih n skupova.

Kako ovo zapisujemo u obliku formule? Prvi pokušaj bi mogao da bude

$$\begin{gathered}|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| \\ -|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots - |A_1 \cap A_n| - |A_2 \cap A_3| - \ldots - |A_{n-1} \cap A_n| \\ +|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \ldots \\ +(-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.\end{gathered}$$

Ovo je nezgrapan i ne preterano čitljiv način da se izrazi prethodno pravilo. Štaviše, koristeći ovakav zapis nikako ne bismo mogli da pronadjemo elegantan dokaz ovog pravila. Nešto je bolji zapis koristeći sume:

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| \\ &+ \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \\ &- \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.\end{aligned}$$

Iako je ovaj zapis čitljiviji, on i dalje nije dovoljno dobar da bi omogućio elegantan dokaz. No, ako se prisetimo oznake $\binom{X}{k}$ za skup svih k-elementnih podskupova skupa X, i ako upotrebimo oznaku sličnu $\sum$ za višestruke preseke i unije, ovu formulu možemo zapisati znatno elegantnije:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \in \binom{\{1,2,\ldots,n\}}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|. \tag{2.19}$$

Da biste bolje shvatili ovu formulu, mogli biste da je proradite detaljno za slučaj $n = 3$. Obratite pažnju pri tome da ne mešate brojeve sa skupovima! Ako proučimo prethodnu formulu, možemo videti skup I u stvari dobija vrednosti svih nepraznih podskupova skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, kao i da je $k = |I|$. Zbog toga je još jednostavniji i efektniji sledeći zapis:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

Upravo ovaj način zapisivanja ćemo iskoristiti pri dokazu ovog pravila.

PRINCIP UKLJUČENJA-ISKLJUČENJA

TEOREMA 2.8.3 **Princip uključenja-isključenja.** Za konačne skupove A_1, A_2, $\ldots$, A_n važi

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|. \tag{2.20}$$

Dokaz indukcijom. Indukcija je po broju skupova n, s tim što za bazu indukcije koristimo $n = 2$. Kao što znamo, jednačina (2.20) važi za dva skupa.

Pretpostavimo da ona važi za proizvoljnih $n-1$ konačnih skupova. Tada je

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| &= \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)\cup A_n\right| \\
&= \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| + |A_n| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)\cap A_n\right| \\
&\qquad \text{(iskoristili smo princip uključenja-isključenja za dva skupa,} \\
&\qquad \text{tj. } |A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B| \text{ sa } A=\textstyle\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \text{ i } B=A_n) \\
&= \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| + |A_n| - \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i\cap A_n)\right| \\
&\qquad \text{(distributivnost preseka: } (X\cup Y)\cap Z = (X\cap Z)\cup(Y\cap Z); \\
&\qquad \text{sada koristimo induktivnu pretpostavku dva puta,} \\
&\qquad \text{jednom za } |\textstyle\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i| \text{ i jednom za } |\textstyle\bigcup_{i=1}^{n-1}(A_i\cap A_n)|) \\
&= \left(\sum_{\emptyset\neq I\subseteq\{1,2,\ldots,n-1\}} (-1)^{|I|-1}\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|\right) + |A_n| \\
&\quad - \left(\sum_{\emptyset\neq I\subseteq\{1,2,\ldots,n-1\}} (-1)^{|I|-1}\left|\bigcap_{i\in I\cup\{n\}} A_i\right|\right).
\end{aligned}$$

Dokaz je skoro gotov. U prvoj sumi sabiramo, sa odgovarajućim znacima, veličine svih preseka skupova koji ne uključuju skup A_n. U drugoj sumi se pojavljuju veličine svih preseka k skupova koji uključuju skup A_n (tj. A_n i $k-1$ skupova izmedju A_1, A_2,...,A_{n-1}) sa znakom $-(-1)^{k-1} = (-1)^k$. Druga suma ne uključuje $|A_n|$, ali se taj sabirak pojavljuje izmedju dve sume. Sve u svemu, veličina preseka bilo kojih k skupova izmedju A_1, A_2, ..., A_n pojavljuje se tačno jednom u izrazu sa znakom $(-1)^{k-1}$, što se slaže sa jednačinom (2.20), pa je dokaz indukcijom završen. □

Sada se vidi važnost razumljivog zapisa principa uključenja-isključenja, jer bi se bez toga lako izgubili u prethodnom dokazu. Inače, ovaj princip ima podjednako efektan kombinatorni dokaz.

Dokaz prebrojavanjem. Posmatrajmo proizvoljni element $x \in A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$. On doprinosi tačno 1 veličini unije na levoj strani jednačine (2.20). Razmotrimo sada koliko x doprinosi veličinama raznih preseka na desnoj strani ove jednačine. Neka je j broj skupova A_i koji sadrže x. Preimenujmo skupove tako da se x sadrži u skupovima A_1, A_2, ..., A_j.

Sada se element x pojavljuje u preseku svake k-torke skupova od A_1, A_2, ..., A_j i ni u jednom drugom preseku. Pošto postoji $\binom{j}{k}$ k-elementnih podskupova skupa sa j elemenata, x se pojavljuje u $\binom{j}{k}$ preseka k-torki skupova. Veličine preseka k-torki skupova se množe sa $(-1)^{k-1}$, tako da na desnoj strani jednačine (2.20), element x doprinosi vrednošću

$$j - \binom{j}{2} + \binom{j}{3} - \ldots + (-1)^{j-1}\binom{j}{j}.$$

Iz Posledice 2.6.9 za zbir binomnih koeficijenata sa naizmeničnim znacima, dobijamo da je gornji izraz jednak 1.

Prema tome, za proizvoljno $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ doprinos x obema stranama jednačine (2.19) je jednak 1, pa zaključujemo da su izrazi u ovoj jednačini zaista jednaki. □

PRIMER 2.8.4 Jednog zimskog dana poslanici, njih n na broju, dolaze na zasedanje Skupštine i ostavljaju svoje kapute u garderobi. Po završetku zasedanja, starija gospodja iz garderobe, možda potpuno rasejana, možda skoro slepa posle mnogo godina rada u slabo osvetljenoj garderobi, izdaje jedan kaput svakom poslaniku. Na koliko načina ona može da izda kapute tako da nijedan poslanik ne dobije svoj kaput?

Rešenje. Preformulišimo ovaj problem koristeći permutacije. Ako označimo poslanike brojevima $1, 2, \ldots, n$, kao i njihove kapute, tada izdavanje kaputa iz garderobe odgovara permutaciji π skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, gde je $\pi(i)$ broj kaputa koji je vraćen i-tom poslaniku. Naše pitanje sada glasi: koliko ima permutacija π tako da je $\pi(i) \neq i$ za svako $i = 1, 2, \ldots, n$?

Neka je S_n skup svih permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ i za $i = 1, 2, \ldots, n$ neka je $A_i = \{\pi \in S_n \colon \pi(i) = i\}$. Kažemo da elementi skupa A_i (kojeg čine permutacije!) *fiksiraju* i. Koristeći princip uključenja-isključenja prebrojaćemo "loše" permutacije, tj. one koje fiksiraju bar jedan broj. Loše permutacije su upravo one koje se nalaze u uniji $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

Da bi primenili princip uključenja-isključenja moramo da nadjemo veličinu preseka k-torke skupova A_i. Lako se vidi da je $|A_i| = (n-1)!$, jer je $\pi(i) = i$ fiksirano, a preostali brojevi se mogu proizvoljno poredjati. Koje permutacije leže u $A_i \cap A_j$? Upravo one koje fiksiraju brojeve i i j (dok se preostalih $n-2$ brojeva može poredjati proizvoljno), tako da je $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$. Opštije, za proizvoljne $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ imamo da je $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$, pa princip uključenja-isključenja daje

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!}.$$

Ovim smo izračunali broj loših permutacija (koje fiksiraju bar jedan broj), pa je broj permutacija koje ne fiksiraju nijedan broj jednak

$$D(n) = n! - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!}.$$

■

NAPOMENA Za broj ovakvih permutacija smo koristili oznaku $D(n)$ jer se one nazivaju *deranžmani* (eng. derangement). Prvi je pomenuo ovaj problem francuski matematičar Pierre R. de Montmort (živeo 1678-1719), pod nazivom "le Problème des Rencontres".

Primetimo da je

$$D(n) = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Kao što smo naučili u analizi, red u zagradi konvergira ka e^{-1} kada $n \to \infty$ (gde je e Ojlerov broj) i to veoma brzo. Prema tome, važi približna ocena $D(n) \approx n!/e$.

PRIMER 2.8.5 Neka su X i Y konačni skupovi sa $|X| = n$ i $|Y| = m$. Već nam je poznato da postoji m^n funkcija koje preslikavaju X u Y. Koliko od ovih funkcija je *na*?

Rešenje. Kao i u prethodnom primeru, iskoristićemo princip uključenja-isključenja da najpre prebrojimo objekte (funkcije) koje ne zadovoljavaju traženi uslov (nisu *na*). Tada je broj funkcija *na* jednak razlici izmedju ukupnog broja funkcija m^n i broja "loših" funkcija.

Bez gubitka opštosti, pretpostavimo da je $Y = \{1, 2, \ldots, m\}$. Neka A_i označava skup funkcija koje preslikavaju X u Y i pritom ne uzimaju vrednost i. Ako funkcija $f\colon X \mapsto Y$ nije *na*, tada postoji $i \in Y$ tako da za svako $x \in X$ važi $f(x) \neq i$. Samim tim, funkcija f pripada skupu A_i, pa zaključujemo da funkcija nije *na* ako i samo ako pripada skupu $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$.

Koliko ima funkcija u skupu A_i? Skup A_i sadrži sve funkcije koje preslikavaju X u $Y \setminus \{i\}$, pa je stoga $|A_i| = (m-1)^n$. Skup $A_i \cap A_j$ sadrži funkcije koje ne uzimaju vrednosti i i j, tj. sve funkcije koje preslikavaju X u $Y \setminus \{i, j\}$, pa je $|A_i \cap A_j| = (m-2)^n$. U opštem slučaju, $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ sadrži sve funkcije koje ne uzimaju nijednu od vrednosti i_1, i_2, $\ldots$, i_k, tako da je $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (m-k)^n$. Sada po principu uključenja-isključenja imamo da je

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \binom{m}{k} (m-k)^n.$$

Prema tome, ukupan broj funkcija *na* je jednak

$$m^n - \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \binom{m}{k} (m-k)^n = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n.$$

■

NAPOMENA Ako vrednost $\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \binom{m}{k} (m-k)^n$ podelimo sa $m!$, dobijamo ceo broj koji se naziva **Stirlingov broj druge vrste** i označava sa $S(n, m)$ (u starijim knjigama je označavan sa $\left\{ {n \atop m} \right\}$). Ovi brojevi se pojavljuju prilikom prebrojavanja podela n-elementnog skupa na m medjusobno disjunktnih podskupova.

GENERALISANI PR. UKLJUČENJA-ISKLJUČENJA

Sada ćemo dati uopštenje Principa uključenja-isključenja (tj. Teoreme 2.8.3), tzv. Generalisani princip uključenja-isključenja.

TEOREMA 2.8.6 **Generalisani princip uključenja-isključenja.** Neka je X skup sa n elemenata i $\Pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m\}$ skup od m svojstava. Za proizvoljan k-podskup $\{\pi_{i_1}, \pi_{i_2}, \ldots, \pi_{i_k}\}$ skupa Π označimo sa $n(\pi_{i_1}, \pi_{i_2}, \ldots, \pi_{i_k})$ broj elemenata skupa X koji poseduju ovih k svojstava (mogu i još neka pored ovih k). Uvedimo $s_0 = n$ i za $k = 1, 2, \ldots, m$

$$s_k = \sum n(\pi_{i_1}, \pi_{i_2}, \ldots, \pi_{i_k}),$$

gde ova suma ide po svim k-podskupovima skupa Π (tj. imamo $\binom{m}{k}$ sabiraka). Konačno, neka je e_j $(j = 0, 1, \ldots m)$ broj elemenata skupa X koji imaju tačno j od ovih m svojstava iz Π, a neka je f_j $(j = 1, 2, \ldots m)$ broj elemenata skupa X koji imaju bar j od ovih m svojstava iz Π. Tada važe sledeće formule:

$$e_j = s_j - \binom{j+1}{1} s_{j+1} + \binom{j+2}{2} s_{j+2} - \ldots + (-1)^{m-j} \binom{m}{m-j} s_m, \tag{2.21}$$

$$f_j = s_j - \binom{j}{1} s_{j+1} + \binom{j+1}{2} s_{j+2} - \ldots + (-1)^{m-j} \binom{m-1}{m-j} s_m. \tag{2.22}$$

Dokaz. Pokazaćemo da se svaki element skupa X javlja jednak broj puta i na levoj i na desnoj strani jednakosti (2.21).

Ako neki element skupa X ima manje od j svojstava on se javlja 0 puta na obe strane.

Ako neki element ima tačno j svojstava, tada se on broji tačno 1 na levoj strani i $\binom{j}{j} = 1$ (u članu s_j) na desnoj strani.

Ako neki element ima tačno $j + l$ svojstava (gde je $1 \leqslant l \leqslant m - j$), tada se taj element na levoj strani računa 0 puta. Na desnoj strani on se javlja $\binom{j+l}{j}$ puta u s_j, $\binom{j+l}{j+1}$ puta u s_{j+1}, $\binom{j+l}{j+2}$ puta u s_{j+2}, ..., $\binom{j+l}{j+l}$ puta u s_{j+l}. Stoga se taj element na desnoj strani javlja ukupno

$$\begin{aligned}
&\binom{j+l}{j} - \binom{j+1}{1}\binom{j+l}{j+1} + \binom{j+2}{2}\binom{j+l}{j+2} - \ldots + (-1)^l \binom{j+l}{l}\binom{j+l}{j+l} \\
&= \binom{j+l}{j} - \binom{l}{1}\binom{j+l}{j} + \binom{l}{2}\binom{j+l}{j} - \ldots + (-1)^l \binom{l}{l}\binom{j+l}{j} \\
&= \binom{j+l}{j}(1-1)^l = 0
\end{aligned}$$

puta, čime smo kompletirali dokaz jednakosti (2.21).

Primetimo da za $j = 0$ dobijamo običan Princip uključenja-isključenja, tj. formulu (2.20), kod koje skup A_i (za $i = 1, 2, \ldots, m$) čine elementi koji poseduju svojstvo π_i.

Sada ćemo pokazati i drugu formulu. Dovoljno je pokazati da niz f_j dat jednakošću (2.22), zadovoljava rekurentnu jednačinu $f_j - f_{j+1} = e_j$ uz završni uslov $f_m = e_m$. Sada koristimo adicionu formulu 2.6 za binomne koeficijente i dobijamo:

$$\begin{aligned} f_j - f_{j+1} &= s_j - \left[\binom{j}{1} + \binom{j}{0}\right] s_{j+1} + \left[\binom{j+1}{2} + \binom{j+1}{1}\right] s_{j+2} \\ &\quad - \ldots + (-1)^{m-j} \left[\binom{m-1}{m-j} + \binom{m-1}{m-j-1}\right] s_m \\ &= s_j - \binom{j+1}{1} s_{j+1} + \binom{j+2}{2} s_{j+2} - \ldots + (-1)^{m-j} \binom{j+1}{1} s_{j+1} \\ &= e_j. \end{aligned}$$

Dalje, kada uvrstimo $j = m$ u formule (2.22) i (2.21), dobijamo $f_m = s_m = e_m$. □

Generalisani princip uključenja-isključenja ćemo ilustrovati na jednom primeru i jednom tvrdjenju.

PRIMER 2.8.7 Sada ćemo ponovo naći koliko od studenata iz Primera 2.8.1 i 2.8.2 izlazi na tačno jedan ispit i koliko na bar 2 ispita.

Rešenje. Ubacimo podatke u formule (2.21) i (2.22):
Imamo da je $s_1 = 24 + 20 + 13 = 57$, $s_2 = 6 + 5 + 4 = 15$ i $s_3 = 1$. Tada

$$e_1 = 57 - \binom{2}{1} \cdot 15 + \binom{3}{2} \cdot 1 = 30$$

studenata izlazi na tačno 1 ispit, a

$$f_2 = 15 - \binom{2}{1} \cdot 1 = 13$$

studenata izlazi na bar 2 ispita (što su rezultati koje smo dobili i u Primeru 2.8.2). ■

TEOREMA 2.8.8 Neka su X i Π skupovi kao u Teoremi 2.8.6. Dokazati da je broj elemenata skupa X koje imaju paran broj svojstava jednak

$$\frac{1}{2}\left(s_0 + \sum_{k=0}^{m} (-2)^k s_k\right),$$

dok je broj elemenata skupa X koje imaju neparan broj svojstava jednak

$$\frac{1}{2}\left(s_0 - \sum_{k=0}^{m}(-2)^k s_k\right).$$

Dokaz. Uvedimo funkciju $E(x) = e_0+e_1+e_2x^2+\ldots+e_mx^m$. Sada iskoristimo tvrdjenje Teoreme 2.8.6 pa dobijamo

$$\begin{aligned} E(x) &= \sum_{j=0}^{m} e_jx^j = \sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{k=j}^{m}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}s_k\right)x^j = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k s_k \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-x)^j \\ &= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k s_k(1-x)^k = \sum_{k=0}^{m} s_k(x-1)^k. \end{aligned}$$

Dalje imamo da je broj elemenata skupa X koje imaju paran broj svojstava jednak $\frac{E(1)+E(-1)}{2} = \frac{1}{2}\left(s_0 + \sum\limits_{k=0}^{m}(-2)^k s_k\right)$, dok je broj elemenata skupa X koje imaju neparan broj svojstava jednak $\frac{E(1)-E(-1)}{2} = \frac{1}{2}\left(s_0 - \sum\limits_{k=0}^{m}(-2)^k s_k\right)$.
□

ZADACI

2.8.1 U razredu sa 30 učenika, 12 od njih voli matematiku, 14 voli fiziku, 13 hemiju, 5 učenika voli i matematiku i fiziku, 7 voli i fiziku i hemiju, a 4 voli matematiku i hemiju. Tri učenika vole sva tri predmeta. Koliko učenika ne voli ni jedan od ovih predmeta?

2.8.2 U studentskom domu je 12 studenata koji slušaju kurs iz biologije (B), 20 koji slušaju kurs iz matematike (M), 20 koji slušaju kurs iz fizike (F) i 8 koji slušaju kurs iz hemije (H). Od toga 5 studenata sluša i B i M, 7 sluša i B i F, 4 sluša i B i H, 16 sluša i M i F, 4 sluša i M i H i 3 sluša i F i H. Tu su 3 koji slušaju B, M i F, 2 – B, M i H, 3 – B, F i H i 2 – M, F i H. Konačno, tu su dvojica koji slušaju sva 4 kursa. Pored njih u domu je još 71 student koji ne sluša nijedan od ovih kurseva. Odredite ukupan broj studenata u domu.

2.8.3 Odrediti koliko ima brojeva ne većih od 1000 koji su deljivi bar jednim od brojeva 2, 3, 5 ili 7.

2.8.4 Odrediti broj celobrojnih rešenja jednačine $a+b+c+d = 17$, koja zadovoljavaju uslove $1 \leqslant a \leqslant 3$, $2 \leqslant b \leqslant 4$, $3 \leqslant c \leqslant 5$ i $4 \leqslant d \leqslant 6$.

2.8.5 **a)** Koliko se reči, koje mogu da budu besmislene, dobija premeštanjem slova reči

KOMBINATORIKA?
b) Koliko ima takvih reči kod kojih nikoja dva ista slova nisu susedna?

2.8.6 Odrediti broj 9-tocifrenih brojeva koji imaju sve cifre različite i ne sadrže cifru 0, takvih da se nijedan od blokova **a)** 23, 45 i 678; **b)** 34, 45 i 738 ne pojavljuje.

2.8.7 Pokazati da je 97 25-ti prost broj.

2.8.8 Odrediti broj prirodnih brojeva manjih od 501, koji nisu deljivi kvadratom (eng. *squarefree number*).

2.8.9 Naći broj permutacija koje imaju tačno k fiksnih tačaka.

2.8.10 Koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ koje nemaju ciklus dužine k, gde je $1 \leqslant k \leqslant n$?

2.8.11 Neka je $n \geqslant 2$. Koliko ima permutacija p skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ takvih da za svako $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ element $j+1$ ne stoji neposredno iza elementa j?

2.8.12 Na koliko se načina polja šahovske table 8×8 mogu obojiti sa 8 različitih boja, tako da se u svakoj vrsti pojavljuje svaka boja i da u svakoj koloni nikoja dva susedna polja nisu obojena istom bojom ?

2.8.13 Pokazati da je broj kvadratnih matrica reda 3 sa nenegativnim elementima, kod kojih je zbir elemenata u ssvakoj vrsti i svakoj koloni jednak r dat formulom

$$\binom{r+2}{2}^2 - 3\binom{r+3}{4}.$$

2.8.14 Na koliko načina n bračnih parova može sesti za okrugli sto sa $2n$ označenih stolica tako da supružnici ne sede jedno pored drugog?

2.8.15 Za studente iz zadatka 1.8.2 odrediti koliko od njih sluša:

a) tačno 1 kurs?

b) tačno 2 kursa?

c) tačno 3 kursa?

d) bar 1 kurs?

e) bar 2 kursa?

f) bar 3 kursa?

2.8.16 U lift u prizemlju je ušlo 9 ljudi. Na svakom od sledećih spratova bar 1 čovek izlazi iz lifta i niko ne ulazi u njega. Na 5-om spratu se lift ispraznio. Odrediti broj svih mogućih takvih pražnjenja lifta.

2.8.17 **a)** Na koliko načina se mogu poredjati u niz 3 Amerikanca, 3 Engleza i 3 Rusa, tako da nikoja tri zemljaka ne stoje zajedno?
b) Na koliko načina se mogu poredjati u niz 3 Amerikanca, 3 Engleza i 3 Rusa, tako da nikoja dva zemljaka ne stoje zajedno?

Glava 3

Napredne tehnike prebrojavanja

U prethodnim odeljcima smo se upoznali sa osnovnim tehnikama prebrojavanja konačnih skupova. Na početku ove glave ćemo predstaviti još jednu važnu tehniku prebrojavanja. Osnovna ideja, sasvim iznenadjujuća, je da beskonačnom nizu realnih brojeva dodelimo odredjenu neprekidnu funkciju, tzv. funkciju generatrise niza. Problemi nad nizom se tada mogu prevesti na jezik neprekidnih funkcija i poznate analitičke metode. U sekcijama nakon toga uglavnom ćemo se baviti pitanjem kako dobiti opštu formulu za elemente nizova brojeva i polinoma u kojima postoje rekurentne relacije, takve da se, počev od nekog mesta u nizu, svaki sledeći element može, pomoću iste formule, prikazati pomoću prethodnih elemenata niza. U rešavanju ovog pitanja veliku pomoć će nam pružiti upravo funkcije generatrise.

3.1 FUNKCIJE GENERATRISE

PRIMER 3.1.1 Posmatrajmo niz $(1, 1, 1, 1, \dots)$ sastavljen od jedinica. Njega možemo "kodirati" pomoću funkcije

$$1 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 + \dots.$$

Ova funkcija sada predstavlja beskonačnu geometrijsku progresiju sa količnikom x, pa je njena vrednost jednaka

$$\frac{1}{1-x},$$

pod uslovom da je $|x| < 1$. Sada možemo da kažemo:

Funkcija $\dfrac{1}{1-x}$ je *funkcija generatrise* niza $(1, 1, 1, 1, \dots)$. ■

U ovakvom uvodnom tekstu, mi ćemo obraditi samo jednostavnije primere, koji bi se u većini slučajeva, koristeći razne trikove, mogli rešiti i bez primene funkcija generatrise. Medjutim, ovo ne znači da funkcije generatrise ne treba učiti! One predstavljaju veoma moćnu tehniku prebrojavanja: postoji mnogo složenih problema za čije se rešavanje ostale tehnike ne mogu primeniti ili postaju suviše komplikovane.

STEPENI REDOVI

DEFINICIJA 3.1.2 *Stepeni red* je beskonačna suma oblika

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$

gde su a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_n, $\ldots$ realni brojevi, a x je realna promenljiva[1].

Jednostavan primer stepenog reda je

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \tag{3.1}$$

iz prethodnog primera. U slučaju da je $x \in (-1, 1)$, suma ovog stepenog reda ima vrednost $\frac{1}{1-x}$. U ovom smislu, stepeni red (3.1) odredjuje funkciju

$$\frac{1}{1-x}.$$

S druge strane, ova funkcija već sadrži sve podatke o stepenom redu (3.1). Zaista, ako diferenciramo funkciju k puta i stavimo $x = 0$ u rezultat, dobićemo tačno $k!$ puta koeficijent uz x^k u stepenom redu. Drugim rečima, stepeni red (3.1) je Taylorov red funkcije $\frac{1}{1-x}$ u tački $x = 0$ (tj. Maklorenov red). Prema tome, funkciju $\frac{1}{1-x}$ možemo da zamislimo kao inkarnaciju beskonačnog niza $(1, 1, 1, \ldots)$ i obrnuto.

Ovakvo pretvaranje beskonačnih nizova u funkcije i nazad je temelj tehnike funkcija generatrise.

DEFINICIJA 3.1.3 Neka je $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ niz realnih brojeva. Pod *funkcijom generatrise*[2] ovog niza podrazumeva se stepeni red

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

[1]Ponekad je od velike koristi posmatrati x kao kompleksnu promenljivu i primeniti metode iz kompleksne analize.

[2]Strogo govoreći, ovo je *obična* funkcija generatrise. S obzirom da se ovde nećemo baviti drugim vrstama funkcija generatrise (npr. eksponencijelnim funkcijama generatrisa), jednostavno ćemo izbaciti reč “obična”.

U daljem tekstu ćemo nizu (a_n) pridruživati funkciju generatrise $A(x)$ (tj. malo slovo koje odgovara nizu ćemo zameniti sa odgovarajućim velikim slovom za funkciju generatrise).

Iz matematičke analize je poznato da ako postoji realni broj K tako da je $|a_n| \leqslant K^n$ za svako $n \geqslant 1$, tada stepeni red $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ konvergira za svako $x \in (-\frac{1}{K}, \frac{1}{K})$. Štaviše, funkcija $A(x)$ ima izvode svih redova u tački 0 i pritom važi da je

$$a_i = \frac{A^{(i)}(0)}{i!}.$$

Mi se ovde nećemo zamarati proverom da li dobijeni stepeni redovi konvergiraju u nekoj okolini tačke 0. Obično je to lako. Sem toga, u mnogo slučajeva ta se provera može izbeći na sledeći način: kada pronadjemo tačno rešenje problema koristeći funkcije generatrise, čak i na sumnjiv način, to rešenje se može proveriti nekim drugim metodom, na primer pomoću principa matematičke indukcije. Štaviše, postoji posebna teorija takozvanih *formalnih stepenih redova* koja omogućava nesmetan rad čak i sa stepenim redovima koji nikad ne konvergiraju (sem u 0). Da zaključimo, konvergencija nikad nije bitno pitanje u primenama funkcija generatrise.

Ako niz $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ ima samo konačno mnogo nenula članova, tada je funkcija generatrise običan polinom. Mi ćemo naše proučavanje funkcija generatrise stoga početi upravo polinomima, kao njihovom najjednostavnijem obliku.

NOVČIĆI I POLINOMI

Pre nego što ubacimo novčiće u igru, podsetimo se najpre kako se množe polinomi, na primer,

$$p(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

i

$$q(x) = 1 + x + x^2 + x^3?$$

Jednostavno pravilo kaže da treba da pomnožimo svaki član iz $p(x)$ sa svakim članom iz $q(x)$ i da zatim saberemo sve dobijene proizvode. Njihovo sabiranje je u ovom slučaju jednostavno, jer su svi koeficijenti jednaki 1. Tako odmah dobijamo da je

$$p(x)q(x) = x^7 + 2x^6 + 3x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$$

Hajde sada da razmotrimo drugačije pitanje. Izaberimo neki stepen x, na primer x^5. Sada želimo da saznamo koliki je koeficijent uz x^5 u proizvodu $p(x)q(x)$, ali bez računanja celog proizvoda. U ovom slučaju, proizvod x^5 se dobija:

- množenjem člana x^2 iz $p(x)$ sa članom x^3 iz $q(x)$, takodje i
- množenjem člana x^3 iz $p(x)$ sa članom x^2 iz $q(x)$ i konačno,

- množenjem člana x^4 iz $p(x)$ sa članom x iz $q(x)$.

Svaki od ovih proizvoda dodaje 1 na odgovarajući koeficijent, pa možemo da zaključimo da je koeficijent uz x^5 jednak 3.

Razmotrimo sada, na izgled, drugačiji problem:

PRIMER 3.1.4 Imamo četiri zlatna i tri srebrna novčića, svaki vrednosti od po jednog dinara. Na koliko načina možemo platiti 5 dinara pomoću ovih novčića?

Rešenje. Ako sa i označimo broj zlatnih, a sa j broj srebrnih novčića korišćenih za plaćanje, tada ovaj problem traži da nadjemo broj rešenja jednačine

$$i + j = 5, \qquad i \in \{0,1,2,3,4\}, \qquad j \in \{0,1,2,3\}.$$

Ako sada pretpostavimo da je i stepen promenljive x u našem polinomu $p(x)$, a j stepen promenljive x u polinomu $q(x)$, tada je broj rešenja ove jednačine upravo jednak koeficijentu uz x^5 u proizvodu $p(x)q(x)$, a to je, kao što već znamo, 3.

■

Uopšte, ako su I i J konačni skupovi prirodnih brojeva, kojima su pridruženi polinomi

$$p(x) = \sum_{i \in I} x^i \qquad \text{i} \qquad q(x) = \sum_{j \in J} x^j$$

(primetimo da su koeficijenti u ovim polinomima nule i jedinice), tada je, za svaki prirodan broj r, broj rešenja (i,j) jednačine

$$i + j = r, \qquad i \in I, \qquad j \in J,$$

jednak koeficijentu uz x^r u proizvodu $p(x)q(x)$.

Sledeće, još interesantnije uopštenje ovog razmatranja bavi se proizvodom tri i više polinoma.

PRIMER 3.1.5 Na koliko načina se može platiti iznos od 21 dinara ako imamo šest novčića vrednosti od po 1 dinara, pet novčića vrednosti od po 2 dinara i četiri novčića vrednosti od po 5 dinara?

Rešenje. Traženi broj jednak je broju rešenja jednačine

$$i_1 + i_2 + i_3 = 21$$

gde je

$$i_1 \in \{0,1,2,3,4,5,6\}, \quad i_2 \in \{0,2,4,6,8,10\} \quad \text{i} \quad i_3 \in \{0,5,10,15,20\}.$$

Ovde i_1 označava deo iznosa plaćen novčićima od 1 dinara, i_2 deo iznosa plaćen novčićima od 2 dinara, a i_3 deo iznosa plaćen novčićima od 5 dinara.

Broj rešenja ove jednačine je sada jednak koeficijentu uz x^{21} u proizvodu

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)\cdot(1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10})\cdot(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20}).$$

Zaista, član sa x^{21} se dobija tako što se pomnože član x^{i_1} iz prvog para zagrada, član x^{i_2} iz drugog para zagrada i član x^{i_3} iz trećeg para zagrada, takvi da je $i_1+i_2+i_3=21$. Svaki takav izbor brojeva i_1, i_2 i i_3 dodaje 1 na odgovarajući koeficijent u proizvodu. ■

KOMBINATORNO ZNAČENJE BINOMNE TEOREME

Jedan od oblika binomne teoreme tvrdi da je

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n. \tag{3.2}$$

Na levoj strani imamo proizvod n polinoma — svaki je jednak $1+x$. Analogno prethodnim razmatranjima sa novčićima, koeficijent uz x^r u proizvodu $(1+x)^n$ predstavlja broj rešenja jednačine

$$i_1+i_2+\ldots+i_n=r, \qquad i_1,i_2,\ldots,i_n\in\{0,1\}.$$

Svako rešenje ove jednačine označava izbor r promenljivih izmedju i_1, i_2, …, i_r koje su jednake 1 — preostalih $n-r$ promenljivih mora da bude jednako 0. Broj ovakvih izbora je isti kao i broj r-točlanih podskupova skupa sa n elemenata, tj. $\binom{n}{r}$. Ovo znači da je koeficijent uz x^r u proizvodu $(1+x)^n$ jednak $\binom{n}{r}$. Upravo smo dokazali binomnu teoremu na kombinatorni način!

Veštim igranjem sa polinomom $(1+x)^n$ i njemu sličnim, možemo da dobijemo razne identitete. U odeljku 2.6 već smo videli neke od njih: formule $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ i $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$ dobijene su, redom, zamenom $x=1$ i $x=-1$ u (3.2).

PRIMER 3.1.6 Za svako $n\geqslant 1$ važi
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Rešenje. Ova jednakost se dobija diferenciranjem (3.2) po promenljivoj x. Na obe strane kao rezultat mora da se dobije isti polinom. Diferenciranjem leve strane dobija se
$$n(1+x)^{n-1},$$
a diferenciranjem desne strane, koja je $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$, dobija se
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}.$$

Zamenom $x=1$ dobijamo traženi identitet. ■

UOPŠTENA BINOMNA TEOREMA

Već smo videli da se binomna teorema (3.2) može formulisati kao rezultat o koeficijentima polinoma $(1+x)^n$. Za geometrijsku progresiju sa količnikom $-x$ važi

$$1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^k x^k + \ldots = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}.$$

Za svako $n \in \mathbb{N}$ izraz $(1+x)^{-n}$ možemo da posmatramo kao proizvod stepenih redova jednakih $(1+x)^{-1}$. Naravno, ono što bismo voleli da imamo je formula za koeficijent uz x^k u rezultujućem stepenom redu. Ova formula je veoma jednostavna i omogućiće nam da uopštimo binomnu teoremu i na negativne brojeve.

TEOREMA 3.1.7 Koeficijent uz x^k u stepenom redu $(1+x)^{-n}$ jednak je

$$(-1)^k \binom{n+k-1}{k} = \binom{-n}{k}.$$

Dokaz. Da izbegnemo znak minus, posmatraćemo $(1-x)^{-n}$ umesto $(1+x)^{-n}$. Krajnji rezultat dobijamo zamenom x sa $-x$.

Pošto je

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots,$$

imamo da je $(1-x)^{-n}$ proizvod n činilaca, od kojih je svaki jednak gornjem stepenom redu. Koeficijent uz x^k u ovom proizvodu je tada jednak broju rešenja jednačine

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_n = k$$

gde, za svako $j = 1, 2, \ldots, n$, nenegativni ceo broj i_j predstavlja doprinos x^{i_j} iz j-tog činioca $(1+x+x^2+\ldots+x^k+\ldots)$. Kao što već znamo iz primera 2.4.10, svako rešenje gornje jednačine označava tačno jedan neuredjeni izbor k elemenata sa ponavljanjem iz skupa od n elemenata (i obratno), tako da zaključujemo da je koeficijent uz x^k jednak

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Zamenom x sa $-x$ sada dobijamo rezultat kako je naveden u teoremi. □

Na osnovu ove teoreme zaključujemo da važi Uopštena binomna teorema.

TEOREMA 3.1.8 **Uopštena binomna teorema.** Za proizvoljan, pozitivan ili negativan, ceo broj n važi

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{k}x^k + \ldots \tag{3.3}$$

□

NAPOMENA Ovaj opšti oblik je funkcija generatrise, ali kada je n prirodan broj tada važi

$$\binom{n}{k} = 0 \quad \text{za svako } k > n,$$

pa se desna strana jednakosti svodi na polinom.

PRIMER 3.1.9 Koeficijent uz x^n u stepenom redu $(1+x)^{-2}$ jednak je

$$(-1)^n \binom{2+n-1}{n} = (-1)^n \binom{n+1}{n} = (-1)^n (n+1).$$

Sada možemo da pišemo

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - \ldots + (-1)^n (n+1) x^n + \ldots$$

■

Inače, Uopštena binomna teorema ostaje da važi i u slučaju kada je n proizvoljan realan broj.

DEFINICIJA 3.1.10 Za proizvoljan realni broj α i svaki nenegativni broj k, binomni koeficijent $\binom{\alpha}{k}$ se definiše pomoću

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Ova definicija je proširenje uobičajene definicije 2.4.2 binomnog koeficijenta, jer kada je $\alpha = n$ za nenegativan ceo broj n, dobijamo istu formulu za $\binom{\alpha}{k}$ kao u definiciji 2.4.2.

Zamenom x nekim drugim izrazom u Uopštenoj binomnoj teoremi možemo da dobijemo razna njena dalja uopštenja. Mi ćemo za naša razmatranja nekoliko puta da koristimo stepeni red za $(1-\lambda x)^{-n}$, koji je jednak

$$(1-\lambda x)^{-n} = 1 + n\lambda x + \ldots + \binom{n+k-1}{k} \lambda^k x^k + \ldots$$

PRIMER 3.1.11 Kutija sadrži 30 crvenih, 40 plavih i 50 belih lopti. Lopte iste boje se ne razlikuju medjusobno. Na koliko načina se može izabrati 70 lopti iz kutije?

Rešenje. Kao što već znamo, broj koji tražimo je jednak koeficijentu uz x^{70} u proizvodu

$$(1+x+x^2+\ldots+x^{30})(1+x+x^2+\ldots+x^{40})(1+x+x^2+\ldots+x^{50}).$$

Ovaj izraz nećemo nikako da množimo! Umesto toga, iskoristićemo činjenicu da je

$$1+x+x^2+\ldots+x^{30}=\frac{1-x^{31}}{1-x},$$

što je već poznati zbir konačne geometrijske progresije. Ceo proizvod se sada može napisati kao

$$\frac{1-x^{31}}{1-x}\cdot\frac{1-x^{41}}{1-x}\cdot\frac{1-x^{51}}{1-x}=(1-x)^{-3}(1-x^{31})(1-x^{41})(1-x^{51}).$$

Činilac $(1-x)^{-3}$ može da se razvije u stepeni red prema uopštenoj binomnoj teoremi (3.3). U proizvodu preostalih činilaca $(1-x^{31})(1-x^{41})(1-x^{51})$ tada je dovoljno naći koeficijente samo za stepene do x^{70}. Stoga dobijamo proizvod

$$\left(\tbinom{2}{2}+\tbinom{3}{2}x+\tbinom{4}{2}x^2+\tbinom{5}{2}x^3+\ldots\right)\cdot(1-x^{31}-x^{41}-x^{51}+\ldots),$$

gde $\ldots$ u drugom paru zagrada stoji umesto stepena većih od x^{70} (najmanji stepen od tih ostalih članova je $x^{31}\cdot x^{41}=x^{72}$). Koeficijent uz x^{70} u ovom proizvodu, što je i traženi broj izbora lopti iz kutije, jednak je

$$\binom{70+2}{2}-\binom{70+2-31}{2}-\binom{70+2-41}{2}-\binom{70+2-51}{2}=1\,061.$$

■

NALAŽENJE FUNKCIJA GENERATRISE

Sada ćemo se baviti načinima da se funkcija generatrise "sastavi" iz već poznatih "delova", a na kraju ćemo dati i spisak nekih vrlo poznatih "polaznih" delova. Kroz ceo odeljak, neka su $(a_0,a_1,a_2,\ldots)$ i $(b_0,b_1,b_2,\ldots)$ nizovi, a $A(x)$ i $B(x)$ njihove funkcije generatrise.

Sabiranje nizova

Ako nizove sabiramo član po član, odgovarajuća operacija sa funkcijama generatrisa je prosto njihovo *sabiranje.* Tačnije, niz $(a_0+b_0,a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots)$ ima funkciju generatrise $A(x)+B(x)$.

Množenje niza realnim brojem

Još jedna prosta operacija je *množenje fiksnim realnim brojem* α. Naime, niz $(\alpha a_0,\alpha a_1,\alpha a_2,\ldots)$ ima funkciju generatrise $\alpha A(x)$.

Pomeranje niza udesno

Ako je n prirodan broj, tada funkcija generatrise $x^n \cdot A(x)$ odgovara nizu

$$(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n\times}, a_0, a_1, a_2, \ldots).$$

Ovo je veoma korisno kada niz treba *pomeriti udesno* za odredjeni broj mesta.

Pomeranje niza ulevo

Šta da radimo ako niz želimo da *pomerimo ulevo* za n mesta kako bismo dobili funkciju generatrisu za niz $(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots)$? Prvo treba da oduzmemo prvih n sabiraka funkcije generatrise $A(x)$ (tako "eliminišemo" prvih n članova niza, tj. pretvaramo ih u nule), a onda je neophodno još da $A(x)$ podelimo sa x^n. Funkcija generatrise za gornji niz je

$$\frac{A(x) - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1})}{x^n}.$$

Zamena promenljive x sa αx

Neka je α fiksni realni broj i posmatrajmo funkciju $C(x) = A(\alpha x)$. Tada je $C(x)$ funkcija generatrise za niz $(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \ldots)$.

PRIMER 3.1.12 Već znamo da je

$$\frac{1}{1-x}$$

funkcija generatrise za niz $(1, 1, 1, 1, \ldots)$. Prema upravo datom pravilu, tada je

$$\frac{1}{1-2x}$$

funkcija generatrise niza koji se sastoji od stepena broja 2: $(1, 2, 4, 8, 16 \ldots)$.

■

PRIMER 3.1.13 Ova operacija se takodje koristi u sledećem triku kojim se svi članovi niza na neparnim mestima zamenjuju sa 0: kao što i sam čitalac može lako da proveri, funkcija

$$\frac{A(x) + A(-x)}{2}$$

je funkcija generatrise za niz $(a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, \ldots)$. ■

Zamena promenljive x sa x^n

Još jedna mogućnost je *zamena promenljive x sa x^n*. Ovo daje funkciju generatrise za niz čiji je član sa rednim brojem nk jednak k-tom članu originalnog niza, dok su ostali članovi niza jednaki 0 (obratimo pažnju da je a_0 nulti član niza (a_n)). Na primer, funkcija $A(x^3)$ generiše niz $(a_0, 0, 0, a_1, 0, 0, a_2, 0, 0, a_3, 0, \dots)$.

PRIMER 3.1.14 Naći funkciju generatrise za niz

$$(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \dots),$$

tj. za niz $a_n = 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Rešenje. Kao što smo već videli, niz $(1, 2, 4, 8, \dots)$ ima funkciju generatrise

$$\frac{1}{1-2x}.$$

Zamenom x sa x^2 dobijamo da je

$$\frac{1}{1-2x^2}$$

funkcija generatrise za niz $(1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, \dots)$. Množenjem sa x dalje dobijamo da je

$$\frac{x}{1-2x^2}$$

funkcija generatrisa za niz $(0, 1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, \dots)$, a na kraju sabiranjem ove dve funkcije generatrise dobijamo i da je tražena funkcija generatrisa jednaka

$$\frac{1+x}{1-2x^2}.$$

■

Diferenciranje i integracija

Popularne operacije iz matematičke analize, *diferenciranje* i *integracija* funkcija generatrisa imaju sledeće značenje na jeziku nizova.

Izvod $A'(x)$ funkcije $A(x)$ odgovara nizu

$$(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, (n+1)a_{n+1}, \dots).$$

Tačnije, član sa rednim brojem k jednak je $(k+1)a_{k+1}$ (stepeni red se diferencira član po član isto kao i polinom).

Funkcija generatrisa $\int_0^x A(t)\,\mathrm{d}t$ odgovara nizu

$$(0, a_0, \tfrac{1}{2}a_1, \tfrac{1}{3}a_2, \tfrac{1}{4}a_3, \dots, \tfrac{1}{n}a_{n-1}, \dots),$$

tj. za sve $k \geqslant 1$, član sa rednim brojem k jednak je $\frac{1}{k}a_{k-1}$.

PRIMER 3.1.15 Naći funkciju generatrise za niz kvadrata $(1^2, 2^2, 3^2, \ldots)$, tj. za niz $a_n = (n+1)^2$.

Rešenje. Počinjemo sa nizom $(1, 1, 1, 1, \ldots)$ čija je opšte poznata funkcija generatrise
$$\frac{1}{1-x}.$$
Po prethodnom pravilu, prvi izvod ove funkcije,
$$\frac{1}{(1-x)^2},$$
je funkcija generatrise niza $(1, 2, 3, 4, \ldots)$, tj. niza $a_n = n+1$. Po istom pravilu, drugi izvod ove funkcije,
$$\frac{2}{(1-x)^3},$$
je funkcija generatrise niza $(2 \cdot 1, 3 \cdot 2, 4 \cdot 3, \ldots)$. Član sa rednim brojem k u ovom nizu ima vrednost $(k+2)(k+1) = (k+1)^2 + k + 1$. Pošto mi želimo niz sa opštim članom $a_k = (k+1)^2$, od gornje funkcije generatrise preostaje još samo da oduzmemo funkciju generatrise za niz $(1, 2, 3, 4, \ldots)$. Time dobijamo da je tražena funkcija generatrise jednaka
$$\frac{2}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$
■

Množenje funkcija generatrise

Množenje funkcija generatrise je ujedno i najzanimljivija operacija. Proizvod $A(x)B(x)$ je funkcija generatrise za niz $(c_0, c_1, c_2, \ldots)$, gde su koeficijenti c_k dati pomoću:
$$\begin{aligned} c_0 &= a_0b_0 \\ c_1 &= a_0b_1 + a_1b_0 \\ c_2 &= a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$
i uopšte možemo da pišemo
$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$
Ovo se lako pamti — koeficijenti proizvoda $A(x)B(x)$ sve do k-tog su isti kao i u proizvodu polinoma $(a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k)$ i $(b_0 + b_1x + \ldots + b_kx^k)$.

PRIMER 3.1.16 Pretpostavimo da u državi X u opticaju postoje zlatni novčići vrednosti 2 dinara i srebrni novčići vrednosti 3 dinara. Naći funkciju generatrise niza čiji n-ti element, $n \geqslant 0$, predstavlja broj načina da se n dinara plati pomoću zlatnih i srebrnih novčića?

Rešenje. Ovaj primer je uopštenje primera sa novčićima iz prethodne sekcije, koje dobijamo prelaskom sa konačnog na beskonačni broj dostupnih novčića.

Sada, vrednosti koje se mogu platiti samo pomoću zlatnih novčića jesu $0, 2, 4, 6, \ldots$, a za svaku od njih postoji samo jedan način plaćanja: svi novčići moraju biti zlatni, zar ne? Prema tome, funkcija generatrise za ovakva ograničena plaćanja je

$$Z(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Na sličan način, samo pomoću srebrnih novčića možemo da platimo, uvek na jedinstven način, vrednosti $0, 3, 6, 9, \ldots$, čija je funkcija generatrise

$$S(x) = 1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots = \frac{1}{1 - x^3}.$$

Sada, kao i u ranijim primerima, ako želimo da n dinara platimo koristeći i zlatne i srebrne novčiće, broj ovakvih plaćanja će biti jednak koeficijentu uz x^n u proizvodu $Z(x)S(x)$. Prema tome, tražena funkcija generatrise je jednaka

$$Z(x)S(x) = \frac{1}{(1 - x^2)(1 - x^3)}.$$

■

NAPOMENA Operacije koje smo naveli u ovom odeljku nisu korisne samo za nalaženje funkcije generatrise koja odgovara datom nizu, već i za nalaženje niza koji odgovara datoj funkciji generatrise. U principu, ovaj problem se uvek može rešiti pomoću Taylorovog reda, tj. ponovljenim diferenciranjem, ali ova tehnika u praksi retko daje dobre rezultate.

NEKE POZNATE FUNKCIJE GENERATRISE

Nakon što smo videli koje sve operacije možemo da koristimo za dobijanje novih funkcija generatrise, sada dajemo spisak funkcija generatrise za neke uobičajene nizove. Sličan spisak možete naći u skoro svakoj knjizi iz matematičke analize koja obradjuje stepene redove.

a) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} 1 \cdot x^n = \frac{1}{1 - x}$

b) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}\, x^n = \ln \frac{1}{1 - x}$

c) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}\ x^n = e^x$

d) $\sum_{n\geqslant 0} n\ x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$

e) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\ x^{2n+1} = \sin x$

f) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\ x^{2n} = \cos x$

g) $\sum_{n\geqslant 0} \binom{n+k}{n}\ x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$

h) $\sum_{n\geqslant k} \binom{n}{k}\ x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$

i) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}\ x^{2n+1} = \operatorname{arctg} x$

j) $\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n}\ x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$

k) $\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n+k}{n}\ x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^k$

l) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{k!(2n+k-1)!}{n!(n+k)!}\ x^n = \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^k$

m) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}\ x^{2n+1} = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \ldots = \arcsin x$

n) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{2^{\frac{n}{2}} \sin\frac{n\pi}{4}}{n!}\ x^n = e^x \sin x$

o) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{4^n\, n!^2}{(n+1)(2n+1)!}\ x^n = \left(\frac{\arcsin x}{\sin x}\right)^2$

ZADACI

3.2 REKURENTNE JEDNAČINE

Rekurentne jednačine su jednačine u kojima sledeći član niza zavisi od nekoliko prethodnih (strogu, matematičku definiciju daćemo malo kasnije). One se još negde nazivaju i diferencne jednačine (uglavnom na područjima koja su bila pod ruskim uticajem, stoga ponekad i kod nas), kao i rekurzivne jednačine. Rekurentne jednačine nalaze široki spektar primena (biće ilustrovane kasnije): u ekonomiji, društvenim naukama, fizici, raznim oblastima matematike...

Krenimo sa nekoliko ilustrativnih primera.

PRIMER 3.2.1 Faktorijel $n!$ se definiše kao proizvod prvih n prirodnih brojeva, tj. $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ (uzima se da je $0! = 1$). Posmatrajmo niz faktorijela, $a_n = n!$

$$0!, 1!, 2!, 3!, \ldots$$

Ovaj niz zadovoljava rekurentnu relaciju

$$a_n = n \cdot a_{n-1},$$

za $n \geqslant 1$. Možemo i obratno ako imamo ovu relaciju i početni uslov $a_0 = 1$ da nadjemo sve članove niza ponavljajući postupak iteracije:

$$\begin{aligned} a_n &= n \cdot a_{n-1} = n \cdot (n-1) \cdot a_{n-2} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a_{n-3} = \ldots \\ &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_0 = n! \end{aligned}$$

■

PRIMER 3.2.2 Niz realnih brojeva kod koga je razlika svaka dva uzastopna člana konstantna i jednaka d (d je razlika niza) naziva se aritmetički niz (ponekad i aritmetička progresija). Odredimo opšti član ovog niza.

Rešenje. Kako važi $d = a_{n+1} - a_n$, dobijamo da elementi ovog niza zadovoljavaju rekurentnu relaciju

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Matematičkom indukcijom možemo pokazati da je opšti član ovog niza jednka

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

■

PRIMER 3.2.3 Niz realnih brojeva kod koga je količnik svaka dva uzastopna člana konstantan i jednak q (q je količnik niza) naziva se geometrijski niz (ponekad i geometrijska progresija). Odredimo opšti član ovog niza.

Rešenje. Kako važi $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, dobijamo da elementi ovog niza zadovoljavaju rekurentnu relaciju

$$a_{n+1} = q \cdot a_n.$$

Matematičkom indukcijom možemo pokazati da je opšti član ovog niza jednka

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

■

U prethodnim primerima smo videli neke od najjednostavnijih rekurentnih veza. Rekurentne veze mogu da zavise i od 2 ili više indeksa. Jedan takav primer je (rekurentna) definicija binomnih koeficijenata.

PRIMER 3.2.4 U poglavlju 2.6 Osobine binomnih koeficijenata, videli smo da za binomne koeficijenate važi Adiciona formula 2.6:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \qquad \text{uz početne uslove } \binom{n}{0} = 1.$$

Tu smo koristili da je $0 \leqslant k \leqslant n$, ali smo napomenuli da formula važi i u slučajevima kada je $k < 0$ ili $k > n$ (tada su svi binomni koeficijenti jednaki 0), kao i kada n nije ceo broj ili kada je $n < 0$. ■

U nastavku ćemo razmatrati rekurentne jednačine koje zavise samo od jednog indeksa.

Sada ćemo dati definiciju ovog veoma bitnog matematičkog pojma.

DEFINICIJA 3.2.5 Rekurentna jednačina reda k je jednačina oblika

$$a_{n+k} = F(n, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}), \tag{3.4}$$

gde je n prirodan broj, a $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}$ je $k+1$ uzastopnih članova niza $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Rešenje rekurentne jednačine je niz $\{a_n\}$, koji rekurentnu jednačinu prevodi u identitet.

DEFINICIJA 3.2.6 Opšte rešenje rekurentne jednačine reda k je ono rešenje koje sadrži sva rešenja. Opšte rešenje rekurentne jednačine reda k sadrži k proizvoljnih konstanti (zato što prvih k članova niza u potpunosti odredjuje niz). Ukoliko su dati početni članovi ovog niza onda je moguće odrediti vrednosti tih konstanti — tada kažemo da smo dobili jedno ili partikularno rešenje.

DEFINICIJA 3.2.7 Ako je $\dfrac{a_n^{(i)}}{a_n^{(j)}} \neq c$, gde je c neka fiksirana konstanta, tada nizovi $\{a_n^{(i)}\}$ i $\{a_n^{(j)}\}$

predstavljaju nezavisna (neproporcionalna) rešenja. Ako je $\dfrac{a_n^{(i)}}{a_n^{(j)}} = c$, tada nizovi $\{a_n^{(i)}\}$ i $\{a_n^{(j)}\}$ predstavljaju zavisna (proporcionalna) rešenja. Pojam zavisnih rešenja možemo proširiti i na više od 2 rešenja — ukoliko jedno rešenje možemo predstaviti kao linearnu kombinaciju ostalih tada kažemo da su ta rešenja zavisna. U protivnom imamo nezavisna rešenja.

TEOREMA 3.2.8 Rešenja $\{a_n^{(1)}\}, \{a_n^{(2)}\}, \ldots, \{a_n^{(s)}\}$ rekurentne jednačine (3.4) k–tog reda su nezavisna ako i samo ako je sledeća determinanta različita od nule:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_n^{(2)} & \ldots & a_n^{(s)} \\ a_2^{(1)} & a_n^{(2)} & \ldots & a_n^{(s)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s-1}^{(1)} & a_{s-1}^{(2)} & \ldots & a_{s-1}^{(s)} \\ a_s^{(1)} & a_s^{(2)} & \ldots & a_s^{(s)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dokaz. Ukoliko su nizovi $\{a_n^{(1)}\}, \{a_n^{(2)}\}, \ldots, \{a_n^{(s)}\}$ koji su rešenja rekurentne jednačine nezavisni onda su i kolona-vektori matrice A linearno nezavisni, pa je rang matrice A jednak $r(A) = s$, što povlači da je $\det(A) \neq 0$.

Ako je $\det(A) \neq 0$ onda je i $r(A) = s$, pa su i kolona-vektori matrice A linearno nezavisni, što povlači i da su rešenja rekurentne jednačine nezavisna.

□

Sada ćemo dati definiciju linearne rekurentne jednačine (najveći deo ovog poglavlja je posvećen ovom pojmu), a kasnije ćemo se sresti i sa nekim nelinearnim rekurentnim jednačinama.

DEFINICIJA 3.2.9 Linearna rekurentna jednačina je jednačina oblika

$$f_k(n) \cdot a_{n+k} + f_{k-1}(n) \cdot a_{n+k-1} + \ldots + f_0(n) \cdot a_n = f(n) \tag{3.5}$$

i ona se najčešće zadaje u normiranom obliku, tj. sa $f_k(n) = 1$.

Ako je $f(n) = 0$ to je linearna homogena rekurentna jednačina

$$f_k(n) \cdot a_{n+k} + f_{k-1}(n) \cdot a_{n+k-1} + \ldots + f_0(n) \cdot a_n = 0, \tag{3.6}$$

a ako je $f(n) \neq 0$ to je linearna nehomogena rekurentna jednačina. Ako su funkcije $f_i(n)$ konstante onda imamo linearnu rekurentnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima, u protivnom govorimo o linearnoj jednačini sa funkcionalnim koeficijentima.

LEMA 3.2.10 Neka su nizovi $\{a_n^{(1)}\}, \{a_n^{(2)}\}, \ldots, \{a_n^{(s)}\}$ rešenja linearne homogene rekurentne jednačine (3.6) tada je i

$$a_n = C_1 \cdot a_n^{(1)} + C_2 \cdot a_n^{(2)} + \ldots + C_s \cdot a_n^{(s)}$$

rešenje te rekurentne jednačine. $C_1, C_2, \ldots, C_s$ su proizvoljne konstante.

Dokaz. Kako su nizovi $\{a_n^{(1)}\}, \{a_n^{(2)}\}, \ldots, \{a_n^{(s)}\}$ rešenja jednačine (3.6) važi

$$\begin{array}{c}
f_k(n) \cdot a_{n+k}^{(1)} + f_{k-1}(n) \cdot a_{n+k-1}^{(1)} + \ldots + f_0(n) \cdot a_n^{(1)} = 0 \\
f_k(n) \cdot a_{n+k}^{(2)} + f_{k-1}(n) \cdot a_{n+k-1}^{(2)} + \ldots + f_0(n) \cdot a_n^{(2)} = 0 \\
\vdots \\
f_k(n) \cdot a_{n+k}^{(s)} + f_{k-1}(n) \cdot a_{n+k-1}^{(s)} + \ldots + f_0(n) \cdot a_n^{(s)} = 0
\end{array}$$

Ako prvu od ovih jednačina pomnožimo sa C_1, drugu sa C_2, ..., poslednju sa C_s i onda ih saberemo dobijamo jednačinu

$$f_k(n) \cdot a_{n+k} + f_{k-1}(n) \cdot a_{n+k-1} + \ldots + f_0(n) \cdot a_n = 0,$$

tj. da je i niz $\{a_n\}$ rešenje jednačine (3.6). □

TEOREMA 3.2.11 Neka su $\{a_n^{(1)}\}, \{a_n^{(2)}\}, \ldots, \{a_n^{(k)}\}$ nezavisna rešenja linearne homogene rekurentne jednačine (3.6) k–tog reda. Tada je niz sa opštim članom

$$a_n = C_1 \cdot a_n^{(1)} + C_2 \cdot a_n^{(2)} + \ldots + C_k \cdot a_n^{(k)},$$

gde su $C_1, C_2, \ldots, C_k$ proizvoljne konstante, opšte rešenje date jednačine.

Dokaz. Neka je $\{a_n\}$ proizvoljno rešenje jednačine (3.6) i neka su $a_1, a_2, \ldots, a_k$ prvih k članova tog niza. Odredimo konstante $C_1, C_2, \ldots, C_k$ tako da za njih važi $C_1 \cdot a_n^{(1)} + C_2 \cdot a_n^{(2)} + \ldots + C_k \cdot a_n^{(k)} = a_n$, za $n = 1, 2, \ldots, k$, tj. dobili smo sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{c}
C_1 \cdot a_1^{(1)} + C_2 \cdot a_1^{(2)} + \ldots + C_k \cdot a_1^{(k)} = a_1 \\
C_1 \cdot a_2^{(1)} + C_2 \cdot a_2^{(2)} + \ldots + C_k \cdot a_2^{(k)} = a_2 \\
\vdots \\
C_1 \cdot a_k^{(1)} + C_2 \cdot a_k^{(2)} + \ldots + C_k \cdot a_k^{(k)} = a_n
\end{array}$$

po nepoznatim konstantama $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Kako $\{a_n^{(1)}\}, \{a_n^{(2)}\}, \ldots, \{a_n^{(k)}\}$ predstavljaju nezavisna rešenja po Teoremi 3.2.8 dobijamo da je determinanta prethodnog sistema različita od 0, te stoga taj sistem ima jedinstveno rešenje.

Na osnovu činjenice da prvih k članova niza koji je rešenje rekurentne jednačine k–tog reda u potpunosti odredjuju taj niz, kao i da su nizovi $\{a_n^{(1)}\}, \{a_n^{(2)}\}, \ldots, \{a_n^{(k)}\}$ rešenja rekurentne jednačine (3.6) dobijamo da jednakost $C_1 \cdot a_n^{(1)} + C_2 \cdot a_n^{(2)} + \ldots + C_k \cdot a_n^{(k)} = a_n$ važi za svako $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Opšte rešenje nehomogene linearne rekurentne jednačine (slučaj $f(n) \neq 0$) jednako je zbiru opšteg rešenja homogene rekurentne jednačine, h_n, i nekog partikularnog (proizvoljnog) rešenja nehomogene rekurentne jednačine, p_n:

$$a_n = h_n + p_n.$$

Nehomogena rekurentna jednačina se rešava na neki od sledećih načina:
1° nakon ispisivanja prvih nekoliko članova niza uočimo neko pravilo (ili samo rešenje) i to dokažemo matematičkom indukcijom;
2° rešimo odgovarajuću homogenu rekurentnu jednačinu i pogodimo partikularno rešenje;
3° rešimo odgovarajuću homogenu rekurentnu jednačinu i primenimo metodu varijacije konstanti.

LINEARNA REKURENTNA JEDNAČINA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

Prvo ćemo posmatrati linearnu homogenu rekurentnu jednačinu reda k sa konstantnim koeficijentima:

$$f_k \cdot a_{n+k} + f_{k-1} \cdot a_{n+k-1} + \ldots + f_0 \cdot a_n = 0, \tag{3.7}$$

gde su $f_i,\ i = 0, 1, \ldots, k$ konstante i $f_0, f_k \neq 0$. Ako potražimo njeno rešenje u obliku $a_n = t^n$, dobijamo $t^n(f_k t^k + f_{k-1} t^{k-1} + \ldots + f_1 t + f_0) = 0$. Osim trivijalnog rešenja $a_n = 0$ sva ostala rešenja pretpostavljanog oblika daje jednačina

$$f_k t^k + f_{k-1} t^{k-1} + \ldots + f_1 t + f_0 = 0. \tag{3.8}$$

Ova algebarska jednačina se naziva karakteristična jednačina rekurentne jednačine (3.7). Sada razlikujemo nekoliko slučajeva u zavisnosti od toga kakvi su koreni $t_1, t_2, \ldots, t_k$ (jednačina stepena k ima tačno k rešenja nad poljem $\mathbb{C}$) karakteristične jednačine (3.8).
1° Sva rešenja $t_1, t_2, \ldots, t_k$ su medjusobno različita. Tada je opšte rešenje

$$a_n = C_1 \cdot {t_1}^n + C_2 \cdot {t_2}^n + \ldots + C_k \cdot {t_k}^n.$$

NAPOMENA Da su ova rešenja nezavisna sledi iz Teoreme 3.2.8 i Van der Mondove determinante

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \ldots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \ldots & {x_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \ldots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

Sličnim, ali komplikovanijim rezonom iz linearne algebre možemo pokazati da su rešenja i iz narednog slučaja nezavisna.

2° Ako medju rešenjima karakteristične jednačine ima višestrukih, uočimo koren t_m reda s, $s > 1$. Tada se može pokazati da su nizovi sa sledećim opštim članovima ${t_m}^n, n{t_m}^n, \ldots, n^{s-1}{t_m}^n$ svi nezavisna rešenja polazne rekurentne jednačine i da je deo opšteg rešenja koji odgovara korenu t_m (koji se javlja s puta jer mu je višestrukost s) jednak izrazu

$$C_m \cdot {t_m}^n + C_{m+1} \cdot n \cdot {t_m}^n + \ldots + C_{m+s-1} \cdot n^{s-1} \cdot {t_k}^n,$$

gde su $C_m, C_{m+1}, \ldots, C_{m+s-1}$ proizvoljno odabrane konstante.

NAPOMENA Naredna 2 slučaja su specijalni slučajevi prethodna 2 slučaja, ali zbog nekih različitosti, kao i njihovog značaja ovde smo ih izdvojili.

3° Neka je kompleksan broj $t_i = \alpha + \beta i$ prosta nula karakteristične jednačine. Tada je i $t_{i+1} = \overline{t_i} = \alpha - \beta i$ prosta nula. Ako je $\alpha \pm \beta i = \rho \cdot (\cos\theta \pm i \cdot \sin\theta)$ onda imamo da su članovi koji odgovaraju rešenjima t_i i t_{i+1} (taj deo je takodje realan broj) jednaki:

$$C_i \cdot (\alpha + \beta i)^n + C_{i+1} \cdot (\alpha - \beta i)^n = D_i \cdot \rho^n \cdot \cos n\theta + D_{i+1} \cdot \rho^n \cdot \sin n\theta,$$

gde su C_i i C_{i+1} kompleksne konstante, a D_i i D_{i+1} realne.

4° Ukoliko je kompleksan broj $t_i = \alpha + \beta i$ nula reda s karakteristične jednačine (tada je i $t_{i+1} = \overline{t_i} = \alpha - \beta i$ nula reda s), slično kao u prethodna dva slučaja, njima odgovaraju partikularna rešenja

$$\rho^n \cdot \cos n\theta, \rho^n \cdot \sin n\theta; n \cdot \rho^n \cdot \cos n\theta, n \cdot \rho^n \cdot \sin n\theta; \ldots; n^{s-1} \cdot \rho^n \cdot \cos n\theta, n^{s-1} \cdot \rho^n \cdot \sin n\theta.$$

PRIMER 3.2.12 Odrediti niz $\{x_n\}$ zadat rekurentnom jednačinom

$$x_{n+3} + ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0, \ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Rešenje. Karakteristična jednačina je $t^3 + at^2 + bt + c = 0$ i neka su njene nule t_1, t_2 i t_3. U zavisnosti od toga kakve su t_1, t_2 i t_3 imamo nekoliko slučajeva:

1° Ukoliko su sve tri nule različiti realni brojevi opšte rešenje je

$$x_n = C_1 \cdot {t_1}^n + C_2 \cdot {t_2}^n + C_3 \cdot {t_3}^n.$$

2° Ukoliko su sve tri nule realni brojevi i $t_1 = t_2 \neq t_3$, opšte rešenje je

$$x_n = C_1 \cdot {t_1}^n + C_2 \cdot n \cdot {t_1}^n + C_3 \cdot {t_3}^n.$$

3° Ukoliko su nule trostruke i realne, tj. $t_1 = t_2 = t_3$, opšte je

$$x_n = C_1 \cdot {t_1}^n + C_2 \cdot n \cdot {t_1}^n + C_3 \cdot n^2 \cdot {t_1}^n.$$

4° Ukoliko nisu sva rešenja realna, tj. $t_1 \in \mathbb{R}$, $t_2 = \alpha + \beta i = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$, $t_3 = \alpha - \beta i = \rho \cdot (\cos\theta - i \cdot \sin\theta)$, opšte rešenje je

$$x_n = C_1 \cdot {t_1}^n + C_2 \cdot \rho^n \cdot \cos n\theta + C_3 \cdot \rho^n \cdot \sin n\theta.$$

■

PRIMER 3.2.13 Rešiti sistem rekurentnih jednačina (za proizvoljne $p, q, r, s \in \mathbb{R}$):

$$x_{n+1} = px_n + qy_n, \qquad y_{n+1} = rx_n + sy_n.$$

Rešenje. Ako je $q = r = 0$ imamo dve (medjusobno nezavisne) geometrijske progresije. Kada je $q \neq 0$ (i slično ako je $r \neq 0$) sistem svodimo na jednu rekurentnu jednačinu drugog reda: iz prve jednačine imamo $y_n = \dfrac{x_{n+1} - px_n}{q}$, $y_{n+1} = \dfrac{x_{n+2} - px_{n+1}}{q}$ (svako n u prethodnoj jednačini smo zamenili sa $n+1$) i kad ovo zamenimo u drugu dobijamo

$$\frac{x_{n+2} - px_{n+1}}{q} = rx_n + s\frac{x_{n+1} - px_n}{q},$$

odnosno nakon sredjivanja

$$x_{n+2} + (p+s)x_{n+1} + (sp - qr)x_n = 0,$$

što je homogena linearna rekurentna jednačina sa konstantnim koeficijentima (najviše 2. reda) koju dalje možemo rešiti standardnim postupkom. Niz $\{y_n\}$ može se odrediti iz relacije $qy_n = x_{n+1} - px_n$. ■

Sada se vratimo na nehomogenu linearnu rekurentnu jednačinu reda k sa konstantnim koeficijentima:

$$f_k \cdot a_{n+k} + f_{k-1} \cdot a_{n+k-1} + \ldots + f_0 \cdot a_n = f(x). \tag{3.9}$$

Prvo ćemo rešiti odgovarajuću homogenu jednačinu – to je jednačina (3.7) i dobićemo homogeni deo rešenja h_n na način opisan u prethodnom izlaganju. Ako ne možemo da pogodimo rešenje (što nije baš lako), u nekoliko (veoma čestih) slučaja znamo u kom obliku treba da tražimo partikularno rešenje:

- Ako je $f(n) = P_d(n)$ polinom stepena d po promenljivoj n i ako $t = 1$ nije rešenje karakteristične jednačine rekurentne jednačine (3.7) tada partikularno rešenje nehomogene jednačine (3.9) tražimo kao nepoznati polinom $Q_d(n)$ stepena d, tj. u obliku

  $$p_n = Q_d(n) = A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \ldots + A_d n^d,$$

  gde nepoznate konstante A_i dobijamo kada ovaj izraz za p_n zamenimo u polaznu nehomogenu jednačinu (3.9).

  Ako je $f(n) = P_d(n)$ i $t = 1$ jeste koren mnogostrukosti m karakteristične jednačine onda partikularno rešenje tražimo u obliku

  $$p_n = n^m \cdot Q_d(n) = A_0 n^m + A_1 n^{m+1} + A_2 n^{m+2} + \ldots + A_d n^{m+d}.$$

- Ako je $f(n) = Kb^n$ (K je neka konstanta) i ako $t = b$ nije koren karakteristične jednačine onda partikularno rešenje tražimo u obliku
$$p_n = Ab^n,$$
gde nepoznatu konstantu A tražimo tako što izraz za p_n zamenimo u (3.9).
Ako je $f(n) = Kb^n$ i ako $t = b$ jeste koren mnogostrukosti m karakteristične jednačine onda partikularno rešenje tražimo u obliku
$$p_n = An^m b^n.$$

- Ako je $f(n) = P_d(n) \cdot b^n$, gde je $P_d(n)$ polinom stepena d po promenljivoj n i ako $t = b$ nije rešenje karakteristične jednačine rekurentne jednačine (3.7) tada partikularno rešenje nehomogene jednačine (3.9) tražimo u obliku
$$p_n = Q_d(n) \cdot b^n = (A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \ldots + A_d n^d) \cdot b^n,$$
gde nepoznate konstante A_i dobijamo kada ovaj izraz za p_n zamenimo u (3.9).
Ako je $f(n) = P_d(n)$ i $t = b$ jeste koren mnogostrukosti m karakteristične jednačine onda partikularno rešenje tražimo u obliku
$$p_n = n^m \cdot Q_d(n) \cdot b^n = (A_0 n^m + A_1 n^{m+1} + A_2 n^{m+2} + \ldots + A_d n^{m+d}) \cdot b^n.$$

- Ako je nehomogeni deo $f(n) = K \cdot \cos(n\theta)$ ili $f(n) = K \cdot \sin(n\theta)$ ili $f(n) = K_1 \cdot \cos(n\theta) + K_2 \cdot \sin(n\theta)$ (K, odnosno K_1 i K_2 su konstante) i ako $t = e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ nije rešenje karakteristične jednačine rekurentne jednačine (3.7) tada partikularno rešenje nehomogene jednačine (3.9) tražimo u obliku
$$p_n = A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta),$$
gde nepoznate konstante A i B dobijamo kada ovaj izraz za p_n zamenimo u (3.9).
Ako nehomogeni deo $f(n) = K \cdot \cos(n\theta)$ ili $f(n) = K \cdot \sin(n\theta)$ ili $f(n) = K_1 \cdot \cos(n\theta) + K_2 \cdot \sin(n\theta)$ i $t = e^{i\theta}$ jeste koren mnogostrukosti m karakteristične jednačine (3.7) onda partikularno rešenje tražimo u obliku
$$p_n = n^m \cdot \big(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\big).$$

- Ako je $f(n) = P_d(n) \cdot \sin(n\theta)$ ili $f(n) = P_d(n) \cdot \cos(n\theta)$ ili $f(n) = P_{d_1}(n) \cdot \sin(n\theta) + P_{d_2}(n) \cdot \cos(n\theta)$, gde je $P_d(n)$ polinom stepena d po promenljivoj n, odnosno u trećem slučaju $P_{d_1}(n)$ i $P_{d_2}(n)$ polinomi stepena d_1 i d_2, za koje važi da je $d = \max\{d_1, d_2\}$, i ako $t = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ nije rešenje karakteristične jednačine (3.7) tada partikularno rešenje nehomogene jednačine (3.9) tražimo u obliku
$$\begin{aligned} p_n &= Q_d(n) \cdot \sin(n\theta) + R_d(n) \cdot \cos(n\theta) \\ &= (A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \ldots + A_d n^d) \cdot \sin(n\theta) + \\ &\qquad (B_0 + B_1 n + B_2 n^2 + \ldots + B_d n^d) \cdot \cos(n\theta), \end{aligned}$$

gde nepoznate konstante A_i i B_j (tj. nepoznate polinome $Q_d(n)$ i $R_d(n)$ stepena d) dobijamo kada ovaj izraz za p_n zamenimo u (3.9).

Ako je $f(n) = P_d(n) \cdot \sin(n\theta)$ ili $f(n) = P_d(n) \cdot \cos(n\theta)$ ili $f(n) = P_{d_1}(n) \cdot \sin(n\theta) + P_{d_2}(n) \cdot \cos(n\theta)$ i $t = e^{i\theta}$ jeste koren mnogostrukosti m karakteristične jednačine (3.7) onda partikularno rešenje tražimo u obliku

$$p_n = n^m \cdot \big(Q_d(n) \cdot \sin(n\theta) + R_d(n) \cdot \cos(n\theta)\big).$$

- (Najopštiji od ovih oblika) Ako je $f(n) = P_d(n) \cdot b^n \cdot \sin(n\theta)$ ili $f(n) = P_d(n) \cdot b^n \cdot \cos(n\theta)$ ili $f(n) = b^n \cdot \big(P_{d_1}(n) \cdot \sin(n\theta) + P_{d_2}(n) \cdot \cos(n\theta)\big)$ i ako $t = b \cdot e^{i\theta} = b(\cos\theta + i\sin\theta)$ nije rešenje karakteristične jednačine rekurentne jednačine (3.7) tada partikularno rešenje nehomogene jednačine (3.9) tražimo u obliku

  $$p_n = b^n \cdot \big(Q_d(n) \cdot \sin(n\theta) + R_d(n) \cdot \cos(n\theta)\big),$$

  gde nepoznate polinome $Q_d(n)$ i $R_d(n)$ stepena d dobijamo kada ovaj izraz za p_n zamenimo u (3.9).

  Ako je $f(n) = P_d(n) \cdot b^n \cdot \sin(n\theta)$ ili $f(n) = P_d(n) \cdot b^n \cdot \cos(n\theta)$ ili $f(n) = b^n \cdot \big(P_{d_1}(n) \cdot \sin(n\theta) + P_{d_2}(n) \cdot \cos(n\theta)\big)$ i $t = b \cdot e^{i\theta}$ jeste koren mnogostrukosti m karakteristične jednačine onda partikularno rešenje tražimo u obliku

  $$p_n = n^m \cdot b^n \cdot \big(Q_d(n) \cdot \sin(n\theta) + R_d(n) \cdot \cos(n\theta)\big).$$

Ako je nehomogeni deo $f(n)$ sastavljen od zbira (ili razlike) nekoliko delova od kojih je svaki nekog od oblika koji su dati malopre, onda za svaki od njih ponaosob odredimo odgovarajuće partikularno rešenje i onda ih saberemo (ili oduzmemo), tj. nehomogenom delu $f(n)$ odgovara sledeći partikularni deo $p(n)$:

$$f(n) = f_1(n) + f_2(n) + \dots \qquad \rightsquigarrow \qquad p(n) = p_1(n) + p_2(n) + \dots,$$

gde nehomogenom delu $f_1(n)$ odgovara partikularno rešenje $p_1(n)$, $f_2(n)$ odgovara $p_2(n)$, ...

Prethodna teoretska razmatranja ćemo ilustrovati kroz naredne primere.

PRIMER 3.2.14 Nadjimo opšte rešenje rekurentne jednačine $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} + 3^n$.

Rešenje. Rešimo prvo homogenu jednačinu $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$, tj. kad sve prebacimo na levu stranu

$$a_n - 6a_{n-1} + 8a_{n-2} = 0.$$

Ona ima karakterističnu jednačinu $t^2 - 6t + 8 = 0$ koja ima 2 rešenja $t_1 = 2$ i $t_2 = 4$. Stoga je rešenje homogenog dela

$$h_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 4^n,$$

gde su C_1 i C_2 neke konstante koje zavise od početnih uslova (kako u ovom primeru nisu dati početni uslovi ove konstante ne možemo odrediti, tj. one će ostati i u krajnjem rešenju).

Sada tražimo partikularno rešenje. Kako je nehomogeni deo $f(n) = 3^n$ i $t = 3$ nije koren karakteristične jednačine partikularno rešenje tražimo u obliku $p_n = A \cdot 3^n$. Tada je $p_{n-1} = A \cdot 3^{n-1}$ i $p_{n-2} = A \cdot 3^{n-2}$ i kad ovo ubacimo u polaznu jednačinu dobijamo da je

$$A \cdot 3^n = 6 \cdot A \cdot 3^{n-1} - 8 \cdot A \cdot 3^{n-2} + 3^n.$$

Kada sve podelimo sa 3^{n-2} dobijamo $9A = 18A - 8A + 9$, odakle je $A = -9 = -3^2$. Dobijamo da je partikularno rešenje $p_n = -3^{n+2}$. Konačno imamo da je rešenje ove rekurentne jednačine $a_n = h_n + p_n$:

$$a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 4^n - 3^{n+2}.$$

■

PRIMER 3.2.15 Nadjimo opšti član niza zadatog sa $a_n - 6a_{n-1} + 12a_{n-2} - 8a_{n-3} = 2^n$ uz početne uslove $a_0 = 0$, $a_1 = 2$ i $a_2 = 16$.

Rešenje. Rešimo prvo homogenu jednačinu. Kada rešimo karakterističnu jednačinu $t^3 - 6t^2 + 12t - 8 = 0$ dobijemo trostruku nulu $t_1 = t_2 = t_3 = 2$. Stoga je rešenje homogenog dela

$$h_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n + C_3 n^2 2^n.$$

Kako je $t = 2$ trostruka nula (nula reda 3) partikularno rešenje tražimo u obliku $p_n = An^3 2^n$. Kada ubacimo p_{n-1}, p_{n-2} i p_{n-3} u polaznu rekurentnu vezu dobićemo $A = \frac{1}{6}$, tj. partikularno rešenje je $p_n = \frac{1}{6} n^3 2^n$, što nam daje opšte rešenje ovog niza:

$$a_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n + C_3 n^2 2^n + \frac{1}{6} n^3 2^n = 2^n (C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \frac{1}{6} n^3).$$

Konstante C_1, C_2 i C_3 tražimo iz početnih uslova (rešavanjem sistema linearnih jednačina):

$$\begin{array}{l} a_0 = \ \ 0 = 2^0 (C_1 + C_2 \cdot 0 + C_3 \cdot 0^2 + \frac{1}{6} \cdot 0^3) \\ a_1 = \ \ 2 = 2^1 (C_1 + C_2 \cdot 1 + C_3 \cdot 1^2 + \frac{1}{6} \cdot 1^3) \\ a_2 = 16 = 2^2 (C_1 + C_2 \cdot 2 + C_3 \cdot 2^2 + \frac{1}{6} \cdot 2^3) \end{array} \Rightarrow C_1 = 0, \ C_2 = \frac{1}{3}, \ C_3 = \frac{1}{2}.$$

Konačno dobijamo opšti član niza kada ove konstante ubacimo u opšte rešenje:

$$a_n = 2^n (\tfrac{1}{3} n + \tfrac{1}{2} n^2 + \tfrac{1}{6} n^3) = \frac{2^n \cdot n(n+1)(n+2)}{6}.$$

■

Osvrnimo se još na rešavanje linearne rekurentne jednačine reda k sa konstantnim koeficijentima (3.9) kada je dato k početnih uslova. Tada imamo dve mogućnosti.

- Ako su početni uslovi uzastopni (tj. njihovi indeksi su uzastopni celi brojevi, npr. $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ ili $a_1, a_2, \ldots, a_k$) onda su konstante C_i u homogenom rešenju h_n jedinstveno odredjene, odnosno odgovarajući problem ima jedinstveno rešenje.
- Ako početni (ili granični) uslovi nisu uzastopni onda odgovarajući problem može da ima jedinstveno rešenje, više rešenja ili da uopšte nema rešenja.

Ilustrujmo ovo na jednom jednostavnom primeru.

PRIMER 3.2.16 Homogenoj rekurentnoj relaciji $a_n = 4a_{n-2}$ odgovara karakteristična jednačina $t^2 - 4 = 0$, pa je opšte rešenje $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_1 \cdot (-2)^n$. U zavisnosti od toga kakvi su početni uslovi imamo nekoliko različitih slučajeva (u prvom slučaju ćemo dati uzastopna rešenja, a u naredna 3 neuzastopna):

- $\begin{array}{l} a_0 = x \\ a_1 = y \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcrcl} C_1 & + & C_2 & = & x \\ 2C_1 & - & 2C_2 & = & y \end{array} \Rightarrow C_1 = \dfrac{2x+y}{4}$ i $C_2 = \dfrac{2x-y}{4} \Rightarrow$ imamo jedinstveno rešenje $\quad a_n = \frac{2x+y}{4} \cdot 2^n + \frac{2x-y}{4} \cdot (-2)^n$.
- $\begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_2 = 4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcrcl} C_1 & + & C_2 & = & 1 \\ 4C_1 & + & 4C_2 & = & 4 \end{array} \Rightarrow C_1 = \alpha$ i $C_2 = 1 - \alpha$, gde je $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$ imamo beskonačno mnogo rešenja (koja zavise od jednog parametra α) $\quad a_n = \alpha \cdot 2^n + (1-\alpha) \cdot (-2)^n$.
- $\begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_2 = 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcrcl} C_1 & + & C_2 & = & 1 \\ 4C_1 & + & 4C_2 & = & 5 \end{array} \Rightarrow$ nema rešenja.
- $\begin{array}{l} a_0 = 2 \\ a_3 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcrcl} C_1 & + & C_2 & = & 2 \\ 8C_1 & - & 8C_2 & = & 0 \end{array} \Rightarrow C_1 = C_2 = 1 \Rightarrow$ imamo jedinstveno rešenje $a_n = 2^n + (-2)^n = \begin{cases} 2^{n+1} & n \text{ parno} \\ 0 & n \text{ neparno} \end{cases}$.

■

NEKE NELINEARNE REKURENTNE JEDNAČINE

PRIMER 3.2.17 Dat je niz sa $a_0 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 + 2a_0$ za $n \geqslant 1$. Naći opšti član.

Rešenje. Ovde nam problem čini što svaki sledeći član niza zavisi od svih prethodnih. Primetimo da je $a_{n-1} = a_{n-2} + \ldots + a_1 + 2a_0$. Polazna rekurentna jednačina svodi na

$$a_n = a_{n-1} + (a_{n-2} + \ldots + a_1 + 2a_0) = a_{n-1} + a_{n-1} = 2a_{n-1},$$

uz početni uslov $a_0 = 1$. Rešenje ove linearne rekurentne jednačine prvog reda sa konstantnim koeficijentima je $a_n = 2^n$. ∎

PRIMER 3.2.18 Dat je niz sa $x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_{n+2} = \dfrac{{x_{n+1}}^3}{{x_n}^2}$ za $n \geqslant 0$. Naći opšti član.

Rešenje. Principom matematičke indukcije se pokaže da je $x_n > 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada možemo uvesti smenu $y_n = \log_2 x_n$. Kada logaritmujemo polaznu rekurentnu jednačinu dobijamo linearnu rekurentnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima

$$y_{n+2} = 3y_{n+1} - 2y_n$$

(sa početnim uslovima $y_0 = 0$, $y_1 = 1$). Ova jednačina ima rešenje $y_n = 2^n - 1$, pa je rešenje polazne nelinaerne rekurentne jednačine $x_n = 2^{2^n-1}$. ∎

PRIMER 3.2.19 Niz $\{a_n\}$ definisan je na sledeći način: $a_1 = 1$, $a_n = \dfrac{n+1}{n-1}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})$ za $n > 1$. Odrediti a_{2007}.

Rešenje. Data rekurentna jednačina može se zapisati i kao

$$(n-1)a_n = (n+1)(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}),$$

a sada ako obema stranama dodamo $(n-1)(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})$ dobijamo jednačinu

$$(n-1)(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n) = 2n(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}),$$

koja se može srediti na oblik

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n}{n} = 2 \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}.$$

Sa S_k označimo aritmetičku sredinu prvih k članova niza, tj. $S_k = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}$, dobijamo linearnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima prvog reda

$$S_n = 2S_{n-1},$$

čije je rešenje $S_n = 2^{n-1}$. Na osnovu ovoga nalazimo opšti član polaznog niza

$$a_n = nS_n - (n-1)S_{n-1} = (n+1)2^{n-2}.$$

Zamenom u prethodnu jednakost dobijamo da je $a_{2007} = 2008 \cdot 2^{2005}$. ■

PRIMER 3.2.20 Niz realnih brojeva $a_0, a_1, a_2, \ldots$ zadovoljava relaciju: $a_{m+n}+a_{m-n}-m+n-1 = \frac{a_{2m}+a_{2n}}{2}$ za sve $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \geqslant n$. Ako je $a_1 = 3$ naći a_{2007}.

Rešenje. Za $n = 0$ dobijamo

$$a_{2m} = 4a_m - 2m - 3. \tag{3.10}$$

Za $m = 1$ i $n = 0$ dobijamo $a_2 = 7$. $n = 1$ u polaznoj relaciji daje $a_{m+1} + a_{m-1} - m = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_2)$ i odatle nalazimo

$$a_{2m} = 2a_{m+1} + 2a_{m-1} - 2m - 7. \tag{3.11}$$

Kada od (3.11) oduzmemo (3.10) i podelimo sa 2 dobijamo nehomogenu linearnu rekurentnu jednačinu

$$a_{m+1} - 2a_m + a_{m-1} = 2. \tag{3.12}$$

Rešimo ovu nehomogenu jednačinu. Odgovarajućoj homogenoj odgovara karakteristična jednačina $t^2 - 2t + 1 = 0$, koja ima dvostruko rešenje $t_1 = t_2 = 1$, te tada dobijamo da je homogeni deo rešenja $a_{n,h} = A + Bn$. Partikularno rešenje tražimo u obliku $a_{n,p} = Cn^2$, što kad uvrstimo u nehomogenu rekurentnu jednačinu (3.12) nalazimo $a_{n,p} = n^2$. Stoga je $a_n = a_{n,h} + a_{n,p} = A + Bn + n^2$. Konstante A i B dobijamo iz početnih uslova $a_0 = 1 = A$, $a_1 = 3 = A + B + 1$, što nam daje rešenje $A = B = C = 1$, odakle je

$$a_n = n^2 + n + 1$$

za svako $n \in \mathbb{N}_0$.

Odgovor na pitanje iz zadatka je $a_{2007} = 2007^2 + 2008$. ■

PRIMER 3.2.21 Rešiti rekurentnu jednačinu $x_{n+1} - n \cdot x_n = n! \cdot n^5$, za $n \geqslant 0$.

Rešenje. Rešimo prvo odgovarajuću homogenu jednačinu $h_{n+1} - nh_n = 0$. Kako je $h_n = (n-1)h_n$ dobijamo da je $h_n = C(n-1)!$ (gde je $h_1 = C$). Potražimo opšte rešenje polazne rekurentne jednačine metodom varijacije konstanti (umesto konstante C uzimamo da je tu neki nepoznati niz c_n, tj. u obliku

$$p_n = c_n \cdot (n-1)!$$

što kad uvrstimo u polaznu rekurentnu jednačinu dobijamo

$$n! \cdot c_{n+1} - n \cdot (n-1)! \cdot c_n = n! \cdot n^5,$$

odakle kad skratimo sve sa $n!$ dobijamo nehomogenu linearnu rekurentnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima

$$c_{n+1} - c_n = n^5.$$

Kako je nehomogeni deo $f(n) = n^5$ polinom stepena 5 i kako je $t = 1$ nula karakteristične jednačine partikularno rešenje tražimo u sledećem obliku

$$p_n = n \cdot Q_5(n) = n \cdot (An^5 + Bn^4 + Cn^3 + Dn^2 + En + F),$$

dde je $Q_5(n)$ nepoznati polinom stepena 5. Konstante A, B, C, D, E, F odredjujemo ubacivanjem u jednačinu $p_{n+1} - p_n = n^5$ – dobijamo

$$p_n = \frac{1}{12}(2n^6 - 6n^5 + 5n^4 - n^2),$$

odnosno kada faktorišemo $p_n = \frac{1}{12}n^2(n-1)^2(2n^2 - 2n - 1)$. Kako je rešenje homogenog dela samo konstanta K dobijamo da je opšte rešenje

$$x_n = K + \frac{1}{12}n^2(n-1)^2(2n^2 - 2n - 1).$$

Konstantu K treba da odredimo iz početnih uslova. Kada $n = 0$ uvrstimo u polaznu jednačinu dobijamo da je $x_1 = 0$, a odatle je $K = 0$. Konačno dobijamo da je

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{12}n^2(n-1)^2(2n^2 - 2n - 1) & n \geqslant 1 \\ M & n = 0 \end{cases},$$

gde je M proizvoljna konstanta. ■

PRIMER 3.2.22 Odrediti x_n ako je dato $x_0 = m$ i $x_{n+1} = \dfrac{ax_n + b}{cx_n + d}$.

Rešenje. Uvedimo smenu $x_n = \dfrac{y_n}{z_n}$, uz nove početne uslove $z_0 = 1$ i $y_0 = m$. Tada imamo $x_{n+1} = \dfrac{y_{n+1}}{z_{n+1}}$, a kada zamenimo u polaznu jednačinu imamo $x_{n+1} = \dfrac{ax_n + b}{cx_n + d} = \dfrac{a\frac{y_n}{z_n} + b}{c\frac{y_n}{z_n} + d} = \dfrac{ay_n + bz_n}{cy_n + dz_n}$. Izjednačavanjem ova 2 izraza polaznu nelinearnu rekurentnu jednačinu smo sveli na sistem linearnih rekurentnih jednačina

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= ay_n + bz_n \\ z_{n+1} &= cy_n + dz_n \end{aligned},$$

uz početne uslove $z_0 = 1$ i $y_0 = x_0$, što je Primer 3.2.13.

Proverimo još da ovako odredjeni nizovi $\{y_n\}$ i $\{z_n\}$ u potpunosti odredjuju niz $\{x_n\}$. Tada je $x_0 = \frac{y_0}{z_0} = \frac{m}{1} = m$ i

$$x_{n+1} = \frac{y_{n+1}}{z_{n+1}} = \frac{ay_n + bz_n}{cy_n + dz_n} = \frac{a\frac{y_n}{z_n} + b}{c\frac{y_n}{z_n} + d} = \frac{ax_n + b}{cx_n + d}.$$

■

PRIMER 3.2.23 Niz $\{x_n\}$ koji je rešenje rekurentne jednačine $x_{n+1} = \dfrac{x_n - 1}{x_n + 1}$ zadovoljava uslov $x_{2006} = 3$. Odrediti koliko je x_1.

Rešenje. Ovaj primer bismo mogli da uradimo tehnikom koju smo razvili u prethodnom primeru, ali ćemo ovde dati drugi pristupak.

Ako izračunamo prvih nekoliko članova niza dobijamo

$$x_1 = \frac{x_0 - 1}{x_0 + 1}, \qquad x_2 = -\frac{1}{x_0}, \qquad x_3 = \frac{x_0 + 1}{1 - x_0} \quad \text{i} \quad x_4 = x_0.$$

Kako svaki sledeći član niza $\{x_n\}$ zavisi samo od prethodnog, to je ovaj niz periodičan sa periodom 4. Stoga je $a_{2006} = a_{4\cdot 501+2} = x_2 = 3$, a iz polazne rekurentne jednačine imamo $x_2 = \frac{x_1-1}{x_1+1}$. Rešavanjem jednačine $3 = \frac{x_1-1}{x_1+1}$ dobijamo da je $x_1 = -2$. ■

PRIMER 3.2.24 Rešiti rekurentnu jednačinu $x_{n+1} \cdot x_n + a x_{n+1} + b x_n + c = 0$.

Rešenje. Uvedimo smenu $x_n = \dfrac{y_{n+1}}{y_n} - a$. Kada zamenimo u polaznu jednačinu imamo $(\frac{y_{n+2}}{y_{n+1}} - a)(\frac{y_{n+1}}{y_n} - a) + a\cdot(\frac{y_{n+2}}{y_{n+1}} - a) + b\cdot(\frac{y_{n+1}}{y_n} - a) + c = 0$, odnosno nakon skraćivanja $\frac{y_{n+2}}{y_n} + (b-a)\frac{y_{n+1}}{y_n} + (c - ab) = 0$, što nakon množenja sa y_n daje homogenu linearnu rekurentnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima

$$y_{n+2} + (b-a)y_{n+1} + (c-ab)y_n = 0.$$

■

PRIMER 3.2.25 Rešiti rekurentnu jednačinu $x_{n+1} = x_n(2 - c\cdot x_n)$, sa početnim uslovom $x_0 = a$.

Rešenje. Ako je $c = 0$, data rekurentna jednačina se svodi na linearnu jednačinu prvog reda $x_{n+1} = 2x_n$ i ona ima rešenje $x_n = a \cdot 2^n$.

Neka je $c \neq 0$. Tada imamo sledeći niz jednakosti

$$cx_{n+1} = cx_n(2 - x_n) = \big(1 - (1 - cx_n)\big)\big(1 + (1 - cx_n)\big) = 1 - (1 - cx_n)^2,$$

odakle dobijamo da je $1 - cx_{n+1} = (1 - cx_n)^2$. Smenom $y_n = 1 - cx_n$ se prethodna rekurentna jednačina svodi na $y_{n+1} = {y_n}^2$ uz početni uslov $y_0 = 1 - ac$.

Iz jednakosti $y_{n+1} = {y_n}^2$ nam sledi i da su svi (tj. za $n \geqslant 1$) članovi niza $\{y_n\}$ pozitivni, pa možemo uvesti novu smenu $z_n = \ln y_n$ pa dobijamo linearnu jednačinu $z_{n+1} = 2z_n$, uz početni uslov $z_0 = \ln(1 - ac)$. Odavde, slično kao i u prvom slučaju, dobijamo da je $z_n = 2^n \cdot \ln(1 - ac)$, odakle je $y_n = (1 - ac)^{2^n}$, odakle je $x_n = \dfrac{1 - (1 - ac)^{2^n}}{c}$. ■

PRIMER 3.2.26 Rešiti rekurentnu jednačinu $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{c}{x_n}\right)$, uz uslov $x_0 = a$.

Rešenje. Primetimo da je

$$x_{n+1} - \sqrt{c} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x_n - \sqrt{c})^2}{x_n} \qquad \text{i} \qquad x_{n+1} + \sqrt{c} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x_n + \sqrt{c})^2}{x_n}.$$

Stoga imamo da je

$$\frac{x_{n+1} - \sqrt{c}}{x_{n+1} + \sqrt{c}} = \frac{(x_n - \sqrt{c})^2}{(x_n + \sqrt{c})^2} = \left(\frac{x_n - \sqrt{c}}{x_n + \sqrt{c}}\right)^2.$$

Dalje, kao i u prethodnom primeru, dobijamo da je $\dfrac{x_{n+1} - \sqrt{c}}{x_{n+1} + \sqrt{c}} = \left(\dfrac{a - \sqrt{c}}{a + \sqrt{c}}\right)^{2^n}$,

odakle nalazimo $x_n = \sqrt{c} \cdot \dfrac{1 + \left(\frac{a-\sqrt{c}}{a+\sqrt{c}}\right)^{2^n}}{1 - \left(\frac{a-\sqrt{c}}{a+\sqrt{c}}\right)^{2^n}} = \sqrt{c} \cdot \dfrac{(a+\sqrt{c})^{2^n} + (a-\sqrt{c})^{2^n}}{(a+\sqrt{c})^{2^n} - (a-\sqrt{c})^{2^n}}$. ■

PRIMER 3.2.27 Rešiti rekurentnu jednačinu $x_{n+1} = 2{x_n}^2 - 1$, sa početnim uslovom $x_0 = a$.

Rešenje. Neka je c broj koji zadovoljava jednakost $\frac{c+c^{-1}}{2} = a$. Pokažimo da

$$x_n = \frac{c^{2^n} + c^{-2^n}}{2}$$

predstavlja rešenje date rekurentne jednačine:

$$x_{n+1} = \frac{c^{2^{n+1}} + c^{-2^{n+1}}}{2} = \frac{\left(c^{2^n} + c^{-2^n}\right)^2 - 2}{2} = 2 \cdot \left(\frac{c^{2^n} + c^{-2^n}}{2}\right)^2 - 1 = 2{x_n}^2 - 1,$$

a i $x_0 = \frac{c^{2^0} + c^{-2^0}}{2} = \frac{c+c^{-1}}{2} = a$. ■

PRIMER 3.2.28 Naći rešenje sistema rekurentnih jednačina

$$2x_{n+1} + y_{n+1} = x_n + 3y_n, \qquad x_{n+1} + y_{n+1} = x_n + y_n,$$

koje zadovoljava početne uslove $x_0 = 1$ i $y_0 = 2$.

Rešenje. Kada od prve jednačine oduzmemo drugu dobijamo $x_{n+1} = 2y_n$. Kada od dvostruke druge oduzmemo prvu dobijamo $y_{n+1} = x_n - y_n$. Sada kao u Primeru 3.2.13 rešimo ovaj novi sistem rekurentnih jednačina $\begin{array}{l} x_{n+1} = 2y_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n \end{array}$ sa istim početnim uslovima $x_0 = 1$ i $y_0 = 2$, te dobijamo rešenje

$$x_n = 2 - (-2)^n, \qquad y_n = 1 + (-2)^n.$$

■

PRIMER 3.2.29 Nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ zadovoljavaju sistem rekurentnih jednačina

$$a_{n+1} = \frac{b_n}{a_n}, \qquad b_{n+1} = \frac{b_n - 1}{a_n - 1}.$$

Naći početne uslove x_0 i y_0 ako je poznato da ovi nizovi konvergiraju.

Rešenje. Odredimo prvih nekoliko članova oba niza

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{b_0}{a_0} & b_1 &= \frac{b_0 - 1}{a_0 - 1} \\
a_2 &= \frac{a_0(b_0 - 1)}{b_0(a_0 - 1)} & b_2 &= \frac{a_0}{a_0 - 1} \\
a_3 &= \frac{b_0}{b_0 - 1} & b_3 &= \frac{b_0}{b_0 - a_0} \\
a_4 &= \frac{b_0 - 1}{b_0 - a_0} & b_4 &= \frac{a_0(b_0 - 1)}{b_0 - a_0} \\
a_5 &= a_0 & b_5 &= b_0
\end{aligned}$$

Vidimo da su oba niza periodični sa istim periodom 5. Periodičn nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ su konvergentni ako i samo ako su konstantni, tj. akko važi $a_1 = a_0$ i $b_1 = b_0$, odnosno akko je

$$\frac{b_0}{a_0} = a_0 \qquad \text{i} \qquad \frac{b_0 - 1}{a_0 - 1} = b_0.$$

Eliminisanjem promenljive $b_0 = {a_0}^2$ iz ovog sistema dobijamo kvadratnu jednačinu ${a_0}^2 - a_0 - 1 = 0$, čijim rešavanjem dobijamo 2 rešenja ovog sistema:

$$(a_0, b_0) \in \left\{ \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \tfrac{3-\sqrt{5}}{2} \right), \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \tfrac{3+\sqrt{5}}{2} \right) \right\}.$$

■

PRIMER 3.2.30 Rešiti sistem rekurentnih jednačina $x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \dfrac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, sa početnim uslovima $x_0 = a$ i $y_0 = b$.

Rešenje. Ako pomnožimo ove 2 jednačine dobijamo $x_{n+1}y_{n+1} = x_n y_n$. Pomoću ove relacije principom matematičke indukcije dokazujemo da je $x_n y_n = ab$, te se time polazni sistem rekurentnih jednačina sveo na

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \qquad x_n y_n = ab.$$

Ako sad elimišemo promenljivu y_n iz ovih jednakosti dobijamo jednačinu $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{ab}{x_n})$, koju smo već razmatrali u Primeru 3.2.26, te imamo da je njeno rešenje

$$x_n = \sqrt{ab} \cdot \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2^n} + (\sqrt{a}-\sqrt{b})^{2^n}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2^n} - (\sqrt{a}-\sqrt{b})^{2^n}}.$$

Sada iz relacije $x_n y_n = ab$ nalazimo i y_n:

$$y_n = \sqrt{ab} \cdot \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2^n} - (\sqrt{a}-\sqrt{b})^{2^n}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2^n} + (\sqrt{a}-\sqrt{b})^{2^n}}.$$

■

PRIMER 3.2.31 Dat je niz $x_1 = 2$, $x_2 = x_3 = 7$, $x_{n+1} = x_n \cdot x_{n-1} - x_{n-2}$. Dokazati da je $x_n + 2$ potpun kvadrat.

Rešenje. Odredimo narednih nekoliko članova niza:

$$x_4 = 47, \qquad x_5 = 322, \qquad x_6 = 15\,127, \qquad x_7 = 4\,870\,847.$$

Vidimo da on jako brzo raste, te ćemo pokušati sa pretpostavkom da je opšti član niza u obliku $x_n = a^{f(n)} + a^{-f(n)}$. Uvrštavanjem u polaznu rekurentnu jednačinu dobijamo

$$a^{f(n+1)}+a^{-f(n+1)} = (a^{f(n)}+a^{-f(n)})\cdot(a^{f(n-1)}+a^{-f(n-1)})-(a^{f(n-2)}+a^{-f(n-2)}),$$

tj. $a^{f(n+1)} + a^{-f(n+1)} = a^{f(n)+f(n-1)} + a^{f(n)-f(n-1)} + a^{-f(n)+f(n-1)} + a^{-f(n)-f(n-1)} - a^{f(n-2)} - a^{-f(n-2)}$. Ako izjednačimo 1. i 2. član sa leve strane i 1. i 4. član sa desne strane dobija se da je

$$f(n+1) = f(n) + f(n-1).$$

Ovo tačno odgovara da se ostali članovi pokrate, jer je pomerena ova jednačina $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$, tj. $f(n) - f(n-1) = f(n-2)$.

Ostaje da tražimo početne uslove za funkciju $f(n)$. Iz $x_1 = 2 = a^{f(1)} + a^{-f(1)}$ dobijamo da je $f(1) = 0$ (slučaj $a = 1$ otpada jer bi onda bilo $x_n \equiv 2$, što nije tačno jer je $x_2 = 7$). Dalje, iz $x_2 = 7 = a^{f(2)} + a^{-f(2)}$, smenom $t = a^{f(2)}$, dobijamo kvadratnu jednačinu $t^2 - 7t + 1 = 0$ koja ima rešenja $t_{1,2} = \frac{7\pm 3\sqrt{5}}{2}$. Kako je $t_1 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ i $t_2 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{-2}$, možemo uzeti da je $a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ i $f(2) = 2$. Proverimo da li se ovo uklapa i u treći početni uslov: $f(3) = f(2) + f(1) = 2 + 0 = 2$ i $x_3 = a^{f(3)} + a^{-f(3)} = a^{f(2)} + a^{-f(2)} = x_2 = 7$. Sada imamo da je $f(n) = 2F_{n-1}$ (gde F_n označava n-ti član Fibonačijevog niza zadatog sa $F_1 = F_2 = 1$ i $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$), te konačno nalazimo da je opšti član niza $\{x_n\}$ jednak

$$x_n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2F_{n-1}} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2F_{n-1}}.$$

Sada direktno dobijamo da je $x_n + 2 = \left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{F_{n-1}} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{F_{n-1}} \right)^2$.

Iz Binomnog razvoja sledi da je broj $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{F_{n-1}} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{F_{n-1}}$ ceo. ■

NAPOMENA Može se pokazati da je $x_n = \dfrac{F_{8F_{n-1}}}{F_{4F_{n-1}}}$.

NAPOMENA Kako je $\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ to važi i da je

$$\begin{cases} \sqrt{\sqrt{x_n+2}+2} & \text{za } n = 3k+1 \\ \sqrt{\sqrt{x_n+2}-2} & \text{za } n = 3k+1 \end{cases}$$

tačan kvadrat, jer je F_n paran akko je $n = 3k$.

PRIMENE REKURENTNIH JEDNAČINA

Sada ćemo se osvrnuti na neke od primena rekurentnih jednačina: u ekonomiji, linearnoj algebri (za računanje determinanti i odredjivanje stepena matrice), matematičkoj analizi (za računanje nekih vrsta integrala), teoriji brojeva, aritmetici, kao i u samoj kombinatorici (razni kombinatorni problemi, kao i permanent matrice). Sve ćemo ih ilustrovati kroz primere. Pored toga rekurentne jednačine nalaze primene i u drugim naukama, npr. fizici (za izračunavanje starosti nekog predmeta korišćenjem perioda poluraspada radioaktivnog ugljenika), društvenim naukama...

PRIMER 3.2.32 Banka nudi godišnji interes r (u procentima) na uloženi kapital. Neka a_0 glavnica koju smo uložili u banku (početni depozit) i a_n predstavlja količinu na koju je narastao kapital u toj banci nakon n godina. Odrediti koliko je a_n ako je u pitanju: **a)** prost kamatni račun; **b)** složen kamatni račun.

Rešenje. **a)** Na kraju svake godine kapital se uvećava za ra_0. Stoga je rekurentna jednačina

$$a_{n+1} = a_n + ra_0.$$

Kada rešimo ovu rekurentnu jednačinu dobijamo da je $a_n = a_0(1 + nr)$.

b) U složenom kamatnom računu kapital se na kraju n-te godine uvećava za $r \cdot a_n$ (a_n je kapital na početku te godine). Stoga imamo rekurentnu jednačinu

$$a_{n+1} = a_n(1 + r).$$

Kada rešimo ovu rekurentnu jednačinu dobijamo da je $a_n = a_0(1 + r)^n$. ■

PRIMER 3.2.33 Izračunati vrednost determinante reda n

$$D_n(-5,10,-5)=\begin{vmatrix}10 & -5 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ -5 & 10 & -5 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -5 & 10 & -5 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & -5 & 10 & & 0 & 0\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -5 & 10 & -5\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -5 & 10\end{vmatrix}.$$

Rešenje. Ako datu determinantu razvijemo prvo po prvoj vrsti, a zatim po prvoj koloni dobijamo rekurentnu vezu $D_n = 10D_{n-1} - 25D_{n-2}$ (D_{n-1} i D_{n-2} predstavljaju determinante istog oblika samo manjih redova: $n-1$ i $n-2$). Odgovarajuća karakteristična jednačina je $t^2-10t+25=0$ i ona ima dvostruko realno rešenje $t_1=t_2=5$, pa je opšte rešenje

$$D_n = C_1\cdot 5^n + C_2\cdot n\cdot 5^n.$$

Nepoznate konstante C_1 i C_2 tražimo iz početnih uslova :

$$\begin{array}{l} D_1=10\\ D_2=75\end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcrcr} 5C_1 & + & 5C_2 & = & 10\\ 25C_1 & + & 50C_2 & = & 75\end{array} \Rightarrow C_1=C_2=1 \Rightarrow D_n=5^n(n+1).$$

■

PRIMER 3.2.34 Data je matrica $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$. Odrediti matricu A^n, za $n\in\mathbb{N}$.

Rešenje. Karakteristični polinom matrice A je jednak

$$k_A(t)=\det(A-tI)=\begin{vmatrix}1-t & 2\\ 3 & -t\end{vmatrix}=t^2-t-6.$$

Za svaku matricu, pa i A, važi da je nula svog karakterističnog polinoma (Kejli-Hamiltonova teorema), tj. $A^2-A-6I=0$, gde I predstavlja jediničnu matricu odgovarajućeg reda. Odavde imamo da je

$$A^2=A+6I. \tag{3.13}$$

Ako ovu jednačinu pomnožimo sa A i iskoristimo jednakost (3.13) dobijamo

$$A^3=A^2+6A=A+6I+6A=7A+6I.$$

Stoga vidimo da matricu A^n uvek možemo predstaviti kao linearnu kombinaciju matrica A i I (u opštem slučaju za matricu A reda r, matricu A^n predstavljamo kao linearnu kombinaciju matrica $I, A, A^2, \dots, A^{r-1}$):

$$A^n = x_n\cdot A + y_n\cdot I.$$

Sada imamo da je $A^{n+1} = x_{n+1} \cdot A + y_{n+1} \cdot I$, a sa druge strane (ovde se jednakost (3.13) opet koristi!) imamo da je

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \cdot A = (x_n \cdot A + y_n \cdot I) \cdot A = x_n \cdot A^2 + y_n \cdot A \\ &= x_n \cdot (A + 6I) + y_n \cdot A = (x_n + y_n) \cdot A + 6x_n \cdot I. \end{aligned}$$

Izjednačavanjem ova 2 izraza za A^{n+1} dobijamo sistem rekurentnih jednačina

$$x_{n=1} = x_n + y_n, \quad y_{n+1} = 6x_n, \quad \text{uz početne uslove} \quad x_0 = 0, y_0 = 1.$$

■

NAPOMENA Postoji i obrnuta veza sistema linearnih rekurentih jednačina sa konstantnim koeficijentima i matrice A^n. Dati sistem se može zapisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \\ \vdots \\ w_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_n + a_{12}y_n + a13z_n + \ldots + a_{1s}w_n \\ a_{21}x_n + a_{22}y_n + a23z_n + \ldots + a_{2s}w_n \\ a_{31}x_n + a_{32}y_n + a33z_n + \ldots + a_{3s}w_n \\ \vdots \\ a_{s1}x_n + a_{s2}y_n + as3z_n + \ldots + a_{ss}w_n \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix},$$

gde je matrica $A = [a_{ij}]_{s \times s}$. Tada imamo da je opšte rešenje ovog sistema jednako

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = A^n \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \vdots \\ w_0 \end{bmatrix},$$

te smo rešavanje ovog sistema sveli na stepenovanje matrice sistema, A.

PRIMER 3.2.35 Odrediti čemu je jednak integral oblika $\displaystyle\int \sin^n x \, \mathrm{d}x$.

Rešenje. Za izračunavanje $\int \sin^n x \, \mathrm{d}x$ koristimo parcijalnu integraciju:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sin^n x \, \mathrm{d}x = \int \sin x \cdot \sin^{n-1} x \, \mathrm{d}x \\ &= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x \, \mathrm{d}x \\ &= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) \, \mathrm{d}x \\ &= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, \mathrm{d}x - (n-1) \int \sin^n x \, \mathrm{d}x \\ &= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n, \end{aligned}$$

odakle dobijamo rekurentnu vezu:

$$I_n = -\frac{1}{n}\cos x \cdot \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Početni uslov je ovde $I_1 = \int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x$.

Sličnim postupkom možemo da rešimo i integral $\displaystyle\int \cos^n x \, \mathrm{d}x$. ■

PRIMER 3.2.36 Dokazati da za svaki prirodan broj n važi $27 \mid 10^n + 18n - 1$.

Rešenje. U ovom primeru ćemo raditi obrnut postupak. Krenućemo od rešenja i dobićemo odgovarajuću linearnu homogenu rekurentnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima i onda iz nje izvući traženi zaključak.

Ako je $a_n = 10^n + 18n - 1$ opšte rešenje rekurentne jednačine, onda su 10 i 1 nule karakteristične jednačine (1 dvostruka), tj. karakteristična jednačina je

$$(t-10)(t-1)^2 = 0,$$

odnosno $t^3 - 12t^2 + 21t - 10 = 0$.
Tada je odgovarajuća rekurentna jednačina $a_n - 12a_{n-1} + 21a_{n-2} - 10a_{n-3} = 0$, odnosno

$$a_n = 12a_{n-1} - 21a_{n-2} + 10a_{n-3}.$$

Dokažimo matematičkom indukcijom da su svi članovi niza $\{a_n\}$ deljivi sa 27.

1° *Baza indukcije.*

Za $n = 0$, $n = 1$ i $n = 2$ imamo $a_0 = 0$, $a_1 = 27$ i $a_2 = 135 = 5 \cdot 27$. Svi su deljivi sa 27. ✓

2° *Indukcijska pretpostavka.*
Pretpostavimo da tvrdjenje važi za neko $n = k-2$, $n = k-1$ i $n = k$:
$27 \mid a_{k-2}$, $27 \mid a_{k-1}$, $27 \mid a_k$.

3° *Indukcijski korak.*
Za $n = k+1$ imamo da je i

$$a_{k+1} = 12a_k - 21a_{k-1} + 10a_{k-2}$$

deljiv sa 27 jer je svaki od 3 člana na desnoj strani po indukcijskoj pretpostavci deljiv sa 27. ✓

Stoga po principu matematičke indukcije su svi članovi niza $a_n = 10^n + 18n - 1$ deljivi sa 27. ■

PRIMER 3.2.37 Dat je u decimalnom zapisu broj $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2006}$. Odrediti cifre koje su neposredno uz decimalni zarez.

Rešenje. Posmatrajmo niz $\{a_n\}$ zadat formulom

$$a_n = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2n} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2n} = (5 + 2\sqrt{6})^n + (5 - 2\sqrt{6})^n.$$

Ovaj niz zadovoljava rekurentnu jednačinu $a_{n+2} = 10a_{n+1} - a_n$, uz početne uslove $a_0 = 2$ i $a_1 = 10$. Kada jednakost $a_{n+2} + a_n = 10a_{n+1}$ (dobija se iz rekurentne jednakosti) oduzmemo od $a_{n+4} + a_{n+2} = 10a_{n+3}$ (pomerena prethodna) dobijamo da je $a_{n+4} - a_n$ deljiv sa 10, tj. niz zadnjih cifara brojeva a_n je periodičan sa periodom 4. Stoga imamo

$$a_{1003} \equiv a_3 \equiv 10 - a_1 = 0 \pmod{10}.$$

Kako je $0 < (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2006} < \frac{1}{10}$, dobijamo da važi

$$a_{1003} > (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2006} > a_{1003} - \frac{1}{10},$$

pa su tražene cifre devetke, tj. dati broj je oblika $\ldots 9, 9 \ldots$ ■

PRIMER 3.2.38 Na koliko različitih načina se u uredjenoj vrsti može postaviti ukupno n crvenih, plavih i belih kuglica, tako da nikada nisu jedna pored druge dve crvene kuglice, dve bele kuglice i crvena i bela kuglica? (Kuglice iste boje se ne razlikuju!)

Rešenje 1. Neka ukupno crvenih i belih kuglica ima k. Zamenimo te kuglice sa k crveno-belih kuglica. Tada se zadatak sveo na:
Na koliko različitih načina se u uredjenoj vrsti može postaviti ukupno n crveno-belih i plavih kuglica, tako da nikada nisu jedna pored druge dve crveno-bele kuglice?
Izmedju k crveno-belih kuglica mora da se nalazi bar po jedna plava kuglica. Na $k+1$-no mesto pre, izmedju i posle tih k crveno-belih kuglica možemo da stavimo preostalih $n - k - (k-1) = n - 2k + 1$ plavih kuglica. Kako iza svake crveno-bele kuglice (sem poslednje) mora da bude bar jedna plava te 2 kuglice možemo spojiti u jednu "šarenu"kuglicu i time se svelo da odredimo na koliko načina k šarenih i $n - 2k + 1$ plavih kuglica možemo rasporediti u vrstu (a to je ekvivalentno izboru k mesta za šarene kuglice od ukupno $k + n - 2k + 1 = n - k + 1$ mesta) – što možemo uraditi na $\binom{n-k+1}{k}$ načina. Crvene i bele kuglice umesto crveno-belih možemo da rasporedimo na 2^k načina, pa vrstu sa fiksiranih k crvenih ili belih kuglica možemo da uredimo na $\binom{n-k+1}{k} \cdot 2^k$, te kako je $\binom{n-k+1}{k} = 0$ za $k \geqslant \left[\frac{n+1}{2}\right]$, to dobijamo da je traženi broj rasporeda $a_n = \sum\limits_{k \geqslant 0} \binom{n-k+1}{k} \cdot 2^k$. ■

Rešenje 2. Označimo sa a_n traženi broj rasporeda. Ako je na kraju plava kuglica iza nje može biti bilo koja kuglica, dok ako je na kraju crvena ili bela iza nje mora biti plava, a iza ove opet može biti bilo koja kuglica. Stoga, dolazimo do rekurentne jednačine $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$. Početni uslovi su $a_1 = 3$ (C,P,B) i $a_2 = 5$ (CP,PC,PP,PB,BP). Rešimo ovu jednačinu. Njena karakteristična jednačina je $t^2 - t - 2 = 0$ i njeni koreni su $t_1 = 2$ i $t_2 = -1$. Stoga je $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot (-1)^n$. Konstante C_1 i C_2 nalazimo iz početnih uslova: $a_1 = 3 = C_1 \cdot 2^1 + C_2 \cdot (-1)^1$ i $a_2 = 5 = C_1 \cdot 2^2 + C_2 \cdot (-1)^2$, tj. dobijamo sistem

$\begin{array}{l} 2C_1 - C_2 = 3 \\ 4C_1 + C_2 = 5 \end{array}$ čija su rešenja $C_1 = \frac{4}{3}$ i $C_2 = -\frac{1}{3}$. Tako, konačno, dobijamo da je $a_n = \frac{4}{3} \cdot 2^n - \frac{1}{3} \cdot (-1)^n = \dfrac{2^{n+2} + (-1)^{n+1}}{3}$. ■

NAPOMENA Na osnovu ova 2 različita rešenja prethodnog primera smo dobili (sa sve kombinatornim dokazom) sledeći identitet: $a_n = \sum_{k \geqslant 0} \binom{n-k+1}{k} \cdot 2^k = \dfrac{2^{n+2} + (-1)^{n+1}}{3}$.

PRIMER 3.2.39 Koliko ima n-tocifrenih brojeva sa parnim brojem parnih cifara?

Rešenje 1. Posmatraćemo prvo brojeve kojima je prva cifra parna (slučaj 1°), a zatim one kod kojih je prva cifra neparna (2°).
1° Prva cifra može biti jedna od 4 cifre: 2, 4, 6, 8. Od preostalih $n-1$ cifara mora ili još jedna, ili još 3, ili još 5,... da budu parne. Za ovih $n-1$ mesta imamo 5 mogućnosti i za parne i za neparne cifre. U ovom slučaju ima

$$4 \cdot \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{5} + \ldots\right] \cdot 5^{n-1} = 4 \cdot \tfrac{(1+1)^{n-1} - (1-1)^{n-1}}{2} \cdot 5^{n-1} = \frac{4}{2} \cdot 10^{n-1}$$

traženih brojeva.
2° Ovde prvu cifru možemo izabrati na 5 načina, a od preostalih $n-1$ cifara mora biti ili 0, ili 2, ili 4,... parnih cifara. Za ova četiri mesta imamo 5 mogućnosti i za parne i za neparne cifre. U ovom slučaju ima

$$5 \cdot \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{4} + \ldots\right] \cdot 5^{n-1} = 5 \cdot \tfrac{(1+1)^{n-1} + (1-1)^{n-1}}{2} \cdot 5^{n-1} = \frac{5}{2} \cdot 10^{n-1}$$

traženih brojeva.
Ukupno ovih brojeva ima $45 \cdot 10^{n-2}$ za $n \geqslant 2$, dok za $n = 1$ imamo 5 brojeva (1,3,5,7,9 imaju 0 parnih cifara). ■

Rešenje 2. Označimo sa a_n broj n-tocifrenih brojeva sa parnim brojem parnih cifara, a sa b_n broj n-tocifrenih brojeva sa neparnim brojem parnih cifara. Ako dopisujemo poslednju cifru dobijamo da važi $a_{n+1} = 5a_n + 5b_n$ i $b_{n+1} = 5a_n + 5b_n$, uz početne uslove $a_1 = 5$ i $b_1 = 4$. Iz prve jednačine dobijamo $b_n = \frac{1}{5}a_{n+1} - a_n$, što kad uvrstimo u drugu dobijamo $\frac{1}{5}a_{n+2} - a_{n+1} = 5a_n + 5(\frac{1}{5}a_{n+1} - a_n)$, odnosno $a_{n+2} = 10a_{n+1}$ (primetimo da ova relacija važi za $n \geqslant 1$, tj. tek od trećeg člana a_3), što sa početnim uslovom $a_2 = 45$ daje $a_n = 45 \cdot 10^{n-2}$, za $n \geqslant 2$ (za $n = 1$ je $a_1 = 5$). ■

Rešenje 3. Označimo sa A skup n-tocifrenih brojeva sa parnim brojem parnih cifara, a sa B skup n-tocifrenih brojeva sa neparnim brojem parnih cifara (važi $|A| = a_n$ i $|B| = b_n$ u terminologiji prethodnog rešenja). Uočimo preslikavanje koje slika skup A u skup B, dato sa $f(x) = \overline{x}$, pri čemu se $\overline{x}$ dobija od x tako što umesto cifre jedinica c broja x zapišemo cifru $9-c$, dok sve ostale cifre ostavimo nepromenjene. Funkcija f je za $n \geqslant 2$ bijekcija pa je $|A| = |B|$, odnosno $a_n = b_n$.

Kako n-tocifrenih brojeva ima $9 \cdot 10^{n-1}$, dobijamo da je $a_n = b_n = 45 \cdot 10^{n-2}$, za $n \geqslant 2$. ■

PRIMER 3.2.40 Naći vrednost izraza $\sum\limits_{k=0}^{n} k^4$.

Rešenje 1. Označimo sa S_n zbir prvih n četvrtih stepena: $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^4$. Tada imamo linearnu nehomogenu rekurentnu jednačinu $S_{n+1} = S_n + (n+1)^4$ uz početni uslov $S_0 = 0$. Opšte rešenje ove rekurentne jednačine jednako je zbiru homogenog i partikularnog: $S_n = h_n + p_n$.
Homogeno rešenje h_n dobijamo kada rešimo homogenu jednačinu $h_{n+1} = h_n$. Njena karakteristična jednačina je $t = 1$, pa je njeno rešenje $h_n = C_1 \cdot 1^n = C_1$, gde je C_1 neka konstanta, koju ćemo na kraju odrediti iz početnog uslova.
Partikularno rešenje je jedno rešenje jednačine $p_{n+1} = p_n + (n+1)^4$. Kako je nehomogen deo $f(n) = (n+1)^4$ polinom stepena 4 i kako je 1 nula (i to reda $s = 1$) karakteristične jednačine kod homogenog dela, to ćemo partikularno rešenje tražiti u obliku $p_n = n^s \cdot Q_4$, gde je $Q_4(n)$ nepoznat polinom stepena 4 po n. Stoga partikularno rešenje p_n tražimo u obliku $p_n = n^1 \cdot (\alpha n^4 + \beta n^3 + \gamma n^2 + \delta n + \varepsilon) = \alpha n^5 + \beta n^4 + \gamma n^3 + \delta n^2 + \varepsilon n$. Zamenimo ovo u gornju jednačinu:

$$\alpha(n+1)^5 + \beta(n+1)^4 + \gamma(n+1)^3 + \delta(n+1)^2 + \varepsilon(n+1) = \alpha n^5 + \beta n^4 + \gamma n^3 + \delta n^2 + \varepsilon n + (n+1)^4.$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene u polinomima sa leve i desne strane dobijamo sistem:

$$\begin{array}{rrcl}
n^5: & \alpha & = & \alpha \\
n^4: & 5\alpha + \beta & = & \beta + 1 \\
n^3: & 10\alpha + 4\beta + \gamma & = & \gamma + 4 \\
n^2: & 10\alpha + 6\beta + 3\gamma + \delta & = & \delta + 6 \\
n: & 5\alpha + 4\beta + 3\gamma + 2\delta + \varepsilon & = & \varepsilon + 4 \\
1: & \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon & = & 1,
\end{array}$$

čija su rešenja $\alpha = \frac{1}{5}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{3}$, $\delta = 0$, $\varepsilon = -\frac{1}{30}$. Konačno dobijamo $p_n = \dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^4}{2} + \dfrac{n^3}{3} - \dfrac{n}{30}$.
Opšte rešenje je $S_n = C_1 + \dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^4}{2} + \dfrac{n^3}{3} - \dfrac{n}{30}$, što nam sa početnim uslovom $S_0 = 0$ daje $C_1 = 0$, tj. dobijamo da je $S_n = \dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^4}{2} + \dfrac{n^3}{3} - \dfrac{n}{30}$. ■

Rešenje 2. Ako znamo formule za zbir kubova, kvadrata i samih prvih n brojeva možemo na sledeći način dobiti formulu za zbir četvrtih stepena. Podjimo od formule $(n+1)^5 - n^5 = \binom{5}{1}n^4 + \binom{5}{2}n^3 + \binom{5}{3}n^2 + \binom{5}{4}n + \binom{5}{5} = 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1$. Ispod nje napišimo formulu u kojoj smo svako n zamenili sa $n-1$, zatim sa $n-2$, ... i na kraju sa $n = 2$:

$$n^5 - (n-1)^5 = 5(n-1)^4 + 10(n-1)^3 + 10(n-1)^2 + 5(n-1) + 1$$

$$(n-1)^5 - (n-2)^5 = 5(n-2)^4 + 10(n-2)^3 + 10(n-2)^2 + 5(n-2) + 1$$

$$\vdots$$

$$2^5 - 1^5 = 5 \cdot 1^4 + 10 \cdot 1^3 + 10 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 1.$$

Sabiranjem svih ovih jednačina dobijamo

$$(n+1)^5 - 1 = 5\sum_{k=1}^{n} k^4 + 10\sum_{k=1}^{n} k^3 + 10\sum_{k=1}^{n} k^2 + 5\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1.$$

Odavde dobijamo traženu sumu:

$$5\sum_{k=1}^{n} k^4 = (n+1)^5 - 1 - 10\sum_{k=1}^{n} k^3 - 10\sum_{k=1}^{n} k^2 - 5\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= (n+1)^5 - 1 - 10\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 5\frac{n(n+1)}{2} - n$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

■

NAPOMENA Do date sume smo mogli doći i pomoću druge sumacione formule (2.11) i jednakosti $k^4 = 24\binom{k}{4} + 36\binom{k}{3} + 14\binom{k}{2} + \binom{k}{1}$.

PRIMER 3.2.41 Odrediti broj $N(n,r)$ permutacija π skupa $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ kod kojih važi jednakost

$$\pi(k) \leqslant k + r$$

za svako $k = 1, 2, \ldots, n$ (ovde je $r < n$).

Rešenje. Permutacije sa ograničenjima možemo opisati pomoću $(0,1)$-matrice $A = (a_{ij})_{n\times n}$ u kojoj imamo:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je} \quad i - j \leqslant r, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Broj permutacija sa ograničenjima je dat preko permanenta (funkcije koju smo uveli u pododeljku "Permutacije"), tj. imamo da je $N(n;r) = \operatorname{per} A$. Da se podsetimo, permanent se definiše kao

$$\operatorname{per} A = \sum_{\pi \in S_n} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \ldots a_{n\pi(n)},$$

gde π uzima vrednosti iz kupa S_n svih permutacija skupa $\mathbb{N}_n$. U ovoj sumi, samo proizvodi koji odgovaraju permutaciji π koja zadovoljava sva ograničenja imaju vrednost 1, dok su ostali jednaki 0. Stoga je broj permutacija sa ograničenjima jednak permanentu pridružene matrice A.

Permanent možemo izračunati i pomoću Laplasovog razvoja (koji je sličan onom za determinante, samo su svi članovi pozitivni). Razvijanjem po prvoj vrsti matrice A dobijamo rekurentnu relaciju

$$N(n;r) = (r+1) \cdot N(n-1;r).$$

Početni uslov nam je

$$N(r+1;r) = (r+1)!$$

jer su to sve permutacije skupa $\mathbb{N}_{r+1}$. Na osnovu ove dve jednakosti dobijamo

$$N(n;r) = (r+1)^{n-r-1} \cdot N(r+1;r) = (r+1)^{n-r-1} \cdot (r+1)!$$

■

ZADACI

Rešiti sledeće rekurentne jednačine (zadaci 3.2.1–3.2.21):

3.2.1 $a_0 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n$ za $n \geqslant 0$.

3.2.2 $a_0 = 2,\ a_1 = 3,\ a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$ za $n \geqslant 1$.

3.2.3 $a_0 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n - 1$ za $n \geqslant 0$.

3.2.4 $a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ za $n \geqslant 2$.

3.2.5 $a_0 = 1,\ a_1 = 4,\ a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ za $n \geqslant 2$.

3.2.6 $a_0 = 5,\ a_1 = 6,\ a_2 = 10,\ a_{n+1} = 6a_n - 11a_{n-1} + 6a_{n-2}$ za $n \geqslant 2$.

3.2.7 $x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$ za $n \geqslant 0$.

3.2.8 $a_1 = 3,\ a_2 = 5,\ a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$ za $n \geqslant 1$.

3.2.9 $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$ za $n \geqslant 3$.

3.2.10 $a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$ za $n \geqslant 0$.

3.2.11 $x_0 = 1,\ x_1 = 4,\ x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n$ za $n \geqslant 0$.

3.2.12 $a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+1} = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ za $n \geqslant 2$.

3.2.13 $x_0 = 1,\ x_1 = 3,\ x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0$ za $n \geqslant 0$.

3.2.14 $x_0 = 2,\ x_1 = 1,\ x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$ za $n \geqslant 0$.

3.2.15 $a_0 = 1,\ a_1 = -11,\ a_2 = -15,\ a_{n+3} = 3a_{n+2} + 4a_{n+1} - 12a_n$ za $n \geqslant 0$.

3.2.16 $a_0 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2n$ za $n \geqslant 0$.

3.2.17 $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} + 3^n$ za $n \geqslant 2$.

3.2.18 $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 16$, $a_n - 6a_{n-1} + 12a_{n-2} - 8a_{n-3} = 2^n$ za $n \geqslant 3$.

3.2.19 $a_0 = 11,\ a_1 = 28,\ a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 4 \cdot 3^n$ za $n \geqslant 2$.

3.2.20 $a_n = 4(a_{n-1} - a_{n-2}) + 2^n$ za $n \geqslant 2$.

3.2.21 $a_n = 3a_{n-1} - 4n + 3 \cdot 2^n$ za $n \geqslant 1$.

3.2.22 Odrediti rešenje sistema rekurentnih jednačina $x_{n+1} = 3x_n + y_n$, $y_{n+1} = 5x_n - y_n$, koje zadovoljava uslove $x_0 = 0$ i $y_0 = 6$.

3.2.23 Rešiti sistem $x_{n+1} = 4x_n - 2y_n$, $y_{n+1} = x_n + y_n$, uz uslove $x_0 = 1$ i $y_0 = 1$.

3.2.24 Odrediti rešenje rekurentne jednačine $x_{n+1} = \dfrac{x_n - 1}{x_n + 3}$, uz uslov $x_0 = 1$.

3.2.25 Rešiti rekurentnu jednačinu $x_{n+1} = \dfrac{x_n + 1}{-x_n + 1}$, uz uslov $x_0 = 0$.

3.2.26 Rešiti rekurentnu jednačinu $x_{n+1} \cdot x_n + 3x_{n+1} + x_n + 4 = 0,\ x_0 = 0, x_1 = -\frac{4}{3}$.

3.2.27 Izračunati vrednost sledećih determinanti reda n:
a) $D_n(2,7,5)$; **b)** $D_n(1,3,2)$; **c)** $D_n(1,2,1)$ **d)** $D_n(-1,2,3)$.

3.2.28 Koliko ima n-tocifrenih brojeva sa parnim brojem parnih cifara?

3.2.29 Na koliko različitih načina se u uredjenoj vrsti može postaviti ukupno n crvenih, plavih i belih kuglica, tako da nikada nisu jedna pored druge dve crvene kuglice, dve bele kuglice i crvena i bela kuglica? (Kuglice iste boje se ne razlikuju!)

3.2.30 Neka je x_n broj nizova od n slova koji se mogu formirati korišćenjem slova A,B,V,G,D takvih da se slovo A javlja neparan broj puta. Naći rekurentnu relaciju za x_n.

3.2.31 U ravni je nacrtano n pravih u opštem položaju (ne postoje 2 paralelne prave ni 3 konkurentne). Te prave dele ravan na r_n regiona (oblasti koje mogu biti i beskonačne). Naći r_n.

3.2.32 U ravni je nacrtano n kružnica, takvih da se svake 2 od tih kružnica seku u tačno 2 tačke i da ne postoje 3 kružnice koje se seku u istoj tački. Te kružnice dele ravan na r_n regiona. Naći r_n.

3.2.33 (*Hanojske kule*) Data su 3 vertikalna klina (oni su označeni sa A,B,C) i na prvom klinu se nalazi n diskova različitih prečnika (na dnu je najveći, pa onda malo manji i tako do najmanjeg koji je na vrhu). Rastojanje izmedju svaka 2 od klinova je veće od najvećeg prečnika diskova. Legalan potez se definiše kao svaki potez koji sa vrha nekog od ova 3 klina skida disk i stavlja ga na vrh gomile koja je na nekom od preostala 2 klina, ali da tim potezom nismo stavili veći disk na manji disk. Označimo sa x_n broj legalnih poteza potrebnih da svih n diskova premestimo sa klina A na klin B. Naći rekurentnu relaciju za x_n, a zatim je i rešiti.

3.3 FUNKCIJE GENERATRISA I REŠAVANJE REKURENTNIH JEDNAČINA

Ponovo ćemo razmatrati (normiranu) linearnu homogenu rekurentnu jednačinu reda k sa konstantnim koeficijentima (3.7), ali ovog puta uz date početne uslove:

$$\begin{cases} a_{n+k} + f_{k-1} \cdot a_{n+k-1} + f_{k-2} \cdot a_{n+k-2} + \ldots + f_0 \cdot a_n = 0, \ (n \geqslant 0) \\ a_0 = u_0, \ a_1 = u_1, \ \ldots \ , \ a_{k-1} = u_{k-1} \end{cases} \tag{3.14}$$

TEOREMA 3.3.1 Funkcija generatrise niza $\{a_n\}$ datog sa (3.14) je oblika

$$A(x) = \frac{R(x)}{1 + f_{k-1} + f_{k-2} + \ldots + f_0},$$

gde je $R(x)$ polinom, čiji je stepen $\deg R(x) < k$.

□

!!!! Priča sa karakterističnom jednačinom !!!!!!

TEOREMA 3.3.2 Neka je niz $\{a_n\}$ dat sa (3.14) i neka karakteristična jednačina ima korene $t_1, t_2, \ldots, t_s$ sa odgovarajućim višestrukostima $m_1, m_2, \ldots, m_s$. Tada je opšti član niza oblika

$$a_n = P_1(n) \cdot {t_1}^n + P_2(n) \cdot {t_2}^n + \ldots + P_s(n) \cdot {t_s}^n,$$

gde su $P_i(n)$ polinomi po n stepena najviše $m_i - 1$, tj.

$$P_i(n) = A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \ldots + A_{m_i-1} n^{m_i-1},$$

gde su A_j proizvoljne konstante (koje se odredjuju na osnovu početnih uslova).

□

Ovim teoretskim zaključcima smo pokazali formule date u prethodnom poglavlju "Rekurentne jednačine".

Direktnu primenu funkcija generatrisa ilustrovaćemo na nekoliko primera (homogenih, nehomogenih rekurentnih jednačina, kao i njihovih sistema).

PRIMER 3.3.3 Naći funkciju generatrise niza $\{a_n\}$ ako on zadovoljava rekurentnu relaciju $a_{n+1} = 3a_n + 2$, uz početni uslov $a_0 = 0$ i odatle naći opšti član niza.

Rešenje. Jednačini $a_{n+1} = 3a_n + 2$ odgovara jednačina

$$\frac{A(x) - a_0}{x} = 3A(x) + \frac{2}{1-x}$$

sa funkcijama generatrise: izraz na levoj strani, $\frac{A(x)-a_0}{x}$, odgovara nizu pomerenom za jedan ulevo tako da je njegov n-ti član razvoja jednak a_{n+1}; n-ti član od $3A(x)$ je $3a_n$; dok je svaki (pa i n-ti član) razvoja $\frac{2}{1-x}$ jednak 2. Jednačini $a_{n+1} = 3a_n + 2$ sa početnim uslovom $a_0 = 0$ odgovara jednačina

$$\frac{A(x)}{x} = 3A(x) + \frac{2}{1-x},$$

što kad sredimo dobijamo $A(x)(1 - 3x) = \frac{2}{1-x}$. Odatle nalazimo traženu funkciju generatrise niza $\{a_n\}$:

$$A(x) = \frac{2x}{(1-3x)(1-x)}\,.$$

Funkciju generatrise niza ćemo predstaviti u pogodnijem obliku za traženje niza (racionalnu funkciju predstavimo u obliku zbira parcijalnih razlomaka) i zatim iskoristimo poznate funkcije generatrise iz prethodnog poglavlja:

$$A(x) = \frac{2x}{(1-3x)(1-x)} = \frac{1}{1-3x} - \frac{1}{1-x}.$$

Iz funkcije generatrise lako nalazimo i opšti član niza:

$$A(x) = \frac{1}{1-3x} - \frac{1}{1-x} = \sum_{n\geqslant 0}(3x)^n - \sum_{n\geqslant 0}x^n = \sum_{n\geqslant 0}(3^n - 1)x^n$$

$$A(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \;\Rightarrow\; a_n = 3^n - 1.$$

■

PRIMER 3.3.4 Naći funkciju generatrise niza $\{a_n\}$ ako on zadovoljava rekurentnu relaciju

$a_{n+1} = 2a_n + n$, uz početne uslove $a_0 = 1$ i odatle naći opšti član niza.

Rešenje. Neka nizu $\{a_n\}$ odgovara funkcija generatrise $A(x)$. Tada nizu $\{a_{n+1}\}$ odgovara $\frac{A(x)-a_0}{x} = \frac{A(x)-1}{x}$. Kako je $\frac{1}{1-x}$ funkcija generatrise niza $(1, 1, 1, 1, \dots)$ imamo da nizu $(1, 2, 3, 4, \dots)$ odgovara funkcija generatrise $\left(\frac{1}{1-x}\right)'$. Kako nama treba niz $b_n = n = (0, 1, 2, 3, \dots)$ prethodni treba još da pomerimo za 1 mesto udesno, pa je njegova funkcija generatrise $B(x) = x \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)' = x\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$. Time smo svim članovim rekurentne veza odredili odgovarajuće funkcije generatrisa, pa dobijamo jednačinu:

$$\frac{A(x)-1}{x} = 2A(x) + \frac{x}{(1-x)^2}\,.$$

Odatle možemo "izvući"funkciju genratrise

$$A = \frac{1-2x+2x^2}{(1-x)^2(1-2x)}.$$

Ovime smo mi našli generatrisu, tj. "rešilišmo članove niza (funkcija generatrise sadrži informaciju o svim članovima niza). Ako bi trebalo da dokažemo da je ovaj niz jednak nekom drugom, dovoljno bi bilo da pokažemo da su im generatrise jednake. Medjutim, mi trebamo da nadjemo članove eksplicitno. Pokušajmo da opet predstavimo $A(x)$ u vidu pogodnih razlomaka:

$$A(x) = \frac{1-2x+2x^2}{(1-x)^2(1-2x)} = \frac{P}{(1-x)^2} + \frac{Q}{1-x} + \frac{R}{1-2x}$$

Možemo da pomnožimo obe strane sa $(1-x)^2(1-2x)$ čime bismo dobili jednačinu

$$1 - 2x + 2x^2 = P(1-2x) + Q(1-x)(1-2x) + R(1-x)^2, \tag{3.15}$$

odnosno

$$1 - 2x + 2x^2 = x^2(2Q + R) + x(-2P - 3Q - 2R) + (P + Q + R),$$

odakle se izjednačavanjem koeficijenata polinoma dobija sistem čije je rešenje $P = -1$, $Q = 0$ i $R = 2$.

Mogli smo i lakše da dobijemo konstante P, Q i R. Ako u jednačini (3.15) stavimo $x = 1$ dobijamo da je $P = -1$. Ako u jednačini (3.15) uvrstimo $x = \frac{1}{2}$ odmah dobijamo da je $R = 2$. Sada još uvrstimo P i R i stavimo $x = 0$ i dobijamo i $Q = 0$.

Dakle, imamo da je

$$A = \frac{-1}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-2x}$$

Pošto $\frac{2}{1-2x}$ odgovara nizu $\{2^{n+1}\}$ i kako $\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)'$ odgovara $\{n+1\}$, to je $a_n = 2^{n+1} - n - 1$. ■

PRIMER 3.3.5 Naći funkciju generatrise niza $\{a_n\}$ ako on zadovoljava rekurentnu relaciju $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$, uz početne uslove $a_0 = 1$ i $a_1 = 2$ i odatle naći opšti član niza.

Rešenje. Jednačini $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ sa početnim uslovima $a_0 = 1, a_1 = 2$ odgovaraju funkcije generatrise:

$$\frac{A(x) - 1 - 2x}{x^2} = 2\frac{A(x) - 1}{x} - A(x).$$

Kada ovo sredimo, dobija se

$$A(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{-1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} = -\sum_{n\geqslant 0} x^n + \sum_{n\geqslant 0} \binom{n+1}{n} x^n \\ &= \sum_{n\geqslant 0}(-1+n+1)x^n = \sum_{n\geqslant 0} nx^n \ \Rightarrow \ a_n = n. \end{aligned}$$

■

PRIMER 3.3.6 Rešiti rekurentnu jednačinu $a_n = a_{n-2} + 4n$, uz početne uslove $a_0 = 3$ i $a_1 = 2$.

Rešenje. Uvedimo funkciju generatrise za ovaj niz $A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Pomnožimo datu rekurentnu jednačinu sa x^n i sumirajmo to za vrednosti n od 2 do $+\infty$. Tada dobijamo

$$\sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n = x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n-2} + 4x \sum_{n=2}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

Kada iskoristimo definiciju funkcije generatrise, prethodna jednačina se svodi na

$$A(x) - 3 - 2x = x^2 \cdot A(x) + 4x \cdot \left(\frac{1}{(1-x)^2} - 1\right),$$

odakle kad izvučemo $A(x)$ na jednu stranu dobijamo traženu funkciju generatrise:

$$A(x) = \frac{3-2x}{1-x^2} + \frac{4x}{(1-x^2)(1-x)^2}.$$

Predstavimo ovu funkciju u obliku zbira parcijalnih razlomaka

$$A(x) = \frac{M}{1+x} + \frac{N}{1-x} + \frac{P}{(1-x)^2} + \frac{Q}{(1-x)^3}.$$

Kada pomnožimo u ovoj jednakosti sve sa imeniocem od $A(x)$ i izjednačimo koeficijente polinoma na levoj i desnoj strani dobijamo sistem od 4 jednačine sa 4 nepoznate, koji ima rešenje $M = 2$, $N = 0$, $P = -1$ i $Q = 2$, tj.

$$A(x) = \frac{2}{1+x} - \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2}{(1-x)^3} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

Kako je a_n koeficijent uz x^n u $A(x)$ dobijamo da je

$$a_n = 2\cdot(-1)^n - (n+1) + (n+2)(n+1) = 2\cdot(-1)^n + (n+1)^2.$$

■

PRIMER 3.3.7 Rešiti rekurentnu jednačinu $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 2^n + n$, uz početne uslove $x_0 = x_1 = 0$.

Rešenje. Neka je $X(t)$ generatrisa našeg niza. Dati niz se svodi na jednačinu

$$\frac{X(t)}{t^2} - 6\frac{X(t)}{t} + 9X(t) = \frac{1}{1-2t} + \frac{t}{(1-t)^2}.$$

Sredjujući ovaj izraz dobijamo da je $X(t) = \dfrac{t^2 - t^3 - t^4}{(1-t)^2(1-2t)(1-3t)^2}$ odakle predstavljanjem preko odgovarajućih razlomaka dobijamo da je

$$X(t) = \frac{1}{4(1-x)^2} + \frac{1}{1-2x} - \frac{5}{3(1-3x)} + \frac{5}{12(1-3x)^2}$$

Prvom sabirku odgovar niz $\frac{n+1}{4}$, drugom 2^n, trećem $-\frac{5}{3}\cdot 3^n = -5\cdot 3^{n-1}$ a poslednjem $\frac{5}{12}(n+1)3^n = \frac{5}{4}(n+1)3^{n-1}$ što sve ukupno daje

$$x_n = \frac{2^{n+2} + n + 1 + 5(n-3)3^{n-1}}{4}.$$

■

PRIMER 3.3.8 Rešiti rekurentnu jednačinu $a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n$, uz početne uslove $a_0 = 2$, $a_1 = 0$, i $a_2 = -2$.

Rešenje. Kada predjemo na funkcije generatrisa ovoj jednačini odgovara:

$$\frac{A(x) - 2 - 0\cdot x - (-2)x^2}{x^3} = 6\frac{A(x) - 2 - 0\cdot x}{x^2} - 11\frac{A(x)-2}{x} + 6A(x).$$

Kada ovo sredimo, dobija se

$$A(x) = \frac{20x^2 - 12x + 2}{1 - 6x + 11x^2 - 6x^3}.$$

Funkciju generatrise predstavljamo kao zbir tri razlomka:

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{20x^2-12x+2}{1-6x+11x^2-6x^3} = \frac{20x^2-12x+2}{(1-x)(1-2x)(1-3x)} \\ &= \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1-2x} + \frac{D}{1-3x}. \end{aligned}$$

Kada sve pomnožimo sa imeniocem dobijamo jednačinu

$$20x^2-12x+2 = B(1-2x)(1-3x) + C(1-x)(1-3x) + D(1-x)(1-2x),$$

odakle izjednačavanjem leve i desne strane dobijamo sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} B & + & C & + & D & = & 2 \\ -5B & - & 4C & - & 3D & = & -12 \\ 6B & + & 3C & + & 2D & = & 20 \end{array},$$

čija su rešenja $B=5$, $C=-4$, $D=1$. Dalje imamo:

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{5}{1-x} - \frac{4}{1-2x} + \frac{1}{1-3x} = 5\sum_{n\geqslant 0} x^n - 4\sum_{n\geqslant 0}(2x)^n + \sum_{n\geqslant 0}(3x)^n \\ &= \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \sum_{n\geqslant 0}(5-4\cdot 2^n+3^n)x^n. \end{aligned}$$

Odatle dobijamo rešenje $a_n = 5-4\cdot 2^n+3^n = 5-2^{n+2}+3^n$. ■

NAPOMENA Konstante bismo mnogo brže dobili ako bi u jednačinu pre sistema zamenili pogodne vrednosti za x. Te pogodne vrednosti su $x=1$, $x=\frac{1}{2}$ i $x=\frac{1}{3}$.

PRIMER 3.3.9 Neka su nizovi $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ i $\{w_n\}$ definisani pomoću $u_0=v_0=w_0=1$ i

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix}, \quad n \geqslant 0.$$

Dokazati da $\{u_n\}$ zadovoljava homogenu linearnu rekurentnu relaciju i naći opštu formulu za u_n.

Rešenje 1. Kada izjednačimo matrice na levoj i desnoj strani polazne matrične jednačine,

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n + w_n \\ v_n + w_n \\ u_n - v_n + 4w_n \end{bmatrix},$$

dobijamo sistem rekurentnih jednačina:

$$\begin{array}{rclcrcr} u_{n+1} & = & u_n & & & + & w_n \\ v_{n+1} & = & & & v_n & + & w_n \\ w_{n+1} & = & u_n & - & v_n & + & 4w_n \end{array}.$$

Da bismo dobili rekurentnu relaciju samo po u treba "eliminisati"i v i w. Iz prve jednačine imamo

$$w_n = u_{n+1} - u_n,$$

što kada ubacimo u treću dobijamo: $u_{n+2} - u_{n+1} = u_n - v_n + 4u_{n+1} - 4u_n$, a odavde

$$v_n = -u_{n+2} + 5u_{n+1} - 3u_n.$$

Kada u drugu ubacimo izraze za v i w preko u dobijamo traženu homogenu linearnu rekurentnu relaciju:

$$u_{n+3} - 6u_{n+2} + 9u_{n+1} - 4u_n = 0.$$

Karakteristična jednačina je $t^3 - 6t^2 + 9t - 4 = 0$, odnosno $(t-1)^2(t-4) = 0$. Njeni koreni su $t_1 = t_2 = 1$ i $t_3 = 4$, pa je opšte rešenje oblika

$$u_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot n \cdot 1^n + c_3 \cdot 4^n,$$

gde konstante C_1, C_2 i C_3 tražimo iz početnih uslova ($u_0 = 1$, $u_1 = u_0 + w_0 = 2$ i $u_2 = u_1 + w_1 = u_1 + (u_0 - v_0 + 4w_0) = 6$). Kada rešimo sistem

$$\begin{array}{ccccccccc} u_0 & = & 1 & = & C_1 & & & + & C_3 \\ u_1 & = & 2 & = & C_1 & + & C_2 & + & 4C_3 \\ u_2 & = & 6 & = & C_1 & + & 2C_2 & + & 16C_3 \end{array}$$

dobijamo $C_1 = \frac{2}{3}$, $C_2 = 0$ i $C_3 = \frac{1}{3}$. Opšta formula za u_n je

$$u_n = \frac{2 + 4^n}{3}.$$

■

Rešenje 2. Da smo sistem rekurentnih jednačina "prebacili"na funkcije generatrisa, dobili bi sistem jednačina po $U(x)$, $V(x)$ i $W(x)$:

$$\begin{array}{ccccccc} \dfrac{U(x)-1}{x} & = & U(x) & & & + & W(x) \\ \dfrac{V(x)-1}{x} & = & & & V(x) & + & W(x) \\ \dfrac{W(x)-1}{x} & = & U(x) & - & V(x) & + & 4W(x) \end{array}$$

čijim rešavanjem dobijamo:

$$U(x) = \frac{1-3x}{4x^2 - 5x + 1} = \frac{2/3}{1-x} + \frac{1/3}{1-4x}.$$

Odatle, dobijamo da je

$$u_n = \frac{2 + 4^n}{3}.$$

Iz ovog rešenja (obrnutim postupkom) dobijamo jednostavniju linearnu rekurentnu vezu:

$$u_{n+2} - 5u_{n+1} + 4u_n = 0.$$

Ovo je posledica toga što funkcija generatrise sadrži potpunu informaciju o nizu (i početne uslove, koje smo u prethodnom razmatranju uzimali tek na kraju, a oni su "krivciža to pojednostavljenje jer je

$$u(n) = \frac{u(0) - v(0) + 3w(0)}{9} 4^n + \frac{v(0) + 8u(0) - 3w(0)}{9} + \frac{v(0) - u(0)}{3} n$$

i za $u(0) - v(0) + 3w(0) \neq 0$ i $v(0) - u(0) \neq 0$ dobija se rekurentna veza $u_{n+3} - 6u_{n+2} + 9u_{n+1} - 4u_n = 0$, a ako je neki od tih izraza jednak nuli dobijamo jednostavniju rekurentnu vezu). ■

PRIMER 3.3.10 Neka je q_n broj reči dužine n sastavljenih od slova a, b, c, d, koje sadrže neparan broj slova b. Odrediti q_n.

Rešenje 1. Označimo sa p_n broj reči dužine n sastavljenih od slova a, b, c, d, koje sadrže paran broj slova b. Tada je $p_n + q_n = 4^n$ (sve reči dužine n). Reč dužine $n+1$ sa neparnim brojem slova b može se dobiti od reči dužine n sa neparnim brojem slova b ako joj se na kraj dopiše jedno od tri slova a, c ili d, kao i od reči dužine n sa parnim brojem slova b ako joj se na kraj dopiše slovo b: $q_{n+1} = 3 \cdot q_n + p_n$. U ovom sistemu,

$$\begin{array}{ccccccc} p_n & + & q_n & = & 4^n & & \\ & & q_{n+1} & = & 3q_n & + & p_n, \end{array}$$

ako iz prve jednačine izrazimo $p_n = 4^n - q^n$ i to ubacimo u drugu dobijamo nehomogenu linearnu rekurentnu jednačinu

$$q_{n+1} = 2q_n + 4^n.$$

Da je $q_0 = 0$ možemo dobiti iz $q_1 = 2q_0 + 4^0$ ($q_1 = 1$: samo reč b). Ako sad predjemo na funkcije generatrise dobijamo

$$\frac{Q(x) - 0}{x} = 2Q(x) + \frac{1}{1 - 4x},$$

što kad sredimo daje

$$Q(x) = \frac{x}{(1 - 2x)(1 - 4x)}.$$

Predstavimo $Q(x)$ u pogodnijem obliku:

$$Q(x) = \frac{1/2}{1 - 4x} - \frac{1/2}{1 - 2x} = \frac{1}{2} \sum_{n \geqslant 0} (4x)^n - \frac{1}{2} \sum_{n \geqslant 0} (2x)^n = \sum_{n \geqslant 0} \frac{4^n - 2^n}{2} x^n.$$

Odatle dobijamo rešenje $q_n = \frac{1}{2}(4^n - 2^n)$. ■

Rešenje 2. Zadatak je bilo moguće rešiti tako što bismo odmah sistem rekurentnih jednačina prebacili na funkcije generatrisa:

$$P(x) + Q(x) = \frac{1}{1-4x}, \qquad \frac{Q(x) - 0}{x} = 3Q(x) + P(x)$$

i odavde bi rešavanjem sistema (po $P(x)$ i $Q(x)$ kao nepoznatim) dobili da je $Q(x) = \dfrac{x}{(1-2x)(1-4x)}$. Odredjivanje q_n ide na potpuno isti način. ■

ZADACI

3.4 FIBONAČIJEVI BROJEVI

Fibonačijevi brojevi predstavljaju svakako jedan od najpoznatijih nizova. Toliku šlavušu stekli jer su se javili i u mnogim drugim (nematematičkim) oblastima, kao i u samoj prirodi (npr. broj listova ili cvetova, kod velikog broja biljki je jednak baš nekom Fibonačijevom broju). U antičkoj Grčkoj, kao i kasnije u renesansi, za idealnu proporciju je uziman tzv. žlatni presek"koji se takodje javlja kod Fibonačijevih brojeva. Pored toga oni su našli primenu u rešenju nekoliko veoma važnih matematičkih problema. Jedan od njih je Matijaševičevo rešenje znamenitog desetog problema Hilberta, a drugi je recimo teorija ekstrema unimodalnih funkcija (koju je zasnovao Dž. Kifer). Zbog svega toga veliki broj matematičara u svetu je pristupio nekoj vrsti "Fibonačizma"(istražujući skoro kao hobi neka od svojstava ovog niza). Najjači primer te ljubavi prema Fibonačijevim brojevima je časopis *The Fibonacci Quarterly*, koji se izdaje u SAD još od 1963. godine, a i sada je na SCI listi (lista časopisa koji su u vrhu po indeksu citiranosti). Ruski matematičar Nikolaj Nikolaevič Vorobjev je napisao celu knjigu o Fibonačijevim brojevima, [34]. To sve govori o izuzetnom značaju ovih brojeva (te smo se stoga i mi odlučili da im dodelimo jedno poglavlje u našoj knjizi).

Prvo ćemo poći od nekih istorijskih činjenica vezanih za Fibonačijeve brojeve, a onda ćemo polako istraživati neke od njihovih osobina.

Italijanski matematičar Leonardo od Pize sa nadimkom Fibonači (*Fibonacci* je sraćeno od *"filius Bonacci"*, tj. Bonačijev sin) živeo je od $1180 - 1240$ (po nekim drugim podacima $1175 - 1250$). Najpoznatija dela su mu *Liber abaci*, 1202, u kojoj se pored mnogobrojnih problema borio za hindo–arapski brojni sistem i *Liber quadratorum*, 1225. (knjiga kvadrata brojeva koja predstavlja prvi pomak aritmetike posle Diofanta). U svojoj "Knjizi o abakusu"postavio "Problem zečeva":

> *Svaki par zec–zečica (starih barem 2 meseca) dobiju tokom svakog sledećeg meseca par mladih: zeca i zečicu. Ako je na početku godine bio jedan novorodjen par, koliko će biti ukupno parova zečeva početkom sledeće godine? (Pretpostavljamo da zečevi ne umiru.)*

Neka je f_n broj parova zec–zečica posle n meseci, tj. tokom $(n+1)$–vog meseca od početka godine. Prema pretpostavci je $f_0 = 1$ i $f_1 = 1$ (jer taj par još nije zreo za razmnožavanje), a f_n, $n \geqslant 2$ se dobija kada broju parova f_{n-1} koji su živeli prošlog meseca doda broj novorodjenih parova zečeva koji se dobijaju od f_{n-2} parova živih pre dva meseca. Zato je za sve $n \geqslant 2$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}.$$

Tako dobijamo niz

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

pa će nakon godinu dana biti $f_{12} = 233$ parova zečeva.

Najčešće se Fibonačijev niz definiše tako da su indeksi pomereni za 1 u odnosu na niz sa kojim smo se malopre sreli (ima nekoliko čisto matematičkih razloga, od kojih je jedan da se tada mnogo prirodnije vrši proširenje indeksa na ceo skup celih brojeva).

DEFINICIJA 3.4.1 Fibonačijev niz $\{F_n\}$ je zadat sledećom rekurentnom jednačinom:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1 \quad \text{i} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Ponekad se uvodi i proširenje tako da indeksi mogu da budu celi brojevi: $F_0 = 0$ i $F_{-a} = (-1)^{a+1} F_a$, pa niz izgleda

$$\ldots, -21, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$

Primetimo da i ovakav niz zadovoljava svojstvo da je zbir dva uzastopna člana jednak sledećem.

U sledećoj teoremi je sadržana i kombinatorna definicija Fibonačijevih brojeva.

TEOREMA 3.4.2 Skup $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ sadrži tačno F_{n+2} podskupa (uključujući i prazan skup) u kojima se ne nalaze 2 uzastopna prirodna broja.

Dokaz. Označimo sa a_n broj podskupova skupa $\mathbb{N}_n$ koji ne sadrže 2 uzastopna prirodna broja. Za svaki skup S, koji brojimo u a_n, imamo 2 mogućnosti:

1° $\underline{n \notin S}$. U skupu S mogu biti svi brojevi iz $\mathbb{N}_{n-1}$ (jer broj n nije u S), ali uz uslov da nema 2 uzastopna. Takvih podskupova ima a_{n-1}.

2° $\underline{n \in S}$. Kako je broj n u skupu S u njemu ne može biti i broj $n-1$, te je $S \setminus \{n\} \subseteq \mathbb{N}_{n-2}$, uz uslov da nema 2 uzastopna. Takvih podskupova ima a_{n-2}. Stoga dobijamo da važi rekurentna jednačina

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Početne uslove ćemo odrediti prostim prebrojavanjem. Za $n = 1$ imamo $a_1 = 2$ takva podskupa

$$\emptyset \quad \text{i} \quad \{1\},$$

a za $n = 2$ imamo $a_2 = 3$ takva podskupa

$$\emptyset, \quad \{1\} \quad \text{i} \quad \{2\}.$$

Kako imamo istu rekurentnu jednačinu, a samo pomerene početne uslove dobijamo da je $a_n = F_{n+2}$. □

OPŠTI ČLAN FIBONČIJEVOG NIZA

TEOREMA 3.4.3

Opšti član Fibonačijevog niza je jednak $F_n = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$.

Dokaz. Iz $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ imamo $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$, pa je karakteristična jednačina $t^2 - t - 1 = 0$ i njeni koreni su realni i različiti $t_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, pa je opšti član ove rekurentne jednačine (još nismo uzeli početne uslove u razmatranje) je dat formulom

$$F_n = C_1 \cdot \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Kako su $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$, zamenom $n = 0$ i $n = 1$ u opšte rešenje dobijamo sistem po C_1 i C_2, čija su rešenja $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ i $C_1 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$, odakle dobijamo da je opšti član Fibonačijevog niza dat formulom

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

□

Ustvari, iz ove formule možemo dobiti i sledeće tvrdjenje. Tu ćemo koristiti i funkciju $[x]$, koja označava označava *ceo deo* broja x, npr. $[\pi] = 3$, a $[-\pi] = -4$.

TEOREMA 3.4.4

F_n je jednak $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$ zaokruženom na najbliži ceo broj.

Dokaz. Procenimo koliko iznosi $\left|F_n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right|$:

$$\begin{aligned}\left|F_n - \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right| &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left|\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right| \\ &= \frac{\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|^n}{\sqrt{5}} < \frac{\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} < \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Stoga je F_n tačno jednak $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$ zaokruženom na najbliži ceo broj.

Kako izraz $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ može biti i pozitivan i negativan, Fibonačijeve brojeve možemo izraziti preko funkcije celog dela kao:

$$F_n = \begin{cases} \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], & n = 2k \\ \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] + 1, & n = 2k+1 \end{cases}.$$

□

Odredimo sada funkciju generatrise $F(x)$ Fibonačijevog niza.

TEOREMA 3.4.5 Funkcija generatrise $F(x)$ Fibonačijevog niza iznosi $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$.

Dokaz 1. Neka je $F(x)$ generatrisa niza $\{F_n\}$. Jednačini $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ (niz $\{F_{n+2}\}$ je Fibonačijev niz pomeren za 2 mesta u levo, a $\{F_{n+1}\}$ za 1 mesto ulevo), sa početnim uslovima $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$, odgovara sledeća jednačina sa funkcijama generatrisa:

$$\frac{F(x) - F_0 - F_1 x}{x^2} = \frac{F(x) - F_0}{x} + F(x),$$

odnosno $\frac{F(x) - x}{x^2} = \frac{F(x)}{x} + F(x)$. Nakon množenja sa x^2 i grupisanja dobijamo traženu funkciju generatrise

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

□

Dokaz 2. Neka je $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$ funkcija generatrise. Tada važi

$$\begin{aligned}F(x) &= F_0 + F_1 x + \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+2} x^{n+2} = 0 + 1 \cdot x + \sum_{n=0}^{\infty} (F_{n+1} + F_n) x^{n+2} \\ &= x + x \cdot (F(x) - F_0) + x^2 \cdot F(x) = x + x \cdot F(x) + x^2 \cdot F(x),\end{aligned}$$

odakle dobijamo da je $(1-x-x^2)\cdot F(x) = x$, pa je tražena funkcija generatrise

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

□

Sada ćemo korišćenjem ovog rezultata ponovo da odredimo opšti član Fibonačijevog niza.

PRIMER 3.4.6 Iz funkcije generatrise $F(x)$ odrediti opšti član Fibonačijevog niza.

Rešenje. Treba još da razvijemo ovaj izraz u stepeni red (predstavimo ga kao zbir parcijalnih razlomaka). Neka je

$$-x^2 - x + 1 = (1-\alpha x)(1-\beta x)$$

Tada je $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ a $\beta = (1-\sqrt{5})/2$. Dalje je

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{(1-x\alpha)(1-x\beta)} = \frac{A}{1-x\alpha} + \frac{B}{1-x\beta}.$$

Kada sve pomnožimo sa $1-x-x^2$ i izjednačimo koeficijente polinoma dobijamo sistem, čija su rešenja $A = \frac{1}{\alpha-\beta}$ i $B = \frac{-1}{\alpha-\beta}$. Vratimo to u prethodnu formulu i korišćenjem poznatog razvoja dobijamo:

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{1-x\alpha} - \frac{1}{1-x\beta}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\beta^n x^n\right).$$

Koeficijent uz x^n u funkciji generatrise $F(x)$ predstavlja n-ti Fibonačijev broj, pa je

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n).$$

Time smo ponovo, samo sada preko funkcija generatrisa, izveli formulu za n-ti član Fibonačijevog niza. ■

NAPOMENA Pomereni Fibonačijev niz f_n ima funkciju generatrise $F_p(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$.

OSNOVNE OSOBINE

U naredna 3 tvrdjenja ćemo dati neke aritmetičke osobine Fibonačijevih brojeva.

TEOREMA 3.4.7 Fibonačijev broj F_n je:

a) paran ako i samo ako je oblika $n = 3k$;

b) deljiv sa 3 ako i samo ako je oblika $n = 4k$;
c) deljiv sa 5 ako i samo ako je oblika $n = 5k$;
d) deljiv sa 4 ako i samo ako je oblika $n = 6k$;
e) deljiv sa 10 ako i samo ako je oblika $n = 15k$.

Dokaz. **a)** Kako je

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} = (F_{n-2} + F_{n-3}) + F_{n-2} = 2F_{n-2} + F_{n-3},$$

dobijamo da su brojevi F_n i F_{n-3} iste parnosti. Kako je $F_0 = 0$, a $F_1 = F_2 = 1$, dobijamo da je F_n paran ako i samo ako je oblika $n = 3k$.
b) Ako nastavimo sa računom iz dela pod a) dobijamo

$$F_n = 2F_{n-2} + F_{n-3} = 2(F_{n-3} + F_{n-4}) + F_{n-3} = 3F_{n-3} + 2F_{n-4},$$

što sa $F_0 = 0$, $F_1 = F_2 = 1$ i $F_3 = 2$ daje tvrdjenje.
c) Ako nastavimo sa računom iz dela pod b) dobijamo

$$F_n = 3F_{n-3} + 2F_{n-4} = 3(F_{n-4} + F_{n-5}) + 2F_{n-4} = 5F_{n-4} + 3F_{n-5},$$

što sa $F_0 = 0$, $F_1 = F_2 = 1$, $F_3 = 2$ i $F_4 = 3$ daje tvrdjenje.
d) Ako nastavimo sa računom iz dela pod c) dobijamo

$$F_n = 5F_{n-4} + 3F_{n-5} = 5(F_{n-5} + F_{n-6}) + 3F_{n-5} = 8F_{n-5} + 5F_{n-6},$$

što sa $F_0 = 0$, $F_1 = F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$ i $F_5 = 5$ daje tvrdjenje.
Vidimo da je F_n deljiv i sa 8 ako i samo ako je oblika $n = 6k$.
e) Ova osobina je direktna posledica delova pod a) i c). Možemo je proveriti za neke manje vrednosti u tablicama u dokazu naredne teoreme.

$\square$

TEOREMA 3.4.8 Niz cifara jedinica Fibonačijevih brojeva je periodičan niz sa periodom 60.

Dokaz. Posmatrajmo niz cifara jedinica Fibonačijevih brojeva, $\{c_n\}$. Za njih važi slična rekurentna veza

$$c_{n+2} = c_{n+1} +_{10} c_n,$$

gde $+_{10}$ označava sabiranje po modulu 10. Da bismo našli period ovog niza potrebno je da nadjemo prve brojeve i i j, $i < j$, takve da je $c_i = c_j$ i $c_{i+1} = c_{j+1}$, jer će dalje cifre jedinica da se ponavljaju periodično sa periodom $j - i$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
c_n	0	1	1	2	3	5	8	3	1	4	5	9	4	3	7

n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
c_n	0	7	7	4	1	5	6	1	7	8	5	3	8	1	9

n	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
c_n	0	9	9	8	7	5	2	7	9	6	5	1	6	7	3

n	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
c_n	0	3	3	6	9	5	4	9	3	2	5	7	2	9	1

n	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	...
c_n	0	1	1	2	3	5	8	3	1	4	...

Popunjavanjem gornje tablice (popunili smo 10-ak elemenata više) dobijamo da je $i = 0$, a $j = 60$, pa smo pokazali da je $\{c_n\}$ periodičan niz sa periodom 60.

Na osnovu ovoga imamo da je $\dfrac{1}{10}(F_{n+60} - F_n)$ prirodan broj. $\Box$

TEOREMA 3.4.9 Broj cifara F_n je veći od $\dfrac{n-2}{5}$.

Dokaz. Broj cifara prirodnog broja F_n je $[\log_{10} F_n] + 1$. Po Teoremi 3.4.4 imamo da važi $F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$ te je broj cifara broja F_n veći od ili jednak sa

$$\left[\log_{10}\left(\tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n\right)\right] + 1 = \left[-\log_{10}\sqrt{5} + n\cdot\log_{10}\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right] + 1.$$

Kako važe nejednakosti

$$\log_{10}\sqrt{5} \approx 0,349485\ldots < \tfrac{2}{5} \qquad \text{i} \qquad \log_{10}\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,2089876 > \tfrac{1}{5},$$

imamo da je broj cifara broja F_n veći od ili jednak sa $[n\cdot\frac{1}{5} - \frac{2}{5}] + 1$, tj. veći je od $[\frac{n-2}{5}]$, a samim tim je veći i od $\frac{n-2}{5}$. $\Box$

Sledeće tvrdjenje nam uspostavlja jednu matričnu jednakost sa Fibonačijevim brojevima kod kojih su indeksi prošireni na ceo skup celih brojeva. Nju ćemo iskoristiti kasnije za pokazivanje jednog identiteta.

TEOREMA 3.4.10 Za svaki $n \in \mathbb{Z}$ važi $\begin{Vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}^n = \begin{Vmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{Vmatrix}$.

Dokaz. Za $n = 0$ imamo da je

$$\begin{Vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}^0 = I = \begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}F_1 & F_0\\ F_0 & F_{-1}\end{Vmatrix}.$$

Pretpostavimo da tvrdjenje važi za $n = k$. Onda za $n = k + 1$ imamo

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}^{k+1} = \begin{Vmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{Vmatrix}.$$

Stoga po principu matematičke indukcije tvrdjenje važi i za sve prirodne brojeve n.

Za negativne brojeve koristimo da je inverzna matrica $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$, pa za $n = -k$ imamo da važi $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}^{-k} = \left(\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}^{-1}\right)^{k} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}^{k}$ i sada potpuno analogno, kao u slučaju pozitivnih n, dokazujemo tvrdjenje principom matematičke indukcije. □

Sledeća teorema nam daje vezu verižnih razlomaka i Fibonačijevih brojeva.

TEOREMA 3.4.11 Odnos dva uzastopna člana Fibonačijevog niza može se predstaviti preko verižnog razlomka

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \underbrace{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{}{1 + \cfrac{1}{1}}}}}_{n}$$

i kad pustimo da n teži beskonačnosti dobijamo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Dokaz. Da je $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ jednako datom verižnom razlomku pokazaćemo matematičkom indukcijom. Za $n = 1$ imamo $\frac{F_1}{F_1} = \frac{1}{1} = 1$.

Pretpostavimo da tvrdjenje važi za neko $n = k$. Za $n = k + 1$ je

$$\frac{F_{k+2}}{F_{k+1}} = \frac{F_{k+1} + F_k}{F_{k+1}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{F_{n+1}}{F_n}},$$

pa smo dobili da tvrdjenje važi i za $n = k + 1$.

Zbog principa matematičke indukcije tvrdjenje važi za svako prirodno n.

Iz prethodnog predstavljanja preko verižnog razlomka sledi da je $\frac{F_{n+1}}{F_n} \geqslant 1$, a odatle je i $\frac{F_{n+1}}{F_n} \leqslant 2$, tj. imamo $1 \leqslant \frac{F_{n+1}}{F_n} \leqslant 2$, pa je ovaj niz ograničen i može se razbiti na jedan podniz koji je rastući i jedan podniz koji je opadajući. Stoga taj niz konvergira ka nekom broju x. Tada je $x = 1 + \frac{1}{x}$. Rešavanjem ove jednačine dobijamo $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, tj. taj odnos teži zlatnom preseku. □

Zlatni presek je bio popularan u renesansnoj arhitekturi. Tadašnji gradjevinari su po ugledu na Stare Grke smatrali idealnim kad je *"odnos većeg dela prema manjem jednak odnosu cele dužine prema većem delu"*:

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha} \;\Rightarrow\; \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033988...$$

NAPOMENA Može se pokazati da ka zlatnom preseku teži i niz $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots}}}}$.

Predstavljanje prirodnog broja preko zbira različitih Fibonačijevih brojeva, tzv. Fibonačijev zapis, nalazi primenu u kodiranju i teoriji igara. Daćemo dve teoreme od kojih nam prva garantuje egzistenciju – to je Cekendorfova teorema (nem. Zeckendorf), a druga jedinstvenost Fibonačijevog zapisa.

TEOREMA 3.4.12 **Cekendorfova teorema.** Svaki prirodan broj a može se zapisati kao suma različitih Fibonačijevih brojeva, medju kojima se ne nalaze 2 uzastopna Fibonačijeva broja (F_k i F_{k+1}).

Dokaz. Daćemo konstruktivan dokaz, tj. opisaćemo postupak odredjivanja tražene sume Fibonačijevih brojeva.

Za svaki prirodan broj a uvek postoji prirodan broj n takav da važi

$$F_m \leqslant a < F_{m+1}.$$

Ako je $a = F_m$, onda smo završili. U protivnom imamo da važe nejednakosti

$$0 < a - F_m < F_{m+1} - F_m = F_{m-1}.$$

Kako je broj $a_1 = a - F_m$ prirodan i za njega postoji prirodan broj n takav da važi

$$F_n \leqslant a_1 < F_{n+1}.$$

Kako je $F_n \leqslant a_1 < F_{m-1}$ dobijamo da je $n < m-1$, tj. $n \leqslant m-2$, pa stoga F_n i F_m nisu uzastopni Fibonačijevi brojevi.

Ako je $a_1 = F_n$ opet smo završili, jer je tada polazni broj $a = F_m + F_n$ (što je tražena prezentacija). U protivnom, odredimo $a_2 = a_1 - F_n$ i dalje sa a_2 ponavljamo postupak... Ovaj proces se mora završiti jer u svakom sledećem koraku u postupak ulazimo sa manjim brojem a_i (završavamo kada u nekom koraku dobijemo da je $a_j = F_t$). Tada smo dobili traženo predstavljanje broja a u obliku neuzastopnih Fibonačijevih brojeva:

$$a = F_m + F_n + \ldots + F_t.$$

$\square$

TEOREMA 3.4.13 Predstavljanje prirodnog broja N kao sume različitih Fibonačijevih brojeva, medju kojima se ne nalaze 2 uzastopna Fibonačijeva broja, je jedinstveno.

Dokaz. Predpostavimo suprotno, da prirodan broj N sadrži, pored predstavljanja datog dokazom Cekendorfove teoreme (tj. Cekendorfovim algoritmom), još jedno koje ispunjava date uslove. Kako je za neko m ispunjeno $F_m \leqslant N < F_{m+1}$, imamo da je $N \leqslant F_{m+1} - 1$. Prema Cekendorfovom algoritmu imamo da se svaki element skupa $I = \{1, 2, 3, \ldots, F_{m+1} - 1\}$ injektivno slika (tj. preslikavanje u Cekendorfovom algoritmu je "1-1") u neprazan podskup skupa $J = \{F_2, F_3, \ldots, F_m\}$, pri čemu taj podkup ne sadrži 2 uzastopna Fibonačijeva broja (kraće nazovimo takav podskup *crvenim*). Pored toga, broju $N \in I$ odgovara još jedan crveni podskup, koji do sada nismo odredili Cekendorfovim algoritmom. Stoga skup J mora da sadrži bar $F_{m+1} - 1 + 1 = F_{m+1}$ crvenih podskupova ($F_{m+1} - 1$ odgovaraju onim dobijenim iz Cekendorfovog algoritma i još onaj 1 dodatni koji odgovara drugom predstavljanju broja N). Prema Teoremi 3.4.2 imamo da skup J sadrži tačno $F_{m+1} - 1$ crvenih podskupova (kako $\emptyset$ nije crven imamo član -1). Dobili smo kontradikciju, čime je tvrdjenje teoreme pokazano. $\square$

Uvedimo Fibonačijev zapis prirodnog broja a kao

$$\Phi(a) = \varphi_m \varphi_{n-1} \ldots \varphi_2,$$

pri čemu su $\varphi_j \in \{0, 1\}$ (za $j = 2, 3, \ldots, n$). Uočimo najveći Fibonačijev broj $F_m \leqslant a$ i na mesto φ_m upišimo cifru 1. Zatim ponavljamo postupak i umesto broja a posmatramo broj $a_1 = a - F_m$ i za njega uočimo najveći Fibonačijev broj $F_n \leqslant a_1$ i na mesto φ_n upišemo cifru 1, a na sva mesta izmedju φ_m i φ_n upišemo 0. Zatim posmatramo $a_2 = a_1 - F_m$ ... Postupak ponavljamo dok za neko a_s ne dobijemo 0 i ako su neko vrednosti φ_j ostale neodredjene dodelimo im vrednosti 0.

PRIMER 3.4.14 Odrediti Fibonačijev zapis prirodnog broja $a = 20$.

Rešenje. Kako imamo da je $F_8 = 21 > 20 \geqslant F_7 = 13$ dobijamo da je $\varphi_7 = 1$. Dalje imamo sledeći niz ocena (pomoću koji odredjujemo φ_j):

$$a_1 = 20 - 13 = 7, \quad F_6 = 8 > 7 \geqslant F_5 = 5, \quad \varphi_6 = 0, \ \varphi_5 = 1;$$

$$a_2 = 7 - 5 = 2, \quad F_3 = 2, \quad \varphi_4 = 0, \ \varphi_3 = 1;$$

$$a_3 = 2 - 2 = 0, \quad \varphi_2 = 0.$$

Zato je Fibonačijev zapis, $\Phi(19) = 101010$. Na osnovu ovog zapisa imamo da je $a = 20 = F_7 + F_5 + F_3$. ■

Svaki niz 0 i 1 ne predstavlja Fibonačijev zapis: npr. 110 bi odgovarao $a = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5 = F_5$, a $\Phi(5) = 1000$!

Na osnovu ove opservacije možemo pokazati i sledeće tvrdjenje.

LEMA 3.4.15 Niz 0 i 1 koji počinje sa 1 i nema dve uzastopne jedinice predstavlja Fibonačijev zapis.

□

Ostale osobine i identitete sa Fibonačijevim brojevima daćemo kroz zadatke.

IDENTITETI SA FIBONAČIJEVIM BROJEVIMA

TEOREMA 3.4.16 $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1.$

TEOREMA 3.4.17 $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1.$

Dokaz 1. Koristimo jednakost $F_k = F_{k+2} - F_{k+1}$ za $k = 1, 2, \ldots, n$, skratimo iste članove u uzastopnim sabircima i na kraju uvrstimo da je $F_2 = 1$:

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + \ldots + F_n &= (F_3 - F_2) + (F_4 - F_3) + \ldots + (F_{n+2} - F_{n+1}) \\ &= F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1. \end{aligned}$$

□

Dokaz 2. Funkcija generatrise zbira prvih n članova Fibonačijevog niza je $\dfrac{F(x)}{1-x}$, tj. leva strana identiteta je

$$\frac{F(x)}{1-x} = \frac{x}{(1-x)(1-x-x^2)},$$

jer je $F(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$ generatrisa Fibonačijevih brojeva. Sa desne strane članovima F_{n+2} i 1 odgovaraju $\dfrac{F(x)-x}{x^2}$ i $\dfrac{1}{1-x}$, pa sredjivanjem ovog izraza dobijamo

$$\begin{aligned}
\frac{F(x)-x}{x^2}-\frac{1}{1-x} &= \frac{\frac{x}{1-x-x^2}-x}{x^2}-\frac{1}{1-x}=\frac{\frac{1}{1-x-x^2}-1}{x}-\frac{1}{1-x}\\
&= \frac{1-(1-x-x^2)}{x\cdot(1-x-x^2)}-\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{1-x-x^2}-\frac{1}{1-x}\\
&= \frac{1-x^2-(1-x-x^2)}{(1-x)(1-x-x^2)}=\frac{x}{(1-x)(1-x-x^2)}.
\end{aligned}$$

Kako smo dobili funkciju generatrise koja odgovara levoj strani identiteta, zaključujemo da dati identitet zaista važi.

□

TEOREMA 3.4.18 $F_{n+1}F_{n-1}-{F_n}^2=(-1)^n$ za $n\in\mathbb{N}$.

Dokaz 1. Za $n=1$ imamo $F_2F_0-{F_1}^2=1\cdot 0-1^2=-1=(-1)^1$. ✓
Pretpostavimo da tvrdjenje važi za $n=k$, tj. da je $F_{k+1}F_{k-1}-{F_k}^2=(-1)^k$.
Sad posmatrajmo šta se dešava za $n=k+1$:

$$\begin{aligned}
F_{k+2}F_k-{F_{k+1}}^2 &= (F_{k+1}+F_k)F_k-{F_{k+1}}^2=F_{k+1}F_k+{F_k}^2-{F_{k+1}}^2\\
&= F_{k+1}F_{k+1}-F_{k-1})+{F_k}^2-{F_{k+1}}^2\\
&= -(F_{k+1}F_{k-1}-{F_k}^2)=-(-1)^k=(-1)^{k+1}\ ✓
\end{aligned}$$

Po principu matematičke indukcije tvrdjenje važi za svaki prirodan broj n. □

Dokaz 2. Prema Teoremi 3.4.10 imamo jednakost $\begin{Vmatrix}1&1\\1&0\end{Vmatrix}^n=\begin{Vmatrix}F_{n+1}&F_n\\F_n&F_{n-1}\end{Vmatrix}$.
Kada izračunamo determinante od obe strane prethodne jednakosti dobijamo baš traženi identitet: $(-1)^n=F_{n+1}\cdot F_{n-1}-{F_n}^2$. □

TEOREMA 3.4.19 $F_{n+m}=F_{n-1}F_m+F_nF_{m+1}$ za $n>1$.

Dokaz 1. Dokazaćemo matematičkom indukcijom po m.
Za $m=1$ imamo $F_{n-1}F_1+F_nF_2=F_{n-1}\cdot 1+F_n\cdot 1=F_{n+1}$. ✓
Pretpostavimo da tvrdjenje važi za sve $m\leqslant k$.
Sad posmatrajmo šta se dešava za $n=k+1$:

$$\begin{aligned}
F_{n-1}F_{k+1}+F_nF_{k+2} &= F_{n-1}(F_k+F_{k-1})+F_n(F_{k+1}+F_k)\\
&= F_{n-1}F_k+F_{n-1}F_{k-1}+F_nF_{k+1}+F_nF_k\\
&= (F_{n-1}F_k+F_nF_{k+1})+(F_{n-1}F_{k-1}+F_nF_k)\\
&= F_{n+k}+F_{n+k-1}=F_{n+k+1}\ ✓
\end{aligned}$$

Po principu matematičke indukcije tvrdjenje važi za svaki prirodan broj n. □

Dokaz 2. Višestruko ćemo koristiti formulu za opšti član Fibonačijevog niza $F_n = \frac{(\alpha)^n - (\beta)^n}{\sqrt{5}}$ dobijenu u Teoremi 3.4.3 gde su oznake $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ i $\beta = (1-\sqrt{5})/2$ iz Primera 3.4.6. Takodje ćemo koristiti da je $\alpha \cdot \beta = -1$.

$$\begin{aligned}
F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1} &= \tfrac{1}{5}\left[(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})(\alpha^m-\beta^m)+(\alpha^n-\beta^n)(\alpha^{m+1}-\beta^{m+1})\right]\\
&= \tfrac{1}{5}\,[\alpha^{n+m-1}-(-1)^{n-1}\beta^{m-n-1}-(-1)^{n-1}\alpha^{m-n+1}+\beta^{n+m-1}\\
&\qquad +\alpha^{n+m+1}-(-1)^n\beta^{m-n+1}-(-1)^n\alpha^{m-n+1}+\beta^{n+m+1}]\\
&= \tfrac{1}{5}\left(\alpha^{n+m-1}+\beta^{n+m-1}+\alpha^{n+m+1}+\beta^{n+m+1}\right)\\
&= \tfrac{1}{5}\,(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^{n+m}+\beta^{n+m}) = \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+m}-\beta^{n+m}) = F_{n+m}
\end{aligned}$$

□

TEOREMA 3.4.20

$$F_{n+2} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \binom{n-k+1}{k}.$$

Dokaz. Na osnovu Teoreme 3.4.2 imamo da je broj podskupova koji ne sadrže 2 uzastopna elementa jednak F_{n+2}. Prebrojimo ove podskupove i na drugi način.

Svakom podskupu S skupa $\mathbb{N}_n$ odgovara binarni niz $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, kod koga je

$$s_j = \begin{cases} 1 & j \in S \\ 0 & j \notin S \end{cases},$$

za $j = 1, 2, \ldots, n$. Neka je $f(n,k)$ broj k-toelementnih podskupova skupa $\mathbb{N}_n$ koji ne sadrže 2 uzastopna elementa. Tim podskupovima odgovaraju binarni nizovi dužine n koji ne sadrže 2 uzastopne 1 i koji imaju ukupno k jedinica i $n-k$ nula. Ako fiksiramo tih $n-k$ nula, svaka jedinica može zauzeti jedno od $n-k+1$ mesta (pre nula, $n-k-1$ mesto izmedju neke 2 nule, iza nula), što je slikovito prikazano na sledeći način:

$$\_0\_0\_0\ldots 0\_0\_,$$

gde $\_$ predstavljaju mesta gde može biti najviše jedan element 1. Stoga, biramo k pozicija za 1 od ukupno $n-k+1$ pozicija, što možemo učiniti na $\binom{n-k+1}{k}$ načina, pa je

$$f(n,k) = \binom{n-k+1}{k}.$$

Indeks u sumi, k, ide od 0 (sa 0 jedinica imamo niz $(0,0,\ldots,0)$ koji odgovara $\emptyset$) sve dok je $n-k+1 \geqslant k$ (jer ne možemo k jedinica rasporediti na manje od k pozicija), što je ekvivalentno uslovu $k \leqslant \left[\frac{n+1}{2}\right]$. Time smo pokazali traženu jednakost $F_{n+2} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} f(n,k) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \binom{n-k+1}{k}$. □

LUKASOV NIZ

DEFINICIJA 3.4.21 Lukasov niz $\{L_n\}$ je zadat sledećom rekurentnom jednačinom:

$$L_1 = 1, \quad L_2 = 3 \quad \text{i} \quad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n.$$

Ponekad su početni uslovi zadati i kao $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ (nećemo se osvrtati na pomerene Lukasove nizove).

TEOREMA 3.4.22 Opšti član Lukasovog niza je jednak $L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Dokaz. Kako Fibonačijev i Lukasov niz zadovoljavaju istu rekurentnu jednačinu (samo uz drugačije početne uslove), potpuno isto kao u Teoremi 3.4.3 dolazimo do opšteg rešenja

$$L_n = C_1 \cdot \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Kako su $L_1 = 1$ i $L_2 = 3$, zamenom $n = 1$ i $n = 2$ u opšte rešenje dobijamo sistem po C_1 i C_2, čija su rešenja $C_1 = 1$ i $C_2 = -1$, odakle dobijamo da je opšti član Lukasovog niza dat formulom

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

□

TEOREMA 3.4.23 Funkcija generatrise $L(x)$ Lukasovog niza iznosi $L(x) = \frac{2-x}{1-x-x^2}$.

Dokaz. Potpuno isto kao i u Teoremi 3.4.5 jednačini $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ (sa početnim uslovima $L_0 = 2$ i $L_1 = 1$) odgovara sledeća jednačina sa funkcijama generatrisa:

$$\frac{L(x) - L_0 - L_1 x}{x^2} = \frac{L(x) - L_0}{x} + L(x).$$

Odavde nakon sredjivanja dobijamo traženu funkciju generatrise

$$L(x) = \frac{2-x}{1-x-x^2}.$$

□

Sledeća teorema nam daje direktnu vezu Fibonačijevih i Lukasovih brojeva.

TEOREMA 3.4.24 Za svako prirodno n važi jednakost $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$.

Dokaz. Iako se ovo tvrdjenje relativno brzo može pokazati principom matematičke indukcije, mi ćemo ovde dati dokaz koji koristi funkcije generatrisa ova 2 niza.

Krenimo od desne strane ove jednakosti. Niz $\{F_{n-1}\}$ je niz koji se dobija od $\{F_n\}$ pomeranjem ulevo za jedno mesto, pa njemu odgova funkcija generatrise

$$\frac{F(x) - F_0}{x} = \frac{F(x) - 0}{x} = \frac{F(x)}{x},$$

dok se niz $\{F_{n+1}\}$ dobija od $\{F_n\}$ pomeranjem udesno za jedno mesto, pa njemu odgova funkcija generatrise

$$x \cdot F(x) + F_{-1} = x \cdot F(x) + 1$$

(ovde treba da obrati pažnju šta se dešava sa "nultim"članom, jer u nizu $\{F_{n+1}\}$ na nultoj poziciji treba da bude $F_{-1} = 1$ da bi važila rekurentna veza za Fibonačijeve brojeve). Dakle, desnu stranu predstavlja funkcija generatrise

$$\begin{aligned}
\frac{F(x)}{x} + x \cdot F(x) + 1 &= \frac{F(x) \cdot (1 + x^2)}{x} + 1 = \frac{\frac{x}{1-x-x^2} \cdot (1 + x^2)}{x} + 1 \\
&= \frac{1 + x^2}{1 - x - x^2} + 1 = \frac{2 - x}{1 - x - x^2},
\end{aligned}$$

a to je baš jednako funkciji generatrise Lukasovog niza.

Time smo pokazali jednakost sa funkcijama generatrise, pa kako ona važi dobijamo da važi i jednakost $F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$. $\square$

U sledećoj teoremi je sadržana kombinatorna definicija Lukasovih brojeva.

TEOREMA 3.4.25 Skup $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ sadrži tačno L_n podskupova (uključujući i $\emptyset$) u kojima se ne nalaze 2 uzastopna prirodna broja, kao ni 1 i n istovremeno.

Dokaz. Označimo sa a_n broj podskupova skupa $\mathbb{N}_n$ koji ne sadrže 2 uzastopna prirodna broja (isto kao u Teoremi 3.4.2), a sa b_n broj podskupova skupa $\mathbb{N}_n$ koji ne sadrže 2 uzastopna prirodna broja, kao ni 1 i n istovremeno. Za svaki skup S, koji brojimo u b_n, imamo 2 mogućnosti:

1° $\underline{n \notin S}$. Kako broj n nije u S u njemu mogu biti svi brojevi iz $\mathbb{N}_{n-1}$, ali uz uslov da nema 2 uzastopna. Takvih podskupova ima a_{n-1}.

2° $\underline{n \in S}$. Kako je broj n u S u njemu ne može biti ni 1 ni $n-1$, te je stoga $S \setminus \{n\} \subseteq \mathbb{N}_{n-2} \setminus \{1\}$, opet uz uslov da nema 2 uzastopna. Takvih podskupova

ima a_{n-3}.
Stoga na osnovu Teorema 3.4.2 i 3.4.24 dobijamo da važi

$$b_n = a_{n-1} + a_{n-3} = F_{n+1} + F_{n-1} = L_n.$$

□

TEOREMA 3.4.26

$$L_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}.$$

Dokaz. Koristimo oznake kao u Teoremi 3.4.20 i označimo sa $f^*(n,k)$ broj podskupova skupa $\mathbb{N}_n$ koji ne sadrže 2 uzastopna prirodna broja, kao ni 1 i n istovremeno. Za svaki skup S, koji brojimo u $f^*(n,k)$, imamo 2 mogućnosti:

1° $\underline{n \notin S}$. Kako broj n nije u S u njemu mogu biti svi brojevi iz $\mathbb{N}_{n-1}$, ali da ih je ukupno k i uz uslov da nema 2 uzastopna. Takvih podskupova ima $f(n-1,k)$.

2° $\underline{n \in S}$. Kako je broj n u S u njemu ne može biti ni 1 ni $n-1$, te je stoga $S \setminus \{n\} \subseteq \mathbb{N}_{n-2} \setminus \{1\}$ i ima $k-1$ element, opet uz uslov da nema 2 uzastopna. Takvih podskupova ima $f(n-3,k-1)$.

Sada možemo da izračunamo koliko je $f^*(n,k)$:

$$\begin{aligned} f^*(n,k) &= f(n-1,k) + f(n-3,k-1) = \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \\ &= (1 + \tfrac{k}{n-k}) \cdot \binom{n-k}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}. \end{aligned}$$

Indeks u sumi, k, ide od 0 do $\left[\frac{n}{2}\right]$ (jer su tad svi binomni koeficijenti koji se javljaju u sumi različiti od 0). Time smo pokazali traženu jednakost

$$L_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} f^*(n,k) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}.$$ □

ZADACI

1. Jedna osoba se penje uz stepenice tako što prelazi li 1 ili 2 stepenika odjednom. Na koliko različitih načina ona može da se popne uz stepenice koje se sastoje od n stepenica?

2. Dokazati da za determinantu reda n važi $D(-1,1,1) = F_{n+1}$.

3. Predstaviti sledeće brojeve u Fibonačijevom zapisu:

a) $a = 85$; **b)** $a = 200$; **c)** $a = 343$; **d)** $a = 500$.

4. Predstaviti sledeće nizove pomoću Fibonačijevih brojeva F_n:

a) $a_0 = r, \quad a_1 = s, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad n \geqslant 0.$

b) $b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_{n+2} = b_{n+1} + b_n + c, \quad n \geqslant 0.$

c) $a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + \binom{n}{m}, \quad n \geqslant 0$, gde je m dati prirodan broj.

d) $b_0 = 1, \quad b_1 = 2, \quad b_{n+2} = b_{n+1} \cdot b_n, \quad n \geqslant 0.$

5. Dokazati da za svako prirodno m medju prvih $m^2 - 1$ članova Fibonačijevog niza ima bar jedan deljiv sa m.

6. Dokazati da suma osam uzastopnih članova Fibonačijevog niza nikada nije član Fibonačijevog niza.

Dokazati sledeće identitete (7–26):

7. $F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}.$

8. $F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1.$

9. $F_1 - F_2 + F_3 - \ldots + (-1)^{n+1} F_n = (-1)^{n+1} F_{n-1} + 1.$

10. ${F_1}^2 + {F_2}^2 + \ldots + {F_n}^2 = F_n F_{n+1}.$

11. $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$, gde je (a, b) najveći zajednički delilac brojeva a i b.

12. $F_{2n} = {F_{n+1}}^2 - {F_{n-1}}^2.$

13. $F_{2n-1} = {F_n}^2 + {F_{n-1}}^2.$

14. ${F_{n+2}}^2 - {F_{n+1}}^2 = F_n F_{n+3}.$

15. $F_{m+1} F_m - F_{m-1} F_{m-2} = F_{2m-1}.$

16. $F_{n+1} F_{n+2} - F_n F_{n+3} = (-1)^n.$

17. $F_{3n} = {F_{n+1}}^3 + {F_n}^3 - {F_{n-1}}^3.$

18. $F_1 F_2 + F_2 F_3 + \ldots + F_{2n-1} F_{2n} = {F_{2n}}^2.$

19. $F_1 F_2 + F_2 F_3 + \ldots + F_{2n} F_{2n+1} = {F_{2n+1}}^2 - 1.$

20. $F_3 + F_6 + \ldots + F_{3n} = (F_{3n+2} - 1)/2.$

21. $F_1 + 2F_2 + \ldots + nF_n = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2.$

22. $F_{n+k} F_{m-k} = F_n F_m + (-1)^n F_{m-n-k} F_k.$

23. ${F_n}^4 - F_{n-2} F_{n-1} F_{n+1} F_{n+2} = 1.$

24. ${F_k}^3 = (F_{3k} - 3(-1)^n F_k)/5.$

25. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_{m+k} = F_{m+2n}.$

26. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}F_{2n+k} = (-1)^n F_n.$

27. Na polju F8 šahovske table 8×8 postavljena je dama. Igru igraju dva igrača i poteze vuku naizmenično. Svaki od igrača, kad je na potezu, može pomerati damu za koliko želi polja naniže (po vertikali), levo (po horizontali) ili levo–dole (po dijagonali). Gubi onaj igrač koji nema gde da ide. Znači, pobednik će biti onaj igrač koji prvi dotera damu na polje A1. Poznato je da u ovoj igri igrač koji je prvi na potezu, ukoliko igra pravilno, uvek pobedjuje ma kako igrao njegov partner. Kako to treba da igra? A ko će pobediti pri pravilnoj igri ako se dama nalazi na polju E8?

28. ("Mini Tetris") Naći funkciju generatrisu i rekurentnu relaciju za broj načina na koji se može u potpunosti prekriti (tako da se delovi ne preklapaju) pravougaonik dimenzija $n \times 2$ pomoću kvadrata dimenzija 2×2 i 1×1.

29. Za jedan skup prirodnih brojeva kažemo da je *sebičan*, ako mu je broj elemenata njegov element. Ako je A sebičan i nijedan njegov pravi podkup nije sebičan, tada kažemo da je A *minimalan sebičan* skup. Odrediti broj minimalnih sebičnih podkupova skupa $\{1, 2, \dots, n\}$.

3.5 PARTICIJE PRIRODNIH BROJEVA

- Particije prirodnih brojeva i njihova funkcija generatrise, Biggs 19.3
- Komentar o Hardy-jevoj i Ramanujan-ovoj proceni za p_n
- Funkcija generatrise za ograničene particije, Biggs 19.4

3.6 KATALANOVI BROJEVI

Katalanovi brojevi C_n, $n \geqslant 0$, predstavljaju niz prirodnih brojeva koji se pojavljuje kao rešenje velikog broja kombinatornih problema. Knjiga [**?**] sadrži skup zadataka koji opisuju čak 66 različitih interpretacija Katalanovih brojeva! Prvi ih je opisao Ojler, a ime su (ipak) dobili po belgijskom matematičaru Eugenu Čarlsu Katalanu (*Eugéne Charles Catalan*; 1814–1894), koji je otkrio vezu izmedju problema Hanojskih kula i sledećeg problema:

> Koliko ima *korektnih nizova* n parova zagrada, tako da je u svakom početnom delu niza broj levih zagrada veći ili jednak broju desnih zagrada?

PRIMER 3.6.1 Za $n = 3$ postoji sledećih pet korektnih nizova zagrada:

$$((())) \qquad (()()) \qquad (())() \qquad ()(()) \qquad ()()().$$

NAPOMENA Prvih nekoliko Katalanovih brojeva za $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, 25, \ldots$ je

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670, 129644790, 477638700, 1767263190, 6564120420, 24466267020, 91482563640, 343059613650, 1289904147324, 4861946401452, ...

Oni predstavljaju niz A000108 u *Online enciklopediji celobrojnih nizova* [29].

REKURENTNA RELACIJA

Katalanovi brojevi zadovoljavaju jednostavnu rekurentnu relaciju. Neka je X korektni niz n parova zagrada. Prva zagrada u X očigledno mora biti leva zagrada. Neka se na poziciji k nalazi njoj odgovarajuća desna zagrada. Tada su podnizovi:

- X', koji čine zagrade na pozicijama od 2 do $k-1$, i
- X'', koji čine zagrade na pozicijama od $k+1$ do $2n$,

takodje korektni nizovi zagrada (moguće je da je bilo koji od ovih nizova prazan). Nizovi X' i X'' zajedno sadrže $n-1$ par zagrada.

S druge strane, ako su X' i X'' proizvoljni korektni nizovi zagrada koji zajedno sadrže $n-1$ par zagrada, tada je niz $(X')X''$ (dobijen nadovezivanjem ovih nizova uz dodavanje još jednog para zagrada) takodje korektan niz zagrada.

Sada možemo i da uočimo rekurentnu relaciju koju zadovoljavaju Katalanovi brojevi:

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}, \qquad n \geqslant 1. \tag{3.16}$$

Zajedno sa

$$C_0 = 1,$$

ova rekurentna relacija je dovoljna da odredi sve Katalanove brojeve.

Iako homogena, ova relacija nije linearna, tako da se za njeno rešavanje ne mogu primeniti formule date u prethodnim odeljcima. Umesto toga, iskoristićemo metod funkcija generatrise.

REŠENJE POMOĆU FUNKCIJE GENERATRISE

Neka je

$$C(x) = \sum_{n \geqslant 0} C_n x^n.$$

Posmatrajmo funkciju $C^2(x)$. Po pravilu za množenje funkcija generatrise, koeficijent uz x^n u $C^2(x)$ jednak je

$$C_0C_n + C_1C_{n-1} + \ldots + C_nC_0 = \sum_{i=0}^{n} C_iC_{n-i} = C_{n+1}.$$

Prema tome, izgleda da funkcija $C^2(x)$ liči na $\frac{C(x)}{x}$... Da bismo bili precizniji, iz prethodnog zapažanja vidimo da je koeficijent uz x^{n+1} u $xC^2(x)$ isti kao i u funkciji $C(x)$. Slobodni članovi ovih funkcija se ipak razlikuju: u $xC^2(x)$ slobodni član je 0, dok je u $C(x)$ slobodni član jednak 1. Sada konačno možemo da vidimo da važi

$$xC^2(x) - C(x) + 1 = 0.$$

Ovo je sada kvadratna jednačina po $C(x)$ koja ima dva moguća rešenja:

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Jednu mogućnost možemo odmah izbaciti, s obzirom da važi

$$\frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x} \to \infty \quad \text{za } x \to 0,$$

dok je zaista $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = 1$. Zbog toga zaključujemo da važi

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}. \tag{3.17}$$

Izraz $\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{1/2}$ se može pretvoriti u stepeni red koristeći Uopštenu binomnu teoremu (Teorema 3.1.8)

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-4x} &= \sum_{n\geqslant 0} \binom{1/2}{n} (-4)^n x^n \\
&= \sum_{n\geqslant 0} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdot \ldots \cdot (\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-4)^n x^n \\
&= \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n n!} (-4)^n x^n \\
&= \sum_{n\geqslant 0} -\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)\cdot 2^n (n-1)!}{n!(n-1)!} x^n \\
&= \sum_{n\geqslant 0} -2\cdot \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)\cdot (2n-2)}{n!(n-1)!} x^n \\
&= \sum_{n\geqslant 0} -2\cdot \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} x^n.
\end{aligned}$$

Sada se za $C(x)$ iz (3.17) dobija da je

$$C(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} x^n = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} x^n. \tag{3.18}$$

DVA DIREKTNA REŠENJA

Kao što smo rekli na početku ove glave, problemi koje razmatramo obično imaju i rešenja koja ne koriste funkcije generatrise. Medjutim, to ne znači da su ova alternativna rešenja lakša — ona uglavnom upošljavaju pažljivo osmišljene trikove. Uostalom, procenite i sami razliku u težini izmedju prethodnog odredjivanja Katalanovih brojeva i sledeća dva rešenja, koja se mogu naći na

`http://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_numbers`

Radi lakšeg opisivanja ovih rešenja, sada ćemo preći na drugi skup objekata koji prebrojavaju Katalanovi brojevi. *Monotoni put* je put uz ivice mreže sa $n \times n$ kvadratnih ćelija, koji polazi iz donjeg levog ugla, završava u gornjem desnom uglu i u potpunosti se sastoji od ivica koje idu udesno ili naviše.

LEMA 3.6.2 Broj *monotonih puteva* u $n\times n$ mreži koji ne prelaze preko dijagonale jednak je C_n.

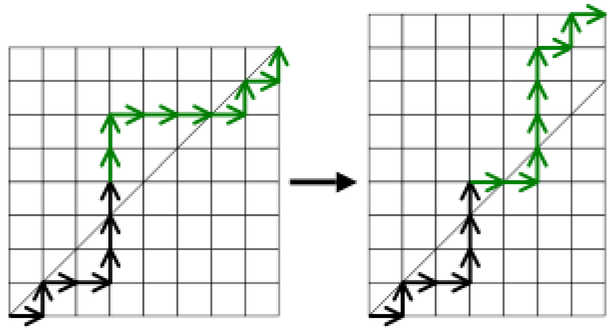
Dokaz. Da bismo ovo videli, dovoljno je da primetimo da je svaki korektni niz sa n parova zagrada ekvivalentan sa tačno jednim monotonim putem: svakoj levoj zagradi odgovara ivica koja ide udesno, a svakoj desnoj zagradi ivica koja ide naviše. □

Prvo direktno rešenje

Ovo rešenje se zasniva na triku koji je otkrio D. André, a koji je danas poznatiji pod imenom *princip refleksije*.

Pretpostavimo da je dat monotoni put u $n \times n$ mreži koji *prelazi* preko dijagonale. Pronadjimo prvu ivicu na putu koja leži iznad dijagonale, i onaj deo puta koji leži nakon te ivice *preslikajmo* u odnosu na dijagonalu. (Drugim rečima, počinjemo sa *nekorektnim* nizom sa n parova zagrada i menjamo sve zagrade nakon prve desne zagrade koja narušava uslov korektnosti.) Put koji dobijamo na ovaj način je monotoni put u $(n-1) \times (n+1)$ mreži. Slika 3.1 ilustruje ovaj proces; zeleni deo puta je onaj deo koji se preslikava. Pošto svaki monotoni put u $(n-1)\times(n+1)$ mreži mora da predje preko dijagonale u nekom trenutku, svaki takav put može na jedinstven način da se dobije pomoću ovog procesa preslikavanja. Broj ovakvih puteva je

$$\binom{2n}{n-1},$$



Slika 3.1: Zeleni deo puta se preslikava.

pa je stoga broj monotonih puteva u $n \times n$ mreži koji *ne prelaze* preko dijagonale jednak razlici ukupnog broja monotonih puteva i onih koji prelaze dijagonalu, tj.

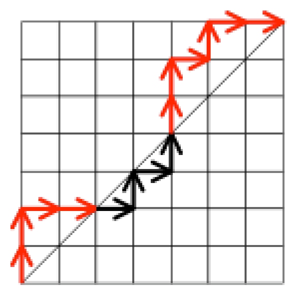
$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

□

Drugo direktno rešenje

Sledeće bijektivno rešenje, iako još malo komplikovanije od prethodnog, omogućiće nam da damo prirodno objašnjenje za član $n+1$ koji se pojavljuje u imeniocu formule 3.18.

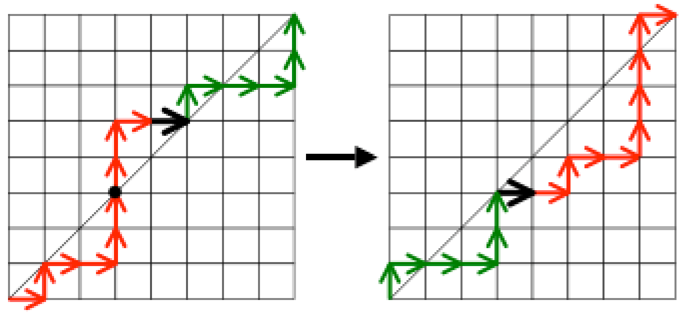
Pretpostavimo da je dat monotoni put u $n \times n$ mreži, koji može i da prelazi preko dijagonale. *Odstupanje* puta definišemo kao broj parova ivica koje se nalaze *iznad* dijagonale. Na primer, ivice koje leže iznad dijagonale su na slici 3.2 označene crveno, tako da je odstupanje ovog puta jednako 5. Sada, ako je dat



Slika 3.2: Put sa odstupanjem 5.

put čije je odstupanje veće od nule, možemo da primenimo sledeći algoritam kako bi konstruisali novi put čije je odstupanje za 1 manje:

- Krenuvši iz donjeg levog ugla, pratimo put dok prvi put ne predje iznad dijagonale;
- Nastavimo da pratimo put dok ponovo ne *dodirne* dijagonalu. Neka x označava ovu ivicu kojom smo dodirnuli dijagonalu;
- Obojimo u crveno deo puta od početka do ivice x (ne uključujući ivicu x!), a u zeleno deo puta nakon ivice x do kraja. Zamenimo mesta crvenom i zelenom delu puta, ostavljajući ivicu x izmedju njih.



Slika 3.3: Crveni i zeleni deo puta menjaju mesta.

Primer sa slike 3.3 treba da pojasni ovaj algoritam. Na ovoj slici, crni kružić označava tačku gde naš put prvi put prelazi preko dijagonale. Ivica x kojom put ponovo dodiruje dijagonalu, je obojena u crno. Sada menjamo mesta crvenog dela puta sa zelenim delom, kako bismo dobili novi put, prikazan na desnoj strani slike 3.3. Primetimo da se odstupanje u novom putu smanjilo sa tri na dva.

U suštini, primenom prethodnog algoritma na bilo koji put, njegovo odstupanje će se smanjiti tačno za 1: ivica x koja se u početku nalazila iznad dijagonale, sada je ispod nje, prouzrokujući da se odstupanje crvenog dela puta smanji za 1, dok se odstupanje zelenog dela puta ne menja.

Takodje, nije teško videti da se ovaj proces može okrenuti: za bilo koji put P čije je odstupanje manje od n, postoji tačno jedan put koji daje P nakon primene algoritma.

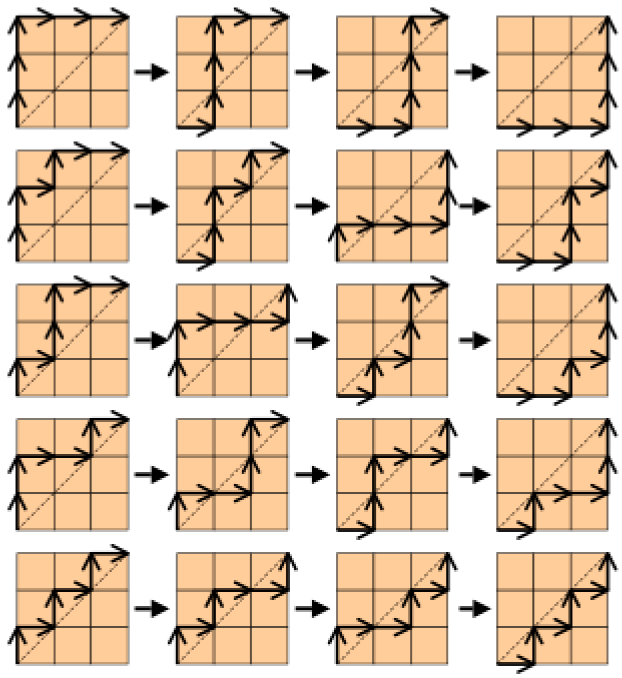
Ovim zaključujemo da je broj puteva sa odstupanjem n jednak broju puteva sa odstupanjem $n-1$, koji je jednak broju puteva sa odstupanjem $n-2$, itd. sve do nule. Drugim rečima, skup *svih* monotonih puteva podelili smo na $n+1$ podskupova, svaki sa istim brojem elemenata, koji odgovaraju svim mogućim odstupanjima od 0 do n. S obzirom da ukupno postoji

$$\binom{2n}{n}$$

monotonih puteva, dobijamo da je traženi broj puteva koji ne prelaze dijagonalu jednak

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

□



Slika 3.4: Svi monotoni putevi u 3×3 mreži.

Slika 3.4 ilustruje ovu podelu za $n = 3$. Svaki od 20 mogućih monotonih puteva se nalazi u jednoj od kolona, u zavisnosti od njegovog odstupanja. U prvoj koloni se nalaze putevi sa odstupanjem tri, koji u potpunosti leže iznad dijagonale. Kolone iza nje prikazuju rezultat sukcesivnih primena algoritma, smanjujući odstupanje za 1 nakon svake primene. S obzirom da postoje četiri kolone, važi da je $C_3 = \frac{20}{4} = 5$.

KOGA JOŠ PREBROJAVA KATALAN?

Da bismo predstavili sledeći skup objekata kojeg prebrojavaju Katalanovi brojevi, biće nam potrebno nekoliko definicija.

DEFINICIJA 3.6.3 Neka je T skup *čvorova* medju kojima je definisana relacija ρ: "biti naslednik".

Pretpostavimo takodje da postoji čvor $r \in T$ tako da su svi ostali čvorovi naslednici čvora r (direktni ili indirektni). Tada se uredjena trojka (T, ρ, r) naziva *korensko stablo*, a čvor r se naziva *koren* stabla.

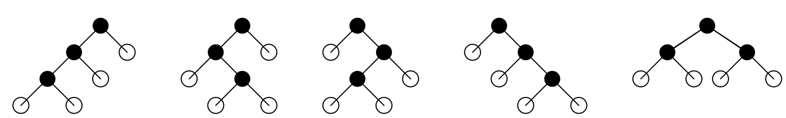
Čvor bez naslednika u stablu naziva se *list*.

Za dato korensko stablo (T, ρ, r) i čvor $s \in T$, *podstablo* u čvoru s je korensko stablo (T_s, ρ_s, s), gde T_s čine čvor s i svi njegovi naslednici iz T, a ρ_s je restrikcija relacije ρ na skup T_s.

Korensko stablo se slikovito predstavlja tako što se svaki čvor, počevši od korena stabla, predstavlja kružićem i zatim spaja linijom sa svakim od svojih direktnih naslednika, koji se svi postavljaju u istom nivou ispod njega.

DEFINICIJA 3.6.4 *Poziciono binarno stablo* je korensko stablo u kojem je svaki čvor ili list ili ima jedistvenog *levog* i *desnog* (direktnog) naslednika.

Za svaki čvor s pozicionog binarnog stabla, podstabla u levom i desnom nasledniku s se nazivaju *levo* i *desno podstablo* čvora s.



Slika 3.5: Poziciona binarna stabla sa četiri lista.

Da bismo pojasnili ove definicije, na slici 3.5 su prikazana sva poziciona binarna stabla sa četiri lista (gde su listovi prikazani belo, a ostali čvorovi crno).

Sada konačno možemo da pokažemo

LEMA 3.6.5 Broj pozicionih binarnih stabala sa $n + 1$ listom jednak je C_n.

Dokaz. Da bismo pokazali ovo tvrdjenje, konstruisaćemo bijekciju $\mathcal{A}$ izmedju skupa svih pozicionih binarnih stabala i skupa svih korektnih nizova zagrada. Pritom će $\mathcal{A}$ preslikavati proizvoljno poziciono binarno stablo sa $n + 1$ listom u korektni niz n parova zagrada.

Primetimo najpre da oba skupa objekata dopuštaju rekurzivne definicije. Naime, poziciona binarna stabla se mogu definisati pomoću sledećih pravila:

(s1) Stablo koje se sastoji samo od korena je poziciono binarno stablo.

(s2) Ako su T' i T'' poziciona binarna stabla, tada je i stablo T, dobijeno tako što se uvede novi čvor r i proglasi korenom, a koreni stabala T' i T'' proglase, redom, za levog i desnog naslednika korena r, takodje poziciono binarno stablo.

S druge strane, korektni nizovi zagrada se mogu definisati pomoću:

(z1) Prazan niz zagrada je korektan.

(z2) Ako su A' i A'' korektni nizovi zagrada, tada je i niz $(A')A''$, dobijen spajanjem nizova A' i A'', takodje korektan niz zagrada.

Ove definicije nam sada omogućavaju da i traženu bijekciju $\mathcal{A}$ konstruišemo rekurzivno:

(b1) Stablo koje se sastoji samo od korena se preslikava u prazan niz zagrada.

(b2) Ako se stabla T' i T'' preslikavaju, redom, u korektne nizove zagrada A' i A'', tada se stablo T preslikava u niz $(A')A''$.

Pokazaćemo, uz pomoć matematičke indukcije, da je $\mathcal{A}$ obostrano jednoznačno preslikavanje: naime, za bazu imamo da stablu koje se sastoji od korena odgovara prazan niz zagrada, a za korak koristimo da svaki korektni niz zagrada počinje levom zagradom, za koju postoji tačno jedna odgovarajuća desna zagrada; tada za podniz A' izmedju ove dve zagrade postoji tačno jedno stablo T' tako da je

$$\mathcal{A}(T') = A',$$

a za podniz A'' nakon desne zagrade postoji tačno jedno stablo T'' tako da je

$$\mathcal{A}(T'') = A''.$$

Stoga, prema konstrukciji preslikavanja $\mathcal{A}$, za stablo T, dobijeno proglašenjem T' i T'' za levo i desno podstablo, redom, važi da je

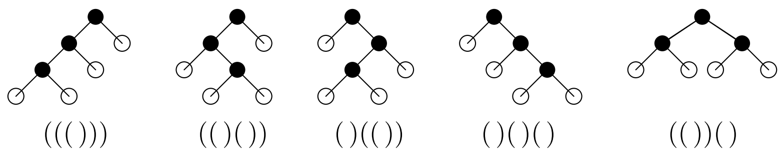
$$\mathcal{A}(T) = A.$$

Preostaje još da pokažemo da će bijekcija $\mathcal{A}$ preslikati poziciono binarno stablo T sa $n+1$ listom u korektan niz n zagrada. Najpre, iz konstrukcije $\mathcal{A}$ vidimo da svakom čvoru stabla T, koji nije list, odgovara tačno jedan par zagrada. Neka stablo T ima $n+1$ listova i k čvorova koji nisu listovi (prema tome, stablu T odgovara niz k parova zagrada). Svaki od k čvorova stabla T ima tačno dva direktna naslednika, dok listovi nemaju naslednike, tako da je ukupan broj direktnih naslednika u T jednak $2k$. S druge strane, svaki čvor, izuzev korena, je direktni naslednik tačno jednog drugog čvora, tako da je ukupan broj direktnih naslednika u T jednak $(n+1)+k-1$. Izjednačavajući ove dve vrednosti dobijamo da je $k = n$, pa vidimo da stablu T zaista odgovara niz n parova zagrada. $\square$

Slika 3.6 ilustruje bijekciju $\mathcal{A}$, konstruisanu u prethodnom dokazu, za slučaj $n = 3$.

Medju čvorovima pozicionog binarnog stabla T može da se uvede relacija poretka $\preceq$ (takodje na rekurzivan način) tako što će, za svaki čvor $s \in T$, svi čvorovi u njegovom levom podstablu biti ispred s, a svi čvorovi u njegovom desnom podstablu biti iza s.

NAPOMENA Ovako definisan poredak na engleskom jeziku se zove *infix order* i on odgovara infiksnoj

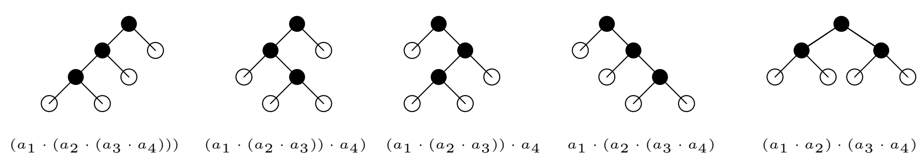


Slika 3.6: Ilustracija bijekcije $\mathcal{A}$ za $n = 3$.

notaciji izraza (npr. $a + b$, kao i što smo navikli). Postoje još i prefiksna notacija (ponegde zvana i poljska notacija, po poljskom matematičaru Lukašijeviču; npr. $+ab$) i postfiksna notacija (tzv. inverzna poljska notacija; npr. $ab+$).

Poziciono binarno stablo T sa $n + 1$ listova može da se interpretira i kao izračunavanje vrednosti proizvoda $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1}$ na sledeći način: rasporedimo najpre u listove, u infix poretku, promenljive $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, a u preostale čvorove znak $\cdot$ za operaciju množenja. Vrednost proizvoda sada možemo da dobijemo, rekurzivno, tako što, za svaki čvor $s \in T$, najpre nadjemo vrednosti izraza L_s, koji odgovara njegovom levom podstablu, i R_s, koji odgovara njegovom desnom podstablu, a zatim u čvor s stavimo vrednost izraza $L_s \cdot R_s$. Vrednost u korenu stabla tada predstavlja proizvod vrednosti svih promenljivih. Kako je ovo pridruživanje pozicionih binarnih stabala obostrano jednoznačno sa načinima da se izračuna proizvod $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1}$, možemo da zaključimo da važi sledeća lema.

LEMA 3.6.6 Broj načina da se izračuna vrednost proizvoda $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1}$ jednak je Katalanovom broju C_n.



Slika 3.7: Kako se može izračunati proizvod $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$?

Da bismo ilustrovali konstrukciju iz prethodnog razmatranja, na slici 3.7 su predstavljeni svi načini da se izračuna vrednost proizvoda $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$.

Još neki primeri skupova objekata koje prebrojavaju Katalanovi brojevi dati su u zadacima.

ZADACI

3.6.1 Konstruisati poziciono binarno stablo koje odgovara sledećem korektnom nizu od 11 parova zagrada:

$$(((())())())(())(())().$$

3.6.2 Čovek ide najkraćim putem na posao koji je 10 blokova istočno i 10 blokova severno od njegove kuće. Ulice se ukrštaju pod pravim uglom i čine pravougaonu mrežu, u pravcima sever-jug i istok-zapad (svaki blok je oivičen ulicama ili ulicama i rekom). Reka teče dijagonalno od tačke gde živi do tačke gde radi. Na reci nema mostova izmedju njegovog stana i posla, tako da ako naidje na dijagonalu, u stvari nailazi na reku (i tada mora skrenuti desno, tj. krenuti u pravcu istoka). Koliko taj čovek ima načina da stigne na posao, a da ne skrene sa najkraćeg puta ili da se ne skvasi?

3.6.3 Tokom pauze na poslu, 20 ljudi čeka u redu ispred automata za napitke. Svaki napitak košta 5 dinara. U mašini nedostaje novčića za kusur, tako da može obaviti povraćaj tek onda kada dobije dovoljno odgovarajućih novčića. Ako 10 ljudi ima tačan iznos, a 10 njih ima samo novčiće od po 10 dinara, na koliko se načina ljudi mogu rasporediti u red, tako da svako dobije odgovarajući kusur?

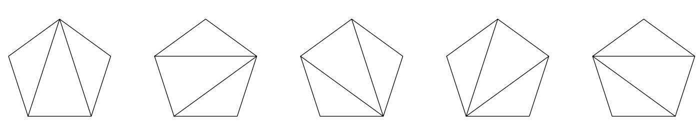
3.6.4 Na postrojavanju komandir ima 18 vojnika u vrsti. Kada je komandovao "Nalevo!" pola vojnika se okrenulo na levu stranu, a pola na desnu. Na koliko različitih načina je to moglo da se desi?

3.6.5 Na koliko različitih načina je moguće izračunati sledeći izraz?

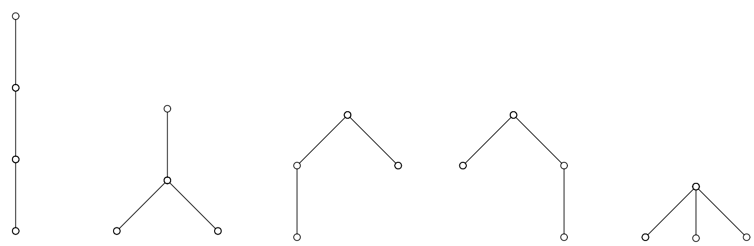
$$\begin{array}{c} a_1 \\ \hline a_2 \\ \hline a_3 \\ \hline \vdots \\ \hline a_n \end{array}$$

Dokazati da Katalanovi brojevi C_n predstavljaju broj elemenata svakog od sledećih 20 skupova S_i, $i = a, b, \ldots, s, t$, u zadacima 3.6.6–3.6.25. Elementi svakog skupa S_i su ilustrovani za $n = 3$, u nadi da će ilustracije otkloniti eventualne nejasnoće u definicijama. Idealno, trebalo bi dokazati da S_i i S_j imaju isti broj elemenata konstruisanjem jednostavne, elegantne bijekcije $\phi_{ij} : S_i \mapsto S_j$ za svaki par i, j ...

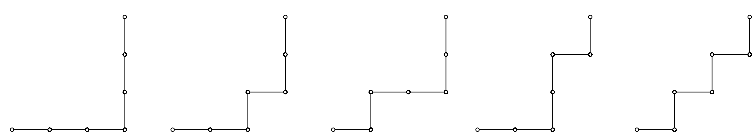
3.6.6 S_a: triangulacije konveksnog $(n+2)$-gona na n trouglova pomoću $n-1$ dijagonala koje nemaju zajedničkih tačaka u unutrašnjosti $(n + 2)$-gona.



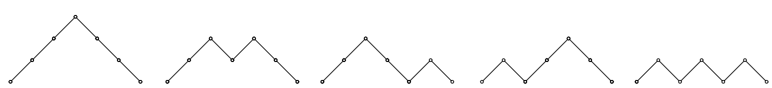
3.6.7 S_b: uredjena stabla sa $n + 1$ čvorova.



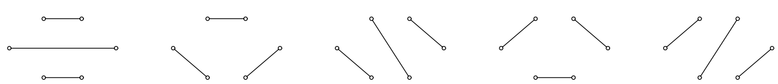
3.6.8 S_c: putevi u celobrojnoj mreži od $(0,0)$ do (n,n) sa koracima $(0,1)$ ili $(1,0)$, koji nikada ne idu iznad prave $y = x$.



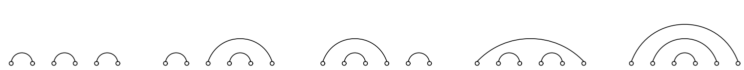
3.6.9 S_d: Dikovi putevi od $(0,0)$ do $(2n,0)$, tj. putevi u celobrojnoj mreži sa koracima $(1,1)$ i $(1,-1)$, koji nikada ne idu ispod x-ose.



3.6.10 S_e: n disjunktnih tetiva koje spajaju $2n$ tačaka na kružnici.



3.6.11 S_f: načini da se u ravni poveže $2n$ tačaka koje leže na horizontalnoj pravoj pomoću n disjunktnih lukova, tako da svaki luk povezuje dve od datih tačaka i leži iznad svih tačaka.



3.6.12 S_g: nizovi od n brojeva 1 i n brojeva -1 tako da je svaka suma prvih k brojeva, $k \leqslant n$, nenegativna (gde je -1 označen samo kao $-$):

$$111---\quad 11-1--\quad 11--1-\quad 1-11--\quad 1-1-1-$$

3.6.13 S_h: nizovi $1 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ celih brojeva sa $a_i \leqslant i$ (ovo je ustvari broj neopadajućih funkcija $a : \{1, 2 \ldots, n\} \rightarrow \{1, 2 \ldots, n\}$ koje zadovoljavaju uslov $a(x) \leqslant x$ za svako $1 \leqslant x \leqslant n$.

111 112 113 122 123

3.6.14 S_i: nizovi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ celih brojeva tako da je $a_1 = 0$ i $0 \leqslant a_{i+1} \leqslant a_i + 1$.

000 001 010 011 012

3.6.15 S_j: permutacije $a_1 a_2 \cdots a_{2n}$ skupa $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ tako da:

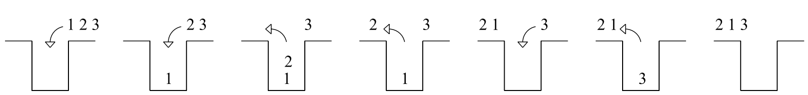
(i) $1, 3, \ldots, 2n-1$ se pojavljuju u rastućem poretku,

(ii) $2, 4, \ldots, 2n$ se pojavljuju u rastućem poretku i

(iii) $2i-1$ se pojavljuje pre $2i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

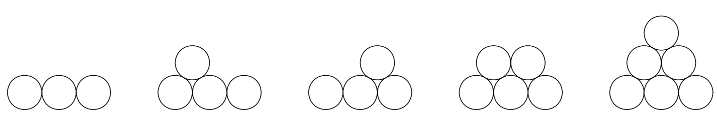
123456 123546 132456 132546 135246

3.6.16 S_k: *stek-permutacije* $a_1 a_2 \ldots a_n$ skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ koje mogu da se dobiju od identičke permutacije $12 \ldots n$ koristeći stek: brojevi $1, 2, \ldots, n$ se redom stavljaju na stek, a skidaju sa steka u proizvoljnim trenucima, s tim što nije moguće skinuti broj sa praznog steka. Na primer:

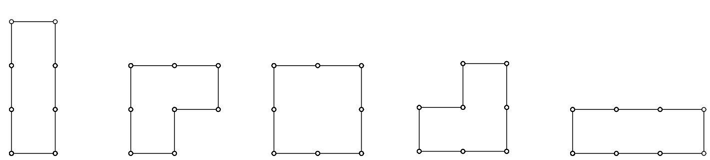


123 132 213 231 321

3.6.17 S_l: načini da se novčići poredjaju u ravni, tako da prvi red sadrži n novčića.



3.6.18 S_m: (neuredjeni) parovi puteva u celobrojnoj mreži, koji imaju dužinu $n+1$, polaze iz $(0,0)$, koriste korake $(1,0)$ ili $(0,1)$, završaju se u istoj tački, a seku se samo u prvoj i poslednjoj tački.



3.6.19 S_n: permutacije $a_1 a_2 \cdots a_n$ skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ tako da je najduži opadajući podniz dužine najviše dva, tj. ne postoje indeksi $i < j < k$ tako da je $a_i > a_j > a_k$ (ovakve permutacije se zovu i 321-*izbegavajuće* permutacije).

$$123 \quad 213 \quad 132 \quad 312 \quad 231$$

3.6.20 S_o: relacije ρ na skupu $\{1, 2, \ldots, n\}$ koje su refleksivne $(i\,\rho\,i)$, simetrične $(i\,\rho\,j \Rightarrow j\,\rho\,i)$ i ako je $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$ i $i\,\rho\,k$, tada je $i\,\rho\,j$ i $j\,\rho\,k$ (u primeru pišemo ij za par (i, j) i ne navodimo parove ii):

$$\emptyset \quad \{12, 21\} \quad \{23, 32\} \quad \{12, 21, 23, 32\} \quad \{12, 21, 13, 31, 23, 32\}$$

3.6.21 S_p: n-torke $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ prirodnih brojeva $a_i \geqslant 2$ tako da u nizu $1, a_1, a_2, \ldots, a_n, 1$ svako a_i deli zbir svoja dva suseda.

$$14321 \quad 13521 \quad 13231 \quad 12531 \quad 12341$$

3.6.22 S_q: n-točlani podskupovi S skupa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tako da za $(i, j) \in S$ važi $i \geqslant j$ i postoji put u celobrojnoj mreži od tačke $(0, 0)$ do (i, j) sa koracima $(0, 1)$, $(1, 0)$ i $(1, 1)$ koji u potpunosti leži u S:

$$\{(0,0),(1,0),(2,0)\} \quad \{(0,0),(1,0),(1,1)\} \quad \{(0,0),(1,0),(2,1)\}$$

$$\{(0,0),(1,1),(2,1)\} \quad \{(0,0),(1,1),(2,2)\}$$

3.6.23 S_r: nepresecajuće particije skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, tj. particije $\{1, 2, \ldots, n\} = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$, $i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset$, takve da ako je $a < b < c < d$ i $a, c \in B_i$ i $b, d \in B_j$, tada je $i = j$.

$$123 \quad 12-3 \quad 13-2 \quad 23-1 \quad 1-2-3$$

3.6.24 S_s: nepresecajuće particije skupa $\{1, 2, \ldots, 2n+1\}$ u $n+1$ blokova, tako da nijedan blok ne sadrži par uzastopnih brojeva.

$$137-46-2-5 \quad 1357-2-4-6 \quad 157-24-3-6$$

$$17-246-3-5 \quad 17-26-35-4$$

3.6.25 S_t: nizovi $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ nenegativnih celih brojeva tako da je $a_1 = a_{2n+1} = 0$, i $|a_{i+1} - a_i| = 1$ za $i = 1, 2, \ldots, 2n$.

$$0123210 \quad 0121210 \quad 0121010 \quad 0101210 \quad 0101010$$

Glava 4

Teorija grafova

4.1 STABLA

Pojam stabla (ili drveta) predstavlja jedan od najvažnijih pojmova u teoriji grafova. Stablo se može posmatrati u dva konteksta: kao poseban graf (koji poseduje neka svojstva), ili kao podgraf nekog (povezanog) grafa. Slična situacija se javlja i sa konturama.

DEFINICIJA 4.1.1 Stablo je povezan graf bez kontura.

Na Sl. 1 data su sva (neizomorfna) stabla sa najviše pet čvorova.
?????

TEOREMA 4.1.2 Sledeći iskazi su ekvivalentni:

(i) Stablo je povezan graf bez kontura.

(ii) Stablo je povezan graf sa n čvorova i $m = n - 1$ grana.

(iii) Stablo je graf sa n čvorova, $m = n - 1$ grana i bez kontura.

(iv) Stablo je minimalan povezan graf (udaljavanjem bilo koje grane postaje nepovezan graf).

(v) Stablo je maksimalan graf bez kontura (dodavanjem bilo koje grane formira se kontura).

(vi) Stablo je graf u kome su svaka dva čvora povezana jedistvenim putem.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da svaki iskaz implicira sledeći, a poslednji prvi.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Indukcijom po n. Za $n \leqslant 2$ nema šta da se dokazuje. Pretpostavimo da tvrdjenje važi za sve grafove sa najviše n čvorova ($n > 2$). Posmatrajmo povezan graf bez kontura sa $n + 1$ čvorova. Uočimo dva čvora u tom grafu na najvećoj udaljenosti (dužina najkraćeg puta je najveća). Tada su ti čvorovi stepena jedan. U protivnom važilo bi da postoji duži put (ako je jedan od krajnjih čvorova susedan jednom čvoru van uočenog puta), ili se u protivnom javlja kontura (ako je jedan od krajnjih čvorova susedan bar sa dva čvora puta). Udaljavanjem jednog od tih čvorova stepena jedan, dobija se graf koji je povezan i bez kontura. Na osnovu indukcijske hipoteze on ima n čvorova i $m = n - 1$ granu. Samim tim posmatrani graf ima $n + 1$ čvorova i n grana, što je i trebalo dokazati.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Pretpostavimo da graf poseduje bar jednu konturu, i neka je K jedna od tih kontura. Jasno je da svaki čvor konture K ima stepen bar dva. Primetimo zatim da je srednji stepen čvora grafa G manji od 2 (naime, $\overline{d} = 2\frac{m}{n} = 2 - \frac{2}{n}$). Odatle sledi da postoji bar jedan čvor u grafu stepena jedan (pretpostanlja se da je $n > 1$; u protivnom nema šta da se dokazuje). Udaljino iz grafa bilo koji čvor stepena jedan i njemu incidentnu granu. Tada se dobija povezan graf sa $n' = n - 1$ čvorova i $m' = n' - 1$ grana. Takodje je jasno da udaljeni čvor ne pripada konturi K. Ponavljajući isti postupak na dobijeni podgraf, kao i njegove podgrafove, dobićemo posle konačno mnogo koraka graf koji sadrži samo čvorove konture K, dakle nijedan čvor stepena jedan, kontradikcija. Stoga, posmatrani graf G nema kontura. Ovim je implikacija dokazana.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Pretpostavimo najpre da je graf nepovezan i da ima $k > 1$ komponenata. Tada je svaka njegova komponenta stablo (jer nema kontura). Stoga i–ta komponenta ima n_i čvorova i $m_i = n_i - 1$ grana ($i = 1, 2, \ldots, k$). Odatle direktno sledi da je ukupan broj grana grafa $m = n - k$, kontradikcija, s obzirom da je $m = n - 1$. Dokazimo sada i minmalnost. Pretpostavimo stoga da smo udaljavanjem neke grane dobili povezan graf. Tada izmedju krajnjih čvorova te grane postoji bar jedan put. Ako bismo vratili udaljenu granu, ona bi sa uočenim putem formirala konturu, što je u suprotnosti pretpostavkama u okviru (iii). Stoga je implikacija dokazana.

$(iv) \Rightarrow (v)$: Najpre, očigledno je da graf nema kontura. Naime, udaljavanjem bilo koje grane sa konture, dobili bismo povezan graf što je prema u suprotnosti sa (iv). Dokažimo sada i maksimalnost. Drugim rečima pretpostavimo da smo grafu dodali granu i da nismo formirali konturu. Medjutim to je nemogućno, jer je graf bio povezan, tako da je izmedju krajnjih čvorova dodate grane postojao put, a samim tim je dodavanjem grane neminovno došlo do formiranja konture. Ovim je implikacija dokazana.

$(v) \Rightarrow (vi)$: Pretpostavimo da izmedju dva čvora ne postoji put koji ih povezuje. Tada bi dodavanjem grane izmedju ta dva čvora dobili graf bez konture, što je u suprotnosti sa (v). Dakle, izmedju svaka dva čvora postoji bar jedan put. Ako bi izmedju dva čvora postojala bar dva puta, tada bi u grafu postojala kontura. Naime ovi putevi se najpre razdvajaju počeši od nekog čvora (potencijalno polaznog za oba puta) a zatim is stapaju u isti čvor (potencijalno završnog za oba puta). Medjutim, postojanje konture je u suprotnosti sa (v). Ovim je implikacija dokazana.

$(vi) \Rightarrow (i)$: Najpre, jasno je da je graf povezan. Ako bi u grafu postojala bar jedna kontura, tada bi izmedju bilo koja dva čvora neke konture postojala dva različia puta, što je u suprotnosti sa (vi). Stoga je graf, na osnovu definicije 1, stablo.

Ovim je teorema dokazana. □

Iz ove teoreme sledi da se svaki od iskaza (i)–(vi) može uzeti kao definicija stabla. Pored toga, ova teorema ima i više posledica. Pomenimo neke od njih.

POSLEDICA 4.1.3 Svaki povezan graf sadrži stablo kao razapinjući podgraf.

Dokaz. Najpre imamo da je graf povezan. Ako bi bio bez kontura, tada bi samim tim bio i stablo (trivijalan slučaj. Uzmimo stoga da ima bar jednu konturu. Udaljimo potom bilo koju granu te konture. Ovim je dobijen povezan graf. Ako bi taj podgraf bio bez kontura dokaz bi bio gotov. U protivnom, ponavljanjem istog rezonovanja, posle konačno koraka, dobili bismo povezan podgraf bez kontura, dakle stablo.

Ovim je dokaz kompletiran. □

DEFINICIJA 4.1.4 Šuma je graf čija je svaka komponenta stablo.

Bez dokaza je očigledno da važi:

POSLEDICA 4.1.5 Svaki graf sadrži šumu kao razapinjući podgraf.

Pretpostavimo sada da smo u nekom (povezanom) grafu izdvojili neko razapinjuće stablo. U odnosu na to stablo, sve preostale grane obrazulu takodje jedan razapinjući podgraf.

DEFINICIJA 4.1.6 Za dati graf $G = (V, E)$, i razapinjuće stablo $T = (V, F)$, graf $T^* = (V, E \setminus F)$ naziva se kostablo stabla T. Slično se definiše i košuma.

Primetimo da svaka grana kostabla, ako se doda stablu, obrazuje u odgovarajućem podgrafu konturu (videti (v) iz Teoreme ???). Štaviše, ova kontura je jedinstvena. Za skup svih ovako dobijenih kontura kaže se je i *linearno nezavisan*. Ovaj termin je izabran zbog sledećeg razloga: Predpostavimo da je uočen (konačno dimenzionalni) vektorski prostor nad poljem $GF(2)$ kod koga su vektori predstavljeni m–torkama kod kojih svakoj komponenti odgovara grana grafa. Tada svakom podgrafu odgovara sledeći vektor: ako grana grafa pripada podgrafu tada je odgovarajuća komponenta 1, a u protivnom je 0. Sada nije teško videti da su vektori koji pripadaju pomenutim konturama linearno nezavisni.

Za povezan graf sa n čvorova i m grana imamo da njegovo proizvoljno razapinjuće stablo sadrži $n-1$ grana, dok odgovarajuće kostablo sadrži $m-n+1$ grana. Generalnije, za proizvoljan graf sa k komponenata, njegova razapinjuća šuma sadrži $n-k$ grana, a odgovarajuće košuma sadrži $m-n+k$ grana. Stoga imamo:

DEFINICIJA 4.1.7 Za proizvoljan graf sa n čvorova, m grana i k komponenata, imamo da je

(i) $\rho(G) = n - k$ rang grafa;

(ii) $\nu(G) = m - n + k$ korang grafa (ili njegov ciklomatski broj).

KORENSKO STABLO

U raznim primenama od posebnog značaja su korenska stabla.

DEFINICIJA 4.1.8 Stablo u kome je jedan čvor posebno izdvojen naziva se korensko stablo, a taj čvor predstavlja koren stabla.

Važno svojstvo korenskog stabla je da je izmedju svakog čvora grafa i korena postoji jedinstven put. U odnosu na koren, može se izvršiti particija skupa čvorova grafa na sledeći način: V_0 se sastoji samo od korena; V_i $(i > 1)$ je skup čvorova grafa na rastojanju i od korena. Dakle imamo da se skup čvorova grafa može predstaviti "razbiti"na sledeći način:

$$V = V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_h$$

Uobičajeno je da se kaže da su čvorovi $_i$ na i–tom nivou (sloju) u odnosu na r (koren stabla). Za V_h $(\neq \emptyset)$ se kaže da predstavlja skup *listova* korenskog stabla, ili njegovih terminalnih (završnih) čvorova. Ujedno, h je *visina* stabla. Čvorovi iz $V \setminus V_h$, predstavljaju *unutrašnje* čvorove stabla.

Korenska stabla imaju veliku primenu u računarstvu. Pokazaćemo sada na primeru kako se neka formula može predstaviti korenskim stablom (videti Sl. 2). Formulu $((a + b) \times (c - d)) + (a \times d)$ možemo pretstaviti sledećim korenskim stablom. ????

Koren odgovara celoj formuli; svaki unutrašnji čvor odgovara nekoj podformuli; na primer, levi sused korena odgovara podformuli $(a + b) \times (c - d)$; listovi stabla odgovaraju slovnim simbolima (promenljivim). ????

DEFINICIJA 4.1.9 Za korensko stablo se kaže da je binarno ako svaki čvor stabla (otac) ima najviše dva susedna čvora na sledećem nivou (sina). U standardnom prikazu (slici) binarnog stabla sin sa leve strane se naziva levi sin, a sin sa desne strane desni sin.

Postoji i alternativna definicija binarnog stabla.

DEFINICIJA 4.1.10 (*Rekurzivna definicija*) T je binarno stablo ako važi:

(i) $T = K_1$;

(ii) ako su T_1 i T_2 binarna stabla, tada je i $T = T_1 * T_2$ binarno stablo, pri čemu je $T_1 * T_2$ graf dobijen uvodjenjem novog čvora (koren stabla T) i povezivanjem tog čvora granom sa korenima stabala T_1 i T_2 (ukoliko oni nisu prazni, to jest bez čvorova).

Sledeća teorema se jednostavno dokazuje.

TEOREMA 4.1.11 Neka je T binarno stablo sa n čvorova i visine h. Tada je

$$n \leqslant 2^{h+1} - 1,$$

ili alternativno,

$$h \geqslant \log_2(n+1) - 1.$$

Posmatraćemo sada neke standardne načine obilazaka čvorova binarnog stabala.

(i) KLD–obilazak (engleski: pre–order) Kod ovog načina obilaska binarnog stabla najpre se obilazi koren, zatim levo podstablo, pa tek potom desno podstablo. Na primer, binarno stablo sa Sl. ?, bi se obišlo na sledeći način: ???????????????

(ii) LKD–obilazak (engleski: in–order) Kod ovog načina obilaska binarnog stabla najpre se obilazi levo podstablo, zatim koren, pa tek potom desno podstablo. Na primer, binarno stablo sa Sl. ?, bi se obišlo na sledeći način: ???????????????

(iii) LDK–obilazak (engleski: post–order) Kod ovog načina obilaska binarnog stabla najpre se obilazi levo podstablo, zatim desno podstablo, koren, pa tek potom koren. Na primer, binarno stablo sa Sl. ?, bi se obišlo na sledeći način: ???????????????

ORIJENTISANA STABLA

Za proizvoljno stablo se kaže da je orijentisano, ako je svakoj grani dodeljena neka orijentacija. Drugim rečima, jedan od krajnjih čvorova je izabran za početni a drugi za završni; na granu se postavlja strelica usmerena od počtnog ka završnom čvoru. Dakle, ako imamo stablo sa n čvorova tada se ono može orijentisati na 2^{n-1} načina. Od posebnog interesa su orijentisana korenska stabla.

???

STABLA PRETRAGE U DUBINU I ŠIRINU

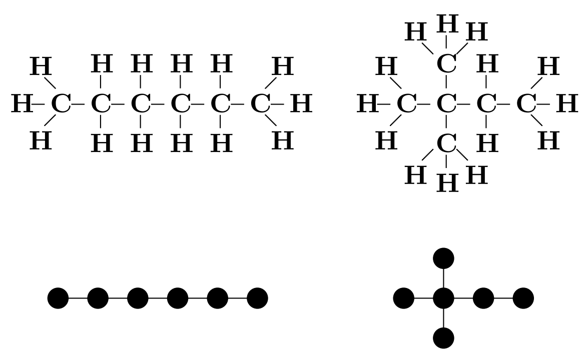
4.2 RAZAPINJUĆA STABLA

MALO ISTORIJE I OSNOVNI POJMOVI

Dva glavna tvrdjenja u ovom odeljku, Kejlijeva (eng. Arthur Cayley) teorema i Kirhofova (eng. Kirchhoff) teorema za matrice i stabla, su dokazana još u 19-tom veku (to su prvi značajniji rezultati Teorije grafova nakon Ojlerovih, koji su iz 18-og veka). Oba su stigla direktno iz primena.

Fizičar Kirhof je svoje tvrdjenje pokazao 1947. godine i ono mu je poslužilo za izračunavanje jačina električnih struja u granama nekog električnog kola (jer nezavisni ciklusi u potpunosti odredjeni jednim razapinjućim stablom).

Kejli je engleski matematičar koji je 1857. godine uveo u matematiku pojam stabla. Skoro u isto vreme (oko 1859.) otkrivene su strukturne formule hemijskih jedinjenja. Kejli je našao vezu izmedju ova 2 pojma (on je povezao stabla i strukturne formule alkana – jedinjenja formule C_nH_{2n+2}) i u radu "O matematičkoj teoriji izomera"iz 1874. godine je postavio kamen temeljac naučne discipline Hemijske teorije grafova. Na sledećoj slici su 2 alkana koji imaju formulu C_6H_{14} (kako imaju istu formulu – oni su izomeri) i odgovarajuća stabla (kod kojih su čvorovi ugljenikovi atomi, a grane veze medju njima).



Slika 4.1: Strukturne formule dva alkana i odgovarajuća stabla

Kejli je pokušao da pronadje broj izomera I_n alkana C_nH_{2n+2}, nije uspeo u tome, mada je dao nekoliko važnih rezultata vezanih za prebrojavanje stabala. Do rešenja ovog problema je dodjeno mnogo kasnije – broj izomernih alkana su odredili 1931. godine hemičari Hinze i Bler (eng. Henze, Blair), a opšti metod za rešavanje ovakvih enumerativnih problema je pronašao madjarsko-američki matematičar Džordž Polja (eng. Georg Polya) 1936. godine.

Uvedimo nekoliko pojmova koji igraju ključnu ulogu u ovom odeljku.

DEFINICIJA 4.2.1 *Razapinjući podgraf* grafa $G = (V, E)$ je podgraf oblika (V, E'), $E' \subseteq E$. *Raza-*

pinjuće stablo je razapinjući podgraf koji je stablo, a *razapinjuća šuma* je maksimalni razapinjući podgraf koji je šuma.

Da razjasnimo ovde šta podrazumevamo pod maksimalnim podgrafom koji je šuma. Maksimalan je u smislu broja grana, tj. ako bismo dodali bilo koju granu to više ne bi bila šuma, nego graf koji sadrži tačno jednu konturu. Stoga, razpinjuća šuma sadrži razapinjuća stabla kao svoje komponente povezanosti.

DEFINICIJA 4.2.2 *Kompleksnost* grafa G je broj razapinjućih stabala grafa. Kompleksnost grafa G ćemo označavati sa $t(G)$. Označimo $t_n = t(K_n)$, tj. t_n je broj razapinjućih stabala u potpunom grafu K_n.

Egzistenciju razapinjućeg stabla i razapinjuće šume nam daju sledeće leme:

LEMA 4.2.3 Graf je povezan ako i samo ako ima razapinjuće stablo.

Dokaz. Neka je G povezan graf, a T minimalni povezani razapinjući podgraf od G. Tada je T povezan, a $T - e$ je nepovezan za svaku granu $e \in E(T)$, pa po ekvivalentnim definicijama stabla dobijamo da je T stablo, a samim tim i razapinjuće stablo.

Ako graf G ima razapinjuće stablo T, tada postoji put izmedju bilo koja 2 čvora u T, pa samim tim postoji i put izmedju bilo koja 2 čvora u G, te je G povezan. □

LEMA 4.2.4 Svaki nepovezan graf ima razapinjuću šumu.

Dokaz. Ako je G nepovezan, onda prema prethodnom u svakoj njegovoj komponenti povezanosti možemo naći razapinjuće stablo. Unija svih tih razapinjućih stabala daje traženu razapinjuću šumu. □

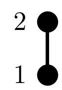
KEJLIJEVA TEOREMA

Kao što smo u prethodnom poglavlju videli, kada smo crtali sva stabla sa malim brojem čvorova, broj stabala sa datim brojem čvorova nije bilo moguće eksplicitno odrediti (time se bave napredne enumerativne tehnike, poput teorije Polje koja koristi funkcije generatrisa i teoriju orbita). Ali za broj razapinjućih stabala na fiksiranom skupu čvorova (odredjivanje broja razipunjićih stabala na skupu od n čvorova je isto što i odredjivanje broja razapinjućih stabala koja su podgrafovi potpunog grafa K_n) postoji jednostavno formula. Ali pre nego što damo tvrdjenje Kejlijeve teoreme, to ćemo ilustrovati jednim primerom.

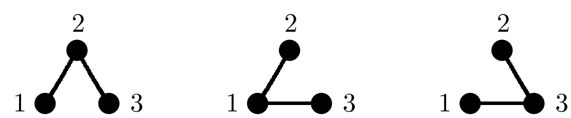
PRIMER 4.2.5 Odredimo sva razapinjuća stabla sa 1, 2, 3 i 4 čvora.

Rešenje. Razapinjućih stabala sa 1 i 2 čvora ima samo po jedno. Razapinjućih stabala sa 3 čvora ima 3, dok razapinjućih stabala sa 4 čvora ima 16. Sva ona su predstavljena na sledećim slikama:

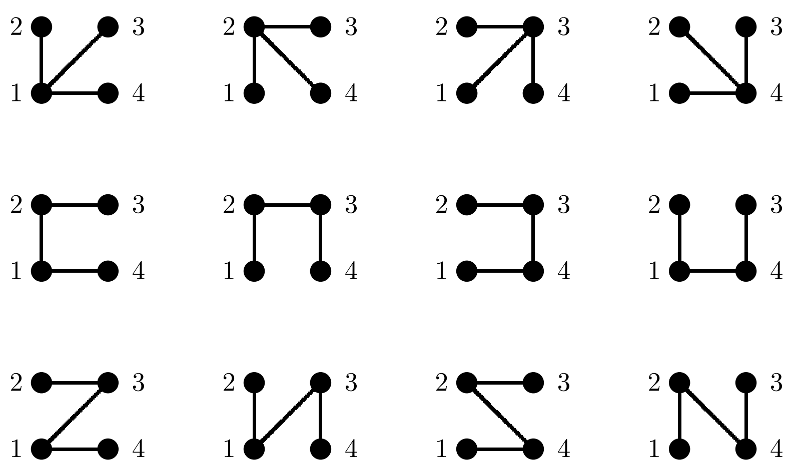
Slika 4.2: Sva razapinjuća stabla sa 1 čvorom



Slika 4.3: Sva razapinjuća stabla sa 2 čvora

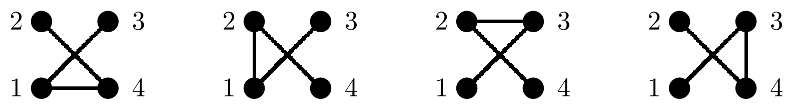


Slika 4.4: Sva razapinjuća stabla sa 3 čvora



Primetimo da za $n = 1$ ima $1^{-1} = 1$ razapinjuće stablo, za $n = 2$ ima $2^0 = 1$ razapinjuće stablo, za $n = 3$ ima $3^1 = 3$ razapinjuća stabla i za $n = 4$ ima $4^2 = 16$ razapinjućih stabala (tu su samo 2 neizomorfna stabla – zvezda i put).

Takodje ukupan broj prostih grafova na skupu čvorova $\mathbb{N}_4$ je $2^{\binom{4}{2}} = 2^6 = 64$ jer svaka od $\binom{4}{2} = 6$ grana može da postoji, ali i ne mora (2 mogućnosti). ■



Slika 4.5: Sva razapinjuća stabla sa 4 čvora

Uopštenje zaključaka prethodnog primera je jedno od najvažnijih tvrdjenja Teorije grafova — Kejlijeva teorema. Nju je prvi dokazao Kejli još 1889. godine, a od tada je nadjeno mnoštvo različitih dokaza. Čak je 1970. godine Kanadjanin Džon Mun (eng. John W. Moon) napisao čitavu knjigu o prebrojavanju razapinjućih stabala [22]. Napomenimo još da se razapinjuća stabla (eng. spanning trees) nazivaju i označena stabla (eng. labeled trees).
Mi ćemo ovde navesti 4 dokaza.

Pre nego što krenemo u dokazivanje, daćemo definiciju Priferovog (nem. H. Prüfer) niza i 2 algoritma pomoću kojih od razapinjućeg stabla dobijamo Priferov niz i obratno. U daljem tekstu ćemo pretpostaviti da su čvorovi razapinjućeg stabla sa n čvorova označeni brojevima $1, 2, \ldots, n$.

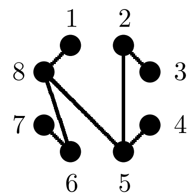
DEFINICIJA 4.2.6 *Priferov niz* dužine $n-2$, za $n \geqslant 2$, je bilo koji niz brojeva iz $\mathbb{N}_n$ u kome su i ponavljanja dozvoljena.

Sada ćemo dati proceduru za konstruisanje Priferovog niza s od datog razapinjućeg stabla T sa n čvorova, tzv. Priferovo kodiranje.

```
procedure Priferovo_kodiranje (T)
for i := 1 to n − 2
  begin
    v := čvor stepena 1 sa najmanjom oznakom
    s_i := oznaka suseda od v
    T := T − v
  end
return s
end procedure
```

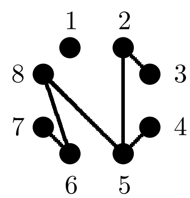
PRIMER 4.2.7 Odredimo Priferov niz za sledeće razapinjuće stablo:

Rešenje. Odgovarajući Priferov niz je $s = (8, 2, 5, 5, 8, 6)$.
Na sledećim slikama daćemo korak po korak pravljenja Priferovog niza (sa sve stablom iz koga uklanjamo grane), dok u narednoj tablici imamo za svaki korak oznaku čvora v, granu koja vodi iz njega $e = \{v, s_i\}$, kao i oznaku suseda s_i čvora v.

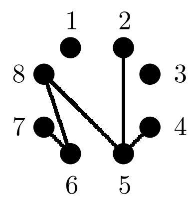


Slika 4.6: Razapinjuće stablo koje treba kodirati u Priferov niz

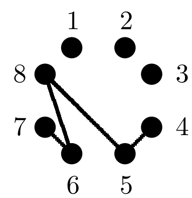
i	1	2	3	4	5	6
v	1	3	2	4	5	7
e	$\{1,8\}$	$\{3,2\}$	$\{2,5\}$	$\{4,5\}$	$\{5,8\}$	$\{7,6\}$
s_i	8	2	5	5	8	6



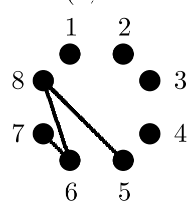
$s = (8,$



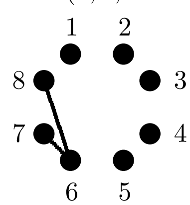
$s = (8, 2,$



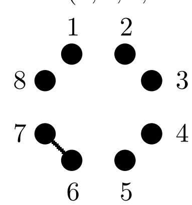
$s = (8, 2, 5,$



$s = (8, 2, 5, 5,$



$s = (8, 2, 5, 5, 8,$



$s = (8, 2, 5, 5, 8, 6)$

■

Vezu Priferovog niza i stepena čvora u grafu nam daje sledeća lema:

LEMA 4.2.8 Neka je P_k broj pojavljivanja broja k u Priferovom nizu s koji odgovara razapinjućem stablu T. Tada je stepen čvora k u T jednak $P_k + 1$.

Dokaz. Tvrdjenje je tačno za bilo koje razapinjuće stablo T sa 3 čvora, jer se Priferov kod takvog stabla sastoji od 1 pojavljivanja oznake čvora koji ima stepen 2.

Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za sva razapinjuća stabla sa $n \geqslant 3$ čvora i neka je T razapinjuće stablo sa $n+1$ čvorova. Neka je v čvor stepena 1 sa najmanjom oznakom i neka je w sused od v. Tada Priferov kod stabla T ima oblik $s = (w, s_2, s_3, \ldots, s_{n-1})$, gde je $s^* = (s_2, s_3, \ldots, s_{n-1})$ Priferov kod stabla $T^* = T - v$. Sada, po indukcijskoj pretpostavki, imamo da je $d_{T^*}(u)$ za 1 veći od broja pojavljivanja u u s^*. Ali za $u \neq w$ imamo da je broj pojavljivanja u u s^* i u s jednak i $d_T(u) = d_{T^*}(u)$. Dalje imamo da je $d_T(w) = d_{T^*}(w) + 1$, ali i w ima jedno pojavljivanje više u s nego u s^*.

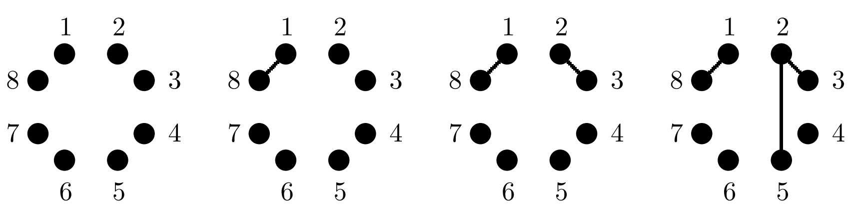
Stoga po principu matematičkeindukcije imamo da je tvrdjenje tačno za svaki čvor razapinjućeg stabla T. □

Sada ćemo dati proceduru za konstruisanje razapinjućeg stabla T sa n čvorova od Priferovog niza s, tzv. Priferovo dekodiranje.

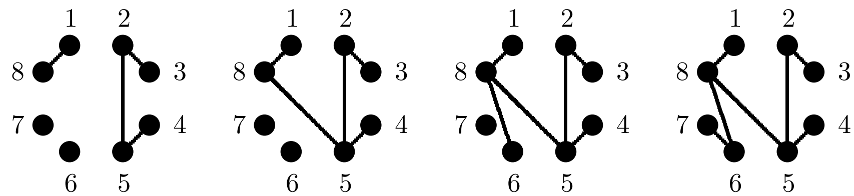
procedure *Priferovo_ dekodiranje* (s)
$\ell := (1, 2, \ldots, n)$
Inicijalizovati šumu T sa n izolovanih čvorova označenih sa $1, \ldots, n$
for $i := 1$ **to** $n - 2$
  begin
    $v :=$ najmanji broj koji je u ℓ, a nije u s
    $w := \ell_1$
        // w je prvi broj u listi L
    dodati granu $\{v, w\}$ u šumu T
    ukloniti w iz liste ℓ
    ukloniti prvo pojavljivanje v iz niza s
  end
dodati granu koja spaja preostala 2 elementa liste ℓ
return T
end procedure

PRIMER 4.2.9 Odredimo razapinjuće stablo za Priferov niz: $s = (8, 2, 5, 5, 8, 6)$.

Rešenje. Na osnovu Leme 4.2.8 dobijamo da su u T stepeni čvorova:
$d(1) = d(3) = d(4) = d(7) = 1$, $d(2) = d(6) = 2$ i $d(5) = d(8) = 2$.
Na sledećim slikama su predstavljeni koraci u Priferovom dekodiranju:



$\ell = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ $\ell = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ $\ell = (2, 4, 5, 6, 7, 8)$ $\ell = (4, 5, 6, 7, 8)$
$s = (8, 2, 5, 5, 8, 6)$ $s = (2, 5, 5, 8, 6)$ $s = (5, 5, 8, 6)$ $s = (5, 8, 6)$



$\ell = (5, 6, 7, 8)$
$s = (8, 6)$

$\ell = (6, 7, 8)$
$s = (6)$

$\ell = (7, 8)$
$s = (\ )$

■

Označimo sa $\mathcal{P}_{n-2}$ skup Priferovih nizova dužine $n-2$, a sa $\mathcal{T}_n$ skup svih razapinjućih stabala na skupu od n čvorova $1, 2, \ldots, n$. U proceduri Priferovog kodiranja smo definisali funkciju $f_k\colon \mathcal{T}_n \to \mathcal{P}_{n-2}$ sa $f_k(T) = s$, a u proceduri Priferovog dekodiranja definisali funkciju $f_d\colon \mathcal{P}_{n-2} \to \mathcal{T}_n$ sa $f_d(s) = T$.

LEMA 4.2.10 Funkcija f_d je dobro definisana.

Dokaz. Prvo primetimo da u svakom koraku procedure nemamo više izbora za granu koju ćemo docrtati. Stoga procedura Priferovog dekodiranja definiše funkciju f_d koja slika skup $\mathcal{P}_{n-2}$ u skup grafova sa n čvorova. Potrebno je još da pokažemo da je rezultat te procedure stablo. Da bismo pokazali da funkcija f_d daje rezultat stablo (kada se primeni na Priferov niz s) koristićemo princip matematičke indukcije.

Za $n = 2$ procedura daje jednu granu $\{1, 2\}$, pa je graf T stablo sa 2 čvora.

Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za neko $n \geqslant 2$ i posmatrajmo Priferov niz $s = (s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})$ i graf T sa skupom čvorova $\{1, 2, \ldots, n+1\}$. U prvom koraku procedure dodajemo granu $\{b, s_1\}$, gde je b čvor koji nije u s i ima najmanju oznaku. Nijedna od $n-1$ grana koje će biti odredjene u narednim koracima (od 2. do n-tog) neće biti incidentna sa b. Stoga je nastavak procedure, od koraka 2, ekvivalentan sa primenom procedure na Priferov niz $s^* = (s_2, s_3, \ldots, s_{n-1})$ na skupu čvorova $\{1, \ldots, b-1, b+1, \ldots, n+1\}$, a po induktivnoj pretpostavci ćemo tu dobiti stablo T^*. Ovo stablo zajedno sa granom $\{b, s_1\}$ formira stablo T na skupu čvorova $\{1, 2, \ldots, n+1\}$.

□

LEMA 4.2.11 Funkcija $f_k\colon \mathcal{T}_n \to \mathcal{P}_{n-2}$ je inverzna funkcija funkcije $f_d\colon \mathcal{P}_{n-2} \to \mathcal{T}_n$.

Dokaz. U i-tom koraku procedura Priferovog kodiranja briše granu $\{v, w\}$ koju je dodavala procedura Priferovog dekodiranja i dodaje oznaku čvora v koji je procedura Priferovog dekodiranja izbacivala iz Priferovog niza s. Stoga je za svaki Priferov niz s ispunjeno $f_k(f_d(s)) = s$, pa je f_k inverzna funkcija funkcije f_d. Slično može da se pokaže i da je f_d inverzna funkcija funkcije f_k. □

Pomoću ove leme možemo da dokažemo Kejlijevu teoremu. Daćemo 4 dokaza ove teoreme (od čega 2 uključuju materiju koja sledi nakon njih).

TEOREMA 4.2.12 **Kejlijeva teorema.** Broj razapinjućih stabala kompletnog grafa K_n, za $n \in \mathbb{N}$, jednak je n^{n-2}.

Dokaz 1. Označimo čvorove u K_n sa $1, 2, \ldots, n$. Neka je T razapinjuće stablo. Na osnovu Leme 4.2.11 imamo da je funkcija f_k bijekcija iz skupa $\mathcal{T}_n$ u skup $\mathcal{P}_{n-2}$, pa ova 2 skupa imaju jednak broj elemenata, a kako je broj Priferovih nizova jednak $|\mathcal{P}_{n-2}| = n^{n-2}$, to je i broj razapinjućih stabala $|\mathcal{T}_n| = n^{n-2}$. $\square$

Dokaz 2. Uočimo neki čvor u iz K_n. Označimo sa $t(n,k)$ broj razapinjućih stabala u kojima taj čvor ima stepen k, $d(u) = k$. Tada je

$$t_n = \sum_{k=1}^{n-1} t(n,k).$$

Nazovimo svežnjem par razapinjućih stabala A i B, takvih da je $d_A(u) = k-1$ i $d_B(u) = k$ i da stabla imaju po $n-2$ zajedničke grane, a one dve grane (jedna je uv) koje nisu zajedničke su incidentne sa istim čvorom $v \neq u$ i svih tih n grana čini unicikličan graf sa konturom koja prolazi i kroz u i kroz v.
U A je $d_A(u) = k-1$. Graf B možemo dobiti tako što čvor u spojimo sa proizvoljnim čvorom v sa kojim nije susedan (v možemo izabrati na $n-k$ načina), a onda iz konture izbacimo granu vw iz v ($vw \neq vu$). Stoga svežnjeva ima $(n-k) \cdot t(n, k-1)$.
U B je $d_B(u) = k$. Ako bi odstranili čvor v graf B bi se raspao na k komponenti povezanosti: $B_1, \ldots, B_k$ (neka je $v_i \in B_i$ čvor koji je susedan sa u i $|B_k| = n_k$). Graf A možemo dobiti tako što odstranimo proizvoljnu granu uv_i, a zatim čvor v_i spojimo sa proizvoljnim čvorom v iz neke druge komponente povezanosti. Ovu operaciju možemo izvršiti na

$$n-1-n_1+n-1-n_2+\ldots+n-1-n_k = k\cdot(n-1)-(n-1) = (k-1)(n-1)$$

načina. Stoga svežnjeva ima $(k-1)(n-1) \cdot t(n,k)$.
Dobili smo rekurentnu relaciju

$$(n-k) \cdot t(n, k-1) = (k-1)(n-1) \cdot t(n,k),$$

iz koje dobijamo

$$\begin{aligned}
(n-k-1) \cdot t(n,k) &= k(n-1) \cdot t(n,k+1), \\
(n-k-2) \cdot t(n,k+1) &= (k+1)(n-1) \cdot t(n,k+2), \\
&\vdots \\
(n-(n-1)) \cdot t(n,n-2) &= (n-2)(n-1) \cdot t(n,n-1).
\end{aligned}$$

Kako je $t(n, n-1) = 1$ (samo imamo zvezdu $K_{1,n-1}$) kada izmnožimo sve ove jednakosti dobijamo $(n-k-1)! \cdot t(n,k) = \frac{(n-2)!}{(k-1)!}(n-1)^{n-k-1} \cdot 1$, odnosno

$$t(n,k) = (n-1)^{n-k-1}\binom{n-2}{n-k-1} = (n-1)^{n-k-1}\binom{n-2}{k-1}.$$

Odatle dobijamo da razapinjućih stabala ima

$$t_n = \sum_{k=1}^{n-1}(n-1)^{n-k-1}\binom{n-2}{k-1} = \sum_{i=0}^{n-2}(n-1)^{n-i-2}\binom{n-2}{i}$$

$$t_n = [(n-1)+1]^{n-2} = n^{n-2}.$$

□

Dokaz 3. Na osnovu Teoreme o matricama i stablima (to je Teorema 4.2.24 sa $s = t = 1$) imamo da je broj razapinjućih stabala jednak sledećoj determinanti reda $n-1$:

$$t_n = \begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}.$$

Ako prvoj vrsti dodamo preostale vrste dobijamo vrstu sa svim elementima 1. Zatim tu vrstu dodamo svim ostalim i dobijamo

$$t_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & n & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n^{n-2}.$$

□

Dokaz 4. Sada ćemo pomoću Teoreme 4.2.13 i Multinomijalne teoreme još jednom dokazati Kejlijevu formulu. Ako sumiramo formulu iz Teoreme 4.2.13 po svim mogućim nizovima stepena stabala sa čvorovima $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i primenimo Multinomijalnu teoremu, dobijamo da je ukupan broj stabala sa čvorovima $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ jednak

$$\sum_{\substack{d_1, d_2, \dots, d_n \geqslant 1 \\ d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2n-2}} \frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)! \cdot \ldots \cdot (d_{n-1}-1)!}$$

$$= \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_n \geqslant 0 \\ k_1 + k_2 + \dots + k_n = n-2}} \frac{(n-2)!}{k_1! k_2! \cdot \ldots \cdot k_{n-1}!} = (\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ puta}})^{n-2} = n^{n-2}.$$

□

TEOREMA 4.2.13 Neka su v_1, v_2, ..., v_n dati čvorovi i d_1, d_2, ..., d_n dati brojevi tako da je $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$. Dokazati da je broj stabala sa skupom čvorova $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ takvih da čvor v_i ima stepen d_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, jednak

$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)! \cdot \ldots \cdot (d_n-1)!}.$$

Dokaz. Dokaz ide matematičkom indukcijom po n. Za $n = 1, 2$ tvrdjenje je trivijalno tačno, pa pretpostavimo da je $n > 2$. Pošto je $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2 < 2n$, postoji i tako da je $d_i = 1$. Bez gubitka opštosti, možemo da pretpostavimo da je $d_n = 1$.

Neka je $\mathcal{T}$ skup svih stabala sa čvorovima $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ takvih da svaki čvor v_i ima stepen d_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Podelimo stabla iz $\mathcal{T}$ u $n-1$ grupa $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, ..., $\mathcal{T}_{n-1}$: skup $\mathcal{T}_j$ sadrži stabla u kojima je čvor v_n susedan sa čvorom v_j. Ako uzmemo stablo iz $\mathcal{T}_j$ i obrišemo čvor v_n (zajedno sa njegovom jedinom granom), dobijamo stablo sa čvorovima $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ takvih da je stepen v_i jednak d_i za $i \neq j$, dok je stepen v_j jednak $d_j - 1$. Lako se vidi da na ovaj način dobijamo bijekciju izmedju skupa $\mathcal{T}_j$ i skupa $\mathcal{T}'_j$ svih stabala sa čvorovima $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ sa nizom stepena $d_1, d_2, \ldots, d_{j-1}, d_j - 1, d_{j+1}, \ldots, d_{n-1}$, s obzirom da različita stabla iz $\mathcal{T}_j$ daju različita stabla iz $\mathcal{T}'_j$, a iz svakog stabla iz $\mathcal{T}'_j$ možemo da dobijemo stablo iz $\mathcal{T}_j$ dodavanjem čvora v_n i njegovim spajanjem sa čvorom v_j.

Po induktivnoj pretpostavci, imamo da je

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_j| &= |\mathcal{T}'_j| \\ &= \frac{(n-3)!}{(d_1-1)! \cdot \ldots \cdot (d_{j-1}-1)!(d_j-2)!(d_{j+1}-1)! \cdot \ldots \cdot (d_{n-1}-1)!} \\ &= \frac{(n-3)!(d_j-1)}{(d_1-1)!(d_2-1)! \cdot \ldots \cdot (d_{n-1}-1)!} \end{aligned}$$

Ova formula važi i kada je $d_j = 1$: ona tada daje 0, što se slaže sa činjenicom da ne postoji stablo sa stepenom $d_j - 1 = 0$ u čvoru v_j.

Sada je ukupan broj stabala u $\mathcal{T}$ jednak

$$\begin{aligned}
|\mathcal{T}| &= \sum_{j=1}^{n-1} |\mathcal{T}_j| \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-3)!(d_j-1)}{(d_1-1)!(d_2-1)!\cdot\ldots\cdot(d_{n-1}-1)!} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n-1}(d_j-1)\right) \frac{(n-3)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!\cdot\ldots\cdot(d_{n-1}-1)!} \\
&= \frac{(n-2)(n-3)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!\cdot\ldots\cdot(d_{n-1}-1)!}.
\end{aligned}$$

Kako je $d_n = 1$, razlomak možemo slobodno da proširimo sa $(d_n-1)! = 0! = 1$, da bismo dobili izraz iz tvrdjenja. $\square$

Posledica prethodne teoreme je i sledeće tvrdjenje koje je pokazao Klarke (eng. L. E. Clarke) 1958. godine:

TEOREMA 4.2.14 Broj stabala sa skupom čvorova $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ takvih da čvor v_1 ima stepen k jednak je $\binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1}$.

Dokaz. Traženi broj stabala jednak je

$$\begin{aligned}
\sum \binom{n-2}{k-1, d_2-1, \ldots, d_n-1} &= \tfrac{(n-2)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \sum \binom{n-k-1}{d_2-1, \ldots, d_n-1} \\
&= \binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1},
\end{aligned}$$

gde obe sume idu po svim $d_2, d_3, \ldots, d_n \in \mathbb{N}$ (to su stepeni čvorova $v_2, v_3, \ldots, v_n$ u tim stablima) za koje važi $d_2 + d_3 + \ldots + d_n = 2n - k - 2$. $\square$

Sledeće 2 teoreme nam daju rekurentne veze pomoću kojih se može izvesti Kejlijeva formula (ti dokazi nisu laki, te ih ovde izostavljamo; za dokaz Kejlijeve teoreme preko Teoreme 4.2.15 videti [32], zadatak 6.16).

TEOREMA 4.2.15 Za t_n važi sledeća rekurentna formula

$$(n-1)t_n = \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)\binom{n-1}{k-1} t_k t_{n-k}. \tag{4.1}$$

Dokaz. Izraz $(n-1)t_n$ na levoj strani jednakosti (4.1) predstavlja broj načina da izaberemo jedno razapinjuće stablo T i jednu njegovu granu e. Primetimo da kada iz stabla T odstranimo granu e dobijamo šumu sa 2 komponente povezanosti (ovo će nam pomoći da se izborimo sa desnom stranom jednakosti (4.1)). Neka nam je u toj šumi skup čvorova grafa K_n razbijen na 2 neprazna podskupa V_1 i V_2, tj. $V(K_n) = V_1 \cup V_2$. Kako je $V_1 \cup V_2 = V_2 \cup V_1$, redosled izbora ova 2 podskupa nije bitan, te bez umanjenja opštosti možemo uzeti da čvor v_1 pripada V_1. Tada skup V_1 koji ima k elemenata možemo izabrati na $\binom{n-1}{k-1}$ jer preostalih $k-1$ elemenata skupa V_1 biramo od preostalih $n-1$ elemenata skupa $V(K_n)$. Dalje, kada smo izabrali skupove V_1 i V_2, sa $|V_1| = k$ i $|V_2| = n-k$, tada u njima razapinjuća stabla možemo izabrati na t_k i t_{n-k} načina. Time smo odredili datu razapinjuću šumu sa 2 komponente povezanosti. Ostaje da datu šumu povežemo jednom granom e i da dobijemo stablo T. Grana e koja povezuje te 2 komponente ima jedan kraj u V_1 i srugi kraj u V_2. Ti čvorovi se mogu (nezavisno jedan od drugog) izabrati na $\binom{k}{1} = k$, odnosno na $\binom{n-k}{1} = n-k$ načina, te se ta grana e može odrediti na $k \cdot (n-k)$ načina. Zbog svega prethodno rečenog imamo da se jedno razapinjuće stablo T i jedna njegova grana e mogu izabrati na $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} \cdot t_k \cdot t_{n-k} \cdot k(n-k)$ načina. Time je tražena jednakost (4.1) dokazana (i to kombinatornim pristupom!). $\square$

TEOREMA 4.2.16 Za t_n važi sledeća rekurentna formula

$$2(n-1)t_n = \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)\binom{n}{k} t_k t_{n-k}.$$

Dokaz. Slično kao i dokazu prethodne teoreme obe strane jednakosti predstavljaju broj načina da izaberemo razapinjuće stablo T i u njemu 2 susedna čvora v_1 i v_2. Za izraz na levoj strani stablo T možemo odrediti na t_n načina, jednu njegovu granu e možemo izabrati na $\binom{n-1}{1} = n-1$ načina i imamo još 2 mogućnosti da izaberemo 2 susedna čvora v_1 i v_2 — da li uzmemo $e = \{v_1, v_2\}$ ili $e = \{v_2, v_1\}$. Skup V_1 koji sadrži v_1 možemo odrediti na $\binom{n}{k}$ načina, a onda je odredjen i skup V_2 iz koga biramo v_2. Ostali članovi su isti kao i u dokazu prethodne teoreme. $\square$

Navedimo još jedno tvrdjenje bez dokaza (dokaz možete videti u [31]) koje koristi Kejlijevu teoremu.

TEOREMA 4.2.17 Broj načina da permutaciju skupa $\mathbb{N}_n$ koja ima samo 1 ciklus zapišemo kao proizvod $n-1$ transpozicija jednak je n^{n-2}.

$\square$

TEOREMA O MATRICAMA I STABLIMA

Sada ćemo navesti drugo veoma važno tvrdjenje vezano za razapinjuća stabla, Teoremu o matricama i stablima (eng. Matrix-Tree Theorem). Ponegde se ova teorema naziva i Kirhofova teorema, zato što je Kirhof prvi došao do nje, još davne 1847. godine. Pre nego što formulišemo ovu teoremu navešćemo nekoliko lema.

Orijentišimo grane grafa G na proizvoljan način. Neka je sa $S = [s_{ij}]_{n,m}$ označena $(-1, 0, 1)$-matrica incidencije čvorova i grana na taj način dobijenog digrafa. Tu je

$$s_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{ako grana } e_j \text{ izlazi iz čvora } v_i \\ 0 & \text{ako grana } e_j \text{ i čvora } v_i \text{ nisu susedni} \\ 1 & \text{ako grana } e_j \text{ ulazi u čvor } v_i. \end{cases}$$

Neka je A matrica susedstva grafa G sa skupom čvorova $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Neka je D dijagonalna matrica sa $D_{ii} = d_G(v_i)$. Tada je $L = D - A$ Laplasova matrica grafa G.

LEMA 4.2.18 $S \cdot S^T = L$, gde je L Laplasova matrica.

Dokaz. Podsetimo se da S^T označava transponovanu matricu matrice S. Stoga je element na mestu (i, k) matrice $S \cdot S^T$ je jednak $l_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{m} s_{ij} \cdot s_{kj}$. Ako su v_i i v_k susedni čvorovi, tada postoji samo jedna grana u_p koja izlazi iz jednog od tih čvorova i ulazi u drugi, te je tada $s_{ip} \cdot s_{kp} = -1$, dok je za ostale grane e_j ispunjeno $s_{ij} \cdot s_{kj} = 0$, pa je i $l_{ik} = -1$. Ako v_i i v_k nisu susedni čvorovi, tada ne postoji nijedna grana izmedju njih, te je $s_{ij} \cdot s_{kj} = 0$ za svaku granu e_j, pa dobijamo $l_{ik} = 0$. Za $i = k$ za svaku granu e_p koja je incidentna sa v_i dobijamo da je $s_{ip} \cdot s_{kp} = 1$, dok je za ostale $s_{ij} \cdot s_{kj} = 0$, pa je $l_{ik} = d(v_i)$. Na osnovu svega izloženog dobijamo da je $S \cdot S^T = D - A$. Po definiciji Laplasove matrice imamo $L = D - A$. □

Naredna tvrdjenja ćemo pokazati samo za vrste, ali ona važe i za kolone (dokaz bi išao analogno, ili možemo iskoristiti da se transponovanjem vrednost determinante ne menja).

LEMA 4.2.19 Ako je zbir elemenata u svakoj vrsti kvadratne matrice A jednak 0, tada su kofaktori elemenata iz svake vrste matrice A medjusobno jednaki.

Dokaz. Neka je $A = [a_{ij}]_1^n$ i neka su A_{ip} i A_{iq} redom algebarski kofaktori elemenata a_{ip} i a_{iq} $(p > q)$. Kada tražimo A_{ip} možemo u submatrici A_I^P, gde je $P = \mathbb{N}_n \setminus \{p\}$ i $I = \mathbb{N}_n \setminus \{i\}$, dodati q-toj koloni sve preostale kolone. Kako je bilo $a_{sq} = -\sum\limits_{\substack{t=1\\t\neq q}}^{n} a_{st}$ za $s \in I$ (iz uslova leme imamo da je $\sum\limits_{t=1}^{n} a_{st} = 0$, za $s \in \mathbb{N}_n$) tada ćemo dobiti $a'_{sq} = -a_{sp}$ za $s \in I$. Izvucimo faktor (-1) ispred pri računanju algebarskog kofaktora (to je determinanta!) i u q-toj koloni odgovarajuće matrice ćemo imati $a''_{sq} = a_{sp}$ za $s \in I$. Zatim uzmimo q-tu kolonu i menjajmo joj mesto sa narednom dok je ne dovedemo da bude pre p-te kolone, tj. na mesto $(p-1)$-ve kolone. Da bismo to učinili treba da učinimo $p-q-1$ zamena mesta po 2 kolone. Sada kad računamo determinantu to je ista determinanta koja se javlja i pri računanju algebarskog kofaktora A_{iq}, te ostaje da vidimo koliko se javlja znakova (-1): u prethodnom razmatranju nismo vodili računa da se pri svakoj zameni mesta 2 kolone vrednost determinante menja (-1) put, kao i da smo izvukli (-1) kao zajednički faktor u q-toj koloni, kao i da u kofaktorima imamo članove $(-1)^{i+p}$ i $(-1)^{i+q}$ ispred odgovarajuće determinante. Stoga imamo da je

$$A_{ip} = (-1)^{i+p} \cdot (-1) \cdot (-1)^{p-q-1} \cdot (-1)^{i+q} \cdot A_{iq},$$

tj. $A_{ip} = A_{iq}$, što je i trebalo pokazati. □

Neposredna posledica prethodne leme je i sledeća teorema.

TEOREMA 4.2.20 Ako je A kvadratna matrica u kojoj je zbir elemenata u svakoj vrsti, kao i zbir elemenata u svakoj koloni, jednak 0, tada su kofaktori svih elemenata matrice A medjusobno jednaki.

Dokaz. Kako prethodna lema važi i za kolone, pa su kofaktori svih elemenata iz prve kolone medjusobno jednaki, a sada iskoristimo još jednom prethodnu lemu, pa dobijamo da su kofaktori svih elemenata iz matrice A medjusobno jednaki. □

LEMA 4.2.21 Ako je zbir elemenata u svakoj vrsti kvadratne matrice A jednak 0, tada je matrica A singularna (tj. $\det(A) = 0$).

Dokaz 1. Prema Lemi 4.2.19 imamo da adjungovana matrica $\operatorname{adj} A$ ima sve elemente jednake, pa je $\det(\operatorname{adj} A) = 0$ (jer npr. ima 2 jednake vrste). Iz linearne algebre nam je poznato tvrdjenje da je $\det(\operatorname{adj} A) = \big(\det(A)\big)^{n-1}$, odakle direktno sledi i da je $\det(A) = 0$. □

Dokaz 2. Kako se vrednost determinante ne menja ako nekoj koloni dodamo neku drugu, to u matrici M ako prvoj koloni dodamo sve ostale dobijamo kolonu sa svim elementima 0, pa je $\det(M) = 0$. □

Označimo sa J niz indeksa $J = j_1, j_2, \dots, j_{n-1}$. Neka je S_i^J kvadratna submatrica reda $n-1$ matrice S koja se dobija kada se iz S izostavi i-ta vrsta, a ostave samo kolone sa rednim brojevima $j_1, j_2, \dots, j_{n-1}$.

LEMA 4.2.22 Determinanta $\det(S_i^J) = \pm 1$ (jednaka je ili 1 ili -1) ako $e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_{n-1}}$ (tj. grane sa indeksima $j_1, j_2, \dots, j_{n-1}$) obrazuju stablo. Ako ne čine stablo onda je $\det(S_i^J) = 0$.

Dokaz. Pretpostavimo da te grane obrazuju stablo. Kako matrica S u svakoj koloni ima 2 nenulta elementa, matrica S_i^j ima bar u jednoj koloni p tačno jedan nenulti element 1 ili -1 (čvor v_i je incidentan sa granom e_p; sa tom granom je incidentan i čvor v_k). Razvijanjem determinante $\det(S_i^J)$ po koloni p, dobijamo detetminantu matrice nižeg reda koja u bar jednoj koloni ima tačno jedan nenulti element 1 ili -1. Ponavljajući ovaj postupak dolazimo do determinante reda 1 (dimenzije 1×1) koja ima kolonu sa tačno jednim nenultim elementom 1 ili -1. Stoga je vrednost determinante $\det(S_i^J) = \pm 1$.

Ako grane $e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_{n-1}}$ ne obrazuju stablo onda one obrazuju jedan nepovezan graf H. Ako je v_i izolovan čvor u H onda matrica S_i^J ima u svakoj koloni 2 nenulta elementa (1 i -1). Prema Lemi 4.2.21 imamo da je matrica S_i^J singularna. Ako v_i nije izolovan čvor, onda se $\det(S_i^J)$ može razviti kao u slučaju stabla i time se problem svodi na determinantu nižeg reda. Medjutim nastavljajući postupak razvijanja ove determinante zaustaviće se kada izbacimo vrste koje odgovaraju čvorovima koji su i istoj komponenti povezanosti kao i čvor v_i. Preostala determinanta odgovaraće $(-1, 0, 1)$-matrici incidencije za preostale komponente grafa H, pa će opet zbir elemenata u svakoj koloni biti jednak 0. Ponovo prema Lemi 4.2.21 dobijamo da je ta matrica singularna, pa je i $\det(S_i^J) = 0$. □

Sada ćemo navesti još jedno tvrdjenje vezano za determinante — Bine-Košijevu teoremu (fra. Binet, Cauchy) bez dokaza (dokaz se može naći u [23], Teorema 7.5.4). Formula koja se javlja u ovoj teoremi se naziva Bine-Košijeva formula.

TEOREMA 4.2.23 **Bine-Košijeva teorema.** Neka je A proizvoljna matrica sa n vrsta i m kolona. Tada važi

$$\det(AA^T) = \sum_I \left(\det(A_I)\right)^2,$$

gde sumiranje ide po svim n-elementnim podskupovima skupa $\mathbb{N}_m$, tj. $I \in \binom{\mathbb{N}_m}{n}$ i gde A_I označava matricu koja se dobije kada matrici A izbrišemo sve kolone čiji se indeksi ne nalaze u I.

□

TEOREMA 4.2.24

Teorema o matricama i stablima. Broj razapinjućih stabala $t(G)$ grafa G jednak je bilo kom kofaktoru Laplasove matrice L.

Dokaz. Za Laplasovu matricu $L = D - A$ važi da joj je zbir elemenata u svakoj vrsti i svakoj koloni jednak 0, pa po Teoremi 4.2.20, svi kofaktori matrice L imaju istu vrednost. Neka je S_i matrica dobijena od matrice S izostavljanjem i-te vrste. Tada je na osnovu Leme 4.2.18 matrica $S_i {S_i}^T$ glavna kvadratna submatrica reda $n-1$ matrice L. Prema Bine-Košijevoj formuli dobijamo

$$\det(S_i {S_i}^T) = \sum \big(\det(S_i^J)\big)^2, \tag{4.2}$$

gde sumiranje ide po svim nizovima J za koje važi $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_{n-1} \leqslant n$. Svakom izboru niza J odgovara jedan podgraf H grafa G (indukovan istim skupom čvorova, $V(H) = V(G)$ i skupom grana $E(H) = \{e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_{n-1}}\}$). Prema Lemi 4.2.22 imamo da su sabirci na levoj strani jednakosti (4.2) jednaki 1 ako je H stablo i jednaki 0 ukoliko H nije stablo. Stoga dobijamo da je suma na desnoj strani jednaka broju razapinjućih stabala u grafu G. Izraz na levoj strani jednak je algebarskom kofaktoru L_{ii}, a kako smo pokazali da svi kofaktori matrice L imaju istu vrednost, to je teorema dokazana. □

ODREDJIVANJE BROJA RAZAPINJUĆIH STABALA

Navešćemo još nekoliko tvrdjenja koja mogu da se iskoriste da pronadjemo broj razapinjućih stabala.

Prvo od ovih tvrdjenja je dokazao Temperli (eng. Temperley) 1964. godine. U njemu se javlja, ranije uvedena, Laplasova matrica $L = D - A$ reda n (ona odgovara grafu G sa n čvorova), kao i matrica J koja ima sve elemente jednake 1 i isto je reda n. Primetimo da za potpun graf K_n imamo da je $A = J - I$, $D = (n-1)I$, pa je $L = nI - J$.

TEOREMA 4.2.25 $t(G) = \frac{1}{n^2} \det(J + L)$.

Dokaz. Kako je $J^2 = nJ$ i $JL = 0$ (važi i $LJ = 0$, što ćemo koristiti kasnije) imamo sledeću jednakost:

$$(J + L)(nI - J) = nJ - J^2 + nL - JL = nL.$$

Sada odredimo adjungovane matrice od leve i desne strane ove jednakosti, a zatim iskoristimo rezultate iz linearne algebre vezane za adjungovane matrice ($\operatorname{adj}(nQ) = n^{n-1} \operatorname{adj}(Q)$ i $M \cdot \operatorname{adj} M = M \cdot \det(M) M^{-1} = \det(M)$), kao i Kejlijevu teoremu (da je $\operatorname{adj}(L) = \operatorname{adj}(nI - J) = n^{n-2} J$), Teoremu o matricama i stablima (da je $\operatorname{adj} L = t(G)J$) i na kraju ponovo jednakosti sa početka ovog dokaza.

$$\begin{aligned}
\operatorname{adj}(J+L)\cdot\operatorname{adj}(nI-J) &= \operatorname{adj}(nQ)\\
\operatorname{adj}(J+L)\cdot n^{n-2}J &= n^{n-1}\operatorname{adj}(Q)\\
\operatorname{adj}(J+L)J &= nt(G)J\\
(J+L)\operatorname{adj}(J+L)J &= (J+L)nt(G)J\\
(J+L)\det(J+L)(J+L)^{-1}J &= nt(G)(J^2+LJ)\\
\det(J+L)J &= nt(G)J.
\end{aligned}$$

Iz prethodne matrične jednakosti dobijamo da je $\det(J+L) = n^2 t(G)$, odakle dobijamo traženu jednakost. □

Kao posledicu ove teoreme imamo sledeće tvrdjenje koje uključuje spektar grafa i karakteristični polinom grafa (dokaz ovde izostavljamo jer je posledica ovih spektralnih osobina; možete ga naći u [6], Posledica 6.5). Ono se koristi za dobijanje nekih jednakosti sa grafom grana.

TEOREMA 4.2.26 Neka je G k-regularan graf sa n čvorova koji ima spektar

$$\operatorname{Spec}\Gamma = \begin{pmatrix} k & \lambda_1 & \dots & \lambda_{s-1} \\ 1 & m(\lambda_1) & \dots & m(\lambda_{s-1}) \end{pmatrix}.$$

Tada je kompleksnost grafa G data formulom

$$t(G) = \frac{1}{n}\prod_{r=1}^{s-1}(k-\lambda)^{m_r} = \frac{1}{n}\psi'(G;k),$$

gde je ψ' izvod karakterističnog polinoma ψ.

□

DEFINICIJA 4.2.27 Označimo sa $G-e$ graf koji se dobija od grafa G izbacivanjem grane e, a sa $G\cdot e$ graf koji se dobija od grafa G uklanjenjem grane $e=\{u,v\}$ i identifikovanjem njenih krajeva u i v (tj. spajanjem grajeva grane e u jedan novi čvor koji je incidentan sa svim granama koje su bile incidentne sa u i v – ovim postupkom se dobija jedan multigraf, tj. graf u kome izmedju 2 čvora može biti više grana). Graf $G\cdot e$ se naziva *kontrakcija* grafa G u odnosu na granu e.

Kada smo uveli ove oznake spremni smo za sledeću teoremu, koja važi i za multigrafove.

TEOREMA 4.2.28

Za kompleksnost grafa imamo rekurentnu vezu $t(G) = t(G - e) + t(G \cdot e)$.

Dokaz. Svakom razapinjućem stablu u G koje ne sadrži granu e odgovara razapinjuće stablo u $G - e$. Svakom razapinjućem stablu u G koje sadrži granu e odgovara razapinjuće stablo u $G \cdot e$. □

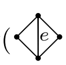
Pri prebrojavanju razapinjućih stabala, možemo izbaciti sve petlje, koje se jave nakon kontrakcija, zato što razapinjuće stablo ne sadrži nijednu petlju.

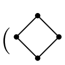
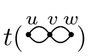
Odredjivanje broja razapinjućih stabala pomoću ovih rekurentnih jednačina ima početne uslove u grafovima bez ivica. Ako je to graf bez ivica sa 1 čvorom tada imamo 1 razapinjuće stablo. Ako je to graf bez ivica sa 2 ili više čvorova, tada nemamo razapinjuće stablo. Ako bi računar sledio ovu proceduru on bi svaku od grana i brisao i kontrakovao (u istom koraku), te bi bilo potrebno izračunavanje $2^{|E(G)|}$ članova. Ovaj postupak se može malo ubrzati brisanjem petlji i prepoznavanje specijalnih multigrafova G za koje nam je poznat $t(G)$ – tu nam može poslužiti i sledeća lema.

LEMA 4.2.29 Nepovezani multigraf ne sadrži nijedno razapinjuće stablo. Ako je G povezan multigraf koji ne sadržhi konture sem onih koje nastaju od grana koje povezuju 2 čvora, tada je $t(G)$ jednako proizvodu multipliciteta grana izmedju čvorova na rastojanju 1.

Dokaz. Prvi deo je direktna posledica Leme 4.2.3. Drugi deo sepokazuje indukcijom po broju grana u multigrafu G. □

PRIMER 4.2.30 Naći broj razapinjućih stabala u potpunom grafu K_4 bez jedne grane f, tj. kompleksnost $t(K_4 - f)$.

Rešenje. $t(K_4 - f) = t($

$) = t($$) + t($

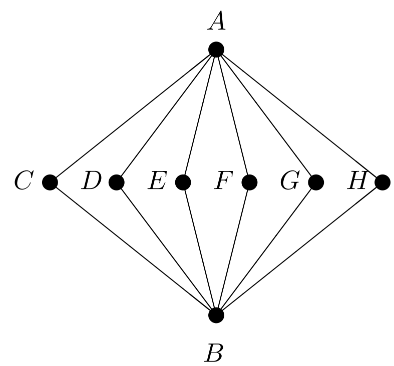
$) = 4 + 2 \cdot 2 = 8.$
Graf $G - e$ je kontura C_4 koja je unициklički graf, pa odstranjivanjem bilo koje njene grane (svaka njena grana pripada tom 1 ciklusu) dobijamo stablo, te ona ima 4 razapinjuća stabla. Graf $G \cdot e$ je multigraf sa po 2 grane izmedju čvorova u i v i izmedju v i w, pa je na osnovu prethodne leme $t(G \cdot e) = 2 \cdot 2 = 4$. ■

Da rezimiramo — broj razapinjućih stabala $t(G)$ u grafu G, možemo odrediti na jedan od sledeća 4 načina:

1. pomoću Teoreme o matricama i stablima;
2. pomoću Teoreme 4.2.25, tj. $t(G) = \det(J + L)/n^2$;
3. pomoću Teoreme 4.2.28, tj. rekurentnom vezom $t(G) = t(G - e) + t(G \cdot e)$;

4. kombinatorno - prebrojavanjem svih mogućih slučajeva za razapinjuća stabla (moguće za neke jednostavnije grafove).

PRIMER 4.2.31 Odrediti broj razapinjućih stabala u grafu sa slike.



Rešenje 1. U Teoremi o matricama i stablima odredićemo kofaktor $L_{n+2,n+2}$ (neka u L poslednje 2 vrste, odnosno kolone, odgovaraju čvorovima a i b). Tada je broj svih razapinjućih stabala jednak

$$t(K_{2,n}) = L_{n+2,n+2} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & n \end{vmatrix},$$

gde je determinanta reda $(n+1)\times(n+1)$, tj. $t(K_{2,n}) = D_{n+1}$. Ako determinantu ovog oblika (sa n na poslednjem mestu), reda $m \times m$ razvijemo po prvoj koloni, a zatim po prvoj vrsti dobijamo rekurentnu jednačinu

$$D_m = 2D_{m-1} - 2^{m-2}, \quad \text{uz početni uslov } D_2 = 2n - 1$$

i njeno rešenje je $D_m = 2^{m-2}(2n + 1 - m)$. Kada ovde uvrstimo $m = n + 1$ dobijamo da je broj razapinjućih stabala jednak

$$t(K_{2,n}) = D_{n+1} = 2^{n-1} \cdot n.$$

Za $n = 6$ svih razapinjućih stabala ima $2^5 \cdot 6 = 192$. ■

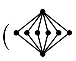
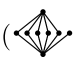
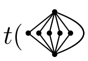
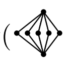
Rešenje 2. $t(K_{2,n}) = \dfrac{\det(J + L)}{(n+2)^2}$. Kada ovu determinantu razvijemo prvo po prvoj, a zatim po poslednjoj koloni dobijamo da je

$$t(K_{2,n}) = \frac{\big((n+1)^2 - 1\big) \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 3 \end{pmatrix}}{(n+2)^2}.$$

Ako prvoj vrsti gornje determinante (reda $n \times n$) dodamo ostale, zatim iz te vrste izvučemo faktor $(n+2)$ i onda tu vrstu (koja ima sve elemente 1) oduzmemo od ostalih dobijamo trougaonu determinantu sa $n-1$ elemenata 2 na dijagonali, pa je

$$t(K_{2,n}) = \frac{n(n+2)\cdot(n+2)2^{n-1}}{(n+2)^2} = n2^{n-1}.$$

■

Rešenje 3. $t(K_{2,n}) = t($$) = t($$) + t($$) = 2t($$) + t($$)$,
odnosno dobijamo rekurentnu jednačinu

$$t(K_{2,n}) = 2t(K_{2,n-1}) + 2^{n-1}, \quad \text{uz početni uslov } t(K_{2,1}) = 1$$

i njeno rešenje je

$$t(K_{2,n}) = n \cdot 2^{n-1}.$$

■

Rešenje 4. Kombinatornim rezonom dobijamo da čvorovi a i b mogu biti spojeni putem duzhine 2 u razapinjućem stablu preko bilo kog od čvorova $1, 2, \ldots, n$ i taj čvor možemo izabrati na $\binom{n}{1} = n$ načina. Za svaki od preostalih $n-1$ čvorova imamo 2 mogućnosti: ili je spojen sa čvorom a ili sa b. To nam daje $\binom{n}{1} \cdot 2^{n-1}$ načina da odaberemo razapinjuće stablo, odnosno ukupan broj razapinjućih stabala je jednak $\binom{n}{1} \cdot 2^{n-1} = n \cdot 2^{n-1}$. ■

VEKTORSKI PROSTOR KONTURA

DEFINICIJA 4.2.32 Označimo sa $\mathcal{K}_G$ skup svih ciklusa u grafu G (slovo $\mathcal{K}$ je jer cikluse drugačije zovemo konturama), svih mogućih dužina.

Preciznije to je skup svih podgrafova od G koji su konture. Ovaj skup ima prilično puno elemenata, što ćemo videti na sledećem primeru.

PRIMER 4.2.33 Odrediti broj elemenata sledećih skupova $\mathcal{K}_{K_n}$, $\mathcal{K}_{K_{n,n}}$ i $\mathcal{K}_T$, gde je T šuma.

Rešenje. Za potpun graf K_n konture mogu imati sledeće dužine: $3, 4, \ldots, n$. Iz K_n možemo k čvorova odabrati na $\binom{n}{k}$ načina, a od tih k čvorova možemo konturu odrediti na $\frac{(k-1)!}{2}$ načina, jer $(k-1)!$ odredjuje broj permutacija na krugu, a delimo sa 2 jer jedan ciklus odredjuje 2 permutacije na krugu (u zavisnosti u kom smeru se krećemo). Stoga imamo formulu

$$|\mathcal{K}_{K_n}| = \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{(k-1)!}{2}.$$

Na sličan način, potpun bipartitni graf $K_{n,m}$, gde je $n \leqslant m$ ima samo konture parnih dužina: $4, 6, \ldots, 2n$, pri čemu u svakoj toj konturi čvorovi naizmenično idu iz jedne, pa iz druge particije. Stoga dobijamo

$$|\mathcal{K}_{K_{n,n}}| = \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{k} \cdot \frac{k!(k-1)!}{2}.$$

Kako šuma (a i stablo, koje je povezana šuma) ne sadrži nijednu konturu to dobijamo da je $\mathcal{K}_T = 0$. ■

Na prvi pogled nam izgleda da skup $\mathcal{K}_G$ nema neku logičnu strukturu. Da bismo to prebrodili uvešćemo pogodnu generalizaciju pojma ciklusa, tzv. parni skup grana, koji ima strukturu vektorskog prostora. I ova ideja se prva pojavila u istraživanju električnih kola.

DEFINICIJA 4.2.34 Neka je $G = (V, E)$ dati graf. Podskup $E' \subseteq E$ zove se *parni skup grana* ako su stepeni svih čvorova podgrafa $G' = (V, E')$ parni.

Na primer, prazan skup i skup grana proizvoljnog ciklusa su parni skupovi grana. Još jednu vezu ciklusa i parnih skupova grana nam daje i sledeća lema.

LEMA 4.2.35 Podskup E' je parni skup grana ako i samo ako postoje medjusobno disjunktni ciklusi C_1, C_2, $\ldots$, C_t tako da je $E' = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_t$.

Dokaz. Kako stablo (a samim tim i šuma) sadrži bar 2 čvora stepena 1, a graf G' ima sve stepene čvorova parne, to G' nije šuma. Stoga za neprazan parni skup grana E' graf $G' = (V, E')$ sadrži neki ciklus (koga formiraju grane C_1). Skup $E' \setminus C_1$ je takodje parni skup grana, ali sa manjim brojem grana. Tvrdjenje dobijamo principom matematičke indukcije po broju grana u E'. □

DEFINICIJA 4.2.36 Neka je $G = (V, E)$ dati graf sa skupom grana $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Svakom podskupu $A \subseteq E$ pridružujemo karakteristični vektor $\vec{x}_A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ tako da je

$$a_i = \begin{cases} 1, & e_i \in A \\ 0, & e_i \notin A \end{cases}.$$

Neka je $\mathcal{E}$ skup karakterističnih vektora parnih skupova grana grafa G.

U nastavku ćemo posmatrati operacije nad vektorima (sabiranje vektora i množenje skalarom) u dvoelementnim poljem GF_2. To polje se sastoji od brojeva 0 i 1, sa aritmetičkim operacijama po modulu 2 (umesto da pišemo $+_2$ i $\cdot_2$ pisaćemo obično $+$ i $\cdot$, npr. $1 + 1 = 0$). Oznaku GF koristimo jer je ona skraćenica od engleskog Galois Field (srp. polje Galoa) — to je uobičajena oznaka za konačna polja.

LEMA 4.2.37 Neka su $A, B \subseteq E$ parni skupovi grana. Tada za njihove karakteristične vektore važi jednakost

$$\vec{x}_A + \vec{x}_B = \vec{x}_C,$$

gde je skup $C = A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ simetrična razlika skupova A i B.

Skup C je takodje paran skup grana.

Dokaz. Proverimo sva 4 slučaja za svaku granu e_i.
Ako je $e_i \in A \setminus B$ tada imamo i da je $e_i \in C$ i $c_i = a_i + b_i = 1 + 0 = 1$.
Ako je $e_i \in B \setminus A$ tada imamo i da je $e_i \in C$ i $c_i = a_i + b_i = 0 + 1 = 1$.
Ako je $e_i \in A \cap B$ tada imamo i da je $e_i \notin C$ i $c_i = a_i + b_i = 1 + 1 = 0$.
Ako je $e_i \in E \setminus (A \cup B)$ tada imamo i da je $e_i \notin C$ i $c_i = a_i + b_i = 0 + 0 = 0$.
Time smo pokazali da je $\vec{x}_A + \vec{x}_B = \vec{x}_C$.

Ostaje još da pokažemo da je skup C paran skup grana. Uzmimo proizvoljan čvor $v \in V$. Označimo sa d_A broj ivica susednih čvoru v koje su iz skupa A, sa d_B broj ivica susednih čvoru v koje su iz skupa B i sa d broj ivica susednih čvoru v koje pripadaju i skupu A i skupu B. Kako su A i B parni skupovi grana, to su d_A i d_B parni brojevi. Broj grana susednih sa čvorom v koji pripadaju simetričnoj razlici $C = A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ je jednak $d_a + d_b - d$, pa je stepen čvora v i u C paran. Kako je v proizvoljno izabran čvor, to je i skup C paran skup grana. $\square$

TEOREMA 4.2.38 Skup $\mathcal{E}$ je vektorski prostor nad dvoelementnim poljem GF_2.

Dokaz. Da bismo pokazali da je $\mathcal{E}$ vektorski prostor, potrebno je da pokažemo da je zbir 2 vektora $\vec{x}_A, \vec{x}_B \in \mathcal{E}$ takodje vektor iz $\mathcal{E}$ i da je proizvod vektora $\vec{x}_A$ iz $\mathcal{E}$ skalarom k iz $GF(2)$ takodje vektor iz $\mathcal{E}$. Na osnovu prethodne leme imamo da $\vec{x}_A, \vec{x}_B \in \mathcal{E} \Rightarrow \vec{x}_A + \vec{x}_B \in \mathcal{E}$. Skalar $k \in GF(2)$ može biti $k = 0$ i tad je $0 \cdot \vec{x}_A = (0, 0, \ldots, 0) = \vec{x}_\emptyset \in \mathcal{E}$ ili je $k = 1$ i tad je $1 \cdot \vec{x}_A = \vec{x}_A \in \mathcal{E}$. $\square$

DEFINICIJA 4.2.39 Neka je $T = (V, E')$ proizvoljna razapinjuća šuma grafa G. Za svaku granu $e \in E \setminus E'$, neka C_e označava (jedinstveni) ciklus sadržan u grafu $(V, E' \cup \{e\})$. Ciklus C_e zovu se *fundamentalni* (ili *elementarni*) ciklusi za granu e u odnosu na datu razapinjuću šumu T.

TEOREMA 4.2.40 Karakteristični vektori svih fundamentalnih ciklusa C_e, $e \in E \setminus E'$, čine bazu vektorskog prostora $\mathcal{E}$, pri čemu za paran skup grana A važi

$$\vec{x}_A = \sum_{e \in A \setminus E'} \vec{x}_{C_e}.$$

Dimenzija vektorskog prostora $\mathcal{E}$ jednaka je $|E| - |V| + k$, gde je k broj komponenti povezanosti grafa G.

Dokaz. Neka je $T = (V, E')$ razapinjuća šuma grafa G. Tada je $|E'| = |V| - k$, gde je k broj komponenti povezanosti grafa G. Potrebno je pokazati da karakteristični vektori svih fundamentalnih ciklusa čine bazu vektorskog prostora $\mathcal{E}$.

Prvo pokažimo da su fundamentalni ciklusi linearno nezavisni. Posmatrajmo neku granu $e_i \in E \setminus E'$. Karakteristični vektor $\vec{x}_{C_{e_i}}$ fundamentalnog ciklusa C_{e_i} je jedini medju karakterističnim vektorima svih fundamentalnih ciklusa koji ima 1 na poziciji i. Stoga se vektor $\vec{x}_{C_{e_i}}$ ne može predstaviti kao linearna kombinacija ostalih karakterističnih vektora fundamentalnih ciklusa. Kako je grana e_i proizvoljno odabrana, to za svaki karakteristični vektor fundamentalnog ciklusa važi da se ne može predstaviti kao linearna kombinacija ostalih karakterističnih vektora fundamentalnih ciklusa, te su stoga svi ti vektori linearno nezavisni.

Još je potrebno da pokažemo da fundamentalni ciklusi generišu ceo prostor $\mathcal{E}$. Neka je dat parni skup grana A i zadajmo skup B pomoću njegovog karakterističnog vektora koji je dat sa

$$\vec{x}_B = \sum_{e \in A \setminus E'} \vec{x}_{C_e}.$$

Skup B je takodje parni skup grana jer po Lemi 4.2.37 imamo da zbir 2 vektora koji odgovaraju parnom skupu grana odgovara parnom skupu grana, a fundamentalni ciklusi C_e su parni skupovi grana. U skupu B se nalaze samo grane koje pripadaju neparnom broju fundamentalnih ciklusa (u odnosu na razapinjuću šumu T). Zato B sadrži skup $A \setminus E'$ (jer svaka njegova grana leži na jedinstvenom fundamentalnom ciklusu, a i učestvuje u sumi pomoću koje je zadat $\vec{x}_B$). Označimo $C = A \triangle B$. Prema Lemi 4.2.37 C je parni skup grana, a imamo i da je $C \subseteq E'$ (već smo videli da je $(A \setminus E') \subseteq B$, a zbog definicije B, tj. $\vec{x}_B$ imamo da je i $(B \setminus E') \subseteq A$). Kako je E' skup grana šume T, to E' ne sadrži nijedan ciklus, pa parni skup grana C za koji važi $C \subseteq E'$ mora da zadovoljava $C = \emptyset$. To povlači da je $A = B$, pa smo vektor $\vec{x}_A$ predstavili kao linearnu kombinaciju nekih karakterističnih vektora koji odgovaraju fundamentalnim ciklusima, tj.

$$\vec{x}_A = \sum_{e \in A \setminus E'} \vec{x}_{C_e}.$$

Time smo pokazali da karakteristični vektori svih fundamentalnih ciklusa čine bazu vektorskog prostora $\mathcal{E}$ i kako njih ima $|E| - |V| + k$, tolika je i dimenzija vektorskog prostora $\mathcal{E}$. $\square$

Direktna posledica prethodne teoreme je sledeće tvrdjenje.

TEOREMA 4.2.41 Broj parnih skupova grana u grafu $G = (V, E)$ sa k komponenti povezanosti jednak je

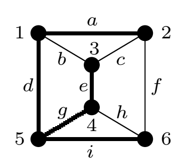
$$|\mathcal{E}| = 2^{|E| - |V| + k}.$$

Dokaz. Kako se svaki karakteristični vektor koji odgovara nekom parnom skupu grana može na jedinstven način predstaviti kao zbir nekih vektora iz baze (i kako svaki zbir vektora iz baze odredjuje jedan paran skup grana), to kada odredjujemo proizvoljan paran skup grana za svaki vektor iz baze $\mathcal{E}$ imamo 2 mogućnosti: da je uključen u zbir ili da nije. Kako baza $\mathcal{E}$ ima $|E|-|V|+k$ elemenata dobijamo da parnih skupova grana u grafu imamo $|\mathcal{E}| = 2^{|E|-|V|+k}$.
□

DEFINICIJA 4.2.42 Dimenzija vektorskog prostora $\mathcal{E}$ se zove *ciklomatički broj grafa* G i kao što smo videli jednaka je $|E|-|V|+k$, gde je k broj komponenti povezanosti grafa G.

Ciklomatički broj se nazivao i Betijev broj (eng. Betti). Ovaj naziv se javljao u starijim knjigama i vodi poreklo iz topologije i vezan je za simplicijalne komplekse (za više informacija pogledati [17], glavu 4. Stabla).

PRIMER 4.2.43 Odredimo sve elementarne cikluse u grafu $G = (V, E)$ (predstavljen na slici), gde je $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ sa razapinjućim stablom (na slici je iscrtano debljim linijama) $T = (V, E')$, gde je $E' = \{a, d, e, g, i\}$.



Rešenje. Kako je za graf G: $|V| = 6$ i $|E| = 9$ sa $k = 1$ dobijamo da njegov prostor kontura ima dimenziju $9-6+1 = 4$ (bez obzira na stablo T). Stablu T koje je na slici nacrtano debljim linijama odgovara baza prostora kontura koji se se sastoji od karkterističnih vektora sledećih elementarnih ciklusa:

$$\begin{array}{ll}
C_b = \{b, d, g, e\} & \vec{x}_{C_b} = (0,1,0,1,1,0,1,0,0) \\
C_c = \{c, a, d, g, e\} & \vec{x}_{C_c} = (1,0,1,1,1,0,1,0,0) \\
C_f = \{f, a, d, i\} & \vec{x}_{C_f} = (1,0,0,1,0,1,0,0,1) \\
C_h = \{h, g, i\} & \vec{x}_{C_h} = (0,0,0,0,0,0,1,1,1)
\end{array}$$

Svaku od ostalih kontura (tj. njihove karakteristične vektore) možemo predstaviti preko vektora fundamentalnih ciklusa, npr. za:

$$C = \{b, d, g, h, f, c\} \qquad \vec{x}_C = (0,1,1,1,0,1,1,1,0)$$

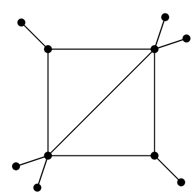
imamo predstavljanje kao linearnu kombinaciju $\vec{x}_C = \vec{x}_{C_b} + \vec{x}_{C_c} + \vec{x}_{C_f} + \vec{x}_{C_h}$.
■

ZADACI

4.2.1 Odrediti broj svih izomera sledećih alkana: C_5H_{12}, C_6H_{14} i C_7H_{16}. Nacrtati odgovarajuća stabla. Da li su to sva neizomorfna stabla sa 5, 6, odnosno 7 čvorova?

4.2.2 Dekodirati sledeće Priferove nizove:
a) $s = (1, 8, 1, 5, 2, 5)$;
b) $s = (7, 4, 4, 1, 7, 1)$;
c) $s = (1, 4, 1, 6, 6, 4)$;
d) $s = (1, 4, 3, 3, 4, 4, 4)$;
e) $s = (9, 8, 10, 10, 1, 8, 9, 1)$;
f) $s = (1, 4, 2, 2, 4, 3, 3, 3, 4, 4)$.
Zatim primeniti Priferovo kodiranje na dobijena stabla.

4.2.3 Odrediti broj neizomorfnih, kao i ukupan broj razapinjućih stabala grafa sa slike.



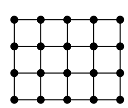
4.2.4 Dokazati da je broj razapinjućih stabala kompletnog grafa sa n čvorova iz koga je obrisana jedna grana jednak $(n-2)n^{n-3}$.

4.2.5 Dokazati da za potpuni bipartitni graf $K_{m,n}$ važi $t(K_{m,n}) = m^{n-1}n^{m-1}$.

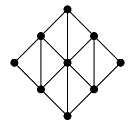
4.2.6 Nkea je W_n točak sa $n+1$-im čvorom. Označimo sa $w_n = t(W_n)$. Dokazati da važi rekurzivna relacija $w_n = 4w_{n-1} - 4w_{n-2} + 1$, uz početne uslove $w_0 = 0$, $w_1 = 1$. Odredite w_n.

4.2.7 Naći broj stabala sa skupom čvorova $\{v_1, \ldots, v_n\}$ u kojima svaki čvor ima stepen 1 ili 3.

4.2.8 Odrediti ciklomatički broj grafa $m \times n$ celobrojne rešetke. Na slici je data 4×5 celobrojna rešetka.



4.2.9 Da li graf na slici može da se predstavi kao unija granski-disjunktnih razapinjućih stabala? A kao unija izomorfnih granski-disjunktnih razapinjućih stabala?



4.2.10 Čvorovi grafa G su isključivo stepena 3 ili 4. Koliko ima čvorova stepena 3, ako G može da se razloži na dva razapinjuća stabla?

4.3 BOJENJE GRAFOVA

U teoriji grafova često se javlja potreba da čvorovi grafa i/ili grane grafa podele na disjunktne podskupove u kojima se nalaze samo oni elementi koji imaju nešto zajedničko. Dakle, vrše se particija skupa čvorova i/ili grana. Imajući u vidu geometrijsku predstavu grafa, uobičajeno je da se pomenutim elementima koji su u istom podskupu (istoj ćeliji) dodeli ista boja, i to različta od boja preostalih elemenata. Dakle, ako je X neki skup koji se boji (čvorovi i/ili grane grafa) a $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ neki skup boja, tada se preslikavanje

$$f : X \to B$$

može poistovetiti sa bojenjem skupa X. Kada su u pitanju grafovi, tada imamo tri varijante bojenja:

(i) bojenje samo čvorova grafa;

(ii) bojenje samo grana grana;

(iii) bojenje i čvorova i grana grafa.

Definisaćemo sada *pravilno bojenje* grafa $G = (V, E)$ u sve tri varijante. Oznaka $\sim$ ima značenje susednosti ili incidentnosti odgovarajućih elemenata.

DEFINICIJA 4.3.1 U slučaju (i), bojenje f je pravilno ako važi

$$(\forall v_1, v_2 \in V)(v_1 \sim v_2 \Rightarrow f(v_1) \neq f(v_2)), \tag{4.3}$$

tj. da su svi parovi susednih čvorovi obojeni različitim bojama.

Slično se definiše pravilno bojenje grana grafa. Za to je potrebno imati u vidu samo činjenicu da su dve grane grafa (multigrafa) susedne ako imaju tačno jedan (bar jedan) zajednički čvor.

DEFINICIJA 4.3.2 U slučaju (ii), bojenje f je pravilno ako važi

$$(\forall e_1, e_2 \in E)(e_1 \sim e_2 \Rightarrow f(e_1) \neq f(e_2)), \tag{4.4}$$

tj. ako su parovi susednih grana obojeni različitim bojama.

Posmatrajmo najzad i varijantu (iii).

DEFINICIJA 4.3.3 U slučaju (iii), bojenje f je pravilno ako pored uslova (1) i (2) važi i

(4.5) $$(\forall v \in V)(\forall e \in E)(v \sim e \Rightarrow f(v) \neq f(e)),$$

tj. krajnji čvor svake grane mora imati boju koja se razlikuje od boje te grane.

Pokazaćemo sada da je samo prva varijanta bojenja od opšteg interesa. U tom cilju, definisaćemo dva nova koncepta, *graf grana*, i *totalni graf grafa*.

DEFINICIJA 4.3.4 Za dati graf $G = (V, E)$, njegov graf grana $L(G) = (V_1, E_1)$ je graf čiji su čvorovi iz V_1 u obostrano jednoznačnoj korespodenciji sa granama iz E; dva čvora iz V_1 su susedna ako i samo ako su odgovarajuće grane iz E susedne – videti Sl. 1(a).

DEFINICIJA 4.3.5 Za dati graf $G = (V, E)$, njegov totalni graf $T(G) = (V_2, E_2)$ je graf čiji su čvorovi iz V_2 u obostrano jednoznačnoj korespodenciji sa čvorovima i granama iz $V \cup E$; dva čvora iz V_2 su susedna ako i samo ako su odgovarajući elementi iz $V \cup E$ susedni (ako su iz istog skupa), ili incidentni (u protivnom) – videti Sl. 1(b).

Sada se bez mnogo napora može videti da se problem pravilnog bojenja grana (čvorova i grana) grafa G svodi na pravilno bojenje čvorova njegovog grafa grana (odnosno njegovog totalnog grafa). Stoga ćemo se u nastavku ograničiti samo na pravilno bojenje čvorova nekog grafa.

HROMATSKI BROJ GRAFA

Neka je n broj čvorova grafa. Ukoliko je $k \geq n$ tada se problem pravilnog bojenja grafa može jednostavno rešiti. Svakom čvoru ćemo dodeliti boju različitu od boja ostalih čvorova. Primetimo još i da je kod kompletnih grafova takvo bojenje i jedini izbor. Teži problem nastupa ako je graf nekompletan, i ako je $k < n$. Od posebnog interesa su ona bojenja kod kojih je broj upotrebljenih boja što manji (u krajnjem slučaju minimalan).

DEFINICIJA 4.3.6 Za graf se kaže da je *k–obojiv* ako se može pravilno obojiti sa (ili manje) boja. Hromatski broj grafa G je minimalna vrednost za k za koju je graf k–obojiv.

Hromatski broj grafa $G = (V, E)$ se označava sa $\chi(G)$. Formalno imamo

$$\chi(G) = \min_f [\ k \mid (\exists f) f : V \to \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}\ ],$$

gde je f pravilno bojenje. Na sličan način se dobija i *hromatski indeks* grafa G, u oznaci $\chi'(G)$. S obzirom na vezu izmedju pravilnog bojenja čvorova i grana grafa $L(G)$, imamo i da je $\chi'(G) = \chi(L(G)$. Analogno se može postupiti za slučaj bojenja i čvorova i grana grafa (posredstvom totalnog grafa $T(G)$).

Problem (pravilnog)bojenja grafova sa što manje boja predstavlja, sa algoritamskog stanovišta jedan od težih problema teorije grafova. Za sada nisu poznati dovoljno dobri (tj. polinomijalni) algoritmi za rešavanje tih problema.

Daćemo stoga neke ocene hromatskog broja. U sledećoj teoremi, pretpostavićemo da je posmatranu graf povezan. Time se ne gubi u opštosti, jer je hromatski broj grafa je ujedno i hromatski broj one njegovih komponenata koja ima najveći hromatski broj.

TEOREMA 4.3.7 (**Brooks**) Ako je G povezan graf, tada je $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, gde je $\Delta(G)$ najveći stepen čvora u grafu G. Jednakost važi ako i samo ako je graf G ili kompletan graf ili kontura neparne dužine.

Dokaz. Neka je G povezan graf koji nije ni kontura, niti kompletan graf. Pretpostavimo da je hromatski broj grafa G jednak k. Jasno, $k \geq 2$. Neka je H minimalan k–hromatski podgraf grafa G. Tada je H blok i važi $\Delta(H) \leq \Delta(G)$.

Pretpostavimo najpre da je H kompletan graf K_n za neko n, ili da je H neparna kontura C_n za neko neparno n. Tada je $H \neq G$. Pošto je G povezan, to je $\Delta(G) > \Delta(H)$

Ako je $H = K_n$ tada je $\Delta(H) = n - 1$ a $\Delta(G) \geq n$. Stoga je $\chi(G) = n \leq \Delta(G)$. Ako je $H = C_n$ tada je $\chi(G) = k = 3 \leq \Delta(G)$. Dakle, u oba slučaja je $\chi(G) \leq \Delta(G)$, te nadalje možemo uzeti da je H minimalan k–hromatski graf koji nije ni kompletan graf ni neparna kontura. Ujedno, ovo implicira da je $k \geq 4$.

Pretpostavimo da H ima n čvorova. Kako je $\chi(G) = k \geq 4$ i kako G nije kompletan graf, to je $n \geq 5$. Posmatraćemo sada dva slučaja zavisno od povezanosti grafa G.

Slučaj 1: H je 3–povezan graf. Neka su x i y dva čvora grafa H na rastojanju dva, i neka je x, z, y put u H. Graf $H - x - y$ je povezan. Neka su $x_1 = w, x_2, \ldots, x_{n-2}$ čvorovi grafa $H - x - y$, uredjeni tako da je svaki čvor x_i ($2 \leq x_i \leq n - 2$) susedan sa bar jednim čvorom koji mu prethodi u listi. Stavljajući da je $x_{n-1} = x$ a $x_n = y$, dobijamo niz $x_1 = z, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1} = x, x_n = y$.

Dodelimo boju 1 čvorovima x_{n-1} i x_n. Dodelimo zatim redom čvorovima $x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots, x_2$ jednu od boja $1, 2, \ldots, \Delta(H)$ koja nije korišćena u bojenju onih suseda tekućeg ŷora koji mu prethode u nizu. Takvo bojenje tekučeg čvora x_i ($2 \leq x_i \leq n - 2$) je uvek mogućno pošto je svaki čvor x_i susedan sa najviše $\Delta(H) - 1$ prethodno obojenih čvorova iz niza. Kako je $x_1 = z$ susedan sa

dvačvora obojena bojom 1 (naime x_{n-1} i x_n), stoga postoji boja koja mu se može dodeliti. Dakle imamo $\chi(G) = \chi(H) \leq \Delta(H) \leq \Delta(G)$.
Slučaj 2: H je 2–povezan. Primetimo najpre da H ne može da sadrži čvorove stepena samo 2 ili $n-1$. Naime, svi čvorovu u H ne mogu biti stepena 2 jer je $\chi(H) \geq 4$. Pošto H nije kompletan ne mogi svi njegovi čvorovi biti stepena $n-1$. Ako bi H sadržo samo čvorove stepena 2 i $n-1$ tada bi imali da je $H = K_{1,1,n-2}$. Ali tada je $\chi(H) = 3$, što nije dozvoljeno.

Neka je $u \in V(H)$ čvor za koji je $2 < deg_H(u) < n-1$. Ako je $H-u$ 2–povezan tada možemo uzeti da je v čvor rastojanju dva od u. Tada možemo uzeti da je $x = u$ a $y = v$, čime se problem svodi na Slučaj 1.

Ako je $H-u$ 1–povezan, posmatrajmo njegove krajnje blokove B_1 i B_2 sa artikulacionim čvorovima w_1 i w_2, respektivno. Kako je H 2–povezan, postoje čvorovi u_1 u $B_1 - w_1$ i u_2 u $B_2 - w_2$ susedni sa u. Sada možemo uzeti da je $x = u_1$ i $y = u_2$, čime se problem svodi na Slučaj 1.

Ovim je dokaz kompletiran. □

Bipartititni graf je 2–obojiv graf.

TEOREMA 4.3.8 (**König**) Graf je bihromatski ako i samo ako ne sadrži konturu sa neparnim brojem čvorova, tj. neparnu konturu kao podgraf.

Dokaz. Primetimo najpre da je hromatski broj neparne konture jednak 3. Samim tim graf čiji je hromatski broj jednak najviše 2, ne može imati neparnih kontura.

Pretpostavimo sada da graf ne sadrži nijednu neparnu konturu i dokažimo da je graf bihromatski. Izvršićemo efektivno bojenje grafa sa dve boje. Obojimo najpre proizvoljan čvor, na primer belom bojom. Sve njegove susedne čvorove obojimo crnom, a susedne čvorove od tih čvorova opet belom bojom (ukoliko već nisu obojeni belom bojom) itd. Kada završimo sa jednom komponentom povezanosti predjimo na drugu. Ako na ovaj način obojimo sve čvorove grafa, graf je bihromatski. U suprotnom slučaju naićićemo u procesu bojenja na čvor koji treba obojiti, na primer, crnom, pri čemu je jedan od njemu susednih čvorova već obojen crnom bojom. Medjutim, tada od početnog čvora vode u ovaj čvor dva različita puta, od kojih jedan parne dužine, a drugi neparne. Ako objedinimo ova dva puta, dobijamo kružni put neparne dužine. Ovaj kružni put obrazuje neparnu konturu, što je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom.

Ovim je dokaz teoreme završen. □

Bihromatski grafovi, po pravilu si bipartitni grafovi. To znači da se čvorovi tih grafova mogu podeliti u dve klase (ovde su to čvorovi različtih boja) tako da su susedni samo čvorovi različitih boja. Uobičajeno je da se ovi grafovi prestavljaju u vidu $G = (U, V, E)$, gde su U i V čvorovi iz različtih klasa (odnosno boja).

4.4 TEŽINSKI GRAFOVI

Neka je $G = (V, E)$ (neorijentisani) graf čijim su granama pridruženi realni brojevi, takozvane težine grana. Drugim rečima, pored grafa G, data je i *težinska funkcija*

$$w : E \to \mathbb{R}.$$

U raznim primenama, težine grana označavaju njihovu dužinu, cenu, propusnu moć itd. Pri tome je važno istaći da u prvom slučaju dužine ne moraju zadovoljavati aksiome metrike.

Pod gornjim pretpostavkama, uredjen par $M = (G, w)$ predstavlja *težinski graf*, ili kraće *mrežu*. U većini razmatranja težina grafa je jednaka zbiru težina njegovih grana, tj. važi

$$w(G) = \sum_{e \in E} w(e).$$

Na sličan način se težine mogu dodeliti i čvorovima, odnosno i samom samom grafu.

U ovom poglavlju, razmortićemo neke tipične optimizacione probleme nad težinskim grafovima.

STABLA MINIMALNE TEŽINE

Neka je $M = (G, w)$ težinski graf, pri čemu je G povezan. Sledeći problem se često javlja u praksi:

Izdvojiti iz grafa G podgraf H (težine grana podgrafa su iste kao težine grana grafa) sa nekim unapred preciziranim svojstvima. Na primer, može se uzeti da je podgraf H razapinjući podgraf grafa G i uz to, povezan i bez kontura. Tada je podgraf H stablo (ili drvo).

Neka je težina nekog težinskog grafa jednaka zbiru težina njegovih grana. Optimizacioni zadatak se dobija ako postavimo zahtev da se nadje ne bilo koje razapinjuće stablo već ono čija je težina najmanja. Ovaj problem je u literaturi poznat kao *problem minimalnog razapinjućeg stabla* (na engleskom: *minimum spanning tree problem*, ili kraće MST problem).

NAPOMENA Ukoliko je graf G kompletan (sa n čvorova), tada je broj svih razapinjućih stabala jednak n^{n-2} (videti ???). Dakle prostor pretrage je enormno velik. Medjutim, uprkos tome postoje veoma efikasni polinomialni algoritmi za rešavanje MST problema. U nastavku ćemo uopisati dva takva algoritma.

Problem minimalnog razapinjićeg stabla se u praksi javlja u mnogim situacijama. Tipičan slučaj odnosi se na problem sinteze što ekonomičnije telekomunikacione mreže. U tom cilju potrebno je naći konfiguraciju telekomunikacione mreže koja obezbedjuje komunikaciju izmedju svaka dva učesnika, i to uz minimalnu cenu koštanja (cene direktnih veza izmedju dva učesnika u komunikaciji su unapred precizirane). Učesnici u komunikaciji koji nisu direktno povezani, mogu komunicirati posredno. Jasno je da ta mreža u osnovi mora biti povezan graf, a da bi bila što "jeftinija", odgovarajući graf mora da bude bez suvišnih grana, dakle bez kontura. Prema Definiciji ????, sledi da je taj graf stablo. Pošto težina tog stabla mora biti što manja, to se posmatrani problem svodi na MST problem.

U nastavku ćemo detaljno opisati dva klasična algoritma za rešavanje MST problema.

Prvi algoritam (*Kruskal-ov algoritam*) je koncepcijski veoma jednostavan i predstavlja u literaturi jedan od glavnih modela za prikazivanje proždrvljih algoritama (na engleskom: *greedy algorithms*).

Osnovna ideja algoritma je sadržana u sledećoj strategiji *najpre najmanja grana* (na engleskom: *smallest edge first*). Polazeći od delimičnog grafa koji je prazan (bez grana), u svakom koraku se razmatra (dodaje ili odbacije) po jedna grana (jednom razmatrane grane se više ne razmatraju). Izbor grane za razmatranje vrši se u skladu sa gornjom strategijom, tj. bira se najmanja (ili što će reći najlakša) od svih nerazmatranih grana. Ako izabrana grana, posle dodavanja delimičnom grafu, ne formira sa nekim od ranije uzetih grana konturu, tada se ona zadržava u njemu, dok se u protivnom odbacuje. Postupak se završava ili po razmatranju svih grana polaznog grafa, ili eventualno i ranije ako se potreban broj grana dodeli delimičnom grafu. Na primer, ako je polazni graf povezan i ako ima n čvorova, tada je broj grana rezultujućeg grafa unapred poznat i jednak $n-1$ (u pitanju je razapinjuće stablo).

Za nepovezane grafove, algoritam daje razapinjuću šumu i može se ranije prekinuti, ako se zna broj komponenata polaznog grafa. Ako se rad algoritma prekine posle m' uključenih grana, dobijena šuma je najkraća izmedju svih šuma sa m' grana.

Formalan opis algoritma, uz neke dodatne elemente neophodne za implementaciju i procenu kompleksnosti, dat je u nastavku.

Algoritam 1 (Kruskal-ov algoritam za nalaženje minimalnog razapinjućeg stabla ili šume).

Korak 1. Sortirati grane ulaznog grafa u neopadajući poredak (po težinama) i sve ih markirati kao nerazmatrane; za izlazni graf uzeti graf (razapinjući podgraf ulaznog grafa) bez grana.

Korak 2. Izabrati iz skupa nerazmatranih grana onu koja je najlakša, markirati je kao razmatranu i priključiti je (bar privremeno) izlaznom grafu. Ako ta grana ne obrazuje u njemu konturu zadržati je, odnosno, u protivnom, odbaciti je.

Korak 3. Ako je skup nerazmatranih grana prazan, ili ako su ispunjeni neki drugi uslovi za prekid (videti gornji tekst), tada prekinuti rad; u protivnom, preći na Korak 2.

Mada je ovaj algoritam, intuitivno gledano, skoro očigledno korektan, ipak ćemo dokazati njegovu ispravnost. Radi pojednostavljenja dokaza, uzećemo da je ulazni graf $G = (V, E)$ povezan. Dalje, pretpostavićemo da je $T = (V, F)$ izlazni graf, a da je $T' = (X, F')$ minimalno razapinjuće stablo dobijeno nekim drugim postupkom.

TEOREMA 4.4.1 Pod gornjim pretpostavkama, Kruskal-ov algoritam uvek odredjuje minimalno razapinjuće stablo.

Dokaz. Pokazaćemo najpre da je izlazni graf T stablo. Na osnovu konstrukcije, T je bez kontura. Pokažimo i da je povezan. Pretpostavimo suprotno, tj. da ima bar dve komponente. Kako je ulazni graf G povezan, to u njemu sigurno postoji grana koja spaja dva čvora iz dve različite komponente izlaznog grafa T. Kako je ta grana obavezno bila razmatrana (pretpostavljamo da nismo ranije prekidali postupak) ona u delimičnom grafu nije mogla biti odbačena jer nije obrazovala u njemu (a ni u izlaznom grafu) konturu. Ovo je u kontradikciji sa Korakom 2 algoritma, tako da je T zaista stablo.

Dokazaćemo sada da je $w(T') \geq w(T)$ (w označena težina odgovarajućeg grafa), a samim tim da je $w(T') = w(T)$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $w(T') < w(T)$. Neka su $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_h\}$, odnosno $\{e_1, e_2, \ldots, e_h\}$ ($h = |F'| = |F|$) grane odgovarajućih stabala poredjane po težinama u neopadajući poredak; drugim rečim neka je $w(e'_1) \leq w(e'_2) \leq \cdots \leq w(e'_h)$, $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \cdots \leq w(e_h)$. Tada za neko k ($1 \leq k \leq h$) mora važiti $w(e'_k) < w(e_k)$. Uočimo tada skupove grana $E_{k-1} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}\}$ i $E'_k = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_k\}$. Ako bi za neko j ($1 \leq j \leq k$) važilo da grane $E_{k-1} \cup \{e'_j\}$ ($e'_j \notin E_{k-1}$) ne obrazuju konturu, tada bi iz $w(e'_j) \leq w(e'_k) < w(e_k)$ sledila kontradikcija; grana e'_j nije smela biti odbačena u Koraku 2 algoritma. U protivnom, za svaku granu $e'_j \notin E_{k-1}$ sledi da se u podgrafu obrazovanim granama $E_{k-1} \cup \{e'_j\}$ javlja tačno jedna kontura. Medjutim, tada grane e'_i ($1 \leq i \leq k$) povezuju čvorove iz istih komponenata delimične šume obrazovane granama samo iz skupa E_{k-1}. Kako je delimičan podgraf formiran od grana iz skupa E'_k bez kontura, to je broj grana iz E'_k koje se distribuiraju jednoj komponenti šume prethodnog podgrafa najviše jednak broju grana te komponente. Stoga bar jedna grana iz E'_k ne bi mogla biti distribuirana na dopustiv način, pa opet dobijamo kontradikciju.

Ovim je teorema dokazana. □

Složenost Kruskal-ovog algoritma bitno zavisi od postupka realizacije Koraka 1 (sortiranje grana), odnosno Koraka 2 (kako znati koje se grane uključuju, odnosno isključuju). Neka je n, odnosno m, broj čvorova, odnosno grana grafa G. Za sortiranje grana, ako se sve grane sortiraju odjednom (uz neke dosetke to nije neophodno!) potrebno je $O(m \log(m))$ poredjenja (u praksi se najčešće koristi metoda sortiranja poznata pod nazivom "heap-sort"). Efikasan postupak za realizaciju Koraka 2 zasniva se na sledećoj ideji. Čvorove grafa treba grupisati po komponentama delimičnog grafa koji se formira. Na početku (kada nema grana), svaki čvor je zasebna grupa. Dodavanjem neke grane izmedju čvorova različitih grupa, vodi ka objedinjavanju tih grupa (grana se uključuje), a u protivnom, ako čvorovi pripadaju istoj grupi, nema nikakve akcije (grana se isključuje). Programerski se to može realizovati tako što svi čvorovi jedne grupe imaju iste oznake, različite od grupe do grupe. Stoga se kriterijum za razvrstavanje grana (uz ažuriranje oznaka) svodi samo na testiranje oznaka krajnjih čvorova. Ovako koncipiran Korak 2 se može realizovati sa složenošću od $O(1)$. Stoga je složenost Kruskal-ovog algoritma, grubo govoreći, odredjena sa složenošću sortiranja, i teško se može znatnije poboljšati od $O(m\log(m))$. Dakle, za grafove koji su bliski (po broju grana) kompletnim grafovima kompleksnost je $O(n_2\log(n))$.

Opisaćemo sada *Prim-ov algoritam.* Ovaj algoritam se zasniva na strategiji *najpre najbliži sused* (na engleskom: *nearest neighbour first*). Ključnu ulogu u koncipiranju algoritma igra sledeća teorema.

TEOREMA 4.4.2 Neka je $G = (V, E)$ povezan težinski graf, $U \subseteq V$ a $e \in E$ najlakša grana koja spaja čvor iz U sa čvorom iz $\overline{U}$ $(= V \setminus U)$. Tada postoji stablo najmanje težine koje sadrži granu e.

Dokaz. Neka je T^* stablo najmanje težine, i pretpostavimo da grana e (kao u iskazu teoreme) ne pripada tom stablu. Uočimo podgraf u oznaci T^*+e dobijen iz T^* dodavanjem grane e. Graf T^*+e sadrži bar jednu konturu. Toj konturi, pored grane e, pripada i grana e' i to takva da joj je jedan kraj u U a drugi u $\overline{U}$. Kako je $w(e) \leq w(e')$, po udaljavanju grane e' iz T^*+e dobija se podgraf (opet stablo), čija težina nije veća od težine stabla T.

Ovim je teorema dokazana. □

Imajući u vidu Teoremu 2, sada se nameće sledeći postupak. Krenuti od delimičnog grafa bez grana, uočiti jednu njegovu komponentu (tj. izolovan čvor), i zatim je uvećavati dodavanjem najlakše grane koja povezuje jedan njen čvor sa nekim čvorom iz preostalog dela grafa. U procesu uvećavanja tekućoj komponenti se dodaju pored grane i onaj njen krajnji čvor koji nije pripadao komponenti. Postupak se završava kada više nema grana sa traženim svojstvima; tada, u zavisnosti da li je polazni graf povezan ili ne, imamo kraj rada ili, ako je ulazni graf nepovezan, možemo istovetnu proceduru ponoviti u cilju nalaženja sledeće komponente najlakše šume. Primetimo samo da se dodavanjem grana na opisani način nikada ne formira kontura. Stoga je dobijeni delimični podgraf uvek stablo (ili šuma u nepovezanom slučaju), a odgovarajuća težina je, na osnovu Teoreme 2, najmanja. Dokaz bi se mogao sprovesti metodom matematičke indukcije. U tom cilju, za povezan graf, lako se dokazuje da je formirani delimični podgraf (tj. stablo) ujedno stablo minimalne težine za podgraf polaznog grafa koji je indukovan čvorovima tekuće komponente (i tu dolazi do izražaja Teorema 2)

Algoritam 2 (Prim-ov algoritam za nalaženje minimalnog razapinjućeg stabla ili šume).

Korak 1. Uzeti proizvoljan nerazmatran čvor (ako postoji) za tekuću komponentu. (Na početku su, jasno, svi čvorovi nerazmatrani.) Ako takav čvor ne postoji, preći na Korak 3, a u protivnom uočeni čvor se markira kao razmatran.

Korak 2. Naći najlakšu granu koja povezuje čvor iz tekuće komponente sa nekim čvorom van nje. Ako takva grana ne postoji, preći na Korak 1. U protivnom, tu granu priključiti tekućoj komponenti, kao i onaj krajnji čvor grane koji nije bio u komponenti. Ujedno markirati dotični čvor da je razmatran. Zatim preći na početak Koraka 2.

Korak 3. Završetak rada.

Neka je opet n, odnosno m, broj čvorova, odnosno grana, grafa G. Glavni problem u implementaciju gornjeg algoritma direktno je vezan za efikasnost u realizaciji Koraka 2. Zavisno od toga kako je taj problem rešen, imamo i različite procene efikasnosti Prim–ovog algoritma. Ako bi se u svakom prolasku kroz Korak 2 (ima ih $O(n)$) traži najlakša grana, tada bi efikasnost Koraka 2 bila $O(m)$, šo bi davalo da je efikasnost kompletnog algoritma $O(nm)$. Bolje rešenje (i procena) se dobijaju ako se nadje brži postupak za nalaženje najlakše grane. Glavni problem leži u činjenici da se sa porastom broja čvorova u tekućoj komponenti uvećava broj grana medju kojima treba tražiti najlakšu, dakle uvećava se i pretraga. Medjutim, ona se može izbeći ako se za svaki čvor van tekuće komponente vodi evidencija o njegovom najbližem susedu u tekućoj komponenti. Naravno, to bi zahtevalo da se po završetku svake iteracije vezane za Korak 2 notiraju promene (priključivanje jednog čvora komponenti može, ali ne mora, promeniti najbliže susede ostalih čvorova van komponente – tačnije, može jedino njega isturiti kao najbližeg suseda). Uz gornje napomene, lako se pokazuje da je složenost Prim-ovog algoritma može bitno popraviti. Zavisno od izbora strukture podataka i kako se pripremi pretraga za najlakšom granom, može se dobiti da je kompleksnost Primovog algoritma $O(n^2)$, ili $O(m\log_2(n))$. O ovim detaljima, pogledati na primer [**?**].

Glava 5

Diskretna verovatnoća

Teorija verovatnoće vuče korene iz 16-tog veka, a nastala je kao rezultat pokušaja matematičara tog vremena da razreše neke fenomene vezane za igre na sreću. Prva knjiga iz ove oblasti za koju se zna je *De Ludo Alea (O igri kockom)*, štampana je tek 1663 godine, dakle oko 100 godina pošto je napisana. Autor knjige je Girolamo Cardano, poznat i po formulama za rešavanje algebarskih jednačina trećeg stepena. I u današnje vreme još uvek postoji interes za rešavanje problema vezanih za igre na sreću. Ne mali broj ljudi interesuje kakve su im šanse da dobiju neku premiju u igrama na sreću. Stoga se nameće zaključak da verovatnoća predstavlja meru za mogućnost nastupanja nekog dogadjaja.

Imajući u vidu gornje činjenice, za verovatnoću bi se moglo reći da predstavlja matematičku disciplinu koja služi izučavanje takozvanih slučajnih, ili nedeterminističkih fenomena. Za determinističke fenomene je karakteristično da se njihovo ponašenje može predvideti na osnovu poznavanja početnih uslova, kao i odredjenih naučnih zakona (na primer, fizike, hemije i drugih po pravilu prirodnih nauka). Tipičan primer iz fizike je kos hitac.

U 20-tom veku, verovatnoća je postavljena na čvrste temelje, i aksiomatski je zasnovana uz pomoć teorije skupova. Aksiomi koje ćemo u nastavku razmatrati pripisuje se Andreju Nikolajeviču Kolmogorovu. Dakle, danas je to jedna strogo zasnovana matematička disciplina sa mnoštvom primena. Posebnu draž ovoj teoriji daju računari. Umesto klasičnih eksperimenata, sada se oni mogu simulirati na računaru. Uz teoriju verovatnoće, po pravilu stoji i statistika, kao matematička disciplina sa kojom se dopunjava (daje joj praktični smisao). U ovoj knjizi neće biti reči o statistici.

5.1 POJAM DOGADJAJA

Osnovni pojam na kojem bazira teorija verovatnoće je *dogadjaj*. Dogadjaj je skup koji se sastoji od takozvanih *elementarnih (nedeljivih) dogadjaja*, odnosno osnovnih *instanci*. Svi elementarni dogadjaji obrazuju *prostor elementarnih dogadjaja*. U stvarnosti neki fenomen pod odredjenim uslovima (ili uticajnim faktorima) može, ali ne mora da nastpi. Ako je nastupio posmatrani fenomen, tada je samim tim nastupio i jedan od elementarnih dogadjaja, te se stoga realizuje i odgovarajući dogadjaj kao posledica realizacije jedne od instanci. U mnogim slučajevima nastupanje ili nenastupanje nekog dogadjaja može se shvatiti kao rezultat realizacije (ishod) nekog *eksperimenta*. Idealizovana predstava eksperimenta bazira se na sledećim pretpostavkama:

i) za svaki eksperiment unapred je poznat skup svih mogućih ishoda (elementarnih dogadjaja);

ii) realizacija bilo kog ishoda nije poznata unapred[1];

iii) svaki eksperiment se može neograničen broj puta ponoviti pod istim uslovima.

PRIMER 5.1.1 *Bacanje novčića:* Prostor mogućih elementarnih dogadjaja je realizacija ili grba, ili pisma. Smatra se da se bacanje novčića (na ravnu podlogu) može neograničen broj puta ponoviti pod istim uslovima. U slučaju da je novčić pravilan (homogen) intuitino, a i empirijski, bi se moglo zaključiti da će broj ishoda grba i pisma u velikom broju bacanja biti približno jednak.

PRIMER 5.1.2 *Bacanje kocke:* Prostor mogućih elementarnih dogadjaja je realizacija jedne od 6 strana kocke, označenih brojevima od 1 do 6. I u ovom slučaju se smatra da se bacanje kocke (na ravnu podlogu) može neograničen broj puta ponoviti pod istim uslovima. U slučaju da je kocka pravilna (homogena) intuitino, a i empirijski, bi se moglo zaključiti da će broj ishoda svake strane (odgovarajućeg broja) u velikom broju bacanja biti približno jednak.

PRIMER 5.1.3 *Izvlačenje karte iz špila:* Prostor mogućih elementarnih dogadjaja je vadjenje jedne od 52 karte iz kompletnog špila. U ovom slučaju se smatra da su karte, pre izvlačenja, djobro promešane"(kao i da im se vidi samo poledjina). U slučaju da se obezbedi dobro mešanje karate pre svakog izvlačenja, moglo bi se zaključiti da će u velikom broju izvlačenja svaka karta biti priblizno jednak broj puta izvučena.

U svim gore navedenim primerima broj ishoda eksperimenta je bio konačan (redom 2, 6 i 52, respektivno). Dakle, prostor elementarnih dogadjaja je bio konačan. Ukoliko je prostor elementarnih dogadjaja konačan ili prebrojiv (dakle

[1] Ova činjenica odredjuje nedeterminizam fenomena koji se posmatra. Strogo gledano, teško bi se mogla povući crta izmedju determinističkih i nedeterminističkih fenomena. Ima mišlenja da nedeterministički fenomeni objektivno i ne postoje, već su za nas rezultat nemogućnosti da uzmemo u obzir sve faktore koji odredjuju determinizam posmatranog fenomena

najviše prebrojiv, ili diskretan), tada se teorija verovatnoće svodi na diskretnu verovatnoću. U nastavku, mu ćemo se isključivo njome baviti.

Sada ćemo dati oznake za osnovne pojmove date u okviru uvodnih razmatranja. Najpre imamo:

i) e – uobičajena oznaka za elementatni dogadjaj;

ii) Ω – skup, ili prostor elementarnih dogadjaja;

iii) $A \subseteq \Omega$ – proizvoljan dogadjaj.

U slučaju da je $A = \emptyset$, tada je odgovarajući dogadjaj *nemoguć*; s druge strane, ako je $A = \Omega$ tada je odgovarajući dogadjaj *siguran*.

5.2 ALGEBRA DOGADJAJA

Pošto su dogadjaji u osnovi skupovi, logično je očekivati da se osnovne skupovne operacije mogu interpretirati i kao operacije nad dogadjajima. *Algebra dogadjaja* zasnovana je na sledećim operacijama:

i) komplement dogadjaja: $\bar{A} = \{e \mid e \notin A\}$ $(= \bar{A})$;

ii) suma (unija) dogadjaja: $A + B = \{e \mid e \in A \vee e \in B\}$ $(= A \cup B)$, ili opštije, $\sum_{i \in I} A_i = \cup_{i \in I} A_i$;

iii) – proizvod (presek) dogadjaja: $A \cdot B = \{e \mid e \in A \wedge e \in B\}$ $(= A \cap B)$, ili opštije, $\prod_{i \in I} A_i = \cap_{i \in I} A_i$;

iv) razlika (diferencija) dogadjaja: $A - B = \{e \mid e \in A \vee e \notin B\}$ $(= A \setminus B)$;

Skup indeksa I u stavkama ii) i iii) je najviše prebrojiv skup. Ista pretpostavka, ako se drugačije ne naglasi, važi će i u preostalom delu teksta.

Uvešćemo sada jedan veoma važan pojam koji igra jednu od ključnih uloga u teoriji verovatnoće.

DEFINICIJA 5.2.1 Dogadjaji A i B su *isključivi* (ili *nesaglasni*) ako je $A \cdot B = \emptyset$. Opštije, familija dogadjaja A_i, $i \in I$, obrazuje familiju uzajamno isključivih (nesaglasnih) dogadjaja ako je $A_i \cdot A_j = \emptyset$ za svako $i \neq j$, $i, j \in I$.

Neka je $\mathcal{B}$ neki podskup partitivnog skupa od Ω koji je zatvoren u odnosu na operacije $+, \cdot\,, \bar{}\,$, ili samo za $+, \bar{}\,$, odnosno $\cdot\,, \bar{}\,$. Dakle, ako $A, B \in \mathcal{B}$ tada važi $A + B, A \cdot B, \bar{A} \in \mathcal{B}$. Pod ovim pretpostavkama imamo:

DEFINICIJA 5.2.2 Skup dogadjaja $\mathcal{B}$ je σ–polje ako važi:

i) $\Omega \in \mathcal{B}$;

ii) ako $A_i \in \mathcal{B}$ za svako $i \in I$ tada $\sum_{i \in I} A_i \in \mathcal{B}$;

iii) ako $A \in \mathcal{B}$ tada i $\bar{A} \in \mathcal{B}$.

NAPOMENA Umesto ii) i iii) može (alternativno) da stoji:

ii') ako $A_i \in \mathcal{B}$ za svako $i \in I$ tada $\prod_{i \in I} A_i \in \mathcal{B}$;

iii') ako $A, B \in \mathcal{B}$ tada i $A - B \in \mathcal{B}$.

Napomenimo i da se za σ–polje, ako je skup Ω diskretan, može uzeti partitivni skup skupa Ω. Naime, ako je svaki elementarni dogadjaj i sam za sebe dogadjaj iz σ–polja, tada za svako $A \subseteq \Omega$ važi $A = \cup_{e \in A}\{e\}$.

5.3 PROSTOR VEROVATNOĆE

Posmatrajmo uredjenu trojku datu sa: $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, gde je $P : \mathcal{B} \longrightarrow I\!R$. Za ovu trojku se kaže da je *prostor verovatnoće* ako važe aksiome i) – iii) (aksiome Kolmogorova):

DEFINICIJA 5.3.1 Uredjena trojka $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, gde je $P : \mathcal{B} \longrightarrow I\!R$, predstavlja prostor verovatnoće ako važi:

i) $P(A) \geq 0$ za svako $A \in \mathcal{B}$;

ii) $P(\Omega) = 1$;

iii) ako su dogadjaji A_i $(i \in I)$ nesaglasni (u parovima) tada je $P(\sum_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$.

NAPOMENA Ako Ω nije diskretan skup tada se po pravilu javlja dodatni problem vezan za konstrukciju funkcije P koja zadovoljava navedene aksiome - za svako $\mathcal{B}$ funkcija koja zadovoljava aksiome i)–iii) ne mora postojati. Primetimo još da P nije precizirano aksiomama; drugim rečima, postoji velika sloboda za njen izbor.

Osnovne osobine funkcije P date su sledećom teoremom:

TEOREMA 5.3.2 Ako je $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ prostor verovatnoće, tada za funkciju

$$P : \mathcal{B} \longrightarrow I\!R$$

važi:

i) $P(\emptyset) = 0$;

ii) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ za svako $A \in \mathcal{B}$;

iii) ako $A \subseteq B$ tada $P(A) \leq P(B)$;

iv) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$;

v) $P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$;

vi) $P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \sum_{1\leq i\leq n} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_iA_j)$
$+ \sum_{1\leq i<j<k\leq n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$.

Dokaz. Primetimo najpre da je $\Omega = A + \bar{A}$. Odavde sledi da je $1 = P(\Omega) = P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$ (videti Definiciju 1.3.1). Uzimanjem da je $A = \Omega$ neposredno sledi i), a potom i ii). Kako je $B = A + (B - A)$, sledi da je $P(B) = P(A) + P(B - A) \geq P(A)$, te važi i iii). Primetimo najpre da $A + B = (A - B) + (B - A) + (AB)$. Odavde je $P(A + B) = P(A - B) + P(B - A) + P(AB)$. Primetimo i da je $A = (A - B) + (AB)$, te da je $P(A - B) = P(A) - P(AB)$ (slično se dobija da je $P(B - A) = P(B) - P(AB)$). Samim tim dobijamo i iv). Najzad, v) i vi) se dobijaju indukcijom iz iv).

Ovim je dokaz komletiran. $\square$

Interesantno je primetiti da obrnuto tvrdjenje za i) ne važi. Dakle, ako je verovatnoća nekog dogadjaja jednaka 0, to ne znači da taj dogadjaj ne može da nastupi. Na primer, verovatnoća izbora fiksne tačke sa duži je jednaka 0, ali to ne znači da ona ne može biti izabrana (pri nekom eksperimentu). Medjutim, kod **diskretne verovatnoće** važi i obrnuto.[2] Svojstvo ii) daje vezu izmedju medjusobno komplementarnih dogadjaja. Često se dešava u praksi da je jedan od njih znatno lakše izračunati nego drugi, tako da je ova formula veoma korisna. Svojstvo iii) iskazuje monotoniju funkcije verovatnoće. Svojstvo iv) je specijalni slučaj principa uključenja–isključenja – videti svojstvo vi. Najzad, svojstvo v) je poznato kao nadlinearnost.

5.4 DODELA VEROVATNOĆE DOGADJAJIMA

Dodeljivanje verovatnoće pojedinim dogadjajima, kao što je već primećeno, nije jednoznačno odredjeno. Postoji više pristupa da se pojedinim dogadjajima dodeli njihova verovatnoća.

Klasična definicija Osnovna ideja na kojoj je zasnovana klasična definicija verovatnoće bazira ne pretpostavci da su svi elementarni dogadjaji jednako

[2] Ova činjenica se veoma elegantno koristi za probabilističko dokazivanje teorema.

verovatni. Ova definicija ima posebno smisla ako je prostor elementarnih dogadjaja konačan, recimo da ima tačno n elementarnih dogadjaja. U tom slučaju svaki elementarni dogadjaj ima verovatnoći $\frac{1}{n}$, tj. $P(\{e\}) = \frac{1}{n}$ za svako $e \in \Omega$. S obzirom da je $A = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_m}\}$, imamo da je $A = \cup_{s=1}^{m}\{e_{i_s}\}$, te odatle sledi (videti Definiciju 1.3.1) da je $P(A) = \frac{m}{n}$. Stoga imamo:

DEFINICIJA 5.4.1 (*Klasična definicija verovatnoće*) Neka je m broj instanci kojima se realizuje dogadjaj A (kaže se i broj povoljnih slučajeva za dogadjaj A), a n broj svih mogućih instanci iz prostora Ω. Ako su sve instance jednako verovatne tada je

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

U praksi (kod eksperimenata) m označava i broj povoljnih ishoda za dogadjaj A, a n broj svih mogućih ishoda eksperimenta. Može se lako pokazati da su sve aksiome in Definicije 1.3.1 zadovoljene ako se verovatnoća P pridruži dogadjajima na opisani način.

PRIMER 5.4.2 Za eksperiment sa novčićem, $m = 1$ za grb (dogadjaj G), ili pismo (dogadjaj P), a $n = 2$ za dogadjaj $\Omega = \{G, P\}$. Stoga, ako je novčić pravilan (odnosno homogen), imamo da je $q = P(G) = \frac{1}{2}$, a $p = P(P) = \frac{1}{2}$ (jasno $p + q = 1$). Sličnim rezonovanjem lako se dobija za kocku da je $P(S_i) = \frac{1}{6}$, za realizaciju i-te strane kocke ($i = 1, 2, \ldots, 6$) pri bacanju pravilne (homogene) kocke; za karte karte, imamo da je verovatnoća vadjenja (po slučajnom principu) bilo koje konkretne karte jednaka $\frac{1}{52}$. Naravno, ukoliko novčić ili kocka nisu pravilni, tada može doći odstupanja od pomenutih vrednosti.

Geometrijska definicija Osnovna ideja na kojoj je zasnovana geometrijska definicija verovatnoće je slična klasičnoj definiciji. Jedina bitna razlika je da je sada prostor elementarnih dogadjaja beskonačan, te bi stoga verovatnoća svakog elementarnog dogadjaja neminivno bila jednaka nuli. Odatle bi se nametala mogućnost da je verovatnoća svakog dogadjaja bila jednaka nuli, što je nedopustivo. Izlaz iz ove situacije može se napraviti uz pomoć geometrijskih argumenata.

Predpostavićemo da skup elementarnih dogadjaja odgovara nekom podskupu tačaka iz Euklidovog prostora dimenzije dimenzije do 3, to jest prostora koji nas okružuje. Na primer, u jednodimenzijalnom slučaju biramo tačke na nekoj duži; u dvodimenzijalnom slučaju biramo neki deo ravni (geometrijsku figuru kao što je trougao, pravougaonik, krug itd.); u trodimenzijalnom slučaju biramo neki deo prostora (geometrijsko telo kao što je teraedar, paralelepiped, lopta, itd.). Svaki od ovih objekata ima svoju meru: za duž to je njena dužina, za figuru u ravni to je njena površina, za telo u prostoru to je njena zapremina. Neka je S skup svih tačaka iz odgovarajučeg prostora koje su u obostrano–jednoznačnoj korespodenciji sa Ω, prostorom elementarnih dogadjaja. Neka je

R skup tačaka (iz S) koje su u obostrano–jednoznačnoj korespodenciji sa elementarnim dogadjajima koji realizuju dogadjaj $A \in \mathcal{B}$. Tada je $P(A) = \frac{mes(R)}{mes(S)}$, gde $mes(X)$ označava meru skupa X, dakle njegovu dužinu, površinu, zapreminu, itd. U praksi, možemo pisati i $P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)}$. Stoga imamo.

DEFINICIJA 5.4.3 (*Geometrijska verovatnoća*) Neka je $mes(A)$ mera dela prostora koji koji sadrži tačke koje odgovaraju instancama dogadjaja A, a $mes(\Omega)$ takodje merljiv deo prostora koji koji sadrži tačke koje odgovaraju svim mogućim instancama. Ako su sve tačke posmatranog prostora jednako verovatne tada je

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)}.$$

Može se lako pokazati da su sve aksiome in Definicije 1.3.1 zadovoljene ako se verovatnoća P usvoji na opisani mačin.

PRIMER 5.4.4 (Problem semafora): Na semaforu se smenjuju crveno, narandžasto i zeleno svetlo, i to tako da redom traju 20 sekundi, 5 sekundi i 25 sekundi. Jedno od pitanja koje se može postaviti glasi: Koje je verovatnoća da vozilo koje stiže na raskrsnicu mora da čeka na zeleno svetlo. Odgovor je $\frac{1}{2}$ (zašto?).

PRIMER 5.4.5 (Problem presretanje): Dva broda stizu u luku u toku istih T sati. Vremena njihovih pristizanja su slučajna i jednako verovatna u svakom od trenutaka iz posmatranog intervala od T sati. Vreme zadrzavanja prvog broda u luci je T_1 sati, a drugog T_2 sati. Ako je jedan brod u luci, tada drugi mora da čeka na oslobadjanje luke. Kolika je verovatnoća da dodje da sačekivanja.

Prostor svih elementarnih dogadjaja se može poistovetiti sa tačkama u kvadratu stranica T, koji je odredjen tačkama $(0,0)$, $(T,0)$, (T,T) i $(0,T)$ u koordinatnom sistemu. Svaka tačka (t_1,t_2) odgovara vremenima pristizanja brodova. Do sačekivanja će doći ako je $0 \leq t_1 - t_2 \leq T_1$ (tada prvi brod čeka), ili ako je $0 \leq t_2 - t_1 \leq T_2$ (tada drugi brod čeka). Tačke koje odgovaraju sačekivanju leže u jednoj traci odredjenoj pravama $t_2 = t_1 - T_1$ i $t_2 = t_1 + T_2$. Stoga je tražena verovatnoća jednaka $\frac{T^2 - \frac{1}{2}((T-T_1)^2 + (T-T_2)^2)}{T^2}$.

PRIMER 5.4.6 Problem: Odrediti verovatnoću da je nasumice izabrana tetiva kruga duža od stranice jednakostraničnog trougla upisanog u dati krug.

Pokazaćemo da je pojam jednakoverovatnih dogadjaja u ovom slučaju teško precizirati, i da se zavisno od toga kako je to učinjeno mogu dobiti različiti rezultati. U svim donjim varijantama pri izboru jednakoverovatnih dogadjaja simetrija kruga se koristi kao glavni (početni) argument.

Prva varijanta: Uzmimo najpre da je tetiva odredjena svojom srednjom tačkom, kao i da su sve tačke kruga jednako verovatne. Povoljni slučajevi sada odgovaraju tačkama čije je rastojanje od centra kruga najviše $\frac{r}{2}$ (r je poluprečnik kruga). Sada se lako dobija da je tražena verovatnoća jednaka $\frac{1}{4}$ (kao količnik mere dva kruga).

Druga varijanta: Uzmimo sada da je tetiva odredjena jednom fiksnom tačkom na kružnici i uglom koji zaklapa sa tangentom na krug u uočenoj tački na kružnici. Povoljni slučajevi sada odgovaraji onim uglovima koji su u opsegu od 60^o do 120^o. Sada se lako dobija da je tražena verovatnoća jednaka $\frac{1}{3}$ (kao količnik mere dva ugla).

Treća varijanta: Uzmimo sada da je tetiva odredjena svojim pravcem (dakle mora biti paralelna nekoj fiksnoj pravoj) i rastojanjem od centra. Povoljni slučajevi sada odgovaraji rastojanjima od centra do najviše $\frac{r}{2}$. Sada se lako dobija da je tražena verovatnoća jednaka $\frac{1}{2}$ (kao količnik mere dve duži).

Ovaj primer je ilustrativan jer pokazuje istovremeno koliku slobodu imamo u dodeljivanju verovatnoće dogadjajima.

PRIMER 5.4.7 *Buffon-ov problem:* U ravni je dat skup paralelnih pravih, pri čemu je rastojanje izmedju svake dve susedne prave $2a$ $(a > 0)$. Na ravan se baca igla dužine $2l$ $(0 < l < a)$. Odrediti verovatnoću da igla preseca neku od paralelnih pravih.

Zbog uslova $l < a$ igla može presecati najviše jednu od pravih. Polozaj igle u odnosu na bilo koju pravu može se odrediti rastojanjem d njenog centra u odnosu na najbližu pravu, kao i uglom ϕ koji ona zaklapa sa bilo kom pravom. Ove dve veličine se mogu smatrati nezavisnim (u intuitivnom smislu).

Stoga bi prostor elementarnih dogadjaja mogao biti interpretiran kao tačka u pravougaoniku sa temenima $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, (π, a) i $(0, a)$. Igla preseca najbližu pravu ako i samo ako je $0 \leq d \leq l \sin(\phi)$. Prostor povoljnih dogadjaja je figura (u gornjem pravougaoniku) ispod sinusoide $d = l \sin(\phi)$. Lako se pokazuje da je odnos odgovarajućih površina jednak $\frac{2l}{\pi a}$, šo je ujedno i tražena verovatnoća.

Interesantno je da je odavde $\pi = \frac{2l}{a}$.

Statistička definicija verovatnoće Napomenimo najpre da se matematička statistika kao matematička disciplina pre svega bavi primenom aparata teorije verovatnoće na rešavane praktičnih problema (dakle, odredjivanjem verovatnoća dogadjaja vezanih za neke probleme iz prakse, tumačenjem dobivenih rezultata, predikcijom nastupanja nekih dogadjaja, itd. Nas će u okvirima ove knjige interesovati jedan samo dodeljivanje verovatnoće nekim dogadjajima.

Podjimo od primera bacanja novčića. Postavlja se pitanje šta ćemo da radimo ako novčić nije pravilan! Intuitivno je jaso da ako je pravilan, da će grb (ili pismo) nastupiti priblizno jednak broj puta ako se eksperiment više puta (na primer, 100 puta) ponavlja. šta se može očekivati ako novčić nije pravilan. U tom slučaju recimo da se pismo realizovalo m puta u n ponavljanja eksperimenta. Uočimo tada količnik $\frac{m}{n}$, i označimo ga sa f. Tada f $(= \frac{m}{n})$ predstavlja (po definiciji) *relativnu frekvenciju* nastupanja pisma, za nas dogadjaja, recimo A (m je apsolutna frekvencija). Intuitivno, ali i empirijski možemo pretpostaviti da je

$$P(A) = \lim_{n \to +\infty} \frac{m}{n}.$$

Napomenimo da je ovde pojam granične vrednosti upotrebljen u intuitivnom smislu. Razlog je što formalna definicija granične vrednosti (sa neizbežnim ϵ) sada nema isti smisao. Eksperimenti sugerišu da će za veliko n razlika (po modulu) izmedju relativne frekvencije (uz zanemarljiva kolebanja) biti veoma bliska nekom broju: taj broj je verovatnoća našeg dogadjaja A. Isposavilo se da za pravilan novčić taj broj (prema očekivanjima) iznosi $\frac{1}{2}$.

Vratimo se sada Buffon–ovom problemu. Ako se bacanje igle ponovi veliki broj puta, recimo n, i ako je broj povoljnih slučajeva (presecanja) bio m. Tada sledi da je

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{2ln}{am}.$$

Na primer, R. Wolf je bacao iglu 5000 puta u periodu od 1849. do 1853. godine i dobio da je $\pi \approx 3.1596$. Ovakvi eksperimenti (sada se rade na računarima) bili su prvi koraci u primeni takozvane **Monte Carlo** metode (ili **metode simulacija** za razna izračnavanja. Recimo, ako u Buffon–ovom eksperimentu ne znamo da izračunamo površinu zahvačenu sinusoidom i horizontalnom osom, tada bi je mogli približno odrediti bacanjem igle (kako?). Ovakve i slične ideje se danas koriste raznim primenama teorije verovatnoće (zajedno sa statistikom).

5.5 USLOVNA VEROVATNOĆA

U mnogim slučajevima u sitaciju smo da razmatramo nastupanje nekog dogadjaja pod uslovom da se već realizovao neki dogadjaj (koji ga može ali ne mora implicirati). Naprimer, putnik koji putuje vozom na različite način procenjuje verovatnoću kašnjene voza za neki vremenski iznos na početku putovanja, i u toku putovanja (recimo na sredini putovanja) znajući pritom koliko je kašnjenje voza do tog trenutka.

DEFINICIJA 5.5.1 Neka je $A \subseteq \Omega$ fiksiran dogadjaj čija je verovatnoća pozitivna, tj. važi $P(A) > 0$. Neka je B bilo koji dogadjaj. Tada

$$P(B|A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}$$

označava verovatnoću dogadjaja B pod uslovom da se desio dogadjaj A.

Opravdanje za ovakvu definiciju može se naći kako preko klasične definicije verovatnoće, tako i preko geometrijske definicije verovatnoće. Neka je m_A (m_B) broj povoljnih slučajeva za nastupanje dogadjaja A (odnosno B) u prostoru od n elementarnih dogadjaja, m_{AB} broj povoljnih nastupa oba dogadjaja, tj. dogadjaja AB u istom prostoru. Tada je

$$P(A) = \frac{m_A}{n}, \quad P(AB) = \frac{m_{AB}}{n}, \quad P(B|A) = \frac{m_{AB}}{n_A}.$$

Odavde se neposredno dobija da formula iz Definicije 1.5.2 važi. Na sličan način se dobija da isti zaključak i za geometrijsku verovatnoću (u tom cilju dovoljno je m i n zameniti sa merama odgovarajućih dogadjaja).

Definišimo sada novi prostor verovatnoće.

DEFINICIJA 5.5.2 (*Prostor uslovne verovatnoće*) Neka je $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ prostor verovatnoće. Uredjena trojka $(\Omega, \mathcal{B}, P^*)$, gde je $P^* : \mathcal{B} \longrightarrow I\!R$ preslikavanje za koje važi

$$P^*(B) = P(B|A) \quad (B \subseteq \mathcal{B}),$$

naziva se prostor uslovne verovatnoće.

Lako se proverava da preslikavanje P^* ispunjava sve aksiome i)–iii) iz Definicije 1.3.1. Dakle, samim tim je i $(\Omega, \mathcal{B}, P^*)$ prostor verovatnoće, ili preciznije prostor *uslovne verovatnoće* (ili prostor *relativne verovatnoće*).

Primetimo sada da je

$$P(AB) = P(A)P(B|A).$$

Nije teško videti i da gornja relacija važi i za slučaj da je $P(A) = 0$ (naime, tada je i $P(AB) = 0$ jer je $AB \subseteq A$, te na osnovu Teoreme ? () gornje tvrdjenje neposredno sledi). Odavde imamo da je:

$$P(A \cdot B) = P(A)P(B|A) \ (= P(B)P(A \mid B)) \tag{5.1}$$

za svako $A, B \in \mathcal{B}$.

U specijalnom slučaju možemo imati da je $P(B \mid A) = P(B)$, te samim timim važi $P(A \cdot B) = P(A)P(B)$. U tom slučaju imamo:

DEFINICIJA 5.5.3 Dogadjaji A i B su nezavisni (u parovima) ako važi

$$P(A \cdot B) = P(A)P(B).$$

U protivnom isti dogadjaji su *zavisni.*

Primetimo još i da je relacija nezavisnosi dva dogadjaja simetrična. Inače ova definicija je bliska onome što mi intuitivno osečamo, da su dogadjaji nezavisni ako realizacija jednog nema uticaja na realizaciju drugog. Na primer, ako bacamo novčić više puta, tada (pošto novčić nema "memoriju") ishod prethodnih eksperimenata nema uticaja na ishode sledećih eksperimenata. Medjutim, ako bi zavisno od ishoda (grb ili pismo), menjali novčiće koji, pri čemu oni nisu svi pravilni, gornji zaključak ne bi važio.

NAPOMENA Često se u primenama javlja da su dogadjaji nezavisni i ako pripadaju različitim prostorima dogadjaja, na primer da su im prostori elementarnih dogadjaja Ω_1 i Ω_2 različti. Mada su oni intuitivno nezavisni, mogli bi i formalno da to potvrdimo. Naime, mogli uzeti da je tada $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, a da dogadjaju $e_1 \in \Omega_1$ odgovara dogadjaj $(\{e_1\} \times \Omega_2)$ a dogadjaju $e_2 \in \Omega_2$ dogadjaj $(\Omega_1 \times \{e_2\})$. Ovim dogadjaj $A \cdot B$, gde je $A \subseteq \Omega_1$ a $B \subseteq \Omega_2$ dobija matematički precizan smisao.

TEOREMA 5.5.4 Ako su dogadjaji A i B nezavisni (u parovima), tada su i parovi dogadjaja $\bar{A}$ i B, A i $\bar{B}$, $\bar{A}$ i $\bar{B}$ takodje nezavisni (u parovima).

Dokaz. Posmatramo dogadjaje $\bar{A}$ i B. Tada važi:

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cdot B) &= P((\Omega - A) - B) = P(B - A \cdot B) = P(B) - P(A \cdot B) \\ &= P(B) - P(A)P(B) = (1 - P(A))P(B) = P(\bar{A})P(B). \end{aligned}$$

Ovim je dokazano da su $\bar{A}$ i B (u parovima) nezavisni dogadjaji; slično se dokazuju i ostali slučajevi.

Ovim je teorema dokazana. □

Posmatrajmo sada slučaj kada imamo više i od dva dogadjaja.

DEFINICIJA 5.5.5 Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dogadjaji iz istog prostora verovatnoće. Ovi dogadjaji su *nezavisni u parovima* ako važi

$$P(A_i \cdot A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

za svako $i \neq j$; isti dogadjaji su nezavisni u celini ako važi

$$P(\prod_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

za svako I, gde je $\emptyset \neq I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$.

Važno je naglasiti da dogadjaji nezavisni u parovima ne moraju biti nezavisni u celini. Sledeći primer to pokazuje:

PRIMER 5.5.6 Pravilan tetraedar obojen sa tri boje, i to tako da je jedna strana obojena samo crvenom, druga samo zelenom, treća samo plavom bojom, a četvrta strana sa sve tri boje. Bacanjem tetraedra nastupa jedan od dogadjaja R, G, B zavisno od toga koja je boja na nalegloj strani (po bacanju tetraedra na ravnu podlogu). Sada redom imamo:

$$P(R) = P(G) = P(B) = P(RGB) = \frac{1}{2}.$$

Dalje je

$$P(RG) = P(RB) = P(GB) = \frac{1}{4}.$$

Odavde neposredno sledi da su dati dogadjaji nezavisni u parovima. Najzad, imamo i da je

$$P(RGB) = \frac{1}{4}.$$

Medjutim $P(R)P(G)P(B) = \frac{1}{8}$, te posmatrani dogadjaji nisu kolektivno nezavisni.

Ako dogadjaji nisu nezavisni tada generalno važi:

Teorema 5.5.1. *Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dogadjaji iz istog prostora verovatnoće. Tada važi*

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

Gornja jednakost se neposredno dokazuje indukcijom, uz primenu definicije uslovne verovatnoće. Sledeći primer je ilustrativan:

PRIMER 5.5.7 Kutija sa m belih i n crnih kuglica. Koja je verovatnoća da se iz tri izvlačenja sa i bez vraćanja dobiju bela, crna, bela kuglica?

Označimo najpre sa B_i (C_i) dogadjaj da je u i–tom izvlačenju izvučena bela (odnosno crna) kuglica. Naš cilj je da izračunamo verovatnoću dogadjaja $B_1C_2B_3$.

Posmatraćemo dve varijante, sa vraćanjem izvučene kuglice, i bez vraćanja izvučene kuglice. U prvom slučaju imamo da je

$$P(B_1C_2B_3) = P(B_1)P(C_2)P(B_3),$$

te je rezultat $\frac{m^2n}{(m+n)^3}$. U drugom slučaju imamo da je

$$P(B_1C_2B_3) = P(B_1)P(C_2|B_1)P(B_3|B_1c_2)$$

prema gornjoj teoremi. Stoga je rezultat dat sa $\frac{m}{m+n}\frac{n}{m+n-1}\frac{m-1}{m+n-2}$.

5.6 FORMULA TOTALNE VEROVATNOĆE I BAYES–OVA FORMULA

Neka su $B_1, B_2, \ldots, B_n$ medjusobno isključivi dogadjaji koji prekrivaju ceo prostor Ω, ili neki njegov deo. Dakle $B_1 + B_2 + \cdots + B_n \subseteq \Omega$. Ako je ispunjeno da je

$$A \subseteq B_1 + B_2 + \cdots + B_n$$

tada se kaže da posmatrana familija dogadjaja obrazuje potpun sistem dogadjaja za dogadjaj A (A se realizuje realizacijom nekog elementarnog dogadjaja koji je sadržan u nekom od dogadjaja iz posmatrane familije. Stoga je

$$A \subseteq B_1 + B_2 + \cdots + B_n.$$

Odavde je

$$A = AB_1 + AB_2 + \cdots + AB_n,$$

te imamo da je

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_n)P(A|B_n).$$

Ova formula je poznata i kao *formula totalne verovatnoće.*

PRIMER 5.6.1 Posmatrajmo tri kutije sa po 10 priozvoda, pri čemu u prvoj ima 4, u drugoj 3 a u trećoj 5 neispravnih proizvoda. Iz jedne kutije se uzimaju tri proizvoda. Kolika je verovatnoća da ih je k ispravnih?

Neka K_1, K_2 i K_3 označavaju dogadjaje da su proizvodi izvučeni redom iz prve, druge i treće kutije. Označimo sa N_k dogadjaj da je k proizvoda neispravno. Tada je

$$N_k = K_1 \cdot N_k + K_2 \cdot N_k + K_3 \cdot N_k.$$

Naime dogadjaj N_k može nastupiti kao rezultat nastupanja dogadjaja K_i ($i = 1, 2, 3$). Na osnovu formule za totalnu verovatnoću dobijamo da je

$$P(N_k) = P(K_1)P(N_k|K_1) + P(K_2)P(N_k|K_2) + P(K_3)P(N_k|K_3).$$

Odavde, na primer za $k = 2$, imamo

$$P(N_2) = \frac{1}{3}\left(\frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}}\right).$$

Posmatrajmo sada sledeću situaciju. Neka je $H_1, H_2, \ldots, H_n$ potpun sistem dogadjaja za dogadjaj A (ovi dogadjaji predstavljaju potpun sistem hipoteza za nastupanje dogadjaja A), i neka je $P(A) \neq 0$. Tada važi:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)},$$

a odavde je

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A|H_j)},$$

na osnovu formule za totalnu verovatnoću. Ova formula poznata je kao Bayes–ova formula. Ona daje verovatnoću nastupanja neke hipoteze (iz potpunog sistema hipoteza), pod uslovom da se desio neki dogadjaj A.

Na primer, u prethonom primeru, ako je nastupio dogadjaj N_k, mogli smo se zapitati koja je verovatnoća da se realizovala i-ta hipoteza , tj. da je izvlačenje tri proizvoda obavljeno iz i-te kutije? Jasno je da je tada

$$P(K_i \mid N_k) = \frac{P(K_i)P(N_k|K_i)}{P(K_1)P(N_k|K_1) + P(K_2)P(N_k|K_2) + P(K_3)P(N_k|K_3)}.$$

PRIMER 5.6.2 Imamo sto sa 4 fioke koje redom sadrže 3 zlatna, 2 zlatna i 1 srebren, 1 zlatan i 2 srebrena, 3 srebrena novčića. Bira se jedna fioka, uzima jedan novčić i konstatije se da je on zlatan. Koja je verovatnoća da je on uzet iz i-te fioke?

Neka je F_i dogadjaj da je izabrana i–ta fioka, a Z da je izvučeni novćić zlatan. Nas interesuje uslovna verovatnoća $P(F_i|Z)$. Primenom Bayes–ove formule imamo

$$P(F_i|Z) = \frac{P(F_i)P(Z|F_i)}{P(F_1)P(Z|F_1) + P(F_2)P(Z|F_2) + P(F_3)P(Z|F_3) + P(F_4)P(Z|F_4)}.$$

S obzirom da su sve fioke jednako verovatne (dakle $P(F_i) = \frac{1}{4}$) dobijamo da je

$$P(F_i|Z) = \frac{P(Z|F_i)}{P(Z|F_1) + P(Z|F_2) + P(Z|F_3) + P(Z|F_4)}.$$

Odavde, na primer za $i = 2$, imamo da je $P(Z|F_2) = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{0}{3}}$.

5.7 SLUČAJNA PROMENLJIVA

Za neku promenljivu u zadatom opsegu (obično je to interval u $I\!R$) kaže se da je slučajna promenljiva ako se njena vrednost ne može znati unapred, ali se može precizirati verovatnoća da ona uzme neke od vrednosti iz podopsega unutar posmatranog opsega. Neka je $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ prostor verovatnoće. Tada formalno imamo: svako preslikavanje

$$X : \Omega \to I\!R.$$

predstavlja jednu *slučajnu promenljivu*. Skup $X(\Omega)$ je opseg iz koga slučajna promenljiva uzima vrednosti; ako je $I \subseteq X(\Omega) \subseteq I\!R$ takav da $X^{-1}(I) \in \mathcal{B}$ tada važi

$$P(X \in I) = P(X^{-1}(I)).$$

Drugim rečima, verovatnoća da slučajna promenljiva X izme vrednost iz intervala I jednaka je verovatnoći dogadjaja koji se sastoju iz svih onih elementarnih dogadjaja čija slika (dejstvom funkcije X) upada u interval I.

U slučaju da je $X(\Omega)$, tj. skup slika funkcije X konačan, ili prebrojiv, ili najviše prebrojiv (to jest diskretan), tada se kaže da je odgovarajuća slučajna promenljiva *konačnog tipa*, *prebrojivog tipa*, odnosno *diskretnog tipa*. U protivnom, imamo znatno složeniju situaciju (na primer, slučajne promenljive mogu biti *kontinualnog tipa*).

PRIMER 5.7.1 (Slučajna promenljiva konačnog tipa) Neka je $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$. Neka je $X : \Omega \to R$ dato sa: $X(e) = a$ za $e \in \Omega_1$, $X(e) = b$ za $e \in \Omega_2$. Tada je $X^{-1}(a) = \Omega_1$, $X^{-1}(b) = \Omega_2$. $P(X = a) = P(\Omega_1) = p_1$, $P(X = b) = P(\Omega_2) = p_2$ (gde je $p_1 + p_2 = 1$). Očigledno je da je ova slučajna promenljiva konačnog tipa. Primetimo da skup Ω može biti i beskonačan, ali da to nema značaja. Ovakva situacija odgovara Bernoulli–evom eksperimentu. Tada skup $\mathcal{B}$ ima samo četiri elementa $\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$. A je dogadjaj koji može ali ne mora da nastupi pri svakom eksperimentu.

Opštiji slučaj nastupa ako je $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \cdots + \Omega_n$ za neko $n \in N$, i ako je $X(e) = x_i$ za $e \in \Omega_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Tada je $X^{-1}(x_i) = \Omega_i$, a $P(X = x_i) = P(\Omega_i) = p_i$. Jasno je da je tada $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$, kao i da je X je slučajna promenljiva konačnog tipa.

PRIMER 5.7.2 (Slučajna promenljiva prebrojivog tipa) Neka je $\Omega = \cup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$. Neka je $X : \Omega \to I\!R$ dato sa: $X(e) = x_i$ za $e \in \Omega_i$ $(i \in N)$. Tada je $X^{-1}(x_i) = \Omega_i$, a $P(X = x_i) = P(\Omega_i) = p_i$. Jasno je da je sada $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Napomenimo da se u oba gornja primera verovarnoće p_i mogu birati proizvoljno (važno je samo da je svaka nenegativna, kao i da im je suma jednaka 1).

DEFINICIJA 5.7.3 Neka je X diskretna slučajna promenljiva. Tada se jednakost

$$P(X = x_i) = p_i \ (i \in I)$$

naziva se *zakon raspodele* slučajne promenljive X.

Zakon raspodele u potpunosti odredjuje slučajnu promenljivu diskretnog tipa.

Imajući u vidu svojstvo iii) iz Definicije 1.3.1, neposredno dobijamo da je za slučajnu promenljivu diskretnog tipa

$$P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i).$$

Sledeća funkcija igra veoma važnu ulogu u teoriji verovatnoće.

DEFINICIJA 5.7.4 Funkcija $F : I\!R \to I\!R$ data sa

$$F(x) = P(X \le x)$$

predstavlja funkciju raspodele slučajne promenljive X, ili takozvanu kumulativnu funkciju raspodele slučajne promenljive X.

NAPOMENA U literaturi mnogi autori funkciju raspodele definišu i u nešto modifikovanom obliku kao funkcija $F : I\!R \to I\!R$ datu sa $F(x) = P(X < x)$.

Osnovne osobine funkcija raspodele date su sledećom teoremom:

TEOREMA 5.7.5 Ako je $F(x)$ funkcija raspodele slučajne promenljive X tada važi:

i) $0 \leq F(x) \leq 1$;

ii) $F(x)$ je neopadajuća funkcija;

iii) ako je X slučajna promenljiva konačnog tipa tada je $F(x)$ je deo po deo konstantna funkcija, i to neprekidna sa desne strane[3];

iv) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$;

v) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Dokaz. Svojstvo i) je očigledno (na osnovu definicije verovatnoće). Svojstvo ii) proizilazi iz činjenice da je verovatnoća monotona funkcija u odnosu na domen. Da bi dokazali iii, pretpostavimo da je X slučajna promenljina konačnog tipa, neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ ($x_1 < x_2 < \cdots \leq x_n$) vrednosti koje ona može da uzme. Neka je najpre $x_i < x < x_{i+1}$. Tada je

$$F(x) = P(X \leq x) = P(x \leq x_i) + P(x_i < X \leq x)),$$

na osnovu aditivnosti verovatnoće. Medjutim, $P(x_i < X < x)) = 0$, tako da je $F(x) = F(x_i)$ za svako x iz posmatranog opsega. Samim tim $F(x)$ je konstantno u intervalu (x_i, x_{i+1}) (za svako i). U tački $x = x_i$ funkcija ima skok jednak $F(x_i) - F(x_{i-1}$ $(= p_i)$. Time je dokazano iii). Svojstva iv) i v) se očigledna.

Ovim je dokaz završen. □

Lako se pokazuje da važe i sledeća svojstva:

TEOREMA 5.7.6 Ako je $F(x)$ funkcija raspodele slučajne veličine X tada važi:

1^o $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$;

2^o $P(a < X < b) = F(b^-) - F(a)$;

3^o $P(a \leq X < b) = F(b^-) - F(a^-)$;

4^o $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a^-)$;

5^o $P(X = a) = F(b) - F(b^-)$;

6^o $P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$;

7^o $P(X \geq a) = 1 - P(X < a)$.

Na osnovu ove teoreme imamo da se verovatnoća da slučajna veličine uzme vrednost u bilo kom opsegu koji je interval (mogućno i poluzatvoren, ograničen ili neograničen), ili segment (mogućno i poluzatvoren) može izraziti preko funkcije raspodele.

[3] Ako je X slučajna promenljiva prebrojivog tipa, tada svojstvo iii) ne mora da važi.

Posmatraćemo sada slučajne vektore.

DEFINICIJA 5.7.7 Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ slučajne promenljive (nad istim prostorom verovatnoće), i neka je $Y = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ odgovarajuća n–torka. Tada se za Y kaže da je slučajni vektor, ili n–dimenzionalnu slučajnu promenljivu.

U daljim razmatranjima, ponajviše iz tehničkih razloga uzećemo da je $n = 2$. U tom slučaju kažemo da imamo dvodimenzionalnu slučajnu promenlivu, ili vektor. Na primer, ako dve osobe istovremeno bacaju (istovetne) kocke, tada je prostor elementarnih dogadjaja dat sa $\{(1,1),(1,2),\ldots,(6,6)\}$. Sada se može postaviti pitanje kolika je verovatnoća dogadjaja da je prva osoba dobila broj manji ili jednak 3, a druga manji ili jednak 5. Ovo nas navodi na sledeću definiciju:

DEFINICIJA 5.7.8 Zajednička funkcija raspodele slučajnog vektora $Z = (X, Y)$ je preslikavanje $F : I\!R^2 \to I\!R$ dato sa

$$F_Z(x, y) = P(X \le x, Y \le y).$$

Funkcije raspodele $F_X(x) = P(X \le x)$ i $F_Y(y) = P(Y \le y)$ nazivaju se marginalnim funkcijama raspodele.

Za slučajan vektor koji uzima najviše prebrijivo mnogo vrednosti kaže se da je *diskretan slučajni vektor*. Takvi slučajni vektori se mogu opisati *zajedničkim zakonom raspodele*

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j).$$

Recimo, u gornjem slučaju koji se odnosi na bacanje dve kocke, imamo da je $p_{ij} = \frac{1}{36}$ za bilo koje vrednosti za i i j $(1 \le i, j \le 6)$. Primetimo da je u ovom slučaju važi $p_{ij} = p_i p_j$. Ovo nas navodi na sledeću definiciju:

DEFINICIJA 5.7.9 Slučajne promenljive $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (nad ne neophodno istim prostorom verovatnoće) su medjusobno nezavisne (u celini) ako za bilo koje (merljive) skupove $D_1, D_2, \ldots, D_n$ iz $I\!R$ važi

$$P(X_1 \in D_1, X_2 \in D_2, \ldots, X_n \in D_n) = P(X_1 \in D_1)P(X_2 \in D_2)\cdots P(X_n \in D_n).$$

U protivnom, odgovarajuće slučajne promenljive su zavisne.

PRIMER 5.7.10 Posmatrajmo jedan od modela Bernoulli–jevog eksperimenta (sa bacanjem nehomogenog novčića), i dve slučajne promenljive X i Y za koje važi: $X(G) = 0$, $X(P) = 1$, odnosno $Y(G) = 1$, $Y(P) = 0$ (G i P označavaju redom realizaciju grba i pismo). Poznato je još da su q i p verovatnoće dogadjaja G i P, respektivno. Primetimo i da je $Y = 1 - X$. Stoga, kao što intuicija nalaže, ove dve slučajne promenljive su zavisne. Da be se uverili u to, primetimo najpre da je $P(X=0)=q$, $P(Y=0)=p$, dok je $P(X=0,Y=0)=0$. Stoga, ako su p i q različiti od 0, imamo da je $P(X=0,Y=0)\neq P(X=0)P(Y=0)$.

5.8 NEKE VAŽNIJE RASPODELE

Pomenućemo sada neke važnije raspodele diskretnog tipa. Drugim rečima za njih ćemo precizirati zakone raspodele.

PRIMER 5.8.1 *Bernoulli-jeva raspodela:* Slučajna promenljiva X može uzimati samo dve različite vrednosti, na primer, 0 i 1, i to sa verovatnoćama q i p, respektivno (gde je $p+q=1$). Uobičajeno, ova raspodela je vezana za Bernoulli-jev eksperiment, gde neki povoljan dogadjaj, recimo A, može nastupiti sa verovatnoćom p, odnosno nenastupiti sa verovatnoćom q. Vrednosti 0 i 1 predstavljaju indikatore dogadjaja A, dakle za $X(e)=0$ dogadjaj nije nastupio ($e\notin A$), a za $X(e)=1$ dogadjaj je nastupio ($e\in A$). Zakon raspodele je dat sa:

$$P(X=0)=1-p,\quad P(X=1)=p.$$

PRIMER 5.8.2 *Binomna raspodela:* Binomna raspodela se na prirodan način javlja kao rezultat ponavljanja Bernoulli–evog eksperimenta. Sada nas interesuje da se povoljni dogadjaj A realizuje odredjen broj puta u seriji od n ponavljanja Bernoulli-evog eksperimenta. Dakle slučajna promenljiva X sada može uzimati vrednosti iz skupa $\{0,1,\ldots,n\}$. Neka je B_k dogadjaj da se u n bacanja novčića povoljan dogadjaj realizuje k puta. Neka je A_i dogadjaj da se u i–tom eksperimentu javlja povoljan ishod. Tada je $P(B_k)=\sum_{e_k}\Pi_{i=1}^{n}A_i^{e_i}$ gde se sumiranje proteže preko svih n–norki je $e_k=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ iz $\{0,1\}^n$ sa tačno k jedinica; takodje važi $A^0=\overline{A}$,i $A^1=A$. Pod pretpostavkom da su dogadjaji A_i nezavisni u celini (a samim tim i eksperimenti) imamo da je $P(B_k)=P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. Naime, povoljni dogadjaj koji se sastoji od realizacije k povoljnih ishoda u n eksperimenata se može realizovati na $\binom{n}{k}$ načina, a verovatnoće realizacija bilo koje varijante su jednake p^kq^{n-k}. Stoga je akon raspodele je dat sa:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\quad (k=0,1,\ldots,n).$$

PRIMER 5.8.3 *Geometrijska raspodela:* Bernoulli-jevi eksperimenti sa verovatnoćom nastupanja povoljnog dogadjaja A se izvode sve do prvog nastupanja dogadjaja A (na primer, gadjamo u metu sve do prvog pogotka). Slučajna promenljiva X uzima vrednosti iz skupa $\{1,2,\ldots\}$, sa verovatnoćom $P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$, pod pretpostavkom da su eksperimenti nezavisni. Naime, $X=k$ ako i samo ako se u prvih $k-1$ eksperimenata ne dogodi dogadjaj A, dok se u k–tom dogodi. Zakon raspodele je dat sa:

$$P(X=k)=q^{k-1}p \quad (k=1,2,\ldots,\ldots).$$

PRIMER 5.8.4 *Poisson-ova raspodela:* Slučajna promenljiva X uzima vrednosti iz skupa $\{0,1,2,\ldots\}$, dakle iz skupa $\mathbb{N}_0$. Zakon raspodele je dat sa:

$$P(X=n)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \quad (\lambda>0;\ n=0,1,\ldots,n,\ldots).$$

5.9 NUMERIČKE KARAKTERISTIKE SLUČAJNIH PROMENLJIVIH

Za bolje sagledavanje nekih slučajnih promenljivih uvode se i razni numerički pokazatelji koji pružaju neke veoma bitne informacije o slučajnoj promenljivoj. Jedna od ideja je da se vidi kako se grupišu vrednosti slučajnih promenljivih (da li su blizu neke fiksne vrednosti, koliko su rasuti od nje itd.). U tom cilju, pre nego što definišemo matematičko očekivanje (kao jedan od najvažnijih pokazatelja) posmatrajmo konačan niz eksperimenata, kao i odgovarajuću slučajnu promenljivu X. Pretpostavimo da je slučajna promenljiva X uzela, u n ponavljanja eksperimenta, sledeće vrednosti: x_1 ukupno n_1 puta; x_2 ukupno n_2 puta; i tako redom, x_k ukupno n_k puta. Potsetimo se da brojevi n_i nazijaju (apsolutnim) frekvencijama nastupanja dogadjaja da je slučajna promenjiva X uzela vrednost x_i $(i=1,2,\ldots,k)$. Takodje imamo da su $f_i=\frac{n_i}{n}$ relativne frekvencije (jasno, $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$). Veličina

$$\sum_{i=1}^{k} f_i x_i \ \left(=\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}\right)$$

predstavlja srednju vrednost slučajne veličine X u seriji od n eksperimenata. Primetimo da relativne frekvencije (kada $n\to\infty$) teže verovatnoćama odgovarajućih dogadjaja (prema statističkom pristupu dodele verovatnoće dogadjajima). Ovo nas navodi da uvedemo sledeću definiciju:

DEFINICIJA 5.9.1 Matematičko očekivanje $E(X)$ slučajne promenljive X konačnog tipa dato je sa

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

Ukoliko je slučajna promenljiva prebrojivog tipa tada, pod uslovom da je odgovarajući red apsolutno konvergentan, važi

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i.$$

Dakle matematičko očekivanje je, drugim rečima rečeno, isto što i srednja vrednost slučajne promenljive (ista impretacija može se dati i za slučajnu promenljivu prebrojivig tipa).

PRIMER 5.9.2 Za slučajnu promenljivu X koja ima Bernoulli-jevu raspodelu važi

$$E(X) = p.$$

Opštije, ako posmatramo slučajnu promenljivu X koja ima Binomnu raspodelu tada je

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} i,$$

te je

$$E(X) = np.$$

(Videti Primer ?.)

Sledeća teorema iskazuje veoma važno svojstva matematičkog očekivanja.

TEOREMA 5.9.3 Neka su X i Y dve slučajne promenljive nad istim prostorom verovatnoće. Tada važi

i) $E(c) = c$, gde je c realna konstanta;

ii) $E(cX) = cE(X)$, gde je c realna konstanta;

iii) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;

iv) $E(aX + bY) = aE(X) + E(bY)$, gde su a i b realne konstante.

Dokaz. Dokazaćemo samo iii) (s obzirom da i) i ii) direktno slede iz definicije). Primetimo da se matematičko očekivanje bilo koje slučajne promenljive diskretnog tipa može prikazati u vidu

$$E(Z) = \sum_{e\in\Omega} P(\{e\})Z(e).$$

Odavde je

$$E(X + Y) = \sum_{e\in\Omega} P(\{e\})(X(e) + Y(e))$$
$$= \sum_{e\in\Omega} P(\{e\})X(e) + \sum_{e\in\Omega} P(\{e\})Y(e) = E(X) + E(Y).$$

Primetimo da iv) direktno sledi iz ii) i iii).

Ovim je dokaz završen. □

Svojstva ii), iii) i iv) iz gornje teoreme redom su poznata kao *homogenost*, *aditivnost* i *linearnost* matematičkog očekivanja. Napomenimo da se aditivnost i linearnost mogu proširiti na sumu (linearnu kombinaciju) više od dve slučajne promenljive (dokaz se može izvesti matematičkom indukcijom).

Sledeći primer poslužiće nam da ukažemo i na jednu veoma važnu primenu teorije verovatnoće u kombinatorici (jedna od ideja *probabilističkog metoda* za dokazivanje egzistencije kombinatornih objekata.

PRIMER 5.9.4 U teoriji grafova Ramsey–ev broj $R(r)$ definiše se kao najmanji broj n takav da kompletan grafa K_n pri proizvoljnom bojenju grana tog grafa sa dve boje (na primer, crvenom i plavom) uvek sadrži kompletan podgraf sa r čvorova čije su sve grane obojene ili crvenom, ili plavom bojom.

Pokazaćemo sada (bez efektivnog bojenja) da za dovoljno male vrednosti broja n da je moguće obojiti grane grafa K_n sa dve boje tako da se javlja u njemu kompletan podgraf sa r čvorova i sa svim granama obojenim istom bojom.

U tom cilju obojima svaku grany (nezavisno od ostalih) sa verovatnoćom $\frac{1}{2}$ u crvenom bojom, i sa verovatnoćom $\frac{1}{2}$ u plavom bojom. Takvo jedno bojenje (celog grafa) može se posmatrati kao relizacija jednog elementatnog dogadjaja.

Neka je sada U fiksirani podskup čvorova našeg grafa, i definišimo slučajnu promenljivu X_U tako da je njena vrednost jednaka 1 ako su sve grane podgrafa odredjenog sa U iste boje, a 0 u protivnom. Uvedimo potom novu slučajnu promenljivu $X = \sum |U| = rX_U$ (jasno je da je ona jednaka broju podgrafova sa r čvorova koji su obojeni istom bojom). Tada imamo da je $E(X_U) = 2\frac{1}{\binom{r}{2}}$ (faktor 2 se javlja jer se bojenje vrši sa dve boje). Dalje imamo da je $E(X) = \sum |U| = rE(X_U)$ (na osnovu gornje napomene). Odavde je

$$E(X) = \binom{n}{r} 2^{1-\binom{r}{2}}.$$

Posmatrajmo sada šta se dešava ako je n dovoljno malo, tako da je dobijeno matematičko očekivanje manje od 1 (to se desava za, na primer, $n = \lceil 1.1^r \rceil$). Kako je matematičko očekovanje srednja vrednost celebrojne slučajne promenljive, i ako je ono manje od 1, jasno je da mora postojati i slučaj da je slučajna promenljiva X uzela vrednost 0. A to ujedno daje i egzistenciju bojenja u kome nema podgrafova sa r čvorova čije su sve grane obojene ili crvenom, ili plavom bojom.

Kao zaključak navodimo da smo utvrdili egzistenciju traženog bojenja, ali da efektivno bojenje nismo eksplicitno realizovali (konstruisali). Stoga je ovaj dokaz nekonstruktivan.

Posmatrajmo sada proizvod dve slučajne promenljive. Ako su slučajne promenljive zavisne tada matematičko očekivanje njihovog proizvoda ne mora biti jednako proizvodu njihovih matematičkih očekivanja. Na primer, ako uzmemo slučajne promenljive X i Y is Primera ?, tada je $E(X \cdot Y) = 0$, a $E(X) = p$, $E(Y) = q$, što je za $p, q \neq 0$ različto. Medjutim za nezavisne slučajne promenljive imamo:

TEOREMA 5.9.5 Ako su X i Y dve nezavisne slučajne promenlive tada važi

$$E(X \cdot Y) = E(X)E(Y).$$

Dokaz. Dokaz ćemo dati samo za slučajne promenljive diskretnog tipa. Tada imamo

$$E(X \cdot Y) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_i y_j P(X = x_i)P(Y = y_j)$$
$$= [\sum_{i\in I} x_i P(X = x_i)][\sum_{j\in J} y_j P(Y = y_j)] = E(X)E(Y).$$

Ovim je dokaz kompletiran. □

Pre nego šo definišemo varijansu, posmatrajmo dve slučajne promenljive koje imaju istu srednju vrednost, na primer m. Medjutim, može se desiti da kod jedne od njih (ako bi ponavljali eksperiment) da se vrednosti izrazito grupišu oko broja m, dok kod druge nema takve tendencije. Za ovu drugu kazemo da ima veliko rasipanje. Jedna od mera rasipanja je upravo varijansa.

DEFINICIJA 5.9.6 Varijansa (ili rasipanje) $Var(X)$ slučajne promenljive X konačnog tipa dato je sa

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2.$$

Ukoliko je slučajna promenljiva prebrojivog tipa tada, pod uslovom da je odgovarajući red apsolutno konvergentan, važi

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i (x_i - E(X))^2.$$

Takodje važi $Var(X) = E((X - E(X))^2)$.

NAPOMENA Umesto $\sum_{i\in I} p_i (x_i - E(X))^2$ može se koristiti i $\sum_{i\in I} p_i |x_i - E(X)|$ ali je sa stanovišta izračunavanja nepogodnija za rad. Pogrešno bi bilo posmatrati sumu $\sum_{i=1}^{\infty} p_i (x_i - E(X))$ (zašto?).

PRIMER 5.9.7 Uzmimo najpre da je X slučajna promenljiva data Bernoulli-jevom raspodelom.

Direktnom zamenom imamo da je $Var(X) = p(1-p)$ $(= pq)$. U slučaju da je X slučajna promenljiva data Binomnom raspodelom imamo

$$Var(X) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} (i - np)^2.$$

Potsetimo se da je $E(X) = np$. Odavde je $Var(X) = np(1-p)$ $(= npq)$. (Videti takodje Primer ?)

Da bi se očuvala originalna dimenzija slučajne veličine (pogotovu ako je u pitanju fizička veličina) koristi se korenovanje varijanse. Stoga imamo:

DEFINICIJA 5.9.8 Standardna devijacija $\sigma(X)$ slučajne promenljive X data je sa

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}.$$

Neka je $\phi : I\!R \to I\!R$ realna funkcija. Generalno, može se definisati i matematičko očekivanje bilo koje funkcije slučajne promenljive. Time ustvari posmatramo novu slučajnu promenljive, dakle $\phi(X)$ nastalu od X, tj. prethodne slučajnu promenljive. U specijalnom slučaju, ako uzmemo da je $\phi(x) = x^k$ dobijamo:

DEFINICIJA 5.9.9 Momenat k–tog reda $m_k(X)$ slučajne promenljive X diskretnog tipa dato je sa

$$m_k = \sum_{i \in I} p_i x_i^k,$$

gde je $k \in \mathbb{N}$, a I diskretan skip.

Centrirani momenat k–tog reda $\mu_k(X)$ slučajne promenljive X diskretnog tipa dat je sa

$$\mu_k(X) = E((X - E(X))^k) = \sum_{i \in I} p_i (x_i - E(X))^k.$$

NAPOMENA U slučaju da je I prebrojiv skup uobičajen zahtev je da je odgovarajući red apsolutno konvergentan.

Dokazaćemo sada formulu koja daje alternativni izraz za varijansu.

TEOREMA 5.9.10 Ako je X slučajna veličina tada važi

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Dokaz. Na osnovu definicije imamo

$$Var(X) = \sum_{i\in I} p_i(x_i - E(X))^2 = \sum_{i\in I} p_i x_i^2 - 2\sum_{i\in I} p_i x_i E(X) + \sum_{i\in I} p_i E(X)^2.$$

Odavde je

$$Var(X) = E(X^2) - 2E(X)\sum_{i\in I} p_i x_i + E(X)^2 \sum_{i\in I} p_i,$$

te sredjivanjem dobijamo

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Ovim je dokaz kompletiran. □

Sledeće osobine su karakteristične za varijansu:

TEOREMA 5.9.11 Neka je X slučajna promenljiva sa konačnom varijansom. Tada važi

(i) $Var(c) = 0$ za svako $c \in I\!R$;

(ii) $Var(X) = 0$ ako i samo ako postoji $c \in I\!R$ takvo da je $P(X = c) = 1$;

(iii) $Var(X + c) = Var(X)$ za svako $c \in I\!R$;

iv) $Var(cX) = c^2 Var(X)$ za svako $c \in I\!R$.

Dokaz. Najpre imamo da (i) važi, što neposredno sledi iz definicije varijanse. je $Var(c) = 0$ za svako $c \in I\!R$. Obrnuto, Dokazaćemo (ii) samo za slučajne promenljive diskretnog tipa. Sada imamo da je

$$\sum_{i\in I}(x_i - c)^2 P(X = x_i) = 0,$$

gde je $c = E(X)$. Odavde neposredno sledi da je $x_i = c$ za svako i, kao i da je $P(X = c) = 1$. Time je (ii) dokazano. Svojstva (iii) i (iv) se jednostavno dokazuju primenom Teoreme ?.

Ovim je dokaz kompletiran. □

Napomenimo sada da u opštem slučaju ne važi da je varijansa zbira dve slučajne promenljive jednaka zbiru njihovih varijansi. Medjutim, ako su slučajne promenljive nezavisne, tada važi:

TEOREMA 5.9.12

Ako su X i Y dve nezavisne slučajne promenljive (nad istim prostorom verovatnoće) sa konačnim varijansama tada važi

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y).$$

Dokaz. Neka je $E(X) = a$, a $E(Y) = b$. Tada imamo

$$Var(X+Y) = E((X+Y-E(X+Y))^2) = E(((X-a)+(Y-b))^2)$$
$$= E((X-a)^2) + 2E((X-a)(Y-b)) + E((Y-b)^2) = Var(X) + Var(Y),$$

S obzirom ida su $X-a$ i $Y-b$ takodje nezavisne slučajne promenljive, te da je tada $E((X-a)(Y-b)) = E(X-a)E(Y-b) = 0$ (naime, $E(Z-c) = E(Z)-c = 0$ za svako $c \in \mathbb{R}$).

Ovim je dokaz kompletiran. □

Sledeća nejednakost poznata je kao nejednakost Čebiševa:

TEOREMA 5.9.13 Neka je X slučajna promenljiva sa konačnom varijansom, a ϵ pozitivan realan broj. Tada važi

$$P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{Var(X)}{\epsilon^2}.$$

Dokaz. Dokazaćemo teoremu samo u slučaju da je X slučajna promenljiva diskretnog tipa. Neka je $E(X) = m$. Tada imamo

$$\begin{aligned} P(|X - E(X)| \geq \epsilon) = & \sum_{|x_i - m| \geq \epsilon} P(X = x_i) \\ & \sum_{|x_i - m| \geq \epsilon} 1 \cdot P(X = x_i) \\ \leq & \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{|x_i - m| \geq \epsilon} |x_i - m|^2 P(X = x_i) \\ \leq & \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{i \in I} |x_i - m|^2 P(X = x_i) \\ = & \frac{Var(x)}{\epsilon^2}. \end{aligned}$$

□

U nastavku dajemo pregled numeričkih karakteristika nekih raspodela. Neka je X slučajna veličina koja ima:

i) Bernoulli-evu raspodelu. Tada je

$$E(X) = p,\ Var(X) = pq,\ \sigma(X) = \sqrt{pq}.$$

ii) Binomnu raspodelu. Tada je

$$E(X) = np,\ Var(X) = npq,\ \sigma(X) = \sqrt{npq}.$$

iii) Geometrijsku raspodelu. Tada je

$$E(X) = \tfrac{1}{p},\ Var(X) = \tfrac{1-p}{p^2},\ \sigma(X) = \tfrac{\sqrt{1-p}}{p}.$$

iv) Poisson-ovu raspodelu. Tada je

$$E(X) = \lambda,\ Var(X) = \lambda,\ \sigma(X) = \sqrt{\lambda}.$$

5.10 MARKOVLJEVI LANCI

Teorija slučajnih (stohastičkih) procesa je jedan veoma važan deo teorije verovatnoće sa mnoštvom primena. Naime mnogi fenomeni vezani za prirodne nauke (a i društvene) mogu se modelirati uz pomoć Markovljevih procesa. U ovoj knjizi daćemo jedan uprošćen model slučajnih procesa, takozvanih Markovljevih lanaca, koji pripadaju diskretnoj verovatnoći, a uz to se mogi i na prirodan način interpretirati u teoriji grafova.

Pretpostavimo najpre da imamo jedan sistem (automat, u specijalnom slučaju računar) koji može da ima konačan broj stanja, na primer $S_1, S_2, \ldots, S_n$ (u nekim razmatranjima broj stanja može biti i beskonačan). Pretpostavimo zatim da taj sistem u nekim diskretnim trenucima vremena prelazi iz jednog stanja, recimo S_i, u neko drugo stanje, recimo S_j, sa nekom verovatnoćom prelaska (mogućna su i razmatranja kod kojih su vremenski trenuci promena stanja kontinualno menjaju). Neka je $X_n = X(n)$ slučajna promenljiva koja označava stanje sistema u trenutku t_n (ovde se vreme posmatra kao parametar). U najopštijem slučaju verovatnoća prelaska sistema iz stanja x_n (koje je nastupilo u trenutku t_n) u stanje x_{n+1} (koje nastupa u trenutku t_{n+1}) dato je sa

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_1 = x_1, X_0 = x_0).$$

Drugim rečima, ono zavisi od svih prethodnih stanja (dakle, čitava istorija promena stanja utiće na ovu verovatnoću). Na primer, ako iz špila karata vadimo karte jednu po jednu bez vraćanja, tada verovatnoća da u n–tom izvlačenju uzvučemo kartu odredjene boje (na primer u trefu), zavisi od toga šta je ranije izvučeno.

Kod Markovljevih lanaca imamo uprošćenu situaciju, naime verovatnoća prelaska u novo stanje zavisi samo od zatečenog stanja (samim tim, celokupna prethodna istorija se žaboravlja", to jest briše). Takva situacija nastaje u prethodnom primeru ako se karte po izvlačenju vraćaju u špil. Preciznije imamo:

DEFINICIJA 5.10.1 Neka je dat niz slučajnih promenljivih $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ diskretnog tipa (nad istim prostorom verovatnoće). Tada ovaj niz obrazuje Markovljev lanac ako važi

$$P(X_{n+1}=x_{n+1}|X_n=x_n, X_{n-1}=x_{n-1},\ldots,X_1=x_1,X_0=x_0)$$
$$=P(X_{n+1}=x_{n+1}|X_n=x_n).$$

za svako $x_0, x_1, \ldots, x_n \in I\!R$ i svako $n \in \mathbb{N}_0$. U slučaju da važi

$$P(X_{n+1}=y|X_n=x)=P(X_n=y|X_{n-1}=x)$$

za svako $n \in \mathbb{N}$ tada je odgovarajući Markovljev lanac (vremenski) homogen.

U nastavku ćemo posmatrati samo vremenski homogene Markovljeve lance.

Pogodan (i prirodan) model za ovakve lance može se dati preko orijentisanih grafova (sa petljama). Naime, svakom čvoru se može pridružiti jedno stanje sistema; dva čvora koja odgovaraju stanjima S_i i S_j spojena su granom orijentisanom od čvora koji odgovara stanju S_i do čvora koji odgovara stanju S_j ako postoji mogućnost prelaza iz stanja S_i u stanje S_j; grani (ili petlji) koja povezuje pomenuta dva čvora pridružuje se verovatnoća, to jest težina

$$p_{ij}=P(X_{n+1}=S_j|X_n=S_i).$$

Dakle, ako je $p_{ij}=0$, tada se odgovarajuća grana izostavlja iz grafa.

PRIMER 5.10.2 Ppretpostavimo da se vreme može opisati stanjima $S_1=K$ (kišovito), $S_2=O$ (oblačno) i $S_3=S$ (sunčano). Neka je matrica prelaza (promene vremena) data sa

$$\Pi=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Ovoj matrici odgovara graf dat na sledećoj slici:

Primetimo i da je zbir elemenata svake vrste gornje matrice jednak 1 (za kolone to ne mora da važi). Isti zaključak važi i u opštem slučaju. Stoga je matrica Π *stohastička matrica*.

Uvešćemo sada još neke pojmove. Neka je

$$p_{ij}^{k} = P(X(l+k) = x_j | X(l) = x_i) \quad (l = 0, 1, \ldots).$$

Dakle, p_{ij}^{k} je verovatnoća da Markovljev lanac iz stanja x_i predje u stanje x_j u k koraka (očigledno, zbog vremenske homogenosti, ta verovatno{ca ne zavisi od l). Za $k = 1$ dobijamo da je $p_{ij}^{1} = p_{ij}$. Nije teško utvrditi (na osnovu formule za totalnu verovatnoću) da za svako $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ važi

$$p_{ij}^{k_1+k_2} = \sum_{s=1}^{n} p_{is}^{k_1} p_{sj}^{k_2},$$

gde je n broj svih stanja sistema (Markovljevog lanca).

DEFINICIJA 5.10.3 Kvadratna matrica reda n data sa

$$\Pi = (p_{ij}),$$

gde je $p_{ij} = P(X_{n+1} = S_j | X_n = S_i)$ naziva se matricom prelaza Markovljevog lanca.

Lako se pokazuje da je je $\Pi^k = (p_{ij}^{k})$. Koristeći formulu za totalnu verovatnoću neposredno dobijamo:

TEOREMA 5.10.4 Neka je $p^{(k)} = (p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \ldots, p_n^{(k)})^T$, gde je $p_i^{(k)} = P(X_k = x_i)$. Drugim rečima $p^{(k)}$ je vektor verovatnoća da se sistem (Markovljev lanac X_k) nadje u trenutku t_k u nekom od stanja (za $k = 0$ to je vektor početnih verovatnoća, tj. verovatnoća da se Markovljev lanac u trenutku t_0 nalazi u pojedinim stanjima). Neka je Π matrica prelaza za X^k. Tada važi

$$p^{(k)} = \Pi^k p^{(0)}.$$

5.11 INFORMACIJA I ENTROPIJA

Vrednost i značaj saznanja da se neki dogadjaj desio ili da će se desiti može se (često subjektivno) meriti uz pomoć njegove verovatnoće. Na primer, ako nam neko u toku leta kaže da će sutra padati sneg to je vredna i veome značajna informacije; jasno, u toku zime ta informacija nije od veće vrednosti niti značaja. Presudnu ulogu u obe situacije, imala je verovatnoća nastupanja pomenutog dogadjaja.

U teoriji informacija nas interesuje prevashodno količina dobijenih informacija (u odnosu na neku jedinicu mere). Označimo sa $I(p)$ količinu informacija sadržanu u saznanju da je realizovan (ili nije realizovan) dogadjaj verovatnoće p. Ako su A i B nezavisni dogadjaji takvi da je $P(A) = p$ i $P(B) = q$, tada je $P(AB) = P(A)P(B) = pq$. Dakle, ako se dogode oba dogadjaja, trebalo bi da važi

$$I(pq) = I(p) + I(q),$$

jer se, intuitivno, količina informacija ovim uvećava, ili preciznije sabira. Poznato je da je jedina neprekidna funkcija koja zadovoljava gornji uslov oblika $I(x) = c\log(x)$, gde je c neka realna konstanta. Ako se usvoji da dogadjaj čija je verovatnoća $\frac{1}{2}$ nosi jediničnu informaciju dobijamo:

DEFINICIJA 5.11.1 Količna informacije, ili kraće informacija, sadržana u dogadjaju verovatnoće p data je sa

$$I(p) = -\log_2(p).$$

Jedinica mere informacije je shannon, po Claude Shannon–u.

Ako imamo diskretnu slučajnu promenjivu X tada se može odrediti i srednja količina informacija koja je sadržana u dogadjajima $X = x_i$, gde je $i \in I$. Time su se stekli uslovi za sledeću definiciju:

DEFINICIJA 5.11.2 Entropija diskretne slučajne promenljive X data je izrazom

$$H(X) = -\sum_{i\in I} p_i \log_2(p_i),$$

gde je $p_i = P(X = x_i)$ $(i \in I)$.

Napomenimo da se 0^0 u izračunavanjima smatra da je jednako 0.

Primetimo da je $H(X)$ nezavisno od vrednosti koje uzima slučajna promenljiva. Stoga je $H(X)$ = H(X+c) = H(cX), za svako $c \in \mathbb{R}$. .

PRIMER 5.11.3 primer ...

TEOREMA 5.11.4 Neka je X slučajna promenljiva konačnog tipa, koja može da uzima n različitih vrednosti[4] sa verovatnoćama $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (jasno, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$). Neka je Y slučajna promenljiva konačnog tipa, koja takodje može da uzima n različitih vrednosti ali sa verovatnoćama $\frac{1}{n}$. Tada je

$$H(X) \le H(Y) = \log_2(n).$$

---

[4]Nije bitno kojih!

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2(p_i) \geq \log_2(\frac{1}{n}),$$

za bilo kojih n pozitivnih brojeva $p_1, p_2, \ldots, p_n$ koji zadovoljavaju uslov $p_1+p_2+\cdots+p_n = 1$. Ova nejednakost se direktno dobija tražnjem uslovnog minimuma funkcije $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log_2(x_i)$ pod uslovima $0 < x_i \leq 1$ $(1 \leq i \leq n)$ i $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

Ovim je dokaz kompletiran. □

Sledeća nejednakost važi za entropije:

TEOREMA 5.11.5 Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, tada važi

$$H(X) \leq H(X+Y).$$

Napomenimo na kraju da se entropija u fizici javlja kod drugog zakona termodinamika (svaki izolovani sistem teži da predje u stanje iste ili veće entropije. Entropija je na neki način mera neuredjenosti sistema (haosa).

Bibliografija

[1] James A. Anderson, *Diskretna matematika sa kombinatorikom*, Računarski fakultet, Beograd, 2005.

[2] George E. Andrews, Kimmo Eriksson, *Integer Partitions*, Cambridge University Press, 2004.

[3] George E. Andrews, *The Thoery of Partitions*, Cambridge University Press, 1984.

[4] V.K. Balakrishnan, *Combinatorics*, Shau m's Outline Series, 1995.

[5] V.K. Balakrishnan, *Graph Theory*, Shau m's Outline Series, 1997.

[6] Norman L. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, 1974.

[7] Béla Bollobás, *Modern Graph Theory*, Springer-Verlag, 1998.

[8] Gary Chartrand, Linda Lesniak, *Graphs* & *Digraphs*, Chapman & Hall, 1996.

[9] Dragoš Cvetković, Slobodan Simić *Diskretna matematika*, Naučna knjiga, Beograd, 1990.

[10] Dragoš Cvetković, Peter Rowlinson, Slobodan Simić *Eigenspaces of graphs*, Cambridge University Press, 1997.

[11] Dragoš Cvetković, *Kombinatorna teorija matrica*, Naučna knjiga, Beograd, 1987.

[12] Dragoš Cvetković, *Teorija grafova i njene primene*, Naučna knjiga, Beograd, 1990.

[13] Christopher David Godsil, Algebraic Combinatorics, Chapman & Hall, New York-London, 1993.

[14] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

[15] Ronald L. Graham, Martin Grötschel, László Lovász (editors), *Handbook of Combinatorics*, Volume 1 & 2, North-Holland, 1995.

[16] Ivan Gutman, Branislav Popović, *Arthur Cayley – pionir hemijske teorije grafova*, str.16-19, Tangenta 39, Kragujevac-Beograd 2005.

[17] Frank Harary, *Graph Theory*, Narosa Publishing House, 1995.

[18] Frank Harary, *On the History of the Theory of Graphs*, p.1-17, New Directions in the Theory of Graphs, Academic Press, New York and London, 1973.

[19] Vladimir Janković, Diferencne jednačine, Beograd, 1976.

[20] László Lovász, *Combinatorial Problems and Exercises*, Budapest, 1979.

[21] Henryk Minc, *Permanents*, Addison–Wesley Publishing Company, 1978.

[22] John W. Moon, *Counting Labelled Trees*, Canad. Math. Congress, Montreal, 1970.

[23] Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil, *Invitation to Discrete Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1988.

[24] Marko Petkovšek, Herbert Wilf, Doron Zeilberger, *A=B*, AK Peters, 1997, online verzija kompletne knjige dostupna na adresi `http://...`

[25] Vojislav Petrović, *Teorija grafova*, Novi Sad, 1998.

[26] Боро Пиперевски, Ристо Малчески, Алекса Малчески, Ирена Трајковска, *Избрани содржини од елементарна математика II*, Скопје, 2001.

[27] Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, McGraw Hill, 2003.

[28] Steven S. Skiena, *The Algorithm Design Manual*, Springer-Verlag, New York, 1997, online verzija kompletne knjige dostupna na adresi `http://www2.toki.or.id/book/AlgDesignManual/INDEX.HTM`

[29] Neil J.A. Sloane, *Online Encyclopedia of Integer Sequences*, `http://www.research.att.com/~njas/sequences/`

[30] Dragan Stevanović, Marko Milošević, Vladimir Baltić, *Diskretna matematika, Zbirka rešenih zadataka*, DMS, Beograd, 2004.

[31] Ioan Tomescu, *Introduction to Combinatorics*, Collet's (Publishers) Ltd, London and Wellingborough, 1975.

[32] Ioan Tomescu, *Problems in Combinatorics and Graph Theory*, John Wiley & Sons, 1985.

[33] Darko Veljan, *Kombinatorika sa teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

[34] Николай Николаевич Воробьев, *Числа Фибоначчи*, Наука, Москва, 1992.

[35] Douglas B. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall, 1996.

[36] *Wikipedia, free encyclopedia*, `http://en.wikipedia.org`