NEODREĐENI INTEGRAL

Ako za funkciju $f: I \to R$, $x \in I$, postoji funkcija $F: I \to R$, koja ima izvod $F'(x)$ nad intervalom I i pri tom važi $F'(x) = f(x)$, $x \in I$, onda kažemo da je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ nad intervalom I.

<u>*Definicija:*</u> Skup svih primitivnih funkcija funkcije $f(x)$ nad nekim intervalom I naziva se neodređeni integral funkcije $f(x)$ nad intervalom I i označava se sa $\int f(x)dx$.

U ovoj definiciji $f(x)$ se naziva podintegralna funkcija, $f(x)dx$ podintegralni izraz, $\int$ znak integrala, a postupak nalaženja neodređenog integrala naziva se integracija.

Ako je $F(x)$ jedna primitivna funkcija funkcije $f(x)$ nad nekim intervalom, onda je skup svih primitivnih funkcija, tj. $\int f(x)dx$ nad tim intervalom oblika $\{F(x)+c : c \in R\}$, što kraće pišemo $\int f(x)dx = F(x)+c$.

- Ako je funkcija $f: I \to R$ neprekidna nad intervalom I tada postoji primitivna funkcija $F: I \to R$ nad intervalom I, tj. postoji neodređeni integral funkcije $f(x)$ nad datim intervalom.
- Ako funkcija $f: I \to R$ ima prekid prve vrste u $c \in I$ tada za nju ne postoji primitivna funkcija $F(x)$ nad intervalom I, odnosno za nju ne postoji neodređeni integral nad datim intervalom.
- Ako funkcija $f: I \to R$ ima prekid druge vrste u $c \in I$ tada ona može, a ne mora imati neodređeni integral nad datim integralom.
- Ako neodređeni integral date funkcije postoji, on se ne može uvek izraziti u konačnom obliku (preko konačnog broja elementarnih funkcija), npr. $\int e^{-x^2}dx$, $\int \frac{e^x}{x}dx$, $\int \frac{\sin x}{x}dx \ldots$

Osobine neodređenog integrala

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$
2. $\int f'(x)dx = f(x)+c$
3. $d\int f(x)dx = f(x)dx$
4. $\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$, a je konstanta
5. $\int (f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + ... + \int f_n(x)dx$

Tablica integrala

$\int dx = x + c$	$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c = -\frac{1}{a} arcctg\frac{x}{a} + c_1$, $a \neq 0$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\| \frac{x-a}{x+a} \right\| + c$, $a \neq 0$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\left\| x \right\| + c$	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\| \frac{a+x}{a-x} \right\| + c$, $a \neq 0$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\| + c$, $a \neq 0$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c = -\arccos\frac{x}{a} + c_1$, $a > 0$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\| tg\frac{x}{2} \right\| + c$
$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\| tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) \right\| + c$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$	$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + c$, $a > 0$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$	$\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2}\ln\left\| x + \sqrt{x^2+A} \right\| + c$

Podrazumeva se da date jednakosti važe nad onim intervalima nad kojima su podintegralne funkcije neprekidne.

Primer: Odrediti neodređeni integral $I(x)$ funkcije $f(x) = \begin{cases} x, & x < 2 \\ 2, & x \geq 2 \end{cases}$.

$I(x)$ postoji nad R jer je $f(x)$ neprekidna funkcija. Kako je

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + c_1 \qquad \text{i} \qquad \int 2dx = 2x + c_2$$

to da bi $I(x)$ bila neprekidna funkcija mora da važi

$$2 + c_1 = 4 + c_2 \qquad \text{tj.} \qquad c_1 = c_2 + 2$$

pa je $I(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + 2 + c, & x < 2 \\ 2x + c, & x \geq 2 \end{cases}$.

Integracija pomoću smene

Neka sirjekcija $\varphi: I_1 \to I \subset R$ ima neprekidan izvod različit od nule nad intervalom I_1 i neka za funkciju $f: I \to R$ postoji neodređeni integral nad intervalom I. Tada važi

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

(pri tom se podrazumeva da se posle integracije desne strane nad intervalom I, stavi $t = \varphi^{-1}(x)$, $x \in I$).

1. $\int \frac{\ln x}{x} dx = \begin{pmatrix} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{pmatrix} = \int t dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c$

Napomena:
Prilikom traženja neodređenog integrala skoncentrisaćemo se na metode traženja datog integrala podrazumevajući da se integral traži nad nekim intervalom gde su konkretne metode izvodljive. Na primer, ako uvodimo smenu $tg\frac{x}{2} = t$ to znači da smo se, ako u zadatku nije drugačije napomenuto, ograničili na interval $(-\pi, \pi)$ – pod uslovom da je nad tim intervalom podintegralna funkcija definisana. Kada se traži određeni integral o svim činjenicama će se voditi računa, tj. o intervalima gde su odgovarajuće metode primenljive.

2. $\int \frac{arctg\frac{x}{2}}{4+x^2} dx = \frac{1}{4}\int \frac{arctg\frac{x}{2}}{1+(\frac{x}{2})^2} dx = \begin{pmatrix} arctg\frac{x}{2} = t \\ \frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2} \cdot \frac{1}{2} dx = dt \Rightarrow \frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2} dx = 2dt \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{4}\int t \cdot 2dt = \frac{1}{2}\int t dt = \frac{t^2}{4} + c = \frac{1}{4}(arctg\frac{x}{2})^2 + c$

3. $\int \sin 5x dx = \begin{pmatrix} t = 5x \\ dt = 5dx \end{pmatrix} = \int \sin t \cdot \frac{1}{5} dt = \frac{1}{5}\int \sin t dt = -\frac{1}{5}\cos t + c = -\frac{1}{5}\cos(5x) + c$

4. $\int \frac{e^{arctgx} + x\ln(1+x^2) + 1}{1+x^2} dx = \int \frac{e^{arctgx}}{1+x^2} dx + \int \frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{1+x^2} =$

$= \begin{pmatrix} arctgx = t & \ln(1+x^2) = m \\ \frac{dx}{1+x^2} = dt & \frac{2xdx}{1+x^2} = dm \end{pmatrix} = \int e^t dt + \frac{1}{2}\int m dm + \int \frac{dx}{1+x^2} = e^t + \frac{m^2}{4} + arctgx + c =$

$= e^{arctgx} + \frac{1}{4}\left[(\ln(1+x^2)) \right]^2 + arctgx + c$

5. $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\ln x} = t \Rightarrow 1+\ln x = t^2 \\ \frac{dx}{x} = 2tdt \end{pmatrix} = \int \frac{t^2-1}{t}2tdt = 2\int t^2dt - 2\int dt =$

$= 2\frac{t^3}{3} - 2t + c = \frac{2}{3}(1+\ln x)\cdot\sqrt{1+\ln x} - 2\sqrt{1+\ln x} + c = \frac{2\sqrt{1+\ln x}}{3}(\ln x - 2) + c$

Parcijalna integracija

Neka su $u(x)$ i $v(x)$ diferencijabilne funkcije i neka postoji primitivna funkcija funkcije $u'(x)\cdot v(x)$. Tada postoji primitivna funkcija funkcije $u(x)\cdot v'(x)$ i pri tom važi jednakost $\int udv = uv - \int vdu$.

6. $\int x^5 e^{-x^2}dx = \begin{pmatrix} -x^2 = t \\ -2xdx = dt \\ xdx = -\frac{1}{2}dt \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\int t^2e^tdt = \begin{pmatrix} u = t^2 \Rightarrow du = 2tdt \\ dv = e^tdt \Rightarrow v = e^t \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(t^2e^t - 2\int te^tdt) =$

$= -\frac{1}{2}t^2e^t + \int te^tdt = \begin{pmatrix} u_1 = t \Rightarrow du_1 = dt \\ dv_1 = e^tdt \Rightarrow v_1 = e^t \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}t^2e^t + te^t - \int e^tdt =$

$= -\frac{1}{2}t^2e^t + te^t - e^t + c = -e^{-x^2}(1 + x^2 + \frac{x^4}{2}) + c$

7. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(x^2+a^2)^2}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x}{(x^2+a^2)^2}xdx =$

$= \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x}{(x^2+a^2)^2}xdx$

$u = x \Rightarrow du = dx,\ dv = \frac{xdx}{(x^2+a^2)^2}$

$v = \int dv = \int \frac{xdx}{(x^2+a^2)^2} = \begin{pmatrix} x^2+a^2 = t \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}\int t^{-2}dt = -\frac{1}{2}t^{-1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}$

$\int \frac{x}{(x^2+a^2)^2}xdx == -\frac{x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2a}arctg\frac{x}{a} - \frac{x}{2(x^2+a^2)} + c$

$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^3}arctg\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}(\frac{1}{2a}arctg\frac{x}{a} - \frac{x}{2(x^2+a^2)}) + c = \frac{1}{2a^3}arctg\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + c$

8. $\int \cos^2(\ln x)\,dx = \left(\begin{matrix} u = \cos^2(\ln x) \Rightarrow du = 2\cos(\ln x)\cdot(-\sin(\ln x))\cdot \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{matrix} \right) =$

$= x\cos^2(\ln x) + 2\int \cos(\ln x)\sin(\ln x)dx = x\cos^2(\ln x) + \int \sin(2\ln x)\,dx$

$$\int \sin(2\ln x)\,dx = \left(\begin{matrix} u = \sin(2\ln x) & du = \dfrac{2}{x}\cos(2\ln x)dx \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right) = x\sin(2\ln x) - 2\int \cos(2\ln x)dx =$$

$$= \left(\begin{matrix} u_1 = \cos(2\ln x) & du_1 = -\sin(2\ln x)\dfrac{2dx}{x} \\ dv_1 = dx & v_1 = x \end{matrix} \right) = x\sin(2\ln x) - 2x\cos(2\ln x) - 4\int \sin(2\ln x)\,dx$$

$$5\int \sin(2\ln x)\,dx = x\sin(2\ln x) - 2x\cos(2\ln x) + c$$

$$\int \sin(2\ln x)\,dx = \frac{1}{5}(x\sin(2\ln x) - 2x\cos(2\ln x)) + c$$

$$\int \cos^2(\ln x)\,dx = x\cos^2(\ln x) + \frac{1}{5}(x\sin(2\ln x) - 2x\cos(2\ln x)) + c$$

Napomena: Integrali sledećih oblika rešavaju se parcijalnom integracijom.

1) $\int P_n(x)e^{ax}\,dx$

$u = P_n(x)$ – polinom n–tog stepena, $n \geq 1$ i $a \in R$

$dv = e^{ax}dx$

Potrebno je izvršiti n parcijalnih integracija.

2) $\int P_n(x)\cdot\sin(ax)dx$ ili $\int P_n(x)\cdot\cos(ax)dx$

$u = P_n(x)$

$dv = \sin x dx \vee dv = \cos x dx$

Potrebno je izvršiti n parcijalnih integracija.

3) $\int P_n(x)\cdot\ln^m x dx$, $m \in N$

$u = \ln^m x$

$dv = P_n(x)dx$

Potrebno je izvršiti m parcijalnih integracija.

☺