Дискретна математика

Колоквијум II

1. Нека је G нетривијалан граф са n чворова такав да за свака два несуседна чвора $u, v \in V(G)$ важи $d(u) + d(v) \geq n - 1$. Доказати да је G повезан граф.

Решење: Посматрајмо произвољне чворове x и y у графу G. Ако грана $xy \in E(G)$, доказ је готов. Претпоставимо да су чворови x и y несуседни. Сада је

$$|N(x) \cap N(y)| = d(x) + d(y) - |N(x) \cup N(y)| \geq n - 1 - n + 2 = 1.$$

Како чворови x и y имају заједничког суседа, између њих постоји пут дужине 2. Добили смо да између свака два чвора постоји или грана или пут дужине 2, одакле закључујемо да је граф G повезан.

II начин: На основу теореме Ореа граф G је полухамилтонов, одакле закључујемо да је повезан.

2. Доказати да је број висећих чворова у стаблу $2 + \sum\limits_{d(v) \geq 3} (d(v) - 2)$.
3. Нека је G повезан граф у ком свака грана припада јединственој контури. Доказати да је тада граф G Ојлеров.
4. Доказати да кубни планаран граф који не садржи троуглове и четвороуглове има најмање 20 чворова.