Jednačina sa konstantnim koeficijentima

Jednačina sa konstantnim koeficijentima je jednačina oblika

$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x),$$

gde su a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ konstante.

Opšte rešenje jednačine je $\boxed{y = y_h + y_p,}$ gde je y_h opšte rešenje jednačine $a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$, a y_p partikularno rešenje jednačine $a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x)$.

Da se prisetimo, y_h je linearna kombinacija $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$ funkcija $y_1, y_2, \ldots, y_n$ koje čine fundamentalni skup rešenja (linearno su nezavisne i ima ih n).

Jednačina $a_n \cdot r^n + a_{n-1} \cdot r^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot r + a_0 = 0$ se zove karakteristična jednačina, a $r_1, r_2, \ldots, r_n$ su koreni (rešenja) karakteristične jednačine.

U zavisnosti od prirode rešenja karakteristične jednačine, razmatramo četiri slučaja:

1) Koreni karakteristične jednačine su realni i različiti

$$\boxed{y_h = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot e^{r_i x}.}$$

Primer 1: $y''' - 3y'' + 2y' = 0$

$$r^3 - 3r^2 + 2r = 0 \Rightarrow r(r^2 - 3r + 2) = 0 \Rightarrow r(r-2)(r-1) = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = 1, r_3 = 2$$

$$y(x) = c_1 \cdot e^{r_1 x} + c_2 \cdot e^{r_2 x} + c_3 \cdot e^{r_3 x} = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x}$$

2) Ako je r_i realan koren karakteristične jednačine višestrukosti m $(m > 1)$, tada u fundamentalni skup rešenja ulaze sledećih m funkcija

$$\boxed{e^{r_i x},\ x \cdot e^{r_i x},\ x^2 e^{r_i x},\ \ldots,\ x^{m-1} e^{r_i x}.}$$

Primer 2: $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0 \Rightarrow (r-1)^3 = 0 \Rightarrow r_{1,2,3} = 1$$

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x} + c_3 x^2 e^{r_1 x} = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$$

3) Neka je koren $r_j = \alpha_j + \beta_j \cdot i$ kompleksan i jednostruki koren karakteristične jednačine (imaginarni deo je različit od nule).

   Tada je $y_j = e^{r_j \cdot x}$ rešenje date diferencijalne jednačine.

$$y_j = e^{r_j \cdot x} = e^{\alpha_j \cdot x + \beta_j \cdot x \cdot i} = e^{\alpha_j \cdot x} \cdot e^{\beta_j \cdot x \cdot i} = e^{\alpha_j \cdot x}(\cos \beta_j x + i \sin \beta_j x).$$

Nas interesuju realna rešenja, pa zbog toga u fundamentalni skup rešenja ulaze

$$R_e\{y_j\} = \boxed{e^{\alpha_j \cdot x} \cdot \cos \beta_j x} \text{ i } I_m\{y_j\} = \boxed{e^{\alpha_j \cdot x} \cdot \sin \beta_j x}.$$

Primer 3: $y'' + 4y' + 13y = 0$

$$r^2 + 4r + 13 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} \Rightarrow r_1 = -2+3i, r_2 = -2-3i$$

Da bismo dobili fundamentalni skup rešenja dovoljno je posmatrati samo jedno od dva iz para konjugovano kompleksnih rešenja karakteristične jednačine, npr. ono sa pozitivnim imaginarnim delom (funkcije koje se dobijaju posmatranjem njemu konjugovano kompleksnog rešenja su sa dobijenim funkcijama linearno zavisne).

$$\boxed{y(x) = c_1 \cdot e^{-2x} \cos 3x + c_2 \cdot e^{-2x} \sin 3x}$$

4) Ako je $r_j = \alpha_j + \beta_j \cdot i$ koren višestrukosti m $(m > 1)$, tada u fundamentalni skup rešenja date diferencijalne jednačine ulaze sledeće funkcije

$$\boxed{\begin{array}{l} e^{\alpha_j \cdot x} \cdot \cos \beta_j x,\ x \cdot e^{\alpha_j \cdot x} \cdot \cos \beta_j x,\ \ldots,\ x^{m-1} e^{\alpha_j \cdot x} \cdot \cos \beta_j x \\ e^{\alpha_j \cdot x} \cdot \sin \beta_j x,\ x \cdot e^{\alpha_j \cdot x} \cdot \sin \beta_j x, \ldots,\ x^{m-1} e^{\alpha_j \cdot x} \cdot \sin \beta_j x. \end{array}}$$

Primer 4: $y^{(IV)} + 2y'' + y = 0$

$$r^4 + 2r^2 + 1 = 0 \Rightarrow t^2 + 2t + 1 = 0, \cancel{t = x^2} \Rightarrow (t+1)^2 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = -1 = \cancel{x^2}\ r^2$$

$t = r^2$

$$\Rightarrow r_{1,2} = i,\ r_{3,4} = -i$$

Iz činjenice da je i dvostruki kompleksni koren karakteristične jednačine zaključujemo da fundamentalni skup rešenja čine funkcije $e^{0i} \cos x, xe^{0i} \cos x, e^{0i} \sin x, xe^{0i} \sin x$, pa je opšte rešenje početne homogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 x \cos x + c_3 \sin x + c_4 x \sin x.$$

Metod jednakih koeficijenata

Ako je $\boxed{f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x]}$ gde je $\alpha, \beta \in R$, a $P_m(x)$ i $Q_n(x)$ polinomi stepena m i n, jednačina ima jedno partikularno rešenje oblika

$$\boxed{y_p = x^r \cdot e^{\alpha x}[T_k(x) \cos \beta x + R_k(x) \sin \beta x]},$$

gde su $T_k(x)$ i $R_k(x)$ polinomi stepena $k = \max(m, n)$, ako su oba polinoma $P_m(x)$ i $Q_n(x)$ različita od nula polinoma (ako je $P_m(x)$ nula polinom onda je $k = n$, a ako je $Q_n(x)$ nula polinom onda je $k = m$). Za r se, ako $\alpha + \beta i$ nije rešenje karakteristične jednačine, uzima da je $r = 0$, dok se, ako $\alpha + \beta i$ jeste rešenje karakteristične jednačine, za r uzima njegova višestrukost.

1. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y''' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x$.

y_h

- $y''' + y'' = 0 \Rightarrow r^3 + r^2 = 0 \Rightarrow r^2(r+1) = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0,\ r_3 = -1$

$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}$

y_{p_1}

- $y''' + y'' = x^2 + 1$

$x^2+1 = e^{\overset{=\alpha}{0}x}\left(\underbrace{x^2+1}_{2.\ \text{stepen}}\cos(\overset{=\beta}{0}x) + 1\ \sin(\overset{=\beta}{0}x)\right)$

$\alpha+\beta i = 0$

$r = 2$

$e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right] = x^2 + 1 \Rightarrow \alpha = 0,\ \beta = 0,\ P_m(x) = x^2 + 1,$

$k = m = 2,\ \alpha + \beta i = 0 \Rightarrow r = 2$

$y_{p_1} = x^2 \cdot (Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$

$y_{p_1} = x^2 \cdot e^{0\cdot x}\left((Ax^2+Bx+C)\cos(0\beta) + (Dx^2+Ex+F)\sin(0\beta)\right)$

$y'_{p_1} = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx \qquad y''_{p_1} = 12Ax^2 + 6Bx + 2C \qquad y'''_{p_1} = 24Ax + 6B$

$24Ax + 6B + 12Ax^2 + 6Bx + 2C = x^2 + 1$

$12Ax^2 + (24A + 6B)x + 6B + 2C = x^2 + 1$

$12A = 1, \qquad 24A + 6B = 0, \qquad 6B + 2C = 1$

Rešenja sistema jednačina su $A = \frac{1}{12}$, $B = -\frac{1}{3}$ i $C = \frac{3}{2}$.

$y_{p_1} = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$

y_{p_2}

- $y''' + y'' = 3xe^x$

$3xe^x = e^{\overset{=\alpha}{1}x}\left(\overbrace{3x}^{1.\ \text{stepen}}\cos(\overset{=\beta}{0}x) + 0\ \sin(\overset{=\beta}{0}x)\right)$

$\alpha+\beta i = 1 \Rightarrow r = 0$

$e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right] = 3xe^x \Rightarrow \alpha = 1,\ \beta = 0,\ P_m(x) = 3x,$

$k = m = 1,\ \alpha + \beta i = 1 \Rightarrow r = 0$

$y_{p_2} = (Ax + B)\cdot e^x \qquad y'_{p_2} = Ae^x + (Ax + B)\cdot e^x$

$y_{p_2} = x^0 \cdot e^{1\cdot x}\left((Ax+B)\cos(0\beta) + (Cx+D)\sin(0\beta)\right)$

$y''_{p_2} = Ae^x + Ae^x + (Ax + B)\cdot e^x \qquad y'''_{p_2} = 2Ae^x + Ae^x + (Ax + B)\cdot e^x$

$(3A + Ax + B)\cdot \cancel{e^x} + (2A + Ax + B)\cdot \cancel{e^x} = 3x\cancel{e^x} \quad / : e^x$

$2Ax + 5A + 2B = 3x, \qquad 2A = 3, \qquad 5A + 2B = 0.$

Rešenja sistema jednačina su $A = \frac{3}{2}$ i $B = -\frac{15}{4}$.

$y_{p_2} = (\frac{3}{2}x - \frac{15}{4})\cdot e^x$

$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + (\frac{3}{2}x - \frac{15}{4})\cdot e^x$

$$\boxed{y = y_h + y_p = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + (\frac{3}{2}x - \frac{15}{4})e^x}$$

2. Naći ono rešenje $y(x)$ jednačine $y''' - \frac{7}{2}y'' + 2y' + 2y = e^{-\frac{1}{2}x}$ koje zadovoljava uslov $y(0) = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$.

y_h • $y''' - \frac{7}{2}y'' + 2y' + 2y = 0 \Rightarrow r^3 - \frac{7}{2}r^2 + 2r + 2 = 0$

$$(r-2)^2(r+\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 2,\ r_3 = -\frac{1}{2}$$

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 e^{-\frac{1}{2}x}.$$

• $y''' - \frac{7}{2}y'' + 2y' + 2y = e^{-\frac{1}{2}x}$

$$1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = e^{\overbrace{-\frac{1}{2}}^{=\alpha}x}\Big(\underbrace{1}_{\text{0.stepen}}\cos(\overset{=\beta}{0}x) + \underline{\ 0\ }\sin(\overset{=\beta}{0}x)\Big)$$

$$e^{-\frac{1}{2}x} = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x] \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2},\ \beta = 0,\ P_m(x) = 1$$

$$k = m = 0,\ \alpha + \beta i = -\frac{1}{2} \Rightarrow r = 1$$

$$y_p = x^1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\Big(\underbrace{A}_{\text{0.stepen}}\cos(0\beta) + \underbrace{B}_{\text{0.stepen}}\sin(0\beta)\Big)$$

$$y_p = Axe^{-\frac{1}{2}x},\ y_p' = A(1-\frac{x}{2})e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$y_p'' = A(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x}{4})e^{-\frac{1}{2}x} = A(\frac{x}{4} - 1)e^{-\frac{1}{2}x},\ y_p''' = A(\frac{1}{4} - \frac{x}{8} + \frac{1}{2})e^{-\frac{1}{2}x} = A(\frac{3}{4} - \frac{x}{8})e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$A(\frac{3}{4} - \frac{x}{8})e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{7}{2}A(\frac{x}{4} - 1)e^{-\frac{1}{2}x} + 2A(1 - \frac{x}{2})e^{-\frac{1}{2}x} + 2Axe^{-\frac{1}{2}x} = e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$(-\frac{A}{8} - \frac{7}{8}A + 2A - A)x + (\frac{3}{4} + \frac{7}{2} + 2)A = 1 \Rightarrow A = \frac{4}{25}$$

$$y_p = \frac{4}{25}xe^{-\frac{1}{2}x}.$$

$$\boxed{y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{4}{25}xe^{-\frac{1}{2}x}}$$ Opšte rešenje

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \overset{\text{"}\infty\cdot 0\text{"}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\frac{1}{2}x}} \underset{\text{L.P.}}{\overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}} = 0$$

$$y(0) = c_1 + c_3 = 1 \Rightarrow c_3 = 1,\ \lim_{x\to\infty} y(x) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

$$\boxed{y = (\frac{4}{25}x + 1)e^{-\frac{1}{2}x}.}$$ Rešenje zadatka

3. (za domaći) Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y''' - 2y'' = x\sin 2x + x + 2$.

Metod varijacije konstanti

Ako je poznat fundamentalni skup rešenja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ homogene diferencijalne jednačine tada se partikularno rešenje može naći u obliku $y_p = C_1(x)\cdot y_1 + C_2(x)\cdot y_2 + \ldots + C_n(x)\cdot y_n$, gde su funkcije $C_i'(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ određene iz sistema jednačina

$$
\begin{aligned}
&C_1'(x)\cdot y_1 + C_2'(x)\cdot y_2 + \ldots + C_n'(x)\cdot y_n = 0\\
&C_1'(x)\cdot y_1' + C_2'(x)\cdot y_2' + \ldots + C_n'(x)\cdot y_n' = 0\\
&\vdots\\
&C_1'(x)\cdot y_1^{(n-1)} + C_2'(x)\cdot y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)\cdot y_n^{(n-1)} = f(x),
\end{aligned}
$$

a zatim se funkcije $C_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ određuju iz $C_i(x) = \int C_i'(x)dx$.

4. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

- y_h $y'' - 2y' + y = 0 \Rightarrow r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r-1)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 1$

  $y_h = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x$ $\{e^x, xe^x\}$ fundamentalni skup rešenja

- y_p $y_p = c_1(x)\cdot e^x + c_2(x)\cdot x \cdot e^x$

  Rešavajući sistem

  $$c_1'(x)\cdot e^x + c_2'(x)\cdot x\cdot e^x = 0$$

  $$c_1'(x)\cdot e^x + c_2'(x)\cdot (x+1)\cdot e^x = \frac{e^x}{x}$$ $/(-1)$

  dobićemo da je

  $$c_2'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow c_2(x) = \int c_2'(x)dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$

  bez konstanti!

  $$c_1'(x) = -x\cdot c_2'(x) = -x\cdot\frac{1}{x} = -1 \Rightarrow c_1(x) = \int c_1'(x)dx = -\int dx = -x$$

  Dakle, $y_p = -xe^x + xe^x \cdot \ln|x|$, pa je $\boxed{y = y_h + y_p = c_1e^x + c_2xe^x - xe^x + xe^x\cdot\ln|x|}$.

5. (za domaći) Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^x}$.

☺