Diskretna matematika
PRVI TEST

Ime i prezime: ______________________________
Broj indeksa: ______________________________

Novi Sad, 15. 04. 2018

1. **Odrediti broj binarnih reči dužine 5 koje počinju sa 0 ili se završavaju sa 1.**

   Neka je A skup reči dužine 5 koje počinju sa 0, a B skup reči koje se završavaju sa 1. Broj reči koje počinju sa 0 jednak je broju reči koje se završavaju sa 1, a taj broj je 2^4. Preseku skupova A i B pripadaju sve reči dužine 5 koje počinju sa 0 i završavaju se sa 1. Primenom principa uključenja isključenja dobijamo

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 16 + 16 - 8 = 24.$$

2. **Izračunati**

$$\sum_{\substack{i+j+k=3 \\ 0<i,j,k\leq 3}} \binom{3}{i,j,k} 2^i = \binom{3}{1,1,1} 2^1 = 3! \cdot 2 = 12.$$

3. **Napisati tablicu Stirlingovih brojeva** $S(n,m)$ **druge vrste za** $1 \leq n \leq 4$.

(n,m)	1	2	3	4
1	1			
2	1	1		
3	1	3	1	
4	1	7	6	1

4. **Neka je** $|A| = 4$ **i** $|B| = 3$. **Odrediti broj "na" preslikavanja skupa** A **u skup** B**, koristeći tablicu iz prethodnog zadatka.**

   Broj bijektivnih preslikavanja skupa A u B jednak je

$$|\{f : A \to B : f \text{ je „na"}\}| = 3! \cdot S(4,3) = 6 \cdot 6 = 36$$

5. **Rešiti rekurentnu relaciju** $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $f_0 = 0$, $f_1 = 1$.

   Karakteristična jednačina:

$$k^2 - k - 1 = 0 \Leftrightarrow k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

   Odatle je

$$f_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

   Na osnovu početnih uslova, zaključujemo da važi

$$\begin{array}{l} \alpha + \beta = 0 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\beta = 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \beta = -\alpha \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\alpha = 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{array}$$

   Rešenje rekurentne relacije je

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, n \geq 0.$$

6. ("usmeni") **Napisati i dokazati Paskalov identitet.**

Za cele brojeve n i m, $1 \leq m \leq n$, važi

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

Dokaz.

1. način (kombinatorno)

Posmatrajmo skup A sa $n \geq 1$ elemenata i izaberimo proizvoljno element $a \in A$. Neka je

S_m - skup podskupova skupa A sa m elemenata;
S_m^a - skup podskupova skupa A sa m elemenata koji sadrže a; i
$S_m^{\bar{a}}$ - skup podskupova skupa A sa m elemenata koji ne sadrže a.

Tada je

$$S_m = S_m^a \cup S_m^{\bar{a}}, \qquad S_m^a \cap S_m^{\bar{a}} = \emptyset.$$

Broj podskupova skupa A sa m elemenata koji sadrže a jednak je broju načina da iz skupa od $n-1$ elemenata ($|A \setminus \{a\}|$) izaberemo preostalih $m-1$ elemenata, a to je $\binom{n-1}{m-1}$.
Broj podskupova skupa A sa m elemenata koji ne sadrže a jednak je broju načina da iz skupa od $n-1$ elemenata ($|A \setminus \{a\}|$) izaberemo svih m elemenata, a to je $\binom{n-1}{m}$.
Prema principu zbira

$$|S_m| = |S_m^a| + |S_m^{\bar{a}}|, \text{ tj. } \binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}.$$

2. način (algebarski)

Koristeći definiciju i osobine binomnog koeficijenta, dobijamo

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m-1} &= \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} + \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} \\
&= \frac{m \cdot (n-1)! + (n-m) \cdot (n-1)!}{m!(n-m)!} \\
&= \frac{(m+n-m) \cdot (n-1)!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m}
\end{aligned}$$