ВЕЖБЕ 13

1. Нека је G граф са непарним бројем чворова. Доказати да G и $\bar{G}$ имају исти број чворова непарног степена.

$$|V(G)| = n \equiv 1 \pmod 2$$

За сваки граф важи

$$d_G(v) + d_{\bar{G}}(v) = n-1 \equiv 0 \pmod 2 \quad , \forall v \in V(G)$$

Сада су степени чвора v у G и $\bar{G}$ оба парна или оба непарна, па тривијално важи да графови G и $\bar{G}$ имају исти број чворова непарног степена.

2. Нека је G граф са $n=4k-1$ чворова. Тада бар један од графова G и $\bar{G}$ садржи чвор степена $\geq 2k$.

Ако G садржи чвор степена $\geq 2k$, доказ је готов.

Претпоставимо да граф G не садржи чвор степена $\geq 2k$, тј. $\Delta(G) < 2k$

$\forall v \in V(G) \quad d_G(v) \leq 2k-1$

Уколико би сви чворови у G били степена $2k-1$, добили бисмо граф са непарним бројем чворова непарног степена $\lightning$

$\Rightarrow \exists\, u \in V(G)$ т.д. $d_G(u) \leq 2k-2$

Посматрајмо чвор u у графу $\bar{G}$

$$d_{\bar{G}}(u) = n-1-d_G(u) \geq 4k-2-(2k-2) = 4k-\cancel{2}-2k+\cancel{2} = 2k$$

Сада је чвор u тражени чвор степена $\geq 2k$ у графу $\bar{G}$.

3. Нека је G граф са n чворова у ком су u и v несуседни чворови за које важи $d(u)+d(v) \geq n+r-2$, за неко $r \in \mathbb{N}$. Доказати да u и v имају бар r заједничких суседа.

Треба доказати $|N(u) \cap N(v)| \geq r$

принцип укључења и искључења $|N(u) \cup N(v)| = |N(u)| + |N(v)| - |N(u) \cap N(v)|$

$|N(u) \cap N(v)| = |N(u)| + |N(v)| - |N(u) \cup N(v)| = d(u) + d(v) - |N(u) \cup N(v)|$

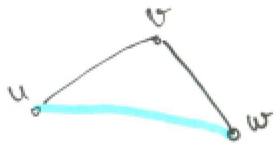
$N(u) \subseteq V(G) \setminus \{u,v\}$ (G је прост граф и чворови u и v су несуседни)

$N(v) \subseteq V(G) \setminus \{u,v\}$

$N(u) \cup N(v) \subseteq V(G) \setminus \{u,v\} \Rightarrow |N(u) \cup N(v)| \leq n-2$

Сада је $|N(u) \cap N(v)| = \underbrace{d(u) + d(v)}_{\geq n+r-2} \underbrace{- \underbrace{|N(u) \cup N(v)|}_{\leq n-2}}_{\geq -n+2} \geq n+r-2-(n-2) = \cancel{n}+r-\cancel{2}-\cancel{n}+\cancel{2} = r$

4. Ако за свака три чвора u, v и w графа G важи



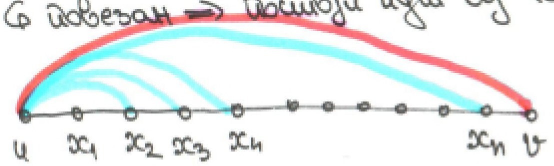
$$uv\in E(G) \wedge vw\in E(G) \Rightarrow uw\in E(G) \quad (*)$$

тада је G комплетан граф или дисјунктна унија комплетних графова.

Претпоставимо да је G повезан граф у ком важи услов $(*)$

Претпоставимо да G није комплетан граф, тј. $\exists\, u,v\in V(G)$ т.д. $uv\notin E(G)$

G повезан $\Rightarrow$ постоји пут од чвора u до чвора v



$ux_1\in E(G) \wedge x_1x_2\in E(G) \overset{(*)}{\Rightarrow} ux_2\in E(G)$

$ux_2\in E(G) \wedge x_2x_3\in E(G) \overset{(*)}{\Rightarrow} ux_3\in E(G)$

$\vdots$

$ux_n\in E(G) \wedge x_nv\in E(G) \overset{(*)}{\Rightarrow} uv\in E(G)$ ↯ (Претпоставили $uv\notin E(G)$)

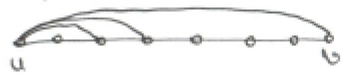
$\Rightarrow G$ је комплетан граф

Ако је G неповезан граф, онда малопре описаним поступком закључујемо да је свака компонента повезаности графа G комплетан граф, па је G унија комплетних графова.

II начин: G повезан, важи $(*)$

Посматрајмо произвољне чворове u и v графа G. Посматрајмо најкраћи $(u-v)$ пут у G.

- дужине 1 ✓ $\Rightarrow G$ комплетан
- дужине ≥ 2



$\Rightarrow uv\in E(G)$. Сада је грана uv најкраћи $(u-v)$ пут ↯

5. Нека је G граф са n чворова и $e \geq \binom{n-1}{2}+1$ грана. Доказати да је G повезан граф.

Претпоставимо да G није повезан граф.

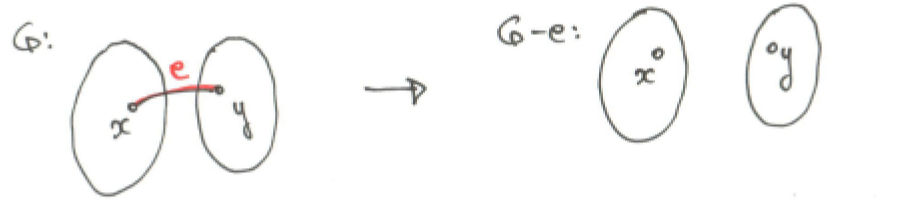
Сада је граф $\overline{G}$ повезан. Нека је $e' = |E(\overline{G})|$

Из чињенице да је $\overline{G}$ повезан следи $e' \geq n-1$.

Даље је

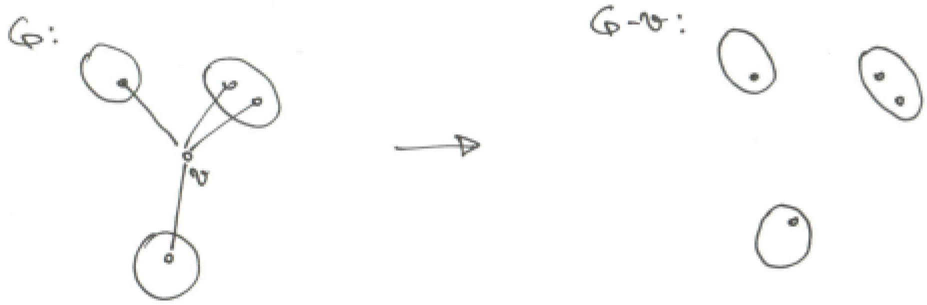
$$e = \binom{n}{2} - e' \leq \binom{n}{2} - (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{n-1}{2}(n-2) = \binom{n-1}{2} < \binom{n-1}{2}+1 \quad \left(e \geq \binom{n-1}{2}+1\right)$$

Грана $e = xy$ je МОСТ акко $\omega(G-e) > \omega(G)$



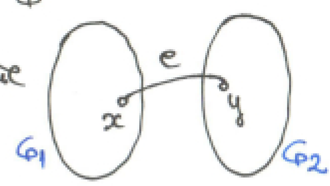
$\omega(G-e) = \omega(G)+1$

Чвор v je АРТИКУЛАЦИОНИ ЧВОР акко $\omega(G-v) > \omega(G)$



6. Доказати да ако су сви чворови графа G парног степена, онда G нема мост.

Нека је G граф који има све чворове парног степена и нека је грана $e=xy$ мост у графу G. Нека је, б.у.о., граф G повезан.



Брисањем моста $e=xy$, граф G се распада на две компоненте повезаности, графове G_1 и G_2.

Нека је $x \in V(G_1)$

Сада је чвор x чвор непарног степена у графу G_1, док су сви остали чворови у G_1 остали парног степена. $\lightning$ (Граф G_1 има тачно један чвор непарног степена, што је немогуће)

$\Rightarrow$ Граф G не може да садржи мост

Ако је G неповезан граф, читав доказ поновимо за компоненту повезаности графа G која садржи мост.

7. Доказати да је граф G шума акко сваки његов индукован подграф садржи чвор чији је степен мањи или једнак од један.

(⇒) Нека је G шума и нека је H произвољан индукован подграф графа G.

Претпоставимо да H не садржи чвор степена ≤ 1, тј. $\delta(H) \geq 2$.

$\overset{ВВ}{\Longrightarrow}$ H садржи контуру C $\Rightarrow$ G такође садржи контуру C ↯ (G је ацикличан)

(⇐) Нека је граф G такав да сваки његов индуковани подграф садржи чвор степена ≤ 1.

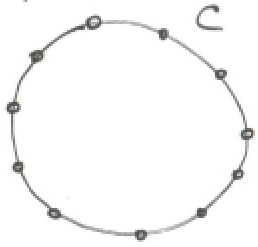
Претпоставимо да G није шума, тј. да постоји контура C у графу G

$C = v_1 v_2 v_3 v_4 \dots v_k v_1$

Нека је H подграф који индукују чворови са контуре, $H = G[v_1, v_2, \dots, v_k]$

Подграф H садржи све гране са контуре C и евентуално још неке тетиве те контуре.

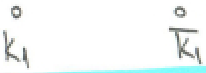
C



$\Rightarrow d_H(v) \geq 2,\ \forall v \in V(H)$ ↯ (са претпоставком смера)

8. Пронаћи сва стабла чији је комплемент такође стабло.

• $n=1$



K_1 $\quad \overline{K_1}$ ✓

• $n=2$

K_2 $\quad \overline{K_2}$ шума ✗

• $n=3$

P_3 $\quad \overline{P_3}$ шума ✗

Знамо да свако стабло са n чворова има $n-1$ грану.

$$|E(T_n)| + |E(\overline{T_n})| = \binom{n}{2}$$

$$(n-1) + (n-1) = \binom{n}{2}$$

$$2(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$4(n-1) = n(n-1)$$

$$(n-4)(n-1) = 0$$

$$n=1 \quad \vee \quad n=4$$

• $n=4$

P_4 $\quad \overline{P_4}$

Постоји још једно стабло са 4 чвора

комплемент није повезан и садржи контуру

$\Rightarrow$ није стабло

9. Доказати да је k-регуларан граф са $2k-1$ чворова Хамилтонов.

Посматрајмо несуседне чворове u и v.

$$d(u) + d(v) = k + k = 2k > 2k-1 = |V(G)|$$

$$\overset{\text{Ореа}}{\Longrightarrow} G \text{ је Хамилтонов}$$

10. Ако стабло T има бар један чвор степена 2 тада његов комплемент $\overline{T}$ није Ојлеров.

Разликујемо два случаја.

1° n парно

Нека је u чвор степена 2, $d_T(u)=2$

Сада је $d_{\overline{T}}(u) = n-1-d_T(u) = n-1-2 = n-3$ непарно

$\Rightarrow \overline{T}$ има чвор непарног степена $\Rightarrow \overline{T}$ није Ојлеров

2° n непарно

T је стабло $\Rightarrow T$ има бар два виселта чвора v и w

Сада је $d_{\overline{T}}(v) = n-1-d_T(v) = n-1-1 = n-2$ непарно

$\Rightarrow \overline{T}$ има чвор непарног степена (бар 2 чвора) $\Rightarrow \overline{T}$ није Ојлеров

11. Нека је G повезан планаран граф такав да је $\delta(G) \geq 3$. Доказати да најмање 2 области графа G имају највише 5 ивица.

Доказујемо $r_3+r_4+r_5 \geq 2$.

Претпоставимо супротно, да области са највише 5 ивица у графу G имамо највише једн

$r_3+r_4+r_5 \leq 1$

$r = r_3+r_4+r_5+r_6+r_7+\dots \leq 1 + r_6+r_7+\dots$

$2e = \underbrace{3r_3+4r_4+5r_5}_{0,3,4,5} + \underbrace{6r_6+7r_7+8r_8+\dots}_{\geq 6\cdot(r-1)} \geq 6\cdot(r-1)$

$2e \geq 6r-6$

$e \geq 3r-3 \rightarrow 3r \leq e+3$

Ојлерова формула: $r+n-e=2 \; / \cdot 3$

$6 = 3r+3n-3e \leq e+3+3n-3e = 3n-2e+3$

$\boxed{2e \leq 3n-3}$

Са друге стране из услова $\delta(G) \geq 3$ добијамо

$2e = \sum d(v) \geq 3n$

$2e \leq 3n-3 \qquad 2e \geq 3n$ ↯

$\Rightarrow$ Број области са највише 5 ивица мора бити ≥ 2.