

Дискретна математика

Колоквијум I

Група А

1. Доказати да ако се из скупа $\{1, 2, \dots, 11\}$ извуче 7 различитих бројева, тада ће међу извученим бројевима увек постојати два броја чији је збир 12.
2. На колико начина је од 4 мушкарца и 7 жена могуће изабрати делегацију у којој ће бити једнак број мушкараца и жена?
3. Милица у касици има 10 новчића од 1 динар, 6 новчића од 2 динара, 5 новчића од 5 динара и 4 новчића од 10 динара. Под претпоставком да се новчићи са истом вредношћу не разликују, одредити на колико начина Милица може узети 8 новчића из касице.
4. Ако се зна да су сви чланови низа a_n различити решити рекурентну релацију

$$a_{n+2} = a_{n+1}a_n^6, a_0 = 1, a_1 = 3.$$

Дискретна математика

Колоквијум I

1. Колико има речи дужине 5 над азбуком $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ код којих се слова не понављају и које не садрже подреч abc ?
2. Одредити број решења неједначине

$$7 \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 12$$

у скупу природних бројева.

3. Наћи коефицијент уз x^9 у развоју израза $(1 - 4x)^6(1 + 3x^2)^8$.
4. Решити рекурентну релацију

$$f_n = 3f_{n-1} - 4f_{n-3}, f_0 = 0, f_1 = 3, f_2 = 21.$$

Дискретна математика

Колоквијум I

Група А

1. Из скупа $\{1, 2, \dots, 30\}$ се насумично извлачи 12 бројева. Доказати да међу извученим бројевима увек постоје два броја чији је највећи заједнички делилац већи од 1.
2. На колико начина 10 дечака и 5 девојчица могу стати у круг ако две девојчице не смеју да стоје једна до друге?
3. На колико начина је могуће извући 6 карата из стандардног шпила од 52 карте ако међу извученим картама треба да буду заступљена сва четири знака?
4. Колико има речи дужине n над азбуком $\{0, 1, 2\}$ које садрже паран број нула?

Дискретна математика

Колоквијум I

Група А

1. Доказати да у сваком скупу од 36 природних бројева морају постојати два броја чија је разлика дељива са 35.
2. Одредити број решења система једначина

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_7 = 35$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

у скупу природних бројева.

3. На колико начина се 6 књига на енглеском, 7 књига на немачком и 5 књига на руском може распоредити на полицу тако да књиге на истом језику не буду груписане све заједно?
4. Решити систем рекурентних релација

$$a_{n+1} = a_n - b_n$$

$$b_{n+1} = a_n + 3b_n,$$

уз почетне услове $a_0 = -1, b_0 = 5$.

Дискретна математика

Колоквијум I

1. Торता која има облик правилног шестоугла странице 15 *cm* украшена је са 7 цвєтова. Доказати да се бар два цвєта не налазе на растојању већем од 15 *cm*.
2. На колико начина 7 дечака и 3 девојчице могу да стану у ред ако никоје две девојчице не стоје једна поред друге и на почетку и крају реда треба да буде дечак?
3. Одредити број целобројних решења једначине $x_1 + x_2 + x_3 = 28$, ако је $3 \leq x_1 \leq 9$, $0 \leq x_2 \leq 8$, $7 \leq x_3 \leq 17$.
4. Решити рекурентну релацију

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2^n,$$

уз почетне услове $a_0 = 0, a_1 = 5$.

Дискретна математика

Колоквијум I

1. У 15 клупа у учионици треба распоредити 15 дечака и 15 девојчица тако да у свакој клупи седе један дечак и једна девојчица. На колико начина је то могуће учинити?
2. Доказати да важи $\sum_{k=0}^n k \binom{m}{k} \binom{n}{k} = n \binom{m+n-1}{n}$.
3. Колико има речи дужине 4 над азбуком $\{0, 1, 2\}$ које садрже тачно две јединице?
4. Правоугаоник величине $2 \times n$ издељен је на $2n$ једнаких квадрата. Колико има начина да се прекрије правоугаоник ако се користе следеће плочице? (Плочице се могу ротирати за целобројне умношке правог угла.)



Дискретна математика

Колоквијум I

Група А

1. Из скупа $\{1, 2, \dots, 25\}$ се насумично извлачи 14 бројева. Доказати да међу изабраним бројевима увек морају постојати два узастопна природна броја.
2. Азбука садржи 5 самогласника (A, E, I, O, U) и 25 сугласника. Посматрају се речи дужине 8 над азбуком (без обзира на смисао) које садрже 3 самогласника, 5 сугласника и у којима нема понављања слова. Колико таквих речи почиње словом A и завршава се словом B ?
3. Патуљци Уча, Срећко, Кијавко, Поспанко, Сидљивко, Љутко и Тупко треба у руднику да ураде послове $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ и P_7 . Ако се зна да сваки патуљак ради тачно један посао и да Поспанко не може да ради P_2 , Сидљивко не може P_6 , Уча не може P_1 и Љутко не може P_3 и P_7 , одредити на колико начина патуљци могу да заврше послове у руднику.
4. Решити рекурентну релацију

$$a_n = 10a_{n-2} - 9a_{n-4}, n \geq 4,$$

ако је $a_0 = 0, a_1 = a_2 = 1, a_3 = 4$.

Дискретна математика

Колоквијум I

1. Дате су паралелне праве p и q . На правој p је уочено m , а на правој q n тачака. Колико троуглова образују дате тачке?
2. Доказати да важи $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = (n^2 + n)2^{n-2}$.
3. На колико начина се може бацити 8 различитих коцкица за игру тако да се на њима појави свих 6 бројева?
4. Ако се зна да су сви чланови низа a_n различити решити рекурентну релацију

$$a_{n+2} = a_{n+1}^3 a_n^4, a_0 = 1, a_1 = 4.$$

Дискретна математика

Колоквијум I

Група А

1. У правоугаоник димензија 24 cm и 12 cm је распоређено 25 тачака. Доказати да постоје две тачке које нису на растојању већем од 5 cm .
2. Из кутије у којој се налазе куглице нумерисане бројевима $0, 1, 2, \dots, 9$, извлачи се са враћањем 8 куглица. Колико има извлачења у којима је изабрана бар једна парна куглица? (Редослед којим се извлаче куглице није битан.)
3. Колико се различитих бројева може написати од цифара броја 12345413, ако никоје две исте цифре не стоје једна до друге?
4. Решити систем рекурентних релација

$$a_n + 2a_{n-1} - 4b_{n-1} = 0$$

$$b_n + 5a_{n-1} - 7b_{n-1} = 0,$$

ако је $a_0 = 4, b_0 = 3$.