ISPITIVANJE FUNKCIJA

Obavezna grupa zahteva:

1) Oblast definisanosti (skup x-eva za koje postoji y)
2) Nule funkcije (skup x-eva za koje je $y = 0$)
3) Određivanje intervala monotonosti i ekstremnih vrednosti

   $f'(x) > 0 \Rightarrow$ funkcija $f(x)$ je monotono rastuća
   $f'(x) < 0 \Rightarrow$ funkcija $f(x)$ je monotono opadajuća

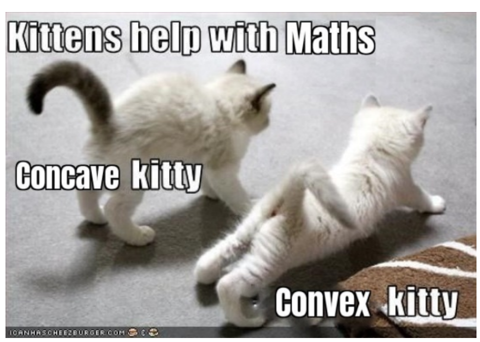
   Tačke u kojima je $f'(x) = 0$ su stacionarne tačke.
   Ako je realna funkcija $f(x)$ definisana u nekoj okolini tačke $a \in R$, tada kažemo da funkcija $f(x)$ u tački a ima minimum (maksimum) ako postoji $\delta > 0$, takvo da za $x \in (a-\delta,\ a) \cup (a,\ a+\delta) \Rightarrow f(x) > f(a)\ \ (f(x) < f(a))$. Ako funkcija u tački a ima minimum ili maksimum kažemo da u tački a funkcija ima ekstremnu vrednost.
   Ako funkcija $f(x)$ u tački a ima ekstremnu vrednost i ako postoji $f'(a)$ tada je $f'(a) = 0$.
   Jedna od mogućnosti da se ispita da li funkcija u tački a ima ekstremnu vrednost ili ne jeste da se ispita znak prvog izvoda.

   Teorema: Ako je funkcija u tački a neprekidna i ako postoji $\delta > 0$ takvo da za $x \in (a-\delta, a)$ je $f'(x) > 0,\ (f'(x) < 0)$, a za $x \in (a, a+\delta)$ je $f'(x) < 0\ \ (f'(x) > 0)$ onda funkcija u tački a ima ekstremnu vrednost i to maksimum (minimum).

   (Ako je funkcija u tački a neprekidna i ako u tački a prvi izvod menja znak onda funkcija u tački a ima ekstremnu vrednost.)

4) Određivanje konveksnosti, konkavnosti i prevojnih tačaka

   $f''(x) > 0 \Rightarrow$ funkcija $f(x)$ je konveksna ☺ (nije kraj, samo smo nasmejani)
   $f''(x) < 0 \Rightarrow$ funkcija $f(x)$ je konkavna ☹



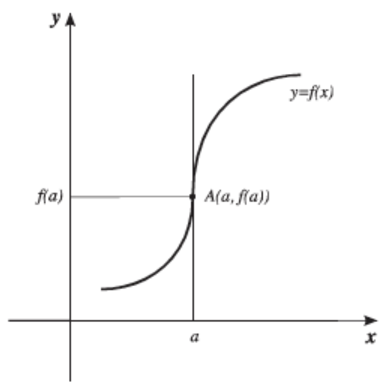
   Ako je $P(a, f(a))$ prevojna tačka funkcije $f(x)$ i ako $\exists f''(a) \Rightarrow f''(a) = 0$.
   Tačka $P(a, f(a))$ je prevojna tačka funkcije $f(x)$ ako funkcija $f(x)$ u tački a prelazi iz konveksnosti u konkavnost ili obrnuto.

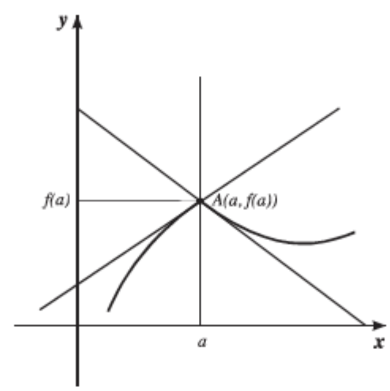
5) Asimptote funkcije

- Vertikalna asimptota je prava $x = a$ (u tačkama prekida domena) ako je $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$ ili $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$
- Kosa asimptota je prava $y = kx + n$, gde je
  $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $\qquad$ $n = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx)$
  Napomena: Asimptote funkcije ne moraju biti iste kada $x \to +\infty$ odnosno $x \to -\infty$.
- Horizontalna asimptota je prava $y = n$, gde je
  $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = n$

6) Tangenta funkcije (u tačkama gde ne postoji prvi izvod)

Poznato je da prvi izvod predstavlja tangens ugla α koji tangenta na funkciju u tački $(a, f(a))$ zaklapa sa pozitivnim smerom x-ose. Neka je sada a tačka u kojoj ne postoji prvi izvod funkcije.
Tangenta na grafik funkcije u tački $(a, f(a))$ može biti paralelna sa y-osom: ako je $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = \pm\infty$, onda je prava $x = a$ jednačina tangente na desnu granu grafika funkcije $f(x)$ u tački $(a, f(a))$, kao npr. na prvoj slici.





Na drugoj slici je ilustrovana situacija kada je $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = A \neq \pm\infty$. Tada je desna tangenta (tangenta na desnu granu grafika funkcije) u tački $(a, f(a))$ paralelna sa pravom $y = Ax$.
Slično važi za levu tangentu.

7) Grafik funkcije

Neobavezna grupa zahteva:

1) Znak funkcije ($y > 0, y < 0$)

2) Parnost

$f(-x) = f(x)$ parna (grafik osno simetričan u odnosu na y-osu)

$f(-x) = -f(x)$ neparna (grafik centralno simetričan u odnosu na $(0,0)$)

3) Periodičnost

ZADACI:

1. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $y = \sqrt{\dfrac{(x-2)^3}{x}}$.

1) Domen

$$x \neq 0 \wedge \frac{(x-2)^3}{x} \geq 0$$

	$-\infty$	0		2	∞
$(x-2)^3$	-	-	-	0	+
x	-	0	+	+	+
$\dfrac{(x-2)^3}{x}$	+		-	0	+

$$D = R \setminus [0,2) = (-\infty,0) \cup [2,+\infty)$$

2) Nule funkcije

$$y = \sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^3}{x} = 0 \Leftrightarrow (x-2)^3 = 0 \Leftrightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$$

3) Parnost

Domen nije simetričan u odnosu na koordinatni početak $\Rightarrow$ ni parna ni neparna

4) Znak

$$y \geq 0, \forall x \in D$$

5) Asimptote

$$\lim_{x\to 0^-} \sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}} = \infty \Rightarrow$$ prava $x=0$ je vertikalna asimptota funkcije

$$\lim_{x\to \pm\infty} \sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}} = \infty \Rightarrow$$ funkcija nema horizontalnu asimptotu

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{(x-2)^2(x-2)}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{|x-2|}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}} = 1$$

$$n_1 = \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-x\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}} - x\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x^3}} - 1\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\dfrac{(x-2)^3}{x^3}} - 1}{\dfrac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\frac{x-2}{x})^{\frac{3}{2}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{2}\cdot(\frac{x-2}{x})^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{x-(x-2)}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -3\cdot \lim_{x\to\infty}(\frac{x-2}{x})^{\frac{1}{2}} = -3$$

$\Rightarrow$ prava $y_1 = x - 3$ je kosa asimptota funkcije kada $x \to \infty$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x-2|}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2-x}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}} = -1$$

$$n_2 = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}} + x\right] = \lim_{x\to-\infty}(|\,\mathrm{x}\,|\cdot\sqrt{(\frac{x-2}{x})^3} + x) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}(-x\sqrt{(\frac{x-2}{x})^3} + x) = \lim_{x\to-\infty} x(1-\sqrt{(\frac{x-2}{x})^3}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-(\frac{x-2}{x})^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{x}} = 3$$

$\Rightarrow$ prava $y_2 = -x + 3$ je kosa asimptota funkcije kada $x \to -\infty$

6) Monotonost i ekstremne vrednosti

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}}} \cdot \frac{3(x-2)^2\cdot x - (x-2)^3}{x^2} = \frac{(x-2)^2(3x-x+2)}{2\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}}\cdot x^4} = \frac{2(x+1)\sqrt{(x-2)^4}}{2\sqrt{x^3(x-2)^3}} =$$

$$= (x+1)\sqrt{\frac{x-2}{x^3}}$$

	$-\infty$	-1		0		2	∞
$x+1$	-	0	+			+	+
y'	-	0	+			0	+
y	↘	0	↗				↗

?

$y' > 0$ za $x \in (-1, 0) \cup [2, \infty)$, funkcija raste,

$y' < 0$ za $x \in (-\infty, -1)$, funkcija opada

Napomena: Kada pišemo da funkcija raste (opada) za $x \in (-1,0)\cup[2,\infty)$, to znači da funkcija raste (opada) nad intervalom $(-1, 0)$ i da funkcija raste (opada) nad intervalom $[2, \infty)$.

Funkcija ima minimum $\sqrt{27}$ za $x = -1$ ($y(-1) = \sqrt{\frac{(-1-2)^3}{-1}} = \sqrt{27}$).

7) Tangente

$tg\alpha = \lim_{x\to 2^+} f'(x) = 3\cdot\sqrt{\frac{0}{8}} = 0$ - koeficijent pravca tangente

$\alpha = 0$ - ugao između tangente i pozitivnog smera x-ose

8) Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke

$$y'' = \sqrt{\frac{x-2}{x^3}} + (x+1)\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{x-2}{x^3}}}\cdot\frac{x^3-(x-2)\cdot 3x^2}{x^6} = \sqrt{\frac{x-2}{x^3}}\cdot(1+\frac{(x+1)(x-3x+6)}{\frac{2(x-2)}{x^3}\cdot x^4}) =$$

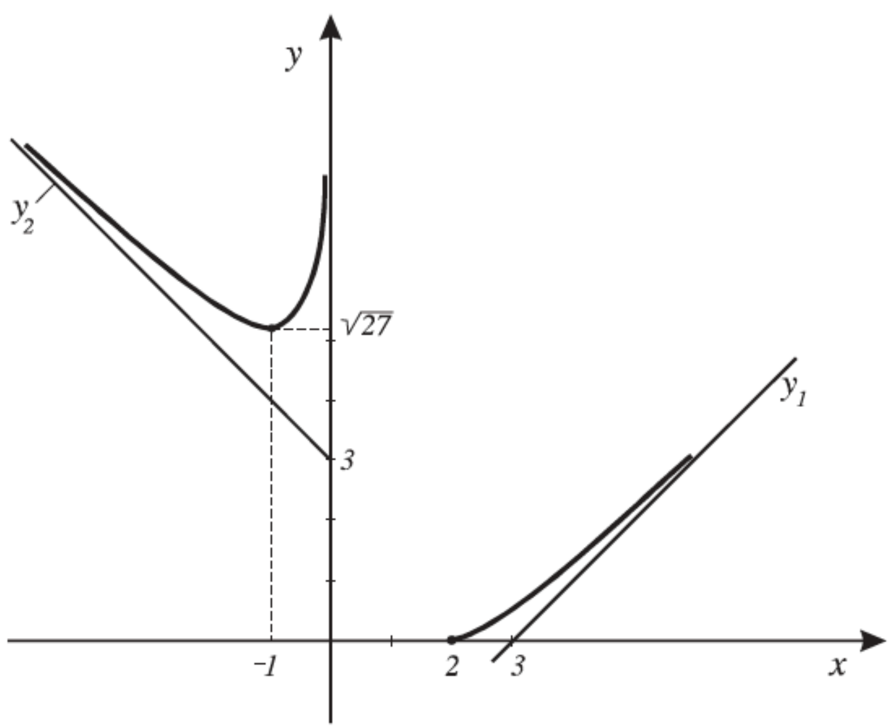
$$= \sqrt{\frac{x-2}{x^3}}\cdot\frac{x^2-2x+(x+1)(3-x)}{x(x-2)} = \sqrt{\frac{x-2}{x^3}}\cdot\frac{x^2-2x+3x-x^2+3-x}{x(x-2)} = \frac{3}{x(x-2)}\cdot\sqrt{\frac{x-2}{x^3}}$$

	$-\infty$	0		2	∞
3	+			+	+
x	-	0		+	+
$x-2$	-			0	+
y''	+			0	+
y	∪				∪

$y'' > 0$ za $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, funkcija je konveksna
Funkcija nema prevojnih tačaka.

Napomena: Kada pišemo da je funkcija konveksna (konkavna) za $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, to znači da je funkcija konveksna (konkavna) nad intervalom $(-\infty, 0)$ i da je funkcija konveksna (konkavna) nad intervalom $(2, \infty)$.

9) Grafik funkcije



☺