1. Naći sve proste implikante i minimalne DNF Bulove funkcije f date tabelom:

x	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
y	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
z	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
u	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
f	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1

Rešenje $f(x,y,z,u) = xyzu + xyz'u + xy'zu' + xy'z'u' + x'yzu' + x'yz'u + x'yz'u' + x'y'zu' + x'y'z'u'$ je SDNF bulove funkcije f. Proste implikante su : $y'u', x'u', xyu, yz'u, x'yz'$. Minimalne disjunktivne normalne forme su: $y'u' + x'u' + xyu + yz'u$ i $y'u' + x'u' + xyu + x'yz'$.

2. Odrediti kompleksne brojeve α i β, kao i rešenja jednačine $(z-\alpha)^6 = \beta$, tako da 0 i 1 budu rešenja te jednačine, pri čemu imaginarni delovi svih rešenja su nenegativni. Koju figuru u kompleksnoj ravni obrazuju rešenja jednačine $(z-\alpha)^6 = \beta$?

Rešenje Jasno je da su $z_0 = 0$ i $z_1 = 1$ susedna temena pravilnoga šestougla $z_0z_1z_2z_3z_4z_5$, čija sva temena su sva rešenja jednačine $(z-\alpha)^6 = \beta$. Kompleksni broj α je centar toga šestougla i očevidno treće teme jednakostraničnog trougla $z_0z_1\alpha$, pa je $\alpha = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$. Ako sad u datu jednačinu $(z-\alpha)^6 = \beta$ uvrstimo $\alpha = e^{i\frac{\pi}{3}}$ i $z = 0$, dobija se $\beta = 1$. Sada se lako dobijaju ostala rešenja rotacijom oko α za ugao $\frac{\pi}{3}$ tj. $z_k = \alpha + (z_{k-1} - \alpha)e^{i\frac{\pi}{3}}$ za $k = 2,3,4,5$ odnosno $z_2 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_4 = i\sqrt{3}$, $z_5 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Neka je $(z-w)^4 = v$ kompleksna jednačina po nepoznatoj z. **(a)** Šta obrazuju u kompleksnoj ravni rešenja jednačine $(z-w)^4 = v$ i odrediti sve vrednosti za w ako su 0 i 1 rešenja jednačine $(z-w)^4 = v$. **(b)** Faktorisati nad poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ polinom f definisan sa $f(w) = 4w^3 - 6w^2 + 4w - 1$.

Rešenje (a) Za fiksne w i v važi: ako je $v = 0$, tada jednačina ima jedno rešenje $z = w$ (tačka); ako je $v \neq 0$, tada jednaćina ima 4 rešenja $z_i = w + \sqrt[4]{v}$ koja čine kvadrat sa težištem (presekom dijagonala) w i poluprečnikom opisane kružnice $\sqrt[4]{|v|}$. Ako su 0 i 1 dva od četiri temena tog kvadrata, tada je skup svih temena tog kvadrata $K_1 = \{0, 1, 1+i, i\}$ ili $K_2 = \{0, 1, 1-i, -i\}$ ili $K_3 = \{0, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, 1, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\}$. Preseci dijagonala ovih kvadrata su redom $w_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, $w_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ i $w_3 = \frac{1}{2}$. **(b)** $4w^3 - 6w^2 + 4w - 1 = 0 \Leftrightarrow -w^4 + 4w^3 - 6w^2 + 4w - 1 = -w^4 \Leftrightarrow -(w-1)^4 = -w^4 \Leftrightarrow \left(\frac{w-1}{w}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{w-1}{w} = \sqrt[4]{1} \in \{1, i, -1, -i\} \wedge w \neq 1\right) \Leftrightarrow \frac{w-1}{w} \in \{i, -1, -i\} \Leftrightarrow w \in \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\}$, te je $f(w) = (w - \frac{1}{2})(w - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)(w - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) = (w - \frac{1}{2})(w^2 - w + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(2w-1)(2w^2 - 2w + 1) = \frac{1}{4}(4w^3 - 6w^2 + 4w + 1)$. Centri ova tri kvadrata su koreni ovoga kubnoga polinoma!!!

4. Naći proste implikante i minimalne disjunktivne normalne forme Bulove funkcije date tablicom:

x	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
y	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
z	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
u	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
f	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1

Rešenje Proste implikante su: $y'u'$, xyu, xzu, $xy'z$, $x'z'u$, $x'y'z'$, $yz'u$. Minimalne disjunktivne normalne forme su: $MDNF_1 = y'u' + xzu + xyu + x'z'u$, $MDNF_2 = y'u' + xzu + yz'u + +x'y'z'$, $MDNF_3 = y'u' + xzu + yz'u + x'z'u$, $MDNF_4 = y'u' + xy'z + xyu + x'z'u$.

5. Neka je $A = \Big\{ f \mid f : \{0,1\} \to \{0,1\} \Big\}$. **(a)** Da li je $(A, \circ)$ polugrupa s neutralnim elementom, gde je $\circ$ kompozicija funkcija? **(b)** Da li je $(A, \circ)$ grupa? **(c)** Naći sve $B \subseteq A$ takve da je $(B, \circ)$ grupa.

Rešenje (a) $(A, \circ)$ je grupoid jer po definiciji kompozicije funkcija iz $A = \Big\{ f \mid f : \{0,1\} \to \{0,1\} \Big\} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, gde je $f_1 = \binom{01}{00}$, $f_2 = \binom{01}{01}$, $f_3 = \binom{01}{10}$ i $f_4 = \binom{01}{11}$ sledi da je kompozicija svake dve funkcije iz skupa A opet funkcija iz skupa A. Asocijativnost kompozicije sledi iz $\Big((f \circ g) \circ h\Big)(x) = (f \circ g)\Big(h(x)\Big) = f\Big(g(h(x))\Big) = f\Big((g \circ h)(x)\Big) = \Big(f \circ (g \circ h)\Big)(x)$. Neutralni element je identička funkcija $f_2 = \binom{01}{01}$, jer je za nju očevidno $f_2 \circ f_i = f_i \circ f_2 = f_i$ za svako $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(b) $(A, \circ)$ nije grupa jer naprimer elemenet $f_1 = \binom{01}{00}$ nema sebi inverzni zbog $f_1 \circ f_1 = f_1 \neq f_2, f_1 \circ f_2 = f_1 \neq f_2, f_1 \circ f_3 = f_1 \neq f_2, f_1 \circ f_4 = f_1 \neq f_2$.

(c) $B = \{f_2, f_3\}$, $B = \{f_2\}$, $B = \{f_1\}$, $B = \{f_4\}$.

6. Neka su $P = t^4 + t^3 + t^2 + 2$ i $Q = t^5 + 3t^4 + 4t^3 + 4t + 3$ polinomi nad poljem $\mathbb{Z}_5$. Naći polinom $R = NZD(P, Q)$ i faktorisati polinome P, Q i R nad poljem $\mathbb{Z}_5$.

Rešenje
$R = NZD(P, Q) = (t+4)(t^2+4t+1)$, $P = (t+4)(t^2+4t+1)(t+3)$ i $Q = (t+4)(t^2+4t+1)(t^2+2)$.

7. Neka su $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcije definisane sa $f(x) = 1$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \cos^2 x$. Ispitati da li je $\mathbf{A} = (A, +, \cdot)$ prsten, gde je $A = \{f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f_{a,b}(x) = a + b\cos x \ \wedge\ a, b \in R\}$, a $+$ i $\cdot$ su uobičajene operacije sabiranja i množenja funkcija tj. $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ i $(\varphi \cdot \psi)(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ za svako $x \in \mathbb{R}$.

Rešenje

$(A, +)$ je grupoid jer je $f_{a,b}(x) + f_{c,d}(x) = a + b\cos x + c + d\cos x = a + c + (b+d)\cos x = f_{a+c,b+d}(x)$ tj. $f_{a+c,b+d} \in A$. Komutativnost i asocijativnost operacije sabiranja funkcija sledi iz definicije te operacije i komutativnosti i asocijativnosti sabiranja realnih brojeva. Neutralni elemenat za operaciju $+$ je $f_{0,0}$. Inverzni za $f_{a,b}$ je $f_{-a,-b}$. Znači $\mathbf{A} = (A, +)$ je Abelova grupa.

$(A, \cdot)$ nije grupoid jer je $f_{a,b}(x) \cdot f_{c,d}(x) = (a + b\cos x)(c + d\cos x) = ac + (ad + bc)\cos x + bd\cos^2 x$ što nije oblika $p + q\cos x$. Prema tome $\mathbf{A} = (A, +, \cdot)$ nije prsten.

8. **(a)** Naći vrednosti parametara $a, b, c \in R$ za koje je $1 + i$ koren polinoma $f(x) = x^5 - 5x^4 + ax^3 - 16x^2 + bx + c$. **(b)** Faktorisati nad poljem kompleksnih brojeva polinom $g(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 16x^2 + 16x - 12$.

Rešenje a) Zamenom $x = 1 + i$ u $x^5 - 5x^4 + ax^3 - 16x^2 + bx + c = 0$ i izjednačavanjem realnog i imaginarnog dela sa 0 dobija se $b = -2a + 36$ i $c = 4a - 52$. Znači skup svih traženih trojki (a, b, c) je $\{(a, -2a + 36, 4a - 52) | a \in R\}$.

b) Kako se za $a = 10$ dobija baš $g(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 16x^2 + 16x - 12$, to znači da je $g(1+i) = g(1-i) = 0$ tj. g je deljiv sa $(x - (1+i))(x - (1-i)) = x^2 - 2x + 2$, pa njihovim deljenjem se dobija da je $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 16x^2 + 16x - 12 = (x^2 - 2x + 2)(x^3 - 3x^2 + 2x - 6)$. Potencijalni kandidati za racionalne nule polinoma $x^3 - 3x^2 + 2x - 6$ su $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$ i efektivnim proveravanjem (Hornerovom šemom) dobijamo da je 3 njegova nula, što znači da je $x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = (x - 3)(x^2 + 2)$. Najzad imamo da je $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 16x^2 + 16x - 12 = (x - 1 - i)(x - 1 + i)(x - 3)(x - i\sqrt{2})(x + i\sqrt{2})$.

9. Neka su $f_i : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ funkcije definisane sa

$$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = \frac{1}{x} \qquad f_3(x) = 1 - x \qquad f_4(x) = \frac{1}{1-x} \qquad f_5(x) = \frac{x-1}{x} \qquad f_6(x) = \frac{x}{x-1}$$

i neka je $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$. Dokazati da je $(G, \circ)$ grupa. Da li je grupa $(G, \circ)$ izomorfna sa grupom $(\mathbb{Z}_6, +)$ (odgovor obrazložiti)?

Rešenje

$(G, \circ)$ je grupoid jer zatvorenost operacije $\circ$ sledi iz Kejlijeve tablice. Asocijativnost važi za kompoziciju funkcija. Prva vrsta je jednaka graničnoj vrsti i prva kolona je jednaka graničnoj koloni što znači da je f_1 neutralni element. Kako se taj neutralni element pojavljuje tačno jedanput u svakoj vrsti i koloni i kako je simetrično raspoređen u odnosu na glavnu dijagonalu to sledi da svaki elemenat iz G ima sebi inverzni. Znači $(G, \circ)$ jeste grupa. Kako grupa $(G, \circ)$ nije komutativna, jer je $f_2 \circ f_3 \neq f_3 \circ f_2$, to sledi da $(G, \circ)$ i $(\mathbb{Z}_6, +)$ nisu izomorfne jer $(\mathbb{Z}_6, +)$ jeste komutativna grupa.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3	f_6	f_5
f_3	f_3	f_5	f_1	f_6	f_2	f_4
f_4	f_4	f_6	f_2	f_5	f_1	f_3
f_5	f_5	f_3	f_6	f_1	f_4	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1

10. Odrediti realne brojeve a i b tako da polinom $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1 \in \mathbb{R}[x]$ bude potpun kvadrat, a zatim izvršiti faktorizaciju nad poljima $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}$.

Rešenje Iz $x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1 = (\pm x^2 + cx + d)^2 = x^4 + c^2x^2 + d^2 \pm 2cx^3 \pm 2dx^2 + 2cdx$ sledi sistem jednačina $a = \pm 2c$, $b = c^2 \pm 2d$, $-8 = 2cd$, $1 = d^2$, čijim rešavanjem dobijamo da je

$(a,b) \in \{(-8,18),(8,14)\}$. Znači $p(x) = \Big(x^2 \pm (4x-1)\Big)^2$. Nad poljem $\mathbb{Q}$ ne postoji faktorizacija, a nad poljima $\mathbb{C}$ odnosno $\mathbb{R}$ faktorizacija je $(x^2+4x-1)^2 = (x+2-\sqrt{5})^2(x+2+\sqrt{5})^2$ tj. $(x^2-4x+1)^2 = (x-2-\sqrt{3})^2(x-2+\sqrt{3})^2$.

11. Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 2+3i$ i $z_2 = -5-i$. Naći kompleksni broj z takav da je $|z| = 2\sqrt{26}$ i $\measuredangle z_1Oz = \frac{1}{3}\measuredangle z_1Oz_2$, gde su svi uglovi orijentisani.

Rešenje Kako je $\frac{z}{|z|} = \frac{z_1}{|z_1|}\cdot e^{i\theta}$, gde je $\theta = \frac{1}{3}\measuredangle z_1 0 z_2 = \frac{1}{3}\arg\frac{z_2}{z_1} = \frac{\pi}{4}$, sledi $z = -2+10i$.

12. Odrediti skup rešenja jednačine $\left|\frac{z}{1-iz}\right| = 1$, nacrtati ga u kompleksnoj ravni i odrediti skupove njihovih argumenata i modula.

Rešenje $\left|\frac{z}{1-iz}\right| = 1 \Leftrightarrow |z| = |1-iz| \Leftrightarrow z\bar{z} = (1-iz)\overline{(1-iz)} \Leftrightarrow z\bar{z} = (1-iz)(1+i\bar{z}) \Leftrightarrow z-\bar{z} = -i \Leftrightarrow 2iI_m(z) = -i \Leftrightarrow I_m(z) = -\frac{1}{2}$. Znači, skup rešenja date jednačine u kompleksnoj ravni je prava paralelna realnoj osi koja seče imaginarnu osu u $-\frac{1}{2}i$. Skup argumenata je $(-\pi,0)$, a skup modula je skup svih realnih brojeva većih ili jednakih od $\frac{1}{2}$.

13. Ispitati da li je $(S,*,\cdot,f,0,1)$ Bulova algebra gde je $S = \{0,1\}$ podskup skupa celih brojeva, operacija f definisana sa $f(x) = 1-x$ i operacija $*$ definisana sa $x*y = f(f(x)\cdot f(y))$ (tj. $x*y = x+y-xy$), gde su $-$ i $\cdot$ poznate operacije oduzimanja i množenja u skupu celih brojeva $\mathbb{Z}$.

Rešenje Dokazaćemo da bijekcija $F : S \to \{\bot,\top\}$ definisna sa $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \bot & \top \end{pmatrix}$ jeste homomorfizam (tj.izomorfizam) strukture $(S,*,\cdot,f,0,1)$ i Bulove algebre $(\{\bot,\top\},\vee,\wedge,\neg,0,1)$. Izomorfizam je očevidan iz sledećih tablica.

$*$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\vee$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\wedge$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$

x	$f(x)$
0	1
1	0

x	$\neg x$
$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$

14. **a)** Rešiti jednačinu $\left(\frac{-w}{1-w}\right)^5 = 1$ u skupu kompleksnih brojeva. **b)** Dokazati da jednačina $\left(\frac{-w}{1-w}\right)^5 = 1$ je ekvivalentna sa jednačinom $1-5w+10w^2-10w^3+5w^4 = 0$. **c)** Korišćenjem rezultata pod a) i b) dokazati da je $1-5w+10w^2-10w^3+5w^4 = 5(w^2-w+\frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{5}})(w^2-w+\frac{1}{4\sin^2\frac{2\pi}{5}})$ i da je $\sin^2\frac{\pi}{5}+\sin^2\frac{2\pi}{5} = \frac{5}{4}$ i $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{4}$. Ako se umesto 5 uzme $2\ell+1$ dobija se uopštenje $\sin\frac{\pi}{2\ell+1}\sin\frac{2\pi}{2\ell+1}\dots\sin\frac{\ell\pi}{2\ell+1} = \frac{\sqrt{2\ell+1}}{2^\ell}$.

Rešenje a) Domen rešavanja jednačine je $\mathbb{C}\setminus\{1\}$. $\left(\frac{-w}{1-w}\right)^5 = 1 \Leftrightarrow \frac{w}{w-1} = \sqrt[5]{1} \in \{e^{\frac{2k\pi}{5}i} | k \in \{-2,-1,0,1,2\}\}$. Jednačina $\frac{w}{w-1} = 1$ nema rešenja, te je $\left(\frac{-w}{1-w}\right)^5 = 1 \Leftrightarrow w = (w-1)e^{\frac{2k\pi}{5}i}$, $k \in \{-2,-1,1,2\} \Leftrightarrow w(1-e^{\frac{2k\pi}{5}i}) = -e^{\frac{2k\pi}{5}i}$, $k \in \{-2,-1,1,2\} \Leftrightarrow w = \frac{e^{\frac{2k\pi}{5}i}}{e^{\frac{2k\pi}{5}i}-1} = \frac{e^{\frac{2k\pi}{5}i}}{e^{\frac{k\pi}{5}i}\left(e^{\frac{k\pi}{5}i}-e^{-\frac{k\pi}{5}i}\right)} = \frac{e^{\frac{k\pi}{5}i}}{2i\sin\frac{k\pi}{5}}$, $k \in \{-2,-1,1,2\}$ **b)** $\left(\frac{-w}{1-w}\right)^5 = 1 \Leftrightarrow -w^5 = (1-w)^5 = 1-5w+10w^2-10w^3+5w^4-w^5 \Leftrightarrow 1-5w+10w^2-10w^3+5w^4 = 0$. **c)** Iz b) sledi da su rešenja jednačine $\left(\frac{-w}{1-w}\right)^5 = 1$ koreni polinoma $1-5w+10w^2-10w^3+5w^4$, te je $1-5w+10w^2-10w^3+5w^4 = 5(w^2-2Re(\frac{e^{\frac{\pi}{5}i}}{2i\sin\frac{\pi}{5}})w+\left|\frac{e^{\frac{\pi}{5}i}}{2i\sin\frac{\pi}{5}}\right|^2)(w^2-2Re(\frac{e^{\frac{2\pi}{5}i}}{2i\sin\frac{2\pi}{5}})w+\left|\frac{e^{\frac{2\pi}{5}i}}{2i\sin\frac{2\pi}{5}}\right|^2) = 5(w^2-w+\frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{5}})(w^2-w+\frac{1}{4\sin^2\frac{2\pi}{5}})$. Iz $1-5w+10w^2-10w^3+5w^4 = 5(w^2-w+\frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{5}})(w^2-w+\frac{1}{4\sin^2\frac{2\pi}{5}}) = 5w^4-10w^3+5(\frac{1}{4\sin^2\frac{2\pi}{5}}+\frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{5}}+1)w^2-5(\frac{1}{4\sin^2\frac{2\pi}{5}}+\frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{5}})w+\frac{5}{16\sin^2\frac{\pi}{5}\sin^2\frac{2\pi}{5}}$ izjednačavanjem koeficijenata uz w i slobodnih članova sledi tvrđenje.

15. U skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}^\star = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ definisana je relacija ρ: $z_1\,\rho\,z_2 \Leftrightarrow \arg(z_1) = \arg(z_2)$. Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije. Dati geometrijsku interpretaciju klasa iz faktor skupa $\mathbb{C}^\star/\rho$. Dokazati da je $(\mathbb{C}^\star/\rho,\circ)$ komutativna grupa, gde je operacija $\circ$ definisana sa $C_{z_1}\circ C_{z_2} = C_{z_1z_2}$, za svake dve klase C_{z_1} i C_{z_2} iz $\mathbb{C}^\star/\rho$. Dokazati da je funkcija $\varphi : \mathbb{C}^\star/\rho \to \{e^{i\theta} | \theta \in (-\pi,\pi]\}$ definisana sa $\varphi(C_z) = e^{i\arg z}$ izomorfizam grupa $(\mathbb{C}^\star/\rho,\circ)$ i $(\{e^{i\theta} | \theta \in (-\pi,\pi]\},\cdot)$.

Rešenje Refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost relacije ρ slede iz refleksivnosti, simetričnosti i tranzitivnosti relacije $=$. Kako je $\arg(z_1) = \arg(z_2)$ ako i samo ako su vektori $\overrightarrow{Oz_1}$ i $\overrightarrow{Oz_2}$ istog pravca i smera tj. ako i samo ako se poklapaju poluprava koja ishodi iz O i sadrži z_1 i poluprava koja ishodi iz O i sadrži z_2, to klasu nekog elementa $z \in \mathbb{C}^\star$ čine svi oni $w \in \mathbb{C}^\star$ koji pripadaju polupravoj koja ishodi iz O i sadrži z. Dakle, klase ekvivalencije su poluprave koje ishode iz koordinatnog početka. Operacija $\circ$ je dobro definisana jer iz $C_{z_1} = C_{w_1} \wedge C_{z_2} = C_{w_2}$ sledi $\arg(z_1) = \arg(w_1) \wedge \arg(z_2) = \arg(w_2)$, što implicira $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + \alpha = \arg(w_1) + \arg(w_2) + \alpha = \arg(w_1 w_2)$, za neko $\alpha \in \{0, -2\pi, 2\pi\}$, te je $C_{z_1} \circ C_{z_2} = C_{z_1 z_2} = C_{w_1 w_2} = C_{w_1} \circ C_{w_2}$. Operacija $\circ$ je zatvorena jer $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^\star \Rightarrow z_1 z_2 \in \mathbb{C}^\star$. Asocijativnost sledi iz $(C_{z_1} \circ C_{z_2}) \circ C_{z_3} = C_{(z_1 z_2) z_3} = C_{z_1 (z_2 z_3)} = C_{z_1} \circ (C_{z_2} \circ C_{z_3})$, a komutativnost iz $C_{z_1} \circ C_{z_2} = C_{z_1 z_2} = C_{z_2 z_1} = C_{z_2} C_{z_1}$. Neutralni element je pozitivni deo realne ose tj. $C_1 = C_{156} = \ldots$, jer je $C_1 \circ C_z = C_{1 \cdot z} = C_z$, a inverzni element klase C_z je klasa $C_{\overline{z}}$ zbog $C_z \circ C_{\overline{z}} = C_{z\overline{z}} = C_{|z|^2} = C_1$ i zato što je $|z|^2$ pozitivan realan broj ($z \neq 0$ jer je $z \in \mathbb{C}^\star = \mathbb{C} \backslash \{0\}$). Znači $(\mathbb{C}^\star/\rho, \circ)$ jeste Abelova grupa. Funkcija φ je injektivna jer $\varphi(C_z) = \varphi(C_w) \Rightarrow e^{i \arg z} = e^{i \arg w} \Rightarrow \arg z = \arg w \Rightarrow \ z \ \rho \ w \Rightarrow C_z = C_w$. Funkcija φ je i sirjektivna jer za proizvoljno $e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$ važi $\varphi(C_{e^{i\theta}}) = e^{i\theta}$. Funkcija φ je homomorfizam jer važi $\varphi(C_z \circ C_w) = \varphi(C_{zw}) = e^{i \arg(zw)} = e^{i(\arg z + \arg w + \alpha)} = e^{i \arg z} e^{i \arg w} e^{i\alpha} = \varphi(C_z)\varphi(C_w)$ jer je $e^{i\alpha} = 1$ zbog $\alpha \in \{0, -2\pi, 2\pi\}$.

16. Polinom P je definisan sa $P(x) = x^8 - 4x^6 + 16x^4 - 64x^2 + 256$. Napisati polinom P : **a)** po stepenima od $x - 1$, **b)** kao proizvod četiri kvadratna trinoma čiji su koeficijenti realni brojevi.

    Rešenje Primenom algoritma za delenje polinoma dobijamo $P(x) = x^8 - 4x^6 + 16x^4 - 64x^2 + 256 = (x-1)(x^7 + x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 13x^3 + 13x^2 + 77x + 77) + 333 = (x-1)((x-1)(x^6 + 2x^5 - x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 22x + 99) + 176) + 333 = \ldots = (x-1)^8 + 8(x-1)^7 + 24(x-1)^6 + 32(x-1)^5 + 26(x-1)^4 + 40(x-1)^4 + 128(x-1)^2 + 176(x-1) + 333$.

    Kako je polinom $P(x) = x^8 - 4x^6 + 16x^4 - 64x^2 + 256$ jednak zbiru prvih 5 članova geometrijskog niza sa prvim članom 256 i koeficijentom progresije $-\frac{1}{4}x^2$, primenom formule za zbir članova geometrijskog niza dobijamo $P(x) = 256 \cdot \dfrac{1 - (-\frac{1}{4}x^2)^5}{1 - (-\frac{1}{4}x^2)} = 256 \cdot \dfrac{1 + \frac{1}{4^5}x^{10}}{1 + \frac{1}{4}x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 + \dfrac{1}{4^5}x^{10} = 0 \wedge 1 + \dfrac{1}{4}x^2 \neq 0 \Leftrightarrow$
    $x = \sqrt[10]{-4^5} = \sqrt[10]{4^5 e^{\pi i}} = \{2e^{\frac{(2k+1)\pi}{10}} | k \in \mathbb{Z}\} \wedge x \neq \sqrt{-4} = \{2i, -2i\} \ \Leftrightarrow \ x \in \{2e^{\pm\frac{\pi}{10}i}, 2e^{\pm\frac{3\pi}{10}i}, 2e^{\pm\frac{7\pi}{10}i}, 2e^{\pm\frac{9\pi}{10}i}\}$.
    Kako je $(x - 2e^{\varphi i})(x - 2e^{-\varphi i}) = x^2 - 2Re(2e^{\varphi i})x + |2e^{\varphi i}|^2 = x^2 - 4\cos\varphi x + 4$, sledi da je
    $P(x) = (x^2 - 4\cos\dfrac{\pi}{10}x + 4)(x^2 - 4\cos\dfrac{3\pi}{10}x + 4)(x^2 - 4\cos\dfrac{7\pi}{10}x + 4)(x^2 - 4\cos\dfrac{9\pi}{10}x + 4)$.

17. Ispitati svodljivost polinoma $x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ redom nad poljima $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$, a zatim ga predstaviti kao proizvod nesvodljivih polinoma redom nad svim tim poljima.

    Rešenje Svaki polinom stepena većeg od 2 je svodljiv i nad $\mathbb{R}$ i nad C, a pošto je broj $1 \in \mathbb{Q}$ očigledno jedan koren polinoma, to je on svodljiv i nad $\mathbb{Q}$. Nad $\mathbb{C}$ možemo polinom posmatrati kao zbir prvih 8 članova geometrijskog niza sa prvim članom -1 i koeficijentom progresije $-x$, pa dobijamo $P(x) = x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x - e^{\frac{\pi}{4}i})(x - e^{-\frac{\pi}{4}i})(x - e^{\frac{\pi}{2}i})(x - e^{-\frac{\pi}{2}i})(x - e^{\frac{3\pi}{4}i})(x - e^{-\frac{3\pi}{4}i})$, a nad $\mathbb{R}$ je $P(x) = (x-1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$. Kako $x^2 + \sqrt{2}x + 1$ i $x^2 - \sqrt{2}x + 1$ nisu polinomi nad $\mathbb{Q}$, a njihovim množenjem dobijamo $x^4 + 1$, to faktorizacija nad $\mathbb{Q}$ glasi $P(x) = (x-1)(x^2+1)(x^4+1)$.

18. Data je Bulova funkcija

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1

    Naći $SKNF$, proste implikante i minimalne DNF.

    Rešenje $SKNF = (x+y+z'+u)(x+y+z'+u')(x'+y+z'+u)(x'+y'+z+u)(x'+y'+z'+u)$. Proste implikante: $x'y, x'z', yu, xy'z, y'z'u', xy'u', xzu$. $MDNF_1 : x'y + x'z' + yu + xy'z + y'z'u'$, $MDNF_2 : x'y + x'z' + yu + xy'z + xy'u'$, $MDNF_3 : x'y + x'z' + yu + xy'u' + xzy$.

19. Ostaci pri deljenju polinoma P sa $(x-1)$, $(x-2)$ i $(x+1)$ su redom 2, 3 i 6. Odrediti ostatak pri deljenju polinoma P sa $(x-1)(x-2)(x+1)$.

Rešenje Iz uslova zadatka i teoreme o delenju polinoma sledi $P(x) = (x-1)q_1(x)+2$, $P(x) = (x-2)q_2(x)+3$ i $P(x) = (x+1)q_3(x)+6$, kao i $P(x) = (x-1)(x-2)(x+1)q(x)+ax^2+bx+c$. Ako u poslednju jednakost uvrstimo redom brojeve $1, 2, -1$ to korišćenjem i prve tri jednakosti dobijamo sistem jednačina $2 = P(1) = a+b+c$, $3 = P(2) = 4a+2b+c$ i $6 = P(-1) = a-b+c$, čije rešenje je $(a,b,c) = (1,-2,3)$.

20. Data je Bulova funkcija sledećom tabelom:
a) Napisati njenu SKNF i SDNF.
b) Naći proste implikante.
c) Naći minimalne DNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1

Rešenje Savršena disjunktivna normalna forma je
$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'z'u + x'y'zu + x'yz'u + x'yzu + xy'z'u' + xy'zu' + xyz'u + xyzu$
Savršena konjunktivna normalna forma je $f(x,y,z,u) = (x+y+z'+u)(x+y'+z+u)(x+y'+z'+u)\cdot\cdot(x'+y+z+u')(x'+y+z'+u')(x'+y'+z+u)(x'+y'+z'+u)$. Proste implikante su: $yu, x'u, x'y'z', y'z'u', xy'u'$.
Minimalne DNF su: $f(x,y,z,u) = yu + xy'u' + x'u + y'z'u'$ i $f(x,y,z,u) = yu + xy'u' + x'u + x'y'z'$.

21. Neka je $A = \{z \in \mathbb{C} | z^5 = 1\}$. Dokazati da je $(A, \cdot)$ komutativna grupa koja je izomorfna sa grupom $(\mathbb{Z}_5, +)$.

Rešenje $A = \{z \in \mathbb{C} | z^5 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} | z \in \sqrt[5]{1}\} = \{e^{\frac{2k\pi}{5}i} | k \in \{0,1,2,3,4\}\}$. Neka je $\varphi : A \to \mathbb{Z}_5$ funkcija definisana sa $\varphi(e^{\frac{2k\pi}{5}i}) = k$, $k \in \{0,1,2,3,4\}$. Funkcija φ je po konstrukciji očigledno bijektivna, a jeste i homomorfizam jer je $\varphi(e^{\frac{2k\pi}{5}i}e^{\frac{2m\pi}{5}i}) = \varphi(e^{\frac{2(k+_5 m)\pi}{5}i}) = k +_5 m$ za sve $k, m \in \{0,1,2,3,4\}$. Dakle, φ je izomorfizam, te su strukture $(A, \cdot)$ i $(\mathbb{Z}_5, +)$ izomorfne, te kako je $(\mathbb{Z}_5, +)$ komutativna grupa, zbog izomorfizma je i $(A, \cdot)$ komutativna grupa.

22. Izračunati polinom $R(x)$ koji je najveći zajednički delilac polinoma $P(x) = x^6+x^4+x^2+1$ i $Q(x) = x^8+x^6+2x^4+x^2+1$ i faktorisati polinome $P(x)$, $Q(x)$ i $R(x)$ nad poljima $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}$.

Rešenje
$R(x) = x^4+1 = (x-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}})(x-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}})(x+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}})(x+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}) = (x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$,
$P(x) = (x-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}})(x-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}})(x+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}})(x+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}})(x+i)(x-i) =$
$= (x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+1) = (x^4+1)(x^2+1)$,
$Q(x) = (x-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}})(x-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}})(x+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}})(x+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}})(x+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(x-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(x-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) = (x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1) = (x^4+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

23. Odrediti vrednost parametra $a \in \mathbb{R}$ tako da $1+i$ bude koren polinoma $P(x) = x^5-3x^4+7x^3+ax^2+12x-6$, i za tu vrednost parametra a faktorisati $P(x)$ nad poljem realnih brojeva.

Rešenje Iz $P(1+i) = 22i+2ai = 0$ sledi $a = -11$. Za polinom P sa realnim koeficijentima mora tada biti i $P(1+i) = P(\overline{1+i}) = P(1-i) = 0$, tj. polinom P mora biti deljiv sa $(x-(1+i))(x-(1-i)) = x^2-2x+2$. Delenjem se dobija $P(x) = (x^2-2x+2)(x^3-x^2+3x-3)$. Proverom kandidata $\pm1, \pm3$ za racionalne korene polinoma x^3-x^2+3x-3 se dobija da 1 jeste njegov koren, te je $P(x) = (x^2-2x+2)(x-1)(x^2+3)$.

24. Neka su a, b, c, d funkcije iz skupa $\mathbb{R}^2$ u skup $\mathbb{R}^2$ definisane sa
$a(x,y) = (-x,-y)$, $b(x,y) = (-x,y)$, $c(x,y) = (x,-y)$, $d(x,y) = (x,y)$, i neka je $F = \{a,b,c,d\}$.
a) Dokazati da je $\mathcal{F} = (F, \circ)$ komutativna grupa ($\circ$ je kompozicija funkcija).
b) Naći sve podgrupe grupe $\mathcal{F}$.

Rešenje
a) Popunjavanjem Kejlijeve tablice vidimo da je operacija zatvorena u F. Npr. imamo da je $(a\circ b)(x,y) = a(b(x,y)) = a(-x,y) = (-(-x),-y) = (x,-y) = c(x,y)$, odnosno $a \circ b = c$. Kompozicija funkcija je asocijativna operacija (teorema), i takođe iz tablice vidimo da je neutralni element d, kao i da je svaki element sam sebi inverzan.

$\cdot$	a	b	c	d
a	d	c	b	a
b	c	d	a	b
c	b	a	d	c
d	a	b	c	d

b) Osim trivijalnih podgrupa $\mathcal{F}$ i $(\{d\}, \circ)$, zbog Lagranžove teoreme mogu da postoje samo još dvoelementne podgrupe, i one moraju sadržati neutralni element. Ispitivanjem tih kandidata $(\{d,a\}, \circ)$, $(\{d,b\}, \circ)$ i $(\{d,c\}, \circ)$, tj. iz njihovih Kejlijevih tablica vidimo da to zaista jesu podgrupe.

25. Neka su p_1, p_2 i p_3 funkcije (tj. permutacije) skupa $S = \{1,2,3\}$ definisane sa

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

i neka je $\circ$ kompozicija funkcija skupa $A = \{p_1, p_2, p_3\}$. Napisati Kejlijevu tablicu operacije $\circ$ i ispitati da li je $(A, \circ)$ Abelova grupa.

Rešenje
Tablica se dobija korišćenjem definicija funkcija p_1, p_2 i p_3 i kompozicije. Na primer, $\Big(p_1 \circ p_2\Big)(1) = p_1\Big(p_2(1)\Big) = p_1(2) = 1$. Analogno je $(p_1 \circ p_2)(2) = 2$ i $(p_1 \circ p_2)(3) = 3$, što znači da je $p_1 \circ p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = p_3$. Na isti način popunjavamo ostatak tablice.

$\circ$	p_1	p_2	p_3
p_1	p_2	p_3	p_1
p_2	p_3	p_1	p_2
p_3	p_1	p_2	p_3

p_3 je neutralni elemenat jer su treća vrsta i treća kolona jednake graničnoj vrsti, odnosno graničnoj koloni. Svaki elemenat ima sebi inverzni jer se p_3 pojavljuje u svakoj vrsti i koloni tačno jedanput i simetrično je rasporedjen u odnosu na gravnu dijagonalu. Operacija je komutativna jer je cela tablica simetrična u odnosu na gravnu dijagonalu. Kompozicija funkcija je asocijativna.

26. Rešiti po $z \in \mathbb{C}$ jednačinu $z^3 = \overline{z} + |z|$. **Rešenje** Smenom $z = \rho e^{i\varphi}$, za $\rho \ge 0$ i $\varphi \in (-\pi, \pi]$ sledi

$$z^3 = \overline{z} + |z| \quad \Leftrightarrow \quad \rho^3 e^{3i\varphi} = \rho e^{-i\varphi} + \rho = \rho(1 + e^{-i\varphi}) \Leftrightarrow \rho^3 e^{3i\varphi} = \rho e^{-\frac{i\varphi}{2}}(e^{\frac{i\varphi}{2}} + e^{-\frac{i\varphi}{2}}) = 2\rho \cos\frac{\varphi}{2} e^{-\frac{i\varphi}{2}}$$
$$\Leftrightarrow \ (\rho^3 = 2\rho\cos\tfrac{\varphi}{2} \ \wedge\ 3\varphi = -\tfrac{\varphi}{2} + 2k\pi) \Leftrightarrow \Big(\rho = 0 \ \vee\ (\rho^2 = 2\cos\tfrac{\varphi}{2} \ \wedge\ 7\varphi = 4k\pi)\Big) \Leftrightarrow \Big(z = 0 \ \vee\ (\rho = \sqrt{2\cos\tfrac{\varphi}{2}} \ \wedge\ \varphi = \tfrac{4}{7}k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \ \wedge\ \varphi \in (-\pi, \pi])\Big) \Leftrightarrow \Big(z = 0 \ \vee\ (\rho = \sqrt{2\cos\tfrac{\varphi}{2}} \ \wedge\ \varphi \in \{0, \pm\tfrac{4\pi}{7}\})\Big)$$
$$\Leftrightarrow \ z \in \{0\} \cup \left\{ \sqrt{2\cos\frac{2k\pi}{7}}\ e^{i\frac{4k\pi}{7}} \ \Big|\ k \in \{0, \pm 1\} \right\} \Leftrightarrow \ z \in \left\{ 0, \sqrt{2}, \sqrt{2\cos\frac{2\pi}{7}}\ e^{-i\frac{4\pi}{7}}, \sqrt{2\cos\frac{2\pi}{7}}\ e^{i\frac{4\pi}{7}} \right\}.$$

27. U skupu kompleksnih brojeva rešiti jednačinu $z^3 = i\overline{z}$.

Rešenje Uvođenjem smene $z = \rho e^{i\varphi}$, za $\rho \ge 0$ i $\varphi \in (-\pi, \pi]$, dobijamo

$$(\rho e^{i\varphi})^3 = i\overline{\rho e^{i\varphi}} \quad \Leftrightarrow \quad \rho^3 e^{i3\varphi} = e^{i\frac{\pi}{2}} \rho e^{-i\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad \rho^3 e^{3i\varphi} = \rho e^{i(\frac{\pi}{2} - \varphi)} \quad \Leftrightarrow \quad (\rho^3 = \rho \ \wedge\ 3\varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi + 2k\pi)$$
$$\Leftrightarrow \ (\rho \in \{0,1\} \ \wedge\ \varphi = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \{-2,-1,0,1\}) \quad \Leftrightarrow \quad z \in \{0, e^{-\frac{7\pi}{8}i}, e^{-\frac{3\pi}{8}i}, e^{\frac{\pi}{8}i}, e^{\frac{5\pi}{8}i}\}.$$

28. Neka je $f(x) = x^5 - x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 1$ polinom. **a)** Izračunati $f(e^{\frac{-\pi}{3}i})$. **b)** Napisati polinom f kao proizvod nesvodljivih polinoma nad poljem racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$. **c)** Napisati polinom f kao proizvod nesvodljivih polinoma nad poljem $\mathbb{Z}_3$. Napomena: Nad $\mathbb{Z}_3$ je $x^5 - x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 1 = x^5 + 2x^4 + 2x^2 + x + 1$

Rešenje Nad $\mathbb{Q}$ je $f(x) = x^5 - x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 1 = (x^2 - x + 1)(x^3 + 2x + 1)$, a nad $\mathbb{Z}_3$ je $f(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^2 + x + 1 = (x^2 + 2x + 1)(x^3 + 2x + 1) = (x+1)^2(x^3 + 2x + 1)$.

29. Dat je polinom $f(x) = x^8 + x^4 + 1$. **(a)** Izračunati $f(e^{\frac{\pi}{6}i})$, $f(e^{\frac{\pi}{3}i})$, $f(e^{\frac{2\pi}{3}i})$ i $f(e^{\frac{5\pi}{6}i})$. **(b)** Napisati polinom $f(x)$ kao proizvod nesvodljivih polinoma redom nad poljima $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Z}_3$.

30. Ispitati sve aksiome komutativne grupe za strukturu $(\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \circ)$, gde su za $i \in \{1,2,3,4\}$ funkcije $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ date sa $f_1(x,y) = (-y,-x)$, $\quad f_2(x,y) = (y,x)$, $\quad f_3(x,y) = (x,y)$, $\quad f_4(x,y) = (-x,-y)$.

31. Neka je $f(x) = x^5 + x + 1$ polinom. **a)** Izračunati $f(e^{\frac{2\pi}{3}i})$. **b)** Napisati polinom f kao proizvod nesvodljivih polinoma nad poljem racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$. **c)** Napisati polinom f kao proizvod nesvodljivih polinoma nad poljem $\mathbb{Z}_3$.