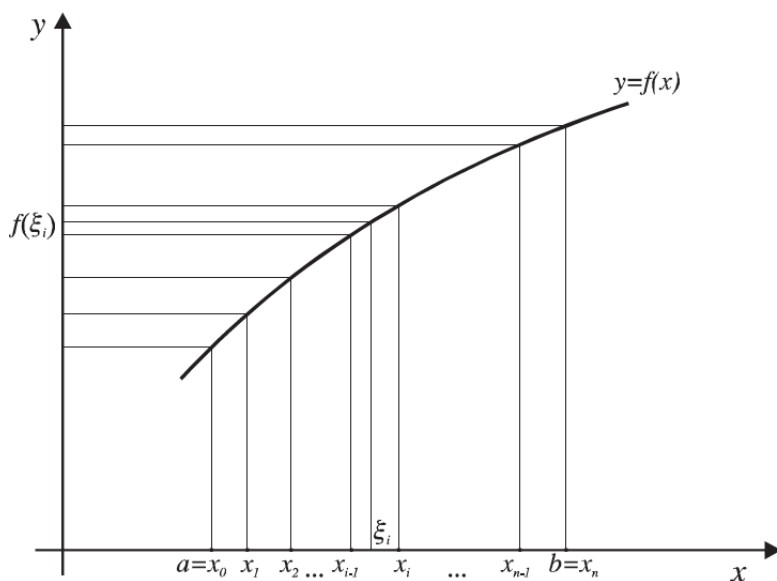


## Određeni integral i njegova primena



Na intervalu  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  izvršena je podela na podintervale konačnim brojem tačaka iz skupa

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

tako da je

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Iz svakog podintervala odabrana je tačka  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  i izračunata suma

$$I(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

gde je  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  dužina podintervala. Ovako dobijena suma se naziva integralna ili Rimanova suma.

Neka je sa  $\lambda(P) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$  označena maksimalna dužina svih podintervala. Ukoliko postoji granična vrednost

$$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} I(f, P, \xi_i) = I$$

nezavisno od podele  $P$  i izbora tačaka iz  $\xi_i$ , tada se broj  $I$  naziva Rimanov ili određeni integral funkcije  $f$  nad intervalom  $[a, b]$  i označava se sa

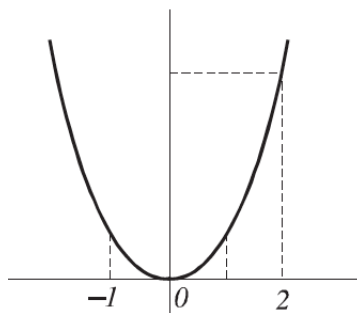
$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Osobine određenog integrala koje se koriste prilikom njegovog izračunavanja su:

1.  $\int_a^b c dx = c(b - a), \quad c \in \mathbb{R},$
2.  $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx,$
3.  $\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx, \quad c \in \mathbb{R}.$

1. Izračunati po definiciji  $I = \int_0^1 x^2 dx$  i  $I = \int_{-1}^5 (1 + 3x) dx$ .

Rešenje:



Ako je interval  $[0, 1]$  podeljen na  $n$  jednakih delova, tada je

$$\Delta x_i = \frac{1}{n}.$$

Neka su odabrane tačke  $\xi_i$  desni krajevi intervala  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , tj.

$$\xi_i = \frac{i}{n},$$

$i = 1, 2, \dots, n$ . Sada je Rimanova suma

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

pa je

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

Slično, podelom intervala  $[-1, 5]$  na  $n$  jednakih delova, dužina svakog intervala podele  $[x_{i-1}, x_i]$  je

$$\Delta x_i = \frac{5 - (-1)}{n} = \frac{6}{n}.$$

Neka su odabrane tačke  $\xi_i$  levi krajevi intervala  $[x_{i-1}, x_i]$ , tj.

$$\xi_i = -1 + (i-1) \frac{6}{n},$$

$i = 1, 2, \dots, n$ . Rimanova suma je sada

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n f\left(-1 + (i-1) \frac{6}{n}\right) \cdot \frac{6}{n} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(1 + 3\left(-1 + (i-1) \frac{6}{n}\right)\right) \cdot \frac{6}{n} \\ &= \frac{6}{n} \left(\sum_{i=1}^n 1 + \sum_{i=1}^n 3\left(-1 + (i-1) \frac{6}{n}\right)\right) \\ &= \frac{6}{n} \left(n + 3 \sum_{i=1}^n \left(-1 + (i-1) \frac{6}{n}\right)\right) \\ &= \frac{6}{n} \left(n - 3 \sum_{i=1}^n 1 + \frac{18}{n} \sum_{i=1}^n (i-1)\right) \\ &= \frac{6}{n} \left(n - 3n + \frac{18}{n} \sum_{i=1}^n i - \frac{18}{n} \sum_{i=1}^n 1\right) \\ &= \frac{6}{n} \left(-2n + \frac{18}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{18}{n} \cdot n\right) \\ &= -12 + 54 \cdot \frac{n+1}{n} - \frac{108}{n}, \end{aligned}$$

pa je

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -12 + 54 \cdot \frac{n+1}{n} - \frac{108}{n} \right) = -12 + 54 + 0 = 42.$$

2. Izračunati  $I = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx$ .

Rešenje:

$$I = \int_{-1}^1 dx - \int_{-1}^1 x^2 dx = x \Big|_{-1}^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = 1 - (-1) - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

3. Izračunati  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$ .

Rešenje:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$$
$$\left[ \begin{array}{l} 2x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos t dt = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

4. Izračunati  $I = \int_1^2 x e^{2x} dx$ .

Rešenje: Integral se rešava primenom parcijalne integracije

$$\left[ \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right].$$

$$I = \frac{1}{2}x e^{2x} \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 e^{2x} dx = \left[ \begin{array}{l} 2x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt \\ x = 1 \Rightarrow t = 2 \\ x = 2 \Rightarrow t = 4 \end{array} \right] = \frac{1}{2}x e^{2x} \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \int_2^4 \frac{e^t}{2} dt$$
$$= \frac{1}{2}x e^{2x} \Big|_1^2 - \frac{1}{4}e^t \Big|_2^4 = \frac{1}{2}(2e^4 - e^2) - \frac{1}{4}(e^4 - e^2) = \frac{3}{4}e^4 - \frac{1}{4}e^2.$$

5. Izračunati  $I = \int_{-2}^2 f(x) dx$ ,  $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 4 - x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ .

Rešenje: Iz  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 = 2$  i  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (4 - x^2) = 4$  sledi da podintegralna funkcija nad  $[-2, 2]$  ima prekid prve vrste, tj. skok.

Podintegralna funkcija je ograničena i ima jedan prekid intervalu  $[-2, 2]$ , pa je data funkcija integrabilna na intervalu  $[-2, 2]$ , tj. postoji integral  $I$ . Dalje je

$$I = \int_{-2}^0 2 dx + \int_0^2 (4 - x^2) dx = 2 \int_{-2}^0 dx + \int_0^2 (4 - x^2) dx = \frac{28}{3}.$$

6. Izračunati  $\int_0^{2\pi} \sin x dx$ .

Rešenje:  $\int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos 0 = -1 + 1 = 0$ .

7. Izračunati  $I = \int_{-1}^2 |x-1| dx$ .

Rešenje: Iz  $|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases}$  sledi

$$I = \int_{-1}^1 (-x+1) dx + \int_1^2 (x-1) dx = -\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 + x \Big|_{-1}^1 + \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 - x \Big|_1^2$$

$$= -(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) + (1+1) + (2 - \frac{1}{2}) - (2-1) = 2 + \frac{3}{2} - 1 = \frac{5}{2}.$$

8. Odrediti  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ako je  $a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2}$ .

Rešenje: Iz

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}} \right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\frac{i^2}{n^2}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}$$

sledi da je  $a_n$  gornja Darbuova suma funkcije  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  na intervalu  $[0, 1]$ . Dakle,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x \Big|_0^1 = \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4}.$$

9. Odrediti  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ako je  $a_n = n^2 \left( \frac{1}{(n+1)(n^2+1)} + \frac{1}{(n+2)(n^2+2^2)} + \dots + \frac{1}{4n^3} \right)$ .

Rešenje: Primetimo da je  $4n^3 = (n+n)(n^2+n^2)$ .

Iz

$$a_n = n^2 \left( \frac{1}{(n+1)(n^2+1)} + \frac{1}{(n+2)(n^2+2^2)} + \dots + \frac{1}{(n+n)(n^2+n^2)} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{n^2}{(n+i)(n^2+i^2)} = \sum_{i=1}^n \frac{n^2}{n(1+\frac{i}{n}) n^2 (1+(\frac{i}{n})^2)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+\frac{i}{n})(1+(\frac{i}{n})^2)}$$

sledi da je  $a_n$  Rimanova suma funkcije  $f(x) = \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}$  na intervalu  $[0, 1]$ , pa je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+x^2)} dx.$$

Rastavljanjem na zbir parcijalnih razlomaka dobija se

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1+x^2},$$

tj.  $1 = A + Ax^2 + Bx + Bx^2 + C + Cx$ ,

odakle se dobija sistem jednačina  $A + B = 0$ ,  $B + C = 0$ ,  $A + C = 1$ , čije rešenje je  $A = \frac{1}{2}$ ,  $B = -\frac{1}{2}$ ,  $C = \frac{1}{2}$ ,

pa je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2} dx = \dots (\text{domaći})$$

10. Odrediti  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ako je

$$a_n = 2n \left( \frac{1}{(2+n)(2+2n)} + \frac{1}{(4+n)(4+2n)} + \frac{1}{(6+n)(6+2n)} + \dots + \frac{1}{12n^2} \right).$$

Rešenje: Primetimo da je  $12n^2 = (2n+n)(2n+2n)$ .

Iz

$$\begin{aligned} a_n &= 2n \left( \frac{1}{(2 \cdot 1 + n)(2 \cdot 1 + 2n)} + \frac{1}{(2 \cdot 2 + n)(2 \cdot 2 + 2n)} + \frac{1}{(2 \cdot 3 + n)(2 \cdot 3 + 2n)} \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{1}{(2n + n)(2n + 2n)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{2n}{(2i + n)(2i + 2n)} = \sum_{i=1}^n \frac{2n}{n \left(1 + \frac{2i}{n}\right) n \left(2 + \frac{2i}{n}\right)} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left(1 + \frac{2i}{n}\right) \left(2 + \frac{2i}{n}\right)} \end{aligned}$$

sledi da je  $a_n$  Rimanova suma funkcije  $f(x) = \frac{1}{(1+x)(2+x)}$  na intervalu  $[0, 2]$ , pa je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \int_0^2 \frac{1}{(1+x)(2+x)} dx = \dots (\text{domaći})$$

☺