

# Polinomi

**Definicija 1** Neka je  $(F, +, \cdot)$  polje. Tada je funkcija  $p : F \rightarrow F$  data sa

$$p(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_1 x + p_0,$$

gde  $p_i \in F$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  polinom nad poljem  $F$ .

- Ako je  $p_n \neq 0$ , stepen polinoma  $p(x)$  je  $n$  (oznaka:  $dg(p)$ ).
- Ako je  $p_n = 1$ , polinom  $p(x)$  je normiran (normalizovan).
- Dva polinoma su jednaka ako su istog stepena i koeficijenti uz odgovarajuće stepene  $x$  su jednaki.

**Primer 1**  $p(x) = x^3 + 2x + 1$ ,  $q(x) = x + 2$

a)  $p(x) + q(x) = x^3 + 3x + 3$

b)  $p(x) \cdot q(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4x + x + 2 = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 5x + 2$

**Definicija 2** Koren ili nula polinoma  $p \in F[x]$  je rešenje jednačine  $p(x) = 0$ .

**Teorema 1** (Bezuova teorema) Ostatak pri deljenju polinoma  $p(x)$  polinomom  $(x - \alpha)$  jednak je vrednosti polinoma  $p$  u tački  $\alpha$ .

**Primer 2** Podeliti polinom  $2x^3 - x^2 + 5x$  polinomom  $x - 1$ .

$$\begin{array}{r} (2x^3 - x^2 + 5x) : (x - 1) = 2x^2 + x + 6 \\ -(2x^3 - 2x^2) \\ \hline x^2 + 5x \\ -(x^2 - x) \\ \hline 6x \\ -(6x - 6) \\ \hline 6 \end{array}$$

Pomoću Bezuove teoreme možemo lako naći ostatak:  $p(1) = 2 \cdot 1^3 - 1^2 + 5 \cdot 1 = 6$

Postupak za deljenje polinoma  $p(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_1 x + p_0$  (nad bilo kojim poljem) se, u slučaju kada je delilac polinom oblika  $(x - \alpha)$ , može skraćeno zapisati tzv. **Homero-vom šemom**:

$$\begin{array}{c|ccccccc} & p_n & p_{n-1} & p_{n-2} & \dots & p_2 & p_1 & p_0 \\ \alpha & q_{n-1} & q_{n-2} & q_{n-3} & \dots & q_1 & q_0 & q_{-1} \end{array}$$

gde je  $q_{n-1} = p_n$  i  $q_k = \alpha q_{k+1} + p_{k+1}$  za sve  $k \in \{n-2, n-3, \dots, 1, 0, -1\}$ , pri čemu je  $q(x) = q_{n-1} x^{n-1} + q_{n-2} x^{n-2} + q_{n-3} x^{n-3} + \dots + q_1 x + q_0$  količnik, a  $q_{-1}$  ostatak pri deljenju.

**Primer 3** Podeliti polinom  $2x^3 - x^2 + 5x$  polinomom  $x - 1$  pomoću Hornerove šeme.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 6 & 6 \end{array} \quad \frac{2x^3 - x^2 + 5x}{x - 1} = 2x^2 + x + 6 + \frac{6}{x - 1}$$

**Definicija 3** Najveći zajednički delilac dva polinoma je normiran polinom najvećeg stepena koji deli oba ta polinoma.

**Teorema 2** Zajednički koreni polinoma  $p(x)$  i  $q(x)$  su koreni njihovog NZD-a koji se određuju pomoću Euklidovog algoritma.

**Zadatak 1** Nad poljem realnih brojeva su dati polinomi

$$p(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2, \quad q(x) = 2x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 4x + 4.$$

Naći njihove zajedničke korene.

**Rešenje:** Euklidovim algoritmom ćemo izračunati polinom  $r = \text{NZD}(p, q)$ , a zatim određivanjem njegovih korena dobiti zajedničke korene polinoma  $p$  i  $q$ . Pri tome, umesto polinoma  $q(x)$  možemo uzeti njemu odgovarajući normalizovani polinom (vodeći koeficijent je 1), što ne utiče ni na  $r$  (koji je po definiciji ionako normalizovani polinom), ni na korene polinoma. Iz istih razloga u toku postupka možemo svaki polinom zameniti njemu odgovarajućim normalizovanim polinomom. Neka je  $\tilde{q}(x) = \frac{1}{2}q(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 2$ , te Euklidovim algoritmom izračunavamo  $r = \text{NZD}(p, q) = \text{NZD}(p, \tilde{q})$ :

korak 1:

$$\begin{array}{r} (x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 2) : (x^4 + x^3 - x^2 + x - 2) = x - 2 \\ -(x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - 2x) \\ \hline -2x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 4x - 2 \\ -(-2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 4) \\ \hline 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2 = 2(x^3 - x^2 + x - 1) \end{array}$$

korak 2:

$$\begin{array}{r} (x^4 + x^3 - x^2 + x - 2) : (x^3 - x^2 + x - 1) = x + 2 \\ -(x^4 - x^3 + x^2 - x) \\ \hline 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2 \\ -(2x^3 - 2x^2 + 2x - 2) \\ \hline 0 \end{array}$$

Prema tome,  $r(x) = \text{NZD}(p, q)(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ . Grupisanjem članova polinoma  $r$  možemo dobiti  $r(x) = x(x^2 + 1) - (x^2 + 1) = (x - 1)(x^2 + 1)$ , odakle sledi da je broj 1 jedini zajednički realan koren polinoma  $p$  i  $q$ , dok su zajednički koreni nad  $\mathbb{C}$ : 1,  $i$  i  $-i$ .  $\square$

**Zadatak 2** U polju  $\mathbb{Z}_3$  naći zajedničke korene polinoma

$$p(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 \quad \text{i} \quad q(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1.$$

**Rešenje:**

Prvi način

Možemo primeniti potpuno isti postupak kao i u prethodnom zadatku. Pri tome računske operacije izvodimo u polju  $\mathbb{Z}_3$ , gde je  $-1 = 2$ ,  $-2 = 1$ ,  $1^{-1} = 1$  i  $2^{-1} = 2$ .

Odatle sledi:  $p(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ .

korak 1:

$$\begin{array}{r} (x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1) : (x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1) = x + 1 \\ -(x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + x) \\ \hline x^4 + x + 1 \\ -(x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1) \\ \hline 2x^3 + x^2 = 2(x^3 + 2x^2) \end{array}$$

korak 2:

$$\begin{array}{r} (x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1) : (x^3 + 2x^2) = x + 2 \\ -(x^4 + 2x^3) \\ \hline 2x^3 + 2x^2 + x + 1 \\ -(2x^3 + x^2) \\ \hline x^2 + x + 1 \end{array}$$

korak 3:

$$\begin{array}{r} (x^3 + 2x^2) : (x^2 + x + 1) = x + 1 \\ -(x^3 + x^2 + x) \\ \hline x^2 + 2x \\ -(x^2 + x + 1) \\ \hline x + 2 \end{array}$$

korak 4:

$$\begin{array}{r} (x^2 + x + 1) : (x + 2) = x + 2 \\ -(x^2 + 2x) \\ \hline 2x + 1 \\ -(2x + 1) \\ \hline 0 \end{array}$$

Sledi da je  $\text{NZD}(p(x), q(x)) = x + 2 = x - 1$ , te je 1 jedini koren polinoma  $\text{NZD}(p, q)$ , odnosno jedini zajednički koren polinoma  $p$  i  $q$ .

Drugi način

Polje  $\mathbb{Z}_3$  ima samo 3 elementa, direktnim ispitivanjem vrednosti polinomskih funkcija za sve elemente skupa  $\mathbb{Z}_3$  dobijamo

$$\begin{array}{l} p(0) = 1, \quad p(1) = 0, \quad p(2) = 2, \\ q(1) = 0, \end{array}$$

odakle sledi da je 1 jedini zajednički koren polinoma  $p$  i  $q$ . □

**Teorema 3** Ako je  $p$  polinom nad poljem realnih brojeva (tj. polinom čiji su koeficijenti realni brojevi) i  $\alpha$  koren polinoma  $p$  onda je i  $\bar{\alpha}$  koren polinoma  $p$ .

**Teorema 4** Ako su  $\alpha$  i  $\bar{\alpha}$  koreni polinoma  $p$  nad  $\mathbb{R}$ , onda  $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) \mid p$ , tj.  $(x^2 - 2x\text{Re}(\alpha) + |\alpha|^2) \mid p$ .

**Zadatak 3** Odrediti polinom najmanjeg stepena čiji su koeficijenti realni brojevi tako da broj  $-1$  bude dvostruki, a brojevi  $2$  i  $(1 - i)$  jednostruki koreni tog polinoma.

**Rešenje:** Kako je  $1 - i$  koren traženog polinoma, onda to mora biti i  $1 + i$ , pa imamo:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x+1)^2(x-2)(x-1+i)(x-1-i) \\ &= (x^2+2x+1)(x-2)(x^2-2x+2) \\ &= (x^3-3x-2)(x^2-2x+2) \\ &= x^5-2x^4+2x^3-3x^3+6x^2-6x-2x^2+4x-4 \\ &= x^5-2x^4-x^3+4x^2-2x-4. \end{aligned}$$

□

**Teorema 5** Ako polinom sa celobrojnim koeficijentima ima racionalni koren  $\frac{p}{q}$ , tada  $p$  deli slobodni član, a  $q$  deli vodeći koeficijent.

**Definicija 4** Polinomi su uzajamno prosti ako nemaju zajedničkih faktora, tj. ako im je NZD jednak 1.

**Zadatak 4** Nad poljem kompleksnih brojeva su dati polinomi

$$p(x) = 2x^6 + 9x^5 + 22x^4 + 45x^3 + 58x^2 + 36x + 8,$$

$$q(x) = x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 1.$$

(a) Naći sve korene polinoma  $p$  i faktorizati ga nad poljima  $\mathbb{R}$  i  $\mathbb{C}$ .

(b) Dokazati da su polinomi  $p$  i  $q$  uzajamno prosti nad poljem  $\mathbb{R}$ .

**Rešenje:**

(a) Svi mogući racionalni koreni polinoma  $p$  se nalaze u skupu  $\{\pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$ . S obzirom da su svi koeficijenti polinoma  $p$  pozitivni, nijedan pozitivan realan broj ne može biti koren polinoma  $p$  jer za sve  $x > 0$  sledi  $p(x) > 0$ , pa treba ispitati samo negativne kandidate. Najbolje je da pri tome koristimo Hornerovu šemu jer tada odmah dobijamo i (delimičnu) faktorizaciju.

	2	9	22	45	58	36	8	
$-\frac{1}{2}$	2	8	18	36	40	16	0	✓
$-\frac{1}{2}$	2	7	$\frac{29}{2}$	$\frac{115}{4}$	$\frac{205}{8}$	$\frac{51}{16}$		✗

↓

$$\begin{aligned} p(x) &= \left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^5 + 8x^4 + 18x^3 + 36x^2 + 40x + 16) = \\ &= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x^5 + 4x^4 + 9x^3 + 18x^2 + 20x + 8), \end{aligned}$$

	1	4	9	18	20	8	
-1	1	3	6	12	8	0	✓
-1	1	2	4	8	0		✓
-1	1	1	3	5			✗

↓

$$\begin{aligned} p(x) &= (2x+1)(x+1)(x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 12x + 8) = \\ &= (2x+1)(x+1)^2(x^3 + 2x^2 + 4x + 8), \end{aligned}$$

	1	2	4	8	
-2	1	0	4	0	✓
-2	1	-2	8		✗

Tražene faktORIZACIJE su:

$$p(x) = (2x+1)(x+1)^2(x+2)(x^2+4) \quad \text{nad } \mathbb{R}$$

$$= (2x+1)(x+1)^2(x+2)(x-2i)(x+2i) \quad \text{nad } \mathbb{C}.$$

- (b) Treba da dokažemo da polinomi  $p$  i  $q$  nemaju zajedničkih faktora, a s obzirom na to da smo dobili faktORIZACIJU polinoma  $p$ , možemo dokazati da ni jedan faktor polinoma  $p$  nije faktor tj. delilac polinoma  $q$ . Kako je  $q(x) > 0$  za sve  $x \in \mathbb{R}$  (jer su mu svi koeficijenti pozitivni i svi stepeni parni), polinom  $q$  nema linearnih faktora, tako da ostaje samo da dokažemo da  $x^2+4$  nije delilac polinoma  $q$  nad  $\mathbb{R}$ , tj. da se pri deljenju  $q$  sa  $x^2+4$  dobija ostatak različit od 0.

$$\begin{array}{r} (x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 1) : (x^2 + 4) = x^4 - 2x^2 + 10 \\ -(x^6 + 4x^4) \\ \hline -2x^4 + 2x^2 + 1 \\ -(2x^4 - 8x^2) \\ \hline 10x^2 + 1 \\ -(10x^2 + 40) \\ \hline -39 \end{array}$$

Time je tvrđenje dokazano.

□

## Vijetove formule

Ako su  $x_1, \dots, x_n$  koreni polinoma  $p(x)$  stepena  $n$  onda:

- za  $n = 2$   $a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - x_1)(x - x_2)$   

$$x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2}$$

$$x_1x_2 = \frac{a_0}{a_2}$$
- za  $n = 3$   $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$   

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3}$$
- $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$   

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$x_1x_2 \dots x_k + \dots + x_{n-k+1} \dots x_{n-1}x_n = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$x_1x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

**Zadatak 5** Naći normiran polinom 4. stepena ako se zna da je zbir njegovih korena 2, proizvod 1 i ostatak pri deljenju sa polinomom  $x-2$  je 5, a sa  $x+1$  je ostatak 8.

**Rešenje:** Opšti oblik normiranog polinoma 4. stepena je

$$p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Koristeći Vijetove formule dobijamo:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a = 2 \Rightarrow a = -2,$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = d = 1 \Rightarrow d = 1,$$

Otuda je

$$p(x) = x^4 - 2x^3 + bx^2 + cx + 1.$$

Na osnovu Bezuove teoreme imamo:

$$p(2) = 16 - 16 + 4b + 2c + 1 = 5 \Rightarrow 2b + c = 2,$$

$$p(-1) = 1 + 2 + b - c + 1 = 8 \Rightarrow b - c = 4.$$

Rešenje ovog sistema je  $b = 2$  i  $c = -2$ , pa je traženi polinom

$$p(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1. \quad \square$$

**Zadatak 6** Neka je  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  polinom nad poljem  $\mathbb{R}$  i neka je skup svih njegovih korena  $\{1, 2\}$ . Odrediti sve moguće vrednosti za  $a, b$  i  $c$ .

**Rešenje:** Moguće su dve opcije:

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2$$

ili

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2.$$

Iz  $x_1 + x_2 + x_3 = -a$  sledi

$$1 + 1 + 2 = -a$$

ili

$$1 + 2 + 2 = -a,$$

dakle  $a \in \{-4, -5\}$ .

Iz  $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = b$  sledi

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = b$$

ili

$$1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = b,$$

dakle  $b \in \{5, 8\}$

Iz  $x_1 x_2 x_3 = -c$  sledi

$$1 \cdot 1 \cdot 2 = -c$$

ili

$$1 \cdot 2 \cdot 2 = -c,$$

dakle  $c \in \{-2, -4\}$ .  $\square$

**Zadatak 7** Neka je  $\{1, 2, 3\}$  skup svih korena polinoma  $p(x) = x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  nad poljem  $\mathbb{C}$ . Odrediti sve moguće vrednosti za  $a_4$  i  $a_0$ .

**Rešenje:** Iz Vijetovih formula znamo:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -a_4 \quad \text{i} \quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 = -a_0.$$

Sve mogućnosti za korene su:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 1, x_5 = 1,$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 1, x_5 = 2,$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 1, x_5 = 3,$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 2, x_5 = 2,$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 2, x_5 = 3,$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 3, x_5 = 3,$$

pa odatle imamo da je

$$a_4 \in \{-8, -9, -10, -11, -12\} \quad \text{ i } \quad a_0 \in \{-6, -12, -18, -24, -36, -54\}. \quad \square$$

**Teorema 6** (*Osnovni stav algebre*) Svaki polinom stepena različitog od nule nad poljem kompleksnih brojeva ima bar jedan koren u tom polju.

**Teorema 7** Svaki polinom nad  $\mathbb{C}$  se može napisati kao proizvod linearnih polinoma.

**Teorema 8** Svaki polinom nad poljem  $\mathbb{R}$  se može napisati kao proizvod kvadratnih i/ili linearnih polinoma.

**Definicija 5** Polinom je svodljiv ako se može napisati kao proizvod polinoma stepena većih od nule. Polinom stepena većeg od nule koji nije svodljiv naziva se nesvodljiv polinom.

**Napomena 1** Konstantni polinomi nisu ni svodljivi ni nesvodljivi, tj. klasifikacija kreće tek od linearnih.

**Teorema 9** Linearni polinomi su uvek nesvodljivi, nad svakim poljem.

• Za polinome 2. ili 3. stepena važi da su svodljivi nad nekim poljem akko imaju bar jedan koren u tom polju.

**Primer 4** Polinom  $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + 1)$  je svodljiv je nad  $\mathbb{R}$ , ali nema korene u  $\mathbb{R}$ .

**Zadatak 8** Odrediti presek skupa svih stepena nesvodljivih polinoma i skupa svih stepena svodljivih polinoma nad poljem  $\mathbb{R}$  i nad poljem  $\mathbb{C}$ .

**Rešenje:**

Nad  $\mathbb{R}$ :

nesvodljivi  $A = \{1, 2\}$

svodljivi  $B = \{2, 3, \dots\} \Rightarrow A \cap B = \{2\}$

Nad  $\mathbb{C}$ :

nesvodljivi  $A = \{1\}$

svodljivi  $B = \{2, 3, \dots\} \Rightarrow A \cap B = \emptyset$  □

**Primer 5** Polinom  $t^2 - 2 = (t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})$  je svodljiv nad  $\mathbb{R}$  i  $\mathbb{C}$ , a nesvodljiv nad  $\mathbb{Q}$ .

Polinom  $t^2 + 1 = (t - i)(t + i)$  je svodljiv nad  $\mathbb{C}$ , a nesvodljiv nad  $\mathbb{R}$ .

**Zadatak 9** Dokazati da je polinom  $p(x) = x^3 + x + 1$  nesvodljiv nad poljem  $\mathbb{Q}$ . Ispitati svodljivost nad poljima  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7$ .

**Rešenje:**

$\mathbb{Q}$ : Jedini mogući racionalni koreni su 1 i -1. Kako to nisu koreni polinoma  $p$ , sledi da je on nesvodljiv nad  $\mathbb{Q}$ .

$\mathbb{R}$ : svodljiv

$\mathbb{C}$ : svodljiv

$\mathbb{Z}_2$ : nesvodljiv  $p(0) = 1, p(1) = 1$

$\mathbb{Z}_3$ : svodljiv  $p(0) = 1, p(1) = 0, p(2) = 2$ , dakle  $x^3 + x + 1 = (x + 2)(x^2 + x + 2)$

$\mathbb{Z}_5$ : nesvodljiv  $p(0) = 1, p(1) = 3, p(2) = 1, p(3) = 1, p(4) = 4$

$\mathbb{Z}_7$ : nesvodljiv  $p(0) = 1, p(1) = 3, p(2) = 4, p(3) = 3, p(4) = 6, p(5) = 5, p(6) = 6$  □

**Zadatak 10** Ostaci pri deljenju polinoma  $P$  sa  $x-1$ ,  $x-2$  i  $x+1$  su redom 2, 3 i 6. Odrediti ostatak pri deljenju polinoma  $P$  polinomom  $(x-1)(x-2)(x+1)$ .

**Rešenje:** Pri deljenju polinoma  $P(x)$  polinomom trećeg stepena  $(x-1)(x-2)(x+1)$  se dobija količnik  $Q(x)$  i ostatak koji je najviše drugog stepena, tj. ostatak je oblika  $ax^2 + bx + c$  za neke  $a, b, c \in \mathbb{R}$  koje treba da izračunamo. Na osnovu teoreme o deljenju polinoma sledi

$$[*] \quad P(x) = (x-1)(x-2)(x+1)Q(x) + ax^2 + bx + c.$$

Na osnovu Bezuove teoreme dobijamo sistem jednačina:

$$2 = P(1) \stackrel{[*]}{=} a + b + c,$$

$$3 = P(2) \stackrel{[*]}{=} 4a + 2b + c,$$

$$6 = P(-1) \stackrel{[*]}{=} a - b + c.$$

Ako prvu jednačinu pomnoženu sa  $-4$  dodamo drugoj, zatim prvu jednačinu oduzmemo od treće, dobijamo

$$a + b + c = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

$$-2b - 3c = -5 \quad \Rightarrow \quad c = 3$$

$$-2b = 4 \quad \Rightarrow \quad b = -2$$

Dakle, ostatak pri deljenju polinoma  $P$  polinomom  $(x-1)(x-2)(x+1)$  je  $x^2 - 2x + 3$ . □

**Zadatak 11** Nad poljem  $\mathbb{R}$  su dati polinomi

$$p(x) = x^5 - (10+a)x^4 + (10a+35)x^3 - (35a+50)x^2 + (50a+24)x - 24a,$$

$$q(x) = x^3 + (5-b)x^2 + (6-5b)x - 6b,$$

gde su  $a$  i  $b$  realni parametri.

- (a) Za koje vrednosti parametara  $a, b \in \mathbb{R}$  je polinom  $r(x) = x-1$  najveći zajednički delilac polinoma  $p$  i  $q$ .
- (b) Za koje vrednosti  $a, b \in \mathbb{R}$  je polinom  $r(x) = x^2 + x - 2$  najveći zajednički delilac polinoma  $p$  i  $q$ .

**Rešenje:**

- (a) Deljenjem polinoma  $p$  polinomom  $r$  dobijamo

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & -10-a & 10a+35 & -35a-50 & 50a+24 & -24a \\ 1 & 1 & -9-a & 9a+26 & -26a-24 & 24a & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad p(x) = (x-1)(x^4 - (9+a)x^3 + (9a+26)x^2 - (26a+24)x + 24a).$$

Dakle, polinom  $p$  je deljiv polinomom  $r$  za svako  $a \in \mathbb{R}$ .

Deljenjem polinoma  $q$  polinomom  $r$  dobijamo

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 5-b & 6-5b & -6b \\ 1 & 1 & 6-b & 12-6b & 12-12b \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad q(x) = (x-1)(x^2 + (6-b)x + (12-6b)) + (12-12b).$$

Da bi polinom  $q$  bio deljiv polinomom  $r$ , ostatak pri deljenju mora biti 0, tj. mora biti  $b = 1$ .

Dakle, polinom  $r$  deli polinome  $p$  i  $q$  za  $(a, b) \in A = \{(\alpha, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ . Da bi polinom  $r$  bio najveći zajednički delilac polinoma  $p$  i  $q$ , ovi polinomi ne smeju imati drugih zajedničkih



prostih faktora osim  $(x-1)$ . Za  $(a, b) \in A$ , odnosno za  $b = 1$ , je  $q(x) = (x-1)(x^2 + 5x + 6) = (x-1)(x+2)(x+3)$ , te iz skupa  $A$  treba još eliminisati one uređene parove  $(a, b)$  za koje je  $x+2$  ili  $x+3$  faktor polinoma  $p$ , tj. one za koje je  $-2$  ili  $-3$  koren polinoma  $p$ . Kako je

$$p(-2) = -360a - 720 = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$p(-3) = -840a - 2520 = 0 \Rightarrow a = -3$$

imamo da je  $r(x) = x-1$  NZD za polinome  $p$  i  $q$  za  $b = 1$  i  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -3\}$ .

(b) Kako je  $r(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$  i

- $r(x) | q(x) \Rightarrow (x-1) | q(x) \Rightarrow b = 1$
- $r(x) | p(x) \Rightarrow p(-2) = 0 \Rightarrow a = -2$
- $q(x) \nmid p(x)$

sledi da je  $a = -2$  i  $b = 1$ . □

**Zadatak 12** Date polinome rastaviti na faktore nad poljima  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}$  i  $\mathbb{Z}_3$ .

(a)  $f(x) = x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ .

(b)  $g(x) = 2x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 32x + 64$ .

**Rešenje:**

(a) Polinom  $f$  možemo posmatrati kao zbir prvih 8 članova geometrijskog niza sa prvim članom  $c = -1$  i koeficijentom progresije  $q = -x$ , odakle dobijamo

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (-1) \frac{1 - (-x)^8}{1 - (-x)} = \frac{x^8 - 1}{x + 1} = 0 \Leftrightarrow (x^8 = 1 \wedge x \neq -1) \\ &\Leftrightarrow \left( x = \sqrt[8]{1} = \sqrt[8]{e^{0 \cdot i}} \in \left\{ e^{\frac{0+2k\pi}{8}i} \mid k = -3, -2, \dots, 4 \right\} \wedge x \neq -1 \right) \\ &\Leftrightarrow x \in \left\{ 1, e^{\frac{\pi}{4}i}, e^{\frac{\pi}{2}i}, e^{\frac{3\pi}{4}i}, e^{-\frac{3\pi}{4}i}, e^{-\frac{\pi}{2}i}, e^{-\frac{\pi}{4}i} \right\}, \end{aligned}$$

te faktorizacije nad poljima glase

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x-e^{\frac{\pi}{4}i})(x-e^{-\frac{\pi}{4}i})(x-e^{\frac{\pi}{2}i})(x-e^{-\frac{\pi}{2}i})(x-e^{\frac{3\pi}{4}i})(x-e^{-\frac{3\pi}{4}i}) \quad \text{nad } \mathbb{C} \\ &= (x-1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{4} + 1\right)\left(x^2 - 2\cos\frac{\pi}{2} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{4} + 1\right) \\ &= (x-1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) \quad \text{nad } \mathbb{R} \\ &= (x-1)\left((x^2 + 1)^2 - 2x^2\right)(x^2 + 1) = (x-1)(x^4 + 1)(x^2 + 1) \quad \text{nad } \mathbb{Q} \\ &= (x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 2). \quad \text{nad } \mathbb{Z}_3 \end{aligned}$$

Dodatno, primetimo da dati polinom možemo da faktorišemo nad  $\mathbb{Z}_2$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1) = ((x^2)^2 - 1)(x^2 - 1)(x + 1) \\ &= (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)(x + 1) = (x + 1)^7. \end{aligned}$$

- (b) Polinom  $g$  možemo posmatrati kao zbir prvih 6 članova geometrijskog niza sa prvim članom  $c = 64$  i koeficijentom progresije  $q = \frac{1}{2}x$ , pa dobijamo

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Leftrightarrow 64 \frac{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^6}{1 - \frac{x}{2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{64 - x^6}{1 - \frac{x}{2}} = 0 \Leftrightarrow (x^6 = 64 \wedge x \neq 2) \\ &\Leftrightarrow \left( x = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{64} e^{0 \cdot i} \in \left\{ 2e^{\frac{0+2k\pi}{6}i} \mid k = -2, -1, \dots, 3 \right\} \wedge x \neq 2 \right) \\ &\Leftrightarrow x \in \left\{ 2e^{\pm \frac{\pi}{3}i}, e^{\pm \frac{2\pi}{3}i}, -2 \right\}, \end{aligned}$$

te faktORIZACIJE nad poljima glase

$$\begin{aligned} g(x) &= 2(x+2)(x-2e^{\frac{\pi}{3}i})(x-2e^{-\frac{\pi}{3}i})(x-2e^{\frac{2\pi}{3}i})(x-2e^{-\frac{2\pi}{3}i}) \quad \text{nad } \mathbb{C} \\ &= 2(x+2)(x^2 - 2x \cdot 2 \cos \frac{\pi}{3} + 4)(x^2 - 2x \cdot 2 \cos \frac{2\pi}{3} + 4) \\ &= 2(x+2)(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 4) \quad \text{nad } \mathbb{R} \text{ i } \mathbb{Q} \\ &= 2(x+2)(x^2 + x + 1)(x^2 + 2x + 1) = 2(x+1)^2(x+2)^3 \quad \text{nad } \mathbb{Z}_3 \end{aligned}$$

□

**Zadatak 13** Dat je polinom  $f(x) = x^5 + x - 1$ . Izračunati  $f(e^{\frac{\pi}{3}i})$  i napisati polinom  $f$  kao proizvod nesvodljivih polinoma nad  $\mathbb{Q}$  i  $\mathbb{Z}_3$ .

**Rešenje:** Važi  $f(e^{\frac{\pi}{3}i}) = e^{\frac{5\pi}{3}i} + e^{\frac{\pi}{3}i} - 1 = e^{-\frac{\pi}{3}i} + e^{\frac{\pi}{3}i} - 1 = 2 \cos \frac{\pi}{3} - 1 = 0$ .

Dakle,  $\alpha = e^{\frac{\pi}{3}i}$  je koren polinoma  $f$ , pa to mora biti i  $\bar{\alpha} = e^{-\frac{\pi}{3}i}$ , odnosno polinom  $f$  je deljiv polinomom

$$(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - 2x \cos \frac{\pi}{3} + 1 = x^2 - x + 1.$$

$$\begin{array}{r} (x^5 \phantom{- x^4} + x - 1) : (x^2 - x + 1) = x^3 + x^2 - 1 \\ -(x^5 - x^4 + x^3) \phantom{- x^2} \\ \hline \phantom{x^5 - } x^4 - x^3 \phantom{- x^2} + x - 1 \\ -(x^4 - x^3 + x^2) \phantom{- x} \\ \hline \phantom{x^5 - } \phantom{x^4 - } - x^2 + x - 1 \\ \phantom{x^5 - } \phantom{x^4 - } -(x^2 + x - 1) \\ \hline \phantom{x^5 - } \phantom{x^4 - } \phantom{- x^2 + } 0 \end{array}$$

Pošto polinom  $x^3 + x^2 - 1$  nema korene ni nad  $\mathbb{Q}$ , ni nad  $\mathbb{Z}_3$ , tražene faktORIZACIJE su:

$$f(x) = (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1) \quad \text{nad } \mathbb{Q},$$

$$f(x) = (x^2 + 2x + 1)(x^3 + x^2 + 2) = (x+1)^2(x^3 + x^2 + 2) \quad \text{nad } \mathbb{Z}_3.$$

□

**Zadatak 14** Dat je polinom  $f(x) = x^8 + x^4 + 1$ . Izračunati  $f(e^{\frac{\pi}{6}i}), f(e^{\frac{\pi}{3}i}), f(e^{\frac{2\pi}{3}i}), f(e^{\frac{5\pi}{6}i})$  i napisati polinom  $f$  kao proizvod nesvodljivih polinoma nad  $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_3$ .

**Rešenje:**

Prvi način:

$$\text{Važi } f(e^{\frac{\pi}{6}i}) = e^{\frac{8\pi}{6}i} + e^{\frac{4\pi}{6}i} + 1 = e^{-\frac{2\pi}{3}i} + e^{\frac{2\pi}{3}i} + 1 = 2\cos\frac{2\pi}{3} + 1 = -1 + 1 = 0.$$

Slično se dobija  $f(e^{\frac{\pi}{3}i}) = f(e^{\frac{2\pi}{3}i}) = f(e^{\frac{5\pi}{6}i}) = 0$ , tj.  $e^{\frac{\pi}{6}i}$ ,  $e^{\frac{\pi}{3}i}$ ,  $e^{\frac{2\pi}{3}i}$  i  $e^{\frac{5\pi}{6}i}$  su koreni polinoma  $f$ , a kako je  $f$  polinom sa realnim koeficijentima, to i  $e^{-\frac{\pi}{6}i}$ ,  $e^{-\frac{\pi}{3}i}$ ,  $e^{-\frac{2\pi}{3}i}$ ,  $e^{-\frac{5\pi}{6}i}$  moraju biti njegovi koreni.

Sada je faktORIZACIJA nad poljem  $\mathbb{C}$ :

$$f(x) = \left(x - e^{\frac{5\pi}{6}i}\right)\left(x - e^{-\frac{5\pi}{6}i}\right)\left(x - e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)\left(x - e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right)\left(x - e^{\frac{\pi}{3}i}\right)\left(x - e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)\left(x - e^{\frac{\pi}{6}i}\right)\left(x - e^{-\frac{\pi}{6}i}\right).$$

FaktORIZACIJE nad ostalim poljima dobijamo na sledeći način:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^2 - 2x \cdot \cos\frac{5\pi}{6} + 1\right)\left(x^2 - 2x \cdot \cos\frac{2\pi}{3} + 1\right)\left(x^2 - 2x \cdot \cos\frac{\pi}{3} + 1\right)\left(x^2 - 2x \cdot \cos\frac{\pi}{6} + 1\right) \\ &= (x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1) \quad \text{nad } \mathbb{R} \\ &= ((x^2 + 1)^2 - 3x^2)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = (x^4 - x^2 + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \quad \text{nad } \mathbb{Q} \\ &= (x^4 + 2x^2 + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 + 2x + 1) = (x^2 + 1)^2(x + 2)^2(x + 1)^2 \quad \text{nad } \mathbb{Z}_3 \end{aligned}$$

Drugi način:

Polinom  $f$  možemo posmatrati kao zbir prva 3 člana geometrijskog niza sa prvim članom  $c = 1$  i koeficijentom progresije  $q = x^4$ , te dobijamo

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1 - (x^4)^3}{1 - x^4} = 0 \Leftrightarrow (x^{12} = 1 \wedge x^4 \neq 1) \\ &\Leftrightarrow \left(x \in \sqrt[12]{1} = \sqrt[12]{e^{0 \cdot i}} = e^{\frac{0+2k\pi}{12}i} = e^{\frac{k\pi}{6}i} \wedge x \notin \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{e^{0 \cdot i}} = e^{\frac{0+2k\pi}{4}i} = e^{\frac{k\pi}{2}i}\right) \\ &\Leftrightarrow x \in \left\{e^{\pm\frac{5\pi}{6}i}, e^{\pm\frac{2\pi}{3}i}, e^{\pm\frac{\pi}{3}i}, e^{\pm\frac{\pi}{6}i}\right\}. \end{aligned}$$

$$\text{Otuda je } f(e^{\frac{\pi}{6}i}) = f(e^{\frac{\pi}{3}i}) = f(e^{\frac{2\pi}{3}i}) = f(e^{\frac{5\pi}{6}i}) = 0.$$

FaktORIZACIJE dobijamo kao u prethodnom slučaju.

□

**Teorema 10** Ako za svaki koren polinoma  $P$  višestrukosti  $k$  važi da je koren polinoma  $Q$ , ali višestrukosti veće ili jednake  $k$  tada  $P$  deli  $Q$ .

**Teorema 11**  $\alpha$  je koren višestrukosti  $k$  za polinom  $P$  akko važi

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{i} \quad P^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

**Zadatak 15** Dati su polinomi

$$p(x) = (x+1)^m - x^m - 1, \quad q(x) = (x^2 + x + 1)^2,$$

nad poljem  $\mathbb{C}$ . Za koje vrednosti parametra  $m \in \mathbb{N}$  je polinom  $p(x)$  deljiv polinomom  $q(x)$ ?

**Rešenje:** Polinom  $p$  je stepena  $m-1$ , a polinom  $q$  stepena 4, te o deljivosti možemo govoriti samo za  $m-1 \geq 4$  odnosno  $m \geq 5$ . Rešenja kvadratne jednačine  $x^2 + x + 1 = 0$  su

$$x_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2\pi}{3}i} \quad \text{i} \quad x_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{2\pi}{3}i}, \text{ te je}$$

$$q(x) = (x^2 + x + 1)^2 = \left(x - e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^2 \left(x - e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right)^2.$$

Sledi da  $q|p$  ako i samo ako su  $x_1$  i  $x_2$  bar dvostruki koreni polinoma  $p$ , a ovo važi ako i samo ako je

$$[1]: p(x_1) = 0, \quad [2]: p'(x_1) = 0, \quad [3]: p(x_2) = 0, \quad [4]: p'(x_2) = 0,$$

gde je  $p'(x) = m((x+1)^{m-1} - x^{m-1})$ . Sistem jednačina [1], [2], [3], [4] ćemo rešiti po  $m \in \{5, 6, 7, \dots\}$  tako što ćemo rešiti svaku jednačinu pojedinačno, te je skup rešenja sistema jednak preseku skupova rešenja pojedinačnih jednačina. Označimo sa  $S_i$  skup rešenja jednačine [i].

$$\begin{aligned}
 \text{(a.1) } p(x_1) = 0 &\Leftrightarrow \left(e^{\frac{2\pi}{3}i} + 1\right)^m - \left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^m - 1 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left(e^{\frac{\pi}{3}i}\left(e^{\frac{\pi}{3}i} + e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)\right)^m - e^{\frac{2m\pi}{3}i} - 1 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left(e^{\frac{\pi}{3}i} 2 \cdot \frac{1}{2}\right)^m - e^{\frac{2m\pi}{3}i} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{m\pi}{3}i} - \left(e^{\frac{m\pi}{3}i}\right)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left(t^2 - t + 1 = 0 \wedge t = e^{\frac{m\pi}{3}i}\right) \Leftrightarrow \left(t = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \wedge t = e^{\frac{m\pi}{3}i}\right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left(\left(t = e^{\frac{\pi}{3}i} \vee t = e^{-\frac{\pi}{3}i}\right) \wedge t = e^{\frac{m\pi}{3}i}\right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left(\left(t = e^{\frac{\pi}{3}i} \wedge t = e^{\frac{m\pi}{3}i}\right) \vee \left(t = e^{-\frac{\pi}{3}i} \wedge t = e^{\frac{m\pi}{3}i}\right)\right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left(e^{\frac{\pi}{3}i} = e^{\frac{m\pi}{3}i} \vee e^{-\frac{\pi}{3}i} = e^{\frac{m\pi}{3}i}\right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{m\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \vee -\frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{m\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right) \stackrel{[1]}{\Leftrightarrow} \\
 &\Leftrightarrow (m = 6k + 1, k \in \mathbb{Z} \vee m = 6k - 1, k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow m \in \{6k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{6k - 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}.
 \end{aligned}$$

[1] - Deleći jednačine sa  $\pi$ , i množeći ih sa 3.

Uzimajući u obzir gore navedeni uslov  $m \geq 5$ , dobijamo da je skup rešenja jednačine [1] skup  $S_1 = \{6k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{6k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{(a.2) } p'(x_1) = 0 &\Leftrightarrow m\left(\left(e^{\frac{2\pi}{3}i} + 1\right)^{m-1} - \left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^{m-1}\right) = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow m\left(\left(e^{\frac{\pi}{3}i}\left(e^{\frac{\pi}{3}i} + e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)\right)^{m-1} - e^{\frac{2(m-1)\pi}{3}i}\right) = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow m\left(\left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^{m-1} - e^{\frac{2(m-1)\pi}{3}i}\right) = 0 \Leftrightarrow m\left(e^{\frac{(m-1)\pi}{3}i} - \left(e^{\frac{(m-1)\pi}{3}i}\right)^2\right) = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left(m = 0 \vee e^{\frac{(m-1)\pi}{3}i} - \left(e^{\frac{(m-1)\pi}{3}i}\right)^2 = 0\right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left(m = 0 \vee \left(t = e^{\frac{(m-1)\pi}{3}i} \wedge t - t^2 = 0\right)\right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left(m = 0 \vee \left(t = e^{\frac{(m-1)\pi}{3}i} \wedge (t = 0 \vee t = 1)\right)\right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left(m = 0 \vee \left(e^{\frac{(m-1)\pi}{3}i} = 0 \vee e^{\frac{(m-1)\pi}{3}i} = 1\right)\right) \stackrel{[1]}{\Leftrightarrow} \\
 &\Leftrightarrow \left(m = 0 \vee e^{\frac{(m-1)\pi}{3}i} = e^0 = 1\right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left(m = 0 \vee \frac{(m-1)\pi}{3} + 2k\pi = 0, k \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (m = 0 \vee m - 1 + 6k = 0, k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m = 0 \vee m = 1 - 6k, k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m = 0 \vee m = 1 + 6k, k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow m \in \{0\} \cup \{1 + 6k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

[1] - Jednačina  $e^{\frac{(m-1)\pi}{3}i} = 0$  nema rešenja jer je  $\left|e^{\frac{(m-1)\pi}{3}i}\right| = 1$  za svako  $m$ .

Uzimajući u obzir gore navedeni uslov  $m \geq 5$ , dobijamo da je skup rešenja jednačine [1] skup  $S_2 = \{6k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ .

(a.3) Na isti način kao pod (a.1) dobijamo isto rešenje:

$$p(x_2) = 0 \Leftrightarrow \left(e^{-\frac{2\pi}{3}i} + 1\right)^m - \left(e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right)^m - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m \in S_3 = \{6k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{6k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

(a.4) Na isti način kao pod (a.2) dobijamo isto rešenje:

$$p'(x_2) = 0 \Leftrightarrow m \left( \left(e^{-\frac{2\pi}{3}i} + 1\right)^{m-1} - \left(e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right)^{m-1} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m \in S_4 = \{6k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Prema tome

$$q|p \Leftrightarrow m \in S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 = \{6k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

□

Primeri sa testa:

- Ako je  $p$  polinom stepena 2 nad poljem  $\mathbb{R}$  tada je  $p$

a) svodljiv(uvek) b) nesvodljiv(uvek) **c) ništa od prethodnog**

- Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom  $t^2 + 1$  nesvodljiv nad njima:

**Q**  $\mathbb{R}$   $\mathbb{C}$   $\mathbb{Z}_2$   **$\mathbb{Z}_3$**   $\mathbb{Z}_5$

- $p$  i  $q$  su polinomi  $dg(p) = 3, dq(q) = 2$ . Tada je

$dg(pq) =$ **5** $i$  $dg(p+q) =$ **3**.

- Naći NZD polinoma  $p(t) = (t-3)^4(t+7)^2(t-1)^5(t+13)^3$  i  $q(t) = (t-3)^2(t-15)(t-1)^7(t+13)^5$

NZD je  **$(t-3)^2(t-1)^5(t+13)^3$**

- Nesvodljiv polinom nad poljem  $\mathbb{R}$  može biti stepena:

0 **1** 2 3 4

- Nesvodljiv polinom nad poljem  $\mathbb{C}$  može biti stepena:

0 **1** 2 3 4

- Neka je polinom  $p$  nad poljem  $F$  takav da je  $dg(p) \geq 1$ . Tada:

a) Ako polinom  $p$  ima koren u  $F$ , tada je on i svodljiv,

b) Ako polinom  $p$  ima koren u  $F$ , tada je on nesvodljiv,

c) Ako je polinom svodljiv, tada on ima koren u  $F$ ,

d) Ako je  $dg(p) = 3$ , tada je polinom  $p$  svodljiv nad  $F$ ,

e) Ako je  $dg(p) > 1$ , tada je polinom  $p$  svodljiv nad  $F$  akko ima koren u  $F$ ,

**f) Ako je  $dg(p) > 1$  i  $p$  ima koren, tada je  $p$  svodljiv.**