DISKRETNA MATEMATIKA

- PREDAVANJE -

Jovanka Pantović

1. Princip uključenja-isključenja
2. Stirlingovi brojevi druge vrste

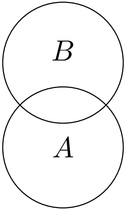
Tema 1

Princip uključenja-isključenja

Princip uključenja-isključenja

Lema

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$



Princip uključenja-isključenja

Lema

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Dokaz. Koristeći princip zbira i osobine skupovnih operacija, možemo zaključiti

$$\begin{aligned} |A| &= |(A \cap B) \cup (A \setminus B)| = |A \cap B| + |A \setminus B| \\ |B| &= |(A \cap B) \cup (B \setminus A)| = |A \cap B| + |B \setminus A| \\ |A \cup B| &= |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A| \end{aligned}$$

Odatle je

$$\begin{aligned} |A| + |B| =& |A \cap B| + |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A| \\ =& |A \cap B| + |A \cup B| \end{aligned}$$

Princip uključenja-isključenja

Lema

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \\
&= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \\
&= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| \\
&\quad - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|
\end{aligned}$$

Princip uključenja-isključenja

Teorema

Neka je $n \geq 2$.

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

Indukcijom po n.
Baza indukcije sledi iz Leme 2 za $n = 2$.

Princip uključenja-isključenja

Teorema

Neka je $n \geq 2$.

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

(T_{n-1}) Induktivna pretpostavka:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,n-1\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

$(T_{n-1} \Rightarrow T_n)$

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| &= \left|A_1 \cup \bigcup_{i=2}^{n} A_i\right| = |A_1| + \left|\bigcup_{i=2}^{n} A_i\right| - \left|\bigcup_{i=2}^{n} (A_1 \cap A_i)\right| \\ &= \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|\end{aligned}$$

Broj "na" preslikavanja

Neka je $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$.

Teorema

Neka je A skup sa osobinom $|A| = m$, gde je $1 \leq n \leq m$. Broj sirjektivnih preslikavanja skupa A u skup B jednak je

$$n^m - n(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}1^m.$$

Broj "na" preslikavanja

Neka je $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$.

Teorema

Neka je A skup sa osobinom $|A| = m$, gde je $1 \leq n \leq m$. Broj sirjektivnih preslikavanja skupa A u skup B jednak je

$$n^m - n(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}1^m.$$

Ako preslikavanje $f : A \to B$ nije sirjektivno onda f pripada bar jednom od sledećih skupova:

$$\begin{aligned}
B_1 =& \{f : A \to B \setminus \{b_1\}\} \\
B_2 =& \{f : A \to B \setminus \{b_2\}\} \\
&\ldots\ldots \\
B_n =& \{f : A \to B \setminus \{b_n\}\}.
\end{aligned}$$

Broj "na" preslikavanja

$$\begin{aligned} & \{f : A \to B\} = \{f : A \to B : f \text{ je "na" }\} \cup \{f : A \to B : f \text{ nije "na" }\} \\ \Leftrightarrow \quad & \{f : A \to B\} = \{f : A \to B : f \text{ je "na" }\} \cup B_1 \cup \ldots \cup B_n \end{aligned}$$

Broj "na" preslikavanja

$$
\begin{aligned}
& \{f : A \to B\} = \{f : A \to B : f \text{ je "na" }\} \cup \{f : A \to B : f \text{ nije "na" }\} \\
\Leftrightarrow \quad & \{f : A \to B\} = \{f : A \to B : f \text{ je "na" }\} \cup B_1 \cup \ldots \cup B_n
\end{aligned}
$$

Na osnovu principa zbira

$$
|\{f : A \to B\}| = \{f : A \to B : f \text{ je "na" }\}| + |B_1 \cup \ldots \cup B_n|.
$$

Broj "na" preslikavanja

Na osnovu principa uključenja-isključenja sledi

$$\begin{aligned}|B_1 \cup \ldots \cup B_n| =& |B_1| + \ldots + |B_n| - |B_1 \cap B_2| - \ldots |B_{n-1} \cap B_n| + \ldots \\ & + (-1)^{n-1}|B_1 \cap \ldots \cap B_n| \\ =& (n-1)^m + \ldots + (n-1)^m - (n-2)^m + \ldots - (n-2)^m + \ldots \\ & + (-1)^{n-2}n \\ =& n(n-1)^m - \binom{n}{2}(n-2)^m + \ldots + (-1)^{n-2}n.\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}\{f : A \to B : f \text{ je "na" }\}| & = & |\{f : A \to B\}| - |B_1 \cup \ldots \cup B_n| \\ & = & n^m - n(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \ldots (-1)^{n-1}n \\ & = & \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}(n-i)^m\end{array}$$

Broj "na" preslikavanja

Na osnovu principa uključenja-isključenja sledi

$$|B_1 \cup \ldots \cup B_n| = |B_1| + \ldots + |B_n| - |B_1 \cap B_2| - \ldots |B_{n-1} \cap B_n| + \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1}|B_1 \cap \ldots \cap B_n|$$

$$= n(n-1)^m - \binom{n}{2}(n-2)^m + \ldots + (-1)^{n-2}n.$$

$$\begin{aligned}
|\{f : A \to B : f \text{ je "na" }\}| &= |\{f : A \to B\}| - |B_1 \cup \ldots \cup B_n| \\
&= n^m - n(n-1)^m + \tbinom{n}{2}(n-2)^m - \ldots (-1)^{n-1}n \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \tbinom{n}{i} (n-i)^m
\end{aligned}$$

Broj "na" preslikavanja

Na osnovu principa uključenja-isključenja sledi

$$\begin{aligned}|B_1 \cup \ldots \cup B_n| =& |B_1| + \ldots + |B_n| - |B_1 \cap B_2| - \ldots |B_{n-1} \cap B_n| + \ldots \\ & + (-1)^{n-1}|B_1 \cap \ldots \cap B_n| \\ =& (n-1)^m + \ldots + (n-1)^m - (n-2)^m + \ldots - (n-2)^m + \ldots \\ & + (-1)^{n-2}n \\ =& n(n-1)^m - \binom{n}{2}(n-2)^m + \ldots + (-1)^{n-2}n.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{f : A \to B : f \text{ je "na" }\}| &= |\{f : A \to B\}| - |B_1 \cup \ldots \cup B_n| \\ &= n^m - n(n-1)^m + \tbinom{n}{2}(n-2)^m - \ldots (-1)^{n-1}n \\ &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \tbinom{n}{i}(n-i)^m\end{aligned}$$

Tema 2

Stirlingovi brojevi druge vrste

Stirlingovi brojevi druge vrste $S(m, n)$

1. broj razbijanja (particija) skupa od m elemenata na n nepraznih podskupova

Stirlingovi brojevi druge vrste $S(m, n)$

1. broj razbijanja (particija) skupa od m elemenata na n nepraznih podskupova
2. broj raspoređivanja m različitih elemenata u n istih (neoznačenih) kutija tako da nijedna ne ostane prazna.

Stirlingovi brojevi druge vrste $S(m, n)$

Neka je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.
Kažemo da je $\{B_1, \ldots, B_n\}$ particija skupa A ako važi:

- $A = B_1 \cup \ldots \cup B_n$

Stirlingovi brojevi druge vrste $S(m,n)$

Neka je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.
Kažemo da je $\{B_1, \ldots, B_n\}$ particija skupa A ako važi:

- $A = B_1 \cup \ldots \cup B_n$
- $B_i \neq \emptyset$, $1 \leq i \leq n$,

Stirlingovi brojevi druge vrste $S(m, n)$

Neka je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.
Kažemo da je $\{B_1, \ldots, B_n\}$ particija skupa A ako važi:

- $A = B_1 \cup \ldots \cup B_n$
- $B_i \neq \emptyset$, $1 \leq i \leq n$,
- $i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset$

Stirlingovi brojevi druge vrste $S(m, n)$

Primer

Neka je $A = \{a, b, c\}$ *i* $B = \{1, 2\}$.

(i) *Napisati sve particije skupa* A *na dva neprazna podskupa.*

(ii) *Napisati sva sirjektivna preslikavanja* $f : A \to B$.

Stirlingovi brojevi druge vrste $S(m, n)$

Primer

Neka je $A = \{a, b, c\}$ *i* $B = \{1, 2\}$.

(i) *Napisati sve particije skupa* A *na dva neprazna podskupa.*

(ii) *Napisati sva sirjektivna preslikavanja* $f : A \to B$.

particije (neoznačene kutije)	"na" preslikavanja (označene kutije)
$\{\{a, b\}, \{c\}\}$	$\{(a, 1), (b, 1), (c, 2)$ $\{(a, 2), (b, 2), (c, 1)$
$\{\{a, c\}, \{b\}\}$	$\{(a, 1), (b, 2), (c, 1)$ $\{(a, 2), (b, 1), (c, 2)$
$\{\{a\}, \{b, c\}\}$	$\{(a, 1), (b, 2), (c, 2)$ $\{(a, 2), (b, 1), (c, 1)$

Stirlingovi brojevi druge vrste $S(m,n)$

Neka je $0 < n \leq m$.

$$S(m,n) \quad = \quad \frac{1}{n!} \cdot |\{f : A \xrightarrow{\text{na}} B\}|$$

Stirlingovi brojevi druge vrste $S(m,n)$

Neka je $0 < n \leq m$.

$$S(m,n) = \frac{1}{n!} \cdot |\{f : A \xrightarrow{\text{na}} B\}|$$

$$S(m,n) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^m$$

Tablica Stirlingovih brojeva druge vrste

Teorema

1. $S(m, m) =$

Tablica Stirlingovih brojeva druge vrste

Teorema

1. $S(m, m) = 1,\ m \in \mathbb{N}$

Tablica Stirlingovih brojeva druge vrste

Teorema

1. $S(m,m) = 1,\, m \in \mathbb{N}$
2. $S(m,1) =$

Tablica Stirlingovih brojeva druge vrste

Teorema

1. $S(m,m)=1,\ m\in\mathbb{N}$
2. $S(m,1)=1,\ m\in\mathbb{N}$
3. $S(m,n)=S(m-1,n-1)+nS(m-1,n),\ 0<n<m$

Tablica Stirlingovih brojeva druge vrste

$$S(m,n) = S(m-1,n-1) + nS(m-1,n), 0 < n < m$$

Tablica Stirlingovih brojeva druge vrste

$$S(m,n) = S(m-1,n-1) + nS(m-1,n), 0 < n < m$$

Neka je $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$.
Neka je $A = B_1 \cup \dots \cup B_n$ ($B_i \neq \emptyset, 1 \leq i \leq n, i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j \neq \emptyset$).
Imamo dve opcije:

- $B_1 = \{a_1\}$: broj takvih razbijanja jednak broju razbijanja skupa $A \setminus \{a_1\}$ na $n-1$ podskupova. Takvih razbijanja ima

$$S(m-1,n-1).$$

- $B_1 \supset \{a_1\}$: broj načina da razbijemo preostalih $m-1$ elemenata na n skupova jednak je $S(m-1,n)$ i za svako takvo razbijanje imamo n različitih načina da izaberemo podskup kojem ćemo dodati element a_1. Znači, broj takvih razbijanja jednak je

$$nS(m-1,n).$$

Tablica Stirlingovih brojeva druge vrste

(m,n)	1	2	3	4	5	6	$\dots$
1	1						
2	1	1					
3	1	3	1				
4	1	7	6	1			
5	1	15	25	10	1		
6	1	31	90	65	15	1	
$\dots$							
$\dots$							