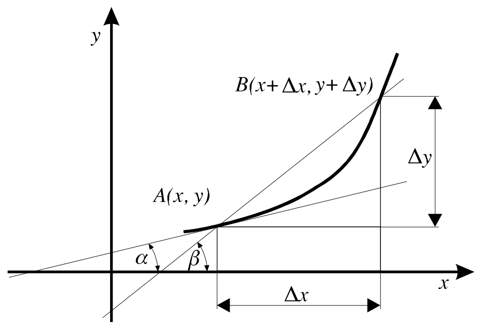
DIFERENCIJALNI RAČUN

Posmatrajmo grafik neprekidne funkcije $y = f(x)$ nad intervalom (a,b).



Ako postoji granična vrednost $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, x, $x+\Delta x \in (a,b)$, onda se ta granična vrednost, koja se označava sa $f'(x)$ ili y' zove izvod funkcije $f(x)$ u tački x.

Dakle, $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Prava AB, gde su A i B tačke grafika, naziva se sečica te krive, određena tačkama A i B. Pustimo da se tačka B kreće po krivoj i da teži da se poklopi sa tačkom A. Sečica AB pri tom menja svoj položaj (nagib). Ukoliko postoji granični položaj te sečice kada tačka B teži ka tački A, tada se prava koja zauzima taj položaj naziva tangenta krive $y = f(x)$ u tački A.

Pretpostavimo da je ugao α koji tangenta zaklapa sa pozitivnim smerom x-ose različit od $\frac{\pi}{2}$, $(\alpha \neq \frac{\pi}{2})$. Ako je β ugao koji zaklapa sečica AB sa pozitivnim delom x-ose, to je

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

pa je koeficijent pravca $\mathrm{tg}\alpha$ tangente kroz tačku A dat izrazom

$$\mathrm{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Neka je funkcija $y = f(x)$ diferencijabilna nad intervalom (a,b). Izvod $f'(x)$ funkcije $f(x)$ je funkcija nezavisne promenljive x, definisana nad intervalom (a,b). Ako je ona diferencijabilna u nekoj tački $x \in (a,b)$, onda se njen izvod $(f'(x))'$ naziva drugim izvodom ili izvodom drugog reda funkcije $f(x)$ u tački x, koji ćemo označavati sa $y'' = f''(x)$.

Ako je definisan izvod $(n-1)$ reda, $n \geq 2$, tada je $n-$ti izvod ili izvod $n-$tog reda definisan kao izvod funkcije $y = f^{(n-1)}(x)$, tj. $(f^{(n-1)}(x))' = f^{(n)}(x)$.

Tablica izvoda

	Funkcija $f(x)$	Izvod $f'(x)$	Važi za
1.	$c = const$	0	$x \in R$
2.	x	1	$x \in R$
3.	x^n	nx^{n-1}	$n \in N$, $x \in R$
	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	a) $\alpha = \frac{p}{q} \in Q$, $q \in N$ neparan broj, $x \neq 0$ b) $\alpha = \frac{p}{q} > 1$, q neparan broj, $x \in R$
	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x \in R$, $x > 0$
4.	a^x	$a^x \ln a$	$a > 0$, $a \neq 1$, $x \in R$
5.	e^x	e^x	$x \in R$
6.	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$
7.	$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$	$x \neq 0$,
8.	$\sin x$	$\cos x$	$x \in R$
9.	$\cos x$	$-\sin x$	$x \in R$
10.	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$
11.	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi$, $k \in Z$
12.	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
13.	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
14.	$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in R$
15.	$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in R$

Osobine izvoda

Ako funkcije $u = u(x)$ i $v = v(x)$ imaju izvod u tački x, tada i funkcije $u \pm v$, uv, $\frac{u}{v}$ i cu, $c \in R$, imaju izvode u toj tački ($\frac{u}{v}$ pod pretpostavkom da je $v(x) \neq 0$ u datoj tački x). Pri tom je:

a) $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$,

b) $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$,

c) $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$,

d) $(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x)$ (c je konstanta).

Izvod složene funkcije

Neka je data složena funkcija $y = f(u)$, $u = g(x)$. Ako $g(x)$ ima izvod u tački x, a $f(u)$ izvod u tački u, tada je $(f \circ g)'(x) = f'(u) \cdot g'(x)$ $\quad ((f \circ g)(x) = f(g(x)))$.

1. Naći izvod funkcije $y = x^2$ po definiciji.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = \Delta x(2x + \Delta x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x .$$

2. Naći izvod funkcije $y = (x^2 - 3x + 3)^5$.

$$u = x^2 - 3x + 3 \Rightarrow y = u^5$$

$$y' = y'_u \cdot u'_x = (u^5)'_u \cdot (x^2 - 3x + 3)'_x = 5u^4 \cdot (2x - 3) = 5(x^2 - 3x + 3)^4 \cdot (2x - 3) .$$

3. Naći izvod funkcije $y = \ln \frac{1 + \sqrt{\sin x}}{1 - \sqrt{\sin x}} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\sin x}$.

$$y' = \frac{1 - \sqrt{\sin x}}{1 + \sqrt{\sin x}} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{\sin x}}{1 - \sqrt{\sin x}}\right)' + 2 \cdot \frac{1}{1 + (\sqrt{\sin x})^2} \cdot (\sqrt{\sin x})' = \frac{1 - \sqrt{\sin x}}{1 + \sqrt{\sin x}} \cdot$$

$$\cdot \frac{(1 + \sqrt{\sin x})'(1 - \sqrt{\sin x}) - (1 + \sqrt{\sin x})(1 - \sqrt{\sin x})'}{(1 - \sqrt{\sin x})^2} + 2 \cdot \frac{1}{1 + \sin x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot (\sin x)' =$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot (\sin x)'(1 - \sqrt{\sin x}) - (1 + \sqrt{\sin x})(-\frac{1}{2\sqrt{\sin x}})(\sin x)'}{(1 + \sqrt{\sin x})(1 - \sqrt{\sin x})} + \frac{1}{1 + \sin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x =$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x \cdot (1 - \sqrt{\sin x}) + (1 + \sqrt{\sin x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x}{1 - \sin x} + \frac{\cos x}{(1 + \sin x) \cdot \sqrt{\sin x}} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot (1 - \sqrt{\sin x} + 1 + \sqrt{\sin x})}{2 \cdot (1 - \sin x) \cdot \sqrt{\sin x}} + \frac{\cos x}{(1 + \sin x) \cdot \sqrt{\sin x}} =$$

$$=\frac{2\cos x\cdot(1+\sin x)+2\cos x\cdot(1-\sin x)}{2\cdot(1-\sin x)(1+\sin x)\cdot\sqrt{\sin x}}=\frac{2\cos x}{(1-\sin^2 x)\cdot\sqrt{\sin x}}=\frac{2}{\cos x\cdot\sqrt{\sin x}}.$$

4. Naći izvod funkcije $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$.

$$y'=2^{\frac{x}{\ln x}}\cdot\ln 2\cdot\frac{1\cdot\ln x-x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=2^{\frac{x}{\ln x}}\cdot\ln 2\cdot\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}.$$

5. Naći izvod funkcije $y=(\frac{x}{a})^b+(\frac{b}{x})^a+(\frac{a}{b})^x$.

$$y'=\frac{1}{a^b}\cdot b\cdot x^{b-1}+b^a\cdot(-\frac{a}{x^{a+1}})+(\frac{a}{b})^x\cdot\ln\frac{a}{b}.$$

6. $y=a^{a^x}+a^{x^a}+x^{a^a}+a^{a^a}$.

$$y'=a^{a^x}\cdot\ln a\cdot a^x\cdot\ln a+a^{x^a}\cdot\ln a\cdot a\cdot x^{a-1}+a^a\cdot x^{a^a-1}.$$

Logaritamski izvod

Po ovom pravilu možemo da tražimo izvod funkcije samo u tačkama gde je funkcija pozitivna.

7. Naći izvod funkcije $y=\sqrt[3]{x^2}\cdot\frac{1-x}{1+x^2}\cdot\sin^3 x\cdot\cos^2 x$.

$$\ln y=\ln(x^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1-x}{1+x^2}\cdot\sin^3 x\cos^2 x)=\frac{2}{3}\ln x+\ln(1-x)-\ln(1+x^2)+3\ln\sin x+2\ln\cos x$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\cdot(-1)-\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x+3\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x+2\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)$$

$$y'=y(\frac{2}{3x}-\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1+x^2}+3\mathrm{ctg}x-2\mathrm{tg}x)$$

$$y'=\sqrt[3]{x^2}\cdot\frac{1-x}{1+x^2}\cdot\sin^3 x\cdot\cos^2 x\cdot(\frac{2}{3x}-\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1+x^2}+3\mathrm{ctg}x-2\mathrm{tg}x).$$

8. Naći drugi izvod funkcije $y=x^x$.

$$\ln y=x\cdot\ln x$$

$$\frac{1}{y}y'=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1 \qquad y''=(x^x)'\cdot(\ln x+1)+x^x\cdot(\ln x+1)'$$

$$y'=x^x(\ln x+1) \qquad y''=x^x(\ln x+1)^2+\frac{x^x}{x}.$$

9. Naći izvod funkcije $y=(\frac{x}{1+x})^x+\ln x$.

Ako je $y_1=(\frac{x}{1+x})^x$ sledi $y'=y_1'+(\ln x)'$

$$\ln y_1=x\cdot\ln\frac{x}{1+x}$$

$$\frac{1}{y_1}y_1'=\ln\frac{x}{1+x}+x\cdot\frac{1+x}{x}\cdot\frac{1+x-x}{(1+x)^2}=\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}$$

$$y_1'=(\frac{x}{1+x})^x\cdot\left[\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}\right]$$

$$y' = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x \cdot \left(\ln\frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}\right) + \frac{1}{x}.$$

Izvod funkcije zadate u parametarskom obliku

Neka su nad intervalom $I \subset R$ definisane dve realne funkcije $x = \varphi(t)$ i $y = \psi(t)$, $t \in I$ i neka za funkciju $\varphi(t)$ postoji inverzna funkcija $t = \varphi^{-1}(x)$. Tada je složena funkcija $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$, definisana nad skupom vrednosti $\{\ \varphi(t) : t \in I\ \}$ funkcije $\varphi(t)$. Kažemo da je sa $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in I$, funkcija $f(x)$ zadata u parametarskom obliku pri čemu ćemo pomoćnu promenljivu t nazvati parametrom.

Neka je data funkcija $y = f(x)$ u parametarskom obliku $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in (a,b)$. Ako neprekidne funkcije $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ imaju izvode u tački $t \in (a,b)$, i ukoliko je $\varphi'(t) \neq 0$, tada funkcija $y = f(x)$ ima izvod u tački t i važi $f'(x) = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, tj. $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

$$y''_x = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{dy'_x}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

$$\left(y''_x = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{(x'_t)^2} \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{(x'_t)^3} \right)$$

$$y''' = \frac{dy''_x}{dx} = \frac{dy''_x}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (y''_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y''_x)'_t}{x'_t}, \text{ itd.}$$

10. Naći y'' za $x = \ln t$ i $y = t + \dfrac{1}{t}$.

$$y'_t = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2-1}{t^2}, \quad x'_t = \frac{1}{t}, \qquad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{t^2-1}{t^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{t^2-1}{t} = t - \frac{1}{t}$$

$$(y'_x)'_t = 1 + \frac{1}{t^2} = \frac{t^2+1}{t^2} \qquad y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{t^2+1}{t^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{t^2+1}{t} = t + \frac{1}{t}.$$

11. Pokazati da funkcija $y = e^{2x}\sin 5x$ zadovoljava jednačinu $y'' - 4y' + 29y = 0$.

$$y' = 2e^{2x}\sin 5x + 5e^{2x}\cos 5x$$

$$y'' = 4e^{2x}\sin 5x + 10e^{2x}\cos 5x + 10e^{2x}\cos 5x - 25e^{2x}\sin 5x =$$

$$= -21e^{2x}\sin 5x + 20e^{2x}\cos 5x$$

$$\underbrace{-21e^{2x}\sin 5x + 20e^{2x}\cos 5x}_{y''} - 4 \cdot \underbrace{(2e^{2x}\sin 5x + 5e^{2x}\cos 5x)}_{y'} + 29e^{2x}\sin 5x = 0.$$