Bulove algebre

12 ef

Definicija 1 *Uređena šestorka* $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$*, gde su* $+$ *i* $\cdot$ *binarne operacije skupa* B*,* $'$ *unarna operacija skupa* B*, a* 0 *i* 1 *dva različita elementa skupa* B*, je* **Bulova algebra** *ako važe sledeće aksiome:*

[BA1] komutativnost; $a+b=b+a$, $a\cdot b=b\cdot a$,

[BA2] distributivnost: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$, $a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c)$,

[BA3] neutralni elementi: $a+0=a$, $a\cdot 1=a$,

[BA4] inverzni elementi: $a+a'=1$, $a\cdot a'=0$.

★ Svaka konačna Bulova algebra ima 2^n elemenata, za neko $n\in\mathbb{N}$.

Primeri Bulovih algebri:

Primer 1 *Uređena šestorka* $\mathcal{I} = (I, \vee, \wedge, \urcorner, \perp, \top)$ *je Bulova algebra, gde je* $I=\{\perp,\top\}$*, i gde su* $\vee$*,* $\wedge$ *i* $\urcorner$ *poznate operacije iskaznog računa - disjunkcija, konjunkcija i negacija:*

$\vee$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$

$\wedge$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$

	$\urcorner$
$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$

Šestorku $\mathcal{I}$ *nazivamo* **Bulovom algebrom iskaznog računa**.

Lako se proverava da je $\mathcal{I}$ *zaista Bulova algebra:*

[BA1] *Logičke operacije* $\vee$ *i* $\wedge$ *su komutativne što sledi iz odgovarajućih tautologija*

$$(p\vee q)\Leftrightarrow(q\vee p) \quad i \quad (p\wedge q)\Leftrightarrow(q\wedge p).$$

[BA2] *Operacije* $\vee$ *i* $\wedge$ *su distributivne jedna prema drugoj što sledi iz tautologija*

$$\big(p\wedge(q\vee r)\big)\Leftrightarrow\big((p\wedge q)\vee(p\wedge r)\big) \quad i \quad \big(p\vee(q\wedge r)\big)\Leftrightarrow\big((p\vee q)\wedge(p\vee r)\big).$$

[BA3] *Aksiome* $a+0=a$ *i* $a\cdot 1=a$ *su zadovoljene što sledi iz odgovarajućih tautologija*

$$(p\vee\perp)\Leftrightarrow p \quad i \quad (p\wedge\top)\Leftrightarrow p.$$

[BA4] *Ispunjenost aksioma* $a+a'=1$ *i* $a\cdot a'=0$ *sledi iz tautologija*

$$(p\vee\urcorner p)\Leftrightarrow\top \quad i \quad (p\wedge\urcorner p)\Leftrightarrow\perp.$$

Takođe, sve ove osobine se mogu dokazati i direktnom proverom. ▲

Primer 2 *Neka je* A *proizvoljan neprazan skup. Uređena šestorka* $\mathcal{P}(A)=\big(P(A),\cup,\cap,\overline{},\emptyset,A\big)$*, gde je* $P(A)=\{X\mid X\subseteq A\}$ *partitivni skup (skup svih podskupova) skupa* A*, operacije* $\cup$ *i* $\cap$ *predstavljaju uniju i presek skupova, a* $\overline{}$ *je komplement* ($\overline{X}=A\setminus X$)*, jeste Bulova algebra (zovemo je* **Bulova algebra skupova**).

[BA1] *Operacije* $\cup$ *i* $\cap$ *su komutativne, tj. za sve* $X,Y\in P(A)$ *važi* $X\cup Y=Y\cup X$ *i* $X\cap Y=Y\cap X$.

[BA2] *Operacije* $\cup$ *i* $\cap$ *su distributivne jedna prema drugoj, odnosno za sve* $X,Y,Z\in P(A)$ *je* $X\cap(Y\cup Z)=(X\cap Y)\cup(X\cap Z)$ *i* $X\cup(Y\cap Z)=(X\cup Y)\cap(X\cup Z)$.

[BA3] *Za svako $X \in P(A)$ važi $X \cup \emptyset = X$ i $X \cap A = X$.*

[BA4] *Za svako $X \in P(A)$ važi $X \cup \overline{X} = A$ i $X \cap \overline{X} = \emptyset$.* ▲

Primer 3 *Uređena šestorka $\mathcal{D}_{30} = \left(D_{30}, \mathsf{NZS}, \mathsf{NZD}, \frac{30}{x}, 1, 30\right)$ gde je $D_{30} = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$ skup delitelja broja 30,* NZS *je najmanji zajednički sadržalac, a* NZD *je najveći zajednički delilac dva broja, jeste Bulova algebra i zovemo je* **Bulova algebra delitelja** *broja 30.*

Kako je $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, svaki element skupa $x \in D_{30}$ možemo predstaviti u obliku $x = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$ za neke $\alpha, \beta, \gamma \in \{0,1\}$, a operacije NZS*,* NZD *i $\frac{30}{x}$ u obliku*

$$\mathsf{NZS}(2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}, 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}) = 2^{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}} \cdot 3^{\max\{\beta_1,\beta_2\}} \cdot 5^{\max\{\gamma_1,\gamma_2\}},$$

$$\mathsf{NZD}(2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}, 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}) = 2^{\min\{\alpha_1,\alpha_2\}} \cdot 3^{\min\{\beta_1,\beta_2\}} \cdot 5^{\min\{\gamma_1,\gamma_2\}},$$

$$\frac{30}{2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma} = \frac{2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1}{2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma} = 2^{1-\alpha} \cdot 3^{1-\beta} \cdot 5^{1-\gamma},$$

gde su operacije max*,* min *i $1-t$ skupa $\{0,1\}$ definisane Kejlijevim tablicama:*

max	0	1
0	0	1
1	1	1

min	0	1
0	0	0
1	0	1

	$1-t$
0	1
1	0

i to su praktično redom logičke operacije $\vee$, $\wedge$ i $\urcorner$, gde je $\perp$ označeno kao 0, a $\top$ kao 1.

[BA1] *Komutativnost operacije* NZS *sledi iz komutativnosti operacije* max*, odnosno iz komutativnosti logičke disjunkcije. Analogno komutativnost operacije* NZD *sledi iz komutativnosti operacije* min*, odnosno iz komutativnosti logičke konjunkcije.*

[BA2] *Ako operacije* max *i* min *posmatramo kao logičke operacije $\vee$ i $\wedge$, koristeći distributivnost operacije $\wedge$ prema operaciji $\vee$ i obratno, dobijamo distributivnost operacije* NZD *prema* NZS *i obratno.*

[BA3] *Za proizvoljno $x \in D_{30}$ jednakosti $\mathsf{NZS}(x,1) = x$ i $\mathsf{NZD}(x,30) = x$ su očigledne, ali ih možemo dokazati i primenom tautologija $(p \vee \perp) \Leftrightarrow p$ i $(p \wedge \top) \Leftrightarrow p$.*

[BA4] *Posmatrajmo proizvoljno $x \in D_{30}$. Jednakosti $\mathsf{NZS}\left(x, \frac{30}{x}\right) = 30$ i $\mathsf{NZD}\left(x, \frac{30}{x}\right) = 1$ se lako proveravaju direktno, ali ih možemo dokazati i primenom tautologija $(p \vee \urcorner p) \Leftrightarrow \top$ i $(p \wedge \urcorner p) \Leftrightarrow \perp$.* ▲

Zadatak 1 *Ispitati da li je $\mathcal{D}_{12} = \left(D_{12}, \mathsf{NZS}, \mathsf{NZD}, \frac{12}{x}, 1, 12\right)$ Bulova algebra, gde je D_{12} skup delilaca broja 12.*

Rešenje: Kako je $12 = 2^2 \cdot 3$, to je $D_{12} = \{1,2,3,4,6,12\}$.

[BA1] Komutativnost operacija NZD i NZS je očigledna.

[BA2] Uzajamna distributivnost operacija NZD i NZS se proverava kao u primeru **3**.

[BA3] Za svako $x \in D_{12}$ očigledno važi $\mathsf{NZD}(x,1) = 1$ i $\mathsf{NZS}(x,12) = 12$.

[BA4] Aksiome $\mathsf{NZS}\left(x, \frac{12}{x}\right) = 12$ i $\mathsf{NZD}\left(x, \frac{12}{x}\right) = 1$ međutim nisu zadovoljene, jer je npr. $\mathsf{NZS}\left(2, \frac{12}{2}\right) = \mathsf{NZS}(2,6) = 6 \neq 12$ i $\mathsf{NZD}\left(2, \frac{12}{2}\right) = \mathsf{NZD}(2,6) = 2 \neq 1$.

Prema tome, $\mathcal{D}_{12}$ nije Bulova algebra. □

$\boxed{?}$ Zašto $\mathcal{D}_{30}$ jeste, a $\mathcal{D}_{12}$ nije Bulova algebra? Videli smo da aksioma [BA4] ne važi u $\mathcal{D}_{12}$ jer je npr. $\mathsf{NZS}\left(2, \frac{12}{2}\right) = 6 \neq 12$ i $\mathsf{NZD}\left(2, \frac{12}{2}\right) = 2 \neq 1$. Problem je u tome što najveći zajednički delilac brojeva 2 i 6 nije 1 nego 2. Ovaj uslov je precizno formulisan u narednom tvrđenju.

Tvrđenje 1 *Neka je $n \geq 2$ prirodan broj, i neka je D_n skup svih delitelja broja n. Uređena šestorka $\mathcal{D}_n = \left(D_n, \mathsf{NZS}, \mathsf{NZD}, \frac{n}{x}, 1, n\right)$ je Bulova algebra ako i samo ako je $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$, gde su $p_1, p_2, \ldots, p_r$ međusobno različiti prosti brojevi (tj. u faktorizaciji broja n se svaki prost faktor pojavljuje najviše jednom).*

Osnovne teoreme Bulove algebre $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$:

[BT1] *idempotentnost:* $a + a = a, \quad a \cdot a = a,$
Dokaz: $a \overset{[BA3]}{=} a \cdot 1 \overset{[BA4]}{=} a \cdot (a + a') \overset{[BA2]}{=} a \cdot a + a \cdot a' \overset{[BA4]}{=} a \cdot a + 0 \overset{[BA3]}{=} a \cdot a.$

[BT2] *ograničenost:* $a + 1 = 1, \quad a \cdot 0 = 0,$

[BT3] *apsorbcija:* $a + a \cdot b = a, \quad a \cdot (a + b) = a,$

[BT4] $a + a' \cdot b = a + b, \quad a \cdot (a' + b) = a \cdot b,$

[BT5] *asocijativnost:* $(a + b) + c = a + (b + c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$

[BT6] *jedinstvenost komplementa:* $(a + x = 1 \ \wedge \ a \cdot x = 0) \ \Rightarrow \ x = a',$

[BT7] *involucija:* $(a')' = a,$

[BT8] $0' = 1 \ \wedge \ 1' = 0,$

[BT9] *De Morganovi zakoni:* $(a + b)' = a' \cdot b' \ \wedge \ (a \cdot b)' = a' + b'.$

★ Primetimo da se aksiome i teoreme javljaju u *dualnim* parovima. Naime, ako u nekoj aksiomi ili teoremi svako $+$ zamenimo sa $\cdot$, svako $\cdot$ sa $+$, 0 sa 1 i 1 sa 0, dobijamo dualnu aksiomu, odnosno teoremu. Ovo pravilo se naziva ***princip dualnosti***. Stoga, ako dokažemo neko tvrđenje, na osnovu principa dualnosti mora da važi i dualno tvrđenje koje se dobija gorepomenutim zamenama.

Definicija 2 ***Podalgebra*** *Bulove algebre $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ je svaka Bulova algebra $C = (C, +, \cdot, ', 0, 1)$, gde je $C \subseteq B$, a operacije iz C su restrikcije operacija iz $\mathcal{B}$.*

Teorema 1 *Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ Bulova algebra i $C \subseteq B$. Tada je $C = (C, +, \cdot, ', 0, 1)$ podalgebra Bulove algebre $\mathcal{B}$ ako i samo ako za svako a i b iz skupa C važi:*

$$a + b \in C, \quad ab \in C \quad i \quad a' \in C.$$

★ Konstante 0 i 1 iz podalgebre su iste kao konstante 0 i 1 u samoj Bulovoj algebri $\mathcal{B}$. Svaka Bulova algebra ima kao podalgebre tzv. trivijalne podalgebre $(\{0, 1\}, +, \cdot, ', 0, 1)$ i samu sebe.

√ **Zadatak 2** *Naći sve podalgebre Bulovih algebri $\mathcal{D}_{30}$ i $\mathcal{P}(A)$, za $A = \{a, b, c\}$.*

Rešenje: Skupovi $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ i $P(A) = \left\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\right\}$ imaju po 8 elemenata, pa posmatramo samo njihove podskupove koji imaju 2, 4 ili 8 elemenata i sadrže odgovarajuće konstante.

- Podalgebre od $\mathcal{D}_{30}$ su:

$\mathcal{B}_1 = \left(\{1,30\}, \mathsf{NZS}, \mathsf{NZD}, \frac{30}{x}, 1, 30\right),$

$\mathcal{B}_2 = \left(\{1,30,2,15\}, \mathsf{NZS}, \mathsf{NZD}, \frac{30}{x}, 1, 30\right),$

$\mathcal{B}_3 = \left(\{1,30,3,10\}, \mathsf{NZS}, \mathsf{NZD}, \frac{30}{x}, 1, 30\right),$

$\mathcal{B}_4 = \left(\{1,30,5,6\}, \mathsf{NZS}, \mathsf{NZD}, \frac{30}{x}, 1, 30\right),$

$\mathcal{B}_5 = \mathcal{D}_{30}.$

- Podalgebre od $\mathcal{P}(A)$ su:

$C_1 = \left(\{\emptyset, A\}, \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, A\right),$

$C_2 = \left(\{\emptyset, A, \{a\}, \{b,c\}\}, \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, A\right),$

$C_3 = \left(\{\emptyset, A, \{b\}, \{a,c\}\}, \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, A\right),$

$C_4 = \left(\{\emptyset, A, \{c\}, \{a,b\}\}, \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, A\right),$

$C_5 = \left(P(A), \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, A\right).$

□

Definicija 3 *U Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ definiše se binarna relacija $\preccurlyeq$:*

$$(\forall x \in B)(\forall y \in B) \quad x \preccurlyeq y \;\Leftrightarrow\; x + y = y.$$

Zadatak 3 *Dokazati da su u svakoj Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ sledeći iskazi ekvivalentni:*

(a) $xy = x$, (b) $x + y = y$, (c) $x' + y = 1$, (d) $xy' = 0$.

Rešenje: Ako bismo dokazivali ekvivalentnost svaka dva iskaza, bilo bi potrebno dokazati 12 implikacija. Međutim, zbog tranzitivnosti implikacije, dovoljno je dokazati samo

$$(a) \Rightarrow (b) \quad \wedge \quad (b) \Rightarrow (c) \quad \wedge \quad (c) \Rightarrow (d) \quad \wedge \quad (d) \Rightarrow (a).$$

(a ⇒ b) Neka je $xy \overset{*}{=} x$. Sledi

$$x + y \overset{*}{=} xy + y \overset{[BA1]}{=} y + yx \overset{[BT3]}{=} y.$$

(b ⇒ c) Neka je $x + y \overset{*}{=} y$. Sledi

$$x' + y \overset{*}{=} x' + (x + y) \overset{[BT5]}{=} (x' + x) + y \overset{[BA1],[BA4]}{=\!=} 1 + y \overset{[BA1],[BT2]}{=\!=} 1.$$

(c ⇒ d) Neka je $x' + y \overset{*}{=} 1$. Sledi

$$0 \overset{[BT8]}{=} 1' \overset{*}{=} (x' + y)' \overset{[BT9]}{=} (x')'y' \overset{[BT7]}{=} xy'.$$

(d ⇒ a) Neka je $xy' \overset{*}{=} 0$. Sledi

$$xy \overset{[BA3]}{=} xy + 0 \overset{*}{=} xy + xy' \overset{[BA2]}{=} x(y + y') \overset{[BA4]}{=} x \cdot 1 \overset{[BA3]}{=} x.$$

□

★ U prethodnom zadatku su zapravo date četiri ekvivalentne definicije relacije $\preccurlyeq$.

Zadatak 4 *Pokazati da je relacija* $\preccurlyeq$ *u Bulovoj algebri* $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *relacija poretka.*

Rešenje:

R Na osnovu definicije relacije $\preccurlyeq$ imamo $a \preccurlyeq a \Leftrightarrow a + a = a$, a desna strana je tačna zbog idempotentnosti.

A Koristeći definiciju relacije $\preccurlyeq$ i komutativnost operacije + dobijamo:

$$a \preccurlyeq b \ \wedge\ b \preccurlyeq a \quad \Leftrightarrow \quad a + b = b \ \wedge\ b + a = a \quad \Rightarrow \quad a = b.$$

T Koristeći definiciju relacije $\preccurlyeq$ i asocijativnost operacije + dobijamo:

$$\begin{aligned} a \preccurlyeq b \ \wedge\ b \preccurlyeq c \quad &\Leftrightarrow \quad a + b = b \ \wedge\ b + c = c \\ &\Rightarrow \quad a + c = a + (b + c) = (a + b) + c = b + c = c \\ &\Rightarrow \quad a \preccurlyeq c. \end{aligned}$$

□

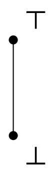
Zadatak 5 *Interpretirati binarnu relaciju* $\preccurlyeq$ *u modelima iskazne algebre, algebre skupova i algebre delitelja.*

Rešenje:

- U iskaznoj algebri $\mathcal{I} = (I, \vee, \wedge, \rceil, \perp, \top)$ važi $p \preccurlyeq q \ \Leftrightarrow\ (p \vee q \Leftrightarrow q)$, pa imamo

p	q	$p \vee q$	$p \vee q \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$

Prema tome, relaciju $\preccurlyeq$ možemo interpretirati kao implikaciju. Haseov dijagram uređenog skupa $(I, \Rightarrow)$ je

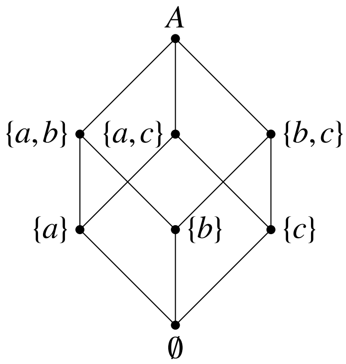


- U algebri skupova $\mathcal{P}(A) = \left(P(A), \cup, \cap, \overline{\ }, \emptyset, A\right)$ za sve $X, Y \in P(A)$ važi

$X \preccurlyeq Y \quad \Leftrightarrow \quad X \cup Y = Y \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq Y,$

te je u ovoj Bulovoj algebri relacija $\preccurlyeq$ u stvari dobro poznata skupovna relacija $\subseteq$.

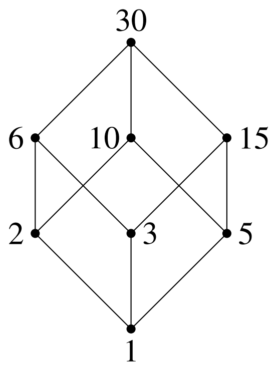
Na primer, za $A = \{a, b, c\}$ Haseov dijagram uređenog skupa $(P(A), \subseteq)$ je



- U algebri delitelja $\mathcal{D}_n = \left(D_n, \mathsf{NZS}, \mathsf{NZD}, \frac{n}{x}, 1, n\right)$ za sve $x, y \in D_n$ važi

  $x \preccurlyeq y \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{NZS}(x,y) = y \quad \Leftrightarrow \quad x \mid y,$

  te je u ovoj Bulovoj algebri relacija $\preccurlyeq$ u stvari dobro poznata relacija „deli”. Na primer, za $n = 30$ Haseov dijagram uređenog skupa $(D_{30}, |)$



□

Zadatak 6 *Dokazati da u svakoj Bulovoj algebri* $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *za sve* $a, b \in B$ *važi*

$$a \preccurlyeq a + b \quad i \quad ab \preccurlyeq a.$$

Rešenje: Tvrđenje dokazujemo koristeći aksiome i teoreme Bulove algebre, kao i definiciju relacije poretka $x \preccurlyeq y \overset{[*]}{\Leftrightarrow} x + y = y$.

$a + (a + b) \overset{[\mathsf{BT6}]}{=} (a + a) + b \overset{[\mathsf{BT1}]}{=} a + b \quad \overset{[*]}{\Leftrightarrow} \quad a \preccurlyeq a + b,$

$ab + a \overset{[\mathsf{BA1}]}{=} a + ab \overset{[\mathsf{BT3}]}{=} a \quad \overset{[*]}{\Leftrightarrow} \quad ab \preccurlyeq a.$

□

Zadatak 7 *Zaokružiti brojeve ispred iskaza koji su tačni u svakoj Bulovoj algebri* $(B,+,\cdot,',0,1)$.

1. $xx = x+x$	11. $x+1 = x$	21. $x+xy = x\cdot 0'$
2. $xy = x+y$	12. $1\cdot 0 = 1'$	22. $(x+xy)' = x'$
3. $xy = (x+y)'$	13. $x+y = (xy)'$	23. $xy = x$
4. $xy = 0 \Rightarrow (x=0 \vee y=0)$	14. $xy = (x'+y')'$	24. $x+1 = 0'$
5. $(x=0 \vee y=0) \Rightarrow xy = 0$	15. $x+y = x'y'$	25. $x \preccurlyeq 1$
6. $x = xy+xy'$	16. $xy = 1 \Rightarrow x = 1$	26. $x \preccurlyeq x'$
7. $(\forall x\in B)(\exists y\in B)(x+y=1 \wedge xy=0)$	17. $x=y \Rightarrow x'=y'$	27. $xy \preccurlyeq x+y$
8. $(\forall x\in B)(\forall y\in B)(x+y=1 \wedge xy=0)$	18. $x'=y' \Rightarrow x=y$	28. $x'+x' = x'$
9. $y = x' \Rightarrow x+y = 1$	19. $f(x) = x' \Rightarrow f: B \underset{na}{\overset{1-1}{\rightarrow}} B$	29. $x+x' = x$
10. $x+y=1 \Rightarrow y = x'$	20. $x+yz = (x+y)(z+x)$	30. $x+x' = (xx')'$

Rešenje:

1. DA: teorema [BT1].
2. NE: $x=1, y=0 \rightsquigarrow 1\cdot 0 \overset{[BT2]}{=} 0 \neq 1 \overset{[BT2]}{=} 1+0.$
3. NE: $x=y=0 \rightsquigarrow (0+0)' \overset{[BA3]}{=} 0' \overset{[BT8]}{=} 1 \neq 0 \overset{[BT2]}{=} 0\cdot 0.$
4. NE: ako je $x\in B\setminus\{0,1\}$, onda je i $x'\in B\setminus\{0,1\}$, a $xx'=0$. Tvrđenje važi kada je $B=\{0,1\}$.
5. DA: teorema [BT2].
6. DA: $xy+xy' \overset{[BA2]}{=} x(y+y') \overset{[BA4]}{=} x\cdot 1 \overset{[BA3]}{=} x.$
7. DA: aksioma [BA4].
8. NE: $x=y=1 \rightsquigarrow 1\cdot 1 \overset{[BA3]}{=} 1 \neq 0.$
9. DA: aksioma [BA4].
10. NE: $x=y=1 \rightsquigarrow 1+1=1$, ali $1\neq 1'$.
11. NE: $x=0 \rightsquigarrow 0+1 \overset{[BT2]}{=} 1 \neq 0.$
12. DA: $1\cdot 0 \overset{[BT2]}{=} 0 \overset{[BT8]}{=} 1'.$
13. NE: $x=y=0 \rightsquigarrow (0\cdot 0)' \overset{[BT2]}{=} 0' \overset{[BT8]}{=} 1 \neq 0 \overset{[BA3]}{=} 0+0.$
14. DA: $(x'+y')' \overset{[BT9]}{=} (x')'(y')' \overset{[BT7]}{=} xy.$
15. NE: $x=y=1 \rightsquigarrow 1'\cdot 1' \overset{[BT8]}{=} 0\cdot 0 \overset{[BT2]}{=} 0 \neq 1 \overset{[BT2]}{=} 1+1.$
16. DA: $xy=1 \Rightarrow x=1 \wedge y=1 \Rightarrow x=1.$
17. DA: $'$ je unarna operacija skupa B, tj. funkcija koja slika B u B.
18. DA: $x'=y' \overset{(17)}{\Rightarrow} (x')'=(y')' \overset{[BT7]}{\Rightarrow} x=y.$
19. DA: injektivna je zbog (18), a sirjektivna zbog teoreme [BT7].
20. DA: aksioma [BA2] (uz primenu aksiome [BA1]).
21. DA: $x+xy \overset{[BT3]}{=} x \overset{[BA3]}{=} x\cdot 1 \overset{[BT8]}{=} x\cdot 0'.$
22. DA: $x+xy \overset{[BT3]}{=} x \overset{(17)}{\Rightarrow} (x+xy)' = x'.$
23. NE: $x=1, y=0 \rightsquigarrow 1\cdot 0 \overset{[BT2]}{=} 0 \neq 1.$
24. DA: $x+1 \overset{[BT2]}{=} 1 \overset{[BT8]}{=} 0'.$
25. DA: $x+1 \overset{[BT2]}{=} 1.$
26. NE: ne važi $x+x'=x'$ pošto $x\in B\setminus\{0\} \rightsquigarrow x+x' \overset{[BA4]}{=} 1 \overset{[BT8]}{=} 0' \neq x'.$

27. DA: na osnovu zadatka 6 imamo $xy \preccurlyeq x$ i $x \preccurlyeq x+y$, pa zbog tranzitivnosti relacije $\preccurlyeq$ važi $xy \preccurlyeq x+y$. Može i direktno, $xy+(x+y) \overset{\text{[BT4]}}{=} (xy+x)+y \overset{\text{[BA1],[BT3]}}{=} x+y$.

28. DA: teorema [BT1].

29. NE: $x \in B\setminus\{1\} \rightsquigarrow x+x' \overset{\text{[BA4]}}{=} 1 \neq x$.

30. DA: $(xx')' \overset{\text{[BT9]}}{=} x'+(x')' \overset{\text{[BT7]}}{=} x'+x \overset{\text{[BA1]}}{=} x+x'$. $\square$

Definicija 4 *Neka su* $\mathcal{B} = (B,+,\cdot,',0,1)$ *i* $\mathcal{C} = \left(C,\oplus,\odot,\overline{},0^*,1^*\right)$ *Bulove algebre. Funkcija* $\varphi : B \to C$ *je* ***homomorfizam*** *iz Bulove algebre* $\mathcal{B}$ *u Bulovu algebru* $\mathcal{C}$ *ako za sve* $x,y \in B$ *važi*

(H1) $\varphi(x+y) = \varphi(x)\oplus\varphi(y)$,

(H2) $\varphi(x\cdot y) = \varphi(x)\odot\varphi(y)$,

(H3) $\varphi(x') = \overline{\varphi(x)}$.

Ako je funkcija φ *još i bijektivna, tada je ona* ***izomorfizam****, i u tom slučaju pišemo* $\mathcal{B} \simeq \mathcal{C}$.

★ Homomorfizam $\varphi : B \to C$ slika konstante Bulove algebre $\mathcal{B}$ u odgovarajuće konstante Bulove algebre $\mathcal{C}$, tj. za proizvoljno $x \in B$ važi

$$\varphi(0) \overset{\text{[BA4]}}{=} \varphi(x\cdot x') \overset{\text{(H2)}}{=} \varphi(x)\odot\varphi(x') \overset{\text{(H3)}}{=} \varphi(x)\odot\overline{\varphi(x)} \overset{\text{[BA4]}}{=} 0^*.$$

Dualno se pokazuje $\varphi(1) = 1^*$.

★ Za Bulovu algebru $\mathcal{B}$ kažemo da je izomorfna sa Bulovom algebrom $\mathcal{C}$ ako postoji izomorfizam $\varphi : B \to C$. Relacija „je izomorfna sa” u skupu Bulovih algebri je relacija ekvivalencije.

Zadatak 8 *Neka je* $A = \{2,3,5\}$. *Dokazati da su Bulove algebre iz primera* **2** *i* **3** *(*$\mathcal{P}(A)$ *i* $\mathcal{D}_{30}$*) izomorfne.*

Rešenje: Imamo $P(A) = \left\{\emptyset,\{2\},\{3\},\{5\},\{2,3\},\{2,5\},\{3,5\},A\right\}$ i $D_{30} = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$. Posmatrajmo funkciju $\varphi : P(A) \to D_{30}$ definisanu sa $\forall X \subseteq A$, $\varphi(X) = 2^\alpha\cdot 3^\beta\cdot 5^\gamma$, gde je

$$\alpha = \begin{cases} 1 & , \ 2\in X \\ 0 & , \ 2\notin X \end{cases}, \qquad \beta = \begin{cases} 1 & , \ 3\in X \\ 0 & , \ 3\notin X \end{cases}, \qquad \gamma = \begin{cases} 1 & , \ 5\in X \\ 0 & , \ 5\notin X \end{cases},$$

odnosno

$$\varphi = \begin{pmatrix} \emptyset & \{2\} & \{3\} & \{5\} & \{2,3\} & \{2,5\} & \{3,5\} & A \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 10 & 15 & 30 \end{pmatrix}.$$

Funkcija φ je očigledno dobro definisana i bijektivna.
Za proizvoljne $X,Y \in P(A)$ postoje $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\alpha_2,\beta_2,\gamma_2 \in \{0,1\}$ tako da

$$\varphi(X) = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1} \quad \text{i} \quad \varphi(Y) = 2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\gamma_2}$$

pa važi

$$\begin{aligned} \mathsf{NZS}(\varphi(X),\varphi(Y)) &= \mathsf{NZS}(2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}, 2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\gamma_2}) \\ &= 2^{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}}\cdot 3^{\max\{\beta_1,\beta_2\}}\cdot 5^{\max\{\gamma_1,\gamma_2\}} \end{aligned}$$

gde je

$$\max\{\alpha_1,\alpha_2\}=1 \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha_1=1 \vee \alpha_2=1) \quad \Leftrightarrow \quad (2\in X \vee 2\in Y) \quad \Leftrightarrow \quad 2\in X\cup Y,$$

i analogno

$$\max\{\beta_1,\beta_2\}=1 \;\Leftrightarrow\; 3\in X\cup Y, \qquad \max\{\gamma_1,\gamma_2\}=1 \;\Leftrightarrow\; 5\in X\cup Y,$$

te je

$$\mathsf{NZS}(\varphi(X),\varphi(Y)) = 2^{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}}\cdot 3^{\max\{\beta_1,\beta_2\}}\cdot 5^{\max\{\gamma_1,\gamma_2\}} = \varphi(X\cup Y).$$

Slično se dokazuje da je za sve $X,Y\in P(A)$

$$\varphi(X\cap Y)=\mathsf{NZD}(\varphi(X),\varphi(Y)) \quad \text{i} \quad \varphi\left(\overline{X}\right)=\frac{30}{\varphi(X)}.$$

Prema tome, funkcija φ je izomorfizam. □

Bulovi izrazi

Definicija 5 *1) Konstante i promenljive su Bulovi izrazi.*

2) Ako su A i B Bulovi izrazi, tada su i $(A+B)$, $(A \cdot B)$ i A' Bulovi izrazi.

3) Bulovi izrazi mogu se dobiti samo konačnom primenom pravila 1) i 2).

Definicija 6 *Značajni Bulovi izrazi.*

Monom *je promenljiva ili njena negacija.*

Primeri: $x, y, z, u, x_1, y_1, x', y', \ldots$

Elementarna konjunkcija (EK) *je proizvod monoma.*

Primeri: $x, xy, xy'z, x_1y_1u', 1, \ldots$

Elementarna disjunkcija (ED) *je zbir monoma.*

Primeri: $x, x+y', x'+y+z', 0, \ldots$

Disjunktivna normalna forma (DNF) *je zbir elementarnih konjunkcija.*

Primeri: $x+y, xy', x'y+z+xz', xyz+y'u+x'z'u', \ldots$

Konjunktivna normalna forma (KNF) *je proizvod elementarnih disjunkcija.*

Primeri: $x'+y, (x+y)(x'+z), (x+y')(y'+z)(x'+y'+z), \ldots$

Savršena disjunktivna normalna forma (SDNF) *je zbir elementarnih konjunkcija takvih da svaka od njih sadrži sve promenljive koje se pojavljuju u izrazu.*

Savršena konjunktivna normalna forma (SKNF) *je proizvod elementarnih disjunkcija takvih da svaka od njih sadrži sve promenljive koje se pojavljuju u izrazu.*

★ Bulov izraz može da ima više DNF i KNF, dok su oblici SDNF i SKNF jedinstveno određeni u odnosu na zadani skup promenljivih koji se pojavljuju u izrazu.

Zadatak 9 *Svesti na* DNF, KNF, SDNF *i* SKNF *Bulov izraz* $I = (x(yz)')'$.

Rešenje: Odredimo najpre DNF i SDNF datog izraza:

$$\begin{aligned} I = (x(yz)')' &\overset{[BT9]}{=} x' + ((yz)')' \overset{[BT7]}{=} \underbrace{x' + yz}_{\text{DNF}} \\ &\overset{[BA3],\,[BA4]}{=} x'(y+y')(z+z') + (x+x')yz \\ &\overset{[BA2]}{=} x'yz + x'yz' + x'y'z + x'y'z' + xyz + x'yz \\ &\overset{[BT1]}{=} \underbrace{x'yz + x'yz' + x'y'z + x'y'z' + xyz}_{\text{SDNF}} \end{aligned}$$

Sada ćemo izraz I svesti na KNF i SKNF:

$$
\begin{aligned}
I = (x(yz)')' &\overset{\text{[BT9],[BT7]}}{=} x' + yz \overset{\text{[BA2]}}{=} \underbrace{(x'+y)(x'+z)}_{\text{KNF}} \\
&\overset{\text{[BA3], [BA4]}}{=} (x'+y+zz')(x'+yy'+z) \\
&\overset{\text{[BA2]}}{=} (x'+y+z)(x'+y+z')(x'+y+z)(x'+y'+z) \\
&\overset{\text{[BT1]}}{=} \underbrace{(x'+y+z)(x'+y+z')(x'+y'+z)}_{\text{SKNF}}
\end{aligned}
$$

□

Zadatak 10 *Bulov izraz* $I = (y+zu')' + (z+xu)' + z(x+z')$ *svesti na* SDNF.

Rešenje: Koristeći odgovarajuće aksiome i teoreme Bulove algebre transformišemo dati izraz:

$$
\begin{aligned}
I &= (y+zu')' + (z+xu)' + z(x+z') \\
&= y'(zu')' + z'(xu)' + zx + zz' \\
&= y'(z'+u) + z'(x'+u') + zx \\
&= y'z' + y'u + z'x' + z'u' + zx \\
&= (x+x')y'z'(u+u') + (x+x')y'(z+z')u + x'(y+y')z'(u+u') \\
&\quad +(x+x')(y+y')z'u' + x(y+y')z(u+u') \\
&= xy'z'u + xy'z'u' + x'y'z'u + x'y'z'u' + xy'zu + xy'z'u + x'y'zu + x'y'z'u \\
&\quad +x'yz'u + x'yz'u' + x'y'z'u + x'y'z'u' + xyz'u' + xy'z'u' + x'yz'u' + x'y'z'u' \\
&\quad +xyzu + xyzu' + xy'zu + xy'zu' \\
&= xy'z'u + xy'z'u' + x'y'z'u + x'y'z'u' + xy'zu + x'y'zu \\
&\quad +x'yz'u + x'yz'u' + xyz'u' + xyzu + xyzu' + xy'zu'
\end{aligned}
$$

□

★ Svaki Bulov izraz jednoznačno određuje Bulovu funkciju, a jednoj Bulovoj funkciji odgovara beskonačno mnogo ekvivalentnih Bulovih izraza. Međutim, svakoj Bulovoj funkciji odgovaraju jedinstvene SDNF i SKNF.

Ako je $f(x_1,\ldots,x_n)$ Bulova funkcija definisana na dvoelementnoj Bulovoj algebri $(\{0,1\},+,\cdot,',0,1)$, tada se jedinstvene SDNF i SKNF mogu konstruisati na sledeći način:

$$\text{SDNF}: \; f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\{0,1\}^n} f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\cdot x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n},$$

$$\text{SKNF}: \; f(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\{0,1\}^n} \Big(f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) + x_1^{\rceil\alpha_1} + \ldots + x_n^{\rceil\alpha_n}\Big),$$

gde je $x^\alpha = \begin{cases} x & , \quad \alpha = 1 \\ x' & , \quad \alpha = 0 \end{cases}$.

0+1   0·1

Zadatak 11 *Bulove funkcije date tablicom predstaviti preko* SDNF *i* SKNF*:*

(a)

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(b)

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

(c)

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Rešenje:

(a) SDNF :
$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0)\cdot x^0\cdot y^0 + f(0,1)\cdot x^0\cdot y^1 + f(1,0)\cdot x^1\cdot y^0 + f(1,1)\cdot x^1\cdot y^1 \\ &= \underbrace{0\cdot x'\cdot y'}_{0} + 1\cdot x'\cdot y + 1\cdot x\cdot y' + \underbrace{0\cdot x\cdot y}_{0} = x'y + xy'; \end{aligned}$$

SKNF :
$$\begin{aligned} f(x,y) &= \big(f(0,0)+x^1+y^1\big)\big(f(0,1)+x^1+y^0\big)\big(f(1,0)+x^0+y^1\big)\big(f(1,1)+x^0+y^0\big) \\ &= (0+x+y)\underbrace{(1+x+y')}_{1}\underbrace{(1+x'+y)}_{1}(0+x'+y') = (x+y)(x'+y'); \end{aligned}$$

(b) SDNF : $f(x,y) = x'y';$

SKNF : $f(x,y) = (x+y')(x'+y)(x'+y');$

(c) SDNF : $f(x,y,z) = x'y'z + x'yz' + xy'z' + xyz;$

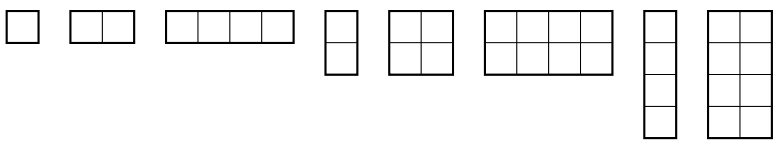
SKNF : $f(x,y,z) = (x+y+z)(x+y'+z')(x'+y+z')(x'+y'+z);$

□

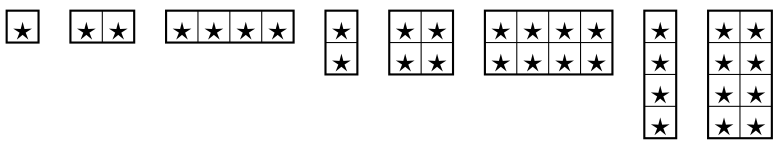
★ Kada određujemo SDNF posmatramo samo valuacije za koje je vrednost funkcije 1, a za SKNF su nam potrebne one valuacije za koje je vrednost funkcije 0. Otuda je zbir elementarnih konjunkcija u SDNF i elementarnih disjunkcija u SKNF jednak sa 2^n, gde je n broj promenljivih.

Minimizacija Bulovih izraza (Karnoove karte)

Osnovni četvorouglovi:



Osnovni označeni četvorouglovi:



★ Maksimalni obeleženi osnovni četvorougao je osnovni obeleženi četvorougao koji se ne sadrži ni u jednom drugom osnovnom obeleženom četvorouglu.

Postupak za određivanje ***minimalne disjunktivne normalne forme*** (MDNF)

- Odrediti SDNF za datu Bulovu funkciju;
- Za svaku EK iz SDNF označiti odgovarajuće polje u tablici;
- Naći sve maksimalne osnovne označene četvorouglove (tj. proste implikante);
- MDNF je zbir minimalnog broja prostih implikanti čiji maksimalni osnovni označeni četvorouglovi pokrivaju sva obeležena polja u tablici.

Zadatak 12 *Naći sve proste implikante i minimalne* DNF *Bulovih funkcija datih svojom tablicom vrednosti ili odgovarajućim Bulovim izrazom:*

(a)

x	0	0	1	1 ,
y	0	1	0	1
$f(x,y)$	1	1	1	0

(b) $f(x,y) = xy' + x'y,$

(c) $f(x,y,z) = (x'+z)' + (x + (z'(y+z)))',$

(d) $f(x,y,z,u) = xyzu + xyzu' + xyz'u + xy'zu + xy'z'u + xy'z'u' +$
$+ x'yzu + x'yzu' + x'yz'u + x'yz'u' + x'y'zu + x'y'z'u,$

(e)

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1 ,
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1

(f) $f(x,y,z,u) = xyzu + xy'zu + x'yzu' + xy'z'u' + x'yz'u' + xyzu' +$
$+ xy'zu' + xy'z'u + x'yzu + x'yz'u + x'y'z'u'.$

Rešenje:

(a) SDNF : $f(x,y) = x'y' + x'y + xy'$,
Proste implikante: x', y',
MDNF : $\Phi = x' + y'$
(Primetimo da obe proste implikante ulaze u MDNF.)

	x	x'
y		★
y'	★	★

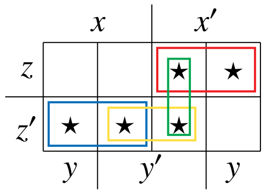
(b) SDNF : $f(x,y) = xy' + x'y$,
Proste implikante: xy', $x'y$,
MDNF : $\Phi = xy' + x'y$
(Primetimo da je f već bila data u obliku MDNF.)

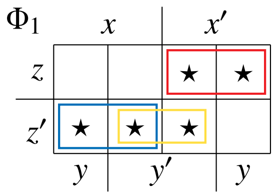
	x	x'
y		★
y'	★	

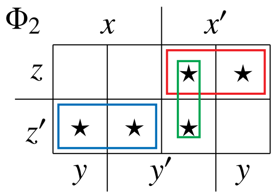
(c) Primenom aksioma i teorema Bulove algebre nalazimo SDNF funkcije f:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x'+z)' + (x+(z'(y+z)))' = (x')'z' + x'(z'(y+z))' \\ &= xz' + x'((z')' + (y+z)') = xz' + x'(z + y'z') \\ &= xz' + x'z + x'y'z' = x(y+y')z' + x'(y+y')z + x'y'z' \\ &= xyz' + xy'z' + x'yz + x'y'z + x'y'z' \end{aligned}$$

SDNF : $f(x,y,z) = xyz' + xy'z' + x'yz + x'y'z + x'y'z'$,
Proste implikante: $x'z$, xz', $y'z'$, $x'y'$,
MDNF : $\Phi_1 = x'z + xz' + y'z'$,
$\Phi_2 = x'z + xz' + x'y'$.

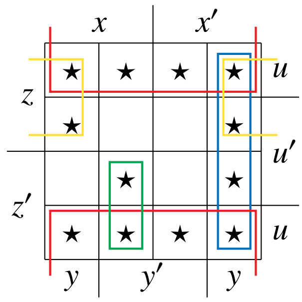




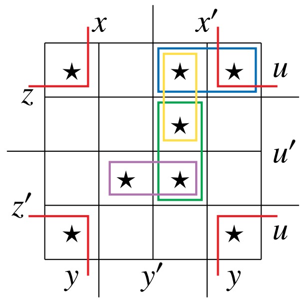


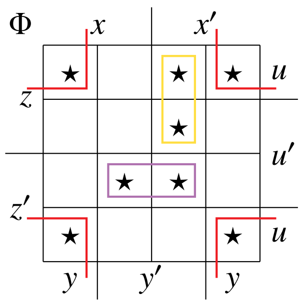
(d) SDNF : $f(x,y,z,u) = xyzu + xyzu' + xyz'u + xy'zu + xy'z'u + xy'z'u'$
$+ x'yzu + x'yzu' + x'yz'u + x'yz'u' + x'y'zu + x'y'z'u$,

Proste implikante: u, $x'y$, yz, $xy'z'$,
MDNF : $\Phi = u + x'y + yz + xy'z'$
(Uočimo da je ovde MDNF zbir svih prostih implikanti).

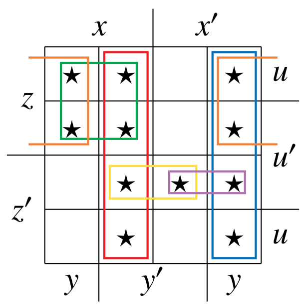


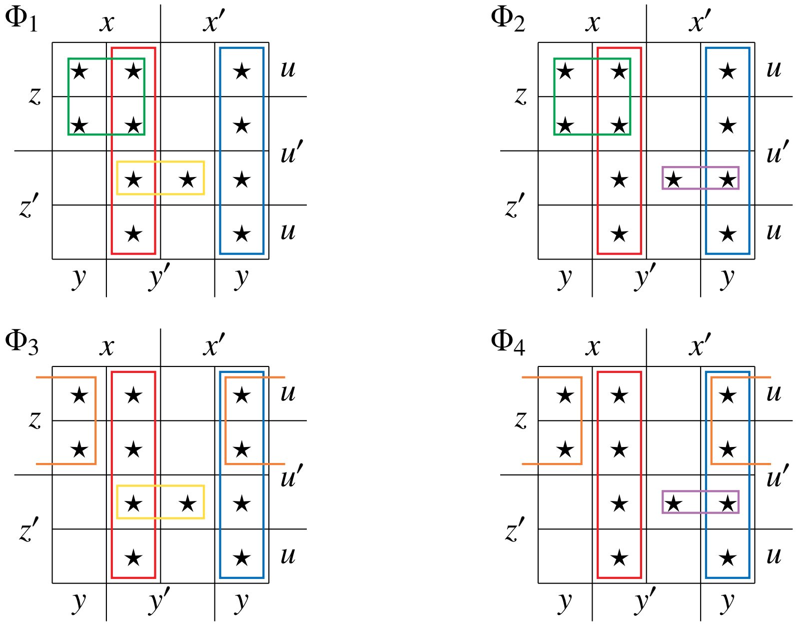
(e) SDNF : $f(x,y,z,u) = xyzu + xyz'u + xy'z'u'$
$+ x'yzu + x'yz'u + x'y'zu$
$+ x'y'zu' + x'y'z'u'$,
Proste implikante: yu, $x'zu$, $x'y'z$, $x'y'u'$, $y'z'u'$,
MDNF : $\Phi = yu + y'z'u' + x'y'z$
(Uočimo da neke proste implikante ne učestvuju u MDNF).





(f) Proste implikante: xy', $x'y$, xz, yz, $y'z'u'$, $x'z'u'$,
MDNF : $\Phi_1 = xy' + x'y + xz + y'z'u'$,
$\Phi_2 = xy' + x'y + xz + x'z'u'$,
$\Phi_3 = xy' + x'y + yz + y'z'u'$,
$\Phi_4 = xy' + x'y + yz + x'z'u'$.




Φ1 x x′ z z′ u u′ y y′
Φ2 x x′ z z′ u u′ y y′
Φ3 x x′ z z′ u u′ y y′
Φ4 x x′ z z′ u u′ y y′

□