DISKRETNA MATEMATIKA

- PREDAVANJE -

Jovanka Pantović

1 Generatorne funkcije

Tema 1

Generatorne funkcije

Generatorne funkcije nizova

$$\underbrace{(a_0, a_1, a_2, \ldots)}_{\text{brojni niz}} \quad \leftrightarrow \quad \underbrace{a_0 + a_1 z + z_2 z^2 + \ldots}_{\text{simbolički stepeni red}}$$

Definicija

Generatorna funkcija brojnog niza $\{a_n\}$ *jeste (simbolički tj. formalni) stepeni red*

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

Generatorne funkcije - primene

Mogu se koristiti za:

1. prebrojavanje kombinatornih objekata
2. rešavanje celobrojnih jednačina
3. dokazivanje nekih identiteta
4. rešavanje rekurentnih relacija
5. ...

Motivacioni primer

PROBLEM: Odrediti zatvorenu formu $a(n)$ za sumu:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Generatorne funkcije nizova

brojni niz	generatorna funkcija
$(0, 0, 0, \dots)$	0
$(1, 0, 0, \dots)$	1
$(0, 1, 0, \dots)$	z
$(3, 2, 1, 0, \dots)$	$3 + 2z + z^2$
$(1, 1, 1, \dots)$	$1 + z + z^2 + \dots$
$(1, -1, 1, -1 \dots)$	$1 - z + z^2 - z^3 + \dots$

Generatorne funkcije nizova

Simbolički stepeni red:

- konvergencija reda nije relevantna
- važne su operacije - pomeranje, sabiranje, množenje, izvodi, integrali

Generatorne funkcije nizova - jednakost

Definicija

Generatorne funkcije nizova $\{a_n\}$ *i* $\{b_n\}$ *su jednake ako su im jednaki odgovarajući nizovi tj. ako je za svako* $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

Zatvorena forma generatorne funkcije

$$\boxed{(1, 1, 1, \ldots)}$$

$$\begin{array}{lcllll}
A(z) & = & 1 & +z & +z^2 & +z^3 & + \ldots \\
-zA(z) & = & & -z & -z^2 & -z^3 & - \ldots \\
(1-z)A(z) & = & 1 & & & &
\end{array}$$

$$\boxed{1 + z + z^2 + \ldots = \frac{1}{1-z}}$$

$1 + z + z^2 + \ldots$ - otvorena forma generatorne funkcije
$A(z) = \frac{1}{1-z}$ - zatvorena forma generatorne funkcije

KONVERGENCIJA NIJE BITNA!!!

Operacije nad zatvorenim formama

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) \leftrightarrow A(z) \qquad (b_0, b_1, b_2, \ldots) \leftrightarrow B(z).$$

- skaliranje
  $(ca_0, ca_1, ca_2, \ldots) \leftrightarrow cA(z)$
- sabiranje
  $(a_0, a_1, a_2, \ldots) + (b_0, b_1, b_2, \ldots) \leftrightarrow A(z) + B(z)$
- desno pomeranje
  $(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k}, a_0, a_1, \ldots) \leftrightarrow z^k A(z)$

Operacije nad generatornim funkcijama

Primer

Napisati zatvorenu formu generatorne funkcije niza:

- $(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k}, 1, 1, 1, \ldots)$
- $(1, 2, 2^2, 2^3, \ldots)$

- $z^k + z^{k+1} + \ldots = \sum_{n \geq k} z^n = z^k \sum_{n \geq k} z^{n-k} = z^k \sum_{n \geq 0} z^n = \frac{z^k}{1-z}$
- $1 + 2z + (2z)^2 + (2z)^3 + \ldots = \frac{1}{1-2z}$

Operacije nad generatornim funkcijama

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) \leftrightarrow A(z) \qquad (b_0, b_1, b_2, \ldots) \leftrightarrow B(z).$$

- množenje

$$A(z) \cdot B(z) = \sum_{n \geq 0} \Big(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} \Big) z^n$$

Primer

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n \cdot \sum_{n \geq 0} z^n = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{n} 1 \cdot 1 \right) z^n = \sum_{n \geq 0} (n+1) z^n$$

Izvod

Definicija

Neka je $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ *generatorna funkcija niza* a_n. *Izvod, u oznaci* $A'(z)$, *definisan je sa*

$$A'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

Primer

$$\frac{z}{(1-z)^2} = z\left(\frac{1}{1-z}\right)' = z\left(\sum_{n \geq 0} z^n\right)' = z \sum_{n \geq 0} (z^n)' = z \sum_{n \geq 1} n z^{n-1} = \sum_{n \geq 1} n z^n = \sum_{n \geq 0} n z^n$$

Uopšteni binomni koeficijenti

Definicija

Neka je u realan broj, a k nenegativan ceo broj. Uopšteni binomni koeficijent $\binom{u}{k}$ je definisan sa

$$\binom{u}{k} = \begin{cases} \frac{u\cdot(u-1)\cdot\ldots\cdot(u-k+1)}{k!} & \text{ako je } k > 0 \\ 1 & \text{ako je } k = 0. \end{cases}$$

Primer

$$\begin{aligned} \binom{-n}{k} &= \frac{-n\cdot(-n-1)\cdot(-n-2)\ldots(-n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{(-1)^k n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!} = \frac{(-1)^k(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \\ &= (-1)^k\binom{n+k-1}{k} \Rightarrow \binom{-1}{k} = (-1)^k \end{aligned}$$

Njutnova binomna formula

Teorema

Neka je u proizvoljan realan broj. Tada je

$$(1+z)^u = \sum_{n\geq 0} \binom{u}{n} z^n.$$

Njutnova binomna formula

Primer

Koristeći binomnu formulu, odrediti otvoren oblik generatorne funkcije, ako je njen zatvoren oblik

$$\frac{1}{1-cz}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-cz} &= (1-cz)^{-1} = \sum_{n\geq 0}\binom{-1}{n}(-cz)^n \\ &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n(-1)^n(cz)^n = \sum_{n\geq 0}(cz)^n\end{aligned}$$

Njutnova binomna formula

Primer

Koristeći Njutnovu formulu, odrediti otvoren oblik generatorne funkcije, ako je njen zatvoren oblik

$$(1)\ \frac{1}{(1-z)^m} \quad (2)\ \frac{1}{(1-z)^2} \quad (3)\ \frac{1}{(1-z)^3}.$$

$$\begin{aligned}
(1)\ \tfrac{1}{(1-z)^m} &= (1-z)^{-m} = \sum_{n\geq 0}\binom{-m}{n}(-z)^n = \sum_{n\geq 0}\binom{m+n-1}{n}z^n \\
(2)\ \tfrac{1}{(1-z)^2} &= \sum_{n\geq 0}\binom{n+1}{n}z^n = \sum_{n\geq 0}(n+1)z^n \\
(3)\ \tfrac{1}{(1-z)^3} &= \sum_{n\geq 0}\binom{n+2}{n}z^n = \sum_{n\geq 0}\binom{n+2}{2}z^n
\end{aligned}$$

Primena - kombinacije bez ponavljanja

Primer

Odrediti broj neuređenih izbora od m elemenata iz skupa $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, ako se elementi ne mogu ponavljati.

x^i - element je izabran i puta, $i \in \{0, 1\} \Rightarrow$

$$\underbrace{(1+x)}_{a_1}\underbrace{(1+x)}_{a_2}\dots\underbrace{(1+x)}_{a_n} = 1 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_mx^m + \dots + c_nx^n$$

c_m - # načina da se izabere m elemenata
Prema binomnoj formuli,

$$(1+x)^n = \sum_{0 \le m \le n} \binom{n}{m} x^m,$$

odakle je broj kombinacija od n elemenata klase m jednak $\binom{n}{m}$.

Primena - kombinacije sa ponavljanjem

Primer

Odrediti broj neuređenih izbora od m elemenata iz skupa $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, ako se elementi mogu ponavljati.

x^i - element je izabran i puta, $i \geq 0 \Rightarrow$

$$\underbrace{(1+x+x^2+\ldots)}_{a_1} \cdot \underbrace{(1+x+x^2+\ldots)}_{a_2} \ldots \underbrace{(1+x+x^2+\ldots)}_{a_n} = 1+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_mx^m+\ldots$$

c_m - # načina da se izabere m elemenata
Prema uopštenoj binomnoj formuli,

$$\begin{aligned}(1+x+x^2+\ldots)^n &= \frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n} \\ &= \sum_{n\geq 0} \binom{-n}{m} (-1)^m x^m = \sum_{m\geq 0} \binom{m+n-1}{m} x^m.\end{aligned}$$

Za svako $0 \leq m \leq n$ koeficijent uz x^m odgovara broju kombinacija sa ponavljanjem od n elemenata klase m.

Primena

Primer

Neka je $1 \leq n \leq m$. Odrediti broj izbora m elemenata iz skupa $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, ako se elementi mogu ponavljati i od svake vrste je izabran bar jedan element.

$$p(x) = \underbrace{(x + x^2 + x^3 + \ldots)}_{a_1} \underbrace{(x + x^2 + x^3 + \ldots)}_{a_2} \ldots \underbrace{(x + x^2 + x^3 + \ldots)}_{a_n}$$

$$\begin{aligned} p(x) &= \left(\frac{x}{1-x}\right)^n = x^n \cdot \frac{1}{(1-x)^n} = x^n (1-x)^{-n} \\ &= x^n \sum_{l \geq 0} \binom{n+l-1}{l} x^l = \sum_{l \geq 0} \binom{n+l-1}{l} x^{n+l} \end{aligned}$$

Ako uvedemo smenu $m = n + l$, onda je

$$p(x) = \sum_{m \geq n} \binom{m-1}{m-n} x^m \Rightarrow \boxed{\binom{m-1}{m-n}}$$

Primer- rešavanje celobrojne jednačine

Primer

Odrediti broj nenegativnih rešenje jednačine

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n, n \geq 0.$$

ako su $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}_0$.

Broj nenegativnih rešenje jednačine jednak je koeficijentu a_n uz z^n u razvoju proizvoda

$$(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots)^4$$

$$A(z) \quad = \quad \frac{1}{(1-z)^4} = \frac{1}{(1-z)^4} = \sum_{l \geq 0} \binom{4+l-1}{l} z^l = \sum_{n \geq 0} \binom{l+3}{l} z^l.$$

$$\boxed{a_n = \binom{n+3}{n}}$$

Primena na rešavanje rekurentnih relacija

Primer

$$h_0 = 0 \qquad h_n = 2h_{n-1} + 1, \quad n \geq 1$$

Neka je $H(z) = \sum_{n\geq 0} h_n z^n$.

$$\sum_{n\geq 1} h_n z^n = 2 \sum_{n\geq 1} h_{n-1} z^n + \sum_{n\geq 1} z^n \Leftrightarrow (H(z) - h_0) = 2zH(z) + \sum_{n\geq 1} z^n$$

$$\Leftrightarrow \quad H(z)(1-2z) = \tfrac{1}{1-z} - 1 \Leftrightarrow H(z) = \tfrac{1}{(1-z)(1-2z)} - \tfrac{1}{1-2z}$$

$$\Leftrightarrow \quad H(z) = \tfrac{1}{1-2z} - \tfrac{1}{1-z} \Leftrightarrow H(z) = \sum_{n\geq 0} 2^n z^n - \sum_{n\geq 0} z^n$$

$$\Leftrightarrow \quad H(z) = \sum_{n\geq 0} (2^n - 1) z^n \qquad \Rightarrow \boxed{h_n = 2^n - 1}$$

Primer - rešavanje celobrojne jednačine

Primer

Kutija sadrži 20 crvenih, 30 zelenih i 40 plavih kuglica. Koliko ima različitih izbora od 60 kuglica?

Traženi broj je jednak broju rešenja jednačine

$$i + j + k = 60 \qquad i \in \{0, \ldots, 20\}, j \in \{0, \ldots, 30\}, k \in \{0, \ldots, 40\}.$$

Ekvivalentno, taj broj je jednak koeficijentu uz z^{60} proizvoda

$$\underbrace{(1 + z + \ldots + z^{20})}_{\text{crvene}}\underbrace{(1 + z + \ldots + z^{30})}_{\text{zelene}}\underbrace{(1 + z + \ldots + z^{40})}_{\text{plave}}$$

Primer- rešavanje celobrojne jednačine

$$
\begin{aligned}
& (1+z+\ldots+z^{20})(1+z+\ldots+z^{30})(1+z+\ldots+z^{40}) \\
= \quad & \tfrac{1-z^{21}}{1-z}\cdot\tfrac{1-z^{31}}{1-z}\cdot\tfrac{1-z^{41}}{1-z} \\
= \quad & \tfrac{1}{(1-z)^3}(1-z^{21})(1-z^{31})(1-z^{41}) \\
= \quad & (1+\tbinom{3}{2}z+\tbinom{4}{2}z^2+\ldots)(1-z^{21}-z^{31}-z^{41}+z^{52}+z^{62}+z^{72}-z^{93}) \\
= \quad & \ldots+\left(\tbinom{60+2}{2}-\tbinom{60-21+2}{2}-\tbinom{60-31+2}{2}-\tbinom{60-41+2}{2}+\tbinom{60-52+2}{2}\right)z^{60}+\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{(1-z)^3}=(1-z)^{-3}=\sum_{n\geq 0}\binom{-3}{n}(-1)^n z^n=\sum_{n\geq 0}\binom{n+2}{2}z^n
$$

Primer- rešavanje celobrojne jednačine

Primer

Odrediti broj rešenja jednačine

$$x_1 + x_2 + x_2 = 19$$

ako je $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}_0$ *i* $3 \leq x_1 \leq 6$ *i* $4 \leq x_2 \leq 7$ *i* $5 \leq x_3 \leq 8$.

$$p(x) = (x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^4 + x^5 + x^6 + x^7)(x^5 + x^6 + x^7 + x^8),$$

$$\begin{aligned} p(x) &= \tfrac{x^3(1-x^4)}{1-x} \cdot \tfrac{x^4(1-x^4)}{1-x} \cdot \tfrac{x^5(1-x^4)}{1-x} = x^{12}(1-x^4)^3 \cdot \tfrac{1}{(1-x)^3} \\ &= x^{12}(1 - 3x^4 + 3x^8 - x^{12}) \sum_{n \geq 0} \tbinom{n+2}{2} x^n = (x^{12} - 3x^{16} + 3x^{20} - x^{24}) \sum_{n \geq 0} \tbinom{n+2}{2} x^n \end{aligned}$$

$$\binom{9}{2} - 3\binom{5}{2} = 36 - 30 = 6.$$