15. Dat je niz sa opštim članom $a_n = n-1-\sqrt{pn^2+qn}$, $p,q \in R$, $p \geq 0$. U zavisnosti od parametara p i q odrediti kada ovaj niz divergira, a kada konvergira ka:

a) nuli,

b) broju različitom od nule.

$$\lim_{n\to\infty}(n-1-\sqrt{pn^2+qn})\cdot\frac{n-1+\sqrt{pn^2+qn}}{n-1+\sqrt{pn^2+qn}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+1-pn^2-qn}{n-1+\sqrt{pn^2+qn}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(1-p)n^2-(2+q)n+1}{n-1+\sqrt{pn^2+qn}}$$

Za $1-p \neq 0 \Leftrightarrow p \neq 1$ i za svako q niz divergira.

Za $p=1$ niz konvergira.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{-(2+q)n+1}{n-1+\sqrt{n^2+qn}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-(2+q)+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{q}{n}}} = \frac{-(2+q)}{2} = -1-\frac{q}{2}$$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1-\frac{q}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{q}{2} = -1 \Rightarrow q = -2$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1-\frac{q}{2} = k$; $k \neq 0$, $q \neq -2$.

16. Ispitati: ograničenost, supremum, infimum, odrediti tačke nagomilavanja i graničnu vrednost (ukoliko postoji) za niz $\{a_n\}$ sa opštim članom $a_n = \dfrac{3n-1}{5n+1}$.

$$a_1 = \frac{1}{3},\ a_2 = \frac{5}{11},\ a_3 = \frac{1}{2},\ a_4 = \frac{11}{21},\ a_5 = \frac{7}{13},\ldots$$

$$a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n > 0 \Leftrightarrow \frac{3n+2}{5n+6} - \frac{3n-1}{5n+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(3n+2)(5n+1)-(3n-1)(5n+6)}{(5n+6)(5n+1)} > 0$$

$$15n^2+13n+2-(15n^2+13n-6) > 0 \Leftrightarrow 8 > 0$$

Zaključujemo da je niz $\{ a_n \}$ monotono rastući.

$\frac{1}{3} \leq a_n < 1 \Rightarrow$ broj 1 je jedno gornje ograničenje, broj $\frac{1}{3}$ je jedno donje ograničenje.

$\inf\{a_n\} = \frac{1}{3}$ (prvi član niza)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{5n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n-1}{n}}{\frac{5n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{1}{n}}{5+\frac{1}{n}} = \frac{3}{5}$$

Granična vrednost niza $\{a_n\}$ je $\frac{3}{5}$, tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$ je $\frac{3}{5}$ i $\sup\{a_n\} = \frac{3}{5}$ (nije član niza).

17. Za prethodni primer odrediti počev od kog člana se svi naredni nalaze u ε-okolini njegove granične vrednosti a, za $\varepsilon = 0{,}1$.

$$|\ a_n - a\ | < \varepsilon$$

$$\left|\ \frac{3n-1}{5n+1} - \frac{3}{5}\ \right| < 0{,}1 \Leftrightarrow \left|\ \frac{15n-5-15n-3}{5(5n+1)}\ \right| < \frac{1}{10}$$

$$\frac{8}{5(5n+1)} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow 16 < 5n+1 \Rightarrow 5n > 15 \Rightarrow n > 3 \Rightarrow n_0 = 4$$

Broj n_0 zavisi od ε i on pokazuje koliko se članova niza $\{a_n\}$ nalazi izvan ε okoline tačke a (najviše $n_0 - 1$ član). Počev od n_0 svi članovi niza se nalaze u otvorenoj lopti $L(a,\varepsilon)$. U svakoj okolini su skoro svi članovi niza.

Teorema o uklještenim nizovima: Neka su dati realni nizovi $\{a_n\},\{b_n\}$ i $\{c_n\}$. Ako su nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ konvergentni, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ i $a_n \le c_n \le b_n,\ n \ge k$ onda je i niz $\{c_n\}$ konvergentan i važi $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

18. Odrediti graničnu vrednost sledećih nizova:

a) $c_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

$\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ je najveći od sabiraka $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}, \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}, \dots, \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

$\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ je najmanji od sabiraka $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}, \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}, \dots, \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leq c_n\leq\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$$

Pošto je $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$ na osnovu teoreme o uklještenim nizovima sledi $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=1$.

b) $c_n=\dfrac{1}{\sqrt[3]{8n^6+1}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{8n^6+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt[3]{8n^6+5n^2}}$

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{8n^6+1}}$ je najveći od sabiraka $\dfrac{1}{\sqrt[3]{8n^6+1}},\dfrac{1}{\sqrt[3]{8n^6+2}},\ldots,\dfrac{1}{\sqrt[3]{8n^6+5n^2}}$

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{8n^6+5n^2}}$ je najmanji od sabiraka $\dfrac{1}{\sqrt[3]{8n^6+1}},\dfrac{1}{\sqrt[3]{8n^6+2}},\ldots,\dfrac{1}{\sqrt[3]{8n^6+5n^2}}$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{8n^6+5n^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{8n^6+5n^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{8n^6+5n^2}}\leq c_n\leq\frac{1}{\sqrt[3]{8n^6+1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{8n^6+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{8n^6+1}}$$

$$\frac{5n^2}{\sqrt[3]{8n^6+5n^2}}\leq c_n\leq\frac{5n^2}{\sqrt[3]{8n^6+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2}{\sqrt[3]{8n^6+5n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt[3]{8+\frac{5}{n^4}}}=\frac{5}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2}{\sqrt[3]{8n^6+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt[3]{8+\frac{1}{n^6}}}=\frac{5}{2}$$

Pošto je $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{5}{2}$ na osnovu teoreme o uklještenim nizovima sledi $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\dfrac{5}{2}$.

Definicija: Za $f:X\to X$, tačka $x\in X$ je fiksna (nepokretna) tačka za preslikavanje f ako je $f(x)=x$.

Neka je niz $\{a_n\}$ dat rekurzivno $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 0,1,2,...$ za neko $a_0 \in R$. Ukoliko on konvergira, tada za njegovu graničnu vrednost $a \in R$ važi $a = f(a)$, tj. taj niz konvergira ka nepokretnoj tački funkcije f.

19. Neka je niz $\{a_n\}$ dat sa $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = 3 \cdot \dfrac{2a_n + 1}{a_n + 4}$, $n \in N$. Pokazati da je niz $\{a_n\}$ konvergentan i naći njegovu graničnu vrednost.

Očigledno je da je niz $\{a_n\}$ niz pozitivnih brojeva, tj. $a_n > 0$, za svako $n \in N$.

$$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{9}{5},\ a_3 = 3 \cdot \frac{2a_2 + 1}{a_2 + 4} = \frac{2\frac{9}{5} + 1}{\frac{9}{5} + 4} = 3\frac{18+5}{9+20} = \frac{69}{29},...$$

Pokažimo, matematičkom indukcijom, da je niz $\{a_n\}$ monotono rastući.

Za $n = 1$ treba pokazati da je $a_1 < a_2$.

$$a_1 = 1 < \frac{9}{5} = a_2$$

Za $n = k$ pretpostavimo da važi $a_k < a_{k+1}$, tj da je $a_{k+1} - a_k > 0$

Za $n = k + 1$ treba pokazati da je $a_{k+1} < a_{k+2}$, tj. da je $a_{k+2} - a_{k+1} > 0$

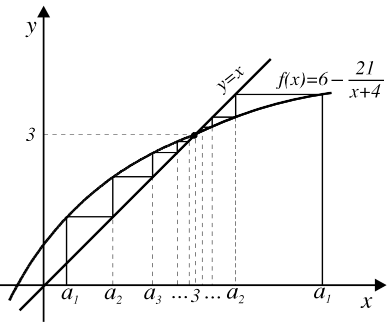
$$a_{k+2} - a_{k+1} = 3 \cdot \frac{2a_{k+1} + 1}{a_{k+1} + 4} - 3 \cdot \frac{2a_k + 1}{a_k + 4} = 3 \cdot \frac{(2a_{k+1} + 1)(a_k + 4) - (2a_k + 1)(a_{k+1} + 4)}{(a_k + 4)(a_{k+1} + 4)} =$$

$$= 3 \cdot \frac{2a_{k+1}a_k + 8a_{k+1} + a_k + 4 - (2a_{k+1}a_k + 8a_k + a_{k+1} + 4)}{(a_{k+1} + 4)(a_k + 4)} =$$

$$= 3 \cdot \frac{7a_{k+1} - 7a_k}{(a_{k+1} + 4)(a_k + 4)} = \frac{21(a_{k+1} - a_k)}{(a_{k+1} + 4)(a_k + 4)} > 0$$

Na osnovu principa matematičke indukcije možemo tvrditi da je niz $\{a_n\}$ monotono rastući $\Rightarrow a_1 \le a_n$, za svako $n \in N$.

Pokažimo, matematičkom indukcijom, da je niz $\{a_n\}$ ograničen sa gornje strane.



Kako jednačina $x = 3 \cdot \dfrac{2x+1}{x+4}$ ima pozitivno rešenje $x = 3$ i kako je niz $\{a_n\}$ monotono rastući, to ako je konvergentan tada je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} = a$, što je u našem slučaju $a = 3$.

Za $n = 1$ treba pokazati da je $a_1 < 3$.

$a_1 = 1 < 3$

Za $n = k$ pretpostavimo da važi $a_k < 3$.

Za $n = k+1$ treba pokazati da je $a_{k+1} < 3$.

$a_k < 3 \Rightarrow a_k = 3 - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$

$$a_{k+1} = 3 \cdot \frac{2a_k + 1}{a_k + 4} = 3 \cdot \frac{2(3-\varepsilon)+1}{3-\varepsilon+4} = 3\frac{6-2\varepsilon+1}{7-\varepsilon} = 3 \cdot \frac{7-2\varepsilon}{7-\varepsilon} < 3 \cdot 1 < 3.$$

Na osnovu principa matematičke indukcije možemo tvrditi da je niz $\{a_n\}$ ograničen sa gornje strane brojem 3, tj. $a_n < 3$, za svako $n \in N$.

Niz $\{a_n\}$ je ograničen i monoton $\Rightarrow$ Niz $\{a_n\}$ je konvergentan, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Iz $a_{n+1} = 3 \cdot \dfrac{2a_n + 1}{a_n + 4}$ sledi

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 3\frac{2\lim\limits_{n\to\infty} a_n + 1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n + 4} \Leftrightarrow A = 3\frac{2A+1}{A+4} \Leftrightarrow A^2 + 4A = 6A + 3 \Leftrightarrow A^2 - 2A - 3 = 0.$$

Rešenja poslednje jednačine su: $A_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2}$, odnosno $A_1 = -1$ i $A_2 = 3$.

Zbog $a_n > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq 0 \Rightarrow A \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

Napomene:

U problem da li niz $\{a_n\}$, dat rekurzivno sa $a_{n+1} = f(a_n)$, $a_1 \in R$, gde je f neprekidna funkcija, ima graničnu vrednost ili ne, nećemo se upuštati. Ovde ćemo uvek posmatrati nizove za koje postoji granična vrednost.

Napomenimo ovde da ako postoji granična vrednost niza $\{a_n\}$, niz $\{a_n\}$ mora da konvergira ka presečnoj tački prave $y = x$ i krive $y = f(x)$, tj. da za graničnu vrednost $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ važi da je $a = f(a)$ (vidi prethodni primer). $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow a = f(a)$

Napomenimo i da niz $\{a_n\}$ nije konvergentan (nema graničnu vrednost) ako prava $y = x$ i kriva $y = f(x)$ nemaju zajedničkih tačaka.