

DISKRETNA MATEMATIKA

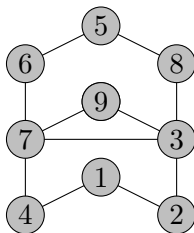
- PREDAVANJE -

Jovanka Pantović

Tema 1

26.06.2019

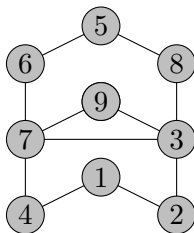
Primer1

 G_1

Primer

Ispitati da li je graf G_1 Ojlerov. Ako jeste, napisati Ojlerovu turu.

Primer1

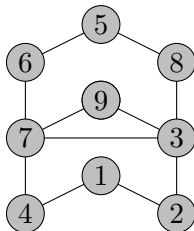

 G_1

Primer

Ispitati da li je graf G_1 Ojlerov. Ako jeste, napisati Ojlerovu turu.

412397385674

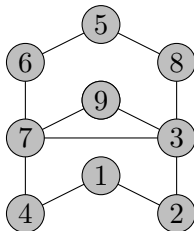
Primer2

 G_1

Primer

Ispitati da li je graf G_1 polu Hamiltonov. Ako jeste, napisati Hamiltonov put.

Primer2

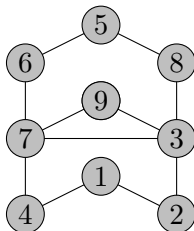

 G_1

Primer

Ispitati da li je graf G_1 polu Hamiltonov. Ako jeste, napisati Hamiltonov put.

412397658

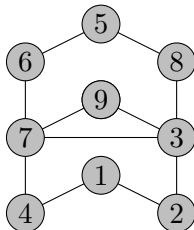
Primer3

 G_1

Primer

Ispitati da li je graf G_1 Hamiltonov. Ako jeste, napisati Hamiltonovu konturu.

Primer3



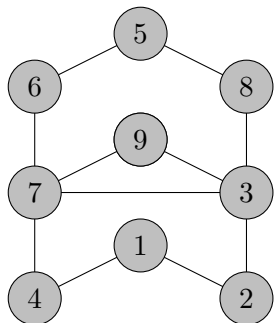
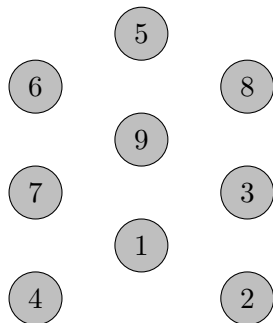
G_1

Primer

Ispitati da li je graf G_1 Hamiltonov. Ako jeste, napisati Hamiltonovu konturu.

$$\omega(G_1 - \{7, 3\}) = 3 > 2 = |\{7, 3\}| \Rightarrow \text{graf nije Hamiltonov}$$

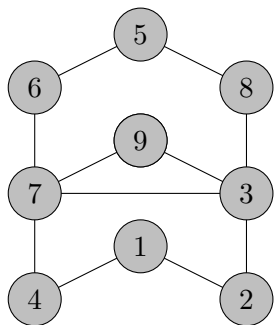
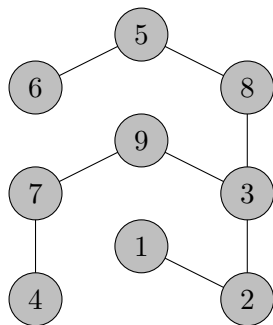
Primer4


 G_1

 G_2

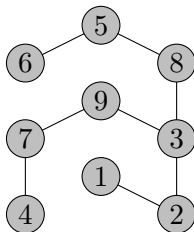
Primer

Ucrtati neophodan broj grana tako da G_2 bude pokrivaјуće stablo grafa G_1 .

Primer4


 G_1

 G_2

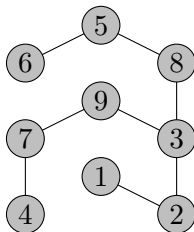
Primer5

 G_2

Primer

Napisati Priferov niz za stablo G_2 (konstruisano u prethodnom zadatku).

Primer5


 G_2

Primer

Napisati Priferov niz za stablo G_2 (konstruisano u prethodnom zadatku).

$(2, 3, 7, 5, 8, 9, 3)$

Tema 2

11.07.2019

Primer6

Primer

Koliko grana ima (kompletan) graf K_{20} ?

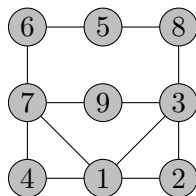
Primer6

Primer

Koliko grana ima (kompletan) graf K_{20} ?

$$|E(K_{20})| = \left| \binom{V(K_{20})}{2} \right| = \binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190$$

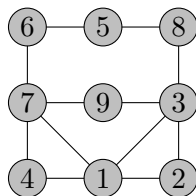
Primer7

 G_1

Primer

Ispitati da li je graf G_1 Ojlerov. Ako jeste, napisati Ojlerovu turu.

Primer7

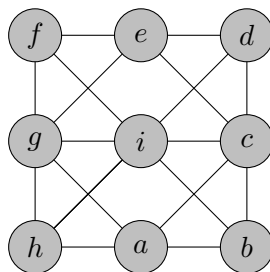

 G_1

Primer

Ispitati da li je graf G_1 Ojlerov. Ako jeste, napisati Ojlerovu turu.

4123179385674

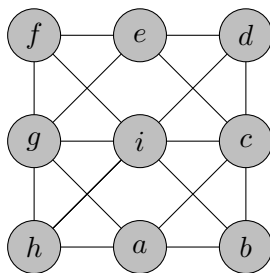
Primer8



Primer

Ispitati da li je graf G_2 Hamiltonov. Ako jeste, napisati Hamiltonovu konturu.

Primer8

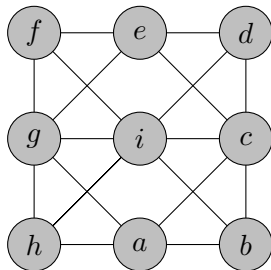


Primer

Ispitati da li je graf G_2 Hamiltonov. Ako jeste, napisati Hamiltonovu konturu.

habicdefgh

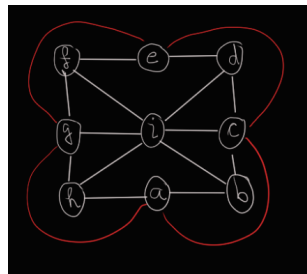
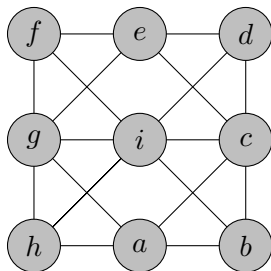
Primer9


 G_2

Primer

Ispitati da li je G_2 planaran graf. Ako jeste, prikazati jednu njegovu planarnu reprezentaciju.

Primer9



Primer10

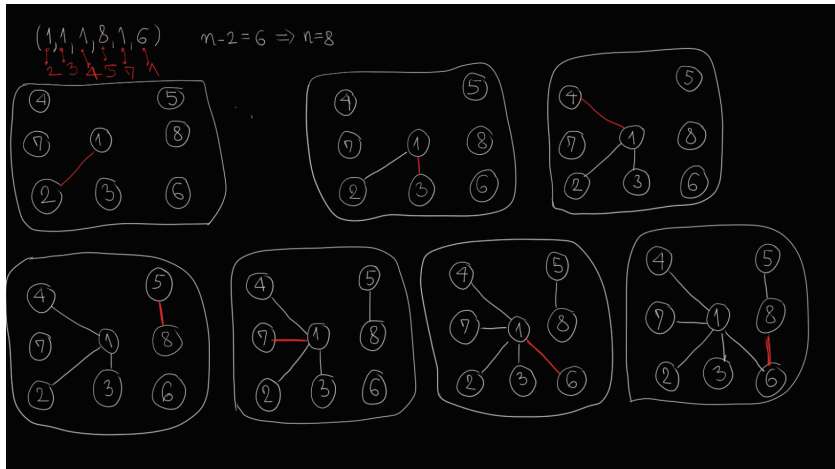
Primer

Konstruisati stablo čiji Priferov kod je $(1, 1, 1, 8, 1, 6)$.

Primer10

Primer

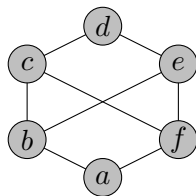
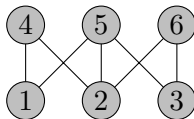
Konstruisati stablo čiji Priferov kod je $(1, 1, 1, 8, 1, 6)$.



Tema 3

14.09.2016

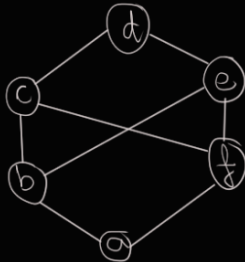
Primer11

 G_1  G_2

Primer

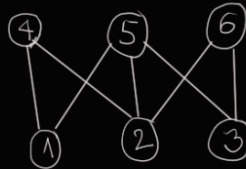
Ispitati da li su grafovi G_1 i G_2 izomorfni. Ako jesu, napisati odgovarajući izomorfizam. Ako nisu, obrazložiti.

Primer11



$$|V_1| = 6$$

$$|E_1| = 8$$

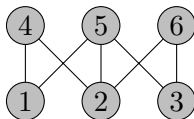


$$|V_2| = 6$$

$$|E_2| = 7$$

$$G_1 \not\cong G_2$$

Primer12

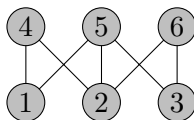


G_2

Primer

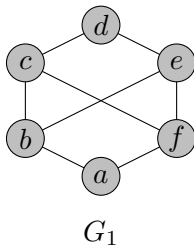
Napisati matricu incidencije za graf G_2 .

Primer12

 G_2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

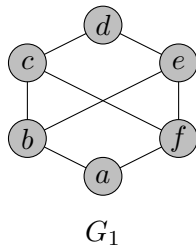
Primer13



Primer

Da li je G_1 Ojlerov graf? Ako jeste napisati odgovarajuću Ojlerovu konturu. Ako nije, obraložiti zašto nije.

Primer13

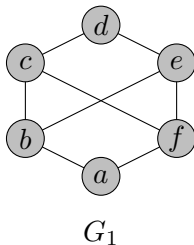


Primer

Da li je G_1 Ojlerov graf? Ako jeste napisati odgovarajuću Ojlerovu konturu. Ako nije, obraložiti zašto nije.

Nije, zato što ima čvorove b, c, e, f neparnog stepena.

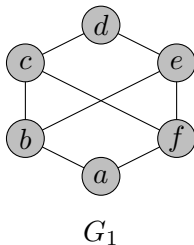
Primer14



Primer

Da li je G_3 polu Ojlerov graf? Ako jeste, napisati odgovarajući Ojlerov put. Ako nije, obraložiti zašto nije.

Primer14



Primer

Da li je G_3 polu Ojlerov graf? Ako jeste, napisati odgovarajući Ojlerov put. Ako nije, obratiti zašto nije.

Nije, zato što ima 4 čvora neparnog stepena.

Primer15

Primer

Ako graf G ima $n, n \geq 2$ čvorova i manje od $n - 1$ grana, onda postoji čvor $v \in V(G)$ sa osobinom $d(v) \leq 1$.

Primer15

Primer

Ako graf G ima $n, n \geq 2$ čvorova i manje od $n - 1$ grana, onda postoji čvor $v \in V(G)$ sa osobinom $d(v) \leq 1$.

Pretpostavimo suprotno, da je svaki čvor stepena bar dva.

$$2n > 2(n - 1) > 2 \cdot |E(G)| = \sum_{v \in V(G)} d_G(v) \geq 2 \cdot n$$

Tema 4

25.01.2021.

Primer

Konstruisati neizomorfne proste grafove $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ tako da je $|V_1| = |V_2| = 5$, $|E_1| = |E_2| = 6$, a grafički nizovi su im $(3, 3, 2, 2, 2)$.

Primer

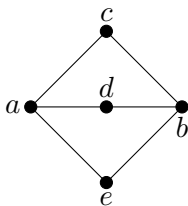
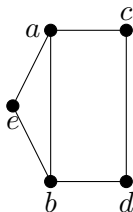
Konstruisati neizomorfne proste grafove $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ tako da je $|V_1| = |V_2| = 5$, $|E_1| = |E_2| = 6$, a grafički nizovi su im $(3, 3, 2, 2, 2)$.

Neka su čvorovi a i b stepena 3. Ako su a i b u G_1 susedni, a u G_2 nisu susedni, dobijamo grafove koji nisu izomorfni:

Primer

Konstruisati neizomorfne proste grafove $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ tako da je $|V_1| = |V_2| = 5$, $|E_1| = |E_2| = 6$, a grafički nizovi su im $(3, 3, 2, 2, 2)$.

Neka su čvorovi a i b stepena 3. Ako su a i b u G_1 susedni, a u G_2 nisu susedni, dobijamo grafove koji nisu izomorfni:

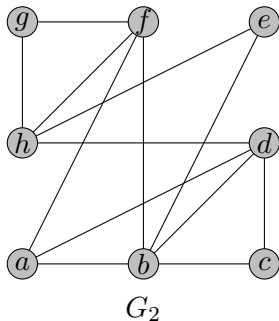

 G_1

 G_2

Primer

Ispitati da li je graf G_2 polu Ojlerov. Ako jeste, napisati Ojlerov put. Ako nije, obrazložiti odgovor.

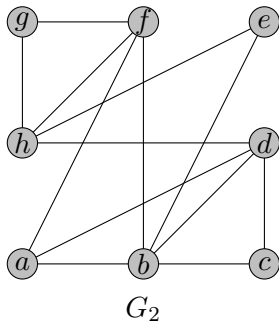
Primer

Ispitati da li je graf G_2 polu Ojlerov. Ako jeste, napisati Ojlerov put. Ako nije, obrazložiti odgovor.



Primer

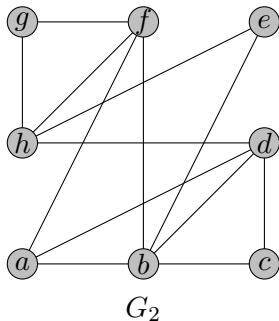
Ispitati da li je graf G_2 polu Ojlerov. Ako jeste, napisati Ojlerov put. Ako nije, obrazložiti odgovor.



Grafički niz datog grafa je $(5, 4, 4, 4, 3, 2, 2, 2)$. Graf jeste polu Ojlerov, zato što su tačno dva čvora stepena 2.

Primer

Ispitati da li je graf G_2 polu Ojlerov. Ako jeste, napisati Ojlerov put. Ako nije, obrazložiti odgovor.



Grafički niz datog grafa je $(5, 4, 4, 4, 3, 2, 2, 2)$. Graf jeste polu Ojlerov, zato što su tačno dva čvora stepena 2.

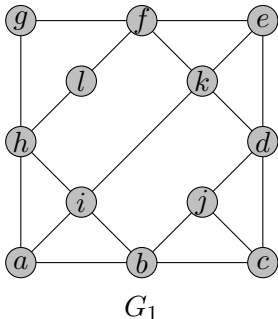
Ojlerov put: $a f g h f b e h d c b d a b$

Primer

Ispitati Da li je graf G_1 polu Hamiltonov. Ako jeste, napisati Hamiltonov put. Ako nije, napisati dokaz.

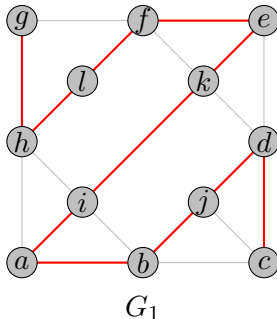
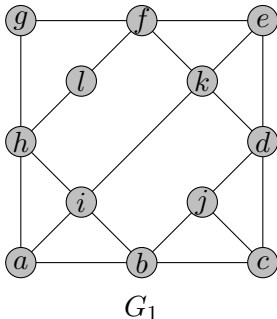
Primer

Ispitati Da li je graf G_1 polu Hamiltonov. Ako jeste, napisati Hamiltonov put. Ako nije, napisati dokaz.



Primer

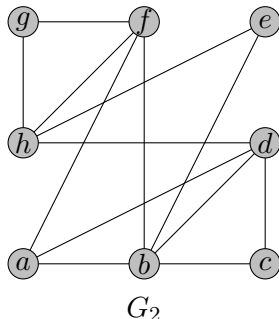
Ispitati Da li je graf G_1 polu Hamiltonov. Ako jeste, napisati Hamiltonov put. Ako nije, napisati dokaz.



Graf jeste polu Hamiltonov, zato što ima Hamiltonov put: $cdjbaikelflhg$

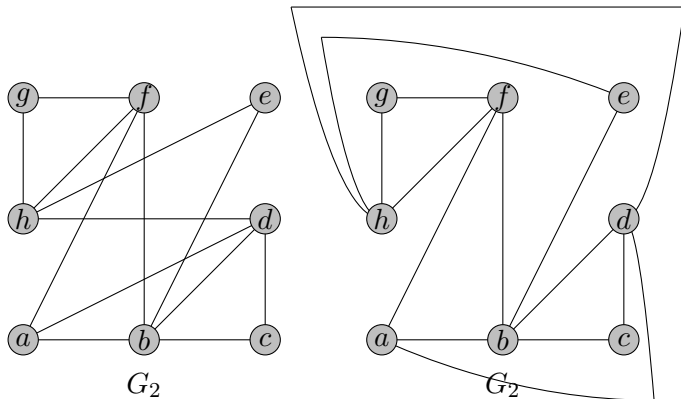
Primer

Ispitati da li je graf G_2 planaran. Ako jeste, nacrtati jednu njegovu planarnu reprezentaciju. Ako nije, napisati dokaz.



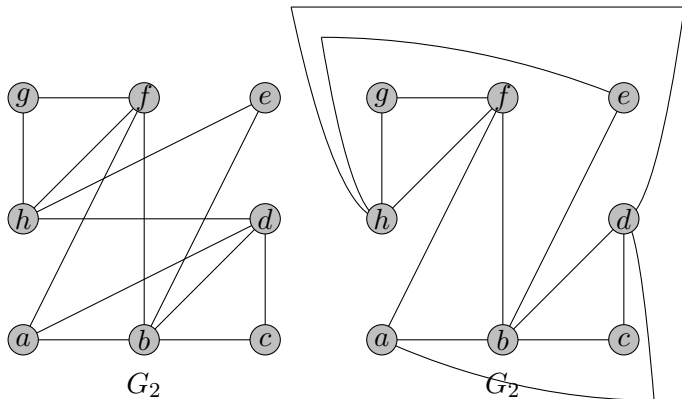
Primer

Ispitati da li je graf G_2 planaran. Ako jeste, nacrtati jednu njegovu planarnu reprezentaciju. Ako nije, napisati dokaz.



Primer

Ispitati da li je graf G_2 planaran. Ako jeste, nacrtati jednu njegovu planarnu reprezentaciju. Ako nije, napisati dokaz.



Jeste planaran, zato ští ima planarnu reprezentaciju.

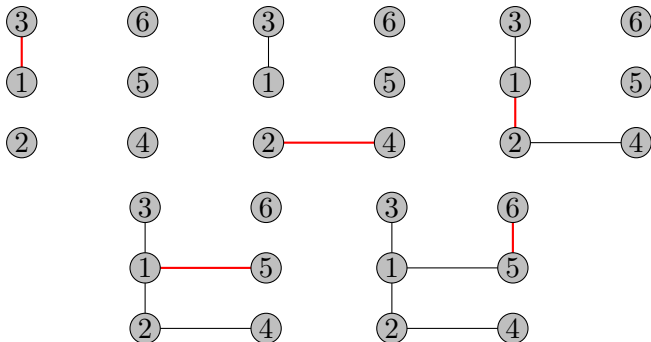
Primer

Konstruisati stablo čiji je Priferov kod $(1, 2, 1, 5)$.

Primer

Konstruisati stablo čiji je Priferov kod $(1, 2, 1, 5)$.

$$n - 2 = 4 \Rightarrow n = 6$$

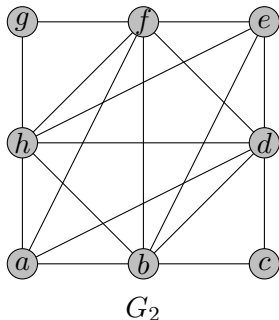


Tema 5

8.2.2021

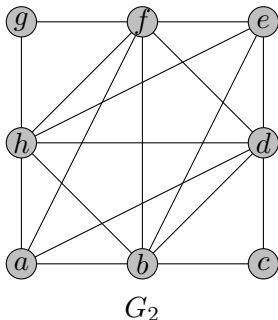
Primer

Ispitati da li je graf G_2 Ojlerov. Ako jeste, napisati Ojlerovu turu. Ako nije, obrazložiti odgovor.



Primer

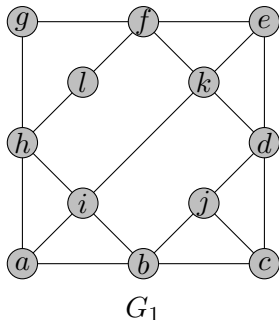
Ispitati da li je graf G_2 Ojlerov. Ako jeste, napisati Ojlerovu turu. Ako nije, obrazložiti odgovor.



Jste Ojlerov. Jedna Ojlerova tura je: $dc b d f e d h g f h a b h e b f a d$

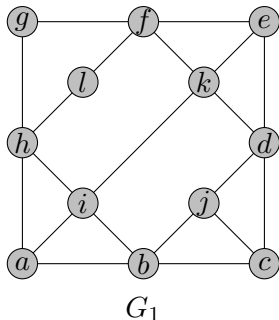
Primer

Ispitati da li je graf G_1 polu Ojlerov. Ako jeste, napisati Ojlerov put. Ako nije, obrazložiti odgovor.



Primer

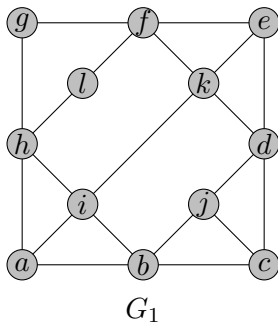
Ispitati da li je graf G_1 polu Ojlerov. Ako jeste, napisati Ojlerov put. Ako nije, obrazložiti odgovor.



Nije polu Ojlerov, za to što ima 4 čvora neoarnog stepena: a, c, j, e .

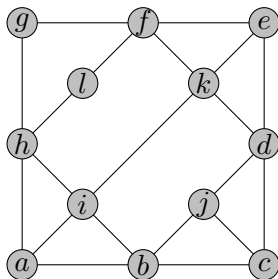
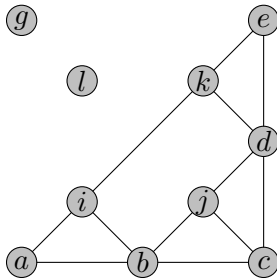
Primer

Ispitati Da li je graf G_1 Hamiltonov. Ako jeste, napisati Hamiltonovu konturu. Ako nije, napisati dokaz.



Primer

Ispitati Da li je graf G_1 Hamiltonov. Ako jeste, napisati Hamiltonovu konturu. Ako nije, napisati dokaz.

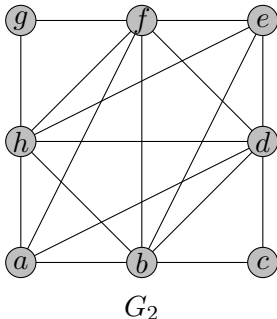

 G_1

 $G_1 - S, S = \{h, f\}$

Nije Hamiltonov, zato što je

$$\omega(G_1 - S) = 3 > 2 = |S|.$$

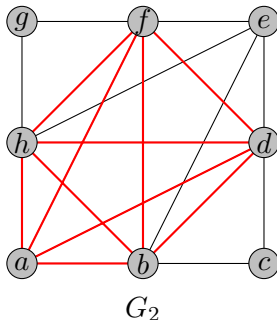
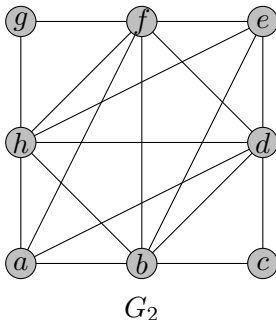
Primer

Ispitati da li je graf G_2 planaran. Ako jeste, nacrtati jednu njegovu planarnu reprezentaciju. Ako nije, napisati dokaz.



Primer

Ispitati da li je graf G_2 planaran. Ako jeste, nacrtati jednu njegovu planarnu reprezentaciju. Ako nije, napisati dokaz.



G_2 nije planaran, zato što je K_5 njegov podrgraf, a K_5 nije planaran.

Primer

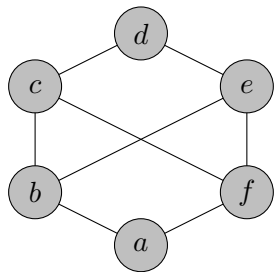
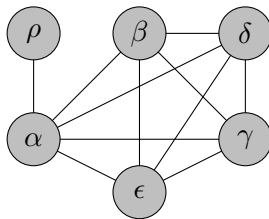
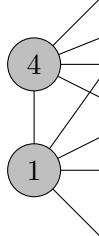
*Odrediti broj (međusobno različitih) označenih stabala sa 6 čvorova.
Obrazložiti odgovor!*

Broj označenih stabala sa 6 čvorova jednak je broju Priferovih kodova, tj. broju uređenih četvorki brojeva iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$6^4 = 1296$$

Tema 6

22.2.2017.

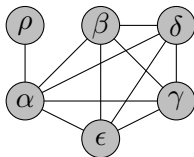
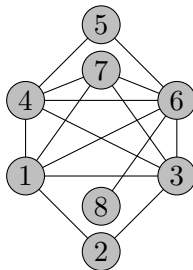
 G_1  G_2 

Primer

Ispitati da li je G_2 izomorfan nekom podgrafu grafa G_3 . Ako jeste, napisati izomorfizam. Ako nije, dokazati da nije.

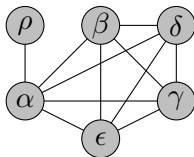
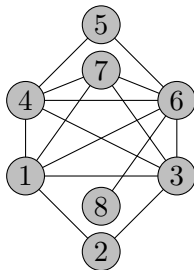
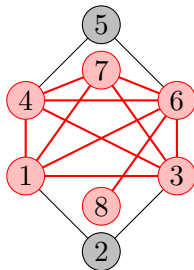
Primer

Ispitati da li je G_2 izomorfan nekom podgrafu grafa G_3 . Ako jeste, napisati izomorfizam. Ako nije, dokazati da nije.

 G_2  G_3

Primer

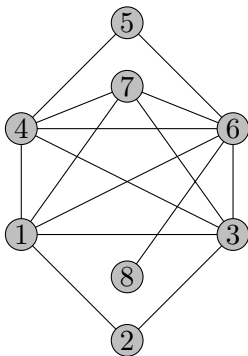
Ispitati da li je G_2 izomorfan nekom podgrafu grafa G_3 . Ako jeste, napisati izomorfizam. Ako nije, dokazati da nije.

 G_2  G_3  G_3

$$f : \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \epsilon & \rho \\ 6 & 7 & 1 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

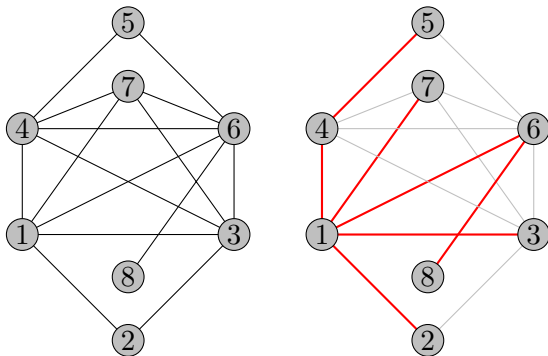
Primer

Neka je u grafu G funkcija težine definisana sa $\omega(\{u, v\}) = u + v$, $\{u, v\} \in E(G)$. Odrediti jedno minimalno pokrivaјуće stablo grafa G .



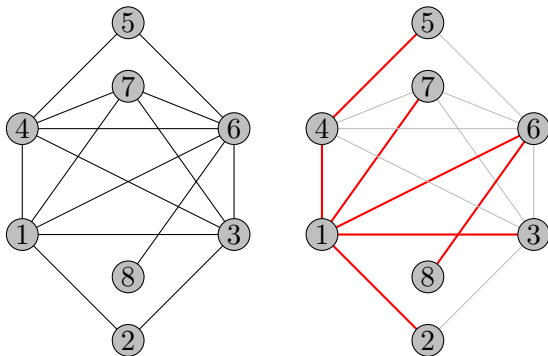
Primer

Neka je u grafu G funkcija težine definisana sa $\omega(\{u, v\}) = u + v$, $\{u, v\} \in E(G)$. Odrediti jedno minimalno pokrivaјуće stablo grafa G .



Primer

Neka je u grafu G funkcija težine definisana sa $\omega(\{u, v\}) = u + v$, $\{u, v\} \in E(G)$. Odrediti jedno minimalno pokrivajuće stablo grafa G .



Težina minimalnog pokrivajućeg stabla je:

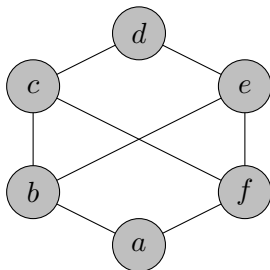
$$3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 + 14 = 50.$$

Primer

Da li je G Ojlerov graf? Ako jeste napisati odgovarajuću Ojlerovu konturu. Ako nije, transformisati ga u Ojlerov brisanjem minimalnog broja grana i napisati Ojlerovu konturu.

Primer

Da li je G Ojlerov graf? Ako jeste napisati odgovarajuću Ojlerovu konturu. Ako nije, transformisati ga u Ojlerov brisanjem minimalnog broja grana i napisati Ojlerovu konturu.



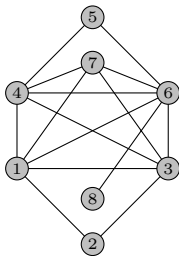
Graf nije Ojlerov, zato što ima 4 čvora neparnog stepena.
To su: b, c, e, f .

Primer

Da li je $G_3 - 1$ planaran graf? Ako jeste, nacrtati njegovu planarnu reprezentaciju. Ako nije, obrazložiti zašto nije.

Primer

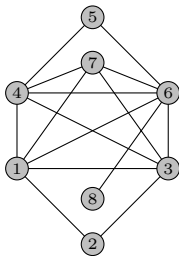
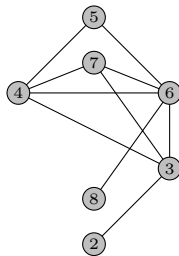
Da li je $G_3 - 1$ planaran graf? Ako jeste, nacrtati njegovu planarnu reprezentaciju. Ako nije, obrazložiti zašto nije.



G_3

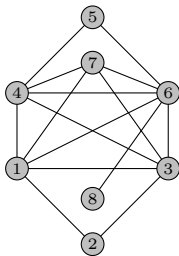
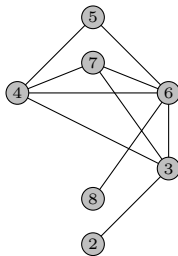
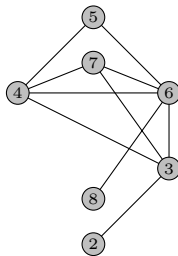
Primer

Da li je $G_3 - 1$ planaran graf? Ako jeste, nacrtati njegovu planarnu reprezentaciju. Ako nije, obrazložiti zašto nije.


 G_3

 $G_3 - 1$

Primer

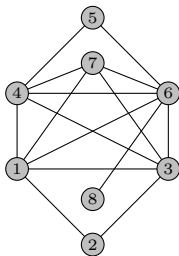
Da li je $G_3 - 1$ planaran graf? Ako jeste, nacrtati njegovu planarnu reprezentaciju. Ako nije, obrazložiti zašto nije.

 G_3  $G_3 - 1$  $G_3 - 1$

Jeste polu Hamiltonov graf. Hamiltonov put je: 2374568

Primer

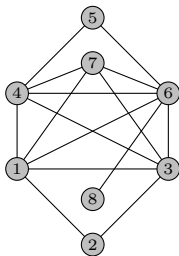
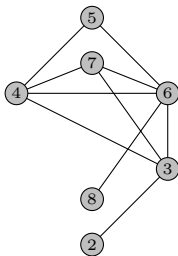
Da li je G_3 – 1 polu Hamiltonov graf? Ako jeste, odrediti Hamiltonov put. Ako nije, obrazložiti.



G_3

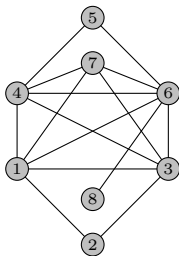
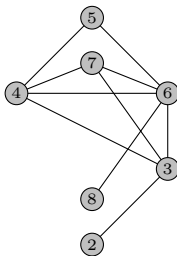
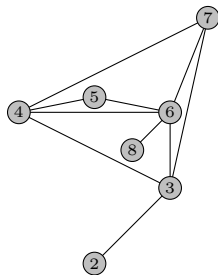
Primer

Da li je $G_3 - 1$ polu Hamiltonov graf? Ako jeste, odrediti Hamiltonov put. Ako nije, obrazložiti.


 G_3

 $G_3 - 1$

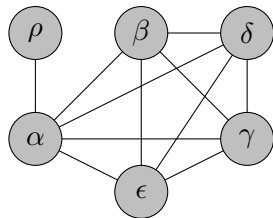
Primer

Da li je $G_3 - 1$ polu Hamiltonov graf? Ako jeste, odrediti Hamiltonov put. Ako nije, obrazložiti.

 G_3  $G_3 - 1$  $G_3 - 1$

Primer

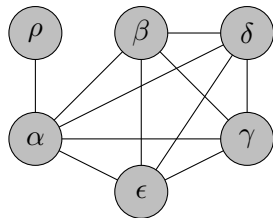
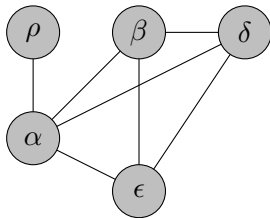
Da li je graf $G_2 - \gamma$ planaran? Ako jeste, nacrtati njegovu planarnu reprezentaciju. Ako nije, obrazložiti zašto nije.



G_2

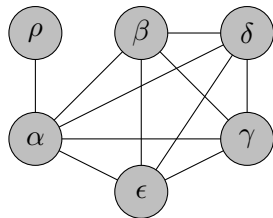
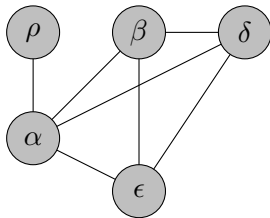
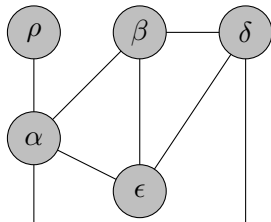
Primer

Da li je graf $G_2 - \gamma$ planaran? Ako jeste, nacrtati njegovu planarnu reprezentaciju. Ako nije, obrazložiti zašto nije.


 G_2

 $G_2 - \gamma$

Primer

Da li je graf $G_2 - \gamma$ planaran? Ako jeste, nacrtati njegovu planarnu reprezentaciju. Ako nije, obrazložiti zašto nije.


 G_2

 $G_2 - \gamma$

 $G_2 - \gamma$