

Дискретна математика, Основи теорије графова и комбинаторике**Колоквијум I**

1. У једној групи људи се налазе три Италијана, четири Француза и пет Шпанаца. На колико различитих начина се ови људи могу поређати у низ тако да сви Французи буду један поред другог, сви Шпанци један поред другог и никоја два Италијана не буду један до другог?
2. Доказати да за природне бројеве n и k за које је $n \geq k$ важи

$$\sum_{j=k}^n \binom{n}{j} \binom{j}{k} = \binom{n}{k} 2^{n-k}.$$

3. У лифт у приземљу зграде је ушло 9 људи. На сваком од 5 спратова зграде из лифта је изашао бар један човек, а нико није ушао. Одредити број начина на који људи могу напустити лифт.
4. Решити рекурентну релацију

$$f_n = 5f_{n-2} - 4f_{n-4}, \text{ за } n \geq 4,$$

ако је $f_0 = -1$, $f_1 = f_2 = 1$ и $f_3 = 5$.

Колоквијум II

1. Граф је *самокомплементаран* ако је изоморфан свом комплементу. Доказати да не постоји регуларан самокомплементаран граф са парним бројем чворова.
2. Доказати да шума са k компоненти повезаности и s изолованих чворова садржи бар $2(k - s)$ висећих чворова.
3. Нека је G граф са n чворова, где је $n \geq 3$, и $e \geq \binom{n-1}{2} + 1$ грана. Доказати да је G полухамилтонов граф.
4. Нека је у планарном графу G број грана мањи од 30. Доказати да је $\delta(G) \leq 4$.

