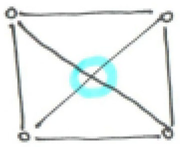
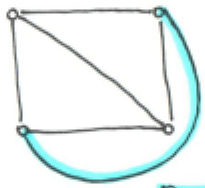
ВЕЖБЕ 12

Планарни графови

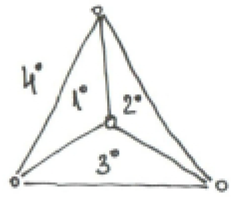
Граф $G=(V,E)$ је **ПЛАНАРАН** ако се може нацртати у равни тако да **ГРАНЕ НЕМАЈУ ЗАЈЕДНИЧКИХ ТАЧАКА** осим чворова графа.

K_4





K_4 је планаран граф



$n=4$
$e=6$
$r=4$
$4-6+4=8-6=2$

За планарне графове важи **ОЈЛЕРОВА ФОРМУЛА**

$$n-e+r=2$$

(повезани графови)

$|V(G)|=n$ број чворова
$|E(G)|=e$ број грана
r - број повезаних области на које граф G дели раван

Неповезани графови:

$$n-e+r=\omega(G)+1$$

T: Ако је G планаран граф, $n\geq 3$, e грана, тада важи

$$e\leq 3n-6 \quad \text{(макс. планаран } e=3n-6\text{)}$$

$\Rightarrow$ **K_5 није планаран**

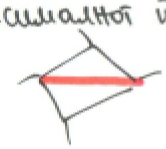
T: Ако је G планаран граф, $n\geq 3$ чворова, e грана и **НЕ САДРЖИ КОНТУРЕ ДУЖИНЕ 3**, тада важи

$$e\leq 2n-4$$

$\Rightarrow$ **$K_{3,3}$ није планаран.**

G је **МАКСИМАЛАН** планаран граф $\iff \begin{cases} 1^\circ\ G \text{ је планаран} \\ 2^\circ\ G+uv \text{ је непланаран}, \\ \quad \forall uv\notin E(G) \end{cases}$

$\rightarrow$ Све области максималног планарног графа су **троуглови**.



1. Граф G има 1000 чворова и 3000 грана. Да ли је G планаран?

Знамо да за планарне графове важи $e \leq 3n-6$.

$n = 1000$

$e = 3000$

$3n-6 = 3 \cdot 1000 - 6 = 2994 < 3000 = e \Rightarrow G$ није планаран

2. Да ли постоји 5-регуларан планаран граф са 10 чворова?

$n=10$

5-регуларан: $d(v)=5, \ \forall v \in V$

основна теорема теорије графова: $2e = \sum d(v) = 10 \cdot 5$

$\Rightarrow e = 25$

G планаран: $e \leq 3n-6$

$25 \leq 3 \cdot 10 - 6$

$25 \leq 24$ ↯ $\Rightarrow$ Не постоји 5-регуларан планаран граф са 10 чворова

3. Колико чворова има планаран 4-регуларан граф са 10 области?

4-регуларан: $d(v)=4,\ v\in V$

$r=10$

Ојлерова формула

$n+r-e=2$

основна теорема: $2e=\sum d(v)=4n$

$\Rightarrow e=2n$

$n+r-e=2$

$n+10-2n=2$

$n=8$

4. Ако је G планаран граф са мање од 12 чворова, доказати да је $\delta(G) \leq 4$.

$n < 12$

Претпоставимо супротно, $\delta(G) > 4$, тј. $d(v) \geq 5, \forall v \in V(G)$

Сада је $2e = \sum d(v) \geq 5n \Rightarrow e \geq \frac{5n}{2}$

G планаран: $e \leq 3n-6$

$$\frac{5n}{2} \leq e \leq 3n-6$$

$$5n \leq 6n-12$$

$n \geq 12$ ↯ (услов задатка $n<12$)

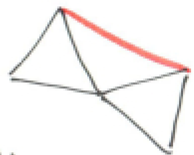
$\Rightarrow$ У графу G мора бити $\delta(G) \leq 4$.

5. Ако је G планаран граф са мање од 30 грана, доказати да је $\delta(G) \leq 4$.

6. Ако је G максималан планаран граф са $n \geq 4$ чворова, доказати да је

$$3n_3+2n_4+n_5=n_7+2n_8+\dots+(k-6)n_k+12$$

где је n_i $(i=1,2,\dots,k=\Delta(G))$ број чворова степена i.



У максималном планарном графу је $n=n_3+n_4+\dots+n_k$

G максималан планаран: $e=3n-6$

основна теорема: $2e=\sum d(v)=n_1+2n_2+3n_3+4n_4+\dots+kn_k$

$\Longrightarrow 2e=3n_3+4n_4+5n_5+\dots+kn_k$

$2\cdot(3n-6)=3n_3+4n_4+5n_5+\dots+kn_k$

$6(n_3+n_4+\dots+n_k)-12=3n_3+4n_4+5n_5+\dots+kn_k$

$6n_3+6n_4+6n_5+\cancel{6n_6}+6n_7+6n_8+\dots+6n_k-12=3n_3+4n_4+5n_5+\cancel{6n_6}+7n_7+8n_8+\dots+kn_k$

$3n_3+2n_4+n_5=n_7+2n_8+3n_9+\dots+(k-6)n_k+12$

7. Из сваког темена полиедра излазе по три ивице, а пљосни су искључиво петоуглови, шестоуглови и седмоуглови, којих има редом r_5, r_6 и r_7. Доказати да је $r_5 - r_7 = 12$.

Пројекција полиедра на раван је један планаран граф.

темена полиедра → чворови

ивице (странице) полиедра → гране

пљосни (стране) полиедра → области

За планарне графове важи:

$2e = 3\cdot r_3 + 4\cdot r_4 + 5\cdot r_5 + \dots + k\cdot r_k$

3-регуларан граф

$r = r_5 + r_6 + r_7$

основна теорема:

$2e = \sum d(v) = 3n \Rightarrow n = \frac{2}{3}e$

Ојлерова формула:

$r - e + n = 2$

$r_5 + r_6 + r_7 - e + \frac{2}{3}e = 2$

$r_5 + r_6 + r_7 - \frac{e}{3} = 2 \quad / \cdot 6$

$6r_5 + 6r_6 + 6r_7 - 2e = 12 \Rightarrow 2e = 6r_5 + 6r_6 + 6r_7 - 12$

У нашем задатку имамо да важи

$2e = 5\cdot r_5 + 6\cdot r_6 + 7\cdot r_7$

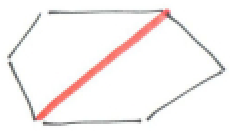
$6r_5 + \cancel{6r_6} + 6r_7 - 12 = 2e = 5r_3 + \cancel{6r_6} + 7r_7$

$r_5 - r_7 = 12$

8. Ако је G бипартитан планаран граф са $n \geq 4$ чворова и e грана, доказати да је $e \leq 2n-4$.

Нека је $G(X,Y)$ максималан планаран бипартитан граф.

Најмања контура у неком бипартитном графу може бити контура дужине 4 (јер бипартитни графови не садрже непарне контуре).



Уколико би G садржао контуру веће дужине од 4, повлачењем тетива бисмо могли да додамо нове гране које се неће сећи са претходним гранама и које неће нарушити услов да је G бипартитан, па G не би био максималан.

$\Rightarrow$ Све области максималног планарног бипартитног графа су четвороуглови, тј. $r = r_4$

$$2e = 4r$$

Ојлерова формула: $r - e + n = 2 \quad / \cdot 4$

$$4r - 4e + 4n = 8$$
$$2e - 4e + 4n = 8$$
$$2e = 4n - 8$$
$$e = 2n - 4$$

макс. бипартитан: $e = 2n - 4$

За остале бипартитне планарне графове тада важи $e \leq 2n - 4$

9. Ако је G планаран граф такав да је $\delta(G) \geq 5$, доказати да G има бар 12 чворова степена 5.

Доказујемо $n_5 \geq 12$.

Из услова $\delta(G) \geq 5$ добијамо $n = n_5 + n_6 + n_7 + \dots + n_k$, $k = \Delta(G)$

основна теорема: $2e = \sum d(v) = 5 \cdot n_5 + 6n_6 + 7 \cdot n_7 + \dots + k \cdot n_k$

G планаран: $e \leq 3n - 6 \; / \cdot 2$

$$2e \leq 6n - 12$$

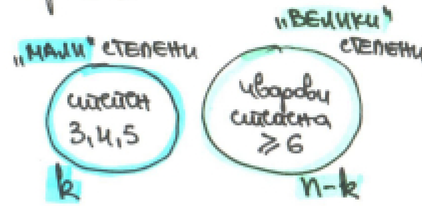
$$5n_5 + \cancel{6n_6} + 7n_7 + \dots + kn_k \leq 6n_5 + \cancel{6n_6} + 6n_7 + \dots + 6n_k - 12$$

$$n_5 \geq 12 + \underbrace{n_7 + 2n_8 + \dots + (k-6)n_k}_{\geq 0} \qquad n_i \geq 0, \forall i$$

$$n_5 \geq 12$$

10. Нека је G планаран граф са бар 4 чвора. Доказати да у G постоје бар четири чвора степена ≤ 5.

Нека је G' максималан планаран граф добијен од G додавањем грана.



$e' = |E(G')|$ (јасно $n' = n$)

G' максималан планаран: $e' = 3n-6 \;\wedge\; \delta(G') \geq 3$

Означимо са k број чворова степена 3,4 и 5 у графу G'

основна теорема: $2e' = \sum d(v) \geq 3k + 6\cdot(n-k) = 6n-3k$

$2\cdot(3n-6) \geq 6n-3k$

$6n-12 \geq 6n-3k$

$k \geq 4 \Rightarrow$ Граф G' садржи барем 4 чвора степена ≤ 5 (степена 3,4 или 5)

Како је G подграф графа G', и он такође мора садржати бар 4 чвора степена ≤ 5. (Граф G се сада добија од G' уклањањем додатих грана, па број „добрих" чворова може бити само већи или једнак као број „добрих" чворова графа G')

11. Ако је G граф са 11 чворова, доказати да бар један од графова G и $\bar{G}$ није планаран

$n = |V(G)| = |V(\bar{G})|$

$e = |E(G)|$

$e' = |E(\bar{G})|$

Претпоставимо супротно, и G и $\bar{G}$ су планарни графови

$$\begin{aligned} e &\leq 3n-6 \\ e' &\leq 3n-6 \\ \hline e+e' &\leq 6n-12 \\ \binom{n}{2} &\leq 6n-12 \end{aligned}$$

$n=11$:

$\binom{11}{2} \leq 6 \cdot 11 - 12$

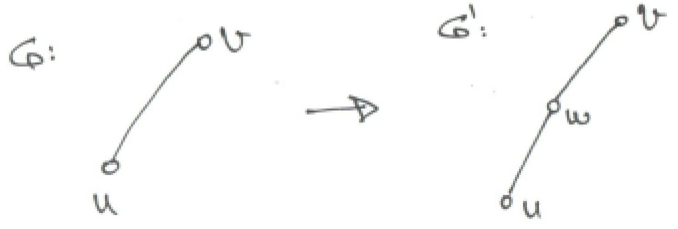
$55 \leq 54$ $\lightning$ Не могу бити и G и $\bar{G}$ планарни.

12. Ако је G граф са n чворова и притом важи $n^2-13n+24>0$ доказати да бар један од графова G и $\bar{G}$ није планаран. (домаћи)

Подграф планарног графа је такође планаран.

K_5 и $K_{3,3}$ нису планарни $\Rightarrow$ ни сваки граф који их садржи као подграфове не може бити планаран

ЕЛЕМЕНТАРНА ПОДЕЛА ГРАНЕ:



+1 чвор (чвор w)

+1 грана (бришемо uv, додајемо uw и wv)

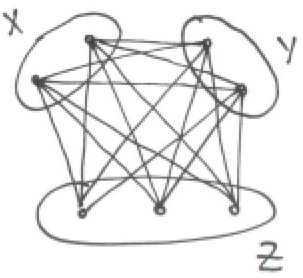
Ако је G био планаран, онда је и граф G' који настаје од G елементарном поделом грана такође планаран граф.

Два графа су **ХОМЕОМОРФНА** ако се оба могу добити од истог графа применом елементарних подела грана.

Т: (**КУРАТОВСКИ**)

Граф је непланаран акко садржи подграф који је хомеоморфан са K_5 или $K_{3,3}$.

13. Доказати да $K_{3,2,2}$ нема планаран подграф са 15 грана.

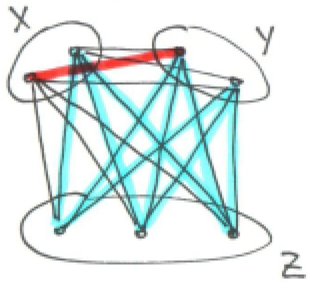


$|E(K_{3,2,2})| = 3\cdot2 + 3\cdot2 + 2\cdot2 = 16$ грана

Тражени подграф добијамо избацивањем једне гране из графа $K_{3,2,2}$

* Користимо теорему Куратовског

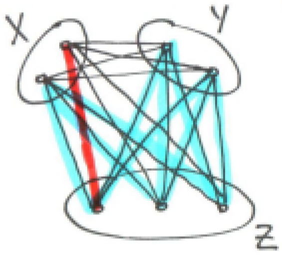
• $e = xy$



Подграф $K_{3,3}$ можемо добити узимањем 3 од 4 чвора из $X \cup Y$ и 3 чвора из Z

$\Rightarrow K_{3,2,2} - e$ није планаран (јер садржи $K_{3,3}$ који није планаран)

• $e = xz$



И овај подграф садржи $K_{3,3}$ (узимамо чворове из Z и преостала 3 чвора из $X \cup Y$)

$\Rightarrow K_{3,2,2} - e$ није планаран

($e = yz$ који се ради аналогно другом случају $e = xz$)