Linearno Programiranje

Simplex metod

Predavanja

Novembar 2020.

Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, Katedra za Automatiku i upravljanje sistemima

- Uvod o Linearnom Programiranju
- Grafička metoda
- Principi Simplex metode
- Simplex metod

LP Istorija

- Leonid Kantorovich, 1939
- George Dantzig, 1947
- Prvi računarski kod – 1951
- Komercijalna upotreba LP – rane 60te
- Mainframe računari– rane 70s
- Ogroman progres poslednjih 25 godina (PC)

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{j,i} x_i \le b_j; \qquad j = 1, 2, \ldots l$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{j,i} x_i = b_j; \qquad j = l+1, l+2, \ldots m$$

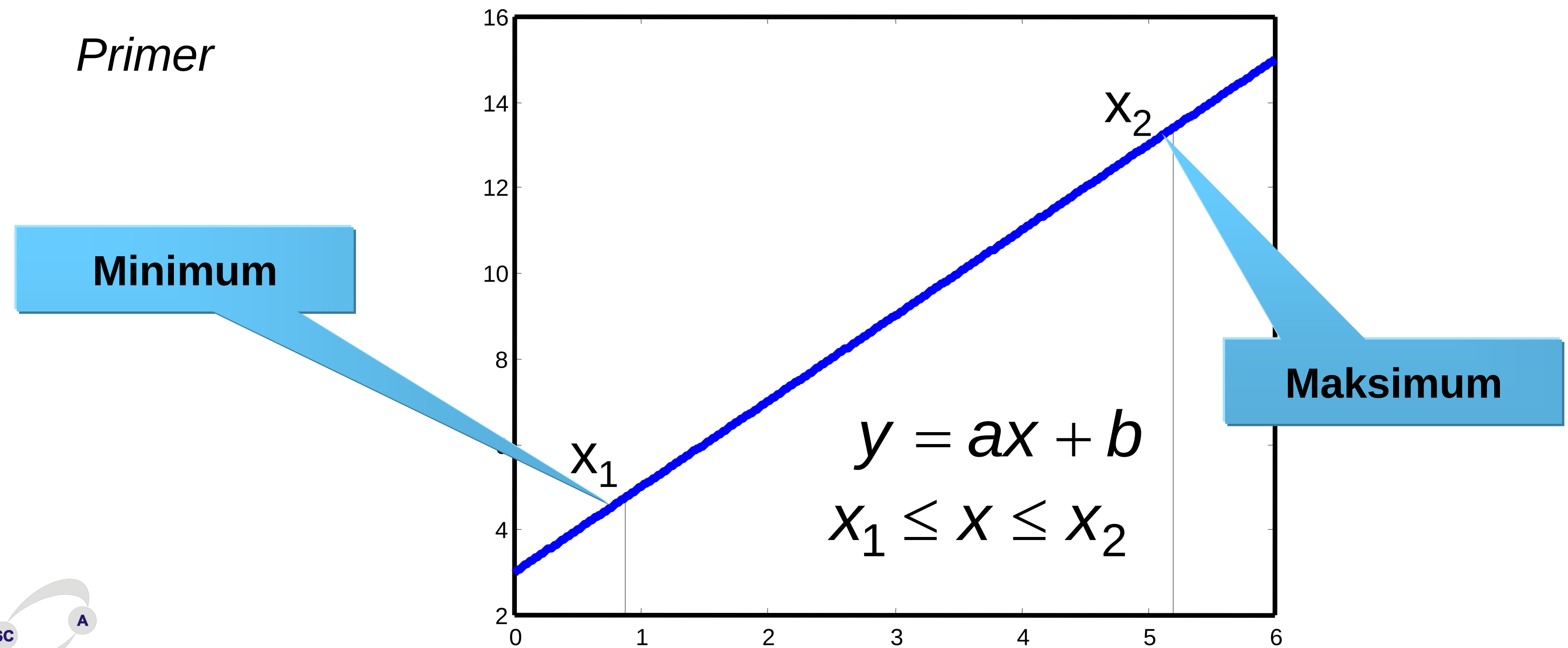
$$x_i \ge 0 \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

$$y(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + bx_2 + cx_3$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a; \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = b; \quad \frac{\partial y}{\partial x_3} = c;$$

***a*,*b*,*c* su konstante pa se rešenje traži na granicama**

Primer

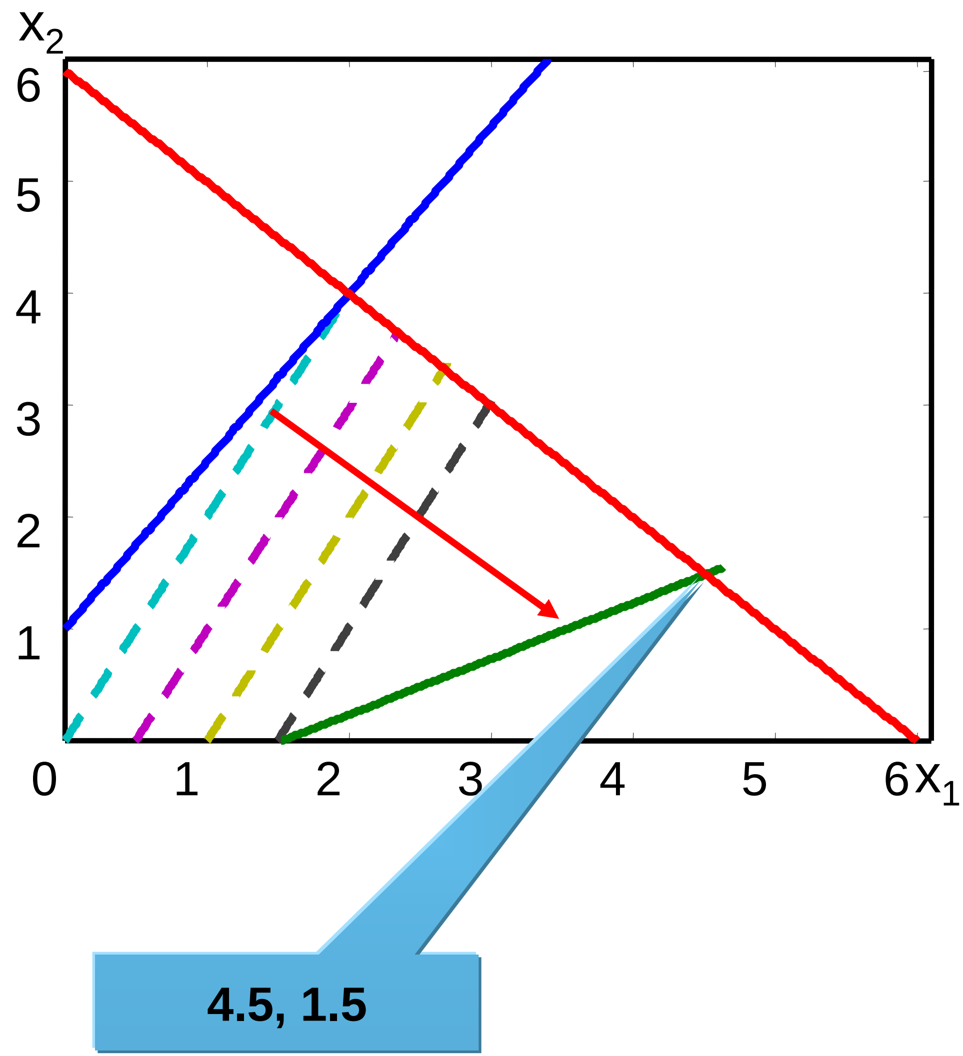


- Uvod o Linearnom Programiranju
- Grafička metoda
- Principi Simplex metode
- Simplex metod

maksimum

$$y = 2x_1 - x_2$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$
$$-3x_1 + 2x_2 \leq 2$$
$$2x_1 - 4x_2 \leq 3$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$



Zemljoradnik poseduje 100 hektara obradive zemlje i planira da zaseje 2 vrste useva.

Seme za usev A košta $40 po hektaru, seme za usev B košta $20 po hektaru.

Na seme može da potroši najviše $3200.

Procenjena zarada od useva A je $150 po hektaru i $100 po hektaru od useva B.

Koliko hektara po usevu treba da zaseje da bi maksimizirao zaradu ?

LP Formulacija:

x_1 hektara pod usevom A.

x_2 hektara pod usevom B.

P zarada \$.

Zadatak

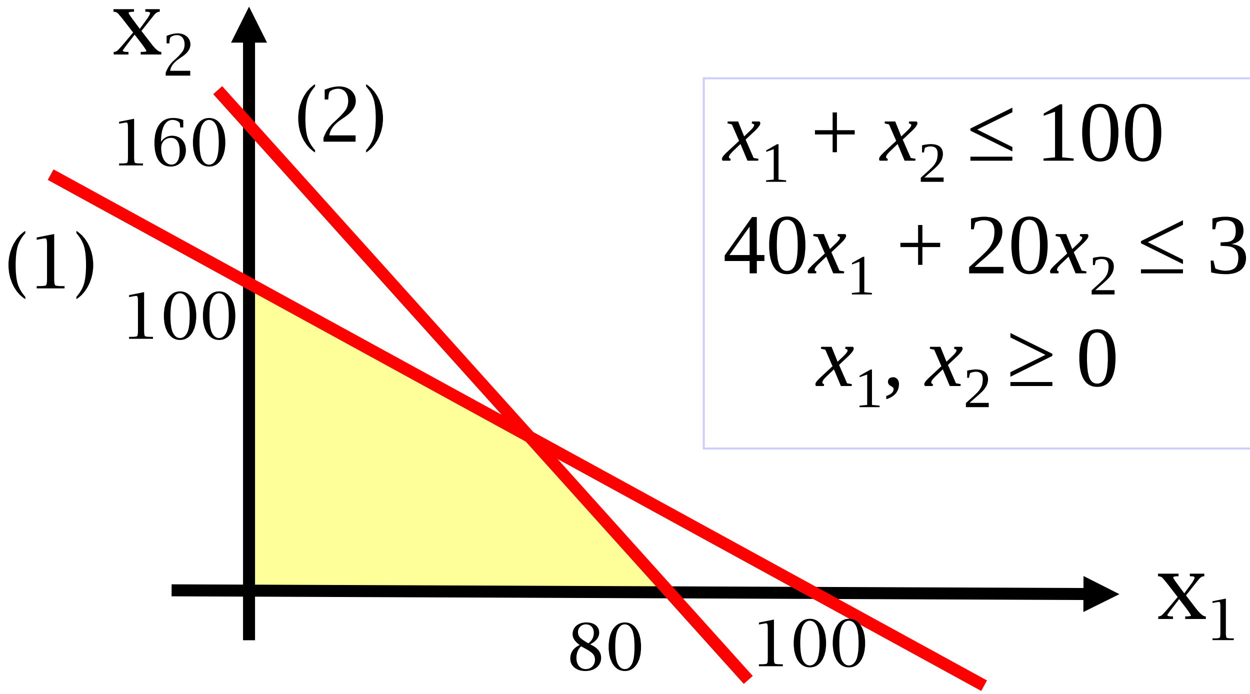
maksimizirati $P = 150x_1 + 100x_2$

Uz ograničenja

površina (u hektarima): $x_1 + x_2 \leq 100$ (1)

cena semena: $40x_1 + 20x_2 \leq 3200$ (2)

Prirodna ograničenja: $x_1, x_2 \geq 0$ (3)

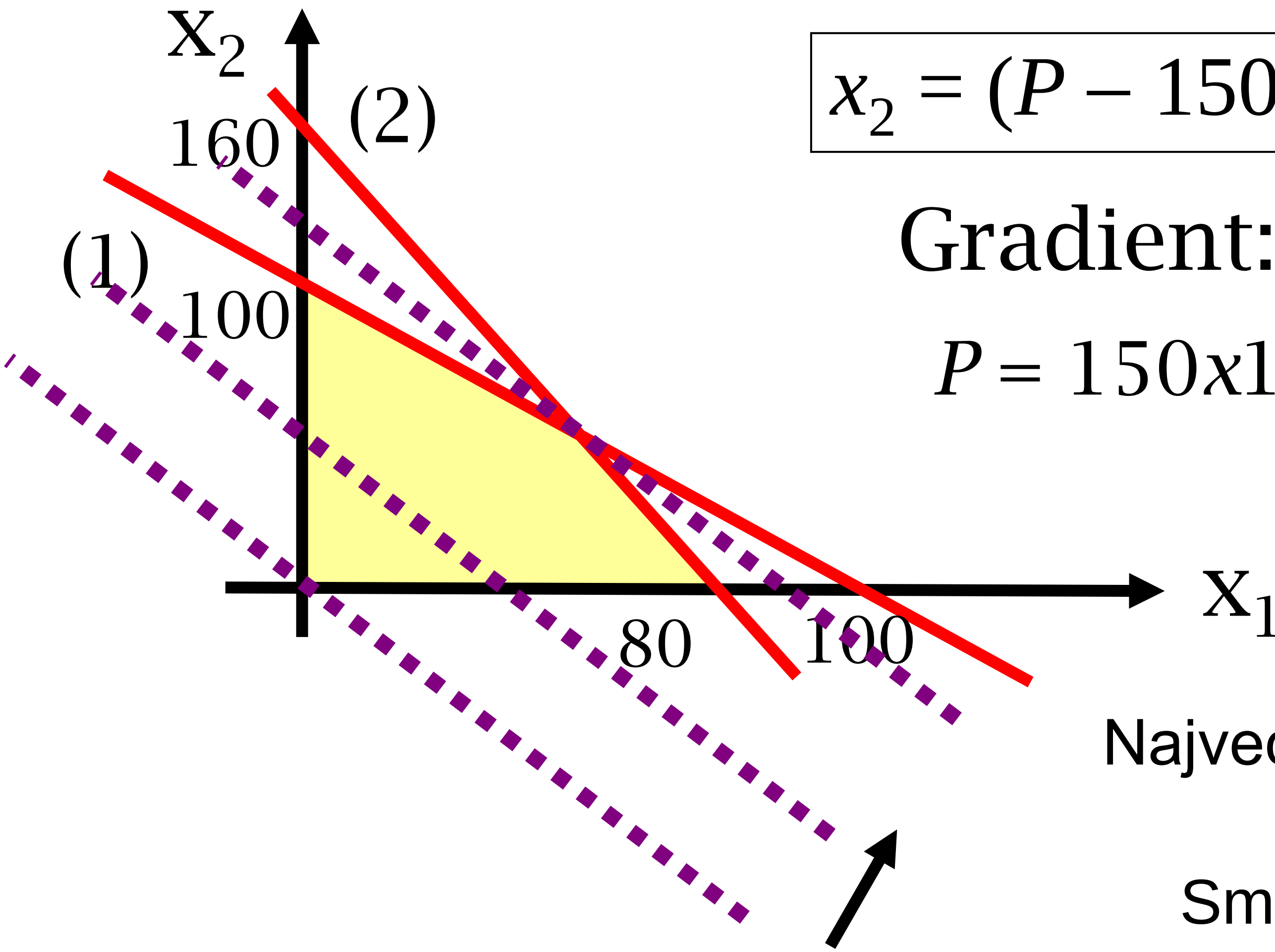


$$x_1 + x_2 \leq 100 \qquad (1)$$

$$40x_1 + 20x_2 \leq 3200 \qquad (2)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad (3)$$

$$P = 150x1 + 100x2$$



$$x_2 = (P - 150x_1)/100$$

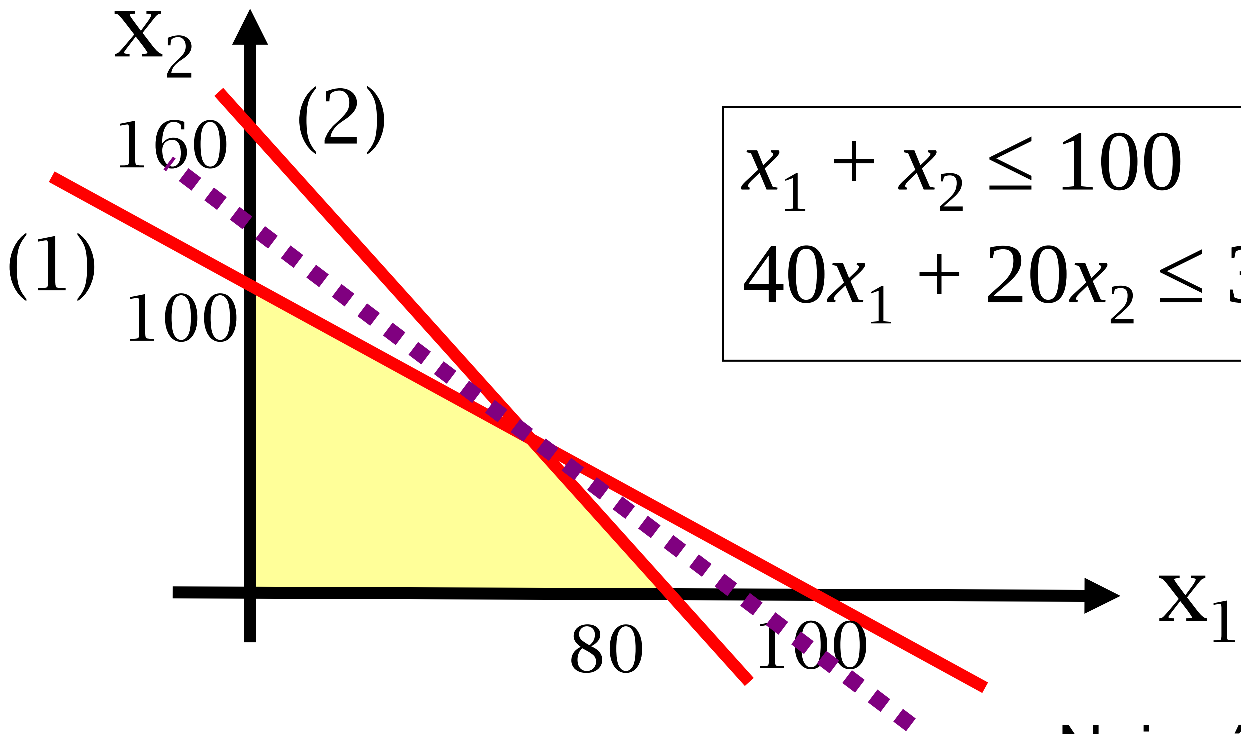
Gradient: –3/2

$$P = 150x1 + 100x2$$

Najveće moguće P

Smer porasta P

$$P = 0:\ x_2 = -1.5\ x_1$$



$$x_1 + x_2 \le 100 \quad (1)$$
$$40x_1 + 20x_2 \le 3200 \quad (2)$$

Najveće moguće *P*

Znači rešava se sistem

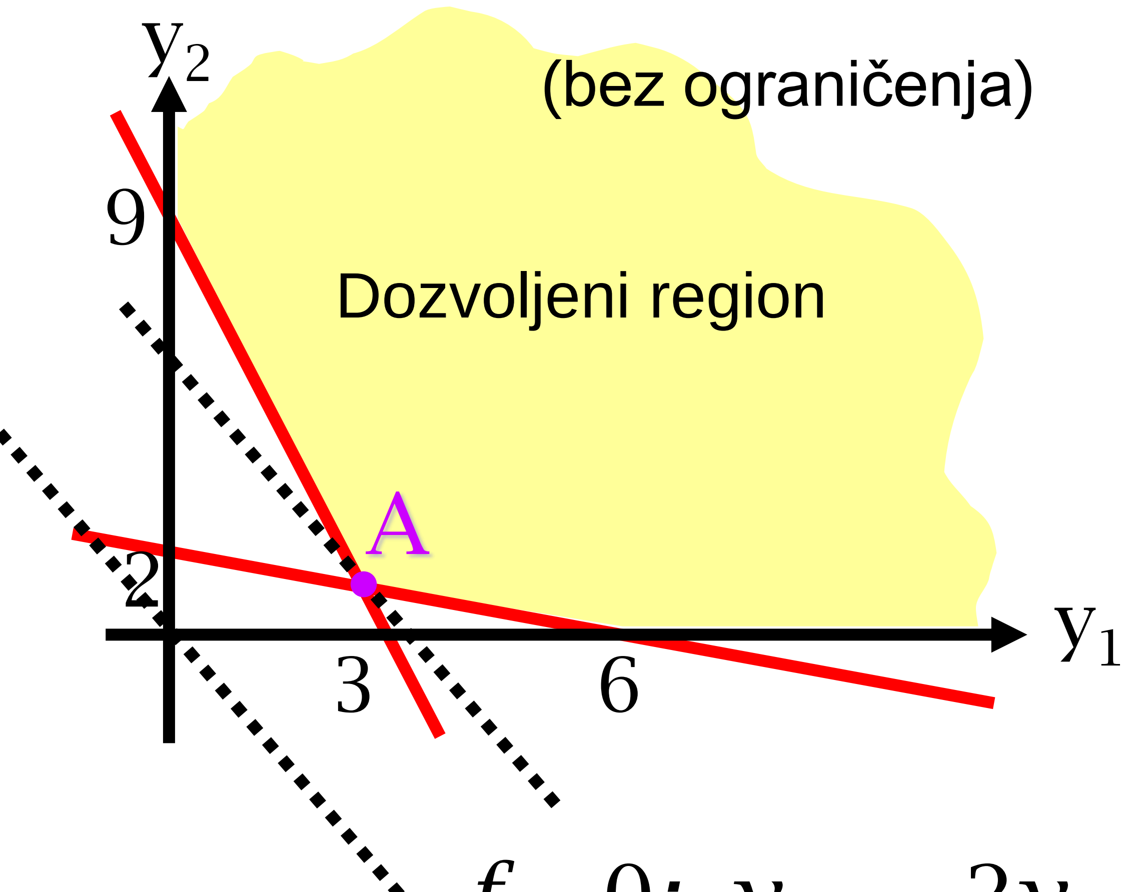
$$x_1 + x_2 = 100$$
$$40x_1 + 20x_2 = 3200$$

$$\boxed{x_1 = 60,\ x_2 = 40}$$

Region ograničen sa jedne strane

$$\text{Minimizovati} \quad f = 2y_1 + y_2$$

$$y_1 + 3y_2 \geq 6$$
$$3y_1 + y_2 \geq 9$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$



A: Optimalno rešenje

$$y_1 = \frac{21}{8}, y_2 = \frac{9}{8}$$

$$f = 0: \; y_2 = -2y_1$$

- Uvod o Linearnom Programiranju
- Grafička metoda
- Principi Simplex metode
- Simplex metod

Prvi korak

$$\le \quad \leftrightarrow \quad =$$

$$y = 2x_1 - x_2$$

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 &\le 2 \\ 2x_1 - 4x_2 &\le 3 \\ x_1 + x_2 &\le 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 6 \end{aligned}$$

Drugi korak

Izbor baznog (početnog rešenja)

m *ograničenja*

N *promenjvih*

N-m *slobodnih (=0)*

m *zavisnih, ako su >0 onda je ovo rešenje i bazis*

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 6$$

Treći korak

Transformacija

$$x_3 = 2 + 3x_1 - 2x_2$$

$$x_4 = 3 - 2x_1 + 4x_2$$

$$x_5 = 6 - x_1 - x_2$$

$$y = 2x_1 - x_2$$

Četvrti korak

Izmena promenjivih

x_1

$$x_3 = 2 + 3x_1 - 2x_2$$
$$x_4 = 3 - 2x_1 + 4x_2$$
$$x_5 = 6 - x_1 - x_2$$
$$y = 2x_1 - x_2$$

$$x_1 \text{ nema , } x_3 > 0 \text{ uvek}$$
$$x_1 = 1.5$$
$$x_1 = 6$$

Peti korak

Ponavljanje procedure

$$x_1 = 1.5 + 2x_2 - 0.5x_4$$
$$x_3 = 6.5 + 4x_2 - 1.5x_4$$
$$x_5 = 4.5 - 3x_2 + 0.5x_4$$
$$y = 3 + 3x_2 - x_4$$

$$x_1 = 1.5 \text{ , } x_2 = 0,$$
$$x_3 = 6.5, x_4 = 0,$$
$$x_5 = 4.5$$

Peti korak

Ponavljanje procedure

$$x_1 = 4.5\,, x_2 = 1.5,$$
$$x_3 = 12.5, x_4 = 0,$$
$$x_5 = 0$$

$$x_1 = 4.5 - 0.167x_4 - 0.667x_5$$
$$x_2 = 1.5 + 0.167x_4 - 0.333x_5$$
$$x_3 = 12.5 - 0.833x_4 - 1.33x_5$$
$$y = 7.5 - 0.5x_4 - x_5$$

Kraj

- Uvod o Linearnom Programiranju
- Grafička metoda
- Principi Simplex metode
- Simplex metod

$$-3x_1 + 2x_2 \le 2$$
$$2x_1 - 4x_2 \le 3$$
$$x_1 + x_2 \le 6$$
$$y - 2x_1 + x_2 = 0$$

		x_1	x_2
x_3	2	-3	2
x_4	3	2	-4
x_5	6	1	1
y	0	-2	1

Drugi korak

Izbor baznog (početnog rešenja)

m *ograničenja*

N *promenjvih*

N-m *slobodnih (=0)*

m *zavisnih, ako su >0 onda je ovo rešenje i bazis*

$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$$
$$2x_1 - 4x_2 + x_4 = 3$$
$$x_1 + x_2 + x_5 = 6$$
$$y - 2x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 6$$

$$x_3 = 2 + 3x_1 - 2x_2$$
$$x_4 = 3 - 2x_1 + 4x_2$$
$$x_5 = 6 - x_1 - x_2$$
$$y = 2x_1 - x_2$$

		x_1	x_2
x_3	2	-3	2
x_4	3	2	-4
x_5	6	1	1
y	0	-2	1

	$/x_1$	x_1	x_2
x_3	$2/-3$	-3	2
x_4	$3/2$	2	-4
x_5	$6/1$	1	1
y	0	-2	1

Maksimizira *y*

Najmanji pozitivni

		x_1	x_2
x_3	2	-3	2
x_4	3	2	-4
x_5	6	1	1
y	0	-2	1

Pivotski red e_r

Pivotski elemet ili pivot e_p

Pivotska kolona e_c

		x_4	x_2
x_3	e	e_c	e
x_1	e_r	e_p	e_r
x_5	e	e_c	e
y	e	e_c	e

		x_4	x_2
x_3	$e - \frac{e_r e_c}{e_p}$	$-e_c / e_p$	$e - \frac{e_r e_c}{e_p}$
x_1	e_r / e_p	$1 / e_p$	e_r / e_p
x_5	$e - \frac{e_r e_c}{e_p}$	$-e_c / e_p$	$e - \frac{e_r e_c}{e_p}$
y	$e - \frac{e_r e_c}{e_p}$	$-e_c / e_p$	$e - \frac{e_r e_c}{e_p}$

$$2 - \frac{-3 \times 3}{2}$$

		x_1	x_2
x_3	2	-3	2
x_4	3	2	-4
x_5	6	1	1
y	0	-2	1

		x_4	x_2
x_3	6.5	1.5	-4
x_1	1.5	0.5	-2
x_5	4.5	-0.5	3
y	3	1	-3

		x_4	x_2
x_3	6.5	1.5	-4
x_1	1.5	0.5	-2
x_5	4.5	-0.5	3
y	3	1	-3

$$x_1 = 4.5 - 0.167x_4 - 0.667x_5$$

$$x_2 = 1.5 + 0.167x_4 - 0.333x_5$$

$$x_3 = 12.5 - 0.833x_4 - 1.33x_5$$

$$y = 7.5 - 0.5x_4 - x_5$$

		x_4	x_5
x_3	12.5	0.8333	1.333
x_1	4.5	0.167	0.667
x_2	1.5	-0.0167	0.333
y	7.5	0.5	1

$x_1 = 4.5\,, x_2 = 1.5,$

$x_3 = 12.5, x_4 = 0,$

$x_5 = 0$

Kraj

Problem Dijete*

Cilj držati dijetu, sa ograničenim budžetom, odnosno potrošiti što je moguće manje para.

Nutricionistički zahtevi su sledeći:

1. 2000 kcal
2. 55 g protein
3. 800 mg calcium

* Iz Linear Programming, od Vašek Chvátal

Nutricionističke vrednosti hrane

Ograničeni smo na sledeće namernice:

Hrana	Veličina porcije	Energy (kcal)	Protein (g)	Calcium (mg)	Cena po porciji
Ovsena kaša	28 g	110	4	2	$0.30
Piletina	100 g	205	32	12	$2.40
Jaja	2 kom	160	13	54	$1.30
Neobrano mleko	237 cc	160	8	285	$0.90
Pita od višanja	170 g	420	4	22	$0.20
Svinjetina i pasulj	260 g	260	14	80	$1.90

Promenjive

Promenljive predstavljaju porcije pojedinih namernica:

x_1 porcija ovsene kaše

x_2 porcija piletine

x_3 porcija jaja

x_4 porcija mleka

x_5 porcija pite od višanja

x_6 porcija svinjetine i pasulja

Promenljive i ograničenja predstavljaju porcije pojedinih namernica:

Hrana	Veličina porcije	Energy (kcal)	Protein (g)	Calcium (mg)	Cena po porciji	
Ovsena kaša	28 g	110	4	2	\$0.30	x_1
Piletina	100 g	205	32	12	\$2.40	x_2
Jaja	2 large	160	13	54	\$1.30	x_3
Neobrano mleko	237 cc	160	8	285	\$0.90	x_4
Pita od višanja	170 g	420	4	22	\$0.20	x_5
Svinjetina i pasulj	260 g	260	14	80	\$1.90	x_6

KCAL ograničenje:

$$110x_1 + 205x_2 + 160x_3 + 160x_4 + 420x_5 + 260x_6 \geq 2000$$

($110x_1$ = kcal u ovsenoj kaši)

Formulacija LP problema

Minimizovati **Kriterijum optimalnosti**

$$y=0.3x_1+2.40x_2+1.30x_3+0.90x_4+2.0x_5+1.9x_6$$

ograničenja: **Nutricionistički zahtevi**

$$\begin{aligned}110x_1+205x_2+160x_3+160x_4+420x_5+260x_6&\geq 2000\\ 4x_1+32x_2+13x_3+8x_4+4x_5+14x_6&\geq 55\\ 2x_1+12x_2+54x_3+285x_4+22x_5+80x_6&\geq 800\end{aligned}$$

Prirodno Ograničenje

$$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\geq 0$$

Rešenje

Kada se reši LP problem (upotrebom MATLAB-a) dobijamo da nas optimalan dijetetski obrok košta $6.71, pri čemu je jelovnikom obuhvaćeno:

14.24 porcija ovsene kaše

0 porcija piletine

0 porcija jaja

2.71 porcija mleka

0 porcija pite sa višnjama

0 porcija svinjetine sa pasuljem ???????

Formulacija LP problema

Minimizovati **Kriterijum optimalnosti**

$$y=0.3x_1 + 2.40x_2 + 1.30x_3 + 0.90x_4 + 2.0x_5 + 1.9x_6$$

ograničenja: **Nutricionistički zahtevi**

$$110x_1 + 205x_2 + 160x_3 + 160x_4 + 420x_5 + 260x_6 \geq 2000$$

$$4x_1 + 32x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 4x_5 + 14x_6 \geq 55$$

$$2x_1 + 12x_2 + 54x_3 + 285x_4 + 22x_5 + 80x_6 \geq 800$$

$x_6 \geq 1$ barem jedan obrok svinjetine i pasulja

Prirodno Ograničenje

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Rešenje

Kada se reši LP problem (upotrebom MATLAB-a) dobijamo da nas optimalan dijetetski obrok košta $7.78, pri čemu je jelovnikom obuhvaćeno:

12.27 porcija ovsene kaše

0 porcija piletine

0 porcija jaja

2.44 porcija mleka

0 porcija pite sa višnjama

1 porcija svinjetine sa pasuljem

Dijeta i trgovac tabletama

Za dijetu iz prethodnog primera trgovac tabletama nudi energetske, proteinske i kalcijumske pilule. Cene pilula su date na sledeći način:

y_1 cena (u dolarima) za pilulu sa energetskom vrednošću od 1 kcal

y_2 cena (u dolarima) za pilulu od 1 g proteina

y_3 cena (u dolarima) za pilulu od 1mg calcium-a

LP problem

Minimizovati **Kriterijum optimalnosti**

$$y=0.3x_1 + 2.40x_2 + 1.30x_3 + 0.90x_4 + 2.0x_5 + 1.9x_6$$

ograničenja: **Nutricionistički zahtevi**

$$\begin{array}{rrrrrrl} 110x_1 + & 205x_2 + & 160x_3 + & 160x_4 + & 420x_5 + & 260x_6 \geq & 2000 \\ 4x_1 + & 32x_2 + & 13x_3 + & 8x_4 + & 4x_5 + & 14x_6 \geq & 55 \\ 2x_1 + & 12x_2 + & 54x_3 + & 285x_4 + & 22x_5 + & 80x_6 \geq & 800 \end{array}$$

y_1 kcal
y_2 protein
y_3 calcium

x_1 = porcija ovsenih kaša: Cena nutricionističkih komponenti U jednom obroku ovsene kaše ne sme da pređe cenu same kaše u jednoj porciji $110y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 0.3$
(4 y_2 = cena proteina u ovsenoj kaši)

Trgovački pristup

Trgovački putnik želi a zaradi što je moguće više para, da maksimizira cenu pilula, vodeći računa o nutricionističkim ograničenjima. (2000 kcal, 55g protein i 800 mg calcium-a). Problem se formuliše na sledeći način:

$$\text{Maksimizirati } 2000y_1 + 55y_2 + 800y_3$$

$$\begin{aligned}
\text{Uz ograničenja} \quad & 110y_1 + 4y_2 + 2y_3 \le 0.3 \\
& 205y_1 + 32y_2 + 12y_3 \le 2.4 \\
& 160y_1 + 13y_2 + 54y_3 \le 1.3 \\
& 160y_1 + 8y_2 + 285y_3 \le 0.9 \\
& 420y_1 + 4y_2 + 22y_3 \le 2.0 \\
& 260y_1 + 14y_2 + 80y_3 \le 1.9 \\
& y_1, y_2, y_3 \ge 0
\end{aligned}$$

Rešenje

Rešavanjem ovog LP dobijaju se sledeće maksimalne cene pilula:

$0.27 za 1 kcal eneretsku pilulu

$0.00 za 1 g proteinske pilule

$0.16 za 1mg kalcijumske pilule

Ukupno = 0.27 (2000) + 0.16 (800) = $6.71

ISTO KAO I U PRETHODNOM PRIMERU

Slaba Dualnost:

Cena bilo koje moguće dijete ≥ Cene bilo koje moguće dijete pilulama

Stroga Dualnost: (Von Neumann, 1947)

Optimalna cena dijete = Optimalna cena pilula