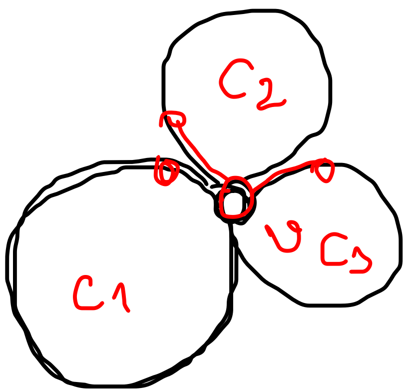
9.27. Нека је G повезан граф у ком свака грана припада јединственој контури. Доказати да је тада граф G Ојлеров.



Сваки чвор има по 2 гране за сваку контуру на којој се налази

⇒ Сви чворови парног степена

Како је G повезан, закључујемо да је Ојлеров

1. Нека је G нетривијалан граф са бар једном граном. Доказати да ако свака два чвора истог степена немају заједничког суседа, тада граф G садржи висећи чвор.

Нека је $v \in V(G)$ т.д. $d(v) = \Delta(G) = k$

Нека су $v_1, v_2, \dots, v_k$ суседи чвора v

Чворови $v_1, v_2, \dots, v_k$ имају заједничког суседа v и како по услову чворови са заједничким суседом морају бити различитог степена и важи

$$\boxed{1 \le d(v_i) \le k \text{ и } d(v_i) \ne d(v_j) \text{ за свако } i \ne j}$$

$$\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \xrightarrow{\text{бијекција}} \{1, 2, \dots, k\}$$

$\Rightarrow \exists v_i$ такав да је $d(v_i) = 1$

1. Neka je G povezan planaran graf sa m grana i $n \geq 4$ čvorova, koji ne sadrži konture dužine manje od 5. Pokazati da je $m \leq \frac{5}{3}n - \frac{10}{3}$.

10.16. Нека је G повезан планаран граф са n чворова и e грана. Ако свака област графа G садржи најмање 5 ивица, доказати да тада важи $e \leq \dfrac{1}{3}(5n - 10)$.

Решење: Пошто свака област графа садржи најмање 5 ивица важи $2e \geq 5r$. Граф G је планаран па из Ојлерове формуле добијамо $2 = r + n - e \leq \frac{2}{5}e + n - e$. Сада је $3e \leq 5n - 10$, што је и требало доказати.

$2m \geq 5r \qquad r \leq \dfrac{2m}{5}$

$2 = n + r - m \leq n + \dfrac{2m}{5} - m$

3. Нека је G граф са n чворова, где је $n \ge 3$, и $e \ge \binom{n-1}{2} + 1$ грана. Доказати да је G полухамилтонов граф.

Показаћемо да је збир степена 2 несуседна чвора $\ge n-1$

Пп. $\exists$ чворови u и v који су несуседни и за које је $d(u)+d(v) < n-1$

$$|E(G-u-v)| \overset{*}{=} |E(G)| - d(u) - d(v) > \binom{n-1}{2} + 1 - (n-1) =$$

* u, v несуседни

$$|E(G)| - \underbrace{(d(u)+d(v))}_{< n-1} > \ldots - (n-1)$$

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 - (n-1) =$$

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \underbrace{(n-1-1)}_{(n-2)} =$$

$$(n-2)\left(\frac{n-1}{2} - 1\right) = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

$$= \binom{n-2}{2} \quad ↯$$

$\Rightarrow$ У графу G за свака 2 несуседна чвора важи $d(x)+d(y) \ge n-1$

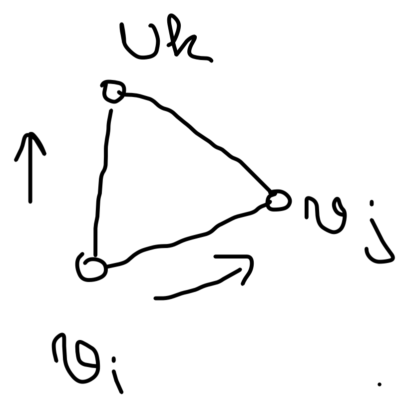
Оре

$\Longrightarrow$ G јесте полухамилтонов

6.23. Нека је дат граф G и нека је A његова матрица суседства. Посматрајмо матрицу $A^3 = \left[a_{i,j}^{(3)}\right]$. Доказати да је елемент $a_{i,i}^{(3)}$ на главној дијагонали матрице A^3 једнак двоструком броју троуглова који садрже чвор v_i у графу G.

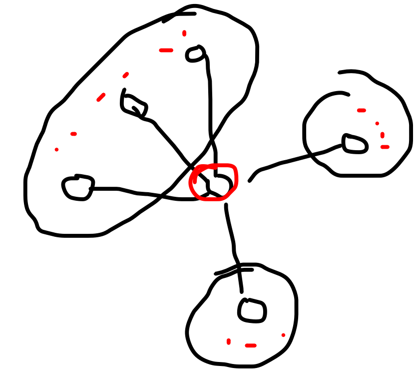
Шетње дужине 3 од v_i до v_i у графу G

Треба ићи $v_i v_j v_k v_i$ или $v_i v_k v_j v_i$



7.19. Доказати да је чвор v артикулациони чвор графа G акко постоје чворови u и w различити од v такви да сваки $u - w$ пут у графу G садржи чвор v.

Довољно је доказати тврђење за повезане графове



($\Rightarrow$) v је артикулациони чвор

$G - v$ има бар 2 компоненте повезаности G_1 и G_2

Нека је $u \in V(G_1)$, $w \in V(G_2)$

Сада сваки $u - w$ пут у G пролази кроз чвор v

($\Leftarrow$) У G постоје чворови такви да сваки $u - w$ пут у G садржи чвор v.

Чворови u и w ће бити неповезани у $G - v$

$\Rightarrow$ v је артикулациони чвор графа G

8.36. Нека је T стабло са 50 грана. Брисањем одређене гране стабло T се распада на стабла T_1 и T_2. Ако се зна да је број чворова стабла T_1 једнак броју грана стабла T_2, одредити број чворова и грана стабала T_1 и T_2.

$e = 50 \Rightarrow n = 51$

$e_1 + e_2 = e - 1 \qquad e_1 + e_2 = 49$

$n_1 = e_2 \qquad \Rightarrow e_2 = 49 - e_1$

$n_1 + n_2 = 51$

$e_2 + (e_2 - 1) = 51$

$2e_2 = 52$

$e_2 = 26 \qquad e_1 = n_1 - 1$

$n_2 = 27 \qquad n_1 = 51 - n_2$