1.5 Generatorne funkcije

Ako je brojni niz zadat rekurentnom relacijom, kao alat za rešavanje uvodimo pojam generatorne funkcije. Generatorna funkcija niza je formalni stepeni red čiji su koeficijenti članovi datog niza. Na taj način brojnom nizu pridružujemo neprekidnu funkciju.

Definicija 73 *Neka je* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ *brojni niz. Za formalni stepeni red*

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

kažemo da je generatorna funkcija niza $\{a_n\}_n$.

Kažemo da je stepeni red formalni, zato što se ne razmatraju vrednosti argumenta i funkcije, već se samo posmatraju operacije na stepenim redovima, koje se definišu uz pomoć operacija na njihovim koeficijentima. U tom smislu, konvergencija tih redova nije relevantna. Ako niz $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ sadrži konačno mnogo elemenata različitih od nule, onda je generatorna funkcija polinom.

Primer 2

brojni niz	*generatorna funkcija*	*zatvorena forma*
$(0, 0, 0, \ldots)$	0	0
$(1, 0, 0, \ldots)$	1	1
$(3, 2, 1, 0, \ldots)$	$3 + 2z + z^2$	$3 + 2z + z^2$
$(1, 1, 1, \ldots)$	$1 + z + z^2 + \ldots$	$\frac{1}{1-z}$
$(1, -1, 1, -1 \ldots)$	$1 - z + z^2 - z^3 + \ldots$	$\frac{1}{1+z}$

Zatvorenu formu za niz $(1, 1, 1, \ldots)$ *možemo izvesti na sledeći način:*

$$\begin{array}{rcllll} (1-z)(1+z+z^2+\ldots) & = & 1 & +z & +z^2 & +z^3 & +\ldots \\ & & & -z & -z^2 & -z^3 & -\ldots \\ (1-z)(1+z+z^2+\ldots) & = & 1 & & & & \end{array}$$

Odatle je $1 + z + z^2 + \ldots = \frac{1}{1-z}$.

Primetimo da je u pitanju geometrijski red koji konvergira za $|z| < 1$ *i njegova suma je u tom slučaju* $\frac{1}{1-z}$. *Kao što smo već naglasili, vrednosti argumenta* z *se ne razmatraju, a shodno tome ni konvergencija reda.*

Operacije nad generatornim funkcijama. Neka su $A(z)$ i $B(z)$ redom generatorne funkcije nizova $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ i $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$.

- skaliranje

$$cA(z) = (ca_0, ca_1, ca_2, \ldots)$$

- desno pomeranje

$$z^k A(z) = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k}, a_0, a_1, \ldots)$$

- sabiranje

$$A(z) + B(z) = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$$

- množenje

$$A(z) \cdot B(z) = \sum_{n \geq 0} \Big(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} \Big) z^n$$

- diferenciranje

$$(A(z))' = \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \right)' = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$$

Primer 3 *Kako bismo odredili niz čija je zatvorena forma generatorne funkcije $\frac{1}{(1-z)^2}$, iskoristićemo množenje redova.*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-z)^2} &= \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n \cdot \sum_{n \geq 0} z^n \\
&= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{n} 1 \cdot 1 \right) z^n = \sum_{n \geq 0} (n+1) z^n
\end{aligned}$$

Možemo zaključiti da je $a_n = n + 1$ opšti član niza čja je generatorna funkcija $\frac{1}{(1-z)^2}$.

Definicija 74 *Neka je k nenegativan prirodan broj, a u proizvoljan realan broj. Uopšteni binomni koeficijent, u oznaci $\binom{u}{k}$, je definisan sa*

$$\binom{u}{k} = \begin{cases} \frac{u \cdot (u-1) \cdot \ldots \cdot (u-k+1)}{k!} & \text{ako je } k > 0 \\ 1 & \text{ako je } k = 0. \end{cases}$$

Sada možemo pokazati da važi uopštena binomna formula. Funkcija $(1+z)^u$ je generatorna funkcija niza $(\binom{u}{0}, \binom{u}{1}, \binom{u}{2}, \ldots)$.

Teorema 75 (uopštena binomna formula) *Neka je u proizvoljan realan broj. Tada je*

$$(1 + z)^u = \sum_{n \geq 0} \binom{u}{n} z^n.$$

Zadatak 76 *Rešiti rekurentnu relaciju*

$$a_0 = -3 \qquad a_n = a_{n-1} + n, n \geq 1$$

Rešenje: Neka je $A(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$.
Množenjem jednakosti $a_n = a_{n-1} + n$ sa z^n dobijamo:

$$a_n z^n = a_{n-1} z^n + n z^n, \qquad n \geq 1.$$

Sumiranjem svih levih i desnih strana, dobijamo

$$\begin{aligned}
& \sum_{n\geq 1} a_n z^n = \sum_{n\geq 1} a_{n-1} z^n + \sum_{n\geq 1} n z^n \\
\Leftrightarrow\quad & \sum_{n\geq 0} a_n z^n - a_0 = z \cdot \sum_{n\geq 1} a_{n-1} z^{n-1} + z \cdot \sum_{n\geq 1} n z^{n-1} \\
\Leftrightarrow\quad & A(z) - a_0 = z \cdot \sum_{n\geq 0} a_n z^n + z \cdot \left(\sum_{n\geq 1} z^n \right)' \\
\Leftrightarrow\quad & A(z) + 3 = zA(z) + z \cdot \left(\frac{z}{1-z} \right)' \\
\Leftrightarrow\quad & A(z) + 3 = zA(z) + \frac{z}{(1-z)^2} \\
\Leftrightarrow\quad & (1-z)A(z) = \frac{z}{(1-z)^2} - 3 \\
\Leftrightarrow\quad & A(z) = \frac{z}{(1-z)^3} - \frac{3}{1-z} \\
\Leftrightarrow\quad & A(z) = z \sum_{n\geq 0} \binom{n+2}{2} z^n - \sum_{n\geq 0} z^n \\
\Leftrightarrow\quad & A(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(n+2)(n+1)}{2} z^{n+1} - \sum_{n\geq 0} z^n \\
\Leftrightarrow\quad & A(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)n}{2} z^n - \sum_{n\geq 0} z^n \\
\Leftrightarrow\quad & A(z) = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{(n+1)n}{2} - 3 \right) z^n \\
\Leftrightarrow\quad & A(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(n-2)(n+3)}{2} z^n \qquad \Rightarrow \boxed{a(n) = \tfrac{(n-2)(n+3)}{2}, n \geq 0}
\end{aligned}$$

Zadatak 77 *Odrediti broj rešenja jednačine*

$$x_1 + x_2 + x_2 = 19$$

ako je $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}_0$ *i* $3 \leq x_1 \leq 6$ *i* $4 \leq x_2 \leq 7$ *i* $5 \leq x_3 \leq 8$.

Rešenje. Posmatrajmo proizvod tri polinoma

$$p(x) = (x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^4 + x^5 + x^6 + x^7)(x^5 + x^6 + x^7 + x^8),$$

u kojima su eksponenti od x redom dozvoljene vrednosti za x_1, x_2 i x_3. Dati proizvod je jednak

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{x^3(1-x^4)}{1-x} \cdot \frac{x^4(1-x^4)}{1-x} \cdot \frac{x^5(x-x^4)}{1-x} \\ &= x^{12}(1-x^4)^3 \cdot \frac{1}{(1-x)^3} \\ &= x^{12}(1-3x^4+3x^8-x^{12}) \cdot \sum_{n\geq 0} \binom{n+2}{2} x^n \\ &= (x^{12} - 3x^{16} + 3x^{20} - x^{24}) \cdot \sum_{n\geq 0} \binom{n+2}{2} x^n \end{aligned}$$

Koeficijent uz x^{19} dobijamo množenjem x^{12} sa $\binom{n+2}{2}x^n$ za $n = 7$ i množenjem $-3x^{16}$ sa $\binom{n+2}{2}x^n$ za $n = 3$, što je

$$\binom{9}{2} - 3\binom{5}{2} = 36 - 30 = 6.$$

Zadatak 78 *Koristeći generatorne funkcije, odrediti broj neuređenih izbora od* m *elemenata iz skupa* $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, *ako se elementi ne mogu ponavljati (broj kombinacija bez ponavljanja od* n *elemenata klase* m*).*

U neuređenim izborima elemenata (bez ponavljanja), svaki od n elemenata je ili izabran tačno jednom ili nije izabran. Eksponenti polinoma $(1+x)$ pokazuju da li je neki element izabran ili nije.. Tako ćemo posmatrati proizvod n takvih polinoma

$$(1+x)(1+x)\ldots(1+x).$$

Broj izbora od k elemenata onda odgovara koeficijentu uz x^k. Prema binomnoj formuli, posmatrani proizvodpolinoma jednak je

$$(1+x)^n = \sum_{0\leq m\leq n} \binom{n}{m} x^m,$$

odakle je broj kombinacija od n elemenata klase m jednak $\binom{n}{m}$.

Zadatak 79 *Koristeći generatorne funkcije, odrediti broj neuređenih izbora od m elemenata iz skupa $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, ako se elementi mogu ponavljati (broj kombinacija sa ponavljanjem od n elemenata klase m).*

Ako je u neuređenim izborima eozvoljeno ponavljanje elemenata, onda se svaki element može ponavljati $0, 1, 2...$ puta, što odgovara eksponentima polinoma

$$(1 + x + x^2 + \ldots).$$

Posmatraćemo proizvod n takvih polinoma

$$\begin{aligned} p(x) &= (1 + x + x^2 + \ldots) \cdot (1 + x + x^2 + \ldots) \ldots (1 + x + x^2 + \ldots) \\ &= (1 + x + x^2 + \ldots)^n = \frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n} \\ &= \sum_{n \geq 0} \binom{-n}{m} (-1)^m x^m = \sum_{m \geq 0} \binom{n+m-1}{m} x^m. \end{aligned}$$

Za svako $0 \leq m \leq n$ koeficijent uz x^m odgovara broju kombinacija sa ponavljanjem od n elemenata klase m.

Zadatak 80 *Neka je $1 \leq n \leq m$. Koristeći generatorne funkcije, odrediti broj izbora m elemenata iz skupa $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, ako se elementi mogu ponavljati i od svake vrste je izabran bar jedan element.*

Rešenje. Posmatrajmo proizvod n polinoma

$$p(x) = (x + x^2 + x^3 + \ldots)(x + x^2 + x^3 + \ldots) \ldots (x + x^2 + x^3 + \ldots)$$

u kojima eksponenti od x u i-toj zagradi $(1 \leq i \leq n)$ odgovaraju broju mogućih kopija elementa a_i u izboru. Sada je

$$\begin{aligned} p(x) &= \left(\frac{x}{1-x}\right)^n = x^n \cdot \frac{1}{(1-x)^n} = x^n (1-x)^{-n} \\ &= x^n \sum_{l \geq 0} \binom{n+l-1}{l} x^l \\ &= \sum_{l \geq 0} \binom{n+l-1}{l} x^{n+l} \end{aligned}$$

Ako uvedemo smenu $m = n + l$, onda je

$$p(x) = \sum_{m \geq n} \binom{m-1}{m-n} x^m$$

odakle je koeficijent uz x^m jednak $\binom{m-1}{m-n}$.

Zadatak 81 *Koristeći generatorne funkcije, dokazati identitet*

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

za svako $n \in \mathbb{N}$.

Rešenje. Posmatraćemo identitet

$$(1+x)^n \cdot (1+x)^n = (1+x)^{2n}.$$

Prema binomnoj formuli, koeficijent uz x^n u razvoju stepena binoma $(1+x)^{2n}$ jednak je $\binom{2n}{n}$. Ako posmatramo polinom $p(x)$ sa leve strane i primenimo binomnu formulu, dobijamo

$$p(x) \quad = \quad \left(1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n\right) \cdot \left(1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n\right) =$$

Primetimo da je

$$p(x) = \sum_{i\geq 0} a_i x^i \cdot \sum_{i \geq 0} b_i x^i, \text{ gde je } a_i = b_i = \begin{cases} \binom{n}{i} & , i \in \{0, \ldots, n\} \\ 0 & , \text{ inače} \end{cases}$$

Prema definiciji proizvoda, dobijamo

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{m=0}^{2n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_j b_{m-j} \right) x^m \\ &= \sum_{m=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_j b_{m-j} \right) x^m + \sum_{m=n+1}^{2n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_j b_{m-j} \right) x^m \\ &= \sum_{m=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} \binom{n}{j}\binom{n}{m-j} \right) x^m + \sum_{m=n+1}^{2n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_j b_{m-j} \right) x^m \end{aligned}$$

Koeficijent uz x^n dobijamo kada u prvoj sumi posmatramo član za koji je $m = n$, a to je

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{j}. = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2.$$

Zadatak 82 *Napisati otvoreni oblik za*

$$\frac{1}{1+2z} \cdot \frac{1}{1-3z}$$

Rešenje. Treba prvo primetiti da je

$$\frac{1}{1+2z} \cdot \frac{1}{1-3z} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1+2z} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{1-3z}$$

Razvijanjem u otvoreni oblik dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+2z}\cdot\frac{1}{1-3z} &= \frac{2}{5}\sum_{n\geq 0}2^n z^n + \frac{3}{5}\sum_{n\geq 0}(-1)^n 3^n z^n\\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{2}{5}2^n z^n + \sum_{n\geq 0}\frac{3}{5}(-1)^n 3^n z^n\\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n 3^{n+1}+2^{n+1}}{5}z^n.\end{aligned}$$

Zadatak 83 *Rešiti rekurentnu relaciju*

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = 9 \qquad a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0, n \geq 2.$$

Rešenje: Neka je $A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$.
Množenjem jednakosti $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2}, n \geq 2$ sa z^n dobijamo:

$$a_n z^n - 6a_{n-1}z^{n-1} + 9a_{n-2}z^n = 0, \qquad n \geq 2.$$

Sumiranjem svih levih i desnih strana, dobijamo

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n - 6\sum_{n\geq 0} a_{n-1}z^n + 9\sum_{n\geq 0} a_{n-2}z^n = 0. \tag{1.6}$$

Primenićemo sledeće transformacije suma:

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 2} a_n z^n &= A(z) - a_0 - a_1 z = A(z) - 1 - 9z\\ \sum_{n\geq 2} a_{n-1}z^n &= z\sum_{n\geq 2} a_{n-1}z^{n-1} = z\sum_{n\geq 1} a_n z^n\\ &= z(A(z) - a_0) = z(A(z) - 1)\\ \sum_{n\geq 2} a_{n-2}z^n &= z^2\sum_{n\geq 2} a_{n-2}z^{n-2} = z^2\sum_{n\geq 0} a_n z^n = z^2 A(z)\end{aligned}$$

Zamenom u jednačinu (1.6), dobijamo

$$\begin{aligned}&\sum_{n\geq 0} a_n z^n - 6\sum_{n\geq 0} a_{n-1}z^n + 9\sum_{n\geq 0} a_{n-2}z^n = 0\\ \Leftrightarrow\ & A(z) - 1 - 9z = 6z(A(z)-1) - 9z^2 A(z)\\ \Leftrightarrow\ & (1-6z+9z^2)A(z) = 1+3z\\ \Leftrightarrow\ & A(z) = \frac{1+3z}{1-6z+9z^2} = \frac{1+3z}{(1-3z)^2} = \frac{1}{(1-3z)^2} + 3z\frac{1}{(1-3z)^2}\end{aligned}$$

Imajući u vidu da važe sledeće transformacije:

$$\begin{aligned}\binom{-2}{n} &= \tfrac{(-2)(-3)\ldots(-2-n+1)}{n!} = (-1)^n\binom{n+1}{n} = (-1)^n(n+1)\\ (1-3z)^{-2} &= \sum_{n\geq 0}\binom{-2}{n}(-3z)^n = \sum_{n\geq 0}(-1)^n(n+1)(-1)^n 3^n z^n\\ &= \sum_{n\geq 0}(n+1)3^n z^n\end{aligned}$$

Sada je jednačina (1.6) ekvivalentan sa

$$
\begin{aligned}
& A(z) = \sum_{n\geq 0}(n+1)3^n z^n + 3z\sum_{n\geq 0}(n+1)3^n z^n \\
\Leftrightarrow\quad & A(z) = \sum_{n\geq 0}(n+1)3^n z^n + \sum_{n\geq 0}(n+1)3^{n+1} z^{n+1} \\
\Leftrightarrow\quad & A(z) = \sum_{n\geq 0}(n+1)3^n z^n + \sum_{n\geq 1} n3^n z^n \\
\Leftrightarrow\quad & A(z) = \sum_{n\geq 0}(n+1)3^n z^n + \sum_{n\geq 0} n3^n z^n \\
\Leftrightarrow\quad & A(z) = \sum_{n\geq 0}((n+1)3^n + n3^n)z^n = \sum_{n\geq 0}(2n+1)3^n z^n \Rightarrow \boxed{a_n = (2n+1)3^n, n\geq 0}
\end{aligned}
$$

Zadatak 84 *Validna lozinka je niz cifara dužine n koja ima paran broj nula. Konstruisati i rešiti rekurentnu relaciju koja definiše niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, gde je a_n broj validnih lozinki dužine n.*

Rešenje. Neka je $A(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$. Tada važi sledeći niz jednakosti:

$$
\begin{aligned}
a_n &= 8a_{n-1} + 10^{n-1} \quad n\geq 1 \qquad a_0 = 1 \\
\sum_{n\geq 1} a_n z^n &= 8\sum_{n\geq 1} a_{n-1} z^n + \sum_{n\geq 1} 10^{n-1} z^n \\
-a_0 + \sum_{n\geq 0} a_n z^n &= 8z\sum_{n\geq 1} a_{n-1} z^{n-1} + z\sum_{n\geq 1} 10^{n-1} z^{n-1} \\
-1 + A(z) &= 8z\sum_{n\geq 0} a_n z^n + z\sum_{n\geq 0} 10^n z^n \\
-1 + A(z) &= 8zA(z) + z\frac{1}{1-10z} \\
(1-8z)A(z) &= \frac{1}{1-10z} + 1 \\
1 + A(z) &= 8zA(z) + z\frac{1}{1-10z} \\
A(z) &= \frac{1-9z}{(1-8z)(1-10z)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-8z} + \frac{1}{1-10z}\right) \\
A(z) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0} 8^n z^n + \sum_{n\geq 0} 10^n z^n\right) \\
A(z) &= \left(\sum_{n\geq 0} \frac{8^n + 10^n}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Odatle je

$$
a_n = \frac{8^n + 10^n}{2}.
$$

Zadatak 85 *Na koliko načina se može platiti iznos od* 210 *dinara ako je na raspolaganju* 6 *novčanica od* 10 *dinara,* 5 *od* 20 *dinara i* 4 *od* 50 *dinara?*

Rešenje. Ako sa x_1, x_2, x_3 označimo redom količinu plaćenu novčanicama od 10, 20 i 50 dinara, ona važi

$$x_1 + x_2 + x_3 = 21$$

$$x_1 \in \{0,1,2,3,4,5,6\} \quad x_2 \in \{0,2,4,6,8,10\} \quad x_3 \in \{0,5,10,15,20\}$$

$$\begin{aligned}
p(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) \\
&\cdot\ (1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10}) \\
&\cdot\ (1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20}) \\
&= \ldots + 1 \cdot (x^6 \cdot x^{15}) + x \cdot (x^{10} \cdot x^{10} + 1 \cdot x^{20}) + x^2 \cdot (x^4 \cdot x^{15}) \\
&\quad +x^3 \cdot (x^8 \cdot x^{10}) + x^4 \cdot (x^2 \cdot x^{15}) \\
&\quad +x^5 \cdot (x^6 \cdot x^{10}) + x^6 \cdot (x^{10} \cdot x^5 + 1 \cdot x^{15}) + \ldots \\
&= \ldots + 9x^{21} + \ldots
\end{aligned}$$

Napomena: Dato rešenje je korisno ako se pri rešavanju koristi softver za množenje polinoma, zato što obezbeđuje da se ne izostavi neki slučaj. Ako se zadatak rešava "peške", onda se rešavanje svodi samo na kombinatorno rezonovanje. Korišćenje generatornih funkcija ne olakšava rešavanje ovog zadatka.

Zadatak 86 *Izračunati*

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}^2.$$

Rešenje. Posmatraćemo identitet

$$(1-x)^n \cdot (1+x)^n = (1-x^2)^n.$$

Prema binomnoj formuli, dobijamo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i x^i \cdot \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j &= \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} x^{2m} \\
\sum_{l=0}^{2n} \left(\sum_{i=0}^{l} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} \right) x^l &= \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} x^{2m}
\end{aligned}$$

Posmatraćemo sa leve strane član za koji je $l = n$.
Ako je n neparan broj, onda je koeficijent uz x^n sa desne strane jednak 0 i odatle je

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = 0.$$

Ako je n paran broj, onda sa desne strane dobijamo član koji sadrži x^n ako uzmemo $m = \frac{n}{2}$ i tada je

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}^2 = (-1)^{\frac{n}{2}} \binom{n}{\frac{n}{2}}$$