DIFERENCIJABILNOST FUNKCIJE

Funkcija f je diferencijabilna nad otvorenim skupom D ako postoji izvod funkcije f za svako $x \in D$.

Ako je funkcija diferencijabilna u tački (nad otvorenim skupom D) onda je i neprekidna u toj tački (nad skupom D). Obrnuto ne važi!

1. Date su funkcije $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + x^2 \cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ \text{A}, & x = 0 \end{cases}$ i $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + x^3 \cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ \text{B}, & x = 0 \end{cases}$.

   a) Odrediti A i B tako da funkcije budu neprekidne i pokazati da je $f'(0) = g'(0) = \dfrac{1}{2}$.

   b) Pokazati da je $g'(x)$ neprekidna funkcija, a da $f'(x)$ ima prekid za $x = 0$.

   c) Da li postoje okoline tačke $x = 0$ u kojima su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ monotone? (Posmatrati nizove $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ date sa $a_n = \dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi}$ i $b_n = \dfrac{1}{\dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi}$.)

a) $f(0) = A = \lim\limits_{x \to 0}(\dfrac{x}{2} + x^2 \cos\dfrac{1}{x}) = 0$

$g(0) = B = \lim\limits_{x \to 0}(\dfrac{x}{2} + x^3 \cos\dfrac{1}{x}) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{2} + 2x\cos\frac{1}{x} + x^2(-\sin\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{2} + 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}, \text{ za } x \neq 0$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} + 3x^2\cos\frac{1}{x} + x\sin\frac{1}{x}, \text{ za } x \neq 0$$

$\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ ne postoji, jer ne postoji $\lim\limits_{x \to 0} \sin\dfrac{1}{x}$, pa zato po definiciji tražimo izvod funkcije f u tački $x = 0$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta x}{2} + \Delta x^2 \cos\dfrac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(\frac{1}{2} + \Delta x \cos\frac{1}{\Delta x}) = \frac{1}{2}$$

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} g'(x) = \lim_{x \to 0}(\frac{1}{2} + 3x^2\cos\frac{1}{x} + x\sin\frac{1}{x}) = \frac{1}{2}$$

b) Kako je $g'(0)=\lim\limits_{x\to 0} g'(x)$ funkcija $g'(x)$ je neprekidna u $x=0$.

Pošto $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{2}+2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x})$ ne postoji, jer ne postoji $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$, funkcija $f'(x)$ ima prekid u $x=0$.

c) Funkcija $g'(x)$ je neprekidna za $x=0$ i $g'(0)=\frac{1}{2}>0 \Rightarrow$ postoji okolina tačke $x=0$ u kojoj je $g'(x)>0$, tj. okolina u kojoj funkcija $g(x)$ monotono raste.

Za $f(x)$: Svi članovi nizova $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ su pozitivni i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$.

$$f'(a_n)=\frac{1}{2}+2a_n\cos\frac{1}{a_n}+\sin\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}+\frac{2}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\cos(\frac{\pi}{2}+2n\pi)+\sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}>0$$

$$f'(b_n)=\frac{1}{2}+2b_n\cos\frac{1}{b_n}+\sin\frac{1}{b_n}=\frac{1}{2}+\frac{2}{\frac{3\pi}{2}+2n\pi}\cos(\frac{3\pi}{2}+2n\pi)+\sin(\frac{3\pi}{2}+2n\pi)=-\frac{1}{2}<0$$

U svakoj okolini tačke $x=0$ postoje tačke u kojima je $f'(x)>0$ i tačke u kojima je $f'(x)<0$ pa ne postoji okolina tačke $x=0$ u kojoj je funkcija $f(x)$ monotona.

2. Funkcija f je data sa $f(x)=\begin{cases} Ax+B, & x\le 0 \\ \frac{x}{3}+x^2\sin\frac{1}{7x}, & x>0 \end{cases}$.

Odrediti A i B tako da funkcija $f(x)$ bude diferencijabilna za svako x. Da li je funkcija rastuća u tački $x=0$? Da li je funkcija monotona u nekoj okolini tačke $x=0$?

Da bi funkcija bila diferencijabilna, mora biti neprekidna u tački $x=0$ i mora postojati $f'(0)$.

$$\lim_{x\to 0^+}(\frac{x}{3}+x^2\sin\frac{1}{7x})=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+}(\frac{x}{3}+x^2\sin\frac{1}{7x})=0=f(0)=B \quad\Rightarrow B=0$$

$$f'(x)=\begin{cases} A, & x\le 0 \\ \frac{1}{3}+2x\sin\frac{1}{7x}+x^2\cos\frac{1}{7x}\cdot\frac{1}{7}(-\frac{1}{x^2}), & x>0 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} A & , \ x\le 0 \\ \dfrac{1}{3}+2x\sin\dfrac{1}{7x}-\dfrac{1}{7}\cos\dfrac{1}{7x} & , \ x>0 \end{cases}$$

$$f'(0)=A$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{3}+2x\sin\frac{1}{7x}-\frac{1}{7}\cos\frac{1}{7x}\right)$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$ ne postoji, jer ne postoji $\lim\limits_{x\to 0^+}\cos\dfrac{1}{7x}$, pa zato desni izvod u tački $x=0$ tražimo po definiciji.

$$f'(0^+)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0^+ +\Delta x)-f(0^+)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\dfrac{\Delta x}{3}+(\Delta x)^2\sin\dfrac{1}{7\Delta x}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\left(\frac{1}{3}+\Delta x\sin\frac{1}{7\Delta x}\right)=\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ A=\frac{1}{3}$$

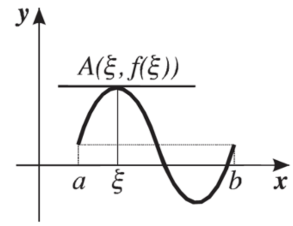
- $f'(0)=\dfrac{1}{3}>0\ \Rightarrow$ funkcija je rastuća u tački $x=0$
- $x\in(-\varepsilon,0)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{3}>0$
- $x\in(0,\varepsilon)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{3}+2x\sin\dfrac{1}{7x}-\dfrac{1}{7}\cos\dfrac{1}{7x}\ge\dfrac{1}{3}+2\varepsilon\cdot(-1)-\dfrac{1}{7}\cdot 1=\dfrac{4}{21}-2\varepsilon>0$ za $\varepsilon<\dfrac{2}{21}$

$\Rightarrow$ Postoji okolina tačke $x=0$ u kojoj je funkcija $f(x)$ monotono rastuća jer je $f'(x)>0$ za $x\in(-\varepsilon,\varepsilon)$.

OSNOVNE TEOREME DIFERENCIJALNOG RAČUNA

Rolova teorema

Ako je funkcija $f:[a,b] \to R$ neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a,b]$, ima izvod nad otvorenim intervalom (a,b) i ako je $f(a)=f(b)$, tada postoji bar jedna tačka $\xi \in (a,b)$, takva da je $f'(\xi)=0$.



1. Neka je $f: R \to R$ dva puta diferencijabilna funkcija, sa osobinom da je $f'(a)=f'(b)=0$ i $f'(x) \neq 0$ za $x \in (a,b)$.

a) Dokazati da funkcija f ima najviše jednu nulu na intervalu (a,b).

b) Dokazati da jednačina $f''(x)=0$ ima bar jedno rešenje na intervalu (a,b).

a) Pretpostavićemo suprotno, da funkcija f ima dve nule na intervalu (a,b), tj. da postoje $c,d \in (a,b)$ takve da je $f(c)=f(d)=0$.

Tada na osnovu Rolove teoreme postoji $\xi \in (c,d) \subset (a,b)$ takvo da je $f'(\xi)=0$, što je kontradikcija sa uslovom zadatka $f'(x) \neq 0$ za $x \in (a,b)$.

Dakle, funkcija f može da ima najviše jednu nulu u intervalu (a,b).

b) $f'(a)=f'(b)$ i f' je diferencijabilna (neprekidna jer je funkcija f dva puta diferencijabilna), pa ako primenimo Rolovu teoremu na funkciju $f'(x)$ $\Rightarrow$ postoji $\xi \in (a,b)$ takvo da je $f''(\xi)=0$.

2. Pokazati da jednačina $a_n \cos(nx) + a_{n-1}\cos((n-1)x) + ... + a_1 \cos x = 0$ ima bar jedno rešenje na intervalu $(0,\pi)$.

Funkcija

$$F(x) = \frac{a_n}{n}\sin(nx) + \frac{a_{n-1}}{n-1}\sin((n-1)x) + ... + a_1 \sin x$$

zadovoljava uslove Rolove teoreme
(funkcija $F(x)$ je neprekidna nad $[0,\pi]$, diferencijabilna nad $(0,\pi)$ i $F(0)=F(\pi)=0$)
odakle sledi da postoji $\xi \in (0,\pi)$ za koje je $F'(\xi)=0$, tj.

$$F'(\xi) = a_n \cos(n\xi) + a_{n-1}\cos((n-1)\xi) + ... + a_1 \cos\xi = 0,$$

što je trebalo i dokazati. ☺