Metod varijacije konstanti

Primer

Naći opšte rešenje jednačine $y''' - y'' = e^x$. $e^{0\cdot x}, xe^{0\cdot x}, e^{1\cdot x}$ Tj. $1, x, e^x$

1) $y''' - y'' = 0 \;\Rightarrow\; k^3 - k^2 = 0 \;\Rightarrow\; k_1 = k_2 = 0,\ k_3 = 1$

$(y = e^{kx})$ $\quad k^2(k-1) = 0 \quad \Rightarrow\; y_h(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x$

Metodom varijacije konstanti dobijamo sistem $y_p = c_1(x) + c_2(x)\cdot x + c_3(x)e^x$

$$
\begin{aligned}
c_1'(x)\cdot 1 + c_2'(x)x + c_3'(x)e^x &= 0\\
\cancel{c_1'(x)\cdot 0} + c_2'(x)\cdot 1 + c_3'(x)e^x &= 0\\
\cancel{c_2'(x)\cdot 0} \quad c_3'(x)e^x &= e^x
\end{aligned}
$$

$y_p = (x-2)e^x - \cancel{xe^x} + \cancel{xe^x}$

čijim rešavanjem i integracijom rešenja dobijamo

$$
\begin{aligned}
c_3'(x) &= 1 \qquad c_3(x) = \int 1\cdot dx && \Rightarrow\; c_3(x) = x + C_3\\
c_2'(x) &= -c_3'(x)e^x = -e^x \qquad c_2(x) = -\int e^x dx && \Rightarrow\; c_2(x) = -e^x + C_2\\
c_1'(x) &= -c_2'(x)x - c_3'(x)e^x = (x-1)e^x && \Rightarrow\; c_1(x) = (x-2)e^x + C_1
\end{aligned}
$$

Jedno partikularno rešenje nehomogene jednačine je

$$y_p(x) = (x-2)e^x$$

$\int (x-1)e^x dx = \left\{ x-1 = u \quad dv = e^x dx \quad \vdots \right\}$

pa je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + (x-2)e^x.$$

Metod jednakih koeficijenata

Ako je jednačina linearna sa konstantnim koeficijentima oblika

$$\boxed{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x)}$$

gde je funkcija $f(x)$ "specijalnog oblika"

$$f(x) = e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x),$$

? $\alpha+\beta i \in$ KKJ. $\notin$ $\Rightarrow r=0$

partikularno rešenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = x^r e^{\alpha x}(T_k(x)\cos\beta x + R_k(x)\sin\beta x)$$

pri čemu je

- $k = \max\{n, m\}$, $n = \deg P(x)$, $m = \deg Q(x)$, ako su oba polinoma različita od nula polinoma (ako je P(x) nula polinom onda je $k = m$, a ako je $Q(x)$ nula polinom onda je $k = n$)
- r je višestrukost $\alpha + i\beta$ kao korena karakteristične jednačine odgovarajuće homogene jednačine

$$y'' + 2y' + y = \underbrace{x}_{f_1} + \underbrace{e^x}_{f_2}$$

1) $y'' + 2y' + y = 0$

$k^2 + 2k + 1 = 0$

$(k+1)^2 = 0$

$k_1 = k_2 = -1$

$$\boxed{y_h = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot x e^{-x}}$$

2) $y_p = ?$ $\quad y'' + 2y' + y = x$

$x = \cancel{e^{\alpha x}} \cdot \underbrace{[P(x) \cdot \overbrace{\cos\beta x}^{1} + Q(x) \overbrace{\sin\beta x}^{0}]}_{x}$

$\alpha = 0$

$\beta = 0$ $\quad P_n(x) = x \quad n = 1 \quad k = 1$

$\alpha + \beta i = 0 \notin \{k\} \rightarrow r = 0$

$y_p = x^r e^{\alpha x}[T_k(x)\cos\beta x + R_k(x)\sin\beta x]$

$= x^0 \cdot e^{0 \cdot x}[(Ax+B) \underbrace{\cos 0}_{1} + \cancel{(Cx+D)} \underbrace{\sin 0}_{0}]$

$y_p = Ax + B$, $A, B = ?$

$y_p' = A$

$y_p'' = 0$ $\quad$ $\circledast$: $2A + Ax + B = x$

$A = 1$

$2A + B = 0$

$\Rightarrow B = -2$

$$\boxed{y_p = x - 2}$$

4) $\boxed{y = y_h + y_p + y_{p_1}}$

3) $y'' + 2y' + y = e^x$

$y_{p_1} = ?$ $\quad e^x = e^{\alpha x}[\underbrace{P(x)}_{1}\underbrace{\cos\beta x}_{1} + \cancel{Q(x)\underbrace{\sin\beta x}_{0}}]$

$\alpha = 1$

$\beta = 0$ $\quad T_k(x), S_k(x)$ — const.

$\alpha + \beta i = 1 \Rightarrow r = 0$

$y_{p_1} = Ae^x$ $\quad y_{p_1}' = y_{p_1}'' = Ae^x$

$A\cancel{e^x} + 2A\cancel{e^x} + A\cancel{e^x} = \cancel{e^x}$

$4A = 1$

$A = \frac{1}{4}$

$y_{p_1} = \frac{1}{4}e^x$

P

Metod jednakih koeficijenata

Korisna je činjenica: ako je

$$L_n[y] = \underbrace{f_1(x) + f_2(x)}_{\text{N.P.O.}}$$

i ako je

$y_1(x)$ partikularno rešenje jednačine $\underline{L_n[y] = f_1(x)}$ nad I,

$y_2(x)$ partikularno rešenje jednačine $\underline{L_n[y] = f_2(x)}$ nad I,

tada je

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

nad intervalom I partikularno rešenje jednačine

$$L_n[y] = f_1(x) + f_2(x)$$

Primer

Odrediti opšte rešenja jednačine $y''' - y'' = e^x + \sin x + x.$

Rešenje. Opšte rešenje homogenog dela jednačine je

$$y_h(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x.$$

Jedno partikularno rešenje jednačine $y''' - y'' = e^x$ je

$$y_{p_1}(x) = xe^x.$$

Jedno partikularno rešenje jednačine $y''' - y'' = \sin x$ je

$$y_{p_2}(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x).$$

Jedno partikularno rešenje jednačine $y''' - y'' = x$ je

$$y_{p_3}(x) = -\frac{1}{6}x^2(x+3).$$

Opšte rešenje je

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + xe^x + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) - \frac{1}{6}x^2(x+3).$$

$e^{\alpha x}[P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x]$

1) $y''' - y'' = 0$

$k^3 - k^2 = 0$

$k^2(k-1) = 0$

$k_1 = k_2 = 0, \; k_3 = 1$

$e^{0\cdot x}, \; xe^{0\cdot x}, \; e^x$

2) $y''' - y'' = e^x$

$\alpha = 1 \quad \beta = 0 \quad P(x) = 1$

$\alpha + \beta i = 1$

$r = 1$

$y_{p_1} = x\, e^x \cdot A$

$\vdots$

$A = 1$

3) $y''' - y'' = \sin x$

$\alpha = 0 \quad \beta = 1 \quad Q(x) = 1$

$\alpha + \beta i = i \quad P(x) = 0$

$r = 0$

$y_{p_2} = A\cos x + B\sin x$

$y_{p_2}' = -A\sin x + B\cos x$

$y_{p_2}'' =$

$y_{p_2}''' =$

$\vdots$

$A = B = \frac{1}{2}$

4) $y''' - y'' = x$

$\alpha = 0 \quad P_n(x) = x \quad n = 1$

$\beta = 0 \quad k = 1$

$\alpha + \beta i = 0$

$r = 2$

$y_{p_3} = x^2[Ax + B]$

$$y''' - \frac{1}{2}y'' + \frac{1}{2}y' - y = e^{2x}$$

$$\underbrace{1}_{\pm 1}\cdot \overbrace{k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k - \underbrace{1}_{\pm 1}}^{P} = 0$$

	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
1	1	$\frac{1}{2}$	1	0

$\{\pm 1\}$ $\quad P(1) = 0$

$-\frac{15}{4}$

$\boxed{P}$

$$(k-1)\left(k^2 + \frac{1}{2}k + 1\right) = 0$$

$$k_1 = 1 \qquad k_{2,3} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 4}}{2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{15}\, i}{2} = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{15}}{4} i$$

$$y_h = c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cos\frac{\sqrt{15}}{4}x + c_3 \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \sin\frac{\sqrt{15}}{4}x$$

2) $y_p = ?$ $\qquad e^{2x} = e^{\alpha x}\left[P(x)\underbrace{\cos\beta x}_{1} + \cancel{Q(x)\sin\beta x}\right]$

$\alpha = 2 \quad \beta = 0 \quad \underbrace{P(x) = 1}_{T_k,\ R_k \text{ — const.}} \qquad \alpha + \beta i = 2 \notin kk_3 \quad r = 0$

$$y_p = A \cdot e^{2x}$$

A - ?

3) $y = y_h + y_p$

$$8y''' - 12y'' + 3y' + y = e^{x}(1+x)$$

$\boxed{P}$

Ojlerova jednačina

Ojlerova jednačina je oblika

$$\boxed{(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = f(x)}$$

gde su a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ konstante i smenom

$$ax+b = e^t, ax+b > 0 \quad (ax+b = -e^t, ax+b < 0)$$

svodi se na jednačinu sa konstantnim koeficijentima.

Primer

Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$x^3y''' + x^2y'' + 3xy - 8y = 0.$$

Za $x > 0$ smenom

$$x = e^t \quad \Rightarrow \quad y'_x = y'_t t'_x = \frac{1}{x} y'_t,$$

$$y''_x = -\frac{1}{x^2} y'_t + \frac{1}{x^2} y''_t = \frac{1}{x^2}(y''_t - y'_t)$$

$$y'''_x = -\frac{2}{x^3}(y''_t - y'_t) + \frac{1}{x^3}(y'''_t - y''_t) = \frac{1}{x^3}(y'''_t - 3y''_t + 2y'_t)$$

dobija se linearna diferencijalna jednačina $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0.$ čija karakteristična jednačina $r^3 - 2r^2 + 4r - 8$ ima korene $r_1 = 2$, $r_2 = 2i$, $r_3 = -2i$ pa je njen fundamentalni skup rešenja $\{e^{2t}, \sin 2t, \cos 2t\}$ tako da je fundamentalni skup rešenja Ojlerove jednačine $\{x^2, \sin(2\ln|x|), \cos(2\ln|x|)\}$, $x \neq 0$ pa je opšte rešenje $\quad y = c_1x^2 + c_2\sin(2\ln|x|) + c_3\cos(2\ln|x|).$