LOPITALOVO PRAVILO

Za nalaženje graničnih vrednosti neodređenih oblika „$\frac{0}{0}$" i „$\frac{\infty}{\infty}$" kao vrlo korisnim se pokazalo korišćenje Lopitalovog pravila.

Količnik $\frac{f(x)}{g(x)}$ ima neodređeni oblik „$\frac{0}{0}$" kada $x \to a$, ako važi da je $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, odnosno neodređeni oblik „$\frac{\infty}{\infty}$" ako $f(x) \to \pm\infty$ i $g(x) \to \pm\infty$ kada $x \to a$.

Za nalaženje granične vrednosti neodređenog oblika „$\frac{0}{0}$" i „$\frac{\infty}{\infty}$" treba proveriti da li granična vrednost $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ postoji ili ne i tu se često koristi Lopitalovo pravilo.

Neka su funkcije $f:(a,b)\to R$ i $g:(a,b)\to R$ diferencijabilne nad otvorenim intervalom (a,b) i pri tom je $g'(x)\neq 0$, $x\in(a,b)$ i neka je

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0 \qquad (\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) = 0).$$

Ako postoji $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ $(\lim_{x\to b^-}\frac{f'(x)}{g'(x)} = B)$ tada postoji i $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ $(\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)})$ i važi jednakost

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad (\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-}\frac{f'(x)}{g'(x)} = B).$$

Ako $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \pm\infty$, kada $x\to a^+$ (kada $x\to b^-$), tada i $\frac{f(x)}{g(x)} \to \pm\infty$, kada $x\to a^+$ (kada $x\to b^-$).

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1} \overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{\text{Л.П.}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{e^x+\frac{1}{e^x}}{\frac{-1}{e-x}+1} = \frac{1+1}{-\frac{1}{e}+\frac{e}{e}} = \frac{2e}{e-1}$$

2. Naći $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^{ax}}$, $a>0$, $n>0$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^{ax}} \overset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\underset{\text{Л.П.}}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{n\cdot x^{n-1}}{a\cdot e^{ax}} = \frac{n}{a}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-1}}{e^{ax}} \overset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\underset{\text{Л.П.}}{=}} \frac{n}{a}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{(n-1)x^{n-2}}{a\cdot e^{ax}} = \frac{n(n-1)}{a^2}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-2}}{e^{ax}} =$$

$$= \ldots\ldots = \frac{n!}{a^n}\cdot\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{ax}}}_{=0} = 0$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{-100}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \overset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\underset{\text{Л.П.}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{-100\cdot x^{-101}}{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot(-\frac{2}{x^3})} = 50\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^{-98}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \overset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\underset{\text{Л.П.}}{=}} 50\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-98\cdot x^{-99}}{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot(-\frac{2}{x^3})} =$$

Л.П. || „$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3}}{100x^{99}} = \frac{1}{50}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{102}} \times$$

102 > 100
ГОРЕ ЈЕ
НЕГО ШТО
ЈЕ БИЛО

$$= 50\cdot 49\cdot \lim_{x\to 0}\frac{x^{-96}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \underset{\text{Л.П.}}{\overset{\text{47 пута}}{=}} \dots\dots = 50!\cdot \lim_{x\to 0}\frac{x^{-2}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \underset{\text{Л.П.}}{\overset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}} 50!\cdot \lim_{x\to 0}\frac{-\cancel{\frac{2}{x^3}}}{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\cancel{\frac{2}{x^3}}\right)} = 50!\cdot \lim_{x\to 0} \underbrace{e^{-\frac{1}{x^2}}}_{=0} = 0$$

4. $$\lim_{x\to a^+}\frac{\cos x\cdot \ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)} = \cos a\cdot \lim_{x\to a^+}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)} \underset{\text{Л.П.}}{\overset{\text{„}\frac{-\infty}{-\infty}\text{"}}{=}} \cos a\cdot \lim_{x\to a^+}\frac{\frac{1}{x-a}}{\frac{e^x}{e^x-e^a}} =$$

„$\ln 0^+$" $= -\infty$

„$e^{-\infty}$" $= 0$

$$= \cos a\cdot \lim_{x\to a^+}\frac{e^x-e^a}{\underbrace{e^x}_{e^a}(x-a)} = \frac{\cos a}{e^a}\lim_{x\to a^+}\frac{e^x-e^a}{x-a} \underset{\text{Л.П.}}{\overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \frac{\cos a}{e^a}\lim_{x\to a^+}e^x = \frac{\cos a}{\cancel{e^a}}\cdot \cancel{e^a} = \cos a$$

5. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} \text{ „}= \frac{\infty}{\infty}\text{"} \underset{\text{Л.П.}}{\cancel{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}$$ НЕ ПОСТОЈИ

$-1 \le \sin x \le 1$

Neka je $f(x)=x+\sin x$, a $g(x)=x$. Ovde ne možemo da primenimo Lopitalovo pravilo jer $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty}(1+\cos x)$ ne postoji.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1, \text{ jer je } \boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0}$$

„$\frac{1}{\infty}\cdot$ ограничено" $=$ „$0\cdot$ ограничено" $= 0$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

I ostali neodređeni izrazi oblika „$0\cdot\infty$", „$\infty-\infty$", „0^0", „∞^0" i „1^∞" mogu se određivati koristeći Lopitalovo pravilo (ukoliko su zadovoljeni uslovi za njegovu primenu).

a) „$0\cdot\infty$"

Ako je $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ i $g(x)\to\pm\infty$ kada $x\to a$, tada je

$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$, a to je neodređeni izraz oblika "$\frac{0}{0}$", ili

$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{1/f(x)}$, a to je neodređeni izraz oblika "$\frac{\infty}{\infty}$".

6. $$\lim_{x\to 1}\ln(x-1)\cdot\ln x \overset{\text{„}-\infty\cdot 0\text{"}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}} \underset{\text{Л.П.}}{\overset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 1}\frac{\underset{1}{x}\cdot\ln^2 x}{x-1} = -\lim_{x\to 1}\frac{\ln^2 x}{x-1} \underset{\text{Л.П.}}{\overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} -\lim_{x\to 1}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$\underset{\text{Л.П.}}{\overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} -\lim_{x\to 1}\frac{\ln^2 x + \cancel{x}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{\cancel{x}}}{1} = -\lim_{x\to 1}(\ln^2 x + 2\ln x) = 0$$

b) „$\infty - \infty$"

$(f(x) \to \pm\infty$ kada $x \to a$ i $g(x) \to \pm\infty$ kada $x \to a)$

$$\lim_{x\to a}\left[\, f(x) - g(x)\,\right] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\left[\, 1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right]$$

Ako je $\lim\limits_{x\to a}\left[\, 1 - \dfrac{g(x)}{f(x)} \right] = 0$ slučaj se svodi na prethodni.

Ako je $\lim\limits_{x\to a}\left[\, 1 - \dfrac{g(x)}{f(x)} \right] \neq 0$, to $f(x) - g(x) \to \pm\infty$, kada $x \to a$.

$\ln e = 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \left(\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)^{x} = \infty$

7. $$\lim_{x\to\infty}\left(x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \overset{\text{„}\infty-\infty\text{"}}{=} \lim_{x\to\infty} x\left[1 - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \text{„}\infty\cdot 0\text{"}$$

- $$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \overset{\text{„}\infty\cdot 0\text{"}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{\text{Л.П.}}{\overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\cancel{\frac{1}{x^2}}\right)}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} x\left[1 - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{1 - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{\text{Л.П.}}{\overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{-\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x^2}} \underset{\text{Л.П.}}{\overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{-1}{(x+1)^2}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-x(x+1)+x^2}{x^2(x+1)^2}}{-\frac{2}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{2x^2(x+1)^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 \;\;\backslash : x^2}{2(x^2+2x+1) \;/ : x^2} = \frac{1}{2}$$

c) „1^{∞}", „0^{0}" i „∞^{0}"

Neka je $\phi(x) = f(x)^{g(x)}$, $f(x) > 0$ (u nekoj okolini tačke a). Ako je $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ neodređen izraz oblika:

- „0^0" $(\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0)$
- „∞^0" $(f(x) \to \infty$ kada $x \to a$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0)$ ili
- „1^{∞}" $(\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ i $g(x) \to \pm\infty$ kada $x \to a$),

tada je $\lim\limits_{x\to a}\ln\phi(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)$ neodređen izraz oblika „$0\cdot\infty$" ili „$\infty\cdot 0$".

8. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$ $=$ „1^{∞}"

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

$$y=\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y=\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}=\frac{1}{x}\cdot\left[\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)-1\right]$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left[\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)-1\right] \overset{„\infty\cdot 0"}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \underset{\text{Л.П.}}{\overset{„\frac{0}{0}"}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=$$

$\frac{1+x}{1+x}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cancel{1}-\cancel{1}-x}{1+x}}{x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot(1+x)}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y=-\frac{1}{2}\Rightarrow \ln\lim_{x\to 0}y=-\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0}y=e^{-\frac{1}{2}}}$$

9. $\lim_{x\to 0^+}x^{\frac{3}{4+\ln x}}$ $=$ „0^{0}"

$$y=x^{\frac{3}{4+\ln x}}\Rightarrow \ln y=\frac{3}{4+\ln x}\cdot\ln x$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=\lim_{x\to 0^+}\frac{3\ln x}{4+\ln x} \underset{\text{Л.П.}}{\overset{„\frac{\infty}{\infty}"}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{3\cdot\cancel{\frac{1}{x}}}{\cancel{\frac{1}{x}}}=3$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=3\Rightarrow \ln\lim_{x\to 0^+}y=3\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0^+}y=e^{3}}$$

10. $\lim_{x\to 0^+}(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}$ $=$ „∞^{0}"

„$ctg\,0$" $=$ „$\frac{\cos 0}{\sin 0}$" $=$ „$\frac{1}{0}$" $=$ „∞"

$$y=(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}\Rightarrow \ln y=\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(ctgx)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(ctgx)}{\ln x} \underset{\text{Л.П.}}{\overset{„\frac{\infty}{\infty}"}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{ctgx}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\frac{\underbrace{\cos x}_{1}}{\cancel{\sin x}}\cdot\sin^{\cancel{2}} x}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}}=-1$$

Користан лимес

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=-1\Rightarrow \ln\lim_{x\to 0^+}y=-1\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0^+}y=e^{-1}}$$

$ctgx=\frac{\cos x}{\sin x}$

$(ctgx)'=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{-1}{\sin^2 x}$ ☺