2.1 Povezanost

U matematičkom modelovanja realnih problema često se javlja potreba za razmatranjem povezanih kretanja kroz graf duž njegovih grana. U tu svrhu uvodimo pojam šetnje po grafu.

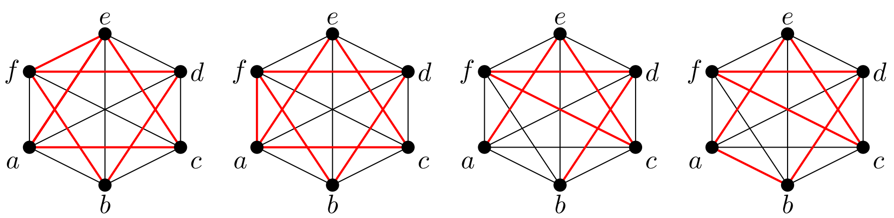
Definicija 98 *Neka je* $G = (V, E, \psi)$ *multigraf. Neka su* $e_1, \ldots, e_n \in E$ *i* $v_0, \ldots, v_n$ *proizvoljne grane i čvorovi sa osobinom* $\psi(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$, *za svako* $i \in \{1, \ldots, n\}$. *Tada izdvajamo sledeće nizove čvorova i grana:*

1. v_0v_n*-šetnja:* $v_0e_1v_1e_2\ldots e_nv_n$
2. v_0v_n*-staza:* $v_0e_1v_1e_2\ldots e_nv_n$ *i* $e_i \neq e_j$ $i \neq j$
3. v_0v_n*-put:* $v_0e_1v_1e_2\ldots e_nv_n$ *i* $v_i \neq v_j$, $i \neq j$ *(osim eventualno* $v_0 = v_n$*)*
4. *kontura:* $v_0e_1v_1e_2\ldots e_nv_n$ *i* $v_i \neq v_j$, *za* $i \neq j$, *i* $v_0 = v_n$

U prostom grafu, koji nema paralelnih grana, dovoljno je pisati samo čvorove u nizu, jer oni na jedinstven način određuju njima incidentne grane.

Primer 11 *Za graf* K_6 *na slici, dajemo po jedan primer za svaku kategoriju.*

1. *šetnja:* $aecaefdbf$;
2. *staza:* $aecafdbf$;
3. *put:* $aecfdb$;
4. *kontura:* $aecfdba$.



$aecaefdbf$ $aecafdbf$ $aecfdb$ $aecfdba$

Teorema 99 *Ako u grafu postoji uv-šetnja (staza), onda postoji i uv-put.*

Definicija 100 *Neka je $G = (V, E)$ prost graf. Kažemo da su $u, v \in V$, $u \neq v$, povezani ako postoji uv-put u grafu G. Svaki čvor je povezan sam sa sobom. Kažemo da je graf G povezan akko za svako $u, v \in V$ važi da su u i v povezani.*

Lemma 101 *Relacija "je povezan sa" je relacija ekvivalencije na skupu čvorova grafa.*

Dokaz.

(R) Refleksivnost sledi direktno iz definicije.

(S) Neka je $u \neq v$ i neka uv-put u grafu oblika $uv_0 \dots v_{n-1}v$. Tada je $vv_{n-1} \dots v_0$ vu-put u grafu.

(T) Pretpostavimo da u grafu G postoje uv-put i vw-put:

$$uu_0 \dots u_{l-1}v \quad \text{i} \quad vv_0 \dots v_{n-1}w.$$

Tada je sa

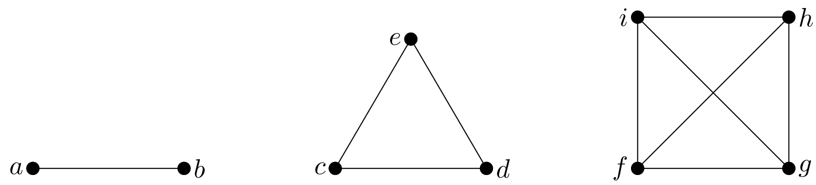
$$uu_0 \dots u_{l-1}vv_0 \dots v_{n-1}w$$

data jedna uw-šetnja (koja ne mora biti put). Ako u grafu postoji uw-šetnja, onda postoji i uw-put.

□

Relacija ekvivalencije "je povezan sa" na skupu čvorova $V(G)$ grafa deli taj skup na klase ekvivalencije. Svaka komponenta povezanosti indukuje podgraf koji nazivamo komponentom povezanosti tog grafa. Komponenta povezanosti je maksimalan povezan podgraf grafa, tj. svaka komponenta povezanosti grafa je podgraf koji nije sadržan ni u jednom drugom povezanom podgrafu istog grafa. Broj komponenti povezanosti grafa G, u oznaci $\omega(G)$, jednak je broju klasa ekvivalencije u odnosu na relaciju povezanosti.

Primer 12 *Neka je $G = (\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}, E)$ graf na slici.*



Broj komponenti povezanosti datog grafa je $\omega(G) = 3$. Komponente povezanosti su indukovane skupovima čvorova $\{a, b\}$, $\{c, d, e\}$ i $\{f, g, h, i\}$.

Lemma 102 *Graf $G = (V, E)$ je povezan akko $\omega(G) = 1$.*

Dokaz. G je povezan akko za svaka dva čvora $u, v \in V$ postoji uv-put u G. To dalje važi akko svi čvorovi pripadaju istoj klasi ekvivalencije u odnosu na relaciju "je povezan sa", što važi akko $\omega(G) = 1$. □

Teorema 103 *Neka je $n \geq 2$.*
Graf sa n čvorova i manje od $n - 1$ grana nije povezan.

Dokaz: Indukcijom po n.
Baza $n = 2$: Graf sa dva čvora i 0 grana nije povezan.
Induktivna pretpostavka: Pretpostavimo da graf sa n čvorova i manje od $n - 1$ grana nije povezan.
Induktivni korak: Neka je G graf sa $n + 1$ čvorova i manje od n grana. Pokazaćemo da on nije povezan. Na osnovu Posledice 93, postoji čvor v stepena $d_G(v) \leq 1$. Ako je $d_G(v) = 0$, onda je broj komponenti povezanosti bar dva i graf nije povezan. Ako je $d_G(v) = 1$, onda graf G ima jednak broj komponenti povezanosti kao i graf $G' = G - v$. Kako je $G' = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{\{u, v\}\})$ za neki čvor $u \in V$, G' ima n čvorova i manje od $n - 1$ grana. Zaključujemo prema induktivnoj pretpostavci da G' nije povezan. Kako G i G' imaju jednak broj komponenti povezanosti, onda ni G nije povezan.

Teorema 104 *Neka je $G = (V, E)$ povezan i neka je C kontura u grafu G. Ako je e grana konture, onda je $G - e$ povezan.*

Dokaz: Izaberimo proizvoljno dva čvora $u, v \in V$. Kako je G povezan, postoji uv-put

$$P = uv_1 \dots v_i v_{i+1} \dots v_{n-1} v.$$

Imamo dve mogućnosti:

(i) Ako e ne pripada uv-putu, onda je P uv-put u $G - e$.

(ii) Ako e pripada uv-putu, onda možemo pretpostaviti da je to grana $\{v_i, v_{i+1}\}$ i da je kontura C oblika

$$C = v_i v_{i+1} u_1 \dots u_l v_i.$$

To znači da u grafu $G - e$ postoji put Q od v_i do v_{i+1} :

$$Q = v_i u_l u_{l-1} \dots u_1 v_{i+1}.$$

onda je

$$P_2 = uv_1 \dots v_{i-1} Q v_{i+2} \dots v_{n-1} v.$$

staza u grafu $G-e$ od u do v. Prema Theorem 99, u $G-e$ postoji uv-put. Znači, za svaka dva čvora u grafu $G-e$ postoji put koji ih povezuje.

Definicija 105 *Neka je $G = (V, E)$ povezan graf. Rastojanje $d(u, v)$, između različitih čvorova u i v jeste dužina najkraćeg puta od u do v. Pored toga, $d(u, u) = 0$.*

Rastojanje zadovoljava sledeće osobine:

1. $d(u, v) \geq 0$
2. $d(u, v) = 0$ akko $u = v$
3. $d(u, v) = d(v, u)$
4. $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$

2.2 Reprezentacija grafa

Jedan od načina da se predstavi graf, jeste pomoću odgovarajućih matrica koje ćemo uvesti u ovom delu.

Definicija 106 *Neka je $G = (V, E)$ prost graf, gde je $|V| = m$ i $|E| = n$. Matrica susedstva je kvadratna matrica $A(G) = [a_{ij}]_{m \times m}$, gde je*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \{i, j\} \in E \\ 0 & , \{i, j\} \notin E \end{cases}$$

Primer 13 *Matrica susedstva grafa $K_{3,2}$ je*

$$A = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrica susedstva prostog grafa je simetrična i njen oblik dodatno zavisi od rasporeda čvorova po vrstama i kolonama.

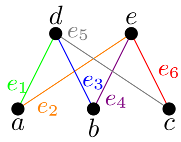
Za multigrafove, matrica susedstva umesto elemenata koji su jednaki 1 sadrži broj paralelnih grana incidentnih sa istim parom čvorova. Druga poznata reprezentacija koja koristi matrice jeste matrica incidencije.

Definicija 107 *Neka je $G = (V, E, \psi)$ neusmeren graf, gde je $|V| = m$ i $|E| = n$. Matrica incidencije grafa G je matrica $M(G) = [a_{ij}]_{m\times n}$, gde je*

$$a_{ie} = \begin{cases} 1 & , i \in \psi(e) \in E \\ 0 & , i \notin \psi(e) \in E \end{cases}$$

Primer 14 *Matrica incudencije grafa $K_{3,2}$ je*

$$A = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Teorema 108 *Neka je $G = (V, E)$ prost graf, gde je $V = \{1, \ldots, n\}$, $n \geq 1$, i neka je A matrica susedstva grafa G. Element $a_{ij}^{(k)}$ u matrici A^k, $k \geq 1$, jednak je broju različitih ij-šetnji dužine k u tom grafu.*

Dokaz. Indukcijom po n.
Baza $n = 1$: Broj šetnji dužine 1 od čvora i do čvora j jednak je broju grana od i do j u tom grafu. Kako je graf prost, taj broj je jednak elementu 1 ako $ij \in E$, a inače je 0. Po definiciji matrice incidencije, taj broj je jednak elementu a_{ij} matrice A.
Induktivni korak $T_{k-1} \Rightarrow T_k$: Označimo sa $a_{ij}^{(k)}$ elemente matrice A^k. Kako je

$$A^k = A \cdot A^{k-1},$$

onda važi

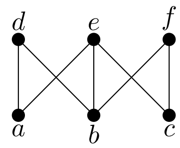
$$a_{ij}^{(k)} = a_{i1}a_{1j}^{(k-1)} + a_{i2}a_{2j}^{(k-1)} + \ldots + a_{ik}a_{kj}^{(k-1)} \tag{2.2}$$

Prema induktivnoj pretpostavci, broj $a_{lj}^{(k-1)}$, $1 \leq l \leq n$, jednak je broju šetnji dužine $k-1$ od čvora l do čvora j. Ako postoji grana $\{i, l\}$ (što znači da je $a_{il} = 1$), onda je broj šetnji dužine k od i do j u kojima je prva grana $\{i, l\}$ jednak

$$a_{il}a_{lj}^{(k-1)}.$$

Kada saberemo broj takvih šetnji dužine k koje idu od i do j, dobijamo sumu (2.2). $\square$

Zadatak 109 *Koliko ima šetnji dužine 3 od a do d u grafu na slici.*



Rešenje. Matrice A, A^2 A^3 su:

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&1\\ 1&1&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2&2&1&0&0&0\\ 2&3&2&0&0&0\\ 1&2&2&0&0&0\\ 0&0&0&2&2&1\\ 0&0&0&2&3&2\\ 0&0&0&1&2&2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0&0&0&4&5&3\\ 0&0&0&5&7&5\\ 0&0&0&3&5&4\\ 4&5&3&0&0&0\\ 5&7&5&0&0&0\\ 3&5&4&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Znači, postoje tačno 4 šetnje od čvora a do čvora d : $adbd, adad, aebd, aead$.

Posledica 110 *Neka je $G = (V, E)$, $|V| = n$, prost graf sa matricom susedstva A. Tada je G povezan akko $\sum_{k=0}^{n-1} A^k$ ima samo ne nula elemente.*

Posledica 111 $d(v_i, v_j) = \min\{k \geq 0 : a_{ij}^{(k)} \neq 0\}$.

Zadatak 112 *Za graf iz zadatka 109 odrediti $d(u, v)$, za sve $u, v \in \{a, b, c, d, e, f\}$.*

Rešenje. Na osnovu prethodne posledice, zaključujemo

$$d(u,v) = \begin{cases} 1 & u \in \{a,b,c\}, v \in \{d,e,f\} \\ 2 & u \in \{a,b,c\}, v \in \{a,b,c\} \\ 2 & u \in \{d,e,f\}, v \in \{d,e,f\} \end{cases}$$