Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka
Elektroenergetski softverski inženjering / Primenjeno softvesrko inženjerstvo
predmet: **Matematička analiza**
DRUGI KOLOKVIJUM Predispitne obaveze

Sve odgovore obrazložiti.

1. (1 poen) Naći po definiciji izvod funkcije $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

   Rešenje

   $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{x+\Delta x} - \dfrac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x-(x+\Delta x)}{x\Delta x(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x^2}$$

2. (1 poen) Odrediti realnu konstantu c tako da postoji funkcija $f(x)$ za koju je $f'(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \le 0 \\ x+c & , \quad x > 0 \end{cases}$

   Rešenje

   Prvi izvod ne može imati prekid prve vrste. Data funkcija f' ne može imati ni prekid druge vrste, pa mora biti neprekidna, tj. $c = 1$.

3. Funkcija $y = y(x)$ je data sa $\ln(x+y) = xy$.

   (a) (1 poen) Odrediti njen prvi izvod.
   Rešenje
   $\dfrac{1}{x+y}(1+y') = y + xy'$, pa je $y'(x) = \dfrac{xy+y^2-1}{1-x^2-xy}$.

   (b) (1 poen) Naći jednačinu tangente na grafik date funkcije u tački $(0,1)$.
   Rešenje
   $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y'(0,1) = -1$, pa je jednačina tangente $t: y-1 = -x$, tj. $y = 1-x$.

4. Funkcija $y = y(x)$ je data sa $y^2 = \ln(x+2y) + \dfrac{1}{4}$.

   (a) (1 poen) Odrediti njen prvi izvod.

   (b) (1 poen) Naći jednačinu tangente na grafik date funkcije u tački $(a, \dfrac{1}{2})$.

   Rešenje

   Domaći.

5. Funkcija $y = y(x)$ je data sa $x(t) = t^2+1$, $y(t) = 2t$, $t > 0$.

   (a) (1 poen) Odrediti njen prvi izvod.
   Rešenje
   $\frac{dy}{dt} = 2$, $\frac{dx}{dt} = 2t$, $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}$, pa je prvi izvod dat takodje u parametarskom obliku
   $x(t) = t^2+1$, $y'_x(t) = \frac{1}{t}$.

   (b) (1 poen) Odrediti realan parametar a tako da tačka $A(a,2)$ leži na grafiku date funkcije.
   Rešenje
   $y = 2t = 2$ pa je $t = 1$ i $x(1) = 1^2+1 = 2$, $A(2,2)$.

   (c) (1 poen) Naći jednačinu tangente na grafik date funkcije u tački A.
   Rešenje
   $y'(1) = \frac{1}{1} = 1$, pa je jednačina tangente $t: (y-2) = (x-2)$ odnosno $y = x$.

6. Funkcija $y = y(x)$ je data sa $x(t) = t^2+1$, $y(t) = 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

   (a) (1 poen) Odrediti njen domen.

   (b) (1 poen) Odrediti njen prvi izvod.

(c) (1 poen) Odrediti realan parametar a tako da tačka $A(a,2)$ leži na grafiku date funkcije.

(d) (1 poen) Naći jednačinu tangente na grafik date funkcije u tački A.

Rešenje

Za domaći.

7. (1 poen) Odrediti jednačinu tangente na grafik funkcije $y=f(x)$ u tački $x=2$ ako je $f(2)=-1$ i $f'(2)=3$.

Rešenje

$t: y+1=3(x-2)$, tj. $y=3x-7$.

8. (1 poen) Odrediti jednačinu tangente na parabolu $y=3x^2-5x$ u tački $(2,2)$.

Rešenje

Za domaći.

9. (1 poen) Da li funkcija $f(x)=|x|$ zadovoljava uslove Rolove teoreme na intervalu $[-1,1]$?

Rešenje

Funkcija nema izvod u tački $x=0\in(-1,1)$, pa ne zadovoljava uslove Rolove teoreme.

10. (1 poen) Da li postoji tačka $c\in(1,2)$ takva da je tangenta u tački $T(c,c^2)$ na krivu $y=x^2$ paralelna sa pravom $y=3x$?

Rešenje

Da, jer je funkcija $f(x)=x^2$ neprekidna na $[1,2]$ (i na $\mathbb{R}$) i ima izvod na $(1,2)$ (i na $\mathbb{R}$), tj. f zadovoljava uslove Lagranžove teoreme na $[1,2]$, a prava $y=3x$ je paralelna sa sečicom funkcije kroz tačke $A(1,1)$ i $B(2,4)$.

11. (1 poen) Pokazati da funkcija $f(x)=x^3+3x+1$ ima tačno jednu nulu na intervalu $[-1,0]$.

Rešenje Funkcija je polinom, pa je neprekidna i diferencijabilna na svakom intervalu. $f(-1)=-3<0$, $f(0)=1>0$, $f'(x)=3x^2+3>0$, pa funkcija ima tačno jednu nulu na $[-1,0]$.

12. (1 poen) Za funkciju $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$ napisati Tejlorov polinom prvog stepena u tački $a=1$, kao i formulu za grešku.

Rešenje

$f(x)=\dfrac{1}{2-x}$, $f'(x)=\dfrac{1}{(2-x)^2}$, $f''(x)=\dfrac{2}{(2-x)^3}$, $f(1)=1$, $f'(1)=1$ pa je

$T(x)=1+(x-1)$, $R(x)=\dfrac{1}{(2-(1+\theta(x-1))^3}(x-1)^2$, $0<\theta<1$.

13. (2 poena) Za funkciju $f(x)=\sqrt{x}$ napisati Tejlorov polinom drugog stepena u tački $a=1$, kao i formulu za grešku.

Rešenje

$f(x)=\sqrt{x}$, $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x)=-\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}$, $f'''(x)=\dfrac{3}{8\sqrt{x^5}}$.

$f(1)=1$, $f'(1)=\dfrac{1}{2}$, $f''(1)=-\dfrac{1}{4}$, $f'''(1+\theta(x-1))=\dfrac{3}{8\sqrt{(1+\theta(x-1))^5}}$, pa je

$T_2(x)=1+\dfrac{1}{2}(x-1)-\dfrac{1}{8}(x-1)^2$, $R=\dfrac{1}{16\sqrt{(1+\theta(x-1))^5}}(x-1)^3$.

14. (1 poen) Da li je greška Maklorenovog polinoma drugog stepena za funkciju $f(x)=e^x$ na intervalu $[0,1]$ manja od 0.5?

Rešenje

Da. $0<R(x)=\dfrac{e^{\theta x}}{3!}x^3\le\dfrac{e}{6}<\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$, za $0<\theta<1$, $x\in[0,1]$.

15. (1 poen) Naći minimum funkcije $f(x) = x^3 + 3x$ na intervalu $[1, 3]$.

Rešenje

Funkcija je neprekidna na $[1, 3]$ (neprekidna je na $\mathbb{R}$), pa dostiže ekstreme na tom intervalu (i minimum i maksimum). Kako je $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$, funkcija je rastuća na $[1, 3]$ (rastuća je i na $\mathbb{R}$), pa dostiže ekstreme u krajnjim tačkama intervala $[1, 3]$: maksimum u tački $x = 3$, a minimum (minimalnu vrednost) 2 dostiže u u tački $x = 1$.

16. Data je funkcija $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x & x \leq 0 \\ -\frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$.

   (a) (1 poen) Da li je data funkcija diferencijabilna u tački $x = 0$?

   Rešenje

   Nije, jer nije neprekidna: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{arctg} x = 0 = f(0) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$.

   (b) (1 poen) Da li je rastuća u tački $x = 0$?

   Rešenje Ne. $f(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0$, $f(x) = \operatorname{arctg} x < 0$ za $x < 0$, ali je $f(x) = -\dfrac{1}{x} < 0$ za $x > 0$.

   (c) (1 poen) Da li je rastuća na $\mathbb{R}$?

   Rešenje

   Nije. Ako je npr. $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, onda je $x_1 \leq x_2$ a $f(x_1) = f(0) = 0 \geq -2 = f(\frac{1}{2}) = f(x_2)$.

   (d) (1 poen) Da li ima ekstrem u $x = 0$?

   Rešenje

   Da, ima maksimum, jer je $f(0) = 0$ i $f(x) < 0$ za $x \neq 0$.

   (e) (1 poen) Da li ima vertikalnu asimptotu u tački $x = 0$?

   Rešenje

   Da, jer je $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$.

   (f) (1 poen) Da li ima horizontalnu asimptotu?

   Rešenje

   $\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2}$, pa funkcija ima horizontalnu asimptotu $y = -\dfrac{\pi}{2}$ kad $x \to -\infty$.

   $\lim\limits_{x\to \infty} -\dfrac{1}{x} = 0$, pa funkcija ima horizontalnu asimptotu $y = 0$ kad $x \to \infty$.

17. Data je funkcija $f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ \ln x & x > 0 \end{cases}$.

   (a) (1 poen) Da li je data funkcija diferencijabilna u tački $x = 0$?

   (b) (1 poen) Da li je rastuća u tački $x = 0$?

   (c) (1 poen) Da li je rastuća na $\mathbb{R}$?

   (d) (1 poen) Da li ima ekstrem u $x = 0$?

   (e) (1 poen) Da li ima vertikalnu asimptotu u tački $x = 0$?

   (f) (1 poen) Da li ima horizontalnu asimptotu?

   Rešenje

   Domaći.

18. (1 poen) Za funkciju $z(x, y) = x^2 h(xy)$, gde je h diferencijabilna funkcija, naći $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

   Rešenje

   $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xh(xy) + x^2 y h'(xy)$.

19. (1 poen) Za funkciju $z(x, y) = x^2 h(xy)$, gde je h diferencijabilna funkcija, naći $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

   Rešenje

   Domaći.

20. (1 poen) Za funkciju $z(x,y) = xyf(x^2y)$, gde je f diferencijabilna funkcija, naći $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Rešenje

Domaći.

21. Data je funkcija $z(x,y) = xy^2$.

(a) (1 poen) Čemu je jednak priraštaj Δz date funkcije u tački $T(1,1)$?

Rešenje

$\Delta z(1,1) = z(1+\Delta x, 1+\Delta y) - z(1,1) = (1+\Delta x)(1+\Delta y)^2 - 1 = \Delta x + 2\Delta y + 2\Delta x \Delta y + (1+\Delta x)(\Delta y)^2$

(b) (1 poen) Da li je data funkcija diferencijabilna na $\mathbb{R}^2$.

Rešenje

Jeste, jer je polinom po obe promenljive.

(c) (1 poen) Čemu je jednak njen diferencijal dz u tački T?

Rešenje

$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$, $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = 1$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = 2$, pa je $dz(1,1) = dx + 2dy$.

(d) (1 poen) Ispitati uslovne ekstreme funkcije uz uslov $y = x^2$.

Rešenje

Ako je $y = x^2$, onda je $z = z(x) = x^5$. Ova funkcija nema ekstrema.

22. Data je funkcija $z(x,y) = x^2y$.

(a) (1 poen) Da li je data funkcija neprekidna u tački $(0,0)$?

Rešenje

Jeste, jer je data funkcija polinom po obe promenljive, pa je neprekidna u svakoj tački iz $\mathbb{R}^2$.

Na drugi način: $\Delta z(0,0) = z(0+\Delta x, 0+\Delta y) - z(0,0) = (\Delta x)^2(\Delta y) - 0 = (\Delta x)^2\Delta y \to 0$, kad $\Delta x, \Delta y \to 0$.

(b) (1 poen) Naći po definiciji $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Rešenje

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{z(x+\Delta x, y) - z(x,y)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^2 y - x^2 y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x^2 + 2\Delta x + (\Delta x)^2)y - x^2 y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x)y = 2xy.$

(c) (1 poen) Da li funkcija ima ekstrem u tački $(0,0)$?

Rešenje

Nema, jer je $z(0,0) = 0$, a u svakoj okolini tačke $(0,0)$ ima i tačaka u kojima je vrednost funkcije z pozitivna (tačke u prvom i četvrtom kvadrantu) i tačaka u kojima je vrednost funkcije negativna (tačke u drugom i trećem kvadrantu).

23. Data je funkcija $z(x,y) = x^2(1-y)$.

(a) (1 poen) Da li je data funkcija neprekidna u tački $(0,1)$?

(b) (1 poen) Naći po definiciji $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

(c) (1 poen) Da li funkcija ima ekstrem u tački $(0,1)$?

Rešenje

Ne. $z(0,1) = 0$, a u svakoj okolini tačke $(0,1)$ ima i tačaka za koje je $z > 0$ (tačke za koje je $y < 1$) i tačaka za koje je $z < 0$ (tačke za koje je $y > 1$).

(d) (1 poen) Ispitati ekstreme date funkcije uz uslov $y = 1 - x^2$.

Rešenje

Iz uslova, $1 - y = x^2$, pa je $z = z(x) = x^4$. Ova funkcija ima minimum za $x = 0$, a polazna funkcija ima uslovni minimum za $(x,y) = (0,1)$.

24. (1 poen) Ispitati ekstreme funkcije $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Rešenje

Domaći.

25. (1 poen) Da li funkcija $f(x,y) = x^2 - y^2$ u tački (0,0) ima ekstrem uz uslov $y = 0$?

Rešenje

Domaći.

26. (1 poen) Ispitati ekstreme funkcije $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

Rešenje

$f_x = 3x^2 - 3y^2 = 0$, $f_y = -6xy = 0$, pa je $T(0,0)$ jedina stacionarna tačka date funkcije. Kako je $f(T) = 0$ i $f(x,y) = x(x^2 - 3y^2)$, to u svakoj okolini tačke T ima tačaka u kojima je $f > 0$ (one tačke u kojima je $x > 0$, $y = 0$) i onih u kojima je $f < 0$ (one za koje je $x = 0$), pa funkcija nema ekstrem u T.

27. (2 poena) Naći stacionarne tačke i ekstreme funkcije $f(x,y) = x^2 + y^2$ pod uslovom $x + y = 1$.

Rešenje

Domaći.

28. (1 poen) Da li funkcija $f(x,y) = x^2 - y^2$ u tački (0,0) ima ekstrem uz uslov $y = x$?

Rešenje

Ne. Za $y = x$ je $f = f(x) = 0$ (funkcija je identički jednaka nuli), pa nema ekstreme.

29. Data je funkcija $z = \ln x^2 y$.

(1 poen) Da li data funkcija ima ekstrem uz uslov $x^2 + (y+2)^2 = 1$?

Rešenje

Tačke koje zadovoljavaju uslov $x^2 + (y+2)^2 = 1$ se nalaze na kružnici sa centrom u $(0, -2)$, poluprečnika 1, pa sve one imaju negativnu y koordinatu. U takvim tačama funkcija z nije definisana, pa nema ni uslovni ekstrem.

30. Data je funkcija $z(x,y) = e^{xy}$.

(a) (1 poen) Da li je data funkcija neprekidna na $\mathbb{R}^2$?

Rešenje

Da, jer je kompozicija elementarnih funkcija i definisana je na $\mathbb{R}^2$.

(b) (1 poen) Naći po definiciji $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ u tački $(0,0)$.

Rešenje

$z_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{e^{\Delta x \cdot 0} - e^0}{\Delta x} = 0.$

(c) (1 poen) Da li funkcija ima ekstrem u tački $(0,0)$?

Rešenje

Domaći.

(d) (1 poen) Ispitati ekstreme date funkcije uz uslov $y = x$.

Rešenje

Domaći.

31. (1 poen) Dat je problem: Od svih kutija površine P, čija je osnova kvadratna, naći onu koja ima najveću zapreminu. Odrediti funkcije f i φ tako da je uslovni ekstrem funkcije f uz uslov $\varphi = 0$ rešenje datog problema.

Rešenje

Neka je x stranica osnove, a y visina kutije. Onda je $f(x,y) = x^2 y$, $\varphi(x,y) = 2x^2 + 4xy - P$.