4. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $y = xe^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}}$ (bez nalaženja $f''(x)$).

1) Domen

$D = R \setminus \left\{\sqrt[3]{2}\right\}$

2) Nule funkcije

$y = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3) Parnost

Domen nije simetričan u odnosu na koordinatni početak pa funkcija nije ni parna ni neparna.

4) Znak

$y > 0 \Rightarrow x \in (0, \sqrt[3]{2}) \cup (\sqrt[3]{2}, \infty)$

$y < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0)$

5) Asimptote

$\lim\limits_{x \to \sqrt[3]{2}^+} xe^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} = \infty \Rightarrow$ prava $x = \sqrt[3]{2}$ je vertikalna asimptota sa desne strane

$\lim\limits_{x \to \sqrt[3]{2}^-} xe^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} = 0 \;\; !tg\alpha$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ funkcija nema horizontalnu asimptotu.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} = e^{\frac{1}{3}}$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - kx\right] = \lim_{x \to \pm\infty} x\,(e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} - e^{\frac{1}{3}}) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} - e^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{x}} =$$

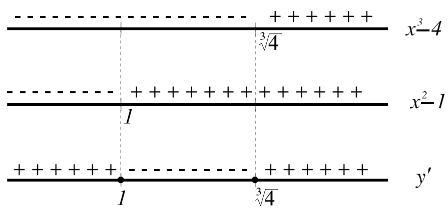
$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} \cdot \frac{3x^2 \cdot 3(x^3-2) - (x^3-1) \cdot 3 \cdot 3x^2}{9(x^3-2)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{3}} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^4}{(x^3-2)^2} = 0$$

$\Rightarrow$ prava $y = \sqrt[3]{e} \cdot x$ je kosa asimptota

6) Monotonost i ekstremne vrednosti

$$y' = e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} \left[1 + x \frac{3x^2 \cdot 3(x^3-2) - (x^3-1)3 \cdot 3x^2}{9(x^3-2)^2}\right] = e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} \left[1 - \frac{x^3}{(x^3-2)^2}\right] =$$

$$= e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} \cdot \frac{x^6 - 5x^3 + 4}{(x^3-2)^2} = \frac{(x^3-4)(x^3-1)}{(x^3-2)^2} \cdot e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}}$$



$y' > 0$ za $x \in (-\infty, 1) \cup (\sqrt[3]{4}, \infty)$ funkcija raste

$y' < 0$ za $x \in (1, \sqrt[3]{2}) \cup (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ funkcija opada

Funkcija ima minimum $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{e}$ za $x = \sqrt[3]{4}$. Funkcija ima maksimum 1 za $x = 1$.

7) Tangente funkcije

$$tg\alpha = \lim_{x \to \sqrt[3]{2}^-} y' = \lim_{x \to \sqrt[3]{2}^-} \frac{(x^3-4)(x^3-1)}{(x^3-2)^2} \cdot e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} = -2 \lim_{x \to \sqrt[3]{2}^-} \frac{(x^3-2)^{-2}}{e^{-\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}}} =$$

$$= -2 \lim_{x \to \sqrt[3]{2}^-} \frac{\dfrac{-2 \cdot 3x^2}{(x^3-2)^3}}{e^{-\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} \cdot (-1) \cdot \dfrac{3x^2(x^3-2) \cdot 3 - (x^3-1) \cdot 3 \cdot 3x^2}{9(x^3-2)^2}} = -12 \lim_{x \to \sqrt[3]{2}^-} \frac{x^2 \cdot (x^3-2)^{-1}}{-x^2 \cdot e^{-\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}}} =$$

$$= 12 \lim_{x \to \sqrt[3]{2}^-} \frac{\dfrac{-3x^2}{(x^3-2)^2}}{e^{-\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} \cdot \dfrac{x^2}{(x^3-2)^2}} = -36 \lim_{x \to \sqrt[3]{2}^-} e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} = -36 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

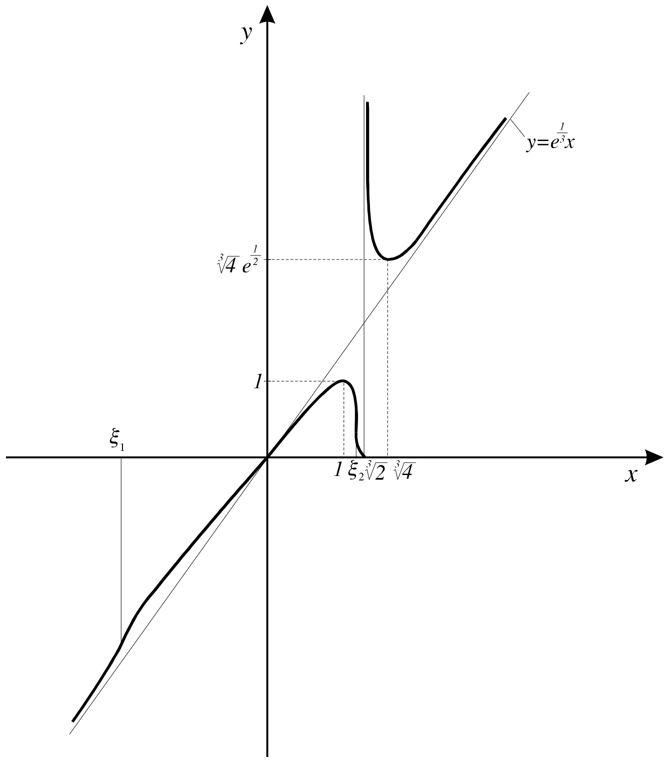
Upoređujemo funkciju sa asimptotom...

Za $x < 0$ eksponent funkcije je malo manji od $\frac{1}{3}$ pa je zato funkcija iznad asimptote.

$$f(-1) = -1 \cdot e^{\frac{-1-1}{3(-1-2)}} - e^{\frac{2}{9}} = -\sqrt[9]{e^2} \approx -1{,}249$$

$$y(-1) = -1 \cdot e^{\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{e} \approx -1{,}396$$

8) Grafik funkcije



$(\xi_1, f(\xi_1))$ i $(\xi_2, f(\xi_2))$ su prevojne tačke.

5. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = -(x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

1) Domen

$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

2) Nule funkcije

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

3) Parnost

$f(-x) = -(-x+2)e^{\frac{1}{-x}} \neq f(x) \wedge f(-x) = -(-x+2)e^{\frac{1}{-x}} \neq -f(x)$ ni parna ni neparna

4) Asimptote

$\lim\limits_{x\to 0^-}(-(x+2)e^{\frac{1}{x}}) = 0 \; !tg\alpha$

$\lim\limits_{x\to 0^+}(-(x+2)e^{\frac{1}{x}}) = -\infty \Rightarrow$ prava $x = 0$ je vertikalna asimptota sa desne strane

$\lim\limits_{x\to \pm\infty}(-(x+2)e^{\frac{1}{x}}) = \mp\infty \Rightarrow$ funkcija nema horizontalnu asimptotu

$$k=-\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+2}{x}e^{\frac{1}{x}}=-1$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}((-x-2)e^{\frac{1}{x}}+x)=\lim_{x\to\pm\infty}(-xe^{\frac{1}{x}}+x)-2\lim_{x\to\pm\infty}e^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}x(1-e^{\frac{1}{x}})-2=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}-2=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}-2=\lim_{x\to\pm\infty}(-e^{\frac{1}{x}})-2=-3\Rightarrow \text{prava } y=-x-3 \text{ je kosa asimptota funkcije}$$

5) Monotonost i ekstremne vrednosti

$$f'(x)=-e^{\frac{1}{x}}(1-\frac{x+2}{x^2})=\frac{-x^2+x+2}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

$$-x^2+x+2=0\Leftrightarrow x_1=2, x_2=-1$$

- - - - - - - - - + + + + + + + - - - - - - - - - $-x^2+x+2$

-1 2

$f'(x)>0$ za $x\in(-1,0)\cup(0,2)$ funkcija raste

$f'(x)<0$ za $x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ funkcija opada

Funkcija ima minimum $-\frac{1}{e}$ za $x=-1$. Funkcija ima maksimum $-4\sqrt{e}$ za $x=2$.

6) Tangente funkcije

$$tg\alpha=\lim_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}\frac{-x^2+x+2}{x^2}=2\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}=2\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{x^2}}{e^{-\frac{1}{x}}}=2\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{-2}{x^3}}{e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}}=-4\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{x}}{e^{-\frac{1}{x}}}=$$

$$=-4\lim_{x\to0^-}\frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}=4\lim_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0\Rightarrow\alpha=0$$

7) Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke

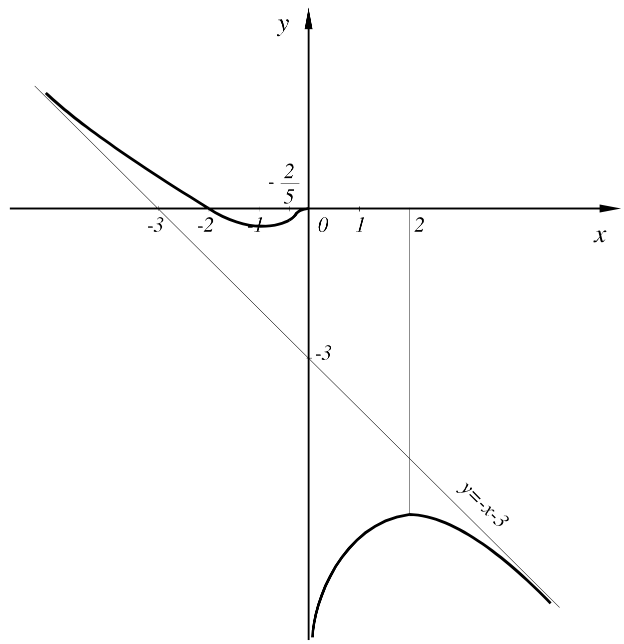
$$f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{-x^2+x+2}{x^4}+\frac{(-2x+1)x^2-2x(-x^2+x+2)}{x^4}\right)=e^{\frac{1}{x}}\frac{-5x-2}{x^4}$$

$f''(x)>0$ za $x\in(-\infty,-\frac{2}{5})$ funkcija je konveksna ☺

$f''(x)<0$ za $x\in(-\frac{2}{5},0)\cup(0,+\infty)$ funkcija je konkavna

Tačka $(-\frac{2}{5},-\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}})$ je prevojna tačka.

8) Grafik funkcije



Jednačina tangente i normale

Prvi izvod funkcije u nekoj tački predstavlja koeficijent pravca tangente u posmatranoj tački. Jednačina tangente na krivu $f(x)$ u tački $M(x_0, y_0), y_0 = f(x_0)$ glasi $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, a normale $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Primer: Za funkciju $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ napisati jednačinu tangente i normale u $M(3, y_0)$.

$$y' = \frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x+2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = \frac{3^2 - 2\cdot 3 + 2}{3-1} = \frac{5}{2}$$

$$y'(x_0) = y'(3) = \frac{3}{4}$$

Jednačina tangente: $y - \frac{5}{2} = \frac{3}{4}(x-3) \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

Jednačina normale: $y - \frac{5}{2} = -\frac{4}{3}(x-3) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{13}{2}$

☺