Дискретна математика

Колоквијум II

1. Нека је $G(X,Y)$ бипартитан граф такав да је $|X| = 10$. Сви чворови у X имају степен 6, док Y садржи четири чвора степена 2, три чвора степена 4, а преостали чворови су степена 8. Колико чворова садржи граф $G(X,Y)$?

Решење: Како је $|X| = 10$ и сви чворови у X имају степен 6 закључујемо да $G(X,Y)$ има 60 грана. Обележимо са k број чворова степена 8. Сада је на основу основне теореме теорије графова

$$60 = \sum d(v) = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + k \cdot 8 = 8k + 20,$$

па је $k = 5$.

2. Доказати да стабло у ком сви невисећи чворови имају степен 3 садржи паран број чворова.

Решење: Нека је k број висећих чворова у стаблу. На основу основне теореме теорије графова важи

$$2(n-1) = \sum d(v) = k \cdot 1 + (n-k) \cdot 3 = 3n - 2k.$$

Сада је $n = 2k - 2 \equiv 0(mod 2)$, што је и требало доказати.
II начин: Сви чворови у стаблу су непарног степена (1 или 3), па граф мора садржати паран број чворова.

3. Нека је дат k-регуларан граф са $n \geq 2k+2$ чворова. Доказати да је његов комплемент Хамилтонов граф.

Решење: Пошто је $n \geq 2k+2$ имамо $k \leq \frac{n}{2} - 1$. Сада је

$$d_{\overline{G}}(v) = (n-1) - k \geq n - 1 - \frac{n}{2} + 1 = \frac{n}{2}.$$

Пошто за све чворове у $\overline{G}$ важи услов Диракове теореме закључујемо да је $\overline{G}$ Хамилтонов граф.

4. Нека је G повезан планаран граф са мање од 12 области у ком је сваки чвор степена бар 3. Доказати да G садржи област са највише 4 ивице.

Решење: Претпоставимо да све области графа G имају више од 4 ивице, тј. да је $r = r_5 + r_6 + \dots$. Сада је $2e \geq 5r$, одакле је $e \geq \frac{5}{2}r$. Како је $\delta(G) \geq 3$ важи и $n \leq \frac{2e}{3}$. Даље је на основу Ојлерове формуле

$$r = 2 - n + e \geq 2 - \frac{2e}{3} + e = 2 + \frac{e}{3} \geq 2 + \frac{5}{6}r.$$

Добијамо $r \geq 12$, што је контрадикција са условом задатка, па G садржи област са највише 4 ивице.