A **ZADACI** (rade se u svesci) **04.12.2016.**

**1.** Napisati SVE proste implikante i SVE minimalne disjunktivne normalne forme Bulove funkcije

$$f(x,y,z,u) = xyz'u + xyz'u' + xy'zu + xy'zu' + xy'z'u + xy'z'u' + x'y'zu' + x'yzu + x'yzu'.$$

**2.** Funkcije $f_i : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $i \in \{1,2,3,4\}$ su definisane sa $f_1(z) = -z$, $f_2(z) = z$, $f_3(z) = \overline{z}e^{i\frac{\pi}{2}}$, $f_4(z) = \overline{z}e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Neka je $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. Dokazati da je $(F, \circ)$ komutativna grupa (gde je $\circ$ kompozicija funkcija).

**3.** Neka je $f(x) = x^5 - \sqrt{2}x^4 + x^3 - x^2 + \sqrt{2}x - 1$ polinom nad poljem $\mathbb{C}$. Izračunati $f(e^{i\frac{\pi}{4}})$. Faktorisati polinom $f$ nad poljima $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$.

B **ZADACI** (rade se u svesci)

**1.** Napisati SVE proste implikante i SVE minimalne disjunktivne normalne forme Bulove funkcije

$$f(x,y,z,u) = xyzu' + xyz'u + xy'zu' + xy'z'u' + xy'z'u + x'y'zu + x'y'zu' + x'yzu + x'yzu'.$$

**2.** Funkcije $h_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $i \in \{1,2,3,4\}$ su definisane sa

$$h_1(x,y) = (-x,-y), \qquad h_2(x,y) = (x,y), \qquad h_3(x,y) = (y,x), \qquad h_4(x,y) = (-y,-x).$$

Neka je $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$. Dokazati da je $(H, \circ)$ komutativna grupa (gde je $\circ$ kompozicija funkcija).

**3.** Neka je $f(x) = x^5 + \sqrt{2}x^4 + x^3 - 8x^2 - 8\sqrt{2}x - 8$ polinom nad poljem $\mathbb{C}$. Izračunati $f(e^{i\frac{3\pi}{4}})$. Faktorisati polinom $f$ nad poljima $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$.

C **ZADACI** (rade se u svesci)

**1.** Napisati SVE proste implikante i SVE minimalne disjunktivne normalne forme Bulove funkcije

$$f(x,y,z,u) = xyzu + xyzu' + xy'z'u + xy'z'u' + x'y'zu + x'y'zu' + x'y'z'u + x'y'z'u' + x'yzu'.$$

**2.** Funkcije $g_i : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $i \in \{1,2,3,4\}$ su definisane sa $g_1(w) = \overline{w}i$, $g_2(w) = -\overline{w}i$, $g_3(w) = -w$, $g_4(w) = w$.

Neka je $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$. Dokazati da je $(G, \circ)$ komutativna grupa (gde je $\circ$ kompozicija funkcija).

**3.** Neka je $f(x) = x^5 - \sqrt{3}x^4 + x^3 - 27x^2 + 27\sqrt{3}x - 27$ polinom nad poljem $\mathbb{C}$. Izračunati $f(e^{i\frac{\pi}{6}})$. Faktorisati polinom $f$ nad poljima $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$.

D **ZADACI** (rade se u svesci)

**1.** Napisati SVE proste implikante i SVE minimalne disjunktivne normalne forme Bulove funkcije

$$f(x,y,z,u) = xyzu + xyz'u' + xy'zu + xy'z'u + xy'z'u' + x'y'zu' + x'y'z'u' + x'yzu' + x'yz'u'.$$

**2.** Funkcije $e_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $i \in \{1,2,3,4\}$ su definisane sa

$$e_1(x,y) = (y,x), \qquad e_2(x,y) = (-y,-x), \qquad e_3(x,y) = (-x,-y), \qquad e_4(x,y) = (x,y).$$

Neka je $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Dokazati da je $(E, \circ)$ komutativna grupa (gde je $\circ$ kompozicija funkcija).

**3.** Neka je $f(x) = x^5 + \sqrt{3}x^4 + x^3 - 64x^2 - 64\sqrt{3}x - 64$ polinom nad poljem $\mathbb{C}$. Izračunati $f(e^{i\frac{5\pi}{6}})$. Faktorisati polinom $f$ nad poljima $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{A}}$ **REŠENJA:**

**1.** Proste implikante: $xy'$, $xz'$, $x'yz$, $y'zu'$, $x'zu'$.

$\mathsf{MDNF}_1 = xy' + xz' + x'yz + y'zu'$ $\mathsf{MDNF}_2 = xy' + xz' + x'yz + x'zu'$

**2.**

| $\circ$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | $f_2$ | $f_1$ | $f_4$ | $f_3$ |
| $f_2$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ |
| $f_3$ | $f_4$ | $f_3$ | $f_2$ | $f_1$ |
| $f_4$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_1$ | $f_2$ |

zatvorenost operacije: iz tablice,
asocijativnost: važi za kompoziciju funkcija,
komutativnost: tablica je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu,
neutralni element: $f_2$,
inverzni elementi: $f_1^{-1} = f_1$, $f_2^{-1} = f_2$, $f_3^{-1} = f_3$, $f_4^{-1} = f_4$.

**3.** $f(x) = x^5 - \sqrt{2}x^4 + x^3 - x^2 + \sqrt{2}x - 1.$

$f(e^{i\frac{\pi}{4}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(e^{-i\frac{\pi}{4}}) = 0.$

$f$ je deljiv sa $(x - e^{i\frac{\pi}{4}})(x - e^{-i\frac{\pi}{4}}) = x^2 - \sqrt{2}x + 1.$

$$f(x) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^3 - 1) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$$
$$= (x - e^{i\frac{\pi}{4}})(x - e^{-i\frac{\pi}{4}})(x - 1)\left(x - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

$\boxed{\text{B}}$ **REŠENJA:**

**1.** Proste implikante: $x'z$, $zu'$, $xz'u$, $xy'u'$, $xy'z'$.

$\mathsf{MDNF}_1 = x'z + zu' + xz'u + xy'u'$ $\mathsf{MDNF}_2 = x'z + zu' + xz'u + xy'z'$

**2.**

| $\circ$ | $h_1$ | $h_2$ | $h_3$ | $h_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $h_1$ | $h_2$ | $h_1$ | $h_4$ | $h_3$ |
| $h_2$ | $h_1$ | $h_2$ | $h_3$ | $h_4$ |
| $h_3$ | $h_4$ | $h_3$ | $h_2$ | $h_1$ |
| $h_4$ | $h_3$ | $h_4$ | $h_1$ | $h_2$ |

zatvorenost operacije: iz tablice,
asocijativnost: važi za kompoziciju funkcija,
komutativnost: tablica je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu,
neutralni element: $h_2$,
inverzni elementi: $h_1^{-1} = h_1$, $h_2^{-1} = h_2$, $h_3^{-1} = h_3$, $h_4^{-1} = h_4$.

**3.** $f(x) = x^5 + \sqrt{2}x^4 + x^3 - 8x^2 - 8\sqrt{2}x - 8.$

$f(e^{i\frac{3\pi}{4}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(e^{-i\frac{3\pi}{4}}) = 0.$

$f$ je deljiv sa $(x - e^{i\frac{3\pi}{4}})(x - e^{-i\frac{3\pi}{4}}) = x^2 + \sqrt{2}x + 1.$

$$f(x) = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^3 - 8) = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$
$$= (x - e^{i\frac{3\pi}{4}})(x - e^{-i\frac{3\pi}{4}})(x - 2)\left(x - \left(-1 - i\sqrt{3}\right)\right)\left(x - \left(-1 + i\sqrt{3}\right)\right).$$

$\boxed{\text{C}}$ **REŠENJA:**

**1.** Proste implikante: $x'y'$, $y'z'$, $xyz$, $yzu'$, $x'zu'$.

$\mathsf{MDNF}_1 = x'y' + y'z' + xyz + yzu'$ $\mathsf{MDNF}_2 = x'y' + y'z' + xyz + x'zu'$

**2.**

| $\circ$ | $g_1$ | $g_2$ | $g_3$ | $g_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $g_1$ | $g_4$ | $g_3$ | $g_2$ | $g_1$ |
| $g_2$ | $g_3$ | $g_4$ | $g_1$ | $g_2$ |
| $g_3$ | $g_2$ | $g_1$ | $g_4$ | $g_3$ |
| $g_4$ | $g_1$ | $g_2$ | $g_3$ | $g_4$ |

zatvorenost operacije: iz tablice,
asocijativnost: važi za kompoziciju funkcija,
komutativnost: tablica je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu,
neutralni element: $g_4$,
inverzni elementi: $g_1^{-1} = g_1$, $g_2^{-1} = g_2$, $g_3^{-1} = g_3$, $g_4^{-1} = g_4$.

**3.** $f(x) = x^5 - \sqrt{3}x^4 + x^3 - 27x^2 + 27\sqrt{3}x - 27$.

$f(e^{i\frac{\pi}{6}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(e^{-i\frac{\pi}{6}}) = 0$.

$f$ je deljiv sa $(x - e^{i\frac{\pi}{6}})(x - e^{-i\frac{\pi}{6}}) = x^2 - \sqrt{3}x + 1$.

$$f(x) = (x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^3 - 27) = (x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$
$$= (x - e^{i\frac{\pi}{6}})(x - e^{-i\frac{\pi}{6}})(x - 3)\left(x - \left(-\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x - \left(-\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

$\boxed{\text{D}}$ **REŠENJA:**

**1.** Proste implikante: $x'u'$, $z'u'$, $xzu$, $xy'u$, $xy'z'$.

$\mathsf{MDNF}_1 = x'u' + z'u' + xzu + xy'u$ $\mathsf{MDNF}_2 = x'u' + z'u' + xzu + xy'z'$

**2.**

| $\circ$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $e_4$ | $e_3$ | $e_2$ | $e_1$ |
| $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_1$ | $e_2$ |
| $e_3$ | $e_2$ | $e_1$ | $e_4$ | $e_3$ |
| $e_4$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ |

zatvorenost operacije: iz tablice,
asocijativnost: važi za kompoziciju funkcija,
komutativnost: tablica je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu,
neutralni element: $e_4$,
inverzni elementi: $e_1^{-1} = e_1$, $e_2^{-1} = e_2$, $e_3^{-1} = e_3$, $e_4^{-1} = e_4$.

**3.** $f(x) = x^5 + \sqrt{3}x^4 + x^3 - 64x^2 - 64\sqrt{3}x - 64$.

$f(e^{i\frac{5\pi}{6}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(e^{-i\frac{5\pi}{6}}) = 0$.

$f$ je deljiv sa $(x - e^{i\frac{5\pi}{6}})(x - e^{-i\frac{5\pi}{6}}) = x^2 + \sqrt{3}x + 1$.

$$f(x) = (x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^3 - 64) = (x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x - 4)(x^2 + 4x + 16)$$
$$= (x - e^{i\frac{5\pi}{6}})(x - e^{-i\frac{5\pi}{6}})(x - 4)\left(x - \left(-2 - i2\sqrt{3}\right)\right)\left(x - \left(-2 + i2\sqrt{3}\right)\right).$$