2. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $y = arctg\frac{2x}{x^2-1}$.

1) Domen

$$\left.\begin{array}{l} x^2-1\neq 0 \\ x^2\neq 1 \Rightarrow x\neq \pm 1 \end{array}\right\} \Rightarrow D: x\in R\setminus\{-1,1\}$$

2) Nule funkcije

$$y = arctg\frac{2x}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

3) Parnost funkcije

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ funkcija je neparna. Kako je funkcija neparna (simetrična u odnosu na koordinatni početak), dovoljno je posmatrati funkciju samo za $x \geq 0$.

4) Asimptote

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^+} arctg\frac{2x}{x^2-1} = arctg\infty = \frac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{x\to 1^-} arctg\frac{2x}{x^2-1} = arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ funkcija nema vertikalnu asimptotu}$$

$\lim\limits_{x\to\infty} arctg\frac{2x}{x^2-1} = arctg 0 = 0 \Rightarrow$ prava $y=0$ je horizontalna asimptota funkcije

Funkcija nema kosu asimptotu.

5) Monotonost i ekstremne vrednosti

$$y' = \frac{1}{1+(\frac{2x}{x^2-1})^2}\cdot\frac{2(x^2-1)-2x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{\frac{(x^2-1)^2+4x^2}{(x^2-1)^2}}\cdot\frac{2x^2-2-4x^2}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{-2-2x^2}{x^4-2x^2+1+4x^2} = \frac{-2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{-2}{1+x^2}$$

$y' < 0$ za svako $x \in D$, funkcija opada

Funkcija nema ekstremnih vrednosti.

6) Tangente funkcije

$tg\alpha = \lim\limits_{x\to\pm 1} y' = \lim\limits_{x\to\pm 1}\frac{-2}{1+x^2} = -1$ ($y = -x$)

$tg\beta = y'(0) = -2$ ($y = -2x$)

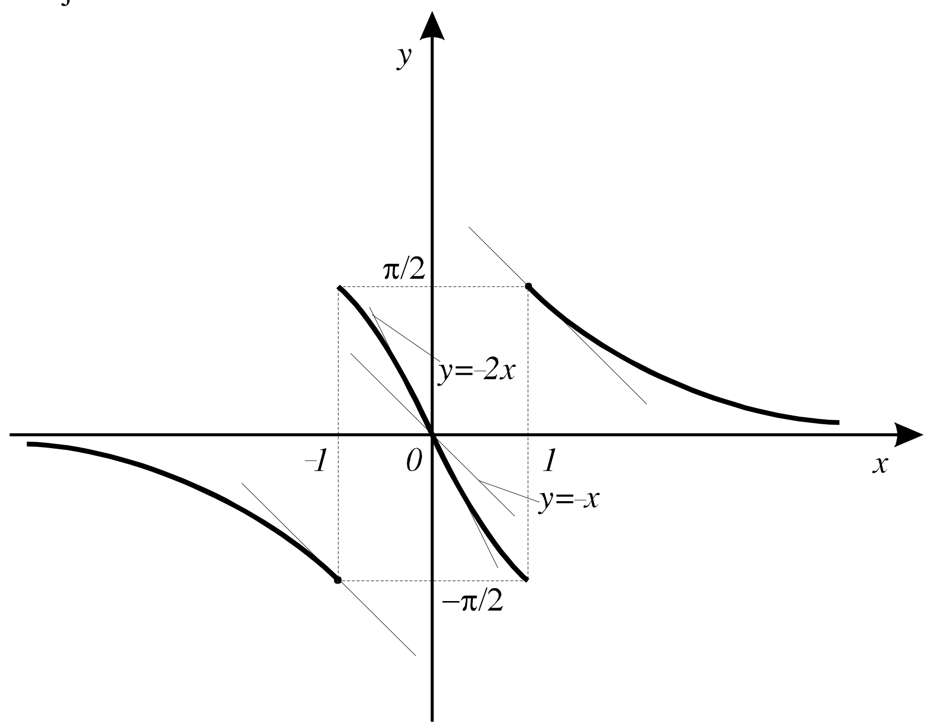
7) Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke

$$y'' = \frac{2\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

$y'' > 0$ za $x \in (0,1)\cup(1,\infty)$, funkcija je konveksna

Tačka $(0,0)$ je prevojna tačka funkcije.

8) Grafik funkcije



3. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \ln\left|\dfrac{\ln|\mathrm{x}|+1}{\ln|\mathrm{x}|-1}\right|$.

1) Domen

$\ln|x|-1 \neq 0 \Leftrightarrow \ln|x| \neq 1$ $\quad$ $\ln|x|+1 \neq 0 \Leftrightarrow \ln|x| \neq -1$ $\quad$ $x \neq 0$

$|x| \neq e \Leftrightarrow x \neq \pm e$ $\quad$ $|x| \neq e^{-1} \Leftrightarrow x \neq \pm e^{-1}$

$$D = R \setminus \left\{-e, -\frac{1}{e}, 0, \ \mathrm{e}, \frac{1}{\mathrm{e}}\right\}$$

2) Parnost funkcije

$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ funkcija je parna. Kako je funkcija parna (simetrična u odnosu na y-osu) dovoljno je posmatrati funkciju samo za $x \geq 0$.

3) Nule funkcije

$$f\ (x) = \ln\left|\frac{\ln \mathrm{x}+1}{\ln \mathrm{x}-1}\right| = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{\ln \mathrm{x}+1}{\ln x-1}\right| = 1$$

a) $\dfrac{\ln \mathrm{x}+1}{\ln \mathrm{x}-1} = 1$

$\ln \mathrm{x}+1 = \ln \mathrm{x}-1 \Leftrightarrow 1 = -1$

b) $\dfrac{\ln \mathrm{x}+1}{\ln \mathrm{x}-1} = -1$

$\ln \mathrm{x}+1 = -\ln \mathrm{x}+1 \Leftrightarrow 2\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

4) Asimptote

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\left|\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\right| = \ln \lim_{x\to 0^+}\left|\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\right| = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{e}^{\pm}} \ln\left|\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\right| = -\infty \Rightarrow \text{prava } x=\frac{1}{e} \text{ je vertikalna asimptota funkcije}$$

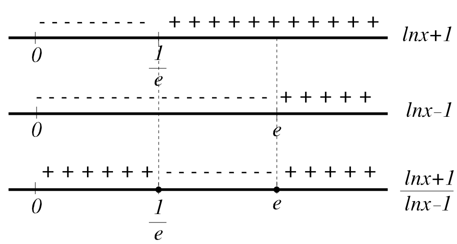
$$\lim_{x\to e^{\pm}} \ln\left|\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\right| = \infty \Rightarrow \text{prava } x=e \text{ je vertikalna asimptota funkcije}$$

$$\lim_{x\to \infty} \ln\left|\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\right| = 0 \Rightarrow \text{prava } y=0 \text{ je horizontalna asimptota funkcije}$$

Funkcija nema kosu asimptotu.

Za nalaženje izvoda, potrebno je da se oslobodimo apsolutne zagrade...

$$f(x)=\ln\left|\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\right|$$

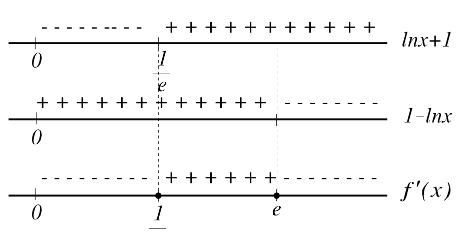


$$f(x)=\begin{cases} \ln\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}, & x\in(0,\ \frac{1}{\mathrm{e}})\cup(e,\ \infty) \\ \ln\dfrac{\ln x+1}{1-\ln x}, & x\in(\frac{1}{e},\mathrm{e}) \end{cases}$$

5) Monotonost i ekstremne vrednosti

za $x\in(0,\frac{1}{\mathrm{e}})\cup(\mathrm{e},\infty)$

$$f'(x)=\frac{\ln x-1}{\ln x+1}\cdot\frac{\frac{1}{x}(\ln x-1)-(\ln x+1)\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x-1)^2}=\frac{-2}{x(\ln^2 x-1)}=\frac{2}{x(1-\ln^2 x)}$$



$f'(x) < 0$ za $x \in (0, \frac{1}{\mathrm{e}}) \cup (\mathrm{e}, \infty)$ funkcija opada

Funkcija nema ekstremnih vrednosti.

za $x \in (\frac{1}{e},\ e)$

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{\ln x + 1} \cdot \frac{\frac{1}{x}\cdot(1-\ln x) + (\ln x + 1)\cdot\frac{1}{x}}{(1-\ln x)^2} = \frac{2}{x(1-\ln^2 x)}$$

$f'(x) > 0$ za $x \in (\frac{1}{e},\ e)$ funkcija raste

Funkcija nema ekstremnih vrednosti.

6) Tangente funkcije

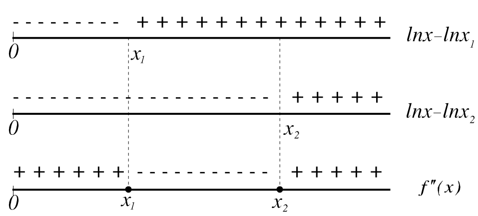
$$tg\alpha = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x(1-\ln^2 x)} = 2\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{1-\ln^2 x} = 2\lim_{x\to 0^+} \frac{-x^{-2}}{-2\ln x \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{\ln x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^{-2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty \ \Rightarrow\ \alpha = -\frac{\pi}{2}$$

7) Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke

$$f''(x) = \frac{-2\left[1-\ln^2 x + x(-2\ln x)\cdot\frac{1}{x}\right]}{x^2(1-\ln^2 x)^2} = \frac{2(\ln^2 x + 2\ln x - 1)}{x^2(1-\ln^2 x)^2}$$

$\ln^2 x + 2\ln x - 1 = 0$, $\ln x = t$, $t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$, $x_1 = e^{-1-\sqrt{2}}$, $x_2 = e^{-1+\sqrt{2}}$

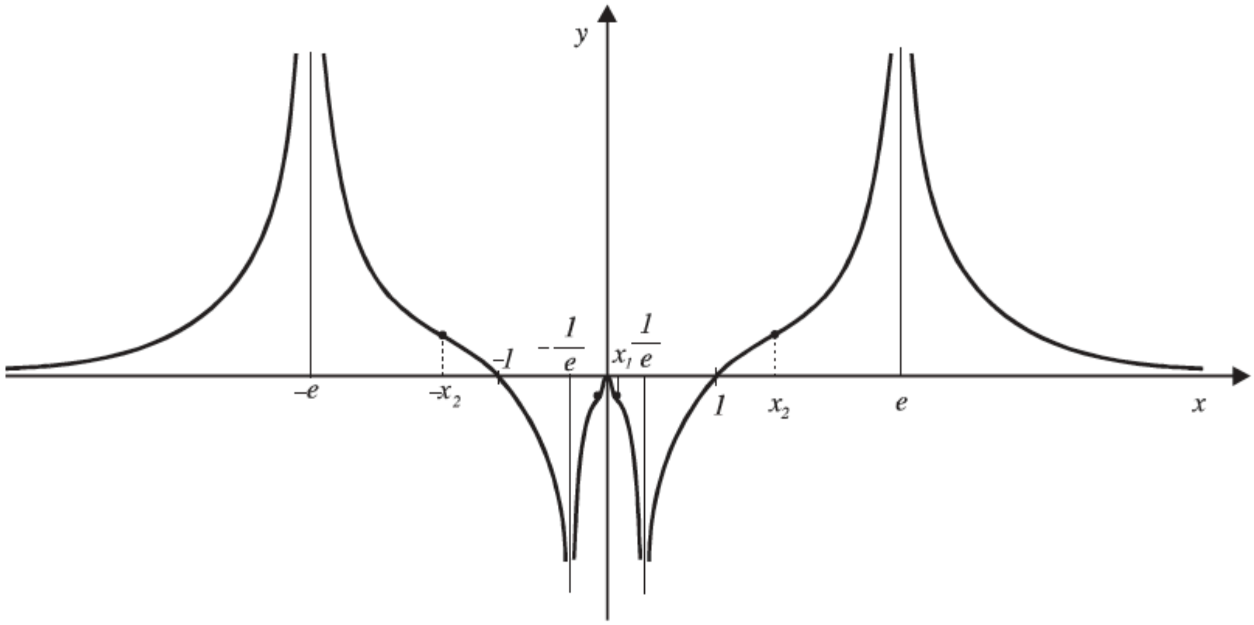


$f''(x) > 0$ za $x \in (0, x_1) \cup (x_2, e) \cup (e, \infty)$ funkcija je konveksna

$f''(x) < 0$ za $x \in (x_1, \frac{1}{\mathrm{e}}) \cup (\frac{1}{e}, x_2)$ funkcija je konkavna

Tačke $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ su prevojne tačke funkcije ($f(x_1) \approx -0{,}88$, $f(x_2) \approx 0{,}87$).

8) Grafik funkcije



☺