SV 29/2020 Katarina Vučić
SV 18/2020 Milica Sladaković

DOMAĆI 1

1. Ako uzmemo u obzir da je u definiciji for petlje u pseudokodu gornja granična vrijednost inkluzivna, korak 5 se izvrši ukupno $k \cdot n \cdot m$ puta, odnosno, ako svaku od for petlji obilježimo kao skupove K, M i N, slijedi da je, po principu proizvoda, $|K \times M \times N| = |K| \times |M| \times |N| = k \cdot m \cdot n$, gdje su k, m, n respektivno kardinalnosti skupova K, M, N.

2. 8, 9, 10, 11, 12 karaktera
30×2 - slova, 10 - cifre, 6 - specijalni simboli
$\Rightarrow$ ukupno 76 različitih mogućnosti za karaktere

a) $76^8 + 76^9 + 76^{10} + 76^{11} + 76^{12} = S$
(na svako mjesto može jedan od 76 simbola)

b) $S - (70^8 + 70^9 + 70^{10} + 70^{11} + 70^{12})$
(ukupan broj različitih lozinki S umanjen za broj lozinki bez specijalnih simbola)

c) $S \cdot 10^{-9}$ s $>$ 435,5 miliona dana ...

3. $30^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}$

gdje je 30 broj slova, a količnik $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ predstavlja cjelobrojni količnik broja slova u palindromu uvećan za 1 (da bi tvrdnja važilo i za parno i za neparno n) i broja 2, zaokružen na najbliži manji cijeli broj (jer se druga polovina riječi ponavlja, a u sredini može da bude pozicija za slovo koja nema svoj par)

4. Mogući ostaci pri dijeljenju sa n pripadaju skupu $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ i broj članova tog skupa je n.
Na raspolaganju imamo $n+1$ prirodnih brojeva, pa prema Dirihleovom principu postoje dva broja sa istim ostatkom. Upravo je razlika ta dva broja djeljiva sa n.

5. Zbirovi kombinacija brojeva $\{-1, 0, 1\}$ sa 4 sabirka pripadaju skupu $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.
Broj članova tog skupa je 9, odnosno postoji 9 različitih zbirova.

Postoje 4 kolone, 4 vrste i 2 dijagonale, odnosno ukupno 10 zbirova koji se razmatraju.

Prema Dirihleovom principu, pošto imamo 9 mogućih zbirova a računamo 10, dva će sigurno ista.

6. Treba dokazati da $10000 \mid 7^n - 1$.
Pošto 7^n nije djeljivo sa 10000, posmatrajmo dva dovoljno velika broja 7^a i 7^b čija je razlika djeljiva sa 10000.

$7^a - 7^b = 7^b(7^{a-b} - 1)$

$10000 \nmid 7^b \Rightarrow 10000 \mid 7^{a-b} - 1$, odnosno postoji broj n takav da se 7^n završava na 0001

* Znamo da postoje dva broja 7^a i 7^b sa istim ostatkom pri dijeljenju sa 10000 jer postoje 10000 ostataka i praktično neograničen broj brojeva oblika 7^k $(k \in \mathbb{N})$, prema Dirihleovom principu.

7. Prema uopštenom Dirihleovom principu i obzirom da važi $96 = 3 \cdot 30 + 6$, sigurno postoji bar jedna grupa sa 4+ ljudi čije prezime počinje istim slovom.

8. Pokušajmo rasporediti studente tako da za 5 računara ne sjedi više od 3 studenta.
Rasporedimo 6 studenata na 4 računara, ostaje $50-24=26$ studenata (baš po 6 na 4 da bismo minimizovali broj preostalih studenata na preostalim računarima).
Sada, da bismo pokušali ostvariti našu zamisao, raspoređujemo 26 studenata na $13-4=9$ računara $\Rightarrow 26 = 2\cdot 9 + 8$, što nam zamišljeno raspoređivanje čini nemogućim jer će se sigurno naći bar jedan računar sa 3+ studenta (prema Dirihleovom principu), što sa ona 4 računara sa 6 studenata čini sigurno bar 5 računara sa 3+ studenta.