Как видим, на плоскости xOy можно выделить несколько фигур, ограниченных заданными кривыми. Далее будем рассматривать фигуру, ограниченную снизу параболой $y = x^2 + x - 1$, а сверху – прямой $y = 3 - x/2$ в ее левой части и параболой $y = -x^2 + 3x + 4$ – в правой.

Чтобы определить соответствующие области изменения координаты y для каждого участка, найдем координаты точек пересечения кривых. Сначала зададим их уравнения.

```
In[38]:= eq1 = y == x^2 + x - 1;
         eq2 = y == -x^2 + 3 x + 4;
         eq3 = y == -x / 2 + 3;
```

Очевидно, крайняя левая точка фигуры является точкой пересечения параболы $y = x^2 + x - 1$ и прямой $y = 3 - x/2$. Координаты этой точки находим как решение системы уравнений *eq1* и *eq3*.

```
In[41]:= sol1 = Solve[{eq1, eq3}, {x, y}]
```

Out[41]= $\left\{\left\{y \to \frac{1}{8}\left(27 - \sqrt{73}\right),\ x \to \frac{1}{4}\left(-3 + \sqrt{73}\right)\right\},\right.$
$\left.\left\{y \to \frac{1}{8}\left(27 + \sqrt{73}\right),\ x \to \frac{1}{4}\left(-3 - \sqrt{73}\right)\right\}\right\}$

Так как имеются две точки пересечения параболы и прямой, получили два решения. Интересующей нас точке соответствует отрицательное значение координаты x, т.е. второе решение системы. Поэтому первое граничное значение x задаем в виде:

```
In[42]:= x1 = x /. sol1[[2]]
```

Out[42]= $\frac{1}{4}\left(-3 - \sqrt{73}\right)$

Вторая граничная точка определяется из условия пересечения прямой $y = 3 - x/2$ и параболы $y = -x^2 + 3x + 4$. Решая соответствующую систему, находим:

```
In[43]:= sol2 = Solve[{eq2, eq3}, {x, y}]
```

Out[43]= $\left\{\left\{y \to \frac{1}{8}\left(17 - \sqrt{65}\right),\ x \to \frac{1}{4}\left(7 + \sqrt{65}\right)\right\},\right.$
$\left.\left\{y \to \frac{1}{8}\left(17 + \sqrt{65}\right),\ x \to \frac{1}{4}\left(7 - \sqrt{65}\right)\right\}\right\}$

Поскольку интересующая нас фигура располагается выше параболы $y = x^2 + x - 1$, в качестве второй граничной точки выбираем второй корень из *sol2*.

```
In[44]:= x2 = x /. sol2[[2]]
```

Out[44]= $\frac{1}{4}\left(7 - \sqrt{65}\right)$

Третья граничная точка является точкой пересечения двух парабол. Ее координаты находим, решая систему уравнений *eq1* и *eq2*.


```
In[45]:= sol3 = Solve[{eq1, eq2}, {x, y}]
```

Out[45]= $\left\{\left\{y \to \frac{1}{2}\left(5 - 2\sqrt{11}\right),\ x \to \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{11}\right)\right\},\right.$
$\left.\left\{y \to \frac{1}{2}\left(5 + 2\sqrt{11}\right),\ x \to \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{11}\right)\right\}\right\}$

Крайней правой точке рассматриваемой фигуры соответствует второй корень в *sol3*.

```
In[46]:= x3 = x /. sol3[[2]]
```

Out[46]= $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{11}\right)$

Итак, при изменении координаты x в пределах отрезка $x_1 \le x \le x_2$ пластинка ограничивается параболой $y = x^2 + x - 1$ и прямой $y = 3 - x/2$, т.е. координата y точек пластинки изменяется в пределах

$$x^2 + x - 1 \le y \le 3 - x/2,$$

а при $x_2 < x \le x_3$ имеем:

$$x^2 + x - 1 \le y \le -x^2 + 3x + 4,$$

т.е. соответствующие точки находятся между двумя параболами.

Разбиваем пластинку на маленькие кусочки площадью $dx\,dy$. Для определения площади всей пластинки нужно сложить площади всех кусочков, т.е. вычислить следующий двойной интеграл (обратите внимание на пределы интегрирования):

```
In[47]:= S = Integrate[1, {x, x1, x2}, {y, x^2 + x - 1, 3 - x / 2}] +
          Integrate[1, {x, x2, x3},
           {y, x^2 + x - 1, -x^2 + 3 x + 4}] // Simplify
```

Out[47]= $\frac{1}{96}\left(60 + 176\sqrt{11} + 65\sqrt{65} + 73\sqrt{73}\right)$

Так как координаты граничных точек заданы точно, для площади мы также получили точное выражение.

Положение центра масс определяется следующими формулами:

$$x_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\, x_i,\quad y_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\, y_i.$$

Предполагая, что пластинка однородна, считаем, что масса каждого кусочка пропорциональна его площади, т.е. $m_i \to \frac{m}{S}\,dx\,dy$. Тогда координата x центра масс пластинки равна: