Technische Universität Berlin

Ana1LinA – Hausaufgabe 09

Felix 09

Autoren: Fabian Aps:525528, Joris Victor Vorderwülbecke:0528715, Emil Arthur Joseph Hartmann:052542, Friedrich Ludwig Finck:0526329

19. Dezember 2025

Inhaltsverzeichnis

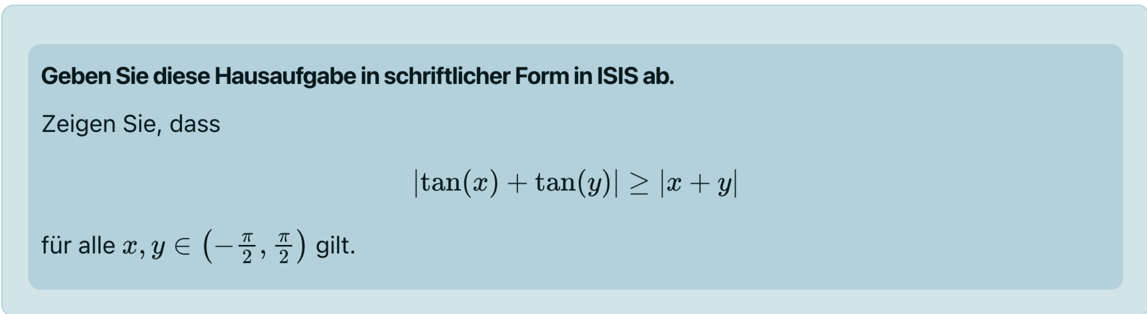
Kapitel 1

Aufgabe

Geben Sie diese Hausaufgabe in schriftlicher Form in ISIS ab.
Zeigen Sie, dass

$$|\tan(x) + \tan(y)| \geq |x + y|$$

für alle $x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ gilt.


Geben Sie diese Hausaufgabe in schriftlicher Form in ISIS ab.

Zeigen Sie, dass

$$|\tan(x) + \tan(y)| \geq |x + y|$$

für alle $x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ gilt.

Original Aufgabenstellung

Kapitel 2

Lösung zur Aufgabe

Um die Behauptung zu beweisen, nutzen wir den **Mittelwertsatz der Differentialrechnung** (MWS).

Sei $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(t) = \tan(t)$. Die Funktion f ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich differenzierbar mit der Ableitung:

$$f'(t) = 1 + \tan^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$$

Fallunterscheidung:

1. **Fall** $x = -y$**:**
   In diesem Fall gilt $x + y = 0$. Es folgt:

   $$|\tan(x) + \tan(-x)| = |\tan(x) - \tan(x)| = 0 \geq 0 = |x - x|$$

   Die Ungleichung ist also trivialerweise erfüllt.

2. **Fall** $x \neq -y$**:**
   Wir betrachten das Intervall zwischen x und $-y$. Da $x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, liegt auch $-y$ in diesem Intervall. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $-y < x$. Da $f(t) = \tan(t)$ auf dem Intervall $[-y, x]$ stetig und auf $(-y, x)$ differenzierbar ist, existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (-y, x)$ mit:

   $$\frac{f(x) - f(-y)}{x - (-y)} = f'(\xi)$$

   Einsetzen der Funktion und ihrer Ableitung ergibt:

   $$\frac{\tan(x) - \tan(-y)}{x + y} = 1 + \tan^2(\xi)$$

   Unter Verwendung der Identität $\tan(-y) = -\tan(y)$ erhalten wir:

   $$\frac{\tan(x) + \tan(y)}{x + y} = 1 + \tan^2(\xi)$$

   Durch Anwendung des Betrags folgt:

   $$\left|\frac{\tan(x) + \tan(y)}{x + y}\right| = |1 + \tan^2(\xi)|$$

Da $\tan^2(\xi) \geq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ gilt, folgt $1 + \tan^2(\xi) \geq 1$. Somit:

$$\frac{|\tan(x) + \tan(y)|}{|x + y|} \geq 1$$

Multiplikation mit $|x + y|$ (da $x \neq -y$ ist $|x + y| > 0$) liefert die gewünschte Ungleichung:

$$|\tan(x) + \tan(y)| \geq |x + y|$$

Damit ist die Behauptung für alle $x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ bewiesen.