Technische Universität Berlin

Ana1LinA – Hausaufgabe 05

Felix 09

Autoren: Fabian Aps:525528, Joris Victor Vorderwülbecke:0528715, Emil Arthur Joseph Hartmann:052542, Friedrich Ludwig Finck:0526329

18. November 2025

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Aufgabenstellung

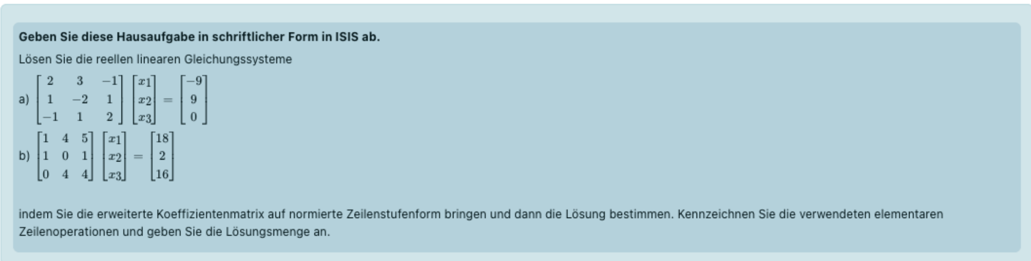
Die Hausaufgabe verlangt die Lösung der folgenden reellen linearen Gleichungssysteme, indem die erweiterte Koeffizientenmatrix auf **normierte Zeilenstufenform** gebracht wird. Die verwendeten elementaren Zeilenoperationen sind zu kennzeichnen und die Lösungsmenge ist anzugeben.

a)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 2 \\ 16 \end{bmatrix}$$



Geben Sie diese Hausaufgabe in schriftlicher Form in ISIS ab.

Lösen Sie die reellen linearen Gleichungssysteme

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 2 \\ 16 \end{bmatrix}$

indem Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix auf normierte Zeilenstufenform bringen und dann die Lösung bestimmen. Kennzeichnen Sie die verwendeten elementaren Zeilenoperationen und geben Sie die Lösungsmenge an.

Abbildung 1.1: Abbildung der Aufgabenstellung.

Kapitel 2

Lösung des linearen Gleichungssystems a)

Das Gleichungssystem a) lautet:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wir verwenden das Gauß-Jordan-Verfahren, um die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A|\vec{b}]$ in die normierte Zeilenstufenform zu überführen.

2.1 Überführung in die normierte Zeilenstufenform

Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & | & -9 \\ 1 & -2 & 1 & | & 9 \\ -1 & 1 & 2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -9 \\ 1 & -2 & 1 & 9 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]
\xrightarrow{\mathsf{Z}_1 \leftrightarrow \mathsf{Z}_2}
\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -2 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & -1 & -9 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[\mathsf{Z}_3 \leftarrow \mathsf{Z}_3 + \mathsf{Z}_1]{\mathsf{Z}_2 \leftarrow \mathsf{Z}_2 - 2\cdot\mathsf{Z}_1}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 9 \\ 0 & \mathbf{7} & -3 & -27 \\ 0 & -1 & 3 & 9 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{\mathsf{Z}_2 \leftrightarrow \mathsf{Z}_3}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & 7 & -3 & -27 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[\mathsf{Z}_3 \leftarrow \mathsf{Z}_3 - 7\cdot\mathsf{Z}_2]{\mathsf{Z}_2 \leftarrow -1\cdot\mathsf{Z}_2}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 9 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 18 & 36 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{\mathsf{Z}_3 \leftarrow \frac{1}{18}\cdot\mathsf{Z}_3}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[\mathsf{Z}_2 \leftarrow \mathsf{Z}_2 + 3\cdot\mathsf{Z}_3]{\mathsf{Z}_1 \leftarrow \mathsf{Z}_1 + 2\cdot\mathsf{Z}_2}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{\mathsf{Z}_1 \leftarrow \mathsf{Z}_1 + 5\cdot\mathsf{Z}_3}
\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right]
$$

2.2 Lösung und Lösungsmenge

Die normierte Zeilenstufenform liefert die eindeutige Lösung:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 2$$

Der Rang der Koeffizientenmatrix ist $\text{Rang}(A) = 3$, und der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix ist $\text{Rang}([A|\vec{b}]) = 3$. Da dies der Anzahl der Variablen entspricht, existiert eine eindeutige Lösung.

Die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ ist:

$$\mathcal{L}_a = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Kapitel 3

Lösung des linearen Gleichungssystems b)

Das Gleichungssystem b) lautet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 2 \\ 16 \end{bmatrix}$$

3.1 Überführung in die normierte Zeilenstufenform

Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & | & 18 \\ 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 4 & 4 & | & 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 4 & 5 & | & 18 \\ 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 4 & 4 & | & 16 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\mathsf{Z}_2 \leftarrow \mathsf{Z}_2 - \mathsf{Z}_1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & | & 18 \\ 0 & -4 & -4 & | & -16 \\ 0 & 4 & 4 & | & 16 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow{\mathsf{Z}_2 \leftarrow -\frac{1}{4} \cdot \mathsf{Z}_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & | & 18 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & | & 4 \\ 0 & 4 & 4 & | & 16 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow[\mathsf{Z}_3 \leftarrow \mathsf{Z}_3 - 4 \cdot \mathsf{Z}_2]{\mathsf{Z}_1 \leftarrow \mathsf{Z}_1 - 4 \cdot \mathsf{Z}_2} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Die resultierende Matrix ist in der normierten Zeilenstufenform.

3.2 Lösung und Lösungsmenge

Die normierte Zeilenstufenform entspricht dem folgenden Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 4 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Der Rang der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix ist Rang$(A) =$ Rang$([A|\vec{b}]) = 2$. Da dieser Rang kleiner als die Anzahl der Variablen ($n = 3$) ist, existieren unendlich viele Lösungen.

Wir wählen x_3 als freien Parameter $t \in \mathbb{R}$:

$$x_3 = t$$

Wir lösen nach den Basisvariablen x_1 und x_2 auf:

$$\begin{aligned} x_1 = 2 - x_3 \quad &\Longrightarrow \quad x_1 = 2 - t \\ x_2 = 4 - x_3 \quad &\Longrightarrow \quad x_2 = 4 - t \end{aligned}$$

Der Lösungsvektor $\vec{x}$ ist:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - t \\ 4 - t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die Lösungsmenge $\mathcal{L}_b$ ist:

$$\mathcal{L}_b = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$