15. Lineare Abbildungen

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

18.11.2025

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{II - I} \left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Rang$(A) = 1 \neq 2 =$ Anzahl Spalten

$\Rightarrow$ A nicht invertierbar

3) $$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 12 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \dots \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{I + 2II} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrixabbildungen

Beobachtung: $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ beschreibt eine Abbildung:

$$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad f(x) = Ax$$

Eigenschaften: Seien $x, y \in \mathbb{K}^n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt:

(1) $f(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = f(x) + f(y)$

(2) $f(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda f(x)$

Matrixmultiplikation $\widehat{=}$ Komposition:

Sei $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(x) = A \cdot x$ und $g : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^p$, $g(x) = B \cdot x$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \mathbb{K}^m \arrow[r, "g"] & \mathbb{K}^p \end{tikzcd}$$

Dann $g \circ f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$, $x \mapsto (B \cdot A)x$, denn

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(Ax) = B \cdot Ax = (B \cdot A)x$$

Definition: Seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt linear, wenn für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

(1) $f(v + w) = f(v) + f(w)$,

(2) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

Die Menge aller linearen Abbildungen von V nach W wird mit $L(V, W)$ bezeichnet.

Bemerkung: Sei $f : V \to W$ linear. Dann gilt:

1) $f(\underset{\text{Vektor}}{0}) = f(\underset{\text{Skalar}}{0} \cdot v) \overset{(2)}{=} 0 \cdot f(v) = 0$

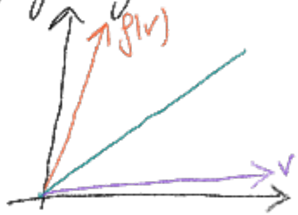
2) Sei $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$. Dann $f(v) = f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j\right) \overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j v_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(v_j)$

Beispiele:

1) $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ beschreibt $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $x \mapsto Ax$ eine lineare Abbildung

Beispiele

2) Spiegelung an der Winkelhalbierender



$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_2\\x_1\end{bmatrix}$$ ist linear, denn

Seien $v=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}$, $w=\begin{bmatrix}w_1\\w_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$, $\lambda\in\mathbb{R}$, dann gilt

1) $$f(v+w)=f\left(\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}w_1\\w_2\end{bmatrix}\right)=f\left(\begin{bmatrix}v_1+w_1\\v_2+w_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}v_2+w_2\\v_1+w_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_2\\v_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}w_2\\w_1\end{bmatrix}=f(v)+f(w)$$

2) $$f(\lambda v)=f\left(\lambda\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}\right)=f\left(\begin{bmatrix}\lambda v_1\\\lambda v_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\lambda v_2\\\lambda v_1\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}v_2\\v_1\end{bmatrix}=\lambda f(v)$$

2) $$f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^{2,2}$$ mit $$f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2x_1+x_2 & 2x_1\\0 & x_2\end{bmatrix},$$

z.B. $$f\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\cdot1+2 & 2\cdot1\\0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 2\\0 & 2\end{bmatrix}$$

ist linear, denn $v=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}$, $w=\begin{bmatrix}w_1\\w_2\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^2$

1) $$f(v+w)=f\left(\begin{bmatrix}v_1+w_1\\v_2+w_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2(v_1+w_1)+(v_2+w_2) & 2(v_1+w_1)\\0 & (v_2+w_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2v_1+v_2 & 2v_1\\0 & v_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2w_1+w_2 & 2w_1\\0 & w_2\end{bmatrix}$$

Beispiele

$$= f(v) + f(w)$$

2) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ analog.

3) $f: \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, $f(p) = p'$, z.B. $f(3x^2+4x) = 6x+4$

ist linear, denn

- $f(p+q) = (p+q)' = p' + q' = f(p) + f(q)$
- $f(\lambda p) = (\lambda p)' = \lambda p' = \lambda f(p)$

4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist nich linear, denn für $x=2$, $\lambda = 2$

- $f(\lambda x) = f(2 \cdot 2) = f(4) = 4^2 = 16$
- $\lambda f(x) = 2 f(2) = 2 \cdot 2^2 = 2 \cdot 4 = 8$

$$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} f(\lambda x) \neq \lambda f(x)$$

$A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{m,n}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$. Dann gilt:

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12}x_2 \\ \vdots \\ a_{m2}x_2 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$= x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$ wobei $A = [a_1 \dots a_n]$ also a_i i-te Spalte

Satz: Ist $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ linear, dann gibt es eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ mit $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$. Dabei enthält $A = [a_1, \dots, a_n]$ die Bilder der Vektoren:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

d.h. $a_1 = f(e_1), \dots, a_n = f(e_n)$.

Beweis: Sei $a_i = f(e_i)$ und $A = [a_1 \dots a_n]$. Dann gilt für $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$$f(x) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) \overset{\text{Linearität}}{=} \sum_{i=1}^{n} f(x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = Ax$$

Beispiele

1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ f(e_1) = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \cdot\ f(e_2) = f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \text{ also } f(x) = Ax \text{ mit } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Probe $Ax = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$

2) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_3 \\ 2x_2 + x_3 \end{bmatrix}$ ist linear (nachrechnen!)

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ f(e_1) = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \cdot\ f(e_2) = f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \cdot\ f(e_3) = f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} f(x) = Ax \text{ mit } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Eigenschaften

Defintion: Seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Für $f, g \in L(V, W)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ definieren wir

$$f + g : V \to W, \quad v \mapsto (f+g)(v) := f(v) + g(v),$$
$$\lambda f : V \to W, \quad v \mapsto (\lambda f)(v) := \lambda f(v).$$

Satz: Seien V, W, X $\mathbb{K}$-Vektorräume.

(1) Ist $f : V \to W$ linear, so gilt $f(0) = 0$.

(2) Seien $f, g : V \to W$ linear und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann sind $f + g$ und λf linear.

(3) $L(V, W)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(4) Sind $f : V \to W$ und $g : W \to X$ linear, so ist auch die Komposition

$$g \circ f : V \to X \quad \text{linear.}$$

(5) Ist $f : V \to W$ linear und bijektiv, so ist auch die Umkehrabbildung

$$f^{-1} : W \to V \quad \text{linear.}$$

Rechenregeln für Lineare Abbildungen

Für lineare Abbildungen f, g, h und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt (falls die Verknüpfungen definiert sind)

(1) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$,

(2) $f \circ (g + h) = (f \circ g) + (f \circ h)$,

(3) $(f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$,

(4) $\alpha(f \circ g) = (\alpha f) \circ g = f \circ (\alpha g)$,

(5) $\mathrm{id} \circ f = f = f \circ \mathrm{id}$.

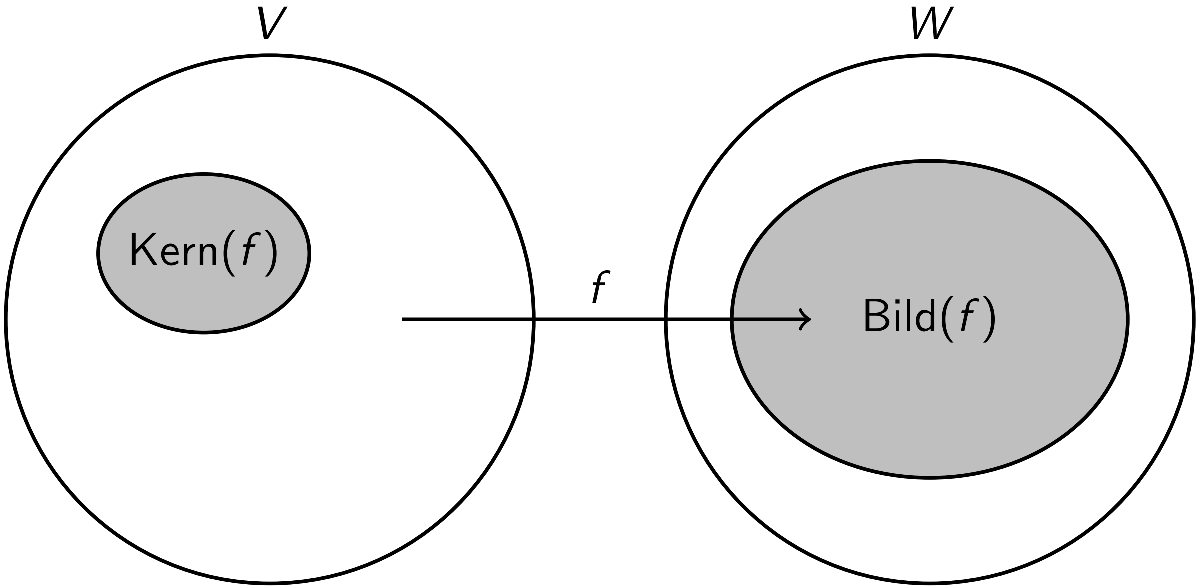
Definition: Sei $f : V \to W$ linear.

(1) Der Kern von f ist das Urbild von 0:

$$\mathrm{Kern}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\} = f^{-1}(\{0\}).$$

(2) Das Bild von f ist die Menge

$$\mathrm{Bild}(f) = f(V) = \{f(v) \mid v \in V\}.$$



$\mathrm{Kern}(f) \subseteq V$ $\qquad$ $\mathrm{Bild}(f) \subseteq W$

Spezialfall:

Satz: Sei $f : V \to W$ linear.

(1) $\text{Kern}(f)$ ist ein Teilraum von V.

(2) $\text{Bild}(f)$ ist ein Teilraum von W.

Beispiele:

Beispiele

Basis des Kerns einer Matrix

Spezialfall: $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $f(x) = Ax$.

Erinnerung: $\text{Kern}(A) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\} = \mathbb{L}(A, 0)$

Bemerkung: $\dim(\text{Kern}(A)) = n - \text{Rang}(A)$

Basis des Bildes

Bemerkung: Sei $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ mit $A = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix}$. Für $x \in \mathbb{K}^n$ ist

$$Ax = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j,$$

also die Linearkombination der Spalten von A mit den Koeffizienten $x_1, \ldots, x_n$. Daher ist

$$\mathrm{Bild}(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{K}^n\} = \mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_n\}.$$

Berechnung des Bildes von A:

(1) Bringe A in Zeilenstufenform.

(2) Spaltenvektoren von A, die zu Pivotelementen in ZSF von A gehören, bilden Basis des Bildes.

Bemerkung: $\dim(\mathrm{Bild}(A)) = \mathrm{Rang}(A)$

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

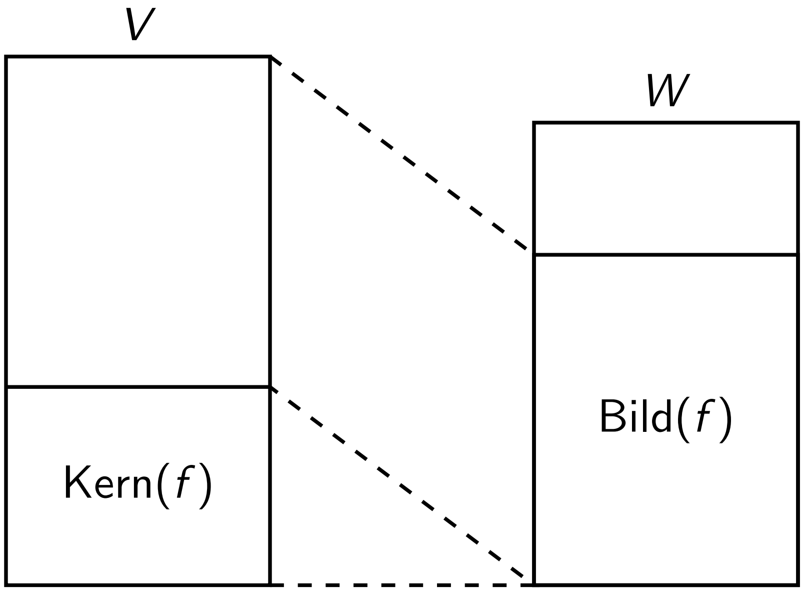
15.3 Dimensionsformel

Satz: Für $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ erhalten wir

$$\dim(\mathrm{Kern}(A)) + \dim(\mathrm{Bild}(A)) = n - \mathrm{Rang}(A) + \mathrm{Rang}(A) = n = \dim(\mathbb{K}^n).$$

Satz: Sei $f : V \to W$ linear und V endlichdimensional. Dann gilt

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)).$$



Folgerungen aus der Dimensionsformel

Satz: Sei $f : V \to W$ linear. Dann gilt:

(1) f ist injektiv $\Leftrightarrow \operatorname{Kern}(f) = \{0\} \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Kern}(f)) = 0$.

(2) f ist surjektiv $\Leftrightarrow \operatorname{Bild}(f) = W \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Bild}(f)) = \dim(W)$.

Dabei gilt die letzte Äquivalenz nur falls $\dim(W) < \infty$.

(3) Wenn $\dim(V) = \dim(W) < \infty$, so gilt:

f ist bijektiv $\Leftrightarrow$ f ist injektiv $\Leftrightarrow$ f ist surjektiv.