

### 3. Vorlesung - Komplexe Zahlen

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

21.10.2025



## 2.6 Summenzeichen - Rechenregeln

- $\sum_{k=m}^n x_k + \sum_{k=m}^n y_k = \sum_{k=m}^n (x_k + y_k).$
- $\sum_{k=m}^n a x_k = a \sum_{k=m}^n x_k.$
- $\sum_{k=m}^n x_k \sum_{l=p}^q y_l = \sum_{k=m, l=p}^{n, q} (x_k y_l).$
- $\sum_{k=m}^n x_k = \sum_{k=m}^p x_k + \sum_{k=p+1}^n x_k, \text{ falls } m \leq p \leq n.$
- $\sum_{k=m}^n x_k = \sum_{k=m-1}^{n-1} x_{k+1} \text{ (Indexverschiebung)}$

**Geometrische Summe:** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $q \in \mathbb{R}$ :

$$\sum_{k=0}^n q^k = q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{für } q \neq 1 \\ n+1 & \text{für } q = 1 \end{cases}$$

z.B. B:  $\sum_{k=0}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^k$

**Beweis:**

$$\text{Sei } S = \sum_{k=0}^n q^k = q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^n, \quad qS = q^1 + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}$$

$$\Rightarrow S - qS = q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^n - q^1 - q^2 - q^3 - \dots - q^n - q^{n+1} = q^0 - q^{n+1}$$

$\Rightarrow S = \frac{q^0 - q^{n+1}}{1 - q}$

## Pingo Umfrage



Es gilt  $2^6 = 64$ . Berechne  $\sum_{k=0}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^k$ .

$\frac{63}{128}$

$\frac{63}{64}$

$\frac{63}{32}$

64

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } \sum_{k=0}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{64}}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{64}}{\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{1}{64}\right) \cdot 2 \\ &= \left(\frac{64}{64} - \frac{1}{64}\right) \cdot 2 = \frac{63}{64} \cdot 2 \\ &= \frac{63}{32} \end{aligned}$$

### 3.1 Definition und Grundrechenarten

Problem: Gleichungen wie  $x^2 + 1 = 0$  haben keine Lösung in  $\mathbb{R}$ .

#### Definition:

- a) **Imaginäre Einheit:**  $i$  ist eine Zahl mit  $i^2 = -1$
- b) **Menge der komplexen Zahlen:**  $\mathbb{C} := \{x + y \cdot i \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
- c) Für  $a + bi, c + di \in \mathbb{C}$  sei:

- ▶  $(a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)i$
- ▶  $(a + bi) \cdot (c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i$

$$NR: a \cdot c + a \cdot di + bi \cdot c + bi \cdot di = a \cdot c - bd + (ad + bc)i$$

Bemerkungen:

$$b \cdot d \cdot i^2 = b \cdot d \cdot (-1)$$

- 1) in  $\mathbb{C}$  gelten „+“ und „·“ die gleichen Rechenregeln wie in  $\mathbb{R}$
- 2) Fasse  $x + 0 \cdot i \in \mathbb{C}$  als reelle Zahl auf, dann gilt  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
- 3)  $0 + y \cdot i$  heißt rein imaginäre Zahl

## 3.2 Gaußsche Zahlenebene

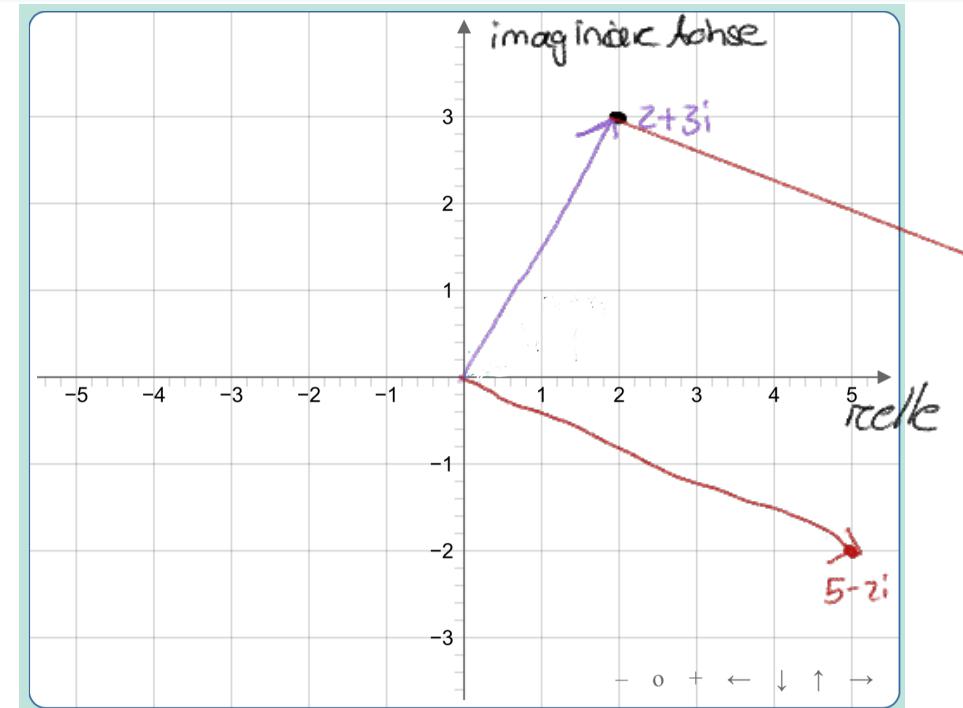
### Beispiele:

$$1) (2+3i) + (5-2i) = 7+i$$

$$\begin{aligned} 2) (4+2i)(3-i) &= 12 - 4i + 6i - 2i^2 \\ &= 12 - 4i + 6i + 2 = 14 + 2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) (x+iy)(x-iy) &= x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2 y^2 \\ &\stackrel{3. \text{ Binom. Formel}}{=} x^2 + y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \frac{3-i}{5+2i} \cdot \frac{5-2i}{5-2i} &= \frac{(3-i)(5-2i)}{5^2 + 2^2} = \frac{15-6i-5i-2}{29} \\ &= \frac{13-11i}{29} = \frac{13}{29} - \frac{11}{29}i \end{aligned}$$



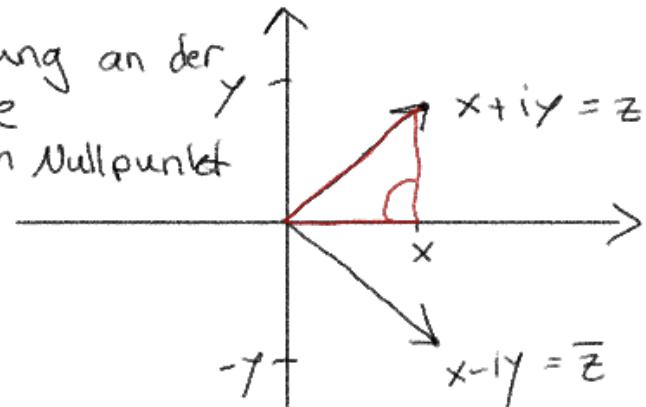
### 3.3 Absolutbetrag und Konjugierte

**Definition:** Sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dann heißt:

- a)  $\operatorname{Re}(z) := x$  **Realteil** von  $z$ .
- b)  $\operatorname{Im}(z) := y$  **Imaginärteil** von  $z$ .  $\operatorname{Im}(z)$  ist reell,  $iy$  ist nicht reell
- c)  $\bar{z} := x - iy$  die zu  $z$  **konjugiert komplexe Zahl**.  $\rightsquigarrow$  Spiegelung an der  $x$ -Achse
- d)  $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$  (Absolut-)Betrag von  $z$ .  $\rightsquigarrow$  Abstand zum Nullpunkt

**Beispiele:**  $z = 3 + 2i$

- $\operatorname{Re}(z) = 3$
- $\operatorname{Im}(z) = 2$
- $\bar{z} = 3 - 2i$
- $|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$



# Beispiele

## Pingo Umfrage



Für  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  gelte  $\operatorname{Re}(z_1) = 1$  und  $\operatorname{Im}(z_2) = 3$ .

Berechne  $\operatorname{Re}(z_1 + iz_2)$ :

- a) 4
- b) 2
- c) ~~-2~~
- d) 3

Sei  $z_1 = 1 + i b_1$  und  $z_2 = a_2 + 3i$

Dann  $iz_2 = ia_2 + i \cdot 3i = ia_2 - 3$

$\Rightarrow z_1 + iz_2 = 1 + i b_1 + ia_2 - 3 = \cancel{-2} + i(b_1 + a_2)$

# Rechenregeln

Sei  $z = x + yi \in \mathbb{C}$  dann gilt:

a)  $\bar{\bar{z}} = z$  , denn  $\bar{\bar{z}} = \overline{\overline{x+iy}} = \overline{x-iy} = x+iy = z$

b)  $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$  , denn  $z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = \cancel{x^2 + y^2}$

c)  $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$  und  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

d)  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

e)  $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{z}$

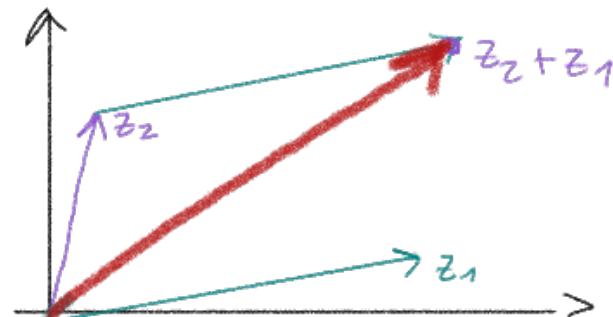
f)  $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$  , denn  $z + \bar{z} = (x+iy) + (x-iy) = x+x + \cancel{iy} - \cancel{iy} = 2x = z \operatorname{Re}(z)$

g)  $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$  , denn  $z - \bar{z} = (x+iy) - (x-iy) = \cancel{x+iy} - \cancel{x-iy} = iy + iy = 2iy = 2i \operatorname{Im}(z)$

# Rechenregeln für den Betrag

Sei  $z = x + yi \in \mathbb{C}$  dann gilt:

- a)  $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \geq 0$
- b)  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- c)  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
- d) Dreiecksungleichung:  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$



- e) Für  $x = x + 0 \cdot i \in \mathbb{R}$  gilt  $|x| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2}$ , d.h. für  $x \in \mathbb{R}$  stimmt der Betrag mit der Definition aus VL 2 überein.

### 3.4 Lösungen quadratischer Gleichungen

Löse  $z^2 + pz + q = 0$  für  $p, q \in \mathbb{R}$ .

Die  $p$ - $q$ -Formel liefert  $z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

1. Fall  $\frac{p^2}{4} - q > 0$  : zwei reelle Lösungen

2. Fall  $\frac{p^2}{4} - q = 0$  : eine reelle Lösung

3. Fall  $\frac{p^2}{4} - q < 0$ :

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} &= \sqrt{0 \left( q - \frac{p^2}{4} \right)} \quad \text{?} \\ &= \sqrt{i^2 (q - \frac{p^2}{4})} = \sqrt{i^2} \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \\ &= i \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \end{aligned}$$

# 3.4 Lösungen quadratischer Gleichungen

**Beispiel:** Löse  $z^2 + 2z + 5 = 0$ .

$$\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} p-q\text{-Formel: } z_{1/2} &= -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{2^2}{4} - 5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm \sqrt{i^2 \cdot 4} \\ &= -1 \pm i2 \end{aligned}$$

Also  $z_1 = -1 + 2i$

$$z_2 = -1 - 2i$$

Hier gilt insbesondere  $z_2 = \overline{z_1}$  ( $\leadsto$  VL 8)