Technische Universität Berlin

Ana1LinA – Hausaufgabe 06

Felix 09

Autoren: Fabian Aps:525528, Joris Victor Vorderwülbecke:0528715, Emil Arthur Joseph Hartmann:052542, Friedrich Ludwig Finck:0526329

28. November 2025

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Aufgabe 11

Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$, definiert durch:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} ia + b \\ 2ic \end{bmatrix}$$

Es sind folgende Teilaufgaben zu bearbeiten:

a) Zeigen Sie, dass f linear ist.

b) Finden Sie eine Matrix A, sodass $f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ für alle $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3$ gilt.

c) Bestimmen Sie Kern(f) und geben Sie eine Basis des Kerns an.

d) Ist f injektiv/surjektiv?

Hausaufgabe 6

Zurück

Frage **11**
Bisher nicht beantwortet
Erreichbare Punkte: 5,00
Frage markieren

Geben Sie diese Hausaufgabe in schriftlicher Form in ISIS ab.

Gegeben sei $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$, $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} ia + b \\ 2ic \end{bmatrix}$

a) Zeigen Sie, dass f linear ist.

b) Finden Sie eine Matrix A, sodass $f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ für alle $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3$ gilt.

c) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(f)$ und geben Sie eine Basis des Kerns an.

d) Ist f injektiv/surjektiv?

Kapitel 2

Lösung zu Aufgabe 11

2.1 a) Linearität von f

Zu zeigen ist, dass für alle $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{C}^3$ und alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

a) $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ **(Additivität)**

b) $f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$ **(Homogenität)**

Seien $\vec{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$.

Additivität:

$$
\begin{aligned}
f(\vec{u}+\vec{v}) = f\left(\begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} i(a_1+a_2) + (b_1+b_2) \\ 2i(c_1+c_2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (ia_1+b_1) + (ia_2+b_2) \\ 2ic_1 + 2ic_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ia_1 + b_1 \\ 2ic_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ia_2 + b_2 \\ 2ic_2 \end{bmatrix} \\
&= f(\vec{u}) + f(\vec{v})
\end{aligned}
$$

Homogenität:

$$
\begin{aligned}
f(\lambda\vec{u}) = f\left(\begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda b_1 \\ \lambda c_1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} i(\lambda a_1) + (\lambda b_1) \\ 2i(\lambda c_1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda(ia_1 + b_1) \\ \lambda(2ic_1) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} ia_1 + b_1 \\ 2ic_1 \end{bmatrix} \\
&= \lambda f(\vec{u})
\end{aligned}
$$

Da beide Eigenschaften erfüllt sind, ist f linear.

2.2 b) Matrixdarstellung A

Wir suchen eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{2\times 3}$, sodass gilt:

$$A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ia + b \\ 2ic \end{bmatrix}$$

Wir können den Ergebnisvektor als Linearkombination der Eingabekomponenten schreiben:

$$\begin{bmatrix} ia + b \\ 2ic \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \cdot a + 1 \cdot b + 0 \cdot c \\ 0 \cdot a + 0 \cdot b + 2i \cdot c \end{bmatrix}$$

Daraus lassen sich die Koeffizienten direkt in die Matrix A übertragen:

$$A = \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{bmatrix}$$

2.3 c) Kern von f

Der Kern von f ist die Menge aller Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{C}^3$, die auf den Nullvektor abgebildet werden, also $A\vec{x} = \vec{0}$. Wir lösen das homogene lineare Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daraus ergeben sich zwei Gleichungen:

a) $ia + b = 0 \implies b = -ia$

b) $2ic = 0 \implies c = 0$ (da $2i \neq 0$)

Die Variable a ist frei wählbar. Setzen wir $a = t$ mit $t \in \mathbb{C}$, so folgt $b = -it$. Der Lösungsvektor lautet somit:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} t \\ -it \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}$$

Der Kern ist also:

$$\text{Kern}(f) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

Eine Basis des Kerns ist:

$$\mathcal{B}_{\text{Kern}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

2.4 d) Injektivität und Surjektivität

Injektivität:
Eine lineare Abbildung ist genau dann injektiv, wenn ihr Kern nur den Nullvektor enthält (trivialer Kern). Aus Teilaufgabe c) wissen wir, dass $\text{Kern}(f) \neq \{\vec{0}\}$, da z.B. $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix} \in \text{Kern}(f)$. Daraus folgt: f ist **nicht injektiv**.

Surjektivität:
Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ ist surjektiv, wenn $\text{Bild}(f) = W$. Alternativ gilt der Dimensionssatz (Rangformel):

$$\dim(V) = \dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f))$$

Hier ist $V = \mathbb{C}^3$, also $\dim(V) = 3$. Aus c) wissen wir, dass $\dim(\text{Kern}(f)) = 1$ (da die Basis ein Element hat).

$$3 = 1 + \dim(\text{Bild}(f)) \implies \dim(\text{Bild}(f)) = 2$$

Der Zielraum ist $W = \mathbb{C}^2$, welcher ebenfalls die Dimension 2 hat. Da die Dimension des Bildes gleich der Dimension des Zielraums ist, muss das Bild der gesamte Zielraum sein. Daraus folgt: f ist **surjektiv**.