Bilanzierung und Kostenrechnung im H0104

5. Abbildungen

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

27.10.2025

Definition: Seien A, B Mengen. Eine Abbildung (auch Funktion) $f: A \to B$ ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in A$ genau ein Element $y = f(x) \in B$ zuordnet.

Man nennt A den Definitionsbereich und B den Wertebereich.

Schreibweise: $f: A \to B, \; x \mapsto y$ bzw. $f: A \to B, \; y = f(x)$

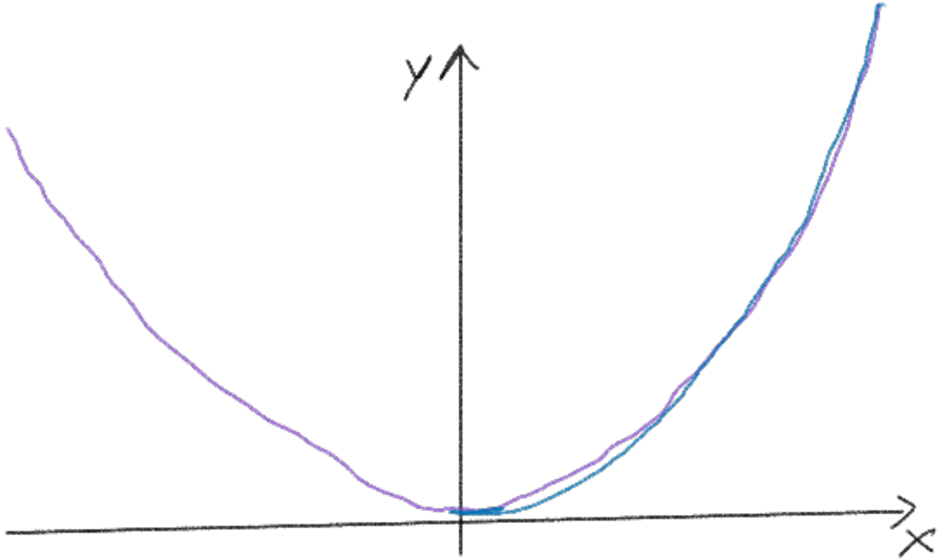
Beispiele:

1) $f(x) = x^2$ zu ungenau!

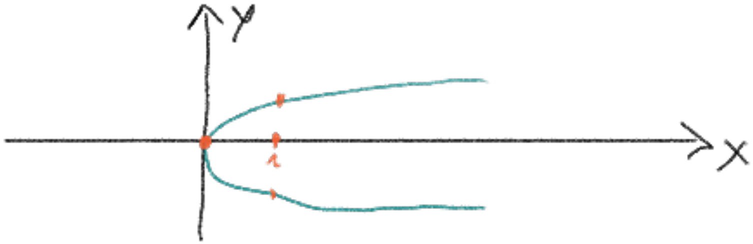
genauer: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto x^2$

oder: $f: [0, \infty[\to \mathbb{R}, \; x \mapsto x^2$

oder: $\tilde{f}: \mathbb{R} \to [0, \infty[, \; x \mapsto x^2$



2)



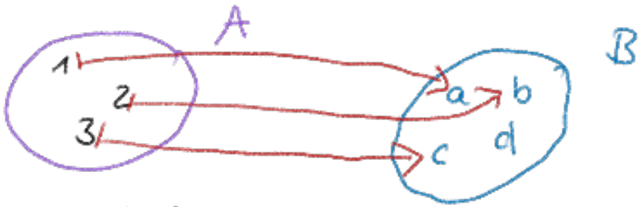
kein Graph einer Abbildung, da es zu jedem $x \in]0,\infty[$ immer zwei mgl. Funktionswerte

3) $A=\{1,2,3\}$ $\quad B=\{a,b,c,d\}$ $\quad f: A \to B$

$1 \mapsto a$

$2 \mapsto b$

$3 \mapsto c$



ist eine Abbildung.

4) A Menge. $Id_A : A \to A$, $a \mapsto a$

heißt Identität auf A

Für $A=\mathbb{R}$

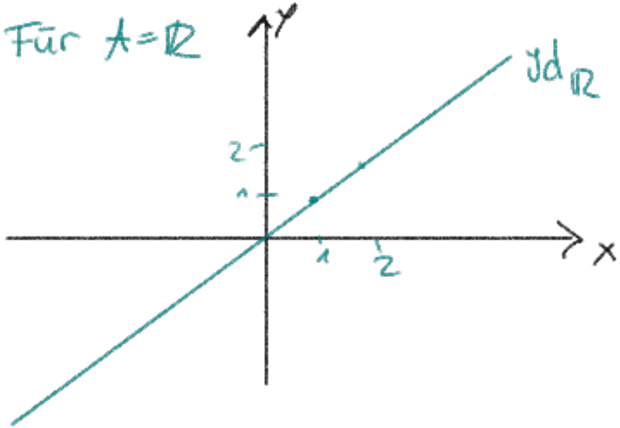
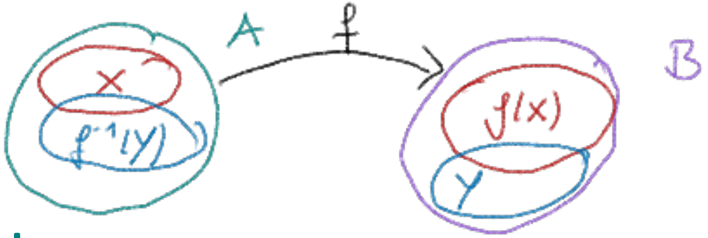


Bild und Urbild

Definition: Sei $f : A \to B$ eine Abbildung.

a) Für $X \subseteq A$ heißt $f(X) := \{f(x) | x \in X\}$ Bild von X. Insbesondere heißt $f(A) := \{f(x) | x \in A\}$ Bild von f.

b) Für $Y \subseteq B$ heißt $f^{-1}(Y) := \{x \in A | f(x) \in Y\}$ Urbild von Y.



Beispiele:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto x^2$

Bild von $X = [1, 2]$

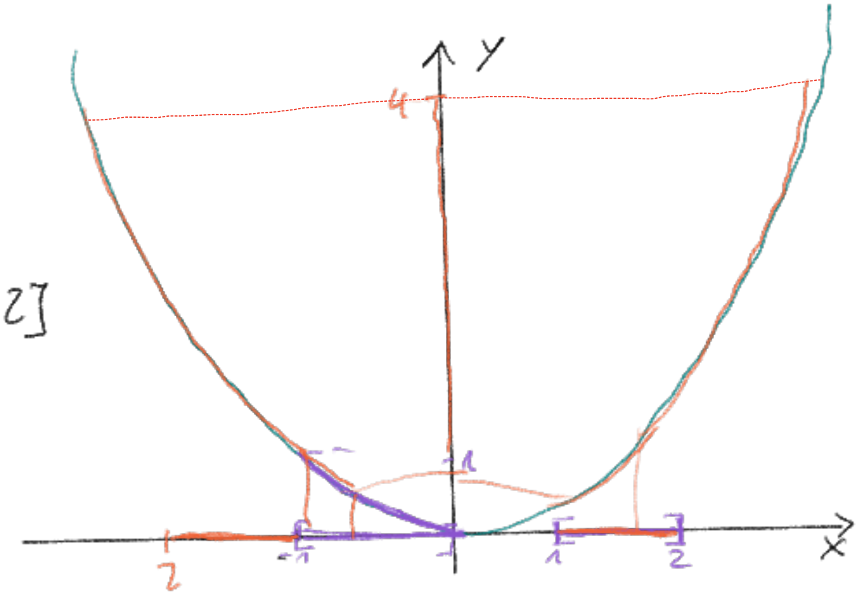
- $f(X) = f([1,2]) = [1,4]$
- $f(\mathbb{R}) = [0, \infty[$
- $f([-1,0]) = [0, 1]$

Urbild von $Y = [1, 4]$

$f^{-1}(Y) = f^{-1}([1,4]) = [-2,-1] \cup [1,2]$

$f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}$

$f^{-1}([-2,-1]) = \emptyset$



5.2 Komposition von Abbildungen

Definition: Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ Abbildungen. Dann heißt

$$g \circ f\colon A \to C, \quad x \mapsto g(f(x))$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

die Komposition (oder Verkettung) von f und g.

Beispiele:

1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x+1$

- $g\circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2+1$

  $(= f(x)+1 = x^2+1)$

- $f\circ g(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 = x^2+2x+1$

Bemerkung: i.A. ist $f\circ g \neq g\circ f$

5.2 Komposition von Abbildungen

Definition: Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ Abbildungen. Dann heißt

$$g \circ f\colon A \to C, \quad x \mapsto g(f(x))$$

die Komposition (oder Verkettung) von f und g.

Beispiele:

2) $f\colon A \to B$, $g\colon D \to C$ mit $D \subseteq B$

So definiert man $g \circ f$ nur für alle $x \in A$ mit $f(x) \in D$,

d.h. $x \in f^{-1}(D)$.

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - x^2$, $g\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $y \mapsto \sqrt{y}$

Dann $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(1 - x^2) = \sqrt{1 - x^2}$ ist nur definiert für $x \in [-1, 1]$, da dann $1 - x^2 \geq 0$, also

$$g \circ f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$$

5.3 Umkehrbarkeit

Definition: Sei $f : A \to B$ eine Abbildung.

a) f heißt injektiv, falls für alle $x_1, x_2 \in A$ gilt:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

b) f heißt surjektiv, falls es zu jedem $y \in B$ ein $x \in A$ gibt mit $f(x) = y$.

c) f heißt bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.

injektiv, nicht surjektiv — nicht injektiv, surjektiv — injektiv, surjektiv, bijektiv — nicht injektiv, nicht surjektiv

Bemerkung: Sei $f : A \to B$ injektiv, so gibt es zu jedem $y \in f(A)$ genau ein $x \in A$ mit $f(x) = y$.

Schreibweise: $x := f^{-1}(y)$.

Definition: $f^{-1} : f(A) \to A, \quad y \mapsto f^{-1}(y)$ heißt Umkehrabbildung von f.

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv, da $f(2) = 4 = f(-2)$ und $2 \neq -2$

2) $f: [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist injektiv, denn seien $x_1, x_2 \in [0,\infty[$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dann $x_1^2 = f(x_1) = f(x_2) = x_2^2$ sowie

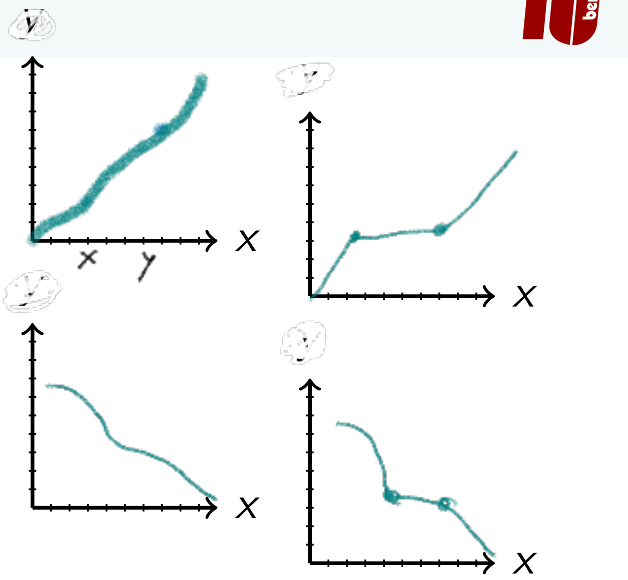
$$x_1 = |x_1| = \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} = |x_2| = x_2$$

da $x_1, x_2 \in [0,\infty[$

ist nicht surjektiv da $f([0,\infty[) = [0,\infty[\neq \mathbb{R}$

Umkehrabbildung: $y = f(x) = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow f^{-1}: [0,\infty[\to [0,\infty[$, $y \mapsto \sqrt{y}$

Probe: $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x = Id_{[0,\infty[}$



Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Für alle $x, y \in D$

a) f heißt streng monoton wachsend, falls gilt: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

b) f heißt monoton wachsend, falls gilt: $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

c) f heißt streng monoton fallend, falls gilt: $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

d) f heißt monoton fallend, falls gilt: $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

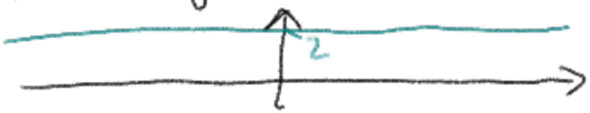
Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ streng monoton. Dann ist f injektiv. **Beweis:** siehe Skript

Beispiele:

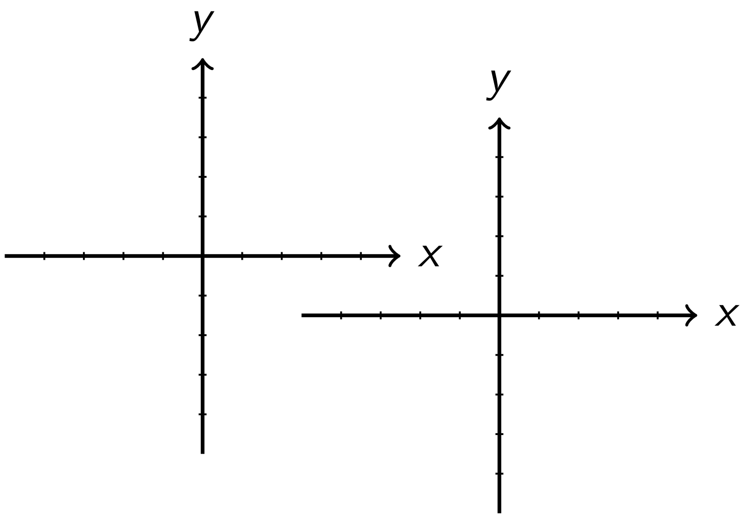
1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x-1$ streng monoton wachsend, denn aus $x<y$ folgt

$f(x) = x-1 < y-1 = f(y)$

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2$



monoton fallend | aber
monoton wachsend | nicht streng)



Definition: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) f heißt gerade, falls $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) f heißt ungerade, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiele:

Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ heißt:

a) nach oben beschränkt, falls es $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) \leq M$ für alle $x \in D$.

b) nach unten beschränkt, falls es $m \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) \geq m$ für alle $x \in D$.

c) beschränkt, falls es $m, M \in \mathbb{R}$ gibt mit $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in D$.

Beispiele: