Technische Universität Berlin

Ana1LinA – Hausaufgabe 08

Felix 09

Autoren: Fabian Aps:525528, Joris Victor Vorderwülbecke:0528715, Emil Arthur Joseph Hartmann:052542, Friedrich Ludwig Finck:0526329

12. Dezember 2025

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Aufgabe

Geben Sie diese Hausaufgabe in schriftlicher Form in ISIS ab.

a) Zeigen Sie mit dem Zwischenwertsatz, dass die Gleichung

$$\frac{(x-1)e^x}{x^2-3} = \sin(x)$$

mindestens eine reelle Lösung im Intervall $[-1, \frac{3}{2}]$ besitzt.

b) Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktion mit der Definition (also als Grenzwert des Differenzenquotienten).

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (x-1)|x-1|$$

c) Existiert der folgende Grenzwert? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert mit der Regel von Bernoulli/de l'Hospital.

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{\ln(\cos(3x))}$$

Geben Sie diese Hausaufgabe in schriftlicher Form in ISIS ab.

a) Zeigen Sie mit dem Zwischenwertsatz, dass die Gleichung

$$\frac{(x-1)e^x}{x^2-3} = \sin(x)$$

mindestens eine reelle Lösung im Intervall $\left[-1, \frac{3}{2}\right]$ besitzt.

b) Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktion mit der Definition (also als Grenzwert des Differenzenquotienten).

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x-1)|x-1|$$

c) Existiert der folgenden Grenzwert? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert mit der Regel von Bernoulli/de l'Hospital.

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{\ln(\cos(3x))}$$

Original Aufgabenstellung

Kapitel 2

Lösung zur Aufgabe

Zu Teilaufgabe a)

Wir betrachten die Hilfsfunktion $h : D \to \mathbb{R}$, definiert durch:

$$h(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2-3} - \sin(x)$$

Gesucht ist eine Nullstelle von $h(x)$ im Intervall $I = [-1, \frac{3}{2}]$.

1. Definitionsbereich und Stetigkeit

Der Nenner x^2-3 wird null bei $x = \pm\sqrt{3}$. Da $\sqrt{3} \approx 1,73 > 1,5$, liegt keine Polstelle im betrachteten Intervall $[-1, 1, 5]$. Die Funktion setzt sich aus stetigen elementaren Funktionen (Polynome, Exponentialfunktion, Sinus) zusammen und ist somit auf dem Intervall I stetig (vgl. Satz 19.10 im Skript). Dies ist die Voraussetzung für die Anwendung des Zwischenwertsatzes.

2. Überprüfung der Funktionswerte an den Rändern

Wir berechnen $h(-1)$ und $h(1,5)$.
Für $x = -1$:

$$\begin{aligned} h(-1) &= \frac{(-1-1)e^{-1}}{(-1)^2-3} - \sin(-1) \\ &= \frac{-2e^{-1}}{1-3} + \sin(1) \\ &= \frac{-2e^{-1}}{-2} + \sin(1) \\ &= \frac{1}{e} + \sin(1) \end{aligned}$$

Da $e > 0$ und $\sin(1) > 0$ (da 1 im Bogenmaß in $[0, \pi]$ liegt), folgt $h(-1) > 0$.

Für $x = \frac{3}{2} = 1,5$**:**

$$\begin{aligned} h(1,5) &= \frac{(1,5-1)e^{1,5}}{1,5^2-3} - \sin(1,5) \\ &= \frac{0,5 \cdot e^{1,5}}{2,25-3} - \sin(1,5) \\ &= \frac{0,5 \cdot e^{1,5}}{-0,75} - \sin(1,5) \end{aligned}$$

Der erste Term ist negativ (Zähler positiv, Nenner negativ). Da $\sin(1,5) \approx 1 > 0$, wird eine positive Zahl subtrahiert. Somit ist $h(1,5)$ die Summe zweier negativer Zahlen, also gilt $h(1,5) < 0$.

3. Fazit

Da h stetig ist und $h(1,5) < 0 < h(-1)$ gilt, existiert nach dem Zwischenwertsatz (vgl. Satz 20.4 im Skript) mindestens ein $\xi \in [-1, \frac{3}{2}]$ mit $h(\xi) = 0$. Dies entspricht einer Lösung der ursprünglichen Gleichung.

Zu Teilaufgabe b)

Die Funktion ist definiert als $f(x) = (x-1)|x-1|$. Wir untersuchen die Ableitung $f'(x_0)$ mittels des Differentialquotienten (vgl. Definition 21.1 im Skript):

$$f'(x_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0+k) - f(x_0)}{k}$$

Wir unterscheiden drei Fälle für x_0:

Fall 1: $x_0 > 1$

Hier ist $x - 1 > 0$, also $|x-1| = x-1$ und somit $f(x) = (x-1)^2$.

$$\begin{aligned} \lim_{k \to 0} \frac{(x_0+k-1)^2 - (x_0-1)^2}{k} &= \lim_{k \to 0} \frac{(x_0-1)^2 + 2k(x_0-1) + k^2 - (x_0-1)^2}{k} \\ &= \lim_{k \to 0} \frac{2k(x_0-1) + k^2}{k} \\ &= \lim_{k \to 0} (2(x_0-1) + k) \\ &= 2(x_0-1) \end{aligned}$$

Fall 2: $x_0 < 1$

Hier ist $x - 1 < 0$, also $|x-1| = -(x-1)$ und somit $f(x) = -(x-1)^2$.

$$\begin{aligned} \lim_{k \to 0} \frac{-(x_0+k-1)^2 - (-(x_0-1)^2)}{k} &= \lim_{k \to 0} \frac{-[(x_0-1)^2 + 2k(x_0-1) + k^2] + (x_0-1)^2}{k} \\ &= \lim_{k \to 0} \frac{-2k(x_0-1) - k^2}{k} \\ &= -2(x_0-1) \end{aligned}$$

Fall 3: $x_0 = 1$
Hier ist $f(1) = 0$. Wir prüfen den Differenzenquotienten:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to 0} \frac{f(1+k) - f(1)}{k} &= \lim_{k\to 0} \frac{(1+k-1)|1+k-1| - 0}{k} \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{k|k|}{k} \\ &= \lim_{k\to 0} |k| = 0\end{aligned}$$

Somit ist $f'(1) = 0$.

Ergebnis: Zusammenfassend lässt sich die Ableitung schreiben als:

$$f'(x) = 2|x-1|$$

Zu Teilaufgabe c)

Wir untersuchen den Grenzwert:

$$L = \lim_{x\searrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{\ln(\cos(3x))}$$

Für $x \to 0$ gilt $\cos(x) \to 1$ und $\cos(3x) \to 1$. Da $\ln(1) = 0$, liegt ein unbestimmter Ausdruck vom Typ „$\frac{0}{0}$" vor. Die Voraussetzungen für die Regel von Bernoulli/de l'Hospital sind erfüllt (vgl. Satz 22.7 im Skript).

Wir leiten Zähler und Nenner ab (Kettenregel):

- Zähler: $(\ln(\cos(x)))' = \frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) = -\tan(x)$
- Nenner: $(\ln(\cos(3x)))' = \frac{1}{\cos(3x)} \cdot (-\sin(3x) \cdot 3) = -3\tan(3x)$

Anwendung von l'Hospital:

$$L = \lim_{x\searrow 0} \frac{-\tan(x)}{-3\tan(3x)} = \frac{1}{3} \lim_{x\searrow 0} \frac{\tan(x)}{\tan(3x)}$$

Dies ist erneut ein Ausdruck vom Typ „$\frac{0}{0}$". Wir verwenden den bekannten Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$ (oder wenden l'Hospital erneut an):

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{3} \lim_{x\searrow 0} \left(\frac{\tan(x)}{x} \cdot \frac{3x}{\tan(3x)} \cdot \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{9}\end{aligned}$$

Der Grenzwert existiert und beträgt $\frac{1}{9}$.