Technische Universität Berlin

Ana1LinA – Hausaufgabe 07

Felix 09

Autoren: Fabian Aps:525528, Joris Victor Vorderwülbecke:0528715, Emil Arthur Joseph Hartmann:052542, Friedrich Ludwig Finck:0526329

4. Dezember 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabe 1

2 Lösung zur Aufgabe 2

2.1 Untersuchung von f 2

2.1.1 Bereich $x \neq 2$ 2

2.1.2 Untersuchung an der Stelle $x_0 = 2$ 2

2.2 Untersuchung von g 3

2.2.1 Bereich $x \neq -1$ 3

2.2.2 Untersuchung an der Stelle $x_0 = -1$ . . . 4

Kapitel 1

Aufgabe

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) + 1 & \text{für } x < 2, \\ x^2 - 1 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} x + \frac{x+1}{|x+1|} & \text{für } x \neq -1, \\ 0 & \text{für } x = -1 \end{cases}$$

Geben Sie diese Hausaufgabe in schriftlicher Form in ISIS ab.

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) + 1 & \text{für } x < 2, \\ x^2 - 1 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; g(x) = \begin{cases} x + \frac{x+1}{|x+1|} & \text{für } x \neq -1, \\ 0 & \text{für } x = -1 \end{cases}$$

Kapitel 2

Lösung zur Aufgabe

Eine Funktion $h : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $a \in D$, wenn $\lim_{x \to a} h(x) = h(a)$ gilt (vgl. Definition 19.7 im Skript). Dies ist äquivalent dazu, dass der linksseitige Grenzwert $\lim_{x \nearrow a} h(x)$ und der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{x \searrow a} h(x)$ existieren und mit dem Funktionswert $h(a)$ übereinstimmen (vgl. Abschnitt 19.2 im Skript).

2.1 Untersuchung von f

Die Funktion ist definiert als:

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) + 1 & \text{für } x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

2.1.1 Bereich $x \neq 2$

In den Bereichen $]-\infty, 2[$ und $]2, \infty[$ ist die Funktion als Komposition und Summe elementarer, stetiger Funktionen (Kosinus, Polynome) stetig (vgl. Satz 19.10 im Skript). Der einzige kritische Punkt für die Stetigkeit ist die Nahtstelle $x_0 = 2$.

2.1.2 Untersuchung an der Stelle $x_0 = 2$

Wir berechnen den linksseitigen und den rechtsseitigen Grenzwert sowie den Funktionswert.

1. **Funktionswert:**
Da für $x = 2$ der Fall $x \geq 2$ gilt:

$$f(2) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

2. **Linksseitiger Grenzwert ($x \nearrow 2$):**
Für $x < 2$ gilt $f(x) = \cos(\pi x) + 1$. Da der Cosinus stetig ist, folgt:

$$\lim_{x \nearrow 2} f(x) = \lim_{x \nearrow 2} (\cos(\pi x) + 1) = \cos(2\pi) + 1 = 1 + 1 = 2$$

3. **Rechtsseitiger Grenzwert ($x \searrow 2$):**
Für $x > 2$ gilt $f(x) = x^2 - 1$. Da Polynome stetig sind, folgt:

$$\lim_{x \searrow 2} f(x) = \lim_{x \searrow 2} (x^2 - 1) = 2^2 - 1 = 3$$

Fazit:
Da der linksseitige Grenzwert (2) ungleich dem rechtsseitigen Grenzwert (3) ist, existiert der Grenzwert $\lim_{x \to 2} f(x)$ nicht.

$$\lim_{x \nearrow 2} f(x) \neq \lim_{x \searrow 2} f(x)$$

Damit ist die Funktion f an der Stelle $x = 2$ **nicht stetig**.

2.2 Untersuchung von g

Die Funktion ist definiert als:

$$g(x) = \begin{cases} x + \frac{x+1}{|x+1|} & \text{für } x \neq -1 \\ 0 & \text{für } x = -1 \end{cases}$$

2.2.1 Bereich $x \neq -1$

Für $x \neq -1$ ist die Funktion aus stetigen Funktionen (Polynome, Betrag, Quotient mit Nenner $\neq 0$) zusammengesetzt und somit stetig (vgl. Satz 19.10). Die kritische Stelle ist $x_0 = -1$.

2.2.2 Untersuchung an der Stelle $x_0 = -1$

Wir untersuchen den Term $\frac{x+1}{|x+1|}$.

$$\frac{x+1}{|x+1|} = \begin{cases} \frac{x+1}{x+1} = 1 & \textbf{für } x+1>0 \iff x>-1 \\ \frac{x+1}{-(x+1)} = -1 & \textbf{für } x+1<0 \iff x<-1 \end{cases}$$

1. Funktionswert:

Laut Definition ist $g(-1) = 0$.

2. Linksseitiger Grenzwert ($x \nearrow -1$):

Für $x < -1$ ist $\frac{x+1}{|x+1|} = -1$.

$$\lim_{x \nearrow -1} g(x) = \lim_{x \nearrow -1} (x-1) = -1-1 = -2$$

3. Rechtsseitiger Grenzwert ($x \searrow -1$):

Für $x > -1$ ist $\frac{x+1}{|x+1|} = 1$.

$$\lim_{x \searrow -1} g(x) = \lim_{x \searrow -1} (x+1) = -1+1 = 0$$

Fazit:

Der linksseitige Grenzwert (-2) ist ungleich dem rechtsseitigen Grenzwert (0). Somit existiert der Grenzwert $\lim_{x \to -1} g(x)$ nicht. Zwar stimmt der rechtsseitige Grenzwert mit dem Funktionswert überein ($0 = g(-1)$), für die Stetigkeit müssen jedoch beide einseitigen Grenzwerte mit dem Funktionswert übereinstimmen. Daher ist g an der Stelle $x = -1$ **nicht stetig**.