16. Koordinaten und Matrixdarstellung

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

20.11.2025

15.2 Kern und Bild

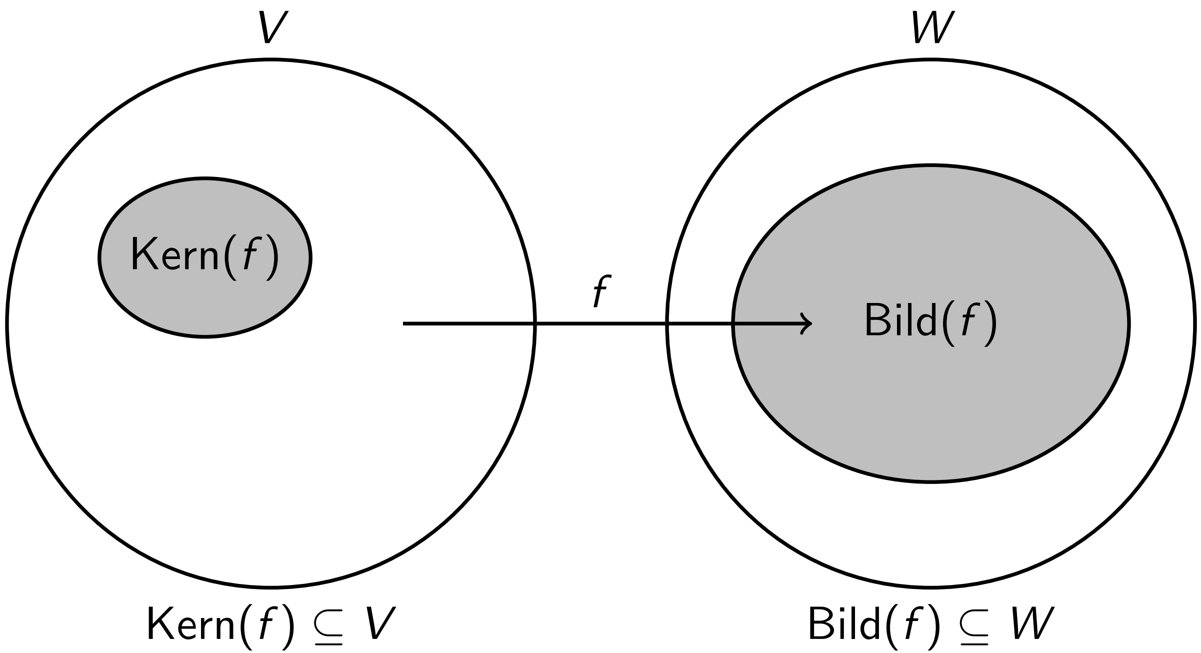
Definition: Sei $f : V \to W$ linear.

(1) Der Kern von f ist das Urbild von 0:

$$\mathrm{Kern}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\} = f^{-1}(\{0\}).$$

(2) Das Bild von f ist die Menge

$$\mathrm{Bild}(f) = f(V) = \{f(v) \mid v \in V\}.$$



Spezialfall: $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(x) = Ax$ mit $A \in \mathbb{K}^{m,n}$

$$\text{Kern}(A) = \{ x \in \mathbb{K}^n \mid f(x) = Ax = 0 \} = \mathcal{L}(A, 0)$$

$$\text{Bild}(A) = \{ f(x) = Ax \mid x \in \mathbb{K}^n \}$$

$b \in \text{Bild}(A)$, falls es ein $x \in \mathbb{K}^n$ gibt mit $Ax = b$, falls $\mathcal{L}(A, b) \neq \emptyset$

Satz: Sei $f : V \to W$ linear.

(1) Kern(f) ist ein Teilraum von V.

(2) Bild(f) ist ein Teilraum von W.

Beispiele: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto (a-b)z^2$ ist linear.

$$\text{Kern}(f) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (a-b)z^2 = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a-b=0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{Bild}(f) = \{ f(v) \mid v \in \mathbb{R}^2 \} = \left\{ (a-b)z^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \{ az^2 - bz^2 \mid a, b \in \mathbb{R} \} = \text{span}\{z^2, -z^2\}$$

$$= \text{span}\{z^2\}$$

Spezialfall: $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $f(x) = Ax$.

Erinnerung: $\mathrm{Kern}(A) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\} = \mathbb{L}(A, 0)$

Rang(A) = r $\Rightarrow$ n − r frei wählbar

Basisvektoren: eine frei wählbare Variable auf 1, alle anderen 0

Bsp: $A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Rang(A) = 2

frei wählbare Variablen: 4 − 2 = 2

1. Basisvektor: $x_2 = 1$ und $x_4 = 0$, dann

II $1x_3 + 3x_4 = 0 \Rightarrow 1x_3 = 0$

I $1x_1 - 2x_2 - 4x_4 = 0 \Rightarrow x_1 - 2\cdot 1 - 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$

$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. Basisvektor $x_2 = 0$, $x_4 = 1$

II $1x_3 + 3x_4 = 0 \Rightarrow x_3 + 3 = 0 \Rightarrow x_3 = -3$

I $1x_1 - 2x_2 - 4x_4 = 0 \Rightarrow x_1 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 4$

$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \mathrm{Kern}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Bemerkung: $\dim(\mathrm{Kern}(A)) = n - \mathrm{Rang}(A)$

Basis des Bildes

Bemerkung: Sei $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ mit $A = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix}$. Für $x \in \mathbb{K}^n$ ist

$$Ax = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j,$$

also die Linearkombination der Spalten von A mit den Koeffizienten $x_1, \ldots, x_n$. Daher ist

$$\mathrm{Bild}(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{K}^n\} = \mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_n\}.$$

Berechnung des Bildes von A:

(1) Bringe A in Zeilenstufenform.

(2) Spaltenvektoren von A, die zu Pivotelementen in ZSF von A gehören, bilden Basis des Bildes.

Bemerkung: $\dim(\mathrm{Bild}(A)) = \mathrm{Rang}(A)$

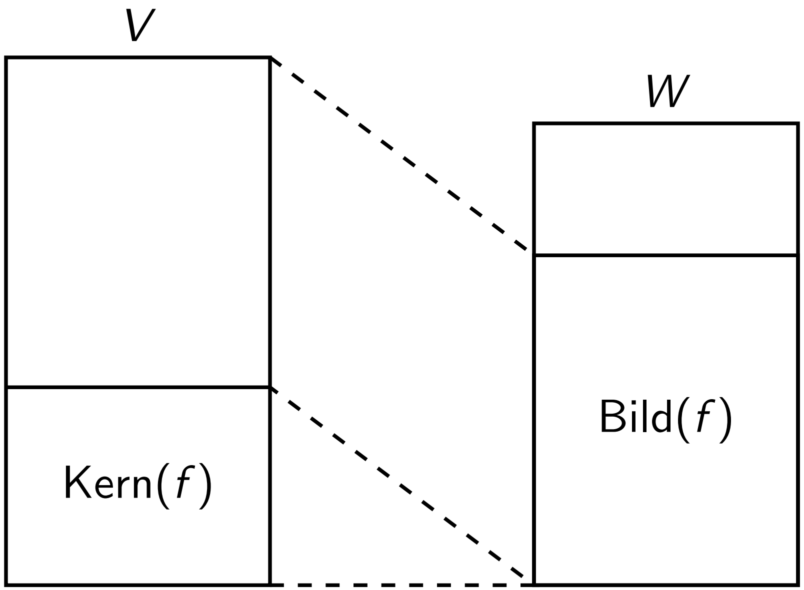
Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\overset{\text{Gauß}}{\rightsquigarrow}$ $\begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow \mathrm{Bild}\, A = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Satz: Für $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ erhalten wir

$$\dim(\mathrm{Kern}(A)) + \dim(\mathrm{Bild}(A)) = n - \mathrm{Rang}(A) + \mathrm{Rang}(A) = n = \dim(\mathbb{K}^n).$$

Satz: Sei $f : V \to W$ linear und V endlichdimensional. Dann gilt

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)).$$



Folgerungen aus der Dimensionsformel

Satz: Sei $f : V \to W$ linear. Dann gilt:

(1) f ist injektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Kern}(f) = \{0\} \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Kern}(f)) = 0$.

(2) f ist surjektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Bild}(f) = W \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Bild}(f)) = \dim(W)$.

Dabei gilt die letzte Äquivalenz nur falls $\dim(W) < \infty$.

(3) Wenn $\dim(V) = \dim(W) < \infty$, so gilt:

f ist bijektiv $\Leftrightarrow$ f ist injektiv $\Leftrightarrow$ f ist surjektiv.

Definition: Sei V ein $\mathbb{K}$-VR mit Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Dann gilt für $v \in V$:

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n,$$

wobei die Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ eindeutig bestimmt sind.

Der Vektor $\vec{v}_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$ heißt der Koordinatenvektor von v bzgl. $\mathcal{B}$.

Definition: Sei $\mathcal{B}=\{b_1,\ldots,b_n\}$ Basis vom $\mathbb{K}$-VR V. Die Koordinatenabbildung von V bzgl. $\mathcal{B}$ ist:

$$K_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n, \quad v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j \;\mapsto\; \vec{v}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Die Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{B}}$ ist linear und bijektiv.

Beispiele

1) $V = \mathbb{C}[z]_{\leq 2} = \{ \alpha z^2 + \beta z + \gamma \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \}$ $\quad B = \{ z^2, z, 1 \}$ Basis

z.B. $p(z) = 3 z^2 + 1 z + 4$ $\qquad K_B(p) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$K_B^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = 1 \cdot z^2 + 0 \cdot z + 2 \cdot 1 = z^2 + 2$

andere Basis $B_2 = \{ z^2 + z + 1, \; z + 1, \; 1 \}$

$p(z) = 3z^2 + 1z + 4 = \alpha (z^2 + z + 1) + \beta (z + 1) + \gamma \cdot 1 = \alpha z^2 + (\alpha + \beta) z + \alpha + \beta + \gamma$

$\Rightarrow \alpha = 3, \quad \alpha + \beta = 1, \quad 4 = \alpha + \beta + \gamma \quad \Rightarrow \alpha = 3 \Rightarrow \beta = -2, \; \gamma = 3$

$K_{B_2}(p) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

16.2 Matrixdarstellung

Ziel: Stelle eine lineare Abbildung $f : V \to W$ durch eine Matrix dar.

Seien dazu

(1) V endlichdimensional mit Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$,

(2) W endlichdimensional mit Basis $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_m\}$,

(3) $f : V \to W$ linear.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "K_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "f_{\mathcal{B}\mathcal{C}}"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

Bemerkung: Es gilt $f_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = K_{\mathcal{C}} \circ f \circ K_{\mathcal{B}}^{-1}$

Idee: Die i-te Spalte von $f_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ ist:

$$f_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(e_i) = K_{\mathcal{C}}(f(K_{\mathcal{B}}^{-1}(e_i))) = K_{\mathcal{C}}(f(b_i)).$$

Definition: Die darstellende Matrix von f bzgl. $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$

$$f_{\mathcal{BC}} = \begin{bmatrix} K_{\mathcal{C}}(f(b_1)) & K_{\mathcal{C}}(f(b_2)) & \dots & K_{\mathcal{C}}(f(b_n)) \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m,n}$$

Beispiele:

$V, W = \mathbb{R}[z]_{\leq 1}$ und $\mathcal{B} = \{1, z\}$ eine Basis von V, W

Sei $f: V \to W$, $az + b \mapsto (6a - b)z + 12a - b$ ist linear

gesucht

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"] \\ \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f_{\mathcal{BB}}"] \arrow[u, shift left] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

$$K_{\mathcal{B}} \circ f \circ K_{\mathcal{B}}^{-1} = f_{\mathcal{BB}}$$

1. Spalte $f_{\mathcal{BB}}(e_1) = K_{\mathcal{B}} \circ f \circ K_{\mathcal{B}}^{-1}(e_1) = K_{\mathcal{B}}\left(f\left(K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)\right)\right) = K_{\mathcal{B}}(f(1 \cdot 1 + 0z))$

$= K_{\mathcal{B}}(f(1)) = K_{\mathcal{B}}(f(0z + 1 \cdot 1)) = K_{\mathcal{B}}((6 \cdot 0 - 1)z + 12 \cdot 0 - 1) = K_{\mathcal{B}}(-z - 1) = K_{\mathcal{B}}(-1 \cdot 1 + (-1) \cdot z) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

2. Spalte $f_{\mathcal{BB}}(e_2) = K_{\mathcal{B}} \circ f \circ K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \dots = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow f_{\mathcal{BB}} = \begin{bmatrix} -1 & 12 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$

Frage: Wie rechnet man die Koordinaten für verschiedene Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ ineinander um?

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "K_{B_1}"'] \arrow[dr, "K_{B_2}"] & \\ \mathbb{R}^n \arrow[rr, "id_{B_1B_2}"] & & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$$id_{B_1B_2} = K_{B_2} \circ K_{B_1}^{-1}$$

$id_{B_1B_2}(e_1)$ ist 1. Spalte

$id_{B_1B_2}(e_2)$ ist 2. Spalte

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "id"] \arrow[d, "K_{B_1}"'] & V \arrow[d, "K_{B_2}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "id_{B_1B_2}"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Bemerkung: Sei V endlichdimensionaler Vektorraum mit Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$. Dann gilt für alle $v \in V$:

$$\vec{v}_{\mathcal{B}_2} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}\vec{v}_{\mathcal{B}_1}.$$

Definition: Die Matrix $\mathrm{id}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ heißt auch Basiswechsel-, Basisübergangs- oder Transformationsmatrix.

Beispiele

$V = \mathbb{C}[z]_{\leq 2}$ und $B_1 = \{ b_1 = z^2, \ b_2 = z, \ b_3 = 1 \}$

$B_2 = \{ c_1 = z^2+z+1, \ c_2 = z+1, \ c_3 = 1 \}$

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "K_{B_1}"'] \arrow[dr, "K_{B_2}"] & \\ \mathbb{R}^3 \arrow[rr, "\mathrm{id}_{B_1B_2}"'] & & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{id}_{B_1B_2}(e_1) = K_{B_2} \circ K_{B_1}^{-1}(e_1) = K_{B_2}(K_{B_1}^{-1}(e_1)) = K_{B_2}\left(K_{B_1}^{-1}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)\right)$$

$$= K_{B_2}(z^2) = K_{B_2}(1(z^2+z+1) - 1(z+1) + 0 \cdot 1) = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{id}_{B_1B_2}(e_2) = K_{B_2}\left(K_{B_1}^{-1}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)\right) = K_{B_2}(z) = K_{B_2}(0(z^2+z+1) + 1(z+1) - 1 \cdot 1)$$

$$= \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{id}_{B_1B_2}(e_3) = K_{B_2}\left(K_{B_1}^{-1}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)\right) = K_{B_2}(1) = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{id}_{B_1B_2} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

Beispiel: Sei $v = z^2 + z + 3$. Dann $v_{B_1} = \begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}$

und $v_{B_2} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$

Probe: $K_{B_2}^{-1}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}\right) = 1(z^2+z+1) + 0(z+1) + 2 \cdot 1$

$= z^2+z+1+2 = z^2+z+3$

Darstellende Matrix bei Basiswechsel

Satz: Sei $f : V \to W$ linear, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ Basen von V und $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ Basen von W. Dann:

$$f_{\mathcal{B}_2\mathcal{C}_2} = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2} f_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1} \mathrm{id}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1},$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[rrr, "f_{\mathcal{B}_2\mathcal{C}_2}"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}"'] & & & \mathbb{K}^m \\
& V \arrow[ul, "K_{\mathcal{B}_2}"'] \arrow[dl, "K_{\mathcal{B}_1}"] \arrow[r, "f"] & W \arrow[ur, "K_{\mathcal{C}_2}"] \arrow[dr, "K_{\mathcal{C}_1}"'] & \\
\mathbb{K}^n \arrow[rrr, "f_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1}"'] & & & \mathbb{K}^m \arrow[uu, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2}"']
\end{tikzcd}$$

Spezialfall: Gleicher VR mit gleichen Basen: $V = W$ mit $\mathcal{C}_1 = \mathcal{B}_1$ und $\mathcal{C}_2 = \mathcal{B}_2$.

$$f_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_2} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} f_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1} \mathrm{id}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1} = (\mathrm{id}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1})^{-1} f_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1} \mathrm{id}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1},$$

Darstellende Matrix bei Basiswechsel

Satz: Sei $f\colon V \to W$ linear, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ Basen von V und $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ Basen von W. Dann:

$$f_{\mathcal{B}_2\mathcal{C}_2} = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2} f_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1} \mathrm{id}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1},$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[rrr, "f_{\mathcal{B}_2\mathcal{C}_2}"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}"'] & & & \mathbb{K}^m \\
& V \arrow[r, "f"] \arrow[ul, "K_{\mathcal{B}_2}"'] \arrow[dl, "K_{\mathcal{B}_1}"] & W \arrow[ur, "K_{\mathcal{C}_2}"] \arrow[dr, "K_{\mathcal{C}_1}"'] & \\
\mathbb{K}^n \arrow[rrr, "f_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1}"'] & & & \mathbb{K}^m \arrow[uu, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2}"']
\end{tikzcd}$$

Spezialfall: Mit $A_1 = f_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1}$, $A_2 = f_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_2}$ und $S = \mathrm{id}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$, so ist

$$A_2 = S^{-1} A_1 S,$$

Beispiele