11. Basis und Dimension

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

10.11.2025

Definition: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(1) $v \in V$ heißt Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in V$, falls $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ existieren, sodass

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j.$$

(2) Die Menge aller Linearkombinationen von $v_1, \ldots, v_k$ heißt der Spann (lineare Hülle) von $v_1, \ldots, v_k$:

$$\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\} := \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}\}$$

Satz: Seien $v_1, \ldots, v_k \in V$. Dann ist $\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$ ein Teilraum von V.

Beispiel: $V = \mathbb{R}^2$, $T = \{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \} = \operatorname{span}\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \}$, $\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \}$ ist ein EZS von T

aber auch $\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \}$ ist ein EZS, auch $\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \}$ ist EZS

Definition: Sei T ein Teilraum von V. Eine Menge $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq T$ heißt Erzeugendensystem (EZS) von T, falls ihr Spann gleich T ist:

$$\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\} = T.$$

Beispiel

$V = \mathbb{R}^2$: • $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ist EZS von $V = \mathbb{R}^2$.

z.B. $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$

$\rightsquigarrow$ eindeutige Darstellung

• $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ist EZS von $V = \mathbb{R}^2$

z.B.: $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\rightsquigarrow$ Darstellung ist nicht eindeutig.

da z.B. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\rightsquigarrow$ Linearkombination von $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Definition: Seien $v_1, \ldots, v_k$ Vektoren des $\mathbb{K}$-Vektorraums V.

(1) Die Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ heißen linear unabhängig genau dann, wenn die Gleichung

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = 0$$

nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$ hat.

(2) Die Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ heißen linear abhängig, wenn sie nicht linear unabhängig sind.

Beispiele: $V = \mathbb{R}^2$, $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

- $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sind linear abhängig, denn die Gleichung

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 \\ \lambda_2 + \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ hat neben der trivialen Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ auch die Lösung $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$

Beispiele: $V = \mathbb{R}^2$, $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ii) $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sind linear unabhängig, denn für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \Rightarrow 0 = \lambda_1, \ 0 = \lambda_2$$

$V = \mathbb{K}[z]$, $1, z, z^2, z^3, \dots, z^n$

iii) $\vec{v}_1, \vec{v}_3$ sind linear unabhängig, denn für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \Rightarrow 0 = \lambda_1 + \lambda_2, \ 0 = \lambda_2$$

$$\Rightarrow 0 = \lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

iv) $\vec{v}_2, \vec{v}_3$

v) Nullvektor verursacht immer lineare Abhängigkeit $\vec{v}_1 = \vec{0}, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$

dann $\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0}$ hat auch Lösung $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_k = 0$

vi) $V = \mathbb{K}[z]$, $1, z, z^2, z^3, \dots, z^n$

$V = \mathbb{K}[z]$, $1, z, z^2, \ldots, z^n$ sind linear unabhängig.

$$0 = \lambda_0 1 + \lambda_1 z + \lambda_2 z^2 + \ldots + \lambda_n z^n = 0 \cdot 1 + 0 \cdot z + 0 z^2 + \ldots + 0 z^n$$

Koeffizienten-vgl. $\Rightarrow \lambda_0 = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_n = 0$

Definition: Sei $V \neq \{0\}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein endliches linear unabhängiges Erzeugendensystem $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V heißt Basis von V.

Bemerkung: Basen sind immer geordnet, d.h. in $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ist v_1 der erste Basisvektor, v_2 der zweite,...usw.

Satz: Je zwei Basen eines VR haben die gleiche Anzahl von Elementen

Definition: Sei V ein $\mathbb{K}$-VR.

(1) Hat $V \neq \{0\}$ eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$, so heißt $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$ die Dimension von V und V heißt endlichdimensional.

(2) Hat V keine endliche Basis, so heißt V unendlich dimensional: $\dim(V) = \infty$

(3) Für den Nullvektorraum $V = \{0\}$ definiert man die leere Menge $\emptyset$ als Basis: $\dim(V) = 0$

Beispiele

1). $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ist Basis des $\mathbb{R}^2$, $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$

- aber auch $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ist Basis d. $\mathbb{R}^2$

i) linear unabh. (s. vorher)

ii) EZS von $\mathbb{R}^2$: $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \beta \end{bmatrix}$$

$x_1 = \alpha + \beta \Rightarrow x_1 = \alpha + x_2$

$x_2 = \beta$

$\Rightarrow \alpha = x_1 - x_2$

$$= (x_1 - x_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2) Sei $e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ | \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{bmatrix}$ ← i-te Stelle

der i-te Einheitsvektor (z.B. $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{bmatrix}$)

Dann $\{ e_1, e_2, \dots, e_n \}$ eine Basis des $\mathbb{K}^n$ (Standardbasis)

$\Rightarrow \dim(\mathbb{K}^n) = n$

3) $\mathbb{K}[z]_{\leq n} = \operatorname{span}\{1, z, z^2, \dots, z^n\}$ und $1, z, z^2, \dots, z^n$ sind linear unabh., also ist $\{1, z, z^2, \dots, z^n\}$ eine Basis von $\mathbb{K}_{\leq n}[z]$ und

$\dim(\mathbb{K}_{\leq n}[z]) = n+1$

Konstruktion von Basen

Kriterien für Basen: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Dimension $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Dann gilt:

(1) Sind $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig, so ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V.

(2) Ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V, so ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V.

Konstruktion von Basen: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $v_1, \ldots, v_k$ Vektoren aus V.

(1) Ist $\{v_1, \ldots, v_k\}$ ein Erzeugendensystem von V, aber sind die Vektoren nicht linear unabhängig, so entferne solange geeignete Vektoren, bis eine Basis übrig bleibt.

(2) Sind $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig, aber $\{v_1, \ldots, v_k\}$ kein Erzeugendensystem, so nimm geeignete Vektoren $v_{k+1} \notin \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$ hinzu, bis eine Basis von V entsteht (falls $\dim(V) < \infty$).

Beispiele

$V=\mathbb{R}^3$, $\vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\vec{v}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\vec{v}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\vec{v}_4=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ sind. linear abh., da z.B.

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{v}_2=1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+0\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, d.h. $\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

$=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

Achtung: $\vec{v}_3$ ist nicht als Linearkombination von $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_4$ darstellbar.

EZS: Sei $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\lambda_3\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1+\lambda_2\\\lambda_2+\lambda_3\\\lambda_2\end{bmatrix}$

$a=\lambda_1+\lambda_2 \Rightarrow a=\lambda_1+c \Rightarrow \lambda_1=a-c$

$b=\lambda_2+\lambda_3 \Rightarrow b=c+\lambda_3 \Rightarrow \lambda_3=b-c$

$c=\lambda_2$

$\Rightarrow \lambda_1=a-c,\ \lambda_3=b-c,\ \lambda_2=c$

Damit ist $\{\vec{v}_1,\vec{v}_3,\vec{v}_4\}$ ist EZS mit 3 Elementen von $\mathbb{R}^3$, also eine Basis.

Definition: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Dann lässt sich jeder Vektor $v \in V$ schreiben als

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n,$$

wobei die Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ eindeutig bestimmt sind und Koordinaten von v heißen.

Der Vektor

$$\vec{v}_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

heißt der Koordinatenvektor von v bzgl. $\mathcal{B}$.

Beispiele