

14. Weitere Anwendungen des Gauß-Algorithmus

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

17.11.2025



Erinnerung:

Struktur der Lösungsmenge:

Das LGS $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ und $b \in \mathbb{K}^n$ habe eine Lösung $x_P \in \mathbb{K}^n$.

Diese spezielle Lösung wird auch **partikuläre Lösung** genannt. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{L}(A, b) &= \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\} = \{x_P + x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\} \\ &:= x_P + \mathbb{L}(A, 0).\end{aligned}$$

Beweis:

" \subseteq " Sei $y \in \mathbb{L}(A, b)$, d.h. $\underline{Ay = b}$. Sei $x := y - x_P \quad (\Rightarrow y = x_P + x)$. Dann
 $Ax = A(y - x_P) = \underline{Ay} - Ax_P = b - b = 0$, d.h. $x \in \mathbb{L}(A, 0)$
↑ da x_P eine spezielle Lösung von $Ax = b$

" \supseteq " Sei $x \in \mathbb{L}(A, 0)$, dann ist $x_P + x \in x_P + \mathbb{L}(A, 0)$. Dann
 $A(x + x_P) = \underline{Ax} + Ax_P = \underline{0} + b = b \Rightarrow x + x_P \in \mathbb{L}(A, b)$

Erinnerung:

Beispiel: i) $\mathbb{L}(A, 0) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid \text{wähle } x_2 = t, x_4 = s \in \mathbb{R} \right. \begin{array}{l} \\ \text{II } x_3 + 4x_4 = 0 \Leftrightarrow x_3 + 4s = 0 \Rightarrow x_3 = -4s \\ \text{I } x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \Leftrightarrow x_1 + 2t + 3s = 0 \end{array} \Rightarrow x_1 = -2t - 3s \right\}$

$$\mathbb{L}(A, 0) = \left\{ \begin{bmatrix} -2t - 3s \\ t \\ -4s \\ s \end{bmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3s \\ 0 \\ 0 \\ s \end{bmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

✓ partikuläre Lösung

ii) $\mathbb{L}(A, b) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid \mathbb{L}(A, b) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} \right.$

Beobachtung: Für $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ ist $\mathbb{L}(A, 0)$ ein Teilraum des \mathbb{K}^n . Aber $\mathbb{L}(A, b)$ ist für $b \neq 0$ kein Teilraum.

- i) $\vec{0} \in \mathbb{L}(A, 0)$, da $A \cdot \vec{0} = 0$
- ii) Sei $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{L}(A, 0)$, d.h. $A\vec{x} = 0$ und $A\vec{y} = 0$, dann $A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} = 0 + 0 = 0$
 $\Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in \mathbb{L}(A, 0)$
- iii) Sei $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{L}(A, 0)$, dann $A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda x \in \mathbb{L}(A, 0)$
 $\Rightarrow \mathbb{L}(A, 0)$ Teilraum. $\mathbb{L}(A, b)$ ist kein Teilraum, da $\vec{0} \notin \mathbb{L}(A, b)$

14.1 Der Rang einer Matrix

Definition: Der **Rang** von $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ ist die Anzahl der Zeilen ungleich Null in einer **Zeilenstufenform** von A und wird mit $\text{Rang}(A)$ bezeichnet.

Bemerkungen:

- (1) $\text{Rang}(A) \geq 0$ und $\text{Rang}(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- (2) $\text{Rang}(A) \leq m$
- (3) $\text{Rang}(A) \leq n$

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rang}(C) = 1$$

Beispiele:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Rang}(A) = 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rang}(B) = 2$$

Bemerkung: Der Rang einer Matrix ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen bzw. die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten der Matrix.

14.2 Lösbarkeitskriterien für lineare Gleichungssysteme

Erinnerung: Es gibt 3 Szenarien für $\mathbb{L}(A, b)$:

- (1) keine Lösung
- (2) eindeutige Lösung
- (3) unendlich viele Lösungen

Betrachte erweiterte Koeffizientenmatrix $[A \mid b]$ und bringe vorderen Teil in ZSF

$$[C \mid d] = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc|c|cc|c} 0 & c_{1,j_1} & * & * & * & * & * & * & * & * & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & c_{2,j_2} & * & * & * & * & * & * & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{3,j_3} & * & * & * & * & d_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots & * & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{r,j_r} & * & d_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & d_{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & d_m \end{array} \right]$$

Pivotelemente: $c_{1,j_1}, c_{2,j_2}, \dots, c_{r,j_r} \neq 0$.

Lösbarkeitskriterium

Seien $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$. Das LGS $Ax = b$ hat

- (1) keine Lösung, genau dann wenn $\text{Rang}([A|b]) > \text{Rang}(A)$ ist,

Nicht alle $d_{r+1}, \dots, d_n = 0$ / $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = d_j \neq 0 \quad (\exists)$

- (2) genau eine Lösung, genau dann wenn $\text{Rang}([A|b]) = \text{Rang}(A) = n$,

Alle $d_{r+1}, \dots, d_n = 0$, in jeder Spalte Pivotelement \rightsquigarrow keine frei wählbare Variable

- (3) unendlich viele Lösungen, genau dann wenn $\text{Rang}([A|b]) = \text{Rang}(A) < n$.

$n - \text{Rang}(A)$ frei wählbare Variablen

Beispiele:

$$1) [A|b] = [c|d] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{Rang}(A) = 1 = \text{Rang}([A|b]) < 2$$

\Rightarrow LGS ist lösbar mit $n - \text{Rang}(A) = 2 - 1 = 1$ frei wählbare Variable

$$\text{Wähle } x_2 = t \in \mathbb{R} \Rightarrow 2x_1 + 3x_2 = 2 \Rightarrow 2x_1 + 3t = 2 \Rightarrow x_1 = \frac{2-3t}{2} = 1 - \frac{3}{2}t$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(A, b) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 - \frac{3}{2}t \\ t \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Beispiel

2) $[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \text{Rang}(A) = 2 = \text{Rang}([A|b]) = 2$

Anzahl d. Variablen
bzw. d. Spalten

\leadsto Lösung eindeutig

3) $[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \Rightarrow \text{Rang}(A) = 2 < 3 = \text{Rang}([A|b])$

\leadsto LGS keine Lösung bzw. $L(A,b) = \emptyset$

14.3 Invertierbarkeit von Matrizen

Erinnerung: Eine quadratische Matrix $A \in K^{n,n}$, heißt invertierbar, falls es eine Matrix $B \in K^{n,n}$ gibt mit $BA = I_n$ und $AB = I_n$.

Beobachtung: $A \in K^{n,n}$ invertierbar $\Rightarrow Ax = b$ eindeutig lösbar $\Rightarrow \text{Rang}(A) = n$

Idee: Betrachte Spalten von $B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = [b_1 \dots b_n]$ und $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = [e_1 \dots e_n]$

$$\text{Dann } AB = \begin{bmatrix} Ab_1 \\ Ab_2 \\ \vdots \\ Ab_n \end{bmatrix} = [e_1 \dots e_n] = I_n$$

$$\Rightarrow Ab_1 = e_1, Ab_2 = e_2, \dots, Ab_n = e_n$$

$$[A | e_1], [A | e_2], \dots, [A | e_n]$$

Idee

$$[A | e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$$

Gauß-Algorithmus zur Berechnung der Inversen

Ist $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertierbar so können wir A^{-1} folgendermaßen berechnen:

- (1) Bringe $[A | I_n]$ mit elementaren Zeilenoperationen in NZSF $[C | D]$.
- (2) Wenn $\text{Rang}(A) \neq n$ ist, ist A nicht invertierbar und wir können aufhören.
- (3) Wenn $\text{Rang}(A) = n$ ist, so ist $C = I_n$ und $A^{-1} = D$.

Beispiele:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}, n=2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{II} - \frac{5}{3}\text{I}} \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{III} \leftrightarrow \text{II}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{3\text{II}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{I} - \frac{1}{3}\text{II}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array} \right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Beispiele