

Technische Universität Berlin

Ana1LinA – Hausaufgabe 03

Felix 09

Autoren: Fabian Aps:525528, Joris Victor
Vorderwülbecke:0528715, Emil Arthur Joseph
Hartmann:052542, Friedrich Ludwig Finck:0526329

6. November 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgaben	1
2 Aufgabe a)	2
2.1 Lösung	2
3 Aufgabe b)	3
3.1 Beweis	3
4 Aufgabe c)	5
4.1 Berechnung	5

Kapitel 1

Aufgaben

Die gegebene Funktion lautet:

$$f(x) = e^{\cos(\ln(x))} + \sin^2(\ln(x))$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion definiert?

b) Zeigen Sie, dass $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ für alle $x > 0$ gilt.

Hinweis: Nutzen Sie die Rechenregeln der elementaren Funktionen.

c) Berechnen Sie $f\left(e^{\frac{3}{2}\pi}\right)$.

Geben Sie diese Hausaufgabe bitte in schriftlicher Form in der entsprechenden Dateiablage auf ISIS ab.

Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^{\cos(\ln(x))} + \sin^2(\ln(x))$.

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion definiert?

b) Zeigen Sie, dass $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ für alle $x > 0$ gilt. Hinweis: Nutzen Sie die Rechenregeln der elementaren Funktionen.

c) Berechnen Sie $f\left(e^{\frac{3}{2}\pi}\right)$.

Kapitel 2

Aufgabe a)

Funktion: $f(x) = e^{\cos(\ln(x))} + \sin^2(\ln(x))$

Aufgabe: Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion definiert?

2.1 Lösung

Die Funktion $f(x)$ ist definiert, solange alle ihre Teilfunktionen definiert sind. Die innerste Funktion ist der **natürliche Logarithmus** $\ln(x)$.

- Der Logarithmus $\ln(x)$ ist nur für Argumente $x > 0$ definiert.
- Die Funktionen $\cos(z)$, $\sin^2(z)$ und e^z sind für alle reellen Zahlen z definiert.

Daher muss nur die Bedingung für $\ln(x)$ erfüllt sein.

Definitionsbereich:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = (0, \infty)$$

Kapitel 3

Aufgabe b)

Funktion: $f(x) = e^{\cos(\ln(x))} + \sin^2(\ln(x))$

Aufgabe: Zeigen Sie, dass $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ für alle $x > 0$ gilt.

3.1 Beweis

Wir beginnen mit der linken Seite der Gleichung, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, und setzen den Term in die Funktionsgleichung ein:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = e^{\cos(\ln(\frac{1}{x}))} + \sin^2\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Nun wenden wir die Rechenregel für den Logarithmus an:
 $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ (gültig für $x > 0$).

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = e^{\cos(-\ln(x))} + \sin^2(-\ln(x))$$

Anschließend nutzen wir die Symmetrieeigenschaften der trigonometrischen Funktionen:

- $\cos(-z) = \cos(z)$ (Kosinus ist eine gerade Funktion).
- $\sin(-z) = -\sin(z)$ (Sinus ist eine ungerade Funktion).

Wir setzen $z = \ln(x)$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = e^{\cos(\ln(x))} + (-\sin(\ln(x)))^2$$

Da $(-\sin(\ln(x)))^2 = (-1)^2 \cdot \sin^2(\ln(x)) = \sin^2(\ln(x))$, erhalten wir:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = e^{\cos(\ln(x))} + \sin^2(\ln(x))$$

Dies entspricht exakt der Definition der Funktion $f(x)$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$$

Somit ist die Behauptung gezeigt.

Kapitel 4

Aufgabe c)

Funktion: $f(x) = e^{\cos(\ln(x))} + \sin^2(\ln(x))$

Aufgabe: Berechnen Sie $f\left(e^{\frac{3}{2}\pi}\right)$.

4.1 Berechnung

Wir setzen den Wert $x_0 = e^{\frac{3}{2}\pi}$ in die Funktion $f(x)$ ein:

$$f\left(e^{\frac{3}{2}\pi}\right) = e^{\cos(\ln(e^{\frac{3}{2}\pi}))} + \sin^2\left(\ln\left(e^{\frac{3}{2}\pi}\right)\right)$$

Schritt 1: Vereinfachen des Logarithmus Mittels $\ln(e^z) = z$:

$$\ln\left(e^{\frac{3}{2}\pi}\right) = \frac{3}{2}\pi$$

Einsetzen in die Gleichung:

$$f\left(e^{\frac{3}{2}\pi}\right) = e^{\cos(\frac{3}{2}\pi)} + \sin^2\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

Schritt 2: Einsetzen der trigonometrischen Werte Die trigonometrischen Werte für $\frac{3}{2}\pi$ (oder 270°) sind:

- $\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$
- $\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$

Einsetzen in die Gleichung:

$$f\left(e^{\frac{3}{2}\pi}\right) = e^0 + (-1)^2$$

Schritt 3: Endgültige Berechnung Da $e^0 = 1$ und $(-1)^2 = 1$:

$$f\left(e^{\frac{3}{2}\pi}\right) = 1 + 1$$

$$f\left(e^{\frac{3}{2}\pi}\right) = 2$$