Technische Universität Berlin

Ana1LinA – Hausaufgabe 04

Felix 09

Autoren: Fabian Aps:525528, Joris Victor Vorderwülbecke:0528715, Emil Arthur Joseph Hartmann:052542, Friedrich Ludwig Finck:0526329

12. November 2025

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Aufgaben

Das gegebene Polynom $p_a(x)$ für $a \in \mathbb{R}$ lautet:

$$p_a(x) = x^3 + (a^2 - 2a + 1)x^2 + (-2a^3 + a^2 - 2a)x - 2a^3$$

a) Berechnen Sie $p_a(2a)$.

b) Bestimmen Sie alle Nullstellen von p_a.

c) Berechnen Sie die komplexe Linearfaktorzerlegung von p_a.

d) Berechnen Sie die reelle Zerlegung von p_a.

Geben Sie diese Hausaufgabe bitte in schriftlicher Form in Isis ab.

Für $a \in \mathbb{R}$ sei das Polynom
$p_a(x) = x^3 + (a^2 - 2\,a + 1)\,x^2 + (-2\,a^3 + a^2 - 2\,a)\,x - 2\,a^3$
gegeben.

a) Berechnen Sie $p_a(2\,a)$

b) Bestimmen Sie alle Nullstellen von p_a.

c) Berechnen Sie die komplexe Linearfaktorzerlegung von p_a.

d) Berechnen Sie die reelle Zerlegung von p_a.

Kapitel 2

Aufgabe a)

Polynom: $p_a(x) = x^3 + (a^2 - 2a + 1)x^2 + (-2a^3 + a^2 - 2a)x - 2a^3$

Aufgabe: *Berechnen Sie* $p_a(2a)$.

2.1 Berechnung

Wir setzen $x = 2a$ in das Polynom $p_a(x)$ ein:

$$p_a(2a) = (2a)^3 + (a^2 - 2a + 1)(2a)^2 + (-2a^3 + a^2 - 2a)(2a) - 2a^3$$

Zuerst vereinfachen wir die Terme mit $(2a)$:

$$p_a(2a) = 8a^3 + (a^2 - 2a + 1)(4a^2) + (-2a^3 + a^2 - 2a)(2a) - 2a^3$$

Nun multiplizieren wir die Produkte aus:

$$p_a(2a) = 8a^3 + (4a^4 - 8a^3 + 4a^2) + (-4a^4 + 2a^3 - 4a^2) - 2a^3$$

Wir fassen die Terme zusammen, indem wir nach Potenzen von a ordnen:

$$p_a(2a) = (4a^4 - 4a^4) + (8a^3 - 8a^3 + 2a^3 - 2a^3) + (4a^2 - 4a^2)$$

Alle Terme heben sich gegenseitig auf:

$$p_a(2a) = 0$$

Ergebnis: $p_a(2a) = 0$. Dies bedeutet, dass $x_1 = 2a$ eine Nullstelle des Polynoms ist.

Kapitel 3

Aufgabe b), c) und d)

Polynom: $p_a(x) = x^3 + (a^2 - 2a + 1)x^2 + (-2a^3 + a^2 - 2a)x - 2a^3$

Aufgabe: *Bestimmen Sie alle Nullstellen von p_a. Berechnen Sie die komplexe und reelle Zerlegung von p_a.*

3.1 Nullstellenbestimmung (Aufgabe b))

Aus Aufgabe a) wissen wir, dass $x_1 = 2a$ eine Nullstelle ist, da $p_a(2a) = 0$. Wir können nun eine **Polynomdivision** durch den Linearfaktor $(x - 2a)$ durchführen.

$$\left(x^3 + (a^2 - 2a + 1)x^2 + (-2a^3 + a^2 - 2a)x - 2a^3\right) : (x - 2a)$$

$$\begin{array}{rl}
 & (x^3 + (a^2 - 2a + 1)x^2 + (-2a^3 + a^2 - 2a)x - 2a^3) : (x - 2a) = x^2 + (a^2 + 1)x + a^2 \\
- & \underline{(x^3 - 2ax^2)} \\
 & (a^2 + 1)x^2 + (-2a^3 + a^2 - 2a)x \\
- & \underline{((a^2 + 1)x^2 - 2a(a^2 + 1)x)} \\
 & (-2a^3 + a^2 - 2a + 2a^3 + 2a)x - 2a^3 \\
 & (a^2)x - 2a^3 \\
- & \underline{(a^2x - 2a^3)} \\
 & 0
\end{array}$$

Der Quotient ist das quadratische Polynom $q(x) = x^2 + (a^2 + 1)x + a^2$. Die verbleibenden Nullstellen $x_{2,3}$ erhalten wir durch Anwenden der Mitternachtsformel (p-q-Formel oder abc-Formel) auf $q(x) = 0$.

$$x^2 + (a^2+1)x + a^2 = 0$$

Mit $A = 1$, $B = (a^2+1)$ und $C = a^2$:

$$\begin{aligned}
x_{2,3} &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \\
x_{2,3} &= \frac{-(a^2+1) \pm \sqrt{(a^2+1)^2 - 4(1)(a^2)}}{2} \\
x_{2,3} &= \frac{-(a^2+1) \pm \sqrt{a^4 + 2a^2 + 1 - 4a^2}}{2} \\
x_{2,3} &= \frac{-(a^2+1) \pm \sqrt{a^4 - 2a^2 + 1}}{2}
\end{aligned}$$

Der Ausdruck unter der Wurzel ist ein vollständiges Quadrat: $a^4 - 2a^2 + 1 = (a^2-1)^2$.

$$\begin{aligned}
x_{2,3} &= \frac{-(a^2+1) \pm \sqrt{(a^2-1)^2}}{2} \\
x_{2,3} &= \frac{-(a^2+1) \pm |a^2-1|}{2}
\end{aligned}$$

Wir betrachten die zwei Fälle für das $\pm$:

Fall 1: Positives Vorzeichen ($+$)

$$x_2 = \frac{-(a^2+1) + (a^2-1)}{2} = \frac{-a^2 - 1 + a^2 - 1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Fall 2: Negatives Vorzeichen ($-$) - muss beachtet werden, da $|a^2-1| = -(a^2-1)$ möglich wäre. Unabhängig davon, ob wir $\sqrt{(a^2-1)^2} = a^2 - 1$ oder $-(a^2-1)$ annehmen, führt der zweite Fall in der $\pm$ Rechnung zum gleichen Ergebnis:

$$x_3 = \frac{-(a^2+1) - (a^2-1)}{2} = \frac{-a^2 - 1 - a^2 + 1}{2} = \frac{-2a^2}{2} = -a^2$$

Alle Nullstellen von p_a (Aufgabe b)):

$$\mathcal{N} = \{2a, -1, -a^2\}$$

3.2 Komplexe Linearfaktorzerlegung (Aufgabe c))

Die Linearfaktorzerlegung eines normierten Polynoms dritten Grades $p(x)$ mit den Nullstellen x_1, x_2, x_3 lautet: $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Da alle Nullstellen reell sind (für $a \in \mathbb{R}$), ist die komplexe Zerlegung identisch mit der reellen.

$$p_a(x) = (x - 2a)(x - (-1))(x - (-a^2))$$

$$p_a(x) = (x - 2a)(x + 1)(x + a^2)$$

Diese Zerlegung gilt für alle $x \in \mathbb{C}$.

3.3 Reelle Zerlegung (Aufgabe d))

Da alle Nullstellen $x_1 = 2a$, $x_2 = -1$ und $x_3 = -a^2$ reell sind, besteht die reelle Zerlegung nur aus Linearfaktoren und ist somit identisch mit der komplexen Linearfaktorzerlegung.

$$p_a(x) = (x - 2a)(x + 1)(x + a^2)$$