5P

Fabian Aps 525528

Joris Victor Vonderwülbecke
0528715

Emil Arthur Joseph Hartmann
052542

Friedrich Ludwig Finck
0526329

Geben Sie diese Hausaufgabe bitte in schriftlicher Form in der entsprechenden Dateiablage auf ISIS ab.

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion

a) Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, gilt: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, gilt: $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2\cdot n}$

a) Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, gilt: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}$

Induktionsanfang

Für $n = 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 \qquad \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1 \checkmark$$

$A(1)$ ist wahr.

Induktionsvoraussetzung

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6} \checkmark$$

Induktionsbehauptung

Es gilt $A(n+1)$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2(n+1)+1)}{6} \checkmark$$

Induktionsschritt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$\frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)\cdot(2n^2+n+6n+6)}{6} = \frac{(n+1)\cdot(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$2n^2 + 7n + 6 = (n+2)\cdot(2n+3)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2(n+1)+1)}{6}$$ ✓

Induktionsschluss

Da $A(1)$ gilt und auch $A(n)$ immer $A(n+1)$ folgt gilt $A(n)$ für alle $n \geq 1$ $\square$ ✓

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gilt:

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2\cdot n}$$

Zu zeigen ist für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

$A(n)$: $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ ✓

Induktionsanfang

Für $n = 2$: $\prod_{k=2}^{2} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$

$\frac{2+1}{2\cdot 2} = \frac{3}{4}$ Beide Seiten sind gleich $A(2)$ gilt. ✓

Induktionsvoraussetzung

Sei $n \geq 2$ beliebig $\rightarrow$ es gilt $A(n)$:

$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ ✓

Induktionsbehauptung

Es soll gelten $A(n+1)$: $\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$ ✓

$$\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\left(\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$=\frac{n+1}{2n}\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

NR:

$$1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

$$=\frac{n+1}{2n}\cdot\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}=\frac{n+2}{2(n+1)}$$ ✓

Induktionsschluss

Da $A(2)$ gilt und gezeigt wurde, dass aus $A(n)$ stets $A(n+1)$ folgt, gilt die Aussage $A(n)$ für alle $n \geq 2$. $\square$ ✓