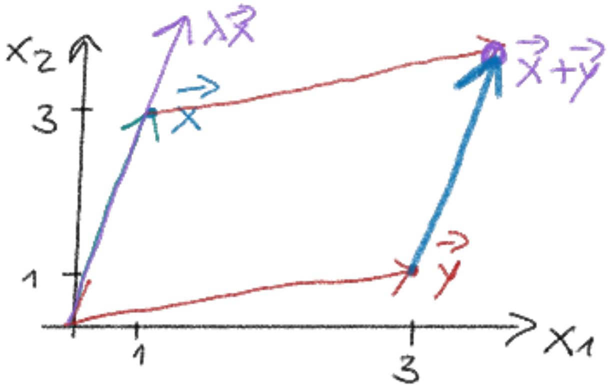
# 10. Vektorräume

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

06.11.2025

**Prototyp:** $\mathbb{R}^n = \left\{ \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \;\middle|\; x_1, \dots x_n \in \mathbb{R} \right\}$

z.B. $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$




- $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}$
  $= \begin{bmatrix} 1 + 3 \\ 3 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$
- $\lambda \vec{x} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}$

**Bemerkungen:**

- Im Folgenden $\mathbb{K}$ steht $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$
- Die Elemente von $\mathbb{K}$ heißen Skalaren
- übliche Bezeichung $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ lambda my

**Definition:** Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist eine Menge $V$ mit einer Addition $+$ und einer skalaren Multiplikation $\cdot$, sodass

$$v + w \in V \quad \text{und} \quad \lambda v \in V$$

für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) gilt und folgende Rechenregeln für alle $v, w, x \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gelten:

(1) $+$ ist assoziativ: $(v + w) + x = v + (w + x)$,

(2) $+$ ist kommutativ: $v + w = w + v$,

(3) es gibt einen Nullvektor $0 \in V$ mit $0 + v = v$,

(4) zu jedem Vektor $v \in V$ git es $-v \in V$ mit $v + (-v) = 0$,

(5) es gilt: $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$,

(6) Distributivgesetz: $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$

(7) Distributivgesetz:$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$

(8) $1 \cdot v = v$.

Die Elemente von $V$ heißen Vektoren.

(1) Die Elemente von $\mathbb{K}$ heißen Skalare. $\mathbb{K}$ steht für einen Körper.

(2) Insbesondere enthält jeder $\mathbb{K}$-Vektorraum den Nullvektor und ist somit nichtleer, d.h. $V \neq \emptyset$.

(3) Das $\mathbb{K}$ bei "$\mathbb{K}$-Vektorraum" sagt, aus welchem Zahlbereich die Zahlen (=Skalare) kommen, mit denen multipliziert wird.

(4) Kurzschreibweise: $\lambda v$ anstatt $\lambda \cdot v$ oder Vektorraum anstatt $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(5) Die geometrische Anschauung zu den Vektorraumoperationen ist die aus $\mathbb{R}^2$.

**Beispiele:**

1) $V = \mathbb{K}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \;\middle|\; x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K} \right\}$ ist $\mathbb{K}$-VR mit

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}$$

Nullvektor $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ $\rightsquigarrow$ $\mathbb{C}^n$ ist $\mathbb{C}$-VR, $\mathbb{R}^n$ ist $\mathbb{R}$-VR

2) $V = \mathbb{K}[z] = \{ p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K},\ n \in \mathbb{N} \}$ Menge aller Polynome ist $\mathbb{K}$-VR mit Addition + skalarer Multiplikation aus VL 8

Nullvektor: $\vec{0} = p(z) = 0 = \sum_{k=0}^{n} 0 \cdot z^k$

3) $D$ Menge dann ist $V = \{ f : D \to \mathbb{R} \}$. ein $\mathbb{R}$-VR mit

Addition: $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, z.B. $(\exp + \sin)(x) = \exp(x) + \sin x$

Skalarmultiplikation: $(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)$ z.B. $3 \cdot \cos$ ist $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = 3 \cdot \cos x$

Nullvektor: $\vec{0} : D \to \mathbb{R}$ mit $\vec{0}(x) = 0$ für alle $x \in D$.

**Definition:** Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Teilmenge $T \subseteq V$ ist ein Teilraum (oder Unterraum oder Untervektorraum) von $V$, falls $T$ selbst ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist (mit dem gleichen $+$ und $\cdot$ wie $V$).

**Satz:** Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann ist $T \subseteq V$ ein Teilraum von $V$, genau dann wenn:

(i) $0 \in T$,

(ii) für alle $v, w \in T$ ist $v + w \in T$,

(iii) für alle $v \in T$ und $\lambda \in K$ ist $\lambda v \in T$.

Beispiele:

1) Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-VR dann sind $\{\vec{0}\}$ und $V$ Teilräume

2) $V = \mathbb{R}^2$, $T := \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

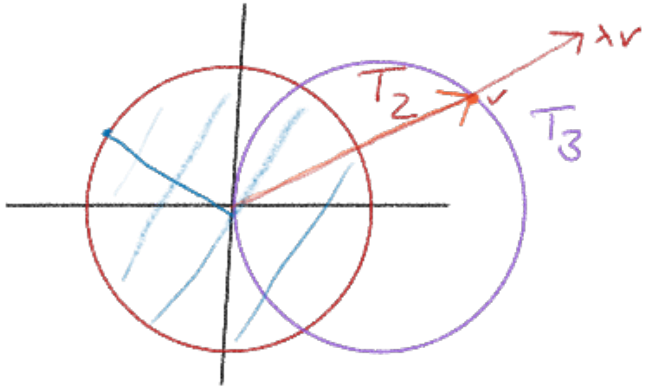
i) $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in T$

ii) Seien $\vec{v}, \vec{w} \in T$, d.h. $s, t \in \mathbb{R}$, sd. $\vec{v} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{w} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Dann
$\vec{v} + \vec{w} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \underbrace{(s+t)}_{\in \mathbb{R}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in T$

iii) Sei $v \in T$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $t \in \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Dann $\lambda \vec{v} = \underbrace{\lambda \cdot t}_{\in \mathbb{R}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in T$

$\Rightarrow$ $T$ ist Teilraum

$T_2$ ist kein Teilraum da $\vec{0} \notin T_2$




3) $V = \mathbb{C}[z]$. Dann $\mathbb{C}_{\le 2}[z] = \{ p \in \mathbb{C}[z] \mid \deg(p) \le 2 \}$

i) $\vec{0} \in \mathbb{C}_{\le 2}[z]$, da $\deg(\vec{0}) = -\infty \le -2$

ii) Seien $p, q \in \mathbb{C}_{\le 2}[z] \Rightarrow \deg(p) \le 2$, $\deg(q) \le 2$, dann $\deg(p+q) \le 2$

$\Rightarrow p+q \in \mathbb{C}_{\le 2}[z]$

iii) $\lambda \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{C}_{\le 2}[z] \Rightarrow \deg(p) \le 2$, dann $\deg(\lambda p) \le 2 \Rightarrow \lambda p \in \mathbb{C}_{\le 2}[z]$.

$\rightsquigarrow \mathbb{C}_{\le 2}[z]$ ist Teilraum.

# 10.3 Linearkombinationen

**Definition:** Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(1) Ein Vektor $v \in V$ heißt Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in V$, falls Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ existieren, sodass

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j$$

.

(2) Die Menge aller Linearkombinationen von $v_1, \ldots, v_k$ heißt der Spann (lineare Hülle) von $v_1, \ldots, v_k$ :

$$\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\} := \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}\}$$

Beispiel: $V = \mathbb{R}^3$ $\quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\vec{v}_1 + 1\,\vec{v}_2$$

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \overset{!}{=} \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ 1 = 0 \ \lightning$$

$\vec{w}$ kann nicht als Linearkombin. von $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ dargestellt

# Beispiele

$$\operatorname{Span}\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\} = \{\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 \mid \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \left\{\lambda_1 \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \mid \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\0\end{bmatrix} \mid \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}\right\}. \quad \hat{=} \ (x,y)\text{-Ebene}$$

# 10.4 Erzeugendensystem

**Satz:** Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \dots, v_k \in V$. Dann ist $\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ ein Teilraum von $V$.

**Definition:** Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $T$ ein Teilraum von $V$. Eine Menge $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq T$ heißt Erzeugendensystem (EZS) von $T$, falls ihr Spann gleich $T$ ist:

$$\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_k\} = T.$$