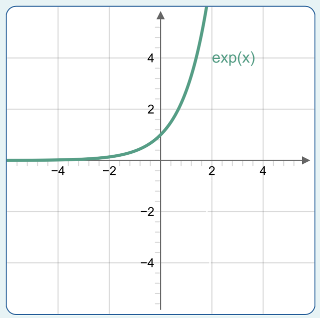
6. Elementare Funktionen I

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

28.10.2025

Exponentialfunktion: $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x,$

also $\exp(x) = e^x$, wobei $e = 2.71828\ldots$ die Eulersche Zahl ist.



Satz: Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(1) $e^0 = 1$.

(2) Funktionalgleichung: $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

(3) $e^x \neq 0$ und $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

(4) $e^x > 0$.

(5) exp ist streng monoton wachsend.

(6) $\exp : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ ist bijektiv.

Natürlicher Logarithmus $\ln := \exp^{-1} :]0,\infty[\to \mathbb{R}$,

Bemerkung: (1) $\exp^{-1} = \ln$ und $\ln^{-1} = \exp$.

(2) $\ln(e^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $e^{\ln x} = x$ für alle $x \in]0,\infty[$.

Satz: Seien $x, y > 0$. Dann gilt:

(1) $\ln(1) = 0$.

(2) $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$

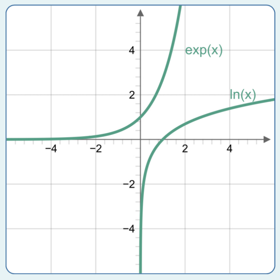
(3) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$.

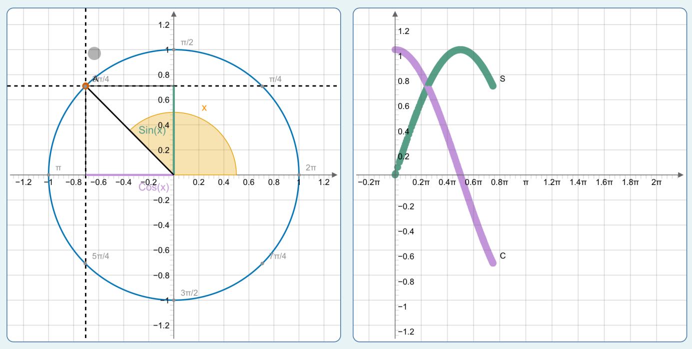
(4) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$.

(5) $\ln(x^n) = n\ln(x)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(6) ln ist streng monoton wachsend.

(7) $\ln :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ ist bijektiv.





Bemerkung: Winkel entgegengesetzt der Uhrzeigersinns sind positiv.

Eigenschaften von Sinus und Cosinus

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $-1 \leq \cos x \leq 1$ und $-1 \leq \sin x \leq 1$

(2) $\cos(-x) = \cos(x)$

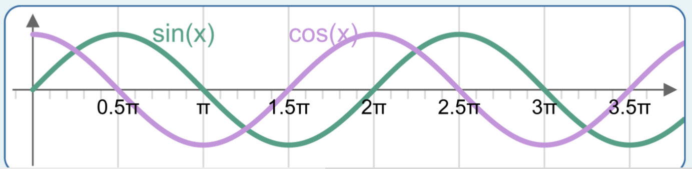
(3) $\sin(-x) = -\sin(x)$.

(4) Trigonometrischer Pythagoras: $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.

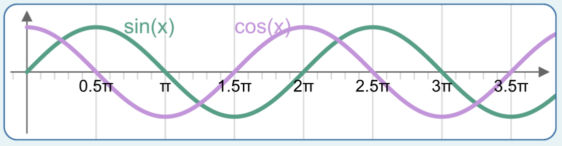
(5) $\cos(x + 2\pi k) = \cos(x)$ und $\sin(x + 2\pi k) = \sin(x)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(6) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(7) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.



Additionstheoreme



Satz: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

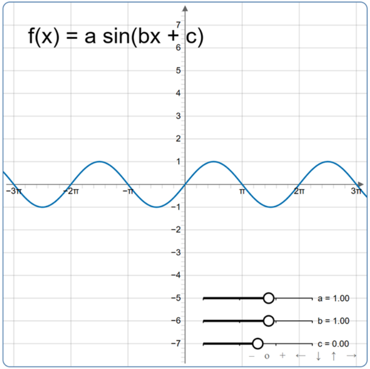
(1) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

(2) $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

Folgerungen:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

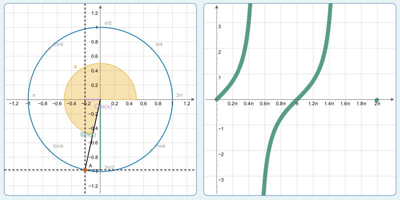
Überlagerung von Schwingungen gleicher Frequenz



6.3 Tangens

Wir definieren den Tangens durch $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Tangensfunktion: $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.



Additionstheorem: $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

Eigenschaften:

(1) Tangens ist π-periodisch, d.h. $\tan(\phi + k\pi) = \tan(\phi)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(2) Tangens ist nicht injektiv, also insbesondere nicht umkehrbar.

(3) $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ ist injektiv mit Umkehrfunktion Arkustangens: