Analysis I (VL 1–9, 17–31)

1. Grundlagen & Induktion (VL 1, 4)

Logik: $A \Rightarrow B \iff \neg B \Rightarrow \neg A$ (Kontraposition) [42].
Binomischer Lehrsatz: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ [95].

Vollständige Induktion [85]

Beweis einer Aussage $A(n)$ für alle $n \geq n_0$.
1. **IA (Anfang):** Zeige $A(n_0)$ ist wahr.
2. **IS (Schritt):** $n \to n+1$.
   - *IV (Voraussetzung):* Gelte $A(n)$.
   - *Schluss:* Zeige $A(n+1)$ unter Nutzung der IV.

Wichtige Summen:
$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (Gauß) [88] — $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (Geometr.) [66]

2. Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ (VL 3, 7)

$z = x + iy = re^{i\phi} = r(\cos\phi + i\sin\phi)$.
$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $\phi = \arg(z)$.
- **Konjugation:** $\bar{z} = x - iy$. Es gilt $z\bar{z} = |z|^2$.
- **Euler-Formel:** $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$.
- **Multiplikation:** $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\phi_1+\phi_2)}$. (Winkel addieren!)
- **Potenzen (Moivre):** $z^n = r^n e^{in\phi}$.
- **Wurzeln:** $z^n = w = se^{i\alpha}$ hat n Lösungen ($k = 0, \ldots, n-1$):

$$z_k = \sqrt[n]{s} \cdot e^{i\frac{\alpha+2\pi k}{n}} \quad \text{(Regelmäßiges } n\text{-Eck)}$$

Quadrat. Gleichung: $az^2 + bz + c = 0$. Lsg: $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. (Wurzel aus komplexer Zahl beachten! Ggf. in Polar umwandeln).

3. Folgen & Stetigkeit (VL 17-20)

Grenzwerte: $\lim \frac{1}{n} = 0$, $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, $\lim(1+\frac{x}{n})^n = e^x$.
Sandwich-Satz: $a_n \leq b_n \leq c_n$ und $a_n, c_n \to a \Rightarrow b_n \to a$.
Stetigkeit: f stetig in $x_0 \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- **Zwischenwertsatz:** f stetig auf $[a,b]$, $f(a) < c < f(b) \Rightarrow \exists \xi : f(\xi) = c$. (Nullstellensuche).
- **Min/Max:** Stetige Fkt. auf kompaktem Intervall $[a,b]$ nimmt Min und Max an.

4. Differentialrechnung (VL 21-25)

Ableitungen: $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\ln x)' = 1/x$, $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Regeln: Produkt $(uv)' = u'v + uv'$, Quotient $(u/v)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$, Kette $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$.
Umkehrfunktion: $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Mittelwertsatz & l'Hospital

MWS: Ist f diffbar auf $]a,b[$, stetig auf $[a,b]$, dann $\exists \xi \in]a,b[$:

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{(Steigung Tangente = Steigung Sekante)}$$

L'Hospital: Bei "$\frac{0}{0}$öder "$\frac{\infty}{\infty}$: $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Taylor & Extrema (Wichtig!)

Extrema: Notwendig $f'(x_0) = 0$. Hinreichend:
- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ Min, $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ Max.
- Falls $f''(x_0) = 0$: Erstes $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ suchen. n gerade? Extremum. n ungerade? Sattelpunkt.

Taylor-Formel mit Lagrange-Restglied (VL 24):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \xi \text{ zw. } x, x_0$$

Reihen: $e^x = \sum \frac{x^k}{k!}$, $\sin x = \sum(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

5. Integralrechnung (VL 28-31)

Hauptsatz: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ mit $F' = f$.

Integrationstechniken

1. Partielle Integration: $\int u'v = uv - \int uv'$. (Tipp: Wähle v so, dass es beim Ableiten einfacher wird, z.B. $x \cdot e^x$).
2. Substitution: $x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t)dt$.

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f(g(t))g'(t)dt$$

Partialbruchzerlegung (PBZ) - VL 9/31

Ziel: Integriere rationale Funktion $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.
1. **Polynomdivision:** Falls Grad $P \geq$ Grad $Q \to$ Rest $\frac{R(x)}{Q(x)}$.
2. **Nullstellen Nenner:** $Q(x)$ faktorisieren.
3. **Ansatz:**
   - *Einfach* $(x-x_0)$: $\frac{A}{x-x_0}$. ($\int \to A\ln|x-x_0|$)
   - *Mehrfach* $(x-x_0)^k$: $\frac{A_1}{x-x_0} + \cdots + \frac{A_k}{(x-x_0)^k}$. ($\int \to$ ln und Potenzen $\frac{1}{(1-k)(x-x_0)^{k-1}}$).
   - *Komplex* (x^2+px+q): $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$. $\to$ Zerlegen in $\frac{2x+p}{x^2+px+q}$ ($\int \to$ ln(Nenner)) und Rest ($\to$ arctan).
4. **Koeffizienten:** Zuhaltemethode (einfache Pole) oder LGS.

Uneigentliche Integrale (VL 31)

Grenzen $\pm\infty$ oder Polstellen. Als Grenzwert berechnen! $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$. Wichtig: $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ konv. für $\alpha > 1$. $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ konv. für $\alpha < 1$.

Lineare Algebra (VL 10–16, 32–33)

6. Vektorräume (VL 10-11)

Unterraum: $U \subset V$ ist UR, wenn $0 \in U$ und abgeschlossen bzgl. $+$ und $\cdot$ (Skalar).
Linear Unabhängig: $\sum \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \forall \lambda_i = 0$.
Basis: Linear unabhängiges Erzeugendensystem.
Dimension: Anzahl der Basisvektoren.
Koordinaten: $v = \sum \lambda_i b_i \Rightarrow$ Koord-Vektor bzgl Basis B ist $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T$.

7. Matrizen & LGS (VL 12-14)

Rang: Anzahl linear unabhängiger Zeilen/Spalten (oder Pivot-Elemente in der Zeilenstufenform ZSF).
Lösbarkeit von $Ax = b$:

- *Keine Lsg:* $\text{Rang}(A) < \text{Rang}(A|b)$.
- *Genau eine Lsg:* $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b) = n$ (Variablenanzahl).
- *Unendl. Lsg:* $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b) < n$.
  (Freie Parameter $= n - \text{Rang}(A)$).

Inverse: $A \in K^{n,n}$ invertierbar $\iff \det(A) \neq 0 \iff \text{Rang}(A) = n$.
Berechnung: $(A|I_n) \xrightarrow{\text{Gauss}} (I_n|A^{-1})$.
Regel: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

8. Lineare Abbildungen (VL 15-16)

$f : V \to W$ linear, $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$.
Kern: $\text{Kern}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$. (Lösungsraum von $Ax = 0$).
Bild: $\text{Bild}(f) = \{f(v) \mid v \in V\}$. (Spaltenraum von A).
Injektiv $\iff$ Kern $= \{0\}$. Surjektiv $\iff$ Bild $= W$.

Dimensionsformel:

$$\dim(V) = \dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f))$$

Für Matrix $A \in K^{m,n}$: $n = \dim(\text{Kern}) + \text{Rang}(A)$.

Matrixdarstellung & Basiswechsel

Sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ Basis von V, C Basis von W.
Matrix $A = M_C^B(f)$: Spalte j enthält Koord. von $f(b_j)$ bzgl. C.

$$f(v)_C = A \cdot v_B$$

Basiswechsel: Seien B, B' Basen von V. Transformationsmatrix $T = M_B^{B'}(id)$ (Spalten sind b'_j dargestellt in B).
Koord-Transf: $v_B = T \cdot v_{B'}$.
Matrix-Transformation: Sei A Matrix bzgl. B und A' Matrix bzgl. B' (bei Endomorphismus $V \to V$):

$$A' = T^{-1}AT \quad \text{(ähnliche Matrizen)}$$

9. Determinanten (VL 32)

- 2×2: $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.
- 3×3: Sarrus (Jägerzaun / Diagonalen).
- **Laplace-Entwicklung:** Nach Zeile i oder Spalte j: $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik})$.
  (Tipp: Zeile/Spalte mit vielen Nullen wählen).
- **Dreiecksmatrix:** Produkt der Diagonalelemente.
- **Eigenschaften:**
  - $\det(A) = \det(A^T)$.
  - $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
  - $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.
  - Zeilentausch: Vorzeichenwechsel.
  - Zeile mal λ: Determinante mal λ. ($\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$).

10. Eigenwerte (EW) und Eigenvektoren (EV) (VL 33)

Gleichung: $Av = \lambda v$ mit $v \neq 0$.

Algorithmus zur Berechnung

1. **Charakteristisches Polynom:**
$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$
2. **Eigenwerte bestimmen:** Nullstellen von $p_A(\lambda)$.
3. **Algebraische Vielfachheit** $a(\lambda)$**:** Vielfachheit der Nullstelle im Polynom $(X - \lambda)^k$.
4. **Eigenraum / Eigenvektoren:** Löse das homogene LGS für jedes λ:
$$(A - \lambda I_n)v = 0$$
Der Lösungsraum ist der Eigenraum V_λ. Basis berechnen!
5. **Geometrische Vielfachheit** $g(\lambda)$**:**
$$g(\lambda) = \dim(V_\lambda) = n - \text{Rang}(A - \lambda I_n)$$

Eigenschaften:

- $1 \leq g(\lambda) \leq a(\lambda)$.
- $\sum a(\lambda_i) = n$ (im Komplexen immer).
- $\text{Spur}(A) = \sum a_{ii} = \sum \lambda_i$ (Summe inkl. Vielfachheit).
- $\det(A) = \prod \lambda_i$ (Produkt inkl. Vielfachheit).

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2$. EW $\lambda = 1$ mit $a(1) = 2$. $A - 1I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Rang=1. $g(1) = 2 - 1 = 1$. Hier gilt $g(1) < a(1)$.