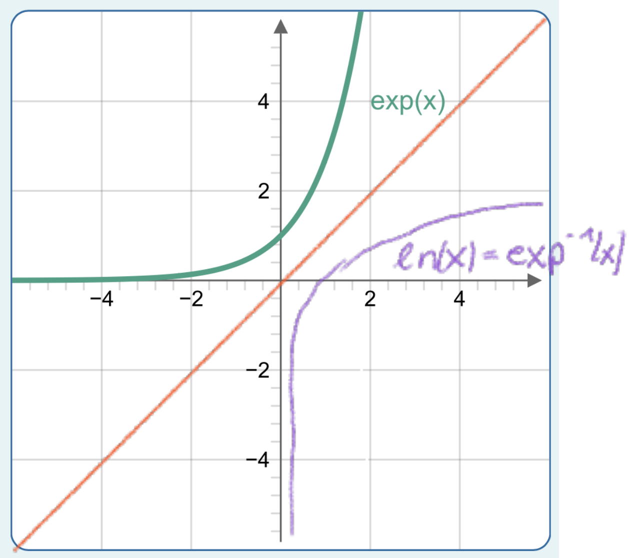
6. Elementare Funktionen I

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

28.10.2025

Exponentialfunktion: $\exp \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x,$

also $\exp(x) = e^x$, wobei $e = 2.71828\ldots$ die Eulersche Zahl ist.



Satz: Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(1) $e^0 = 1$.

(2) Funktionalgleichung: $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

(3) $e^x \neq 0$ und $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$. , da $e^{-x} \cdot e^x \overset{2)}{=} e^{-x+x} = e^0 \overset{1)}{=} 1$

$\overset{e^x \neq 0}{\Rightarrow} e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

(4) $e^x > 0$.

(5) exp ist streng monoton wachsend.

(6) $\exp : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ ist bijektiv. Injektivität folgt aus Eigenschaft (5)

Natürlicher Logarithmus $\ln := \exp^{-1} :]0, \infty[\to \mathbb{R}$,

Bemerkung: (1) $\exp^{-1} = \ln$ und $\ln^{-1} = \exp$.

(2) $\ln(e^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $e^{\ln x} = x$ für alle $x \in]0, \infty[$.

Satz: Seien $x, y > 0$. Dann gilt:

(1) $\ln(1) = 0$. $\ln(1) = \ln(e^0) = 0$

(2) $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$: $\ln(x y) = \ln(e^{\ln x} e^{\ln y}) = \ln(e^{\ln x + \ln y})$
$= \ln x + \ln y$

(3) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$, da: $0 \overset{1)}{=} \ln(1) = \ln\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) \overset{2)}{=} \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

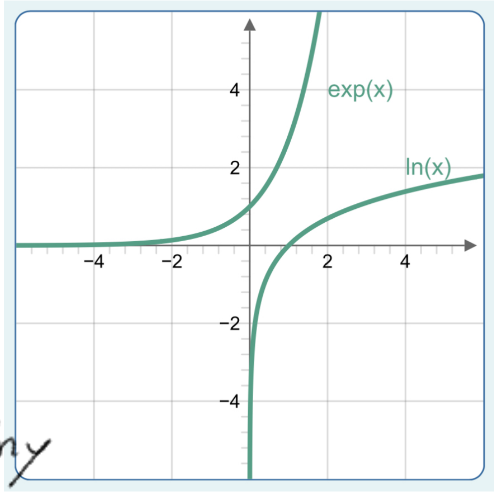
(4) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) \overset{2)}{=} \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) \overset{3)}{=} \ln x - \ln y$

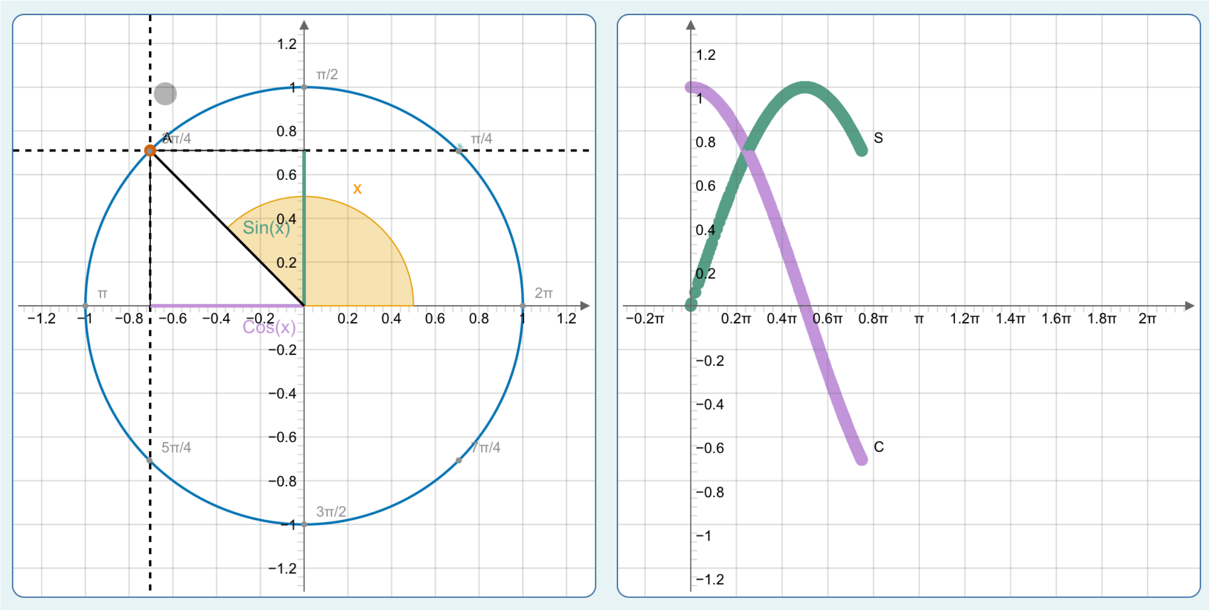
(5) $\ln(x^n) = n \ln(x)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(6) ln ist streng monoton wachsend.

(7) $\ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ ist bijektiv.

da $\ln = \exp^{-1}$





Bemerkung: Winkel entgegengesetzt der Uhrzeigersinns sind positiv.

Bogenmaß von φ:

$360° \mathrel{\hat{=}} 2\pi$

$180° = \pi$

$45° = \pi/4$

$\varphi = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha \,, \quad \alpha = \frac{180°}{\pi} \varphi$

Das liefert die Funktionen.

$x = \cos\varphi$ ⇝ x-Wert eines Punktes auf dem Einheitskreis mit Winkel φ

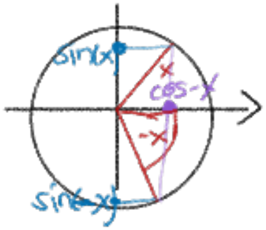
$y = \sin\varphi$ ⇝ y-Wert ——— " ———

$\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \varphi \mapsto \cos\varphi \,, \quad \sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \varphi \mapsto \sin\varphi$

Eigenschaften von Sinus und Cosinus

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $-1 \leq \cos x \leq 1$ und $-1 \leq \sin x \leq 1$



(2) $\cos(-x) = \cos(x)$

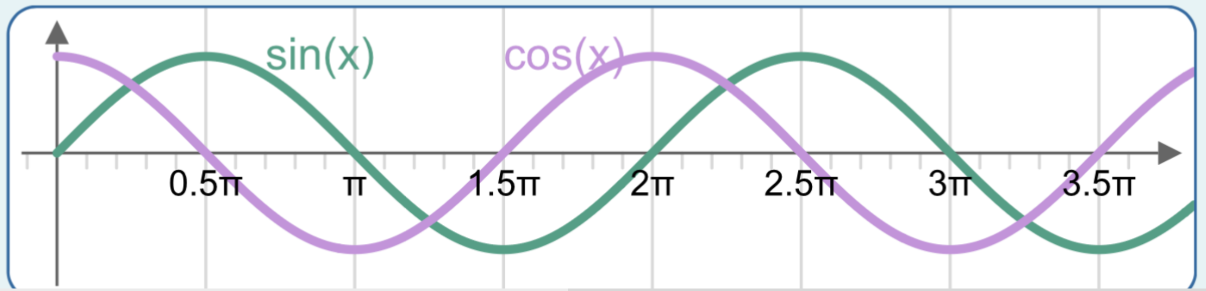
(3) $\sin(-x) = -\sin(x)$.

(4) Trigonometrischer Pythagoras: $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.

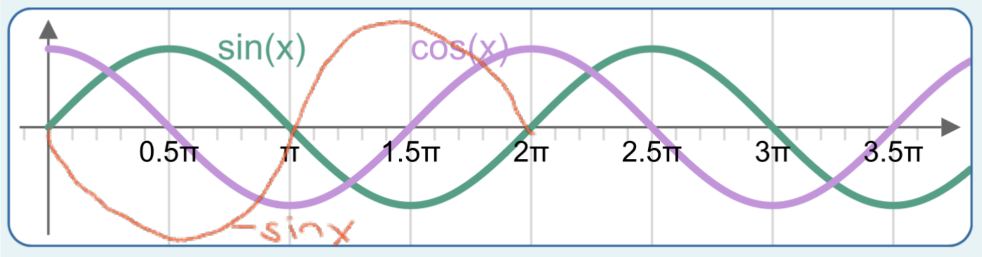
(5) $\cos(x + 2\pi k) = \cos(x)$ und $\sin(x + 2\pi k) = \sin(x)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(6) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(7) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.



Additionstheoreme



Satz: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

(2) $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

Folgerungen:

1) $\cos(x + \pi/2) = \cos x \underbrace{\cos(\pi/2)}_{0} - \sin(x)\underbrace{\sin(\pi/2)}_{1} = -\sin x$

2) $\sin(x + \pi/2) = \dots = \cos x$

Spezielle Werte, z.B. $\cos(\pi/4) \overset{?}{=}$

$0 = \cos(\pi/2) = \cos(\pi/4 + \pi/4) = \cos(\pi/4)\cdot\cos(\pi/4) - \sin(\pi/4)\sin(\pi/4)$

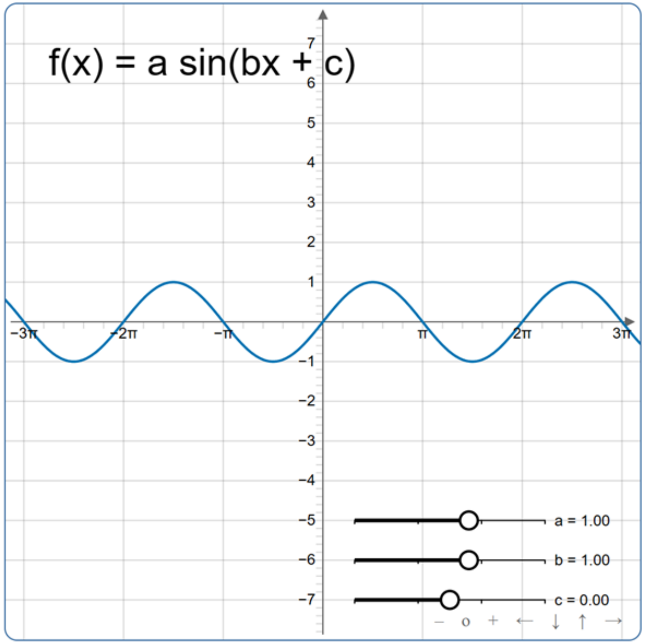
$= \cos(\pi/4)^2 - \underbrace{\sin(\pi/4)^2}_{1-\cos(\pi/4)^2} = \cos(\pi/4)^2 - (1 - \cos(\pi/4)^2)$

$1 - \cos(\pi/4)^2$, da $\cos(\pi/4)^2 + \sin(\pi/4)^2 = 1$

$= \cos(\pi/4)^2 - 1 + \cos(\pi/4)^2 = 2\cos(\pi/4)^2 - 1$

$\Rightarrow 1 = 2\cos(\pi/4)^2 \Rightarrow \cos(\pi/4) = \sqrt{\frac{1}{2}}$

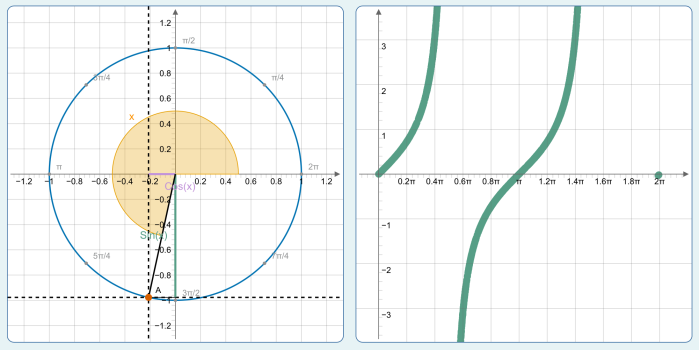
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1


f(x) = a sin(bx + c)
a = 1.00
b = 1.00
c = 0.00

6.3 Tangens

Wir definieren den Tangens durch $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Tangensfunktion: $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.



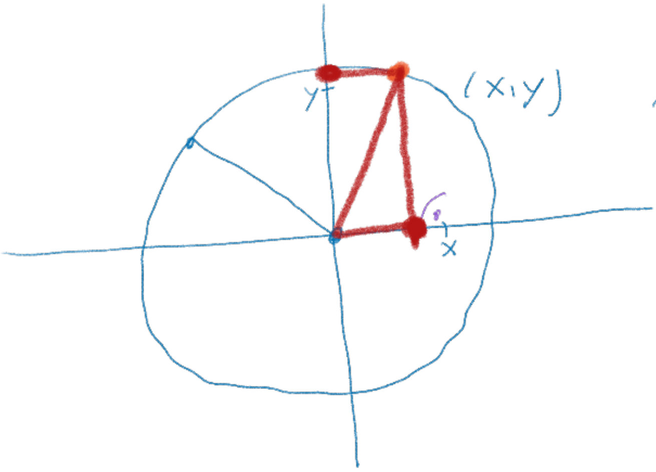
Additionstheorem: $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

Eigenschaften:

(1) Tangens ist π-periodisch, d.h. $\tan(\phi + k\pi) = \tan(\phi)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(2) Tangens ist nicht injektiv, also insbesondere nicht umkehrbar.

(3) $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ ist injektiv mit Umkehrfunktion Arkustangens:



$$\sqrt{x^2+y^2} = 1$$