17. Konvergenz von Zahlenfolgen

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

24.11.2025

Definition: Eine Folge reeller Zahlen ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n.$$

Schreibweisen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $a_0, a_1, a_2, \ldots$.

Das Element a_n heißt n-tes Folgenglied, und n der zugehörige Index.

Beispiele:

1) $a_n = \frac{1}{2^n}$, d.h. $a_0 = \frac{1}{2^0} = 1$, $a_1 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$

2) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für $n \geq 1$, d.h. $a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$, $a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

↳ Euler Formel

3) Folge d. Quadratzahlen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots) = (n^2)_{n\in\mathbb{N}}$

4) Wurzelfolge: $a_0 > 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$

Beispiel: $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{2}{a_0}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2}$, $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{2}{a_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{17}{12}$ $\rightsquigarrow \sqrt{2}$

5) Fibonacci-Folge: $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ und $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ für $n \geq 0$

$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$

Bemerkung:

a) Allgemeiner: Folgen $(a_n)_{n \geq n_0}$ für $n_0 \in \mathbb{Z}$

b) Folgen komplexer Zahlen: $a_n \in \mathbb{C}$

Beschränktheit und Monotonie

Definition: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

a) nach unten beschränkt, wenn es eine Zahl $m \in \mathbb{R}$ gibt mit $m \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) nach oben beschränkt, wenn es eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) beschränkt, wenn es eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $m \leq a_n \leq M$

d) monoton wachsend, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

e) streng monoton wachsend, wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

f) monoton fallend, wenn $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

g) streng monoton fallend, wenn $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Kurz: *(streng) monoton*, wenn die Folge (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Beispiele

1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 2, 3, 4, \dots) = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend

und nach unten beschränkt da $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aber: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht nach oben beschränkt, also nicht beschränkt

2) $(a_n)_{n\geq 1} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$ streng monoton fallend

und beschränkt, da $0 \leq a_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$

3) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$ ist beschränkt, aber

nicht monoton.

17.2 Konvergenz

Definition: Sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, falls gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Die Zahl a heißt der Grenzwert (oder Limes) der Folge und wir schreiben

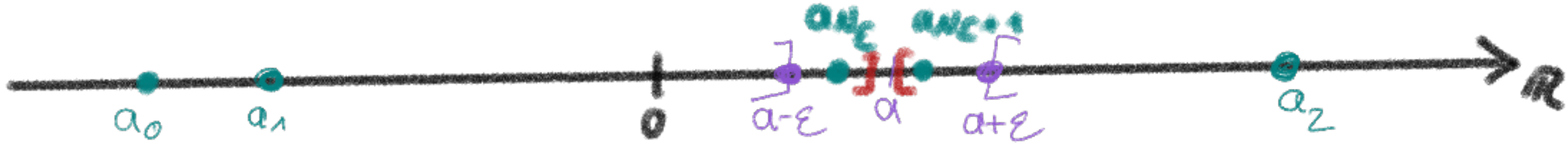
$$\lim_{n \to \infty} a_n = a, \quad \text{oder} \quad a_n \to a \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Die Folge $(a_n)_n$ heißt konvergent, falls $(a_n)_n$ einen Grenzwert hat.

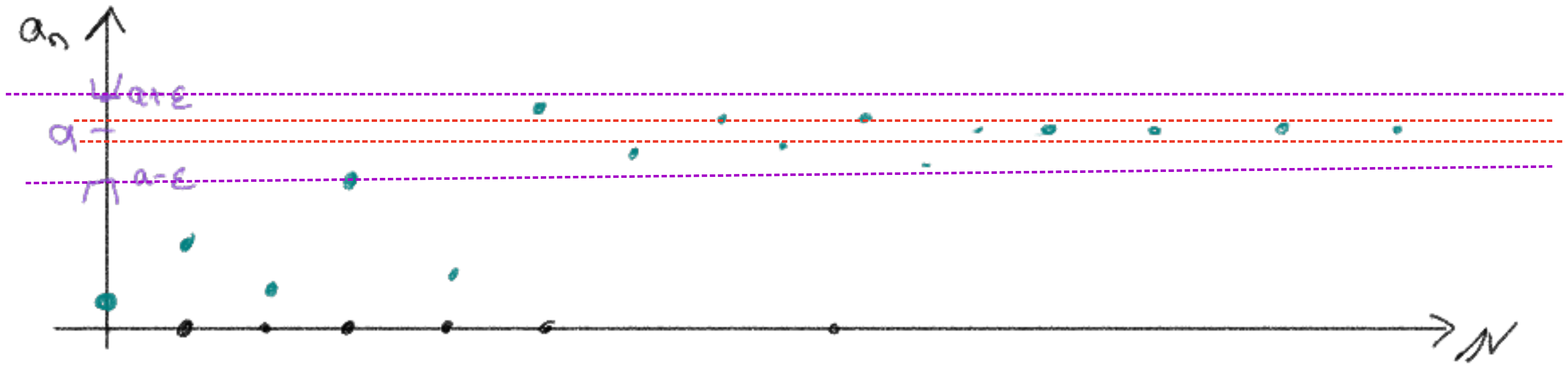
Die Folge $(a_n)_n$ heißt divergent, falls sie nicht konvergent ist.

Eine Folge, die gegen Null konvergiert, heißt Nullfolge.

Interpretation auf der Zahlengrade:



Weitere Interpretation: Für jedes $\varepsilon > 0$ liegen alle Folgenglieder in dem ε-Schlauch um a.



Bemerkung:

1) $(a_n)_{n\geq 1} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ Behauptung: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Zu zeigen es gibt ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon$$

Es gilt: $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n$

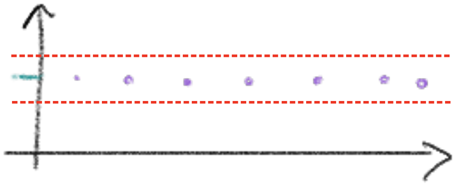
Wähle nun $N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $n \geq N_\varepsilon$

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$$

z.B. $\varepsilon = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} = 10 \rightsquigarrow N_\varepsilon = 11$

$\varepsilon = \frac{1}{100} \rightsquigarrow$ wähle $N_\varepsilon = 101$

2) Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2)_{n\in\mathbb{N}} = (2,2,2,2,2,\dots)$

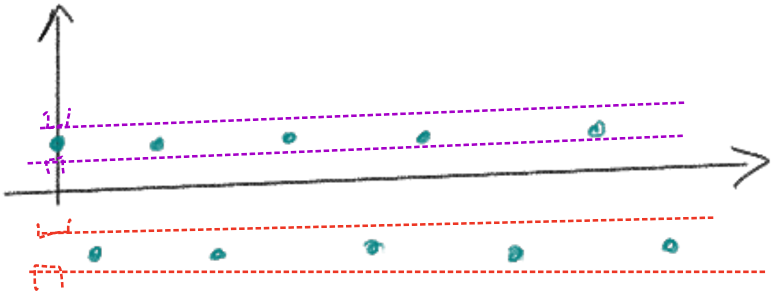


Für jedes $\varepsilon > 0$ können wir $N_\varepsilon = 0$ wählen

da $|a_n - 2| = |2-2| = 0 < \varepsilon$. für alle $n \geq 0$

3) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

ist divergent



Konvergenz

Satz:

a) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.

b) Konvergente Folgen sind beschränkt.

c) Unbeschränkte Folgen sind divergent.

Beweis:

Bemerkung: Umkehrung von (2) gilt i.A. nicht, z.B. ist $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, aber nicht konvergent.

Definition: Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_n$ heißt bestimmt divergent gegen $+\infty$, falls zu jedem $M \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$a_n > M \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Wir schreiben $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
Entsprechend heißt $(a_n)_n$ bestimmt divergent gegen $-\infty$, falls zu jedem $M \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$a_n < M \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Wir schreiben $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Bemerkung: "Konvergent" bedeutet immer "konvergent gegen eine reelle Zahl" (also nicht gegen $+\infty$)

Beispiele:

Beispiele

Darstellende Matrix bei Basiswechsel

Satz: Sei $f\colon V \to W$ linear, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ Basen von V und $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ Basen von W. Dann:

$$f_{\mathcal{B}_2\mathcal{C}_2} = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2} f_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1} \mathrm{id}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1},$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[rrr, "f_{\mathcal{B}_2\mathcal{C}_2}"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}"'] & & & \mathbb{K}^m \\
& V \arrow[ul, "K_{\mathcal{B}_2}"'] \arrow[dl, "K_{\mathcal{B}_1}"] \arrow[r, "f"] & W \arrow[ur, "K_{\mathcal{C}_2}"] \arrow[dr, "K_{\mathcal{C}_1}"'] & \\
\mathbb{K}^n \arrow[rrr, "f_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1}"'] & & & \mathbb{K}^m \arrow[uu, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2}"']
\end{tikzcd}$$

Spezialfall: Gleicher VR mit gleichen Basen: $V = W$ mit $\mathcal{C}_1 = \mathcal{B}_1$ und $\mathcal{C}_2 = \mathcal{B}_2$.

$$f_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_2} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} f_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1} \mathrm{id}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1} = (\mathrm{id}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1})^{-1} f_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1} \mathrm{id}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1},$$

Darstellende Matrix bei Basiswechsel

Satz: Sei $f\colon V \to W$ linear, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ Basen von V und $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ Basen von W. Dann:

$$f_{\mathcal{B}_2\mathcal{C}_2} = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2} f_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1} \mathrm{id}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1},$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[rrr, "f_{\mathcal{B}_2\mathcal{C}_2}"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}"'] & & & \mathbb{K}^m \\
& V \arrow[ul, "K_{\mathcal{B}_2}"'] \arrow[dl, "K_{\mathcal{B}_1}"] \arrow[r, "f"] & W \arrow[ur, "K_{\mathcal{C}_2}"] \arrow[dr, "K_{\mathcal{C}_1}"'] & \\
\mathbb{K}^n \arrow[rrr, "f_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1}"'] & & & \mathbb{K}^m \arrow[uu, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2}"']
\end{tikzcd}$$

Spezialfall: Mit $A_1 = f_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1}$, $A_2 = f_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_2}$ und $S = \mathrm{id}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$, so ist

$$A_2 = S^{-1} A_1 S,$$