10 Wahrscheinlichkeit

Intuition & Modelle der Welt

Marianne Maertens

Technische Universität Berlin

Wintersemester 2025/2026

Themen

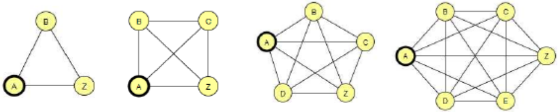
- Mengen
- Kombinatorik
- Formalisierung von Zufall
  - Ergebnisse & Ereignisse
  - Wahrscheinlichkeit im Laplace-Experiment
- Das Geburtstagsparadoxon
- Bedingte Wahrscheinlichkeit
- Base rate fallacy oder der Prävalenzfehler
- Der Satz von Bayes

Film “21” (2008)

https://en.wikipedia.org/wiki/21_%282008_film%29

Informatische Fragestellungen

- Wie viele Wege gibt es, die bei A beginnen und bei Z enden und jeden Knoten höchstens einmal besuchen?



- Wie kann man Dinge anordnen, auswählen, sortieren ... ?

  Ihr Passwort muss aus mindestens sechs und höchstens acht Zeichen bestehen. Zugelassen sind die 26 Buchstaben des lateinischen Alphabets (klein oder groß) sowie die zehn Dezimalziffern. Ein Passwort muss mindestens eine Ziffer, einen Groß- und einen Kleinbuchstaben enthalten. Wie viele verschiedene Passwörter sind möglich?
- Wie viel Speicher muss man für ein bestimmtes Verfahren vorsehen?
- Wie lange würde es dauern, alle möglichen Lösungen für ein Problem durchzuprobieren?

Mengen

Leseauftrag: Weitz (Kap. 15)

“Unter einer ’Menge’ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unseres Denkens (welche die ’Elemente’ von M genannt werden) zu einem Ganzen.”

Georg Cantor (1845 - 1918)

- Begründer der Mengenlehre

Mengen

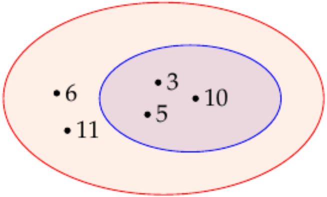
z.B. $A = \{1, 2, 3, 42\}$

- Ansammlung von 4 Objekten
- Zahl 3 ist ein Element der Menge A: $3 \in A$
- Zahl 7 ist kein Element der Menge A: $7 \notin A$
- jedes Objekt, das man sich vorstellen kann, ist entweder in A oder ist nicht in A
- $B = \{3, 42, 2, 1\}$, $A = B$
- $C = \{1, 2, 3, 3, 42\}$, $A = C$
- A, B und C sind identisch, da die Identität einer Menge ausschließlich von ihren Elementen abhängt

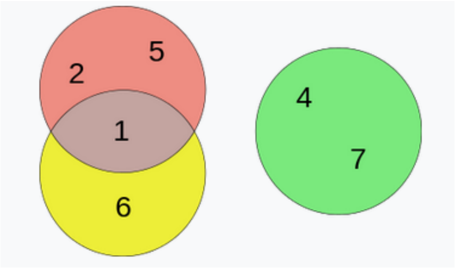
Beziehungen zwischen Mengen

$X = \{3, 5, 10\}$ und $Y = \{3, 5, 6, 10, 11\}$

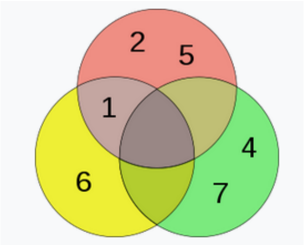
- X ist Teilmenge von Y, $X \subseteq Y$, Y ist Obermenge von X
- Mengendiagramme für die Darstellung der Beziehungen



Euler Diagramm

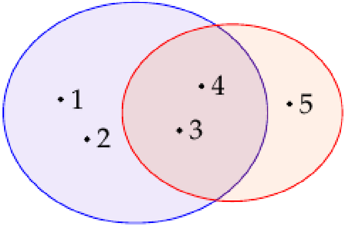


Venn Diagramm



Beziehungen zwischen Mengen

zwei Mengen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{3, 4, 5\}$

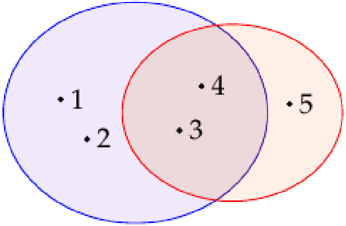


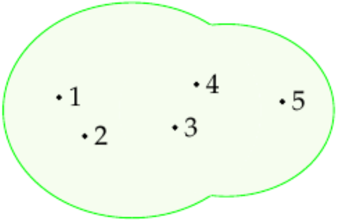
Beziehungen zwischen Mengen

zwei Mengen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{3, 4, 5\}$

Vereinigung zweier Mengen

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



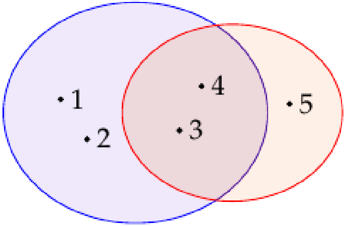


Beziehungen zwischen Mengen

zwei Mengen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{3, 4, 5\}$

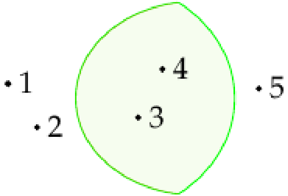
Vereinigung zweier Mengen

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



Schnitt zweier Mengen

- $A \cap B = \{3, 4\}$

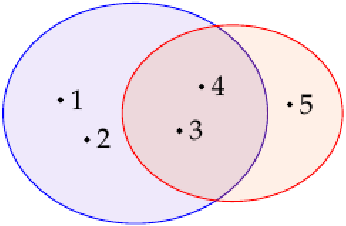


Beziehungen zwischen Mengen

zwei Mengen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{3, 4, 5\}$

Vereinigung zweier Mengen

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

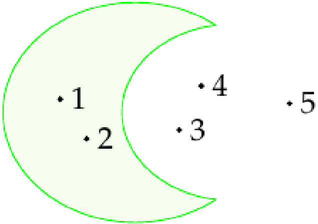


Schnitt zweier Mengen

- $A \cap B = \{3, 4\}$

mengentheoretische Differenz

- $A \setminus B = \{1, 2\}$

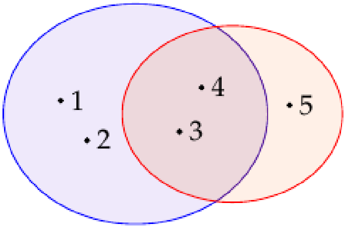


Beziehungen zwischen Mengen

zwei Mengen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{3, 4, 5\}$

Vereinigung zweier Mengen

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

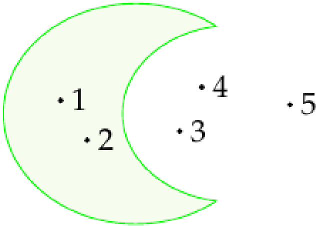


Schnitt zweier Mengen

- $A \cap B = \{3, 4\}$

mengentheoretische Differenz

- $A \setminus B = \{1, 2\}$



$\{\}, \emptyset$ ist die leere Menge

- für jedes beliebige Objekt a gilt $a \notin \{\}$

Mächtigkeit von Mengen

- Anzahl der Elemente einer (endlichen) Menge A bezeichnet man als die Mächtigkeit von A: $|A|$
  z.B. $|\{42, 43, 100\}| = 3$ und $|\emptyset|$ = 0 und $|\{1, 2, 3, 3, 42, 43, 100\}| = 6$

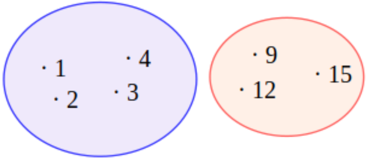
Mächtigkeit von Mengen

- Anzahl der Elemente einer (endlichen) Menge A bezeichnet man als die Mächtigkeit von A: $|A|$
  z.B. $|\{42, 43, 100\}| = 3$ und $|\emptyset| = 0$ und $|\{1, 2, 3, 3, 42, 43, 100\}| = 6$

Mächtigkeit der Menge $A \cup B$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{9, 12, 15\}$

$|A \cup B| = |A| + |B|$ *wenn* $A \cap B = \emptyset$ *(A und B sind disjunkt)*



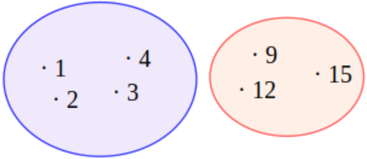
Mächtigkeit von Mengen

- Anzahl der Elemente einer (endlichen) Menge A bezeichnet man als die Mächtigkeit von A: $|A|$
  z.B. $|\{42, 43, 100\}| = 3$ und $|\emptyset|$ = 0 und $|\{1, 2, 3, 3, 42, 43, 100\}| = 6$

Mächtigkeit der Menge $A \cup B$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{9, 12, 15\}$

$|A \cup B| = |A| + |B|$ *wenn* $A \cap B = \emptyset$ *(A und B sind disjunkt)*

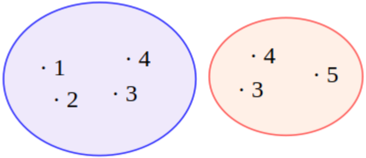


$A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{3, 4, 5\}$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \cup B| = |\{1, 2, 3, 4, 5\}| = 5$

Inklusions-Exklusions-Prinzip



Übungen

1. Wenn $A \subseteq B$ gilt, hat B dann mehr Elemente als A?

2. Wenn $A \not\subseteq B$ gilt, gilt dann $B \subseteq A$?

3. Wenn $A \not\subseteq B$ gilt, hat B dann weniger Elemente als A oder genauso viele? Oder mehr?

4. Wenn Sie zwei Mengen A und B haben, von denen Sie wissen, dass sowohl $A \subseteq B$ als auch $B \subseteq A$ gilt, was können Sie dann über A und B aussagen?

5. Gegeben sind die folgenden Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 13, 14, 15\}$ und $C = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 16, 17\}$. Wie groß ist die Vereinigungsmenge $|A \cup B \cup C|$?

Übungen

1. Wenn $A \subseteq B$ gilt, hat B dann mehr Elemente als A?
   nein, jedes Element von A ist auch eines von B, B mind. genauso groß
2. Wenn $A \not\subseteq B$ gilt, gilt dann $B \subseteq A$?
3. Wenn $A \not\subseteq B$ gilt, hat B dann weniger Elemente als A oder genauso viele? Oder mehr?
4. Wenn Sie zwei Mengen A und B haben, von denen Sie wissen, dass sowohl $A \subseteq B$ als auch $B \subseteq A$ gilt, was können Sie dann über A und B aussagen?
5. Gegeben sind die folgenden Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 13, 14, 15\}$ und $C = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 16, 17\}$. Wie groß ist die Vereinigungsmenge $|A \cup B \cup C|$?

Übungen

1. Wenn $A \subseteq B$ gilt, hat B dann mehr Elemente als A?
   nein, jedes Element von A ist auch eines von B, B mind. genauso groß
2. Wenn $A \not\subseteq B$ gilt, gilt dann $B \subseteq A$?
   nein, z.B. $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ Zeichen $\subseteq$ nicht verwechseln mit $\leq$
3. Wenn $A \not\subseteq B$ gilt, hat B dann weniger Elemente als A oder genauso viele? Oder mehr?

4. Wenn Sie zwei Mengen A und B haben, von denen Sie wissen, dass sowohl $A \subseteq B$ als auch $B \subseteq A$ gilt, was können Sie dann über A und B aussagen?

5. Gegeben sind die folgenden Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 13, 14, 15\}$ und $C = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 16, 17\}$. Wie groß ist die Vereinigungsmenge $|A \cup B \cup C|$?

Übungen

1. Wenn $A \subseteq B$ gilt, hat B dann mehr Elemente als A?
   nein, jedes Element von A ist auch eines von B, B mind. genauso groß
2. Wenn $A \not\subseteq B$ gilt, gilt dann $B \subseteq A$?
   nein, z.B. $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ Zeichen $\subseteq$ nicht verwechseln mit $\leq$
3. Wenn $A \not\subseteq B$ gilt, hat B dann weniger Elemente als A oder genauso viele? Oder mehr?
   keine Aussage möglich, z.B. $A = \{1, 2\}$, $B_1 = \{1\}$, $B_2 = \{1, 3\}$, $B_3 = \{1, 3, 4\}$
4. Wenn Sie zwei Mengen A und B haben, von denen Sie wissen, dass sowohl $A \subseteq B$ als auch $B \subseteq A$ gilt, was können Sie dann über A und B aussagen?

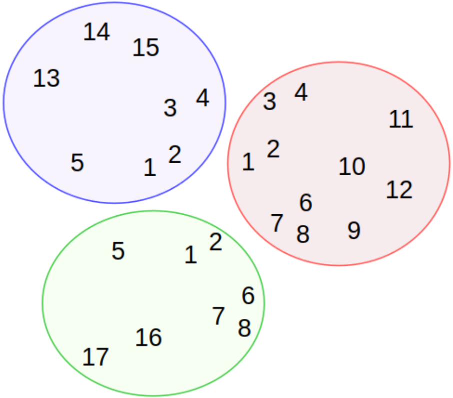
5. Gegeben sind die folgenden Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 13, 14, 15\}$ und $C = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 16, 17\}$. Wie groß ist die Vereinigungsmenge $|A \cup B \cup C|$?

Übungen

1. Wenn $A \subseteq B$ gilt, hat B dann mehr Elemente als A?
   nein, jedes Element von A ist auch eines von B, B mind. genauso groß
2. Wenn $A \not\subseteq B$ gilt, gilt dann $B \subseteq A$?
   nein, z.B. $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ Zeichen $\subseteq$ nicht verwechseln mit $\leq$
3. Wenn $A \not\subseteq B$ gilt, hat B dann weniger Elemente als A oder genauso viele? Oder mehr?
   keine Aussage möglich, z.B. $A = \{1, 2\}$, $B_1 = \{1\}$, $B_2 = \{1, 3\}$, $B_3 = \{1, 3, 4\}$
4. Wenn Sie zwei Mengen A und B haben, von denen Sie wissen, dass sowohl $A \subseteq B$ als auch $B \subseteq A$ gilt, was können Sie dann über A und B aussagen?
   A und B sind identisch
5. Gegeben sind die folgenden Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 13, 14, 15\}$ und $C = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 16, 17\}$. Wie groß ist die Vereinigungsmenge $|A \cup B \cup C|$?

Übungen

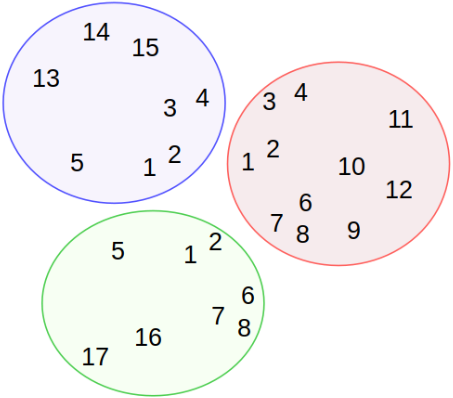
5. Gegeben sind die folgenden Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 13, 14, 15\}$ und $C = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 16, 17\}$. Wie groß ist die Vereinigungsmenge $|A \cup B \cup C|$?

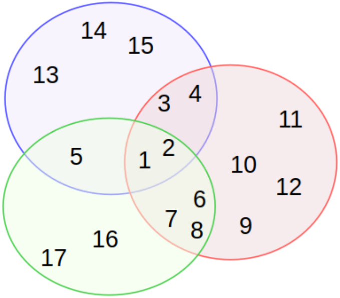


Übungen

5. Gegeben sind die folgenden Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 13, 14, 15\}$ und $C = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 16, 17\}$. Wie groß ist die Vereinigungsmenge $|A \cup B \cup C|$?

1. $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 11 + 8 + 8 - 4 - 5 - 3 + 2 = 17$





Kombinatorik

- Teildisziplin der Mathematik, die sich mit endlichen oder abzählbar unendlichen diskreten Strukturen beschäftigt (VL: Diskrete Strukturen)

Kombinatorik

- Teildisziplin der Mathematik, die sich mit endlichen oder abzählbar unendlichen diskreten Strukturen beschäftigt (VL: Diskrete Strukturen)

Wie viele mögliche Reihenfolgen gibt es, die 3 Elemente anzuordnen?

Kombinatorik

- Teildisziplin der Mathematik, die sich mit endlichen oder abzählbar unendlichen diskreten Strukturen beschäftigt (VL: Diskrete Strukturen)

Wie viele mögliche Reihenfolgen gibt es, die 3 Elemente anzuordnen?

Permutation

- permutare = vertauschen, ist die Anordnung von Objekten in einer bestimmten Reihenfolge
- Auf wie viele verschiedene Arten kann man eine Menge von Objekten anordnen?

Permutationen

1 2 3
1 3 2
2 1 3
2 3 1
3 1 2
3 2 1

- 3 Objekte $\rightarrow$ 6 Möglichkeiten (Permutationen)

$\rightarrow$ **Ziel:** allgemeine Formel wie viele Möglichkeiten es gibt

Permutationen

1 2 3
1 3 2
2 1 3
2 3 1
3 1 2
3 2 1

- 3 Objekte $\rightarrow$ 6 Möglichkeiten (Permutationen)

$\rightarrow$ **Ziel:** allgemeine Formel wie viele Möglichkeiten es gibt

1	1

Permutationen

1 2 3
1 3 2
2 1 3
2 3 1
3 1 2
3 2 1

- 3 Objekte $\rightarrow$ 6 Möglichkeiten (Permutationen)

$\rightarrow$ **Ziel:** allgemeine Formel wie viele Möglichkeiten es gibt

1	1
1 2 2 1	2 * 1 = 2

Permutationen

1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

- 3 Objekte → 6 Möglichkeiten (Permutationen)

→ **Ziel:** allgemeine Formel wie viele Möglichkeiten es gibt

1	1
1 2 2 1	2 * 1 = 2
1 2 3 ...	3 * 2 = 6

Permutationen

1 2 3
1 3 2
2 1 3
2 3 1
3 1 2
3 2 1

- 3 Objekte → 6 Möglichkeiten (Permutationen)

→ **Ziel:** allgemeine Formel wie viele Möglichkeiten es gibt

1	1	
1 2 2 1	2 * 1 = 2	2 * 1 = 2
1 2 3 ...	3 * 2 = 6	3 * 2 * 1 = 6
1 2 3 4 1 2 4 3 ...	4 * 6 = 24	4 * 3 * 2 * 1 = 24

Permutationen

1 2 3
1 3 2
2 1 3
2 3 1
3 1 2
3 2 1

- 3 Objekte → 6 Möglichkeiten (Permutationen)

→ **Ziel:** allgemeine Formel wie viele Möglichkeiten es gibt

1	1	
1 2		
2 1	2 * 1 = 2	2 * 1 = 2
1 2 3		
...	3 * 2 = 6	3 * 2 * 1 = 6
1 2 3 4		
1 2 4 3		
...	4 * 6 = 24	4 * 3 * 2 * 1 = 24

- Anzahl der Permutationen von n Objekten ist **n!**

Permutationen mit Wiederholungen

- alle Gummibärchen sind verschieden $n!$

Permutationen mit Wiederholungen

- alle Gummibärchen sind verschieden $n!$
- manche Farben tauchen mehrfach auf

1 2 3

1 3 2

- Intuition: weniger Möglichkeiten von Permutationen als vorher
- zurückführen auf den einfachen Fall:

  wenn alle unterscheidbar wären, dann $\mathbf{n}!$

→ Formel entwickeln für die Anzahl der *Permutationen mit Wiederholungen*

Permutationen mit Wiederholungen

Beispiel: Wie viele Möglichkeiten gibt es, 1 grünes und 3 gelbe Gummibärchen anzuordnen? (wenn alle unterscheidbar wären, $4! = 24$ Möglichkeiten)

Permutationen mit Wiederholungen

Beispiel: Wie viele Möglichkeiten gibt es, 1 grünes und 3 gelbe Gummibärchen anzuordnen? (wenn alle unterscheidbar wären, $4! = 24$ Möglichkeiten)

1 2 3 4
1 2 4 3
1 3 2 4
1 3 4 2
1 4 2 3
1 4 3 2

- Grüner an 1. Stelle: $3! = 6$ Möglichkeiten, die alle gleich aussehen

Permutationen mit Wiederholungen

Beispiel: Wie viele Möglichkeiten gibt es, 1 grünes und 3 gelbe Gummibärchen anzuordnen? (wenn alle unterscheidbar wären, $4! = 24$ Möglichkeiten)

1 2 3 4	2 1 3 4	2 3 1 4	2 3 4 1
1 2 4 3	2 1 4 3	2 4 1 3	2 4 3 1
1 3 2 4	3 1 2 4	3 2 1 4	3 2 4 1
1 3 4 2	3 1 4 2	3 4 1 2	3 4 2 1
1 4 2 3	4 1 2 3	4 2 1 3	4 2 3 1
1 4 3 2	4 1 3 2	4 3 1 2	4 3 2 1

- Grüner an 1. Stelle: $3! = 6$ Möglichkeiten, die alle gleich aussehen
- gilt für jede Position des grünen Gummibärchens
- verringern die n=24 Möglichkeiten um die 6 Permutationen der gelben Gummibärchen, die nicht unterscheibar sind, an jeder Position des grünen Gummibärchen

  $\frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$

Permutationen mit Wiederholungen

Beispiel: Wie viele Möglichkeiten gibt es, 2 grüne und 2 gelbe Gummibärchen anzuordnen?

Permutationen mit Wiederholungen

Beispiel: Wie viele Möglichkeiten gibt es, 2 grüne und 2 gelbe Gummibärchen anzuordnen?

- grüne Gummibärchen stehen an 1. und 2. Stelle

Permutationen mit Wiederholungen

Beispiel: Wie viele Möglichkeiten gibt es, 2 grüne und 2 gelbe Gummibärchen anzuordnen?

1 2 3 4
2 1 3 4

1 2 4 3
2 1 4 3

- grüne Gummibärchen stehen an 1. und 2. Stelle

$\rightarrow$ 2! also 2 Möglichkeiten

Permutationen mit Wiederholungen

Beispiel: Wie viele Möglichkeiten gibt es, 2 grüne und 2 gelbe Gummibärchen anzuordnen?

1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4
2 1 3 4	3 2 1 4	4 2 3 1	1 3 2 4	1 4 3 2	2 1 3 4
1 2 4 3	1 4 3 2	1 3 2 4	4 2 3 1	3 2 1 4	1 2 4 3
2 1 4 3	3 4 1 2	4 3 2 1	4 3 2 1	3 4 1 2	2 1 4 3

- grüne Gummibärchen stehen an 1. und 2. Stelle

→ 2! also 2 Möglichkeiten

→ die beiden gelben sind aber auch nicht unterscheidbar, d.h. 2! * 2! sehen für uns gleich aus

$\frac{24}{4} = \frac{4!}{2! * 2!} = 6$

Permutationen mit Wiederholungen

- n Objekte $\to$ $n!$ Permutationen, wenn alle unterscheidbar

$\to$ durch welchen Faktor muss ich teilen?

Permutationen mit Wiederholungen

- n Objekte $\rightarrow n!$ Permutationen, wenn alle unterscheidbar

$\rightarrow$ durch welchen Faktor muss ich teilen?

- n = 5, 2 grüne und 2 gelbe sind nicht unterscheidbar, $\frac{5!}{2! * 2!}$
- n = 5, 3 gelbe sind nicht unterscheidbar, $\frac{5!}{3!} = \frac{5!}{1! * 1! * 3!}$

Permutationen mit Wiederholungen

- n Objekte $\rightarrow$ $n!$ Permutationen, wenn alle unterscheidbar

$\rightarrow$ durch welchen Faktor muss ich teilen?

- n = 5, 2 grüne und 2 gelbe sind nicht unterscheidbar, $\frac{5!}{2! * 2!}$
- n = 5, 3 gelbe sind nicht unterscheidbar, $\frac{5!}{3!} = \frac{5!}{1! * 1! * 3!}$

- "Probe": Summe der Fakultäten im Nenner ist gleich der Summe der Fakultäten im Zähler
  - Ausgehen von einfachem Problem $\rightarrow$ *Zähler*
  - Welche Permutationen $n!$ verliert man, weil manche Gruppen k_i ununterscheidbare Elemente enthalten? $\rightarrow$ *Nenner*

Permutationen mit Wiederholungen

- n Objekte $\rightarrow n!$ Permutationen, wenn alle unterscheidbar

$\rightarrow$ durch welchen Faktor muss ich teilen?

- n = 5, 2 grüne und 2 gelbe sind nicht unterscheidbar, $\frac{5!}{2!*2!}$
- n = 5, 3 gelbe sind nicht unterscheidbar, $\frac{5!}{3!} = \frac{5!}{1!*1!*3!}$

- "Probe": Summe der Fakultäten im Nenner ist gleich der Summe der Fakultäten im Zähler
  - Ausgehen von einfachem Problem $\rightarrow$ *Zähler*
  - Welche Permutationen $n!$ verliert man, weil manche Gruppen k_i ununterscheidbare Elemente enthalten? $\rightarrow$ *Nenner*

$$\frac{3!}{1!*1!*1!} = \frac{3!}{1} \quad \frac{n!}{k_1!*k_2!*\ldots*k_r!}$$ **Multinomialkoeffizient**

Übung: Permutationen

Der Kegelclub “Meinungsvielfalt” plant einen Ausflug nach Berlin. Dabei sollen auf jeden Fall die folgenden 5 Sehenswürdigkeiten besucht werden: der Fernsehturm, der Reichstag, der Zoo, der Plänterwald, das Pergamon-Museum. Leider sind sich die Mitglieder nicht darüber einig in welcher Reihenfolge diese Orte besucht werden sollen. Jedes Clubmitglied darf drei Vorschläge für die Tour machen. Beim Auszählen der Stimmen wird festgestellt, dass tatsächlich alle Vorschläge paarweise verschieden sind. Wie viele Mitglieder kann der Club höchstens haben?

Übung: Permutationen

Der Kegelclub “Meinungsvielfalt” plant einen Ausflug nach Berlin. Dabei sollen auf jeden Fall die folgenden 5 Sehenswürdigkeiten besucht werden: der Fernsehturm, der Reichstag, der Zoo, der Plänterwald, das Pergamon-Museum. Leider sind sich die Mitglieder nicht darüber einig in welcher Reihenfolge diese Orte besucht werden sollen. Jedes Clubmitglied darf drei Vorschläge für die Tour machen. Beim Auszählen der Stimmen wird festgestellt, dass tatsächlich alle Vorschläge paarweise verschieden sind. Wie viele Mitglieder kann der Club höchstens haben?

Es gibt $5! = 120$ Permutationen der fünf Sehenswürdigkeiten. Da jedes Clubmitglied drei verschiedene Vorschläge abgegeben hat, kann es somit nicht mehr als 40 Mitglieder geben.

Permutationen

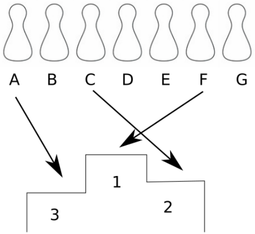
Auf wie viele verschiedene Arten kann man eine Menge von Objekten anordnen?

Variationen

Wie viele Möglichkeiten hat man, Dinge anzuordnen, wenn nur Teile aus der Ursprungsmenge ausgewählt werden?

Variationen

- Aus 7 Personen werden 3 ausgewählt und auf Platz 1, 2 und 3 verteilt.
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, das zu tun?



A

B

C

D

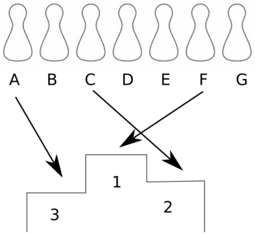
E

F

G

Variationen

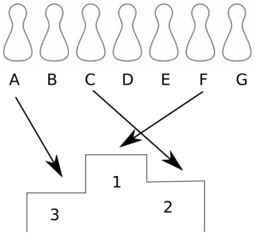
- Aus 7 Personen werden 3 ausgewählt und auf Platz 1, 2 und 3 verteilt.
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, das zu tun?
  Möglichkeiten für 2 Plätze:



A	AB	AC	AD	AE	AF	AG
B						
C						
D						
E						
F						
G						

Variationen

- Aus 7 Personen werden 3 ausgewählt und auf Platz 1, 2 und 3 verteilt.
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, das zu tun?
  Möglichkeiten für 2 Plätze: $7 * 6$



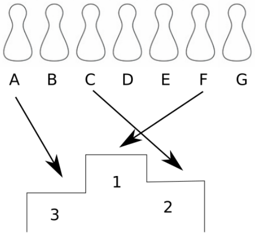
A	AB	AC	AD	AE	AF	AG
B						
C						
D						
E						
F						
G						

Variationen

- Aus 7 Personen werden 3 ausgewählt und auf Platz 1, 2 und 3 verteilt.
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, das zu tun?

  Möglichkeiten für 2 Plätze: $7 * 6$

  Möglichkeiten für 3 Plätze: $7 * 6 * 5$



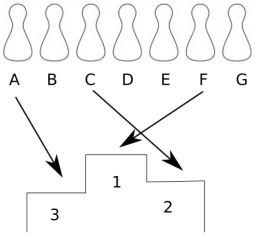
A	AB	AC	AD	AE	AF	AG
B						
C						
D						
E						
F						
G						

Variationen

- Aus 7 Personen werden 3 ausgewählt und auf Platz 1, 2 und 3 verteilt.
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, das zu tun?

  Möglichkeiten für 2 Plätze: $7 * 6$

  Möglichkeiten für 3 Plätze: $7 * 6 * 5$



ABCDEFG $\qquad$ $7!$

BACDEFG

ABCDEGF

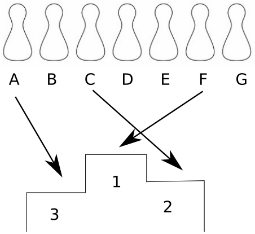
...

Variationen

- Aus 7 Personen werden 3 ausgewählt und auf Platz 1, 2 und 3 verteilt.
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, das zu tun?

  Möglichkeiten für 2 Plätze: $7 * 6$

  Möglichkeiten für 3 Plätze: $7 * 6 * 5$



ABCDEFG 7!

BACDEFG

ABCDEGF

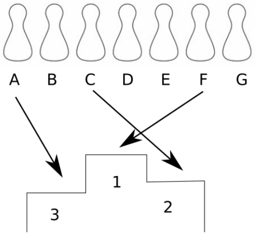
...

Variationen

- Aus 7 Personen werden 3 ausgewählt und auf Platz 1, 2 und 3 verteilt.
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, das zu tun?

  Möglichkeiten für 2 Plätze: $7 * 6$

  Möglichkeiten für 3 Plätze: $7 * 6 * 5$



ABCDEFG

BACDEFG

ABCDEGF

...

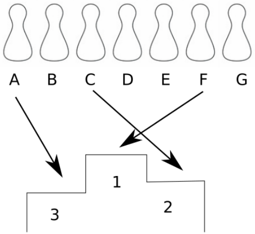
$$\frac{7!}{4!}$$

Variationen

- Aus 7 Personen werden 3 ausgewählt und auf Platz 1, 2 und 3 verteilt.
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, das zu tun?

  Möglichkeiten für 2 Plätze: $7 * 6$

  Möglichkeiten für 3 Plätze: $7 * 6 * 5$



ABCDEFG

BACDEFG

ABCDEGF

...

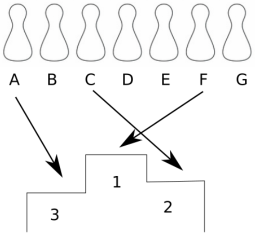
$$\frac{7!}{4!} = \frac{7*6*5*4*3*2*1}{4*3*2*1} = \frac{7*6*5*\cancel{4}*\cancel{3}*\cancel{2}*\cancel{1}}{\cancel{4}*\cancel{3}*\cancel{2}*\cancel{1}} = 7*6*5$$

Variationen

- Aus 7 Personen werden 3 ausgewählt und auf Platz 1, 2 und 3 verteilt.
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, das zu tun?

  Möglichkeiten für 2 Plätze: $7 * 6$

  Möglichkeiten für 3 Plätze: $7 * 6 * 5$



ABCDEFG

BACDEFG

ABCDEGF

...

$$\frac{7!}{4!} = \frac{7*6*5*4*3*2*1}{4*3*2*1} = \frac{7*6*5*\cancel{4}*\cancel{3}*\cancel{2}*\cancel{1}}{\cancel{4}*\cancel{3}*\cancel{2}*\cancel{1}} = 7*6*5$$

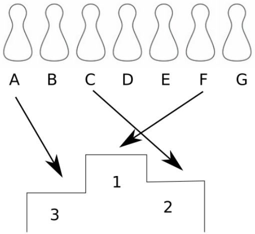
Wie viele Teilmengen mit $k = 3$ Elementen enthält die Menge mit $n = 7$ Elementen?

Variationen

- Aus 7 Personen werden 3 ausgewählt und auf Platz 1, 2 und 3 verteilt.
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, das zu tun?

  Möglichkeiten für 2 Plätze: $7 * 6$

  Möglichkeiten für 3 Plätze: $7 * 6 * 5$



ABCDEFG

BACDEFG

ABCDEGF

...

$$\frac{7!}{4!} = \frac{7*6*5*4*3*2*1}{4*3*2*1} = \frac{7*6*5*\cancel{4}*\cancel{3}*\cancel{2}*\cancel{1}}{\cancel{4}*\cancel{3}*\cancel{2}*\cancel{1}} = 7*6*5$$

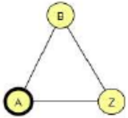
Wie viele Teilmengen mit $k = 3$ Elementen enthält die Menge mit $n = 7$ Elementen?

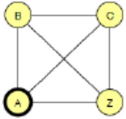
$$n * (n-1) * \ldots * (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

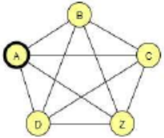
"off-by-one" error

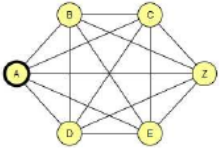
Beispiel Variationen: Wege in Graphen

Wie viele Wege gibt es, die bei A beginnen, bei Z enden und jeden Knoten höchstens einmal besuchen? (jeder Knoten ist mit jedem verbunden) $= \frac{n!}{(n-k)!}$





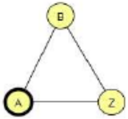




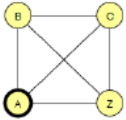
A B Z

Beispiel Variationen: Wege in Graphen

Wie viele Wege gibt es, die bei A beginnen, bei Z enden und jeden Knoten höchstens einmal besuchen? (jeder Knoten ist mit jedem verbunden) $= \frac{n!}{(n-k)!}$

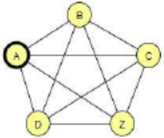


A B Z



A B Z

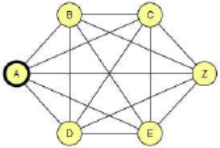
A C Z



A B Z

A C Z

A D Z



A B Z

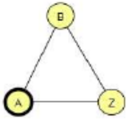
A C Z

A D Z

A E Z

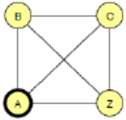
Beispiel Variationen: Wege in Graphen

Wie viele Wege gibt es, die bei A beginnen, bei Z enden und jeden Knoten höchstens einmal besuchen? (jeder Knoten ist mit jedem verbunden) $= \frac{n!}{(n-k)!}$



A B Z

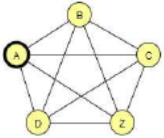
$= \frac{1!}{(1-1)!} = \frac{1}{1}$



A B Z

A C Z

$= \frac{2!}{(2-1)!} = \frac{2}{1}$

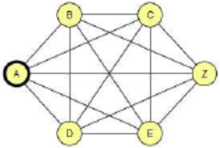


A B Z

A C Z

A D Z

$= \frac{3!}{(3-1)!} = \frac{6}{2}$



A B Z

A C Z

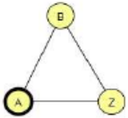
A D Z

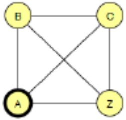
A E Z

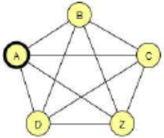
$= \frac{4!}{(4-1)!} = \frac{24}{6}$

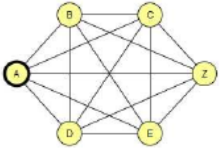
Beispiel Variationen: Wege in Graphen

Wie viele Wege gibt es, die bei A beginnen, bei Z enden und jeden Knoten höchstens einmal besuchen? (jeder Knoten ist mit jedem verbunden) $= \frac{n!}{(n-k)!}$







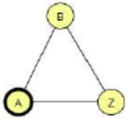


A B Z

$= \frac{1!}{(1-1)!} = \frac{1}{1}$

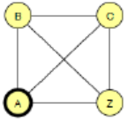
Beispiel Variationen: Wege in Graphen

Wie viele Wege gibt es, die bei A beginnen, bei Z enden und jeden Knoten höchstens einmal besuchen? (jeder Knoten ist mit jedem verbunden) $= \frac{n!}{(n-k)!}$



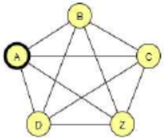
A B Z

$= \frac{1!}{(1-1)!} = \frac{1}{1}$



A B C Z

A C B Z



A B C Z

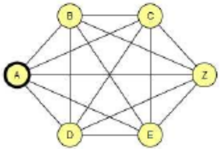
A B D Z

A C B Z

A C D Z

A D B Z

A D C Z



A B C Z

A B D Z

A B E Z

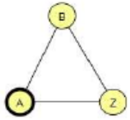
A C B Z

A C D Z

...

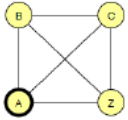
Beispiel Variationen: Wege in Graphen

Wie viele Wege gibt es, die bei A beginnen, bei Z enden und jeden Knoten höchstens einmal besuchen? (jeder Knoten ist mit jedem verbunden) $= \frac{n!}{(n-k)!}$



A B Z

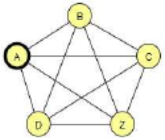
$= \frac{1!}{(1-1)!} = \frac{1}{1}$



A B C Z

A C B Z

$= \frac{2!}{(2-1)!} = \frac{2}{1}$



A B C Z

A B D Z

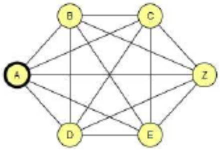
A C B Z

A C D Z

A D B Z

A D C Z

$= \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1}$



A B C Z

A B D Z

A B E Z

A C B Z

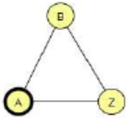
A C D Z

...

$= \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{24}{2}$

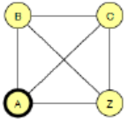
Beispiel Variationen: Wege in Graphen

Wie viele Wege gibt es, die bei A beginnen, bei Z enden und jeden Knoten höchstens einmal besuchen? (jeder Knoten ist mit jedem verbunden) $= \frac{n!}{(n-k)!}$



A B Z

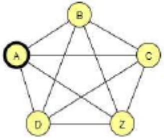
"1 aus 1"



A B C Z

A C B Z

"2 aus 2"



A B C D Z

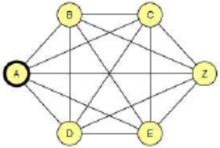
A B D C Z

A C B D Z

A C D B Z

...

"3 aus 3"



A B C D E Z

A B C E D Z

A B D C E Z

A B D E C Z

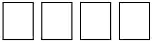
...

"4 aus 4"

für 5 Knoten: n_v = "1 aus 3" + "2 aus 3" + "3 aus 3" + 1 (AZ)

$$n_v = \frac{3!}{(3-1)!} + \frac{3!}{(3-2)!} + \frac{3!}{(3-3)!} + 1 = \frac{6}{2} + \frac{6}{1} + \frac{6}{1} + 1 = 16$$

Variationen mit Wiederholungen



- 4-stellige Pin der Chipkarte
- jede von den Ziffern kann Zahl von 0-9 sein

Variationen mit Wiederholungen

$\boxed{7}\,\boxed{}\,\boxed{7}\,\boxed{}$

10 10 10 10

- 4-stellige Pin der Chipkarte
- jede von den Ziffern kann Zahl von 0-9 sein

$\rightarrow$ Wie viele mögliche Pins gibt es?

Variationen mit Wiederholungen

$\boxed{7}\,\boxed{}\,\boxed{7}\,\boxed{}$

10 10 10 10

- 4-stellige Pin der Chipkarte
- jede von den Ziffern kann Zahl von 0-9 sein

$\rightarrow$ Wie viele mögliche Pins gibt es?

n Objekte, **k** auswählen

Reihenfolge ist bedeutsam

Wiederholungen sind möglich

$10 * 10 * 10 * 10 = 10^4 = \mathbf{n}^{\mathbf{k}}$

Übung: Regeln für Passwörter

mindestens sechs und höchstens acht Zeichen, 26 Buchstaben des lateinischen Alphabets (klein oder groß) sowie die zehn Dezimalziffern. Ein Passwort muss mind. eine Ziffer, einen Groß- und einen Kleinbuchstaben enthalten. Wie viele verschiedene Passwörter sind nach diesen Regeln möglich?

- insgesamt: $2 * 26 + 10 = 62$ Zeichen zur Verfügung
- ohne Einschränkungen: 62^n Passwörter mit n Zeichen

Übung: Regeln für Passwörter

mindestens sechs und höchstens acht Zeichen, 26 Buchstaben des lateinischen Alphabets (klein oder groß) sowie die zehn Dezimalziffern. Ein Passwort muss mind. eine Ziffer, einen Groß- und einen Kleinbuchstaben enthalten. Wie viele verschiedene Passwörter sind nach diesen Regeln möglich?

- insgesamt: $2 * 26 + 10 = 62$ Zeichen zur Verfügung
- ohne Einschränkungen: 62^n Passwörter mit n Zeichen

abzüglich:

- $(62 - 10)^n$ Passwörter ohne Ziffern
- je $(62 - 26)^n$ Passwörter ohne Groß- bzw. Kleinbuchstaben

Übung: Regeln für Passwörter

mindestens sechs und höchstens acht Zeichen, 26 Buchstaben des lateinischen Alphabets (klein oder groß) sowie die zehn Dezimalziffern. Ein Passwort muss mind. eine Ziffer, einen Groß- und einen Kleinbuchstaben enthalten. Wie viele verschiedene Passwörter sind nach diesen Regeln möglich?

- insgesamt: $2 * 26 + 10 = 62$ Zeichen zur Verfügung
- ohne Einschränkungen: 62^n Passwörter mit n Zeichen

abzüglich:

- $(62 - 10)^n$ Passwörter ohne Ziffern
- je $(62 - 26)^n$ Passwörter ohne Groß- bzw. Kleinbuchstaben

Inklusion-Exklusion! folgende wieder zufügen, weil doppelt abgezogen:

- 10^n Passwörter ohne Buchstaben
- je 26^n Passwörter ohne Ziffern und Groß- bzw. ohne Ziffern und Kleinbuchstaben

Übung: Regeln für Passwörter

mindestens sechs und höchstens acht Zeichen, 26 Buchstaben des lateinischen Alphabets (klein oder groß) sowie die zehn Dezimalziffern. Ein Passwort muss mind. eine Ziffer, einen Groß- und einen Kleinbuchstaben enthalten. Wie viele verschiedene Passwörter sind nach diesen Regeln möglich?

- insgesamt: $2 * 26 + 10 = 62$ Zeichen zur Verfügung
- ohne Einschränkungen: 62^n Passwörter mit n Zeichen

abzüglich:

- $(62 - 10)^n$ Passwörter ohne Ziffern
- je $(62 - 26)^n$ Passwörter ohne Groß- bzw. Kleinbuchstaben

Inklusion-Exklusion! folgende wieder zufügen, weil doppelt abgezogen:

- 10^n Passwörter ohne Buchstaben
- je 26^n Passwörter ohne Ziffern und Groß- bzw. ohne Ziffern und Kleinbuchstaben

$62^n - (62 - 10)^n - 2 * (62 - 26)^n + 10^n + 2 * 26^n = 162.042.094.456.320$

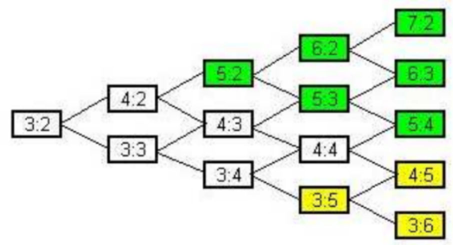
Formalisierung von Zufall

Beginn der Wahrscheinlichkeitstheorie im **16. Jh.**:

- Cardano (1501-1576) *Das Buch der Glücksspiele*
- **1654 Briefwechsel** zwischen Blaise Pascal und Pierre de Fermat zum **Teilungsproblem**

Glücksspiel: Würfeln, wer zuerst 5 Punkte erzielt, hat gewonnen

Problem: beim Punktestand von 3:2 wird abgebrochen - Wie teilt man den Spieleinsatz gerecht auf?

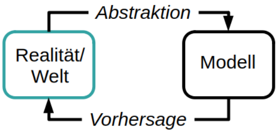


= Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitstheorie

Portraitbilder → Wikipedia (Cardano, Pascal, Fermat)

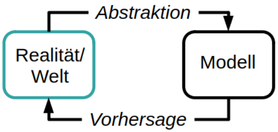
Formalisierung von Zufall

Wie kann man solche Dinge, die mit Wahrscheinlichkeit und Zufall zu tun haben, mathematisch modellieren?



Formalisierung von Zufall

Wie kann man solche Dinge, die mit Wahrscheinlichkeit und Zufall zu tun haben, mathematisch modellieren?

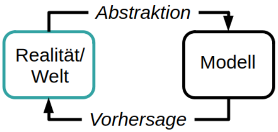


Beispiel: 1 **Spielwürfel** wird einmal geworfen und es kommt ein zufälliges Ergebnis heraus

- ⚀ “eins gewürfelt”, ⚅ “sechs gewürfelt
- ⚁, ⚃, ⚅ gerade Zahl gewürfelt

Formalisierung von Zufall

Wie kann man solche Dinge, die mit Wahrscheinlichkeit und Zufall zu tun haben, mathematisch modellieren?



Beispiel: 1 **Spielwürfel** wird einmal geworfen und es kommt ein zufälliges Ergebnis heraus

⚀ “eins gewürfelt”, ⚅ “sechs gewürfelt

⚁, ⚃, ⚅ gerade Zahl gewürfelt

$\rightarrow$ Spielergebnisse lassen sich mathematisch mit **Mengen** gut beschreiben

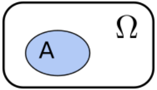
$\Omega =$ ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅, Menge möglicher **Ergebnisse**

(Spiel)Ereignisse als Mengen

- $\Omega =$ ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅, Menge möglicher **Ergebnisse**

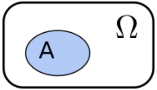
(Spiel)Ereignisse als Mengen

- $\Omega =$ ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅, Menge möglicher **Ergebnisse**
- "gerade Augenzahl" in der Wahrscheinlichkeitstheorie: **Ereignis** und Ereignisse sind Teilmengen von Ω



(Spiel)Ereignisse als Mengen

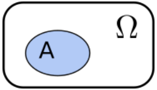
- $\Omega =$ ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅, Menge möglicher **Ergebnisse**
- "gerade Augenzahl" in der Wahrscheinlichkeitstheorie: **Ereignis** und Ereignisse sind Teilmengen von Ω
- Beispiele:



	Menge	Ereignis
⚂	$\{3\}$	Es wurde eine Drei gewürfelt
⚁, ⚃, ⚅	$\{2, 4, 6\}$	Es wurde eine gerade Zahl gewürfelt
⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	Es wurde keine sechs gewürfelt
⚀, ⚁, ⚂	$\{1, 2, 3\}$	Es wurde eine Zahl < 4 gewürfelt

(Spiel)Ereignisse als Mengen

- $\Omega =$ ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅, Menge möglicher **Ergebnisse**
- “gerade Augenzahl” in der Wahrscheinlichkeitstheorie: **Ereignis** und Ereignisse sind Teilmengen von Ω
- Beispiele:



	Menge	Ereignis
⚂	$\{3\}$	Es wurde eine Drei gewürfelt
⚁, ⚃, ⚅	$\{2, 4, 6\}$	Es wurde eine gerade Zahl gewürfelt
⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	Es wurde keine sechs gewürfelt
⚀, ⚁, ⚂	$\{1, 2, 3\}$	Es wurde eine Zahl < 4 gewürfelt

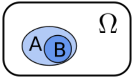
  - Mengen erlauben Ereignisse zu beschreiben
  - Mengenoperationen haben oft Entsprechung in den Ereignissen

(Spiel)Ereignisse als Mengen

- Ω “sicheres Ereignis”
- $\emptyset$ “unmögliches Ereignis”

(Spiel)Ereignisse als Mengen

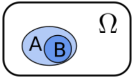
- Ω “sicheres Ereignis”
- $\emptyset$ “unmögliches Ereignis”
- Teilmenge $B \subseteq A$
  $B = \{2\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, wenn B eingetreten ist, d.h. $\{2\}$, dann folgt daraus, dass auch A eingetreten ist, d.h. man hat eine gerade Zahl gewürfelt (logische Konsequenz)



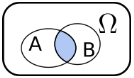
(Spiel)Ereignisse als Mengen

- Ω “sicheres Ereignis”

- $\emptyset$ “unmögliches Ereignis”
- Teilmenge $B \subseteq A$
  $B = \{2\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, wenn B eingetreten ist, d.h. $\{2\}$, dann folgt daraus, dass auch A eingetreten ist, d.h. man hat eine gerade Zahl gewürfelt (logische Konsequenz)



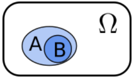
- Schnitt $A \cap B$
  $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $A \cap B = \{2\}$, d.h. “und”



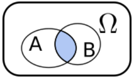
(Spiel)Ereignisse als Mengen

- Ω “sicheres Ereignis”

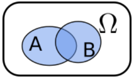
- $\emptyset$ “unmögliches Ereignis”
- Teilmenge $B \subseteq A$
  $B = \{2\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, wenn B eingetreten ist, d.h. $\{2\}$, dann folgt daraus, dass auch A eingetreten ist, d.h. man hat eine gerade Zahl gewürfelt (logische Konsequenz)



- Schnitt $A \cap B$
  $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $A \cap B = \{2\}$, d.h. “und”



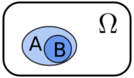
- Vereinigung $A \cup B$
  $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 1, 5\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$, d.h. “oder”



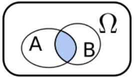
(Spiel)Ereignisse als Mengen

- Ω “sicheres Ereignis”

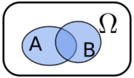
- $\emptyset$ “unmögliches Ereignis”
- Teilmenge $B \subseteq A$
  $B = \{2\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, wenn B eingetreten ist, d.h. $\{2\}$, dann folgt daraus, dass auch A eingetreten ist, d.h. man hat eine gerade Zahl gewürfelt (logische Konsequenz)



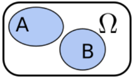
- Schnitt $A \cap B$
  $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $A \cap B = \{2\}$, d.h. “und”



- Vereinigung $A \cup B$
  $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 1, 5\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$, d.h. “oder”



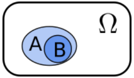
- $A \cap B = \emptyset$
  $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, d.h. Ereignisse schließen sich aus



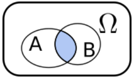
(Spiel)Ereignisse als Mengen

- Ω “sicheres Ereignis”

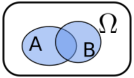
- $\emptyset$ “unmögliches Ereignis”
- Teilmenge $B \subseteq A$
  $B = \{2\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, wenn B eingetreten ist, d.h. $\{2\}$, dann folgt daraus, dass auch A eingetreten ist, d.h. man hat eine gerade Zahl gewürfelt (logische Konsequenz)



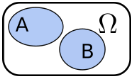
- Schnitt $A \cap B$
  $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $A \cap B = \{2\}$, d.h. “und”



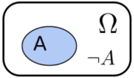
- Vereinigung $A \cup B$
  $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 1, 5\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$, d.h. “oder”



- $A \cap B = \emptyset$
  $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, d.h. Ereignisse schließen sich aus



- Differenz $\Omega \backslash A$, Komplement $\Omega \backslash A$ für $A = \{1, 2\}$, $A^C = \{3, 4, 5, 6\}$



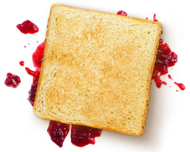
Zusammenhängende Ereignisse

Wie sieht die Ergebnismenge Ω für das Werfen einer Münze aus?

Wie sieht Ω für das 2-malige Werfen einer Münze aus?

Murphy's Gesetz:
Eine mit Butter bestrichene Toastscheibe wird 20 Mal fallengelassen. Welche Menge eignet sich als Ergebnismenge des Experiments?

1. $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 20\}$
2. $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 20\} x \{1, 2, 3, ..., 20\}$
3. $\Omega = \{0, 1\}^{20}$



Zusammenhängende Ereignisse

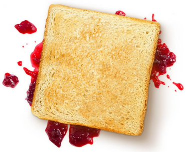
Wie sieht die Ergebnismenge Ω für das Werfen einer Münze aus?

- $\Omega = \{K, Z\}$ $\quad\quad$ $\Omega = \{0, 1\}$

Wie sieht Ω für das 2-malige Werfen einer Münze aus?

Murphy's Gesetz:
Eine mit Butter bestrichene Toastscheibe wird 20 Mal fallengelassen. Welche Menge eignet sich als Ergebnismenge des Experiments?

1. $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 20\}$
2. $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 20\} x \{1, 2, 3, ..., 20\}$
3. $\Omega = \{0, 1\}^{20}$



Zusammenhängende Ereignisse

Wie sieht die Ergebnismenge Ω für das Werfen einer Münze aus?

- $\Omega = \{K, Z\}$ $\qquad$ $\Omega = \{0, 1\}$

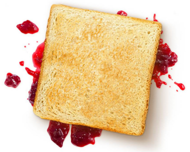
Wie sieht Ω für das 2-malige Werfen einer Münze aus?

- $\Omega = \{00, 01, 10, 11\} = \{0, 1\}^2$
  (Variationen mit Wiederholungen n^k)

Murphy's Gesetz:

Eine mit Butter bestrichene Toastscheibe wird 20 Mal fallengelassen. Welche Menge eignet sich als Ergebnismenge des Experiments?

1. $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$
2. $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 20\} x \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$
3. $\Omega = \{0, 1\}^{20}$



Zusammenhängende Ereignisse

Wie sieht die Ergebnismenge Ω für das Werfen einer Münze aus?

- $\Omega = \{K, Z\}$ $\qquad\qquad$ $\Omega = \{0, 1\}$

Wie sieht Ω für das 2-malige Werfen einer Münze aus?

- $\Omega = \{00, 01, 10, 11\} = \{0, 1\}^2$
  (Variationen mit Wiederholungen n^k)

Murphy's Gesetz:

Eine mit Butter bestrichene Toastscheibe wird 20 Mal fallengelassen. Welche Menge eignet sich als Ergebnismenge des Experiments?

1. $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 20\}$
2. $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 20\} x \{1, 2, 3, ..., 20\}$
3. $\Omega = \{0, 1\}^{20}$

Zusammenhängende Ereignisse

Wie sieht die Ergebnismenge Ω für das Werfen einer Münze aus?

- $\Omega = \{K, Z\}$ $\qquad\qquad \Omega = \{0, 1\}$

Wie sieht Ω für das 2-malige Werfen einer Münze aus?

- $\Omega = \{00, 01, 10, 11\} = \{0, 1\}^2$
  (Variationen mit Wiederholungen n^k)

Murphy's Gesetz:
Eine mit Butter bestrichene Toastscheibe wird 20 Mal fallengelassen. Welche Menge eignet sich als Ergebnismenge des Experiments?

1. $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 20\}$
2. $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 20\} x \{1, 2, 3, ..., 20\}$
3. $\boldsymbol{\Omega = \{0, 1\}^{20}}$

Wahrscheinlichkeitsraum beim Würfeln

 Zufallsexperiment

- Was kann passieren?

- Welche Ereignisse betrachten wir?
- Wie wahrscheinlich sind diese Ereignisse?

Wahrscheinlichkeitsraum beim Würfeln

Zufallsexperiment

- Was kann passieren?
- Welche Ereignisse betrachten wir?
- Wie wahrscheinlich sind diese Ereignisse?
- Menge aller möglichen Ergebnisse $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Wahrscheinlichkeitsraum beim Würfeln

Zufallsexperiment

- Was kann passieren?
- Welche Ereignisse betrachten wir?
- Wie wahrscheinlich sind diese Ereignisse?

- Menge aller möglichen Ergebnisse $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- alle möglichen, $\mathcal{P}(\Omega)$, z.B. “*Augenzahl* > 4“

Wahrscheinlichkeitsraum beim Würfeln

Zufallsexperiment

- Was kann passieren?
- Welche Ereignisse betrachten wir?
- Wie wahrscheinlich sind diese Ereignisse?

- Menge aller möglichen Ergebnisse $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- alle möglichen, $\mathcal{P}(\Omega)$, z.B. *"Augenzahl > 4"*

  - $\emptyset$ "unmögliches Ereignis" $\rightarrow 0$
  - Ergebnismenge Ω "sicheres Ereignis" $\rightarrow 1$
  - wenn 2 Ereignisse sich ausschließen, $A \cap B = \emptyset$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Wahrscheinlichkeitsraum beim Würfeln

Zufallsexperiment

- Was kann passieren?
- Welche Ereignisse betrachten wir?
- Wie wahrscheinlich sind diese Ereignisse?

- Menge aller möglichen Ergebnisse $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- alle möglichen, $\mathcal{P}(\Omega)$, z.B. "*Augenzahl* > 4"
- $\mathbf{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$
  - $\emptyset$ "unmögliches Ereignis" $\to 0$
  - Ergebnismenge Ω "sicheres Ereignis" $\to 1$
  - wenn 2 Ereignisse sich ausschließen, $A \cap B = \emptyset$
    $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\to$ Funktion, die der Menge aller Ereignisse $\mathcal{P}(\Omega)$ eine Zahl zwischen 0 und 1 zuordnet $\mathbf{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$, nennt man Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeitsraum beim Würfeln

Zufallsexperiment

- Was kann passieren?
- Welche Ereignisse betrachten wir?
- Wie wahrscheinlich sind diese Ereignisse?

- Menge aller möglichen Ergebnisse $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- alle möglichen, $\mathcal{P}(\Omega)$, z.B. "*Augenzahl* > 4"
- $\mathbf{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$
  - $\emptyset$ "unmögliches Ereignis" $\to 0$
  - Ergebnismenge Ω "sicheres Ereignis" $\to 1$
  - wenn 2 Ereignisse sich ausschließen, $A \cap B = \emptyset$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\to$ Funktion, die der Menge aller Ereignisse $\mathcal{P}(\Omega)$ eine Zahl zwischen 0 und 1 zuordnet $\mathbf{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$, nennt man Wahrscheinlichkeit

- $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ nennt man Wahrscheinlichkeitsraum

Definition von Wahrscheinlichkeit

Ein Wahrscheinlichkeitsraum besteht aus $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ wobei folgende Axiome gelten:

Kolmogoroff-Axiome

1. $P(A) \geq 0$ für alle $A \in P(\Omega)$ (Nicht-Negativität)
2. $\mathcal{P}(\Omega) = 1$ (Normierung)
3. für 2 Ereignisse, die sich gegenseitig ausschließen, $A \cap B = \emptyset$, gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (σ-Additivität)

Wahrscheinlichkeitsraum beim Würfeln

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$

- Ω Was kann passieren?
- $\mathcal{P}(\Omega)$ Welche Ereignisse betrachten wir?
- P Wie wahrscheinlich sind diese Ereignisse?

- Ergebnismenge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- alle möglichen, z.B. $P(A)$, mit A *“Augenzahl* > 4 “
- $\mathbf{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$

1. alle Werte von P liegen im Intervall $[0, 1]$
2. wenn 2 Ereignisse sich ausschließen, $A \cap B = \emptyset$
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Wahrscheinlichkeitsraum beim Würfeln

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$

Ω Was kann passieren?

$\mathcal{P}(\Omega)$ Welche Ereignisse betrachten wir?

P Wie wahrscheinlich sind diese Ereignisse?

- $P(\Omega) = P(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = 1$

- Ergebnismenge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- alle möglichen, z.B. $P(A)$, mit A *“Augenzahl* > 4 “
- $\mathbf{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$

1. alle Werte von P liegen im Intervall $[0, 1]$
2. wenn 2 Ereignisse sich ausschließen, $A \cap B = \emptyset$
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Wahrscheinlichkeitsraum beim Würfeln

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$

- Ω Was kann passieren?
- $\mathcal{P}(\Omega)$ Welche Ereignisse betrachten wir?
- P Wie wahrscheinlich sind diese Ereignisse?

- Ergebnismenge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- alle möglichen, z.B. $P(A)$, mit A *“Augenzahl* > 4 *“*
- $\mathbf{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$

1. alle Werte von P liegen im Intervall $[0, 1]$
2. wenn 2 Ereignisse sich ausschließen, $A \cap B = \emptyset$
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- $P(\Omega) = P(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = 1$
- $P(\{1\}) + P(\{2\}) + ... + P(\{6\}) = P(\Omega) = 1$, da z.B. $\{1\} \cap \{6\} = \emptyset$

Wahrscheinlichkeitsraum beim Würfeln

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$

- Ω Was kann passieren?
- $\mathcal{P}(\Omega)$ Welche Ereignisse betrachten wir?
- P Wie wahrscheinlich sind diese Ereignisse?

- Ergebnismenge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- alle möglichen, z.B. $P(A)$, mit A *“Augenzahl > 4 “*
- $\mathbf{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$

1. alle Werte von P liegen im Intervall $[0, 1]$
2. wenn 2 Ereignisse sich ausschließen, $A \cap B = \emptyset$
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- $P(\Omega) = P(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = 1$
- $P(\{1\}) + P(\{2\}) + ... + P(\{6\}) = P(\Omega) = 1$, da z.B. $\{1\} \cap \{6\} = \emptyset$
- $P(\{1\}) = P(\{2\}) = ... = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$
- $P(\{5, 6\})$ = $P(\{5\} \cup \{6\}) = P(\{5\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{|\{5,6\}|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n\ günstig}{n\ möglich}$

Laplace-Experiment

Ein Laplace-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit

- endlich vielen Ergebnissen
- Elementarereignissen, die alle gleich wahrscheinlich sind

Damit gilt für jedes Ereignis $A \subseteq \Omega$:
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Laplace-Experiment

Ein Laplace-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit

- endlich vielen Ergebnissen
- Elementareignissen, die alle gleich wahrscheinlich sind

Damit gilt für jedes Ereignis $A \subseteq \Omega$:
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Beispiel: Urne mit Ziehen ohne Zurücklegen

- 3 rote und 2 blaue Kugeln
- Zufallsexperiment: 2 Kugeln ohne Zurücklegen ziehen, Reihenfolge zählt

Laplace-Experiment

Ein Laplace-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit

- endlich vielen Ergebnissen
- Elementarereignissen, die alle gleich wahrscheinlich sind

Damit gilt für jedes Ereignis $A \subseteq \Omega$:
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Beispiel: Urne mit Ziehen ohne Zurücklegen

- 3 rote und 2 blaue Kugeln
- Zufallsexperiment: 2 Kugeln ohne Zurücklegen ziehen, Reihenfolge zählt

1. Ergebnismenge = $\Omega = (RR, RB, BR, BB)$

Laplace-Experiment

Ein Laplace-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit

- endlich vielen Ergebnissen
- Elementarereignissen, die alle gleich wahrscheinlich sind

Damit gilt für jedes Ereignis $A \subseteq \Omega$:
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Beispiel: Urne mit Ziehen ohne Zurücklegen

- 3 rote und 2 blaue Kugeln
- Zufallsexperiment: 2 Kugeln ohne Zurücklegen ziehen, Reihenfolge zählt

1. Ergebnismenge = $\Omega = (RR, RB, BR, BB)$
2. $P(R, R) = \frac{3}{5} * \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$, $P(B, B) = \frac{2}{5} * \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

Laplace-Experiment

Ein Laplace-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit

- endlich vielen Ergebnissen
- Elementareignissen, die alle gleich wahrscheinlich sind

Damit gilt für jedes Ereignis $A \subseteq \Omega$:
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Beispiel: Urne mit Ziehen ohne Zurücklegen

- 3 rote und 2 blaue Kugeln
- Zufallsexperiment: 2 Kugeln ohne Zurücklegen ziehen, Reihenfolge zählt

1. Ergebnismenge = $\Omega = (RR, RB, BR, BB)$
2. $P(R, R) = \frac{3}{5} * \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$, $P(B, B) = \frac{2}{5} * \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

$\Rightarrow$ kein Laplace Experiment, anderer Wahrscheinlichkeitsraum

Beispiel: Geburtstagswette

Ich wette, dass mindestens zwei der hier anwesenden Personen am selben Tag Geburtstag haben.

Bild von Leslie Eckert auf Pixabay

Beispiel: Geburtstagswette

Ich wette, dass mindestens zwei der hier anwesenden Personen am selben Tag Geburtstag haben.

Bild von Leslie Eckert auf Pixabay

1. es gibt nur endlich viele Elementarereignisse, d.h. Ω ist endlich (n = 365 Tage)
2. alle Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich
   $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n\ günstig}{n\ möglich}$ (Gleichverteilung von Geburten)

Beispiel: Geburtstagswette

Ich wette, dass mindestens zwei der hier anwesenden Personen am selben Tag Geburtstag haben.

Bild von Leslie Eckert auf Pixabay

1. es gibt nur endlich viele Elementarereignisse, d.h. Ω ist endlich (n = 365 Tage)
2. alle Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich
   $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n\ \text{günstig}}{n\ \text{möglich}}$ (Gleichverteilung von Geburten)

Ab wie vielen Personen k lohnt sich die Wette? P(Gewinn|n=k)

Das Geburtstagswette als Laplace Experiment

- Wie sieht die Ergebnismenge aus? Wie viele *mögliche* Ereignisse gibt es?

Das Geburtstagswette als Laplace Experiment

- Wie sieht die Ergebnismenge aus? Wie viele *mögliche* Ereignisse gibt es?

  $\Omega =${..., “14.10.”, ..., “3.11.”,...}, $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 365\}$

Das Geburtstagswette als Laplace Experiment

- Wie sieht die Ergebnismenge aus? Wie viele *mögliche* Ereignisse gibt es?

  $\Omega = \{$..., "14.10.", ..., "3.11.",...$\}$, $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 365\}$

  k = 3: (1, 32, 364) $\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ Variation **mit** Wdh. $|\Omega| = n^k = 365^k$

Das Geburtstagswette als Laplace Experiment

- Wie sieht die Ergebnismenge aus? Wie viele *mögliche* Ereignisse gibt es?

  $\Omega = \{$..., "14.10.", ..., "3.11.",...$\}$, $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 365\}$

  k = 3: (1, 32, 364) $\square\square\square$ Variation **mit** Wdh. $|\Omega| = n^k = 365^k$
- Wie viele *"günstige"* Ereignisse gibt es? k = 3: (**1**,**1**,12), (**32**, 190, **32**)

Das Geburtstagswette als Laplace Experiment

- Wie sieht die Ergebnismenge aus? Wie viele *mögliche* Ereignisse gibt es?

  $\Omega =\{$..., "14.10.", ..., "3.11.",...$\}$, $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 365\}$

  k = 3: (1, 32, 364) $\square\square\square$ Variation **mit** Wdh. $|\Omega| = n^k = 365^k$

- Wie viele *"günstige"* Ereignisse gibt es? k = 3: (**1**,**1**,12), (**32**, 190, **32**)

  k = 4: (**1**,**1**,190, 123), (22,178,**65**, **65**), ...

Das Geburtstagswette als Laplace Experiment

- Wie sieht die Ergebnismenge aus? Wie viele *mögliche* Ereignisse gibt es?

  $\Omega = \{$..., "14.10.", ..., "3.11.",...$\}$, $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 365\}$

  k = 3: (1, 32, 364) $\square\square\square$ Variation **mit** Wdh. $|\Omega| = n^k = 365^k$

- Wie viele *"günstige"* Ereignisse gibt es? k = 3: (**1**,**1**,12), (**32**, 190, **32**)

  k = 4: (**1**,**1**,190, 123), (22,178,**65**, **65**), ...

  (1, 1, _, _)

  (1, _, 1, _)

  (1, _, _, 1)

  (_, 1, 1, _)

Das Geburtstagswette als Laplace Experiment

- Wie sieht die Ergebnismenge aus? Wie viele *mögliche* Ereignisse gibt es?

  Ω ={..., "14.10.", ..., "3.11.",...}, $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 365\}$

  k = 3: (1, 32, 364) $\square\square\square$ Variation **mit** Wdh. $|\Omega| = n^k = 365^k$

- Wie viele *"günstige"* Ereignisse gibt es? k = 3: (**1**,**1**,12), (**32**, 190, **32**)

  k = 4: (**1**,**1**,190, 123), (22,178,**65**, **65**), ...

  (1, 1, _, _) (2, 2, _, _)

  (1, _, 1, _) (2, _, 2, _)

  (1, _, _, 1) (2, _, _, 2)

  (_, 1, 1, _) (_, 2, 2, _)

Das Geburtstagswette als Laplace Experiment

- Wie sieht die Ergebnismenge aus? Wie viele *mögliche* Ereignisse gibt es?

  Ω ={..., "14.10.", ..., "3.11.",...}, $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 365\}$

  k = 3: (1, 32, 364) $\square\square\square$ Variation **mit** Wdh. $|\Omega| = n^k = 365^k$

- Wie viele *"günstige"* Ereignisse gibt es? k = 3: (**1**,**1**,12), (**32**, 190, **32**)

  k = 4: (**1**,**1**,190, 123), (22,178,**65**, **65**), ...

  (1, 1, _, _) (2, 2, _, _)

  (1, _, 1, _) (2, _, 2, _)

  (1, 2, 2, 1) (1, 2, 2, 1) $\rightarrow$ doppelt gezählt

  (_, 1, 1, _) (_, 2, 2, _)

Das Geburtstagswette als Laplace Experiment

- Wie sieht die Ergebnismenge aus? Wie viele *mögliche* Ereignisse gibt es?

  Ω ={..., “14.10.”, ..., “3.11.”,...}, $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 365\}$

  k = 3: (1, 32, 364) $\square\square\square$ Variation **mit** Wdh. $|\Omega| = n^k = 365^k$

- Wie viele “*günstige*” Ereignisse gibt es? k = 3: (**1**,**1**,12), (**32**, 190, **32**)

  k = 4: (**1**,**1**,190, 123), (22,178,**65**, **65**), ...

  (1, 1, _, _) (2, 2, _, _)

  (1, _, 1, _) (2, _, 2, _)

  (1, 2, 2, 1) (1, 2, 2, 1) $\rightarrow$ doppelt gezählt

  (_, 1, 1, _) (_, 2, 2, _)

$\Rightarrow$ andere Strategie: Was sind die “*ungünstigen*” Fälle? $P(A) = 1 - \frac{|\neg A|}{|\Omega|}$

Das Geburtstagswette als Laplace Experiment

- Wie sieht die Ergebnismenge aus? Wie viele *mögliche* Ereignisse gibt es?

  $\Omega =${..., "14.10.", ..., "3.11.",...}, $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 365\}$

  k = 3: (1, 32, 364) $\square\square\square$ Variation **mit** Wdh. $|\Omega| = n^k = 365^k$

- Wie viele *"günstige"* Ereignisse gibt es? k = 3: (**1**,**1**,12), (**32**, 190, **32**)

  k = 4: (**1**,**1**,190, 123), (22,178,**65**, **65**), ...

  (1, 1, _, _) (2, 2, _, _)

  (1, _, 1, _) (2, _, 2, _)

  (1, 2, 2, 1) (1, 2, 2, 1) $\rightarrow$ doppelt gezählt

  (_, 1, 1, _) (_, 2, 2, _)

$\Rightarrow$ andere Strategie: Was sind die *"ungünstigen"* Fälle? $P(A) = 1 - \frac{|\neg A|}{|\Omega|}$

(32, 190, 195, 320), alle verschieden

Das Geburtstagswette als Laplace Experiment

- Wie sieht die Ergebnismenge aus? Wie viele *mögliche* Ereignisse gibt es?

  Ω ={..., "14.10.", ..., "3.11.",...}, $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 365\}$

  k = 3: (1, 32, 364) $\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ Variation **mit** Wdh. $|\Omega| = n^k = 365^k$

- Wie viele *"günstige"* Ereignisse gibt es? k = 3: (**1**,**1**,12), (**32**, 190, **32**)

  k = 4: (**1**,**1**,190, 123), (22,178,**65**, **65**), ...

  (1, 1, _, _) (2, 2, _, _)

  (1, _, 1, _) (2, _, 2, _)

  (1, 2, 2, 1) (1, 2, 2, 1) $\rightarrow$ doppelt gezählt

  (_, 1, 1, _) (_, 2, 2, _)

$\Rightarrow$ andere Strategie: Was sind die *"ungünstigen"* Fälle? $P(A) = 1 - \frac{|\neg A|}{|\Omega|}$

(32, 190, 195, 320), alle verschieden

$\boxed{365}\ \boxed{364}\ \boxed{363}\ \boxed{362}$ Variation **ohne** Wdh. $\frac{n!}{(n-k)!}$, $P(A) = 1 - \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k}$

Das Geburtstagsparadoxon

Ab wie vielen Leuten lohnt sich die Wette?

- 4: 1.6%
- 10: 12%
- 20: 41%
- 22: 47%
- 23: 51% $\rightarrow$ ab hier lohnt sich die Wette

Das Geburtstagsparadoxon

Ab wie vielen Leuten lohnt sich die Wette?

- 4: 1.6%
- 10: 12%
- 20: 41%
- 22: 47%
- 23: 51% $\rightarrow$ ab hier lohnt sich die Wette

Warum ein Paradoxon?

Das Geburtstagsparadoxon

Ab wie vielen Leuten lohnt sich die Wette?

- 4: 1.6%
- 10: 12%
- 20: 41%
- 22: 47%
- 23: 51% $\rightarrow$ ab hier lohnt sich die Wette

Warum ein Paradoxon?

- subjektive Schätzung der Wahrscheinlichkeit ganz anders

Das Geburtstagsparadoxon

Ab wie vielen Leuten lohnt sich die Wette?

- 4: 1.6%
- 10: 12%
- 20: 41%
- 22: 47%
- 23: 51% $\rightarrow$ ab hier lohnt sich die Wette

Warum ein Paradoxon?

- subjektive Schätzung der Wahrscheinlichkeit ganz anders
- anderes Modell im Kopf:
  - Person rausgreifen z.B. Sie selbst und fragen, wie wahrscheinlich es ist, dass eine zweite Person am selben Tag Geburtstag hat?

Das Geburtstagsparadoxon

Ab wie vielen Leuten lohnt sich die Wette?

- 4: 1.6%
- 10: 12%
- 20: 41%
- 22: 47%
- 23: 51% $\rightarrow$ ab hier lohnt sich die Wette

Warum ein Paradoxon?

- subjektive Schätzung der Wahrscheinlichkeit ganz anders
- anderes Modell im Kopf:
  - Person rausgreifen z.B. Sie selbst und fragen, wie wahrscheinlich es ist, dass eine zweite Person am selben Tag Geburtstag hat?
  - $\frac{1}{365}$

Warum Wahrscheinlichkeiten?

- Daten und statistische Aussagen verstehen
- probabilistische Zusammenhänge erkennen und formalisieren
- komplexe Welt und Umwelt sinnvoll beschreiben
- Aufwand / Mengen abschätzen
- Beispiel für Grenzen menschlichen Denkens

Film “21” (2008) https://en.wikipedia.org/wiki/21_%282008_film%29