

3. Vorlesung - Komplexe Zahlen

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

21.10.2025



2.6 Summenzeichen - Rechenregeln

- $\sum_{k=m}^n x_k + \sum_{k=m}^n y_k = \sum_{k=m}^n (x_k + y_k).$
- $\sum_{k=m}^n a x_k = a \sum_{k=m}^n x_k.$
- $\sum_{k=m}^n x_k \sum_{l=p}^q y_l = \sum_{k=m, l=p}^{n, q} (x_k y_l).$
- $\sum_{k=m}^n x_k = \sum_{k=m}^p x_k + \sum_{k=p+1}^n x_k, \text{ falls } m \leq p \leq n.$
- $\sum_{k=m}^n x_k = \sum_{k=m-1}^{n-1} x_{k+1} \text{ (Indexverschiebung)}$

Geometrische Summe: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^n q^k = q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{für } q \neq 1 \\ n+1 & \text{für } q = 1 \end{cases}$$

z.B.: $\sum_{k=0}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^k$

Beweis:

Sei $S = \sum_{k=0}^n q^k = q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^n$, $qS = q^1 + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}$

$$\Rightarrow S - qS = \underbrace{q^0 + \cancel{q^1} + \cancel{q^2} + \dots + \cancel{q^n}}_{S(1-q)} - \underbrace{\cancel{q^1} - \cancel{q^2} - \cancel{q^3} - \dots - \cancel{q^n} - q^{n+1}}_{-qS} = q^0 - q^{n+1}$$

} $\Rightarrow S = \frac{q^0 - q^{n+1}}{1-q}$

Pingo Umfrage



Es gilt $2^6 = 64$. Berechne $\sum_{k=0}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

☐ $\frac{63}{128}$

☐ $\frac{63}{64}$

☒ $\frac{63}{32}$

☐ 64

Es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{2^6}}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{64}}{\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{1}{64}\right) \cdot 2 \\ &= \left(\frac{64}{64} - \frac{1}{64}\right) \cdot 2 = \frac{63}{64} \cdot 2 \\ &= \frac{63}{32}\end{aligned}$$

3.1 Definition und Grundrechenarten

Problem: Gleichungen wie $x^2 + 1 = 0$ haben keine Lösung in \mathbb{R} .

Definition:

- a) **Imaginäre Einheit:** i ist eine Zahl mit $i^2 = -1$
- b) **Menge der komplexen Zahlen:** $\mathbb{C} := \{x + y \cdot i \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
- c) Für $a + bi, c + di \in \mathbb{C}$ sei:
 - ▶ $(a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)i$
 - ▶ $(a + bi) \cdot (c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i$

NR: $a \cdot c + a \cdot di + bi \cdot c + \underbrace{bi \cdot di}_{b \cdot d \cdot i^2 = b \cdot d \cdot (-1)} = a \cdot c - bd + (ad + bc)i$

Bemerkungen:

- 1) in \mathbb{C} gelten „+“ und „·“ die gleichen Rechenregeln wie in \mathbb{R}
- 2) Fasse $x + 0 \cdot i \in \mathbb{C}$ als reelle Zahl auf, dann gilt $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
- 3) $0 + y \cdot i$ heißt rein imaginäre Zahl

3.2 Gaußsche Zahlenebene

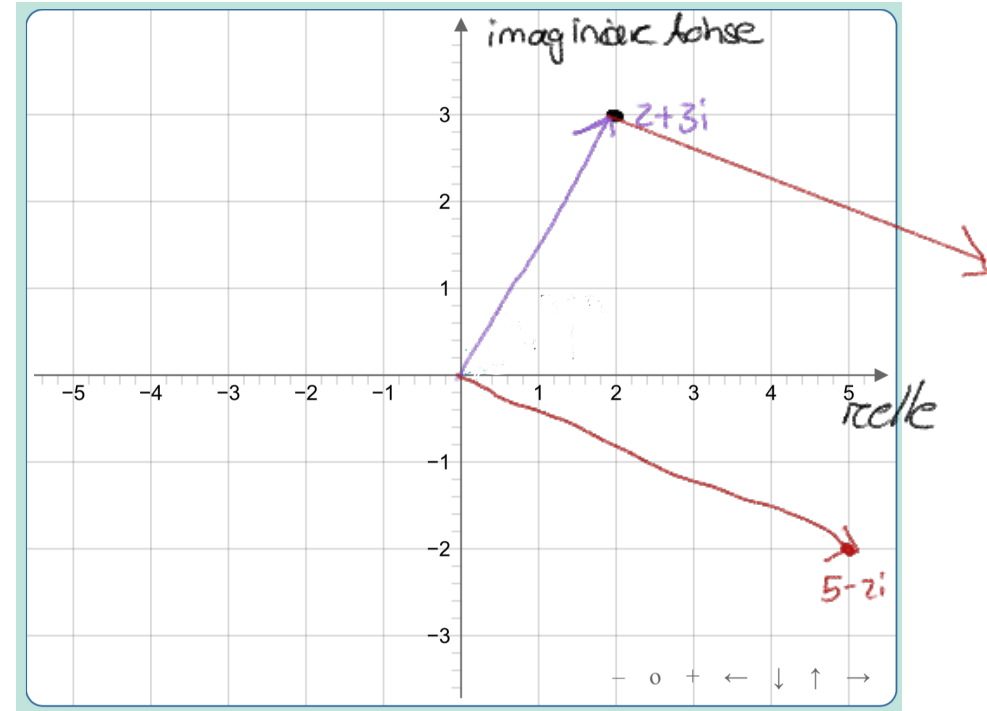
Beispiele:

$$1) (2+3i) + (5-2i) = 7+i$$

$$\begin{aligned} 2) (4+2i)(3-i) &= 12 - 4i + 6i - 2i^2 \\ &= 12 - 4i + 6i + 2 = 14 + 2i \end{aligned}$$

$$3) (x+iy)(x-iy) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{3. Binom. Formel}}}{=} x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2$$

$$\begin{aligned} 4) \frac{3-i}{5+2i} \cdot \frac{5-2i}{5-2i} &\stackrel{3)}{=} \frac{(3-i)(5-2i)}{5^2 + 2^2} = \frac{15 - 6i - 5i - 2}{29} \\ &= \frac{13 - 11i}{29} = \frac{13}{29} - \frac{11}{29}i \end{aligned}$$



3.3 Absolutbetrag und Konjugierte

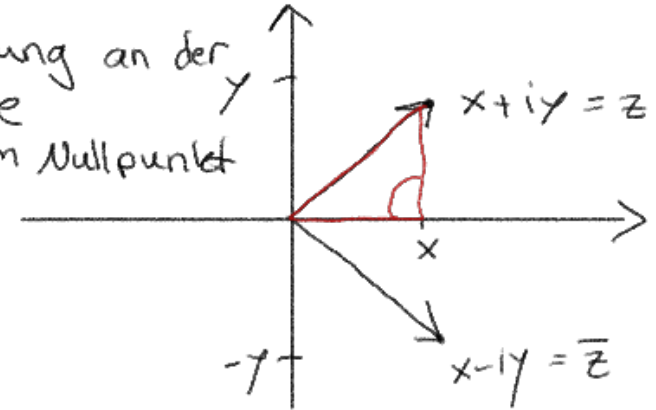
Definition: Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann heißt:

a) $\operatorname{Re}(z) := x$ **Realteil** von z .

b) $\operatorname{Im}(z) := y$ **Imaginärteil** von z . $\operatorname{Im}(z)$ ist reell, iy ist nicht reell

c) $\bar{z} := x - iy$ die zu z **konjugiert komplexe Zahl**. \rightarrow Spiegelung an der x -Achse

d) $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ (Absolut-) **Betrag** von z . \rightarrow Abstand zum Nullpunkt



Beispiele: $z = 3 + 2i$

• $\operatorname{Re}(z) = 3$

• $\operatorname{Im}(z) = 2$

• $\bar{z} = 3 - 2i$

• $|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

Pingo Umfrage



Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gelte $\operatorname{Re}(z_1) = 1$ und $\operatorname{Im}(z_2) = 3$.
Berechne $\operatorname{Re}(z_1 + iz_2)$:

a) 4

b) 2

~~c) -2~~

d) 3

$$\text{Sei } z_1 = 1 + ib_1 \text{ und } z_2 = a_2 + 3i$$

$$\text{Dann } iz_2 = ia_2 + i \cdot 3i = ia_2 - 3$$

$$\Rightarrow z_1 + iz_2 = 1 + ib_1 + ia_2 - 3 = -2 + i(b_1 + a_2)$$

Sei $z = x + yi \in \mathbb{C}$ dann gilt:

a) $\overline{\overline{z}} = z$, denn $\overline{\overline{z}} = \overline{x+iy} = \overline{x-iy} = x+iy = z$

b) $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$, denn $z \cdot \overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2$
und $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$

c) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

d) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

e) $\frac{1}{\overline{z}} = \overline{\frac{1}{z}}$

f) $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$, denn $z+\overline{z} = (x+iy) + (x-iy) = x+x + \cancel{iy} - \cancel{iy} = 2x = 2 \operatorname{Re}(z)$

g) $\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$, denn $z-\overline{z} = (x+iy) - (x-iy) = \cancel{x} + iy - \cancel{x} + iy = iy + iy = 2iy = 2i \operatorname{Im}(z)$

Rechenregeln für den Betrag

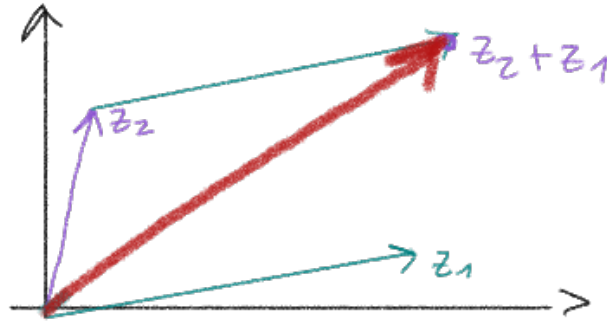
Sei $z = x + yi \in \mathbb{C}$ dann gilt:

a) $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \geq 0$

b) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

c) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

d) Dreiecksungleichung: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$



e) Für $x = x + 0 \cdot i \in \mathbb{R}$ gilt $|x| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2}$, d.h. für $x \in \mathbb{R}$ stimmt der Betrag mit der Definition aus VL 2 überein.

3.4 Lösungen quadratischer Gleichungen

Löse $z^2 + pz + q = 0$ für $p, q \in \mathbb{R}$.

Die p - q -Formel liefert $z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

1. Fall $\frac{p^2}{4} - q > 0$: zwei reelle Lösungen

2. Fall $\frac{p^2}{4} - q = 0$: eine reelle Lösung

3. Fall $\frac{p^2}{4} - q < 0$:

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} &= \sqrt{\underbrace{\ominus(q - \frac{p^2}{4})}_{>0}} = \sqrt{i^2 |q - \frac{p^2}{4}|} = \sqrt{i^2} \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \\ &= i \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \end{aligned}$$

3.4 Lösungen quadratischer Gleichungen

Beispiel: Löse $z^2 + 2z + 5 = 0$.

p-q-Formel: $z_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{2^2}{4} - 5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm \sqrt{i^2 \cdot 4}$
 $= -1 \pm i2$

Also $z_1 = -1 + 2i$
 $z_2 = -1 - 2i$

Hier gilt insbesondere $z_2 = \overline{z_1}$ (\leadsto VL 8)