9. Rationale Funktionen

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

04.11.2025

9.1. Komplexe Partialbruchzerlegung

Definiton: Rationale Funktionen sind Brüche von Polynomen, also

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

wobei p und q Polynome sind.

Dadurch werden Funktionen definiert:

$$\begin{aligned} f : D \to \mathbb{C} \quad &\text{mit} \quad D = \mathbb{C} \setminus \{z | q(z) = 0\}, \\ \text{bzw. } f : D \to \mathbb{R} \quad &\text{mit} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{z | q(z) = 0\} \quad (\text{falls } p, q \text{ reell}) \end{aligned}$$

An einer Nullstelle des Nenners, also z_0 mit $q(z_0) = 0$, ist f zunächst nicht definiert.

- Ist $p(z_0) \neq 0$, so heißt z_0 ein **Pol** oder eine Polstelle von f.
- Wenn z_0 eine Nullstelle von q der Vielfachheit k ist, ist z_0 ein Pol der Ordnung k von f,
- Ist auch $p(z_0) = 0$, so kürze $z - z_0$ so oft wie möglich in Zähler und Nenner.

Beispiele

Ziel: Vereinfachung der Darstellung

Ziel: Einfachere Darstellung für $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$.

Genauer: Zerlege eine rationale Funktion als Summe eines Polynoms und einfacher rationaler Funktionen der Form

$$\frac{A}{z-a} \text{ oder allgemeiner } \frac{A}{(z-a)^k}.$$

Diese Darstellung heißt Partialbruchzerlegung (PBZ) der rationalen Funktion.

Anwendungen:

(1) Integration von rationalen Funktionen

(2) Im Zusammenhang mit der sogenannten Laplace-Transformation

Schritte:

(1) Gegebenenfalls Polynomdivision, falls $\deg(p) \geq \deg(q)$.

(2) Partialbruchzerlegung (PBZ).

Fall 1: Einfache Pole

PBZ für $\frac{r(z)}{q(z)}$: Falls $q(z) = a_n(z - z_1) \dots (z - z_n)$ mit $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden. Dann

$$\frac{r(z)}{q(z)} = \frac{A_1}{z - z_1} + \dots + \frac{A_n}{z - z_n},$$

für $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{C}$.

Berechnung der Koeffizienten A_i:

Beispiel: $\frac{r(z)}{q(z)} = \frac{7z^2-14z+9}{z^3-3z^2+z-3}$

Ansatz:

Beispiel: $\frac{r(z)}{q(z)} = \frac{7z^2-14z+9}{z^3-3z^2+z-3} = \frac{7z^2-14z+9}{(z-3)(z-i)(z+i)}$

Pingo Umfrage

Gegeben sei die rationale Funktion s mit

$$s(z) = \frac{4z + 13}{z^2 - 7z + 12}.$$

Stellen Sie den Ansatz für die Partialbruchzerlegung von s auf, wobei $A, B \in \mathbb{R}$.

- $\frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+2}$.
- $\frac{A}{z+3} + \frac{B}{z-2}$.
- $\frac{A}{z-3} + \frac{B}{z-4}$.
- $\frac{A}{z+3} + \frac{B}{z+4}$.

Pingo Umfrage

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion r mit

$$r(z) = \frac{2z + 32}{(z+1)(z+7)} = \frac{A}{z+1} + \frac{-3}{z+7}$$

- $A = 30.$
- $A = -3.$
- $A = 4.25.$
- $A = 5.$

Fall 2: Mehrfache Pole

PBZ für $\frac{r(z)}{q(z)}$: Ist z_k eine Nullstelle mit Vielfachheit m_k so ersetzen wir

$$\frac{A_k}{z - z_k}$$

durch

$$\frac{A_{k,1}}{z - z_k} + \frac{A_{k,2}}{(z - z_k)^2} + \cdots + \frac{A_{k,m_k}}{(z - z_k)^{m_k}}$$

Beispiel: $f(z) = \frac{r(z)}{q(z)} = \frac{3z^3 - 8z^2 + 7}{(z-1)^3(z-3)}$

9.2 Reelle Partialbruchzerlegung

Sei $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine reelle rationale Funktion, d.h.die Polynome p und q haben reelle Koeffizienten.

- Fall 1: f hat nur reelle Pole $\rightsquigarrow$ PBZ funktioniert wie im komplexen Fall und die Koeffizienten sind dann alle reell.
- Fall 2: f hat komplexe Pole $\rightsquigarrow$ PBZ funktioniert wie im komplexen Fall und die Koeffizienten sind dann komplex.

Frage: Wie bekommt man eine reelle Zerlegung, d.h. eine Zerlegung mit reellen Koeffizienten?

Idee: Fasse Nullstellenpaare (zueinander komplex konjugierte) zusammen:

Beispiel

Beispiel: $\dfrac{r(z)}{q(z)} = \dfrac{7z^2-14z+9}{(z-3)(z-i)(z+i)} = \dfrac{7z^2-14z+9}{(z-3)(z^2+1)}$

Zusammenfassung: Mögliche Ansätze für die PBZ

(1) Der Ansatz bestimmt sich allein aus den Faktoren des Nenners.

(2) Die gesamte Anzahl der Koeffizienten in den Ansatztermen stimmt mit dem Grad des Nenners überein.

Faktor des Nenners	Ansatzterm
$z - z_0$	$\dfrac{A}{z - z_0}$
$(z - z_0)^m$	$\dfrac{A_1}{z - z_0} + \dfrac{A_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \dfrac{A_m}{(z - z_0)^m}$
$(z - a)^2 + b^2$	$\dfrac{Cz + D}{(z - a)^2 + b^2}$
$\left((z - a)^2 + b^2\right)^m$	$\dfrac{C_1 z + D_1}{(z - a)^2 + b^2} + \dfrac{C_2 z + D_2}{\left((z - a)^2 + b^2\right)^2} + \cdots + \dfrac{C_m z + D_m}{\left((z - a)^2 + b^2\right)^m}$