13. Lineare Gleichungssysteme

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

13.11.2025

Definition: Die Transponierte der Matrix $A = \left[a_{i,j}\right] \in \mathbb{K}^{m,n}$ ist die $n \times m$-Matrix

$$A^T := \left[b_{i,j}\right] \in \mathbb{K}^{n,m}, \quad \text{wobei } b_{i,j} = a_{j,i}.$$

Beispiele:

i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

ii) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

Rechenregeln für Transponierte: Für $A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$, $C \in \mathbb{K}^{n,\ell}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

(1) $(A^T)^T = A$,

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$,

(3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$,

(4) $(AC)^T = C^T A^T$.

$A = \begin{bmatrix} 1+i & 2 & 2+3i \\ -1 & 0 & -2i \end{bmatrix}$

$\rightsquigarrow \; A^H = \begin{bmatrix} \overline{1+i} & \overline{-1} \\ \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{2+3i} & \overline{-2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & 0 \\ 2-3i & 2i \end{bmatrix}$

Definition: Die Adjungierte der Matrix $A = \left[a_{i,j}\right] \in \mathbb{C}^{m,n}$ ist die $n \times m$-Matrix

$$A^H := \left[b_{i,j}\right] \in \mathbb{C}^{n,m}, \quad \text{wobei } b_{i,j} = \overline{a_{j,i}}.$$

Beispiele

13.1 Matrixschreibweise eines Linearen Gleichungssystems

Definition: Ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit m Gleichungen in n Unbekannten hat die Form

$$
\begin{aligned}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n &= b_m.
\end{aligned}
$$

Die x_j heißen Unbekannte oder Variablen und sind gesucht. Die Koeffizienten $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ und $b_i \in \mathbb{K}$ sind gegeben.

reelles LGS: falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (also $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{R}$),

komplexes LGS: falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

homogen: falls alle $b_i = 0$.

inhomogen: falls das LGS nicht homogen (mindestens ein $b_i \neq 0$).

Matrixschreibweise

Das lineare Gleichungssystem können wir auch schreiben als

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{=x} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{=b},$$

also als $Ax = b$. Dabei heißt

(1) $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ die Koeffizientenmatrix des LGS.

(2) $b \in \mathbb{K}^m$ die rechte Seite oder Inhomogenität.

(3) $x \in \mathbb{K}^n$ mit $Ax = b$ heißt Lösung (eventuell mehrere) des linearen Gleichungssystems.

(4) Die Menge aller Lösungen heißt Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}(A, b) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\}.$$

Spezialfall: $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertierbar:

$$Ax = b \iff \underbrace{A^{-1}A}_{I_n}x = A^{-1}b \iff x = A^{-1}b$$

Spezialfall: LGS in „Stufenform:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \mathrm{I} & 1x_1 & + & 2x_2 & - & 1x_3 & = & 3 \\ \mathrm{II} & & & +1x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ \mathrm{III} & & & & & 2x_3 & = & 4 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Direkt lösbar durch Rückwärtseinsetzen

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{III} & 2x_3 = 4 \Rightarrow x_3 = 2 \\ \mathrm{II} & x_2 + 2\cdot 2 = 5 \Rightarrow x_2 = 5-4 = 1 \\ \mathrm{I} & 1x_1 + 2\cdot 1 - 1\cdot 2 = 3 \Rightarrow x_1 = 3-2+2 = 3 \end{array}\right\} \mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Ziel: Bringe eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ in Zeilenstufenform.

Im Gauß-Algorithmus sind folgende elementaren Zeilenoperationen erlaubt:

(1) Vertauschen von zwei Zeilen,

(2) Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl $\lambda \neq 0$ $(\lambda \in \mathbb{K})$,

(3) Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Schritt 1: Suche die erste von Null verschiedene Spalte.

$j = 2$

Schritt 2: Suche in dieser Spalte den ersten Eintrag ungleich Null (Pivotelement) und tausche ihn ggf. in die erste Zeile.

$$\xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Beispiel

Schritt 3: Nutze das Pivotelement c_{1,j_1} um alle Einträge darunter zu eliminieren.

$$\xrightarrow{\mathrm{III}-2\mathrm{I}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Schritt 4: Rekursion: Fahre mit der Restmatrix fort.

$$\xrightarrow{\mathrm{III}-\mathrm{II}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Zeilenstufenform

z. B.

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\mathrm{I}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Zeilenstufenform

$$C = \left[\begin{array}{c|cc|cc|cc|c|cc}
0 & c_{1,j_1} & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & c_{2,j_2} & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{3,j_3} & * & * & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & c_{r,j_r} & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

wobei $c_{i,j_i} \neq 0$, $i = 1, \ldots, r$ die Pivotelemente sind. Der $*$ steht für beliebige Einträge.

Eine Matrix $C \in \mathbb{K}^{m,n}$ ist in Zeilenstufenform, falls gilt:

(1) Erster Nichtnulleintrag einer Zeile ist weiter rechts als erste Nichtnulleinträge vorheriger Zeilen.

(2) Alle Zeilen mit nur Nullen sind unter den Zeilen mit Nichtnulleinträgen.

Bemerkungen:

(1) Zeilenstufenform ist nicht eindeutig.

(2) Die Zeilenstufenform der Nullmatrix $A = 0$ ist $C = 0$.

Normierte Zeilenstufenform

Sei $A \neq 0$ eine Matrix und C eine Zeilenstufenform von A. Dann ist C in normierter Zeilenstufenform, falls:

(1) Alle Pivotelemente normiert sind, d.h. $c_{i,j_i} = 1$.

(2) Alle Einträge über den Pivotelementen Null sind.

Die normierte Zeilenstufenform hat folgende Gestalt:

$$C = \left[\begin{array}{c|cc|cc|cc|c|cc}
0 & 1 & * & 0 & * & 0 & * & * & 0 & * \\
0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * & * & 0 & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

Bemerkung: Die normierte Zeilenfstufenform einer Matrix ist eindeutig.

Schritt 5: Normiere die Pivotelemente auf 1 und eliminiere die Einträge über den Pivotelementen:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}\mathrm{I}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathrm{I}-\frac{1}{2}\mathrm{II}} \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\mathrm{III}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathrm{I}+\frac{1}{2}\mathrm{III}]{\mathrm{II}-2\mathrm{III}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Normierte ZSF

Beispiele

Pingo Umfrage

Die normierte Zeilenstufenform (NZSF) der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$$

ist gegeben durch

$$\mathrm{NZSF}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{III - 2II} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$a = 2$, $b = 1$

Um LGS $Ax = b$ zu lösen wende Gauß-Algorithmus auf die erweiterte Koeffizientenmatrix an:

$$[A, b] = [A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right]$$

an, bei der b rechts an die Koeffizientenmatrix A angehängt wird.

Bemerkung:

(1) Anwendung elementarer Zeilenoperationen auf die erweiterte Koeffizientenmatrix verändert die Lösungsmenge des LGS $Ax = b$ nicht.

(2) Ist die Matrix in ZSF oder NZSF, können wir die Lösung(en) des LGS durch Rückwärtseinsetzen bestimmen.

1) $x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$
$x_1 + 3x_2 + x_3 = 8$
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 7$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}-\text{I}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

bzw. III $0x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 4$, II $0x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 5$ I $1x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\text{III}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{I}-2\text{II}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{I}+5\text{III}]{\text{II}-2\text{III}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

bzw: $x_3 = 2$, $x_2 = 1$, $x_1 = 3$ $\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ erweiterte $\rightsquigarrow$ Koeffizienten $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right]$

$\xRightarrow{II - 2I} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$ bzw. $0x_1 + 0x_2 = -4$ ↯ : Hier $\mathbb{L} = \emptyset$

3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right] \xRightarrow{II - 2I} \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

bzw. $0 = 0$ und $x_1 + x_2 = 2$

wähle $x_2 = t \in \mathbb{R}$, dann $x_1 = 2 - x_2 = 2 - t$ $\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 2-t \\ 0+t \end{bmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$

$$= \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{spezielle Lösung}} + \underbrace{t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{Lösungsmenge d. homog. Gleich.}} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

Tipp: Wähle die Variable als frei, die zu keinem Pivotelement gehört.

13.4 Struktur der Lösungsmenge

Beobachtung: Es gibt 3 Szenarien für $\mathbb{L}(A, b)$:

(1) keine Lösung

(2) eindeutige Lösung

(3) unendlich viele Lösungen

Struktur der Lösungsmenge:

Das LGS $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ und $b \in \mathbb{K}^n$ habe eine Lösung $x_P \in \mathbb{K}^n$.

Diese spezielle Lösung wird auch partikuläre Lösung genannt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(A, b) &= \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\} \\ &= \{x_P + x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\} \\ &:= x_P + \mathbb{L}(A, 0). \end{aligned}$$

Beispiel