

Zahlendarstellung und Rechnerarithmetik

Einstein-Prof. Dr.-Ing. Friedel Gerfers

Ziele

Nach dieser Vorlesung sollten Sie in der Lage sein:

- **Binär-/Oktal-/Hexadezimalzahlen** zu Dezimalzahlen zu konvertieren und umgekehrt
- **2-Komplement-Zahlen** zu berechnen und zu negieren
- **m-Bit 2-Komplement-Zahlen** zu n-Bit zu konvertieren
- **Arithmetische Operationen** mit Binärzahlen durchzuführen
- **Überlauf (overflow)** zu erklären und zu erläutern, wann er auftritt und wie er behandelt wird
- **Bruchzahlen** in den „IEEE 754“ Floating-Point-Standard zu konvertieren und umgekehrt
- **Arithmetische Operationen** mit „IEEE 754“-Zahlen durchzuführen

Inhalt

- Zahlensysteme und ihre Konvertierung
- Vorzeichenbehaftete (*signed*) und vorzeichenlose (*unsigned*) Zahlen
- 2-Komplemente
- Arithmetische Operationen
 - Addition und Subtraktion
 - Multiplikation
 - Division
- Gleitkommazahlen (Floating Point)
- „Pentium Bug“

Zahlenbasen

- Natürliche Zahlen können in jeder Basis repräsentiert werden:

$$a_{n-1}a_{n-2} \dots a_1a_0 \text{ (Basis } B\text{)} = a_{n-1}B^{n-1} + \dots + a_1B^1 + a_0B^0 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i B^i$$

- B: **Basis** (engl.: *radix*), z.B. 10 (dezimal), 2 (binär), 8 (oktal), 16 (hexadezimal)
- B^i : **Gewicht** (engl.: *weight*) der i-ten Ziffer (engl.: *digit*)
- a_i : i-te Ziffer aus der Menge $\{0, 1, \dots, B-1\}$
- Beispiel (binär):

$$\begin{array}{ccccccc} a_3 & a_1 & & B^3=8 & B^2=4 & B^1=2 & B^0=1 \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1011_B & = & 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 & = & (8 + 0 + 2 + 1)_D & = & 11_D \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a_2 & a_0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \end{array}$$

Binärzahlen (Dualzahlen)

- Menschen benutzen **Dezimalzahlen**

$$2435 = 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

- Rechner benutzen **Binärzahlen**

$$1011_B = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 11_D$$

- Hintergrund: Zwei einfach darstellbar

- ein / aus
 - hohes / niedriges Potenzial (VDD / GND)
 - schwarz / weiß

- Allgemein gilt:

$$\mathbf{b_{n-1}b_{n-2}\dots b_1b_0 = b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + b_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + b_1 \cdot 2^1 + b_0 \cdot 2^0}$$

Konvertierung

- Teile $b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + b_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + b_1 \cdot 2^1 + b_0 \cdot 2^0$ durch 2
- Das Ergebnis ist $b_{n-1} \cdot 2^{n-2} + b_{n-2} \cdot 2^{n-3} + \dots + b_1 \cdot 2^0$ mit Rest b_0
- Dies ergibt folgenden Algorithmus für die Konvertierung von Dezimal nach dual / binär:

$$167_D \rightarrow 167 / 2 = 83$$

$$83 / 2 = 41$$

$$41 / 2 = 20$$

$$20 / 2 = 10$$

$$10 / 2 = 5$$

$$5 / 2 = 2$$

$$2 / 2 = 1$$

$$1 / 2 = 0$$

Rest 1

Rest 1

Rest 1

Rest 0

Rest 0

Rest 1

Rest 0

Rest 1

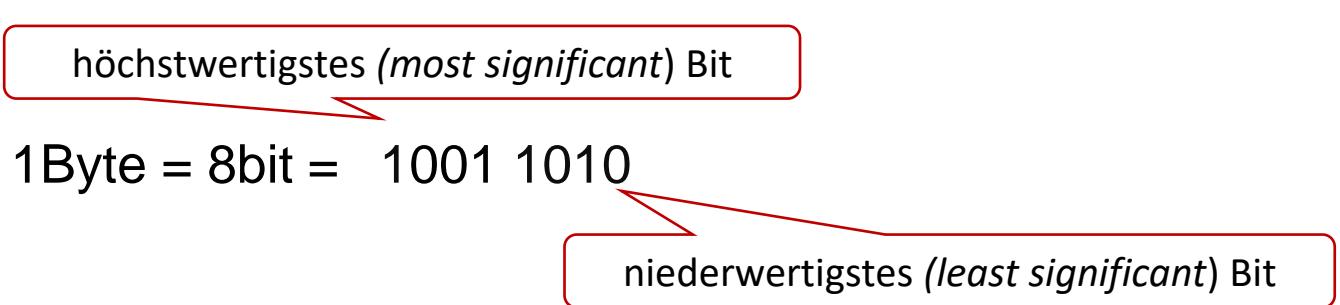
*Niederwertigstes Bit
(least significant bit (LSB))*

*Höchstwertigstes Bit
(most significant bit (MSB))*

$$167_D = 10100111_B$$

Bits und Bytes (1)

- Alle Informationen werden im Rechner als Binärzahlen gespeichert.
- Kleinste Einheit: 1 Bit = eine Ziffer einer Dualzahl
- Beispiel:



- Mit einer n-Bit Zahl lassen sich die Werte von $0 \dots (2^n-1)$ darstellen:
 - Beispiel für $n = 3$:
 - $111_2 = 1*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0 = 1*4 + 1*2 + 1*1 = 7 = 8-1 = 2^3-1$

Bits und Bytes (2)

- Vorsicht bei Präfixen:
 - In der Regel gilt: $1\text{MB} = 1 \text{ Megabyte} = 10^6 \text{B} = 1\ 000\ 000 \text{ B}$
 - In der Informatik: $1\text{MB} = 1 \text{ Megabyte} = 2^{20} \text{B} = 1\ 048\ 576 \text{ B}$

=> Nicht immer eindeutig definiert!

Weitere Zahlensysteme

- **Problem:** Binärzahlen werden schnell sehr lang
- **Lösung:** Verwendung von weiteren Zahlensystemen mit höheren Basen, in die leicht konvertiert werden kann:
 - Oktale Zahlen (Basis 8)
 - Hexadezimale Zahlen (Basis 16)

Oktale Zahlen (Basis 8)

Hexadezimale Zahlen

(Basis 16)

Konvertierung ins Oktale (1)

- Oktalzahlen werden zur Basis 8 ($= 2^3$) gebildet
- Dezimal nach oktal:

$$\begin{array}{rcl} 167_D \rightarrow 167 / 8 = 20 & \text{Rest } 7 \\ & & \left. \begin{array}{l} \text{Rest } 4 \\ \text{Rest } 2 \end{array} \right\} \\ 20 / 8 = 2 & & \\ 2 / 8 = 0 & & \end{array} \quad 167_D = 247_O$$

Konvertierung ins Oktale (2)

- Binär nach oktal:
es werden 3 Binärzeichen benötigt, um die Zahlen 0...7 darzustellen:

$$O_0 * 8^0 = b_2 * 2^2 + b_1 * 2^1 + b_0 * 2^0$$

0 3

$$111000001011_2 = \underbrace{111}_7 \underbrace{000}_1 \underbrace{001}_3 \underbrace{011}_2 = 7013_8$$

Hexadezimalzahlen (1)

- Hexadezimalzahlen werden zur Basis 16 (= 2^4) gebildet
- Ziffernmenge: { 0, 1, 2, … , 8, 9, A, B, C, D, E, F}
- Dezimal nach hexadezimal:

$$\begin{array}{rcl} 167_D \rightarrow 167 / 16 = 10 & & \text{Rest } 7 \\ & 10 / 16 = 0 & \text{Rest } A \end{array}$$

$$167_D = A7_H$$

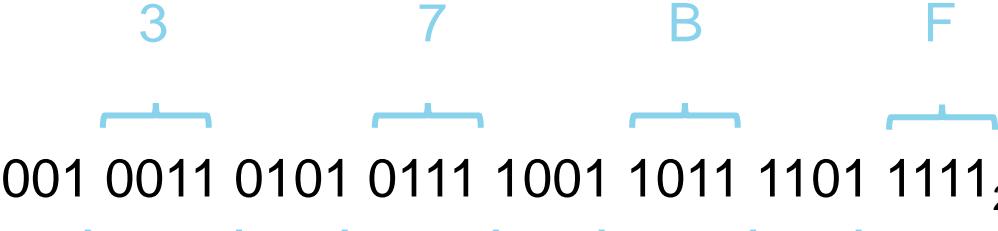
In C/Java: 0xa7

Hexadezimalzahlen (2)

- Binär nach hexadezimal:

3 7 B F
0001 0011 0101 0111 1001 1011 1101 1111₂ = 13579BDF_H

1 5 9 D



Negative Zahlen

Negative Zahlen (1)

- Möglichkeiten negative Zahlen binär zu repräsentieren:
 - **Vorzeichen-/Betrags-Zahlen** (*Sign-magnitude numbers*)
 - MSB zeigt Vorzeichen (sign) an (0: positiv, 1: negativ).
 - Die übrigbleibenden ($n-1$) Bits bilden den Betrag (magnitude).
 - Beispiel: 5 (dezimal) = 0101 (binär) → -5 (dezimal) = 1101 (binär)
 - **1-Komplement-Zahlen** (*One's complement numbers*)
 - Zahl wird durch die Invertierung aller Bits negiert.
 - MSB *impliziert* das Vorzeichen.
 - Beispiel: 5 (dezimal) = 0101 (binär) → -5 (dezimal) = 1010 (binär)

Negative Zahlen (2)

- Möglichkeiten negative Zahlen binär zu repräsentieren:
 - **2-Komplement-Zahlen** (*Two's complement numbers*)
MSB hat ein **negatives Gewicht** (-2^{n-1}).
 $b_{n-1}b_{n-2}\dots b_1b_0$ (binär) = $-b_{n-1}2^{n-1} + b_{n-2}2^{n-2} + \dots + b_12^1 + b_02^0$ (dezimal)
MSB *impliziert* das Vorzeichen.
Beispiel: -5 (dezimal) = $-8 + 3 = 1000 + 0011 = 1011$ (binär)

Beispiel (4-Bit)

Dezimal	Vorzeichen-/Betrags-Zahlen (Sign-Magnitude)	1-Komplement-Zahlen (One's complement)	2-Komplement-Zahlen (Two's complement)
-0	1000	1111	
-1	1001	1110	1111
-2	1010	1101	1110
-3	1011	1100	1101
-4	1100	1011	1100
-5	1101	1010	1011
-6	1110	1001	1010
-7	1111	1000	1001
-8			1000

Und der Gewinner ist ...

- **2-Komplement-Zahlen**
 - Arithmetik ist einfacher (identisch zu vorzeichenlos).
 - Es gibt nur eine Möglichkeit die 0 zu repräsentieren.
- Beispiel 32bit:
$$b_{31}b_{30}\dots b_1b_0 \text{ (binär)} = -b_{31}2^{31} + b_{30}2^{30} + \dots + b_12^1 + b_02^0 \text{ (dezimal)}$$
- Was ist die kleinste mit 8bit repräsentierbare Integerzahl?
 - $2^7 = -128$
- Was ist die größte mit 8bit repräsentierbare Integerzahl?
 - $2^6 + 2^5 + \dots + 2^0 = 127$

Negation

- Negation von 2-Komplement-Zahlen:
Invertiere alle Bits und addiere 1

- 8-Bit-Beispiel:

$$0110\ 1001_B = +105_D$$

invertieren: 1001 0110

1 addieren: 1001 0111 = -128 + 16 + 7 = -105

Rückwärts:

invertieren: 0110 1000

1 addieren: 0110 1001

Addition / Subtraktion

Binäre Addition

- Addition von rechts nach links mit Übertrag (*carry*) wie in der Grundschule
- Beispiele (4-Bit, 2er complement):

$$\begin{array}{r} & \text{1} \\ & \text{0010} & 2 \\ + & 0011 & + 3 \\ \hline & 0101 & 5 \end{array}$$

carry

Rechenregeln:

- $0 + 0 = 0$
 - $0 + 1 = 1$
 - $1 + 0 = 1$
 - $1 + 1 = 10$
- carry*

$$\begin{array}{r} & \text{1} \\ & 0101 & 5 \\ + & 0110 & + 6 \\ \hline & 1011 & - 5 \end{array}$$

??? Überlauf (*overflow*)

Binäre Subtraktion

- Beispiele (4-Bit, 2er complement):

$$\begin{array}{r} 0010 \\ -0011 \\ \hline \text{borrows} \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ -3 \\ \hline -1 \end{array}$$

Rechenregeln:

- $0 - 0 = 0$
- $0 - 1 = 1$ (borrow)
- $1 - 0 = 1$
- $1 - 1 = 0$

- Beginn mit der Subtraktion an der 1. Stelle (ganz rechts). $0 - 1$ ist 1 mit 1 als Übertrag.
- Durch Übertrag sind an der 2. Stelle $1 - 1 - 1$ zu berechnen. $1 - 1$ ergibt 0. Dadurch bleibt $0 - 1$ übrig. Das ergibt wieder 1 mit 1 als Übertrag.
- An der 3. Stelle sind wieder $0 - 0 - 1$ zu berechnen. $0 - 1$ ergibt wieder eine 1 mit 1 als Übertrag.
- An der 4. Stelle sind wieder $0 - 0 - 1$ zu berechnen. $0 - 1$ ergibt wieder eine 1 mit 1 als Übertrag
- Das Ergebnis der Subtraktion: $0010 - 0011 = 1111$

Binäre Subtraktion

- Beispiele (4-Bit, 2er complement):

0010	2	
-0011	-3	
<u>111</u>		
borrows	1111	- 1
1101	- 3	
-0110	- 6	
<u>11</u>		
0111	7	wieder Überlauf

Rechenregeln:

- $0 - 0 = 0$
- $0 - 1 = \underline{1}$ (*borrow*)
- $1 - 0 = 1$
- $1 - 1 = 0$

- Alternative:

Den 2. Operanden negieren und dann beide addieren.

- Wir werden diesen Trick beim Erstellen unserer **Arithmetic Logic Unit** (ALU) nutzen.

Subtraktion durch Addition der Negation

- Beispiel (4-Bit, 2er complement):

$$\begin{array}{r} 0010 \\ - 0011 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ -3 \\ \hline \end{array}$$

- Negiere 0011
 - Invertieren: 1100
 - 1 addieren: 1101
- Addieren

$$\begin{array}{r} 0010 \\ + 1101 \\ \hline 1111 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ -3 \\ \hline -1 \end{array}$$

Überlauf / 1 (1)

- Überlauf (**overflow**):
 - Das Ergebnis ist zu groß für ein endliches Computer-Wort
 - Z. B. Addition von zwei n-Bit-Zahlen muss keine n-Bit-Zahl ergeben
- Kein Überlauf, wenn ...
 - Addition von 2 Zahlen mit entgegengesetztem Vorzeichen
 - Betrag der Summe immer \leq den Beträgen der beiden Operanden
 - Beispiel: $-10 + 6 = -4$
 - Subtraktion von 2 Zahlen mit demselben Vorzeichen

Überlauf / 1 (2)

- Overflow tritt auf, wenn...

Operation	A	B	Overflow wenn (Vorzeichen) des Ergebnisses
$A+B$	≥ 0	≥ 0	< 0 (MSB = 1)
$A+B$	< 0	< 0	≥ 0 (MSB = 0)
$A-B$	≥ 0	< 0	< 0 (MSB = 1)
$A-B$	< 0	≥ 0	≥ 0 (MSB = 0)

Überlauf / 2

- Vergleich der Operationen $A + B$ und $A - B$
 - Kann ein Überlauf auftreten, wenn $B = 0$ ist?
 - Kann ein Überlauf auftreten, wenn $A = 0$ ist?
- Überlauf tritt nur auf, wenn das Übertragsbit (*carry in*) für das MSB \neq dem entstehenden Übertragsbit (*carry out*) aus der Operation der beiden MSBs ist.

carry in_{MSB} \neq carry out_{MSB}
- Beispiel (4-Bit): *carry out* → 01 ← *carry in*
$$\begin{array}{r} 0101 \\ + 0110 \\ \hline 1011 \end{array}$$

Multiplikation / Division

Multiplikation

- Für den Moment betrachten wir nur positive Zahlen, d.h. MSB ist **kein sign Bit**
- Schulmathematik: $13 \times 11 = \dots$

$$\begin{array}{r} \text{Multiplikand} & 1101 & 13 \\ \text{Multiplikator} \times & \underline{1011} & \underline{x 11} \\ & 1101 & (1101 \times 1) \\ & 1101 & (1101 \times 1) \\ & 0000 & (1101 \times 0) \\ + & \underline{1101} & (1101 \times 1) \\ \text{Produkt} & 10001111 & 143 \end{array}$$

- **Beachte:** Produkt erfordert doppelte Stellenanzahl!

Division / 1

- Schulmathematik: $74 / 8 = \dots$

Dividend Divisor Quotient

$$\begin{array}{r} 1001010 \\ / \quad 1000 \\ \hline 1000 \\ \hline 1 \end{array}$$

Division / 2

- Schulmathematik: $74 / 8 = \dots$

Dividend Divisor Quotient

$$\begin{array}{r} 1001010 \\ / \quad 1000 \\ \hline 1000 \\ \hline 10 \end{array}$$

Division / 3

- Schulmathematik: $74 / 8 = \dots$

Dividend Divisor Quotient

$$\begin{array}{r} 1001010 \\ / \quad 1000 \\ \hline 1000 \\ \hline 101 \end{array} \quad = \quad 100$$

Division / 4

- Schulmathematik: $74 / 8 = \dots$

Dividend **Divisor** **Quotient**

$$\begin{array}{r}
 1001010 \\
 -1000 \\
 \hline
 1010 \\
 -1000 \\
 \hline
 10 \\
 \end{array} \quad / \quad 1000 \quad = \quad \overbrace{1001}^{=9}$$

→ Rest

\Downarrow

$= 2$

$$\rightarrow 74 / 8 = 9 \text{ Rest } 2$$

Gebrochene Zahlen / Gleitkommazahlen

Gebrochene Zahlen

- Darstellung gebrochener Zahlen:

$$a_{n-1}a_{n-2} \dots a_1a_0, a_{-1}a_{-2} \dots a_{-m}$$

$$= a_{n-1}B^{n-1} + \dots + a_1B^1 + a_0B^0 + a_{-1}B^{-1} + a_{-2}B^{-2} + \dots + a_{-m}B^{-m} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i B^i + \sum_{i=-m}^{-1} a_i B^i$$

- Beispiel (binär):

$$\begin{aligned} 11,1010_B &= 3 + 2^{-1} + 2^{-3} \\ &= 3 + 0,5 + 0,125 = 3,625_D \end{aligned}$$

Konvertierung

- Dezimal ($0, b_{-1}b_{-2}\dots b_{-m}$)_D nach Dual
 $\rightarrow 2 \times (0, b_{-1}b_{-2}\dots b_{-m})_D = (b_{-1}, b_{-2}b_{-3}\dots b_{-m})$
- Beispiel: $0,24_D$

$$\begin{aligned}
 0,24_D \rightarrow & \quad 0,24 \cdot 2 = 0,48 + 0 && \text{MSB!} \\
 & \quad 0,48 \cdot 2 = 0,96 + 0 \\
 & \quad 0,96 \cdot 2 = 0,92 + 1 \\
 & \quad 0,92 \cdot 2 = 0,84 + 1 \\
 & \quad 0,84 \cdot 2 = 0,68 + 1 \\
 & \quad 0,68 \cdot 2 = 0,36 + 1 \\
 & \quad 0,36 \cdot 2 = 0,72 + 0 \\
 & \quad 0,72 \cdot 2 = 0,44 + 1 && \text{LSB!} \\
 & & \downarrow & \\
 & & \rightarrow 0,00111101_B
 \end{aligned}$$

- Abbruch nach 8 Stellen (Näherung mit $0,238\dots$)
- Ziffernbegrenzung kann zu Rundungsfehlern führen

Gleitkommazahlen (*floating point*) (1)

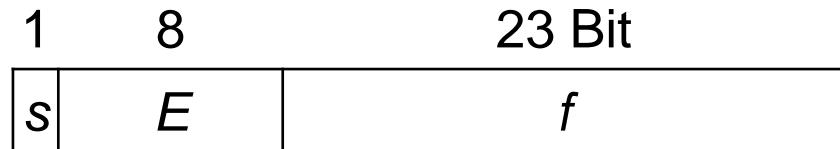
- Näherung für reelle Zahlen: $(-1)^s \times 1.f \times 2^e$
 - s: **Vorzeichen** (*sign*): 0 → positiv, 1 → negativ
 - 1.f: **Mantisse** (Betrag, *significand*) als **normalisierte Zahl**
 - Zahl wird so lange geschoben, bis sie führende 1 aufweist
 - Binärpunkt wird rechts von dieser 1 festgelegt ($1.0 \leq 1.f < 2.0$)
 - f: nur der **Bruch f** (*fraction*) wird gespeichert, **führende 1** ist implizit (wird von Recheneinheit ergänzt)

Gleitkommazahlen (*floating point*) (2)

- Näherung für reelle Zahlen: $(-1)^s \times 1.f \times 2^e$
 - e: vorzeichenbehafteter Exponent, wird als **transformierter Exponent E** gespeichert
 - $E: E = e + \text{bias}$
 - **bias** wird so gewählt, dass 2-Komplement-Zahl e zur vorzeichenlosen Dualzahl E wird
 - **bias** entweder bei einfacher Genauigkeit 127 oder 1023 bei doppelter Genauigkeit (double)

IEEE-754 Standard

- Einfache Genauigkeit (*single precision, 32 Bit*)

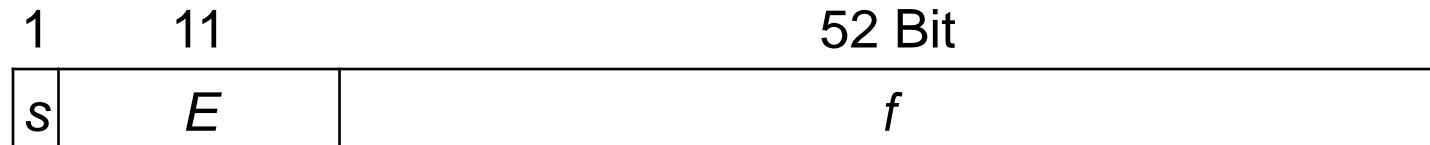


bias = 127

C/Java: float

- E=0 / 255 (dienen als Sonderfälle)

- Doppelte Genauigkeit (*double precision, 64 Bit*)



bias = 1023

C/Java: double

Beispiel (I)

- $-0,75_D$ mit einfacher Genauigkeit
 - $s = 1$
 - $0,75_D$ als gebrochene Dualzahl ist $0,11_B$
 - Normalisiere: $0,11 = 1,1 \times 2^{-1}$
 - führende 1 ist implizit \rightarrow Bruch = 10000....
 - Transformierter Exponent E

$$E = e + \text{bias} = -1 + 127 = 126 = 0111\ 1110_B$$

1	8	23 Bit
1	0111 1110	100 0000 0000 0000 0000 0000

1	8	23 Bit
s	E	f

Beispiel (II)

- 0,75_D mit einfacher Genauigkeit

1	8	23 Bit
1	0111 1110	100 0000 0000 0000 0000 0000

- <https://www.h-schmidt.net/FloatConverter/IEEE754de.html>

Tools & Thoughts

IEEE-754 Konverter für Fließkommazahlen

Translations: en

Diese Webseite dient zur Umrechnung zwischen der Dezimaldarstellung von Zahlen (z.B. "1.02") und den von modernen CPUs verwendeten IEEE 754-Fließkommazahlen. Aus Platzgründen werden nur Zahlen mit einfacher Genauigkeit (32 Bit) dargestellt. Diese Seite soll dem besseren Verständnis von Fließkommazahlen dienen.

IEEE 754 Converter (JavaScript), V0.21

Sign	Exponent	Mantissa
Value: Encoded as: Binary:	-1 1 <input checked="" type="checkbox"/> -1 <input type="checkbox"/> 1 <input type="checkbox"/> 126 <input type="checkbox"/> 127 <input type="checkbox"/> 128 <input type="checkbox"/> 129 <input type="checkbox"/> 130 <input type="checkbox"/> 131 <input type="checkbox"/> 132 <input type="checkbox"/> 133 <input type="checkbox"/> 134 <input type="checkbox"/> 135 <input type="checkbox"/> 136 <input type="checkbox"/> 137 <input type="checkbox"/> 138 <input type="checkbox"/> 139 <input type="checkbox"/> 140 <input type="checkbox"/> 141 <input type="checkbox"/> 142 <input type="checkbox"/> 143 <input type="checkbox"/> 144 <input type="checkbox"/> 145 <input type="checkbox"/> 146 <input type="checkbox"/> 147 <input type="checkbox"/> 148 <input type="checkbox"/> 149 <input type="checkbox"/> 150 <input type="checkbox"/> 151 <input type="checkbox"/> 152 <input type="checkbox"/> 153 <input type="checkbox"/> 154 <input type="checkbox"/> 155 <input type="checkbox"/> 156 <input type="checkbox"/> 157 <input type="checkbox"/> 158 <input type="checkbox"/> 159 <input type="checkbox"/> 160 <input type="checkbox"/> 161 <input type="checkbox"/> 162 <input type="checkbox"/> 163 <input type="checkbox"/> 164 <input type="checkbox"/> 165 <input type="checkbox"/> 166 <input type="checkbox"/> 167 <input type="checkbox"/> 168 <input type="checkbox"/> 169 <input type="checkbox"/> 170 <input type="checkbox"/> 171 <input type="checkbox"/> 172 <input type="checkbox"/> 173 <input type="checkbox"/> 174 <input type="checkbox"/> 175 <input type="checkbox"/> 176 <input type="checkbox"/> 177 <input type="checkbox"/> 178 <input type="checkbox"/> 179 <input type="checkbox"/> 180 <input type="checkbox"/> 181 <input type="checkbox"/> 182 <input type="checkbox"/> 183 <input type="checkbox"/> 184 <input type="checkbox"/> 185 <input type="checkbox"/> 186 <input type="checkbox"/> 187 <input type="checkbox"/> 188 <input type="checkbox"/> 189 <input type="checkbox"/> 190 <input type="checkbox"/> 191 <input type="checkbox"/> 192 <input type="checkbox"/> 193 <input type="checkbox"/> 194 <input type="checkbox"/> 195 <input type="checkbox"/> 196 <input type="checkbox"/> 197 <input type="checkbox"/> 198 <input type="checkbox"/> 199 <input type="checkbox"/> 200 <input type="checkbox"/> 201 <input type="checkbox"/> 202 <input type="checkbox"/> 203 <input type="checkbox"/> 204 <input type="checkbox"/> 205 <input type="checkbox"/> 206 <input type="checkbox"/> 207 <input type="checkbox"/> 208 <input type="checkbox"/> 209 <input type="checkbox"/> 210 <input type="checkbox"/> 211 <input type="checkbox"/> 212 <input type="checkbox"/> 213 <input type="checkbox"/> 214 <input type="checkbox"/> 215 <input type="checkbox"/> 216 <input type="checkbox"/> 217 <input type="checkbox"/> 218 <input type="checkbox"/> 219 <input type="checkbox"/> 220 <input type="checkbox"/> 221 <input type="checkbox"/> 222 <input type="checkbox"/> 223 <input type="checkbox"/> 224 <input type="checkbox"/> 225 <input type="checkbox"/> 226 <input type="checkbox"/> 227 <input type="checkbox"/> 228 <input type="checkbox"/> 229 <input type="checkbox"/> 230 <input type="checkbox"/> 231 <input type="checkbox"/> 232 <input type="checkbox"/> 233 <input type="checkbox"/> 234 <input type="checkbox"/> 235 <input type="checkbox"/> 236 <input type="checkbox"/> 237 <input type="checkbox"/> 238 <input type="checkbox"/> 239 <input type="checkbox"/> 240 <input type="checkbox"/> 241 <input type="checkbox"/> 242 <input type="checkbox"/> 243 <input type="checkbox"/> 244 <input type="checkbox"/> 245 <input type="checkbox"/> 246 <input type="checkbox"/> 247 <input type="checkbox"/> 248 <input type="checkbox"/> 249 <input type="checkbox"/> 250 <input type="checkbox"/> 251 <input type="checkbox"/> 252 <input type="checkbox"/> 253 <input type="checkbox"/> 254 <input type="checkbox"/> 255 <input type="checkbox"/> 256 <input type="checkbox"/> 257 <input type="checkbox"/> 258 <input type="checkbox"/> 259 <input type="checkbox"/> 260 <input type="checkbox"/> 261 <input type="checkbox"/> 262 <input type="checkbox"/> 263 <input type="checkbox"/> 264 <input type="checkbox"/> 265 <input type="checkbox"/> 266 <input type="checkbox"/> 267 <input type="checkbox"/> 268 <input type="checkbox"/> 269 <input type="checkbox"/> 270 <input type="checkbox"/> 271 <input type="checkbox"/> 272 <input type="checkbox"/> 273 <input type="checkbox"/> 274 <input type="checkbox"/> 275 <input type="checkbox"/> 276 <input type="checkbox"/> 277 <input type="checkbox"/> 278 <input type="checkbox"/> 279 <input type="checkbox"/> 280 <input type="checkbox"/> 281 <input type="checkbox"/> 282 <input type="checkbox"/> 283 <input type="checkbox"/> 284 <input type="checkbox"/> 285 <input type="checkbox"/> 286 <input type="checkbox"/> 287 <input type="checkbox"/> 288 <input type="checkbox"/> 289 <input type="checkbox"/> 290 <input type="checkbox"/> 291 <input type="checkbox"/> 292 <input type="checkbox"/> 293 <input type="checkbox"/> 294 <input type="checkbox"/> 295 <input type="checkbox"/> 296 <input type="checkbox"/> 297 <input type="checkbox"/> 298 <input type="checkbox"/> 299 <input type="checkbox"/> 300 <input type="checkbox"/> 301 <input type="checkbox"/> 302 <input type="checkbox"/> 303 <input type="checkbox"/> 304 <input type="checkbox"/> 305 <input type="checkbox"/> 306 <input type="checkbox"/> 307 <input type="checkbox"/> 308 <input type="checkbox"/> 309 <input type="checkbox"/> 310 <input type="checkbox"/> 311 <input type="checkbox"/> 312 <input type="checkbox"/> 313 <input type="checkbox"/> 314 <input type="checkbox"/> 315 <input type="checkbox"/> 316 <input type="checkbox"/> 317 <input type="checkbox"/> 318 <input type="checkbox"/> 319 <input type="checkbox"/> 320 <input type="checkbox"/> 321 <input type="checkbox"/> 322 <input type="checkbox"/> 323 <input type="checkbox"/> 324 <input type="checkbox"/> 325 <input type="checkbox"/> 326 <input type="checkbox"/> 327 <input type="checkbox"/> 328 <input type="checkbox"/> 329 <input type="checkbox"/> 330 <input type="checkbox"/> 331 <input type="checkbox"/> 332 <input type="checkbox"/> 333 <input type="checkbox"/> 334 <input type="checkbox"/> 335 <input type="checkbox"/> 336 <input type="checkbox"/> 337 <input type="checkbox"/> 338 <input type="checkbox"/> 339 <input type="checkbox"/> 340 <input type="checkbox"/> 341 <input type="checkbox"/> 342 <input type="checkbox"/> 343 <input type="checkbox"/> 344 <input type="checkbox"/> 345 <input type="checkbox"/> 346 <input type="checkbox"/> 347 <input type="checkbox"/> 348 <input type="checkbox"/> 349 <input type="checkbox"/> 350 <input type="checkbox"/> 351 <input type="checkbox"/> 352 <input type="checkbox"/> 353 <input type="checkbox"/> 354 <input type="checkbox"/> 355 <input type="checkbox"/> 356 <input type="checkbox"/> 357 <input type="checkbox"/> 358 <input type="checkbox"/> 359 <input type="checkbox"/> 360 <input type="checkbox"/> 361 <input type="checkbox"/> 362 <input type="checkbox"/> 363 <input type="checkbox"/> 364 <input type="checkbox"/> 365 <input type="checkbox"/> 366 <input type="checkbox"/> 367 <input type="checkbox"/> 368 <input type="checkbox"/> 369 <input type="checkbox"/> 370 <input type="checkbox"/> 371 <input type="checkbox"/> 372 <input type="checkbox"/> 373 <input type="checkbox"/> 374 <input type="checkbox"/> 375 <input type="checkbox"/> 376 <input type="checkbox"/> 377 <input type="checkbox"/> 378 <input type="checkbox"/> 379 <input type="checkbox"/> 380 <input type="checkbox"/> 381 <input type="checkbox"/> 382 <input type="checkbox"/> 383 <input type="checkbox"/> 384 <input type="checkbox"/> 385 <input type="checkbox"/> 386 <input type="checkbox"/> 387 <input type="checkbox"/> 388 <input type="checkbox"/> 389 <input type="checkbox"/> 390 <input type="checkbox"/> 391 <input type="checkbox"/> 392 <input type="checkbox"/> 393 <input type="checkbox"/> 394 <input type="checkbox"/> 395 <input type="checkbox"/> 396 <input type="checkbox"/> 397 <input type="checkbox"/> 398 <input type="checkbox"/> 399 <input type="checkbox"/> 400 <input type="checkbox"/> 401 <input type="checkbox"/> 402 <input type="checkbox"/> 403 <input type="checkbox"/> 404 <input type="checkbox"/> 405 <input type="checkbox"/> 406 <input type="checkbox"/> 407 <input type="checkbox"/> 408 <input type="checkbox"/> 409 <input type="checkbox"/> 410 <input type="checkbox"/> 411 <input type="checkbox"/> 412 <input type="checkbox"/> 413 <input type="checkbox"/> 414 <input type="checkbox"/> 415 <input type="checkbox"/> 416 <input type="checkbox"/> 417 <input type="checkbox"/> 418 <input type="checkbox"/> 419 <input type="checkbox"/> 420 <input type="checkbox"/> 421 <input type="checkbox"/> 422 <input type="checkbox"/> 423 <input type="checkbox"/> 424 <input type="checkbox"/> 425 <input type="checkbox"/> 426 <input type="checkbox"/> 427 <input type="checkbox"/> 428 <input type="checkbox"/> 429 <input type="checkbox"/> 430 <input type="checkbox"/> 431 <input type="checkbox"/> 432 <input type="checkbox"/> 433 <input type="checkbox"/> 434 <input type="checkbox"/> 435 <input type="checkbox"/> 436 <input type="checkbox"/> 437 <input type="checkbox"/> 438 <input type="checkbox"/> 439 <input type="checkbox"/> 440 <input type="checkbox"/> 441 <input type="checkbox"/> 442 <input type="checkbox"/> 443 <input type="checkbox"/> 444 <input type="checkbox"/> 445 <input type="checkbox"/> 446 <input type="checkbox"/> 447 <input type="checkbox"/> 448 <input type="checkbox"/> 449 <input type="checkbox"/> 450 <input type="checkbox"/> 451 <input type="checkbox"/> 452 <input type="checkbox"/> 453 <input type="checkbox"/> 454 <input type="checkbox"/> 455 <input type="checkbox"/> 456 <input type="checkbox"/> 457 <input type="checkbox"/> 458 <input type="checkbox"/> 459 <input type="checkbox"/> 460 <input type="checkbox"/> 461 <input type="checkbox"/> 462 <input type="checkbox"/> 463 <input type="checkbox"/> 464 <input type="checkbox"/> 465 <input type="checkbox"/> 466 <input type="checkbox"/> 467 <input type="checkbox"/> 468 <input type="checkbox"/> 469 <input type="checkbox"/> 470 <input type="checkbox"/> 471 <input type="checkbox"/> 472 <input type="checkbox"/> 473 <input type="checkbox"/> 474 <input type="checkbox"/> 475 <input type="checkbox"/> 476 <input type="checkbox"/> 477 <input type="checkbox"/> 478 <input type="checkbox"/> 479 <input type="checkbox"/> 480 <input type="checkbox"/> 481 <input type="checkbox"/> 482 <input type="checkbox"/> 483 <input type="checkbox"/> 484 <input type="checkbox"/> 485 <input type="checkbox"/> 486 <input type="checkbox"/> 487 <input type="checkbox"/> 488 <input type="checkbox"/> 489 <input type="checkbox"/> 490 <input type="checkbox"/> 491 <input type="checkbox"/> 492 <input type="checkbox"/> 493 <input type="checkbox"/> 494 <input type="checkbox"/> 495 <input type="checkbox"/> 496 <input type="checkbox"/> 497 <input type="checkbox"/> 498 <input type="checkbox"/> 499 <input type="checkbox"/> 500 <input type="checkbox"/> 501 <input type="checkbox"/> 502 <input type="checkbox"/> 503 <input type="checkbox"/> 504 <input type="checkbox"/> 505 <input type="checkbox"/> 506 <input type="checkbox"/> 507 <input type="checkbox"/> 508 <input type="checkbox"/> 509 <input type="checkbox"/> 510 <input type="checkbox"/> 511 <input type="checkbox"/> 512 <input type="checkbox"/> 513 <input type="checkbox"/> 514 <input type="checkbox"/> 515 <input type="checkbox"/> 516 <input type="checkbox"/> 517 <input type="checkbox"/> 518 <input type="checkbox"/> 519 <input type="checkbox"/> 520 <input type="checkbox"/> 521 <input type="checkbox"/> 522 <input type="checkbox"/> 523 <input type="checkbox"/> 524 <input type="checkbox"/> 525 <input type="checkbox"/> 526 <input type="checkbox"/> 527 <input type="checkbox"/> 528 <input type="checkbox"/> 529 <input type="checkbox"/> 530 <input type="checkbox"/> 531 <input type="checkbox"/> 532 <input type="checkbox"/> 533 <input type="checkbox"/> 534 <input type="checkbox"/> 535 <input type="checkbox"/> 536 <input type="checkbox"/> 537 <input type="checkbox"/> 538 <input type="checkbox"/> 539 <input type="checkbox"/> 540 <input type="checkbox"/> 541 <input type="checkbox"/> 542 <input type="checkbox"/> 543 <input type="checkbox"/> 544 <input type="checkbox"/> 545 <input type="checkbox"/> 546 <input type="checkbox"/> 547 <input type="checkbox"/> 548 <input type="checkbox"/> 549 <input type="checkbox"/> 550 <input type="checkbox"/> 551 <input type="checkbox"/> 552 <input type="checkbox"/> 553 <input type="checkbox"/> 554 <input type="checkbox"/> 555 <input type="checkbox"/> 556 <input type="checkbox"/> 557 <input type="checkbox"/> 558 <input type="checkbox"/> 559 <input type="checkbox"/> 560 <input type="checkbox"/> 561 <input type="checkbox"/> 562 <input type="checkbox"/> 563 <input type="checkbox"/> 564 <input type="checkbox"/> 565 <input type="checkbox"/> 566 <input type="checkbox"/> 567 <input type="checkbox"/> 568 <input type="checkbox"/> 569 <input type="checkbox"/> 570 <input type="checkbox"/> 571 <input type="checkbox"/> 572 <input type="checkbox"/> 573 <input type="checkbox"/> 574 <input type="checkbox"/> 575 <input type="checkbox"/> 576 <input type="checkbox"/> 577 <input type="checkbox"/> 578 <input type="checkbox"/> 579 <input type="checkbox"/> 580 <input type="checkbox"/> 581 <input type="checkbox"/> 582 <input type="checkbox"/> 583 <input type="checkbox"/> 584 <input type="checkbox"/> 585 <input type="checkbox"/> 586 <input type="checkbox"/> 587 <input type="checkbox"/> 588 <input type="checkbox"/> 589 <input type="checkbox"/> 590 <input type="checkbox"/> 591 <input type="checkbox"/> 592 <input type="checkbox"/> 593 <input type="checkbox"/> 594 <input type="checkbox"/> 595 <input type="checkbox"/> 596 <input type="checkbox"/> 597 <input type="checkbox"/> 598 <input type="checkbox"/> 599 <input type="checkbox"/> 600 <input type="checkbox"/> 601 <input type="checkbox"/> 602 <input type="checkbox"/> 603 <input type="checkbox"/> 604 <input type="checkbox"/> 605 <input type="checkbox"/> 606 <input type="checkbox"/> 607 <input type="checkbox"/> 608 <input type="checkbox"/> 609 <input type="checkbox"/> 610 <input type="checkbox"/> 611 <input type="checkbox"/> 612 <input type="checkbox"/> 613 <input type="checkbox"/> 614 <input type="checkbox"/> 615 <input type="checkbox"/> 616 <input type="checkbox"/> 617 <input type="checkbox"/> 618 <input type="checkbox"/> 619 <input type="checkbox"/> 620 <input type="checkbox"/> 621 <input type="checkbox"/> 622 <input type="checkbox"/> 623 <input type="checkbox"/> 624 <input type="checkbox"/> 625 <input type="checkbox"/> 626 <input type="checkbox"/> 627 <input type="checkbox"/> 628 <input type="checkbox"/> 629 <input type="checkbox"/> 630 <input type="checkbox"/> 631 <input type="checkbox"/> 632 <input type="checkbox"/> 633 <input type="checkbox"/> 634 <input type="checkbox"/> 635 <input type="checkbox"/> 636 <input type="checkbox"/> 637 <input type="checkbox"/> 638 <input type="checkbox"/> 639 <input type="checkbox"/> 640 <input type="checkbox"/> 641 <input type="checkbox"/> 642 <input type="checkbox"/> 643 <input type="checkbox"/> 644 <input type="checkbox"/> 645 <input type="checkbox"/> 646 <input type="checkbox"/> 647 <input type="checkbox"/> 648 <input type="checkbox"/> 649 <input type="checkbox"/> 650 <input type="checkbox"/> 651 <input type="checkbox"/> 652 <input type="checkbox"/> 653 <input type="checkbox"/> 654 <input type="checkbox"/> 655 <input type="checkbox"/> 656 <input type="checkbox"/> 657 <input type="checkbox"/> 658 <input type="checkbox"/> 659 <input type="checkbox"/> 660 <input type="checkbox"/> 661 <input type="checkbox"/> 662 <input type="checkbox"/> 663 <input type="checkbox"/> 664 <input type="checkbox"/> 665 <input type="checkbox"/> 666 <input type="checkbox"/> 667 <input type="checkbox"/> 668 <input type="checkbox"/> 669 <input type="checkbox"/> 670 <input type="checkbox"/> 671 <input type="checkbox"/> 672 <input type="checkbox"/> 673 <input type="checkbox"/> 674 <input type="checkbox"/> 675 <input type="checkbox"/> 676 <input type="checkbox"/> 677 <input type="checkbox"/> 678 <input type="checkbox"/> 679 <input type="checkbox"/> 680 <input type="checkbox"/> 681 <input type="checkbox"/> 682 <input type="checkbox"/> 683 <input type="checkbox"/> 684 <input type="checkbox"/> 685 <input type="checkbox"/> 686 <input type="checkbox"/> 687 <input type="checkbox"/> 688 <input type="checkbox"/> 689 <input type="checkbox"/> 690 <input type="checkbox"/> 691 <input type="checkbox"/> 692 <input type="checkbox"/> 693 <input type="checkbox"/> 694 <input type="checkbox"/> 695 <input type="checkbox"/> 696 <input type="checkbox"/> 697 <input type="checkbox"/> 698 <input type="checkbox"/> 699 <input type="checkbox"/> 700 <input type="checkbox"/> 701 <input type="checkbox"/> 702 <input type="checkbox"/> 703 <input type="checkbox"/> 704 <input type="checkbox"/> 705 <input type="checkbox"/> 706 <input type="checkbox"/> 707 <input type="checkbox"/> 708 <input type="checkbox"/> 709 <input type="checkbox"/> 710 <input type="checkbox"/> 711 <input type="checkbox"/> 712 <input type="checkbox"/> 713 <input type="checkbox"/> 714 <input type="checkbox"/> 715 <input type="checkbox"/> 716 <input type="checkbox"/> 717 <input type="checkbox"/> 718 <input type="checkbox"/> 719 <input type="checkbox"/> 720 <input type="checkbox"/> 721 <input type="checkbox"/> 722 <input type="checkbox"/> 723 <input type="checkbox"/> 724 <input type="checkbox"/> 725 <input type="checkbox"/> 726 <input type="checkbox"/> 727 <input type="checkbox"/> 728 <input type="checkbox"/> 729 <input type="checkbox"/> 730 <input type="checkbox"/> 731 <input type="checkbox"/> 732 <input type="checkbox"/> 733 <input type="checkbox"/> 734 <input type="checkbox"/> 735 <input type="checkbox"/> 736 <input type="checkbox"/> 737 <input type="checkbox"/> 738 <input type="checkbox"/> 739 <input type="checkbox"/> 740 <input type="checkbox"/> 741 <input type="checkbox"/> 742 <input type="checkbox"/> 743 <input type="checkbox"/> 744 <input type="checkbox"/> 745 <input type="checkbox"/> 746 <input type="checkbox"/> 747 <input type="checkbox"/> 748 <input type="checkbox"/> 749 <input type="checkbox"/> 750 <input type="checkbox"/> 751 <input type="checkbox"/> 752 <input type="checkbox"/> 753 <input type="checkbox"/> 754 <input type="checkbox"/> 755 <input type="checkbox"/> 756 <input type="checkbox"/> 757 <input type="checkbox"/> 758 <input type="checkbox"/> 759 <input type="checkbox"/> 760 <input type="checkbox"/> 761 <input type="checkbox"/> 762 <input type="checkbox"/> 763 <input type="checkbox"/> 764 <input type="checkbox"/> 765 <input type="checkbox"/> 766 <input type="checkbox"/> 767 <input type="checkbox"/> 768 <input type="checkbox"/> 769 <input type="checkbox"/> 770 <input type="checkbox"/> 771 <input type="checkbox"/> 772 <input type="checkbox"/> 773 <input type="checkbox"/> 774 <input type="checkbox"/> 775 <input type="checkbox"/> 776 <input type="checkbox"/> 777 <input type="checkbox"/> 778 <input type="checkbox"/> 779 <input type="checkbox"/> 780 <input type="checkbox"/> 781 <input type="checkbox"/> 782 <input type="checkbox"/> 783 <input type="checkbox"/> 784 <input type="checkbox"/> 785 <input type="checkbox"/> 786 <input type="checkbox"/> 787 <input type="checkbox"/> 788 <input type="checkbox"/> 789 <input type="checkbox"/> 790 <input type="checkbox"/> 791 <input type="checkbox"/> 792 <input type="checkbox"/> 793 <input type="checkbox"/> 794 <input type="checkbox"/> 795 <input type="checkbox"/> 796 <input type="checkbox"/> 797 <input type="checkbox"/> 798 <input type="checkbox"/> 799 <input type="checkbox"/> 800 <input type="checkbox"/> 801 <input type="checkbox"/> 802 <input type="checkbox"/> 803 <input type="checkbox"/> 804 <input type="checkbox"/> 805 <input type="checkbox"/> 806 <input type="checkbox"/> 807 <input type="checkbox"/> 808 <input type="checkbox"/> 809 <input type="checkbox"/> 810 <input type="checkbox"/> 811 <input type="checkbox"/> 812 <input type="checkbox"/> 813 <input type="checkbox"/> 814 <input type="checkbox"/> 815 <input type="checkbox"/> 816 <input type="checkbox"/> 817 <input type="checkbox"/> 818 <input type="checkbox"/> 819 <input type="checkbox"/> 820 <input type="checkbox"/> 821 <input type="checkbox"/> 822 <input type="checkbox"/> 823 <input type="checkbox"/> 824 <input type="checkbox"/> 825 <input type="checkbox"/> 826 <input type="checkbox"/> 827 <input type="checkbox"/> 828 <input type="checkbox"/> 829 <input type="checkbox"/> 830 <input type="checkbox"/> 831 <input type="checkbox"/> 832 <input type="checkbox"/> 833 <input type="checkbox"/> 834 <input type="checkbox"/> 835 <input type="checkbox"/> 836 <input type="checkbox"/> 837 <input type="checkbox"/> 838 <input type="checkbox"/> 839 <input type="checkbox"/> 840 <input type="checkbox"/> 841 <input type="checkbox"/> 842 <input type="checkbox"/> 843 <input type="checkbox"/> 844 <input type="checkbox"/> 845 <input type="checkbox"/> 846 <input type="checkbox"/> 847 <input type="checkbox"/> 848 <input type="checkbox"/> 849 <input type="checkbox"/> 850 <input type="checkbox"/> 851 <input type="checkbox"/> 852 <input type="checkbox"/> 853 <input type="checkbox"/> 854 <input type="checkbox"/> 855 <input type="checkbox"/> 856 <input type="checkbox"/> 857 <input type="checkbox"/> 858 <input type="checkbox"/> 859 <input type="checkbox"/> 860 <input type="checkbox"/> 861 <input type="checkbox"/> 862 <input type="checkbox"/> 863 <input type="checkbox"/> 864 <input type="checkbox"/> 865 <input type="checkbox"/> 866 <input type="checkbox"/> 867 <input type="checkbox"/> 868 <input type="checkbox"/> 869 <input type="checkbox"/> 870 <input type="checkbox"/> 871 <input type="checkbox"/> 872 <input type="checkbox"/> 873 <input type="checkbox"/> 874 <input type="checkbox"/> 875 <input type="checkbox"/> 876 <input type="checkbox"/> 877 <input type="checkbox"/> 878 <input type="checkbox"/> 879 <input type="checkbox"/> 880 <input type="checkbox"/> 881 <input type="checkbox"/> 882 <input type="checkbox"/> 883 <input type="checkbox"/> 884 <input type="checkbox"/> 885 <input type="checkbox"/> 886 <input type="checkbox"/> 887 <input type="checkbox"/> 888 <input type="checkbox"/> 889 <input type="checkbox"/> 890 <input type="checkbox"/> 891 <input type="checkbox"/> 892 <input type="checkbox"/> 893 <input type="checkbox"/> 894 <input type="checkbox"/> 895 <input type="checkbox"/> 896 <input type="checkbox"/> 897 <input type="checkbox"/> 898 <input type="checkbox"/> 899 <input type="checkbox"/> 900 <input type="checkbox"/> 901 <input type="checkbox"/> 902 <input type="checkbox"/> 903 <input type="checkbox"/> 904 <input type="checkbox"/> 905 <input type="checkbox"/> 906 <input type="checkbox"/> 907 <input type="checkbox"/> 908 <input type="checkbox"/> 909 <input type="checkbox"/> 910 <input type="checkbox"/> 911 <input type="checkbox"/> 912 <input type="checkbox"/> 913 <input type="checkbox"/> 914 <input type="checkbox"/> 915 <input type="checkbox"/> 916 <input type="checkbox"/> 917 <input type="checkbox"/> 918 <input type="checkbox"/> 919 <input type="checkbox"/> 920 <input type="checkbox"/> 921 <input type="checkbox"/> 922 <input type="checkbox"/> 923 <input type="checkbox"/> 924 <input type="checkbox"/> 925 <input type="checkbox"/> 926 <input type="checkbox"/> 927 <input type="checkbox"/> 928 <input type="checkbox"/> 929 <input type="checkbox"/> 930 <input type="checkbox"/> 931 <input type="checkbox"/> 932 <input type="checkbox"/> 933 <input type="checkbox"/> 934 <input type="checkbox"/> 935 <input type="checkbox"/> 936 <input type="checkbox"/> 937 <input type="checkbox"/> 938 <input type="checkbox"/> 939 <input type="checkbox"/> 940 <input type="checkbox"/> 941 <input type="checkbox"/> 942 <input type="checkbox"/> 943 <input type="checkbox"/> 944 <input type="checkbox"/> 945 <input type="checkbox"/> 946 <input type="checkbox"/> 947 <input type="checkbox"/> 948 <input type="checkbox"/> 949 <input type="checkbox"/> 950 <input type="checkbox"/> 951 <input type="checkbox"/> 952 <input type="checkbox"/> 953 <input type="checkbox"/> 954 <input type="checkbox"/> 955 <input type="checkbox"/> 956 <input type="checkbox"/> 957 <input type="checkbox"/> 958 <input type="checkbox"/> 959 <input type="checkbox"/> 960 <input type="checkbox"/> 961 <input type="checkbox"/> 962 <input type="checkbox"/> 963 <input type="checkbox"/> 964 <input type="checkbox"/> 965 <input type="checkbox"/> 966 <input type="checkbox"/> 967 <input type="checkbox"/> 968 <input type="checkbox"/> 969 <input type="checkbox"/> 970 <input type="checkbox"/> 971 <input type="checkbox"/> 972 <input type="checkbox"/> 973 <input type="checkbox"/> 974 <input type="checkbox"/> 975 <input type="checkbox"/> 976 <input type="checkbox"/> 977 <input type="checkbox"/> 978 <input type="checkbox"/> 979 <input type="checkbox"/> 980 <input type="checkbox"/> 981 <input type="checkbox"/> 982 <input type="checkbox"/> 983 <input type="checkbox"/> 984 <input type="checkbox"/> 985 <input type="checkbox"/> 986 <input type="checkbox"/> 987 <input type="checkbox"/> 988 <input type="checkbox"/> 989 <input type="checkbox"/> 990 <input type="checkbox"/> 991 <input type="checkbox"/> 992 <input type="checkbox"/> 993 <input type="checkbox"/> 994 <input type="checkbox"/> 995 <input type="checkbox"/> 996 <input type="checkbox"/> 997 <input type="checkbox"/> 998 <input type="checkbox"/> 999 <input type="checkbox"/> 1000 <input type="checkbox"/> 1001 <input type="checkbox"/> 1002 <input type="checkbox"/> 1003 <input type="checkbox"/> 1004 <input type="checkbox"/> 1005 <input type="checkbox"/> 1006 <input type="checkbox"/> 1007 <input type="checkbox"/> 1008 <input type="checkbox"/> 1009 <input type="checkbox"/> 1010 <input type="checkbox"/> 1011 <input type="checkbox"/> 1012 <input type="checkbox"/> 1013 <input type="checkbox"/> 1014 <input type="checkbox"/> 1015 <input type="checkbox"/> 1016 <input type="checkbox"/> 1017 <input type="checkbox"/> 1018 <input type="checkbox"/> 1019 <input type="checkbox"/> 1020 <input type="checkbox"/> 1021 <input type="checkbox"/> 1022 <input type="checkbox"/> 1023 <input type="checkbox"/> 1024 <input type="checkbox"/> 1025 <input type="checkbox"/> 1026 <input type="checkbox"/> 1027 <input type="checkbox"/> 1028 <input type="checkbox"/> 1029 <input type="checkbox"/> 1030 <input type="checkbox"/> 1031 <input type="checkbox"/> 1032 <input type="checkbox"/> 1033 <input type="checkbox"/> 1034 <input type="checkbox"/> 1035 <input type="checkbox"/> 1036 <input type="checkbox"/> 1037 <input type="checkbox"/> 1038 <input type="checkbox"/> 1039 <input type="checkbox"/> 1040 <input type="checkbox"/> 1041 <input type="checkbox"/> 1042 <input type="checkbox"/> 1043 <input type="checkbox"/> 1044 <input type="checkbox"/> 1045 <input type="checkbox"/> 1046 <input type="checkbox"/> 1047 <input type="checkbox"/> 1048 <input type="checkbox"/> 1049 <input type="checkbox"/> 1050 <input type="checkbox"/> 1051 <input type="checkbox"/> 1052 <input type="checkbox"/> 1053 <input type="checkbox"/> 1054 <input type="checkbox"/> 1055 <input type="checkbox"/> 1056 <input type="checkbox"/> 1057 <input type="checkbox"/> 1058 <input type="checkbox"/> 1059 <input type="checkbox"/> 1060 <input type="checkbox"/> 1061 <input type="checkbox"/> 1062 <input type="checkbox"/> 1063 <input type="checkbox"/> 1064 <input type="checkbox"/> 1065 <input type="checkbox"/> 1066 <input type="checkbox"/> 1067 <input type="checkbox"/> 1068 <input type="checkbox"/> 1069 <input type="checkbox"/> 1070 <input type="checkbox"/> 1071 <input type="checkbox"/> 1072 <input type="checkbox"/> 1073 <input type="checkbox"/> 1074 <input type="checkbox"/> 1075 <input type="checkbox"/> 1076 <input type="checkbox"/> 1077 <input type="checkbox"/> 1078 <input type="checkbox"/> 1079 <input type="checkbox"/> 1080 <input type="checkbox"/> 1081 <input type="checkbox"/> 1082 <input type="checkbox"/> 1083 <input type="checkbox"/> 1084 <input type="checkbox"/> 1085 <input type="checkbox"/> 1086 <input type="checkbox"/> 1087 <input type="checkbox"/> 1088 <input type="checkbox"/> 1089 <input type="checkbox"/> 1090 <input type="checkbox"/> 1091 <input type="checkbox"/> 1092 <input type="checkbox"/> 1093 <input type="checkbox"/> 1094 <input type="checkbox"/> 1095 <input type="checkbox"/> 1096 <input type="checkbox"/> 1097 <input type="checkbox"/> 1098 <input type="checkbox"/> 1099 <input type="checkbox"/> 1100 <input type="checkbox"/> 1101 <input type="checkbox"/> 1102 <input type="checkbox"/> 1103 <input type="checkbox"/> 1104 <input type="checkbox"/> 1105 <input type="checkbox"/> 1106 <input type="checkbox"/> 1107 <input type="checkbox"/> 1108 <input type="checkbox"/> 1109 <input type="checkbox"/> 1110 <input type="checkbox"/> 1111 <input type="checkbox"/> 1112 <input type="checkbox"/> 1113 <input type="checkbox"/> 1114 <input type="checkbox"/> 1115 <input type="checkbox"/> 1116 <input type="checkbox"/> 1117 <input type="checkbox"/> 1118 <input type="checkbox"/> 1119 <input type="checkbox"/> 1120 <input type="checkbox"/> 1121 <input type="checkbox"/> 1122 <input type="checkbox"/> 1123 <input type="checkbox"/> 1124 <input type="checkbox"/> 1125 <input type="checkbox"/> 1126 <input type="checkbox"/> 1127 <input type="checkbox"/> 1128 <input type="checkbox"/> 1129 <input type="checkbox"/> 1130 <input type="checkbox"/> 1131 <input type="checkbox"/> 1132 <input type="checkbox"/> 1133 <input type="checkbox"/> 1134 <input type="checkbox"/> 1135 <input type="checkbox"/> 1136 <input type="checkbox"/> 1137 <input type="checkbox"/> 1138 <input type="checkbox"/> 1139 <input type="checkbox"/> 1140 <input type="checkbox"/> 1141 <input type="checkbox"/> 1142 <input type="checkbox"/> 1143 <input type="checkbox"/> 1144 <input type="checkbox"/> 1145 <input type="checkbox"/> 1146 <input type="checkbox"/> 1147 <input type="checkbox"/> 1148 <input type="checkbox"/> 1149 <input type="checkbox"/> 1150 <input type="checkbox"/> 1151 <input type="checkbox"/> 1152 <input type="checkbox"/> 1153 <input type="checkbox"/> 1154 <input type="checkbox"/> 1155 <input type="checkbox"/> 1156 <input type="checkbox"/> 1157 <input type="checkbox"/> 1158 <input type="checkbox"/> 1159 <input type="checkbox"/> 1160 <input type="checkbox"/> 1161 <input type="checkbox"/> 1162 <input type="checkbox"/> 1163 <input type="checkbox"/> 1164 <input type="checkbox"/> 1165 <input type="checkbox"/> 1166 <input type="checkbox"/> 1167 <input type="checkbox"/> 1168 <input type="checkbox"/> 1169 <input type="checkbox"/> 1170 <input type="checkbox"/> 1171 <input type="checkbox"/> 1172 <input type="checkbox"/> 1173 <input type="checkbox"/> 1174 <input type="checkbox"/> 1175 <input type="checkbox"/> 1176 <input type="checkbox"/> 1177 <input type="checkbox"/> 1178 <input type="checkbox"/> 1179 <input type="checkbox"/> 1180 <input type="checkbox"/> 1181 <input type="checkbox"/> 1182 <input type="checkbox"/> 1183 <input type="checkbox"/> 1184 <input type="checkbox"/> 1185 <input type="checkbox"/> 1186 <input type="checkbox"/> 1187 <input type="checkbox"/> 1188 <input type="checkbox"/> 1189 <input type="checkbox"/> 1190 <input type="checkbox"/> 1191 <input type="checkbox"/> 1192 <input type="checkbox"/> 1193 <input type="checkbox"/> 1194 <input type="checkbox"/> 1195 <input type="checkbox"/> 1196 <input type="checkbox"/> 1197 <input type="checkbox"/> 1198 <input type="checkbox"/> 1199 <input type="checkbox"/> 1200 <input type="checkbox"/> 1201 <input type="checkbox"/> 1202 <input type="checkbox"/> 1203 <input type="checkbox"/> 1204 <input type="checkbox"/> 1205 <input type="checkbox"/> 1206 <input type="checkbox"/> 1207 <input type="checkbox"/> 1208 <input type="checkbox"/> 1209 <input type="checkbox"/> 1210 <input type="checkbox"/> 1211 <input type="checkbox"/> 1212 <input type="checkbox"/> 1213 <input type="checkbox"/> 1214 <input type="checkbox"/> 1215 <input type="checkbox"/> 1216 <input type="checkbox"/> 1217 <input type="checkbox"/> 1218 <input type="checkbox"/> 1	

Beispiel (III)

- $0,075_D$ mit einfacher Genauigkeit

- $s = 0$

- $0,075_D$ als gebrochene Dualzahl ist $0,0001\ 0011\ 0011\ 0011\ldots_B$

$$\begin{aligned}
 0,075_D \rightarrow & \quad 0,075 \cdot 2 = 0,150 + 0 \\
 & \quad 0,150 \cdot 2 = 0,300 + 0 \\
 & \quad 0,300 \cdot 2 = 0,600 + 0 \\
 & \quad 0,600 \cdot 2 = 0,200 + 1 \\
 & \quad 0,200 \cdot 2 = 0,400 + 0 \\
 & \quad 0,400 \cdot 2 = 0,800 + 0 \\
 & \quad 0,800 \cdot 2 = 0,600 + 1 \\
 & \quad 0,600 \cdot 2 = 0,200 + 1
 \end{aligned}$$

MSB!

Beispiel (III)

- 0,075_D mit einfacher Genauigkeit

- s = 0
- 0,075_D als gebrochene Dualzahl ist 0,0001 0011 0011 0011 0011..._B
- Normalisiere: 0,00010011 = 1,0011 x 2⁻⁴
 - führende 1 ist implizit → Bruch = 0011....
- Transformierter Exponent E

$$E = e + \text{bias} = -4 + 127 = 123 = 0111\ 1011_B$$

1	8	23 Bit
0	0111 1011	0011 0011 0011 0011 0011 001

Value: Encoded as: Binary:	Sign	Exponent	Mantissa
	+1 0 <input type="checkbox"/>	2 ⁻⁴ 123 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	1.199999284744263 1677721 <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
	Decimal representation	0.074999955297	<input checked="" type="checkbox"/>
	Value actually stored in float:	0.07499995529651641845703125	<input checked="" type="checkbox"/>
	Error due to conversion:		<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
	Binary Representation	001111011001100110011001100110011001	<input type="checkbox"/>
	Hexadecimal Representation	0x3d999999	<input type="checkbox"/>

Sonderfälle (1)

- Neben **normalisierten Zahlen** sind außerhalb des Zahlenraums definiert:
 - \pm Null
 - \pm Unendlich: z. B. Division durch Null
 - \pm Unnormalisierte (*unnormalized*) Zahlen: winzige (*tiny*) Zahlen
 - Nichtzahlen (Not a Number, NaN): Ergebnis ungültiger Operation wie $0/0$

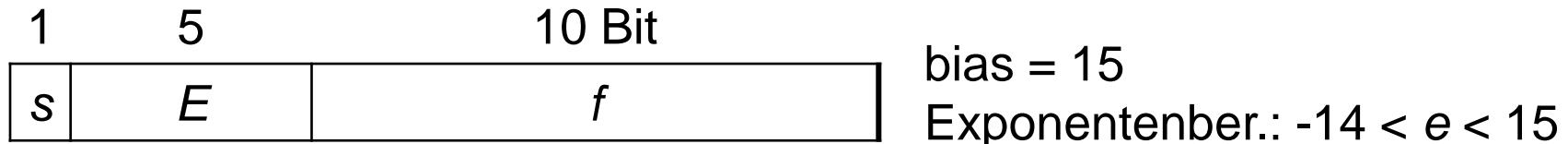
Sonderfälle (2)

- Codiert durch den größten und kleinsten Exponentwert E und f .
 - Normal.: $(-1)^s \times 1.f \times 2^{E-127/-1023}$ $1 \leq E \leq 254/2046$
 - Null: $(-1)^s \times 0$ $E = 0, f = 0$
 - Unendlich: $(-1)^s \times \infty$ $E = 255/2047, f = 0$
 - Unnorm.: $(-1)^s \times 0.f \times 2^{-126/-1022}$ $E = 0, f \neq 0$; interpretiert mit $E = 1$
 - Nichtzahl: NaN $E = 255/2047, f \neq 0$

Addition von Gleitkommazahlen

Addition von Gleitkommazahlen (1)

- Beispiel basiert auf 16-Bit Minifloat Format:



- $Z = X + Y$ mit
 - $X = 2,35_D = 10.0101\ 1001\ 1001\ 1001 \dots_B$
 - $Y = 10,17_D = 1010.0010\ 1011\ 1000\ 0101 \dots_B$

Addition von Gleitkommazahlen (2)

- 1. Schritt:

- Normalisieren und Anpassung an 16-Bit-Format:

- $X = 1.0010\ 1100\ 11 \cdot 2^1$

$$X = 2,35_D = \quad 10.0101\ 1001\ 1001_B$$

- $Y = 1.0100\ 0101\ 01 \cdot 2^3$

$$Y = 10,17_D = 1010.0010\ 1011\ 1000_B$$

→ Verlust von signifikanten Stellen!

- 2. Schritt:

- Vergleichen der beiden Exponenten e.

- Bei Ungleichheit kleineren Exponent an den größeren anpassen

- $X = 0.0100\ 1011\ 00\ 11 \cdot 2^3$

→ rot dargestellte Stellen gehen verloren

Addition von Gleitkommazahlen (3)

- **3. Schritt:**

- Addieren der Mantissen:

$$\begin{array}{r} 0.0100\ 1011\ 00 (X) \\ + 1.0100\ 0101\ 01 (Y) \\ \hline 1.1001\ 0000\ 01 (Z) \end{array}$$

- **Ergebnis**

- Muss ggf. noch normalisiert werden (hier nicht)
 - $Z = 1.1001\ 0000\ 01 \cdot 2^3 = 12,5078125$ (korrekt wäre: 12,52).

Pentium Bug

- Fehler im Divisionsalgorithmus für Gleitpunktzahlen
- Juli 1994: Intel entdeckt Fehler. Geschätzte Kosten zum Beheben: **einige 100K\$**
- Sept. 1994: Matheprof Thomas Nicely entdeckt Fehler. Erhält keine offizielle Stellungnahme Intel, veröffentlicht Entdeckung im Internet
- 7. Nov. 1994: EE Times bringt Geschichte auf Titelseite
- 22. Nov. 1994: Pressemitteilung Intel: Pentium könne Fehler an 9. Stelle verursachen, nur wenige Benutzer könnten betroffen sein
- 5. Dez. 1994: Intel behauptet, Fehler würde nur einmal in 27000 Jahren auftreten bei typischer Anwendung
- 21. Dez. 1994: Intel gibt zu: jeder Besitzer darf Pentium austauschen. Geschätzte Kosten: **500 M\$!**

$$4195835.0 / 3145727.0 = 1.333 \text{ } 820 \text{ } 449 \text{ } 136 \text{ } 241 \text{ } 002 \text{ (korrekter Wert)}$$

$$4195835.0 / 3145727.0 = 1.333 \text{ } 739 \text{ } 068 \text{ } 902 \text{ } 037 \text{ } 589 \text{ (fehlerhafter Pentium)}$$

Pentium Bug

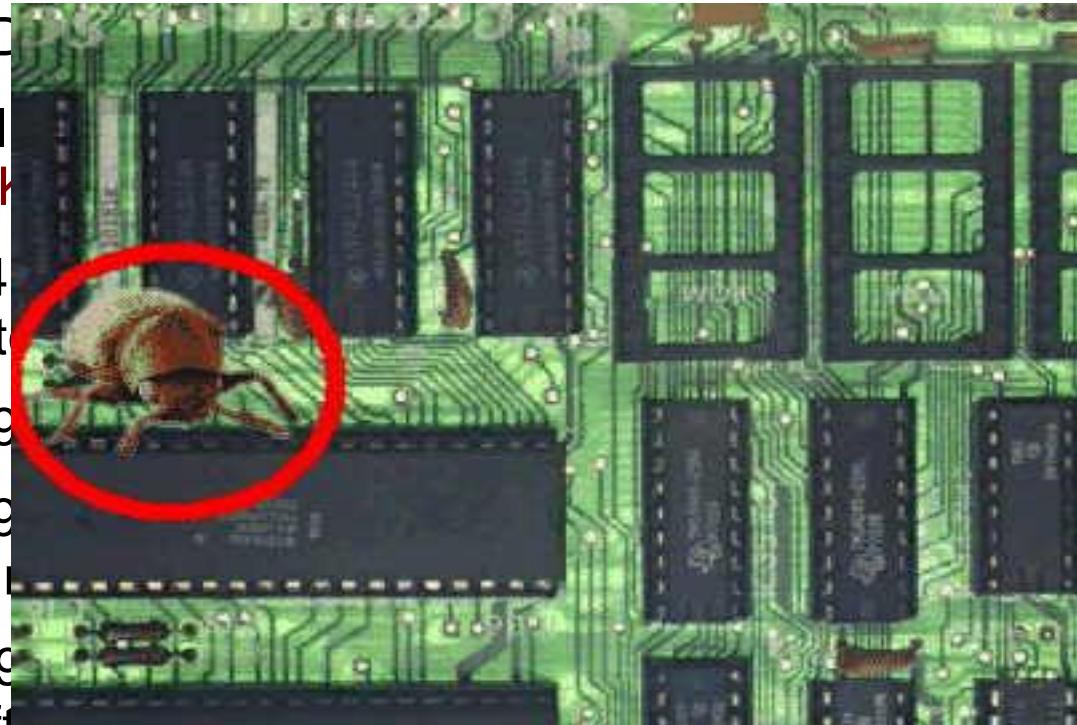
- Fehler im Decoder
- Juli 1994: Intel erkennt einen Fehler in einigen 100 Pentium Prozessoren
- Sept. 1994: Intel gibt eine offizielle Statement
- 7. Nov. 1994: Der Fehler wird als "bug" bezeichnet
- 22. Nov. 1994: Der Fehler wird auf einer Stelle verursacht, die nur bei einer speziellen Anwendung auftreten kann
- 5. Dez. 1994: Der Fehler kann nach 27 Jahren aufgetreten sein
- 21. Dez. 1994: Intel gibt zu: jeder Besitzer darf Pentium austauschen. Geschätzte Kosten: **500 M\$!**

Beheben:

Erhält keine
Berechtigung im Internet

Besitzer an 9.
Stelle verursachen sein

27000



$$4195835.0 / 3145727.0 = 1.333\ 820\ 449\ 136\ 241\ 002 \text{ (korrekter Wert)}$$

$$4195835.0 / 3145727.0 = 1.333\ 739\ 068\ 902\ 037\ 589 \text{ (fehlerhafter Pentium)}$$

Zusammenfassung (1)

- Computer benutzen Binärzahlen statt Dezimalzahlen
 - $b_{n-1}b_{n-2}\dots b_1b_0 = b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + b_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + b_1 \cdot 2^1 + b_0 \cdot 2^0$
- Binärzahlen können leicht in oktale und hexadezimale Zahlen konvertiert werden
- 2. Komplement wird benutzt um vorzeichenbehaftete Zahlen darzustellen
 - $b_{n-1}b_{n-2}\dots b_1b_0 = -b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + b_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + b_1 \cdot 2^1 + b_0 \cdot 2^0$
- Computer-Arithmetik ist beschränkt durch **limitierte Genauigkeit**.
 - *Overflow* (Überlauf)
 - *Underflow* (floating point)

Zusammenfassung (2)

- Bitmuster haben keine inhärente Bedeutung, es gibt jedoch Standards
 - 2-Komplement
 - IEEE 754 Floating Point
- Computer-Befehle bestimmen die “Bedeutung” der Bitmuster.
- Leistung und Genauigkeit sind wichtig. Daraus ergeben sich viele Hardwareanforderungen/Komplexitäten für reale Maschinen / CPUs
 - Z. B. Algorithmen und Implementierungen
- Was kommt als Nächstes?
 - Wir werden einen Prozessor implementieren.
 - Dazu brauchen wir Grundlagen **Digitaltechnik**.