15. Lineare Abbildungen

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

18.11.2025

Beispiele zu VL 14

Matrixabbildungen

Beobachtung: $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ beschreibt eine Abbildung:

$$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad f(x) = Ax$$

Eigenschaften: Seien $x, y \in \mathbb{K}^n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt:

(1)

(2)

Matrixmultiplikation $\widehat{=}$ Komposition:

Sei $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(x) = A \cdot x$ und $g : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^p$, $g(x) = B \cdot x$

15.1 Definition und erste Eigenschaften

Definition: Seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt linear, wenn für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

(1) $f(v + w) = f(v) + f(w)$,

(2) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

Die Menge aller linearen Abbildungen von V nach W wird mit $L(V, W)$ bezeichnet.

Bemerkung: Sei $f : V \to W$ linear. Dann gilt:

Beispiele:

Beispiele

Beispiele

Satz: Ist $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ linear, dann gibt es eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ mit $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$. Dabei enthält $A = [a_1, \dots, a_n]$ die Bilder der Vektoren:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

d.h. $a_1 = f(e_1), \dots, a_n = f(e_n)$.

Beweis:

Beispiele

Eigenschaften

Defintion: Seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Für $f, g \in L(V, W)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ definieren wir

$$f + g : V \to W, \quad v \mapsto (f+g)(v) := f(v) + g(v),$$
$$\lambda f : V \to W, \quad v \mapsto (\lambda f)(v) := \lambda f(v).$$

Satz: Seien V, W, X $\mathbb{K}$-Vektorräume.

(1) Ist $f : V \to W$ linear, so gilt $f(0) = 0$.

(2) Seien $f, g : V \to W$ linear und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann sind $f + g$ und λf linear.

(3) $L(V, W)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(4) Sind $f : V \to W$ und $g : W \to X$ linear, so ist auch die Komposition

$$g \circ f : V \to X \quad \text{linear.}$$

(5) Ist $f : V \to W$ linear und bijektiv, so ist auch die Umkehrabbildung

$$f^{-1} : W \to V \quad \text{linear.}$$

Rechenregeln für Lineare Abbildungen

Für lineare Abbildungen f, g, h und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt (falls die Verknüpfungen definiert sind)

(1) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$,

(2) $f \circ (g + h) = (f \circ g) + (f \circ h)$,

(3) $(f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$,

(4) $\alpha(f \circ g) = (\alpha f) \circ g = f \circ (\alpha g)$,

(5) $\mathrm{id} \circ f = f = f \circ \mathrm{id}$.

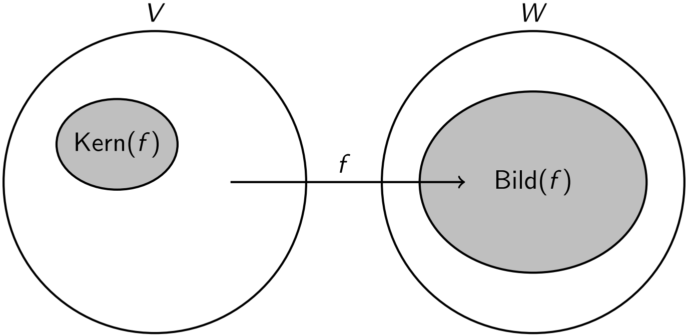
Definition: Sei $f : V \to W$ linear.

(1) Der Kern von f ist das Urbild von 0:

$$\mathrm{Kern}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\} = f^{-1}(\{0\}).$$

(2) Das Bild von f ist die Menge

$$\mathrm{Bild}(f) = f(V) = \{f(v) \mid v \in V\}.$$



$\mathrm{Kern}(f) \subseteq V$ $\mathrm{Bild}(f) \subseteq W$

Spezialfall:

Satz: Sei $f : V \to W$ linear.

(1) $\text{Kern}(f)$ ist ein Teilraum von V.

(2) $\text{Bild}(f)$ ist ein Teilraum von W.

Beispiele:

Beispiele

Basis des Kerns einer Matrix

Spezialfall: $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $f(x) = Ax$.

Erinnerung: $\mathrm{Kern}(A) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\} = \mathbb{L}(A, 0)$

Bemerkung: $\dim(\mathrm{Kern}(A)) = n - \mathrm{Rang}(A)$

Basis des Bildes

Bemerkung: Sei $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ mit $A = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix}$. Für $x \in \mathbb{K}^n$ ist

$$Ax = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j,$$

also die Linearkombination der Spalten von A mit den Koeffizienten $x_1, \ldots, x_n$. Daher ist

$$\mathrm{Bild}(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{K}^n\} = \mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_n\}.$$

Berechnung des Bildes von A:

(1) Bringe A in Zeilenstufenform.

(2) Spaltenvektoren von A, die zu Pivotelementen in ZSF von A gehören, bilden Basis des Bildes.

Bemerkung: $\dim(\mathrm{Bild}(A)) = \mathrm{Rang}(A)$

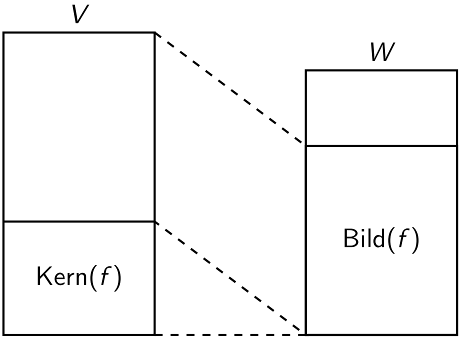
Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Satz: Für $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ erhalten wir

$$\dim(\mathrm{Kern}(A)) + \dim(\mathrm{Bild}(A)) = n - \mathrm{Rang}(A) + \mathrm{Rang}(A) = n = \dim(\mathbb{K}^n).$$

Satz: Sei $f : V \to W$ linear und V endlichdimensional. Dann gilt

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)).$$



Folgerungen aus der Dimensionsformel

Satz: Sei $f : V \to W$ linear. Dann gilt:

(1) f ist injektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Kern}(f) = \{0\} \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Kern}(f)) = 0$.

(2) f ist surjektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Bild}(f) = W \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Bild}(f)) = \dim(W)$.

Dabei gilt die letzte Äquivalenz nur falls $\dim(W) < \infty$.

(3) Wenn $\dim(V) = \dim(W) < \infty$, so gilt:

f ist bijektiv $\Leftrightarrow$ f ist injektiv $\Leftrightarrow$ f ist surjektiv.