

Technische Universität Berlin

# **Ana1LinA – Hausaufgabe 03**

**Felix 09**

Autoren: Fabian Aps:525528, Joris Victor  
Vorderwülbecke:0528715, Emil Arthur Joseph  
Hartmann:052542, Friedrich Ludwig Finck:0526329

6. November 2025

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Aufgaben</b>	<b>1</b>
<b>2 Aufgabe a)</b>	<b>2</b>
2.1 Lösung . . . . .	2
<b>3 Aufgabe b)</b>	<b>3</b>
3.1 Beweis . . . . .	3
<b>4 Aufgabe c)</b>	<b>5</b>
4.1 Berechnung . . . . .	5

# Kapitel 1

## Aufgaben

Die gegebene Funktion lautet:

$$f(x) = e^{\cos(\ln(x))} + \sin^2(\ln(x))$$

a) Für welche  $x \in \mathbb{R}$  ist die Funktion definiert?

b) Zeigen Sie, dass  $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$  für alle  $x > 0$  gilt.

*Hinweis: Nutzen Sie die Rechenregeln der elementaren Funktionen.*

c) Berechnen Sie  $f\left(e^{\frac{3}{2}\pi}\right)$ .

Geben Sie diese Hausaufgabe bitte in schriftlicher Form in der entsprechenden Dateiablage auf ISIS ab.

Gegeben sei die Funktion  $f(x) = e^{\cos(\ln(x))} + \sin^2(\ln(x))$ .

a) Für welche  $x \in \mathbb{R}$  ist die Funktion definiert?

b) Zeigen Sie, dass  $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$  für alle  $x > 0$  gilt. Hinweis: Nutzen Sie die Rechenregeln der elementaren Funktionen.

c) Berechnen Sie  $f\left(e^{\frac{3}{2}\pi}\right)$ .

# Kapitel 2

## Aufgabe a)

**Funktion:**  $f(x) = e^{\cos(\ln(x))} + \sin^2(\ln(x))$

**Aufgabe:** Für welche  $x \in \mathbb{R}$  ist die Funktion definiert?

### 2.1 Lösung

Die Funktion  $f(x)$  ist definiert, solange alle ihre Teilfunktionen definiert sind. Die innerste Funktion ist der **natürliche Logarithmus**  $\ln(x)$ .

- Der Logarithmus  $\ln(x)$  ist nur für Argumente  $x > 0$  definiert.
- Die Funktionen  $\cos(z)$ ,  $\sin^2(z)$  und  $e^z$  sind für alle reellen Zahlen  $z$  definiert.

Daher muss nur die Bedingung für  $\ln(x)$  erfüllt sein.

**Definitionsbereich:**

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = (0, \infty)$$

# Kapitel 3

## Aufgabe b)

**Funktion:**  $f(x) = e^{\cos(\ln(x))} + \sin^2(\ln(x))$

**Aufgabe:** Zeigen Sie, dass  $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$  für alle  $x > 0$  gilt.

### 3.1 Beweis

Wir beginnen mit der linken Seite der Gleichung,  $f\left(\frac{1}{x}\right)$ , und setzen den Term in die Funktionsgleichung ein:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = e^{\cos(\ln(\frac{1}{x}))} + \sin^2\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Nun wenden wir die Rechenregel für den Logarithmus an:  
 $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$  (gültig für  $x > 0$ ).

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = e^{\cos(-\ln(x))} + \sin^2(-\ln(x))$$

Anschließend nutzen wir die Symmetrieeigenschaften der trigonometrischen Funktionen:

- $\cos(-z) = \cos(z)$  (Kosinus ist eine gerade Funktion).
- $\sin(-z) = -\sin(z)$  (Sinus ist eine ungerade Funktion).

Wir setzen  $z = \ln(x)$ :

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = e^{\cos(\ln(x))} + (-\sin(\ln(x)))^2$$

Da  $(-\sin(\ln(x)))^2 = (-1)^2 \cdot \sin^2(\ln(x)) = \sin^2(\ln(x))$ , erhalten wir:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = e^{\cos(\ln(x))} + \sin^2(\ln(x))$$

Dies entspricht exakt der Definition der Funktion  $f(x)$ :

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$$

Somit ist die Behauptung gezeigt.

# Kapitel 4

## Aufgabe c)

**Funktion:**  $f(x) = e^{\cos(\ln(x))} + \sin^2(\ln(x))$

**Aufgabe:** Berechnen Sie  $f\left(e^{\frac{3}{2}\pi}\right)$ .

### 4.1 Berechnung

Wir setzen den Wert  $x_0 = e^{\frac{3}{2}\pi}$  in die Funktion  $f(x)$  ein:

$$f\left(e^{\frac{3}{2}\pi}\right) = e^{\cos(\ln(e^{\frac{3}{2}\pi}))} + \sin^2\left(\ln\left(e^{\frac{3}{2}\pi}\right)\right)$$

\*\*Schritt 1: Vereinfachen des Logarithmus\*\* Mittels  $\ln(e^z) = z$ :

$$\ln\left(e^{\frac{3}{2}\pi}\right) = \frac{3}{2}\pi$$

Einsetzen in die Gleichung:

$$f\left(e^{\frac{3}{2}\pi}\right) = e^{\cos(\frac{3}{2}\pi)} + \sin^2\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

\*\*Schritt 2: Einsetzen der trigonometrischen Werte\*\* Die trigonometrischen Werte für  $\frac{3}{2}\pi$  (oder  $270^\circ$ ) sind:

- $\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$
- $\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$

**Einsetzen in die Gleichung:**

$$f\left(e^{\frac{3}{2}\pi}\right) = e^0 + (-1)^2$$

**\*\*Schritt 3: Endgültige Berechnung\*\* Da  $e^0 = 1$  und  $(-1)^2 = 1$ :**

$$f\left(e^{\frac{3}{2}\pi}\right) = 1 + 1$$

$$f\left(e^{\frac{3}{2}\pi}\right) = 2$$