4. Vollständige Induktion

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

23.10.2025

4.1 Vollständige Induktion

Ziel: Beweise eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$.

Beispiel: $\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$

Gauß:

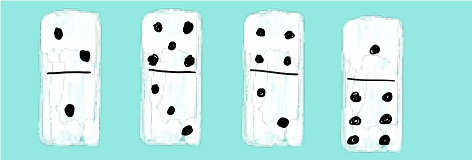
$$\begin{array}{l} 1 + 2 + 3 + \dots + 50 \\ \underline{100 + 99 + 98 + \dots + 52 + 51} \\ 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 = 50 \cdot 101 = \frac{100}{2} \cdot 101 \end{array}$$

analog für n gerade

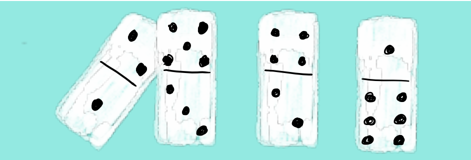
$$\begin{array}{l} 1 + 2 + 3 + \dots + \frac{n}{2} \\ \underline{n + (n-1) + \dots + \dots + \frac{n}{2} + 1} \\ n+1 + n+1 + \dots + n+1 = \frac{n}{2}(n+1) \end{array}$$

Vermutung: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

Vorgehen:



(IA) Induktionsanfang: Wir zeigen, dass $A(n_0)$ wahr ist.



(IS) Induktionsschritt: Wir zeigen, wenn $A(n)$ wahr ist, ist auch $A(n+1)$ wahr.

- (IV) Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, dass $A(n)$ für ein $n \geq n_0$ wahr ist.
- (IB) Induktionsbehauptung: "Dann gilt auch $A(n+1)$."
- (IS) Induktionsschluss: Wir zeigen die IB unter Benutzung der IV.

Beispiel - Gaußsche Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \underbrace{1+2+3+\ldots+n}_{\sum_{k=1}^{n} k} + n+1$$

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt $A(n) : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beweis:

IA: Hier $n_0 = 1$, dh. wir zeigen $A(1)$ $1 = \sum_{k=1}^{1} k = \frac{1\cdot(1+1)}{2} = \frac{1\cdot 2}{2} = 1$

IV: Für beliebiges $n \geq 1$ gilt: $A(n)$: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

IB: Dann gilt auch $A(n+1)$: $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$

IS: Es gilt: $\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + n+1 \underset{IV}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \square$$

Damit haben wir gezeigt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für $n \geq 1$.

Beispiel - Bernoulli Ungleichung

Behauptung: Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n) : (1+x)^n \geq 1 + nx$.

Beweis:

IA: Hier $n_0 = 0$: Es gilt $(1+x)^0 = 1 \geq 1 = 1 + 0x$

IV: Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$

IB: Dann gilt auch $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$

IS: Es gilt: $(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)\cdot(1+x) \cdots (1+x)}_{n}(1+x) = (1+x)^n(1+x)$

$$\underset{\substack{IV \\ x \geq -1}}{\geq} (1+nx)(1+x) = 1 + x + nx + nx^2 = 1+(n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0}$$

$$\geq 1+(n+1)x \qquad \square$$

Gedanken:

$(1+x)^n \geq 1+nx \quad |\cdot(1+x)$

$\underset{x \geq -1}{\Rightarrow} (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$

Beispiel

Behauptung: Für alle $n \geq 1$ gilt $\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \frac{(1+n)^n}{n!}$, wobei $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$

Beweis:

IA: Für $n_0 = 1$ gilt: $\prod_{k=1}^{1} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \left(\frac{1+1}{1}\right)^1 = 2 = \frac{(1+1)^1}{1!}$

IV: Es gelte $\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \frac{(1+n)^n}{n!}$

IB: Dann gilt $\prod_{k=1}^{n+1} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \frac{(1+n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$

IS: $\prod_{k=1}^{n+1} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \cdot \left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^{n+1} \overset{\text{IV}}{=} \frac{(1+n)^n}{n!} \cdot \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$

$= \frac{(1+n)^n}{(1+n)^{n+1}} \cdot \frac{(n+2)^{n+1}}{n!} = \frac{1}{(1+n)} \cdot \frac{(n+2)^{n+1}}{n!} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!}$

4.2 Binomischer Lehrsatz

Kombinatorik:

$k!$: Anzahl Möglichkeiten k Elemente auf k Fächer zu verteilen.

$\frac{n!}{(n-k)!}$: Anzahl Möglichkeiten k Elemente auf n Fächer zu verteilen.

$\frac{n!}{(n-k)!k!}$: Anzahl Möglichkeiten k Elemente aus n Möglichkeiten auszuwählen.

Beispiel: mit $n=4$, $k=2$

mit Zurücklegen

Reihenfolge relevant:

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

$4^2 = n^k$

Reihenfolge irrelevant:

11	12	13	14
	22	23	24
		33	34
			44

ohne Zurücklegen

Reihenfolge relevant:

12	13	14
21	23	24
31	32	34
41	42	43

$4\cdot 3 = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1} = \frac{4!}{2!}$

Reihenfolge irrelevant:

12	13	14
	23	24
		34

$6 = \frac{4!}{(4-2)!\,2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(1\cdot 2)(1\cdot 2)}$

Definition: Für $n, k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k \leq n$ definieren wir den Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Rechenregeln:

(1) $\binom{n}{0} = 1.$, da $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1$

(2) $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$ $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$

(3) Rekursionsformel: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$

Insbesondere $\binom{n}{n} = \binom{n}{n-0} \overset{(2)}{=} \binom{n}{0} \overset{(1)}{=} 1$

Pascalsches Dreieck + Binomischer Lehrsatz

Pascalsches Dreieck: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \begin{matrix}1\\0\end{matrix} & & \begin{matrix}1\\1\end{matrix} & & \\ & \begin{matrix}2\\0\end{matrix} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Binomischer Lehrsatz: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Binom. Formel: $(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^{2-k} b^k = \binom{2}{0} a^{2-0} b^0 + \binom{2}{1} a^{2-1} b^1 + \binom{2}{2} a^{2-2} b^2$