16. Koordinaten und Matrixdarstellung

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

20.11.2025

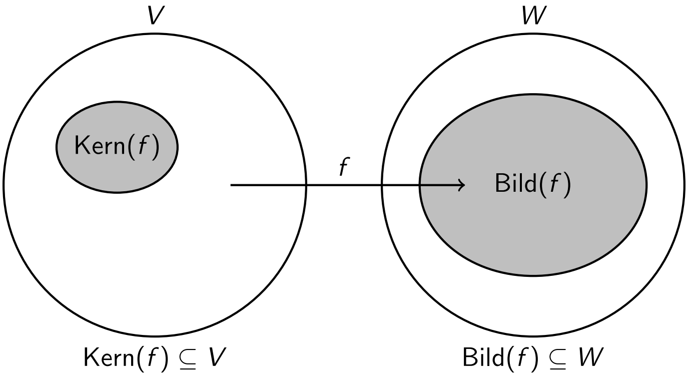
Definition: Sei $f : V \to W$ linear.

(1) Der Kern von f ist das Urbild von 0:

$$\mathrm{Kern}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\} = f^{-1}(\{0\}).$$

(2) Das Bild von f ist die Menge

$$\mathrm{Bild}(f) = f(V) = \{f(v) \mid v \in V\}.$$



Spezialfall:

Satz: Sei $f : V \to W$ linear.

(1) $\mathrm{Kern}(f)$ ist ein Teilraum von V.

(2) $\mathrm{Bild}(f)$ ist ein Teilraum von W.

Beispiele:

Basis des Kerns einer Matrix

Spezialfall: $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $f(x) = Ax$.

Erinnerung: $\mathrm{Kern}(A) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\} = \mathbb{L}(A, 0)$

Bemerkung: $\dim(\mathrm{Kern}(A)) = n - \mathrm{Rang}(A)$

Basis des Bildes

Bemerkung: Sei $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ mit $A = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix}$. Für $x \in \mathbb{K}^n$ ist

$$Ax = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j,$$

also die Linearkombination der Spalten von A mit den Koeffizienten $x_1, \dots, x_n$. Daher ist

$$\text{Bild}(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{K}^n\} = \text{span}\{a_1, \dots, a_n\}.$$

Berechnung des Bildes von A:

(1) Bringe A in Zeilenstufenform.

(2) Spaltenvektoren von A, die zu Pivotelementen in ZSF von A gehören, bilden Basis des Bildes.

Bemerkung: $\dim(\text{Bild}(A)) = \text{Rang}(A)$

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

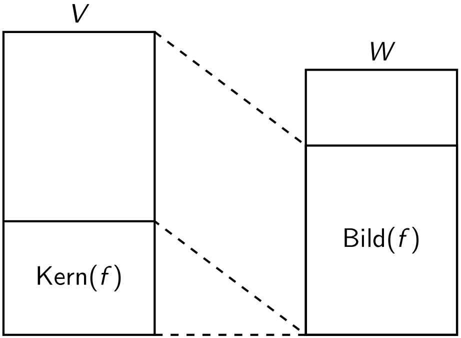
15.3 Dimensionsformel

Satz: Für $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ erhalten wir

$$\dim(\mathrm{Kern}(A)) + \dim(\mathrm{Bild}(A)) = n - \mathrm{Rang}(A) + \mathrm{Rang}(A) = n = \dim(\mathbb{K}^n).$$

Satz: Sei $f : V \to W$ linear und V endlichdimensional. Dann gilt

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)).$$



Folgerungen aus der Dimensionsformel

Satz: Sei $f : V \to W$ linear. Dann gilt:

(1) f ist injektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Kern}(f) = \{0\} \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Kern}(f)) = 0$.

(2) f ist surjektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Bild}(f) = W \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Bild}(f)) = \dim(W)$.

Dabei gilt die letzte Äquivalenz nur falls $\dim(W) < \infty$.

(3) Wenn $\dim(V) = \dim(W) < \infty$, so gilt:

f ist bijektiv $\Leftrightarrow$ f ist injektiv $\Leftrightarrow$ f ist surjektiv.

Definition: Sei V ein $\mathbb{K}$-VR mit Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Dann gilt für $v \in V$:

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n,$$

wobei die Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ eindeutig bestimmt sind.

Der Vektor $\quad \vec{v}_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n \quad$ heißt der Koordinatenvektor von v bzgl. $\mathcal{B}$.

Definition: Sei $\mathcal{B}=\{b_1,\ldots,b_n\}$ Basis vom $\mathbb{K}$-VR V. Die Koordinatenabbildung von V bzgl. $\mathcal{B}$ ist:

$$K_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n, \quad v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j \;\mapsto\; \vec{v}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Die Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{B}}$ ist linear und bijektiv.

Beispiele

Ziel: Stelle eine lineare Abbildung $f : V \to W$ durch eine Matrix dar.

Seien dazu

(1) V endlichdimensional mit Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$,

(2) W endlichdimensional mit Basis $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_m\}$,

(3) $f : V \to W$ linear.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "K_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "f_{\mathcal{B}\mathcal{C}}"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

Bemerkung: Es gilt $f_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = K_{\mathcal{C}} \circ f \circ K_{\mathcal{B}}^{-1}$

Idee: Die i-te Spalte von $f_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ ist:

$$f_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(e_i) = K_{\mathcal{C}}(f(K_{\mathcal{B}}^{-1}(e_i))) = K_{\mathcal{C}}(f(b_i)).$$

Definition: Die darstellende Matrix von f bzgl. $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$

$$f_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} K_{\mathcal{C}}(f(b_1)) & K_{\mathcal{C}}(f(b_2)) & \dots & K_{\mathcal{C}}(f(b_n)) \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m,n}$$

Beispiele:

Frage: Wie rechnet man die Koordinaten für verschiedene Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ ineinander um?

Bemerkung: Sei V endlichdimensionaler Vektorraum mit Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$. Dann gilt für alle $v \in V$:

$$\vec{v}_{\mathcal{B}_2} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}\vec{v}_{\mathcal{B}_1}.$$

Definition: Die Matrix $\mathrm{id}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ heißt auch Basiswechsel-, Basisübergangs- oder Transformationsmatrix.

Beispiele

Satz: Sei $f\colon V \to W$ linear, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ Basen von V und $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ Basen von W. Dann:

$$f_{\mathcal{B}_2\mathcal{C}_2} = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2} f_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1} \mathrm{id}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1},$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[rrr, "f_{\mathcal{B}_2\mathcal{C}_2}"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}"'] & & & \mathbb{K}^m \\
& V \arrow[ul, "K_{\mathcal{B}_2}"'] \arrow[dl, "K_{\mathcal{B}_1}"] \arrow[r, "f"] & W \arrow[ur, "K_{\mathcal{C}_2}"] \arrow[dr, "K_{\mathcal{C}_1}"'] & \\
\mathbb{K}^n \arrow[rrr, "f_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1}"'] & & & \mathbb{K}^m \arrow[uu, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2}"']
\end{tikzcd}$$

Spezialfall: Gleicher VR mit gleichen Basen: $V = W$ mit $\mathcal{C}_1 = \mathcal{B}_1$ und $\mathcal{C}_2 = \mathcal{B}_2$.

$$f_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_2} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} f_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1} \mathrm{id}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1} = (\mathrm{id}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1})^{-1} f_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1} \mathrm{id}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1},$$

Darstellende Matrix bei Basiswechsel

Satz: Sei $f\colon V \to W$ linear, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ Basen von V und $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ Basen von W. Dann:

$$f_{\mathcal{B}_2\mathcal{C}_2} = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2} f_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1} \mathrm{id}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1},$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[rrr, "f_{\mathcal{B}_2\mathcal{C}_2}"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}"'] & & & \mathbb{K}^m \\
& V \arrow[ul, "K_{\mathcal{B}_2}"'] \arrow[dl, "K_{\mathcal{B}_1}"] \arrow[r, "f"] & W \arrow[ur, "K_{\mathcal{C}_2}"] \arrow[dr, "K_{\mathcal{C}_1}"'] & \\
\mathbb{K}^n \arrow[rrr, "f_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1}"'] & & & \mathbb{K}^m \arrow[uu, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2}"']
\end{tikzcd}$$

Spezialfall: Mit $A_1 = f_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1}$, $A_2 = f_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_2}$ und $S = \mathrm{id}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$, so ist

$$A_2 = S^{-1} A_1 S,$$

Beispiele