

Berlin, 25. März 2013

Name:

Matr.-Nr.:

Nachklausur Informatik-Propädeutikum
(Niedermeier/Hartung/Nichterlein, Wintersemester 2012/13)

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
Σ	

Bearbeitungszeit: 90 min.
max. Punktezahl: 60 Punkte
min. Punktezahl zum Bestehen: 20 Punkte

Allgemeine Hinweise:

- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Benutzen Sie keinen Bleistift, sondern einen Kugelschreiber oder Füller in der Farbe schwarz oder blau.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit Vor- und Nachnamen sowie Matrikelnummer.
- **Falls in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen, sind alle Antworten zu begründen! Antworten ohne Begründung erhalten 0 Punkte.**

Viel Erfolg!

Name:

Matr.-Nr.:

Aufgabe 1: Geschichte der Informatik (2+2+2 Punkte)

Nennen Sie drei wichtige Durchbrüche in der Informatikgeschichte. Beschreiben Sie diese kurz in jeweils zwei bis drei Sätzen.

Name:

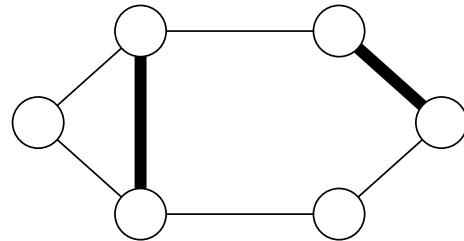
Matr.-Nr.:

Aufgabe 2: Matching in Graphen

(3+3 Punkte)

Ein *Matching* in einem Graphen ist eine Teilmenge M der Kanten, sodass jeder Knoten Endpunkt höchstens einer Kante in M ist. Die Größe eines Matchings ist die Anzahl enthaltener Kanten. Ein Pfad zwischen zwei Knoten heißt *augmentierend*, wenn keiner der beiden Knoten Endpunkt einer Kante in M ist und die Kanten des Pfades abwechselnd aus M und \bar{M} (der Komplementmenge von M) sind.

- a) Betrachten Sie den folgenden Graphen und das angegebene Matching (bestehend aus den fett gezeichneten Kanten). Geben Sie einen augmentierenden Pfad an und benutzen Sie diesen um ein größeres Matching zu finden (einzeichnen genügt). Ist das dadurch gefundene Matching größtmöglich?



- b) Begründen Sie, dass ein Matching nicht größtmöglich ist wenn es einen augmentierenden Pfad gibt.

Hinweis: In der Vorlesung wurde dies für bipartite Graphen besprochen. Hier soll es auf allgemeinen Graphen gezeigt werden.

Name:

Matr.-Nr.:

Aufgabe 3: Abstraktion

(3 + 2 Punkte)

- (a) In das neue Gebäude der TU Berlin in der Marchstraße wurden W-LAB Router installiert, sodass jeder Standort im Gebäude im Empfangsbereich wenigstens eines Routers ist. Es gibt aber auch Standorte in welchen sich die Empfangsbereiche mehrerer Router überschneiden. Damit die Signale nicht interferieren, müssen jeweils zwei Router mit überlappenden Empfangsbereichen auf unterschiedlichen Kanälen (Frequenzbereichen) senden. Allerdings ist die Anzahl der Kanäle begrenzt. Die Aufgabe ist es nun jedem Router einen Kanal zuzuweisen, sodass keine zwei Signale interferieren können. Gehen Sie davon aus, dass man den Empfangsbereich eines jeden Routers messen kann.

Modellieren Sie dieses Problem als Graphproblem. Beschreiben Sie dazu jeweils, was die Knoten und Kanten modellieren. Erklären Sie, wie eine Lösung ihres Graphproblems in einer Zuordnung von Kanälen an Router übersetzt werden kann und umgekehrt.

_____Lösung_____

Graphfärbungen (Knoten)

- (b) Das PACKING-Problem ist wie folgt definiert:

PACKING

Eingabe: Eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ und eine Menge $M = \{o_1, \dots, o_n\}$ von Objekten, wobei jedes Objekt o_i einen Wert $W(o_i)$ und ein Gewicht $G(o_i)$ hat.

Aufgabe: Finde eine Teilmenge $M' \subseteq M$ der Objekte mit Gesamtgewicht $\sum_{o \in M'} G(o) \leq k$, sodass der Wert $\sum_{o \in M'} W(o)$ maximal ist.

Geben Sie zwei praktische Anwendungen an, in denen das PACKING-Problem angewendet werden kann.

_____Lösung_____

todo

Name:

Matr.-Nr.:

Aufgabe 4: Rekursion

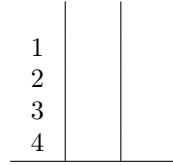
(4 Punkte)

Bei den Türmen von Hanoi sind n Scheiben (alle verschieden groß) gegeben, die sich zu Beginn der Größe nach sortiert (oben die Kleinste) auf einem Stapel befinden. Ziel ist nun die Bewegung des Stapels unter Zuhilfenahme eines „Zwischenstapels“ auf einen weiteren Stapel, wobei

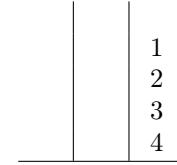
- immer nur eine obenliegende Scheibe transportiert werden darf und
- nie eine kleinere Scheibe unter einer größeren Scheibe liegen darf.

Geben Sie eine Bewegungsabfolge für $n = 4$ Scheiben an. Die Scheiben sind durchnummiert; die größte Scheibe hat die Nummer 4 und die kleinste Scheibe die Nummer 1. Geben Sie dabei nach jeder Scheibenbewegung den Zustand des Systems an. Benutzen Sie bei Ihrer Beschreibung folgende Darstellungsweise:

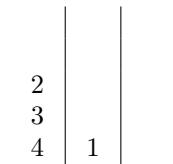
Startkonfiguration:



Zielkonfiguration:



mögliche erste Bewegung:



Name:

Matr.-Nr.:

Aufgabe 5: Algorithmische Komplexität

(3+5 Punkte)

Betrachten Sie die beiden folgenden Probleme.

DOMINATING SET

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Gibt es eine dominierende Menge der Größe k in G ?

BIPARTITE DOMINATING SET

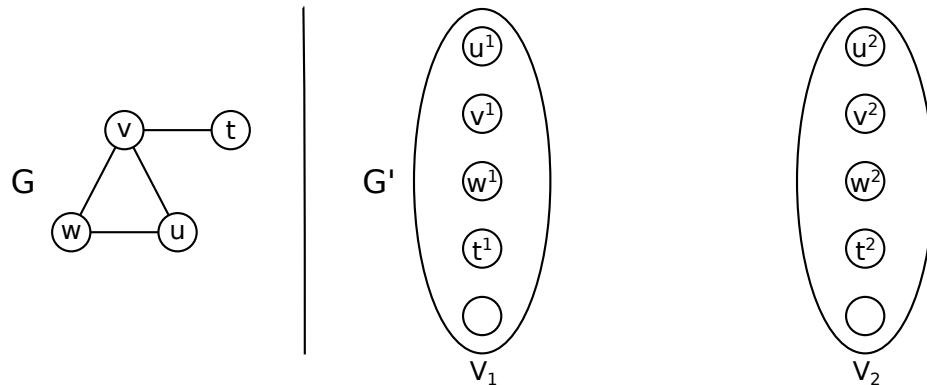
Eingabe: Ein bipartiter Graph $G = (V_1 \cup V_2, E)$ und $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Gibt es eine dominierende Menge der Größe k in G ?

Eine *dominierende Menge* in einem Graphen G ist eine Knotenteilmenge D , sodass für jeden Knoten in G gilt, dass er in D enthalten ist oder mindestens einen Nachbarn in D hat. Ein Graph $G = (V_1 \cup V_2, E)$ ist bipartit, falls $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ und jede Kante in E hat einen Endpunkt in V_1 und den anderen in V_2 .

Wir nehmen nun an wir hätten einen Algorithmus $\mathcal{A}^{\text{BIP DOM}}$, welcher das BIPARTITE DOMINATING SET-Problem löst. Wir wollen nun das DOMINATING SET-Problem für eine Eingabe $G = (V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$ mithilfe von $\mathcal{A}^{\text{BIP DOM}}$ wie folgt lösen:

- Konstruiere einen bipartiten Graphen $G' = (V_1 \cup V_2, E')$ wobei V_1 und V_2 jeweils eine Kopie von V ist. (Die Kopie eines Knoten $v \in V$ in V_1 wird mit v^1 und die Kopie in V_2 mit v^2 bezeichnet.)
 - Für jede Kante $\{v, u\} \in E$ füge die Kanten $\{v^1, u^2\}$ und $\{u^1, v^2\}$ zu G' hinzu.
 - Für jeden Knoten $v \in V$ füge die Kante $\{v^1, v^2\}$ zu G' hinzu.
 - Füge einen neuen Knoten z_1 zu V_1 und einen neuen Knoten z_2 zu V_2 hinzu.
 - Füge die Kante $\{z_1, z_2\}$ hinzu, sowie die Kante $\{v^1, z_2\}$ für alle $v \in V$.
 - Gib die Antwort von $\mathcal{A}^{\text{BIP DOM}}$ für die Eingabe $(G', k + 1)$ aus.
1. Erweitern Sie nach obiger Beschreibung den Graphen G' für den nachfolgend angegebenen Graphen G (ohne Begründung). Geben Sie in beiden Graphen eine kleinste dominierende Menge an.



2. Beweisen Sie, dass obiger Algorithmus korrekt ist. Gehen Sie dazu wie folgt vor: Sei $(G = (V, E), k)$ eine Eingabe für DOMINATING SET und $G' = (V_1 \cup V_2, E')$ der bipartite Graph, welcher durch die obige Vorschrift konstruiert wird. Zeigen Sie:
 - a) Wenn G eine dominierende Menge der Größe k hat, dann hat auch G' eine dominierende Menge der Größe $k + 1$.
 - b) Wenn G' eine dominierende Menge der Größe $k + 1$ hat, dann hat auch G eine dominierende Menge der Größe k .

Name:

Matr.-Nr.:

Aufgabe 6: Postsches Korrespondenzproblem (Grenzen der Berechenbarkeit) (2 + 2 Punkte)

Das Postsche Korrespondenzproblem wurde in der Vorlesung wie folgt eingeführt:

Eingabe: Eine Menge von Paaren (x_i, y_i) bestehend aus je zwei Binärzeichenketten.

Frage: Gibt es eine Aneinanderreihung der Paare, wobei diese beliebig oft wiederholt werden dürfen, sodass das durch die „ x -Teile“ gebildete Wort demjenigen der „ y -Teile“ entspricht?

Beispiel:

$(x_1, y_1) = (1, 101), (x_2, y_2) = (10, 00), (x_3, y_3) = (011, 11).$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}x_1 \circ x_3 \circ x_2 \circ x_3 &= \langle 1 \circ 011 \circ 10 \circ 011 \rangle = \langle 101110011 \rangle \\y_1 \circ y_3 \circ y_2 \circ y_3 &= \langle 101 \circ 11 \circ 00 \circ 11 \rangle = \langle 101110011 \rangle\end{aligned}$$

Geben Sie für jedes der folgenden Wörter an, ob es eine solche Aneinanderreihung gibt.

- (a) $\langle(11, 1), (1, 00), (11, 0)\rangle.$

_____Lösung_____

Es gibt keine Lösung. Da in keinem Tupel eine 0 in dem linken Wort enthalten ist, kommen Tupel 2 und 3 nicht für eine Lösung in Frage. Aus Längengründen kann mit Tupel 1 alleine eine Lösung konstruiert werden.

- (b) $\langle(11, 110), (00, 01), (100, 0)\rangle.$

_____Lösung_____

Lösung: 1,2,1,3: 110011100

Name:

Matr.-Nr.:

Aufgabe 7: Heuristiken

(2+3+3 Punkte)

INDEPENDENT SET wurde in der Vorlesung wie folgt definiert:

INDEPENDENT SET

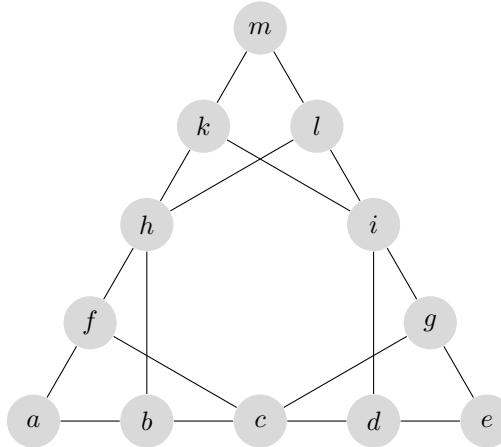
Eingabe: Ein ungerichteter Graph G .

Aufgabe: Finde in G eine größtmögliche Menge von paarweise nicht benachbarten Knoten.

Gegeben sind die folgenden beiden Heuristiken für INDEPENDENT SET und folgender Graph G :

Heuristik 1: Solange es einen Knoten gibt, nehme einen Knoten mit der niedrigsten Anzahl anliegender Kanten in die Lösungsmenge und lösche ihn und seine Nachbarn (und alle an diesen anliegenden Kanten) aus dem Graph.

Heuristik 2: Solange es eine Kante gibt, nehme einen Knoten mit der höchsten Anzahl anliegender Kanten und lösche ihn aus dem Graph. Die Menge der Knoten in dem Restgraph ohne Kanten ist die Lösungsmenge.



- (a) Geben Sie für den gegebenen Graphen (siehe obiges Bild) jeweils eine von Heuristik 1 und eine von Heuristik 2 erzeugte Lösungsmenge an (ohne Begründung).

_____Lösung_____

Heuristik 1: z.B. $\{a, e, m, c, h, i\}$

Heuristik 2: $\{f, b, d, g, k, l\}$

- (b) Ist für den gegebenen Graphen eine der zwei (oder beide) erzeugten Lösungsmengen optimal (d.h. größtmöglich)?

_____Lösung_____

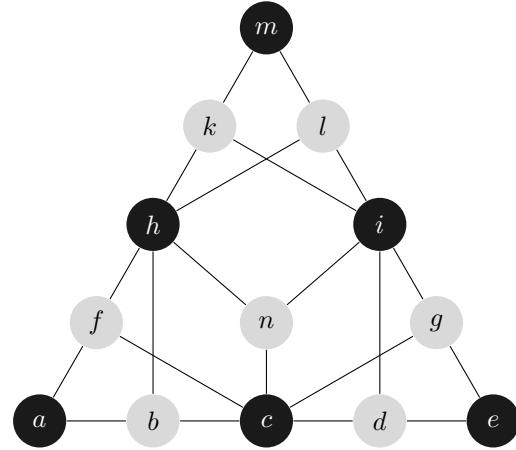
Die Lösung von beiden Heuristiken ist optimal: Der Graph beinhaltet den Kreis $a, b, c, d, e, g, i, l, m, k, h, f$. In einem Kreis kann maximal jeder zweite Knoten in ein Independent Set aufgenommen werden. Daher sind auch in einer optimalen Lösung maximal 6 Knoten enthalten.

- (c) Liefert eine der beiden Heuristiken für alle Graphen eine optimale Lösung?

_____Lösung_____

Nein:

Gegenbeispiel für Heuristik 1: Obigen Graph aus der Aufgabenstellung erweitert um einen Knoten n der mit den Knoten h, i, c verbunden wird:



Heuristik 1 nimmt die dunklen Knoten, optimal sind die hellen Knoten.

Gegenbeispiel für Heuristik 2: Stern wobei an alle Blätter jeweils ein Blatt angehängt wird, d.h. ein Stern wo jede Kante durch einen Knoten geteilt wird.

Name:

Matr.-Nr.:

Aufgabe 8: Kryptologie

(2+2+3+2 Punkte)

Lösen Sie jede der folgenden Teilaufgaben in höchstens vier deutschen Sätzen.

- a) Erläutern Sie die Begriffe symmetrische und asymmetrische Verschlüsselung.
- b) Erläutern Sie die One-Time Pad-Verschlüsselung. Geben Sie Vor- und Nachteile an.
- c) Wie lässt sich die One-Time Pad-Verschlüsselung mit einem Pseudozufallsgenerator kombinieren um die Nachteile der One-Time Pad-Verschlüsselung zu umgehen? Welche Nachteile ergeben sich aus der Kombination?
- d) Erläutern Sie das Public-Key Verfahren anhand einer Briefkastenanalogie.

Name:

Matr.-Nr.:

Aufgabe 9: Thesen

(2+2+2+2+2 Punkte)

Nehmen Sie zu jeder der folgenden Thesen in höchstens drei Sätzen Stellung.

- a) Zufall ist keine in der Informatik einsetzbare Ressource.
- b) Die Lösung des P vs. NP -Problems ist für die Praxis irrelevant.
- c) In ein paar Jahren wird es Compiler geben, welche Programme auf Korrektheit (d. h. das Programm verhält sich formal korrekt für jede mögliche Eingabe) prüfen.
- d) Die TU Berlin ist mit wichtigen Informatikentwicklungen verknüpft.
- e) Abstraktion war ein wichtiger Schlüssel auf dem Weg zur automobilen Gesellschaft.