12. Matrizen

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

11.11.2025

Definition: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Dann lässt sich jeder Vektor $v \in V$ schreiben als

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n,$$

wobei die Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ eindeutig bestimmt sind und Koordinaten von v heißen.

Der Vektor

$$\vec{v}_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

heißt der Koordinatenvektor von v bzgl. $\mathcal{B}$.

1) $V = \mathbb{R}^2$ i) $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ z. B. $\vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\rightsquigarrow$ hier $\vec{v}_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \vec{v}$

Beispiele

ii) $B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ z.B. $\vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\rightsquigarrow \vec{v}_{B_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

iii) $B_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ z.B. $\vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\rightsquigarrow \vec{v}_{B_3} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$

2) $V = \mathbb{C}[z]_{\leq 2}$ mit $B = \{1, z, z^2\}$

z.B. $p(z) = 3 + 4z^2 = 3 \cdot 1 + 0z + 4z^2$

$\rightsquigarrow p_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

Ziel: Lösen von linearen Gleichungssystemen:

Nahziel: Formalisierung dr. Matrizen

z.B. $1x_1 + 3x_2 = 1$
$2x_1 + 4x_2 = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Definition: Für Zahlen $a_{i,j} \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, heißt das Zahlenschema

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} = \left[a_{i,j}\right] = \left[a_{i,j}\right]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

eine $m \times n$-Matrix mit Einträgen in $\mathbb{K}$.

- Die Menge aller $m \times n$-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{K}$ wird mit $\mathbb{K}^{m,n}$ bezeichnet.
- Eine Matrix heißt quadratisch, falls $m = n$ gilt.

Beispiele

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$ hier $a_{21} = 4$, $a_{12} = 2$

2) Nullmatrix: $0 = 0_{m,n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m,n}$

3) Einheitsmatrix: $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n,n}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4) Falls $m=1$: Zeilenvektor, z.B. $\begin{bmatrix} 1 & 3+i & z \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{1,3}$

5) Falls $n=1$: Spaltenvektor, z.B. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,1}$

$\leadsto$ wir identifizieren $\mathbb{R}^{3,1}$ mit $\mathbb{R}^3$

Definition: Seien $A = \left[a_{i,j}\right]$, $B = \left[b_{i,j}\right] \in \mathbb{K}^{m,n}$ zwei $m \times n$-Matrizen und $\lambda \in \mathbb{K}$.

Dann ist die Summe von A und B die Matrix

$$A + B = \left[a_{i,j} + b_{i,j}\right] \in \mathbb{K}^{m,n},$$

und die Multiplikation mit einem Skalar ist die Matrix

$$\lambda A = \left[\lambda a_{i,j}\right] \in \mathbb{K}^{m,n}.$$

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 2$

$\Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, $\quad 2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$

Hinweis: Die Matrizen A, B müssen selbe Größe haben.

Rechenregeln

Rechenregeln für die Addition: Für $A, B, C \in \mathbb{K}^{m,n}$ gilt

(1) $(A+B)+C = A+(B+C)$ (Assoziativ),

(2) $A+B = B+A$ (Kommutativ).

(3) Es gibt eine Nullmatrix mit $0 + A = A$

(4) Es gibt $-A$ mit $A + (-A) = 0$

Rechenregeln für die Skalarmultiplikation: Für $A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt

(1) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,

(2) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ (distributiv),

(3) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$ (distributiv),

(4) $1 \cdot A = A$

Fazit: $\mathbb{K}^{m,n}$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und es gilt $\dim(\mathbb{K}^{m,n}) = m \cdot n$.

Fazit: $\mathbb{K}^{m,n}$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und es gilt $\dim(\mathbb{K}^{m,n}) = m \cdot n$, denn:

$V = \mathbb{K}^{2,2}$ hat Basis $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$, wobei

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Linear Unabhängig:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow 0 = \lambda_1,\ 0 = \lambda_2,\ 0 = \lambda_3,\ 0 = \lambda_4 \Rightarrow$ Linear unabhängig

ESZ: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Erinnerung: $A_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$

Ziel: Schreibe LGS in Matrix-Vektor-Form

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Gegeben

Unbekannten

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \text{—} & a_{1n} \\ | & & \\ a_{m1} & \text{—} & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ | \\ b_m \end{bmatrix}$$

Spezialfall: Zeilenvektor $\times$ Spaltenvektor

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot c_{11} + a_{12} \cdot c_{21} + a_{13} \cdot c_{31} + \dots + a_{1n} \cdot c_{n1}$$

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 4 + 10 + 18 = 32$$

Definition: Seien $A = \left[a_{i,j}\right] \in \mathbb{K}^{m,n}$ und $B = \left[b_{i,j}\right] \in \mathbb{K}^{n,p}$. Dann ist

$$AB := \left[\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}\right] = \left[a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \ldots + a_{i,n}b_{n,j}\right] \in \mathbb{K}^{m,p}.$$

Definition: Seien $A = \left[a_{i,j}\right] \in \mathbb{K}^{m,n}$ und $B = \left[b_{i,j}\right] \in \mathbb{K}^{n,p}$. Dann ist

$$AB := \left[\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}\right] = \left[a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \ldots + a_{i,n}b_{n,j}\right] \in \mathbb{K}^{m,p}.$$

Ausgeschrieben:

$$AB = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1,k}b_{k,1} & \sum_{k=1}^n a_{1,k}b_{k,2} & \ldots & \sum_{k=1}^n a_{1,k}b_{k,p} \\ \sum_{k=1}^n a_{2,k}b_{k,1} & \sum_{k=1}^n a_{2,k}b_{k,2} & \ldots & \sum_{k=1}^n a_{2,k}b_{k,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{m,k}b_{k,1} & \sum_{k=1}^n a_{m,k}b_{k,2} & \ldots & \sum_{k=1}^n a_{m,k}b_{k,p} \end{bmatrix}.$$

Beispiele:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 3\cdot(-1) & 1\cdot 2 + 2\cdot 0 + 3\cdot 0 \\ 4\cdot 3 + 5\cdot 1 + 6\cdot(-1) & 4\cdot 2 + 5\cdot 0 + 6\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 11 & 8 \end{bmatrix}, \quad B\cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 11 & 16 & 21 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Hinweis: i.A. $A \cdot B \neq B \cdot A$

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,1}$ $\leadsto A \cdot B = \begin{bmatrix} 17 \\ 39 \end{bmatrix}$

Hier ist $B \cdot A$ nicht definiert $\big((2,1) \cdot (2,2)$, $1 \neq 2 \big)$

3) $A \in \mathbb{R}^{3,4}$, $B \in \mathbb{R}^{4,2}$ $\leadsto$ $A \cdot B \in \mathbb{R}^{3,2}$

Rechenregeln für Matrixmultiplikation

Für Matrizen A, B, C mit geeigneter Größe und für $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

(1) $A(BC) = (AB)C$,

(2) $A(B + C) = AB + AC$,

(3) $(A + B)C = AC + BC$,

(4) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$,

(5) $I_m A = A = A I_n$ für $A \in \mathbb{K}^{m,n}$.

Hinweis: Im Allgemeinen ist $AB \neq BA$.

Definition: Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ heißt invertierbar, falls es eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{n,n}$ gibt mit

$$BA = I_n \quad \text{und} \quad AB = I_n.$$

Die Matrix B ist dann eindeutig bestimmt, wird die Inverse von A genannt und mit A^{-1} bezeichnet.

Hintergrund: Wir können ein LGS jetzt in folgender Form schreiben:

$Ax = b$. Falls $m = n$ und A^{-1} existiert.

$$Ax = b \iff \underbrace{A^{-1}A}_{I_n}x = A^{-1}b \iff I_n x = A^{-1}b \iff x = A^{-1}b$$

Bemerkung: Es reicht $BA = I_n$ oder $AB = I_n$ zu zeigen, die zweite folgt automatisch.

Satz: Sind $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertierbar, so gelten

(1) A^{-1} ist invertierbar mit $(A^{-1})^{-1} = A$.

(2) AB ist invertierbar mit $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

$$(AB)^{-1}(AB) = B^{-1}A^{-1}AB = \underbrace{B^{-1}\underbrace{A^{-1}A}_{I}B}_{B} = B^{-1}B = I$$

Beispiele

1) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ ist invertierbar mit $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

da $A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Sei $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dann $B \cdot A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $a+b=1$ und $a+b=0$ $\lightning$ Also ist A nicht invertierbar

12.5 Transponierte

Definition: Die Transponierte der Matrix $A = \left[a_{i,j}\right] \in \mathbb{K}^{m,n}$ ist die $n \times m$-Matrix

$$A^T := \left[b_{i,j}\right] \in \mathbb{K}^{n,m}, \quad \text{wobei } b_{i,j} = a_{j,i}.$$

Beispiele:

Rechenregeln für Transponierte: Für $A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$, $C \in \mathbb{K}^{n,\ell}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

(1) $(A^T)^T = A$,

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$,

(3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$,

(4) $(AC)^T = C^T A^T$.

Definition: Die Adjungierte der Matrix $A = \left[a_{i,j}\right] \in \mathbb{C}^{m,n}$ ist die $n \times m$-Matrix

$$A^H := \left[b_{i,j}\right] \in \mathbb{C}^{n,m}, \quad \text{wobei } b_{i,j} = \overline{a_{j,i}}.$$

Beispiele