# 8. Polynome

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

30.10.2024

# 8. Polynome

## Definiton:

(1) Ein Polynom hat die Form: $p(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$

- $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ heißen die Koeffizienten des Polynoms.
- Dadurch wird eine Funktion gegeben: $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$.
- Sind alle Koeffizienten $a_k$ reell, nennt man $p$ ein reelles Polynom.
- Dann können wir $p$ als eine Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oder $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ betrachten.

(2) Ist $a_n \neq 0$, so heißt $n$ der Grad von $p$.

- Falls $a_{0,\dots,a_n} = 0$ (Nullpolynom), dann setzt man $\deg(p) = -\infty$

## Beispiele:

1) $p$ mit $p(z) = 2 + 3z + 4z^3 + 0z^4$ hat deg(3)

2) $\deg(p) = 0 \Leftrightarrow p(z) = a_0 z^0$ mit $a_0 \in \mathbb{C}$ und $a_0 \neq 0$

Seien $p, q$ Polynome mit $p(z) = 2 + 3z + 4z^3$ und $q(z) = 1 + z$.

**Addition:** $p+q: \quad p(z)+q(z) = (2+3z+4z^3) + (1+z) = 3+4z+4z^3$

**Skalarmultiplikation:** $\lambda p$ z.B. $3p(z) = 3(2+3z+4z^3) = 6+9z+12z^3$

**Multiplikation:** $p \cdot q: \quad p(z)\cdot q(z) = (2+3z+4z^3)(1+z) = 2+2z+3z+3z^2+4z^3+4z^4$

$= 2+5z+3z^2+4z^3+4z^4$

**Gradformel:** $\deg(p\cdot q) = \deg(p) + \deg(q)$

**Division:** $p/q$ ist im Allgemeinen kein Polynom $\rightsquigarrow$ VL 9

$p(z) : q(z) = (4z^3 + 0z^2 + 3z + 2) : (z+1) = 4z^2 - 4z + 7$ und Rest $-5$

$$\begin{array}{l} -(4z^3+4z^2) \\ \hline \quad -4z^2+3z+2 \\ \quad -(-4z^2-4z) \\ \hline \qquad 7z+2 \\ \qquad -(7z+7) \\ \hline \qquad\quad -5 \end{array}$$

$p/q = 4z^2-4z+7 - \frac{5}{z+1}$

$\Rightarrow p = (4z^2-4z+7)q - 5$

**Satz (Division mit Rest):** Seien $p, q$ Polynome mit $q \neq 0$. Dann gibt es Polynome $r, s$ mit $p = qs + r$, sodass $\deg(r) < \deg(q)$.

**Satz (Nullstellen):** Sei $p$ ein Polynome mit $\deg(p) = n \geq 1$ und $z_0$ eine Nullstelle von $p$. Dann gibt es ein Polynome $s$ mit $\deg(s) = n - 1$, so dass $p(z) = (z - z_0)s(z)$.

Denn Division mit Rest für $q = (z - z_0)$ ergibt

$(*)$ $p(z) = (z - z_0)s(z) + r(z)$ mit $\deg(r) < \deg(q) = 1$

$\Rightarrow \deg(r) \leq 0 \Rightarrow r(z) = c$ mit $c \in \mathbb{C}$

Nun setzen wir $z_0$ in $(*)$ ein

$$\underbrace{0 = p(z_0)}_{z_0 \text{ Nullstelle von } p} = (z_0 - z_0)s(z_0) + r(z_0) = r(z_0) = c$$

$\Rightarrow r(z) = 0$ Gradformel $n = \deg(p) = \deg(qs) = \deg(q) + \deg(s) = 1 + \deg(s)$

# Beispiel und Vielfachheit einer Nullstelle

Beispiel: $p$ mit $p(z) = 2z^3 - 16$ hat Nullstelle $z_1 = 2$

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(2z^3 + 0z^2 + 0z^1 - 16) : (z-2) = 2z^2 + 4z + 8 \\
-(2z^3 - 4z^2) \\
\hline
\quad +4z^2 + 0z - 16 \\
\quad -(4z^2 - 8z) \\
\hline
\qquad 8z - 16 \\
\qquad -(8z - 16) \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

**Definition:** Die Vielfachheit einer Nullstelle $z_0$ ist die Zahl $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$p(z) = (z - z_0)^k q(z),$$

wobei $q$ ein Polynom mit $q(z_0) \neq 0$.

Beispiel: $p(z) = z^3 + z^2 = z^2(z+1) = (z-0)^2(z-(-1))^1$

$\leadsto$ Nullstellen $z_1 = 0$ mit Vielfachheit 2

$z_2 = -1$ mit Vielfachheit 1

**Satz:** Sei $p$ ein Polynom mit $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ und $\deg(p) = n \geq 1$. Dann gibt es eine (bis auf die Reihenfolge) eindeutige Linearfaktorzerlegung:

$$p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n),$$

mit $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. Das heißt $p$ hat genau $n$ Nullstellen (gezählt mit Vielfachheiten).

**Beispiele:** $p(z) = 2z^3 - 16 = (z-2)(2z^2 + 4z + 8)$

Weiter mit p,q-Formel:

$2z^2 + 4z + 8 = 0 \iff z^2 + 2z + 4 = 0$

$\overset{\text{p,q-Formel}}{\iff} z_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{2^2}{4} - 4} = -1 \pm \sqrt{-3} = -1 \pm \sqrt{i^2 3} = -1 \pm i\sqrt{3}$

Linearfaktorzerlegung: $p(z) = 2(z-2)(z - (-1 + \sqrt{3}i))(z - (-1 - \sqrt{3}i))$

Bemerkung: Hier gilt: $z_1 = \overline{z_1}$, also $z - (-1 + \sqrt{3}i) = \overline{z - (-1 - \sqrt{3}i)}$

**Satz:** Sei $p$ ein reelles Polynom mit $\deg(p) \geq 1$. Dann treten die nichtreellen Nullstelle von $p$ in komplex konjugierten Paaren auf, d.h. ist $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine Nullstelle, so auch $\bar{z}_0$.

**Beispiele:** $z^4 - 1$ hat Nullstellen $1, -1, i, -i$

$$(z^4-1) = (z-1)(z-(-1))\underbrace{(z-i)(z-(-i))}_{(z-i)(z+i) = z^2 - (i)^2 = z^2+1} = (z-1)(z-(-1))(z^2+1)$$

Da für $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $p(z_0) = 0$

$$p(\bar{z}_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k (\bar{z}_0)^k \underset{a_k \in \mathbb{R}}{=} \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\, \overline{z_0^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k} = \overline{p(z_0)} = \overline{0} = 0$$

**Folgerungen:**

(1) Ist $p$ ein reelles Polynom mit $\deg(p) \geq 1$, so gibt es eine Zerlegung:

$$p = a_n(z - x_1) \cdot \ldots \cdot (z - x_k) \cdot ((z-\alpha_1)^2 + \beta_1^2) \cdot \ldots \cdot ((z-\alpha_m)^2 + \beta_m^2)$$

Nullstellen: $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ und $\alpha_1 \pm i\beta_1, \ldots, \alpha_m \pm i\beta_m \in \mathbb{C}$.

(2) Jedes reelle Polynom ungeraden Grades hat mindestens eine reelle Nullstelle.