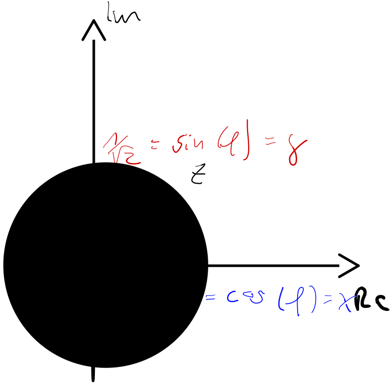
7. Komplexe Zahlen 2

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

30.10.2025

Erinnerung: $\mathbb{C} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}$, wobei i imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$ ist.

Kartesische Darstellung: $z = x + iy$, mit $x, y \in \mathbb{R}$



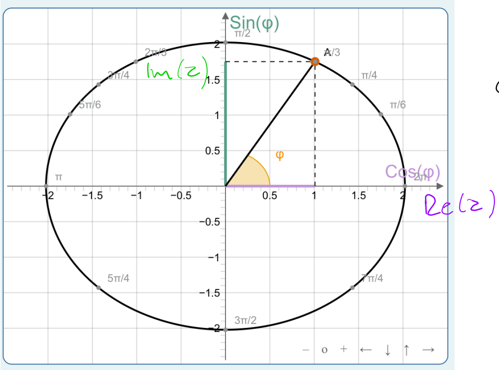
$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

$$z = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$$

Erinnerung: $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, wobei i imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$ ist.

Kartesische Darstellung: $z = x + iy$, mit $x, y \in \mathbb{R}$



$\sin(\varphi) = y/r \iff y = r \cdot \sin(\varphi)$

$\cos(\varphi) = x/r \iff x = r \cdot \cos(\varphi)$

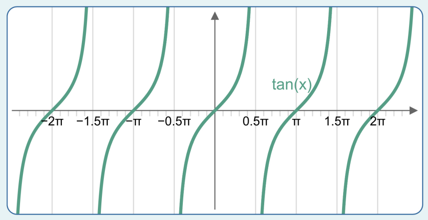
$\Rightarrow z = x + i \cdot y = r \cdot \cos(\varphi) + i \cdot r \cdot \sin(\varphi)$

$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\cancel{r}\sin(\varphi)}{\cancel{r}\cos(\varphi)} = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \tan(\varphi)$

$r \cdot \cos(\varphi) + i \cdot r \cdot \sin(\varphi)$ ist die Polardarstellung einer komplexen Zahl.

Wiederholung Tangens

Tangens: $\tan\colon \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.



Eigenschaften:

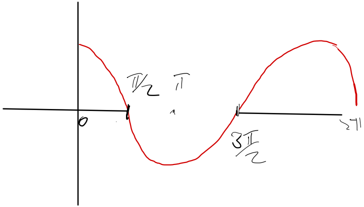
(1) Tangens ist π-periodisch, d.h.

$$\tan(\varphi + k\pi) = \tan(\varphi) \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin(\varphi+\pi) = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \overset{VLG}{=} \cos(\varphi + \pi/2) = -\sin(\varphi)$$

$$\cos(\varphi+\pi) = -\cos(\varphi)$$

$$\Rightarrow \tan(\varphi+\pi) = \frac{\sin(\varphi+\pi)}{\cos(\varphi+\pi)} = \frac{-\sin(\varphi)}{-\cos(\varphi)} = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \tan(\varphi)$$



(2) Tangens ist nicht injektiv, also insbesondere nicht umkehrbar.

(3) $\tan\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ ist injektiv mit Umkehrfunktion Arkustangens

7.1 Polardarstellung

Polardarstellung: Können z durch r (Abstand vom Ursprung) und φ (Winkel mit positiver x-Achse) angeben

(1) Betrag von z: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

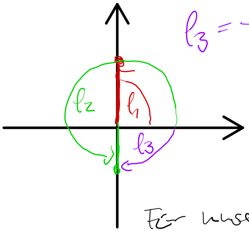
(2) Argument von z: $\varphi = \arg(z)$

$\rightsquigarrow$ Polardarstellung: $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$

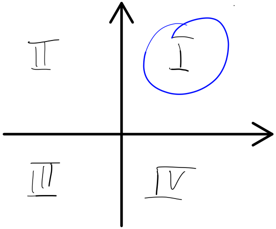
Berechnung von φ: Mithilfe von $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$ und Überprüfen der Lage von $z = x + yi$

$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$

$\varphi_3 = -\frac{\pi}{2}$

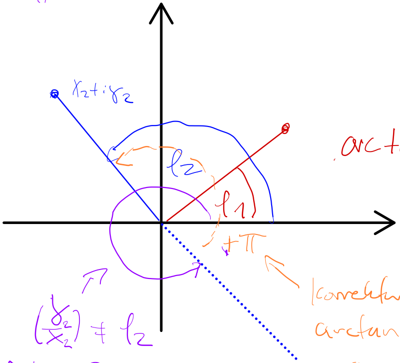


$$\varphi = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & \text{falls} \quad x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & \text{falls} \quad x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{falls} \quad x = 0 \text{ und } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{falls} \quad x = 0 \text{ und } y < 0 \end{cases}$$



Für unsere Zwecke ist φ_3 „äquivalent" zu φ_2

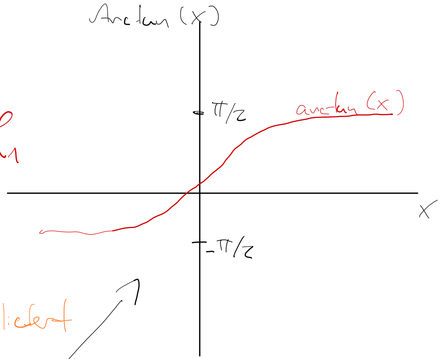
Warum „$+\pi$" bei $x<0$?



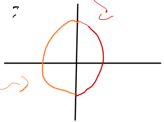
$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi_1$$

$\arctan\left(\frac{y_2}{x_2}\right) \neq \varphi_2$ für $x_2 < 0$, brauchen aber φ_2

Korrektur $\arctan\left(\frac{y_2}{x_2}\right) + \pi$ liefert genau φ_2!



Arctan trifft nur Werte zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$! Daher können so nur Winkel φ auf dem rechten Halbkreis getroffen werden:



Durch die Korrektur „$+\pi$" erreichen wir den linken Halbkreis.

Beispiele

1) $z=0$: Hier ist $\arg(z)$ nicht definiert. Wir schreiben $z = \underset{r}{0}\,(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))$ für beliebiges $\varphi\in\mathbb{R}$

2) $z_1 = \underset{x}{2}+\underset{y}{2}i$: $r=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$, $\tan\varphi = \frac{2^{\,y}}{2_{\,x}} = 1 \Rightarrow \varphi = \arctan(1) = \pi/4$

$\Rightarrow z_1 = \sqrt{8}\left(\cos(\pi/4)+i\cdot\sin(\pi/4)\right)$ (z_1 ist im I Quadranten)

3) $z_2 = -1-i$: $r=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$, $\tan\varphi = \frac{-1}{-1} = 1$

$\Rightarrow \varphi = \arctan(1)+\pi = \frac{5}{4}\pi$

z_2 ist im III Quadranten.

4) $z_3 = 3i = 0+3i$, $r=\sqrt{0^2+3^2}=3$

$\tan\left(\frac{3}{0}\right)$ nicht definiert! Fall: $x=0$, $y=3>0$

$\Rightarrow \varphi = \arg(z_3) = \frac{\pi}{2}$

z_3 liegt auf der positiven y-Achse

Euler-Formel: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Eulerdarstellung: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$

Bsp von Zwei:

$$z_1 = \sqrt{8}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{8}\, e^{i\cdot\pi/4}$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{5}{4}\pi\right) + i\cdot\sin\left(\tfrac{5}{4}\pi\right)\right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5}{4}\pi}$$

Multiplikation in Polardarstellung:

Seien $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ und $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ dann:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

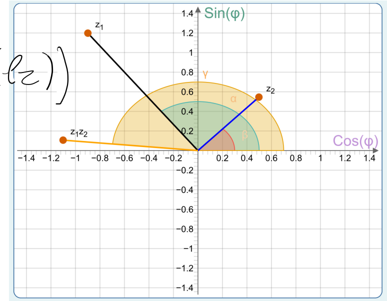
da $z_1 z_2 = r_1(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))\, r_2(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2))$

$= r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + i\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2)$

$\quad + i\cdot\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\big)$

Add. Theorem

$= r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big)$



Multiplikation in Eulerdarstellung: Seien $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ dann gilt:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i\varphi_1 + i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Allgemein $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

Beispiel: Was ist z^{42}?

Schwierig: $(x+i\cdot y)^{42}$

leicht: $(re^{i\varphi})^{42} = r^{42}(e^{i\varphi})^{42} = r^{42} e^{i\cdot 42\varphi}$

Ziel: Finde alle Lösungen der Gleichung $z^n = a$, mit $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Ansatz: $z = r \cdot e^{i\varphi}$ und $a = s \cdot e^{i\alpha}$.

$$r^n e^{i\varphi n} = (r e^{i\varphi})^n = z^n = a = s\,e^{i}$$

1) $r^n = s \Rightarrow r = \sqrt[n]{s}$

2) $\varphi n = \alpha + 2\pi k,\quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\alpha + 2\pi k}{n}$

Zusammensetzen: $z_k = \sqrt[n]{s}\, e^{i\frac{\alpha + 2\pi k}{n}}$ für $k = 0, \dots, n-1$

Warum $k = 0, \dots, n-1$?

Für $k = n$ gilt $\dfrac{\alpha + 2\pi n}{n} = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{2\pi \cancel{n}}{\cancel{n}} = \dfrac{\alpha}{n} + 2\pi \cong \dfrac{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha + 2\pi \cdot 0}{n}$

Fazit: $z^n = a$ hat n Lösungen

$z^n = 1 = 1\cdot e^{i\cdot 0}$ α (also $s=1$, $\alpha=0$)

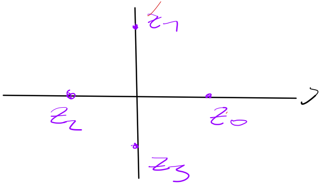
Ansatz $\quad z = re^{i\varphi} \Rightarrow z^n = r^n e^{in\varphi} \overset{!}{=} 1\cdot e^{i\cdot 0}$

1) $r^n = 1 \Rightarrow r = 1$

2) $n\varphi = 0 + 2\pi k$ für $k = 0, \dots, n-1$

$\Rightarrow$ n Lösungen $\quad z_k = 1e^{i\frac{2\pi k}{n}}$ für $k = 0, \dots, n-1$

Spezialfall $n = 4$:



$z_1 = 1\cdot e^{\frac{2\pi\cdot 1}{4}}$

$z_2 \quad 1\cdot e^{\frac{2\pi\cdot 2}{4}}$

$z_3 = 1\cdot e^{\frac{2\pi\cdot 3}{4}}$

Beispiele