задачки-закачки-1, гр. 2 и 3

6 март 2014 г.

1. За кои формални езици L итерацията им L^* е краен език?
2. Докажете, че езикът L е регулярен, където:
   (а) $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ е запис на число в двоична бройна система (без водещи нули!)$\}$
   (б) $L = \{w \in \{0,1,\dots,9\}^* \mid w$ е запис на число в десетична бройна система, което се дели на 5, но не и на 25$\}$
   (в) $L = \{w \in \{0,1,2\}^* \mid w$ е запис на число в троична бройна система с дължина, деляща се на 3$\}$
   (г) $L = \{w \in \{a\}^* \mid |w| = 3x + 8y$ за някои неотрицателни цели $x, y,$ за които $x + y > 2\}$
   (д) $L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid w$ съдържа точно 3 пъти буквата $a\}$
   (е) $L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid w$ съдържа точно веднъж буквата a, точно два пъти буквата b и точно три пъти буквата $c\}$
3. Напишете регулярен израз за езика:
   (а) $L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid w$ има префикс abc и суфикс $ca\}$
   (б) $L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid w$ не съдържа две последователни еднакви букви$\}$
   (в) $L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid w$ съдържа три последователни еднакви букви$\}$
   (г) $L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid w$ съдържа точно веднъж думата $bca\}$
   (д) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid$ в w има поне две последователни букви b след всяко срещане на буква $a\}$
   (е) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ съдържа ab и е с четна дължина$\}$
   (ж) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid$ в w има равен брой срещания на ab и $ba\}$
   (з) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid$ в w се срещат думите ab и ac и последното срещане на думата ab е преди първото срещане на думата $ac\}$
   (и) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ съдържа всяка възможна дума с дължина 2 точно по веднъж$\}$
4. Напишете пълен регулярен израз (без да има ... в него) на един ред от тетрадката, който разпознава точно 256 думи над азбуката $\{a,b\}$. А 257? А 255?
5. Знаем, че езикът $L_{()}$ от балансирани скоби не е регулярен. Следните езици регулярни ли са:
   (а) $\{w \in L_{()} \mid |w| \leq 8\}$
   (б) $\{w \in L_{()} \mid w$ е с нечетна дължина$\}$
6. Да се докаже, че обръщането L^R на регулярен език L е регулярен език.

   Доказателство. За примитивните регулярни езици имаме $\{\}^R = \{\}, \{\epsilon\}^R = \{\epsilon\}, \{a\}^R = \{a\}$ (значи са регулярни). Нека K^R е регулярен за произволен регулярен език K, имащ регулярен запис с по-малко от $k > 0$ прилагания на регулярните операции. Нека L е регулярен език, имащ регулярен запис с точно k прилагания на регулярните операции. Възможни се следните случаи за L:

- $L = K_1 \cup K_2$, където K_1 и K_2 са регулярни и от индуктивното предположение, K_1^R и K_2^R също са регулярни. Тогава $L^R = (K_1 \cup K_2)^R = K_1^R \cup K_2^R$ е регулярен, защото е обединение на регулярни езици.
- $L = K_1 K_2$, където K_1 и K_2 са регулярни и от индуктивното предположение, K_1^R и K_2^R също са регулярни. Тогава $L^R = (K_1 K_2)^R = K_2^R K_1^R$ е регулярен, защото е конкатенация на регулярни езици.
- $L = K^*$, където K е регулярен и от индуктивното предположение, K^R също е регулярен. Тогава $L^R = (K^*)^R = (K^R)^*$ е регулярен, защото е итерация на регулярен език.

Във всички възможни случаи за L доказахме, че L^R е регулярен. От това по индукция следва, че ако L е регулярен, то и L^R е регулярен.

7. Нека $L \subseteq \{0,1\}^*$ е регулярен език. Докажете, че следният език е регулярен: $L' = \{s(w), w \in L \mid s(w) = \text{разменяме нулите и единиците в } w\}$
8. Нека L е регулярен език. Докажете, че ако удвоим всяка буква във всяка дума на L, новият език също е регулярен.
9. Нека L е регулярен език. Докажете, че езиците L_{even}, съставен от думите на L с четна дължина и L_{odd}, съставен от думите на L с нечетна дължина, са регулярни.
10. Нека A и B са регулярни езици над една и съща азбука Σ. Перфектно картоподреждане $A\clubsuit B$ на A и B наричаме следния език:

$$A\clubsuit B = \{a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_k b_k \mid a_1 a_2 \dots a_k \in A, b_1 b_2 \dots b_k \in B, a_i \in \Sigma, b_i \in \Sigma\}$$

Да се докаже, че перфектното карторазбъркване на два регулярни езика е регулярен език.

11. Нека L е регулярен език над азбуката Σ. Да се докаже, че перфектните картораздавания на L са регулярни:

$$L_A = \{a_1 a_2 \dots a_k \mid a_1 b_1 \dots a_k b_k \in L, a_i \in \Sigma, b_i \in \Sigma\}$$
$$L_B = \{b_1 b_2 \dots b_k \mid a_1 b_1 \dots a_k b_k \in L, a_i \in \Sigma, b_i \in \Sigma\}$$

12. Нека L е регулярен език. Да се докаже, че префиксите на всички думи в L образуват регулярен език.
13. Съставете крайни детерминирани автомати за езиците от задачи 2 и 3.