Задачки-закачки 1

ЕАИ-упражнения, групи 2 и 3

8 март 2014 г.

регулярни операции и регулярни изрази – нормални задачки

1. За кои езици L, итерацията им L^* е краен език?

2. Намерете регулярен запис за езика L, където:

   а) $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ е запис на число в двоична бройна система (без водещи нули!)$\}$. *Решение:* $L = \{0\} \cup (\{1\} \cdot \{0,1\}^*)$

   б) $L = \{w \in \{0,1,\ldots,9\}^* \mid w$ е запис на число в десетична бройна система, което се дели на 5, но не и на 25$\}$.

   в) $L = \{w \in \{0,1,2\}^* \mid w$ е запис на число в троична бройна система с дължина, деляща се на 3$\}$.

   г) $L = \{w \in \{a\}^* \mid |w| = 3x + 8y,$ за някои неотрицателни цели x, y, за които $x + y > 2\}$.

   д) $L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid w$ съдържа точно 3 пъти буквата $a\}$.

   е) $L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid w$ съдържа точно веднъж буквата a, точно два пъти буквата b и точно три пъти буквата $c\}$.

3. Намерете регулярен израз за езика:
    а) $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w$ има префикс abc и суфикс $ca\}$.
    б) $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w$ не съдържа две последователни еднакви букви$\}$.
    в) $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w$ съдържа три последователни еднакви букви$\}$.
    г) $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w$ съдържа точно веднъж думата $bca\}$.
    д) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid$ в w има поне две последователни букви b след всяко срещане на буква $a\}$.
    е) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ съдържа ab и е с четна дължина$\}$.
    ж) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid$ в w има равен брой срещания на ab и $ba\}$.
    з) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid$ в w се срещат думите ab и ac и последното срещане на думата ab е преди първото срещане на думата $ac\}$.
    и) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ съдържа всяка възможна дума с дължина 2 точно по веднъж$\}$. *(по-трудна)*

4. Напишете пълен регулярен израз над азбуката $\{a, b, c\}$ (без да има ... в него), който да се събира на един ред в тетрадката, който:
    а) Разпознава точно 2 думи. *Примерно решение:* `(a|b)`.
    б) Разпознава точно 9 думи, точно 27 думи, точно 81 думи.
    в) Разпознава точно 16 думи, точно 32 думи, точно 128 думи.
    г) Разпознава точно 63 думи, точно 64 думи, точно 65 думи.

структурна индукция – по-трудни задачки

5. Да се докаже, че обръщането L^R на регулярен език L е регулярен език.

Доказателство. За примитивните регулярни езици имаме $\{\}^R = \{\}, \{\epsilon\}^R = \{\epsilon\}, \{a\}^R = \{a\}$, което показва, че са регулярни. Нека K^R е регулярен за произволен регулярен език K, имащ регулярен запис с по-малко от $k > 0$ прилагания на регулярните операции.

Нека L е регулярен език, имащ регулярен запис с точно k прилагания на регулярните операции. Възможни се следните случаи за L:

- $L = K_1 \cup K_2$, където K_1 и K_2 са регулярни и от индуктивното предположение K_1^R и K_2^R също са регулярни. Тогава $L^R = (K_1 \cup K_2)^R = K_1^R \cup K_2^R$ е регулярен, защото е обединение на регулярни езици.
- $L = K_1 K_2$, където K_1 и K_2 са регулярни и от индуктивното предположение K_1^R и K_2^R също са регулярни. Тогава $L^R = (K_1 K_2)^R = K_2^R K_1^R$ е регулярен, защото е конкатенация на регулярни езици.

- $L = K^*$, където K е регулярен и от индуктивното предположение K^R също е регулярен. Тогава $L^R = (K^*)^R = (K^R)^*$ е регулярен, защото е итерация на регулярен език.

Във всички възможни случаи за L доказахме, че L^R е регулярен. От това по индукция следва, че ако L е регулярен, то и L^R е регулярен. $\square$

6. Нека $L \subseteq \{0,1\}^*$ е регулярен език. Докажете, че следният език е регулярен: $L' = \{s(w), w \in L \mid s(w) = \text{разменяме нулите и единиците в } w\}$.

7. Нека L е регулярен език. Докажете, че ако удвоим всяка буква във всяка дума на L, новият език също е регулярен.

8. Нека L е регулярен език. Докажете, че езиците L_{even}, съставен от думите на L с четна дължина и L_{odd}, съставен от думите на L с нечетна дължина, са регулярни.

9. Нека A и B са регулярни езици над една и съща азбука Σ. Перфектно картоподреждане $A\clubsuit B$ на A и B наричаме следния език:

$$A\clubsuit B = \{a_1b_1a_2b_2\dots a_kb_k \mid a_1a_2\dots a_k \in A, b_1b_2\dots b_k \in B, a_i \in \Sigma, b_i \in \Sigma\}.$$

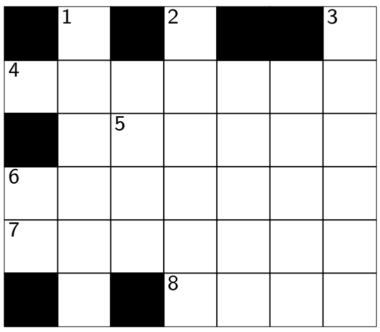
Да се докаже, че перфектното картоподреждане на два регулярни езика е регулярен език.

10. Нека L е регулярен език над азбуката Σ. Да се докаже, че перфектните картораздавания на L са регулярни:

$$L_A = \{a_1a_2\dots a_k \mid a_1b_1\dots a_kb_k \in L, a_i \in \Sigma, b_i \in \Sigma\},$$
$$L_B = \{b_1b_2\dots b_k \mid a_1b_1\dots a_kb_k \in L, a_i \in \Sigma, b_i \in \Sigma\}.$$

11. Нека L е регулярен език. Да се докаже, че езикът L_{prefix}, образуван от префиксите на всички думи в L, е регулярен език.

кръстословица



отвесно: 1 `c(a*|c*)` 2 `(at|ta)*` 3 `a(a*c*t*)`

водоравно: 4 `ac*(a|b*)c*` 5 `(ba)*c` 6 `a(ba*|ct*)` 7 `t*ac*|c*at*` 8 `a(b*|c*)`