28 | 数据流分析：你写的程序，它更懂

2019-10-28 宫文学 来自北京

《编译原理之美》

上一讲，我提到了删除公共子表达式、拷贝传播等本地优化能做的工作，其实，这几个工作也可以在全局优化中进行。

只不过，全局优化中的算法，不会像在本地优化中一样，只针对一个基本块。而是更复杂一些，因为要覆盖多个基本块。这些基本块构成了一个 CFG，代码在运行时有多种可能的执行路径，这会造成多路径下，值的计算问题，比如活跃变量集合的计算。

当然了，还有些优化只能在全局优化中做，在本地优化中做不了，比如：

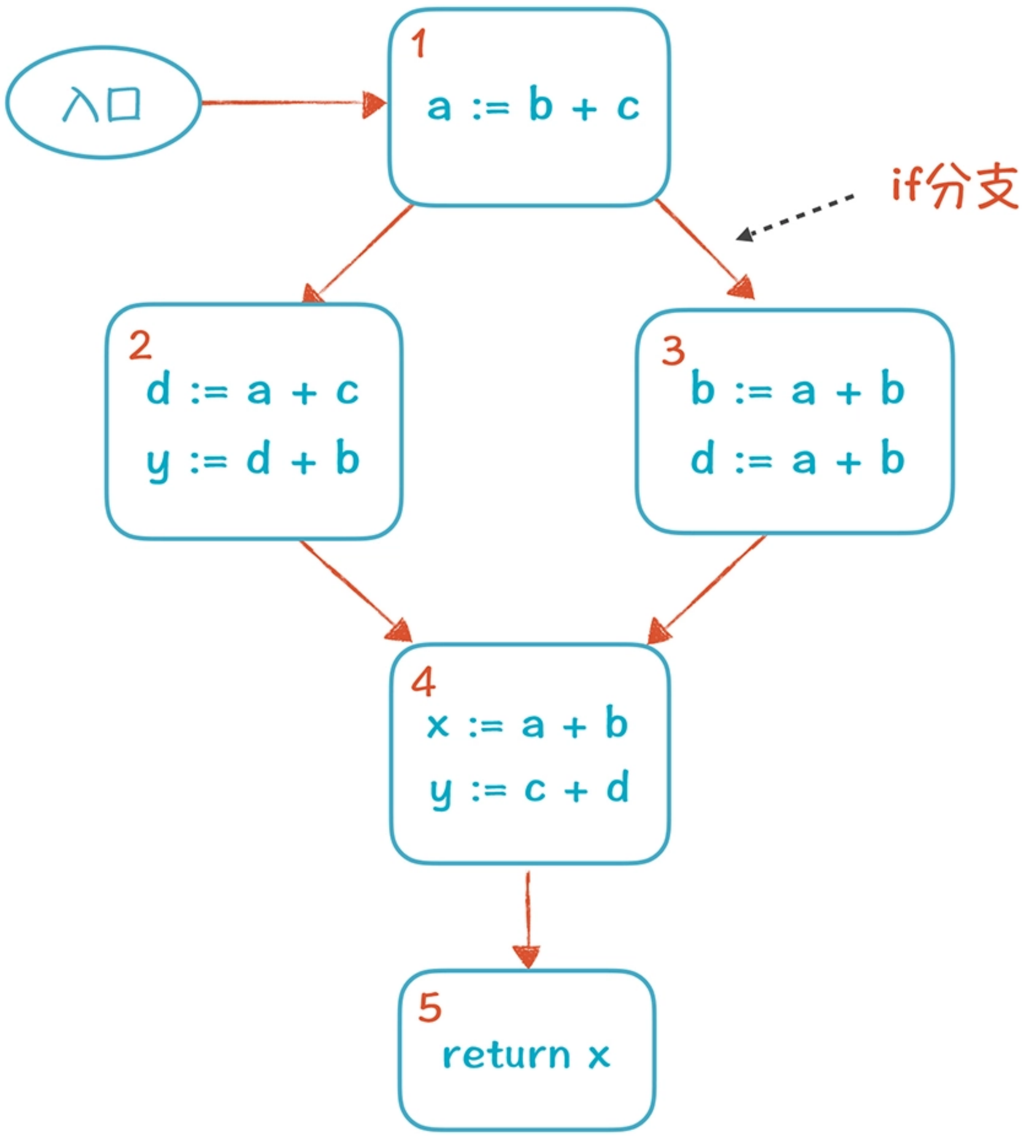
- 代码移动（code motion）能够将代码从一个基本块挪到另一个基本块，比如从循环内部挪到循环外部，来减少不必要的计算。
- 部分冗余删除（Partial Redundancy Elimination），它能把一个基本块都删掉。

总之，全局优化比本地优化能做的工作更多，分析算法也更复杂，因为 CFG 中可能存在多条执行路径。不过，我们可以在上一节课提到的本地优化的算法思路上，解决掉多路径情况下，V 值的计算问题。**而这种基于 CFG 做优化分析的方法框架，就叫做数据流分析。**

本节课，我会把全局优化的算法思路讲解清楚，借此引入数据流分析的完整框架。而且在解决多路径情况下，V 值的计算问题时，我还会带你学习一个数学工具：半格理论。这样，你会对基于数据流分析的代码优化思路建立清晰的认识，从而有能力根据需要编写自己的优化算法。

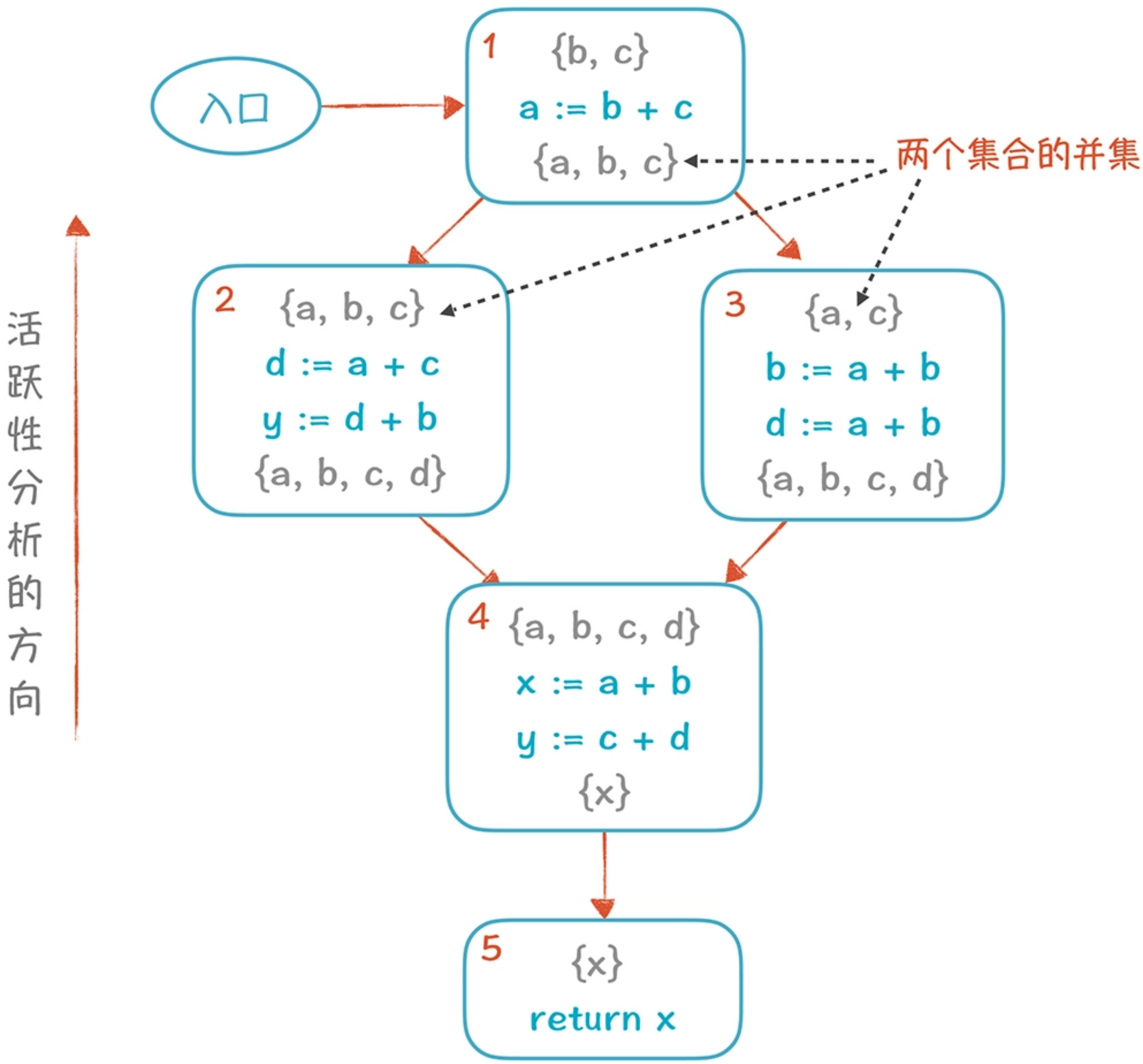
数据流分析的场景：活跃性分析

上一讲，我已经讲了本地优化时的活跃性分析，那时，情况比较简单，你不需要考虑多路径问题。**而在做全局优化时，情况就要复杂一些：**代码不是在一个基本块里简单地顺序执行，而可能经过控制流图（CFG）中的多条路径。我们来看一个例子（例子由 if 语句形成了两条分支语句）：

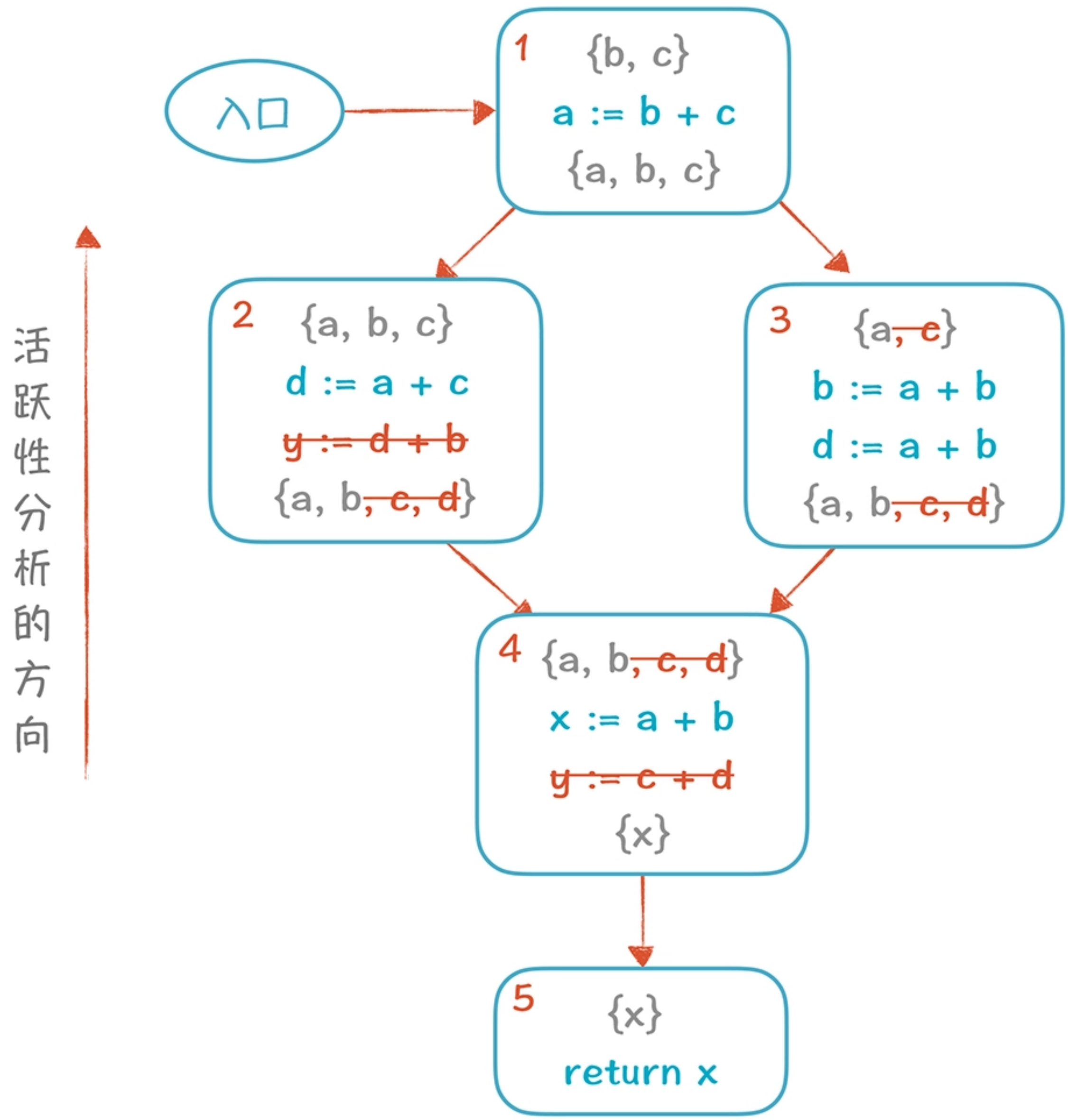


基于这个 CFG，我们可以做全局的活跃性分析，从最底下的基本块开始，倒着向前计算活跃变量的集合（也就是从基本块 5 倒着向基本块 1 计算）。

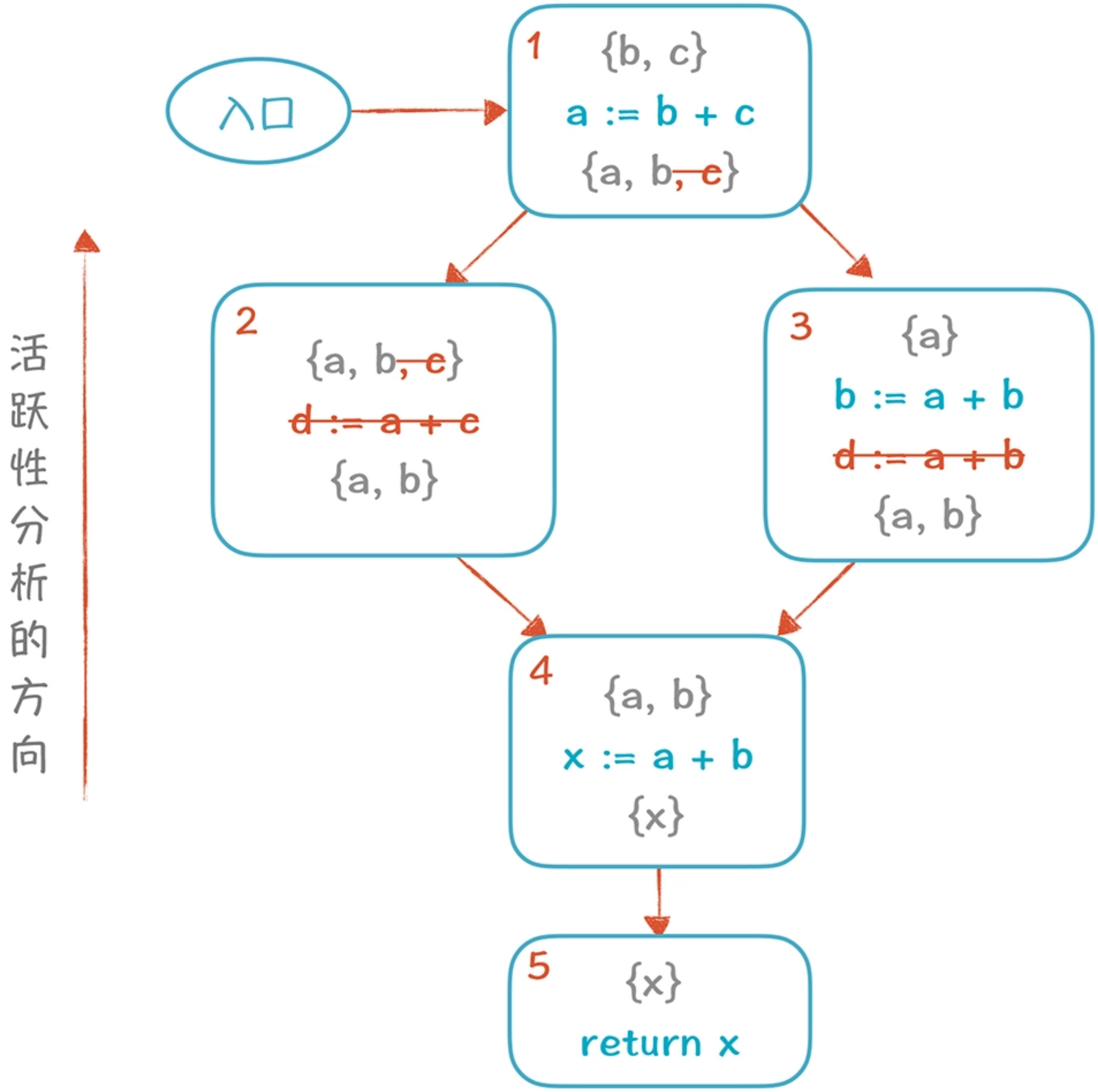
这里需要注意，对基本块 1 进行计算的时候，它的输入是基本块 2 的输出，也就是{a, b, c}，和基本块 3 的输出，也就是{a, c}，计算结果是这两个集合的并集{a, b, c}。也就是说，基本块 1 的后序基本块，有可能用到这三个变量。这里就是与本地优化不同的地方，我们要基于多条路径来计算。



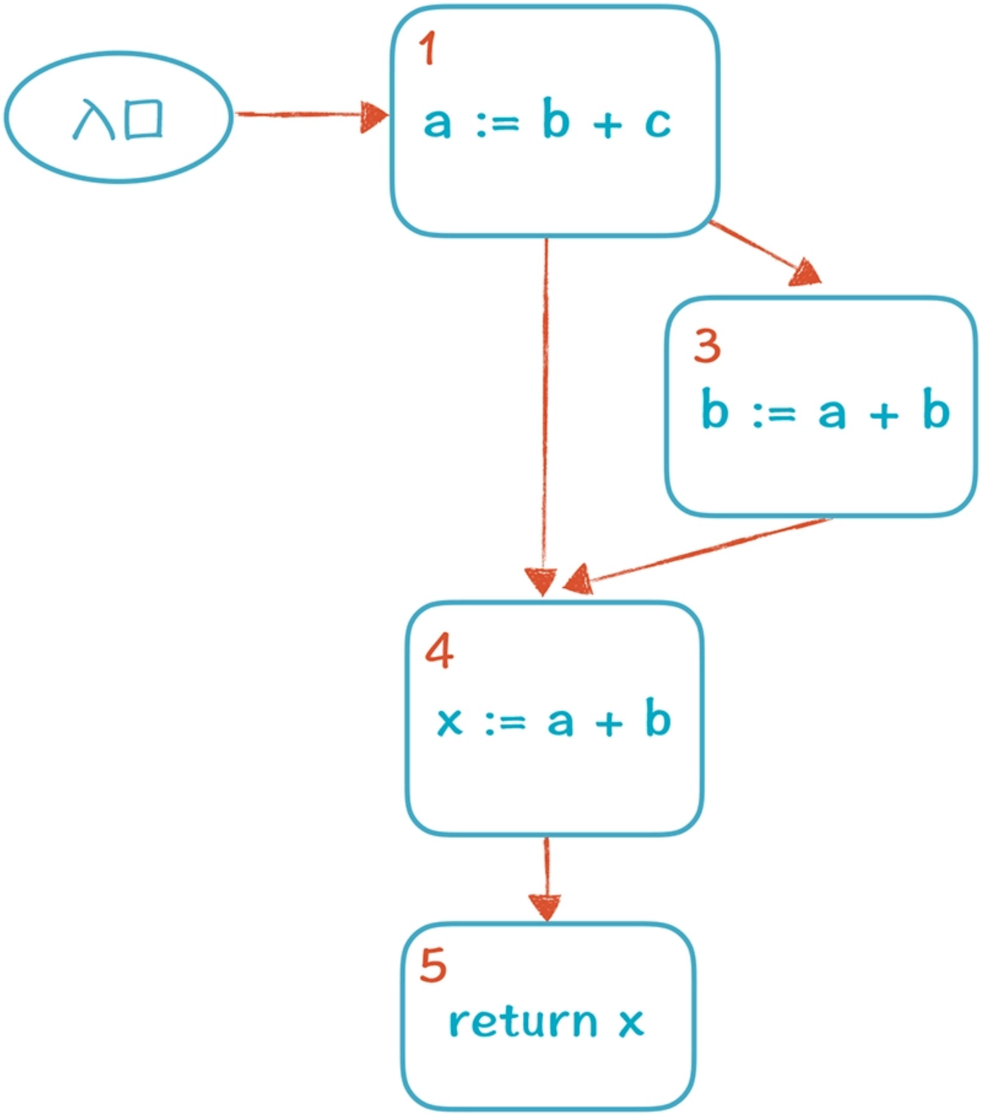
基于这个分析图，我们马上发现 y 变量可以被删掉（因为它前面的活变量集合{x}不包括 y，也就是不被后面的代码所使用），并且影响到了活跃变量的集合。



删掉 y 变量以后，再继续优化一轮，会发现 d 也可以删掉。

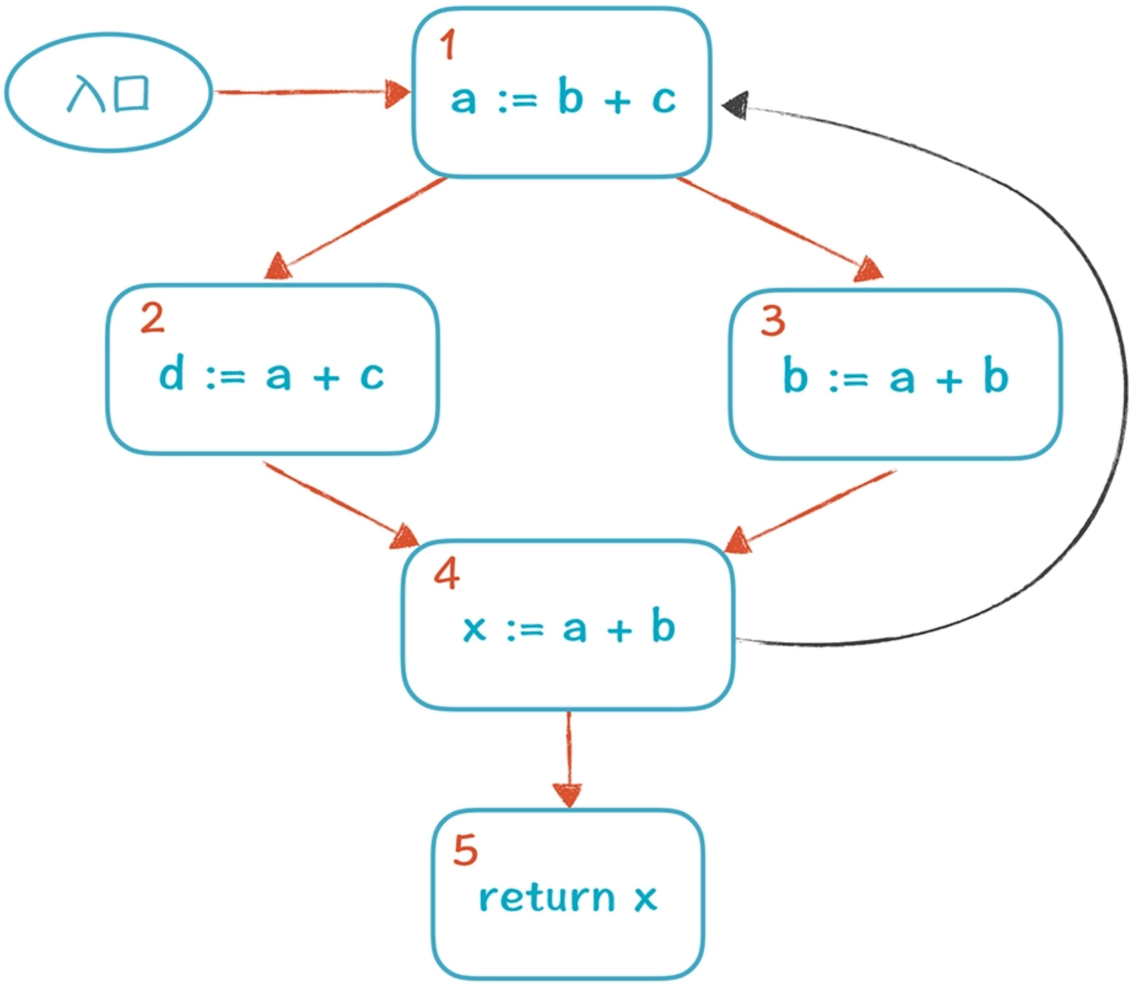


d 删掉以后，2 号基本块里面已经没有代码了，也可以被删掉，**最后的 CFG 是下面这样：**



到目前为止，我们发现：全局优化总体来说跟本地优化很相似，唯一的不同，就是要基于多个分支计算集合的内容（也就是 V 值）。在进入基本块 1 时，2 和 3 两个分支相遇（meet），我们取了 2 和 3V 值的并集。**这就是数据流分析的基本特征，你可以记住这个例子，建立直观印象。**

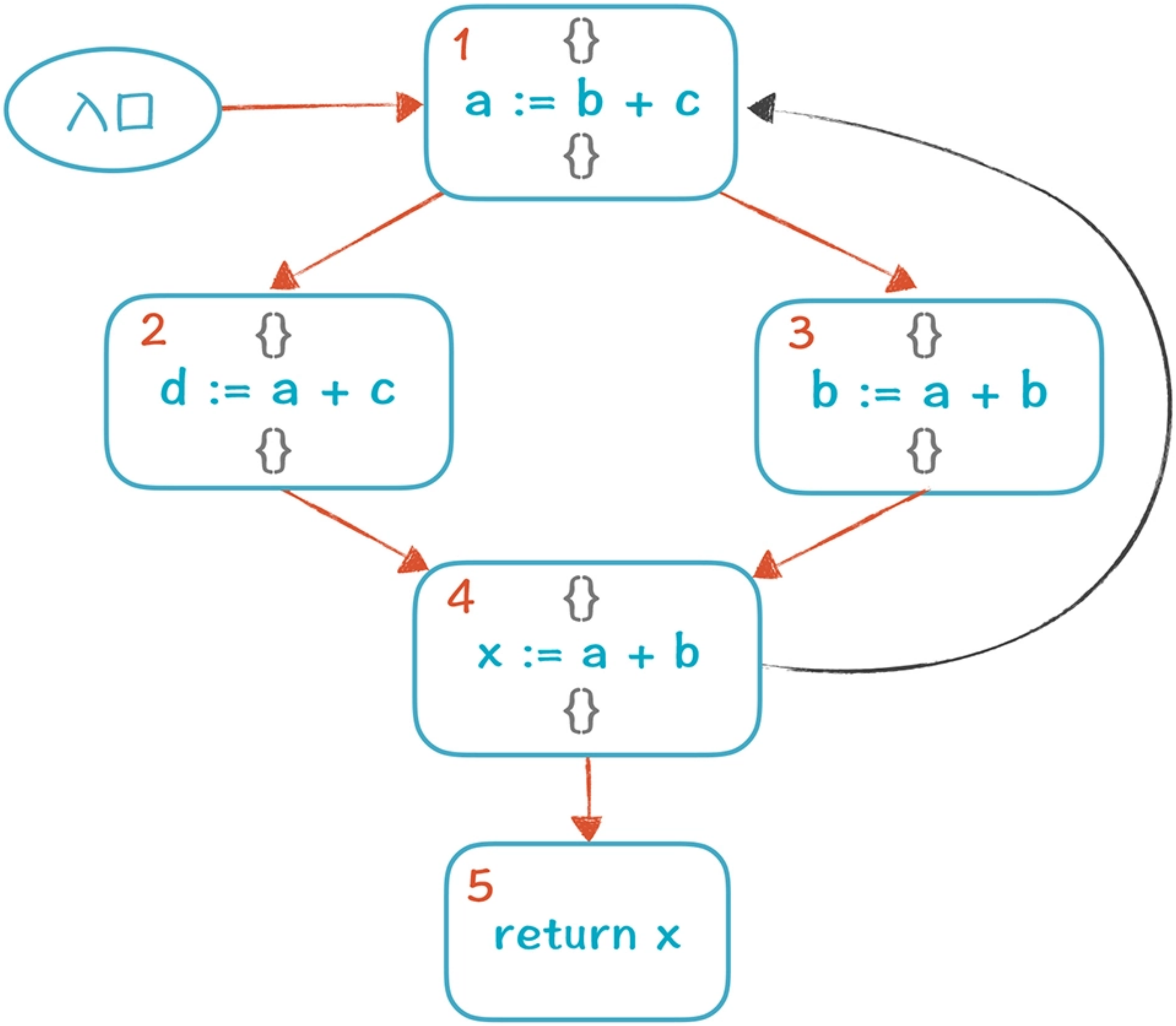
但是，上面这个 CFG 还是比较简单的，因为它没有循环，属于有向无环图。**这种图的特点是：**针对图中的每一个节点，我们总能找到它的前序节点和后序节点，所以我们只需要按照顺序计算就好了。但是如果加上了环路，就不那么简单了，来看一看下面这张图：



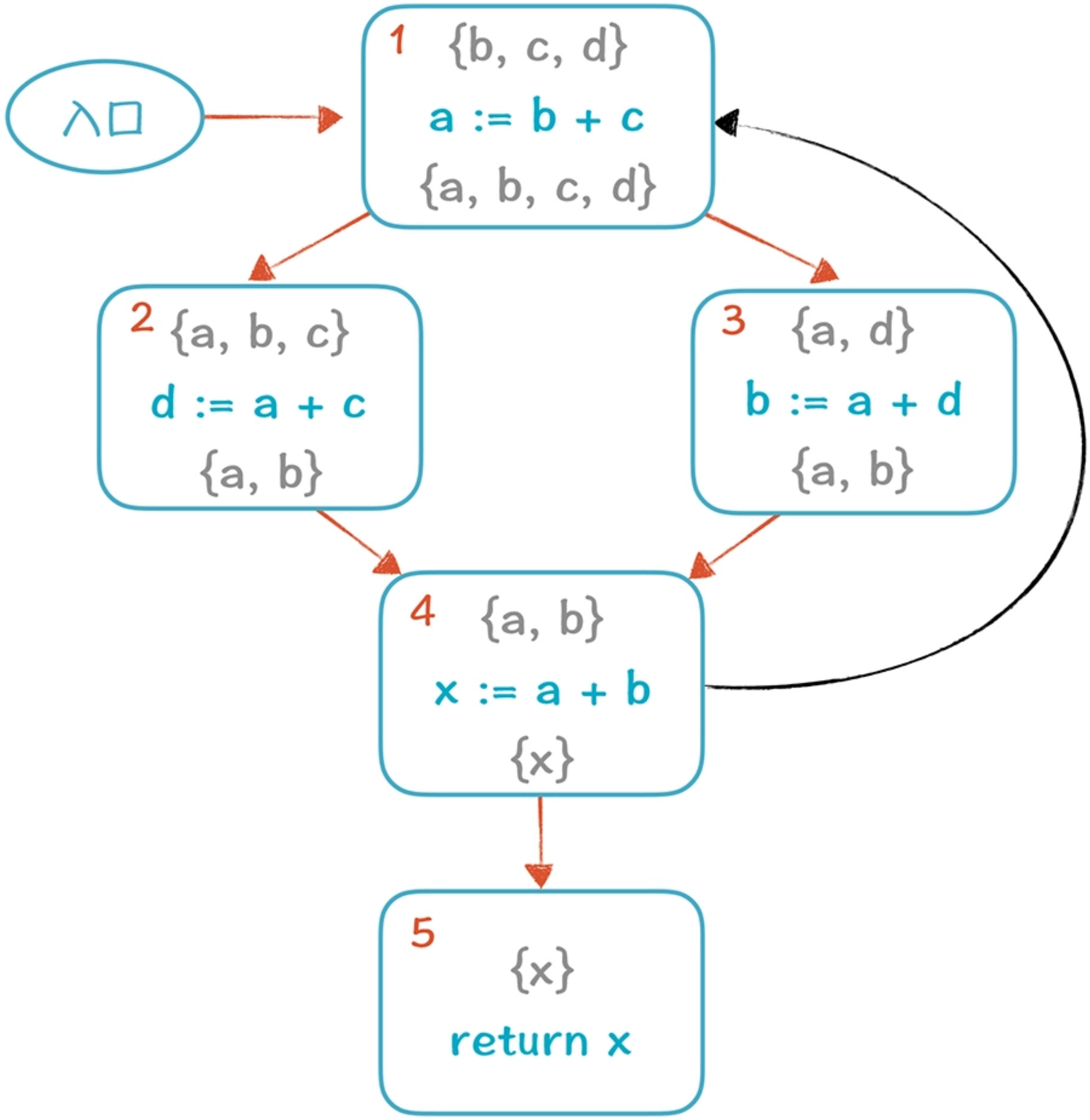
基本块 4 有两个后序节点，分别是 5 和 1，所以要计算 4 的活跃变量，就需要知道 5 和 1 的输出是什么。5 的输出好说，但 1 的呢？还没计算出来呢。因为要计算 1，就要依赖 2 和 3，从而间接地又依赖了 4。**这样一来，1 和 4 是循环依赖的。**再进一步探究的话，你发现其实 1、2、3、4 四个节点之间，都是循环依赖的。

所以说，一旦在 CFG 中引入循环回路，严格的前后计算顺序就不存在了。**那你要怎么办呢?**

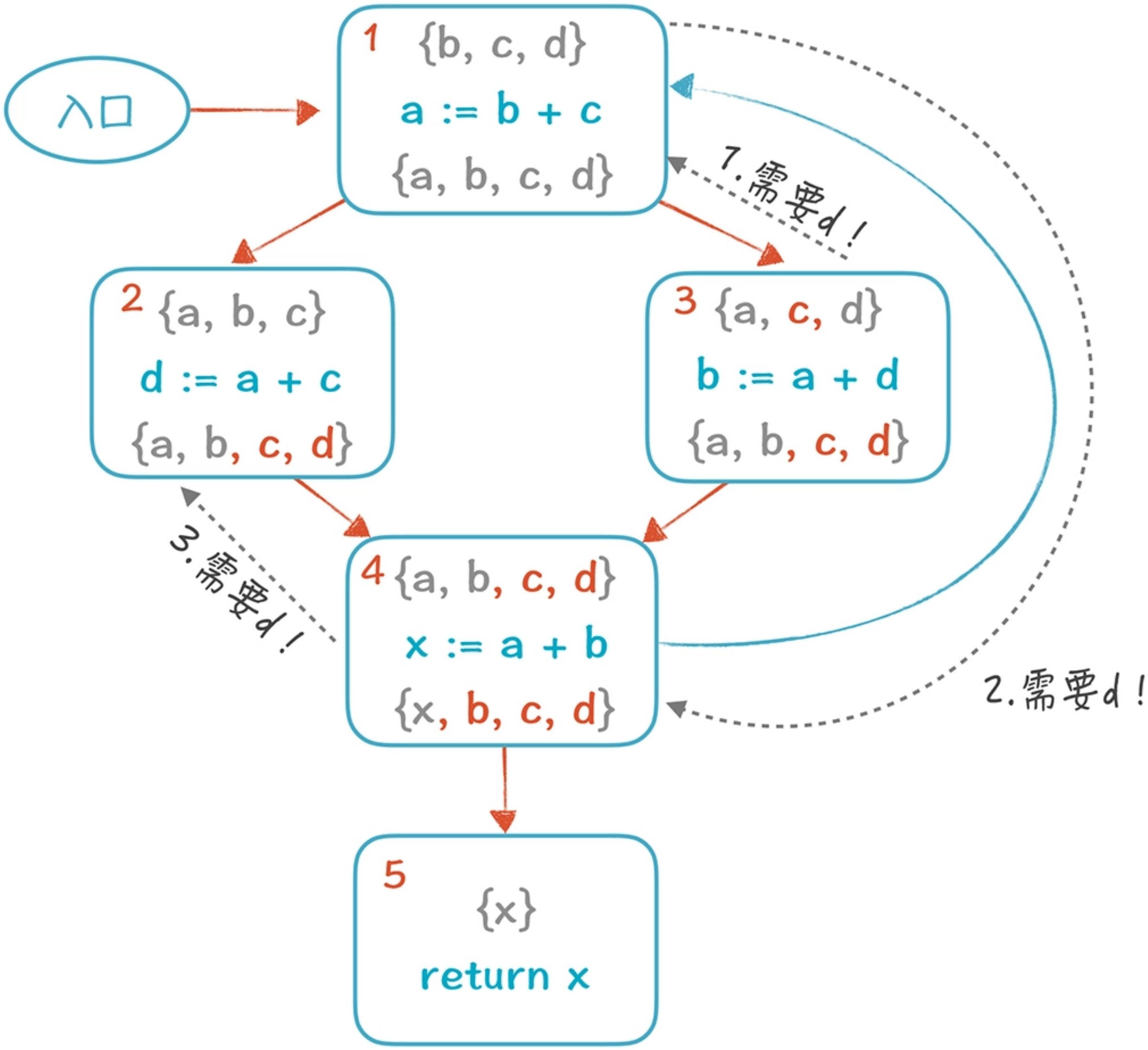
其实，我们不是第一次面对这个处境了。在前端部分，我们计算 First 和 Follow 集合的时候，就会遇到循环依赖的情况，只不过那时候没有像这样展开，细细地分析。不过，你可以回顾一下17 讲和18 讲，那个时候你是用什么算法来破解僵局的呢？是不动点法。**在这里，我们还是要运用不动点法，具体操作是：**给每个基本块的 V 值都分配初始值，也就是空集合。



然后对所有节点进行多次计算，直到所有集合都稳定为止。第一遍的时候，我们按照 5-4-3-2-1 的顺序计算（实际上，采取任何顺序都可以），计算结果如下：

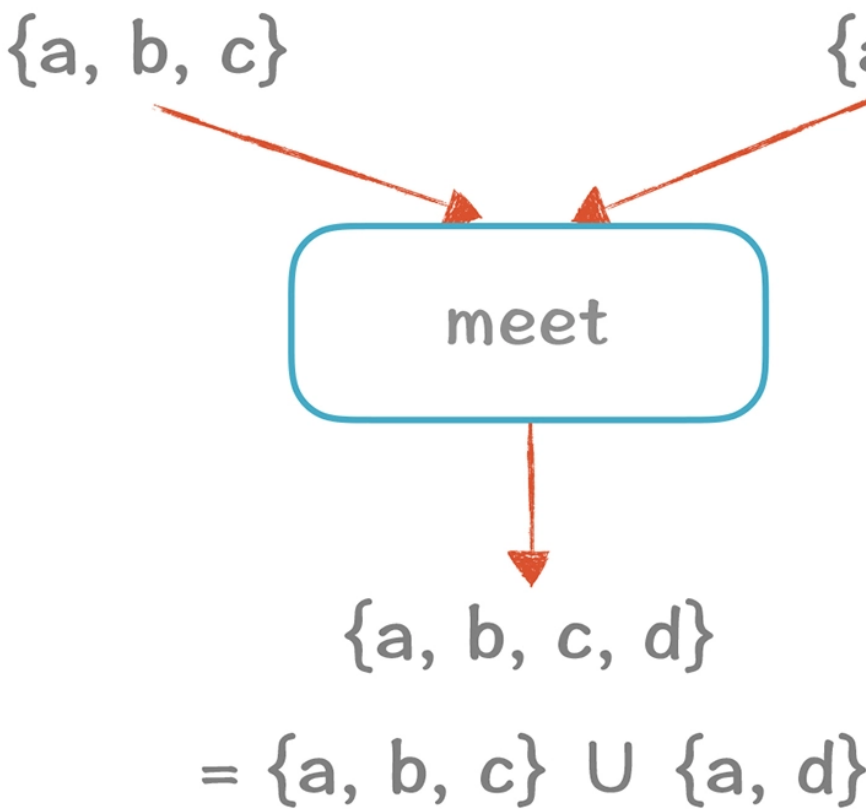


如果现在计算就结束，我们实际上可以把基本块 2 中的 d 变量删掉。但如果我们再按照 5-4-3-2-1 的顺序计算一遍，就会往集合里增加一些新的元素（在图中标的是橙色）。**这是因为，**在计算基本块 4 的时候，基本块 1 的输出{b, c, d}也会变成 4 的输入。这时，我们发现，进入基本块 2 时，活变量集合里是含有 d 的，所以 d 是不能删除的。



你再仔细看看，这个 d 是哪里需要的呢？**是基本块 3 需要的：**它会跟 1 去要，1 会跟 4 要，4 跟 2 要。所以，再次证明，1、2、3、4 四个节点是互相依赖的。

我们再来看一下，对于活变量集合的计算，当两个分支相遇的情况下，最终的结果我们取了两个分支的并集。



在上一讲，我们说一个本地优化分析包含四个元素：方向（D）、值（V）、转换函数（F）和初始值（I）。在做全局优化的时候，我们需要再多加一个元素，就是两个分支相遇的时候，要做一个运算，计算他们相交的值，这个运算我们可以用大写的希腊字母Λ（lambda）表示。包含了 D、V、F、I 和Λ的分析框架，**就叫做数据流分析。**

那么Λ怎么计算呢？研究者们用了一个数学工具，叫做“半格”（Semilattice），帮助做Λ运算。

直观地理解半格理论

如果要从数学理论角度完全把“半格”这个概念说清楚，需要依次介绍清楚“格”（Lattice）、“半格”（Semilattice）和“偏序集”（Partially Ordered Set）等概念。我想这个可以作为爱好数学的同学的一个研究题目，或者去向离散数学的老师求教。**在我们的课程里，我只是通过举例子，让你对它有直观的认识。**

首先，半格是一种偏序集。偏序集就是集合中只有部分成员能够互相比较大小。**举例来说会比较直观。**在做全局活跃性分析的时候，{a, b, c}和{a, c}相遇，产生的新值是{a, b, c}。我们形式

化地写成{a, b, c} Λ {a, c} = {a, b, c}。

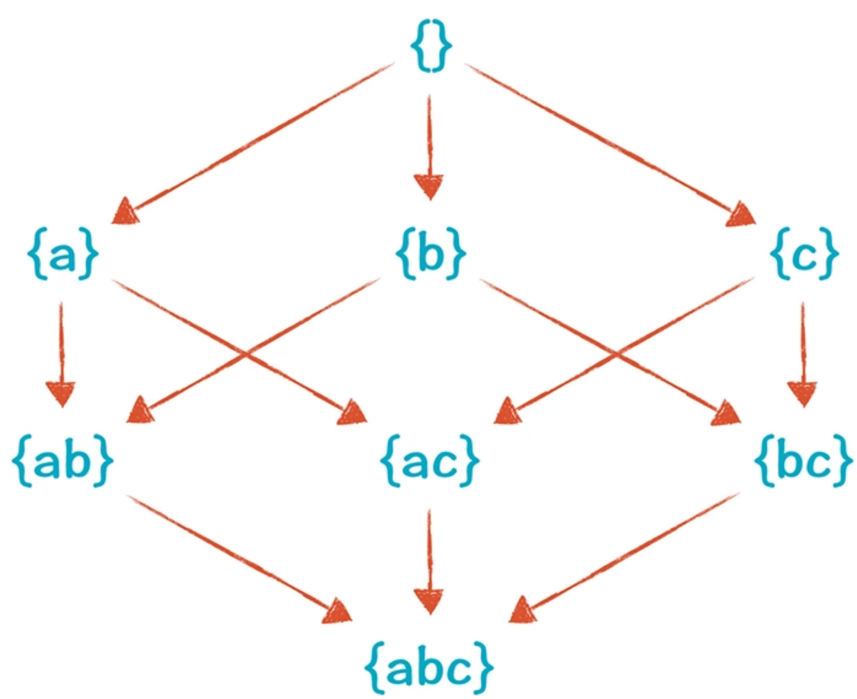
这时候我们说{a, b, c}是可以跟{a, c}比较大小的。那么哪个大哪个小呢？

> 如果 XΛY=X，我们说 X<=Y。

所以，{a, b, c}是比较小的，{a, c}是比较大的。

当然，{a, b, c}也可以跟{a, b}比较大小，但它没有办法跟{c, d}比较大小。所以把包含了{{a, b, c}、{a, c}、{a, b}、{c, d}…}这样的一个集合，叫做偏序集，它们中只有部分成员之间可以比较大小。哪些成员可以比较呢？就是下面的半格图中，可以通过有方向的线连起来的。

半格可以画成图形，理解起来更直观，假设我们的程序只有 a, b, c 三个变量，那么这个半格画成图形是这样的：



沿着上面图中的线，两个值是可以比较大小的，按箭头的方向依次减少：{}>{a}>{a, b}> {a, b, c}。如果两个值之间没有一条路径，那么它们之间就是不能比较大小的，就像{a}和{b}就不能比较大小。

对于这个半格，我们把{}（空集）叫做 Top，Top 大于所有的其他的值。而{a, b, c}叫做 Bottom，它是最小的值。

在做活跃性分析时，我们的Λ运算是计算两个值的最大下界（Greatest Lower Bound）。怎么讲呢？就是比两个原始值都小的值中，取最大的那个。{a}和{b}的最大下界是{a, b}，{a, b, c} 和{a, c}的最大下界就是{a, b, c} 。

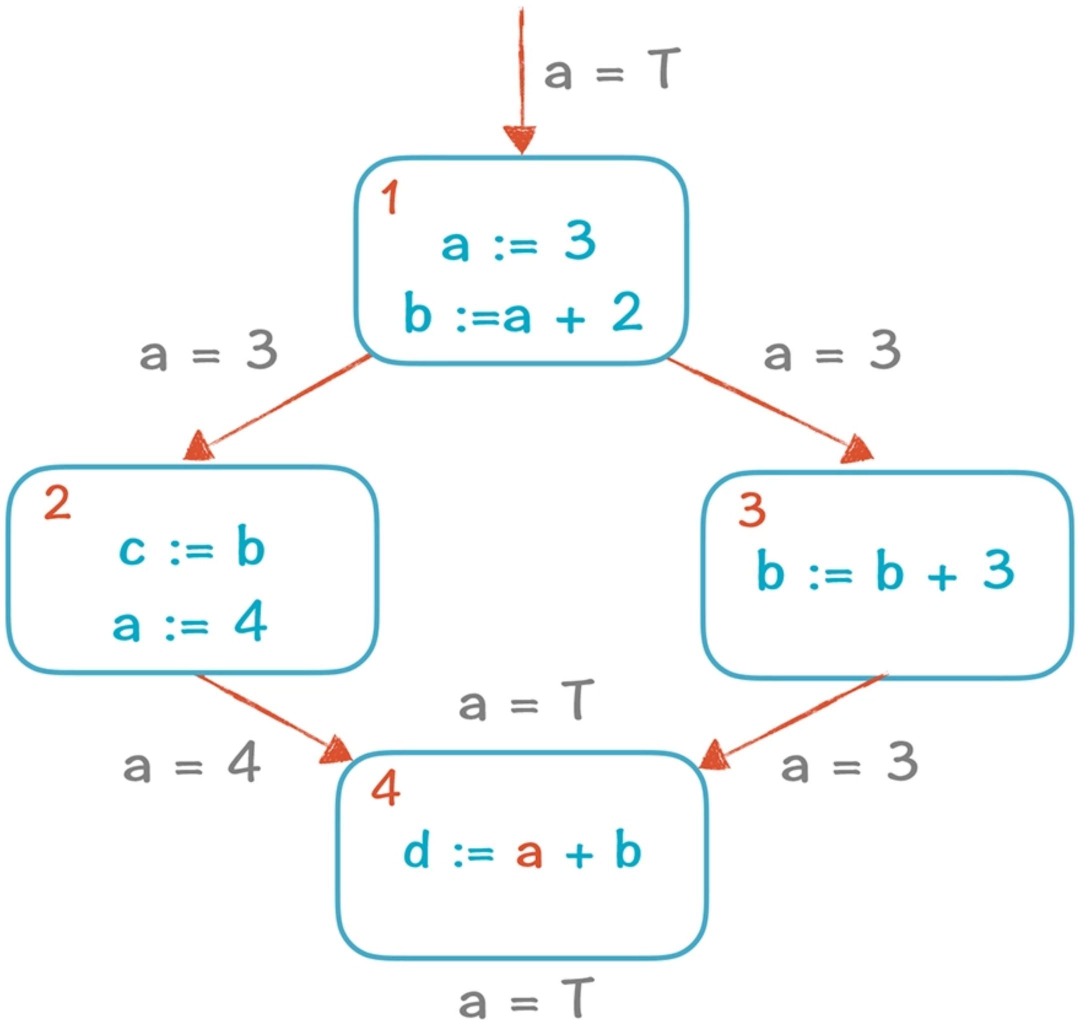
> 如果一个偏序集中，任意两个元素都有最大下界，那么这个偏序集就叫做**交半格（Meet Semilattice）。**
>
> 与此相对应的，如果集合中的每个元素都有**最小上界（Least Upper Bound），那么这个偏序集叫做并半格（Join Semilattice）。**
>
> 如果一个偏序集既是交半格，又是并半格，我们说这个偏序集是一个格，示例的这个偏序集就是一个格。

你可能会奇怪，为什么要引入这么复杂的一套数学工具呢？不就是集合运算吗？两个分支相遇，就计算它们的并集，不就可以了吗？**事情没那么简单。**因为并不是所有的分析，其 V 值都是一个集合，就算是集合，相交时的运算也不一定是求并集，而有可能是求交集。

我们通过另一个案例来分析一下非集合的半格运算：**常数传播。**

数据流分析的场景：常数传播

常数传播，就是如果知道某个变量的值是个常数，那么就把用到这个变量的表达式，都用常数去替换。看看下面的例子，在基本块 4 中，a 的值能否用一个常数替代?



答案是不能。到达基本块 4 的两条路径，一条 a=3，另一条 a=4。我们不知道在实际运行的时候，会从哪条路径过来，所以这个时候 a 的取值是不确定的，基本块 4 中的 a 无法用常数替换。

那么，运用数据流分析的框架怎么来做常数传播分析呢?

在这种情况下，V 不再是一个集合，而是 a 可能取的常数值，但 a 有可能不是一个常数啊，所以我们再定义一个特殊的值：Top（T）。

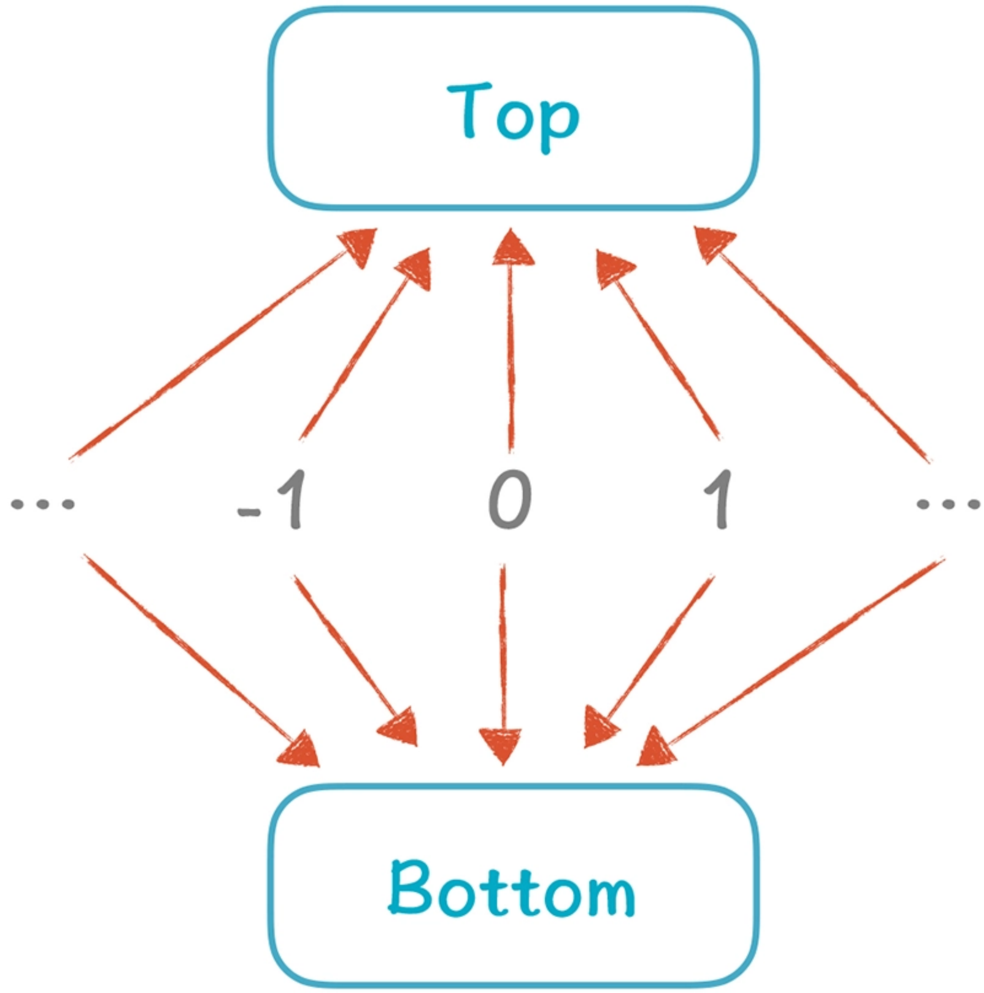
除了 T 之外，我们再引入一个与 T 对应的特殊值：Bottom（它的含义是，某个语句永远不会被执行）。总结起来，常数传播时，V 的取值可能是 3 个：

- 常数 c

Top：意思是 a 的值不是一个常数

Bottom：某个语句不会被执行。

这些值是怎么排序的呢？ 最大的是 Top，中间各个常数之间是无法比较的，Bottom 是最小的。



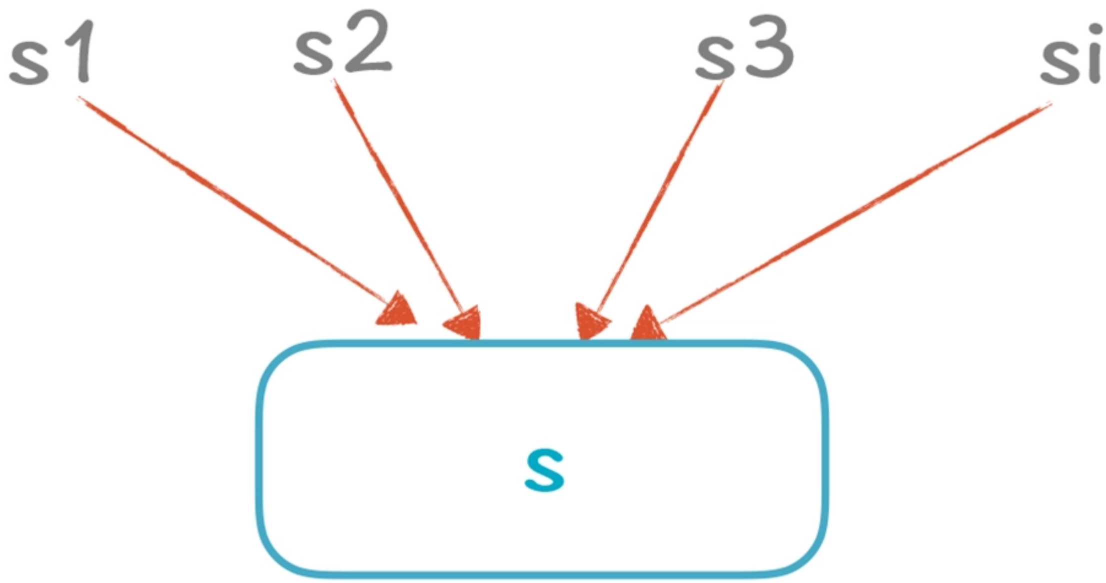
接下来，我们看看如何计算多个 V 值相交的值。

我们再把计算过程形式化一下。在这个分析中，当我们经过每个语句的时候，V 值都可能发生变化，我们用下面两个函数来代表不同地方的 V 值：

C(a, s, in)。表示在语句 s 之前 a 的取值，比如，C(a, b:=a+2, in) = 3。

C(a, s, out)。表示在语句 s 之后 a 的取值，比如，C(a, a:=4, out) = 4。

如果 s 的前序有 i 条可能的路径，那么多个输出和一个输入“C(a, si, out) 和 C(a, s, in)”的关系，可以制定一系列规则：



1. 如果有一条输入路径是 Top，或者说 C(a, si, out) 是 Top，那么结果 C(a, s, in) 就是 Top。

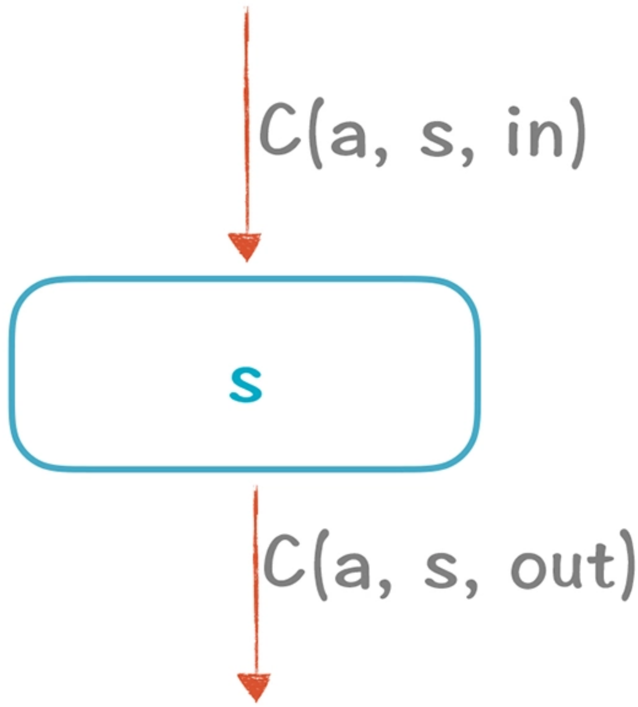
2. 如果输入中有两个不同的常数，比如 3 和 4，那么结果也是 Top（我们的示例就是这种情况）。

3. 如果所有的输入都是相同的常数或 Bottom，那么结果就是该常数。如果所有路径 a 的值都是 3，那么这里就可以安全地认为 a 的值是 3。那些 Bottom 路径不影响，因为整条路径不会执行。

4. 如果所有的输入都是 Bottom，那么结果也是 Bottom。

上面的这 4 个规则，就是一套半格的计算规则。

在这里，我们也可以总结一下它的转换规则，也就是 F，考虑一下某个 Statement 的 in 值和 out 值的关系，也就是经过该 Statement 以后，V 值会有啥变化：



1. 如果输入是 Bottom，那么输出也是 Bottom。也就是这条路径不会经过。

2. 如果该 Statement 就是 “ a := 常数” ，那么输出就是该常数。

3. 如果该 Statement 是 a 赋予的一个比较复杂的表达式，而不是常数，那么输出就是 Top。

4. 如果该 Statement 不是对 a 赋值的，那么 V 值保持不变。

好了，转换函数 F 也搞清楚了。初始值 I 是什么呢？是 Top，因为一开始的时候，a 还没有赋值，所以不会是常数；方向 D 是什么呢？D 是向下。**这个时候，D、V、F、I 和Λ5 个元素都清楚了，我们就可以写算法实现了。**

课程小结

本节课，我们基于全局优化分析的任务，介绍了数据流分析这个框架，并且介绍了半格这个数学工具。**我希望你在本讲记住几个要点：**

> 全局分析比本地分析多处理的部分就是 CFG，因为有了多条执行分支，所以要计算分支相遇时的值，当 CFG 存在环路的时候，要用不动点法来计算出所有的 V 值。

数据流分析框架包含方向（D）、值（V）、转换函数（F）、初始值（I）和交运算（Λ）5 个元素，只要分析清楚这 5 个元素，就可以按照固定的套路来编写分析程序。

对于半格理论，关键是要知道如何比较偏序集中元素的大小，理解了这个核心概念，那么求最大下界、最小上界这些也就没有问题了。

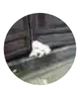
数据流分析也是一个容易让学习者撞墙的知识点，特别是再加上“半格”这样的数学术语的时候。不过，我们通过全局活跃性分析和全局常数传播的示例，对“半格”的抽象数学概念建立了直觉的理解。遇到全局分析的任务，你也应该能够比照这两个示例，设计出完整的数据流分析的算法了。**不过我建议你，**还是要按照上一讲中对 LLVM 优化功能的介绍，多做几个例子实验一下。

一课一思

如果我们想做一个全局分析，用于删除公共子表达式，它的数据流分析框架应该是怎样的？也就是 D、V、F、I 和Λ各自应该如何设计呢？欢迎分享你的想法。

最后，感谢你的阅读，如果这篇文章让你有所收获，也欢迎你将它分享给更多的朋友。

精选留言 (8)



沉淀的梦想

2019-10-28

感觉常数传播这个lambda，本质上也是在求半格的最小上界，是不是我们只要定义好V的所有取值组成的半格，然后数据流分析框架就直接将其最小上界作为lambda，就能解决所有的数据流分析问题了？

作者回复: 我会在答疑部分把数据流分析框架的理论模型再梳理一遍。

是求最小上界，还是最大下界，主要是看如何比较半序集中元素的大小。

国外有的人，把数据流框架定义得比较严格，比如Top跟所有的元素x的meet运算，结果都是x；Botto m跟所有元素x的meet运算，结果都是Bottom。按照这个定义，我们文稿中常量传播的Bottom和Top就要互换。

但也有的人，不觉得必须遵守这个说法，只要有一套规则能计算meet后的结果就行。所以能看到不同的文献，采用不同的叙述方式。

2

dll
2022-07-26

看到 D、V、F、I 和∧ 计算 的时候真的顶不住了，好天书

dll
2022-07-26

那个时候你是用什么算法来破解僵局的呢？是不动点法。在这里，我们还是要运用不动点法，具体操作是：给每个基本块的 V 值都分配初始值，也就是空集合。
这个地方配的说明图应该是错了，第三块应该是 b:=a+d;
但是写成了 b:=a+b;

煊少
2021-04-29

格理论的一个作用应该是为了证明算法一定能有不动点吧？

Geek_89bbab
2020-05-07

问题1： 对于活变量集合的计算，当两个分支相遇的情况下，最终的结果我们取了两个分支的并集。

老师，这里面两条分支相遇，比如 之前图中的2,3相遇的位置，是1，还是4？

问题2：1. 如果有一条输入路径是 Top，或者说 C(a, si, out) 是 Top，那么结果 C(a, s, in) 就是 Top。

这就话啥意思啊？哪一种形式表示输入，哪一种形式表示输出？

Milittle

2020-05-03

老师：有一个疑问就是，这个交半格和并半格 和我们传统的集合代数的交并运算是不是是相反的。这里面的交运算是求并集，而并运算是交集，这里有点困惑。

honnkyou

2019-11-26

是因为meet时有计算并集的情况，也有计算交集的情况，所以引入的半格理论这样理解对吗？

这部分还是有一些没搞太清楚。

作者回复: 在35讲针对半格问题，还有一些补充描述，你看看有没有帮助。

余晓飞

2019-11-21

因为它前面的活变量集合{a}不包括 y，也就是不被后面的代码所使用

这里的集合 {a} 是不是应该为 {x} ？

作者回复: 是滴是滴，文稿写错了，跟图没对起来。

多谢你细心的阅读！