**问题重述**

我们有以下投资问题：

* 市场上有 *n* 种资产 *Si*​（*i*=1,…,*n*），每种资产有：
  + 平均收益率 *ri*​%
  + 风险损失率 *qi*​%
  + 交易费率 *pi*​%，且当购买额不超过 *ui*​ 时，交易费按 *ui*​ 计算
* 银行存款利率为 *r*0​%（无交易费，无风险）
* 公司有资金 *M* 用于投资，可以购买多种资产或存银行
* 总体风险用所投资的资产中最大的一个风险来度量
* 目标是设计投资组合方案，使净收益尽可能大，总体风险尽可能小

**线性假设下的模型建立**

为了简化问题，我们做出以下线性假设：

1. ​**​交易费的线性假设​**​：
   * 当投资额 *xi*​≤*ui*​ 时，交易费为 *pi*​*ui*​
   * 当 *xi*​>*ui*​ 时，交易费为 *pi*​*xi*​
   * 为了线性化，可以假设 *xi*​≥*ui*​ 或 *xi*​=0，即避免部分投资的情况（这是一个简化假设）
2. ​**​净收益的计算​**​：
   * 投资 *xi*​ 到资产 *Si*​ 的净收益为 *ri*​*xi*​−*pi*​max(*xi*​,*ui*​)
   * 如果 *xi*​=0，净收益为 0
   * 如果 *xi*​≥*ui*​，净收益为 (*ri*​−*pi*​)*xi*​
   * 银行存款的净收益为 *r*0​*x*0​，其中 *x*0​ 是存入银行的金额
3. ​**​风险的计算​**​：
   * 投资 *xi*​ 的风险为 *qi*​（如果 *xi*​>0）
   * 总体风险为 max{*qi*​∣*xi*​>0}
   * 银行存款的风险为 0
4. ​**​资金约束​**​：
   * 总投资额和交易费不超过 *M*：*i*=0∑*n*​*xi*​+*i*=1∑*n*​*pi*​max(*xi*​,*ui*​)≤*M*
   * 如果 *xi*​≥*ui*​，则约束为：*x*0​+*i*=1∑*n*​(1+*pi*​)*xi*​≤*M*

**多目标优化问题**

我们需要同时最大化净收益和最小化总体风险，这是一个多目标优化问题：

* 最大化净收益：Net Return=*r*0​*x*0​+*i*=1∑*n*​(*ri*​−*pi*​)*xi*​
* 最小化总体风险：Risk=max{*qi*​∣*xi*​>0}

**转化为单目标优化**

可以通过以下方法将多目标问题转化为单目标问题：

1. ​**​固定风险水平​**​：
   * 给定一个最大可接受风险 *Q*，要求所有投资的资产 *qi*​≤*Q*
   * 然后在这些资产中最大化净收益
2. ​**​固定收益水平​**​：
   * 给定一个最小可接受收益 *R*，然后在这些方案中最小化风险

通常采用第一种方法：

* 选择一组 *Q* 值，对每个 *Q*，求解：max⎩⎨⎧​*r*0​*x*0​+*i*:*qi*​≤*Q*∑​(*ri*​−*pi*​)*xi*​⎭⎬⎫​约束：*x*0​+*i*:*qi*​≤*Q*∑​(1+*pi*​)*xi*​≤*M*,*xi*​≥*ui*​ or *xi*​=0
* 这样可以得到一系列 (*Q*,Net Return) 的解，形成 Pareto 前沿

**课上定理结论的推导**

假设“课上定理”是指在一定线性假设下，最优投资组合的性质，可以推导以下结论：

1. ​**​风险-收益权衡​**​：
   * 高收益资产通常伴随高风险（高 *qi*​）
   * 低风险资产（如银行存款）收益低
   * 最优组合是在风险和收益之间找到平衡
2. ​**​最优投资策略​**​：
   * 对于给定的风险容忍度 *Q*，只投资 *qi*​≤*Q* 的资产
   * 在这些资产中，优先投资 1+*pi*​*ri*​−*pi*​​ 高的资产（单位资金的净收益）
3. ​**​阈值策略​**​：
   * 存在一个收益率阈值 *λ*，只有当 1+*pi*​*ri*​−*pi*​​≥*λ* 时才投资 *Si*​
   * *λ* 由资金约束 *M* 决定
4. ​**​无交易费情况​**​：
   * 如果没有交易费（*pi*​=0），直接按 *ri*​ 排序，优先投资高收益资产

**具体算法步骤**

对于给定的 *Q*：

1. 筛选资产：选择所有 *qi*​≤*Q* 的资产 *Si*​
2. 计算净收益率：*r*^*i*​=1+*pi*​*ri*​−*pi*​​
3. 按 *r*^*i*​ 从高到低排序
4. 依次投资 *xi*​≥*ui*​ 直到资金用尽：
   * 如果剩余资金 ≥(1+*pi*​)*ui*​，则投资 *xi*​=*ui*​，更新剩余资金
   * 否则跳过
5. 将剩余资金存入银行（*x*0​）

**示例计算（部分）**

以 *n*=4 的数据为例：

| ***Si*​** | ***ri*​%** | ***qi*​%** | ***pi*​%** | ***ui*​** |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| S1 | 28 | 2.5 | 1 | 103 |
| S2 | 21 | 1.5 | 2 | 198 |
| S3 | 23 | 5.5 | 4.5 | 52 |
| S4 | 25 | 2.6 | 6.5 | 40 |

银行存款 *r*0​=5%, *p*0​=0, *q*0​=0.

假设 *Q*=2.5%：

* 可选资产：S1 (*q*1​=2.5), S2 (*q*2​=1.5)
* 计算净收益率：
  + *r*^1​=1+1%28−1​=1.0127​≈26.73%
  + *r*^2​=1+2%21−2​=1.0219​≈18.63%
* 优先投资 S1：
  + 投资 *x*1​=103，交易费 *p*1​*x*1​=1.03，总成本 103×1.01≈104.03
* 剩余资金 *M*−104.03，如果足够 198×1.02≈201.96，则投资 S2
* 否则存入银行

**一般情况的结论**

在一般线性假设下：

* 最优投资组合是“bang-bang”型：对每个资产要么不投，要么至少投 *ui*​
* 资产选择取决于净收益率 *r*^*i*​=1+*pi*​*ri*​−*pi*​​ 和风险 *qi*​
* 对于给定的 *Q*，选择 *qi*​≤*Q* 的资产，按 *r*^*i*​ 排序投资
* 风险和收益是矛盾的，需要通过 Pareto 前沿权衡

**数学形式化**

对于一般 *n* 和给定 *Q*：

maxs.t.​*r*0​*x*0​+*i*:*qi*​≤*Q*∑​(*ri*​−*pi*​)*xi*​*x*0​+*i*:*qi*​≤*Q*∑​(1+*pi*​)*xi*​≤*Mxi*​≥*ui*​ or *xi*​=0,∀*ix*0​≥0​

解：

1. 初始化剩余资金 *R*=*M*, *x*0​=0, *xi*​=0
2. 对 *qi*​≤*Q* 的资产按 1+*pi*​*ri*​−*pi*​​ 降序排序
3. 对于每个资产 *i*：
   * 如果 *R*≥(1+*pi*​)*ui*​，则设 *xi*​=*ui*​，*R*←*R*−(1+*pi*​)*ui*​
   * 否则跳过
4. 设 *x*0​=*R*

**最终结论**

在给定的线性假设下，最优投资组合的设计可以总结为：

1. ​**​筛选资产​**​：根据风险容忍度 *Q*，选择 *qi*​≤*Q* 的资产。
2. ​**​排序资产​**​：按调整后的净收益率 *r*^*i*​=1+*pi*​*ri*​−*pi*​​ 从高到低排序。
3. ​**​贪心投资​**​：从高到低依次投资至少 *ui*​ 的资金，直到资金用尽。
4. ​**​剩余资金存银行​**​：将剩余资金存入银行以获取无风险收益。
5. ​**​Pareto 前沿​**​：通过调整 *Q*，得到一系列风险和收益的组合，供决策者选择。