全国大学生数学竞赛非数学类
初赛第 1-13 届试题（2009-2021）

CONTENTS

第 1 章　真题回顾

2009 年大学生数竞非数学类初赛

一、填空题 (本题共 4 个小题，每题 5 分，共 20 分):

(1) 计算 $\iint_D \dfrac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ 其中区域 D 由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域.

(2) 设$f(x)$ 是连续函数，满足$f(x)=3x^2-\displaystyle\int_0^2 f(x)dx-2$，则$f(x)=$

(3) 曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是

(4) 设 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$

第二题: (5 分) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$，其中$n$ 是给定的正整数.

第三题: (15 分) 设函数 $f(x)$ 连续, $g(x)=\displaystyle\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，$A$ 为常数，求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

第四题: (15 分) 已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\pi, 0\leqslant y\leqslant\pi\}$，$L$ 为 D 的正向边界，试证:

$$(1)\ \oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x=\oint_L xe^{-\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\,\mathrm{d}x;$$

$$(2)\ \oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{5}{2}\pi^2.$$

第五题: (10 分) 已知 $y_1=xe^x+e^{2x}, y_2=xe^x+e^{-x}, y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程.

第六题: (10 分) 设抛物线 $y=ax^2+bx+2\ln c$ 过原点，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y\geqslant 0$，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\dfrac{1}{3}$. 试确定 a,b,c 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

第七题: (15 分) 已知 $u_n(x)$ 满足 $u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x$　(n 为正整数)，且 $u_n(1)=\dfrac{e}{n}$，求函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 之和.

第八题: (10 分) 求 $x\to 1-$ 时，与 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

2010 年大学生数竞非数学类初赛

一、计算下列各题 (本题共 5 个小题，每题 5 分，共 25 分，要求写出重要步骤)

(1) 设 $x_n=(1+a)\cdot\left(1+a^2\right)\cdots\left(1+a^{2^n}\right)$，其中 $|a|<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(2) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

(3) 设$s>0$，求$I_n=\int_0^{+\infty}e^{-sx}x^n\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$

(4) 设$f(t)$ 有二阶连续导数，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$g(x,y)=f\left(\frac{1}{r}\right)$，求$\frac{\partial^2g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2g}{\partial y^2}$

(5) 求直线 $l_1:\left\{\begin{array}{l}x-y=0\\ z=0\end{array}\right.$ 与直线 $l_2:\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$ 的距离.

第二题: (15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数，并且

$$f''(x)>0,\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0,\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0\text{，}$$

且存在一点 x_0，使得 $f\left(x_0\right)<0$. 证明: 方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 恰有两个实根.

第三题: (15 分) 设 $y=f(x)$ 由参数方程 $\left\{\begin{array}{l}x=2t+t^2\\ y=\psi(t)\end{array}\right.$ $(t>-1)$ 所确定. 且 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4(1+t)}$，其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数，曲线 $y=\psi(t)$ 与 $y=\int_1^{t^2}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u+\frac{3}{2e}$ 在 $t=1$ 处相切. 求函数 $\psi(t)$.

第四题: (15 分) 设 $a_n>0,S_n=\sum\limits_{k=1}^n a_k$，证明: (1) 当 $\alpha>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛; (2) 当 $\alpha\leqslant 1$，且 $S_n\to\infty(n\to\infty)$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散.

第五题: (15 分) 设 l 是过原点、方向为 (α,β,γ) (其中 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$) 的直线，均匀椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ (其中 $0<c<b<a$，密度为 1) 绕 l 旋转.

(1) 求其转动惯量; (2) 求其转动惯量关于方向 (α,β,γ) 的最大值和最小值.

第六题: (15 分) 设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数，在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 C 上，曲线积分 $\oint_C\frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$ 的值为常数.

(1) 设 L 为正向闭曲线 $(x-2)^2+y^2=1$. 证明: $\oint_L\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=0$；

(2) 求函数 $\varphi(x)$；(3) 设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线，求 $\oint_C\frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

2011 年大学生数竞非数学类初赛

一、计算下列各题 (本题共 4 个小题，每题 6 分，共 24 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}$.

(2) 设 $a_n=\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

(3) 求 $\iint_D \operatorname{sgn}(xy-1)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2\}$.

(4) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的和函数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和

第二题: (本题两问，每问 8 分，共 16 分) 设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为数列，a,λ 为有限数，求证:

1. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$;

2. 如果存在正整数 p，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$.

第三题: (15 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有连续的三阶导数，且 $f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$，求证：在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 x_0，使得 $f'''(x_0)=3$.

第四题: (15 分) 在平面上，有一条从点 $(a,0)$ 向右的射线，线密度为 ρ。在点 $(0,h)$ 处（其中 $h>0$ ）有一质量为 m 的质点。求射线对该质点的引力。

第五题: (15 分) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F\left(z+\dfrac{1}{x},z-\dfrac{1}{y}\right)=0$ 确定的隐函数，且具有连续的二阶偏导数，求证:

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=1 \text{ 和} x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2=0.$$

第六题: (15 分) 设函数 $f(x)$ 连续，a,b,c 为常数，Σ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$。记第一型曲面积分 $I=\iint_\Sigma f(ax+by+cz)dS$. 求证: $I=2\pi\int_{-1}^{1}f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u\right)du$.

2012 年大学生数竞非数学类初赛

一、简答下列各题 (本题共 5 个小题，每题 6 分，共 30 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

2. 求通过直线 $L:\begin{cases}2x+y-3z+2=0,\\5x+5y-4z+3=0\end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 π_1,π_2，使其中一个平面过点 $(4,-3,1)$.

3. 已知函数 $z=u(x,y)e^{ax+by}$, 且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$，确定常数 a,b，使函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0$.

4. 设 $u=u(x)$ 连续可微，$u(2)=1$，且 $\int_L(x+2y)u\,\mathrm{d}x+\left(x+u^3\right)u\,\mathrm{d}y$ 在右半平面上与路径无关，求 $u(x)$.

5. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t$.

第二题: (10 分) 计算 $\int_0^{+\infty}e^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x$.

第三题: (10 分) 求方程$x^2\sin\dfrac{1}{x}=2x-501$ 的近似解，精确到0.001

第四题: (12 分) 设函数 $y=f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)>0, f(0)=0, f'(0)=0$. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}$，其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x,f(x))$ 处切线在 x 轴上的截距.

第五题: (12 分) 求最小实数 C，使得满足 $\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x=1$ 的连续的函数 $f(x)$ 都有

$$\int_0^1 f(\sqrt{x})dx\leqslant C$$

第六题: (12 分) 设 $f(x)$ 为连续函数，$t>0.\Omega$ 是由抛物面 $z=x^2+y^2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=t^2(t>0)$ 所围成起来的部分。定义 $F(t)=\iiint\limits_{\Omega}f\left(x^2+y^2+z^2\right)dV$，求 $F'(t)$

第七题: (14 分) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为正项级数，

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)>0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)<0$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

2013 年大学生数竞非数学类初赛

一、解答下列各题 (共 4 小题, 每小题 6 分, 共 24 分).

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$.

2. 证明广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 不是绝对收敛的

3. 设$y=y(x)$ 由$x^3+3x^2y-2y^3=2$ 所确定，求$y(x)$ 的极值

4. 过曲线 $y=\sqrt[3]{x}(x\geqslant 0)$ 上的点 A 作切线，使得该切线与曲线及 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\frac{3}{4}$ 。求点 A 的坐标。

第二题: (12 分) 计算定积分 $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

第三题: (12 分) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数 $f''(0)$ ，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛。

第四题: (10 分) 设 $|f(x)|\leqslant\pi, f'(x)\geqslant m>0(a\leqslant x\leqslant b)$ ，证明:

$$\left|\int_a^b \sin f(x)dx\right|\leqslant\frac{2}{m}$$

第五题: (14 分) 设 Σ 是一个光滑封闭曲面，方向朝外，给定第二型的曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}\left(x^3-x\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(2y^3-y\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(3z^3-z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

试确定曲面 Σ ，使得积分 I 的值最小，并求该最小值。

第六题: (14 分) 设 $I_a(r)=\int_C\frac{ydx-xdy}{\left(x^2+y^2\right)^a}$, 其中 a 为常数，曲线 C 为椭圆 $x^2+xy+y^2=r^2$ ，取正向。求极限 $\lim\limits_{r\to+\infty}I_a(r)$.

第七题: (14 分) 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性，若收敛，求其和

2014 年大学生数竞非数学类初赛

一、填空题 (共有 5 小题，每小题 6 分，共 30 分)

(1) 已知 $y_1=e^x$ 和 $y_2=xe^x$ 是齐次二阶常系数线性微分方程的解，则该微分方程是

(2) 设有曲面 $S: z=x^2+2y^2$ 和平面 $\pi: 2x+2y+z=0$，则与 π 平行的 S 的切平面方程是

(3) 设$y=y(x)$ 由$x=\int_1^{y-x}\sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right)\mathrm{d}t$ 所确定，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$

(4) 设 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)\,!}$，则 $\lim_{n\to\infty}x_n=$

(5) 已知 $\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$, 则 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=$

第二题: (12 分) 设 n 为正整数，计算 $I=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|\mathrm{d}x$

第三题: (14 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且有正常数 A,B 使得 $|f(x)|\leqslant A,|f''(x)|\leqslant B$，证明: 对于任意 $x\in[0,1]$，有 $|f'(x)|\leqslant 2A+\frac{B}{2}$.

第四题: (14 分) (1) 设一球缺高为 h，所在球半径为 R。证明该球缺的体积为 $\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$，球冠的面积为 $2\pi Rh$.

(2) 设球体 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\leqslant 12$ 被平面 $P: x+y+z=6$ 所截的小球缺为 Ω。记球缺上的球冠为 Σ，方向指向球外，求第二型曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

第五题: (15 分) 设 f 在 $[a,b]$ 上非负连续，严格单增，且存在 $x_n\in[a,b]$ 使得

$$[f(x_n)]^n=\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n\,\mathrm{d}x, \text{求} \lim_{n\to\infty}x_n.$$

第六题: (15 分) 设$A_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$, 求 $\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)$

2015 年大学生数竞非数学类初赛

一、填空题 (共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分)

(1) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\frac{\sin 2\frac{\pi}{n}}{n^2+2}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n^2+n}\right)$

(2) 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$ 所决定，其中 $F(u,v)$ 具有连续偏导数，且 $xF_u+yF_v\neq 0$，则（结果要求不显含有 F 及其偏导数）$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$

(3) 曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围区域的体积为

(4) 函数$f(x)=\begin{cases}3,x\in[-5,0),\\0,x\in[0,5)\end{cases}$ 在$(-5,5]$ 的傅里叶级数$x=0$ 收敛的值

(5) 设区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $u(x)$ 定义为 $u(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$，则 $u(x)$ 的初等函数表达式为

第二题：(12 分) 设M 是以三个正半轴为母线的半圆锥面，求其方程。

第三题: (12 分) 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二次可导，且存在常数 α,β，使得对于 $\forall x\in(a,b)$，有 $f'(x)=\alpha f(x)+\beta f''(x)$, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导.

第四题: (14 分) 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域与和函数

第五题: (16 分) 设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0,\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1$. 试证:

(1) $\exists x_0\in[0,1]$ 使得 $|f(x_0)|>4$; (2) $\exists x_1\in[0,1]$ 使得 $|f(x_1)|=4$.

第六题: (16 分) 设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上有连续的二阶导数，$f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2\leqslant M$.

若 $f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, 证明: $\left|\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{\pi\sqrt{M}}{4}$

2016 年大学生数竞非数学类初赛

一、填空题 (满分 30 分，每小题 5 分)

1. 若 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，且 $f(a)\neq 0$ ，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{f(a+1/n)}{f(a)}\right]^n=$

2. 若$f(1)=0,f'(1)$ 存在，则极限$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)\tan 3x}{(e^{x^2}-1)\sin x}=$

3. 设 $f(x)$ 有连续导数，且 $f(1)=2$. 记 $z=f\left(e^x y^2\right)$ ，若 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$⌧$f(x)$ 在 $x>0$ 的表达式为

4. 设 $f(x)=e^x\sin 2x$ ，则 $f^{(4)}(0)=$

5. 曲面$z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 平行于平面$2x+2y-z=0$ 的切平面方程为

第二题: (14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0$ ，且当 $x\in(0,1)$⌧$0<f'(x)<1$. 试证: 当 $a\in(0,1)$ 时，有 $\left(\displaystyle\int_0^a f(x)dx\right)^2>\displaystyle\int_0^a f^3(x)\mathrm{d}x.$

第三题: (14 分) 某物体所在的空间区域为 $\Omega: x^2+y^2+2z^2\leqslant x+y+2z$ ，密度函数为 $x^2+y^2+z^2$ ，求质量 $M=\displaystyle\iiint_\Omega\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$

第四题: (14 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数，$f(0)=0,f(1)=1$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=-\frac{1}{2}$$

第五题: (14 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\neq 0$. 证明: 在 $(0,1)$ 内存在不同的两点 x_1,x_2 ，使得 $\dfrac{1}{f\left(x_1\right)}+\dfrac{1}{f\left(x_2\right)}=\dfrac{2}{I}$.

第六题: (14 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3})$ ，用傅里叶 (Fourier) 级数理论证明 $f(x)$ 为常数。

2017 年大学生数竞非数学类初赛

一、填空题 (本题 42 分，共 6 小题，每小题 7 分)

1. 已知可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\cos x+2\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t=x+1$ ，则 $f(x)=$

2. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\\&=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{\pi}{2}=1\end{aligned}$$

4. 设$f(x)$ 具有二阶连续导数, 且$f(0)=f'(0)=0, f''(0)=6$ ，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\sin^2 x\right)}{x^4}=$

5. 不定积分$I=\int\dfrac{e^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}\,\mathrm{d}x=$

6. 记曲面 $z^2=x^2+y^2$ 和 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 围成的空间区域为 V ，则三重积分 $\iiint_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=$

二、(本题 14 分) 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上有连续的二阶偏导数，对任意角度 α ，定义一元函数 $g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)$, 若对任何 α 都有 $\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$ 且 $\dfrac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}>0$ ，证明：$f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值。

三、(本题 14 分) 设曲线 Γ 为曲线 $x^2+y^2+z^2=1, x+z=1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$ 上从点 $A(1,0,0)$ 到点 $B(0,0,1)$ 的一段。求曲线积分 $I=\int_\Gamma ydx+zdy+xdz$.

四、(本题 15 分) 设函数 $f(x)>0$ 且在实轴上连续，若对任意实数 t ，有 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x\leqslant 1$ 。证明: $\forall a,b$⊠$a<b$ ，有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\dfrac{b-a+2}{2}$.

五、(本题 15 分) 设 $\{a_n\}$ 为一个数列，p 为固定的正整数，若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}.$$

2018 年大学生数竞非数学类初赛

一、填空题 (本题满分 24 分，共 4 小题，每小题 6 分)

(1) 设 $\alpha \in (0,1)$ ，则 $\lim\limits_{n \to +\infty}\left[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right]=$

(2) 若曲线 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=t+\cos t \\ e^{y}+ty+\sin t=1 \end{cases}$ 确定，则此曲线在 $t=0$ 对应点处的切线方程为

(3) $\displaystyle\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)}{\left(1+x^{2}\right)^{3/2}} dx$

(4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^{2}}=$

二 (本题满分 8 分) 设函数 $f(t)$ 在 $t \neq 0$ 时一阶连续可导，且 $f(1)=0$ ，求函数 $f\left(x^{2}-y^{2}\right)$ ，使得曲线积分 $\displaystyle\int_{L} y\left[2-f\left(x^{2}-y^{2}\right)\right] \mathrm{d}x+x f\left(x^{2}-y^{2}\right) \mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 L 为任一不与直线 $y=\pm x$ 相交的分段光滑曲线.

三 (本题满分 14 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$. 证明:

$$1 \leqslant \int_{0}^{1} f(x) \mathrm{d}x \int_{0}^{1} \frac{1}{f(x)} \mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{3}.$$

四 (本题满分 12 分) 计算三重积分 $\displaystyle\iiint_{(V)}\left(x^{2}+y^{2}\right) \mathrm{d}V$ ，其中 (V) 是由

$$x^{2}+y^{2}+(z-2)^{2} \geqslant 4, x^{2}+y^{2}+(z-1)^{2} \leqslant 9$$

及 $z \geqslant 0$ 所围成的空间图形.

五 (本题满分 14 分) 设 $f(x,y)$ 在区域 D 内可微，且 $\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^{2}+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^{2}} \leqslant M$ ，$A\left(x_{1}, y_{1}\right), B\left(x_{2}, y_{2}\right)$ 是 D 内两点，线段 AB 包含在 D 内. 证明:

$$\left|f\left(x_{1}, y_{1}\right)-f\left(x_{2}, y_{2}\right)\right| \leqslant M|AB|,$$

其中 $|AB|$ 表示线段 AB 的长度.

六 (本题满分 14 分) 证明: 对于连续函数 $f(x)>0$ ，有

$$\ln \int_{0}^{1} f(x) \mathrm{d}x \geqslant \int_{0}^{1} \ln f(x) \mathrm{d}x.$$

七 (本题满分14 分) 已知 $\{a_{k}\},\{b_{k}\}$ 是正数数列，且$b_{k+1}-b_{k} \geqslant \delta>0, k=1,2, \cdots, \delta$ 为一常数. 证明: 若级数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_{k}$ 收敛，则级数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k \sqrt{\left(a_{1} a_{2} \cdots a_{k}\right)\left(b_{1} b_{2} \cdots b_{k}\right)}}{b_{k+1} b_{k}}$ 收敛

2019 年大学生数竞非数学类初赛

一、填空题（每小题 6 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)-\sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1-\cos x})}=$

2. 设隐函数$y=y(x)$ 由方程$y^2(x-y)=x^2$ 所确定, 则 $\displaystyle\int\frac{dx}{y^2}=$

3. 求定积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}dx=$

4. 已知$du(x,y)=\dfrac{ydx-xdy}{3x^2-2xy+3y^2}$, 则$u(x,y)=$

5. 设$a,b,c,\mu>0$, 曲面$xyz=\mu$ 与曲面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 相切, 则$\mu=\dfrac{abc}{3\sqrt{3}}$

二、(14 分) 计算三重积分 $\displaystyle\iiint_\Omega\frac{xyz}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由曲面 $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=2xy$ 围成的区域在第一卦限部分.

三、(14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微, $f(0)=0$, 且存在常数 $A>0$, 使得 $|f'(x)|\leqslant A|f(x)|$ 在 $[0,+\infty)$ 上成立, 试证明：在 $(0,+\infty)$ 上有 $f(x)\equiv 0$.

四、(14 分) 计算积分$I=\displaystyle\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}e^{\sin\theta(\cos\phi-\sin\phi)}\sin\theta d\theta$

五、(14 分) 设 $f(x)$ 是仅有正实根的多项式函数, 满足 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n$. 试证: $c_n>0$, $(n\geqslant 0)$, 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$ 存在, 且等于 $f(x)$ 的最小根.

六、(14 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上具有连续导数, 满足

$$3\left[3+f^2(x)\right]f'(x)=2\left[1+f^2(x)\right]^2e^{-x^2},$$

且 $f(0)\leqslant 1$. 证明：存在常数 $M>0$, 使得 $x\in[0,+\infty)$ 时, 恒有 $|f(x)|\leqslant M$.

2020 年大学生数竞非数学类初赛

一、填空题 (每小题 6 分，共 30 分)

1. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1}=$

2、设函数 $f(x)=(x+1)^n e^{-x^2}$，则 $f^{(n)}(-1)=$

3、设 $y=f(x)$ 是由方程 $\arctan\dfrac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{\pi}{4}$ 确定的隐函数，且满足 $f(1)=1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为

4、已知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，则 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin(x+y)}{x(x+y)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$

5、设 $f(x),g(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域 U 内有定义，对任意 $x\in U, f(x)\neq g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=a>0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[f(x)]^{g(x)}-[g(x)]^{g(x)}}{f(x)-g(x)}=$

二、(10 分) 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=1, a_{n+1}=\dfrac{a_n}{(n+1)(a_n+1)}, n\geqslant 1$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n!a_n$

三、(12 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$. 证明:

(1) 存在 $x_0\in(0,1)$ 使得 $f(x_0)=2-3x_0$；

(2) 存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，且 $\xi\neq\eta$，使得 $[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$.

四、(12 分) 已知 $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)+2y\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$，其中 f,φ 均为二阶可微函数.

(1) 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；　　(2) 当 $f=\varphi$，且 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-by^2$ 时，求 $f(y)$.

五、(12 分) 计算 $I=\displaystyle\oint_\Gamma|\sqrt{3}y-x|\mathrm{d}x-5z\,\mathrm{d}z$，其中 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=8,\\ x^2+y^2=2z\end{cases}$ 从 z 轴正向往坐标原点看去取逆时钟方向.

六、(12 分) 证明 $f(n)=\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\int_0^m\cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\,\mathrm{d}x$ 等于 n 的所有因子（包 1 和 n 本身）之和，其中 $[x+1]$ 表示不超过 $x+1$ 的最大整数，并计算 $f(2021)$.

七、(14 分) 设 $u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}\quad(n\geqslant 1)$.

(1) 证明数列 $\{u_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$;

(2) 证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛;

(3) 证明当 $p\geqslant 1$ 时级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$ 收敛，并求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$ 的和.

2021 年大学生数竞非数学类初赛

一、填空题（每小题 6 分，共 30 分）

1、极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x+1}\dfrac{x-\ln\left(e^x+x\right)}{x}=$

2、设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$ 所确定的二元隐函数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

3、设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$ ，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=$

4、过三条直线 $L_1:\begin{cases} x=0, \\ y-z=2, \end{cases}$ $,L_2:\begin{cases} x=0, \\ x+y-z+2=0, \end{cases}$ $L_3:\begin{cases} x=\sqrt{2}, \\ y-z=0 \end{cases}$ 圆柱面方程为

5、记 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant \pi\right\}$ ，则

$$\iint_D\left(\sin x^2\cos y^2+x\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$$

二、(14 分) 设 $x_1=2021,\quad x_n^2-2\left(x_n+1\right)x_{n+1}+2021=0(n\geqslant 1)$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

三、(14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是有界连续函数，证明: 方程 $y''+14y'+13y=f(x)$ 的每一个解在 $[0,+\infty)$ 上都是有界函数.

四、(14 分) 对于 4 次齐次函数

$$f(x,y,z)=a_1x^4+a_2y^4+a_3z^4+3a_4x^2y^2+3a_5y^2z^2+3a_6x^2z^2$$

计算曲面积分 $\oiint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$ ，其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$.

五、(14 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数，证明:

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} n^2\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f\left(a+\frac{2k-1}{2n}(b-a)\right)\right]\\=&\frac{(b-a)^2}{24}\left[f'(b)-f'(a)\right].\end{aligned}$$

六、(14 分) 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为正实数列，满足: $a_1=b_1=1$ 且

$$b_n=a_nb_{n-1}-2, n=2,3,\cdots.$$

又设 $\{b_n\}$ 为有界数列，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$ 收敛，并求该级数的和.

第 2 章　答案解析

第 1 届　2009 年大学生数竞非数学类初赛

一、填空题 (本题共 4 个小题，每题 5 分，共 20 分):

(1) 计算 $\iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ 其中区域 D 由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域.

解答： 令 $\sqrt{1-x-y}=u, 1+\frac{y}{x}=v$, 解得 $x=\frac{1-u^2}{v}, y=\frac{\left(1-u^2\right)(v-1)}{v}$

$$D_{uv}=\{(u,v)\mid 0<u\leqslant 1, 1\leqslant v<+\infty\}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{2u}{v} & -\frac{1-u^2}{v^2}\\ -\frac{2u(v-1)}{v} & \frac{1-u^2}{v^2}\end{vmatrix}=\frac{2u\left(u^2-1\right)}{v^2}$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\frac{2u\left(1-u^2\right)}{v^2}, \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}=\frac{\left(1-u^2\right)\ln v}{u}$$

所以由二重积分换元法的积分变换公式, 原积分也就等于

$$\iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint_{D_w}\left(1-u^2\right)^2\cdot\frac{\ln v}{v^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$
$$=2\int_0^1\left(1-u^2\right)^2\,\mathrm{d}u\int_1^{+\infty}\frac{\ln v}{v^2}\,\mathrm{d}v=2\cdot\frac{8}{15}\cdot 1=\frac{16}{15}.$$

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数，满足 $f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)dx-2$，则 $f(x)=$

解答：

$$令A=\int_0^2 f(x)dx, f(x)=3x^2-2-A$$
$$\int_0^2\left(3x^2-2-A\right)dx=\left[x^3-2x-Ax\right]_0^2=8-4-2A=4-2A$$

所以 $A=4-2A\Rightarrow A=\frac{4}{3}$，代入所设函数表达式，得

$$f(x)=3x^2-2-A=3x^2-2-\frac{4}{3}=3x^2-\frac{10}{3}.$$

(3) 曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是

解答： 曲面在任意点 (x,y,z) 处的法向量可以取为 $\vec{n}_S=\left(f_x',f_y',-1\right)=(x,2y,-1)$。平面 $\pi:2x+2y-z=0$ 的法向量为 $\vec{n}_\pi=(2,2,-1)$。于切平面的法向量与平面 π 的法向量平行，也就有

$$\vec{n}_S//\vec{n}_\pi=(x,2y,-1)//(2,2,-1)$$

所以 $\frac{x}{2}=\frac{2y}{2}=\frac{-1}{-1}$，即 $\frac{x}{2}=y=1$，得 $x=2,y=1$，

$$z(2,1)=\left(\frac{x^2}{2}+y^2-2\right)_{(2,1)}=2+1-2=1$$

因此，所求的平面即为经过点 $(2,1,1)$，法向量为 $\vec{n}_S=(2,2,-1)$ 的平面，于是有平面的点法式方程，有 $2(x-2)+2(y-1)-(z-1)=0$，展开化简后有 $2x+2y-z-5=0.$

(4) 设 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$

解答： 对等式两端分别关于 x 求导数，$e^{f(y)}+xe^{f(y)}f'(y)y'(x)=e^y\cdot y'(x)\ln 29$。因为 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$，所以

$$y'(x)=\frac{e^{f(y)}}{[1-f'(y)]\,e^y\ln 29}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=[y'(x)]'=\left[\frac{e^{f(y)}}{e^y[1-f'(y)]\ln 29}\right]'_x\\
&=\frac{\left(e^{f(y)}\right]'\cdot e^y[1-f'(y)]-e^{f(y)}\cdot\{e^y[1-f'(y)]\}'_x}{e^{2y}[1-f'(y)]^2\ln 29}\\
&=\left\{e^{f(y)}\cdot f'(y)\cdot y'(x)\cdot e^y[1-f'(y)]\right.\\
&\left.-e^{f(y)}\cdot e^y y'(x)[1-f'(y)-f''(y)]\right\}/\left\{e^{2y}[1-f'(y)]^2\ln 29\right\}\\
&=\frac{e^{f(y)}y'(x)\cdot\{2f'(y)-f'^2(y)-1+f''(y)\}}{e^y[1-f'(y)]^2\ln 29}
\end{aligned}$$

代入一阶导数表达式$y'(x)=\dfrac{e^{f(y)}}{[1-f'(y)]\,e^y\ln 29}$，有

$$y''=\frac{e^{2f(y)}\{2f'(y)-f'^2(y)-1+f''(y)\}}{e^{2y}[1-f'(y)]^3\ln^2 29}$$

由原等式 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$ 可以推得 $\dfrac{e^{2f(y)}}{e^{2y}\ln^2 29}=\left(\dfrac{e^{f(y)}}{e^y\ln 29}\right)^2=\dfrac{1}{x^2}$，所以

$$y''=\frac{2f'(y)-f'^2(y)-1+f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}=\frac{-[1-f'(y)]^2+f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}$$

第二题: (5 分) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$，其中$n$ 是给定的正整数.

解答： 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{e}{x}\ln\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{e}{x}\ln\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)}$ 由洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e\left[\ln\left(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}\right)-\ln n\right]}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e\left(e^x+2e^x+\cdots+ne^{nx}\right)}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}$$

$$=\frac{e(1+2+\cdots+n)}{n}=\frac{n+1}{2}e$$

于是 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}=e^{\frac{n+1}{2}e}$.

第三题: (15 分) 设函数 $f(x)$ 连续, $g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$，$A$ 为常数，求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解答： 由题设，知 $f(0)=0$，$g(0)=0$. 令 $u=xt$，得 $g(x)=\frac{\int_0^x f(u)du}{x}(x\neq 0)$，

$$g'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}(x\neq 0)$$

由导数定义有 $g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$. 由于

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}g'(x)&=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=g'(0)\end{aligned}$$

从而知 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

第四题: (15 分) 已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\}$，$L$ 为 D 的正向边界，试证:

$$(1)\ \oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x=\oint_L xe^{-\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\,\mathrm{d}x;$$
$$(2)\ \oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{5}{2}\pi^2.$$

解答： (1)

证法 (1): 由于区域 D 为一正方形，可以直接用对坐标曲线积分的计算法计算.

左边 $=\int_0^\pi \pi e^{\sin y}\,\mathrm{d}y-\int_\pi^0\pi e^{-\sin x}\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi\left(e^{\sin x}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}x$，

右边 $=\int_0^\pi \pi e^{-\sin y}dy-\int_\pi^0\pi e^{\sin x}dx=\pi\int_0^\pi\left(e^{\sin x}+e^{-\sin x}\right)dx$，

所以 $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$.

由于 $e^{\sin x}+e^{-\sin x}\geqslant 2+\sin^2 x$，

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\pi\int_0^\pi\left(e^{\sin x}+e^{-\sin x}\right)dx\geqslant\frac{5}{2}\pi^2$$

证法 (2): 根据格林公式，有

$$\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x=\iint_D\left(e^{\sin y}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}\sigma$$
$$\oint_L xe^{-\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\,\mathrm{d}x=\iint_D\left(e^{-\sin y}+e^{\sin x}\right)\mathrm{d}\sigma$$

因为关于 $y=x$ 对称，所以

$$\iint_D \left(e^{\sin y}+e^{-\sin x}\right) d\sigma=\iint_D \left(e^{-\sin y}+e^{\sin x}\right) d\sigma,$$

故 $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx.$

(2) 由 $e^t+e^{-t}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\geqslant 2+t^2$，

$$\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x=\iint_D \left(e^{\sin y}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}\sigma=\iint_D \left(e^{\sin x}+e^{-\sin x}\right)d\sigma\geqslant\frac{5}{2}\pi^2$$

第五题: (10 分) 已知 $y_1=xe^x+e^{2x}, y_2=xe^x+e^{-x}, y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程.

解答： 根据二阶线性非齐次微分方程解的结构的有关知识，由题设可知: e^{2x} 与 e^{-x} 是相应齐次方程两个线性无关的解，且 xe^x 是非齐次的一个特解. 因此可以用下述两种解法。

方法 (1)： 故此方程式 $y''-y'-2y=f(x)$ 。将 $y=xe^x$ 代入上式，得

$$f(x)=(xe^x)''-(xe^x)'-2xe^x=2e^x+xe^x-e^x-xe^x-2xe^x=e^x-2xe^x$$

因此所求方程为 $y''-y'-2y=e^x-2xe^x$.

方法 (2)： 故$y=xe^x+c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$，是所求方程的通解，由

$$y'=e^x+xe^x+2c_1e^{2x}-c_2e^{-x}, y''=4c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+2e^x+xe^x$$

消去 c_1,c_2 得所求方程为 $y''-y'-2y=e^x-2xe^x$.

第六题: (10 分) 设抛物线 $y=ax^2+bx+2\ln c$ 过原点，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y\geqslant 0$，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定 a,b,c 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

解答： 因抛物线过原点，故 $c=1$，由题设有

$$\int_0^1 \left(ax^2+bx\right)dx=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3}.\ \text{即}b=\frac{2}{3}(1-a)\text{，}$$

而 $V=\pi\int_0^1\left(ax^2+bx\right)^2dx=\pi\left[\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{3}b^2\right]$

$$=\pi\left[\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{3}a(1-a)+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}(1-a)^2\right].$$

令 $\frac{dv}{da}=\pi\left[\frac{2}{5}a+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}a-\frac{8}{27}(1-a)\right]=0$，得 $a=-\frac{5}{4}$，代入 b 的表达式得 $b=\frac{3}{2}$. 所以 $y\geqslant 0$

。又因 $\left.\frac{d^2v}{da^2}\right|_{a=-\frac{5}{4}} = \pi\left[\frac{2}{5}-\frac{2}{3}+\frac{8}{27}\right] = \frac{4}{135}\pi > 0$ 及实际情况，当 $a=-\frac{5}{4}, b=\frac{3}{2}, c=1$ 时，体积最小.

第七题: (15 分) 已知 $u_n(x)$ 满足 $u_n'(x) = u_n(x) + x^{n-1}e^x \quad (n$ 为正整数)，且 $u_n(1) = \frac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 之和.

解答： 先解一阶常系数微分方程 $u_n'(x) - u_n(x) = x^{n-1}e^x$ 通解为

$$u_n(x) = e^{\int \mathrm{d}x}\left(\int x^{n-1}e^x e^{-\int \mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + c\right) = e^x\left(\frac{x^n}{n}+c\right)$$

由条件 $u_n(1) = \frac{e}{n}$，得 $c=0$，故 $u_n(x) = \frac{x^n e^x}{n}$，从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n e^x}{n} = e^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

其收敛域为 $[-1,1)$，当 $x \in (-1,1)$ 时，有 $s'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$，故

$$s(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -\ln(1-x)$$

当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = -e^{-1}\ln 2$. 于是，当 $-1 \leqslant x < 1$ 时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = -e^x \ln(1-x)$$

第八题: (10 分) 求 $x \to 1-$ 时，与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

解答： $\int_0^{+\infty} x^{t^2}dt \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} x^{t^2}dt$，

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t^2\ln\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\int_0^{+\infty} e^{-\left(t\sqrt{\ln\frac{1}{x}}\right)^2}\,\mathrm{d}\left(t\sqrt{\ln\frac{1}{x}}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\ln\frac{1}{x}}} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}.$$

第 2 届 2010 年大学生数竞非数学类初赛

一、计算下列各题 (本题共 5 个小题，每题 5 分，共 25 分，要求写出重要步骤)

(1) 设 $x_n=(1+a)\cdot\left(1+a^2\right)\cdots\left(1+a^{2^n}\right)$，其中 $|a|<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解答：

$$
\begin{aligned}
x_n&=\frac{1}{(1-a)}(1-a)(1+a)\cdot\left(1+a^2\right)\cdots\left(1+a^{2^n}\right)\\
&=\frac{1}{(1-a)}\left(1-a^2\right)\cdot\left(1+a^2\right)\cdots\left(1+a^{2^n}\right)\\
&=\frac{1}{(1-a)}\left(1-a^4\right)\cdot\left(1+a^4\right)\cdots\left(1+a^{2^n}\right)=\frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}
\end{aligned}
$$

由于 $|a|<1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{2^{n+1}}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{1}{1-a}$.

(2) 求 $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$

解答：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left[e^{-1}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{x}\\
&=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}-1\right]x\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to\infty} x\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right]\right\}\\
&=\exp\left\{\lim_{x\to\infty} x\left[x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-1\right]\right\}=e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

(3) 设$s>0$，求$I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-sx}x^n\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$

解答： 因为 $s>0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-sx}x^n=0$，所以

$$
I_n=-\frac{1}{s}\int_0^{+\infty} x^n d\left(e^{-sx}\right)=-\frac{1}{s}\left[x^n e^{-sx}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty} e^{-sx}d\left(x^n\right)\right]=\frac{n}{s}I_{n-1}
$$

由此得 $I_n=\dfrac{n}{s}I_{n-1}=\dfrac{n}{s}\cdot\dfrac{n-1}{s}I_{n-2}=\cdots=\dfrac{n!}{s}I_1$.

$$
I_1=\int_0^{+\infty} e^{-sx}x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{s}\left[x^n e^{-sx}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty} e^{-sx}\,\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{s^2}
$$

$$
I_n=\frac{n!}{s^{n-1}}I_1=\frac{n!}{s^{n+1}}.
$$

(4) 设$f(t)$ 有二阶连续导数，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$g(x,y)=f\left(\dfrac{1}{r}\right)$，求$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$

解答： 因为 $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$，所以

$$\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{x}{r^3}f'\left(\frac{1}{r}\right),\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{x^2}{r^6}f''\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{2x^2-y^2}{r^5}f'\left(\frac{1}{r}\right),$$

利用对称性，可得

$$\frac{\partial g}{\partial y}=-\frac{y}{r^3}f'\left(\frac{1}{r}\right),\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{y^2}{r^6}f''\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{2y^2-x^2}{r^5}f'\left(\frac{1}{r}\right),$$

所以

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{1}{r^4}f''\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r^3}f'\left(\frac{1}{r}\right).$$

(5) 求直线 $l_1:\begin{cases}x-y=0\\ z=0\end{cases}$ 与直线 $l_2:\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$ 的距离.

解答： 直线 l_1 的对称式方程为 $l_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$，记两直线的方向向量分别为 $\vec{l}_1=(1,1,0),\vec{l}_2=(4,-2,-1)$，两直线上两定点分别为 $P_1(0,0,0),P_2(2,1,3)$，并记

$$\vec{a}=\overline{P_1P_2}=(2,1,3),\quad \vec{l}_1\times\vec{l}_2=(-1,1,-6);$$

于是两点间的距离为 $d=\frac{\left|\vec{a}\cdot\left(\vec{l}_1\times\vec{l}_2\right)\right|}{\left|\vec{l}_1\times\vec{l}_2\right|}=\frac{|-2+1-18|}{\sqrt{38}}=\sqrt{\frac{19}{2}}.$

第二题: (15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数，并且

$$f''(x)>0,\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0,\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0,$$

且存在一点 x_0，使得 $f(x_0)<0$. 证明: 方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 恰有两个实根.

解答： 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0$，必有一个充分大的 $a>x_0$，使得 $f'(a)>0$. $f''(x)>0$ 可知 $y=f(x)$ 对应的图形为凹函数，从而 $f(x)>f(a)+f'(a)(x-a)(x>a)$. 当 $x\to+\infty$ 时，

$$f(+\infty)+f'(a)(x-a)\to+\infty.$$

故存在 $b>a$，使得 $f(b)>f(a)+f'(a)(b-a)>0$.

由 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0$，必有一个充分大的 $c<x_0$，使得 $f'(c)>0.f''(x)>0$ 可知 $y=f(x)$ 为凹函数，从而 $f(x)>f(c)+f'(c)(x-c)\quad(x<c)$. 当 $x\to-\infty$ 时，

$$f(-\infty)+f'(c)(x-c)\to+\infty.$$

故存在 $d<c$，使得 $f(d)>f(c)+f'(c)(d-c)>0$. 在 $[x_0,b]$ 和 $[d,x_0]$ 利用零点定理，$\exists x_1\in(x_0,b),x_2\in(d,x_0)$ 使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$.

下面证明方程 $y=f(x)$ 只有两个实根:

用反证法。假设 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有三个实根，不妨设为 x_1,x_2,x_3 且 $x_1<x_2<x_3$。对 $f(x)$ 在区间 $[x_1,x_2],[x_2,x_3]$ 上分别用罗尔定理，则各至少存在一点 $\xi_1\in(x_1,x_2),\xi_2\in(x_2,x_3)$，使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$。再将 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用罗尔定理，则至少存在一点 $\eta\in(\xi_1,\xi_2)$，使得 $f''(\eta)=0$，与已知条件 $f''(x)>0$ 矛盾，所以方程不能多于两个实根。

第三题: (15 分) 设 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2t+t^2 \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $(t>-1)$ 所确定. 且 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数，曲线 $y=\psi(t)$ 与 $y=\displaystyle\int_1^{t^2}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u+\frac{3}{2e}$ 在 $t=1$ 处相切. 求函数 $\psi(t)$.

解答： 因为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{2+2t}$，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{2+2t}\frac{(2+2t)\psi''(t)-2\psi'(t)}{(2+2t)^3}=\frac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{4(1+t)^3}$$

由题设 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，故 $\dfrac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{4(1+t)^3}=\dfrac{3}{4(1+t)}$ 从而有 $(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)=3(1+t)^2$，即

$$\psi''(t)-\frac{1}{(1+t)}\psi'(t)=3(1+t)$$

设 $u=\psi'(t)$，故有 $u'-\dfrac{1}{(1+t)}u=3(1+t)$，由一阶非齐次线性微分方程通解计算公式，有

$$\begin{aligned} u&=e^{-\int\left(-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t}\left[\int 3(1+t)e^{\int\left(-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t+C_1\right]\\ &=(1+t)\left[\int 3(1+t)(1+t)^{-1}\,\mathrm{d}t+C_1\right]=(1+t)\left(3t+C_1\right) \end{aligned}$$

由曲线 $y=\psi(t)$ 与 $y=\displaystyle\int_1^{t^2}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u+\frac{3}{2e}$ 在 $t=1$ 处相切知 $\psi(1)=\dfrac{3}{2e},\psi'(1)=\dfrac{2}{e}$. 所以有

$$u|_{t=1}=\psi'(1)=\frac{2}{e}\Rightarrow C_1=\frac{1}{e}-3.$$

于是有

$$\psi(t)=\int(1+t)\left(3t+C_1\right)\mathrm{d}t=t^3+\frac{3+C_1}{2}t^2+C_1t+C_2$$

由 $\psi(1)=\dfrac{3}{2e}\Rightarrow C_2=2$，于是有 $\psi(t)=t^3+\dfrac{1}{2e}t^2+\left(\dfrac{1}{e}-3\right)t+2(t>-1)$.

第四题: (15 分) 设 $a_n>0,S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$，证明: (1) 当 $\alpha>1$ 时，级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛; (2) 当 $\alpha\leqslant 1$，且 $S_n\to\infty(n\to\infty)$ 时，$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散.

解答： 令 $f(x)=x^{1-\alpha}, x\in[S_{n-1},S_n]$，将 $f(x)$ 在 $[S_{n-1},S_n]$ 上用拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(S_{n-1},S_n)$，使得 $f(S_n)-f(S_{n-1})=f'(\xi)(S_n-S_{n-1})$，即

$$S_n^{1-\alpha}-S_{n-1}^{1-\alpha}=(1-\alpha)\xi^{-\alpha}a_n\text{ 。}$$

(1). 当 $\alpha>1$ 时，$\dfrac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\dfrac{1}{S_n^{\alpha-1}}=(\alpha-1)\dfrac{a_n}{\xi^\alpha}\geq(\alpha-1)\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$，显然 $\left\{\dfrac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\dfrac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right\}$ 的前 n 项和有界，从而收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛。

(2). 当 $\alpha=1$ 时，因为 $a_n>0$，S_n 单调递增，所以

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_k}\geqslant\frac{1}{S_{n+p}}\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k=\frac{S_{n+p}-S_n}{S_{n+p}}=1-\frac{S_n}{S_{n+p}}$$

因为 $S_n\to+\infty$ 对任意的 n，当 $p\in N, \dfrac{S_n}{S_{n+p}}<\dfrac{1}{2}$，从而 $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\dfrac{a_k}{S_k}\geqslant\dfrac{1}{2}$. 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散。

(3). 当 $\alpha<1$ 时，$\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}\geqslant\dfrac{a_n}{S_n}$，由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$ 发散及比较判别法，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散。

第五题: (15 分) 设 l 是过原点、方向为 (α,β,γ) (其中 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$) 的直线，均匀椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ (其中 $0<c<b<a$，密度为 1) 绕 l 旋转.

(1) 求其转动惯量; (2) 求其转动惯量关于方向 (α,β,γ) 的最大值和最小值.

解答： (1) 设旋转轴 l 的方向向量为 $\vec{s}=(\alpha,\beta,\gamma)$，椭球内任意点 $P(x,y,z)$ 的径向量为 $\vec{r}$，则点 P 到旋转轴 l 的距离的平方为

$$d^2=\vec{r}^2-(\vec{r}\cdot\vec{s})=\left(1-\alpha^2\right)x^2+\left(1-\beta^2\right)y^2+\left(1-\gamma^2\right)z^2-2\alpha\beta xy-2\beta\gamma yz-2\alpha\gamma xz$$

由积分区域的对称性可知

$$\iiint_\Omega(2\alpha\beta xy+2\beta\gamma yz+2\alpha\gamma xz)\mathrm{d}V=0$$

其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\mid\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1\right\}$ 而

$$\iiint_\Omega x^2dV=\int_{-a}^a x^2\,\mathrm{d}x\iint_{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1-\frac{x^2}{a^2}}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_{-a}^a x^2\cdot\pi ab\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4a^3bc\pi}{15}$$

或者使用换元法，有

$$\iiint_\Omega x^2dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\pi d\varphi\int_0^1 a^2r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta\cdot abcr^2\sin\varphi dr=\frac{4a^3bc\pi}{15}$$

所以可得

$$\iiint_\Omega y^2\,\mathrm{d}V=\frac{4ab^3c\pi}{15},\iiint_\Omega y^2\,\mathrm{d}V=\frac{4abc^3\pi}{15}$$

由转动惯量的定义，有

$$I_l=\iiint_\Omega d^2\,\mathrm{d}V=\frac{4abc\pi}{15}\left[\left(1-\alpha^2\right)a^2+\left(1-\beta^2\right)b^2+\left(1-\gamma^2\right)c^2\right]$$

(2) 考虑函数 $V(\alpha,\beta,\gamma)=\left(1-\alpha^2\right)a^2+\left(1-\beta^2\right)b^2+\left(1-\gamma^2\right)c^2$ 在约束条件 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ 的约束条件下的条件极值。

$$L(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)=\left(1-\alpha^2\right)a^2+\left(1-\beta^2\right)b^2+\left(1-\gamma^2\right)c^2+\lambda\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1\right)$$

令 $L'_\alpha(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)=0,L'_\beta(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)=0,L'_\gamma(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)=0,L'_\lambda(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)=0,$ 解得极值点为

$$Q_1\left(\pm1,0,0,a^2\right),Q_2\left(0,\pm1,0,b^2\right),Q_1\left(0,0,\pm1,c^2\right),$$

比较可知，绕 z 轴 (短轴) 的转动惯量最大，并且有 $I_{\max}=\dfrac{4abc\pi}{15}\left(a^2+b^2\right)$. 绕 x 轴 (长轴) 的转动惯量最小，并且有 $I_{\max}=\dfrac{4abc\pi}{15}\left(b^2+c^2\right)$.

第六题: (15 分) 设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数，在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 C 上，曲线积分 $\oint_C\dfrac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$ 的值为常数.

(1) 设 L 为正向闭曲线 $(x-2)^2+y^2=1$. 证明: $\oint_L\dfrac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=0$；

(2) 求函数 $\varphi(x)$；(3) 设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线，求 $\oint_C\dfrac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

解答： (1) 设 $\oint_L\dfrac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=I$，将曲线 L 分割成两段 $L=L_1+L_2$。设 L_0 不经过原点的光滑曲线，使得 $L_0\cup L_1^-$ 和 $L_0\cup L_2$ 分别组成围绕原点的分段光滑闭曲线. 由已知条件可知 $L_0\cup L_1^-$ 和 $L_0\cup L_2$ 上曲线积分相等，有

$$\oint_{L_0\cup L_1^-}\frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\oint_{L_0\cup L_2}\frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$$

$$\Rightarrow\int_{L_2}+\int_{L_0}=\int_{L_0}+\int_{L_1^-}\Rightarrow\int_{L_2}-\int_{L_1^-}=0\Rightarrow\int_{L_2+L_1}=0\Rightarrow\oint_L\frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=0.$$

(2) 设 $P(x,y)=\dfrac{2xy}{x^4+y^2},Q(x,y)=\dfrac{\varphi(x)}{x^4+y^2}$. 令 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，即

$$\frac{2x^5-2xy^2}{\left(x^4+y^2\right)^2}=\frac{\varphi'(x)\left(x^4+y^2\right)-4x^3\varphi(x)}{\left(x^4+y^2\right)^2}$$

解得 $\varphi(x)=-x^2$.

(3) 设 D 为正向闭曲线 $C_a:x^4+y^2=1$ 所围的闭区域，则

$$\oint_C\frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\oint_{C_a}\frac{2xy\,\mathrm{d}x-x^2\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$$

利用格林公式，有

$$\oint_{C_a}\frac{2xy\,\mathrm{d}x-x^2\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\oint_{C_a}2xy\,\mathrm{d}x-x^2\,\mathrm{d}y=\iint_D(-4x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0.$$

第 3 届　2011 年大学生数竞非数学类初赛

一、计算下列各题 (本题共 4 个小题，每题 6 分，共 24 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}$.

解答： $\because \dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}=\dfrac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^2\ln(1+x)}{x}=e^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2}{x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}-1}{x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}{x}$$
$$=2e^2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=2e^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-e^2$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}=0$.

注 2.1. 可以考虑洛必达法则、带皮亚诺余项的麦克劳林公式

(2) 设 $a_n=\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

解答： 若 $\theta=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

若 $\theta\neq 0$，则当 n 充分大，使得 $0<\left|\dfrac{\theta}{2^n}\right|<\dfrac{\pi}{2}$ 时，

$$a_n=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^n}=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^n}\cdot\sin\frac{\theta}{2^n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}$$
$$=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{2^2}\sin\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}=\frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}$$

从而有, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}=\dfrac{\sin\theta}{\theta}$.

(3) 求 $\displaystyle\iint_D \operatorname{sgn}(xy-1)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

解答： 设 $D_1=\left\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2},0\leqslant y\leqslant 2\right\}$,

$$D_2=\left\{(x,y)\mid\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant\frac{1}{x}\right\},D_3=\left\{(x,y)\mid\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2,\frac{1}{x}\leqslant y\leqslant 2\right\},$$

$$\iint_{D_1\cup D_2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x}=1+2\ln 2,\quad \iint_{D_3}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=3-2\ln 2,$$
$$\iint_D \operatorname{sgn}(xy-1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_3}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\int_{D_1\cup D_2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2-4\ln 2.$$

(4) 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的和函数，并求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和

解答： 令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$，定义区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})\cdot\forall x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, 则

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2n-1}{2^n}t^{2n-2}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-1}=\frac{x}{2-x^2}$$

所以有 $S(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}, x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2}=S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{10}{9}$$

第二题: (本题两问，每问 8 分，共 16 分) 设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为数列，a,λ 为有限数，求证:

1. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$;
2. 如果存在正整数 p，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}$.

解答： 1. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\exists M>0$ 使得 $|a_n|\leqslant M$，且 $\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in N$，当 $n>N_1$ 时，$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$. 因为 $\exists N_2>N_1$，当 $n>N_2$ 时，$\frac{N_1(M+|a|)}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|\leqslant\frac{N_1(M+|a|)}{n}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{(n-N_1)}{n}\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

2. 对于 $i=0,1,\cdots,p-1$, 令 $A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{np+i}$，易知 $\left\{A_n^{(i)}\right\}$ 为 $\{a_{n+p}-a_n\}$ 的子列。由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$，知 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n^{(i)}=\lambda$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}}{n}=\lambda$$

而 $A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}}{n}=\lambda$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{p+i}}{n}=0$，知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{n}=\lambda$. 从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)p+i}\frac{a_{(n+1)p+i}}{n}=\frac{\lambda}{p}.$$

$\forall m\in N,\exists n,p,i\in N,(0\leqslant i\leqslant p-1)$，使得 $m=np+i,$ 且当 $m\to\infty$ 时，$n\to\infty$，所以有 $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{a_m}{m}=\frac{\lambda}{p}$.

第三题：(15 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有连续的三阶导数，且 $f(-1)=0,f(1)=1,f'(0)=0$，求证：在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 x_0，使得 $f'''(x_0)=3$.

解答： 由麦克劳林公式,得 $f(x)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3$，$\eta$ 介于 0 和 x 之间,$x\in[-1,1]$. 分别取 $x=1,x=-1$ ，得

$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(0)+\frac{1}{3!}f'''(\eta_1),0<\eta_1<1.$$
$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(0)-\frac{1}{3!}f'''(\eta_2),-1<\eta_2<0.$$

两式相减，得 $f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6$.
由于 $f'''(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上连续，因此 $f'''(x)$ 在闭区间 $[\eta_2,\eta_1]$ 上有最大值 M 和最小值 m ，从而有 $m\leqslant\frac{f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)}{2}\leqslant M$.
再由闭区间上连续函数的介值定理，至少存在一点 $x_0\in[\eta_2,\eta_1]\subset(-1,1)$ ，使得

$$f'''(x_0)=\frac{f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)}{2}=3$$

第四题: (15 分) 在平面上，有一条从点 $(a,0)$ 向右的射线，线密度为 ρ 。在点 $(0,h)$ 处（其中 $h>0$) 有一质量为 m 的质点。求射线对该质点的引力。

解答： 在 x 轴的 x 处取一小段 dx ，其质量为 ρdx ，到质点的距离为 $\sqrt{h^2+x^2}$ ，这一小段与质点的引力是 $dF=\frac{Gm\rho dx}{h^2+x^2}$ (其中 G 为引力常数)，则有

$$F_x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}F_x=\int_a^{+\infty}\frac{Gm\rho x\,\mathrm{d}x}{(h^2+x^2)^{3/2}}=\frac{Gm\rho}{2}\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x^2)}{(h^2+x^2)^{3/2}}$$
$$=-Gm\rho\left(h^2+x^2\right)^{-1/2}\Big|_a^{+\infty}=\frac{Gm\rho}{\sqrt{h^2+a^2}}.$$

类似有

$$F_y=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}F_y=\int_a^{+\infty}\frac{Gm\rho h\,\mathrm{d}x}{(h^2+x^2)^{3/2}}=\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{Gm\rho h^2\sec^2 t\,\mathrm{d}t}{h^3\sec^3 t}$$
$$=\frac{Gm\rho}{h}\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{Gm\rho}{h}\left(1-\sin\arctan\frac{a}{h}\right)$$

所求引力向量为 $\vec{F}=(F_x,F_y)$.

第五题: (15 分) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F\left(z+\frac{1}{x},z-\frac{1}{y}\right)=0$ 确定的隐函数，且具有连续的二阶偏导数，求证:

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=1\text{ 和 }x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2=0.$$

解答： 对方程两边分别关于 x,y 求导，

$$\frac{\partial z}{\partial x}F_u'-\frac{1}{x^2}F_u'+\frac{\partial z}{\partial x}F_v'=0,\quad F_u'\frac{\partial z}{\partial y}+F_v'\frac{\partial z}{\partial y}+F_v'\frac{1}{y^2}=0$$

由此可得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_u'}{x^2\left(F_u'+F_v'\right)},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-F_v'}{y^2\left(F_u'+F_v'\right)}$ ，所以 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=1$. 对该式再关于 x,y

求导，有

$$2x\frac{\partial z}{\partial x}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0, x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2y\frac{\partial z}{\partial y}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

第一个等式乘以 x ，第二个等式乘以 y ，相加借助于第一个等式的结论可得

$$x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2=0$$

第六题: (15 分) 设函数 $f(x)$ 连续，a,b,c 为常数，Σ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 。记第一型曲面积分 $I=\iint_{\Sigma} f(ax+by+cz)dS$. 求证: $I=2\pi\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u\right)du.$

解答： 由 Σ 的面积为 4π 。当 a,b,c 都为零时，等式显然成立。当它们不全为 0 时，可知原点到平面 $ax+by+cz+d=0$ 的距离是 $\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ 。

设平面 $P_u: u=\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ 其中 u 固定，则 $|u|$ 是原点到平面 P_u 的距离，从而 $-1\leqslant u\leqslant 1$ 。两平面 P_u 和 P_{u+du} 截单位球 Σ 的截下的部分上，被积函数取值为 $f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u\right)$ 。这部分难开可以看成是一个细长条, 这个细长条的长是 $2\pi\sqrt{1-u^2}$ ，宽是 $\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ ，它的面积为 $2\pi du$ ，故得证。

第 4 届 2012 年大学生数竞非数学类初赛

一、简答下列各题 (本题共 5 个小题，每题 6 分，共 30 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

解答： 因为 $(n!)^{\frac{1}{n^2}}=e^{\frac{1}{n^2}\ln(n!)}$, 而

$$\frac{1}{n^2}\ln(n!)\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\cdots+\frac{\ln n}{n}\right),\text{且}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\cdots+\frac{\ln n}{n}\right)=0$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln(n!)=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1$.

2. 求通过直线 $L:\begin{cases}2x+y-3z+2=0,\\5x+5y-4z+3=0\end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 π_1,π_2，使其中一个平面过点 $(4,-3,1)$.

解答： 过直线 L 的平面束方程为 $\lambda(2x+y-3z+2)+\mu(5x+5y-4z+3)=0$，即 $(2\lambda+5\mu)x+(\lambda+5\mu)y-(3\lambda+4\mu)z+2\lambda+3\mu=0$.
若平面 π_1 过点 $(4,-3,1)$，代入得 $\lambda+\mu=0$，即 $\mu=-\lambda$，从而 π_1 的方程为 $3x+4y-z+1=0$.
若平面束中的平面 π_2 与 π_1 垂直，则 $3(2\lambda+5\mu)+4(\lambda+5\mu)+1(3\lambda+4\mu)=0$. 解得 $\lambda=-3\mu$, 从而平面 π_2 的方程为 $x-2y-5z+3=0$.

3. 已知函数 $z=u(x,y)e^{ax+by}$, 且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$，确定常数 a,b，使函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0$.

解答：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{ax+by}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+au(x,y)\right],\frac{\partial z}{\partial y}=e^{ax+by}\left[\frac{\partial u}{\partial y}+bu(x,y)\right]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{ax+by}\left[b\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial y}+abu(x,y)\right]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=e^{ax+by}\left[(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u(x,y)\right],$$

若是上式等于 0，只有 $(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u(x,y)=0$，由此可得 $a=b=1$.

4. 设 $u=u(x)$ 连续可微，$u(2)=1$，且 $\int_L(x+2y)u\,\mathrm{d}x+\left(x+u^3\right)u\,\mathrm{d}y$ 在右半平面上与路径无关，求 $u(x)$.

解答： 由 $\dfrac{\partial[(x+2y)u]}{\partial y}=\dfrac{\partial\left[u\left(x+u^3\right)\right]}{\partial x}$，得

$$\left(x+4u^3\right)u'=u\text{，即}\frac{dx}{du}-\frac{1}{u}x=4u^2\text{，}$$

这是一个一阶线性微分方程，于是由公式有通解为

$$x=e^{\ln u}\left(\int 4u^2e^{-\ln u}du+C\right)=u\left(\int 4udu+C\right)=u\left(2u^2+C\right)$$

由 $u(2)=1$ 得 $C=0$，所以 $u=\left(\dfrac{x}{2}\right)^{1/3}$.

5. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\,\mathrm{d}t$.

解答： 因为当 $x>1$ 时，

$$\left|\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt\right|\leqslant\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{1}{\sqrt{t-1}}dt$$

$$\leqslant 2\sqrt[3]{x}(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})=\frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\to 0(x\to+\infty)$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt=0.$

第二题: (10 分) 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x$.

解答： 由于

$$\int_0^{n\pi}e^{-2x}|\sin x|dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-2x}|\sin x|dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}(-1)^{k-1}e^{-2x}\sin xdx$$

应用分部积分法，有

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}(-1)^{k-1}e^{-2x}\sin xdx=\frac{1}{5}e^{-2k\pi}\left(1+e^{2\pi}\right)$$

$$\text{所以有}\int_0^{n\pi}e^{-2x}|\sin x|dx=\frac{1}{5}\left(1+e^{2\pi}\right)\sum_{k=1}^{n}e^{-2k\pi}=\frac{1}{5}\left(1+e^{2\pi}\right)\frac{e^{-2\pi}-e^{-2(n+1)\pi}}{1-e^{-2\pi}}$$

当 $n\pi\leqslant x\leq(n+1)\pi$ 时，$\displaystyle\int_0^{n\pi}e^{-2x}|\sin x|dx\leqslant\int_0^{x}e^{-2x}|\sin x|dx\leqslant\int_0^{(n+1)\pi}e^{-2x}|\sin x|dx$

当 $n\to\infty$，由两边夹法则，得 $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-2x}|\sin x|dx=\lim_{x\to\infty}\int_0^{x}e^{-2x}|\sin x|dx=\frac{1}{5}\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}$.

注 2.2. 如果最后不用夹逼准则，而用

$$\int_0^{\infty}e^{-2x}|\sin x|dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}e^{-2x}|\sin x|dx=\frac{1}{5}\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}.$$

需要先说明 $\int_0^{\infty} e^{-2x}|\sin x|dx$ 收敛。

第三题: (10 分) 求方程$x^2\sin\frac{1}{x}=2x-501$ 的近似解，精确到0.001

解答： 由泰勒公式 $\sin t=t-\frac{\sin(\theta t)}{2}t^2(0<\theta<1)$ 。令 $t=\frac{1}{x}$ 得

$$\sin\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2,$$

代入原方程，得

$$x-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)=2x-501 \text{ 即} x=501-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right) \text{。}$$

由此知 $x>500, 0<\frac{\theta}{x}<\frac{1}{500}$ ，所以有 $|x-501|=\frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)\right|\leqslant\frac{1}{2}\frac{\theta}{x}<\frac{1}{1000}=0.001$ ，即当 $x=501$ 即为满足题设条件的解。

第四题: (12 分) 设函数 $y=f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)>0, f(0)=0, f'(0)=0$. 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3f(u)}{f(x)\sin^3 u}$ ，其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x,f(x))$ 处切线在 x 轴上的截距.

解答： $y=f(x)$ 上点 $P(x,f(x))$ 处切线方程为 $Y-f(x)=f'(x)(X-x)$ 。令 $Y=0$ ，$X=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$ ，由此得 $u=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$ 且有

$$\lim_{x\to0}u=\lim_{x\to0}\left[x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right]=-\lim_{x\to0}\left[\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x}}{\frac{f'(x)-f'(0)}{x}}\right]=\frac{f'(0)}{f''(0)}=0.$$

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的二阶泰勒公式，

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o\left(x^2\right)=\frac{f''(0)}{2}x^2+o\left(x^2\right)$$

可得 $\lim\limits_{x\to0}\frac{u}{x}=1-\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{xf'(x)}=1-\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{f''(0)}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{xf'(x)}$

$$=1-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f''(0)+o(1)}{\frac{f'(x)-f'(0)}{x}}=1-\frac{1}{2}\frac{f''(0)}{f''(0)}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3f(u)}{f(x)\sin^3 u}=\lim_{x\to0}\frac{x^3\left(\frac{f''(0)}{2}u^2+o\left(u^2\right)\right)}{u^3\left(\frac{f''(0)}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{u}=2.$$

第五题: (12 分) 求最小实数 C ，使得满足 $\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x=1$ 的连续的函数 $f(x)$ 都有

$$\int_0^1 f(\sqrt{x})dx\leqslant C$$

解答： 由于 $\int_0^1|f(\sqrt{x})|dx=\int_0^1|f(t)|2tdt\leqslant 2\int_0^1|f(t)|dt=2$, 取 $f_n(x)=(n+1)x^n$，则有

$$\int_0^1\left|f_n(x)\right|dx=\int_0^1 f_n(x)dx=1$$

而 $\int_0^1 f_n(\sqrt{x})dx=2\int_0^1 tf_n(t)dt=2\frac{n+1}{n+2}=2\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\to 2(n\to\infty)$。
因此最小的实数为 $C=2$。

第六题: (12 分) 设 $f(x)$ 为连续函数，$t>0.\Omega$ 是由抛物面 $z=x^2+y^2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=t^2(t>0)$ 所围成起来的部分。定义 $F(t)=\iiint_\Omega f\left(x^2+y^2+z^2\right)dV$，求 $F'(t)$

解答：

方法 (1): 即 $g=g(t)=\frac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$，则 Ω 在 xOy 面上的投影为 $x^2+y^2\leqslant g$。在曲线 $S:\begin{cases} z=x^2+y^2,\\ x^2+y^2+z^2=t^2\end{cases}$ 上任取一点 (x,y,z)，则圆雕到点的射线和 z 轴的夹角为

$$\theta_t=\arccos\frac{z}{t}=\arccos\frac{g}{t}$$

取 $\Delta t>0$，则 $\theta_t>\theta_{t+\Delta t}$。对于固定的 $t>0$，考虑积分差 $F(t+\Delta t)-F(t)$，这是一个在厚度为 Δt 的球壳上的积分。原点到球壳边缘上的点的射线和 z 轴的夹角在 $\theta_t,\theta_{t+\Delta t}$ 之间。用球坐标计算积分，由积分的连续性可知，存在 $\alpha=\alpha(\Delta t),\theta_{t+\Delta t}\leqslant\alpha\leqslant\theta_t$ 使得

$$F(t+\Delta t)-F(t)=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\alpha d\theta\int_t^{t+\Delta t}f\left(r^2\right)r^2\sin\theta dr$$

即 $F(t+\Delta t)-F(t)=2\pi(1-\cos\alpha)\int_t^{t+\Delta t}f\left(r^2\right)r^2dr.$ 当 $\Delta t\to 0^+$,

$$\cos\alpha\to\cos\theta_t=\frac{g(t)}{t},\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}f\left(r^2\right)r^2dr\to t^2f\left(t^2\right).$$

故 $F(t)$ 的右导数为

$$2\pi\left(1-\frac{g(t)}{t}\right)t^2f\left(t^2\right)=\pi\left(2t+1-\sqrt{1+4t^2}\right)tf\left(t^2\right).$$

当 $\Delta t<0$，考虑 $F(t+\Delta t)-F(t)$ 可得到同样的左导数，因此

$$F'(t)=\pi\left(2t+1-\sqrt{1+4t^2}\right)tf\left(t^2\right).$$

方法 (2): 令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=z$，则区域 Ω 表示为

$$\Omega:0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant a,r^2\leqslant z\leqslant\sqrt{t^2-r^2},$$

其中 a 满足 $a^2+a^4=t^2, a=\dfrac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$，有

$$F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a rdr\int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}}f\left(r^2+z^2\right)dz=2\pi\int_0^a\left[\int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}}f\left(r^2+z^2\right)dz\right]rdr$$

从而有

$$F'(t)=2\pi\left[a\int_{a^2}^{\sqrt{t^2-a^2}}f\left(a^2+z^2\right)dz\frac{da}{dt}+\int_0^a rf\left(r^2+t^2-r^2\right)\frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}}dr\right]$$

注意到 $\sqrt{t^2-a^2}=a^2$，第一个积分为 0，所以有

$$F'(t)=2\pi tf\left(t^2\right)\int_0^a\frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}}dr=-\pi tf\left(t^2\right)\int_0^a\frac{d\left(t^2-r^2\right)}{\sqrt{t^2-r^2}}$$

所以 $F'(t)=\pi tf\left(t^2\right)\left(2t+1-\sqrt{1+4t^2}\right)$.

第七题: (14 分) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为正项级数，

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)>0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)<0$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

解答： (1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)=2\delta>\delta>0$，则存在 $N\in\mathbf{N}$，对于任意的 $n\geqslant N$ 时，

$$\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}>\delta,\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>\delta a_{n+1},a_{n+1}<\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)$$
$$\sum_{n=N}^{m}a_{n+1}<\frac{1}{\delta}\sum_{n=N}^{m}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)\leqslant\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\right)\leqslant\frac{1}{\delta}\frac{a_N}{b_N}$$

因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和有上界，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)<\delta<0$，则存在 $N\in\mathbf{N}$，对于任意的 $n\geqslant N$ 时，$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<\dfrac{b_n}{b_{n+1}}$，有

$$a_{n+1}>\frac{b_{n+1}}{b_n}a_n>\cdots>\frac{b_{n+1}}{b_n}\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdots\frac{b_{N+1}}{b_N}a_N=\frac{a_N}{b_N}b_{n+1},$$

于是由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散。

第 5 届　2013 年大学生数竞非数学类初赛

一、解答下列各题 (共 4 小题, 每小题 6 分, 共 24 分).

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$.

解答： 因为 $\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)=\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}-2n\pi\right)=\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)^n\\
&=\exp\left[\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)\right]=\exp\left[\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right]\\
&=\exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right]=e^{\frac{\pi}{4}}.
\end{aligned}
$$

2. 证明广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 不是绝对收敛的

解答： $a_n=\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx$. 只要证明 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散.

因为 $a_n\geqslant\dfrac{1}{(n+1)\pi}\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin x|dx=\dfrac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=\dfrac{2}{(n+1)\pi}$.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(n+1)\pi}$ 发散. 由正项级数的比较判别法可知，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散，即 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 不绝对收敛.

3. 设$y=y(x)$ 由$x^3+3x^2y-2y^3=2$ 所确定，求$y(x)$ 的极值

解答： 方程两边对 x 求导，得 $3x^2+6xy+3x^2y'-6y^2y'=0\Rightarrow y'=\dfrac{x(x+2y)}{2y^2-x^2}$

令 $y'(x)=0\Rightarrow x=0,x=-2y$ 。将 $x=0,x=-2y$ 代入所给方程，得

$$x=0,y=-1;\quad x=-2,y=1.$$

又有 $y''=\dfrac{\left(2y^2-x^2\right)(2x+2xy+2y)+\left(x^2+2xy\right)\left(4yy'-2x\right)}{\left(2y^2-x^2\right)^2}$ ，从而有

$$y''|_{\substack{x=0\\y=-1\\y\prime=0}}=-1<0,\ y''|_{\substack{x=-2\\y=1\\y'=0}}=1>0$$

所以，$y(0)=-1$ 为极大值，$y(-2)=1$ 为极小值

4. 过曲线 $y=\sqrt[3]{x}(x\geqslant0)$ 上的点 A 作切线，使得该切线与曲线及 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\dfrac{3}{4}$ 。求点 A 的坐标。

解答： 设切点 A 的坐标为 $(t,\sqrt[3]{t})$ ，曲线过 A 点的切线为 $y-\sqrt[3]{t}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}(x-t)$ 。
令 $y=0$ ，可得切线与 x 轴交点的横坐标为 $x_0=-2t$. 因此平面图形的面积 $S=\Delta Ax_0t$ 的面

积-曲边梯形 OtA 的面积

$$S=\frac{1}{2}\sqrt[3]{t}\cdot 3t-\int_0^t\sqrt[3]{x}dx=\frac{3}{4}t\sqrt[3]{t}=\frac{3}{4}\Rightarrow t=1\text{。}$$

所以 A 的坐标为 $(1,1)$ 。

第二题: (12 分) 计算定积分 $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

解答：

$$\begin{aligned}
I&=\int_{-\pi}^{0}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx+\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx\\
&=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^{-x}}{1+\cos^2 x}dx+\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx\\
&=\int_0^{\pi}\left(\arctan e^{-x}+\arctan e^x\right)\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx\\
&=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{8}
\end{aligned}$$

(其中 $\arctan e^{-x}+\arctan e^x=\frac{\pi}{2}$ ，另外

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-u)\sin u}{1+\cos^2 u}du=-\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx+\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

这样可以得到第二个 $\frac{\pi}{2}$)

第三题: (12 分) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数 $f''(0)$ ，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛。

解答：　由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$, 则

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0,f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0.$$

应用洛必达法则，则有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2(x-0)}=\frac{1}{2}f''(0)$.

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}f''(0)$. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛。

第四题: (10 分) 设 $|f(x)|\leqslant\pi,f'(x)\geqslant m>0(a\leqslant x\leqslant b)$ ，证明:

$$\left|\int_a^b\sin f(x)dx\right|\leqslant\frac{2}{m}$$

解答： 因为 $f'(x) \geqslant m > 0(a \leqslant x \leqslant b)$，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增加，从而有反函数。设 $A = f(a), B = f(b), \varphi$ 是 f 的反函数，则

$$0 < \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \leqslant \frac{1}{m},$$

又 $|f(x)| \leqslant \pi$，则 $-\pi \leqslant A < B \leqslant \pi$，所以

$$\left|\int_a^b \sin f(x) dx\right| \underline{\underline{x = \varphi(y)}} \left|\int_A^B \varphi'(y) \sin y dy\right| \leqslant \int_0^\pi \frac{\sin y}{m} dy = \frac{2}{m}$$

第五题: (14 分) 设 Σ 是一个光滑封闭曲面，方向朝外，给定第二型的曲面积分

$$I = \iint_\Sigma \left(x^3 - x\right) \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z + \left(2y^3 - y\right) \mathrm{d}z\, \mathrm{d}x + \left(3z^3 - z\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

试确定曲面 Σ，使得积分 I 的值最小，并求该最小值。

解答： 设 Σ 围成的立体的体积为 V，则由高斯公式，有

$$I = \iiint_V \left(3x^2 + 6y^2 + 9z^2 - 3\right) dV = 3 \iiint_V \left(x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1\right) dV$$

为了使得 $\boldsymbol{I}$ 达到最小，就是要求 V 使得 $\boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{y}^2 + 3z^2 - 1 \leqslant 0$ 的最大空间区域，即

$$V = \left\{(x,y,z) \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leqslant 1\right\}$$

所以 V 是一个椭球，Σ 是椭球 V 的表面时，积分 I 最小。
为了求该最小值，做变换 $x = u, y = v/\sqrt{2}, z = w/\sqrt{3}$⊠$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$，

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{\sqrt{6}} \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leqslant 1} \left(u^2 + v^2 + w^2 - 1\right) dV \\ &= \frac{3}{\sqrt{6}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^1 \left(r^2 - 1\right) r^2 \sin\theta dr = -\frac{4\sqrt{6}}{15}\pi \end{aligned}$$

第六题: (14 分) 设 $I_a(r) = \displaystyle\int_C \frac{ydx - xdy}{\left(x^2 + y^2\right)^a}$, 其中 a 为常数，曲线 C 为椭圆 $x^2 + xy + y^2 = r^2$，取正向。求极限 $\lim\limits_{r \to +\infty} I_a(r)$.

解答： 作变换 $x = \dfrac{u - v}{\sqrt{2}}, y = \dfrac{u + v}{\sqrt{2}}$. 曲线 C 变为 uOv 平面上的 $\Gamma : \dfrac{3}{2}u^2 + \dfrac{1}{2}v^2 = r^2$, 也是取正向且有 $x^2 + y^2 = u^2 + v^2, ydx - xdy = vdu - udv$,

$$I_a(r) = \int_\Gamma \frac{vdu - udv}{\left(u^2 + v^2\right)^a}.$$

作变换 $u = \sqrt{\dfrac{2}{3}} r\cos\theta, v = \sqrt{2} r \sin\theta$, 则有 $vdu - udv = -\dfrac{2}{\sqrt{3}} r^2 d\theta$

$$\boldsymbol{I}_a(r) = -\frac{2r^{2(1-a)}}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(2\cos^2\theta/3 + 2\sin^2\theta\right)^a} = -\frac{2r^2}{\sqrt{3}} \boldsymbol{J}_a$$

其中 $J_a=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\left(2\cos^2\theta/3+2\sin^2\theta\right)^a}, 0<J_a<+\infty.$
因此当 $a>1$ 和 $a<1$，所求极限分别为 0 和 $-\infty$。当 $a=1$，

$$J_1=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\cos^2\theta/3+2\sin^2\theta}=\sqrt{3}\pi.$$

所求极限为 $\lim\limits_{r\to+\infty}I_a(r)=\begin{cases}0, a>1,\\ -\infty, a<1,\\ -2\pi, a=1.\end{cases}$

第七题: (14 分) 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性，若收敛，求其和

解答： (1) 记 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}, u_n=\frac{a_n}{(n+1)(n+2)},\quad n=1,2,\cdots$ 因为 n 充分大时

$$0<a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\int_1^n\frac{1}{x}dx=1+\ln n<\sqrt{n}$$

所以 $u_n\leqslant\frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)}<\frac{1}{n^{3/2}}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。
(2) $a_k=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}(k=1,2,\cdots)$, 则

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{k+1}-\frac{a_k}{k+2}\right)=\left(\frac{a_1}{2}-\frac{a_1}{3}\right)+\left(\frac{a_2}{3}-\frac{a_2}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{a_{n-1}}{n}-\frac{a_{n-1}}{n+1}\right)+\left(\frac{a_n}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{3}\left(a_2-a_1\right)+\frac{1}{4}\left(a_3-a_2\right)+\cdots+\frac{1}{n+1}\left(a_n-a_{n-1}\right)-\frac{1}{n+1}a_n$$
$$=\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n-1)}\right)-\frac{1}{n+2}a_n=1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}a_n.$$

因为 $0<a_n<1+\ln n$, 所以 $0<\frac{a_n}{n+2}<\frac{1+\ln n}{n+2}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\ln n}{n+2}=0$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n+2}=0$. 于是 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1-0-0=1$.

第 6 届 2014 年大学生数竞非数学类初赛

一、填空题 (共有 5 小题，每小题 6 分，共 30 分)

(1) 已知 $y_1 = e^x$ 和 $y_2 = xe^x$ 是齐次二阶常系数线性微分方程的解，则该微分方程是

解答： 由解的表达式可知微分方程对应的特征方程有二重根 $r = 1$, 故所求微分方程为

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0.$$

(2) 设有曲面 $S : z = x^2 + 2y^2$ 和平面 $\pi : 2x + 2y + z = 0$，则与 π 平行的 S 的切平面方程是

解答： 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是 S 上一点，则 S 在点 P_0 的切平面方程为 $-2x_0(x - x_0) - 4y_0(y - y_0) + (z - z_0) = 0$。由于该切平面与已知平面 L 平行，则 $(-2x_0, -4y_0, 1)$ 平行于 $(2, 2, 1)$，故存在常数 $k \neq 0$，使得 $(-2x_0, -4y_0, 1) = k(2, 2, 1)$，故得 $x_0 = -1, y_0 = -\dfrac{1}{2}, z_0 = \dfrac{3}{2}$, 所以切平面方程就为 $2x + 2y + z + \dfrac{3}{2} = 0$.

(3) 设$y = y(x)$ 由$x = \displaystyle\int_1^{y-x} \sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) \mathrm{d}t$ 所确定，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} =$

解答： 易知 $y(0) = 1$, 两边对变量 x 求导，则

$$1 = \sin^2\left(\frac{\pi}{4}(y - x)\right)(y' - 1) \Rightarrow y' = \csc^2\left(\frac{\pi}{4}(y - x)\right) + 1$$

把 $x = 0$ 代入可得 $y' = 3$.

(4) 设 $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)\,!}$，则 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n =$

解答： $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right], 1 - \frac{1}{(n+1)!} \to 1$

(5) 已知 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3$, 则 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} =$

解答： 由 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3$ 可得 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right) = 3.$

于是 $\dfrac{1}{x}\ln\left(1 + x + \dfrac{f(x)}{x}\right) = 3 + \alpha, \alpha \to 0(x \to 0)$，即有 $\dfrac{f(x)}{x^2} = \dfrac{e^{3x+\alpha x} - 1}{x} - 1$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x+\alpha x} - 1}{x} - 1 = \lim_{x\to 0}\frac{3x + \alpha x}{x} - 1 = 2.$$

第二题: (12 分) 设 n 为正整数，计算 $I = \displaystyle\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|\mathrm{d}x$

解答： $I=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{d}{dx}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|dx=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{d}{dx}\cos(\ln x)\right|dx=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}|\sin(\ln x)|\frac{1}{x}dx$

令 $\ln x=u$，则有 $I=\int_{-2n\pi}^{0}|\sin(u)|du=\int_{0}^{2n\pi}|\sin t|dt=4n\int_{0}^{\pi/2}|\sin t|dt=4n.$

第三题: (14 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且有正常数 A,B 使得 $|f(x)|\leqslant A,|f''(x)|\leqslant B$，证明: 对于任意 $x\in[0,1]$，有 $|f'(x)|\leqslant 2A+\frac{B}{2}$.

解答： 由泰勒公式，有

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(0-x)^2,\xi\in(0,x)$$
$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2,\eta\in(x,1)$$

上面两式相减，得到 $f'(x)=f(1)-f(0)-\frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2+\frac{f''(\xi)}{2}x^2$

由条件 $|f(x)|\leqslant A,|f''(x)|\leqslant B$，得到 $|f'(x)|\leqslant 2A+\frac{B}{2}\left[(1-x)^2+x^2\right]$

由于 $(1-x)^2+x^2$ 在 $[0,1]$ 的最大值为 1，所以有 $|f'(x)|\leqslant 2A+\frac{B}{2}$.

第四题: (14 分) (1) 设一球缺高为 h，所在球半径为 R。证明该球缺的体积为 $\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$，球冠的面积为 $2\pi Rh$.

(2) 设球体 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\leqslant 12$ 被平面 $P:x+y+z=6$ 所截的小球缺为 Ω。记球缺上的球冠为 Σ，方向指向球外，求第二型曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解答： (1): 设球缺所在球表面方程为 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$，球缺的中心线为 z 轴，且设球缺所在的圆锥顶角为 2α。记球缺的区域为 Ω，则其体积为

$$\iiint_{\Omega}dV=\int_{R-h}^{R}dz\iint_{D_z}dxdy=\int_{R-h}^{R}\pi\left(R^2-z^2\right)dz=\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2.$$

由于球面的面积微元为 $dS=R^2\sin\theta d\theta$，故球冠的面积为

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\alpha}R^2\sin\theta d\theta=2\pi R^2(1-\cos\alpha)=2\pi Rh.$$

(2) 记球缺 Ω 的底面圆为 P_1，方向指向球缺外，且记 $J=\iint_{P_1}xdydz+ydzdx+zdxdy.$

由高斯公式，有 $I+J=\iiint_{\Omega}3dV=3V(\Omega)$，其中 $V(\Omega)$ 为 Ω 的体积。

由于平面 P 的正向单位法向量为 $\frac{-1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$，故 $J=\frac{-1}{\sqrt{3}}\iint_{P_1}(x+y+z)dS=\frac{-6}{\sqrt{3}}\sigma\left(P_1\right)=-2\sqrt{3}\sigma\left(P_1\right)$, 其中 $\sigma\left(P_1\right)$ 为 P_1 的面积。故 $I=3V(\Omega)-J=3V(\Omega)+2\sqrt{3}\sigma\left(P_1\right)$.

因为球缺底面圆心为 $Q(2,2,2)$，而球缺的顶点为 $D(3,3,3)$，故球缺的高度为 $h=|QD|=\sqrt{3}$.

再由 (1) 所证并代入 $h=\sqrt{3}$ 和 $R=2\sqrt{3}$ 得

$$I=3\cdot\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2+2\sqrt{3}\pi\left(2Rh-h^2\right)=33\sqrt{3}\pi$$

第五题: (15 分) 设 f 在 $[a,b]$ 上非负连续，严格单增，且存在 $x_n\in[a,b]$ 使得

$$[f(x_n)]^n=\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n\,\mathrm{d}x,\text{ 求 }\lim_{n\to\infty}x_n.$$

解答：

(1) 考虑特殊情形：$a=0,b=1$ 。下面证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$. 首先，$x_n\in[0,1]$，即 $x_n\leqslant 1$，只要证明 $\forall\varepsilon>0(\varepsilon<1)$，$\exists N,\forall n>N$ 时，$1-\varepsilon<x_n$ 。

由 f 在 $[0,1]$ 上严格单增，就是要证明 $f^n(1-\varepsilon)<[f(x_n)]^n=\int_0^1[f(x)]^n dx.$

由于 $\forall c\in(0,1)$，有 $\int_c^1[f(x)]^n dx>f^n(c)(1-c)$. 取 $c=1-\frac{\varepsilon}{2}$, 则 $f(1-\varepsilon)<f(c)$, 即 $\frac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}<1$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}\right]^n=0$, 所以 $\exists N,\forall n>N$ 时有 $\left[\frac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}\right]^n<\frac{\varepsilon}{2}=1-c.$ 即

$$f^n(1-\varepsilon)<[f(c)]^n(1-c)\leqslant\int_c^1[f(x)]^n dx\leqslant\int_0^1[f(x)]^n dx=f^n(x_n).$$

从而 $1-\varepsilon<x_n$，由 ε 的任意性得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1.$

(2) 再考虑一般情形。令 $F(t)=f(a+t(b-a))$，由 f 在 $[a,b]$ 上非负连续，严格单增，知 F 在 $[0,1]$ 上非负连续，严格单增。从而 $\exists t_n\in[0,1]$，使得 $F^n(t_n)=\int_0^1F^n(t)dt$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=1.$ 即

$$f^n(a+t_n(b-a))=\int_0^1f^n(a+t(b-a))dt.$$

记$x_n=a+t_n(b-a)$, 则有 $[f(x_n)]^n=\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n dx$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a+(b-a)=b.$

第六题: (15 分) 设$A_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)$

解答：　令 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，因 $A_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n\frac{1}{1+i^2/n^2}$, 所以有 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\int_0^1f(x)dx=\frac{\pi}{4}$ 记 $x_i=\frac{i}{n}$, 则 $A_n=\sum\limits_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x_i)\,dx$, 故 $J_n=n\sum\limits_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x)-f(x_i)]\,dx.$

由拉格朗日中值，存在 $\zeta_i\in(x_{i-1},x_i)$ 使得 $J_n=n\sum\limits_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(\zeta)(x-x_i)\,dx.$

记 m_i,M_i 分别是 $f'(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的最大值和最小值，则 $m_i\leqslant f'(\zeta_i)\leqslant M_i$，故积分 $\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(\zeta)(x-x_i)\,dx$ 介于 $m_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)\,dx,M_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)\,dx$ 之间，所以存在 $\eta_i\in$

(x_{i-1}, x_i) 使得 $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\zeta_i)(x-x_i)\,dx = -f'(\eta_i)(x_i - x_{i-1})^2/2.$

于是，有 $J_n = -\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n} f'(\eta_i)(x_i - x_{i-1})^2 = -\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} f'(\eta_i)$. 从而

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{4} - A_n\right) = \lim_{n\to\infty} J_n = -\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)dx = -\frac{1}{2}[f(1) - f(0)] = \frac{1}{4}.$$

第 7 届　2015 年大学生数竞非数学类初赛

一、填空题 (共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分)

(1) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\dfrac{\sin 2\frac{\pi}{n}}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n^2+n}\right)$

解答：

$$\text{由于}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)\pi}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sin x dx=\frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sin x dx=\frac{2}{\pi}.$$

所以由夹逼准则，可得原极限为 $\dfrac{2}{\pi}$.

(2) 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 所决定，其中 $F(u,v)$ 具有连续偏导数，且 $xF_u+yF_v\neq 0$，则（结果要求不显含有 F 及其偏导数）$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

解答： 对等式两端关于 x,y 分别求偏导数，有

$$\left(1+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x}\right)F_u+\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{z}{x^2}\right)F_v=0\Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y\left(zF_v-x^2F_u\right)}{xF_u+yF_v}$$

类似可得 $y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x\left(zF_u-y^2F_v\right)}{xF_u+yF_v}$, 于是有

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-xy\left(xF_u+yF_v\right)+z\left(xF_u+yF_v\right)}{xF_u+yF_v}=z-xy.$$

(3) 曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围区域的体积为

解答： 曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 切平面:

$$2(x-1)-2(y+1)-(z-3)=0,\ \text{即}z=2x-2y-1.$$

联立 $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ z=2x-2y-1. \end{cases}$ 所围区域在 xOy 面上的投影 D 为:

$$D=\left\{(x,y)\mid(x-1)^2+(y+1)^2\leqslant 1\right\}$$

所求体积为

$$V=\iint_D\left[(2x-2y-1)-\left(x^2+y^2\right)\right]d\sigma=\iint_D\left[1-(x-1)^2-(y+1)^2\right]d\sigma$$

令 $x-1=r\cos t, y+1=r\sin t$, 则原积分为

$$V=\int_0^{2\pi} dt\int_0^1\left(1-r^2\right)rdr=\frac{\pi}{2}$$

(4) 函数$f(x)=\begin{cases}3, x\in[-5,0),\\ 0, x\in[0,5)\end{cases}$ 在$(-5,5]$ 的傅里叶级数$x=0$ 收敛的值

解答： 由狄利克雷收敛定理，容易得到$s(0)=\dfrac{3}{2}$

(5) 设区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $u(x)$ 定义为 $u(x)=\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$，则 $u(x)$ 的初等函数表达式为

解答： 由于 $u^2(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt^2}dt\int_0^{+\infty}e^{-xs^2}ds=\iint_{s\geqslant0,t\geqslant0}e^{-x\left(t^2+s^2\right)}dsdt$ 所以 $u^2(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{+\infty}e^{-x\rho^2}\rho d\rho=\frac{\pi}{4x}\int_0^{+\infty}e^{-x\rho^2}d_\rho\left(x\rho^2\right)=-\frac{\pi}{4x}e^{-x\rho^2}\Big|_{\rho=0}^{\rho=+\infty}=\frac{\pi}{4x}$. 所以有 $u(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.

第二题：(12 分) 设M 是以三个正半轴为母线的半圆锥面，求其方程。

解答： 显然 $O(0,0,0)$ 为 M 的顶点，$A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ 在 M 上。由三点决定的平面 $x+y+z=1$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的交线 L 是 M 的准线。
设 $P(x,y,z)$ 是 M 上的点，(u,v,w) 是 M 的母线 OP 与 L 的交点，则 OP 的方程为

$$\frac{x}{u}=\frac{y}{v}=\frac{z}{w}=\frac{1}{t}, \text{即} u=xt, v=yt, z=zt.$$

代入准线方程，得 $\begin{cases}(x+y+z)t=1,\\ \left(x^2+y^2+z^2\right)t^2=1\end{cases}$ 消去 t，得圆雉面 M 的方程为 $xy+yz+zx=0$.

第三题: (12 分) 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二次可导，且存在常数 α,β，使得对于 $\forall x\in(a,b)$，有 $f'(x)=\alpha f(x)+\beta f''(x)$, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导.

解答： 1. 若 $\beta=0$ 。对于 $\forall x\in(a,b)$，有

$$f'(x)=\alpha f(x), f''(x)=\alpha f'(x)=\alpha^2 f(x),\cdots,f^{(n)}(x)=\alpha^n f(x).$$

从而 $f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导。
2. 若 $\beta\neq0$ 。对于 $\forall x\in(a,b)$，有

$$f'(x)=\frac{f'(x)-\alpha f(x)}{\beta}=A_1f'(x)+B_1f(x),$$

其中 $A_1=\dfrac{1}{\beta}, B_1=\dfrac{\alpha}{\beta}$. 因为 (1) 右端可导，从而有

$$f'''(x)=A_1 f''(x)+B_1 f'(x).$$

设 $f^{(n)}(x)=A_1 f^{(n-1)}(x)+B_1 f^{(n-2)}(x), n>1$, 则 $f^{(n+1)}(x)=A_1 f^{(n)}(x)+B_1 f^{(n-1)}(x)$. 所以 $f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导。

第四题: (14 分) 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域与和函数

解答： 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+2}{(n+1)\left(n^3+2\right)}=0$. 所以收敛半径为 $R=+\infty$，即收敛域为 $(-\infty,+\infty)$。由

$$\frac{n^3+2}{(n+1)!}=\frac{(n+1)n(n-1)}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n)!}+\frac{1}{(n+1)!}(n\geqslant 2)$$

及幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{(n-2)!}, \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{(n)!}, \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{(n+1)!}$ 的收敛域都为 $(-\infty,+\infty)$，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n-2)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)!}$$

用 $S_1(x),S_2(x),S_3(x)$ 分别表示上式右端三个幂级数的和，依据 e^x 的幂级数展开式可得到

$$S_1(x)=(x-1)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}=(x-1)^2e^{x-1}, S_2(x)=e^{x-1},$$

$$(x-1)S_3(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}=e^{x-1}-1,$$

当 $x\neq 1$ 时，有 $S_3(x)=\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}$. 又由于 $S_3(1)=1$.

综合以上讨论，最终幂级数的和函数为 $S(x)=\begin{cases}\left(x^2-2x+2\right)e^{x-1}+\dfrac{1}{x-1}\left(e^{x-1}-1\right), & x\neq 1,\\ 2, & x=1.\end{cases}$

第五题: (16 分) 设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0, \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1$. 试证:
(1) $\exists x_0\in[0,1]$ 使得 $|f(x_0)|>4$; (2) $\exists x_1\in[0,1]$ 使得 $|f(x_1)|=4$.

解答： (1) 若 $\forall x\in[0,1], |f(x)|\leqslant 4$，则

$$1=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)dx\leqslant\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right||f(x)|dx\leqslant 4\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|dx=1.$$

因此 $\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right||f(x)|dx=1$. 而 $4\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|dx=1$, 故 $\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|(4-|f(x)|)dx=0$. 所以对

于任意的 $\forall x\in[0,1], |f(x)|=4$，由连续性知 $f(x)\equiv 4$ 或 $f(x)\equiv -4$。这与条件 $\int_0^1 f(x)dx=0$ 矛盾。所以 $\exists x_0\in[0,1]$ 使得 $|f(x_0)|>4.$

(2) 先证 $\exists x_2\in[0,1]$ 使得 $|f(x_2)|<4.$ 若不然，对于 $\forall x\in[0,1]$，$|f(x)|\geqslant 4$ 成立，则 $f(x)\geqslant 4$ 或 $f(x)\leq -4$ 恒成立，与 $\int_0^1 f(x)dx=0$ 矛盾。再由 $f(x)$ 的连续性及 (1) 的结果，利用介值定理，可得 $\exists x_1\in[0,1]$ 使得 $|f(x_1)|=4.$

第六题: (16 分) 设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上有连续的二阶导数，$f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2\leqslant M.$ 若 $f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, 证明: $\left|\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant \frac{\pi\sqrt{M}}{4}$

解答： 在点 $(0,0)$ 展开 $f(x,y)$ 得

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(\theta x,\theta y)=\frac{1}{2}\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 f(\theta x,\theta y)$$

其中 $\theta\in(0,1)$。

记 $(u,v,w)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2},\frac{\partial^2}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 f(\theta x,\theta y)$，则 $f(x,y)=\frac{1}{2}\left(ux^2+2vxy+wy^2\right).$ 由于 $\|(u,\sqrt{2}u,w)\|=\sqrt{u^2+2v^2+w^2}\leqslant\sqrt{M}$ 以及 $\left\|\left(x^2,\sqrt{2}xy,y^2\right)\right\|=x^2+y^2$，于是有

$$\left|(u,\sqrt{2}u,w)\cdot\left(x^2,\sqrt{2}xy,y^2\right)\right|\leqslant\sqrt{M}\left(x^2+y^2\right),$$

即 $|f(x,y)|\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{M}\left(x^2+y^2\right).$ 从而

$$\left|\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} f(x,y)dxdy\right|\leqslant\frac{\sqrt{M}}{2}\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\left(x^2+y^2\right)dxdy=\frac{\pi\sqrt{M}}{4}.$$

第 8 届 2016 年大学生数竞非数学类初赛

一、填空题 (满分 30 分，每小题 5 分)

1. 若 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，且 $f(a)\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{f(a+1/n)}{f(a)}\right]^n=$

解答： 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{f(a+x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{x}}$，由已知条件: $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，且 $f(a)\neq 0$，由带皮亚诺余项的泰勒公式，有

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a)$$

可得 $f(a+x)=f(a)+f'(a)x+o(x)$，将其代入极限式，则有

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(a+x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f(a)+f'(a)x+o(x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{n\to+\infty}\left[1+\left(\frac{f'(a)}{f(a)}x+o(x)\right)\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{f'(a)}{f(a)}x+o(x)\right)\right]^{\frac{1}{\frac{f'(a)}{f(a)}x+o(x)}}\right\}^{\frac{1}{x}\left[\frac{f'(a)}{f(a)}x+o(x)\right]}$$

$$=\exp\left\{\lim_{n\to+\infty}\frac{f'(a)}{f(a)}\left[1+\frac{o(x)}{x}\right]\right\}=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$$

2. 若$f(1)=0, f'(1)$ 存在，则极限$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)\tan 3x}{\left(e^{x^2}-1\right)\sin x}=$

解答：

$$\begin{aligned}
I&=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)\cdot 3x}{x^2\cdot x}=3\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)}{x^2}\\
&=3\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)-f(1)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}\\
&=3f'(1)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}=3f'(1)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}+\frac{\cos x-1}{x^2}\right)\\
&=3f'(1)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}f'(1).
\end{aligned}$$

3. 设 $f(x)$ 有连续导数，且 $f(1)=2$. 记 $z=f\left(e^x y^2\right)$，若 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$,$f(x)$ 在 $x>0$ 的表达式为

解答： 由题设，得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'\left(e^x y^2\right)e^x y^2=f\left(e^x y^2\right)$. 令 $u=e^x y^2$，得到当 $u>0$, 有 $f'(u)u=f(u)$, 即

$$\frac{f'(u)}{f(u)}=\frac{1}{u}\Rightarrow(\ln f(u))'=(\ln u)'.$$

所以有 $\ln f(u)=\ln u+C_1, f(u)=Cu$. 再由初值条件 $f(1)=2$，可得 $C=2$，即 $f(u)=2u$. 所以当 $x>0$ 时，有 $f(x)=2x$.

4. 设 $f(x)=e^x\sin 2x$，则 $f^{(4)}(0)=$

解答： 由带皮亚诺余项余项的麦克劳林公式，有

$$f(x)=\left[1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+o\left(x^3\right)\right]\cdot\left[2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+o\left(x^4\right)\right]$$

所以 $f(x)$ 展开式的 4 次项为 $-\frac{1}{3!}\left(2x^3\right)\cdot x+\frac{2}{3!}x^4=-x^4$，即有

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!}=-1\text{，故}f^{(4)}(0)=-24.$$

5. 曲面$z=\frac{x^2}{2}+y^2$ 平行于平面$2x+2y-z=0$ 的切平面方程为

解答： 移项，曲面的一般式方程为 $F(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+y^2-z=0$，有

$$\vec{n}(x,y,z)=\left(F_x',F_y',F_z'\right)=(x,2y,-1).$$
$$\vec{n}(x,y,z)//\vec{n}_1\Rightarrow(x,2y,-1)//(2,2,-1).$$

可得 $\frac{x}{2}=\frac{2y}{2}=\frac{-1}{-1}$. 由此可得 $x=2,y=1$，将它代入到曲面方程，可得 $z=3$，即曲面上点 $(2,1,3)$ 处切平面与已知平面平行，所以由平面的点法式方程可得切平面方程为

$$2(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0\text{，即}2x+2y-z=3.$$

第二题: (14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0$，且当 $x\in(0,1)$⊠$0<f'(x)<1$. 试证: 当 $a\in(0,1)$ 时，有 $\left(\int_0^a f(x)dx\right)^2>\int_0^a f^3(x)\mathrm{d}x$.

解答： 不等式的证明转换为证明不等式 $\left(\int_0^a f(x)dx\right)^2-\int_0^a f^3(x)dx>0$.

于是对函数求导，$F'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)dt-f^3(x)=2f(x)\left(\int_0^x f(t)dt-f^2(x)\right)$ 已知条件 $f(0)=0$，可得 $F'(0)=0$，并且由 $0<f'(x)<1$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调增加，即 $f(x)>0$，所以只要证明 $g(x)=2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)>0$. 又 $g(0)=0$，所以只要证明 $g'(x)>0$，于是有

$$g'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)=2f(x)\left[1-f'(x)\right]>0$$

所以 $g(x)$ 单调增加，所以 $g(x)>0,x>0$. 所以也就有 $g(x)=2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)>0$，即 $F'(x)>0$，可得 $F(x)>0$，因此 $F(x)=\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2-\int_0^x f^3(t)dt$ 单调增加，所以 $F(a)>F(0)=0$，即有

$$F(a)=\left(\int_0^a f(t)dt\right)^2-\int_0^a f^3(t)dt>0\Rightarrow\left(\int_0^a f(t)dt\right)^2>\int_0^a f^3(t)dt.$$

第三题: (14 分) 某物体所在的空间区域为 $\Omega:x^2+y^2+2z^2\leqslant x+y+2z$，密度函数为 $x^2+y^2+z^2$

，求质量 $M=\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$

解答： 令 $u=x-\frac{1}{2},v=y-\frac{1}{2},w=\sqrt{2}\left(z-\frac{1}{2}\right)$, 即

$$x=u+\frac{1}{2},y=v+\frac{1}{2},z=\frac{w}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2},$$

则椭球面转换为变量为 u,v,w 的单位球域，即 $\Omega_{uww}:u^2+v^2+w^2\leqslant 1$. 则由三重积分的换元法公式，即

$$M=\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=\iiint_{\Omega_{uvw}}F(u,v,w)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw.$$

$$F(u,v,w)=\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{w}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)^2=u^2+u+v^2+v+\frac{w^2}{2}+\frac{w}{\sqrt{2}}+\frac{3}{4}$$

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|=\left\|\begin{matrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{matrix}\right\|=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

所以原积分就等于

$$M=\iiint_{\Omega_{uvw}}\left(u^2+u+v^2+v+\frac{w^2}{2}+\frac{w}{\sqrt{2}}+\frac{3}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}dudvdw$$

由于单元圆域 $\Omega_{uvw}:u^2+v^2+w^2\leqslant 1$ 关于三个坐标面都对称，所以积分也就等于

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint_{\Omega_{uvw}}\left(u^2+v^2+\frac{w^2}{2}\right)dudvdw+\frac{3}{4\sqrt{2}}\iiint_{\Omega_{uvw}}dudvdw$$

其中 $\frac{3}{4\sqrt{2}}\iiint_{\Omega_{uvw}}dudvdw=\frac{3}{4\sqrt{2}}\frac{4\pi}{3}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

由于积分区域具有轮换对称性，所以有

$$\iiint_{\Omega_{uvw}}u^2dudvdw=\iiint_{\Omega_{uvw}}v^2dudvdw=\iiint_{\Omega_{uvw}}w^2dudvdw$$

$$\iiint\int_{\Omega_{ww}}\left(u^2+v^2+\frac{w^2}{2}\right)dudvdw=\frac{5}{2}\iiint_{\Omega_{uvw}}u^2dudvdw=\frac{5}{6}\iiint_{\Omega_{uvw}}\left(u^2+v^2+w^2\right)dudvdw$$

所以

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint_{\Omega_{\mathrm{mux}}}\left(u^2+v^2+\frac{w^2}{2}\right)dudvdw=\frac{5}{6\sqrt{2}}\iiint_{\Omega_{nw}}\left(u^2+v^2+w^2\right)dudvdw$$

$$=\frac{5}{6\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi dr=\frac{5}{6\sqrt{2}}\cdot 2\pi\cdot[-\cos\varphi]_0^{\pi}\cdot\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1=\frac{5\pi}{3\sqrt{2}}\cdot 2\cdot\frac{1}{5}=\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$$

第四题: (14 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数，$f(0)=0, f(1)=1$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = -\frac{1}{2}$$

解答： 将区间 $[0,1]n$ 等份，分点 $x_k=\dfrac{k}{n}$，则 $\Delta x_k=\dfrac{1}{n}$，且

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta x_k\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[f(x)-f\left(x_k\right)\right]dx\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{f(x)-f\left(x_k\right)}{x-x_k}\left(x-x_k\right)dx\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{f\left(\xi_k\right)-f\left(x_k\right)}{\xi_k-x_k}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(x-x_k\right)dx\right), \xi_k\in\left(x_{k-1},x_k\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n} f'\left(\eta_k\right)\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(x-x_k\right)dx\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n} f'\left(\eta_k\right)\left[-\frac{1}{2}\left(x_k-x_{k-1}\right)^2\right]\right)\\
&= -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f'\left(\eta_k\right)\left(x_k-x_{k-1}\right)\right) = -\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)dx = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

第五题: (14 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \neq 0$. 证明: 在 $(0,1)$ 内存在不同的两点 x_1, x_2，使得 $\dfrac{1}{f\left(x_1\right)}+\dfrac{1}{f\left(x_2\right)}=\dfrac{2}{I}$.

解答： 设 $F(x)=\dfrac{1}{I}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$, 则 $F(0)=0, F(1)=1$. 由介值定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=\dfrac{1}{2}$. 在两个子区间 $(0,\xi),(\xi,1)$ 上分别应用拉格朗日中值定理:

$$\begin{aligned}
F'\left(x_1\right) &= \frac{f\left(x_1\right)}{I} = \frac{F(\xi)-F(0)}{\xi-0} = \frac{1/2}{\xi}, x_1\in(0,\xi),\\
F'\left(x_2\right) &= \frac{f\left(x_2\right)}{I} = \frac{F(1)-F(\xi)}{1-\xi} = \frac{1/2}{1-\xi}, x_2\in(\xi,1)\\
\frac{I}{f\left(x_1\right)}+\frac{I}{f\left(x_2\right)} &= \frac{1}{F'\left(x_1\right)}+\frac{1}{F'\left(x_2\right)} = \frac{\xi}{1/2}+\frac{1-\xi}{1/2} = 2.
\end{aligned}$$

第六题: (14 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3})$，用傅里叶 (Fourier) 级数理论证明 $f(x)$ 为常数。

解答： 由 $f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3})$ 可知，f 是以 $2,\sqrt{3}$ 为周期的函数，所以它的傅里叶系数为

$$a_n=\int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x dx, b_n=\int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x dx$$

由于 $f(x)=f(x+\sqrt{3})$，所以

$$
\begin{aligned}
a_n &= \int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x dx = \int_{-1}^{1} f(x+\sqrt{3})\cos n\pi x dx \\
&= \int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t)\cos n\pi(t-\sqrt{3})dt \\
&= \int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t)[\cos n\pi t\cos\sqrt{3}n\pi + \sin n\pi t\sin\sqrt{3}n\pi]dt \\
&= \cos\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t)\cos n\pi t dt + \sin\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t)\sin n\pi t dt \\
&= \cos\sqrt{3}n\pi\int_{-1}^{1} f(t)\cos n\pi t dt + \sin\sqrt{3}n\pi\int_{-1}^{1} f(t)\sin n\pi t dt
\end{aligned}
$$

所以 $a_n = a_n\cos\sqrt{3}n\pi + b_n\sin\sqrt{3}n\pi$；同理可得 $b_n = b_n\cos\sqrt{3}n\pi - a_n\sin\sqrt{3}n\pi$. 联立，有

$$
\begin{cases}
a_n = a_n\cos\sqrt{3}n\pi + b_n\sin\sqrt{3}n\pi \\
b_n = b_n\cos\sqrt{3}n\pi - a_n\sin\sqrt{3}n\pi
\end{cases}
$$

得 $a_n = b_n = 0(n=1,2,\cdots)$. 而 f 可导，其 Fourier 级数处处收敛于 $f(x)$，所以有

$$
f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \frac{a_0}{2},
$$

其中 $a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ 为常数.

第 9 届 2017 年大学生数竞非数学类初赛

一、填空题 (本题 42 分，共 6 小题，每小题 7 分)

1. 已知可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\cos x+2\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t=x+1$，则 $f(x)=$

解答： 首先令 $x=0$，则由等式可得 $f(0)=1$；对等式两端求导数，则有

$$
\begin{aligned}
&f'(x)\cos x-f(x)\sin x+2f(x)\sin x=1\\
\Rightarrow &f'(x)\cos x+f(x)\sin x=1\\
\Rightarrow &f'(x)+f(x)\tan x=\sec x
\end{aligned}
$$

这是一个非齐次的一阶线性微分方程，由计算公式可得

$$
\begin{aligned}
f(x)&=e^{-\int\tan x\,\mathrm{d}x}\left(\int\sec x e^{\int\tan x\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)\\
&=e^{\ln\cos x}\left(\int\frac{1}{\cos x}e^{-\ln\cos x}dx+C\right)\\
&=\cos x\left(\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+C\right)\\
&=\cos x(\tan x+C)=\sin x+C\cos x
\end{aligned}
$$

代入初值 $f(0)=1$，得 $C=1$，所以 $f(x)=\cos x+\sin x$. 只要求出满足条件的 $f(x)$ 即可，并没有求出所有满足条件的函数。只要满足条件的 $f(x)$ 都为所求的函数。

2. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=$

解答： 【参考解答】: 与第五届第一题差不多，基本思路应该一致，并且由于有平方，所以直接由正弦函数公式

$$
\begin{aligned}
&\sin(n\pi+x)=\pm\sin x\Rightarrow\sin^2(n\pi+x)=\sin^2 x,\\
&\Rightarrow\sin^2(x-n\pi)=\sin^2 x,n\in Z
\end{aligned}
$$

. 于是有

$$
\begin{aligned}
&\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)\\
=&\sin^2\pi\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\sin^2\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}
\end{aligned}
$$

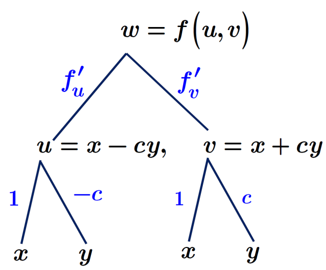
所以

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\\
=&\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{\pi}{2}=1
\end{aligned}
$$

解答： 这样类型的问题在各阶试题中都有，并且在最后发布第三届解题试题时特别强调，多元复合函数求导的重要性；而且这里的复合结构是已知的，所以直接有变量关系图。

3. 设 $w=f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且 $u=x-cy, v=x+cy$ 　其中 c 为非零常数，则 $w_{xx}-\frac{1}{c^2}w_{yy}=$

解答：



由复合函数求导数，有变量关系图。于是有 $w_x=f'_u+f'_v, w_y=-cf'_u+cf'_v$；由于连个偏导数仍然具有与原函数函数相同的复合结构，所以对上面的导函数继续求导，则有

$$\begin{aligned}
w_{xx}&=(f'_u)'_x+(f'_v)'_x=f''_{uu}+f''_{uv}+f''_{vu}+f''_{vv}=f''_{uu}+2f''_{uv}+f''_{vv}\\
w_{yy}&=-c\,(f'_u)'_y+c\,(f'_v)_y\\
&=-c\,[-cf''_{uu}+cf''_{uv}]+c\,[-cf''_{vu}+cf''_{vv}]\\
&=c^2\,[f''_{uu}-f''_{uv}-f''_{vu}+f''_{vv}]=c^2\,[f''_{uu}-2f''_{uv}+f''_{vv}]
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&w_{xx}-\frac{1}{c^2}w_{yy}=f''_{uu}+2f''_{uv}+f''_{vv}-\frac{1}{c^2}\left[c^2\left(f''_{uu}-2f''_{uv}+f''_{vv}\right)\right]\\
&=f''_{uu}+2f''_{uv}+f''_{vv}-\left(f''_{uu}-2f''_{uv}+f''_{vv}\right)=4f''_{uv}
\end{aligned}$$

4. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f(0)=f'(0)=0, f''(0)=6$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f\left(\sin^2 x\right)}{x^4}=$

解答：

方法 (1)：在有泰勒公式应用于解题的竞赛题解析中，特别强调了泰勒公式的两种类型适用的问题类型。这里是求极限，并且是求自变量趋于 0 的极限；毫无疑问，就是用带皮亚诺余项的泰勒公式，并且由于函数由二阶连续导数，所以可以在 0 点可以展开为二阶带皮亚诺余项的泰勒公式，即有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o\left(x^2\right)=3x^2+o\left(x^2\right)$$

由此可得 $f\left(\sin^2 x\right)=3\sin^4 x+o\left(\sin^4 x\right)$，所以将其代入可得极限为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\sin^2 x\right)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin^4 x+o\left(\sin^4 x\right)}{x^4}=3$$

方法 (2)：洛必达法则

5. 不定积分 $I=\int\frac{e^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}\,\mathrm{d}x=$

解答： $I=\int\frac{e^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{e^{-\sin x}2\sin x}{(1-\sin x)^2}\,\mathrm{d}\sin x$ 令 $\sin x=t$，则有

$$I=2\int\frac{te^{-t}}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\int\frac{te^{-t}}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t=-\int\frac{e^{-t}-te^{-t}-e^{-t}}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=-\int\frac{e^{-t}(1-t)-e^{-t}}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t=-\int\frac{e^{-t}}{1-t}\,\mathrm{d}t+\int\frac{e^{-t}}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$-\int\frac{e^{-t}}{1-t}\,\mathrm{d}t=\int\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}e^{-t}=\frac{e^{-t}}{1-t}-\int e^{-t}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{1-t}\right)=\frac{e^{-t}}{1-t}-\int\frac{e^{-t}}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t$$

代入上式可得 $\int\frac{te^{-t}}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{e^{-t}}{1-t}+C$，由于 $\sin x=t$，所以

$$I=\int\frac{e^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{2e^{-\sin x}}{1-\sin x}+C$$

6. 记曲面 $z^2=x^2+y^2$ 和 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 围成的空间区域为 V，则三重积分 $\iiint_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=$

解答：

方法 (1)： 由两个方程，可得边界线方程为 $x^2+y^2=2$，这个题目由被积函数的结构，只包含一个变量 z，而且用平行于 xOy 的平面取截取立体区域，截面都为圆，所以考虑先二后一的截面法计算要简单。以 $z=\sqrt{2}$ 作为分割面，将区域分割成上下两部分，则有

$$\iiint_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega_上} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\iiint_{\Omega_下} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

其中上下积分区域可以描述为

$$\Omega_上:\sqrt{2}\leqslant z\leqslant 2,x^2+y^2\leqslant 4-z^2$$
$$\Omega_下:0\leqslant z\leqslant\sqrt{2},x^2+y^2\leqslant z^2$$

所以有

$$\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_{\sqrt{2}}^2 z\,\mathrm{d}z\iint_{D(x)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\sqrt{2}}^2 z\left(\pi\left(4-z^2\right)\right)\mathrm{d}z=\int_{\sqrt{2}}^2\left(4\pi z-\pi z^3\right)\mathrm{d}z$$

$$=\left[2\pi z^2-\frac{\pi z^4}{4}\right]_{\sqrt{2}}^2=\pi$$

$$\iint_{\Omega_下} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^{\sqrt{2}} z\,\mathrm{d}z\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}\pi z^3\,\mathrm{d}z=\left[\frac{\pi z^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}}=\pi$$

所以 $\iint_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega_上} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iiint_{\Omega_下} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 2\pi.$

方法 (2)： 使用球面坐标

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_V z dx dy dz \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^2 \rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho \\
&= 2\pi\cdot\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\pi/4}\cdot\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^2 = 2\pi
\end{aligned}
$$

二、(本题 14 分) 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上有连续的二阶偏导数，对任意角度 α，定义一元函数 $g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)$, 若对任何 α 都有 $\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$ 且 $\dfrac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}>0$，证明：$f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值。

解答： 根据基于二元函数极值判定极小值的充分条件，

如果函数在 $(0,0)$ 点取到极小值，第一步，判定梯度向量为零向量，即 $\nabla f(0,0) = (f'_x(0,0),f'_y(0,0)) = \overrightarrow{0}$；第二步：判定黑塞矩阵为正定矩阵，对于存在二阶连续偏导数的函数，即由三个偏导数构成的矩阵 $\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix}_{(0,0)}$ 为正定矩阵。

如果符合这样两个前提条件，则可以判定函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 取到极小值，即 $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值。

下面，就依据已知条件我们来验证这样两个条件是满足的。两个步骤中需要二元函数的一阶、二阶偏导数，而已知条件是计算函数 $g_\alpha(t)$ 关于 t 的导数，下面就来计算一下，是否会出现需要的描述形式。

根据已知条件，对函数 $g_\alpha(t)$ 关于 t 求导数，其实又是一个复合函数求导数，令 $x=t\cos\alpha, y=t\sin\alpha$，绘制变量关系图，可得

$$
\begin{aligned}
& g'_\alpha(t) = f'_x(t\cos\alpha,t\sin\alpha)\cdot\cos\alpha + f'_y(t\cos\alpha,t\sin\alpha)\cdot\sin\alpha \\
& \Rightarrow g'_\alpha(0) = f'_x(0,0)\cdot\cos\alpha + f'_y(0,0)\cdot\sin\alpha = \left[f'_x(0,0),f'_y(0,0)\right]\cdot(\cos\alpha,\sin\alpha) \\
& = \|f'_x(0,0),f'_y(0,0)\right]|\cos\theta, \theta = \left(\left[f'_x(0,0),f'_y(0,0)\right],(\cos\alpha,\sin\alpha)\right) = 0
\end{aligned}
$$

要求对于任意的任何 α 都有 $\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$，则必定有

$$
\left|\left[f'_x(0,0),f'_y(0,0)\right]\right| = 0 \Rightarrow f'_x(0,0)=0, f'_y(0,0)=0
$$

因此 $(0,0)$ 是二元函数 $f(x,y)$ 的驻点。

根据已知条件，继续求二阶导数，则有

$$\begin{aligned} g_\alpha''(t) &= (f_x')_x' \cdot \cos\alpha + \left(f_y'\right)_x' \cdot \sin\alpha \\ &= \cos\alpha\left[f_{xx}'' \cdot \cos\alpha + f_{xy}'' \cdot \sin\alpha\right] + \sin\alpha\left[f_{yx}'' \cdot \cos\alpha + f_{yy}'' \cdot \sin\alpha\right] \\ &= (\cos\alpha, \sin\alpha)\begin{pmatrix} f_{xx}'' \cdot \cos\alpha + f_{xy}'' \cdot \sin\alpha \\ f_{yx}'' \cdot \cos\alpha + f_{yy}'' \cdot \sin\alpha \end{pmatrix} \\ &= (\cos\alpha, \sin\alpha)\begin{pmatrix} f_{xx}'' & f_{xy}'' \\ f_{yx}'' & f_{yy}'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

则由 $\dfrac{\mathrm{d}^2 g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2} > 0$，有

$$(\cos\alpha, \sin\alpha)\begin{pmatrix} f_{xx}''(0,0) & f_{xy}''(0,0) \\ f_{xy}''(0,0) & f_{yy}''(0,0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha, \\ \sin\alpha \end{pmatrix} > 0$$

由 α 的任意性，并且向量 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 为非零向量，由此可知这是一个正定二次型，并且矩阵为实对称矩阵，所以矩阵为正定矩阵。矩阵正定，所以驻点为极小值点。

三、(本题 14 分) 设曲线 Γ 为曲线 $x^2+y^2+z^2=1, x+z=1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$ 上从点 $A(1,0,0)$ 到点 $B(0,0,1)$ 的一段。求曲线积分 $I = \displaystyle\int_\Gamma y dx + z dy + x dz.$

解答：

方法 (1)： 对于曲线积分，尤其是开放曲线的曲线积分，最开始应该考虑的积分计算的直接法，即写出曲线的参数方程来计算曲线积分。用连个方程消去 z，即由 $x+z=1, z=1-x$ 代入球面方程，则有

$$\begin{aligned} & x^2+y^2+(1-x)^2=1 \Rightarrow 2x^2-2x+y^2=0 \\ & \Rightarrow 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{2} \Rightarrow 4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2y^2=1 \\ & \Rightarrow x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t, y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t, \\ & \Rightarrow z=1-x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos t, t: 0 \to \pi \end{aligned}$$

将它代入积分表达式，则有

$$I=\int_0^{\pi}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\left(-\frac{1}{2}\sin t\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos t\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t\right)\left(\frac{1}{2}\sin t\right)\right]\mathrm{d}t$$

$$=I=\int_0^{\pi}\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}\sin^2 t+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\cos t-\frac{\sqrt{2}}{4}\cos^2 t\right)+\left(\frac{1}{4}\sin t+\frac{1}{4}\cos t\sin t\right]\right)\mathrm{d}t$$

$$=I=\int_0^{\pi}\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\cos t+\frac{1}{4}\sin t+\frac{1}{4}\cos t\sin t\right]\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{\pi\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{4}[-\cos t]_0^{\pi}=\frac{1}{2}-\frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

方法 (2)： 记 Γ_1 为从 B 到 A 的直线段, 则

$$x=t, y=0, z=1-t, 0\leqslant t\leqslant 1,$$

$$\int_{\Gamma_1} ydx+zdy+xdz=\int_0^1 td(1-t)=-\frac{1}{2}.$$

设 Γ 和 Γ_1 围成的平面区域 Σ，方向按右手法则. 由 Stokes 公式得到

$$\left(\int_{\Gamma}+\int_{\Gamma_1}\right)ydx+zdy+xdz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

$$=-\iint_{\Sigma} dydz+dzdx+dxdy$$

右边三个积分都是 Σ 在各个坐标面上的投影面积，而 Σ 在 zx 面上投影面积为零. 故

$$I+\int_{\Gamma_1}=-\iint_{\Sigma} dydz+dxdy.$$

曲线 Γ 在 xy 面上投影的方程为

$$\frac{(x-1/2)^2}{(1/2)^2}+\frac{y^2}{(1/\sqrt{2})^2}=1.$$

又该投影 (半个椭圆) 的面积得知 $\iint_{\Sigma} dxdy=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$. 同理, $\iint_{\Sigma} dydz=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$. 这样就有 $I=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

四、(本题 15 分) 设函数 $f(x)>0$ 且在实轴上连续，若对任意实数 t，有 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x\leqslant 1$。证明: $\forall a,b$，$a<b$，有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a+2}{2}$.

解答： 这个竞赛题是考研竞赛数学公众号每日一题栏目中发布的第 62 个题目，完全一模一样的。下面我们也来讨论一下，思路是怎样的。根据题目的条件，函数 $f(x)>0$，而且自然常数为底的函数也是大于 0 的，所以，可以知道已知积分中的被积函数 $e^{-|t-x|}f(x)>0$，并且积分区间越大，积分值越大，所以由原积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x \leqslant 1$，当然也就可以得到 $\forall a,b(a<b)$，

$$\int_a^b e^{-|t-x|}f(x)dx \leqslant 1$$

右边要出现 $b-a$ 的表达式，于是由积分的保序性，两边同时关于 t 变量在 $[a,b]$ 积分，可得

$$\int_a^b \left[\int_a^b e^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t \leqslant b-a.$$

左边就是一个先对 x 后对 t 积分的二重积分的累次积分表达式，对于它的操作，好像就积分而言不能执行什么有效的处理。但是，看到二重积分的累次积分表达式，可以尝试性的考虑交换积分次序，即先对 t 求积分，再对 x 积分，于是左边的累次积分也就等于

$$\int_a^b \left[\int_a^b e^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t = \int_a^b \left[f(x)\int_a^b e^{-|t-x|}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$$

里面对 t 积分，应该就是属于可以计算的了。只要考虑将绝对值去掉就可以了。由于在积分中对 x 在 $[a,b]$ 区间上积分，所以 x 夹在 a， b 之间，因此以 x 作为区间的分割点，则有

$$\begin{aligned}&\int_a^b e^{-|t-x|}\mathrm{d}t = \int_a^x e^{t-x}\,\mathrm{d}t + \int_x^b e^{x-t}\,\mathrm{d}t\\ =&\left[e^{t-x}\right]_a^x + \left[-e^{x-t}\right]_x^b = 1-e^{a-x}-e^{x-b}+1 = 2-e^{a-x}-e^{x-b}\end{aligned}$$

所以上面的不等式等价于

$$\int_a^b \left[f(x)\left(2-e^{a-x}-e^{x-b}\right)\right]\mathrm{d}x \leqslant b-a$$

将左边拆开，则有

$$\int_a^b \left[f(x)\left(2-e^{a-x}-e^{x-b}\right)\right]\mathrm{d}x = 2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \left[f(x)e^{a-x}\right]\mathrm{d}x - \int_a^b \left[f(x)e^{x-b}\right]\mathrm{d}x \leqslant b-a.$$

即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2}\int_a^b \left[f(x)e^{a-x}\right]\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_a^b \left[f(x)e^{x-b}\right]\mathrm{d}x$ 这样，再由已知条件，并且有 t 的任意性，可以将右边的两个积分改写成

$$\int_a^b e^{a-x}f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b e^{-|x-a|}f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-a|}f(x)\mathrm{d}x \leqslant 1$$

因为 x 属于 $(-\infty,+\infty)$ 都有积分小于等于 1，所以同理可得 $\int_a^b e^{x-b}f(x)\mathrm{d}x \leqslant 1.$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{2}+1$$

这就是这个竞赛题的解题过程。

五、(本题 15 分) 设 $\{a_n\}$ 为一个数列，p 为固定的正整数，若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}.$$

解答： 对于 $i=0,1,\ldots,p-1$，记

$$A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{np+i}\text{。}$$

由题设 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n^{(i)}=\lambda$，从而

$$\lim_n\frac{A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}}{n}=\lambda\text{。}$$

而 $A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}$ 。由题设知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{n}\frac{n}{(n+1)p+i}=\frac{\lambda}{p}$$

对正整数 m，设 $m=np+i$，其中 $0,1,\ldots,p-1$，从而可以把正整数依照 i 分为 p 个子列类。考虑任何这样的子列，下面极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\dfrac{\lambda}{p}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_m}{m}=\dfrac{\lambda}{p}$.

第 10 届　2018 年大学生数竞非数学类初赛

一、填空题 (本题满分 24 分，共 4 小题，每小题 6 分)

(1) 设 $\alpha \in (0,1)$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}[(n+1)^\alpha - n^\alpha] =$

解答：

方法 (1)：因为 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha < 1+\frac{1}{n}$，所以

$$0<(n+1)^\alpha-n^\alpha=n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha-1\right]<n^\alpha\left(1+\frac{1}{n}-1\right)=\frac{1}{n^{1-\alpha}}\to 0(n\to 0)$$

所以由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to+\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha]=0.$

方法 (2)：

$$\lim_{n\to+\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha]=\lim_{x\to0^+}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x^\alpha}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha x}{x^\alpha}=\alpha\lim_{x\to0^+}x^{1-\alpha}=0$$

(2) 若曲线 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=t+\cos t \\ e^y+ty+\sin t=1 \end{cases}$ 确定，则此曲线在 $t=0$ 对应点处的切线方程为

解答： 当 $t=0$ 时，$x=1$ 且 $e^y=1$，即 $y=0$，即求点 $(1,0)$ 处曲线 $y=y(x)$ 的切线方程. 在方程组两端对 t 求导，得

$$\begin{cases} x'(t)=1-\sin t \\ e^y\cdot y'(t)+y+ty'(t)+\cos t=0 \end{cases}$$

将 $t=0,y=0$ 代入方程，得 $x'(0)=1,y'(0)=-1$，所以 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{y'(0)}{x'(0)}=-1$，所以切线方程为 $y-0=(-1)(x-1)$, 即 $y=-x+1$.

(3) $\displaystyle\int\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x^2)^{3/2}}dx$

解答：

方法 (1)：典型三角代换结构 $\sqrt{1+x^2}$，令 $x=\tan t,\ \mathrm{d}x=\sec^2 t\,\mathrm{d}t$，所以

$$F(x)=\int\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\ln(\sec t+\tan t)}{\sec t}\,\mathrm{d}t$$
$$=\int\ln(\sec t+\tan t)d(\sin t)=\sin t\ln(\sec t+\tan t)-\int\frac{\sin t}{\cos t}dt$$
$$=\sin t\ln(\sec t+\tan t)+\ln|\cos t|+C$$

由于 $\tan t=\dfrac{x}{1}$，所以 $\cos t=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}},\sin t=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}},\sec t=\sqrt{1+x^2}$，代入得原积分为

$$F(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)+\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+C$$

$$\text{或}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$$

方法 (2)：

$$\begin{aligned}F(x)=&\int\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)d\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\\=&\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\int\frac{x}{x^2+1}dx\\=&\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C\end{aligned}$$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=$

解答：

方法 (1)：

$$\begin{aligned}A&=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}\\&=\frac{1}{2}+\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}\\&=\frac{1}{2}+\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{\cos 2x}(1-\sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}\\&=\frac{1}{2}+\lim_{x\to0}\left[\frac{1-\sqrt{(\cos 2x-1)+1}}{x^2}+\frac{1-\sqrt[3]{(\cos 3x-1)+1}}{x^2}\right]\\&=\frac{1}{2}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{2x^2}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{3x^2}\\&=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}=3.\end{aligned}$$

方法 (2)： 带皮亚诺余项的麦克劳林公式，有

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right),(\cos 2x)^{\frac{1}{2}}=1-x^2+o\left(x^2\right)$$

$$(\cos 3x)^{\frac{1}{3}}=1-\frac{3x^2}{2}+o\left(x^2\right)$$

所以 $\cos x(\cos 2x)^{\frac{1}{2}}(\cos 3x)^{\frac{1}{3}}=1-3x^2+o\left(x^2\right)$，代入得

$$A=\lim_{x\to0}\frac{3x^2+o\left(x^2\right)}{x^2}=3.$$

二 (本题满分 8 分) 设函数 $f(t)$ 在 $t\neq0$ 时一阶连续可导，且 $f(1)=0$，求函数 $f\left(x^2-y^2\right)$，使得

曲线积分 $\int_L y\left[2-f\left(x^2-y^2\right)\right]\mathrm{d}x+xf\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 L 为任一不与直线 $y=\pm x$ 相交的分段光滑曲线.

解答： 令 $P(x,y)=y\left[2-f\left(x^2-y^2\right)\right], Q(x,y)=xf\left(x^2-y^2\right)$，于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}&=2-f\left(x^2-y^2\right)+y\left[-f'\left(x^2-y^2\right)(-2y)\right]\\&=2-f\left(x^2-y^2\right)+2y^2f'\left(x^2-y^2\right)\\\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}&=f\left(x^2-y^2\right)+2x^2f'\left(x^2-y^2\right)\end{aligned}$$

由积分与路径无关的条件 $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$，代入结果整理得

$$\left(x^2-y^2\right)f'\left(x^2-y^2\right)+f\left(x^2-y^2\right)-1=0$$

令 $x^2-y^2=u$，即 $uf'(u)+f(u)-1=0$，分离变量得 $\frac{\mathrm{d}f(u)}{1-f(u)}=\frac{1}{u}\mathrm{d}u$，由分离变量法，两端积分，得 $\frac{1}{1-f(u)}=C_1u$，即 $f(u)=1+\frac{C}{u}$，由 $f(1)=0$，得 $C=-1$，即 $f\left(x^2-y^2\right)=1-\frac{1}{x^2-y^2}$.

注 2.3. 其中微分方程 $uf'(u)+f(u)-1=0$ 的通解可以通过改写微分方程为 $[uf(u)]'=1$，得到通解为 $uf(u)=u+C$.

三 (本题满分 14 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $1\leqslant f(x)\leqslant 3$. 证明:

$$1\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{4}{3}.$$

解答： 由 Cauchy 不等式

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geq\left[\int_0^1\sqrt{f(x)}\sqrt{\frac{1}{f(x)}}\mathrm{d}x\right]^2=1$$

又由于 $[f(x)-1][f(x)-3]\leqslant 0$，则 $\frac{[f(x)-1][f(x)-3]}{f(x)}\leqslant 0$，即 $f(x)+\frac{3}{f(x)}\leqslant 4$，所以 $\int_0^1\left[f(x)+\frac{3}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\leqslant 4$. 由于

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x\right]^2\leqslant 4$$

所以 $1\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{4}{3}$.

四 (本题满分 12 分) 计算三重积分 $\iiint_{(V)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V$，其中 (V) 是由

$$x^2+y^2+(z-2)^2\geqslant 4, x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant 9$$

及 $z \geqslant 0$ 所围成的空间图形.

解答： 画图 (关键)，考虑区域的特殊性，采用容易计算的整体减去容易计算的部分来完成计算，从而分成三个部分来讨论:
第一部分：整个大球 (V_1) 的积分：采用球坐标换元，令

$$x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=1+r\cos\varphi$$
$$0\leqslant r\leqslant 3, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

于是有

$$\iiint_{(V_1)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^3 r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{648\pi}{5}$$

第二部分: 小球 (V_2) 的积分: 采用球坐标换元，令

$$x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=2+r\cos\varphi$$
$$0\leqslant r\leqslant 2, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

于是有

$$\iiint_{(V_2)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{256\pi}{15}$$

第三部分: 大球 $z=0$ 下部分的积分 (V_3)，采用柱坐标:

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, 1-\sqrt{9-r^2}\leqslant z\leqslant 0$$
$$0\leqslant r\leqslant 2\sqrt{2}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

于是有 $\displaystyle\iiint_{(V_2)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sqrt{2}}r\,\mathrm{d}r\int_{1-\sqrt{9-r^2}}^0 r^2\,\mathrm{d}z=\frac{136\pi}{5}$ 所以最终的积分为

$$\iiint_{(V)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V=\iiint_{(V_1)}-\iiint_{(V_2)}-\iiint_{(V_3)}$$
$$=\frac{648}{5}\pi-\frac{256}{15}\pi-\frac{136}{5}\pi=\frac{256}{3}\pi.$$

五 (本题满分 14 分) 设 $f(x,y)$ 在区域 D 内可微，且 $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\leqslant M$，$A\left(x_1,y_1\right), B\left(x_2,y_2\right)$ 是 D 内两点，线段 AB 包含在 D 内. 证明:

$$\left|f\left(x_1,y_1\right)-f\left(x_2,y_2\right)\right|\leqslant M|AB|,$$

其中 $|AB|$ 表示线段 AB 的长度.

解答： 作辅助函数 $\varphi(t)=f\left[x_1+t\left(x_2-x_1\right),y_1+t\left(y_2-y_1\right)\right]$，显然函数 $\varphi(t)$ 在 $[0,1]$ 上可导. 根据拉格朗日中值定理，存在 $c\in(0,1)$，使得

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(c)=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\left(x_2-x_1\right)+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\left(y_2-y_1\right)$$

所以$|\varphi(1)-\varphi(0)|=|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|$

$$
\begin{aligned}
&=\left|\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}(x_2-x_1)+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}(y_2-y_1)\right|\\
&\leqslant\sqrt{\left[\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\right]^2+\left[\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\right]^2}\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\leqslant M|AB|.
\end{aligned}
$$

六 (本题满分 14 分) 证明: 对于连续函数 $f(x)>0$，有

$$\ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x.$$

解答： 由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k),x_k\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right].$$

由算术几何不等式 $[f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)]^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)$. 于是有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln f(x_k)\leqslant\ln\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\right]$$

根据 $\ln x$ 的连续性，两边取极限，得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln f(x_k)\leqslant\lim_{n\to+\infty}\ln\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\right]$$

即 $\ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x$.

七 (本题满分14 分) 已知 $\{a_k\},\{b_k\}$ 是正数数列，且$b_{k+1}-b_k\geqslant\delta>0,k=1,2,\cdots,\delta$ 为一常数. 证明: 若级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_k$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$ 收敛

解答： 令 $S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_ib_i,a_kb_k=S_k-S_{k-1}$，

$$S_0=0,a_k=\frac{S_k-S_{k-1}}{b_k},k=1,2,\cdots$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N}a_k&=\sum_{k=1}^{N}\frac{S_k-S_{k-1}}{b_k}=\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{S_k}{b_k}-\frac{S_k}{b_{k+1}}\right)+\frac{S_N}{b_N}\\
&=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{b_{k+1}-b_k}{b_kb_{k+1}}S_k+\frac{S_N}{b_N}\geqslant\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\delta}{b_kb_{k+1}}S_k
\end{aligned}
$$

所以 $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{S_k}{b_kb_{k+1}}$ 收敛. 由不等式

$$\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}\leqslant\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k}{k}=\frac{S_k}{k}$$

可知 $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{S_k}{b_kb_{k+1}}$，故原不等式成立.

第 11 届 2019 年大学生数竞非数学类初赛

一、填空题（每小题 6 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)-\sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1-\cos x})}=$

解答：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)-\sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1-\cos x})}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\sin x}-1\right)+\sqrt[3]{1-\cos x}}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\sin x}-1\right)}{4\left(\frac{x^2}{2}\right)^{1/3}}+\frac{1}{4}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{4\left(\frac{x^2}{2}\right)^{1/3}}=\frac{1}{4}.$$

2. 设隐函数$y=y(x)$ 由方程$y^2(x-y)=x^2$ 所确定, 则 $\displaystyle\int\frac{dx}{y^2}=$

解答： 令 $y=tx$, 则 $x=\dfrac{1}{t^2(1-t)}, y=\dfrac{1}{t(1-t)}, dx=\dfrac{-2+3t}{t^3(1-t)^2}dt$, 这样,

$$\int\frac{dx}{y^2}=\int\frac{-2+3t}{t}dt=3t-2\ln|t|+C=\frac{3y}{x}-2\ln\left|\frac{y}{x}\right|+C$$

3. 求定积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}dx=$

解答：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}de^x$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\frac{\sin xe^x}{1+\cos x}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\frac{\cos x(1+\cos x)+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\frac{\sin xe^x}{1+\cos x}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+\cos x}dx=e^{\frac{\pi}{2}}$$

4. 已知$du(x,y)=\dfrac{ydx-xdy}{3x^2-2xy+3y^2}$, 则$u(x,y)=$

解答： $du(x,y)=\dfrac{ydx-xdy}{3x^2-2xy+3y^2}=\dfrac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{3\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{2x}{y}+3}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}d\arctan\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{3}\right).$

所以, $u(x,y)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{3}\right)+\mathrm{C}.$

5. 设$a,b,c,\mu>0$, 曲面$xyz=\mu$ 与曲面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 相切, 则$\mu=\dfrac{abc}{3\sqrt{3}}$

解答： 解: 根据题意有: $yz=\dfrac{2x}{a^2}\lambda, xz=\dfrac{2y}{b^2}\lambda, xy=\dfrac{2z}{c^2}\lambda$,

以及 $\mu=2\lambda\frac{x^2}{a^2},\quad \mu=2\lambda\frac{y^2}{b^2},\quad \mu=2\lambda\frac{z^2}{c^2}$, 从而得: $\mu=\frac{8\lambda^3}{a^2b^2c^2}$, $3\mu=2\lambda$, 联立解得: $\mu=\frac{abc}{3\sqrt{3}}$.

二、(14 分) 计算三重积分 $\iiint_\Omega \frac{xyz}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由曲面 $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=2xy$ 围成的区域在第一卦限部分.

解答： 采用“球面坐标”计算, 并利用对称性, 得

$$
\begin{aligned}
I&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}\frac{\rho^3\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta\cos\varphi}{\rho^2\sin^2\varphi}\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\\
&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}\rho^3\,\mathrm{d}\rho\\
&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\theta\cos^3\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\\
&=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3 2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\mathrm{d}(\sin\varphi)\\
&=\frac{1}{48}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{48}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{72}.
\end{aligned}
$$

三、(14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微, $f(0)=0$, 且存在常数 $A>0$, 使得 $|f'(x)|\leqslant A|f(x)|$ 在 $[0,+\infty)$ 上成立, 试证明：在 $(0,+\infty)$ 上有 $f(x)\equiv 0$.

解答： 设 $x_0\in\left[0,\frac{1}{2A}\right]$, 使得

$|f(x_0)|=\max\left\{|f(x)|\,|x\in\left[0,\frac{1}{2A}\right]\right\}$, $|f(x_0)|=|f(0)+f'(\xi)x_0|\leqslant A|f(x_0)|\frac{1}{2A}=\frac{1}{2}|f(x_0)|$,

只有 $|f(x_0)|=0$. 故当 $x\in\left[0,\frac{1}{2A}\right]$ 时, $f(x)\equiv 0$.

递推可得, 对所有的 $x\in\left[\frac{k-1}{2A},\frac{k}{2A}\right]$, $k=1,2,\cdots\cdots$, 均有 $f(x)\equiv 0$.

四、(14 分) 计算积分 $I=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}e^{\sin\theta(\cos\phi-\sin\phi)}\sin\theta d\theta$

解答： 设球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$, 由球面参数方程

$$x=\sin\theta\cos\phi,\quad y=\sin\theta\sin\phi,\quad z=\cos\theta$$

知 $dS=\sin\theta d\theta d\phi$, 所以, 所求积分可化为第一型曲面积分

$$I=\iint_\Sigma e^{x-y}dS$$

设平面 $P_t:\frac{x-y}{\sqrt{2}}=t, -1\leqslant t\leqslant 1$, 其中 t 为平面 P_t 被球面截下部分中心到原点距离. 用平面 P_t 分割球面 Σ, 球面在平面 P_t, P_{t+dt} 之间的部分形如圆台外表面状, 记为 $\Sigma_{\mathrm{t,dt}}$. 被积函数在其上为 $e^{x-y}=e^{\sqrt{2}t}$.

由于 $\Sigma_{\mathrm{t,dt}}$ 半径为 $r_t=\sqrt{1-\mathrm{t}^2}$, 半径的增长率为 $d\sqrt{1-t^2}=\dfrac{-tdt}{\sqrt{1-t^2}}$ 就是 $\Sigma_{\mathrm{t,dt}}$ 上下底半径之差. 记圆台外表面斜高为 h_t, 则由微元法知 $dt^2+\left(d\sqrt{1-t^2}\right)^2=h_t^2$, 得到 $h_t=\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, 所以 $\Sigma_{\mathrm{t,dt}}$ 的面积为 $dS=2\pi r_t h_t=2\pi dt$,

$$I=\int_{-1}^{1}e^{\sqrt{2}t}2\pi\mathrm{dt}=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}t}\Big|_{-1}^{1}=\sqrt{2}\pi\left(e^{\sqrt{2}}-e^{-\sqrt{2}}\right)$$

五、(14 分) 设 $f(x)$ 是仅有正实根的多项式函数, 满足 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_nx^n$. 试证: $c_n>0,(n\geqslant 0)$, 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$ 存在, 且等于 $f(x)$ 的最小根.

解答： 由 $f(x)$ 为仅有正实根的多项式, 不妨设 $f(x)$ 的全部根为 $0<a_1<a_2<\cdots<a_k$, 这样,

$$f(x)=A\left(x-a_1\right)^{r_1}\ldots\left(x-a_k\right)^{r_k},$$

其中 r_i 为对应根 a_i 的重数 $(i=1,\cdots,k,r_k\geqslant 1)$.

$$f'(x)=Ar_1\left(x-a_1\right)^{r_1-1}\cdots\left(x-a_k\right)^{r_k}+\cdots+Ar_k\left(x-a_1\right)^{r_1}\cdots\left(x-a_k\right)^{r_k-1},$$

所以, $f'(x)=f(x)\left(\dfrac{r_1}{x-a_1}+\cdots+\dfrac{r_k}{x-a_k}\right)$, 从而, $-\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{r_1}{a_1}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{x}{a_1}}+\cdots+\dfrac{r_k}{a_k}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{x}{a_k}}$.
若 $|x|<a_1$ ，则

$$-\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{r_1}{a_1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a_1}\right)^n+\cdots+\frac{r_k}{a_k}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a_k}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_1}{a_1^{n+1}}+\cdots+\frac{r_k}{a_k^{n+1}}\right)x^n.$$

而 $-\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$, 由幂级数的唯一性知

$$c_n=\frac{r_1}{{a_1}^{n+1}}+\cdots+\frac{r_k}{a_k^{n+1}}>0,$$

$$\frac{c_n}{c_{n+1}}=\frac{\frac{r_1}{a_1n+1}+\cdots+\frac{r_k}{a_kn+1}}{\frac{r_1}{a_1n+2}+\cdots+\frac{r_k}{a_kn+2}}=a_1\cdot\frac{r_1+\cdots+\left(\frac{a_1}{a_k}\right)^{n+1}r_k}{r_1+\cdots+\left(\frac{a_1}{a_k}\right)^{n+2}r_k}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_{n+1}}=a_1\cdot\frac{r_1+0+\cdots+0}{r_1+0+\cdots+0}=a_1>0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{1}{a_1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\ln\frac{c_2}{c_1}+\cdots+\ln\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)=\ln\frac{1}{a_1},$$

$$\sqrt[n]{c_n}=e^{\frac{\ln c_n}{n}}=e^{\frac{\ln c_1}{n}+\frac{1}{n}\left(\ln\frac{c_2}{c_1}+\cdots+\ln\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)}\to e^{\ln\frac{1}{a_1}}=\frac{1}{a_1}.$$

从而, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{c_n}}=a_1$, 即 $f(x)$ 的最小正根.

六、(14 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上具有连续导数, 满足

$$3\left[3+f^2(x)\right]f'(x)=2\left[1+f^2(x)\right]^2 e^{-x^2},$$

且 $f(0)\leqslant 1$. 证明: 存在常数 $M>0$, 使得 $x\in[0,+\infty)$ 时, 恒有 $|f(x)|\leqslant M$.

解答： 证明: 由于 $f'(x)>0$, 所以 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的严格增函数, 故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ (有限或为 $+\infty$). 下面证明 $L\neq+\infty$.

记 $y=f(x)$, 将所给等式分离变量并积分得 $\displaystyle\int\frac{3+y^2}{(1+y^2)^2}\,\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$,

$$\frac{y}{1+y^2}+2\arctan y=\frac{2}{3}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t+C$$

其中 $C=\dfrac{f(0)}{1+f^2(0)}+2\arctan f(0)$.

若 $L=+\infty$, 则对上式取极限 $x\to+\infty$, 并利用 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 得 $C=\pi-\dfrac{\sqrt{\pi}}{3}$.

另一方面, 令 $g(u)=\dfrac{u}{1+u^2}+2\arctan u$, 则 $g'(u)=\dfrac{3+u^2}{(1+u^2)^2}>0$, 所以函数 $g(u)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调增加.

因此, 当 $f(0)\leqslant 1$ 时, $C=g(f(0))\leqslant g(1)=\dfrac{1+\pi}{2}$, 但 $C>\dfrac{2\pi-\sqrt{\pi}}{2}>\dfrac{1+\pi}{2}$, 矛盾, 这就证明了 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ 为有限数.

$$\text{最后, 取}M=\max\{|f(0)|,|L|\},\ \text{则}|f(x)|\leqslant M,\forall x\in[0,+\infty)$$

第 12 届　2020 年大学生数竞非数学类初赛

一、填空题 (每小题 6 分，共 30 分)

1. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1}=$

解答： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1}=-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}$

2、设函数 $f(x)=(x+1)^n e^{-x^2}$，则 $f^{(n)}(-1)=$

解答：

方法 (1)：　Leibniz 公式：

$$\begin{aligned}f^{(n)}(-1)&=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left[(x+1)^n\right]^{(k)}\left(e^{-x^2}\right)^{(n-k)}\Big|_{x=-1}\\&=C_n^n\left[(x+1)^n\right]^{(n)}\left(e^{-x^2}\right)^{(n-n)}\Big|_{x=-1}=n!e^{-1}\end{aligned}$$

方法 (2)：　因为 $\mathrm{e}^{-x^2}=\mathrm{e}^{-1}+\alpha$，其中 $\alpha\to 0(x\to -1)$，故

$$f(x)=(x+1)^n\mathrm{e}^{-x^2}=\mathrm{e}^{-1}(x+1)^n+o\left((x+1)^n\right)$$

于是由 $f(x)$ 泰勒公式中泰勒系数的计算公式，得

$$\frac{f^{(n)}(-1)}{n!}=\mathrm{e}^{-1}\text{，即}f^{(n)}(-1)=n!\mathrm{e}^{-1}.$$

3、设 $y=f(x)$ 是由方程 $\arctan\dfrac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{\pi}{4}$ 确定的隐函数，且满足 $f(1)=1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为

解答：　等式两端关于 x 求导，得

$$\frac{\frac{y-xy'}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\frac{x+yy'}{x^2+y^2}$$

即 $(x+y)y'=y-x$

所以 $f'(1)=0$. 故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 $y=1$

4、已知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，则 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin(x+y)}{x(x+y)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$

解答： 令 $u=x+y$，则

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+y)}{x+y}\,\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u-\int_0^{x}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u\right)$$
$$=\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right)^2-\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\int_0^{x}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$$

令 $F(x)=\int_0^x\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$，则 $F'(x)=\frac{\sin x}{x},\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\frac{\pi}{2}$ 代入可得

$$I=\frac{\pi^2}{4}-\int_0^{+\infty}F(x)F'(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{2}[F(x)]^2\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{8}$$

5、设 $f(x),g(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域 U 内有定义，对任意 $x\in U,f(x)\neq g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}g(x)=a>0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{[f(x)]^{g(x)}-[g(x)]^{g(x)}}{f(x)-g(x)}=$

解答： 由极限的保号性，存在一个去心邻域 $U_1(0)$，当 $x\in U_1$ 时，$f(x)>0,g(x)>0$. 当 $x\to0$ 时，$e^x-1\sim x,\ln(1+x)\sim x$，故

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}[g(x)]^{g(x)}\frac{\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^{g(x)}-1}{f(x)-g(x)}=a^a\lim_{x\to0}\frac{e^{g(x)\ln\frac{f(x)}{g(x)}}-1}{f(x)-g(x)}$$
$$=a^a\lim_{x\to0}\frac{g(x)\ln\frac{f(x)}{g(x)}}{f(x)-g(x)}=a^a\lim_{x\to0}\frac{g(x)\ln\left[1+\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right]\right]}{f(x)-g(x)}$$
$$=a^a\lim_{x\to0}\frac{g(x)\left[\frac{f(x)}{g(x)}-1\right]}{f(x)-g(x)}=a^a$$

二、(10 分) 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=1,a_{n+1}=\frac{a_n}{(n+1)(a_n+1)},n\geqslant1$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n!a_n$

解答： 由题设可知 $a_n>0(n\geqslant1)$. 由于

$$\frac{1}{a_{n+1}}=(n+1)\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=(n+1)+(n+1)\frac{1}{a_n}$$
$$=(n+1)+(n+1)\left(n+n\frac{1}{a_{n-1}}\right)$$
$$=(n+1)+(n+1)n+(n+1)n\frac{1}{a_{n-1}}$$

如此递推可得 $\frac{1}{a_{n+1}}=(n+1)!\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{a_1}\right)=(n+1)!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$. 于是可得

$$\lim_{n\to\infty}n!a_n=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}}=\frac{1}{e}$$

三、(12 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,f(1)=1$. 证明:

(1) 存在 $x_0\in(0,1)$ 使得 $f(x_0)=2-3x_0$；

(2) 存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，且 $\xi\neq\eta$，使得 $[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$.

解答： (1) 令 $F(x)=f(x)-2+3x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $F(0)=-2$，$F(1)=2$. 于是由介值定理，存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $F(x_0)=0$，即

$$f(x_0)=2-3x_0.$$

(2) 在区间 $[0,x_0],[x_0,1]$ 上利用拉格朗日中值定理，存在 $\xi,\eta\in(0,1)$ 且 $\xi\neq\eta$ 使得

$$\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=f'(\xi),\frac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1}=f'(\eta)$$

整理即得 $[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$.

四、(12 分) 已知 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)+2y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$，其中 f,φ 均为二阶可微函数.

(1) 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；　　(2) 当 $f=\varphi$，且 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-by^2$ 时，求 $f(y)$.

解答： (1) 由复合函数求导法则，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f\left(\frac{y}{x}\right)+xf'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)+2y\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}=f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+2\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}+2\varphi''\left(\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right)\\&=-\frac{y}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{2x}{y^2}\varphi''\left(\frac{x}{y}\right)\end{aligned}$$

(2) 由 (1) 得 $\frac{y}{a^2}f''\left(\frac{y}{a}\right)+\frac{2a}{y^2}f''\left(\frac{a}{y}\right)=by^2$. 令 $\frac{y}{a}=u$，得

$$\frac{u}{a}f''(u)+\frac{2}{au^2}f''\left(\frac{1}{u}\right)=a^2bu^2$$

即 $u^3f''(u)+2f''\left(\frac{1}{u}\right)=a^3bu^4$. 令 $u=\frac{1}{u}$，得 $2f''\left(\frac{1}{u}\right)+4u^3f''(u)=2a^3b\frac{1}{u}$. 两式求解得 $f''(u)=\frac{a^3b}{3}\left(\frac{2}{u^4}-u\right)$. 两次积分得

$$f(u)=\frac{a^3b}{3}\left(\frac{1}{3u^2}-\frac{u^3}{6}\right)+C_1u+C_2$$

由变量符号描述的无关性，即 $f(y)=\dfrac{a^3b}{3}\left(\dfrac{1}{3y^2}-\dfrac{y^3}{6}\right)+C_1y+C_2$

五、(12 分) 计算 $I=\oint_\Gamma|\sqrt{3}y-x|\mathrm{d}x-5z\,\mathrm{d}z$，其中 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=8,\\x^2+y^2=2z\end{cases}$ 从 z 轴正向往坐标原点看去取逆时针方向.

解答：

方法 (1)：改写曲线方程可得参数方程为

$$\begin{cases}z=2\\x^2+y^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=2\sin\theta\\z=2\end{cases}$$

其中 $\theta:0\to2\pi$. 由于曲线上 $z=2$，积分定义在积分曲线上，故 $\mathrm{d}z=0$. 于是由曲线积分的直接参数方程计算方法，得

$$\begin{aligned}I&=\oint_\Gamma|\sqrt{3}y-x|\mathrm{d}x=-\int_0^{2\pi}|2\sqrt{3}\sin\theta-2\cos\theta|2\sin\theta\mathrm{d}\theta\\&=-8\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right|\sin\theta\mathrm{d}\theta-8\int_0^{2\pi}\left|\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right|\sin\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

令 $\theta+\dfrac{\pi}{3}=t$，根据周期函数的积分性质，得

$$\begin{aligned}I&=-8\int_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi+\frac{\pi}{3}}|\cos t|\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}t=-8\int_{-\pi}^{\pi}|\cos t|\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}t\\&=-4\int_{-\pi}^{\pi}|\cos t|(\sin t-\sqrt{3}\cos t)\mathrm{d}t=8\sqrt{3}\int_0^{\pi}|\cos t|\cos t\,\mathrm{d}t\ \left(u=t-\frac{\pi}{2}\right)\\&=-8\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin u|\sin u\,\mathrm{d}u=0\end{aligned}$$

方法 (2)：积分曲线方程可表示为 $\begin{cases}z=2\\x^2+y^2=4\end{cases}$. 由于曲线上 $z=2$，积分定义在积分曲线上，故 $\mathrm{d}z=0$. 于是

$$I=\oint_\Gamma|\sqrt{3}y-x|\mathrm{d}x=\oint_C|\sqrt{3}y-x|\mathrm{d}x$$

其中 C 为 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=4$，方向取逆时针方向. C 上 (x,y) 处的法向量为 $\vec{n}=\{x,y\},\vec{t}=\{-y,x\}$，且 $\vec{t}^0=\left\{-\dfrac{y}{2},\dfrac{x}{2}\right\}$. 于是由两类曲线积分之间的关系，得

$$I=\oint_C|\sqrt{3}y-x|\left(-\frac{y}{2}\right)\mathrm{d}s$$

由于积分曲线关于原点对称，且被积函数

$$f(x,y)=|\sqrt{3}y-x|\left(-\frac{y}{2}\right)$$

关于 x,y 变量为奇函数，即 $f(-x,-y)=-f(x,y)$，故由对弧长的曲线积分偶倍奇零的计算性质，得 $I=0$.

六、(12 分) 证明 $f(n)=\sum\limits_{m=1}^{n}\int_0^m \cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\,\mathrm{d}x$ 等于 n 的所有因子（包 1 和 n 本身）之和，其中 $[x+1]$ 表示不超过 $x+1$ 的最大整数，并计算 $f(2021)$.

解答： 由积分对区间的可加性，有

$$\begin{aligned}\int_0^m \cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\,\mathrm{d}x&=\sum_{k=1}^{m}\int_{k-1}^{k}\cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{m}\int_{k-1}^{k}\cos\frac{2\pi nk}{m}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{m}\cos k\frac{2\pi n}{m}\end{aligned}$$

如果 m 是 n 的因子，则 $\int_0^m \cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\,\mathrm{d}x=m$；否则，由三角恒等式，有

$$\sum_{k=1}^{m}\cos kt=\cos\frac{m+1}{2}t\cdot\frac{\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

于是得

$$\int_0^m \cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\,\mathrm{d}x=\cos\left(\frac{m+1}{2}\cdot\frac{2\pi n}{m}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{m}{2}\cdot\frac{2\pi n}{m}\right)}{\sin\frac{2\pi n}{2m}}=0$$

由此得 $f(2021)=1+43+47+2021=2112$.

七、(14 分) 设 $u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}\quad(n\geqslant 1)$.

(1) 证明数列 $\{u_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$;

(2) 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛;

(3) 证明当 $p\geqslant 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$ 收敛，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$ 的和.

解答： (1) 对任意 $\varepsilon>0$，取 $0<a<\frac{\varepsilon}{2}$，将积分区间分成两段，得

$$u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}=\int_0^a\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}+\int_a^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}$$

由于

$$\int_a^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}\leqslant\frac{1-a}{(1+a^4)^n}<\frac{1}{(1+a^4)^n}\to 0(n\to\infty)$$

所以存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$\int_a^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}<\frac{\varepsilon}{2}$，从而

$$0\leqslant u_n<a+\int_a^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

(2) 显然 $0<u_{n+1}=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^{n+1}}\leqslant\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}=u_n$，即 u_n 单调递减，又 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$，故由莱布尼兹判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛. 又当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$u_n=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}\geqslant\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^n}=\frac{1}{n-1}\left(1-2^{1-n}\right)$$

由于 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ 发散，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ 发散，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. 因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛.

(3) 先求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$ 的和. 因为

$$\begin{aligned} u_n &=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}=\left.\frac{t}{(1+t^4)^n}\right|_0^1+n\int_0^1 \frac{4t^4}{(1+t^4)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \\ &=\frac{1}{2^n}+4n\int_0^1 \frac{t^4}{(1+t^4)^{n+1}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2^n}+4n\int_0^1 \frac{1+t^4-1}{(1+t^4)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \\ &=\frac{1}{2^n}+4n\left(u_n-u_{n+1}\right) \end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n-u_{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}+4u_1$$

由 $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$，取 $x=-\frac{1}{2}$，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}=\ln 2$，又

$$u_1=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}=\frac{\sqrt{2}}{8}[\pi+2\ln(1+\sqrt{2})]$$

故得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}=\ln 2+\frac{\sqrt{2}}{2}[\pi+2\ln(1+\sqrt{2})]$$

由于当 $p\geqslant 1$ 时，有 $\frac{u_n}{n^p}\leqslant\frac{u_n}{n}$，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$ 收敛.

第 13 届　2021 年大学生数竞非数学类初赛

一、填空题（每小题 6 分，共 30 分）

1、极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}\dfrac{x-\ln\left(e^x+x\right)}{x}=$

解答： 原式 $=-\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\ln\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)=0$

2、设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$ 所确定的二元隐函数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

解答： 将方程两边分别关于 x 和 y 求偏导，得

$$\begin{cases} 2\cos(x+2y-3z)\left(1-3\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=1-3\dfrac{\partial z}{\partial x}\\ 2\cos(x+2y-3z)\left(2-3\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=2-3\dfrac{\partial z}{\partial y}\end{cases}$$

按 $\cos(x+2y-3z)=\dfrac{1}{2}$ 和 $\neq\dfrac{1}{2}$ 两种情形，都可解得.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{3},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{3}$$

因此 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$

3、设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$ ，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=$

解答： 令 $x-t=u$ ，则 $\displaystyle\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$. 于是由洛必达法则和积分中值定理，得

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to0}\frac{2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}=\lim_{x\to0}\frac{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+2xf(x)-2xf(x)}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2xf(\xi)}{xf(\xi)+xf(x)}=1\quad\text{，其中}\xi\text{ 介于}0,x\text{ 之间}\end{aligned}$$

4、过三条直线 $L_1:\begin{cases}x=0,\\ y-z=2,\end{cases}$ $,L_2:\begin{cases}x=0,\\ x+y-z+2=0,\end{cases}$ $L_3:\begin{cases}x=\sqrt{2},\\ y-z=0\end{cases}$ 圆柱面方程为

解答： ：三条直线的对称式方程分别为

$$L_1:\frac{x}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{1},L_2:\frac{x}{0}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-2}{1}$$
$$L_2:\frac{x-\sqrt{2}}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$$

所以三条直线平行. 在 L_1 上取点 $P_1(0,1,-1)$ ，过该点作与三直线都垂直的平面 $y+z=0$, 分别

交 L_2, L_3 于点 $P_2(0,-1,1), P_3(\sqrt{2},0,0)$. 易知经过这三点的圆的圆心为 $O(0,0,0)$. 这样，所求圆柱面的中心轴线方程为

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}.$$

设圆柱面上任意点的坐标为 $Q(x,y,z)$ ，因为点 Q 到轴线的距离均为 $\sqrt{2}$ ，所以有

$$\frac{|(x,y,z)\times(0,1,1)|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\sqrt{2}$$

化简即得所求圆柱面的方程为 $2x^2+y^2+z^2-2yz=4$.

5、记 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\pi\right\}$ ，则

$$\iint_D\left(\sin x^2\cos y^2+x\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=$$

解答： 根据重积分的对称性, 得

$$\begin{aligned}
&\text{原式}=\iint_D\sin x^2\cos y^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\iint_D\sin y^2\cos x^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2}\iint_D\left(\sin x^2\cos y^2+\sin y^2\cos x^2\right)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_D\sin\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{\pi}}r\sin r^2\ \mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\left(-\cos r^2\right)\Big|_0^{\sqrt{\pi}}=\pi
\end{aligned}$$

二、(14 分) 设 $x_1=2021,\quad x_n^2-2\left(x_n+1\right)x_{n+1}+2021=0(n\geqslant 1)$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解答： 记 $a=1011, y_n=1+x_n$ ，函数 $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{a}{x}(x>0)$ ，则 $y_1=2a$ 且 $y_{n+1}=f\left(y_n\right)(n\geqslant 1)$
易知，当 $x>\sqrt{2a}$ 时，$x>f(x)>\sqrt{2a}$ ，所以 $\{y_n\}$ 是单调减少且有下界的数列，因而收敛. 由此可知 $\{x_n\}$ 收敛.
令 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$ ，则 $A>0$ 且 $A=f(A)$ ，解得 $A=\sqrt{2a}$. 因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2022}-1.$$

三、(14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是有界连续函数，证明: 方程 $y''+14y'+13y=f(x)$ 的每一个解在 $[0,+\infty)$ 上都是有界函数.

解答： 易得对应的齐次方程 $y''+14y'+13y=0$ 的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-13x}$$

又由 $y''+14y'+13y=f(x)$ 得

$$\left(y''+y'\right)+13\left(y'+y\right)=f(x).$$

令 $y_1=y'+y$，则 $y_1'+13y_1=f(x)$，解得

$$y_1=e^{-13x}\left(\int_0^x f(t)e^{13t}\,\mathrm{d}t+C_3\right).$$

同理，由 $y''+14y'+13y=f(x)$，得 $(y''+13y')+(y'+13y)=f(x)$. 令 $y_2=y'+13y$，则 $y_2'+y_2=f(x)$，解得 $y_2=e^{-x}\left(\int_0^x f(t)e^{t}\,\mathrm{d}t+C_4\right)$

$$y^*=\frac{1}{12}e^{-x}\int_0^x f(t)e^{t}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{12}e^{-13x}\int_0^x f(t)e^{13t}\,\mathrm{d}t$$

因此，原方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-13x}+\frac{1}{12}e^{-x}\int_0^x f(t)e^{t}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{12}e^{-13x}\int_0^x f(t)e^{13t}\,\mathrm{d}t.$$

因为 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界，所以，存在 $M>0$，使得

$$|f(x)|\leqslant M, 0\leqslant x<+\infty$$

注意到当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$0<e^{-x}\leqslant 1, 0<e^{-13x}\leqslant 1$，所以

$$\begin{aligned}|y|&\leq\left|C_1e^{-x}\right|+\left|C_2e^{-13x}\right|+\frac{1}{12}e^{-x}\left|\int_0^x f(t)e^{t}\,\mathrm{d}t\right|+\frac{1}{12}e^{-13x}\left|\int_0^x f(t)e^{13t}\,\mathrm{d}t\right|\\&\leq|C_1|+|C_2|+\frac{M}{12}e^{-x}\int_0^x e^{t}\,\mathrm{d}t+\frac{M}{12}e^{-13x}\int_0^x e^{13t}\,\mathrm{d}t\\&\leq|C_1|+|C_2|+\frac{M}{12}\left(1-e^{-x}\right)+\frac{M}{12\times 13}\left(1-e^{-13x}\right)\\&\leq|C_1|+|C_2|+\frac{M}{12}+\frac{M}{12\times 13}|=|C_1|+|C_2|+\frac{7M}{78}\end{aligned}$$

对于方程的每一个确定的解，常数 C_1,C_2 是固定的，所以，原方程的每一个解都是有界的.

四、(14 分) 对于 4 次齐次函数

$$f(x,y,z)=a_1x^4+a_2y^4+a_3z^4+3a_4x^2y^2+3a_5y^2z^2+3a_6x^2z^2$$

计算曲面积分 $\oiint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$.

解答： 因为 $f(x,y,z)$ 为 4 次齐次函数，所以对 $\forall t\in R$，恒有

$$f(tx,ty,tz)=t^4f(x,y,z)$$

对上式两边关于 t 求导，得

$$xf_1'(tx,ty,tz)+yf_2'(tx,ty,tz)+zf_3'(tx,ty,tz)=4t^3f(x,y,z)$$

取 $t=1$，得

$$xf_x'(x,y,z)+yf_y'(x,y,z)+zf_z'(x,y,z)=4f(x,y,z).$$

设曲面 Σ 上点 (x,y,z) 处的外法线方向的方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ ，则

$$\cos\alpha=x,\cos\beta=y,\cos\gamma=z$$

因此由高斯公式和轮换对称性，记 $\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ ，得

$$\begin{aligned}
&\oiint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\frac{1}{4}\oint_{\Sigma}\left(xf_x'(x,y,z)+yf_y'(x,y,z)+zf_z'(x,y,z)\right)\mathrm{d}S\\
=&\frac{1}{4}\oiint_{\Sigma}\left[\cos\alpha f_x'+\cos\beta f_y'+\cos\gamma f_z'\right]\mathrm{d}=\frac{1}{4}\oiint_{\Sigma} f_x'\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+f_y'\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+f_z'\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&\frac{1}{4}\iint_{\Omega}\left[f_{xx}''(x,y,z)+f_{yy}''(x,y,z)+f_{zz}''(x,y,z)\right]\mathrm{d}V\\
=&\frac{3}{2}\iint_{\Omega}\left[x^2\left(2a_1+a_4+a_6\right)+y^2\left(2a_2+a_4+a_5\right)+z^2\left(2a_3+a_5+a_6\right)\right]\mathrm{d}V\\
=&\sum_{i=1}^{6}a_i\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}V=\sum_{i=1}^{6}a_i\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^2\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\\
=&\frac{4\pi}{5}\sum_{i=1}^{6}a_i
\end{aligned}$$

五、(14 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数，证明:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}n^2\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{2k-1}{2n}(b-a)\right)\right]\\
=&\frac{(b-a)^2}{24}\left[f'(b)-f'(a)\right].
\end{aligned}$$

解答： 记 $x_k=a+\dfrac{k(b-a)}{n},\xi_k=a+\dfrac{(2k-1)(b-a)}{2n},k=1,2,\cdots,n$. 将 $f(x)$ 在 $[x_{k-1},x_k]$ 上展开成泰勒公式，得

$$f(x)=f\left(\xi_k\right)+f'\left(\xi_k\right)\left(x-\xi_k\right)+\frac{f''\left(\eta_k\right)}{2}\left(x-\xi_k\right)^2$$

其中 $x\in[x_{k-1},x_k],\eta_k$ 介于 0 和 x 之间. 于是

$$\begin{aligned}
B_n&=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{2k-1}{2n}(b-a)\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(f(x)-f\left(\xi_k\right)\right)\mathrm{d}x\\
&=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[f'\left(\xi_k\right)\left(x-\xi_k\right)+\frac{f''\left(\eta_k\right)}{2}\left(x-\xi_k\right)^2\right]\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f''\left(\eta_k\right)\left(x-\xi_k\right)^2\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

设 $f''(x)$ 在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的最大值和最小值分别为 M_k, m_k，因为

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x-\xi_k)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{(b-a)^3}{12n^3}$$

因为 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 根据定积分 $\int_0^1 f''(x)\mathrm{d}x$ 的定义及牛顿-莱布尼兹公式，得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} m_k\frac{b-a}{n} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} M_k\frac{b-a}{n}\\ &= \int_a^b f''(x)\mathrm{d}x = f'(b)-f'(a)\end{aligned}$$

再根据夹逼准则, 得 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 B_n = \dfrac{(b-a)^2}{24}[f'(b)-f'(a)]$.

六、(14 分) 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为正实数列，满足: $a_1=b_1=1$ 且

$$b_n = a_n b_{n-1} - 2, n = 2, 3, \cdots.$$

又设 $\{b_n\}$ 为有界数列，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$ 收敛，并求该级数的和.

解答： 首先，注意到 $a_1=b_1=1$，且

$$a_n = \left(1+\frac{2}{b_n}\right)\frac{b_n}{b_{n-1}}$$

所以当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$a_1a_2\cdots a_n = \left(1+\frac{2}{b_2}\right)\left(1+\frac{2}{b_3}\right)\cdots\left(1+\frac{2}{b_n}\right)b_n.$$

由于 $\{b_n\}$ 有界，故存在 $M>0$，使得当 $n\geqslant 1$ 时，恒有 $0<b_n\leqslant M$.

因此 $0 < \dfrac{b_n}{a_1a_2\cdots a_n} = \left(1+\dfrac{2}{b_2}\right)^{-1}\left(1+\dfrac{2}{b_3}\right)^{-1}\cdots\left(1+\dfrac{2}{b_n}\right)^{-1} \le \left(1+\dfrac{2}{M}\right)^{-n+1} \to 0, n\to\infty$

根据夹逼准则，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_1a_2\cdots a_n}=0$.

考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$ 的部分和 S_n，当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\cdots b_k}{a_1} + \sum_{k=2}^{n}\frac{b_k}{\cdots b_{k-1}-b_k}\\ &= 1+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{b_{k-1}}{a_1a_2\cdots a_{k-1}}-\frac{b_k}{a_1a_2\cdots a_k}\right) = \frac{3}{2}-\frac{b_n}{2a_1a_2\cdots a_n}\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{3}{2}$，这就证明了级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$ 收敛，且其和为 $\dfrac{3}{2}$.