Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

Martín Errázquin (merrazquin@fi.uba.ar)

Especialización en Inteligencia Artificial

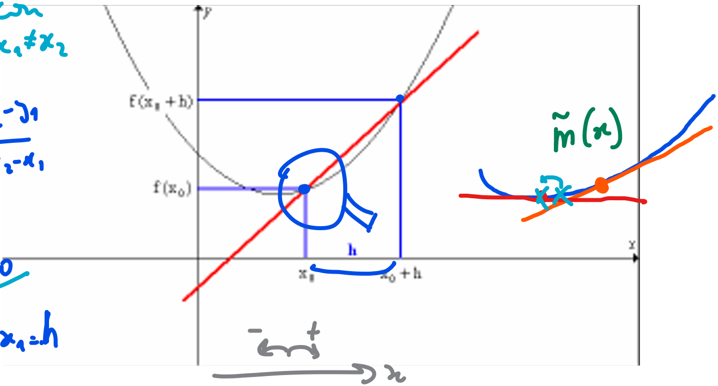
Derivadas de funciones multivariadas

(x_1, y_1)
(x_2, y_2) con $x_1 \neq x_2$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$x_2 = x_1 + h$
con $h \approx 0$

$\Delta x = x_1 + h - x_1 = h$



Recordemos siempre que la derivada busca calcular $\Delta y/\Delta x$ para una función dada $y = f(x)$ en un punto x.

$y_2 = f(x_2) = f(x+h)$

$$f'(x) \doteq \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$y_1 = f(x_1) = f(x)$

Derivadas de orden 1: campos escalares

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, ..., x_n)^T \mapsto f((x_1, ..., x_n)^T)$, se definen las derivadas parciales como:

n deriv. parciales

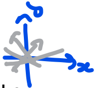
$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h, x_2, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)}{h} \in \mathbb{R}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_n + h) - f(x_1, x_2, ..., x_n)}{h} \in \mathbb{R}$$

Se define el gradiente como: $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$.

$z = f(x, y)$



Importante: El gradiente apunta en la dirección de máximo crecimiento.

$f(x,y) = x^2 \operatorname{sen}(y)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos(y)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 \operatorname{sen}(y) - x^2 \operatorname{sen}(y)}{h} = \dots = 2x \operatorname{sen}(y)$

$\nabla f(x,y) = (2x \operatorname{sen}(y), x^2 \cos(y))$

Derivadas de orden 1: campos vectoriales

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,
$(x_1, \dots, x_n)^T \mapsto (f_1((x_1, \dots, x_n)^T), \dots, f_m((x_1, \dots, x_n)^T))$, se define el jacobiano como:

m·n deriv. parciales

$$J_f = \begin{array}{cc} & n \\ m & \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} -\nabla f_1- \\ \vdots \\ -\nabla f_m- \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$J_{f(i,j)} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

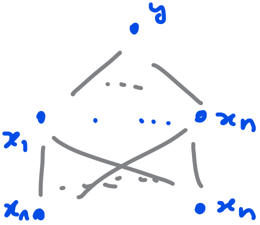
ej.: $\vec{f}(x,y) = (\underbrace{xy}_{f_1}, x^2 y, \cos(x))$

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 2xy & x^2 \\ -\sin(x) & 0 \end{pmatrix}$$

$\nabla f_1(x,y)$

Derivadas de orden 2: Matriz Hessiana

La matriz Hessiana es aquella cuyas derivadas de orden 2 de f respecto a $x \in \mathbb{R}^n$ se ubican:



$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$H_{f(i,j)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$(\text{reg}) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

$\Rightarrow H_f$ simétrico

$$f(x,y) = x^2 \operatorname{sen}(y)$$

$$\nabla_f(x,y) = (2x \operatorname{sen}(y), x^2 \cos(y))$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \operatorname{sen}(y) & 2x \cos(y) \\ 2x \cos(y) & -x^2 \operatorname{sen}(y) \end{pmatrix}$$

Polinomio de Taylor

Una aplicación común del Hessiano es el polinomio de Taylor de orden 2 para campos escalares. Sea f un campo escalar $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, asumiendo que posee derivadas parciales de todo orden en un entorno de un punto $a \in \mathbb{R}^n$, se define el polinomio de Taylor de orden 2:

$$P_2(x) = \overbrace{f(a)} + \overbrace{\nabla_f(a)^T(x-a)}^{c^T.x} + \overbrace{\frac{1}{2}(x-a)^T H_f(a)(x-a)}^{x^T A x}$$

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad P_2(x) = \underbrace{f(a)}_{\substack{\text{const}\\(0)}} + \underbrace{f'(a)\cdot(x-a)}_{\substack{\text{lineal}\\(1)}} + \underbrace{\frac{1}{2}\, f''(a)(x-a)^2}_{\substack{\text{cuad.}\\(2)}}$$

Ejemplo

Sea $f(x_1, x_2) = cos(x_1) + x_1 x_2 + 3x_1^2$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$a = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$f(a) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \cdot 0 + 3 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\pi^2$

$\nabla_f(x_1, x_2) = \left(-\sin(x_1) + x_2 + 3x_1, x_1\right)$

$\nabla_f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \left(\frac{3}{2}\pi - 1, \frac{\pi}{2}\right)$

$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\cos(x_1) + 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$H_f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$!\ (x - a) = \left(x_1 - \frac{\pi}{2}, x_2\right)$

$P_2(x) = \frac{3}{4}\pi^2 + \left(\frac{3}{2}\pi - 1, \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(x_1 - \frac{\pi}{2}, x_2\right) + \left(x_1 - \frac{\pi}{2}, x_2\right) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - \frac{\pi}{2} \\ x_2 \end{pmatrix}$