Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

Martín Errázquin (merrazquin@fi.uba.ar)

Especialización en Inteligencia Artificial

Dualidad

min $-x^2$
s.t. $x > 0$

Dado el problema primal:

$$\min \; f(x_1, ..., x_n)$$
$$s.t. \; g(x_1, ..., x_n) \leqslant b$$
$$x_i \geqslant 0$$

n vars

m restr.

Tenemos el problema dual:

$$\max \; D(\lambda_1, ..., \lambda_m)$$
$$s.t. \; h(\lambda_1, ..., \lambda_m) \geqslant b$$
$$\lambda_j \leqslant 0$$

m vars.

n restr.

- Se define $D(\lambda_1, ..., \lambda_m) \doteq \inf_{\bar{x}} \mathscr{L}(\bar{\lambda}, \bar{x})$. si $n >> m$ el dual es + fácil
- Dualidad débil: Si $\bar{x^*}$ es una solución factible del problema primal e $\bar{\lambda^*}$ es una solución del dual entonces $f(\bar{x^*}) \geqslant D(\bar{\lambda^*})$.
- Si un problema no tiene un óptimo finito entonces el otro no es factible.

$\Rightarrow D = \phi$

Ejemplo (1/2)

Sea

$n=3$

$$\begin{aligned} \min\ & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ s.t.\ & -2x_1 - 1x_2 - x_3 + 7 \leq 0 \\ & -x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 8 \leq 0 \\ & x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{aligned} \Bigg\} \ m=2$$

El lagrangiano resulta:

$$\mathscr{L}(\bar{\lambda}, \bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + \lambda_1(-2x_1 - 1x_2 - x_3 - 7) + \lambda_2(-x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 8)$$

de donde para que $D(\lambda_1, \lambda_2)$ no pueda valer $-\infty$ los términos de $x_1, \ldots, x_3$ deben ser no negativos, resultando en el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 3 - 2\lambda_1 - \lambda_2 \geq 0 \\ 4 - \lambda_1 - 3\lambda_2 \geq 0 \\ 5 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \geq 0 \end{cases} \Bigg\} \text{restr.}$$

$m'=3$

Ejemplo (2/2)

Luego, como el mínimo de $\mathscr{L}$ se da para $\underbrace{x_1 = x_2 = x_3}_{\nabla_x L = \vec{0}} = 0$, resulta $D(\lambda_1, \lambda_2) = \mathscr{L}(\bar{\lambda}, \bar{0}) = 7\lambda_1 + 8\lambda_2$.

Teniendo entonces las formulaciones de D y las restricciones, reformulamos el problema:

$$
\begin{aligned}
\max \ & \overbrace{7\lambda_1 + 8\lambda_2}^{n'=2} \\
s.t. \ & \left.\begin{aligned}
3 - 2\lambda_1 - \lambda_2 \geq 0 \\
4 - \lambda_1 - 3\lambda_2 \geq 0 \\
5 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \geq 0
\end{aligned}\right\} m'=3 \\
& \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Nota: en estos casos de problemas lineales se da la condición de *dualidad fuerte*, por la cual el óptimo del dual coincide con el óptimo del primal.