

Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

Martín Errázquin (merrazquin@fi.uba.ar)

Especialización en Inteligencia Artificial

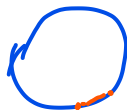
Optimización convexa

Región Convexa

Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si para cada par de puntos $x, y \in S$, $\alpha \in [0, 1]$ se verifica que $z = \alpha x + (1 - \alpha)y \in S$.

Obs: X_1, X_2 son dos conjuntos convexos, entonces,

- $X_1 \cap X_2$ es convexo.
- si L es una transformación lineal, $L(X_1)$ es convexa.



Función Convexa

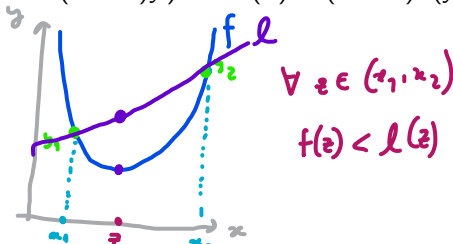
Sea $M \subset \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$ convexo, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces se dice que:

- f es convexa en M sii $\forall x, y \in M, \forall \alpha \in [0, 1]$ se verifica que:

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

- f es estrictamente convexa en M sii $\forall x, y \in M, \forall \alpha \in (0, 1)$ se verifica que:

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$



Prop: Sea $M \subset \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$ abierto convexo, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2$.

Entonces, f es convexa en M sii $\forall x \in M, y^T H_f(x) y \geq 0$, para cualquier $y \in \mathbb{R}^n$.

Hessiano semi-def. pos.

Condición de Slater

Sea el problema

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ & h_j(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \end{aligned}$$

donde las f, h_j son funciones convexas y las g_i son funciones afines (lineales o constantes). Si existe un punto \vec{x}_0 **estrictamente factible**, es decir que $g_i(\vec{x}_0) = 0, h_j(\vec{x}_0) < 0 \forall i, j$ entonces:

- 1 Hay dualidad fuerte: óptimo del dual coincide con óptimo del primal
- 2 Las condiciones KKT son necesarias y suficientes

↳ ~~condición~~ óptimo

Programación Lineal

Un problema de programación lineal es donde tanto la función objetivo como las funciones que definen las restricciones son lineales. La forma general es:

$$\begin{array}{ll} \text{opt } c_1x_1 + \dots + c_nx_n & \text{) } \min \quad c^Tx \\ \text{s.t. } a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 & \\ & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m & \\ d_{11}x_1 + \dots + d_{1n}x_n \geq e_1 & \\ & \vdots \\ d_{r1}x_1 + \dots + d_{rn}x_n \geq e_r & \\ g_{11}x_1 + \dots + g_{1n}x_n = b_1 & \\ & \vdots \\ g_{s1}x_1 + \dots + g_{sn}x_n = b_s & \end{array}$$

f, g: non lineals

s.t. $Ax \leq b$

Propiedades de la Programación Lineal



Definición: Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ convexo $S \neq \emptyset$, $\bar{x}^* \in S$ es un punto extremo de S si \bar{x}^* no puede expresarse como combinación lineal convexa de puntos de S distintos de él.

- 1 Es un problema convexo ya sea de minimización o maximización.
- 2 La solución óptima, si existe, es global.
- 3 Nunca existen óptimos locales que no sean globales.
- 4 Tiene 0, 1 o infinitas soluciones.

Forma estándar: Se busca hallar $\min \bar{c}\bar{x}$, s.t. $A\bar{x} = \bar{b}$; $\bar{x} \geq 0$, donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m < n$, $rg(A) = m$.

Métodos típicos de solución: Algoritmo Simplex y revised Simplex, Interior Point (IPM).



Programación cuadrática

En el caso de que la función objetivo sea una cuadrática convexa:

- LASSO
- SVM

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^d} \quad & \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \quad \text{f. cuadr.} \\ \text{s.t. : } & Ax \leq b \quad \text{restr. lineal} \end{aligned}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^d$.

La matriz $Q \in \mathbb{R}^{d \times d}$ es simétrica y definida positiva, y por lo tanto la función objetivo es convexa. El lagrangiano está dado por:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x + \lambda^T (Ax - b)$$

Para obtener $D(\lambda) = \min_x \mathcal{L}(x, \lambda)$ buscamos x aplicando $\nabla \mathcal{L}(x) = 0$:

$$\nabla \mathcal{L}(x) = Qx + (c + A^T \lambda) = 0 \Rightarrow x = -Q^{-1}(c + A^T \lambda)$$

Y sustituyendo obtenemos el objetivo del dual:

$$D(\lambda) = -\frac{1}{2}(c + A^T \lambda)^T Q^{-1}(c + A^T \lambda) - \lambda^T b.$$