

DOI: 10.13482/j.issn1001-7011.2016.03.018

剪切波与小波在信号及图像去噪中的应用

丁亮, 杨卓然, 闻瑞琛, 孙长启, 王帅姣, 蒋苗苗

(东北林业大学理学院, 哈尔滨 150040)

摘要: 针对信号和图像去噪声问题, 利用小波及剪切波理论, 分别对信号及图像稀疏表示。通过软阈值算法将其重构, 实现去噪声过程。根据小波和剪切波的不同结构, 分析了剪切波与小波的去噪声过程, 通过信噪比对比了二者的恢复效果。通过数值算例分析了消失矩对小波去噪声结果的影响, 为去噪声问题中如何选择小波基提供先验信息。

关键词: 去噪; 剪切波; 小波; 稀疏表示; 消失矩

中图分类号: O242.1

文献标志码: A

文章编号: 1001-7011(2016)02-0272-09

Application of shearlet and wavelets in signal and image denoising

DING Liang, YANG Zhuoran, WEN Ruichen, SUN Changqi,

WANG Shuaijiao, JIANG Miaomiao

(School of Science, Northeast Forestry University, Harbin 150040, China)

Abstract: Aim at the solution to signal and image denoising problems, the sparse representation of signal and image is given based on the theory of wavelet and shearlet. Then a soft threshold algorithm is used to reconstruct the object in order to achieve the denoising. According to different structures of wavelet and shearlet, the denoising processes are analyzed and compared by SNR to evaluate the efficiency. Furthermore, numerical examinations are taken to analyze the influence of vanishing moments to denoising results, which will provide the prior information for how to choose the wavelet basis.

Keywords: denoising; shearlet; wavelet; sparse representation; vanishing moments

0 引言

信号转换和传输过程总是会受到外界的影响和干扰, 例如成像设备的限制、外部环境的干扰等, 这些影响和干扰使得图像质量下降, 因此探究图像恢复的方法是非常必要的。目前, 图像处理理论发展迅速, 小波分析理论已被广泛运用于图像去噪问题^[1-6]。不同小波基具有不同的特征^[7], 如 Haar 小波在处理分段常值图像时具有较好的恢复效果, Symmlets 小波则更擅长光滑图像的稀疏表示。因此, 无论是在理论还是在实际应用方面, 研究不同小波及同一小波在不同消失矩下的去噪效果都非常有意义^[8]。自从小波理论提出至今, 其在图像处理领域一直受到国内外研究人员的广泛关注。早在 20 世纪 90 年代, Donoho 等^[8]就提出了小波阈值收缩方法 (WaveShrink) 等, 建立了著名的阈值公式, 并且从逼近意义上给出了此方法的最优性。与

收稿日期: 2015-09-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (41304093); 中央高校基本科研业务费专项基金资助项目 (2572015CB19); 东北林业大学大学生创新训练基金资助项目 (201410225028)

作者简介: 丁亮 (1979-), 男, 副教授, 主要研究方向: 偏微分方程反问题, E-mail: dl@nefu.edu.cn

引文格式: 丁亮, 杨卓然, 闻瑞琛, 等. 剪切波与小波在信号及图像去噪中的应用[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2016, 33(2): 272-280.

此同时, Krim 等利用 Rissanen 的 MDL (Minimum Description Length) 准则, 也得到了相同的阈值公式。这种理论在降噪领域已经得到了广泛的运用, 但是 Donoho 给出的阈值公式, 过滤性太强, 去掉了大量的有效信息, 这使得降噪后信息的连续性大大降低, 于是人们开始将注意力集中于改变阈值的选取方法, 常用的有 SURE (Stein's Unbiased Risk Estimation) Shrink 阈值^[8], 它是在 SURE 准则下得到的阈值, SURE 准则是一种基于方差准则的无偏估计, 该阈值趋于理想阈值。小波方法虽然广泛应用于图像和信号处理问题, 但是该方法在方向性上还有很大的局限性, 为了克服小波自身的缺点, 目前常用的弥补方式有两种, 一种是采用多小波相结合的方式^[8-9], 另一种则是采用小波与其他多方向波^[10] 结合进行图像降噪处理的方式。本文采用的是后一种方式, 用于比较不同小波基的降噪效果, 并采用剪切波 (Shearlet)^[11-12] 对图像进行降噪处理, 比较它和小波降噪方法各自的优缺点。

传统的图像去噪方法中, 小波是最常用的工具, 因为它具有时频性、多分辨分析等特点, 使得小波能表示奇异点的位置和特征^[9], 而对于二维空间中的奇异线与奇异面却无能为力, 所以多尺度几何分析 (Multiscale Geometric Analysis, MGA) 方法应运而生, 例如: 剪切波 (Shearlet)、曲波 (Curvelet)^[11]、脊波 (Ridgelet) 等。Shearlet^[12-15] 是一种结合了曲波以及轮廓波优点的新型多尺度几何分析工具, 对母函数进行剪切、平移和伸缩变换而生成具有多方向的多分辨分析函数。Shearlet 的特点是能够最优地稀疏表示图像中具有 C^2 光滑性的奇异线^[13]。虽然基于 MGA 的 Shearlet^[13-14] 已经具备了较好的图像恢复能力, 但小波对一维信号的奇异点处理^[12] 却能够表现出自己的优势。对于某些图像用不同的小波进行恢复的效果是不同的, 即每一种小波都有自己擅长恢复的图像类型。本文比较了不同小波及其不同消失矩下的去噪效果, 将其与 Shearlet 结合, 提高图像的去噪效果; 探究了小波在图像去噪中的理论分析, 讲述了小波降噪的原理, 以及小波在图像去噪中是如何发挥作用的; 最后阐述了 Shearlet 的一些基本原理, 以及现有的 Shearlet 的理论体系^[14-15]; 进一步详细叙述了本文的数值算例, 通过对一维信号进行小波去噪, 然后对图像进行二维图像的分解、重构, 分析不同图像的特性, 比较不同的小波基带来的恢复效果, 最后应用 Shearlet 对图像进行降噪处理^[11-12], 并分析了恢复后图像的信噪比。

1 小波及其在图像去噪中的应用

1.1 小波基本理论

定义 1 对于任意一个函数 $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, 它的连续小波变换定义如下:

$$W_f(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \bar{\psi}_{a,b}(x) dx \quad (1)$$

它的逆变换是

$$f(x) = C_{\psi}^{-1} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2} W_f(a, b) \psi\left(\frac{a}{x-b}\right) da db \quad (2)$$

定义 2 $L^2(\mathbb{R})$ 上的一个多分辨分析 (MRA) 是一系列闭的子空间 $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 满足:

(1) $V_j \subset V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}$; (2) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$; (3) $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$; (4) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$; (5) 存在函数 $\varphi \in V_0$, 使得 $\{\varphi(x-n), n \in \mathbb{Z}\}$ 是 V_0 的一组正交基, 子空间 V_j 中的基函数 $\varphi_{jk}(x)$ 是由尺度函数 φ_j 伸缩平移后得到, 子空间 $W(\ell)$ 中的基函数 $\psi_{jk}(x)$ 是由尺度函数 $\psi(x)$ 伸缩平移后得到。通过 MRA 的定义, 可以得出:

$$V_J = V_{J-1} \oplus W_{J-1} = V_{J-2} \oplus W_{J-1} \oplus W_{J-1} = V_0 \oplus W_0 \oplus \cdots \oplus W_{J-1}$$

一个给定的函数可以由尺度函数和小波函数表示:

$$f = \sum_k c_{JK} \varphi_{JK}(x) + \sum_k \sum_{j=0}^{J-1} d_{jk} \psi_{jk}(x) \quad (3)$$

根据信号处理的测不准原理:

$$\Delta t \Delta \omega \geq \frac{1}{2} \quad (4)$$

其中, t 是时间, ω 是角频率 ($\omega = 2\pi f$, f 是瞬时频率)。当时域分辨率较高时, 频域分辨率就会下降, 反之, 频域分辨率高时, 时域分辨率下降。母小波或窗函数取值越宽, Δt 值越大。当 Δt 越大时, 缩放因子越大, 对应低频, 频域分辨率高, 时域分辨率低。当 Δt 越小时, 缩放因子越小, 对应高频, 频率清晰度低, 时间清晰度

高。跟短时傅里叶转换一样,能同时分析时间和频率,但是使用小波逆转换对于图像的高频部分还原度比较高,低频部分相对来说低一些,刚好符合本研究对信号分析在高低频的清晰度要求。在低频时,如从 1.0 Hz 变到 2.0 Hz,频率差了一倍,频率的变化相较时间的变化比较明显;在高频时,如从 1 000 Hz 变到 1 001 Hz,频率相较时间的变化不大,对时间清晰度的要求较高。

1.2 图像去噪的小波阈值方法

在基于傅里叶变换^[3-4]的信号处理方法中,传统的降噪方法有着非常大的局限性,会导致信号的不连续性加重,使信号原有的信息随着降噪一并丢失,尤其是在低信噪比的情况下,经过滤波器的处理之后,不仅信噪比得不到明显的改善,相反,信号的位置信息也变得模糊。因为小波变换具有多尺度的特性,小波变换对于信号具有一种“集中”能力,如果一个信号中所包含的能量分布十分规律,全部集中在小波变换域的少数系数上,那么这些具有高能量的区域便包含了原始图片的大量信息。筛选适当的阈值和对小波的变换域系数进行筛选,是小波阈值去噪的核心问题。

小波理论应用于图像去噪问题的方法已有许多,对于不同类型的噪声,最优去噪理论也不尽相同。到目前为止,国内外基于小波去噪理论的研究大概基于以下三类:模极大值原理、小波系数相关性和阈值去噪,其中研究较多的是基于 Donoho 最先提出的阈值去噪方法,而小波阈值去噪方法最关键的三个问题是如何选择小波基函数、最优阈值和最优阈值函数。小波基函数的选择需满足正交性、对称性或反对称性、高消失矩等,常用的小波基函数有 Haar 小波、Daubechies 小波、Morlet 小波等。函数的正则性一般用来刻画函数的光滑程度,正则性越高,函数的光滑性越好。小波基函数的正则性主要影响着小波系数重构的稳定性,对很多重要的小波(如 Daubechies 小波),随着消失矩的增加,小波的正则性会变大,函数的光滑性更好。阈值函数最常用的有软阈值函数和硬阈值函数。设 $f(t)$ 为真实信号, $\varepsilon(t)$ 为高斯白噪声; $W(t)$ 为含噪声的信号,则其含噪的一维信号模型为 $W(t) = f(t) + \varepsilon(t)$,从 $W(t)$ 中将噪声 $\varepsilon(t)$ 去除,是去噪理论的核心所在。一维信号小波去噪理论可分为一维小波分解、阈值选取和小波重构。一维小波分解即选取合适的小波与分解层数进而得到小波系数,阈值的选取决定去噪效果,所以也是最关键的一步。二维小波变换原理基本等同于一维小波变换。

2 剪切波理论

2.1 剪切波基本理论

剪切波(Shearlet)是一种多尺度几何分析方法。通过对基本函数缩放、剪切和平移仿射变换生成具有不同特征的剪切波函数。剪切波可以检测到二维信号的所有奇异点,自适应跟踪奇异曲线的方向,且随着尺度参数变化可以精确描述函数的奇异性特征,实现以经典多尺度分析描述高维信号中的几何奇异性。Shearlet 变换的稀疏表示特性使其非常适用于图像去噪^[12-13]。

剪切波是在合成小波的基础上,结合仿射系统构造而来。维数 $n = 2$ 时,其仿射系统为:

$$M_{(AB)}(\Phi) = \{\Phi_{j,l,k}(x) = |\det(A^{\frac{1}{2}})|\Phi(B^T A^{\frac{1}{2}}X - k) : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^2\} \quad (5)$$

其中, $\Phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ 表示合成仿射系统中的母函数, A 和 B 是 2×2 可逆矩阵,且 $|\det B| = 1$,尺度参数为 j ,剪切参数为 l ,平移参数为 k 。 $M_{AB}(\Phi)$ 称为 Parseval 框架(紧框架),即对任意的 $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ 满足:

$$\sum_{j,l,k} |\langle f, \Phi_{j,l,k} \rangle|^2 = \|f\|^2 \quad (6)$$

其中, A^j 矩阵是和尺度变换相关的, B^j 是和保持面积不变的几何变换相匹配,如剪切、平移等操作。令

$$N_{a,s} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \sqrt{as} \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix} \quad (7)$$

其中 $(a,s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ 满足如下仿射系统:

$$M_{N_{a,s}}(\Phi) = M_{a,s,t}(\Phi) = \{\Phi_{a,s,t}(x) = a^{-\frac{3}{4}}\Phi(N_{a,s}^{-1}(x-t)) : a \in \mathbb{R}^+, s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^2\} \quad (8)$$

其中, $M_{N_{a,s}}$ 是各向异性膨胀矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}$ 和剪切矩阵 $S = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的组合, $M_{a,s,t}(\Phi)$ 称为连续剪切波。

2.2 剪切波(Shearlet)在图像去噪中的应用

在图像去噪过程中,去噪的效果由两方面决定:变换域应该具有准确的图像表示方法和有一个理想的阈

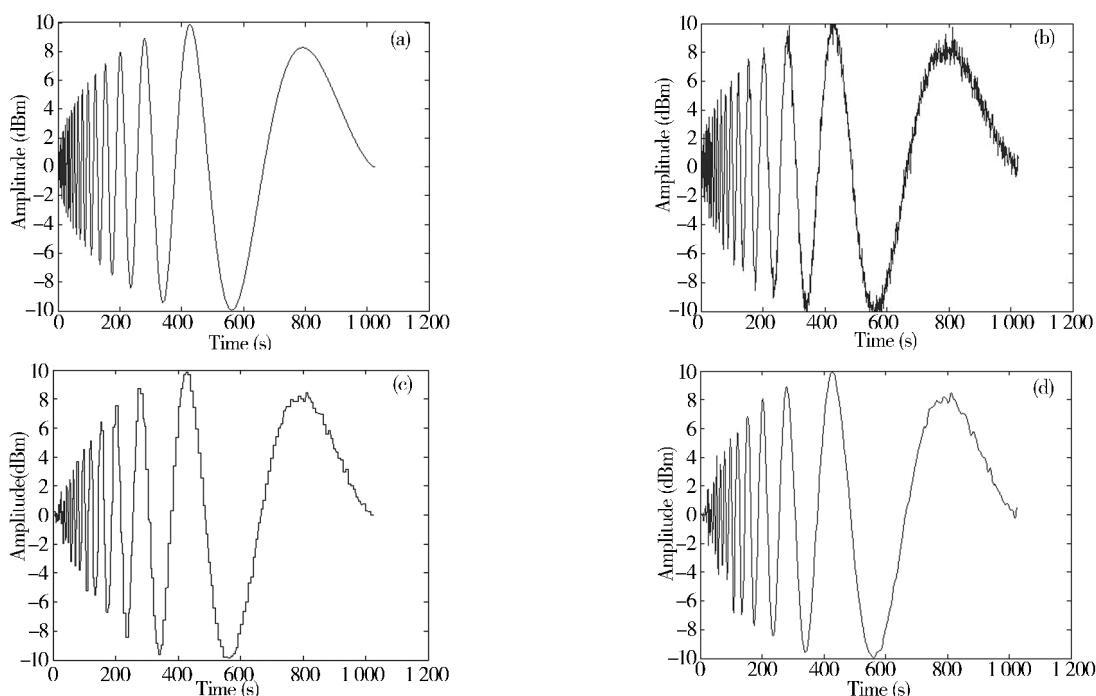
值选取方法。Shearlet 变换对图像的稀疏表示使得 Shearlet 具有更好的局部化特性和很强的方向敏感性,并且其良好的衰减性可以得到滤波性能更好的滤波器,从而得到更好的 Shearlet 重构效果^[13-14]。通过 Shearlet 变换的分解和重构算法,用 Shearlet 对含噪图像进行变换分解,得到低频和高频系数,对各尺度的高频系数处理,得到高频系数,将去噪后高频系数和低频系数进行 Shearlet 逆变换^[16],进行图像重构。Shearlet 变换系数的特点是相同尺度但方向相反的兄弟系数的依赖程度非常高。于是将相同尺度但方向相反的兄弟系数放在一起,并用同一个窗函数处理,能更好地处理基于相关性的图像去噪。在方向性方面,Shearlet 方向性使图像在每一个 Shearlet 尺度上都呈现出多个不同方向的子图像,使得 Shearlet 系统是一种特殊的仿射系统。带离散参量的连续 Shearlet 变换中加入两个表示伸缩变换的参量^[15-16],其中一个参数表示尺度,另一个表示方向,最后生成 Shearlet 函数,可以证明其是一个紧框架。

3 数值算例

3.1 小波方法去噪

3.1.1 一维信号

由于不同小波的特点不同,算例采用 4 类小波进行实验,分别为 Haar、Daubechies、Symmlets 和 Coiflets。Haar 小波是一种具有对称性又是有限支撑的正交小波; Daubechies 小波不是对称的,但是具有紧支撑和正交的良好性质; Symmlets 小波具有 Daubechies 小波的全部特点,并且是接近对称的;而 Coiflets 小波是一种接近对称的紧支撑的正交小波。图 1 显示原始信号、含噪信号以及运用不同小波对含噪信号进行恢复的结果。图 1(a) 是原始信号,图 1(b) 是对原始信号添加标准差为 1.5 的高斯白噪声后得到的含噪信号($\text{SNR} = 21.47 \text{ dB}$),图 1(c) 为 Haar 小波的去噪结果($\text{SNR} = 18.41 \text{ dB}$),图 1(d) 为使用 Daubechies5 小波进行去噪结果($\text{SNR} = 23.26 \text{ dB}$),高于 Haar 小波(图 1(c))的去噪信噪比,图 1(e) 和 1(f) 分别是 Symmlet8 小波和 Coif4 小波去噪后得到的结果。Daubechies5 小波恢复后的视觉效果比其他三个小波要稍好一些,由于信号的非对称性使得不对称的 Daubechies5 小波在恢复效果上比接近对称的 Symmlet8 小波和 Coiflet4 小波的恢复效果略胜一筹。Symmlet8 小波去噪后的结果($\text{SNR} = 22.06 \text{ dB}$)与 Coiflet4 小波去噪后的结果($\text{SNR} = 21.85 \text{ dB}$),去噪效果相差不大。这三种小波对于连续近似光滑信号有着较好的去噪优势,Haar 小波去噪后的结果最差,由于 Haar 小波函数为分段函数,使得 Haar 小波对于连续光滑信号的处理效果较差。正由于 Haar 小波的这种特性,使得 Haar 小波在特殊信号(例如图 2)的去噪处理上有较好的效果。



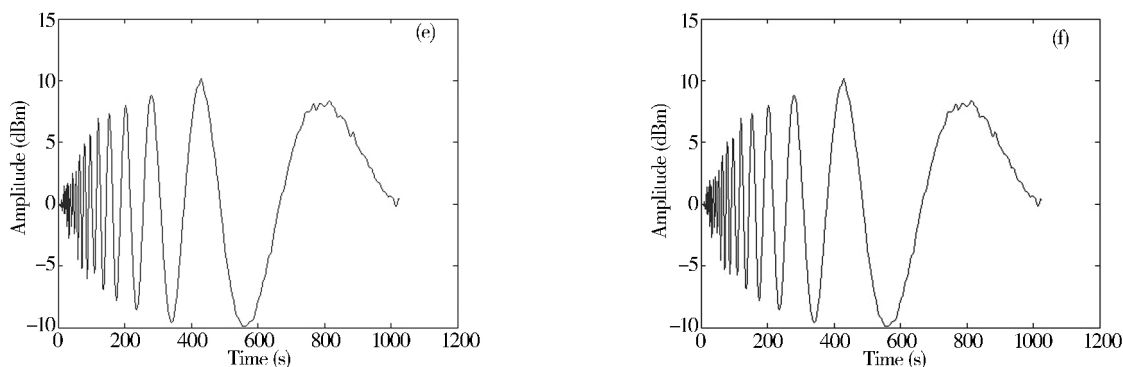


图 1 Haar、Daubechies、Symmlets 和 Coiflets 的信号去噪结果: (a) 原始信号, (b) 含噪信号 (SNR = 21.47 dB), (c) Haar 小波去噪 (SNR = 18.41 dB), (d) daubechies5 小波去噪 (SNR = 23.26 dB), (e) Symmlet8 小波去噪 (SNR = 22.06 dB), (f) Coiflet4 小波去噪 (SNR = 21.85 dB)

Fig. 1 Denoised results by the Haar, Daubechies, Symmlets and Coiflets: (a) original data, (b) noisy data (SNR = 21.47 dB), denoised data by (c) the Haar wavelets (SNR = 18.41 dB), (d) the Daubechies5 wavelets (SNR = 23.26 dB), (e) the Symmlet8 wavelets (SNR = 22.06 dB), (f) the Coiflet4 wavelets (SNR = 21.85 dB)

图 2 中的加噪矩形信号是对原始矩形信号添加标准差为 1.5 的高斯白噪声后得到的信号 (SNR = 17.66 dB)。使用不同的小波对图 2 信号进行去噪处理所得结果 (表 1) 中, Haar 小波的去噪处理效果最好, 说明 Haar 小波对于分段信号的处理有着其他小波没有的显著优势, 而其他三族小波的处理效果都大致相同, 对分段信号没有明显优势。通过表 1 的结果可以看出, 在一定范围内, 恢复后图像的 SNR 随着同族小波的消失矩的增大在一定范围内浮动, 这为如何选取小波提供了一定的依据。

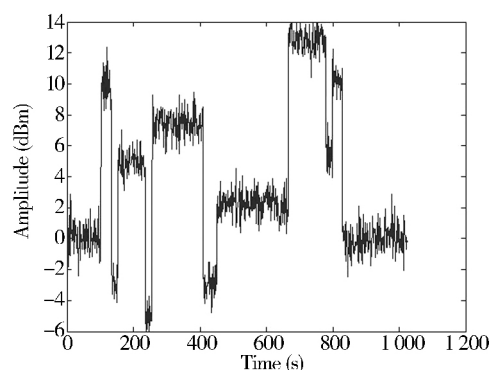


图 2 加噪矩形信号

Fig. 2 Noisy rectangular signal

表 1 不同小波函数对加噪信号去噪处理后结果

Table 1 SNR of denoising for the signal of different wavelets

小波函数	SNR(dBm)	小波函数	SNR(dBm)
Symmlets2	20.798 1	Symmlets3	20.518 3
Symmlets4	20.896 9	Symmlets5	20.500 2
Symmlets6	20.450 1	Symmlets7	20.255 7
Symmlets8	20.549 0	Symmlets9	20.327 1
Symmlets10	20.035 7	Daubechies2	20.798 1
Daubechies3	20.518 3	Daubechies4	20.276 0
Daubechies5	19.821 1	Daubechies6	19.982 3
Daubechies7	19.628 0	Daubechies8	19.198 1
Daubechies9	19.053 9	Daubechies10	19.551 5
Coiflets1	20.951 8	Coiflets2	20.988 7
Coiflets3	20.512 4	Coiflets4	20.520 6
Coiflets5	20.179 0	Haar	22.038 8

3.1.2 二维图像

小波消失矩的定义为, 若 $\langle x^k f \rangle = 0, 0 \leq k < N$, 则称小波函数具有 N 阶消失矩。度量一个或者多个函数的正则性时, 消失矩的作用是十分重要的。若小波消失矩的阶数小于正则性指数, 这时小波无法测量出正则性指数, 只有当消失矩的阶数高于正则性指数时才能度量出正则性指数。然而, 并不是消失矩阶数越高就越好, 具体问题还是要具体分析。随着小波函数消失矩的增加, 一个负面的影响是其支撑长度变宽, 运算量增加。因此在度量信号奇异性时不应使用具有过高阶消失矩的小波。

小波的消失矩越大,支撑长度也就越大,通常支撑长度不少于 $2n-1$,相应的,小波的消失矩越大,它所对应的滤波器就越平坦。因为小波函数的振荡特征很明显,光滑函数在利用这种小波展开后产生的稀疏性就越好。也就是说小波消失矩的大小,决定了小波逼近光滑信号的能力。小波的消失矩越大,所修正的图像应该越平滑,这一点主要是用来进行图像压缩。变大的消失矩将使小波系数中的高频系数变小,小波分解后的图像里面能量也很集中,压缩比例就高,通常采用小波函数中那些消失矩较高的作为小波基。

本文选出了几幅经典的图像,为其添加了高斯白噪声,并且采用不同的小波基将其进行去噪还原,最终得到的信噪比结果与理论分析基本一致。

表2 不同小波基二尺度分解第一层重构的信噪比

Table 2 PSNR of first layer reconstruction by different wavelets' two-scaled decomposition

小波基	Lenna(dBm)	Data_seismic(dBm)	Barbara(dBm)
Haar	31.960 1	35.320 1	25.664 0
Daubechies1	31.960 1	35.320 1	25.664 0
Daubechies3	35.421 8	36.452 8	25.992 1
Daubechies5	36.017 8	36.878 7	26.007 8
Daubechies8	36.389 0	36.764 4	25.973 9
Symmlets2	34.570 0	36.087 2	25.953 5
Symmlets4	35.711 7	36.621 3	26.017 6
Symmlets6	36.133 6	36.778 1	25.999 4
Symmlets8	36.344 3	36.836 3	25.978 6
Coiflets1	34.505 9	36.112 5	25.980 0
Coiflets3	36.195 5	36.852 1	25.992 7
Coiflets5	36.521 6	36.945 2	25.951 0
Biorthogonal1.1	31.960 1	35.320 1	25.664 0
Biorthogonal2.2	35.129 3	36.385 8	25.932 0
Biorthogonal3.3	35.978 3	36.700 4	25.742 5
ReverseBior1.1	31.960 1	35.320 1	25.664 0
ReverseBior2.2	33.198 4	35.430 7	25.819 3
ReverseBior3.3	33.171 2	35.092 6	25.661 3

由表2和表3可以看出一些明显的规律,即相同小波基针对这三幅图片,随着消失矩的增大,信噪比逐渐提高,恢复效果显著提升。但也存在一些问题:(1)就图片的连续性来看,如果图片中出现了明显的块状区域,即反映在信号中就是出现了较多的跳跃,则因为消失矩的提高致使图片过于平滑,反而使信噪比有所降低;(2)即使是对同一幅图片来看,随着小波基消失矩的不断提高,图片信噪比增长速度在不断下降,大消失矩处理结果的差距往往不大,因此,一味的提升消失矩可以提高恢复效率,但是信噪比增长异常缓慢。

表3 不同小波基二尺度分解第二层重构的信噪比

Table 3 PSNR of second layer reconstruction by different wavelets' two-scaled decomposition

小波	Lenna(dBm)	Data_seismic(dBm)	Barbara(dBm)
Haar	27.030 7	32.268 2	23.162 9
Daubechies1	27.030 7	32.268 2	23.162 9
Daubechies3	29.354 2	32.493 5	23.799 3
Daubechies5	29.793 3	32.506 4	23.811 3
Daubechies8	29.905 2	32.517 5	23.822 5
Symmlets2	28.980 6	32.419 8	23.685 7
Symmlets4	29.494 9	32.500 9	23.836 1
Symmlets6	29.873 3	32.516 5	23.810 8
Symmlets8	29.795 3	32.529 9	23.844 3
Coiflets1	28.847 3	32.403 7	23.729 7
Coiflets3	29.734 2	32.510 2	23.841 6

续表

小波	Lenna(dBm)	Data_seismic(dBm)	Barbara(dBm)
Coiflets5	29.872 0	32.538 0	23.836 9
Biorthogonal1.1	27.030 7	32.268 2	23.162 9
Biorthogonal2.2	29.281 3	32.399 0	23.747 5
Biorthogonal3.3	29.537 7	32.279 5	23.579 0
ReverseBior1.1	27.030 7	32.268 2	23.162 9
ReverseBior2.2	27.306 4	32.169 6	23.347 5
ReverseBior3.3	26.408 9	31.855 2	23.012 0

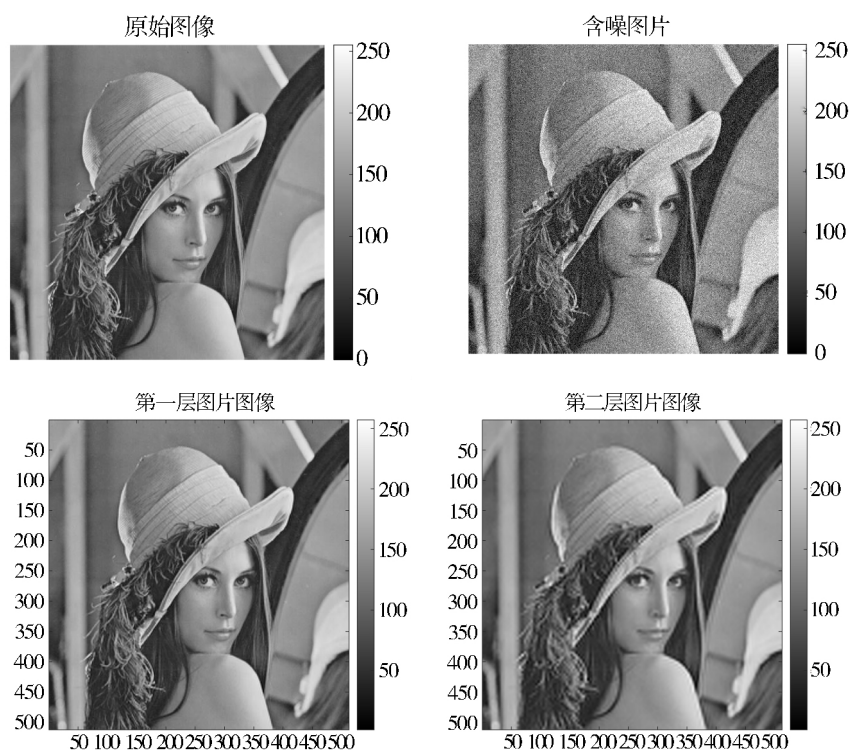


图 3 Lena 图像 Daubechlets8 小波基降噪处理

Fig. 3 Denoised Lena by Daubechlets8 wavelets

如图 3 所示, 将 Lena 图像曝光度调整, 提高对比度之后进行反色处理, 可以清晰地看到原图像中的两点, 即为有效信息。右上角的是添加了高斯白噪声之后的图像, 左下角是基于 Daubechlets8 小波基二尺度分解第一层重构得到的结果, 右下角是基于 Daubechlets8 小波基二尺度分解第二层重构得到的结果。

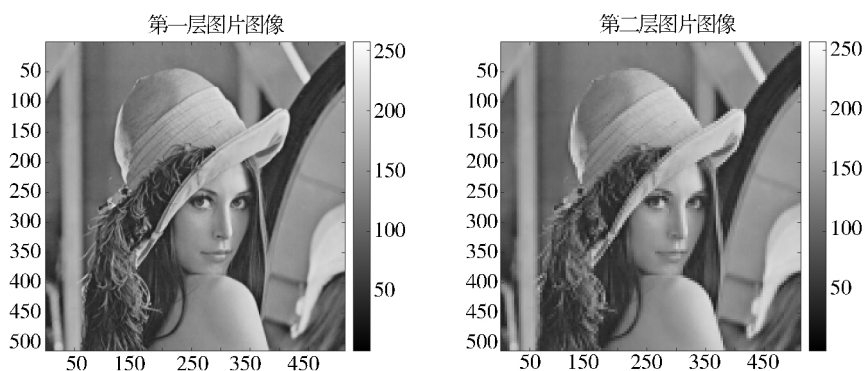


图 4 Lena 图像 Haar 小波基降噪处理

Fig. 4 Denoised Lena by Haar wavelets

图 4 显示, 将小波基由 Daubechies8 替换为 db1, 可以看出第二层图片的分辨率降低, 图片的去噪效果不理想, 这是因为小波消失矩的降低, 导致了光滑性的损失。

3.2 剪切波与小波去噪结果比较

本实验将对 Seismic 图像添加标准差为 8 的高斯白噪声 ,之后分别使用不同小波和剪切波变换进行去噪处理 ,对比去噪结果如图 5 所示。图 5 显示了运用小波和剪切波对含噪信号进行恢复后的结果。图 5(a) 是原始图像 ,图 5(b) 是含噪图像(SNR = 30.96 dB) 。在图 5(c) 中小波恢复的图像存在更多的不连续性 ,没有很好地恢复地震信号的有效信息。

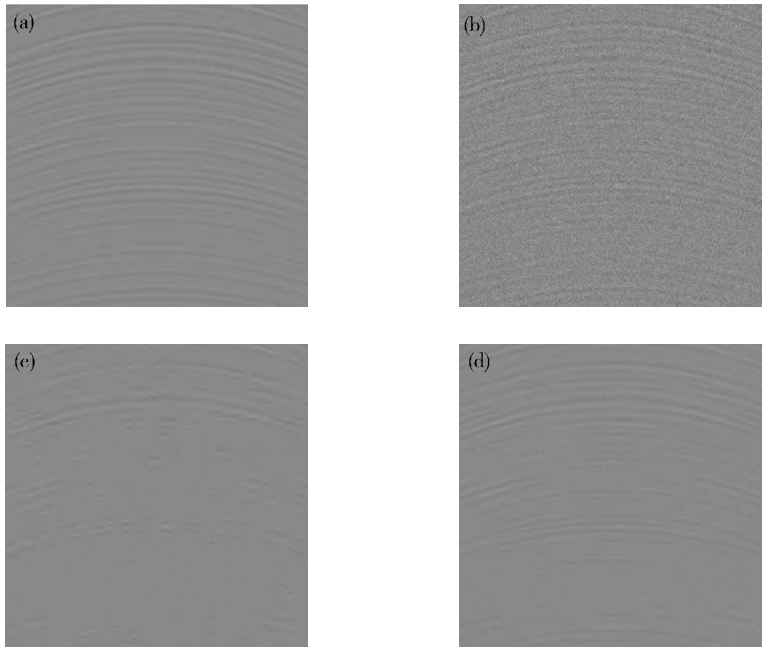


图 5 Wavelet 和 Shearlet 的图像去噪处理结果: (a) 原始图像 , (b) 加噪图像(PSNR = 30.96 dB) , (c) Coiflets5 小波去噪结果(PSNR = 38.76 dB) , (d) 由 Coiflets5 小波所生成的剪切波去噪结果(PSNR = 40.86 dB)

Fig. 5 Denoised results by the wavelets and Shearlets respectively: (a) orignial data; (b) noisy data (SNR = 30.96 dB) ; (c) denoised data by the Coiflet5 wavelets (SNR = 38.76 dB) ; (d) denoised data by the shearlet originated from the Coiflet5 wavelets (SNR = 40.86 dB)

表 4 由不同小波生成的剪切波的去噪恢复结果
Table 4 PSNR of denoising for Fig. 5(b) by different Shearlets

小波函数	PSNR(dBm)	小波函数	PSNR(dBm)
Symmlet4	38.55	Symmlet5	38.63
Symmlet6	38.70	Symmlet7	38.71
Symmlet8	38.73	Symmlet9	38.74
Symmlet10	38.75	Haar	37.25
Coiflet1	38.28	Coiflet2	38.57
Coiflet3	38.71	Coiflet4	38.75
Coiflet5	38.76	Daubechies4	38.01
Daubechies4	38.36	Daubechies8	38.53
Daubechies10	38.63	Daubechies12	38.70

从表 4 中可以看出 ,Coiflets5 小波相比于其他小波对含噪图像的恢复效果较好。同时 ,再次验证了前面的分析 ,在一定范围内 ,随着同族小波消失矩的增加 ,小波的去噪效果越好。而使用 Shearlet 变换(图 5(d)) 进行去噪处理 ,结果 SNR 为 40.86 dB ,高于使用 Coiflets5 小波(图 5(c)) 去噪处理后得到的结果 ,说明 Shearlet 的恢复效果要相对好于小波恢复效果。Shearlet 变换恢复后具有良好的视觉效果 ,由于剪切波能够较好地识别图像的几何形状 ,它能更好地表示线及高维面的奇异性 ,恢复后的图像能够呈现出原始的几何形状。而小波由于只能反映点的奇异性 ,所以恢复后的图像呈点状居多。

4 结 论

本文对比了不同小波在信号及图像去噪中的恢复效果。对于不同的一维信号和二维图像 ,不同小波有

各自的适用范围, Haar 小波适用于处理矩形分段信号,但对于光滑信号却无能为力,而其他光滑小波(Daubechies 小波等)的适用范围与之恰好相反。在图像去噪问题中,通过比较去噪图像的信噪比,得到小波消失矩与去噪效果之间的关系。在一定范围内,随着小波消失矩的增大,去噪效果越来越好,但信噪比的递增速率逐渐变慢。通过小波与剪切波的比较发现,小波对于点状的识别有着明显的优势,但不能很好地识别曲线状结构,而剪切波恰恰具备这样的特性,从恢复效果上看,要优于小波的恢复效果。将小波与剪切波有机地结合进行图像去噪处理将是此后研究的方向。

参考文献

- [1]HAO S, MA J, YANG J. Comparisons of wavelets, contourlets and curvelets in seismic denoising[J]. Journal of Applied Geophysics, 2009, 69(2): 103–115.
- [2]AGRAWAL K, JHA A K, SHARMA S. Wavelet subband dependent thresholding for denoising of phonocardiographic signals[C]. IEEE Signal Processing: Algorithms, Architectures, Arrangements, and Applications (SPA). Poznan: IEEE Xplore, 2013: 158–162.
- [3]谢杰成, 张大力, 徐立文. 小波图像去噪综述[J]. 中国图象图形学报, 2002, 7(3): 209–217.
- [4]张郝. 基于小波变换的图像去噪方法研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2008.
- [5]邓承志. 基于小波变换图像去噪研究[D]. 南昌: 江西师范大学, 2005.
- [6]吴勇. 基于小波的图像去噪方法研究[D]. 武汉: 武汉理工大学, 2007.
- [7]聂林涛, 张恺. 基于小波分析的一维含噪信号的除噪方法[J]. 四川兵工学报, 2011, 32(12): 86–88.
- [8]边静, 戈振兴. 小波变换在信号去噪中的应用[J]. 高校理科研究, 2011(10): 522–523.
- [9]ZHANG L, LI Z, LIU J, et al. Improved algorithm of adaptive DR image denoising based on fast curvelet transform and anisotropic median-diffusion filtering[C]. The 15th International Conference on Biomedical Engineering. Switzerland: Springer International Publishing, 2014, 43: 581–584.
- [10]SAKTHIVEL K. Contourlet based image denoising using new-threshold function[J]. International Journal of Innovative Research in Computer and Communication Engineering, 2014, 2(1): 1–5.
- [11]YIN M, LIU W. Image denoising using mixed statistical model in nonsubsampling contourlet transform domain[J]. Acta Photonica Sinica, 2012, 41(6): 751–756.
- [12]KITTIPOOM P, KUTYNIOK G, LIM W Q. Construction of compactly supported Shearlet frames[J]. Constructive Approximation, 2012, 35(1): 21–72.
- [13]KUTYNIOK G, LABATE D. Shearlets: multiscale analysis for multivariate data[M]. Springer: Birkhäuser Basel, 2012.
- [14]HSUNG T C, LUN D P-K, HO K C. Optimizing the multiwavelet shrinkage denoising [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(1): 240–251.
- [15]EASLEY G, LABATE D, LIM W Q. Sparse directional image representations using the discrete Shearlet transform[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2008, 25(1): 25–46.
- [16]LIM W Q. The discrete Shearlet transform: a new directional transform and compactly supported Shearlet frames[C]. IEEE Transactions on Image Processing: A Publication of the IEEE Signal Processing Society. New York: IEEE Xplore, 2010, 19(5): 1166–1180.
- [17]HOUSKA R. The nonexistence of Shearlet scaling functions[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2012, 32(1): 28–44.
- [18]胡海志, 孙辉, 邓承志, 等. 基于 Shearlet 变换的图像去噪算法[J]. 计算机应用, 2010, 30(6): 1562–1564.
- [19]王艳, 金太东, 杜明娟, 等. 改进的小波变换阈值去噪方法[J]. 河南科技大学学报, 2007, 28(3): 46–49.
- [20]孙晓昕, 曲伟, 侯力梅, 等. 空域滤波与频域滤波下数字图像平滑比较[J]. 黑龙江大学学报, 2014, 5(4): 76–81.
- [21]高清维, 李斌, 谢光军, 等. 基于平稳小波变换的图像去噪方法[J]. 计算机研究与发展, 2002, 39(12): 1690–1694.
- [22]胡江华. 基于 Shearlet 变换方向性的图像消噪[D]. 西安: 西北大学, 2014.