

物理的ニューラルネットによる 極小曲面の生成とその応用

棚橋 典大 [京大理]



w/ 橋本 幸士 京 鴻一 [京大理] 村田 仁樹 萩原 岳都 [埼玉工大]

[arXiv: 2509.10866] Physics-informed neural network solves minimal surfaces in curved spacetime

[arXiv: 2509.10865] Gluon scattering amplitudes with instantons and minimal surfaces with topology change

物理的ニューラルネットによる極小曲面の生成とその応用

- 棚橋典大：京大 素粒子論研究室所属 / 学習物理 連携促進教員
 - 研究分野：重力理論とその応用（宇宙論、素粒子・物性理論、...）
- ◆ 機械学習の応用の一つとして、微分方程式を数値的に解かせる手法：
Physics-Informed Neural Network (PINN) がある。
自分の研究（重力理論・素粒子論）に使えそうか検証する。

■ 例題

- 曲がった時空中の弦・極小曲面の形状
- AdS/CFT対応への応用：グルーオン散乱振幅の計算

- ✓ 既存の手法では解きづらい動く境界を伴う境界値問題を自然に解ける
- ✓ 微分方程式の特異点にも自然に対応できる
- ✓ 実際の研究に出てくる問題にも実用可能

1. Introduction: PINN

2. 計算例

1. 常微分方程式：曲がった時空中の弦

2. 偏微分方程式

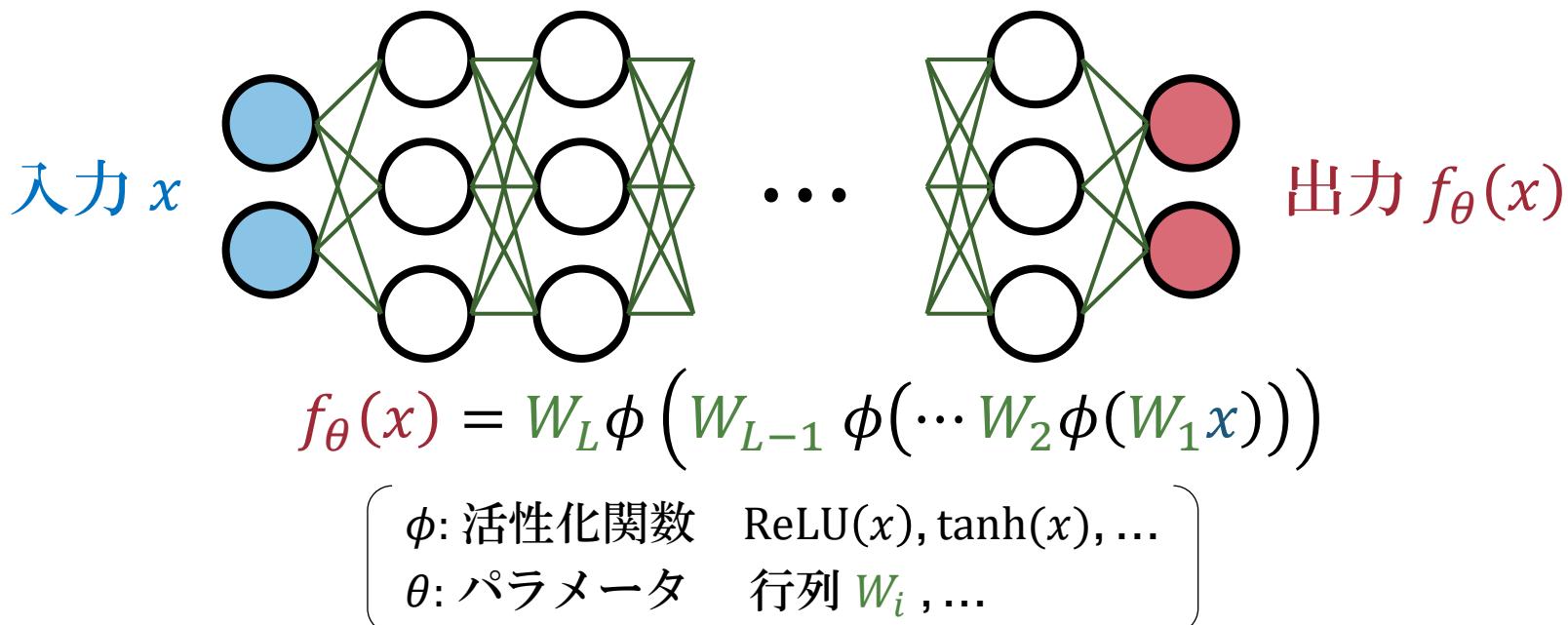
1. 曲がった空間上の極小曲面

2. AdS/CFT対応への応用：グルーオン散乱振幅の計算

3. まとめ

Physics-Informed Neural Network (PINN)

- 機械学習 = Neural network に「学習」をさせる
 - Neural network



- 教師あり学習：モデル関数 $f_\theta(x)$ に入出力データ (x_i, y_i) を再現させたい
→ 損失関数 $\text{Loss}(\theta)$ を最小化

$$\text{Loss}(\theta) = \frac{1}{n} \sum_i (y_i - f_\theta(x_i))^2, \quad \theta_{t+1} = \theta_t - \eta \frac{\partial E(\theta_t)}{\partial \theta}$$

Physics-Informed Neural Network (PINN)

- PINN：「物理法則」を満たすよう制約をかけた機械学習

- 例) 教師あり学習 + 運動方程式
 - モデル関数 $f_\theta(x)$ が 運動方程式 $\mathcal{E}[f_\theta(x)] = 0$ を満たすとする
→ 損失関数 $\text{Loss}(\theta) = \frac{1}{n} \sum_i (y_i - f_\theta(x_i))^2 + (\mathcal{E}[f_\theta(x)])^2$ を最小化
 - $\mathcal{E}[f_\theta(x)] = 0$ が満たされる範囲で $f_\theta(x)$ によるフィッティングができる
- 運動方程式などの制約条件だけで損失関数を構成することもできる
 - 関数 $f_\theta(x)$ が 微分方程式 $\mathcal{E}[f_\theta(x)] = 0$ と 境界条件 $f_\theta(0) = C$ を満たすとする
→ 損失関数 $\text{Loss}(\theta) = (\mathcal{E}[f_\theta(x)])^2 + (f_\theta(0) - C)^2$ を最小化
 - 学習が完了すれば $\mathcal{E}[f_\theta(x)] = 0, f_\theta(0) = C$ を満たす解 $f_\theta(x)$ が得られる

Physics-Informed Neural Network (PINN)

◆通常の数値解法との比較

$$f''(x) + \dots = 0, f(0) = C, \dots$$

➤通常の数値解法：方程式を差分化して解く

- 初期値問題：初期条件 $f(0) = C, \dots$ を用いて $f''(x)$ を数値的に積分
- 境界値問題：shooting法、緩和法、Newton-Raphson法、…

➤PINNによる解法：

- 損失関数 $\text{Loss}(\theta) = (f''(x) + \dots)^2 + (f(0) - C)^2 + \dots$ を最小化する $f = f_\theta(x)$ を探索
- $\theta_{t+1} = \theta_t - \eta \frac{\partial}{\partial \theta} \text{Loss}(\theta)$ でモデル関数 $f_\theta(x)$ のパラメタ θ を更新
↑ $f(x)$ や微分方程式の表現方法が異なるものの、差分に基づく勾配降下法と類似
- 機械学習で使われている誤差最小化ツールがそのまま応用可能

Physics-Informed Neural Network (PINN)

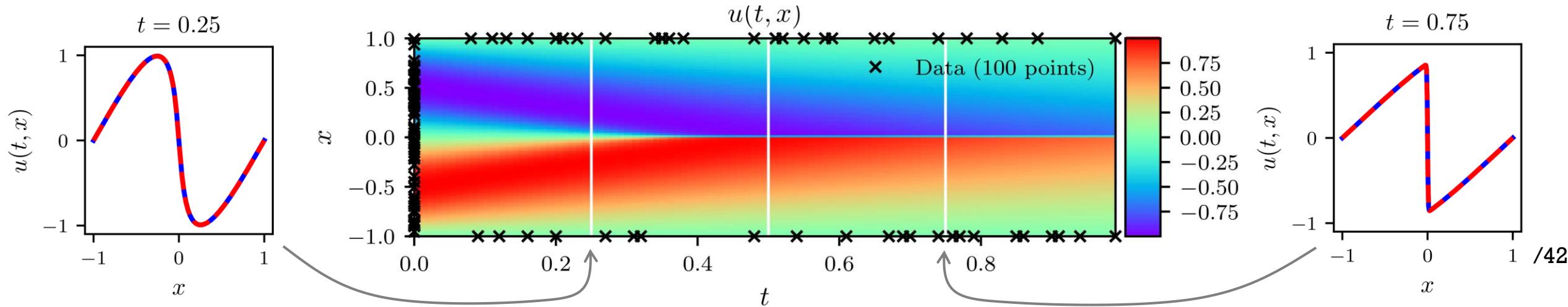
- “Physics Informed Deep Learning (Part I):
Data-driven Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations” [Raissi+ (2017)]
- Burgers方程式の初期値問題

$$u_t + uu_x - (0.01/\pi)u_{xx} = 0 \quad u(0, x) = -\sin(\pi x) \quad u(t, -1) = u(t, 1) = 0$$

$$\text{(損失関数)} = \sum(\text{運動方程式})^2 + \sum(\text{初期条件の式})^2 + \sum(\text{境界条件の式})^2$$



計算領域上のランダムなサンプル点で評価 → 機械学習で最小化

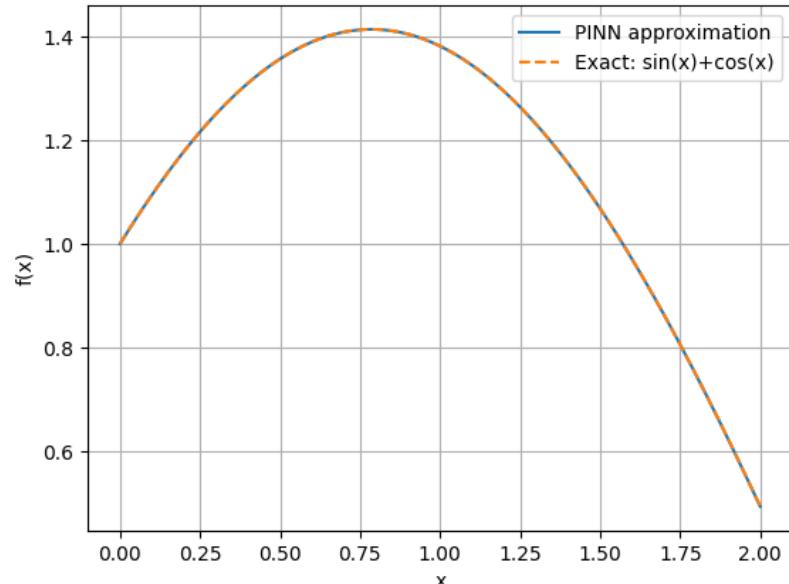


実演

- 以下の常微分方程式（初期値問題）をPINNで解く

$$f''(x) + f(x) = 0, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 1$$

- 厳密解： $f(x) = \sin x + \cos x$



実演

- AIに以下を聞く → 出力実行環境（Google colabなど）にコピペ

Show a PINN code using pytorch to solve

$$f''[x] + f[x] = 0$$

$$f[0] = 1$$

$$f'[0] = 1$$

for x in $[0,2]$

* At the end of the code, add a part to show a plot of $f[x]$ over the calculation domain.

* If possible, compare the result with the exact solution.

1. Introduction: PINN

2. 計算例

1. 常微分方程式：曲がった時空中の弦

2. 偏微分方程式

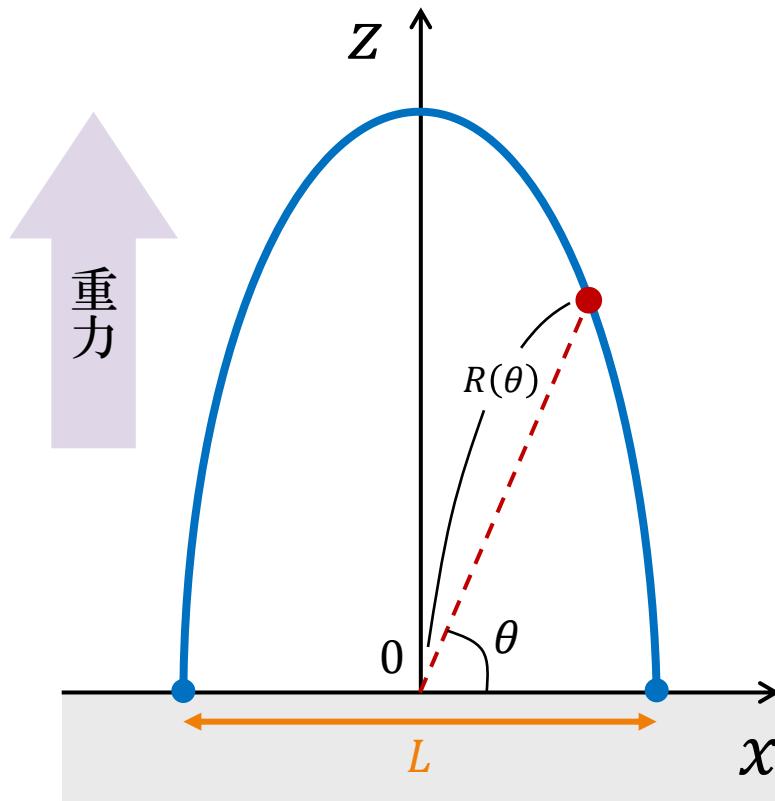
1. 曲がった空間上の極小曲面

2. AdS/CFT対応への応用：グルーオン散乱振幅の計算

3. まとめ

例題：曲がった時空中の弦

- 曲がった時空（Anti-de Sitter時空）における張力を持った弦
 - ✓QCDのクォーク・反クォーク間の引力ポテンシャルと関係



- 時空の計量： $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \frac{1}{z^2}(-dt^2 + dx^2 + \cdots + dz^2)$
- AdS境界 $z = 0$ に端点を持つ張力を持った弦の位置
 $(t, x, z) = (t, R(\theta) \cos \theta, R(\theta) \sin \theta) = (X^\mu)$
- 弦の作用と運動方程式

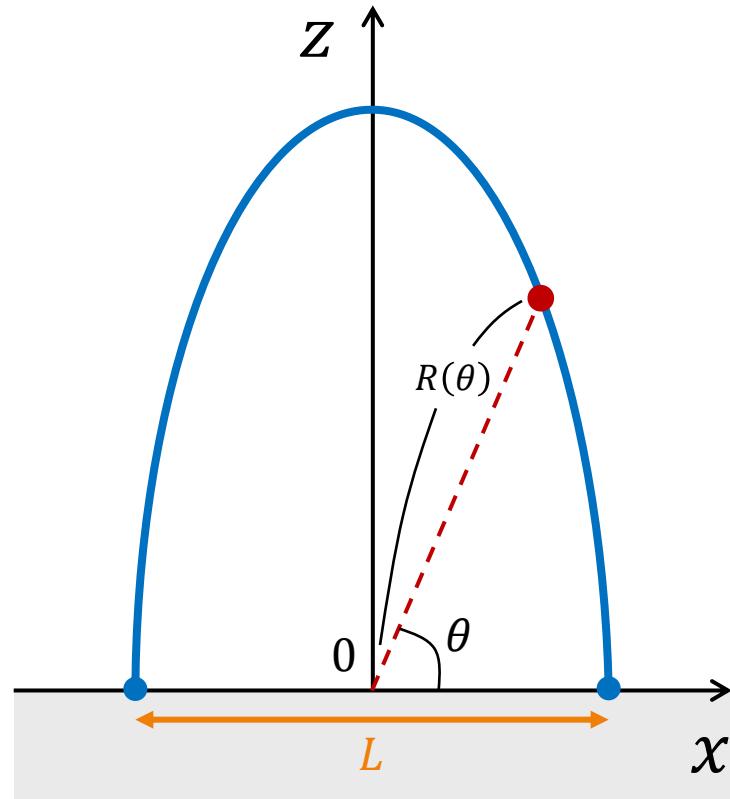
$$S = \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu)} \sim \int d\theta \frac{\sqrt{R^2 + R'^2}}{(R \sin \theta)^2}$$

$$R'' - \frac{2}{\tan \theta} \left(R' + \frac{R'^3}{R^2} \right) + R = 0$$

例題：曲がった時空中の弦

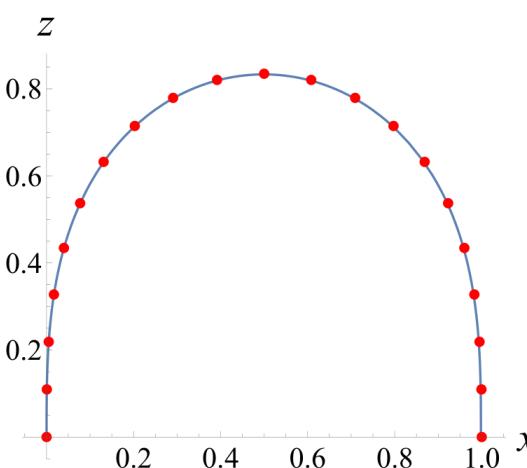
- AdS時空の境界に端点を持つ弦の配位

$$R'' - \frac{2}{\tan \theta} \left(R' + \frac{R'^3}{R^2} \right) + R = 0, \quad R(\theta = 0, \pi/2) = L/2$$



◆ 通常の数値解法

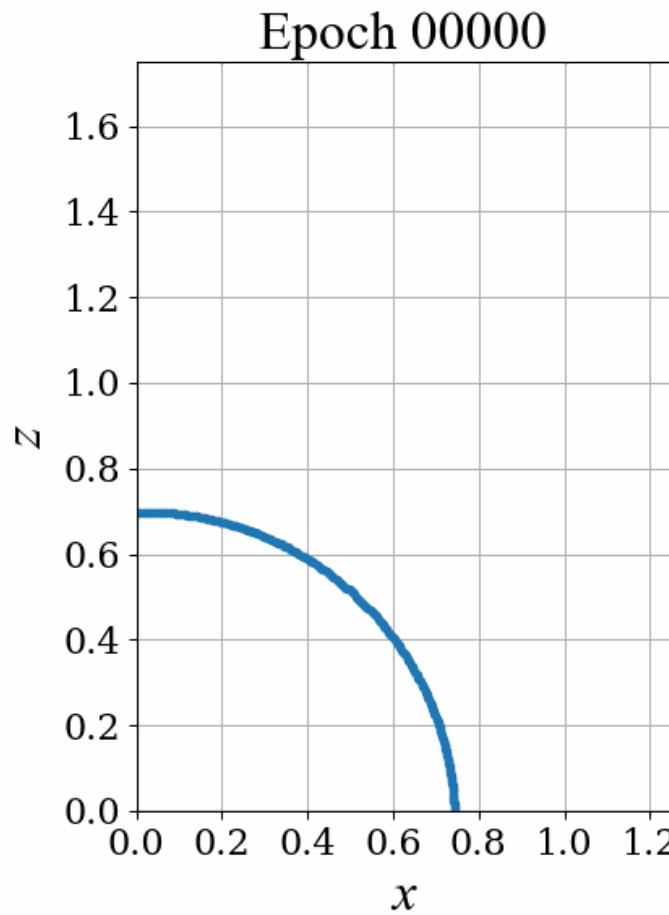
- $\theta \approx 0$ での初期条件として $R(0), R'(0)$ の値を指定
→ $\theta \approx \pi$ まで運動方程式を解く
- 終点の位置 (L の値) を指定したければ、初期値を微調整
(Shooting法、...)



例題：曲がった時空中の弦

- AdS時空の境界に端点を持つ弦の配位

$$R'' - \frac{2}{\tan \theta} \left(R' + \frac{R'^3}{R^2} \right) + R = 0, \quad R(\theta = 0, \pi/2) = L/2$$



◆ PINNによる解法

- $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で解を求めるこにする
- 境界条件： $R(0) = L/2, R'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- $R(\theta)$ をニューラルネットで表現し、次の損失関数を最小化

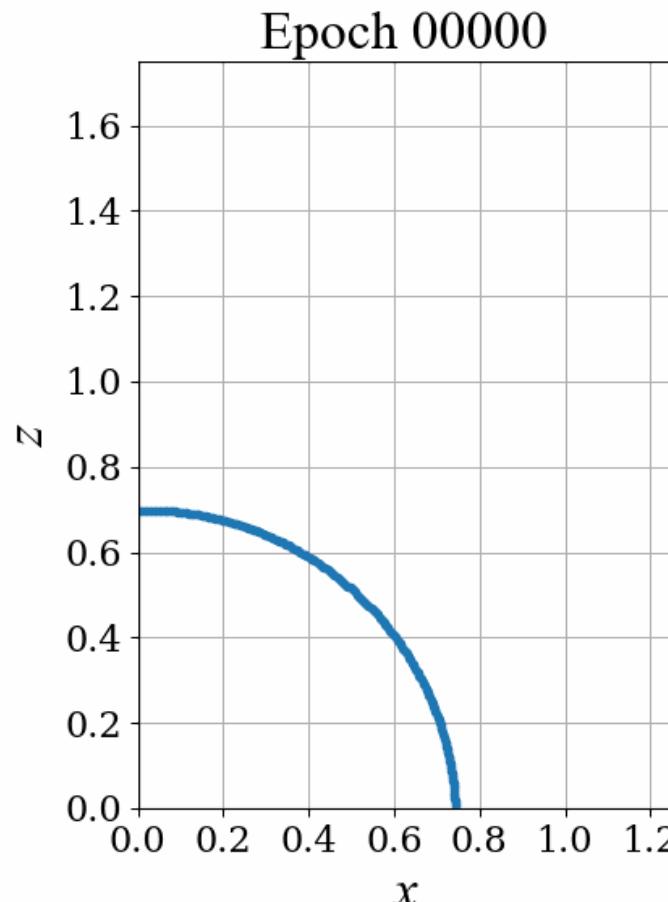
$$\text{Loss} = \sum(R(\theta)\text{の方程式})^2 + \left(R(0) - \frac{L}{2}\right)^2 + \left(R'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2$$

- 損失関数が十分小さくなった時点で数値解が完成

例題：曲がった時空中の弦

- AdS時空の境界に端点を持つ弦の配位

$$R'' - \frac{2}{\tan \theta} \left(R' + \frac{R'^3}{R^2} \right) + R = 0, \quad R(\theta = 0, \pi/2) = L/2$$



◆ PINNによる解法

- $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で解を求めるこにする
- 境界条件： $R(0) = L/2, R'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- $R(\theta)$ をニューラルネットで表現し、次の損失関数を最小化

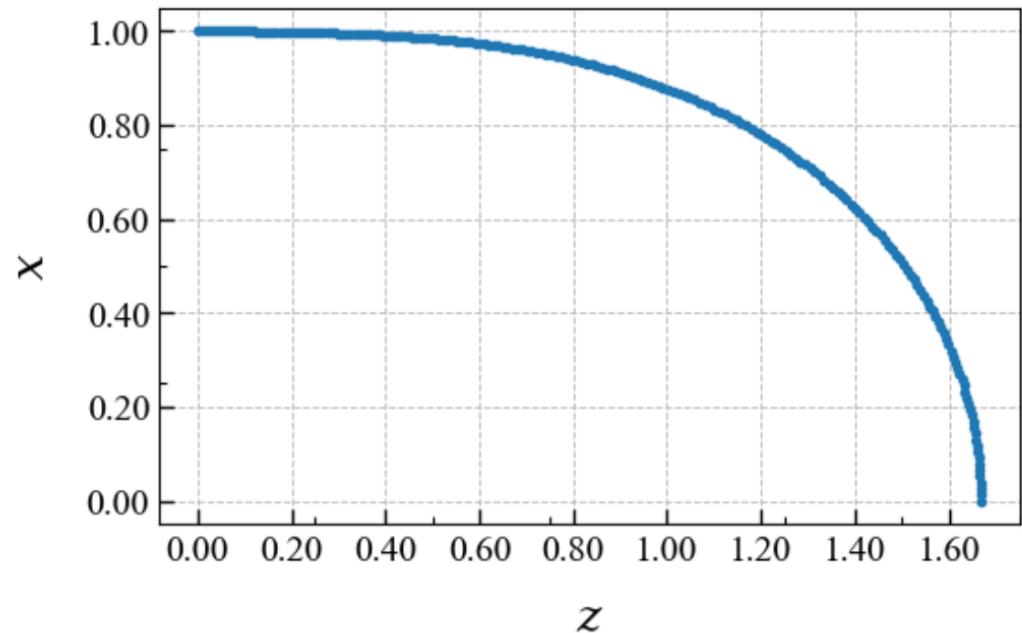
$$\text{Loss} = \sum (R(\theta) \text{の方程式})^2 + \left(R(0) - \frac{L}{2} \right)^2 + \left(R'\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)^2$$

- 損失関数が十分小さくなった時点で数値解が完成

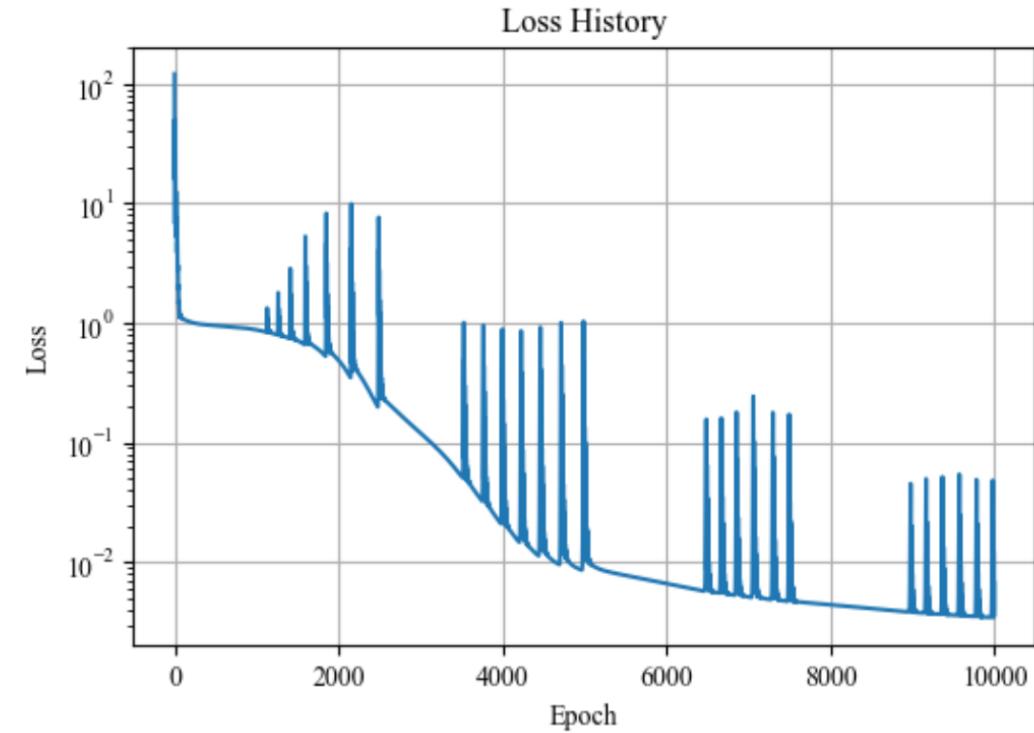
例題：曲がった時空中の弦

- AdS時空の境界に端点を持つ弦の配位

$$R'' - \frac{2}{\tan \theta} \left(R' + \frac{R'^3}{R^2} \right) + R = 0, \quad R(\theta = 0, \pi/2) = L/2$$



(a) $R(\theta)$



(b) Loss history

例題：曲がった時空中の弦

■ AdS時空の境界に端点を持つ弦の配位

◆ 拡張：AdS時空に「壁」がある模型

≈ ブラックホール、閉じ込め相のQCD, ...

- 境界条件：壁の位置 $z = z_0$ で弦は壁に垂直

- 極座標系でこれを解く（実際は z 座標を使った方が楽）

◆ 通常の数値解法：shooting法

- $\theta \approx 0$ で、初期条件として $R(0), R'(0)$ の値を指定
 $\rightarrow \theta \approx \pi$ に向かって運動方程式を解く

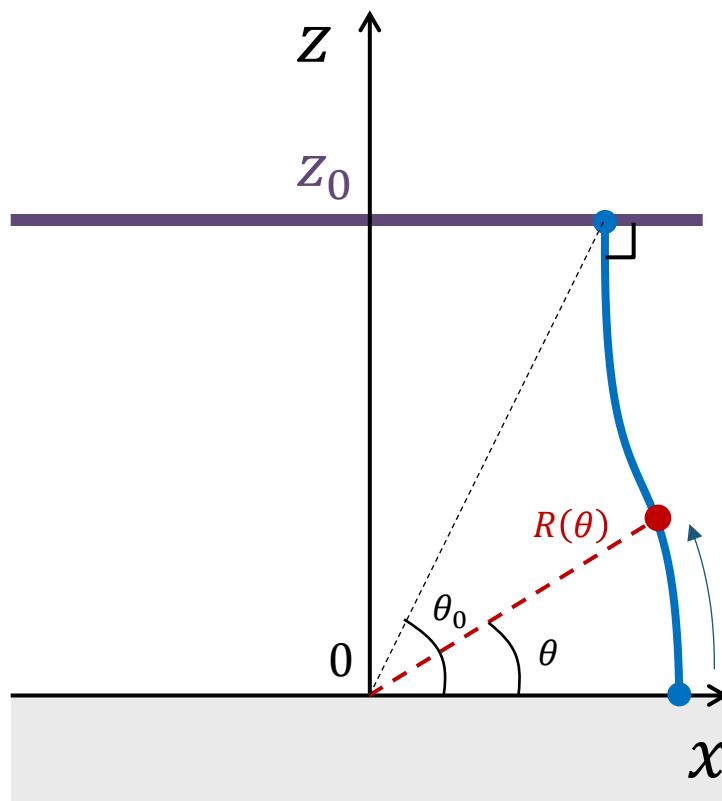
- $z = R(\theta) \sin \theta = z_0$ となる位置 $\theta = \theta_0$ で

$$\partial_\theta x(\theta) = (R(\theta) \cos \theta)'$$

を計算

\rightarrow 条件 $\partial_\theta x(\theta_0) = 0$ を満たす解（初期条件）を探索

✓ 計算領域の終点 $\theta = \theta_0$ は、解 $R(\theta)$ を求めないと分からない



例題：曲がった時空中の弦

■ AdS時空の境界に端点を持つ弦の配位

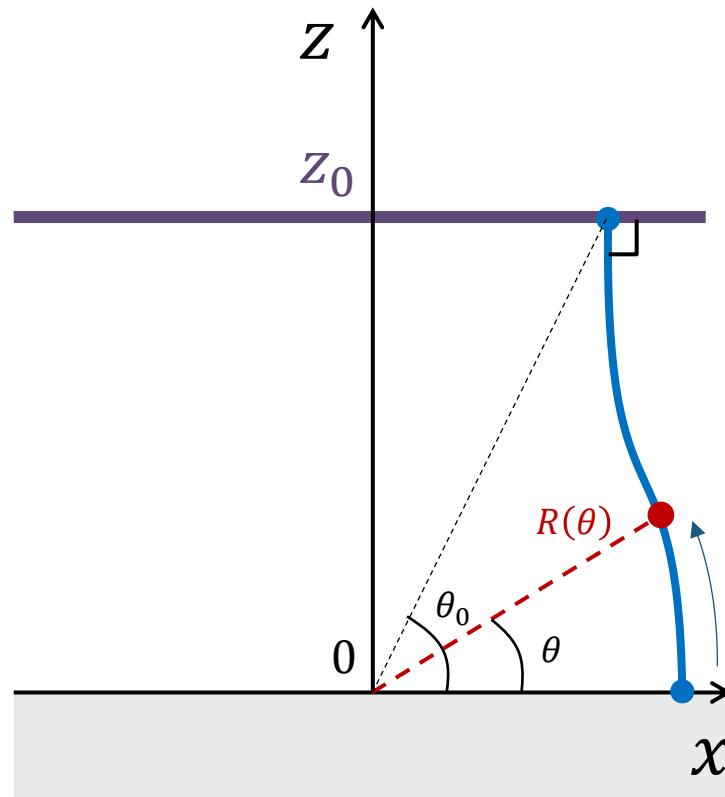
◆ 拡張：AdS時空に「壁」がある模型

≈ ブラックホール、閉じ込め相のQCD, ...

- ・ 境界条件：壁の位置 $z = z_0$ で弦は壁に垂直
- ・ 極座標系でこれを解く

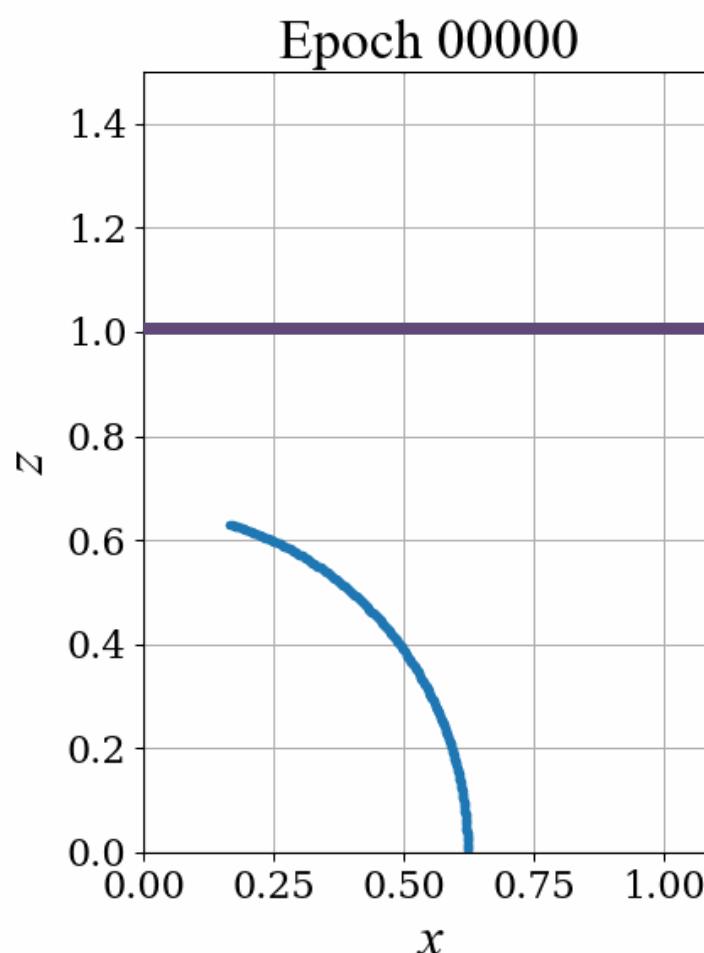
◆ PINNによる解法 3種類

1. 動く境界を持つ境界値問題として解く
2. 1 の改良版
3. 運動方程式を切り替える手法



例題：曲がった時空中の弦

■ AdS時空の境界に端点を持つ弦の配位

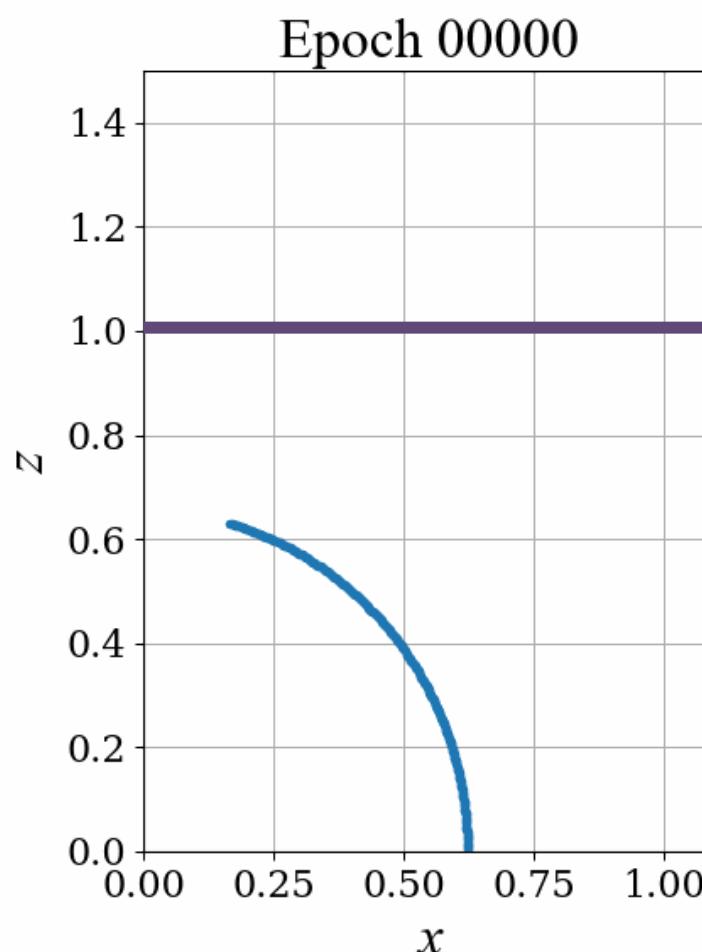


- ◆ 拡張：AdS時空に「壁」がある模型
≈ ブラックホール、閉じ込め相のQCD, ...
- 境界条件：壁の位置 $z = z_0$ で弦は壁に垂直
- 極座標系でこれを解く

- ◆ PINNによる解法 1. 動く境界を持つ境界値問題として解く
 - 境界条件を課す位置 $\theta = \theta_0$ (s.t. $R(\theta_0) \sin \theta_0 = z_0$) を機械学習で最適化するパラメタの一つにする
 - (損失関数) = $(R(\theta) \text{ eq.})^2 + \left(R(0) - \frac{L}{2} \right)^2 + (R(\theta_0) \sin \theta_0 - z_0)^2 + ((R(\theta) \cos \theta)')^2 \text{ at } \theta = \theta_0$
 - 学習が完了すれば、境界条件を満たす $R(\theta)$ が得られる
(計算領域の終点位置 $\theta = \theta_0$ も同時に定まる)

例題：曲がった時空中の弦

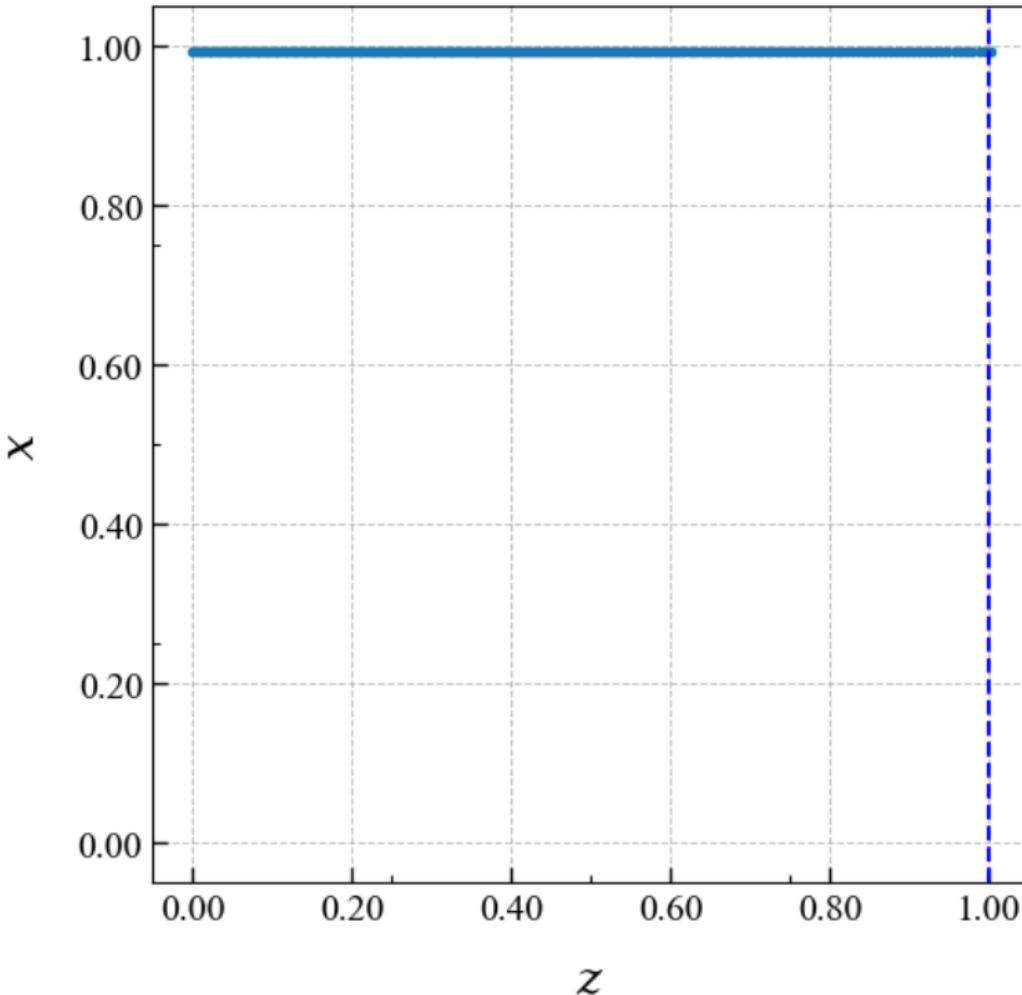
■ AdS時空の境界に端点を持つ弦の配位



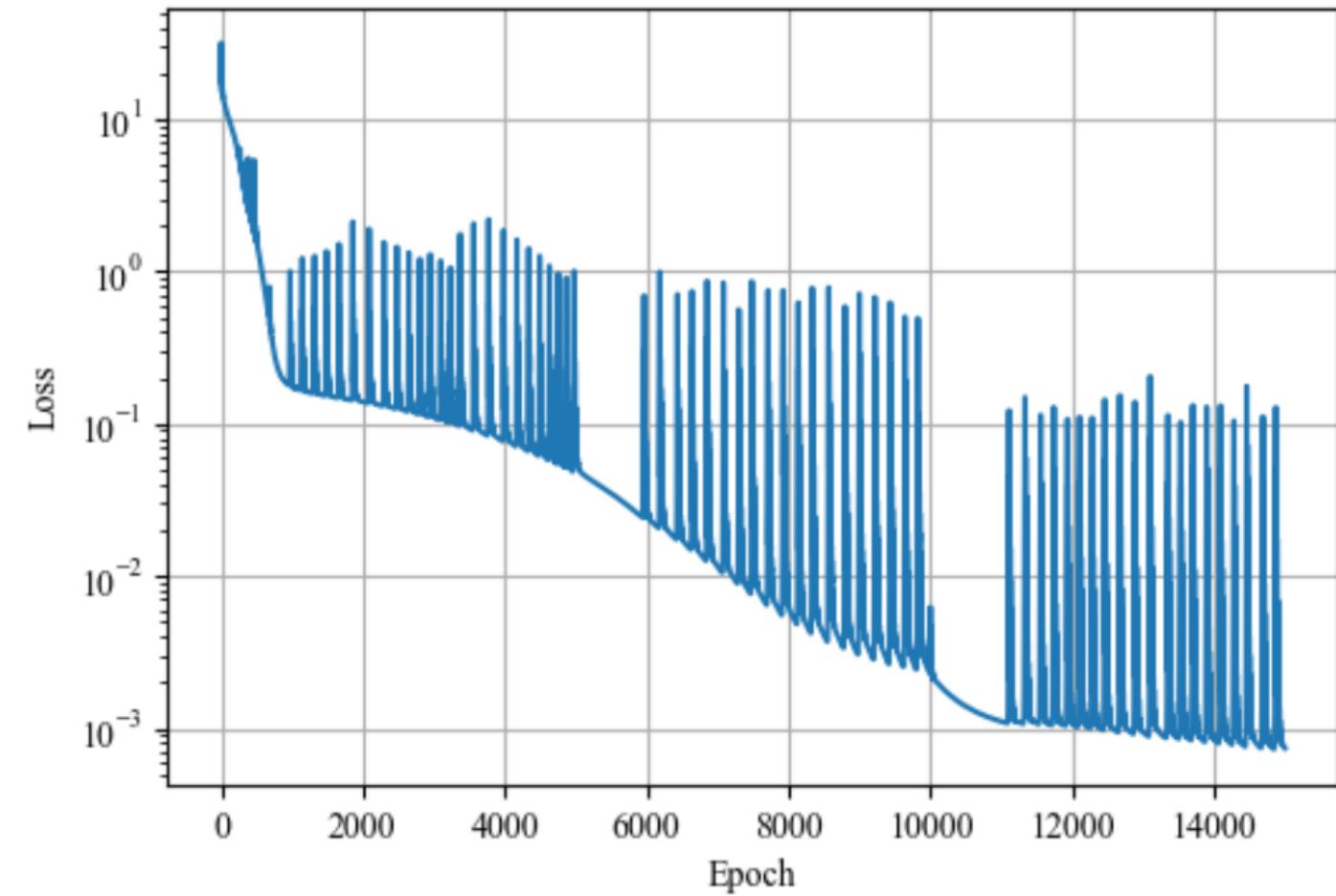
- ◆ 拡張：AdS時空に「壁」がある模型
≈ ブラックホール、閉じ込め相のQCD, ...
- 境界条件：壁の位置 $z = z_0$ で弦は壁に垂直
- 極座標系でこれを解く

- ◆ PINNによる解法 1. 動く境界を持つ境界値問題として解く
 - 境界条件を課す位置 $\theta = \theta_0$ (s.t. $R(\theta_0) \sin \theta_0 = z_0$) を機械学習で最適化するパラメタの一つにする
 - (損失関数) $= (R(\theta) \text{ eq.})^2 + \left(R(0) - \frac{L}{2} \right)^2 + (R(\theta_0) \sin \theta_0 - z_0)^2 + ((R(\theta) \cos \theta)')^2 \text{ at } \theta = \theta_0$
 - 学習が完了すれば、境界条件を満たす $R(\theta)$ が得られる
(計算領域の終点位置 $\theta = \theta_0$ も同時に定まる)

例題：曲がった時空中の弦



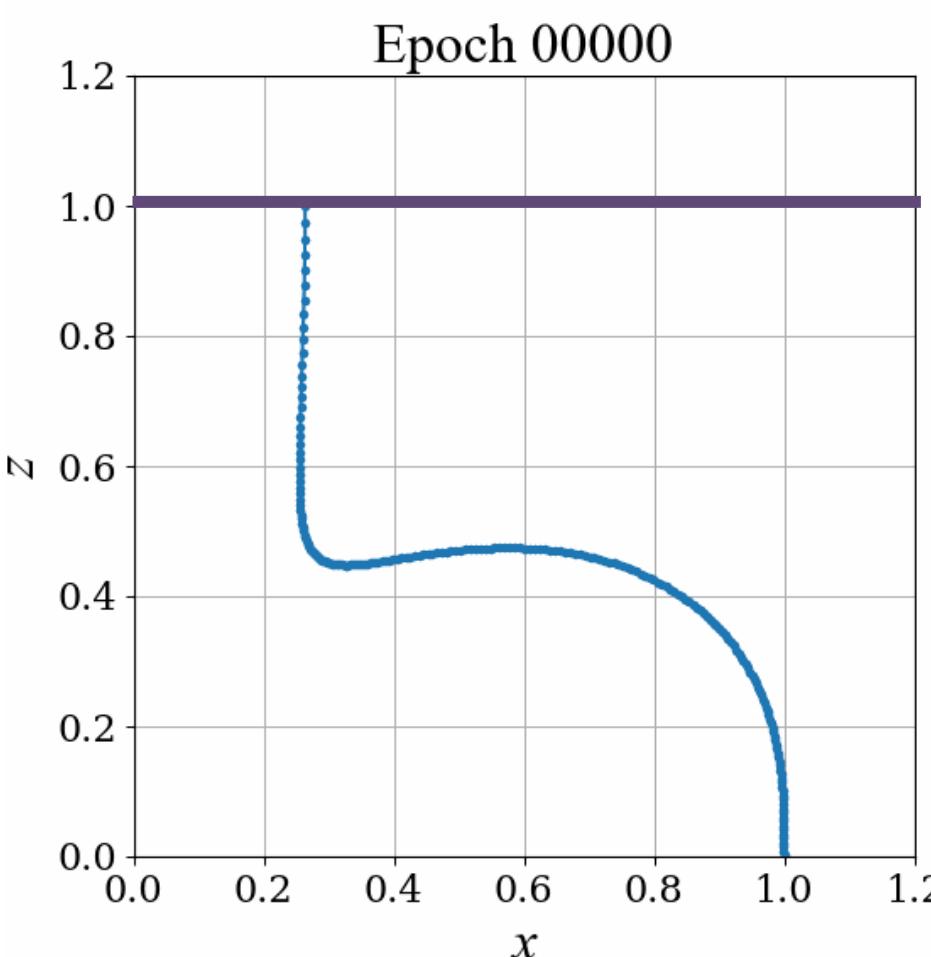
(a) $R(\theta)$



(b) Loss history

例題：曲がった時空中の弦

■ AdS時空の境界に端点を持つ弦の配位



◆ AdS時空に「壁」がある模型

≈ ブラックホール、閉じ込め相のQCD, ...

- 境界条件：壁の位置 $z = z_0$ で弦は **壁に垂直**

◆ PINNによる解法 2.1 の改良版

✓ 境界条件を満たす関数 $R(\theta)$ だけを機械学習で探索する

- $R(\theta)$ を次のように表す：

$$R(\theta) = R_0(\theta, \theta_0) + w(\theta, \theta_0) \times \rho(\theta)$$

- $R_0(\theta, \theta_0)$: θ, θ_0 の多項式で、全ての境界条件を満たすもの
 $R_0(\theta \rightarrow 0) = 1 + \theta^2 + \dots ; R_0 \sin \theta = z_0, (R_0 \cos \theta)' = 0 \text{ at } \theta = \theta_0$
- $w(\theta, \theta_0)$: $\theta \in [0, \theta_0]$ の両端でゼロになる多項式
- $\rho(\theta), \theta_0$: 機械学習で最適化する関数と値

- $\rho(\theta)$ が有限でさえあれば、**境界条件は自動的に満たされる**

- $R(\theta)$ を次のように表す：

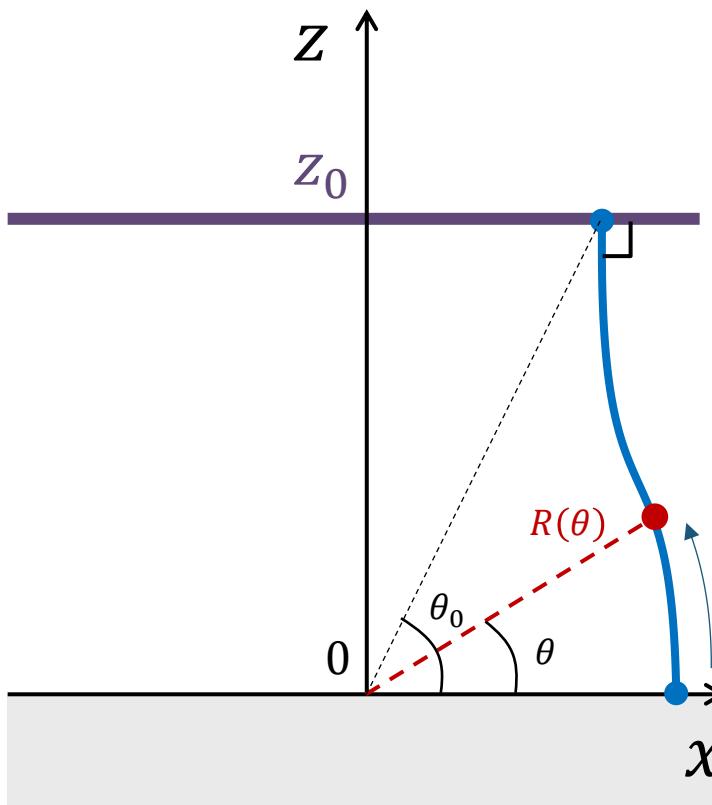
$$R(\theta) = R_0(\theta, \theta_0) + w(\theta, \theta_0) \times \rho(\theta)$$

➤ $R_0(\theta, \theta_0) :: \theta, \theta_0$ の多項式で、全ての境界条件を満たすもの

$$R_0(\theta \rightarrow 0) = \frac{L}{2}(1 + \theta^2) + \dots ; \quad (R_0 \cos \theta)' = 0 \text{ at } \theta = \theta_0$$

➤ $w(\theta, \theta_0) : \theta \in [0, \theta_0]$ の両端でゼロになる多項式

➤ $\rho(\theta), \theta_0 ::$ 機械学習で最適化する関数と値



$$\begin{cases} R_0(\theta, \theta_0) = \frac{L}{2} (1 + \theta^2) + c_3 \theta^2 + c_4 \theta^4, \\ w(\theta, \theta_0) = \theta^3 (\theta_0 - \theta)^2. \end{cases}$$

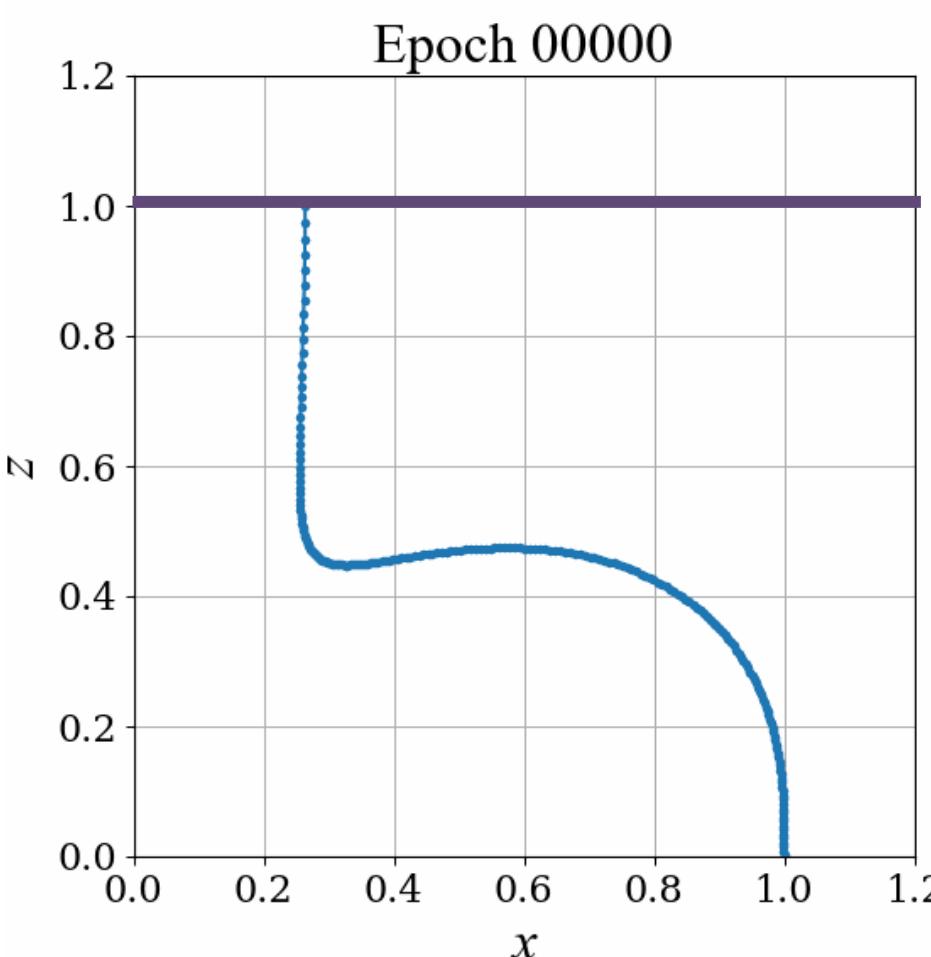
$$c_3 = -\frac{\frac{1}{2}L(\theta_0^2 + 4) - 4R_0 + R'_0\theta_0}{\theta_0^3}, \quad c_4 = \frac{\frac{1}{2}L(\theta_0^2 + 6) - 6R_0 + 2R'_0\theta_0}{2\theta_0^4}$$

where $R_0 = z_0 / \sin \theta_0$ and $R'_0 = z_0 / \cos \theta_0$.

- $\rho(\theta)$ が有限でさえあれば、境界条件は自動的に満たされる

例題：曲がった時空中の弦

■ AdS時空の境界に端点を持つ弦の配位



◆ AdS時空に「壁」がある模型

≈ ブラックホール、閉じ込め相のQCD, ...

- 境界条件：壁の位置 $z = z_0$ で弦は **壁に垂直**

◆ PINNによる解法 2.1 の改良版

✓ 境界条件を満たす関数 $R(\theta)$ だけを機械学習で探索する

- $R(\theta)$ を次のように表す：

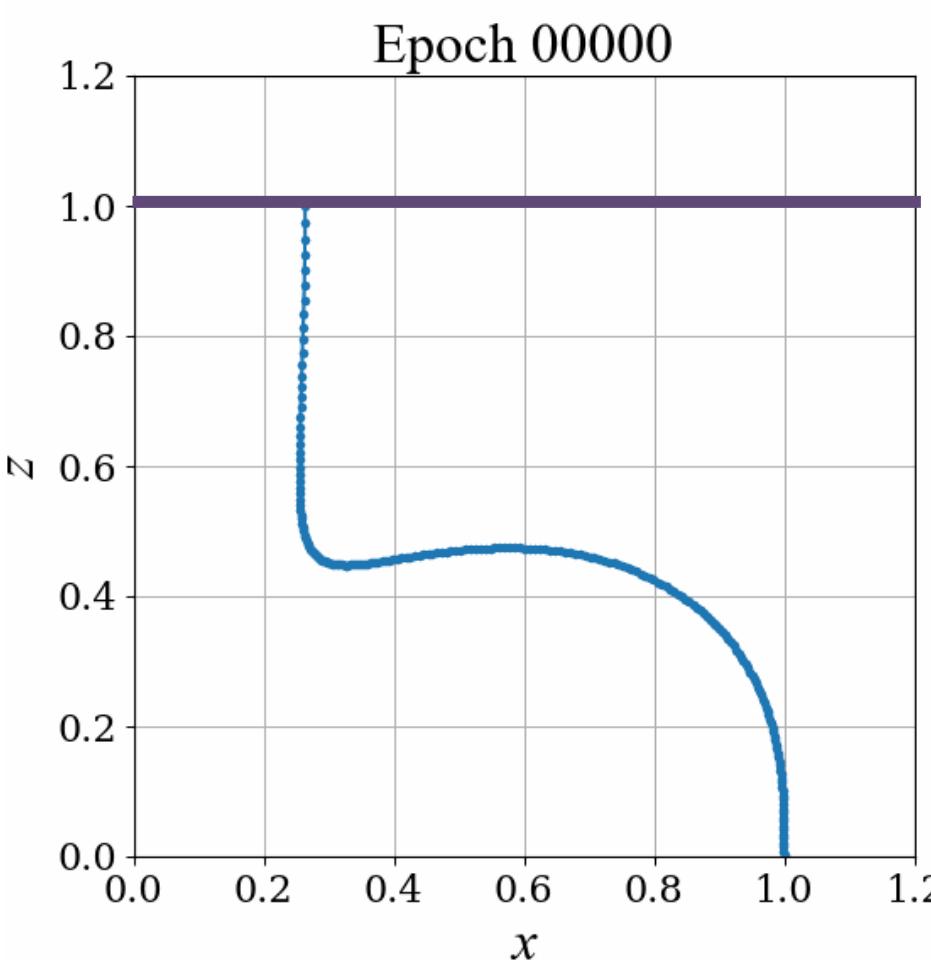
$$R(\theta) = R_0(\theta, \theta_0) + w(\theta, \theta_0) \times \rho(\theta)$$

- $R_0(\theta, \theta_0)$: θ, θ_0 の多項式で、全ての境界条件を満たすもの
 $R_0(\theta \rightarrow 0) = 1 + \theta^2 + \dots ; R_0 \sin \theta = z_0, (R_0 \cos \theta)' = 0 \text{ at } \theta = \theta_0$
- $w(\theta, \theta_0)$: $\theta \in [0, \theta_0]$ の両端でゼロになる多項式
- $\rho(\theta), \theta_0$: 機械学習で最適化する関数と値

- $\rho(\theta)$ が有限でさえあれば、**境界条件は自動的に満たされる**

例題：曲がった時空中の弦

■ AdS時空の境界に端点を持つ弦の配位



◆ AdS時空に「壁」がある模型

≈ ブラックホール、閉じ込め相のQCD, ...

- 境界条件：壁の位置 $z = z_0$ で弦は **壁に垂直**

◆ PINNによる解法 2.1 の改良版

✓ 境界条件を満たす関数 $R(\theta)$ だけを機械学習で探索する

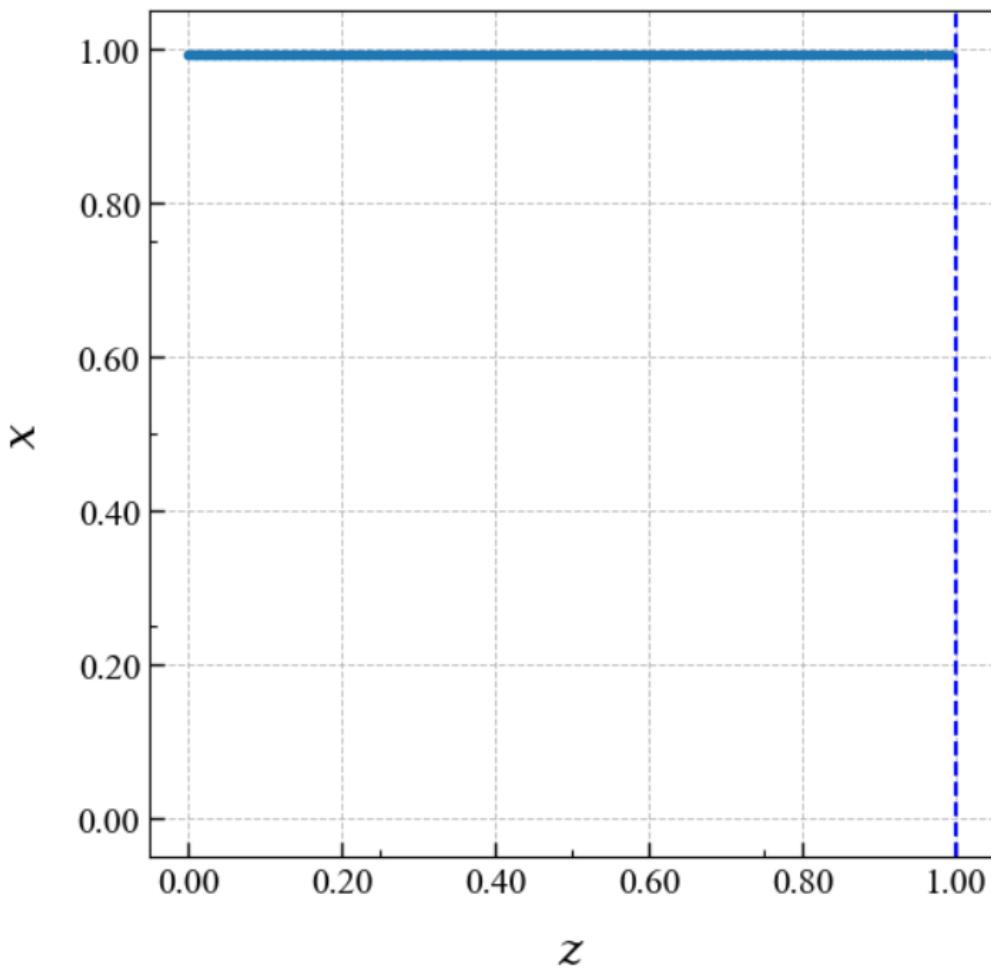
- $R(\theta)$ を次のように表す：

$$R(\theta) = R_0(\theta, \theta_0) + w(\theta, \theta_0) \times \rho(\theta)$$

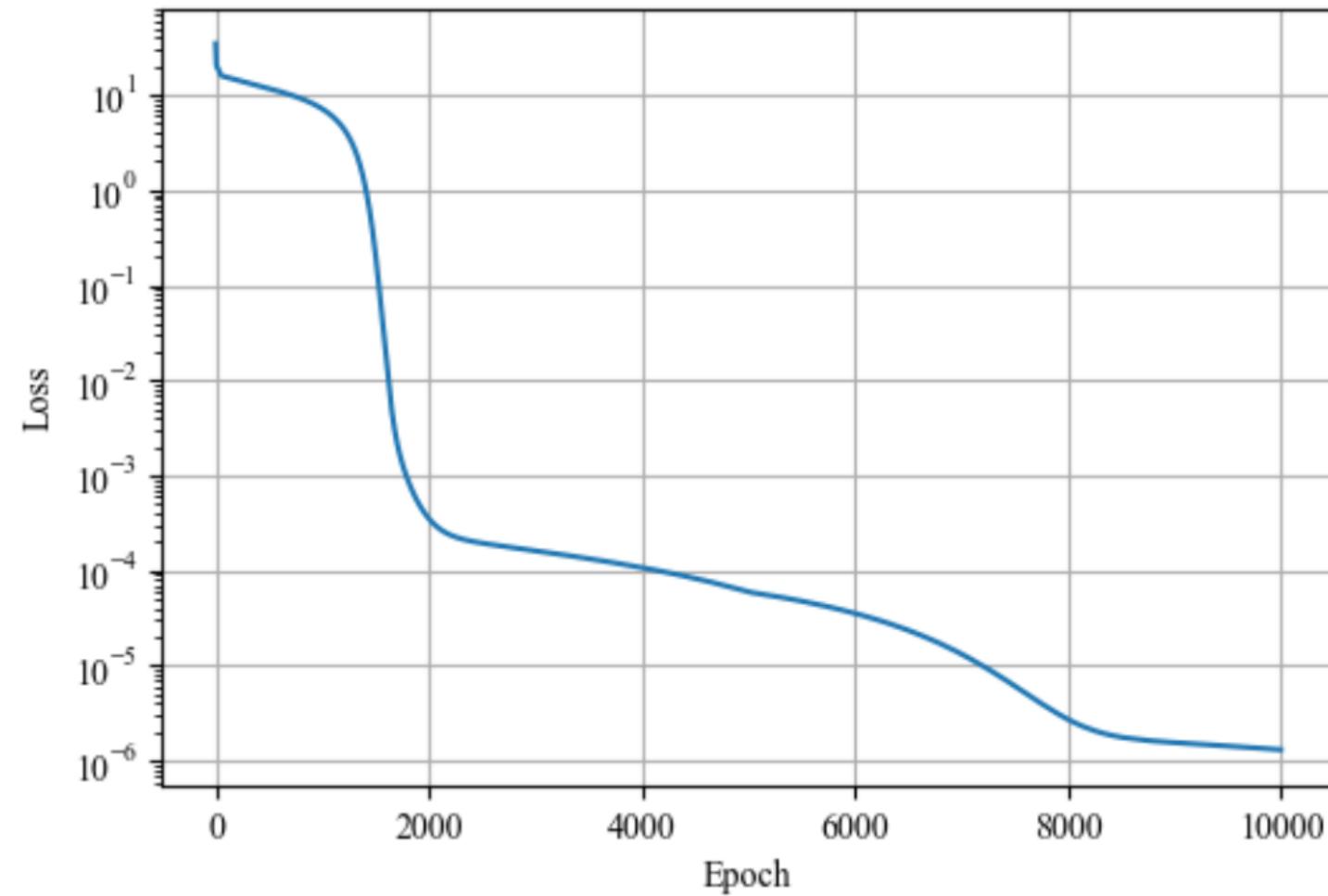
- $R_0(\theta, \theta_0)$: θ, θ_0 の多項式で、全ての境界条件を満たすもの
 $R_0(\theta = 0) = 1, R'_0(0) = 0; R_0 \sin \theta = z_0, (R_0 \cos \theta)' = 0$ at $\theta = \theta_0$
- $w(\theta, \theta_0)$: $\theta \in [0, \theta_0]$ の両端でゼロになる多項式
- $\rho(\theta), \theta_0$: 機械学習で最適化する関数と値

- $\rho(\theta)$ が有限でさえあれば、**境界条件は自動的に満たされる**¹²

例題：曲がった時空中の弦



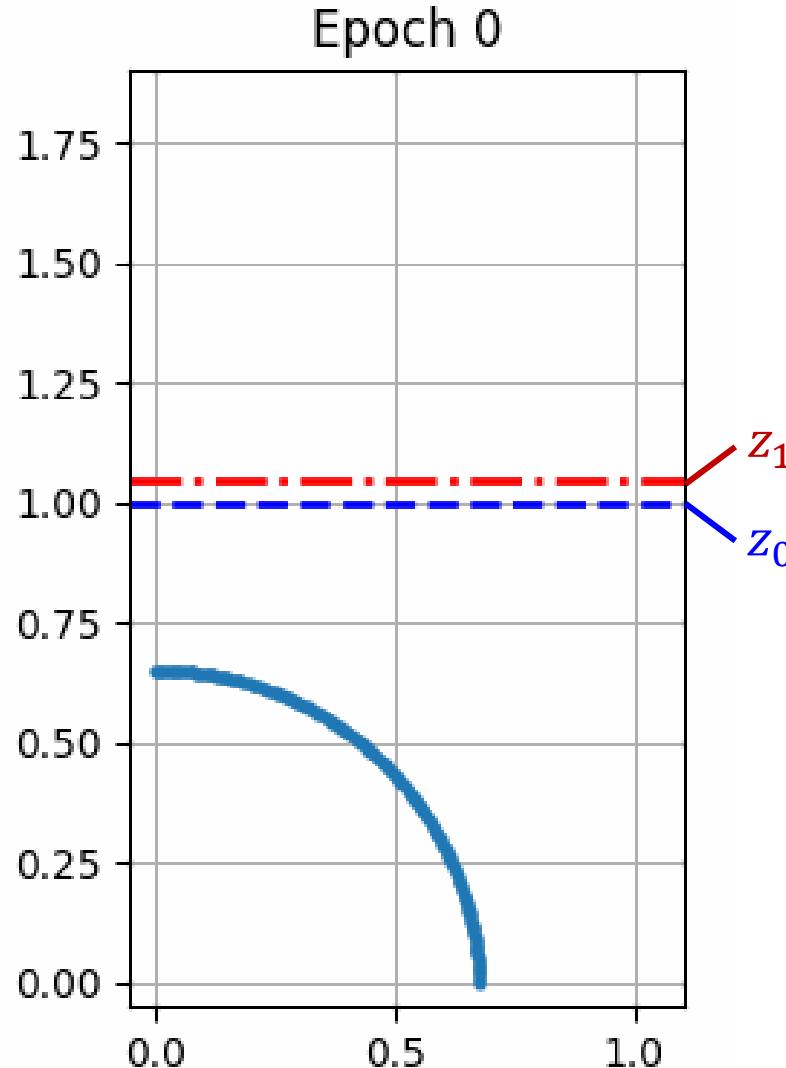
(a) $R(\theta)$



(b) Loss history

例題：曲がった時空中の弦

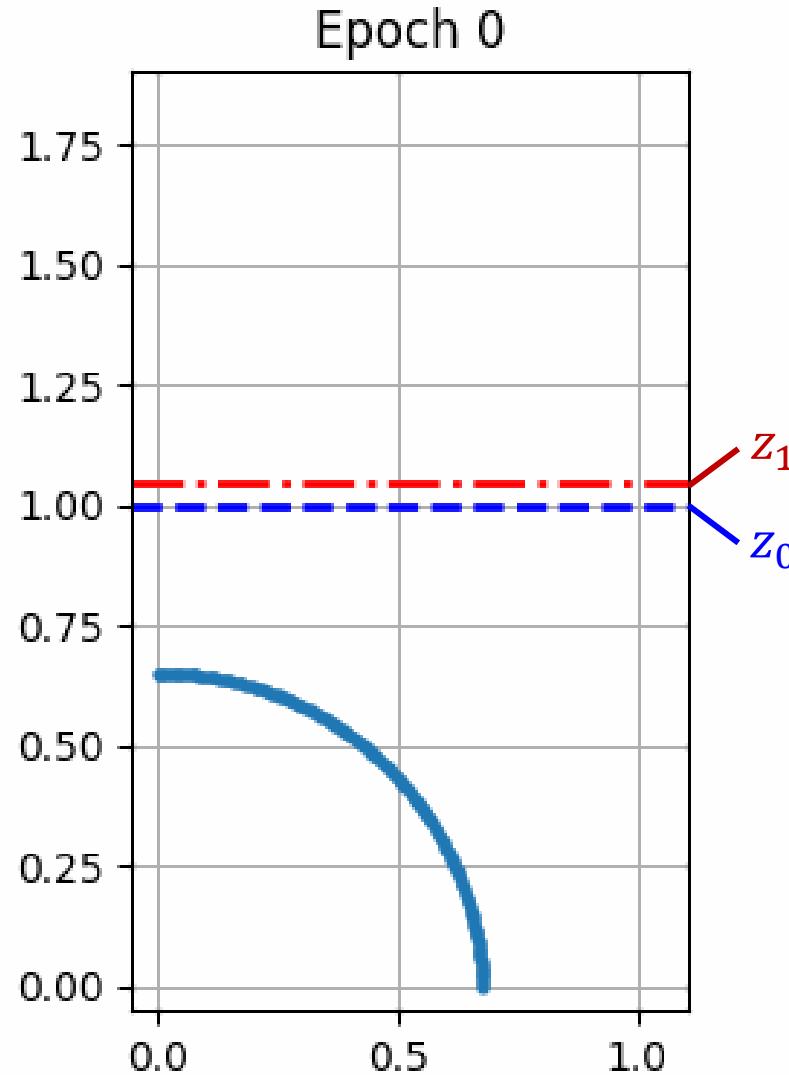
■ AdS時空の境界に端点を持つ弦の配位



- ◆ AdS時空に「壁」がある模型
≈ ブラックホール、閉じ込め相のQCD, ...
 - 境界条件：壁の位置 $z = z_0$ で弦は壁に垂直
 - ◆ PINNによる解法 3. 運動方程式を切り替える手法
 - $z = z_0$ で境界条件を課したい
- $$\Rightarrow \text{(損失関数)} = \begin{cases} \text{(運動方程式)} & (0 \leq z \leq z_0) \\ \text{(境界条件の式)} & (z_0 \leq z \leq z_1) \end{cases}$$
- $0 \leq z \leq z_0$ の部分が、境界条件を満たす解になる
 - 損失関数を変更する以外は、元のコードをそのまま使える
 - 計算安定化のため $R(\theta = \pi/2) = z_2$ に固定する必要あり

例題：曲がった時空中の弦

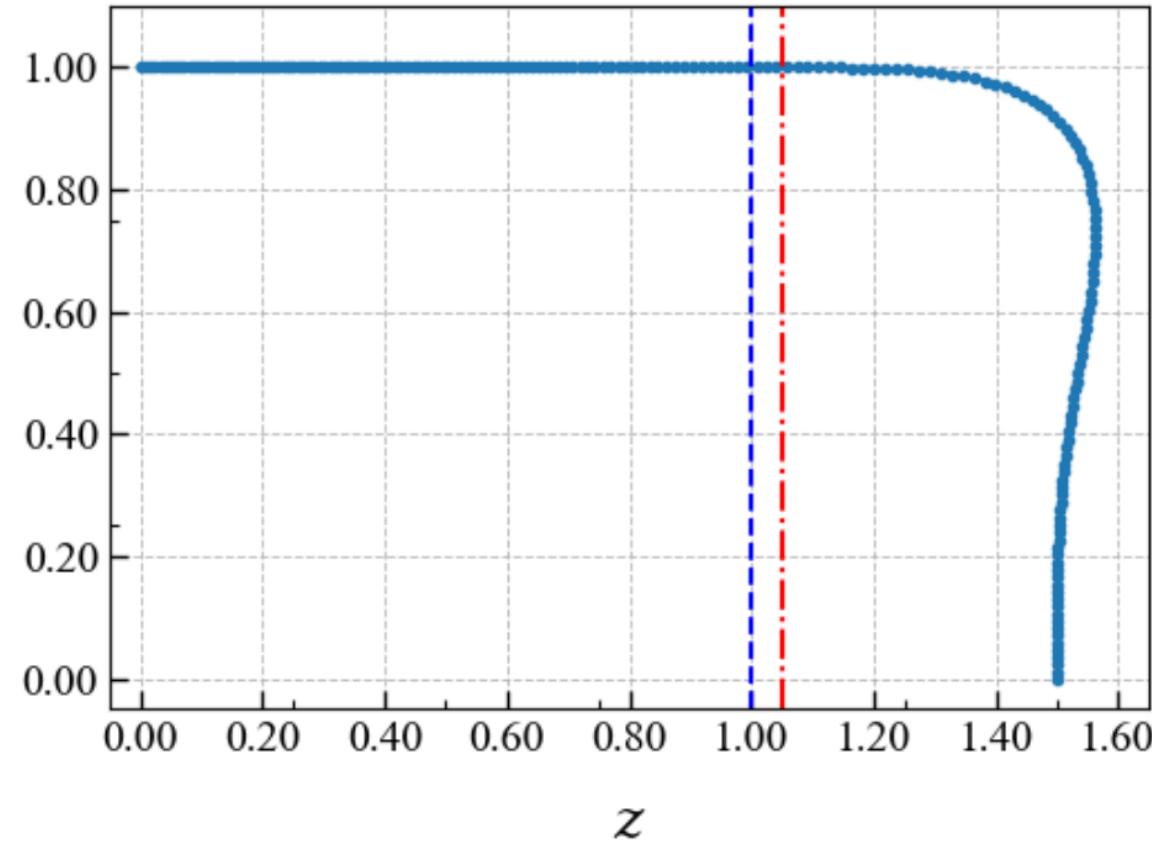
■ AdS時空の境界に端点を持つ弦の配位



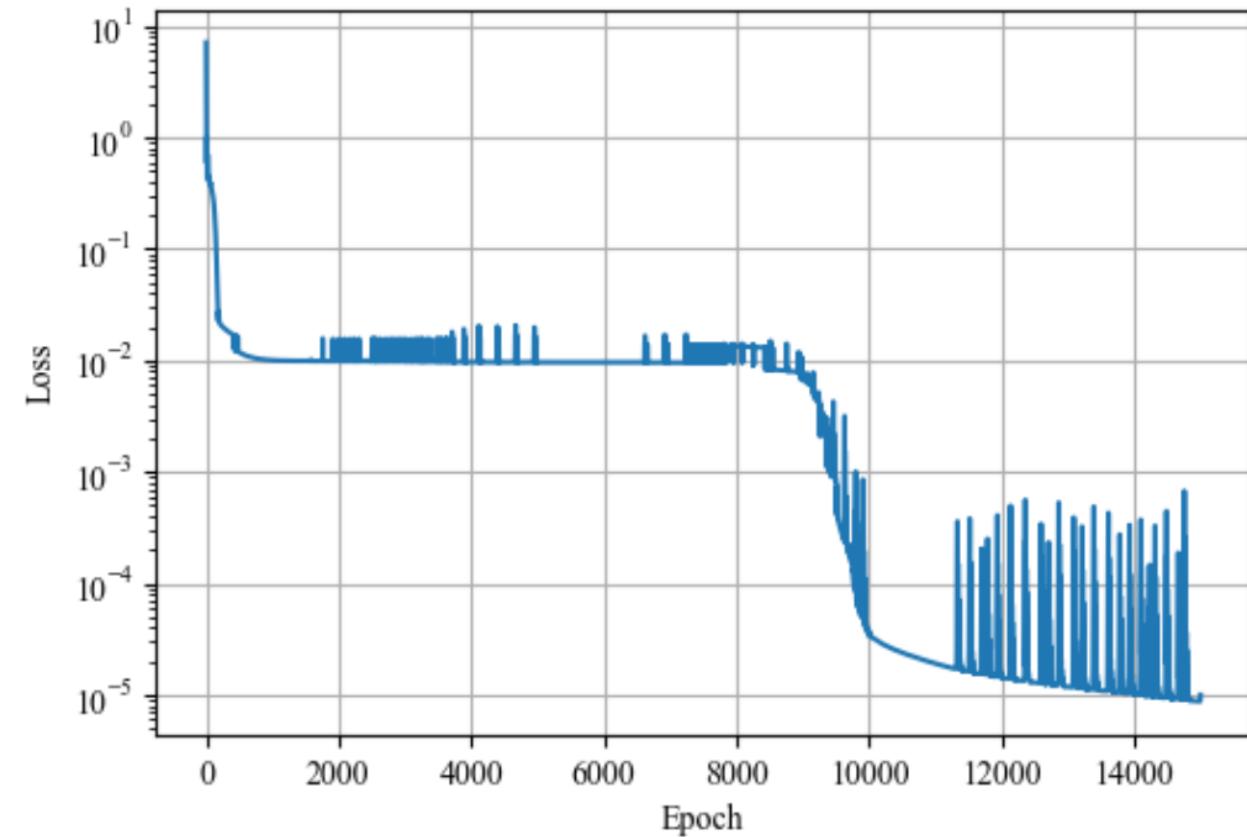
- ◆ AdS時空に「壁」がある模型
≈ ブラックホール, 閉じ込め相のQCD, ...
 - 境界条件: 壁の位置 $z = z_0$ で弦は**壁に垂直**
 - ◆ PINNによる解法 3. 運動方程式を切り替える手法
 - $z = z_0$ で境界条件を課したい
- $$\Rightarrow \text{(損失関数)} = \begin{cases} \text{(運動方程式)} & (0 \leq z \leq z_0) \\ \text{(境界条件の式)} & (z_0 \leq z \leq z_1) \end{cases}$$
- $0 \leq z \leq z_0$ の部分が、境界条件を満たす解になる
 - 損失関数を変更する以外は、元のコードをそのまま使える
 - 計算安定化のため $R(\theta = \pi/2) = z_2$ に固定する必要あり

例題：曲がった時空中の弦

- AdS時空の境界に端点を持つ弦の配位



(a) $R(\theta)$



(b) Loss history

1. Introduction: PINN

2. 計算例

1. 常微分方程式：曲がった時空中の弦

2. 偏微分方程式

1. 曲がった空間上の極小曲面

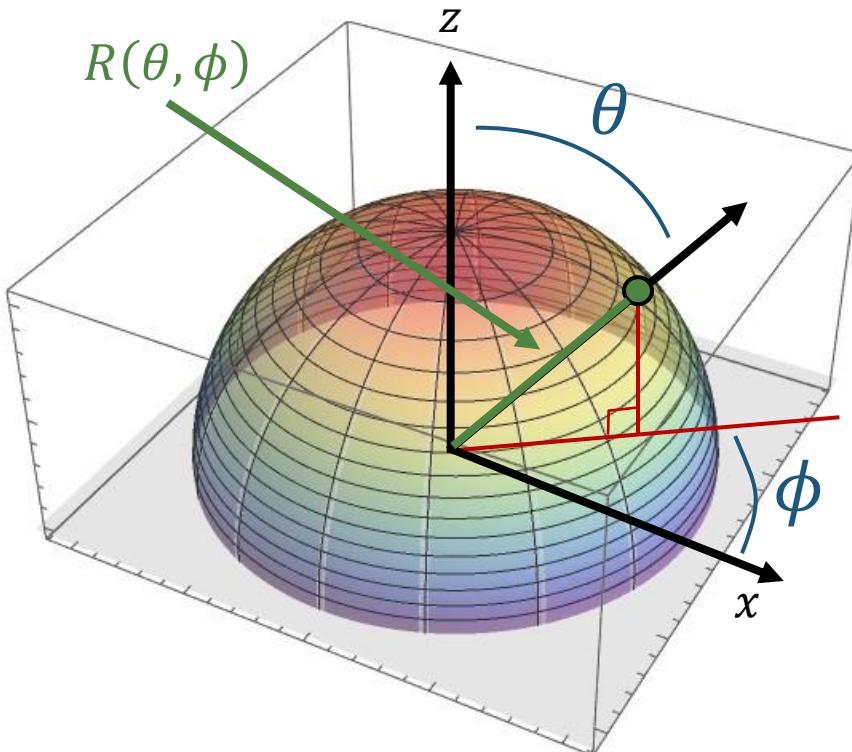
2. AdS/CFT対応への応用：グルーオン散乱振幅の計算

3. まとめ

例題：曲がった空間上の極小曲面

- AdS時空の境界に端を持つ極小曲面の配位

✓ 量子場理論のエンタングルメント・エントロピーなどに関係



- 空間の計量 : $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \frac{1}{z^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$
- AdS境界 $z = 0$ に端を持つ曲面の位置

$$\begin{cases} x = R(\theta, \phi) \sin \theta \cos \phi \\ y = R(\theta, \phi) \sin \theta \sin \phi \\ z = R(\theta, \phi) \cos \theta \end{cases}$$

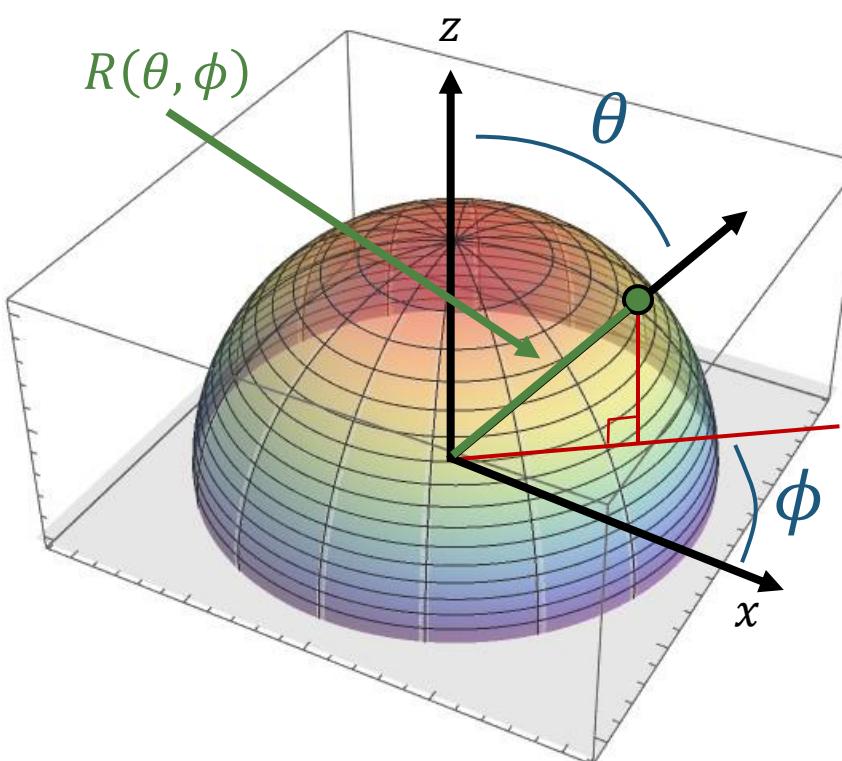
- 曲面の作用 (= 面積) と 運動方程式

$$S = \int d^2x \sqrt{\det(g_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu)} \Rightarrow \partial_\theta^2 R + \frac{\partial_\phi^2 R}{\sin^2 \theta} + \dots = 0$$

- 2次元偏微分方程式の境界値問題 (境界条件 : 端の位置)

例題：曲がった空間上の極小曲面

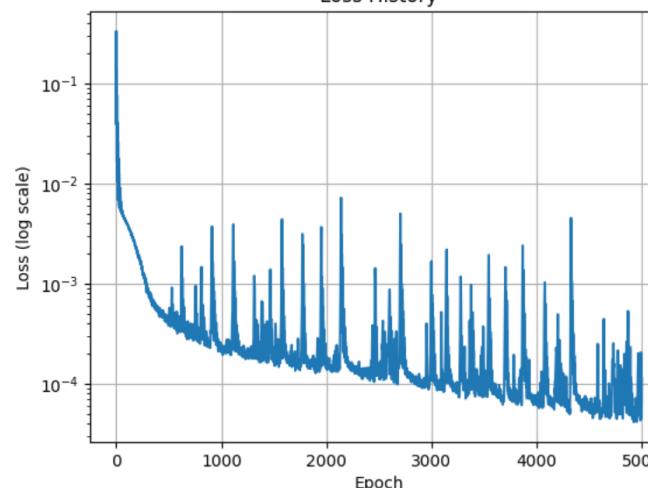
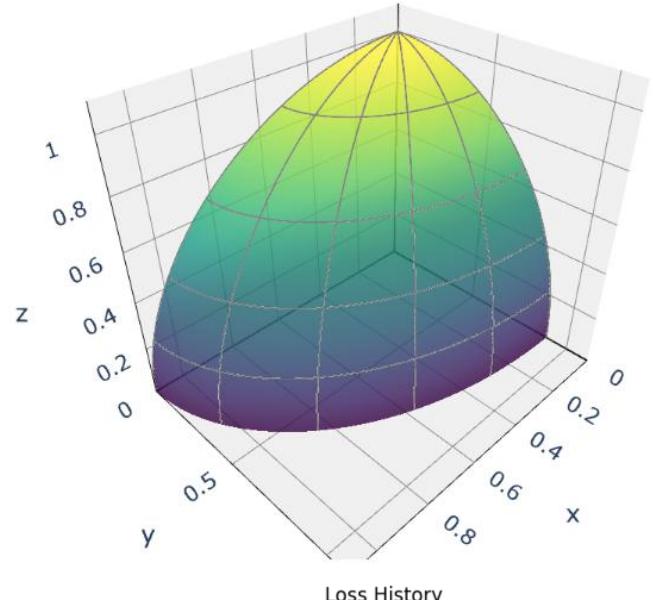
■AdS時空の境界に端を持つ極小曲面の配位



- 境界条件 (x, y 軸について対称な面に注目)
 - AdS境界上の端の位置を指定: $R(\theta = \pi/2, \phi) = f(\phi)$
 - 中心軸 $\theta = 0$ 上の正則条件: $R(0, \phi) = \text{const.}, \partial_\theta R(0, \phi) = 0$
- ◆ PINNによる解法
- 原理的には、単純に
$$(\text{損失関数}) = \sum (\text{運動方程式})^2 + \sum (\text{境界条件})^2$$
として、機械学習で最小化すれば解ける
- $\theta = 0, \pi/2$ は運動方程式の特異点のため、少し工夫が必要

例題：曲がった空間上の極小曲面

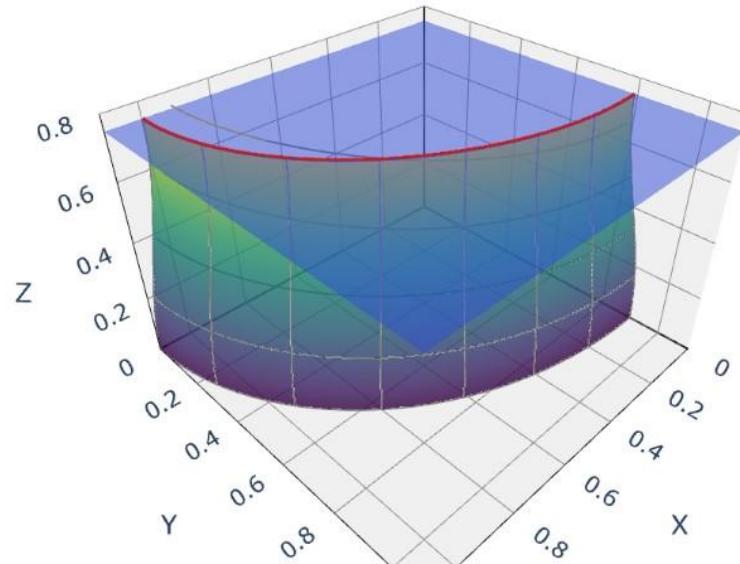
■AdS時空の境界に端を持つ極小曲面の配位



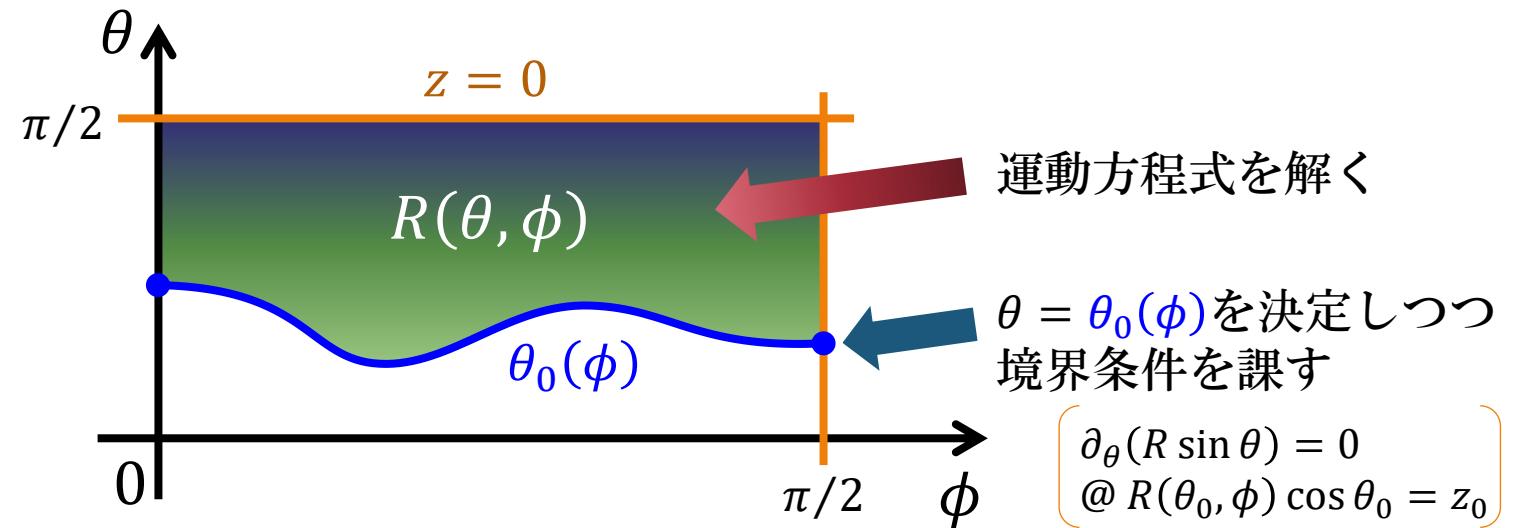
- 境界条件 (x, y 軸について対称な面に注目)
 - AdS境界上の端の位置を指定: $R(\theta = \pi/2, \phi) = f(\phi)$
 - 中心軸 $\theta = 0$ 上の正則条件: $R(0, \phi) = \text{const.}, \partial_\theta R(0, \phi) = 0$
- ◆ PINNによる解法
- 原理的には、単純に
$$(\text{損失関数}) = \sum (\text{運動方程式})^2 + \sum (\text{境界条件})^2$$
として、機械学習で最小化すれば解ける
- $\theta = 0, \pi/2$ は運動方程式の特異点のため、少し工夫が必要

例題：曲がった空間上の極小曲面

■ 拡張：AdS時空中に「壁」がある場合

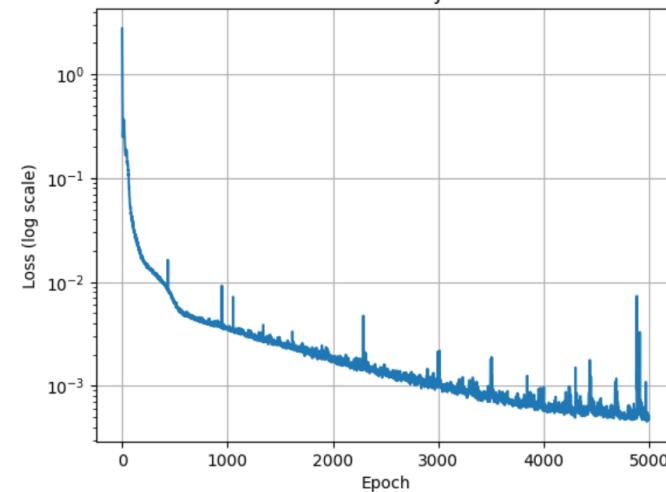
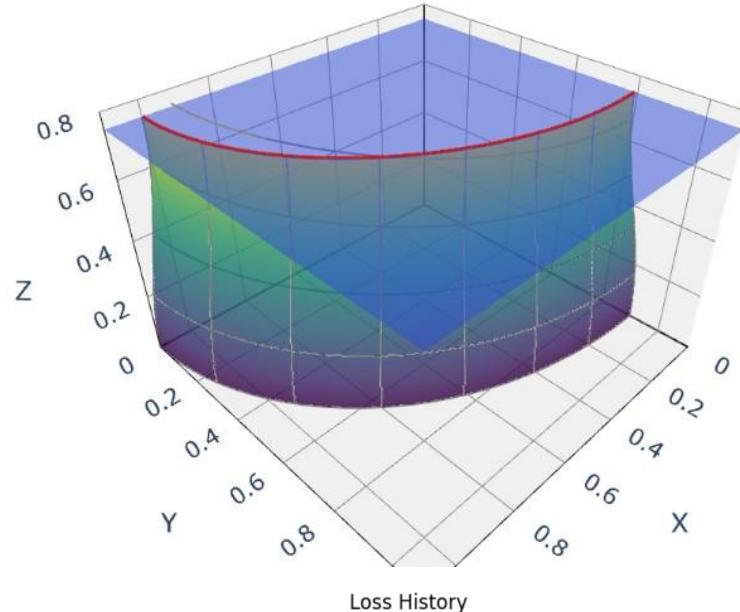


- 境界条件 (x, y 軸について対称な面に注目)
 - AdS境界上の端の位置を指定： $R(\theta = \pi/2, \phi) = f(\phi)$
 - $z = z_0$ にある壁に垂直に交わる： $R(\theta_0, \phi) \cos \theta_0 = z_0$ となる $\theta = \theta_0(\phi)$ で $\partial_\theta(R \sin \theta) = 0$
- ◆ 動く境界を伴った境界値問題：境界の位置 $\theta_0(\phi)$ が解 $R(\theta, \phi)$ に依存



例題：曲がった空間上の極小曲面

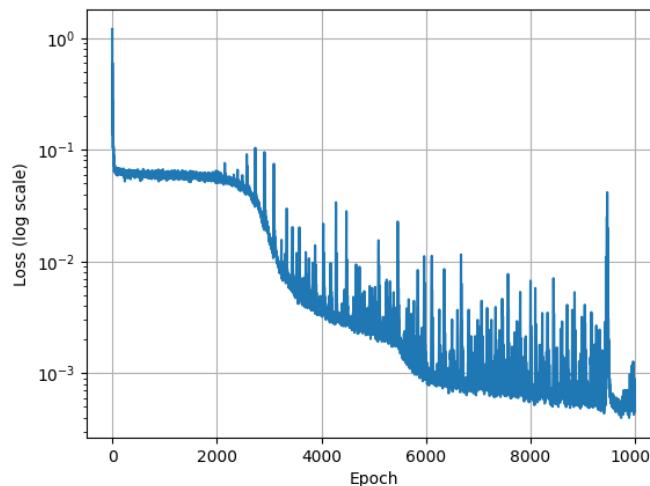
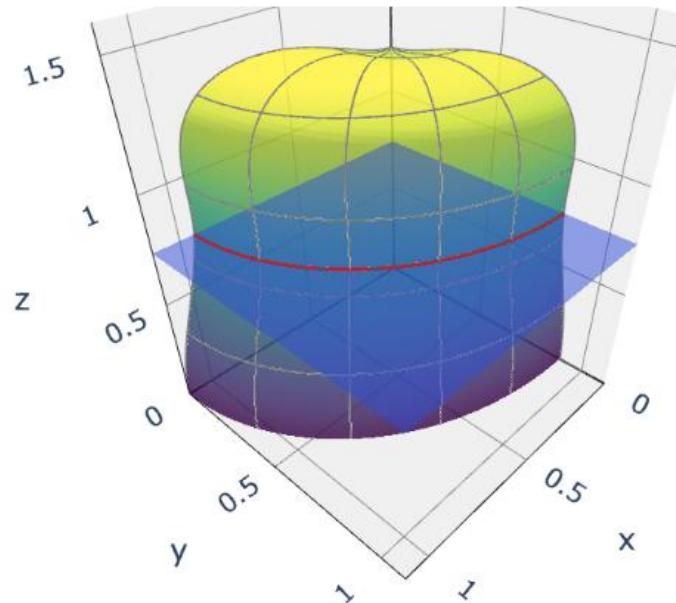
■ 拡張：AdS時空中に「壁」がある場合



- 境界条件 (x, y 軸について対称な面に注目)
 - AdS境界上の端の位置を指定： $R(\theta = \pi/2, \phi) = f(\phi)$
 - $z = z_0$ にある壁に垂直に交わる： $R(\theta_0, \phi) \cos \theta_0 = z_0$ となる $\theta = \theta_0(\phi)$ で $\partial_\theta(R \sin \theta) = 0$
- ◆ PINNによる解法：効率化のための工夫をすれば実行可能
- 解 $R(\theta, \phi)$ を次のように表して、 $\rho(\theta, \phi)$ と $\theta_0(\phi)$ を同時に最適化
 - $$R(\theta, \phi) = R_0(\theta, \theta_0(\phi)) + w(\theta, \theta_0(\phi)) \times \rho(\theta, \phi)$$
 - $R_0(\theta, \theta_0(\phi))$: すべての境界条件を満たす多項式
 - $w(\theta, \theta_0(\phi))$: 計算領域の端 ($\theta = \theta_0(\phi), \pi/2$) でゼロになる式
 - $\rho(\theta, \phi)$: ニューラルネットワークで表した関数
- $\rho(\theta, \phi)$ が有限でさえあれば、境界条件は自動的に満たされる

例題：曲がった空間上の極小曲面

■ 拡張：AdS時空中に「壁」がある場合



- 境界条件 (x, y 軸について対称な面に注目)
 - AdS境界上の端の位置を指定： $R(\theta = \pi/2, \phi) = f(\phi)$
 - $z = z_0$ にある壁に垂直に交わる： $R(\theta_0, \phi) \cos \theta_0 = z_0$ となる $\theta = \theta_0(\phi)$ で $\partial_\theta(R \sin \theta) = 0$

◆ PINNによる解法：運動方程式を切り替える手法

$$\text{(損失関数)} = \begin{cases} \text{(運動方程式)} & (0 \leq z \leq z_0) \\ \text{(境界条件の式)} & (z_0 \leq z \leq z_1) \end{cases}$$

- プログラムはシンプル
- 解が収束するまでの時間は長くなる

1. Introduction: PINN

2. 計算例

1. 常微分方程式：曲がった時空中の弦

2. 偏微分方程式

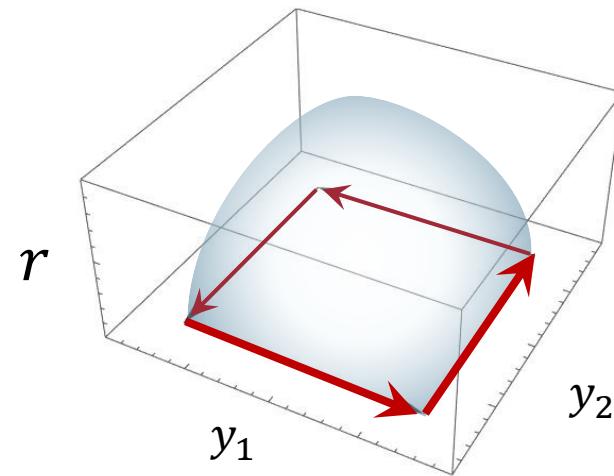
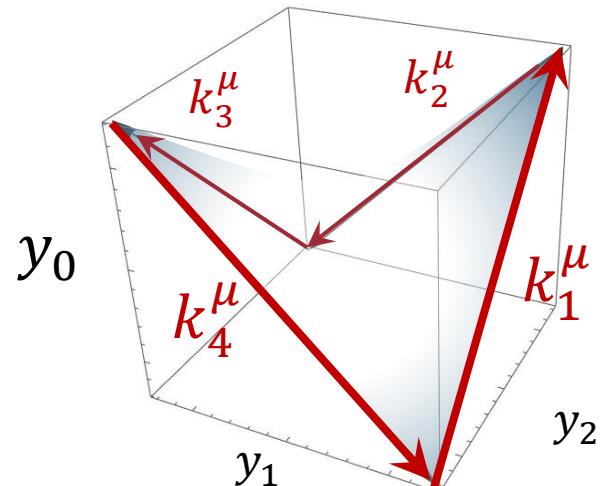
1. 曲がった空間上の極小曲面

2. AdS/CFT対応への応用：グルーオン散乱振幅の計算

3. まとめ

応用：Gluon scattering amplitude in AdS/CFT

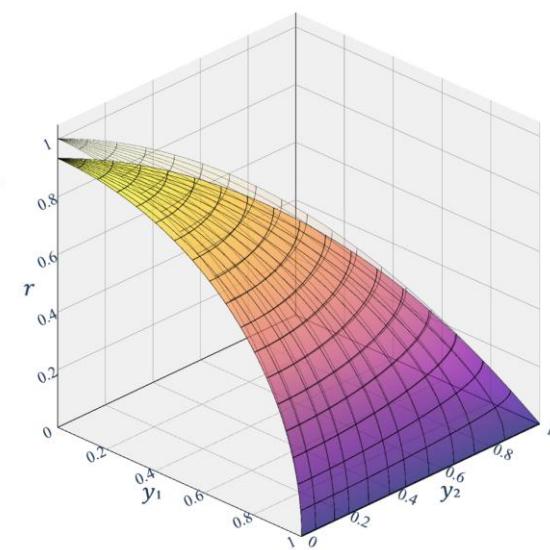
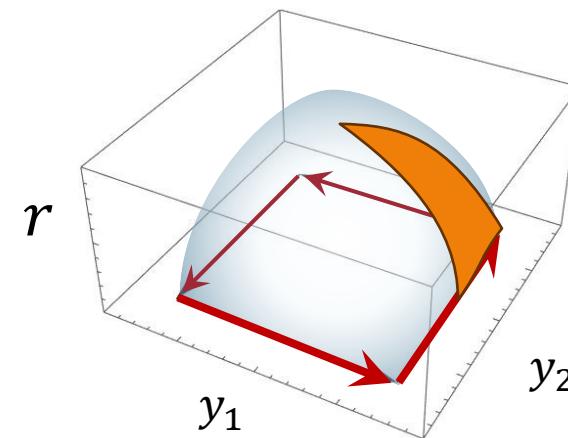
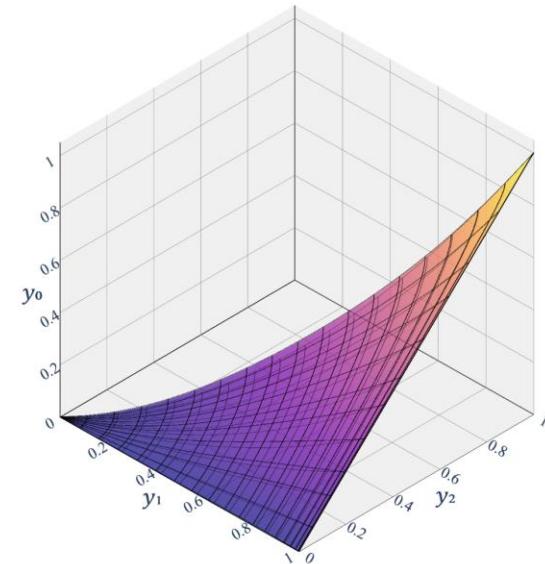
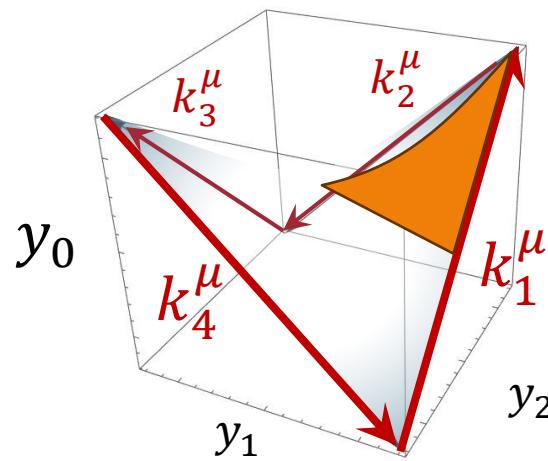
- “Gluon scattering amplitude at strong coupling” [Alday-Maldacena '07]
 - 強結合状態のQCDにおけるグルーオンの散乱振幅をAdS/CFT対応で計算
- 以下の条件を満たす極小曲面を求める問題に帰着
 - AdS時空 $ds^2 = \frac{R^2}{r^2} (-dy_0^2 + dy_1^2 + dy_2^2 + dr^2)$ 中の2次元面($y_0(y_1, y_2), r(y_1, y_2)$)
 - 散乱するグルーオンの運動量 k_i^μ ($i = 1, \dots, n$) ($k_\mu k^\mu = 0, \sum_i k_i^\mu = 0$)
 - k_i^μ がなすループを $r = 0$ における端として持つ極小曲面を求める [Dobashi+ '08]



応用：Gluon scattering amplitude in AdS/CFT

- “Gluon scattering amplitude at strong coupling” [Alday-Maldacena '07]
 - 強結合状態のQCDにおけるグルーオンの散乱振幅をAdS/CFT対応で計算
- 厳密解と数値解との比較

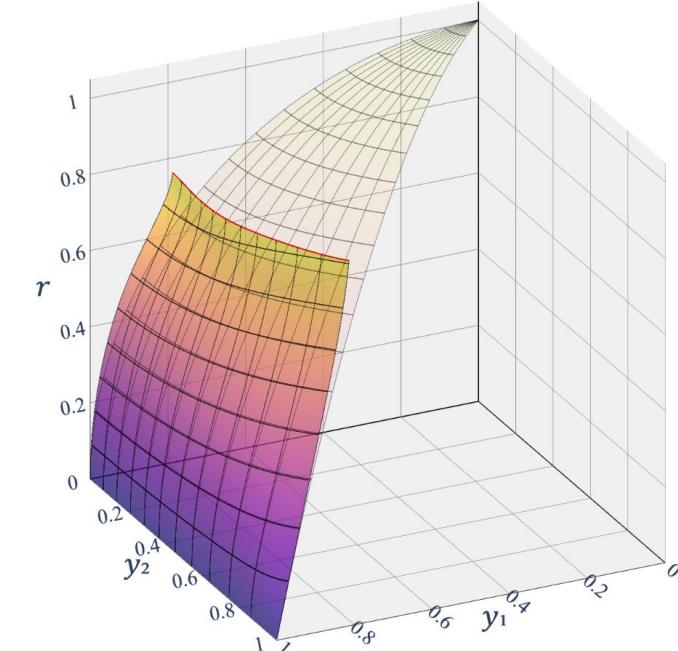
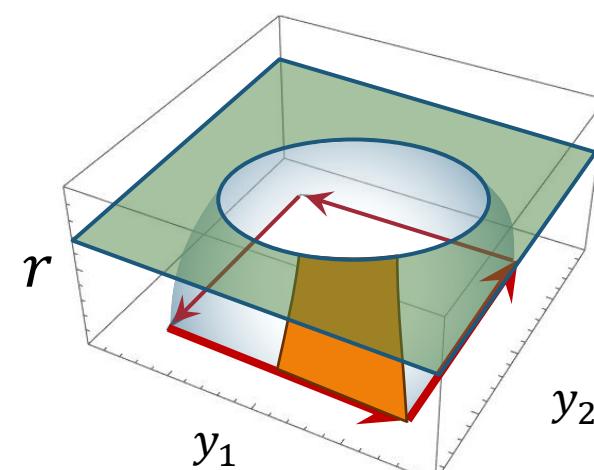
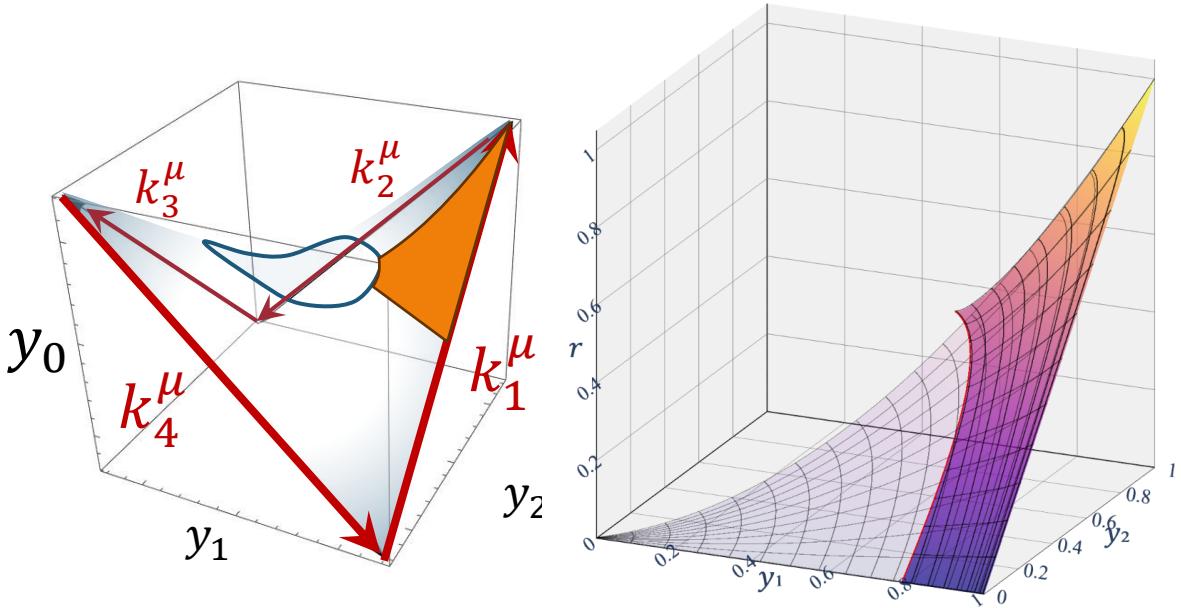
$$y_0 = y_1 y_2, \quad r = \sqrt{(1 - y_1^2)(1 - y_2^2)}$$



極小曲面形状の数値誤差 $\sim 5\%$

応用：Gluon scattering amplitude in AdS/CFT

- グルーオン散乱におけるインスタントン効果
 - 開弦の散乱振幅の計算にインスタントン（D(-1)プレーン）を導入
 - 今回のセットアップでは、AdS時空中にD3プレーンを入れることに対応
 - D3プレーンの位置でノイマン条件を満たす極小曲面を探索



1. Introduction: PINN

2. 計算例

1. 常微分方程式：曲がった時空中の弦

2. 偏微分方程式

1. 曲がった空間上の極小曲面

2. AdS/CFT対応への応用：グルーオン散乱振幅の計算

3. まとめ

物理的ニューラルネットによる極小曲面の生成とその応用

arXiv: 2509.10866

Physics-informed neural network solves minimal surfaces in curved spacetime

arXiv: 2509.10865

Gluon scattering amplitudes with instantons and minimal surfaces with topology change

◆ 機械学習を微分方程式ソルバーとして使う手法：

Physics-Informed Neural Network (PINN)

■ 重力理論・素粒子論分野の課題にPINNを応用

- 曲がった時空中の弦・極小曲面の形状
- AdS/CFT対応への応用：グルーオン散乱振幅の計算

- ✓ 既存の手法では解きづらい **動く境界を伴う境界値問題** を自然に解ける
- ✓ **微分方程式の特異点**にも自然に対応できる
- ✓ 実際の研究に出てくる問題にも**実用可能**

■ PINNの長所が生きる課題への発展が今後期待される

物理的ニューラルネットによる極小曲面の生成とその応用

arXiv: 2509.10866

◆PINNの長所・短所

- ✓ PINNの利点：数値計算の安定性、方程式の特異点の取り扱いが容易、
プログラムの作りがシンプル、問題設定の変更が容易、 ...
- ✓ 最適化問題との組み合わせも容易
(固有値問題、動く境界を伴う問題、「最良」の解をピックアップする問題、 ...)

- ✓ PINNの欠点：計算スピード、精度、長時間発展×、激しい時間・空間変化×

■ 通常の数値計算の経験が生きる；慣れている人ほど一度試してみるとよいかも

- ✓ 既存手法では解きづらい 動く境界を伴う境界値問題 を自然に解ける
- ✓ 微分方程式の特異点にも自然に対応できる
- ✓ 実験研究に出てくる問題にも実用可能

■ PINNの長所が生きる課題への発展が今後期待される