

"Deep Learning and Physics 2020 Online" seminar, 28 May 2020; "Strings, Geometry and Data science" workshop at Simons Center, Stony Brook NY, 6 Jan 2020; MRM2019 conference; Yokohama, 11 Dec 2019; Workshop on Discrete Geometry 2019, Tokyo CIC, 7 Dec 2019; Niigata U., 27 Nov 2019; NCTS-Kyoto joint workshop, Taiwan NCTS, Sep 6 2019; APCTP workshop on quantum matter, Aug 25 2019; Nordita workshop on holographic QCD, July 24 2019; QCD club, Keio U., July 8 2019; Arnold Sommerfeld Center, Munich, LMU, June 13 2019; Max Planck Institute for gravitational Physics, June 11 2019; Microsoft research, 25 April 2019; U. Washington, seminar, 24 April 2019; AdS/CFT workshop at OIST, 3 April 2019; "Machine learning landscape" workshop, ICTP Trieste, 10 Dec 2018; East Asian string workshop, KIAS, Seoul, 7 Nov 2018; KMI colloquium, Nagoya U, 25 Oct 2018; "QG meets lattice QCD workshop", ECT\*, Trento, 3 Sep 2018; APCTP focus program, Hanyang U, Seoul, 15 Aug 2018; QFT workshop, YITP, Kyoto, 31 July 2018; Machine learning workshop, TSIMF, China, 15 June, 2018; Paris QCD workshop, 11 June, 2018; DLAP2018 workshop, Osaka, 1 June, 2018; MPI, AEI, virtual seminar, 13 Apr, 2018; MIT, CTP, seminar, 4 Apr, 2018; CQuest, Sogang u., seminar, 29 March, 2018; KIAS, seminar, 26 March, 2018

# 深層学習と時空

橋本幸士 (阪大理)

ArXiv:2006.????? w/ H.Y.Hu, Y.Z.You (UCSD)

ArXiv:2005.02636 w/ T. Akutagawa, T. Sumimoto (Osaka u)

ArXiv:1903.04951

ArXiv:1802.08313, 1809.10536 w/ S. Sugishita (Kentucky),  
A. Tanaka, A. Tomiya (RIKEN)

# Deep Learning And Physics

## DLAP2019

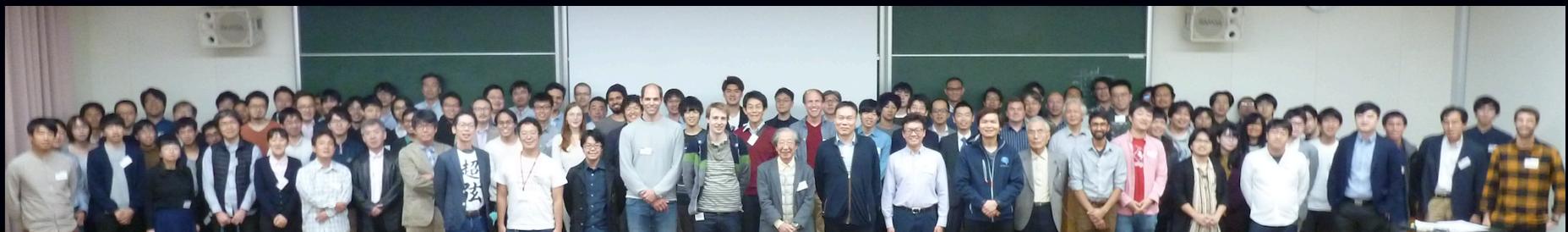
> Yukawa Institute for Theoretical Physics  
> Kyoto, Japan  
> 31 Oct - 2 Nov 2019 ■

### Target scope of Conference

Deep learning plays a central role in recent developments in research in artificial intelligence (AI). Various ideas based on physics are found in the research of deep learning, and consequently, deep learning and physics are related intimately. This international conference is dedicated to (1) applications of deep learning to physics, (2) discovering similarities among deep learning and physics, and (3) leading to new paradigm in physics motivated by deep learning. Researchers in related fields are welcome to attending discussions at the conference.

### Organizers

Koji Hashimoto (Osaka U), Masatoshi Imada (Toyota RIKEN / Waseda U), Kouji Kashiwa (Fukuoka Institute of Technology), Yuki Nagai (JAEA), Masayuki Ohzeki (Tohoku U), Enrico Rinaldi (Riken & Arithmer Inc.), Akinori Tanaka (RIKEN AIP), Akio Tomyia (Riken BNL)



# Deep Learning And Physics

## DLAP2019

> Yukawa Institute for Theoretical Physics  
> Kyoto, Japan  
> 31 Oct - 2 Nov 2019 ■

### Target scope of Conference

Deep learning plays a central role in recent developments in research in artificial intelligence (AI). Various ideas based on physics are found in the research of deep learning, and consequently, deep learning and physics are related intimately. This international conference dedicated to (1) applications of deep learning in physics, (2) discovering similarities among deep learning and physics, and (3) leading to new paradigm in physics motivated by deep learning. Researchers in related fields are welcome to attending discussions at the conference.

# 時空はニューラルネットワークか？

### Organizers

Koji Hashimoto (Osaka U), Masatoshi Imada (Toyota RIKEN / Waseda U), Kouji Kashiwa (Fukuoka Institute of Technology), Yuki Nagai (JAEA), Masayuki Ohzeki (Tohoku U), Enrico Rinaldi (Riken & Arithmer Inc.), Akinori Tanaka (RIKEN AIP), Akio Tomyia (Riken BNL)



# 時空はNNか？

動機1) 離散化した時空をNNと同一視して、  
時空上の未知の力学系を、  
時空発展のデータから学習できるか？

動機2) あるデータで学習されたNN自身を、  
時空そのものと見ることができるか？

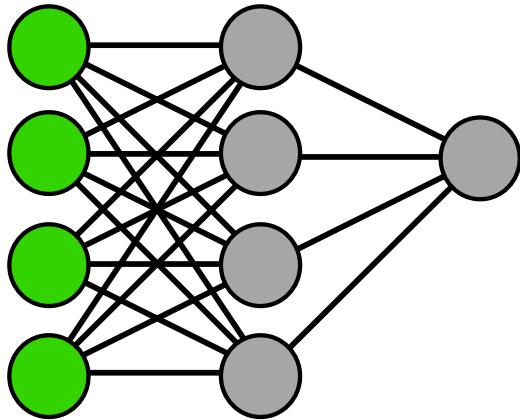
# 時空はニューラルネットワーク

1. 空間はNN
2. 時間はNN 1802.08313
3. ホログラフィーはNN 1903.04951
4. 創発空間はNN 1802.08313  
1809.10536  
2006.?????
5. 創発時空はNN 2005.02636
6. 量子時空はNN?

# 1. 空間はNN

一般的のNNは空間ではない

局所性の不在:どのユニットがどれに「近い」?

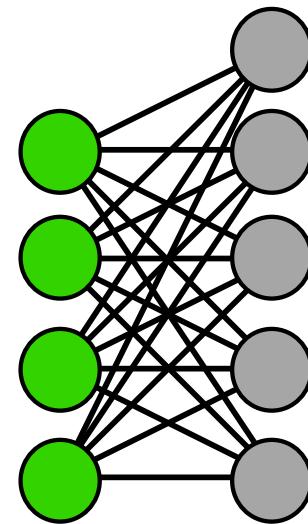


パーセプトロン模型

[Rosenblatt 1958]

[Rumelhart, McClelland 1986]

$$f(x_i) = W_j^{(2)} \varphi \left( W_{jk}^{(1)} x_k \right)$$



ボルツマンマシン

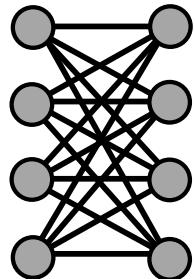
[Ackley, Hinton, Sejnowski 1985]

$$P(x_i) = \sum_{h_j \in \{0,1\}} \exp \left[ - \sum_{ij} w_{ij} x_i h_j \right]$$

# 1. 空間はNN

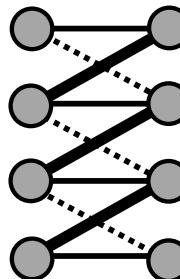
sparseなNNは空間になる

局所性なし



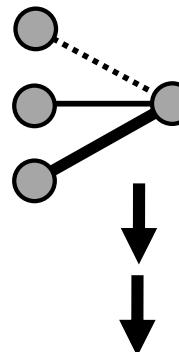
全結合

局所性適用



畳み込み層

=



平行  
移動

[K. Fukushima '80]

インプット :  $\phi(n\Delta x)$

アウトプット :

$$a\phi(n\Delta x) + b\partial_x\phi(n\Delta x) + c\partial_x^2\phi(n\Delta x) + \dots$$

## 2. 時間はNN

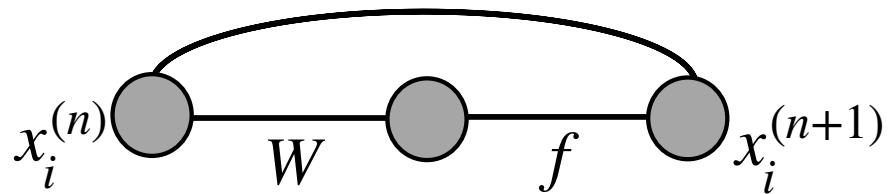
### ResNET と ODE

ResNET (Residual network)

[K.He et al., 1512.03385]

$$x_i^{(n+1)} = f(W_{ij}x_j^{(n)}) + \underline{x_i^{(n)}}$$

“Skip connection”



時間が離散化された力学系に等価

$$\dot{x}_i = f_i(x(t)) \quad \longrightarrow \quad x_i(t_{n+1}) = \underline{x_i(t_n) + \Delta t \cdot f_i(x(t_n))}$$

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t$$

時間を離散化

## 2. 時間はNN

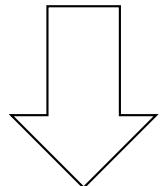
### ハミルトン力学はNN

1802.08313

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

次のNNを試してみる：

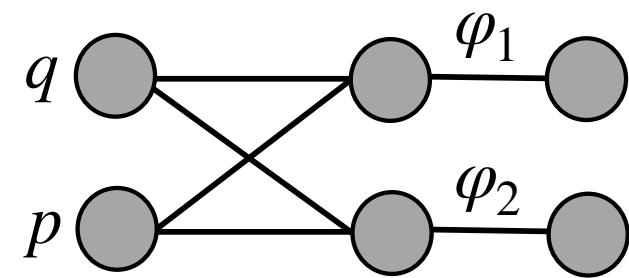
$$\begin{cases} q(t + \Delta t) = \varphi_1(W_{11}q(t) + W_{12}p(t)) \\ p(t + \Delta t) = \varphi_2(W_{21}q(t) + W_{22}p(t)) \end{cases}$$



$$\Delta t \rightarrow 0$$

極限の無矛盾性より

$$\begin{cases} \dot{q} = w_{11}q + w_{12}p + g_1(q) \\ \dot{p} = w_{21}q + w_{22}p + g_2(p) \end{cases}$$



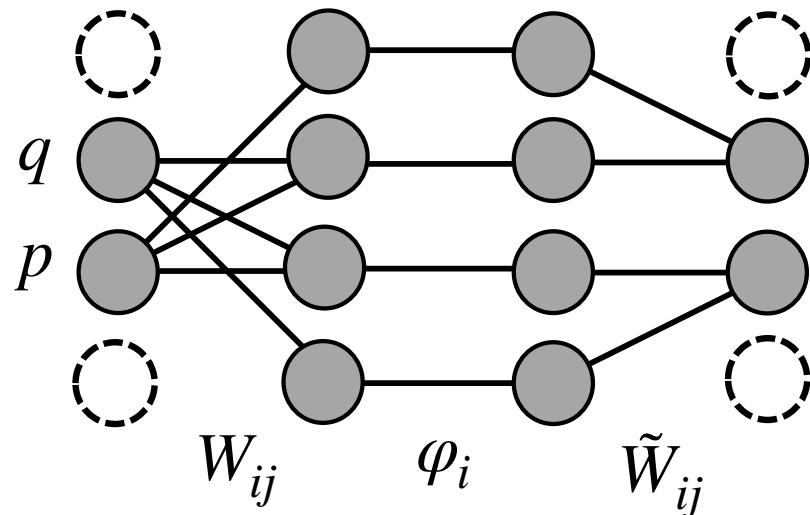
$$\begin{cases} W_{ij} = \delta_{ij} + \Delta t w_{ij} \\ \varphi_i(x) = x + \Delta t g_i(x) \end{cases}$$

トリビアルな線形ハミルトニアン...

## 2. 時間はNN

ハミルトン力学はNN

$$H = w_{11}pq + \frac{1}{2}w_{12}p^2 - \frac{1}{2}w_{21}q^2 + \frac{\lambda_1}{v}F(vp) - \frac{\lambda_2}{u}G(uq)$$
$$(F' = f, \quad G' = g)$$



$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 1 + \Delta t w_{11} & \Delta t w_{12} & 0 \\ 0 & \Delta t w_{21} & 1 + \Delta t w_{12} & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_i = \begin{pmatrix} \Delta t f(x) \\ 1 \\ 1 \\ \Delta t g(x) \end{pmatrix} \quad \tilde{W} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 2. 時間はNN

### 波動関数の解釈？

$N$  個のスピン系の基底状態の波動関数？  $\psi(s_1, s_2, \dots, s_N)$

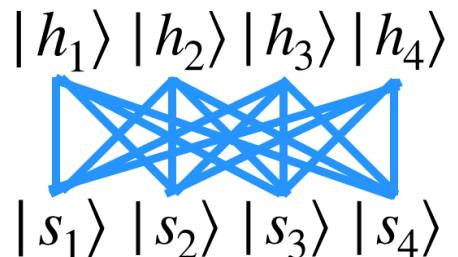
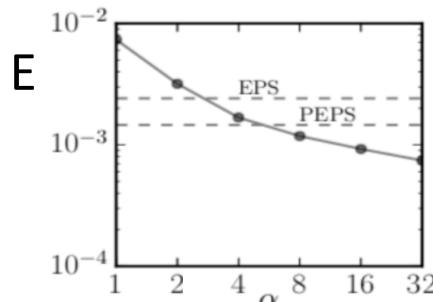
「ハミルトニアン  $H$  が与えられた時、エネルギー  $E$  を最小にせよ」

$$E = \frac{\sum_{s_1, \dots, s_N, s'_1, \dots, s'_N} \psi^\dagger(s'_1, \dots, s'_N) \hat{H}_{s'_1, \dots, s'_N, s_1, \dots, s_N} \psi(s_1, \dots, s_N)}{\sum_{s_1, \dots, s_N} \psi^\dagger(s_1, \dots, s_N) \psi(s_1, \dots, s_N)}$$

制限ボルツマンマシン状態 [Carleo Troyer '17],  
[Nomura, Darmawan, Yamaji, Imada '17], ..

$$\psi(s_1, \dots, s_N) = \sum_{h_A} \exp \left[ \sum_a a_a s_a + \sum_A b_A h_A + \sum_{a,A} J_{aA} s_a h_A \right]$$

例：2次元反強磁性  
ハイゼンベルグ模型



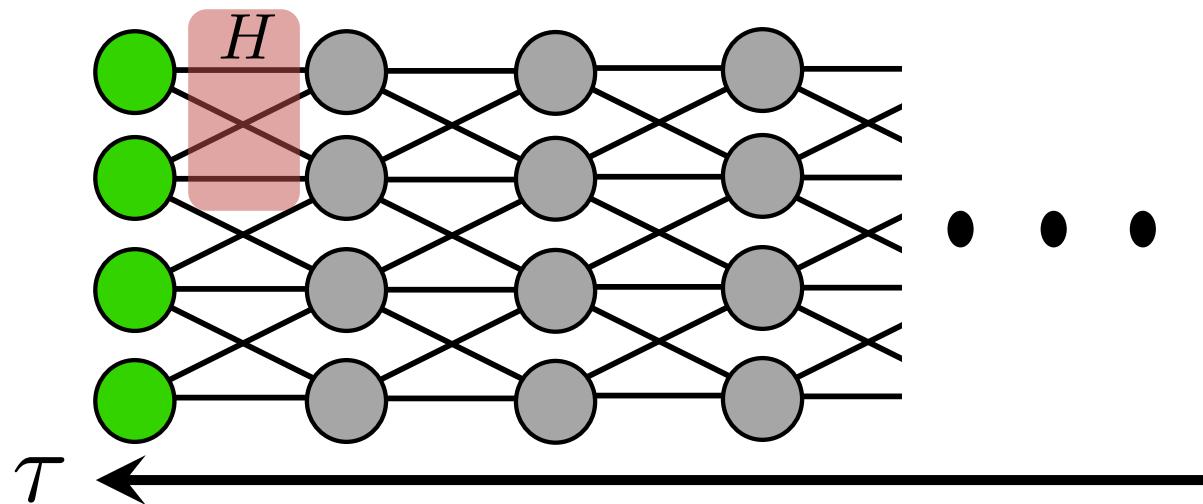
隠れ層の数

## 2. 時間はNN

深層ボルツマンマシンはユークリッド化時間

ハミルトニアンが与えられた時の基底状態の波動関数は  
深層ボルツマンマシンと同定される [Carleo, Nomura, Imada '18], ..

$$|\psi\rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-\tau H} |\text{any}\rangle = e^{-\Delta\tau H} e^{-\Delta\tau H} \dots |\text{any}\rangle$$



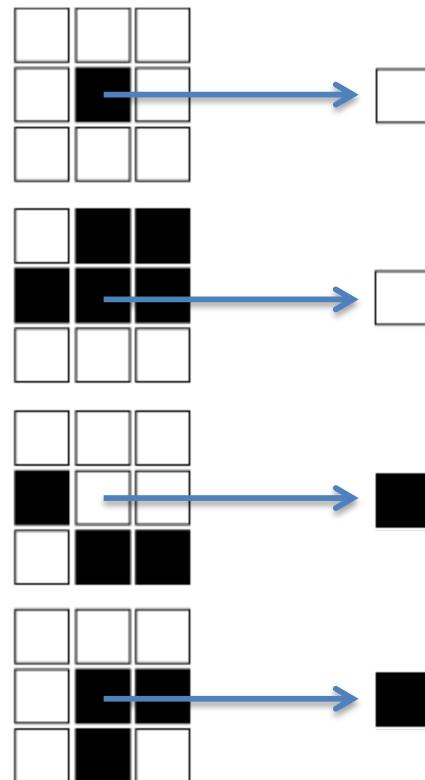
$$\psi(x_i) = \sum_{h_j^{(n)} \in \{0,1\}} \exp \left[ - \sum_{ij} w_{ij}^{(0)} x_i h_j - \sum_n \sum_{ij} w_{ij}^{(n)} h_i^{(n)} h_j^{(n+1)} \right]$$

# 時空はニューラルネットワーク

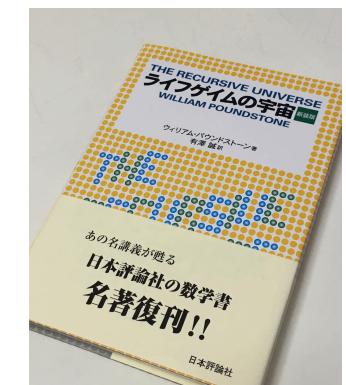
1. 空間はNN
2. 時間はNN 1802.08313
3. ホログラフィーはNN 1903.04951
4. 創発空間はNN 1802.08313  
1809.10536  
2006.?????
5. 創発時空はNN 2005.02636
6. 量子時空はNN?

## 単純な局所時間発展規則で生命の住む世界を

規則：周り8つのセルが中心セルの生死を決める



- ・ 生セルの周囲に生セルが  
2つか3つあるときだけ、生き残る
- ・ 死セルの周囲に生セルが  
3つあるときだけ、生き返る

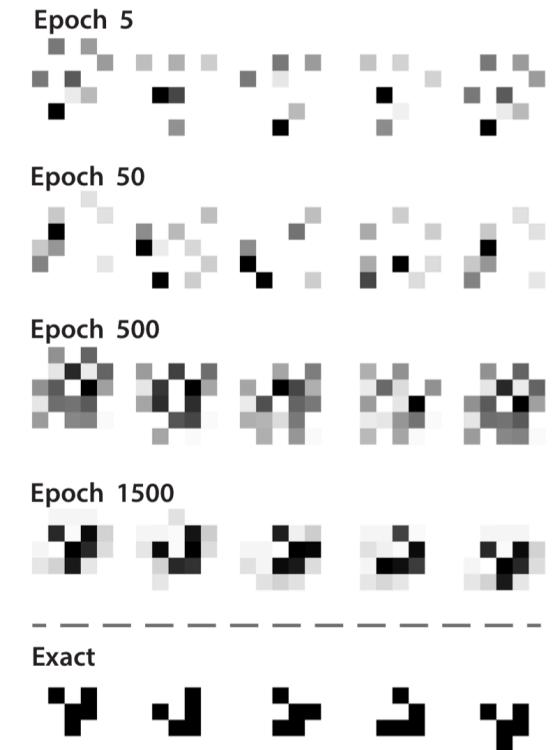
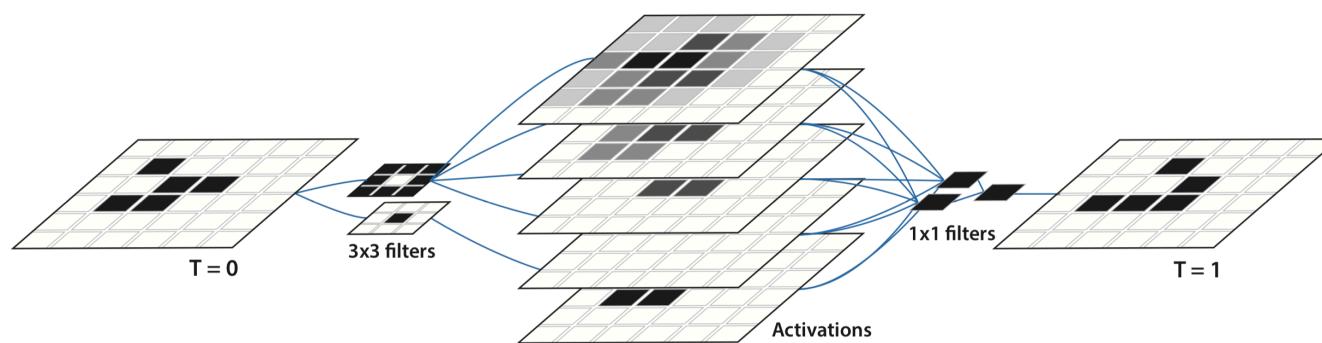




S. Guha, article in Medium ``Celler Automaton and Deep Learning'' 11 May 2020  
<https://towardsdatascience.com/cellular-automaton-and-deep-learning-2bf7c57139b3>

## 畳み込みNNで規則をデータから学習

[W. Gilpin, 1809.02942]



Cf. 重み共有で学習 [N.Wulff, J.A.Hertz, Adv. Neur. Info. Processing Sys (1993) 631]

# 時空はニューラルネットワーク

1. 空間はNN
2. 時間はNN 1802.08313
3. ホログラフィーはNN 1903.04951
4. 創発空間はNN 1802.08313  
1809.10536  
2006.?????
5. 創発時空はNN 2005.02636
6. 量子時空はNN?

# 量子重力とAdS/CFT

## 量子重力の歴史

1970年 南部、Susskind、Nielsen、ハドロンの弦理論。

1974年 米谷、ScherkとSchwarz が、弦理論が重力を含むことを発見。重力の量子論へ。

Yoneya, Prog.Theor.Phys. 51 (1974) 1907.

Scherk, Schwarz, Nucl.Phys. B81 (1974) 118.

1976年 Hawking、ブラックホールの情報喪失問題。

Hawking, Phys.Rev.D14(1976)2460.

1988年 ループ量子重力。 Rovelli, Smolin.

1997年 Maldacena が AdS/CFT 対応を発見。

(ホログラフィー原理の具体例。)

ある量子重力理論が定義される

Maldacena, Adv.Theor.Math.Phys. 2 (1998) 231.

# 量子重力とAdS/CFT

## 量子重力の歴史

- 2002年 ホログラフィックQCD。 Karch, Katz, JHEP 0206:043.  
Kruczenski,Mateos,Myers,Winters JHEP 0405:041.  
Sakai, Sugimoto, PTP 113 (2004) 843.
- 2006年 笠、高柳、エンタングルメント公式の発見。  
Ryu,Takayanagi, JHEP 0608:045.
- 2008年 ホログラフィック超伝導。  
Hartnoll, Herzog, Horowitz, PRL 101(2008)031601.
- 2009年 量子重力を創発する条件。  
Heemskerk,Penedones,Polchinski,Sully, JHEP 0910:079.
- 2014年 KitaevがSYK模型(重力双対量子力学)を発見。
- 2017年 アインシュタイン方程式(非線形)の導出。  
Faulkner,Haehl,Hijano,Parrikar,Rabideau,Van Raamsdonk, JHEP 1708:057.

# 量子重力と AdS/CFT

## 未だ証明の無い AdS/CFT 対応

[Maldacena, Adv.Theor.Math.Phys. 2 (1998) 231]

“CFT”(量子力学側)

d次元時空上の  
場の量子論

ラージN極限+強結合

“AdS”(重力側)

(d+1)次元時空上の  
~~量子重力~~

古典AINシュタイン重力

- ・未証明(物理的にも、いわんや数学的にも)
- ・左が与えられた時にどうやって右を得るか？
- ・物理量の一致が多例で知られている
- ・Maldacenaの論文は高エネルギー物理業界で最も引用

# 量子重力とAdS/CFT

## 辞書:分配関数の一致

[Gubser, Klebanov, Polyakov, Phys.Lett.B428(1998)105]

[Witten, Adv.Theor.Math.Phys. 2 (1998) 253]

量子力学の  
分配関数

=

重力理論の  
分配関数

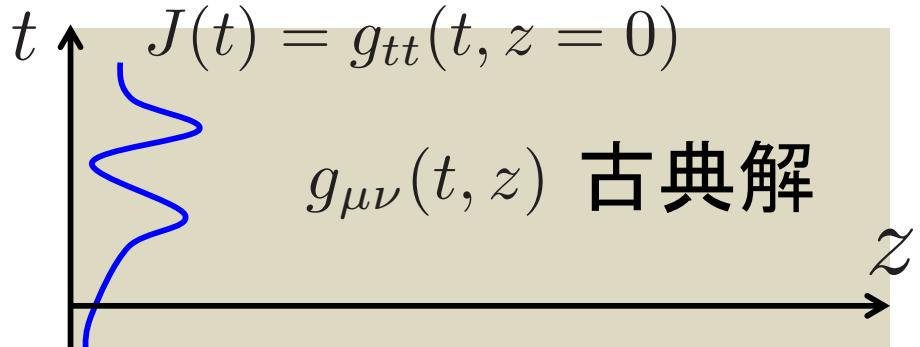
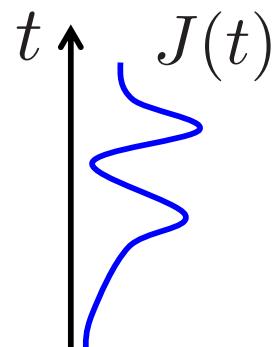
$$\int [\mathcal{D}q(t)] e^{-\int dt \mathcal{L}[q, \dot{q}]}$$

$$\int [\mathcal{D}g_{\mu\nu}(t, z)] e^{-\int dt dz (\sqrt{-\det g} R[g] + \dots)}$$

↓ ソース  $J(t)$  を導入

↓ 古典化

$$\int [\mathcal{D}q(t)] e^{-\int dt \mathcal{L}[q, \dot{q}] - \int dt J(t) \mathcal{O}[q]} = e^{-\int dt dz (\sqrt{-\det g} R[g] + \dots)}$$



# 時空はニューラルネットワーク

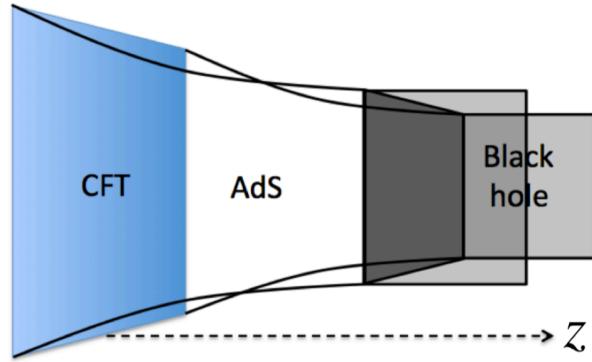
1. 空間はNN
2. 時間はNN 1802.08313
3. ホログラフィーはNN 1903.04951
4. 創発空間はNN 1802.08313  
1809.10536  
2006.?????
5. 創発時空はNN 2005.02636
6. 量子時空はNN?

### 3. ホログラフィーは NN

AdS/CFT は深層ボルツマンマシン

AdS/CFT

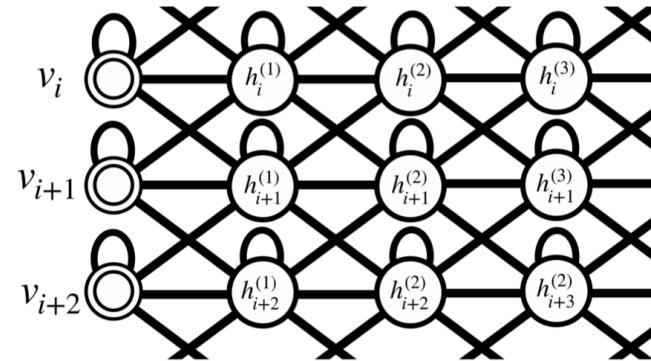
[Maldacena 1997]



$$Z_{\text{QFT}}[J] = \int_{\phi(z=0)=J} \mathcal{D}\phi \exp(-S_{\text{gravity}}[\phi])$$

深層ボルツマンマシン

[Salakhutdinov, Hinton 2009]

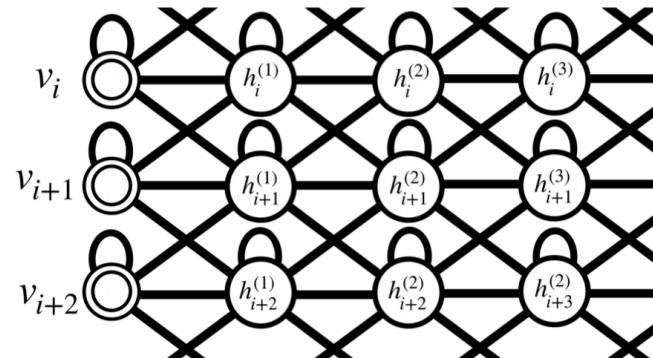
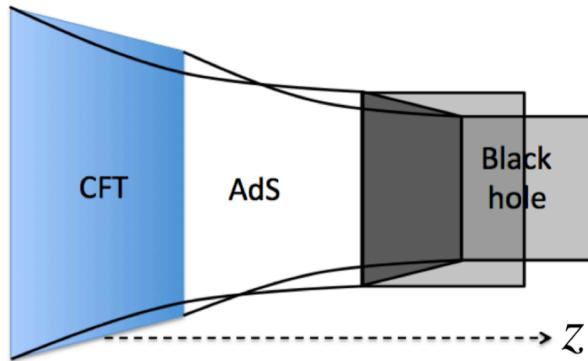


$$P(v_i) = \sum_{h_i \in \{0,1\}} \exp[-\mathcal{E}(v_i, h_i)]$$

[KH '19] [You,Yang,Qi '18] (See also [Gan,Shu '17][Howard '18])

### 3. ホログラフィーは NN

類似性から辞書を作ることができる



AdS/CFT	Deep Boltzmann machine
Bulk coordinate $z$	Hidden layer label $k$
QFT source $J(x)$	Input value $v_i$
Bulk field $\phi(x, z)$	Hidden variables $h_i^{(k)}$
QFT generating function $Z[J]$	Probability distribution $P(v_i)$
Bulk action $S[\phi]$	Energy function $\mathcal{E}(v_i, h_i^{(k)})$

# 4. 創発空間は NN

最も簡単化した 重力側の理論を用意

未知の5次元時空上のスカラー場理論

$$S = \int d\eta d^4x \sqrt{\det g} [(\partial_\eta \phi)^2 - V(\phi)] \quad \begin{matrix} 1802.08313 \\ 1809.10536 \end{matrix}$$

$$ds^2 = -f(\eta)dt^2 + d\eta^2 + g(\eta)(dx_1^2 + \cdots + dx_{d-1}^2)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{境界} (\eta \sim \infty) \text{ で AdS:} & f \sim g \sim \exp[2\eta/L] \\ \text{ブラックホール} (\eta \sim 0): & f \sim \eta^2, g \sim \text{const.} \end{array} \right.$$

辞書: 運動方程式の解は量子力学の応答  $\langle \bar{\psi} \psi \rangle_{m_q}$

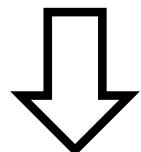
[Klebanov, Witten '98]

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{境界} (\eta \sim \infty): & \phi = m_q e^{-\eta} + \langle \bar{\psi} \psi \rangle e^{-3\eta} \\ \text{ホライズン} (\eta \sim 0) \text{ では:} & \partial_\eta \phi \Big|_{\eta=0} = 0 \end{array} \right.$$

# 4. 創発空間は NN

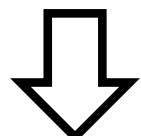
## 運動方程式をNNで表す

運動方程式  $\partial_\eta^2 \phi + h(\eta) \partial_\eta \phi - \frac{\delta V[\phi]}{\delta \phi} = 0$

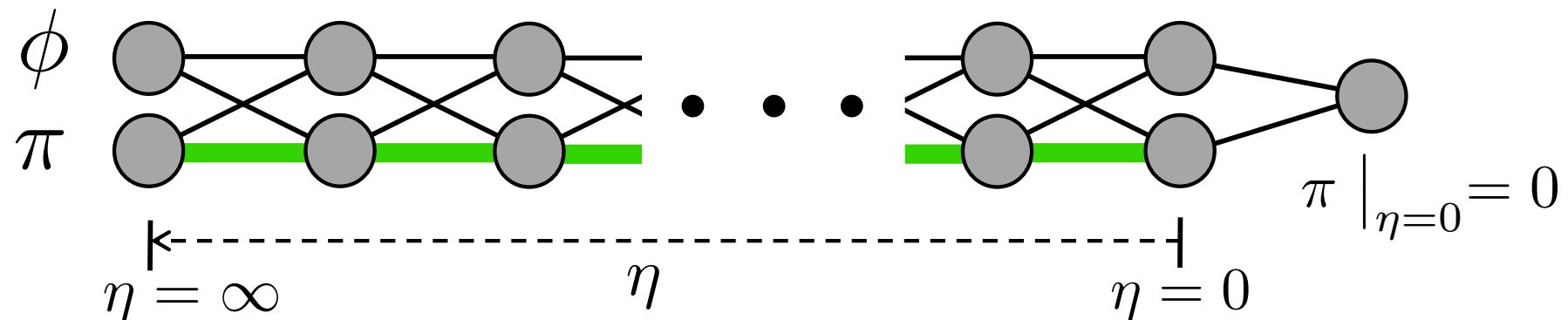


$\overbrace{\phantom{h(\eta)}}$  メトリック  $h(\eta) \equiv \partial_\eta \left[ \log \sqrt{f(\eta)g(\eta)^{d-1}} \right]$

空間を離散化  
ハミルトン形式 
$$\begin{cases} \phi(\eta + \Delta\eta) = \phi(\eta) + \Delta\eta \pi(\eta) \\ \pi(\eta + \Delta\eta) = \pi(\eta) + \Delta\eta \left( h(\eta)\pi(\eta) - \frac{\delta V(\phi(\eta))}{\delta \phi(\eta)} \right) \end{cases}$$

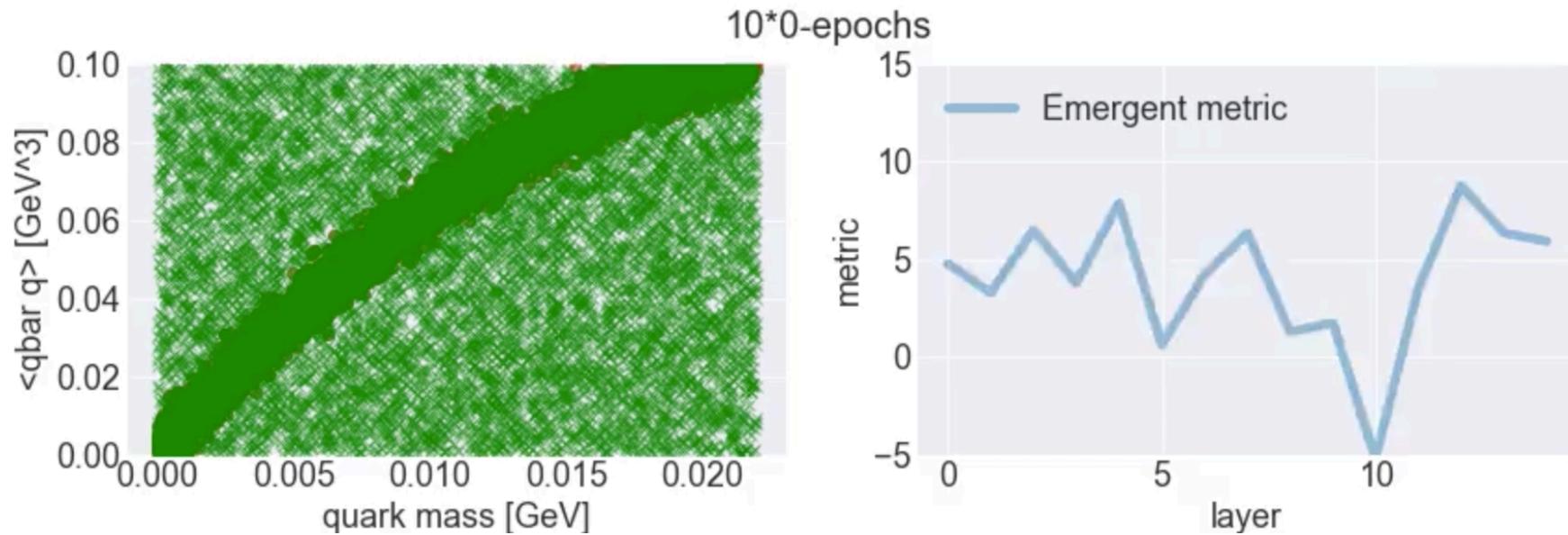


Feedforward NN 表現



# 4. 創発空間は NN

量子力学(QCD)のデータでNNを学習させる

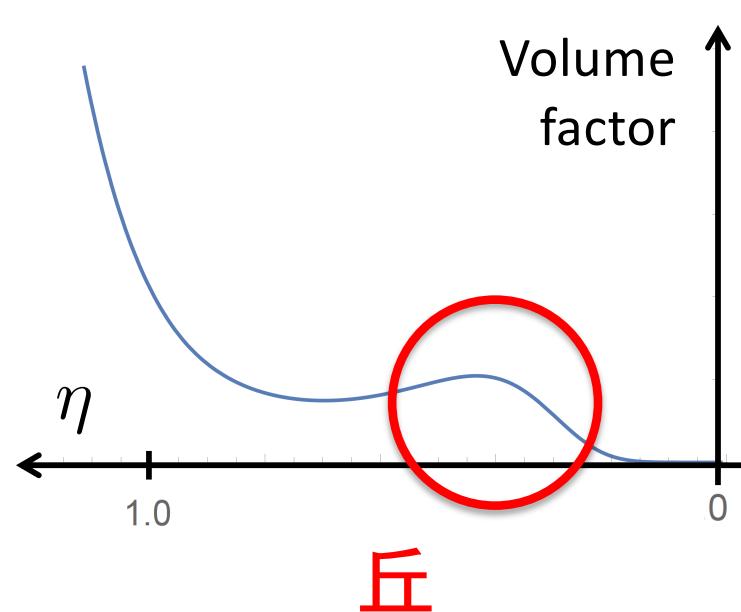


学習された (AdS 半径) $^{-1}$ :  $1/L = 237(3)[\text{MeV}]$   
スカラー場の自己結合:  $\lambda/L = 0.0127(6)$

# 4. 創発空間は NN

学習で創発した時空から、予言してみる

学習で創発した時空

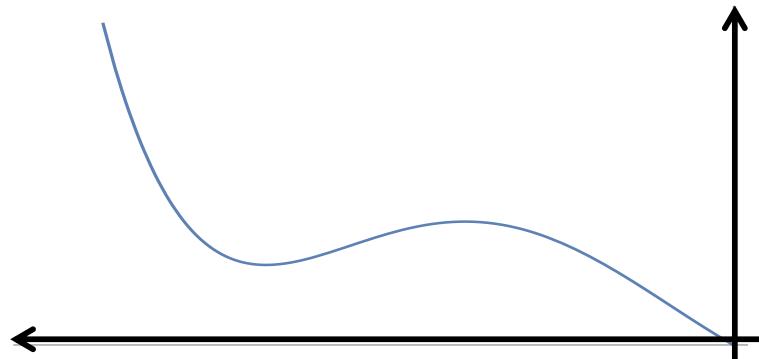


アインシュタイン方程式

の解では無い。量子重力効果？

Cf) 人間が慮った時空

$$ds^2 = \frac{e^{cz^2/2}}{z^2} \left( (1 - z^4)dt^2 + dx_i^2 + \frac{1}{1 - z^4}dz^2 \right)$$



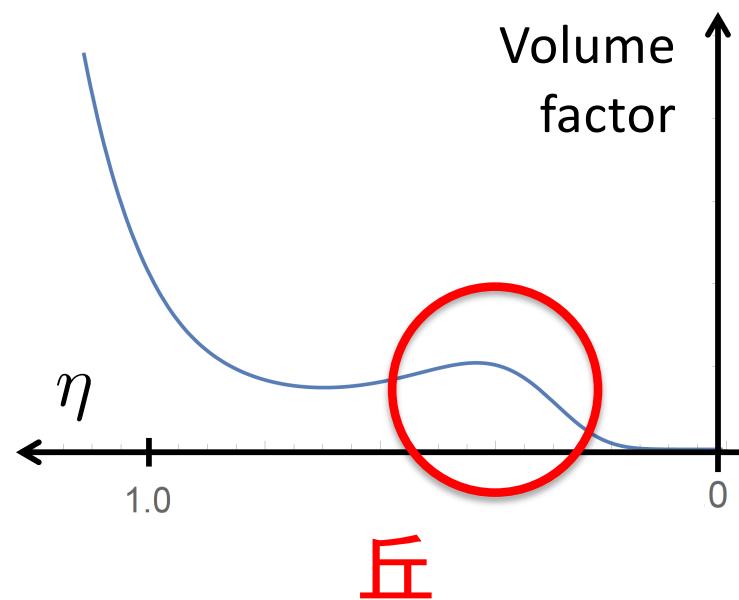
[Andreev, Zakharov, '06, '07]

Cf [Hyakutake '14]

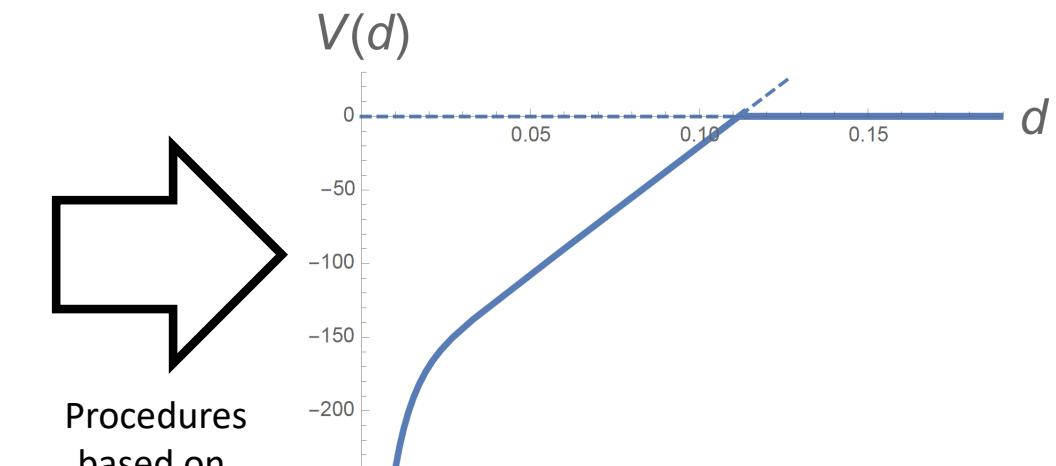
# 4. 創発空間は NN

学習で創発した時空から、予言してみる

学習で創発した時空

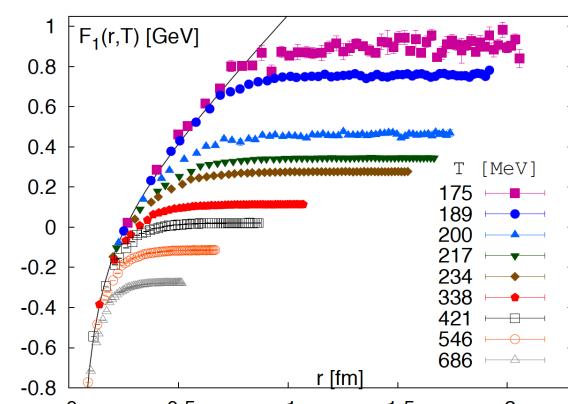


クオーク間ポテンシャル



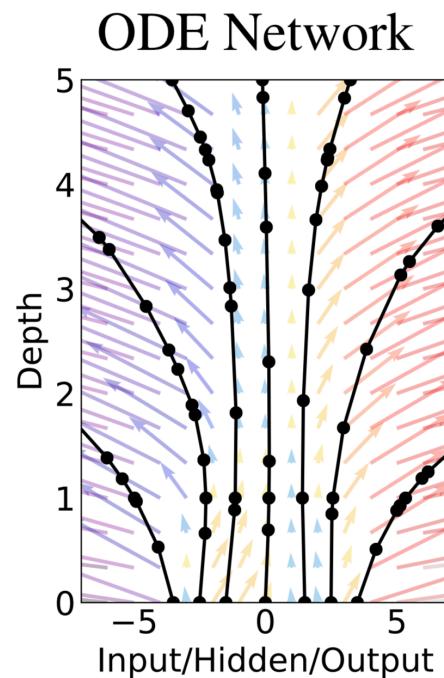
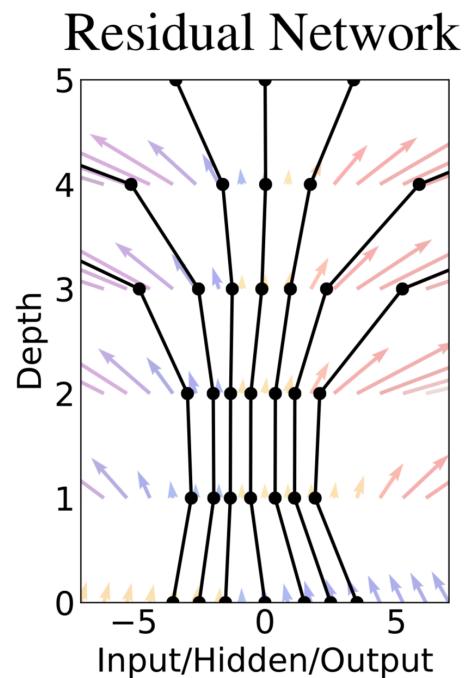
Procedures  
based on  
[Maldacena]  
[Rey,Theisen,Yee]

[Petreczky, '10]



# 4. 創発空間は NN

## Neural ODE : 離散化から自由になる



Neural ODE [R.T.Q.Chen, Y.Rubanova,  
J.Bettencourt, D.Duvenaud 1806.07366]

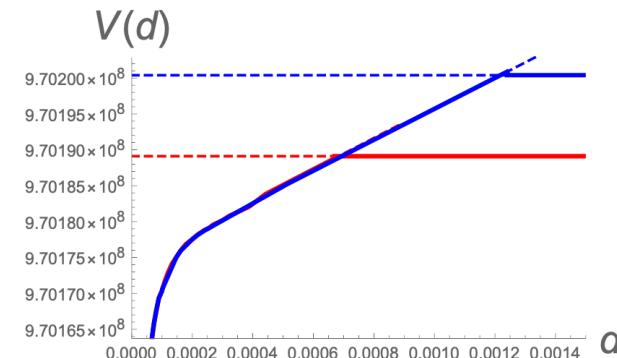
2006.?????

$$\frac{d\phi(\eta)}{d\eta} = f(\phi(\eta), \eta, h(\eta))$$

学習で創発した時空

$$h(\eta) = 8.2351\tilde{\eta}^8 + 8.0108\tilde{\eta}^7 + 7.6071\tilde{\eta}^6 \\ + 6.9468\tilde{\eta}^5 + 150.8853\tilde{\eta}^4 - 130.8117\tilde{\eta}^3 \\ + 55.5384\tilde{\eta}^2 - 2.22235\tilde{\eta}^1 + 3.7719. \\ \tilde{\eta} = 1 - \eta$$

クオーク間ポテンシャル



# 時空はニューラルネットワーク

1. 空間はNN
2. 時間はNN 1802.08313
3. ホログラフィーはNN 1903.04951
4. 創発空間はNN 1802.08313  
1809.10536  
2006.?????
5. 創発時空はNN 2005.02636
6. 量子時空はNN?

# 5. 創発時空は NN

## フーリエ変換で時間依存性を代数化

[Karch, Kaz, Son, Stephanov '06]

未知のディラトン重力5次元背景中のマクスウェル理論

$$S = \int d^4x dz e^{-\Phi} \sqrt{-g} (F_{MN})^2$$

ディラトン  $\Phi(z)$  メトリック  $ds^2 = e^{2A(z)} \left( dz^2 + \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \right)$

境界 ( $z \sim 0$ ) :  $B(z) \equiv \Phi(z) - A(z) \sim \log z$

マクスウェル場の運動方程式を解く:  $A_\mu(z, x^\mu) = v_n(z) \rho_\mu(x^\mu)$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( e^{-B} \frac{\partial}{\partial z} v_n \right) + \omega^2 e^{-B} v_n = 0$$

辞書: 振動数  $\omega^2 \sim m_\gamma^2$  が特定の値をとるとき、  
場は規格化可能になる。その値がメソン質量

# 5. 創発時空は NN

フーリエ変換で時間依存性を代数化

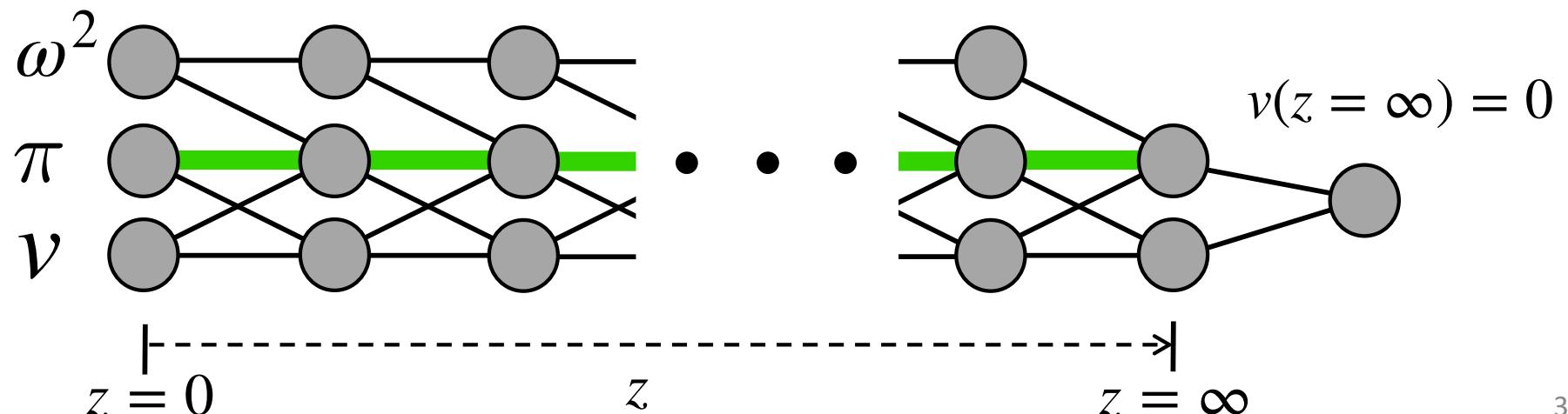
運動方程式  $\frac{\partial}{\partial z} \left( e^{-B} \frac{\partial}{\partial z} v_n \right) + \omega^2 e^{-B} v_n = 0$

2005.02636

↓  
空間を離散化  $v_n(z + \Delta z) = v_n(z) + \Delta z \pi_n(z)$

ハミルトン形式  $\begin{cases} \pi_n(z + \Delta z) = \pi_n(z) + \Delta z (B'(z) \pi_n(z) - \omega^2 v_n(z)) \end{cases}$

↓  
Feedforward NN表現

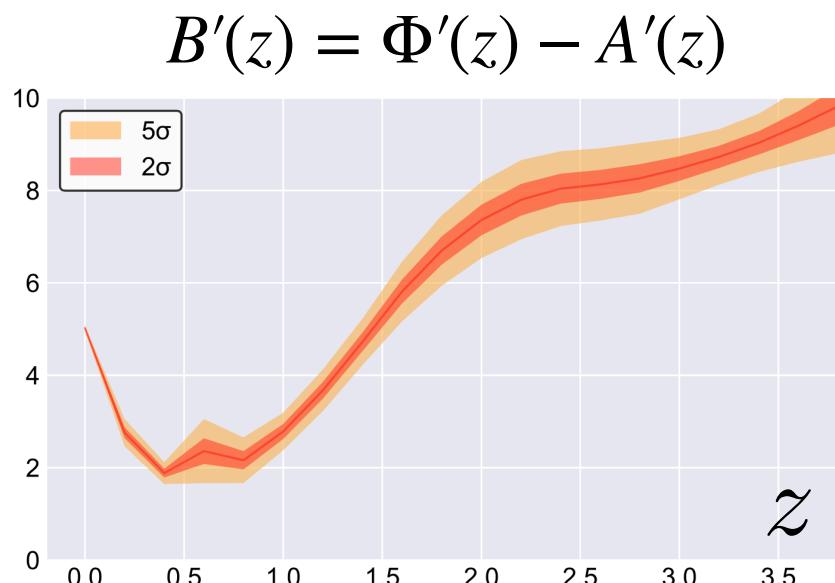
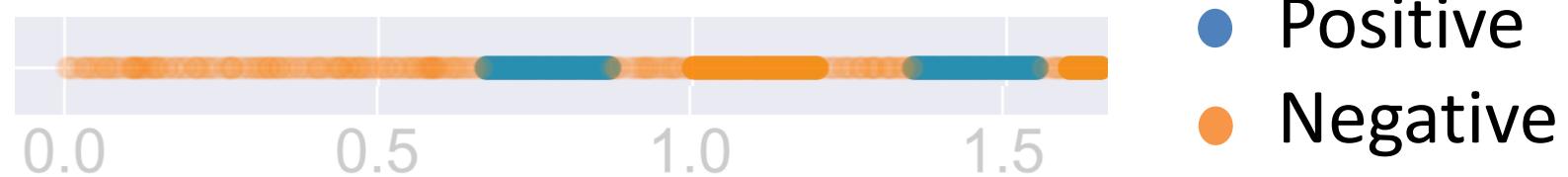


# 5. 創発時空は NN

ハドロン質量の実験データで学習する

$\rho$ メソンの質量：

$$m_\rho^{(1)} = 0.77 \text{ GeV}, m_\rho^{(2)} = 1.45 \text{ GeV}$$



# 5. 創発時空は NN

ハドロン質量の実験データで学習する

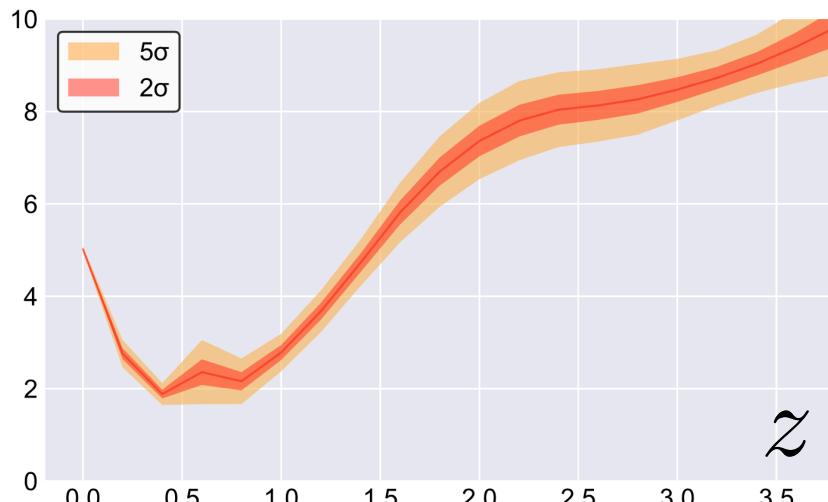
$\rho$ メソンの質量 :

$$m_{\rho}^{(1)} = 0.77 \text{ GeV}, m_{\rho}^{(2)} = 1.45 \text{ GeV}$$

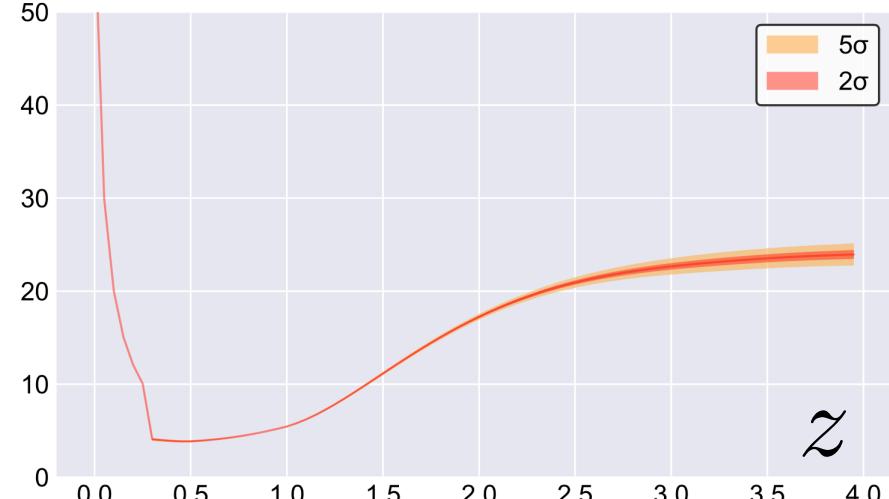
$a_2$  メソンの質量 :

$$m_{a_2}^{(1)} = 1.32 \text{ GeV}, m_{a_2}^{(2)} = 1.70 \text{ GeV}$$

$$B'(z) = \Phi'(z) - A'(z)$$



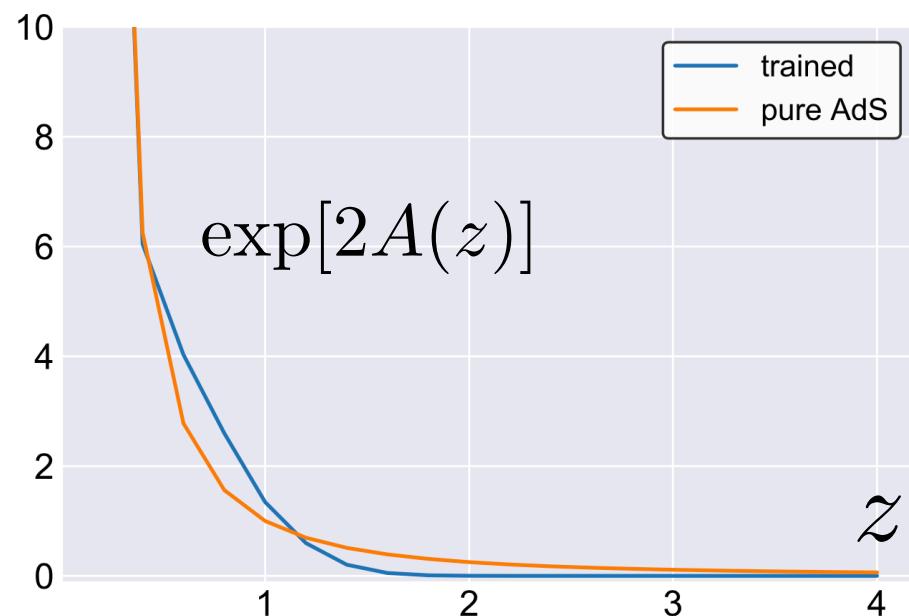
$$\tilde{B}'(z) = \Phi'(z) - 3A'(z)$$



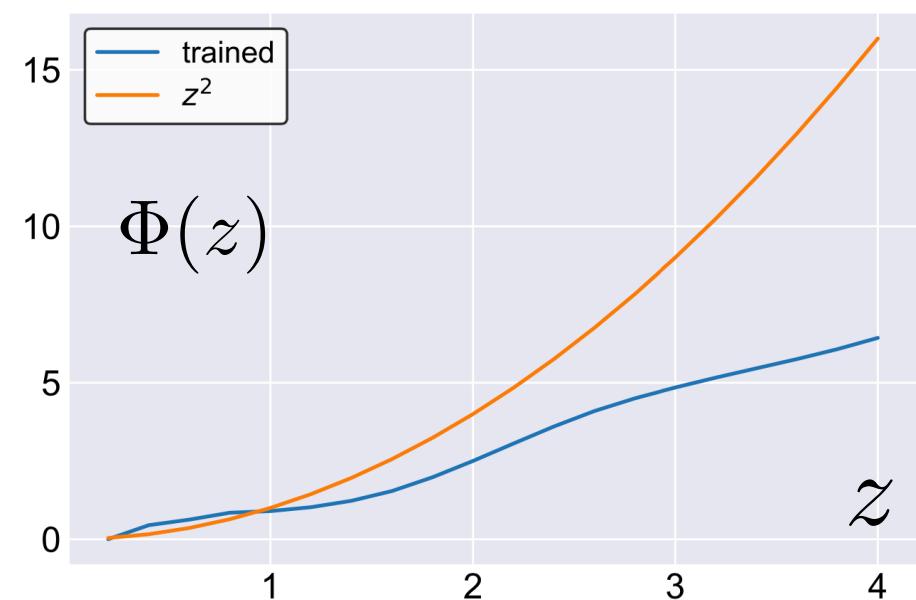
# 5. 創発時空は NN

NN上の重みとして時空が創発する

学習で創発した時空



学習で創発した  
ディラトン場



# 時空はニューラルネットワーク

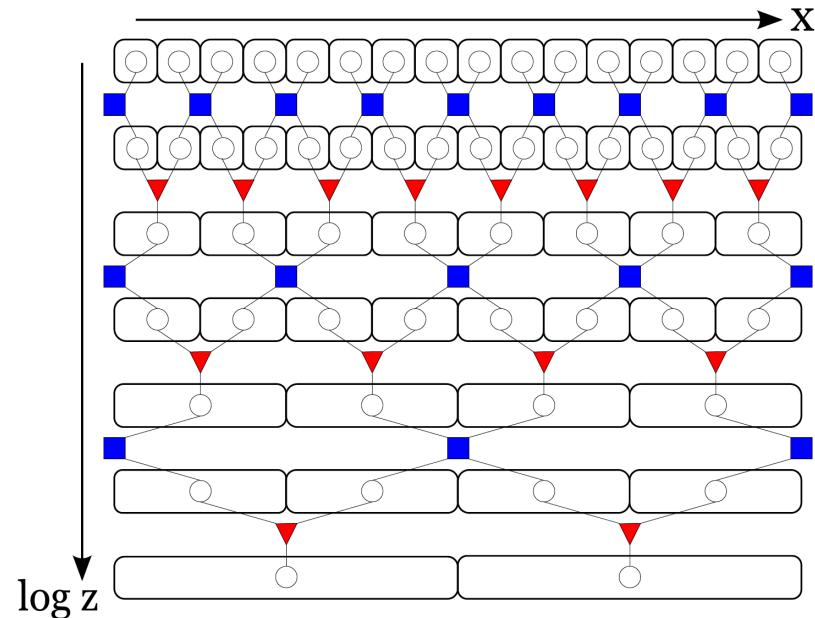
1. 空間はNN
2. 時間はNN 1802.08313
3. ホログラフィーはNN 1903.04951
4. 創発空間はNN 1802.08313  
1809.10536  
2006.?????
5. 創発時空はNN 2005.02636
6. 量子時空はNN?

# 6. 量子時空は NN?

## AdS/CFT での時空の離散化

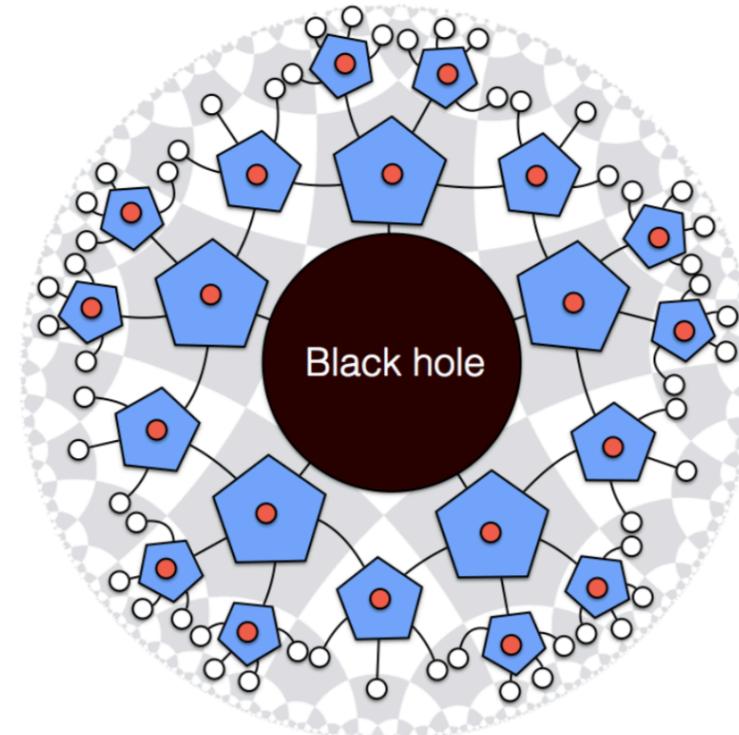
AdS/MERA 対応

[Swingle '09]



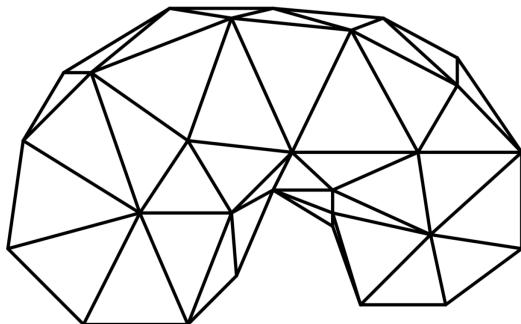
量子コードによる模型

[Pastawski, Yoshida, Harlow, Preskill '15]



# 6. 量子時空は NN?

## Regge 計算 vs 行列模型



Regge 計算  
[Regge 1961]

格子構造は規定し、  
格子の長さが力学変数

力学的単体分割  
[Ambjorn, Loll 1998]

ランダム生成された格子構造、  
格子の長さは規定



従来のNN



グラフNNの拡張？