

Machine learning Post-Minkowskian integrals

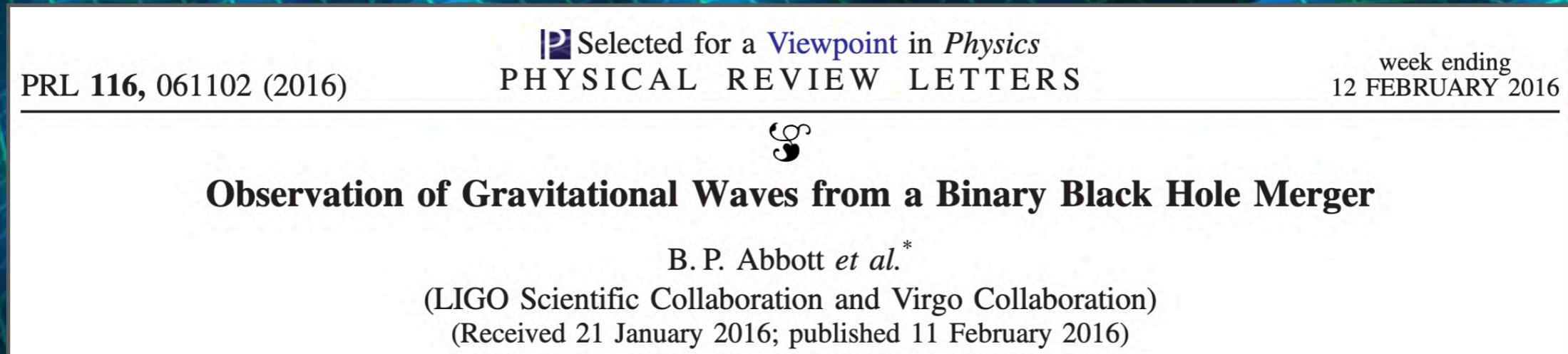
Ryusuke Jinno (RESCEU, UTokyo)

2022/12/22, オンラインセミナー 「機械学習と物理学」



概要

- ▶ LIGO/Virgoがブラックホール連星由来の重力波を初観測（2015年）



- ▶ これが動機付けとなり、連星系の運動をpost-Newtonian理論あるいはpost-Minkowskian理論で解析的に求める手法が近年発達している。

概要

- ▶ これらの手法において、**ファインマン積分**というものを評価する必要がある
(特に、post-Minkowskian理論に現れるものをpost-Minkowskian積分と呼ぼう)。

例えば

$$I = e^{2\epsilon\gamma_E} \int \frac{d^d l_1 d^d l_2}{\pi^d} \frac{(\mathbf{q}^2)^{3-d}}{(l_1^2 - i0)(l_2^2 - i0)((l_1 + l_2 - \mathbf{q})^2 - i0)}$$

ベクトルの次元は $d = 3 - 2\epsilon$ で、 \mathbf{q} は与えられた定ベクトル。 ϵ について展開した形がわかれば十分なのだが、この例ではそもそも解析的に計算できて、

$$I = e^{2\epsilon\gamma_E} \frac{\Gamma(1/2 - \epsilon)^3 \Gamma(2\epsilon)}{\Gamma(3/2 - 3\epsilon)} = \frac{\pi}{\epsilon} + 6\pi - \pi \left(\frac{7}{6}\pi^2 - 36 \right) \epsilon + \dots$$

と求まる。

概要

- 先の例は簡単な場合 (3PM = post-Minkowskian orderの3次)だが、5PMだと例えば

$$I = e^{4\epsilon\gamma_E} \int \frac{d^d l_1 d^d l_2 d^d l_3 d^d l_4}{\pi^{2d}} \frac{(q^2)^{6-2d}}{(u \cdot l_1 - i0)(u \cdot l_2 - i0)(l_1^2)(l_2^2)(l_3^2)(l_4^2)((l_1 + l_2 + l_3 + l_4 - q)^2)}$$

- ここで、 u は q と直交する単位ベクトルで、簡単のため一部 $-i0$ を省略した
(本当は (l_1^2) は $(l_1^2 - i0)$ の意)。これも何とか計算できて、

$$e^{4\epsilon\gamma_E} \frac{\Gamma_{1-4\epsilon}^2 \Gamma_{1/2-\epsilon}^3 \Gamma_{4\epsilon}}{\Gamma_{3/2-3\epsilon}} \left[-\frac{\pi \Gamma_{1-3\epsilon} \Gamma_{-\epsilon}^2}{\Gamma_{1-5\epsilon} \Gamma_{1-4\epsilon}^2} + \frac{\pi}{1-3\epsilon} \frac{\sec(3\pi\epsilon)}{\Gamma_{2-8\epsilon}} {}_3F_2(1-4\epsilon, 1-4\epsilon, 1-3\epsilon; 2-8\epsilon, 2-3\epsilon; 1) \right. \\ \left. - \frac{2\Gamma_{1/2-3\epsilon} \Gamma_{1/2-\epsilon}^2}{\Gamma_{3/2-5\epsilon} \Gamma_{1-4\epsilon}} {}_4F_3\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}-\epsilon, \frac{1}{2}-\epsilon, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}-5\epsilon, \frac{1}{2}+3\epsilon; 1\right) \right]$$

となり、 ϵ 展開もできる: $(1-6\epsilon)I = -\frac{\pi^2}{2} \left(\frac{1}{\epsilon^3} - \frac{\pi^2}{\epsilon} - \frac{256\zeta(3)}{3} \right) + \dots$

- 将来的にはこれをより高いPM orderで求めないといけない。解析解は望み薄。

概要

- フルの解析解が手に入らなくても、 ϵ の必要次数まで展開係数が解析的に分かればよい。その際に用いられる手法が**PSLQ**: [Bailey&Ferguson '91] [Bailey&Broadhurst '01]

PSLQ Algorithm

An algorithm which can be used to find **integer relations** between real numbers x_1, \dots, x_n such that

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0,$$

[Wolfram mathworld]

要するに、(少なくとも数値的にある程度わかっている) 実数 x_1, x_2, \dots に対し、

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots = 0$ を満たす整数 a_1, a_2, \dots を見つけてくれる

- 例えば $I = \frac{c_2}{\epsilon^2} + \frac{c_1}{\epsilon} + c_0 \epsilon^0 + \dots$ で、 $c_0 = 38.5749\dots$ と数値的にわかっていて、かつ $c_0 = a_1 \pi^2 + a_2 \pi \ln 2 + a_3 \ln^2 2$ と知っている場合、 $(a_1, a_2, a_3) = (3, 5, -4)$ と当ててくれる

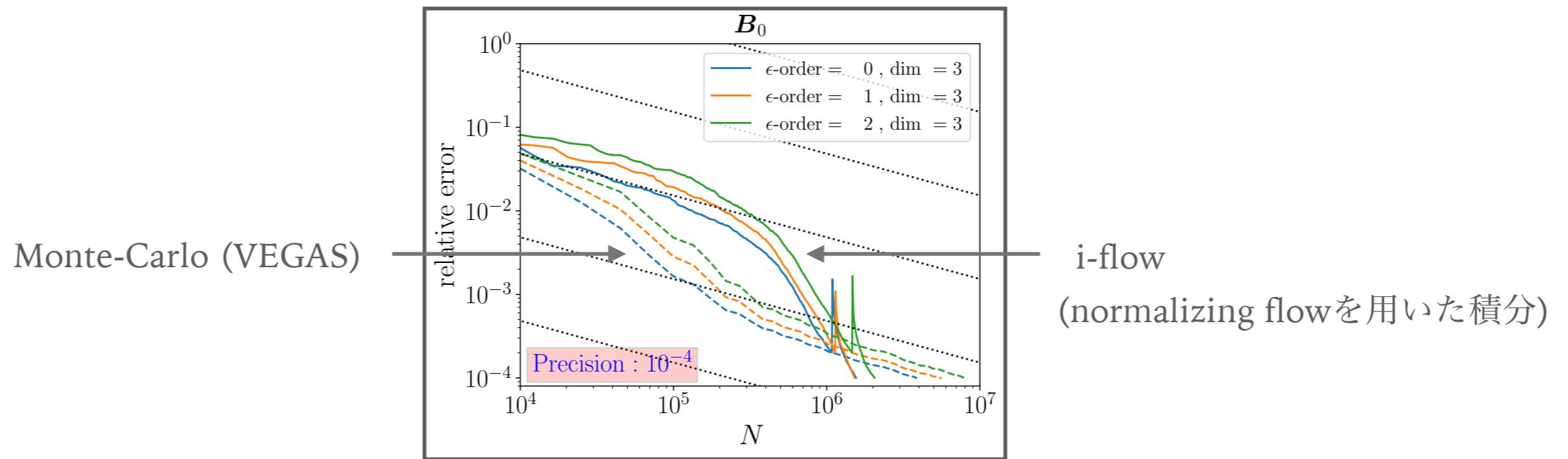
```
FindIntegerNullVector[{Pi^2, Pi*Log[2], Log[2]^2, 38.574931599113280810}]
```

{-3, -5, 4, 1}

たくさん桁が必要！

概要

- この展開係数の数値評価に、機械学習を用いたアルゴリズムである **normalizing flow**を使用し、スタンダードなMonte-Carloアルゴリズムと比較した。
結果：積分の複雑さが上がるほど、機械学習を用いたアルゴリズムの方が良くなる



- 実は、本講演の例 (post-Minkowskian積分) では別の手法が発展する可能性があるため、機械学習が取って代わると断言はできない。しかしながら、少なくとも normalizing flowが持つ可能性を示す例にはなっている。

トークの構成

物理パート

1. アインシュタイン方程式とは？
2. post-Newtonian理論とは？post-Minkowskian理論とは？
3. post-Minkowskian積分計算のパイプライン：部分積分, 微分方程式, 境界条件

機械学習パート

1. normalizing flowとは？
2. normalizing flowを用いた数値積分パッケージ "i-flow"
3. i-flowのpost-Minkowskian積分への適用

要約 + a





インシュタイン方程式

- ▶ アインシュタイン方程式：

一般相対性理論において、時空及び物質の時間発展を決める方程式。

カタチ $G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$ モノ

"Space-time tells matter how to move. Matter tells space-time how to curve."

John Wheeler

アインシ

► アインシュタイン

一般相対性理論

諸々の定義

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\rho \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\rho\mu}^\rho + \Gamma_{\rho\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\sigma, \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(\partial_\rho g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\rho} - \partial_\sigma g_{\nu\rho})$$

$$G \simeq 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$$

: ニュートン定数

カタチ $G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$ 物質のエネルギー運動量テンソル
モノ

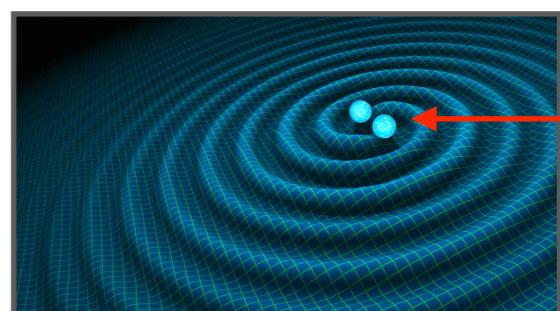
$$c \simeq 3 \times 10^8 \text{ m/s} : \text{光速}$$

時空 (= 時間と空間を統一的に扱ったもの)

計量 $g_{\mu\nu}$ で記述される。計量とは、微小距離 ds を座標 x^μ の微小差分 dx^μ で表したときの係数: $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00} dx^0 dx^0 + g_{11} dx^1 dx^1 + \dots$ (時間座標 x^0 , 空間座標 x^i ($i = 1, 2, 3$))

物質

本トークではこれが「連星系」に相当する。



こいつ

AINSHU TAIN FORMULA の非線形性

- 以下、AINSHU TAIN FORMULA は非常に非線形な方程式であることに注意。
なぜ？ → 左辺が計量 $g_{\mu\nu}$ のnon-linearな関数だから

カタチ $G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$ モノ

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

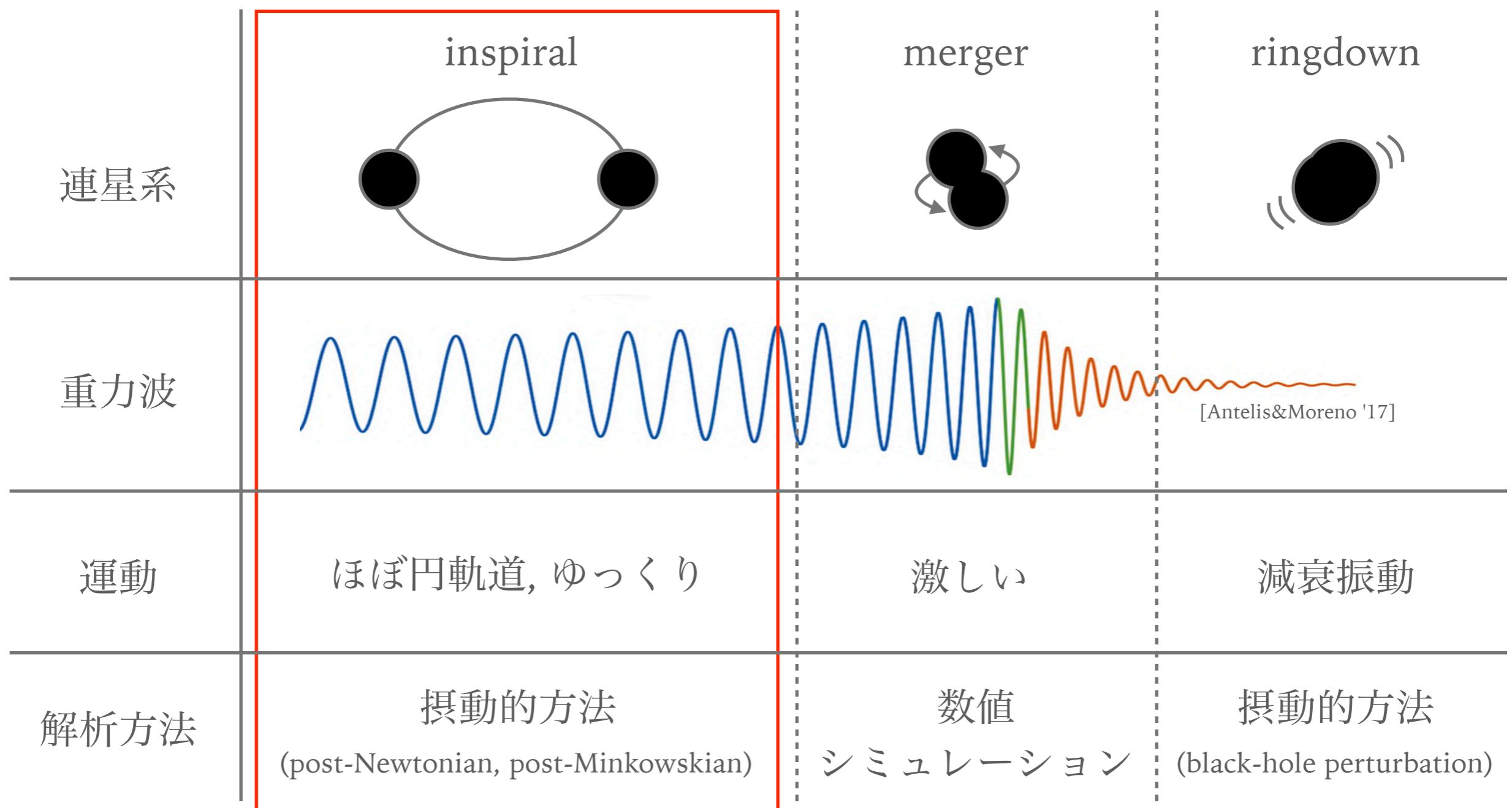
$\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{R_{\# \#} \text{ or } R \sim \partial_{\#} \Gamma_{\# \#}^{\#} - \partial_{\#} \Gamma_{\# \#}^{\#} + \Gamma_{\# \#}^{\#} \Gamma_{\# \#}^{\#} - \Gamma_{\# \#}^{\#} \Gamma_{\# \#}^{\#}}$

\uparrow
 $\Gamma_{\# \#}^{\#} \sim \frac{1}{2} g^{\# \#} (\partial_{\#} g_{\# \#} + \partial_{\#} g_{\# \#} - \partial_{\#} g_{\# \#})$

\uparrow
 $g_{\# \#}$ の逆行列

連星系の時間発展

- ▶ ブラックホール連星系の時間発展と、興味のある領域



POST-NEWTONIAN & POST-MINKOWSKIAN

post-Newtonian理論

伝統的アプローチ

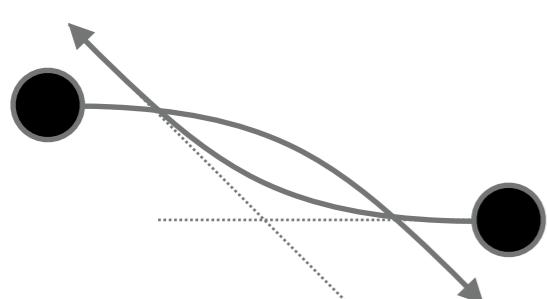
EFT (effective field theory)

post-Minkowskian理論

散乱振幅

(scattering amplitude)

EFT (effective field theory)

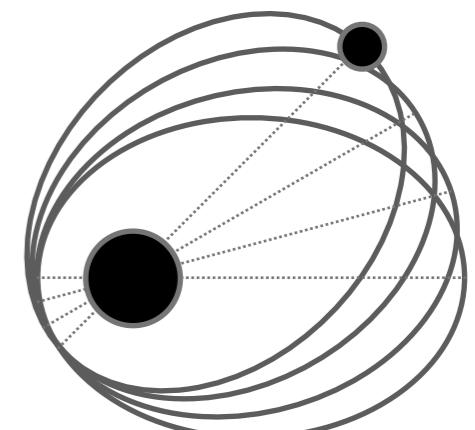


物理量

periastron advance (近日点移動)

scattering angle (散乱角)

time delay



トークの構成

物理パート

1. アインシュタイン方程式とは？
2. post-Newtonian理論とは？post-Minkowskian理論とは？
3. post-Minkowskian積分計算のパイプライン：部分積分, 微分方程式, 境界条件

機械学習パート

1. normalizing flowとは？
2. normalizing flowを用いた数値積分パッケージ "i-flow"
3. i-flowのpost-Minkowskian積分への適用

要約 + a



POST-NEWTONIAN, 伝統的アプローチ

post-Newtonian理論 = $1/c$ (c = 光速度)に関する展開

[Einstein, Infeld, Hoffmann '37]

- 典型的に連星系の速度 v との組み合わせ (v/c) で現れるため、 v/c 展開とも呼ばれる
(厳密には $c[m/s]$ は他の場所にも現れるため、これは正確ではない see e.g. [Blanchet '14])

POST-NEWTONIAN, 伝統的アプローチ

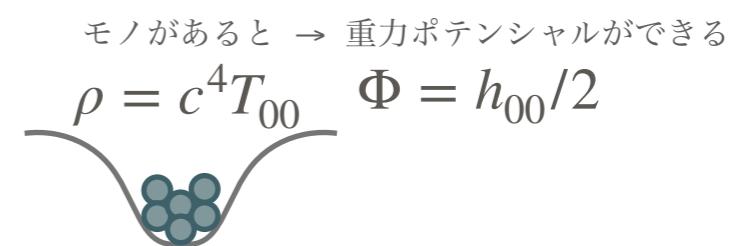
post-Newtonian理論 = $1/c$ (c = 光速度)に関する展開

[Einstein, Infeld, Hoffmann '37]

- 典型的に連星系の速度 v との組み合わせ (v/c) で現れるため、 v/c 展開とも呼ばれる
(厳密には $c[m/s]$ は他の場所にも現れるため、これは正確ではない see e.g. [Blanchet '14])
- $1/c$ 展開のleading orderではNewtonian potentialを再現する

チェック $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ かつ 「時間微分 $(1/c)(\partial/\partial t) \ll$ 空間微分 $(\partial/\partial x)$ 」として展開
バック グラウンド + ずれ

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \rightarrow \nabla^2 h_{00} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{00}$$



これは実際重力ポテンシャルの満たすポアソン方程式 $\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho$ で、
質点 $\rho = m\delta^{(3)}(\vec{x})$ を考えると高校物理でやる $\Phi = -G\frac{m}{r}$ になる

POST-NEWTONIAN, 伝統的アプローチ

- 1/c 展開のnext-leading order [Einstein, Infeld, Hoffmann '37]; see also [Kei Yamada '14 (Ph.D thesis)]

- 式を簡単にするため、harmonic gaugeというゲージを取る

$$h^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu} \text{ に対し } \partial_\mu h^{\alpha\mu} = 0$$

- アインシュタイン方程式は、近似なしで次の形になる ($\square = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$) e.g. [Blanchet '14]

$$\square h^{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} \left(\sqrt{-g}T^{\mu\nu} + \frac{c^4}{16\pi G}\Lambda^{\mu\nu} \right)$$

$$\begin{aligned} \Lambda^{\alpha\beta} = & -h^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}^2 h^{\alpha\beta} + \partial_\mu h^{\alpha\nu}\partial_\nu h^{\beta\mu} + \partial_\mu h^{\alpha\nu}\partial_\nu h^{\beta\mu} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}\partial_\rho h^{\mu\sigma}\partial_\sigma h^{\nu\rho} \\ & -g^{\alpha\mu}g_{\nu\sigma}\partial_\rho h^{\beta\sigma}\partial_\mu h^{\nu\rho} - g^{\beta\mu}g_{\nu\sigma}\partial_\rho h^{\alpha\sigma}\partial_\mu h^{\nu\rho} + g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\partial_\rho h^{\alpha\mu}\partial_\sigma h^{\beta\nu} \\ & +\frac{1}{8}(2g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu})(2g_{\rho\sigma}g_{\tau\omega} - g_{\sigma\tau}g_{\rho\omega})\partial_\mu h^{\rho\omega}\partial_\nu h^{\sigma\tau} \end{aligned}$$

- 適切に 1/c 展開して計算すると、今日ではEinstein-Infeld-Hoffmann Lagrangianと呼ばれるLagrangianが出る

$$L = L_{\text{Newton}} + L_{\text{EIH}} = \left[\frac{1}{2} \sum_{a=1,2} m_a \mathbf{v}^2 + \frac{Gm_1m_2}{r} \right] + \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{8} \sum_{a=1,2} m_a \mathbf{v}_a^4 + \frac{Gm_1m_2}{2r} \left[3(\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2) - 7(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) - \frac{(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} \right] - \frac{G^2 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{2r^2} \right]$$

$$\sim mv^4 \qquad \qquad \qquad \sim \frac{Gm^2v^2}{r} \qquad \qquad \qquad \sim \frac{G^2m^3}{r^2}$$

POST-NEWTONIAN & POST-MINKOWSKIAN

post-Newtonian理論

伝統的アプローチ

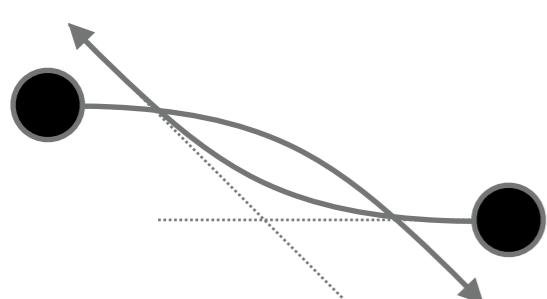
EFT (effective field theory)

post-Minkowskian理論

散乱振幅

(scattering amplitude)

EFT (effective field theory)

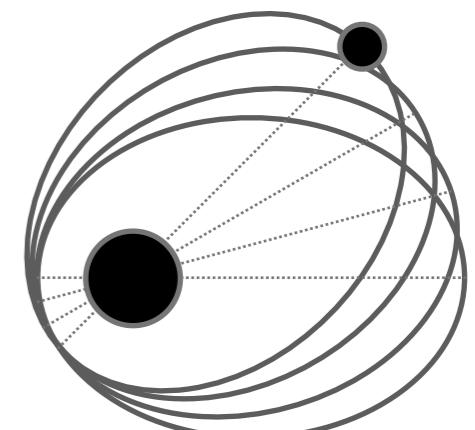


物理量

periastron advance (近日点移動)

scattering angle (散乱角)

time delay

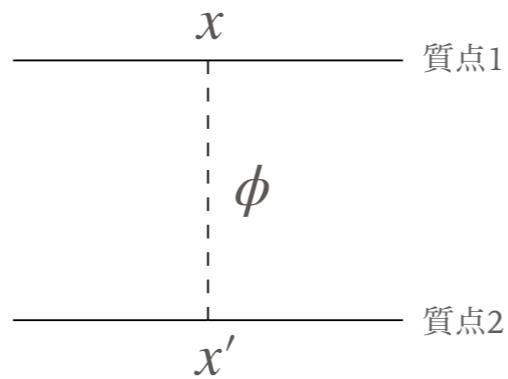


POST-NEWTONIAN, EFTアプローチ

[Goldberger&Rothstein '06]

- EFT (effective field theory)を用いた、よりシステムティックなアプローチが
[Goldberger&Rothstein '06] で提唱され、以降こちらが主流になった
- 簡単のため、重力ではなく masslessスカラー ϕ が力を媒介する場合を考えよう

e.g. [Porto '16]



- 質点にmasslessスカラー場が結合した理論を考える: $S[\phi, J] = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + J(x)\phi(x) \right]$
- 質点はソース J に入っている: $J(t, x) = \sum_{a=1,2} \frac{m_a}{M_\phi} \delta^3(x - x_a(t))$
 - ↑ 質点1,2の軌道
 - ↑ 結合の強さをコントロールする定数
- ϕ をintegrate outして質点に対する有効作用を求める $e^{iS_{\text{eff}}[J]} = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi,J]}$ のだが、
その際、古典的プロセスに対応するダイアグラムだけ取り入れる。例えば上図。

POST-NEWTONIAN, EFTアプローチ

[Goldberger&Rothstein '06]

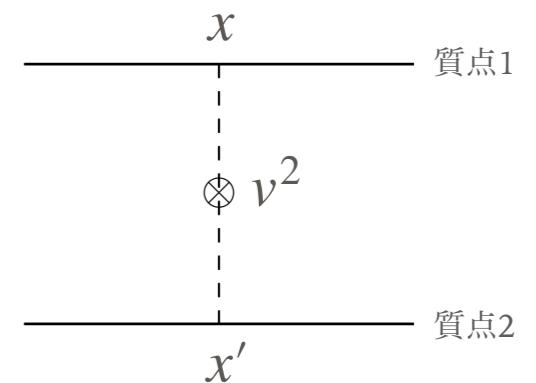
- すると実際、Newtonian potentialが出る

$$\begin{aligned}
 S_{\text{eff}}[J] &\supset \frac{i}{2} \int_x \int_{x'} J(x) \Delta_F(x - x') J(x') \supset -\frac{m_1 m_2}{M_\phi^2} \int_x \int_{x'} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1(x^0)) \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_2(x'^0)) \int_p \frac{1}{(p^0)^2/c^2 - \mathbf{p}^2 + i0} e^{-ip(x-x')} \\
 &\sim \frac{m_1 m_2}{M_\phi^2} \int dt \int_p \frac{1}{\mathbf{p}^2 - i0} e^{-ip \cdot (\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t))} \sim \int dt \frac{\frac{m_1 m_2}{4\pi M_\phi^2} |\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)|}{\text{Newtonian potential}} - \frac{m_1 m_2}{4\pi M_\phi^2} \frac{1}{r}
 \end{aligned}$$

無視 (1/c 展開)

- 1/c 展開の次のオーダーでは、無視していた部分を

$$\frac{1}{(p^0)^2/c^2 - \mathbf{p}^2} \simeq -\frac{1}{\mathbf{p}^2} \left(1 + \frac{(p^0)^2/c^2}{\mathbf{p}^2} \right)$$



で取り入れて、 v^2/c^2 型の補正が出る (ただし $r(t) = |\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)|$, $\mathbf{v}_1(t) = \dot{\mathbf{x}}_1(t)$, $\mathbf{v}_2(t) = \dot{\mathbf{x}}_2(t)$)

$$S_{\text{eff}}[J] \supset \dots \supset - \int dt \frac{m_1 m_2}{8\pi M_\phi^2} \frac{1}{r(t)^3} \frac{(\mathbf{v}_1(t) \cdot \mathbf{v}_2(t)) r(t)^2 - (\mathbf{v}_1(t) \cdot \mathbf{r}(t)) (\mathbf{v}_2(t) \cdot \mathbf{r}(t))}{c^2}$$

- 重力にした場合も基本同じで、先のEinstein-Infeld-Hoffmann Lagrangianが出る

POST-NEWTONIAN, EFTアプローチ

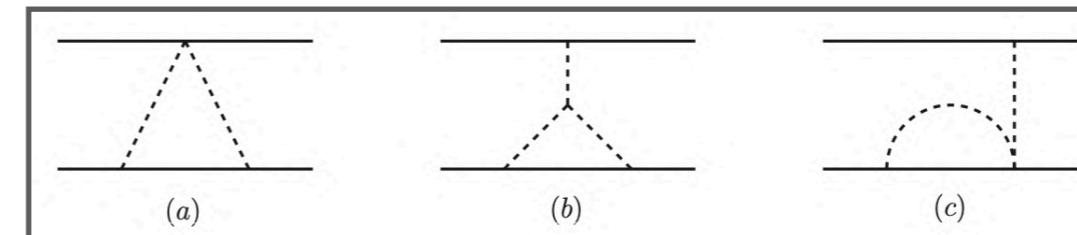
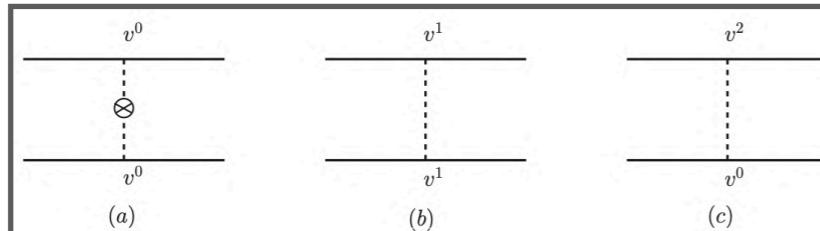
[Goldberger&Rothstein '06]

- すると実際、Newtonian potentialが出る

$$\begin{aligned}
 S_{\text{eff}}[J] &\supset \frac{i}{2} \int_x \int_{x'} J(x) \Delta_F(x - x') J(x') \supset -\frac{m_1 m_2}{M_\phi^2} \int_x \int_{x'} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1(x^0)) \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_2(x'^0)) \int_p \frac{1}{(p_0)^2/c^2 - \mathbf{p}^2 + i0} e^{-ip(x-x')} \\
 &\sim \frac{m_1 m_2}{M_\phi^2} \int dt \int_p \frac{1}{\mathbf{p}^2 - i0} e^{-ip \cdot (\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t))} \sim \int dt \frac{m_1 m_2}{4\pi M_\phi^2 |\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)|} \\
 &\quad \text{Newtonian potential } -\frac{m_1 m_2}{4\pi M_\phi^2} \frac{1}{r}
 \end{aligned}$$

無視 (1/c 展開)

- 1/c 展開の次のオーダーでは 無視していた部分を



[Porto '16]

$$L = L_{\text{Newton}} + L_{\text{EIH}} = \left[\frac{1}{2} \sum_{a=1,2} m_a \mathbf{v}^2 + \frac{G m_1 m_2}{r} \right] + \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{8} \sum_{a=1,2} m_a \mathbf{v}_a^4 + \frac{G m_1 m_2}{2r} \left[3(\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2) - 7(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) - \frac{(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} \right] - \frac{G^2 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{2r^2} \right]$$

- 重力にした場合も基本同じで、先のEinstein-Infeld-Hoffmann Lagrangianが出る

POST-NEWTONIAN & POST-MINKOWSKIAN

post-Newtonian理論

伝統的アプローチ

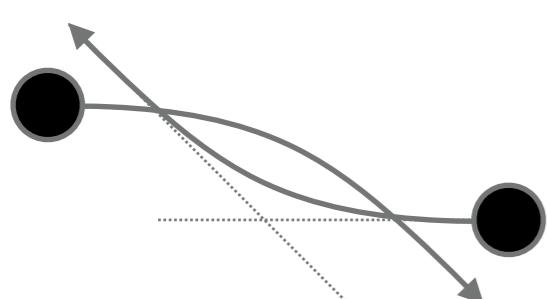
EFT (effective field theory)

post-Minkowskian理論

散乱振幅

(scattering amplitude)

EFT (effective field theory)

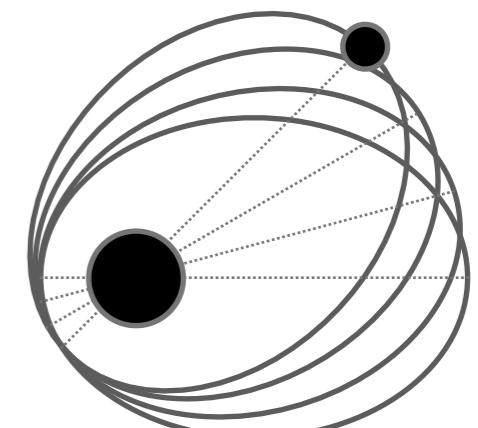


物理量

periastron advance (近日点移動)

scattering angle (散乱角)

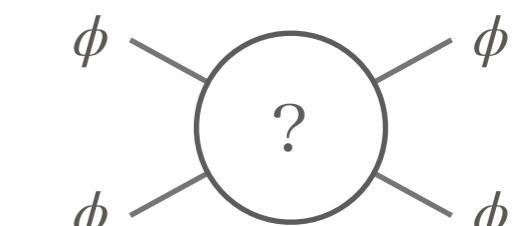
time delay

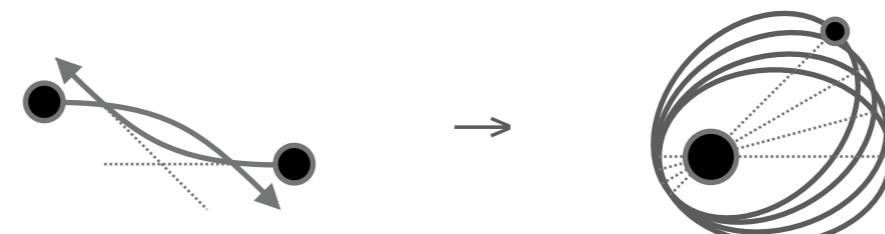


POST-MINKOWSKIAN, 散乱振幅アプローチ

post-Minkowskian理論 = G (Newtonian constant)に関する展開

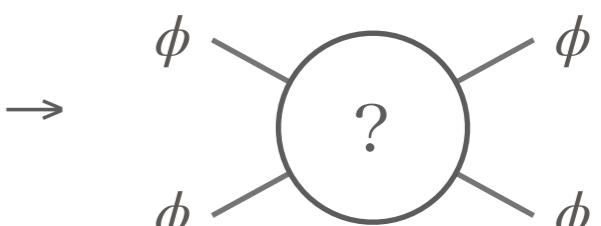
[Bertotti '56, Bertotti&Plebanski '60] [Iwasaki '71] [Rosenblum '78, Westpfahl&Goller '79, Bel et al. '81, Damour&Deruelle '81]

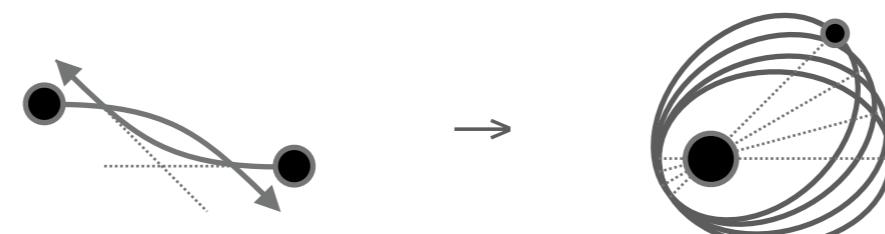
- ▶ 実は先のpost-Newtonian理論はvとGのdouble expansionとも見える
- ▶ Gのみの展開ができれば、連星系の速度に関して仮定を置かなくてよいのでより好ましいのでは？ → post-Minkowskian理論
- ▶ 重力で相互作用するmassiveな粒子の散乱をG展開で考え、散乱振幅から物理量を読み取る [Damour '16]
$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} R + \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right]$$
 → 
- ▶ 粒子はscattering stateだが、解析接続で適切にbound stateにmapできる e.g. [Kälin&Porto '18]



POST-MINKOWSKIAN, 散乱振幅アプローチ

$$L = L_{\text{Newton}} + L_{\text{EIH}} = \left[\frac{1}{2} \sum_{a=1,2} m_a \mathbf{v}^2 + \frac{Gm_1m_2}{r} \right] + \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{8} \sum_{a=1,2} m_a \mathbf{v}_a^4 + \frac{Gm_1m_2}{2r} \left[3(\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2) - 7(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) - \frac{(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} \right] - \frac{G^2 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{2r^2} \right]$$

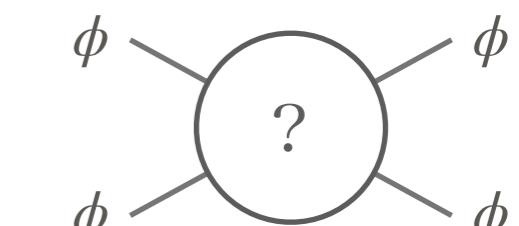
- 実は先のpost-Newtonian理論はvとGのdouble expansionとも見える
 - Gのみの展開ができれば、連星系の速度に関して仮定を置かなくてよいのでより好ましいのでは？ → post-Minkowskian理論
 - 重力で相互作用するmassiveな粒子の散乱をG展開で考え、散乱振幅から物理量を読み取る [Damour '16]
- $S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} R + \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right]$
- 
- 粒子はscattering stateだが、解析接続で適切にbound stateにmapできる e.g. [Kälin&Porto '18]



POST-MINKOWSKIAN, 散乱振幅アプローチ

post-Minkowskian理論 = G (Newtonian constant)に関する展開

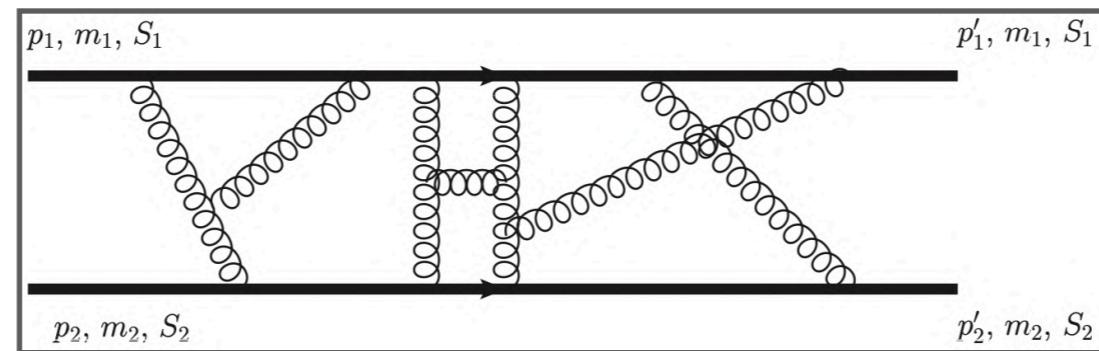
[Bertotti '56, Bertotti&Plebanski '60] [Iwasaki '71] [Rosenblum '78, Westpfahl&Goller '79, Bel et al. '81, Damour&Deruelle '81]

- ▶ 実は先のpost-Newtonian理論はvとGのdouble expansionとも見える
- ▶ Gのみの展開ができれば、連星系の速度に関して仮定を置かなくてよいのでより好ましいのでは？ → post-Minkowskian理論
- ▶ 重力で相互作用するmassiveな粒子の散乱をG展開で考え、散乱振幅から物理量を読み取る [Damour '16]
$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} R + \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right]$$
 → 
- ▶ 粒子はscattering stateだが、解析接続で適切にbound stateにmapできる e.g. [Kälin&Porto '18]



POST-MINKOWSKIAN, 散乱振幅アプローチ

- さて、このアプローチにおいて、「ループ計算」が必要になる
(実は先のpost-NewtonianのEFTアプローチでも同様)



[Bjerrum-Bohr, Damgaard, Planté, Vanhove '22]

- 「古典」的な運動を考えているのになぜループ計算なのか？

ループ計算は「量子」的な効果ではないのか？🤔 → No

Quantum Theory of Gravitation vs. Classical Theory^{*)}

[Iwasaki '71]

Here we want to point out that there seems to exist an erroneous belief^{*,**)} that only tree diagrams contribute to the classical process. Contrary to this belief, the quadratic term in k corresponds to fourth-order diagrams each of which contains a closed loop; it is a “radiative correction” term. Since the quantum

Classical Gravity from Loop Amplitudes

[Bjerrum-Bohr, Damgaard, Planté, Vanhove '21]

[Bjerrum-Bohr, Damgaard, Planté, Vanhove '22]

THE GENERATION OF GRAVITATIONAL WAVES. IV. BREMSSTRAHLUNG^{*†‡}

[Thorne&Kovacs '78]

g) The Feynman-Diagram Approach

Any classical problem can be solved quantum-mechanically; and sometimes the quantum solution is easier than the classical. There is an extensive literature on the Feynman-diagram, quantum-mechanical treatment of gravitational bremsstrahlung radiation (e.g., Feynman 1961, 1963; Barker, Gupta, and Kaskas 1969; Barker and Gupta

Abstract

The post-Minkowskian expansion received much attention in the computation of scattering amplitudes in the context. In this brief review, we focus on the post-Minkowskian expansion as applied to the two-body problem in general relativity without spin, and we describe how relativistic quantum field theory can be used to greatly simplify analytical calculations based on the Einstein–Hilbert action. Subtleties related

The SAGEX review on scattering amplitudes Chapter 13: Post-Minkowskian expansion from scattering amplitudes

POST-MINKOWSKIAN, 散乱振幅アプローチ

- ループが量子的であるという議論は、経路積分に作用が S/\hbar で入ることに基づく

e.g. [Iliopoulos, Itzykson, Martin '75]

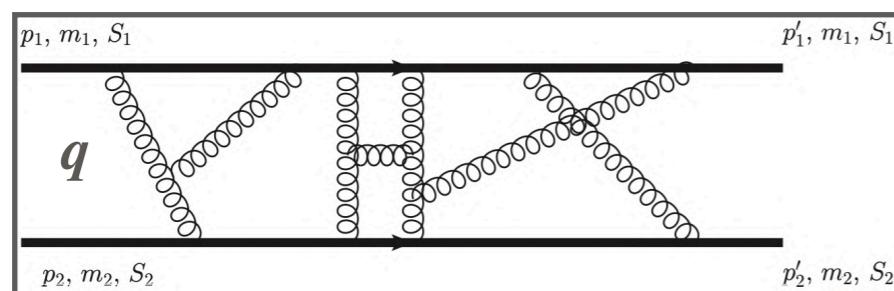
$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi e^{i\frac{S}{\hbar}} \rightarrow$ vertexは \hbar^{-1} , propagatorは \hbar に比例 \rightarrow ループは \hbar で suppress される

- しかし今考えるべき \hbar 依存性はもう少し複雑である。e.g. [Bjerrum-Bohr, Damgaard, Planté, Vanhove '22]

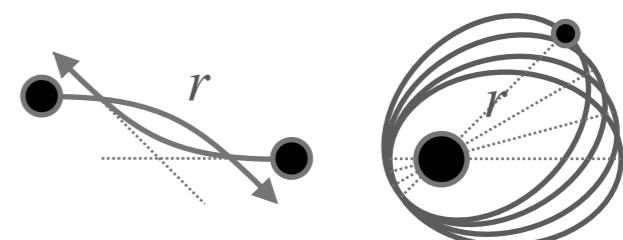
散乱する2つの粒子の運動量移行 q は連星間の距離 r に対応している。

古典極限は距離 r を一定、すなわち q ではなく q/\hbar を一定にして $\hbar \rightarrow 0$ とすべき。

これにより上のカウンティングが崩れ、ループからも考慮すべき寄与が出る。



$$|q| \sim \hbar/r$$



トークの構成

物理パート

1. アインシュタイン方程式とは？
2. post-Newtonian理論とは？post-Minkowskian理論とは？
3. post-Minkowskian積分計算のパイプライン：部分積分, 微分方程式, 境界条件

機械学習パート

1. normalizing flowとは？
2. normalizing flowを用いた数値積分パッケージ "i-flow"
3. i-flowのpost-Minkowskian積分への適用

要約 + a



POST-MINKOWSKIAN 積分: 部分積分恒等式 (IBP IDENTITIES)

- ループ計算においては、以下のようなファインマン積分が出る

例

$$I_{a_1 a_2; \alpha_1 \alpha_2; i_1 \dots i_5}^{(4\text{dim})(3\text{PM})}(q, \gamma) = \int_{l_1, l_2} \frac{\delta(l_1 \cdot u_{a_1}) \delta(l_2 \cdot u_{a_2})}{A_{1, \bar{a}_1}^{\alpha_1} A_{2, \bar{a}_2}^{\alpha_2} D_1^{i_1} \dots D_{i_5}^{i_5}}$$
$$\int_l = \int \frac{d^D l}{i\pi^{D/2}}, \quad D = 4 - 2\epsilon$$

(これは実際に3PMで現れるpost-Minkowskian積分 [Kaelin, Liu, Porto '20])

- しかし、全てが独立なわけではない。一部は部分積分によって関連付く

簡単な例

$$0 = \int_l \frac{\partial}{\partial l^\mu} \left[\frac{l^\mu}{(l^2)^2 (l - q)^2} \right] = \dots = -3 \int_l \frac{1}{(l^2)^2 (l - q)^2} - 2 \int_l \frac{1}{(l^2)^2 ((l - q)^2)^2}$$

- よって、部分積分で関連付かない、独立な基底 (master integrals) のみ考慮する

例 $I_{i_1 \dots i_5} = I_{12; 00; i_1 \dots i_5}^{(4\text{dim})(3\text{PM})}$ として、 $\vec{I} = \{I_{11111}, I_{11211}, I_{01101}, I_{11011}, I_{00211}, I_{00112}, I_{00111}\}$ が独立基底

$$u_1 = (1, 0, 0, 0), \quad u_2 = \gamma(1, \beta, 0, 0), \quad \bar{1} = 2, \quad \bar{2} = 1, \quad A_{1,\bar{a}_1} = l_1 \cdot u_{\bar{a}_1}, \quad A_{2,\bar{a}_2} = l_1 \cdot u_{\bar{a}_2}$$

► ルー $D_1 = l_1^2, \quad D_2 = l_2^2, \quad D_3 = (l_1 + l_2 - q)^2, \quad D_4 = (l_1 - q)^2, \quad D_5 = (l_2 - q)^2$

例

$$I_{a_1 a_2; \alpha_1 \alpha_2; i_1 \dots i_5}^{(4\text{dim})(3\text{PM})}(q, \gamma) = \int_{l_1, l_2} \frac{\delta(l_1 \cdot u_{a_1}) \delta(l_2 \cdot u_{a_2})}{A_{1,\bar{a}_1}^{\alpha_1} A_{2,\bar{a}_2}^{\alpha_2} D_1^{i_1} \dots D_{i_5}^{i_5}}$$

$$\int_l = \int \frac{d^D l}{i\pi^{D/2}}, \quad D = 4 - 2\epsilon$$

(これは実際に3PMで現れるpost-Minkowskian積分 [Kaelin, Liu, Porto '20])

► しかし、全てが独立なわけではない。一部は部分積分によって関連付く

簡単な例 $0 = \int_l \frac{\partial}{\partial l^\mu} \left[\frac{l^\mu}{(l^2)^2 (l - q)^2} \right] = \dots = -3 \int_l \frac{1}{(l^2)^2 (l - q)^2} - 2 \int_l \frac{1}{(l^2)^2 ((l - q)^2)^2}$

► よって、部分積分で関連付かない、独立な基底 (master integrals) のみ考慮する

例 $I_{i_1 \dots i_5} = I_{12;00;i_1 \dots i_5}^{(4\text{dim})(3\text{PM})}$ として、 $\vec{I} = \{I_{11111}, I_{11211}, I_{01101}, I_{11011}, I_{00211}, I_{00112}, I_{00111}\}$ が独立基底

POST-MINKOWSKIAN 積分: 部分積分恒等式 (IBP IDENTITIES)

- ループ計算においては、以下のようなファインマン積分が出る

例

$$I_{a_1 a_2; \alpha_1 \alpha_2; i_1 \dots i_5}^{(4\text{dim})(3\text{PM})}(q, \gamma) = \int_{l_1, l_2} \frac{\delta(l_1 \cdot u_{a_1}) \delta(l_2 \cdot u_{a_2})}{A_{1, \bar{a}_1}^{\alpha_1} A_{2, \bar{a}_2}^{\alpha_2} D_1^{i_1} \dots D_{i_5}^{i_5}}$$
$$\int_l = \int \frac{d^D l}{i\pi^{D/2}}, \quad D = 4 - 2\epsilon$$

(これは実際に3PMで現れるpost-Minkowskian積分 [Kaelin, Liu, Porto '20])

- しかし、全てが独立なわけではない。一部は部分積分によって関連付く

簡単な例

$$0 = \int_l \frac{\partial}{\partial l^\mu} \left[\frac{l^\mu}{(l^2)^2 (l - q)^2} \right] = \dots = -3 \int_l \frac{1}{(l^2)^2 (l - q)^2} - 2 \int_l \frac{1}{(l^2)^2 ((l - q)^2)^2}$$

- よって、部分積分で関連付かない、独立な基底 (master integrals) のみ考慮する

例 $I_{i_1 \dots i_5} = I_{12; 00; i_1 \dots i_5}^{(4\text{dim})(3\text{PM})}$ として、 $\vec{I} = \{I_{11111}, I_{11211}, I_{01101}, I_{11011}, I_{00211}, I_{00112}, I_{00111}\}$ が独立基底

POST-MINKOWSKIAN 積分: 微分方程式

- 独立な基底を選んだとしよう。これらは外部パラメータを含む。

例 連星の一方から見た他方の相対論的 γ ファクター $\gamma = u_1 \cdot u_2$

- 外部パラメータを含んだまま解析的に積分を実行するのは難しい。そこで普通、外部パラメータに関する偏微分方程式を立てる

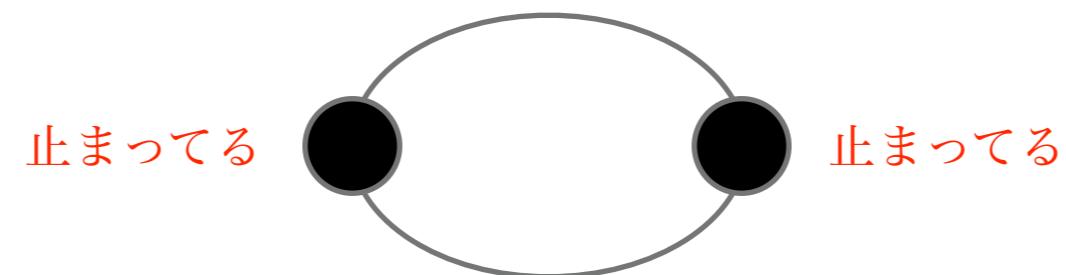
$$\partial_x \vec{I}(x, \epsilon) = M(x, \epsilon) \vec{I}(x, \epsilon) \quad \gamma = \frac{x^2 + 1}{2x}$$

- その際、次元に現れる ϵ がoverallにしか付かないような「良い基底」の取り方があると指摘された [Henn '13]

$$\partial_x \vec{I}_{\text{new}}(x, \epsilon) = \epsilon M_{\text{new}}(x) \vec{I}_{\text{new}}(x, \epsilon)$$

POST-MINKOWSKIAN 積分: 境界条件

- さて、この微分方程式の境界条件は $\gamma = 1$ (連星がお互いに止まっている状況)



- 止まっているので時間方向 (~ エネルギー方向, l^0 方向) の積分は無視できて、結局3次元の積分が境界条件として残る。これを static integral と言う。

$$I_{\pm; \alpha_1, \alpha_2; \nu_1 \dots \nu_5}^{(2PM)} = e^{\epsilon \gamma_E} \int_l \frac{(\mathbf{q}^2)^{\nu_1 + \nu_2 + \alpha/2 - d/2}}{(\pm l^z)^\alpha [l^2]^{\nu_1} [(l - \mathbf{q})^2]^{\nu_2}}$$

$$I_{\pm\pm; \alpha_1, \alpha_2; \nu_1 \dots \nu_5}^{(3PM)} = e^{2\epsilon \gamma_E} \int_{l_1, l_2} \frac{(\mathbf{q}^2)^{\nu_1 + \dots + \nu_5 + (\alpha_1 + \alpha_2)/2 - d}}{(\pm l_1^z)^{\alpha_1} (\pm l_2^z)^{\alpha_2} [l_1^2]^{\nu_1} [l_2^2]^{\nu_2} [(l_{12} - \mathbf{q})^2]^{\nu_3} [(l_1 - \mathbf{q})^2]^{\nu_4} [(l_2 - \mathbf{q})^2]^{\nu_5}}$$

($I^{(4PM)}$, $I^{(5PM)}$ も同様, $\int_l = \int \frac{d^d l}{\pi^{d/2}}$, $l_{12} = l_1 + l_2$)

POST-MINKOWSKIAN 積分: ファインマン表示

- ファインマン積分は、実は $d = 3 - 2\epsilon$ 次元積分を直接扱わなくても良い簡単な例

$$I = \int \frac{d^d l}{\pi^{d/2}} \frac{(\mathbf{q}^2)^{2-d/2}}{l^2(l-\mathbf{q})^2}$$

$$= \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2 \delta(x_1 + x_2 - 1) \int \frac{d^d l}{\pi^{d/2}} \frac{(\mathbf{q}^2)^{2-d/2}}{[x_1 l^2 + x_2 (l - \mathbf{q})^2]^2}$$

うまく分母を「混ぜて」くれる
 x_1, x_2 を導入 (上の式に戻ることも示せる)

$$= \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2 \delta(x_1 + x_2 - 1) \int \frac{d^d l}{\pi^{d/2}} \frac{(\mathbf{q}^2)^{2-d/2}}{[(l - x_2 \mathbf{q})^2 + x_2(1 - x_2)\mathbf{q}^2]^2}$$

分母を l について平方完成

$$\sim \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2 \delta(x_1 + x_2 - 1) \int_0^\infty \frac{\tilde{l}^{d-1} d\tilde{l}}{[\tilde{l}^2 + x_2(1 - x_2)]^2}$$

実数 x_1, x_2 の積分

\tilde{l} を積分するとただの x_1, x_2 の関数

(専門的には Symanzik polynomial \mathcal{U}, \mathcal{F} の関数 $\frac{\mathcal{U}(x_1, x_2)^{n_u}}{\mathcal{F}(x_1, x_2)^{n_f}}$)

- 以下、数値計算に投げるときも、この x_1, x_2, \dots の積分にして投げる



ここまでまとめ：連星系の解析に多次元積分（ファインマン積分）が出てくる

トークの構成

物理パート

1. アインシュタイン方程式とは？
2. post-Newtonian理論とは？post-Minkowskian理論とは？
3. post-Minkowskian積分計算のパイプライン：部分積分, 微分方程式, 境界条件

機械学習パート

1. normalizing flowとは？
2. normalizing flowを用いた数値積分パッケージ "i-flow"
3. i-flowのpost-Minkowskian積分への適用

要約 + a



NORMALIZING FLOW

- ▶ 話は変わり、以下機械学習の話
- ▶ normalizing flowとは?: 解析的に書くことが難しい分布関数を、解析的に書ける分布関数からの(複数回の)変数変換で書く手法

[Dinh, Krueger, Bengio '15] [Rezende, Mohamed '15]
[Dinh, Sohl-Dickstein, Bengio '16]



- 元の分布関数を $P_0(\vec{x}_0)$ とし、変数変換 $\vec{x}_K = c_K(c_{K-1}(\cdots c_1(\vec{x}_0)))$ を考えよう
- 変換後の分布関数は

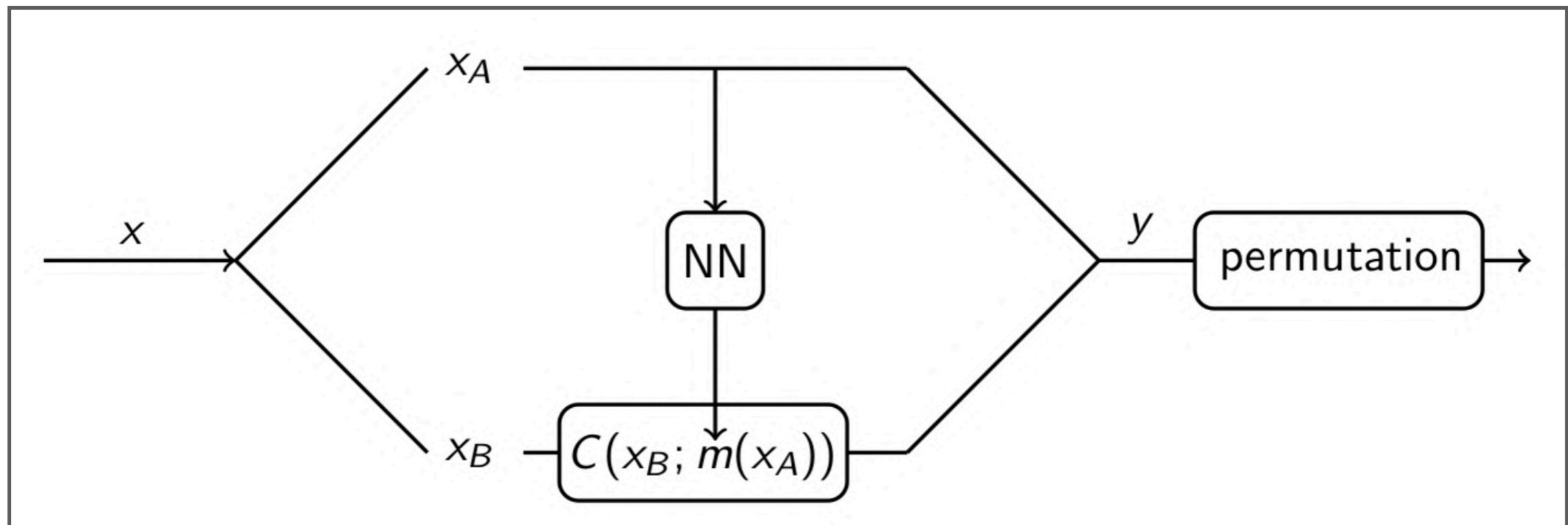
$$P_K(\vec{x}_K) = P_0(\vec{x}_0) \prod_{k=1}^K \left| \frac{\partial c_k(\vec{x}_{k-1})}{\partial \vec{x}_{k-1}} \right|^{-1} \quad \vec{x}_k = c_k(\vec{x}_{k-1}) \quad (k = 1, 2, \dots, K)$$

ヤコビアン

- ここに現れるヤコビアンの計算量を抑える仕組みが "coupling transform"

NORMALIZING FLOW

- coupling transform



NORMALIZING FLOW

► coupling transform

- 変数変換 $c(\vec{x})$ に着目する。まず、入力 \vec{x} を2つに分けてみよう

$$\vec{x}_A = x_1, \dots, x_d, \quad \vec{x}_B = x_{d+1}, \dots, x_D$$

- このうち \vec{x}_A には何もせず、 \vec{x}_B の方に \vec{x}_A 依存の変換をかませてみよう

$$c(\vec{x}) = \begin{cases} \vec{x}'_A = \vec{x}_A \\ \vec{x}'_B = C(\vec{x}_B; m(\vec{x}_A)) \end{cases}$$

- さて、ヤコビアンはどうなるだろうか？

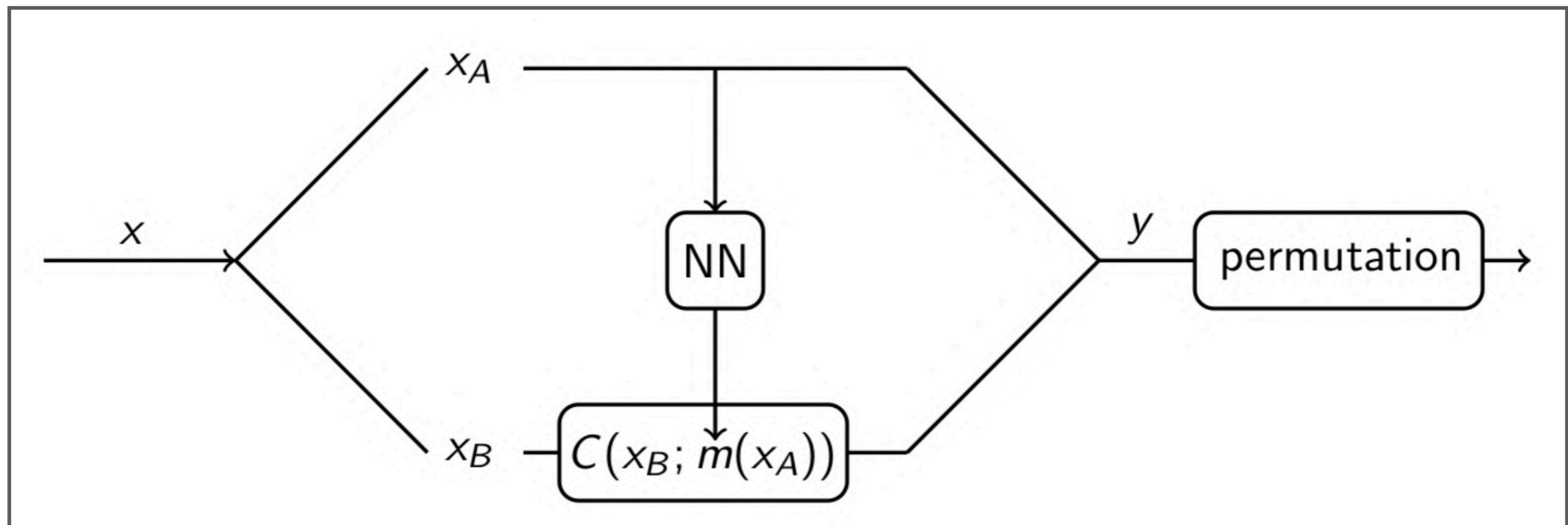
$$\left| \frac{\partial c(\vec{x})}{\partial \vec{x}} \right|^{-1} = \left| \begin{pmatrix} \vec{1} & \textcircled{0} \\ \textcircled{\frac{\partial C}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial \vec{x}_A}} & \frac{\partial C}{\partial \vec{x}_B} \end{pmatrix} \right|^{-1} = \left| \frac{\partial C(\vec{x}_B; m(\vec{x}_A))}{\partial \vec{x}_B} \right|^{-1}$$

0のおかげで m の微分が消える

- そこで、 C には解析的に書ける簡単な関数を取り、 m をneural networkで訓練する

NORMALIZING FLOW

- coupling transform



トークの構成

物理パート

1. アインシュタイン方程式とは？
2. post-Newtonian理論とは？post-Minkowskian理論とは？
3. post-Minkowskian積分計算のパイプライン：部分積分, 微分方程式, 境界条件

機械学習パート

1. normalizing flowとは？
2. normalizing flowを用いた数値積分パッケージ "i-flow"
3. i-flowのpost-Minkowskian積分への適用

要約 + a



IMPORTANCE SAMPLING

- Monte-Carlo積分におけるimportance sampling

- 積分 $I = \int_{\Omega} f(x) dx$ を数値的に評価したいとする

- ナイーブなMonte-Carloサンプリングだと、エラーは

$$I \simeq \frac{V}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \equiv V \langle f \rangle_x \quad \rightarrow \quad \sigma_I \simeq V \sqrt{\frac{\langle f^2 \rangle_x - \langle f \rangle_x^2}{N-1}}$$

- 変数変換により $dG(x) = g(x)dx$ となる $G(x)$ を取って同じことをすると、

$$I = \int_{\Omega} \frac{f(x)}{g(x)} dG(x) \simeq V \langle f/g \rangle_G \quad \rightarrow \quad \sigma_I \simeq V \sqrt{\frac{\langle (f/g)^2 \rangle_G - \langle f/g \rangle_G^2}{N-1}}$$

- もし $g(x) = f(x)$ に取れればエラーは0だが、現実には我々は $f(x)$ を知らない。

そこで、 $g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$ が $f(x)$ に「よく似る」ように $G(x)$ を構成する。

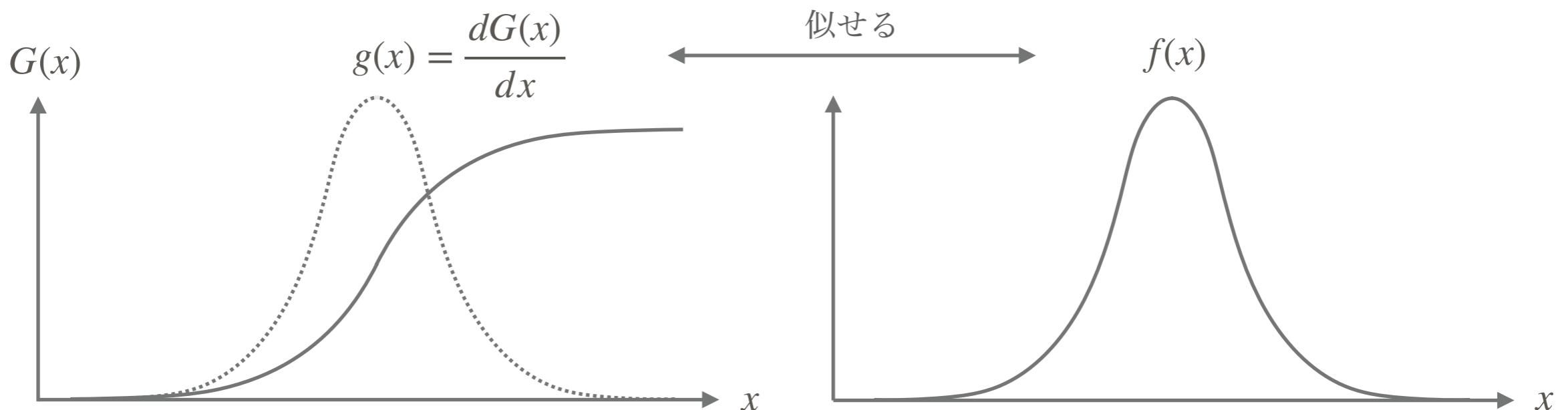
IMPORTANCE SAMPLING

- Monte-Carlo積分におけるimportance sampling

- 多変数の場合、 $g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$ はヤコビアン $g(\vec{x}) = \left| \frac{\partial \vec{G}(\vec{x})}{\partial \vec{x}} \right|$ となるため、

変換 $\vec{x} \rightarrow \vec{G}(\vec{x})$ のヤコビアンが簡単に計算できることが重要。

- そこでnormalizing flowが使える。



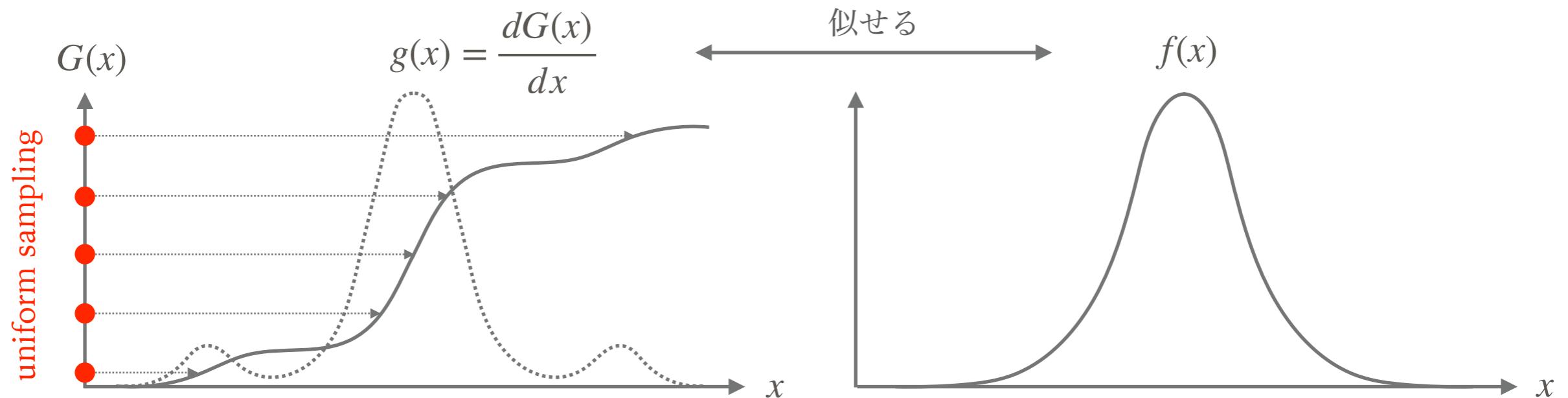
IMPORTANCE SAMPLING

- Monte-Carlo積分におけるimportance sampling

- 多変数の場合、 $g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$ はヤコビアン $g(\vec{x}) = \left| \frac{\partial \vec{G}(\vec{x})}{\partial \vec{x}} \right|$ となるため、

変換 $\vec{x} \rightarrow \vec{G}(\vec{x})$ のヤコビアンが簡単に計算できることが重要。

- そこでnormalizing flowが使える。



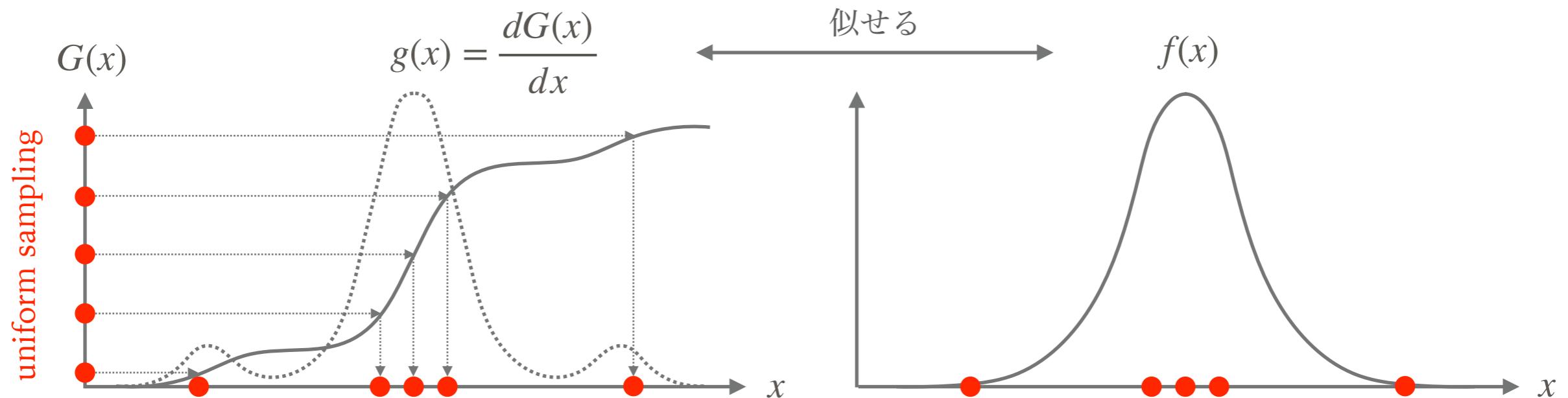
IMPORTANCE SAMPLING

- Monte-Carlo積分におけるimportance sampling

- 多変数の場合、 $g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$ はヤコビアン $g(\vec{x}) = \left| \frac{\partial \vec{G}(\vec{x})}{\partial \vec{x}} \right|$ となるため、

変換 $\vec{x} \rightarrow \vec{G}(\vec{x})$ のヤコビアンが簡単に計算できることが重要。

- そこでnormalizing flowが使える。



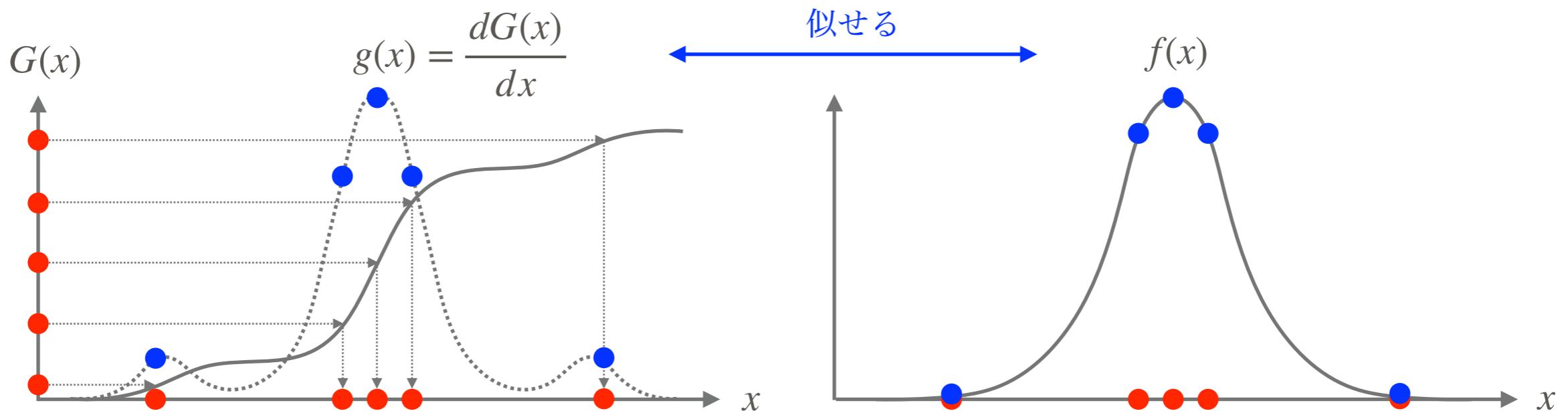
IMPORTANCE SAMPLING

- Monte-Carlo積分におけるimportance sampling

- 多変数の場合、 $g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$ はヤコビアン $g(\vec{x}) = \left| \frac{\partial \vec{G}(\vec{x})}{\partial \vec{x}} \right|$ となるため、

変換 $\vec{x} \rightarrow \vec{G}(\vec{x})$ のヤコビアンが簡単に計算できることが重要。

- そこでnormalizing flowが使える。



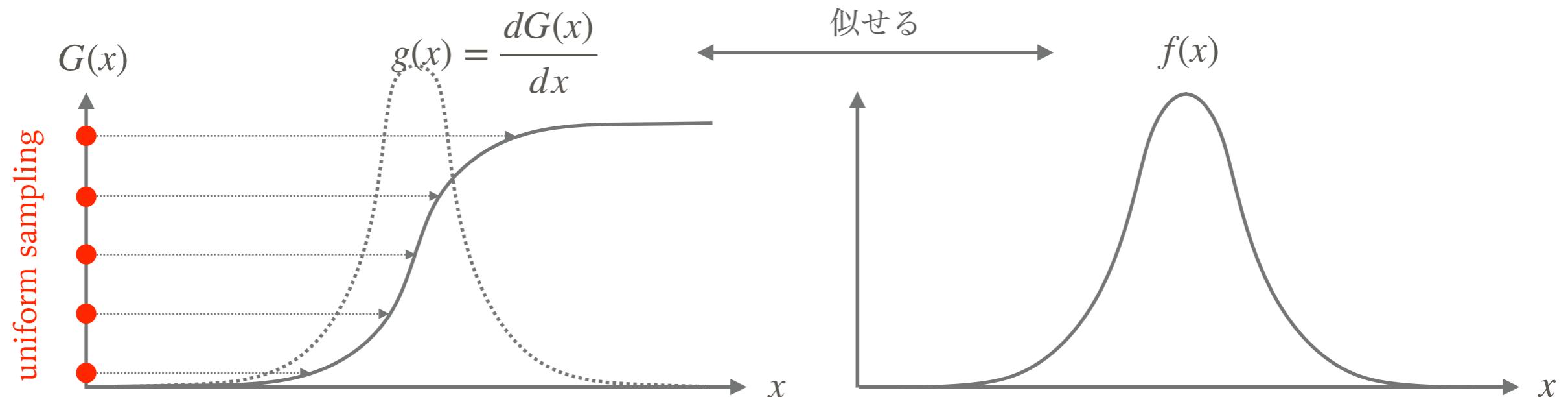
IMPORTANCE SAMPLING

- Monte-Carlo積分におけるimportance sampling

- 多変数の場合、 $g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$ はヤコビアン $g(\vec{x}) = \left| \frac{\partial \vec{G}(\vec{x})}{\partial \vec{x}} \right|$ となるため、

変換 $\vec{x} \rightarrow \vec{G}(\vec{x})$ のヤコビアンが簡単に計算できることが重要。

- そこでnormalizing flowが使える。



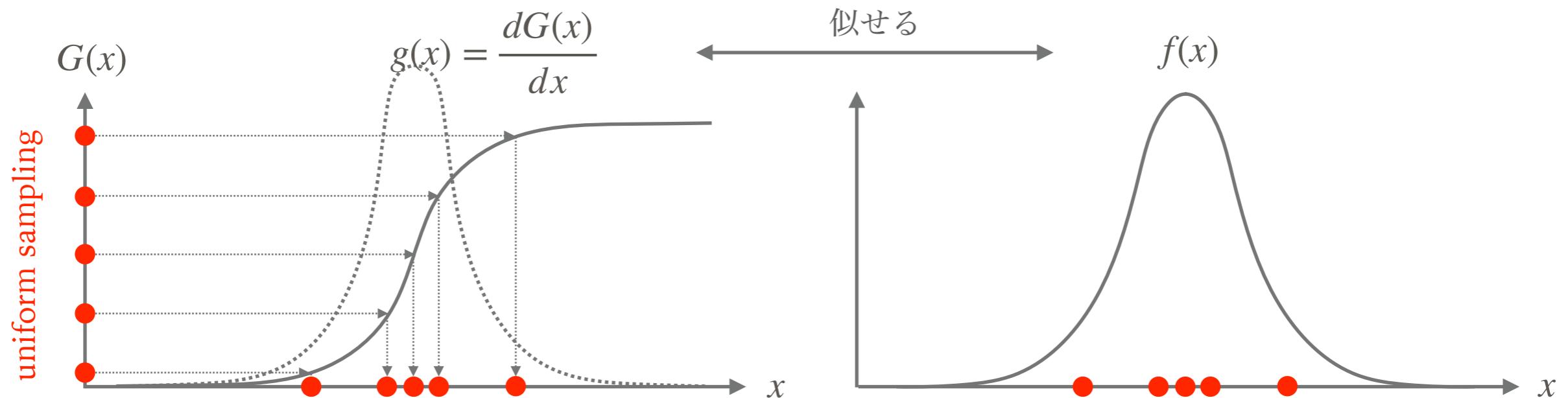
IMPORTANCE SAMPLING

- Monte-Carlo積分におけるimportance sampling

- 多変数の場合、 $g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$ はヤコビアン $g(\vec{x}) = \left| \frac{\partial \vec{G}(\vec{x})}{\partial \vec{x}} \right|$ となるため、

変換 $\vec{x} \rightarrow \vec{G}(\vec{x})$ のヤコビアンが簡単に計算できることが重要。

- そこでnormalizing flowが使える。



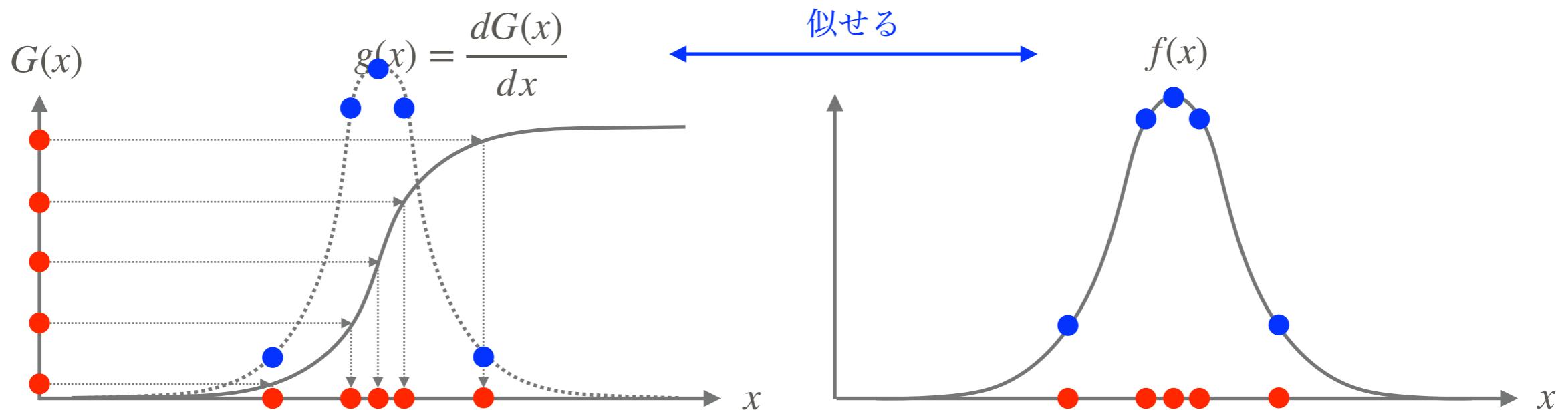
IMPORTANCE SAMPLING

- Monte-Carlo積分におけるimportance sampling

- 多変数の場合、 $g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$ はヤコビアン $g(\vec{x}) = \left| \frac{\partial \vec{G}(\vec{x})}{\partial \vec{x}} \right|$ となるため、

変換 $\vec{x} \rightarrow \vec{G}(\vec{x})$ のヤコビアンが簡単に計算できることが重要。

- そこでnormalizing flowが使える。



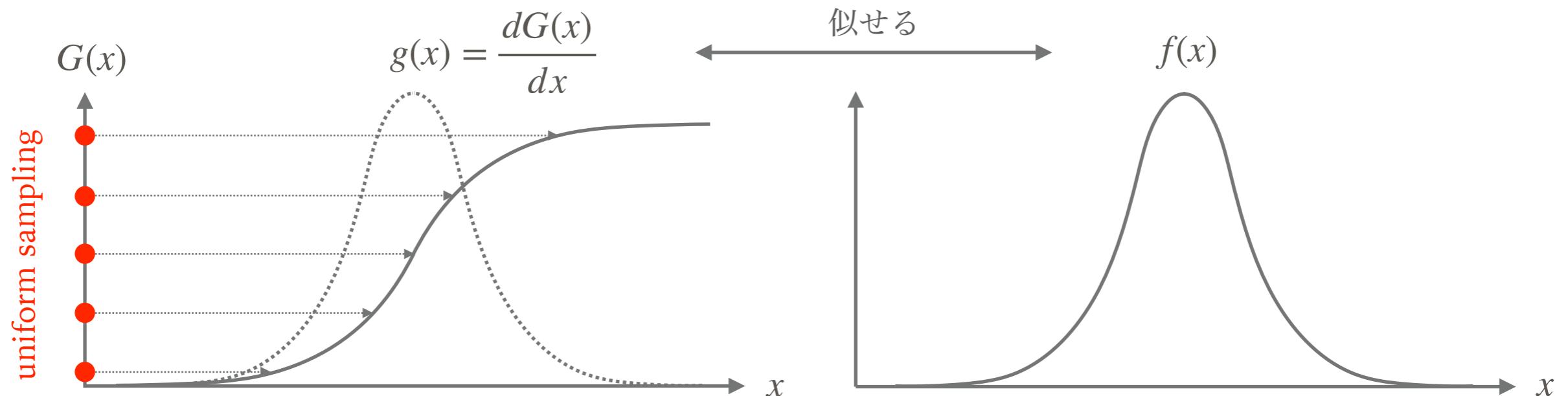
IMPORTANCE SAMPLING

- Monte-Carlo積分におけるimportance sampling

- 多変数の場合、 $g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$ はヤコビアン $g(\vec{x}) = \left| \frac{\partial \vec{G}(\vec{x})}{\partial \vec{x}} \right|$ となるため、

変換 $\vec{x} \rightarrow \vec{G}(\vec{x})$ のヤコビアンが簡単に計算できることが重要。

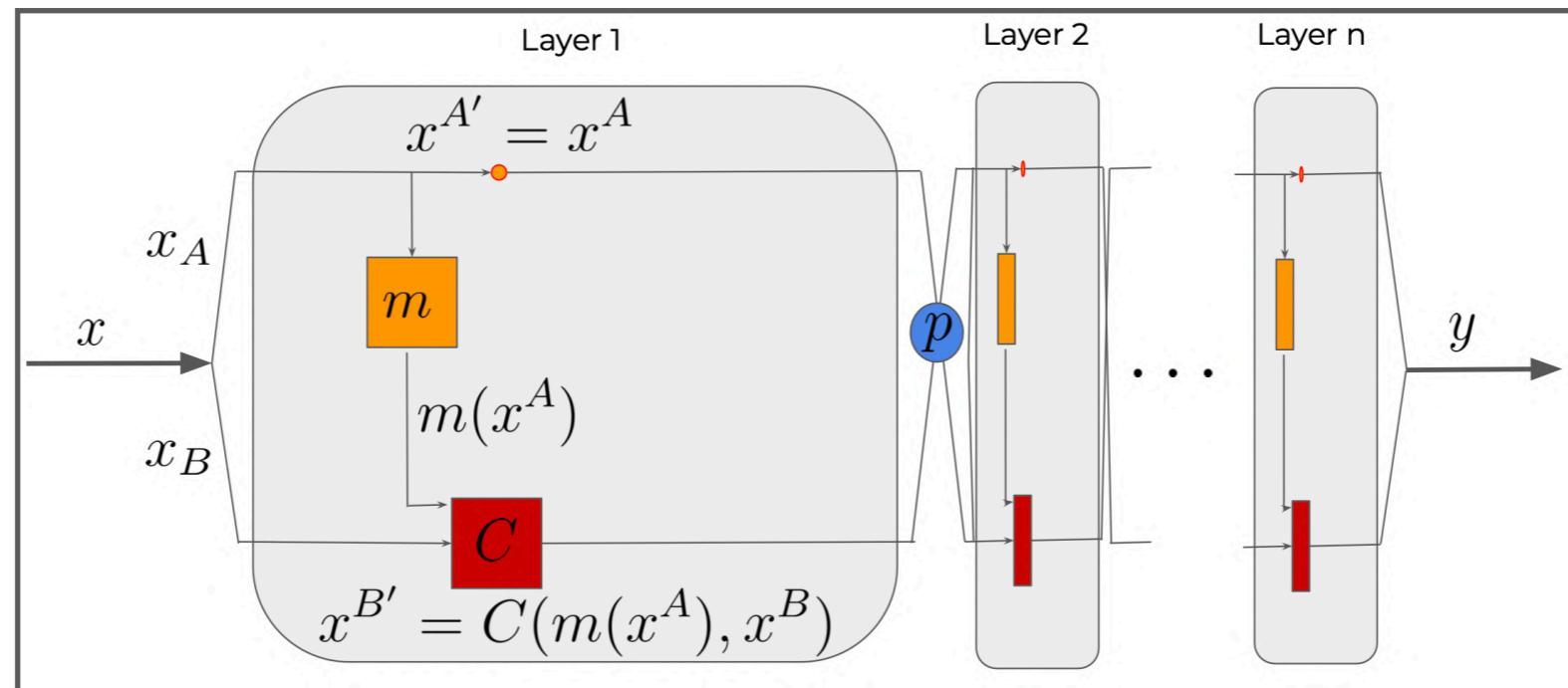
- そこでnormalizing flowが使える。



I-FLOW

[Gao, Isaacson, Krause '20]

- i-flow: normalizing flowを用いたMonte-Carlo積分パッケージ。言語はpython。



- layer数: 被積分関数のcorrelationを捉えるのに必要な最小数が自動で設定される
(積分次元 D に対し layer数 = D ($D < 4$), Floor $[\log_2 D]$ ($D \geq 5$)、Sec.IIIA参照)
- neural network: デフォルトで loss function = exponential, optimizer = ADAM
- C は piecewise linear, piecewise quadratic, piecewise rational quadratic spline から選べる

数値計算の必要性

- ▶ 「概要」で述べたように、post-Minkowskianの高いオーダーになると、フルの解析解が手に入らない可能性が大きい
- ▶ しかし、 ϵ 展開の各係数を数値的に知れれば、PSLQアルゴリズムにより解析的な表式を特定できるかもしれない

PSLQ Algorithm

[Bailey&Ferguson '91] [Bailey&Broadhurst '01]

An algorithm which can be used to find **integer relations** between real numbers x_1, \dots, x_n such that

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0,$$

[Wolfram mathworld]

- ▶ 例えば $I = \frac{c_2}{\epsilon^2} + \frac{c_1}{\epsilon} + c_0 \epsilon^0 + \dots$ で、 $c_0 = 38.5749\dots$ と数値的にわかっていて、かつ $c_0 = a_1\pi^2 + a_2\pi\ln 2 + a_3\ln^2 2$ と知っている場合、 $(a_1, a_2, a_3) = (3, 5, -4)$ と当てる

```
FindIntegerNullVector[{Pi^2, Pi*Log[2], Log[2]^2, 38.574931599113280810}]
```

```
{-3, -5, 4, 1}
```

セクター分解

- さて、ファインマン積分をi-flowに投げるのだが、実はこの積分は結構凶悪

先程の例

$$I = \int \frac{d^d l}{\pi^{d/2}} \frac{(\mathbf{q}^2)^{2-d/2}}{l^2(l-\mathbf{q})^2} = \dots \sim \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2 \delta(x_1 + x_2 - 1) \frac{\mathcal{U}(x_1, x_2)^{n_u}}{\mathcal{F}(x_1, x_2)^{n_f}}$$

- どう凶悪なのか？ [Heinrich '08]

例

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{x^{-1/2} y^{1/2}}{x + (1-x)y}$$

$\left\{ \begin{array}{l} x \text{ にとって: } y \sim 0 \text{ のとき, } x \rightarrow 0 \text{ が発散する} \\ y \text{ にとって: } x \sim 0 \text{ のとき, } y \rightarrow 0 \text{ が発散する} \\ \rightarrow \text{ singularityがoverlapしている} \end{array} \right.$

- そこでセクター分解 (sector decomposition) をする

- (1) $1 = \Theta(x-y) + \Theta(y-x)$ を掛け、① $x > y$ セクターと ② $x < y$ セクターに分解
- (2) それぞれについて、① $y = xt$ ② $x = yt$ と変換すると、singularity overlapを除ける

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 dt \frac{t^{1/2}}{1 + (1-x)t} + \int_0^1 dy \int_0^1 dt \frac{t^{-1/2}}{1 + (1-y)t}$$

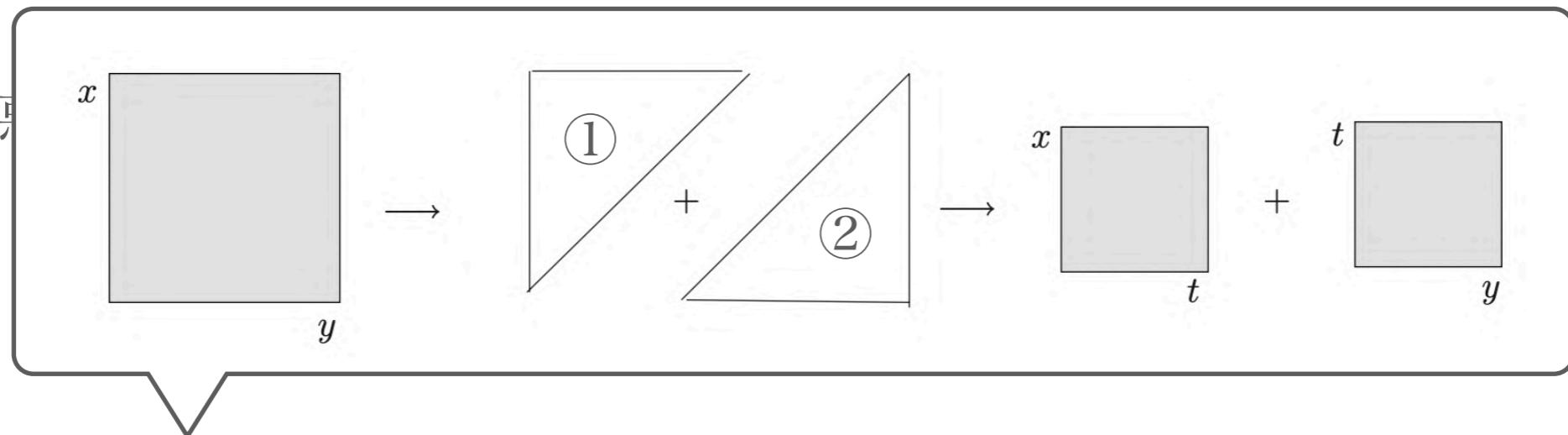
セクター分解

- さて、ファインマン積分をi-flowに投げるのだが、実はこの積分は結構凶悪

先程の例

$$I = \int \frac{d^d l}{\pi^{d/2}} \frac{(\mathbf{q}^2)^{2-d/2}}{l^2(l-\mathbf{q})^2} = \dots \sim \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2 \delta(x_1 + x_2 - 1) \frac{\mathcal{U}(x_1, x_2)^{n_u}}{\mathcal{F}(x_1, x_2)^{n_f}}$$

- どう凶悪
例



- そこでセクター分解 (sector decomposition) をする

- (1) $1 = \Theta(x - y) + \Theta(y - x)$ を掛け、① $x > y$ セクターと ② $x < y$ セクターに分解
- (2) それについて、① $y = xt$ ② $x = yt$ と変換すると、singularity overlapを除ける

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 dt \frac{t^{1/2}}{1 + (1-x)t} + \int_0^1 dy \int_0^1 dt \frac{t^{-1/2}}{1 + (1-y)t}$$

数値計算のパイプライン

(最近ではpython版のpySecDecもある)

- セクター分解のためのコードはいくつかあるが、ここでは SecDec を用いる。
分解は ϵ 展開の各係数ごとに行われ、典型的に $\sim 10 - 200$ 程度のセクターが出る。
- まとめると、以下のようなパイプラインを構成する



- 比較対象として、最後の でスタンダードなMonte-Carloアルゴリズムである VEGASを用いた場合も用意する。どのような違いが予想されるか？
 - VEGASも分布関数をアップデートするが、その際、被積分関数のfactorizationを仮定している: $f(x_1, \dots, x_D) = f(x_1) \cdots f(x_D)$
 - i-flowの方が被積分関数のcorrelationを捉える能力が高いため、差が出るのでは？

トークの構成

物理パート

1. アインシュタイン方程式とは？
2. post-Newtonian理論とは？post-Minkowskian理論とは？
3. post-Minkowskian積分計算のパイプライン：部分積分, 微分方程式, 境界条件

機械学習パート

1. normalizing flowとは？
2. normalizing flowを用いた数値積分パッケージ "i-flow"
3. i-flowのpost-Minkowskian積分への適用

要約 + a



I-FLOWのPOST-MINKOWSKIAN積分への適用

- 試すファインマン積分は以下の通り: $\int_l = \int \frac{d^d l}{\pi^{d/2}}, \quad d = 3 - 2\epsilon, \quad l_{ij} = l_i + l_j, \quad -i0 \text{ implicit}$

3PM (2-loop)

$$I_{\pm\pm;\alpha_1,\alpha_2;\nu_1\cdots\nu_5}^{(3PM)} = e^{2\epsilon\gamma_E} \int_{l_1,l_2} \frac{(\mathbf{q}^2)^{\nu_1+\cdots+\nu_5+(\alpha_1+\alpha_2)/2-d}}{[\pm l_1^z]^{\alpha_1} [\pm l_2^z]^{\alpha_2} [l_1^2]^{\nu_1} [l_2^2]^{\nu_2} [(l_{12}-\mathbf{q})^2]^{\nu_3} [(l_1-\mathbf{q})^2]^{\nu_4} [(l_2-\mathbf{q})^2]^{\nu_5}}$$

4PM (3-loop)

$$I_{B0}^{(4PM)} = e^{3\epsilon\gamma_E} \int_{l_1,l_2,l_3} \frac{(\mathbf{q}^2)^{4-3d/2}}{[l_1^2][l_2^2][l_3^2][(l_{123}-\mathbf{q})^2]}$$

$$I_{B1(1)}^{(4PM)} = e^{3\epsilon\gamma_E} \int_{l_1,l_2,l_3} \frac{(\mathbf{q}^2)^{9/2-3d/2}}{[\pm l_3^z][l_1^2][l_2^2][l_3^2][(l_{123}-\mathbf{q})^2]}$$

$$I_{B1(2)}^{(4PM)} = e^{3\epsilon\gamma_E} \int_{l_1,l_2,l_3} \frac{(\mathbf{q}^2)^{9/2-3d/2}}{[\pm l_{23}^z][l_1^2][l_2^2][l_3^2][(l_{123}-\mathbf{q})^2]}$$

$$I_{B2(1)\pm}^{(4PM)} = e^{3\epsilon\gamma_E} \int_{l_1,l_2,l_3} \frac{(\mathbf{q}^2)^{5-3d/2}}{[\pm l_1^z][\pm l_2^z][l_1^2][l_2^2][l_3^2][(l_{123}-\mathbf{q})^2]}$$

$$I_{B2(2)\pm}^{(4PM)} = e^{3\epsilon\gamma_E} \int_{l_1,l_2,l_3} \frac{(\mathbf{q}^2)^{5-3d/2}}{[\pm l_1^z][\pm l_{12}^z][l_1^2][l_2^2][l_3^2][(l_{123}-\mathbf{q})^2]}$$

$$I_{B3(1)\pm\pm}^{(4PM)} = e^{3\epsilon\gamma_E} \int_{l_1,l_2,l_3} \frac{(\mathbf{q}^2)^{11-3d/2}}{[l_1^z][\pm l_{12}^z][\mp l_3^z][l_1^2][l_2^2][l_3^2][(l_{123}-\mathbf{q})^2]}$$

$$I_{B3(2)\pm\pm}^{(4PM)} = e^{3\epsilon\gamma_E} \int_{l_1,l_2,l_3} \frac{(\mathbf{q}^2)^{11-3d/2}}{[l_1^z][\pm l_2^z][\mp l_3^z][l_1^2][l_2^2][l_3^2][(l_{123}-\mathbf{q})^2]}$$

$$I_{C0}^{(4PM)} = e^{3\epsilon\gamma_E} \int_{l_1,l_2,l_3} \frac{(\mathbf{q}^2)^{5-3d/2}}{[l_1^2][l_2^2][l_3^2][(l_1-\mathbf{q})^2][(l_{23}-\mathbf{q})^2]}$$

$$I_{D0}^{(4PM)} = e^{3\epsilon\gamma_E} \int_{l_1,l_2,l_3} \frac{(\mathbf{q}^2)^{5-3d/2}}{[l_1^2][l_2^2][l_3^2][(l_{13}-\mathbf{q})^2][(l_{23}-\mathbf{q})^2]}$$

$$I_{D1}^{(4PM)} = e^{3\epsilon\gamma_E} \int_{l_1,l_2,l_3} \frac{(\mathbf{q}^2)^{11/2-3d/2}}{[\pm l_3^z][l_1^2][l_2^2][l_3^2][(l_{13}-\mathbf{q})^2][(l_{23}-\mathbf{q})^2]}$$

I-FLOWのPOST-MINKOWSKIAN積分への適用

- 試すファインマン積分は以下の通り: $\int_l = \int \frac{d^d l}{\pi^{d/2}}, \quad d = 3 - 2\epsilon, \quad l_{ij} = l_i + l_j, \quad -i0 \text{ implicit}$

5PM (4-loop)

$$I_{M0}^{(5PM)} = e^{4\epsilon\gamma_E} \int_{l_1, l_2, l_3, l_4} \frac{(\mathbf{q}^2)^{5-2d}}{[l_1^2][l_2^2][l_3^2][l_4^2][(l_{1234} - \mathbf{q})^2]}$$

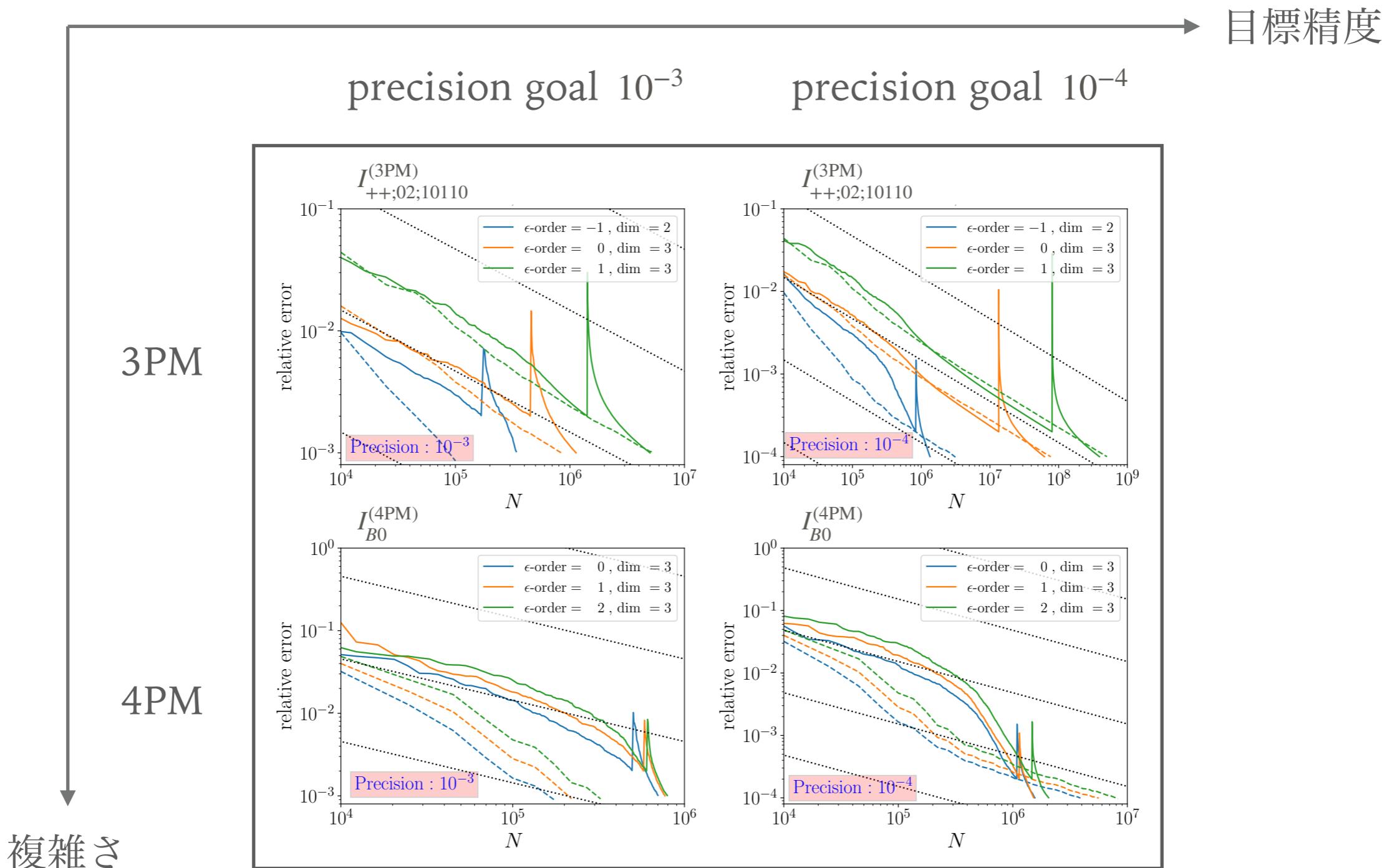
$$I_{M1}^{(5PM)} = e^{4\epsilon\gamma_E} \int_{l_1, l_2, l_3, l_4} \frac{(\mathbf{q}^2)^{11/2-2d}}{[\pm l_1^z][l_1^2][l_2^2][l_3^2][l_4^2][(l_{1234} - \mathbf{q})^2]}$$

$$I_{M2(1)\pm}^{(5PM)} = e^{4\epsilon\gamma_E} \int_{l_1, l_2, l_3, l_4} \frac{(\mathbf{q}^2)^{6-2d}}{[l_1^z][\pm l_2^z][l_1^2][l_2^2][l_3^2][l_4^2][(l_{1234} - \mathbf{q})^2]}$$

$$I_{M2(2)\pm}^{(5PM)} = e^{4\epsilon\gamma_E} \int_{l_1, l_2, l_3, l_4} \frac{(\mathbf{q}^2)^{6-2d}}{[l_1^z][\pm l_2^z][l_1^2][l_2^2][l_3^2][l_4^2][(l_{1234} - \mathbf{q})^2]}$$

$$I_{M4\pm\pm\pm}^{(5PM)} = e^{4\epsilon\gamma_E} \int_{l_1, l_2, l_3, l_4} \frac{(\mathbf{q}^2)^{7-2d}}{[l_1^z][\pm l_2^z][\pm l_{12}^z][\mp l_{123}^z][l_1^2][l_2^2][l_3^2][l_4^2][(l_{1234} - \mathbf{q})^2]}$$

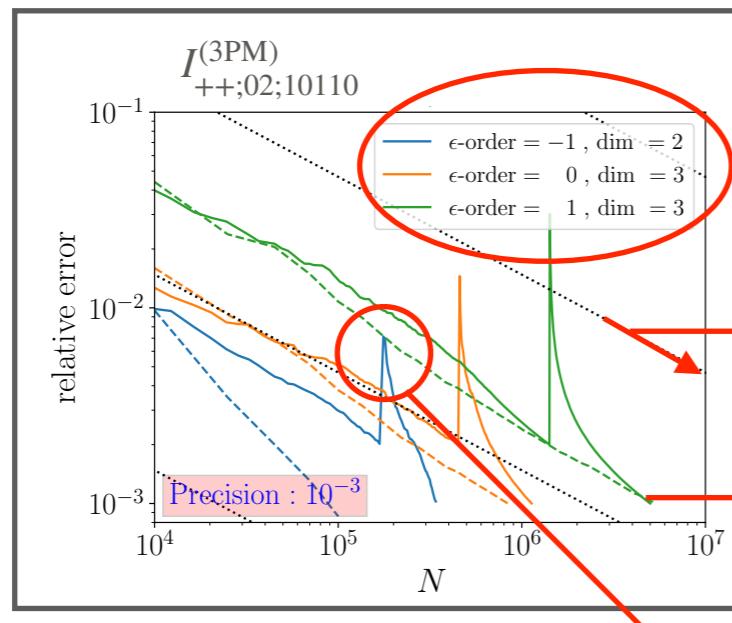
結果



結果

3PM

precision goal 10^{-3}



ϵ 展開の各オーダーについて、ファインマン積分の変数の次元

Monte-Carlo積分のナイーブなスケーリング $\propto 1/\sqrt{N}$

実線: i-flow, 点線: VEGAS

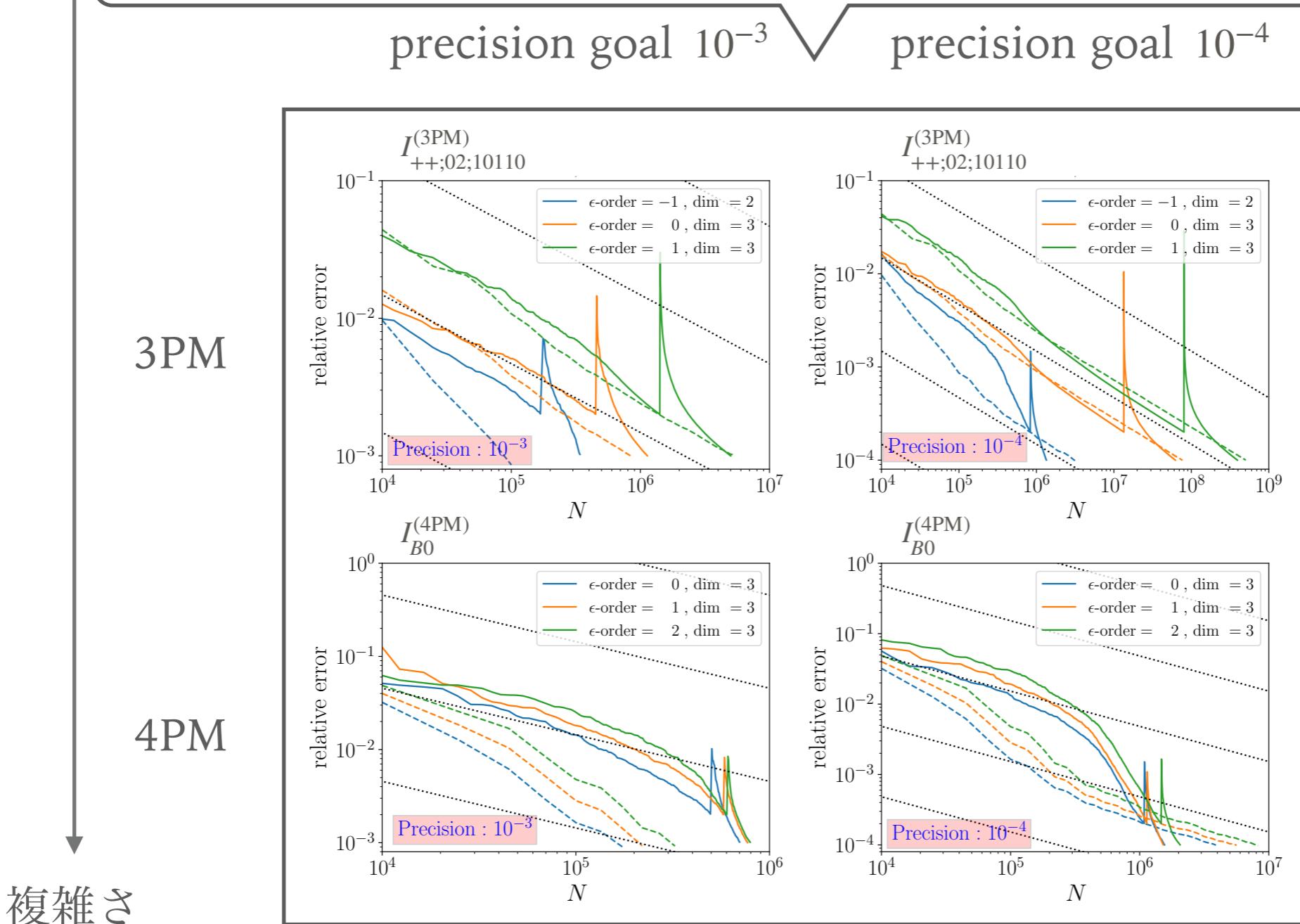
burn-inプロセス: i-flowについて、 $g(x)$ が $f(x)$ に十分近付く前に蓄えたsampling pointが
積分の最終結果にバイアスをもたらす傾向があるので、目標精度の半分に
達した時点でsampling pointを一旦捨てた (訓練したneural networkの構成はそのまま)

結果

比較的簡単な積分ではVEGASが早く目標精度に到達しがちだが、

積分の複雑さ・目標精度が上がると、機械学習を用いたi-flowの方が良い結果を出しがち

度



結果

3PM

ϵ -order	Dim	VEGAS ($\sigma = 10^{-3}$)	i-flow ($\sigma = 10^{-3}$)	VEGAS ($\sigma = 10^{-4}$)	i-flow ($\sigma = 10^{-4}$)
$K_{00;00111}$	-1	2	135 000	614 400	1 830 912
	0	2	220 000	819 200	2 314 240
	1	2	270 000	811 008	2 969 600
$K_{00;11011}$	0	3	270 000	778 240	8 036 352
	1	3	325 000	839 680	8 282 112
	2	3	760 000	937 984	8 740 864
$K_{01;00111}^{(\pm)}$	-1	2	135 000	454 656	1 146 880
	0	3	3 895 000	3 641 344	363 850 000
	1	3	30 520 000	26 243 072	-
$K_{01;11011}^{(\pm)}$	-1	3	450 000	757 760	24 240 128
	0	4	13 870 000	11 059 200	1 312 245 000
	1	4	9 145 000	7 147 520	865 825 000
$K_{01;10110}^{(\pm)}$	-1	2	70 000	208 896	1 019 904
	0	3	220 000	450 560	2 867 200
	1	3	385 000	528 384	2 887 680
$K_{11;00111}^{(+-)}$	-2	2	70 000	245 760	1 130 496
	-1	4	1 150 000	1 306 624	108 675 000
	0	4	125 995 000	102 195 200	-
$K_{11;00111}^{(++)}$	-2	2	70 000	196 608	1 011 712
	-1	4	450 000	536 576	24 129 536
	0	4	38 745 000	35 098 624	-
$K_{11;11011}^{(++)}$	-2	3	135 000	249 856	10 633 216
	-1	5	1 150 000	1 138 688	115 020 000
	0	5	826 000	7 741 440	802 300 000
$K_{02;10110}^{(\pm)}$	-1	2	100 000	385 024	1 048 576
	0	3	850 000	1 085 440	76 995 000
	1	3	5 400 000	5 062 656	505 120 000
					388 235 264

4PM

ϵ -order	Dim	VEGAS ($\sigma = 10^{-3}$)	i-flow ($\sigma = 10^{-3}$)	VEGAS ($\sigma = 10^{-4}$)	i-flow ($\sigma = 10^{-4}$)
B_0	0	3	175 000	659 456	3 895 000
	1	3	220 000	782 336	5 635 000
	2	3	325 000	888 832	8 260 000
B_1	-2	2	135 000	610 304	2 320 000
	-1	4	270 000	602 112	11 725 000
	0	4	760 000	1 024 000	51 475 000
B_2	-1	3	175 000	487 424	5 635 000
	0	4	270 000	655 360	11 385 000
	1	4	385 000	667 648	16 195 000
B_3^+	-2	3	135 000	442 368	4 300 000
	-1	5	1 750 000	1 777 664	165 760 000
	0	5	4 945 000	4 096 000	47 197 000
B_3^-	-2	3	175 000	528 384	4 300 000
	-1	5	1 620 000	1 757 184	154 375 000
	0	5	-	-	-
B_4^+	-2	3	100 000	405 504	2 800 000
	-1	5	595 000	1 007 616	47 950 000
	0	5	4 300 000	4 689 920	425 385 000
B_4^-	-2	3	135 000	438 272	3 700 000
	-1	5	325 000	569 344	26 775 000
	0	5	32 200 000	28 790 784	-
B_5^{++}	-3	3	100 000	376 832	4 725 000
	-2	6	1 495 000	1 650 688	141 010 000
	-1	6	59 670 000	49 348 608	-
C_0	-1	3	220 000	626 688	5 875 000
	0	4	325 000	774 144	14 625 000
	1	4	595 000	831 488	26 775 000
D_0	0	4	270 000	684 032	10 395 000
	1	4	385 000	790 528	14 245 000
	2	4	595 000	905 216	23 760 000
D_1	-1	4	520 000	827 392	39 370 000
	0	5	5 170 000	4 710 400	485 095 000
	1	5	7 975 000	6 582 272	714 220 000
					463 904 768

結果

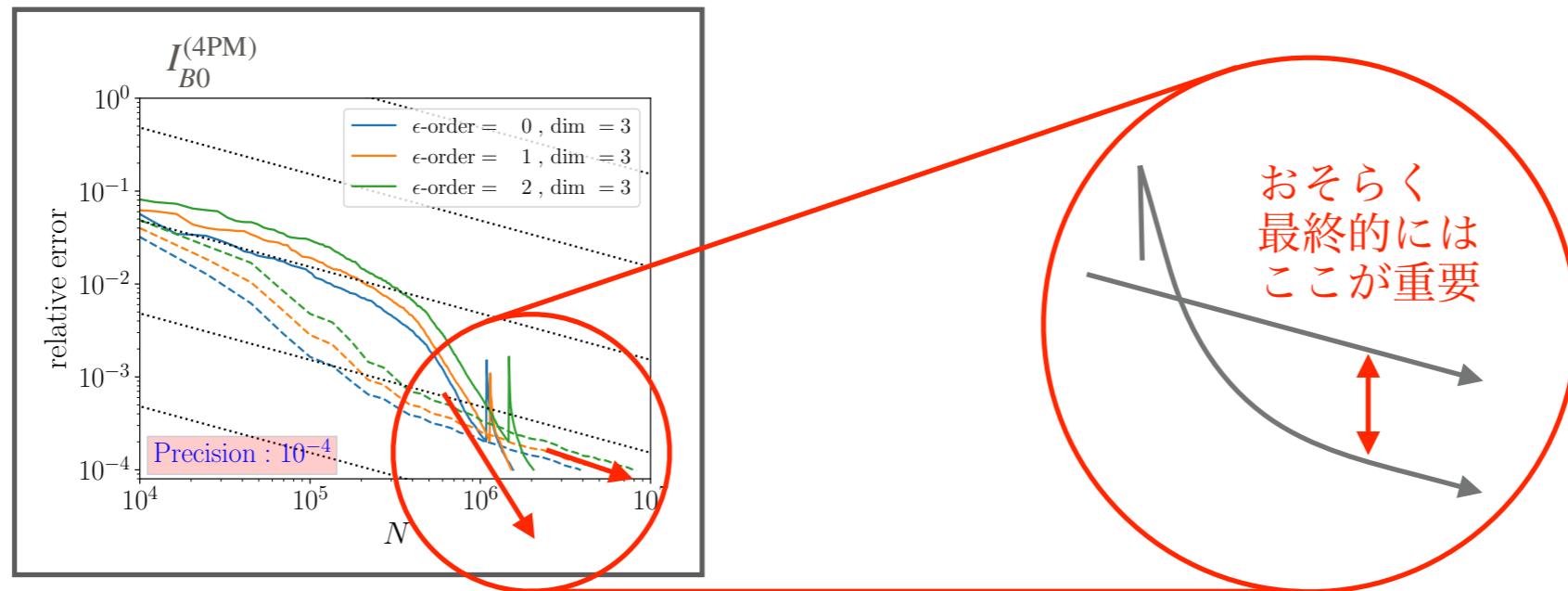
5PM

ϵ -order	Dim	VEGAS ($\sigma = 10^{-3}$)	i-flow ($\sigma = 10^{-3}$)	VEGAS ($\sigma = 10^{-4}$)	i-flow ($\sigma = 10^{-4}$)
M_0	-1	4	220 000	839 680	2 473 984
	0	4	325 000	741 376	2 252 800
	1	4	385 000	970 752	2 813 952
M_1	-1	5	4 725 000	5 513 216	467 635 000
	0	5	3 700 000	4 268 032	348 610 560
	1	5	2 170 000	2 498 560	176 631 808
M_2^-	-3	3	175 000	557 056	1 503 232
	-2	6	2 320 000	2 105 344	213 885 000
	-1	6	119 350 000	96 231 424	-
M_2^+	-3	3	175 000	581 632	1 839 104
	-2	6	2 635 000	2 314 240	248 845 000
	-1	6	27 295 000	22 687 744	-
M_3^+	-3	3	175 000	577 536	1 413 120
	-2	6	2 970 000	2 588 672	298 420 000
	-1	6	28 350 000	24 297 472	-
M_3^-	-3	3	175 000	561 152	1 470 464
	-2	6	1 045 000	1 048 576	86 950 000
	-1	6	23 760 000	20 635 648	-
M_4^{+++}	-4	4	175 000	471 040	2 490 368
	-3	8	1 885 000	1 835 008	181 570 000
	-2	8	18 270 000	13 864 960	-

解釈

4PM

precision goal 10^{-4}



異なるスケーリングについての解釈

- i-flowの急なカーブは、おそらく積分変数間の非自明なcorrelationを学んでいることに起因する。
- しかし、一旦correlationを学び切ると $\propto 1/\sqrt{N}$ に近いスケーリングに近付いていく傾向が見られた。
- それでも、スケーリングに乗った後の精度はVEGASより良い傾向が見られた。これはおそらくcorrelationを学んだことによる効果だと思われる。
- 最終的にこの「スケーリングに乗った後の精度の差」が重要で、積分の複雑さ・目標精度をより上げた場合、この差がさらに開くのでは？

まとめ

- ▶ LIGO/Virgoによる重力波初観測以来、連星系の運動をpost-Newtonian理論あるいはpost-Minkowskian理論で解析的に求める手法が発達している。
- ▶ PSLQによる係数の解析的同定を念頭に置いて、我々はpost-Minkowskian理論に現れるファインマン積分をMonte-Carlo積分によって数値評価した。
その際、機械学習を用いたアルゴリズムであるnormalizing flowを用い、従来のVEGASアルゴリズムと比較した。
- ▶ 大まかな傾向として、積分の複雑さ・目標精度が上がるほど前者のアルゴリズムが良い傾向が見られた。これはおそらくneural networkが被積分関数のcorrelationを学んでいることによる差異だと思われる。

$+ \alpha$

.....

- 以下雑談。ファインマン積分を計算していると、次のような恒等式が見つかる:

恒等式1

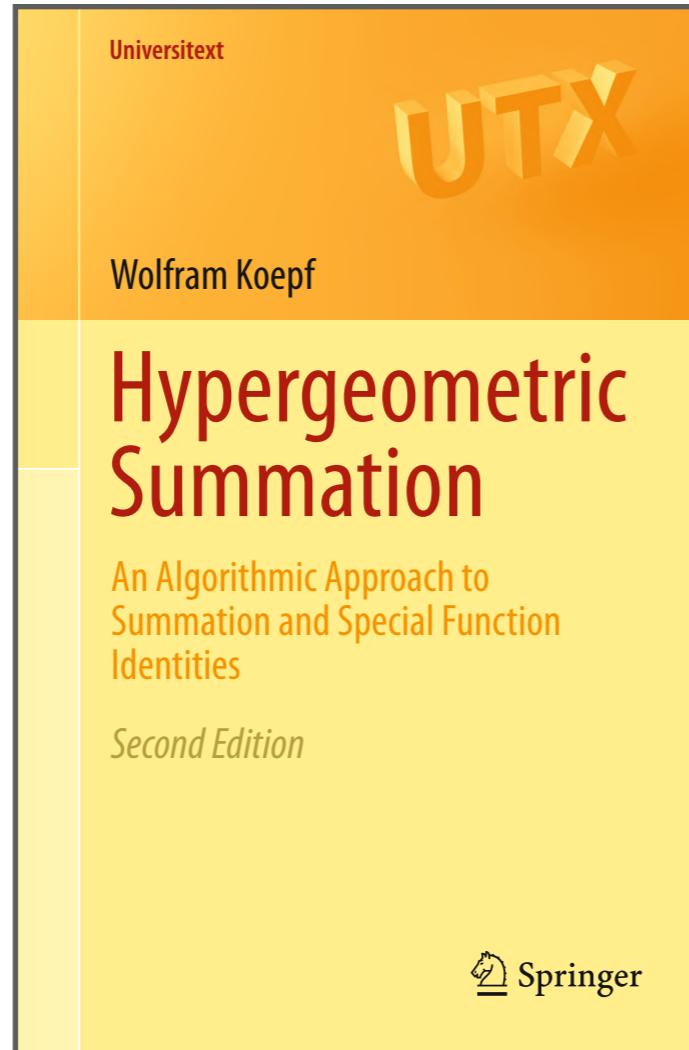
$$\begin{aligned} & {}_4F_3\left(\frac{1}{2}, 1, a-1, a-1; \frac{3}{2}, 3-a, ?; 1\right) - \frac{\sin(\pi a)}{6} \frac{\Gamma_{3-a}\Gamma_{a-3/2}^3\Gamma_?}{\Gamma_{a-1}^2\Gamma_{3a-9/2}} \\ &= \frac{2^{4a-7}}{\pi} \frac{\Gamma_{3-a}\Gamma_?^2}{\Gamma_{4a-5}} {}_3F_2\left(a-\frac{3}{2}, 2a-3, ?; a-\frac{1}{2}, 4a-6; 1\right). \end{aligned}$$

恒等式2

$$\begin{aligned} & \frac{2 \csc(\pi a) \Gamma_{a-\nu}}{\Gamma_{3-a}} {}_4F_3\left(\frac{1}{2}, 1, a-1, a-\nu; \frac{3}{2}, ?, 3a-3-\nu; 1\right) \\ & - \frac{\csc(\pi(a-\nu)) \Gamma_{a-1}}{\Gamma_{2-a+\nu}} {}_4F_3\left(\frac{1}{2}, 1, a-1, a-1; \frac{3}{2}, ?, 3a-3-\nu; 1\right) \\ &= - \frac{2^{2a-3} \pi^{1/2} \csc(\pi a) \csc(\pi(2a-\nu)) \Gamma_{a-3/2} \Gamma_{3a-3-\nu}}{(3-2a) \Gamma_{4a-5-\nu} \Gamma_?} \\ & \quad \times {}_3F_2\left(a-\frac{3}{2}, 2a-3, ?; a-\frac{1}{2}, 4a-5-\nu; 1\right) \\ & + \frac{2^{5-4a+2\nu} \pi^{3/2} \csc(\pi(a-\nu)) \csc(?) \Gamma_{3a-3-\nu}}{(1-2a+2\nu) \Gamma_{a-1} \Gamma_{2a-3/2-\nu} \Gamma_{3-2a+\nu}} \\ & \quad \times {}_3F_2\left(a-\frac{1}{2}-\nu, 2a-2-\nu, 2a-2-\nu; \frac{1}{2}+a-\nu, ?; 1\right) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\Gamma_{a-3/2}^2 \Gamma_?}{\Gamma_{a-1} \Gamma_?} \frac{\Gamma_{3a-3-\nu}}{.} \end{aligned}$$

$+\alpha$

- そしてどうやらhypergeometric functionの本にも載っていない...



Page	Theorem	Identity
2	Chu-V.	${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle 1\right) = \frac{(c-b)_a}{(c)_a} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$
3	Gauss	
9	Pfaff-S.	${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, -n \\ c, 1+a+b-c-n \end{matrix} \middle 1\right) = \frac{(c-a)_n (c-b)_n}{(c)_n (c-a-b)_n}$
9	Kummer	${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ 1+a-b \end{matrix} \middle -1\right) = \frac{(1+a)_b}{(1+a/2)_b} = \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a/2)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a/2-b)}$
11	Gauss	${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ (a+b+1)/2 \end{matrix} \middle \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma((a+b+1)/2)}{\Gamma((a+1)/2)\Gamma((b+1)/2)}$
11	Bailey	${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, 1-a \\ c \end{matrix} \middle \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(c/2)\Gamma((a+1)/2)}{\Gamma((a+c)/2)\Gamma((1-a+c)/2)}$
13	Dixon	${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ 1+a-b, 1+a-c \end{matrix} \middle 1\right) = \frac{(1+a)_{-c} (1+a/2-b)_{-c}}{(1+a/2)_{-c} (1+a-b)_{-c}}$ $= \frac{\Gamma(1+a/2)\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+a/2-b-c)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a/2-b)\Gamma(1+a/2-c)\Gamma(1+a-b-c)}$
16	Watson	${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ (a+b+1)/2, 2c \end{matrix} \middle 1\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1+2c}{2})\Gamma(\frac{1+a+b}{2})\Gamma(\frac{1-a-b+2c}{2})}{\Gamma(\frac{1+a}{2})\Gamma(\frac{1+b}{2})\Gamma(\frac{1-a+2c}{2})\Gamma(\frac{1-b+2c}{2})}$
16	Whipple	${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, 1-a, c \\ e, 1+2c-e \end{matrix} \middle 1\right) = \frac{\pi 2^{1-2c} \Gamma(e)\Gamma(1+2c-e)}{\Gamma(\frac{a+\epsilon}{2})\Gamma(\frac{a+1+2c-\epsilon}{2})\Gamma(\frac{1-a+\epsilon}{2})\Gamma(\frac{2+2c-a-\epsilon}{2})}$
26	Dougall	${}_7F_6\left(\begin{matrix} a, 1+a/2, b, c, d, 1+2a-b-c-d+n, -n \\ a/2, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, b+c+d-a-n, 1+a+n \end{matrix} \middle 1\right)$ $= \frac{(1+a)_n (1+a-b-c)_n (1+a-b-d)_n (1+a-c-d)_n}{(1+a-b)_n (1+a-c)_n (1+a-d)_n (1+a-b-c-d)_n}$
25	Dougall	${}_5F_4\left(\begin{matrix} a, 1+a/2, c, d, e \\ a/2, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e \end{matrix} \middle 1\right) = \frac{(1+a)_{-e} (1+a-c-d)_{-e}}{(1+a-c)_{-e} (1+a-d)_{-e}}$ $= \frac{\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-e)\Gamma(1+a-c-d-e)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-d-e)\Gamma(1+a-c-e)\Gamma(1+a-c-d)}$
27		
28	Whipple	${}_4F_3\left(\begin{matrix} a, 1+a/2, d, e \\ a/2, 1+a-d, 1+a-e \end{matrix} \middle -1\right) = \frac{(1+a)_{-e}}{(1+a-d)_{-e}} = \frac{\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-e)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-d-e)}$
30	Bailey	${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, 1+a/2, -n \\ a/2, w \end{matrix} \middle 1\right) = \frac{(w-a-1-n)(w-a)_{n-1}}{(w)_n}$
30	Bailey	${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, -n \\ 1+a-b, 1+2b-n \end{matrix} \middle 1\right) = \frac{(a-2b)_n (1+a/2-b)_n (-b)_n}{(1+a-b)_n (a/2-b)_n (-2b)_n}$
30	Bailey	${}_4F_3\left(\begin{matrix} a, 1+a/2, b, -n \\ a/2, 1+a-b, 1+2b-n \end{matrix} \middle 1\right) = \frac{(a-2b)_n (-b)_n}{(1+a-b)_n (-2b)_n}$
30	Bailey	${}_4F_3\left(\begin{matrix} a, 1+a/2, b, -n \\ a/2, 1+a-b, 2+2b-n \end{matrix} \middle 1\right) = \frac{(a-2b-1)_n (1/2+a/2-b)_n (-b-1)_n}{(1+a-b)_n (a/2-b-1/2)_n (-2b-1)_n}$

- そもそもこのような関係式が ${}_7F_6$ で終わっているようななのだが、そんなことはあり得るのだろうか...? 実はまだ人類が知らないだけでいっぱい転がってる?

+ α

.....

► そしてどうやらhypergeometric functionの本にも載っていない...

$$\begin{aligned} 16 \quad \text{Whipple } {}_3F_2 \left(\begin{matrix} a, 1-a, c \\ e, 1+2c-e \end{matrix} \middle| 1 \right) &= \frac{\pi 2^{1-2c} \Gamma(e) \Gamma(1+2c-e)}{\Gamma(\frac{a+e}{2}) \Gamma(\frac{a+1+2c-e}{2}) \Gamma(\frac{1-a+e}{2}) \Gamma(\frac{2+2c-a-e}{2})} \\ 26 \quad \text{Dougall } {}_7F_6 \left(\begin{matrix} a, 1+a/2, b, c, d, 1+2a-b-c-d+n, -n \\ a/2, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, b+c+d-a-n, 1+a+n \end{matrix} \middle| 1 \right) \\ &= \frac{(1+a)_n (1+a-b-c)_n (1+a-b-d)_n (1+a-c-d)_n}{(1+a-b)_n (1+a-c)_n (1+a-d)_n (1+a-b-c-d)_n} \\ 25 \quad \text{Dougall } {}_5F_4 \left(\begin{matrix} a, 1+a/2, c, d, e \\ a/2, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e \end{matrix} \middle| 1 \right) &= \frac{(1+a)_{-e} (1+a-c-d)_{-e}}{(1+a-c)_{-e} (1+a-d)_{-e}} \\ 27 \quad &= \frac{\Gamma(1+a-c) \Gamma(1+a-d) \Gamma(1+a-e) \Gamma(1+a-c-d-e)}{\Gamma(1+a) \Gamma(1+a-d-e) \Gamma(1+a-c-e) \Gamma(1+a-c-d)} \\ 28 \quad \text{Whipple } {}_4F_3 \left(\begin{matrix} a, 1+a/2, d, e \\ a/2, 1+a-d, 1+a-e \end{matrix} \middle| -1 \right) &= \frac{(1+a)_{-e}}{(1+a-d)_{-e}} = \frac{\Gamma(1+a-d) \Gamma(1+a-e)}{\Gamma(1+a) \Gamma(1+a-d-e)} \end{aligned}$$

► そもそもこのような関係式が ${}_7F_6$ で終わっているようななのだが、そんなことはあり得るのだろうか...? 実はまだ人類が知らないだけでいっぱい転がってる?

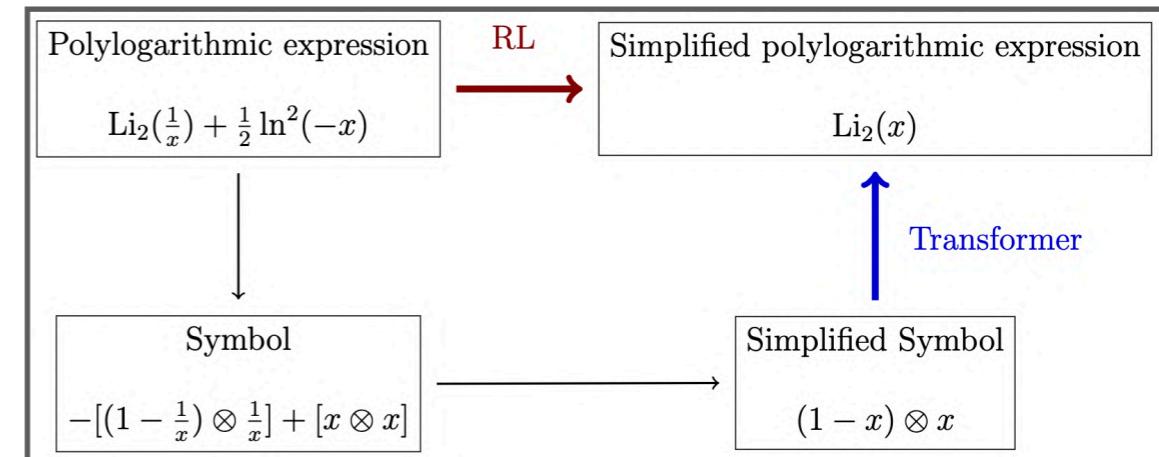
$+\alpha$

- 何とかして機械学習でシステムティックに見つけられないか? 🤔
- 明らかな問題: 「式変形」は知られた関係式を使って元の式を簡約化すれば良いが、「新しい関係式の発見」は知られた式を使ってはいけない...どうする?
- Matthew Schwartzが最近面白いことを言っているらしい。

[2206.04115]

Simplifying Polylogarithms with Machine Learning

Aurélien Dersy, Matthew D. Schwartz and Xiaoyuan Zhang
adersy@g.harvard.edu, schwartz@g.harvard.edu, xiaoyuanzhang@g.harvard.edu
Department of Physics, Harvard University, Cambridge MA 02138
The NSF AI Institute for Artificial Intelligence and Fundamental Interactions



polylog (hypergeometricと似たようなもの) を機械学習で簡約化する論文なのだが、知られた式を使って簡約化するのではなく、例えば「フランス語 → 英語」のような翻訳のスキームを使って簡約化しているらしい。

$+\alpha$

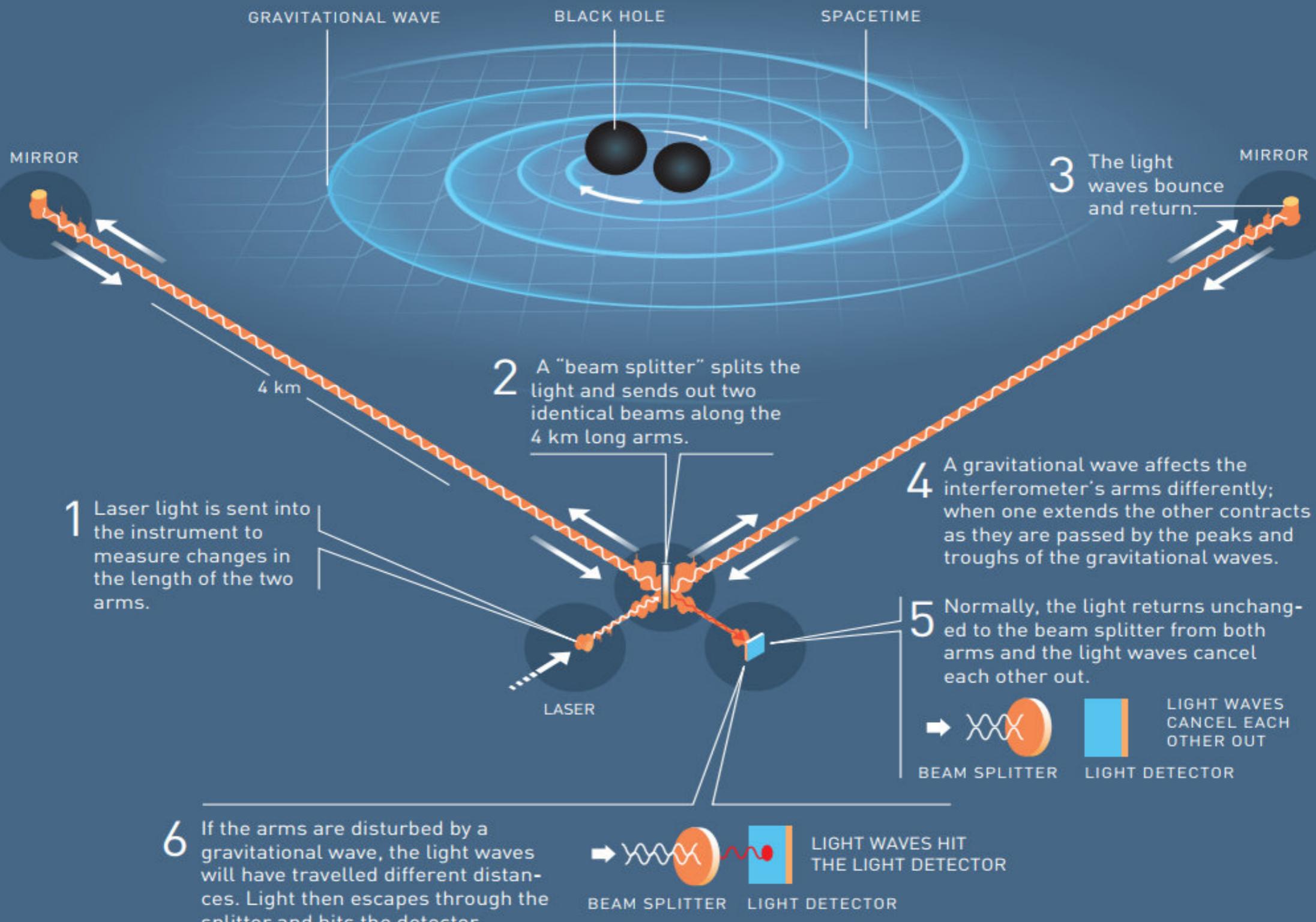
- 確かに翻訳は、既知の対応を逐一適用するというよりは、翻訳先の言語に「存在しそうな」表現を推測する行為である。実際この論文でも、翻訳機はいくつかの簡約化を提案し、最終的に人間が正しさをチェックしている

Hypothesis	Valid ?
$-4\text{Li}_2(x^2 - 2x + 2)$	✓*
$-4\text{Li}_2\left(-\frac{1}{x^2 - 2x + 1}\right)$	✓*
$4\text{Li}_2(-x^2 + 2x - 1)$	✓
$4\text{Li}_2\left(\frac{1}{x^2 - 2x + 2}\right)$	✓*
$-4\text{Li}_2\left(-\frac{1}{x^2 + 2x + 1}\right)$	✗

- 似たような感じで、最終的にhypergeometric間の関係式を提案してくれる翻訳機を作れないか？とりあえず彼らのと同じNNを組んで、hypergeometricに適用すれば第一段階になるのでは？ ← セミナーで直接会って「hypergeometricでもできる？」って聞いたら「できそう」って言ってた

Backup

LIGO – A GIGANTIC INTERFEROMETER



LINEAR PROPAGATOR & DELTA FUNCTION

- linear propagator $\frac{1}{(p - q)^2 - m^2} \simeq -\frac{1}{2p \cdot q}$

本質的にHQEFT (heavy quark EFT) と同じ

[Hussain&Thompson '95]

We do not need, however, to get into any highly abstract formal considerations in order to exhibit the features mentioned above within the context of QCD [19]. Let us simply take the $m_Q \rightarrow \infty$ limit of the lowest order propagator and connected three point function for the heavy quark near its ‘mass-shell’, that is with $p_Q = m_Q v + k$, where v is the velocity of the heavy hadron and the components of k are bounded by Λ_{QCD} . The first of these behaves as,

$$\frac{i}{p_Q - m_Q} = i \frac{(1 + \not{v})}{2v \cdot k} + O(k/m_Q). \quad (1)$$

- delta function

[Damour '16]

$$\frac{dp_{1\mu}}{d\sigma_1} = \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\alpha\beta}(x_1) p_1^\alpha p_1^\beta$$

$$\Delta p_{1\mu} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma_1 \frac{1}{2} p_1^\alpha p_1^\beta \partial_\mu h_{\alpha\beta}(x_1)$$

$$\begin{aligned} \Delta p_{1\mu} = 8\pi G \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} i k_\mu p_1^\alpha p_1^\beta \frac{P_{\alpha\beta;\alpha'\beta'}}{k^2} p_2^{\alpha'} p_2^{\beta'} \\ \times \int d\sigma_1 \int d\sigma_2 e^{ik \cdot (x_1(\sigma_1) - x_2(\sigma_2))}. \end{aligned}$$

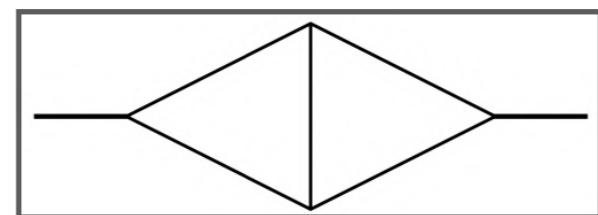
$$x_1^\mu(\sigma_1) = x_1^\mu(0) + p_1^\mu \sigma_1; x_2^\mu(\sigma_2) = x_2^\mu(0) + p_2^\mu \sigma_2$$

$$(2\pi)^2 e^{ik \cdot (x_1(0) - x_2(0))} \delta(k \cdot p_1) \delta(k \cdot p_2)$$

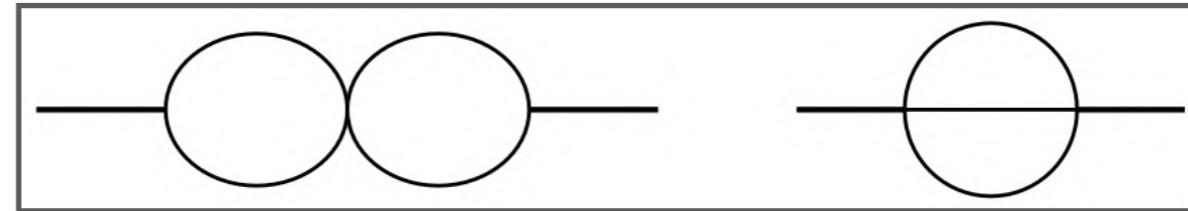
POST-MINKOWSKIAN積分

► ダイアグラムのトポロジー

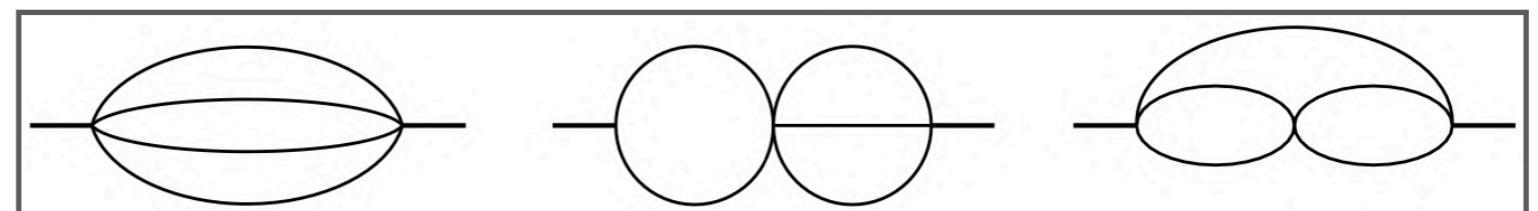
$I_{\pm\pm;\alpha_1,\alpha_2;\nu_1 \dots \nu_5}^{(3PM)}$ (general)



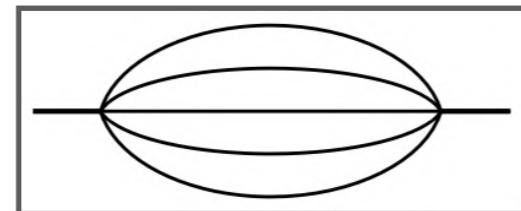
$I_{\pm\pm;\alpha_1,\alpha_2;\nu_1 \dots \nu_5}^{(3PM)}$ (master)



$I_B^{(4PM)}, I_C^{(4PM)}, I_D^{(4PM)}$



$I_M^{(5PM)}$



微分方程式の例

[Henn '13]

$$\partial_x f = \epsilon \left[\frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} \right] f,$$

$$f_1 = -\epsilon^2 (-s)^{2\epsilon} t I_{0,2,0,0,0,0,0,0,1,2}, \quad (9)$$

$$f_2 = \epsilon^2 (-s)^{1+2\epsilon} I_{0,0,2,0,1,0,0,0,2}, \quad (10)$$

$$f_3 = \epsilon^3 (-s)^{1+2\epsilon} I_{0,1,0,0,1,0,1,0,2}, \quad (11)$$

$$f_4 = -\epsilon^2 (-s)^{2+2\epsilon} I_{2,0,1,0,2,0,1,0,0}, \quad (12)$$

$$f_5 = \epsilon^3 (-s)^{1+2\epsilon} t I_{1,1,1,0,0,0,0,1,2}, \quad (13)$$

$$f_6 = -\epsilon^4 (-s)^{2\epsilon} (s+t) I_{0,1,1,0,1,0,0,1,1}, \quad (14)$$

$$f_7 = -\epsilon^4 (-s)^{2+2\epsilon} t I_{1,1,1,0,1,0,1,1,1}, \quad (15)$$

$$f_8 = -\epsilon^4 (-s)^{2+2\epsilon} I_{1,1,1,0,1,-1,1,1,1}. \quad (16)$$

$$a = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 0 & 4 & 12 & -2 & 0 \\ \frac{9}{2} & 3 & -3 & -1 & -4 & -18 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_{a_1, \dots, a_9} := e^{2\epsilon \gamma_E} \int \frac{d^D k_1 d^D k_2}{(i\pi^{D/2})^2} \prod_{m=1}^9 (P(q_m))^{a_m}, \quad (8)$$

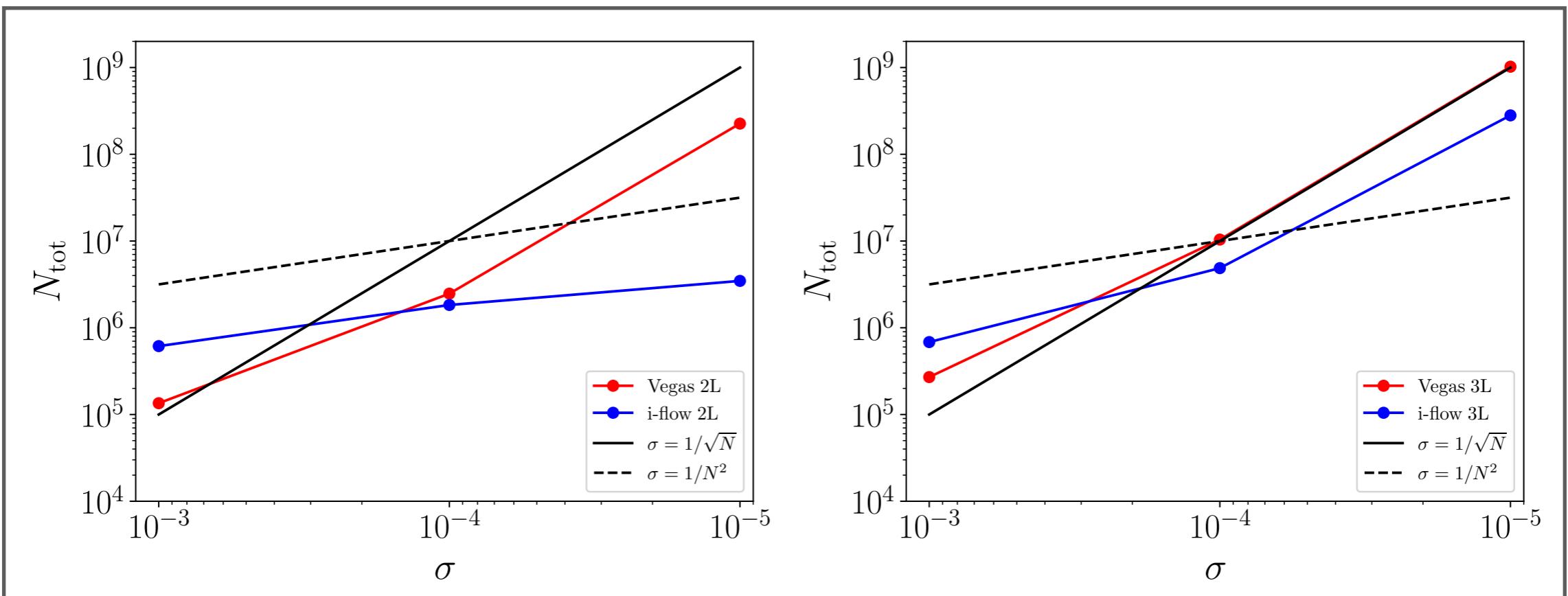
with the propagator $P(q) := 1/(-q^2)$, and the set of possible momenta q_m , corresponding to $m = 1, \dots, 9$, respectively, is $k_1, k_1 + p_1, k_1 + p_{12}, k_1 + p_{123}, k_2, k_2 + p_{12}, k_2 + p_{123}, k_1 - k_2$, where $p_{12} = p_1 + p_2$ and $p_{123} = p_1 + p_2 + p_3$. We have $p_i^2 = 0$ and $\sum_{i=1}^4 p_i = 0$. The results depend on the Mandelstam variables $s = 2p_1 \cdot p_2$ and $t = 2p_2 \cdot p_3$.

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 6 & 2 & -4 & -12 & 2 & 2 \\ -\frac{9}{2} & -3 & 3 & -1 & 4 & 18 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

目標精度に応じた評価回数の変化

$I_{++;00;00111}^{(3PM)}$

$I_{D0}^{(4PM)}$



SUMMERTIME

Introducing **SummerTime**: a package for high-precision computation of sums appearing in DRA method

Roman N. Lee^a, Kirill T. Mingulov^{a,b}

^a*Budker Institute of Nuclear Physics, 630090, Novosibirsk*

^b*Novosibirsk State University, 630090, Novosibirsk*

Abstract

We introduce the *Mathematica* package **SummerTime** for arbitrary-precision computation of sums appearing in the results of DRA method. So far these results include the following families of the integrals: 3-loop onshell massless vertices, 3-loop onshell mass operator type integrals, 4-loop QED-type tadpoles, 4-loop massless propagators [1, 2, 3, 4]. The package can be used for high-precision numerical computation of the expansion coefficients of the integrals from the above families around arbitrary space-time dimension. In addition, this package can also be used for calculation of multiple zeta values, harmonic polylogarithms and other transcendental numbers expressed in terms of nested sums with factorized summand.

- ▶ フルの結果を解析的に求めるのではなく、 ϵ 展開の係数に再帰方程式を適用して解析的に簡約化するアルゴリズム（確認中だが、higher loopまで拡張できるよう）