

東北大学工学部編入学試験過去問解答

comimome

<https://github.com/comimome/>

2023 年 11 月 24 日

目次

1	はじめに	2
2	令和5年度 数学	3
	問題 I	3
	問 1	3
	問 2	3
	問 3	4
	問 4	4
	問題 II	5
	問 1	5
	問題 III	5

■ はじめに

令和5年度 数学

問題Ⅰ

問 1

ベクトル \overrightarrow{AB} を求め、その大きさを計算する. \overrightarrow{AB} は

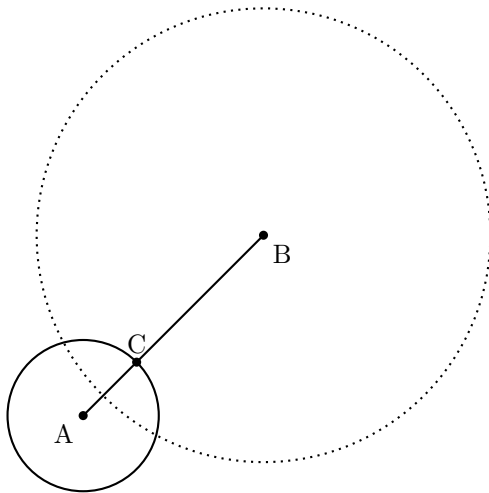
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる. よって

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

である.

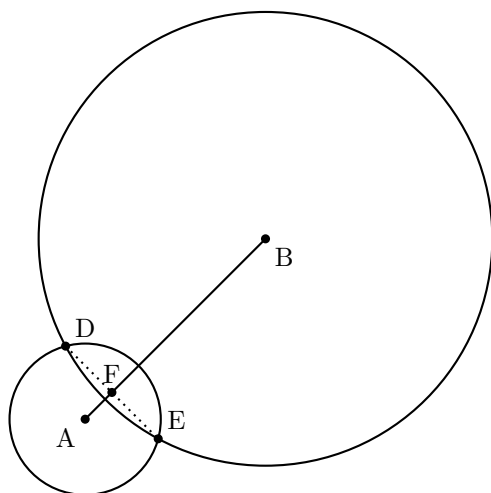
問 2



線分 AB と球面 α の交点を C とおく. 球面 β が球面 α と共有点を持つ条件は問 1 より以下のようなになる.

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}| &\geq r \geq |\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{AC}| \\ 3 \geq r &\geq 2 \end{aligned}$$

問 3



円 S は $|DF|$ を半径に持つため,

$$\begin{aligned} |DF|^2 \pi &= \frac{5\pi}{9} \\ |DF|^2 &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

となる. また図から次のような関係が成り立つ.

$$\begin{aligned} |AD|^2 &= |AF|^2 + |DF|^2 \\ |BD|^2 &= |BF|^2 + |DF|^2 \end{aligned}$$

$|AD|=1$, $|BD|=r$, $|BF|=|AB|-|AF|=3-|AF|$ であるため, 上 2 式は次のようになる.

$$\begin{aligned} 1 &= |AF|^2 + \frac{5}{9} \\ r^2 &= \{3 - |AF|\}^2 + \frac{5}{9} \end{aligned}$$

整理すると

$$\begin{aligned} r^2 &= \left\{ 3 - \sqrt{1 - \frac{5}{9}} \right\}^2 + \frac{5}{9} = 6 \\ r &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

となる.

問 4

円 S の中心座標は点 F, 円 S を含む平面の方程式の法線ベクトルはベクトル \overrightarrow{AB} に等しい. 問 3 から点 F は線分 AB を 2:7 に内分する点であるため, 点 F の座標は,

$$\left(\frac{7 \cdot 2 + 2 \cdot 4}{9}, \frac{7 \cdot 3 + 2 \cdot 5}{9}, \frac{7 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2)}{9} \right) = \left(\frac{22}{9}, \frac{31}{9}, \frac{-11}{9} \right)$$

となる．また平面の方程式は問 1 から

$$2 \left(x - \frac{22}{9} \right) + 2 \left(y - \frac{31}{9} \right) - \left(z + \frac{11}{9} \right) = 0$$

$$2x + 2y - z - 11 = 0$$

となる．

問題 II

問 1

問題の関数について対数を取り，その極限値を調べる．

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \log \sqrt[x]{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} \quad (\because \text{ロピタルの定理}) \\ &= 0 \\ &= \log 1 \end{aligned}$$

したがって極限値は次のようになる．

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1$$

問題 III