東北大学工学部編入学試験過去問解答

comimome
https://github.com/comimome/

2024 年 1 月 13 日

目次

はじめに

東北大学工学部の編入学試験の解答です.

この解答は現在製作中のものであり，誤植・不十分な点が見られると思われます．加筆・改変の提案や誤植の連絡は `https://github.com/comimome/transfer_exam` に Issue，もしくは Pull request を立てて頂けると助かります.

また，この解答を使用することにより使用者に不利益が生じたとしても，解答執筆者である私は責任を負いません．したがって書かれていることが正しいかどうかはよくご自分でご確認ください.

この PDF のコピー・再配布を許可します．ただし再配布の際にも「コピー・再配布は自由」として下さい.

令和５年度 数学

問題 I

問 1

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を求め，その大きさを計算する．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は

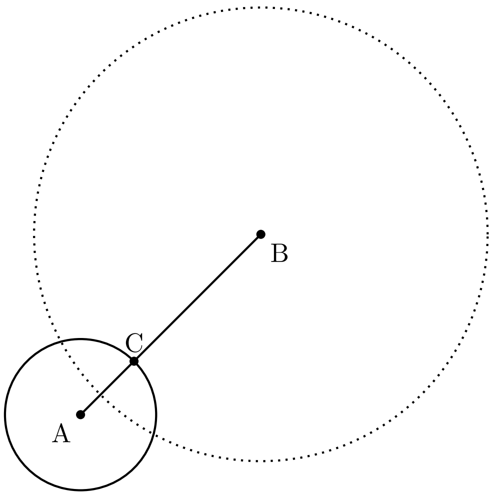
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる．よって

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

である．

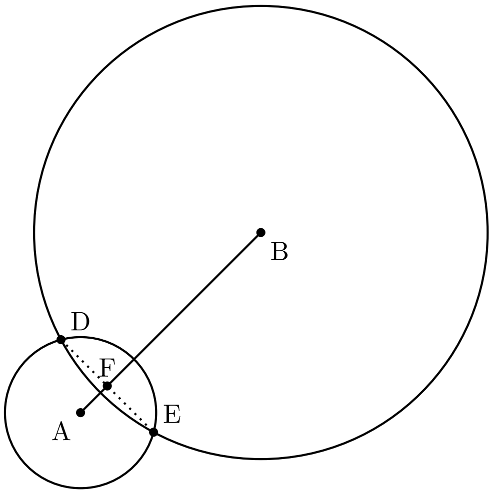
問 2



線分 AB と球面 α の交点を C とおく．球面 β が球面 α と共有点を持つ条件は問 1 より以下のようになる．

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| + |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| \geq \mathrm{r} \geq |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| - |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$$
$$3 \geq \mathrm{r} \geq 2$$

問 3



円 S は |DF| を半径に持つため,

$$|\mathrm{DF}|^2\pi = \frac{5\pi}{9}$$
$$|\mathrm{DF}|^2 = \frac{5}{9}$$

となる．また図から次のような関係が成り立つ．

$$|\mathrm{AD}|^2 = |\mathrm{AF}|^2 + |\mathrm{DF}|^2$$
$$|\mathrm{BD}|^2 = |\mathrm{BF}|^2 + |\mathrm{DF}|^2$$

$|\mathrm{AD}| = 1$, $|\mathrm{BD}| = \mathrm{r}$, $|\mathrm{BF}| = |\mathrm{AB}| - |\mathrm{AF}| = 3 - |\mathrm{AF}|$ であるため，上 2 式は次のようになる．

$$1 = |\mathrm{AF}|^2 + \frac{5}{9}$$
$$\mathrm{r}^2 = \{3 - |\mathrm{AF}|\}^2 + \frac{5}{9}$$

整理すると

$$\mathrm{r}^2 = \left\{3 - \sqrt{1 - \frac{5}{9}}\right\}^2 + \frac{5}{9} = 6$$
$$\mathrm{r} = \sqrt{6}$$

となる．

問 4

円 S の中心座標は点 F，円 S を含む平面の方程式の法線ベクトルはベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に等しい．問 3 から点 F は線分 AB を 2: 7 に内分する点であるため，点 F の座標は,

$$\left(\frac{7\cdot 2+2\cdot 4}{9},\frac{7\cdot 3+2\cdot 5}{9},\frac{7\cdot(-1)+2\cdot(-2)}{9}\right)=\left(\frac{22}{9},\frac{31}{9},\frac{-11}{9}\right)$$

となる．また平面の方程式は問 1 から

$$\begin{gathered}2\left(x-\frac{22}{9}\right)+2\left(y-\frac{31}{9}\right)-\left(z+\frac{11}{9}\right)=0\\ 2x+2y-z-11=0\end{gathered}$$

となる．

問題 II

問 1

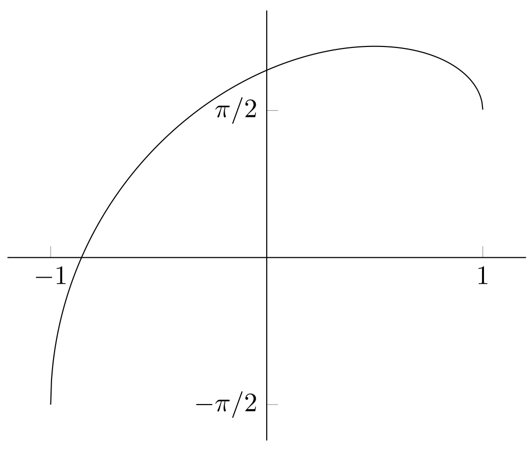
問題の関数について対数を取り，その極限値を調べる．

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\log\sqrt[x]{x}&=\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}\quad(\because\text{ ロピタルの定理})\\ &=0\\ &=\log 1\end{aligned}$$

したがって極限値は次のようになる．

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=1$$

問 2



(a)

まず関数 $f(x)$ を微分する．

$$y = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$y=0$ のとき関数 $f(x)$ は極値をとる．したがって $x=\frac{1}{2}$ のとき，

$$f(x=\frac{1}{2}) = \arcsin\frac{1}{2} + 2\sqrt{1-\frac{1}{2^2}} = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$$

である．また，$x=-1$，$x=1$ のとき関数 $f(x)$ は

$$f(x=-1) = \arcsin(-1) + 2\sqrt{1-1} = -\frac{\pi}{2}$$
$$f(x=1) = \arcsin 1 + 2\sqrt{1-1} = \frac{\pi}{2}$$

となる．これより増減表は次のようになる．

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$

したがって最大値は $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$，最小値は $-\frac{\pi}{2}$ である．

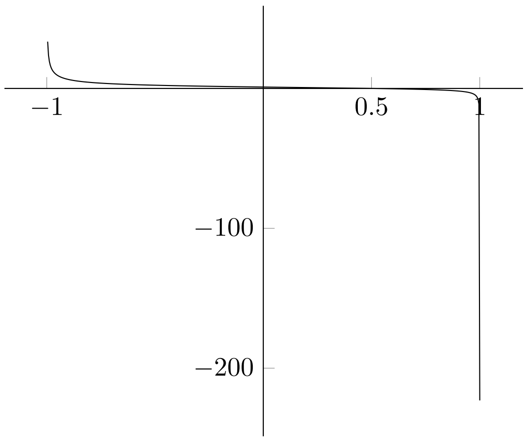
(b)

$y=\frac{d}{dx}f(x)$ を微分する．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sqrt{1-x^2} + (1-2x)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-2(1-x^2)+(1-2x)x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{x-2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

これより y は $-1<x<1$ において極値を取らず，$\frac{dy}{dx}<0$ が成り立つため y は単調減少．

(c)



問 3

(a)

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \frac{\partial(x\sin(xy))}{\partial y} = x^2\cos(xy)$$

から $g(x,y)$ は次のようになる.

$$g(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right)^2 + x^2 f(x,y)^2 = x^4\cos^2(xy) + x^4\sin^2(xy) = x^4$$

(b)

$$\iint_D g(x,y)^{\frac{1}{4}}\sin(xy)dxdy = \int_0^\pi\int_1^2 x\sin(xy)dydx = \int_0^\pi [-\cos(xy)]_{y=1}^{y=2}\,dx = \int_0^\pi(\cos x - \cos 2x)dx = 0$$

問題 III

問 1

$$\begin{aligned}
t^{-1}\frac{d}{dt}f(t) &= 4f(t)^2 - 1 \\
\frac{1}{4f(t)^2-1}\frac{d}{dt}f(t) &= t \\
\left(\frac{1}{2f(t)-1} - \frac{1}{2f(t)+1}\right)\frac{df(t)}{dt} &= 2t \\
\int\left(\frac{1}{2f(t)-1} - \frac{1}{2f(t)+1}\right)df &= \int 2tdt \\
\frac{1}{2}\log|2f(t)-1| - \frac{1}{2}\log|2f(t)+1| &= t^2 + \mathrm{C}_1 && (\mathrm{C}_1\text{は任意定数}) \\
\log\left|\frac{2f(t)-1}{2f(t)+1}\right| &= 2t^2 + \mathrm{C}_2 && (\mathrm{C}_2 = 2\mathrm{C}_1) \\
\frac{2f(t)-1}{2f(t)+1} &= \pm e^{(2t^2+\mathrm{C}_2)} \\
\frac{2f(t)-1}{2f(t)+1} &= \pm e^{\mathrm{C}_2}e^{2t^2} \\
\frac{2f(t)-1}{2f(t)+1} &= \mathrm{C}e^{2t^2} && \left(\mathrm{C} = \pm e^{\mathrm{C}_2}\right)
\end{aligned}$$

初期条件 $f(0) = 1$ より C を求める.

$$\frac{2-1}{2+1} = \mathrm{C} \cdot 1$$
$$\therefore \mathrm{C} = \frac{1}{3}$$

求めた C を元の式に代入する．

$$\begin{aligned}
\frac{2f(t)-1}{2f(t)+1} &= \frac{1}{3}e^{2t^2} \\
1 - \frac{2}{2f(t)+1} &= \frac{1}{3}e^{2t^2} \\
\frac{2}{2f(t)+1} &= 1 - \frac{1}{3}e^{2t^2} \\
2f(t)+1 &= \frac{2}{1-\frac{1}{3}e^{2t^2}} \\
2f(t)+1 &= \frac{6}{3-e^{2t^2}} \\
\therefore f(t) &= \frac{3}{3-e^{2t^2}} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

問 2

$\frac{d}{dt}f(t) = (-\tan t + \cos t)f(t)$ の場合について考える．

$$\begin{aligned}
\frac{df(t)}{dt} &= (-\tan t + \cos t)f(t) \\
\frac{1}{f(t)}\frac{df(t)}{dt} &= -\tan t + \cos t \\
\int \frac{1}{f(t)}df &= \int (-\tan t + \cos t)\, dt \\
\log|f(t)| &= \log|\cos t| + \sin t + \mathrm{C}_1 && (\mathrm{C}_1\text{は任意定数}) \\
\log\left|\frac{f(t)}{\cos t}\right| &= \sin t + \mathrm{C}_1 \\
\frac{f(t)}{\cos t} &= \pm e^{\mathrm{C}_1}e^{\sin t} \\
&= \mathrm{C}_2 e^{\sin t} && \left(\mathrm{C}_2 = \pm e^{\mathrm{C}_1}\right) \\
f(t) &= \mathrm{C}_2 e^{\sin t}\cos t
\end{aligned}$$

$f(t) = u(t)e^{\sin t}\cos t$ とおくと，両辺を t について微分して

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt}e^{\sin t}\cos t + u(t)e^{\sin t}(\cos^2 t - \sin^2 t)$$

となる．これを元の式に代入する．

$$
\begin{aligned}
\frac{du(t)}{dt}e^{\sin t}\cos t + u(t)e^{\sin t}(\cos^2 t - \sin^2 t) &= (-\tan t + \cos t)u(t)e^{\sin t}\cos t + \cos^2 t \\
&= (\cos^2 t - \sin t)u(t)e^{\sin t} + \cos^2 t \\
\frac{du(t)}{dt}e^{\sin t}\cos t &= \cos^2 t \\
\frac{du(t)}{dt} &= e^{-\sin t}\cos t \\
\int du &= \int e^{-\sin t}\cos t dt \\
u(t) &= -e^{-\sin t} + \mathrm{C}_3 \qquad (\mathrm{C}_3\text{は任意定数})
\end{aligned}
$$

$f(t) = u(t)e^{\sin t}\cos t$ に $u(t)$ を代入する.

$$
\begin{aligned}
f(t) &= (-e^{-\sin t} + \mathrm{C}_3)e^{\sin t}\cos t \\
&= (\mathrm{C}_3 e^{-\sin t} - 1)\cos t
\end{aligned}
$$

初期条件 $f(0) = 0$ より C_3 は

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathrm{C}_3 - 1 \\
\therefore \mathrm{C}_3 &= 1
\end{aligned}
$$

従って $f(t)$ は次のようになる.

$$
f(t) = (e^{-\sin t} - 1)\cos t
$$