東北大学工学部編入学試験過去問解答

comimome
https://github.com/comimome/

2023 年 12 月 19 日

目次

はじめに

令和５年度 数学

問題 I

問 1

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を求め，その大きさを計算する．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は

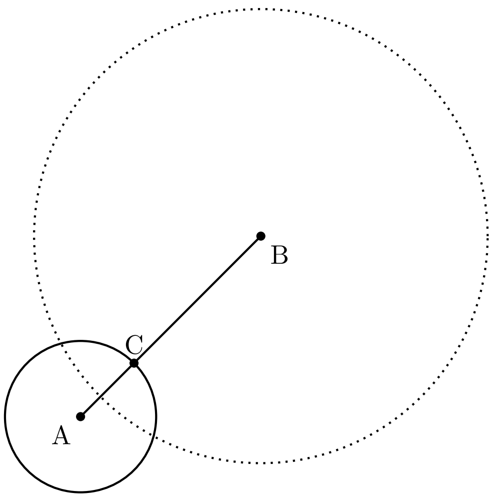
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる．よって

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

である．

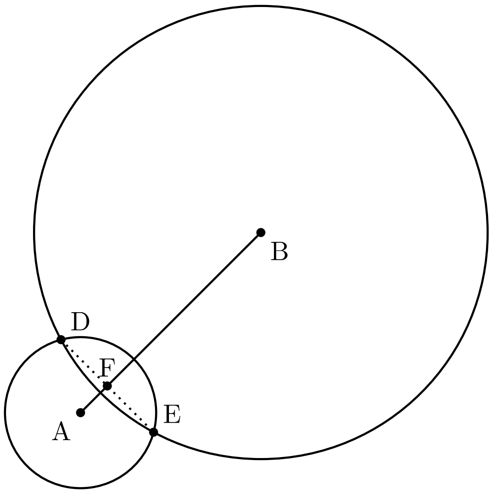
問 2



線分 AB と球面 α の交点を C とおく．球面 β が球面 α と共有点を持つ条件は問 1 より以下のようになる．

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| + |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| \geq \mathrm{r} \geq |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| - |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$$
$$3 \geq \mathrm{r} \geq 2$$

問 3



円 S は |DF| を半径に持つため,

$$|\mathrm{DF}|^2\pi = \frac{5\pi}{9}$$
$$|\mathrm{DF}|^2 = \frac{5}{9}$$

となる．また図から次のような関係が成り立つ．

$$|\mathrm{AD}|^2 = |\mathrm{AF}|^2 + |\mathrm{DF}|^2$$
$$|\mathrm{BD}|^2 = |\mathrm{BF}|^2 + |\mathrm{DF}|^2$$

$|\mathrm{AD}| = 1$，$|\mathrm{BD}| = \mathrm{r}$，$|\mathrm{BF}| = |\mathrm{AB}| - |\mathrm{AF}| = 3 - |\mathrm{AF}|$ であるため，上 2 式は次のようになる．

$$1 = |\mathrm{AF}|^2 + \frac{5}{9}$$
$$\mathrm{r}^2 = \{3 - |\mathrm{AF}|\}^2 + \frac{5}{9}$$

整理すると

$$\mathrm{r}^2 = \left\{3 - \sqrt{1 - \frac{5}{9}}\right\}^2 + \frac{5}{9} = 6$$
$$\mathrm{r} = \sqrt{6}$$

となる．

問 4

円 S の中心座標は点 F，円 S を含む平面の方程式の法線ベクトルはベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に等しい．問 3 から点 F は線分 AB を 2: 7 に内分する点であるため，点 F の座標は,

$$\left(\frac{7\cdot 2+2\cdot 4}{9},\frac{7\cdot 3+2\cdot 5}{9},\frac{7\cdot(-1)+2\cdot(-2)}{9}\right)=\left(\frac{22}{9},\frac{31}{9},\frac{-11}{9}\right)$$

となる．また平面の方程式は問 1 から

$$\begin{gathered} 2\left(x-\frac{22}{9}\right)+2\left(y-\frac{31}{9}\right)-\left(z+\frac{11}{9}\right)=0 \\ 2x+2y-z-11=0 \end{gathered}$$

となる．

問題 II

問 1

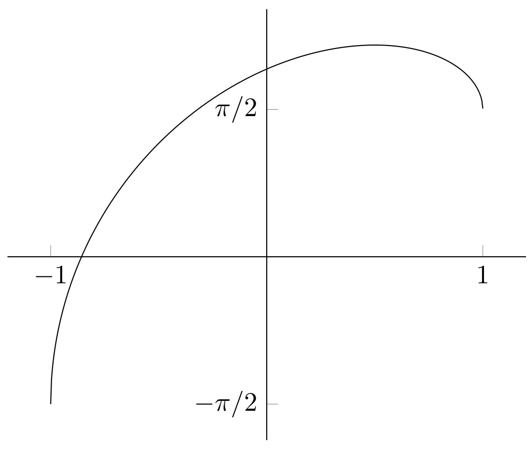
問題の関数について対数を取り，その極限値を調べる．

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}\log\sqrt[x]{x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}\ (\because \text{ロピタルの定理}) \\ &= 0 \\ &= \log 1 \end{aligned}$$

したがって極限値は次のようになる．

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=1$$

問 2



(a)

まず関数 $f(x)$ を微分する．

$$y = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$y=0$ のとき関数 $f(x)$ は極値をとる．したがって $x=\frac{1}{2}$ のとき，

$$f(x=\frac{1}{2}) = \arcsin\frac{1}{2} + 2\sqrt{1-\frac{1}{2^2}} = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$$

である．また，$x=-1$，$x=1$ のとき関数 $f(x)$ は

$$f(x=-1) = \arcsin(-1) + 2\sqrt{1-1} = -\frac{\pi}{2}$$
$$f(x=1) = \arcsin 1 + 2\sqrt{1-1} = \frac{\pi}{2}$$

となる．これより増減表は次のようになる．

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$

したがって最大値は $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$，最小値は $-\frac{\pi}{2}$ である．

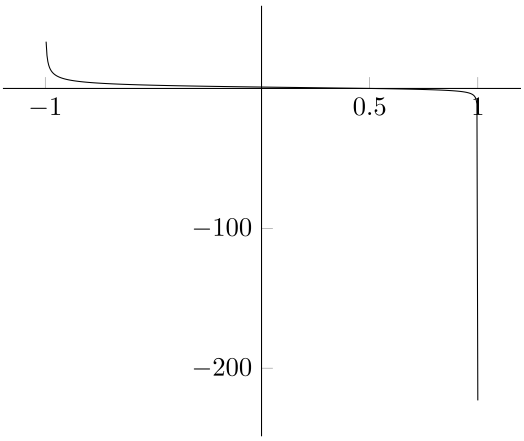
(b)

$y=\frac{d}{dx}f(x)$ を微分する．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sqrt{1-x^2} + (1-2x)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-2(1-x^2)+(1-2x)x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{x-2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

これより y は $-1<x<1$ において極値を取らず，$\frac{dy}{dx}<0$ が成り立つため y は単調減少．

(c)



問 3

(a)

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\frac{\partial(x\sin(xy))}{\partial y}=x^2\cos(xy)$$

から $g(x,y)$ は次のようになる．

$$g(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right)^2+x^2f(x,y)^2=x^4\cos^2(xy)+x^4\sin^2(xy)=x^4$$

(b)

$$\iint_D g(x,y)^{\frac{1}{4}}\sin(xy)dxdy=\int_0^\pi\int_1^2 x\sin(xy)dydx=\int_0^\pi\left[\cos(xy)\right]_{y=1}^{y=2}dx=\int_0^\pi(\cos 2x-\cos x)dx=2$$

問題 III