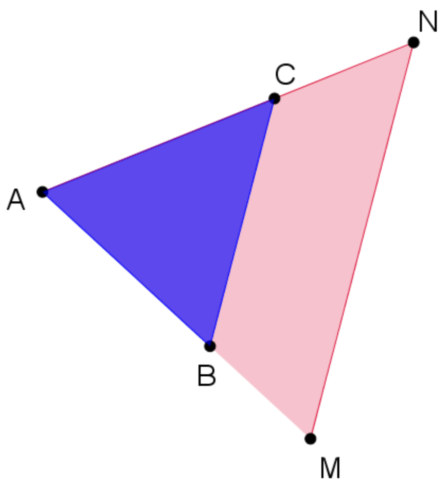
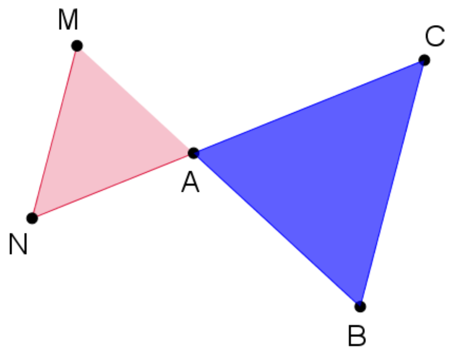
3ème

Cours : théorème de Thalès

I - Théorème de Thalès

a) Figures-clés :





Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Le triangle AMN est l'image du triangle ABC homothétie de centre A et de rapport **k > 0**.

Le triangle AMN est l'image du triangle ABC par une homothétie de centre A et de rapport **k < 0**.

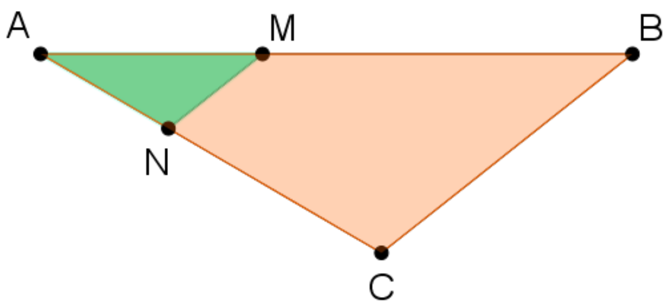
b) Enoncé du Théorème de Thalès :

Soients ABC et AMN 2 triangles tels que $\begin{cases} M \in (AB) \\ N \in (AC) \\ (MN) \parallel (BC) \end{cases}$

on a alors : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

c) Exemples :

Exemple 1 :



AM = 30; AB = 80; AC = 20.
Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
Calculer AN.

Réponse :
Les droites (MN) et (BC) étant parallèles, on peut appliquer le théorème de Thalès dans les triangles AMN et ABC :

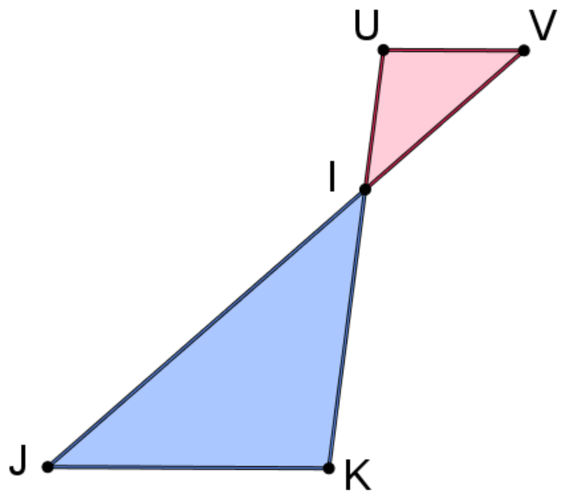
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Soit $\frac{30}{80} = \frac{AN}{20} = \frac{MN}{BC}$

Donc $AN \times 80 = 30 \times 20$

Soit $AN = \frac{30 \times 20}{80} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2} = 7,5$

Exemple 2 :



(UV) // (JK).
IJ = 30 ; IK = 20 ; IU = 10 ; UV = 10.

Calculer IV et JK.

Réponse :
Les droites (UV) et (JK) étant parallèles, on peut appliquer le théorème de Thalès dans les triangles IUV et IJK :

$$\frac{IJ}{IV} = \frac{IK}{IU} = \frac{JK}{UV}$$

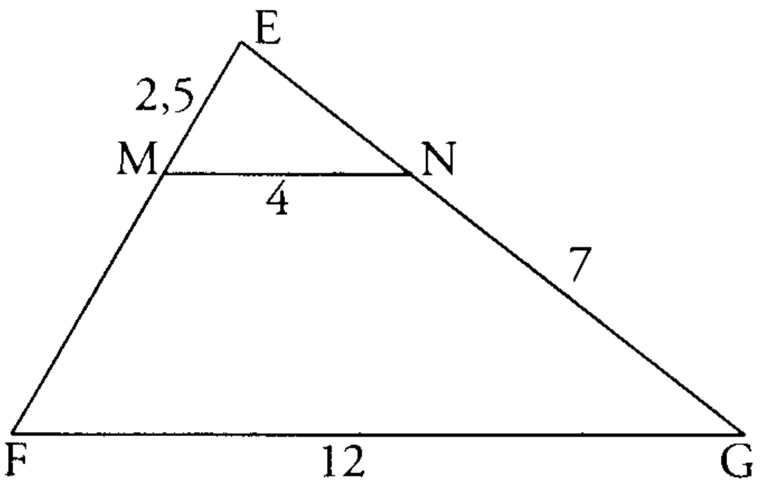
Soit : $\frac{30}{IV} = \frac{20}{10} = \frac{JK}{10}$

Donc $IV = \frac{10}{20} \times 30 = 15$

Et $JK = \frac{20}{10} \times 10 = 20$

Exemple 3. (donné au brevet) :

(Allemagne 96)
Le dessin ci-dessous n'est pas en vraie grandeur.
Les droites (NM) et (FG) sont parallèles.
On donne les longueurs suivantes :
EM = 2,5 ; MN = 4 ; NG = 7 ; FG =12.



Calculer les longueurs MF et EN.

Réponse :
Les droites (MN) et (FG) étant parallèles, on peut appliquer le théorème de Thalès dans les triangles EMN et EFG :

$$\frac{EM}{EF} = \frac{EN}{EG} = \frac{MN}{FG}$$

Donc $EF = \frac{FG}{MN} \times EM = \frac{12}{4} \times 2{,}5 = 7{,}5$ et $MF = EF - EM = 7{,}5 - 2{,}5 = 5$

et $\frac{EN}{EN + 7} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Donc 3 EN = EN + 7
Soit 2 EN = 7
Et EN = 3,5

Cours : théorème de Thalès

II - Réciproque du Théorème de Thalès :

a) Théorème :

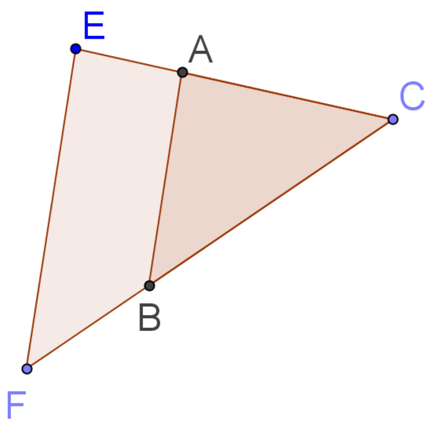
Si ABC et AMN sont deux triangles tels que :

$\begin{cases} A, M, B \text{ et } A, N, C \text{ sont alignés dans cet ordre} \\ \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} \end{cases}$

alors, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

b) Exemples

Exemple 1



AC = 11 ; AE = 22 ;
CB = 15 ; CF = 30.
Les droites (AB) et (EF) sont-elles parallèles ?

D'une part $\dfrac{CA}{CE} = \dfrac{11}{33} = \dfrac{1}{3}$ et d'autre part $\dfrac{CB}{CF} = \dfrac{15}{45} = \dfrac{1}{3}$

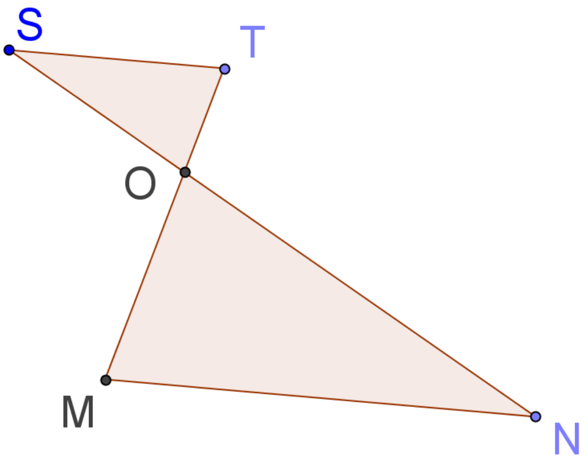
Donc $\dfrac{CA}{CE} = \dfrac{CB}{CF}$

CAB et CEF sont deux triangles tels que C, A, E et C, B, F sont alignés dans cet ordre et $\dfrac{CA}{CE} = \dfrac{CB}{CF}$, donc selon la réciproque du théorème de Thalès les droites (AB) et (EF) sont parallèles.

Cours : théorème de Thalès

Exemple 2

Démontre que les droites (MN) et (ST) sont parallèles.
On donne OM = 2,8 cm ; ON = 5,4 cm ; OS = 2,7 cm et OT = 1,4 cm.



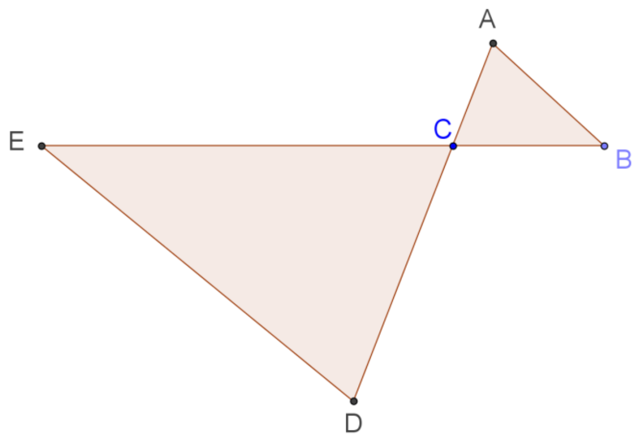
D'une part : $\frac{OT}{OM} = \frac{1,4}{2,8} = \frac{1}{2}$ et $\frac{OS}{ON} = \frac{2,7}{5,4} = \frac{1}{2}$

OST et ONM sont deux triangles tels que S, O, N et T, O, M sont alignés dans cet ordre et $\frac{OT}{OM} = \frac{OS}{ON}$, donc selon la réciproque du théorème de Thalès les droites (MN) et (ST) sont parallèles.

c) Conséquence du théorème de Thalès : montrer que deux droites ne sont pas parallèles

Si ABC et AMN sont deux triangles tels que :
$\begin{cases} \text{A, M, B et A, N, C sont alignés dans cet ordre} \\ \frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC} \end{cases}$
alors, les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

Exemple :



On donne AB = 2,5 cm ; BC = 3,3 cm ; AC = 2,4 ; CD = 6 cm et CE = 9 cm.
Les droites (ED) et (AB) sont-elles parallèles?
Justifie la réponse.

D'une part : $\frac{CA}{CD} = \frac{2,4}{6} = \frac{24}{60} = \frac{12 \times 2}{12 \times 5} = \frac{2}{5}$

D'autre part : $\frac{CB}{CE} = \frac{3,3}{9} = \frac{33}{90} = \frac{11 \times 3}{30 \times 3} = \frac{11}{30}$

Or $\frac{2}{5} = \frac{12}{30} \neq \frac{11}{30}$ donc $\frac{CA}{CD} \neq \frac{CB}{CE}$

CAB et CDE sont deux triangles tels que A, C, D et B, C, E sont alignés dans cet ordre et $\frac{CA}{CD} \neq \frac{CB}{CE}$, donc selon la conséquence du théorème de Thalès les droites (ED) et (AB) ne sont pas parallèles.

Remarque : la conséquence du théorème de Thalès se nomme aussi la contraposée du théorème de Thalès.