DDESTFP-M/MESTFP **2023**

EXAMEN BLANC DEPARTEMENTAL DU B.E.P.C

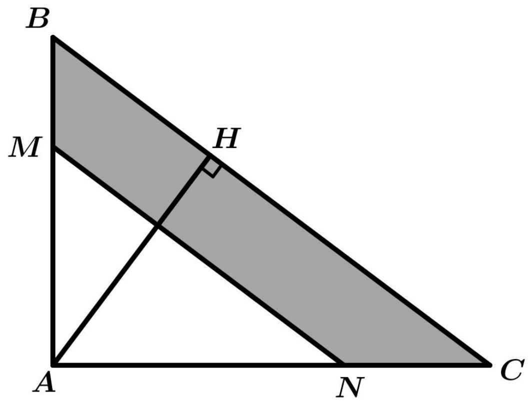
EPREUVE : MATHEMATIQUES

DUREE : 2 H

COEF :
- **2 (OPTIONS ALLEMAND ET ESPAGNOL)**
- **3 (OPTION PCT)**

Contexte : Les héritiers du vieux Tchanka

Lors d'un partage d'héritage entre trois frères, ils doivent réserver pour leur ferme une portion du domaine délimité par le trapèze $BCNM$ comme l'indique la figure ci-dessous.



L'unité de longueur est l'hectomètre.
On a : $AB = 6$, $AC = 8$ et $BC = 10$.
Pour ce partage, les héritiers font appel au géomètre Kouessi pour conduire les travaux. Il a placé trois piquets aux points H, M et N (voir figure ci-contre).
M est un point du segment $[AB]$ tel que $AM = t$ avec $0 < t < 6$ et les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Pour bien conduire les travaux, Kouessi a muni le plan (ABC) d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$. Affi, fille de Kouessi, est une élève en classe de troisième. Elle a assisté son papa lors des travaux et elle cherche à déterminer la plus grande valeur de AM pour que le périmètre du trapèze $BCNM$ soit supérieur ou égal à $\frac{64}{3}$, à représenter la portion du domaine réservé à la ferme et à déterminer la quantité d'eau que peut contenir le réservoir du château d'eau de la ferme.

Tâche : Tu es invité(e) à accompagner Affi dans la satisfaction de ses préoccupations en résolvant les trois problèmes ci-dessous.

Problème 1

1. a) Justifie que le triangle ABC est rectangle en A.
   b) Calcule la longueur AH.
2. a) Démontre que les triangles ACH et ABH sont semblables.
   b) Détermine le rapport de similitude du triangle ACH au triangle ABH.
3. a) Justifie que $AN = \frac{4}{3}t$.
   b) Démontre que le périmètre P de la parcelle de Bio est $P = -\frac{2}{3}t + 24$.
   c) Déduis-en la plus grande valeur de la longueur AM.

Problème 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), $A(-3\,;-4)$, $\overrightarrow{AB}(0\,;6)$ et

$\overrightarrow{OC} = 5\overrightarrow{OI} - 4\overrightarrow{OJ}$.

La portion du domaine à réserver pour la ferme est l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan dont les coordonnées vérifient le système (S): $\begin{cases} 3x + 4y + 1 \leq 0 \\ x + 3 \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$.

4. Justifie que $(-3\,;2)$ est le couple de coordonnées du point B puis écris une équation cartésienne de la droite (AB).
5. a) Justifie que les droites (BC) et (AH) ont pour équations cartésiennes respectives $3x + 4y + 1 = 0$ et $4x - 3y = 0$.

   b) Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le système (S'): $\begin{cases} 3x + 4y + 1 = 0 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases}$ d'inconnue le couple (x, y).

   c) Détermine les coordonnées du point H.
6. Place dans le repère (O, I, J), les points A, B et C puis représente le domaine réservé à la ferme. (Tu hachures la portion du plan dont les coordonnées des points $M(x; y)$ ne vérifient pas le système (S)).

Problème 3

A la fin des travaux, dans le plan muni d'un repère orthonormé, on a : $M(2\,;a)$, $N(a^2\,;1)$ et $\overrightarrow{BC}(8; -6)$ où a est un nombre réel strictement négatif. Le réservoir du château d'eau de la ferme a la forme d'un tronc de pyramide régulière obtenue par la section d'une pyramide régulière, dont la base est un carré de côté c et de diagonale $d = 4\sqrt{2}\,m$, par un plan parallèle à la base. L'échelle de réduction k de la pyramide dont la section a permis d'obtenir le réservoir est $k = \frac{1}{2}$. L'autre base de ce tronc de pyramide est un carré de côté c' et la hauteur du château d'eau $6\,m$.

7. a) Justifie que $3a^2 - 4a - 2 = 0$.

   b) Développe, réduis puis ordonne suivant des puissances décroissantes de a, le polynôme $Q(a) = \frac{1}{3}\left(3a - 2 - \sqrt{10}\right)\left(3a - 2 + \sqrt{10}\right)$.
8. a) Etudie le signe de chacun des nombres réels $\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{10}}{3}$ et $\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{10}}{3}$.

   b) Prouve que $a = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{10}}{3}$.
9. a) Justifie que $c = 4\,m$ et $c' = 2m$.

   b) Calcule en m^3, le volume du réservoir du château d'eau.

FIN