

# 常替代弹性

陈普 整理

## 1 第一个常替代弹性函数

一个经常使用的常替代弹性消费函数如下，

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}$$

这个常替代弹性指的是跨期替代弹性是一个常数，即第一期消费和第二期消费之间的替代弹性是一个常数。这一点可以根据替代弹性的定义<sup>1</sup>来计算得到。

替代弹性定义为，

$$e = \frac{\ln(c_2/c_1)}{\ln |u'(c_1)/u'(c_2)|}$$

其中脚标 1 和 2 表示时期，分母其实是边际技术替代率  $MRTS_{c_1, c_2}$ 。因为，

$$MRTS_{c_1, c_2} = \left| \frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} \right| = \left( \frac{c_1}{c_2} \right)^{-\sigma} = \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^{\sigma}$$

两边取对数有，

$$\begin{aligned} \ln MRTS_{c_1, c_2} &= \sigma \ln \frac{c_2}{c_1} \\ \implies \ln \frac{c_2}{c_1} &= \frac{1}{\sigma} \ln MRTS_{c_1, c_2} \\ \implies e &= \frac{d \ln \left( \frac{c_2}{c_1} \right)}{d \ln MRTS_{c_1, c_2}} = \frac{1}{\sigma} \end{aligned}$$

因此， $\frac{1}{\sigma}$  就是消费的跨期替代弹性。

**塌缩成对数函数** 要注意到，当  $\sigma \rightarrow 1$  时，该函数塌缩成对数函数，这主要用到了洛必达法则，

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1} \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} = \lim_{\sigma \rightarrow 1} \frac{-c^{1-\sigma} \ln c}{-1} = \ln c$$

## 2 另一个常替代弹性函数

另一个常替代弹性的函数经常在生产函数中使用，形式如下，

$$Y_t = [\alpha K_t^\rho + (1-\alpha)N_t^\rho]^{\frac{1}{\rho}}$$

按照替代弹性的定义，可以计算得到资本和劳动的替代弹性为，

$$e = \frac{1}{1-\rho}$$

---

<sup>1</sup>关于替代弹性的详细说明，见 <https://common2016.github.io/chenpu.github.io/files/ela.pdf>。

**塌缩成道格科布拉斯函数** 当  $\rho \rightarrow 0$  时, 该生产函数塌缩成道格科布拉斯生产函数,

$$\begin{aligned}
 \lim_{\rho \rightarrow 0} [\alpha K_t^\rho + (1-\alpha)N_t^\rho]^{\frac{1}{\rho}} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\rho} \ln[\alpha K_t^\rho + (1-\alpha)N_t^\rho]} = \lim_{\rho \rightarrow 0} e^{\frac{\ln[\alpha K_t^\rho + (1-\alpha)N_t^\rho]}{\rho}} \\
 &= e^{\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\ln[\alpha K_t^\rho + (1-\alpha)N_t^\rho - 1 + 1]}{\rho}} \\
 &= e^{\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\alpha K^\rho + (1-\alpha)N^\rho + 1}{\rho}} \quad \text{用到了等价无穷小 } \ln(x+1) \sim x \\
 &= e^{\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\alpha K^\rho \ln K + (1-\alpha)N^\rho \ln N}{1}} \\
 &= e^{\alpha \ln K + (1-\alpha) \ln N} \\
 &= K^\alpha N^{1-\alpha}
 \end{aligned}$$

### 3 善于利用这两种函数的嵌套

- 第一个常替代弹性只有一个变量  $c$ , 所以往往用它来描述跨期替代。
- 第二常替代弹性有两个变量  $K, L$ , 所以往往用它来描述同期但不同变量的替代。

当我们在构造新的消费或生产函数时, 要善于运用这些函数形式进行嵌套。比如如果涉及到内生决定的劳动力, 就可以如下构造效用函数,

$$u(C, 1-L) = \frac{[C^\iota(1-L)^{1-\iota}]^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}$$

也可以更加一般地,

$$u(C, 1-L) = \frac{[C^\rho + \kappa(1-L)^\rho]^{\frac{1-\sigma}{1-\rho}} - 1}{1-\sigma}$$

很多时候, 考虑到消费不仅包含私人消费, 还包括政府消费, 则可以把  $C$  再嵌套一下,

$$C = [\phi(C^p)^\rho + (1-\phi)G^\rho]^{\frac{1}{\rho}}$$

其中  $C^p$  表示私人消费,  $G$  表示政府消费。可以看到这些参数都有着非常明确的经济含义, 在校准的时候, 就要注意。