

替代弹性的来龙去脉

陈普

1 引言

通常我们会在等产量线的图上来引入替代弹性的概念。等产量线的横坐标和纵坐标分别是两种要素的输入量，等产量线表明在这条线上的要素组合，其产量是不变的。如下图所示。

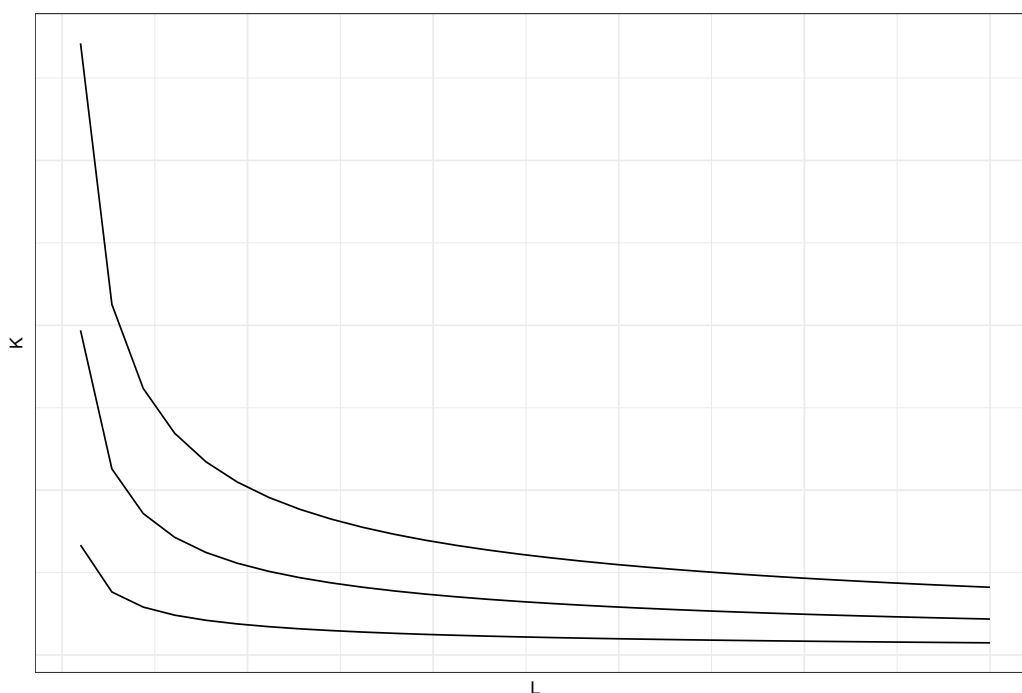


图 1: 等产量线

替代弹性是指，当一种要素，比如劳动力的价格 W ，相对另一种要素，比如资本的价格 R ，变化一个百分点（即 $\frac{W}{R}$ 变化一个百分点），若要产量不变，该种要素相对另一种要素的使用数量发生怎样的百分比变化（即 $\frac{K}{L}$ 的百分比变化）。可以看到，在内涵上就是说一种要素价格变化，会使得该种要素如何替代另一种要素。在数学上，可以写成，

$$\frac{d \ln \left(\frac{K}{L} \right)}{d \ln \left(\frac{W}{R} \right)} = \frac{\frac{d(K/L)}{K/L}}{\frac{d(W/R)}{W/R}} = \frac{\frac{d(K/L)}{d(W/R)}}{\frac{K/L}{W/R}} = \frac{\text{边际函数}}{\text{平均函数}}, \text{ 或更一般地, } \frac{d \ln \left(\frac{x_1}{x_2} \right)}{d \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right)}$$

评价：

- 因为工资 W 的升高，意味着资本 K 更便宜，它倾向于替代劳动投入 L 。
- 弹性通常可以看成是边际函数对平均函数的比例。如果把数量比率 K/L 看作是价格比率 W/R 的函数，替代弹性仍然可以当做是“边际”函数对“平均”函数的比率。
- 在数学上，替代弹性也体现为等产量线的曲率。

此外，价格的百分比 $d \ln \frac{W}{R}$ 可以用边际技术替代率的方式来衡量。

2 边际技术替代率

在等产量线上，某一点的切线的斜率表示一种投入要素对另一种投入要素替代的比率，这样的替代，产量是不变的。可以把这个斜率定义为边际技术替代率 MRTS(marginal rate of technical substitution)，

$$MRTS_{L,K} = \frac{dK}{dL}$$

注意到，这个斜率还等于两种要素的边际产量之比。因为对于生产函数 $y = f(L, K)$ ，两边微分有，

$$\begin{aligned} dy &= f_L dL + f_K dK \\ \Rightarrow \frac{dK}{dL} &= -\frac{f_L}{f_K} \quad \text{等产量线意味着 } dy = 0 \end{aligned}$$

3 替代弹性的进一步说明

因为在完全竞争要素市场上，边际产量也是要素的价格，因此，有，

$$MRTS_{L,K} = \frac{dK}{dL} = -\frac{f_L}{f_K} = -\frac{W}{R}$$

那么，从边际技术替代率的角度看，替代弹性就可以写成，

$$\varepsilon = \frac{d \ln(K/L)}{d \ln(|W/R|)} = \frac{d \ln(K/L)}{d \ln(|f_L/f_K|)}$$

- 在替代弹性的实践计算中，价格容易获得，又是完全竞争市场，就用价格来计算。边际产品容易获得，就用边际产品来算。

4 消费的跨期替代弹性

利用替代弹性这个定义，可以引申到消费领域。比如消费者要在两期间保持效用不变，两期消费的跨期替代弹性如何计算？类似的，

$$\varepsilon = \frac{d \ln(c_2/c_1)}{d \ln(|u'(c_1)/u'(c_2)|)} = \frac{d \ln(c_2/c_1)}{d(|MRTS_{c_1,c_2}|)}$$

一个例子 对于常相对风险回避效用函数，

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}$$

有，

$$u'(c) = c^{-\sigma}$$

可以按照原公式计算，但比较麻烦。实际上，可以通过计算边际技术替代率来得到替代弹性，具体如下，

$$\begin{aligned} MRTS_{c_1,c_2} &= \left| -\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} \right| = \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^{-\sigma} = \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^{\sigma} \\ \Rightarrow \ln MRTS_{c_1,c_2} &= \sigma \ln \frac{c_2}{c_1} \\ \Rightarrow \ln \frac{c_2}{c_1} &= \frac{1}{\sigma} \ln MRTS_{c_1,c_2} \\ \Rightarrow \varepsilon &= \frac{d \ln \left(\frac{c_2}{c_1} \right)}{d \ln MRTS_{c_1,c_2}} = \frac{1}{\sigma} \end{aligned}$$

可知此函数的跨期替代弹性为 $1/\sigma$ 。