

宏观建模中如何转化变量形式使得系统存在稳态？

陈普

2022 年 2 月 4 日

在宏观建模中，我们经常会看到把某个变量做了某种转化以后，一个并不存在稳态的系统重新可以按照稳态的情况加以处理。稳态非常重要，特别在 Dynare 的求解中，没有稳态是无法求解的。那么问题在于，我们怎么知道做什么样的转化可以使得系统重新获得稳态？

1 第一个简单的例子

对于一个 Ramsey 模型，

$$\begin{aligned} \max_{\{C_t, N_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t, 1 - N_t) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t C^{1-\eta} v(1 - N) \\ \text{s.t.} \quad & K_{t+1} + C_t \leq F(A_t N_t, K_t) + (1 - \delta)K_t \\ & 0 \leq C_t \\ & 0 \leq N_t \leq 1 \\ & 0 \leq K_{t+1} \\ & K_0 \text{ 给定} \end{aligned}$$

拉格朗日函数可以写为，

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{u(C_t, 1 - N_t) + \lambda_t [F(A_t N_t, K_t) + (1 - \delta)K_t - C_t - K_{t+1}]\}$$

对 C_t, N_t, K_{t+1} 的一阶条件可以写为，

$$\begin{aligned} 0 &= u_1^t - \lambda_t \\ 0 &= -u_2^t + \lambda_t F_1^t A_t \\ 0 &= -\lambda_t + \beta \lambda_{t+1} [1 - \delta + F_2^{t+1}] \end{aligned}$$

利用第一和第二个条件消去拉格朗日乘子，得到劳动供给条件，

$$\frac{u_2^t}{u_1^t} = A_t F_1^t$$

利用第一和第三个条件消去拉格朗日乘子，得到消费的跨期条件，

$$\frac{u_1^t}{u_1^{t+1}} = \beta(1 - \delta + F_2^{t+1})$$

如果给予消费函数形式为 $u(C_t, 1 - N_t) = \ln C_t + B \ln(1 - N_t)$ ，生产函数形式为 $F(A_t N_t) =$

$(A_t N_t)^{1-\theta} K_t^\theta$ ，则上述一阶条件再加上资源约束条件可以写为，

$$\text{劳动供给条件: } \frac{B \cdot C_t}{1 - N_t} = A_t(1 - \theta)(A_t N_t)^{-\theta} K_t^\theta$$

$$\text{跨期条件: } \frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta[1 - \delta + \theta(A_{t+1} N_{t+1})^{1-\theta} K_{t+1}^{\theta-1}]$$

$$\text{资源约束: } K_{t+1} + C_t = (A_t N_t)^{1-\theta} K_t^\theta + (1 - \delta) K_t$$

获得此表达的稳态，仅需去掉时间脚标即可。可以得到，

$$\frac{B \cdot C}{1 - N} = A(1 - \theta)(AN)^{-\theta} K^\theta \quad (1)$$

$$1 = \beta[1 - \delta + \theta(AN)^{1-\theta} K^{\theta-1}] \implies \frac{1}{\beta} + \delta - 1 = \theta(AN)^{1-\theta} K^{\theta-1} \quad (2)$$

$$K + C = (AN)^{1-\theta} K^\theta + (1 - \delta)K \implies C = (AN)^{1-\theta} K^\theta - \delta K \quad (3)$$

从跨期条件(2)式可知，

$$N = \underbrace{\left[\frac{1}{\beta\theta} + \frac{\delta - 1}{\theta} \right]^{\frac{1}{1-\theta}}}_{G} \cdot \frac{K}{A} = \frac{G}{A} \cdot K$$

跨期条件(2)式和资源约束(3)式意味着，

$$C = \underbrace{\left[\frac{1}{\beta\theta} + \frac{\delta - 1}{\theta} - \delta \right]}_J K = JK$$

再利用劳动供给条件(1)式和资源约束(3)式，有，

$$\frac{B \cdot C}{1 - N} = (1 - \theta) \cdot \frac{C + \delta K}{N}$$

注意 G, J 作为参数的组合均为常数，因此联立上面三个简化后的一阶条件，可以得到 K 的表达式为，

$$K = \frac{A(1 - \theta)(\delta + J)}{[BJ + (1 - \theta)(\delta + J)]G}$$

从而有 C, N 的表达式，

$$C = \frac{JA(1 - \theta)(\delta + J)}{[BJ + (1 - \theta)(\delta + J)]G}$$

$$N = \frac{(1 - \theta)(\delta + J)}{[BJ + (1 - \theta)(\delta + J)]}$$

注意到，如果 A 作为劳动效率按固定比例增长，比如 $A_{t+1} = aA_t$ ，很明显， K, C 均不存在稳态，但 $\frac{K}{A}, \frac{C}{A}$ 有稳态。因此，解这样的模型，需要把原来的变量替换成 $\frac{K}{A}, \frac{C}{A}$ 后再进行后续的动态求解。

2 包含人力资本的另一个例子

最优规划问题可以写为，

$$\max_{c_t, u_t, k_{t+1}, h_{t+1}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \cdot \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma}$$

$$s.t. \quad (1 + n)k_{t+1} = \theta_t A k_t^\alpha (u_t h_t)^{1-\alpha} + (1 - \delta_k)k_t - c_t$$

$$h_{t+1} = \eta_t B(1 - u_t)h_t + (1 - \delta_h)h_t$$

$$\ln \theta_t = \phi_1 \ln \theta_{t-1} + \epsilon_{1t}$$

$$\ln \eta_t = \phi_2 \ln \eta_{t-1} + \epsilon_{2t}$$

拉格朗日函数可以写为,

$$\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \beta^t \left[\frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \lambda_t (\theta_t A k_t^\alpha (u_t h_t)^{1-\alpha} + (1-\delta_k)k_t - c_t - (1+n)k_{t+1}) + \mu_t (\eta_t B(1-u_t)h_t + (1-\delta_h)h_t - h_{t+1}) \right] \right\}$$

关于 $c_t, u_t, k_{t+1}, h_{t+1}$ 的一阶条件为,

$$\begin{aligned} c_t : c_t^{-\sigma} &= \lambda_t \\ u_t : \lambda_t (1-\alpha) A k_t^\alpha h_t^{1-\alpha} u_t^{-\alpha} \theta_t &= \mu_t B \eta_t \\ k_{t+1} : \lambda_{t+1} (1+n) &= \beta E_t \left[\lambda_{t+1} \left(A \alpha \left(\frac{k_{t+1}}{h_{t+1}} \right)^{\alpha-1} u_{t+1}^{1-\alpha} \theta_{t+1} + 1 - \delta_k \right) \right] \\ h_{t+1} : \mu_t &= \beta E_t \left\{ \mu_{t+1} [B(1-u_{t+1})\eta_{t+1} + 1 - \delta_h] + \lambda_{t+1} (1-\alpha) A \left(\frac{k_{t+1}}{h_{t+1}} \right)^\alpha u_{t+1}^{1-\alpha} \theta_{t+1} \right\} \end{aligned}$$

消去拉格朗日乘子, 再加上两个约束条件, 有,

$$\begin{aligned} c_t^{-\sigma} (1+n) &= \beta E_t \left[c_{t+1}^{-\sigma} \left(A \alpha \left(\frac{k_{t+1}}{h_{t+1}} \right)^{\alpha-1} u_{t+1}^{1-\alpha} \theta_{t+1} + 1 - \delta_k \right) \right] \\ c_t^{-\sigma} \frac{\theta_t}{\eta_t} \left(\frac{k_t}{h_t} \right)^\alpha u_t^{-\alpha} &= \beta E_t \left[c_{t+1}^{-\sigma} \left(\frac{k_{t+1}}{h_{t+1}} \right)^\alpha u_{t+1}^{-\alpha} \frac{\theta_{t+1}}{\eta_{t+1}} (B \eta_{t+1} + 1 - \delta_h) \right] \\ (1+n)k_{t+1} &= \theta_t A k_t^\alpha (u_t h_t)^{1-\alpha} + (1-\delta_k)k_t - c_t \\ h_{t+1} &= \eta_t B(1-u_t)h_t + (1-\delta_h)h_t \end{aligned}$$

类似地, 我们再次去除时间脚标来获取稳态,

$$\begin{aligned} c^{-\sigma} (1+n) &= \beta \left[c^{-\sigma} \left(A \alpha \left(\frac{k}{h} \right)^{\alpha-1} u^{1-\alpha} \theta + 1 - \delta_k \right) \right] \\ c^{-\sigma} \frac{\theta}{\eta} \left(\frac{k}{h} \right)^\alpha u^{-\alpha} &= \beta \left[c^{-\sigma} \left(\frac{k}{h} \right)^\alpha u^{-\alpha} \frac{\theta}{\eta} (B \eta + 1 - \delta_h) \right] \\ (1+n)k &= \theta A k^\alpha (u h)^{1-\alpha} + (1-\delta_k)k - c \\ h &= \eta B(1-u)h + (1-\delta_h)h \end{aligned}$$

通过化简有,

$$(1+n) = \beta \left[\left(A \alpha \left(\frac{k}{h} \right)^{\alpha-1} u^{1-\alpha} \theta + 1 - \delta_k \right) \right] \quad (4)$$

$$1 = \beta (B \eta + 1 - \delta_h) \quad (5)$$

$$(1+n)k = \theta A k^\alpha (u h)^{1-\alpha} + (1-\delta_k)k - c \implies (1+n) = \theta A \left(\frac{k}{h} \right)^{\alpha-1} u^{1-\alpha} + (1-\delta_k) - \frac{c}{k} \quad (6)$$

$$1 = \eta B(1-u) + (1-\delta_h) \quad (7)$$

可以发现, 如果单纯要解 c_t, h_t, k_t 的稳态, 那么(5)和(7)式必须要成立, 这本质上给我们添加了约束, 而且通过这组方程, 也解不出这三个变量的稳态, 因为你相当于只有 2 个方程, 但有 3 个未知数。但反过来, 我们可以把(5)式看作消费的增长率¹, (7)看作人力资本 h_t 的增长率, 这两个增长率是相同的²。此时, 观察(4)和(6)式, 可知比率 k/h 和 c/k 是有稳态的。因此, 这同样意味着我们要把原来的变量进行 k/h 和 c/k 形式的替换才能解后续的动态问题。

¹左边的 1 实际上是 $\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^\sigma$ 。

²因为稳态中 y 与 k 必须要有同样的增长率, 那么, 根据 $\frac{y_t}{k_t} = A \left(\frac{k_t}{h_t}\right)^{\alpha-1} u^{1-\alpha}$, 这意味着 k_t/h_t 必须恒定, 即增长率 $\gamma_k = \gamma_h$ 。同时, 根据(6)式知 c/k 要恒定, 因此 $\gamma_k = \gamma_c$ 。

因此，我们可以令 $z_t = \frac{k_t}{h_t}, x_t = \frac{c_t}{k_t}$ ，原来的四个一阶条件可以重新写为，

$$\begin{aligned}
 x_t^{-\sigma} z_t^{-\sigma} (1+n) \left(\frac{h_{t+1}}{h_t} \right)^{\sigma} &= \beta E_t \left[x_{t+1}^{-\sigma} z_{t+1}^{-\sigma} (A \alpha z_{t+1}^{\alpha-1} u_{t+1}^{1-\alpha} \theta_{t+1} + 1 - \delta_k) \right] \\
 x_t^{-\sigma} z_t^{\alpha-\sigma} \frac{\theta_t}{\eta_t} u_t^{-\alpha} \left(\frac{h_{t+1}}{h_t} \right)^{\sigma} &= \beta E_t \left[x_{t+1}^{-\sigma} z_{t+1}^{\alpha-\sigma} u_{t+1}^{-\alpha} \frac{\theta_{t+1}}{\eta_{t+1}} (B \eta_{t+1} + 1 - \delta_h) \right] \\
 (1+n) \frac{z_{t+1}}{z_t} \left(\frac{h_{t+1}}{h_t} \right)^{\sigma} &= \theta_t A z_t^{\alpha} (u_t)^{1-\alpha} + (1 - \delta_k) - x_t \\
 h_{t+1} &= \eta_t B (1 - u_t) h_t + (1 - \delta_h) h_t
 \end{aligned}$$

此时可以针对上面四个一阶条件展开分析。