求 $\boldsymbol{x}$ 的函数的方差协方差矩阵

陈普　整理

2022 年 4 月 19 日

1　线性情况：$\boldsymbol{ax}$ 和 $\boldsymbol{Ax}$

令 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \boldsymbol{\mu} = (E[x_1], E[x_2], \cdots, E[x_n])'$，则期望为，

$$E[\boldsymbol{a'x}] = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \cdots + a_n\mu_n$$

方差为，

$$\begin{aligned}
Var(\boldsymbol{a'x}) =& E[(\boldsymbol{a'x} - E[\boldsymbol{a'x}])^2] \\
=& E[\{\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{x} - E[\boldsymbol{x}])\}^2] \\
=& E[\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{a}] \qquad \text{因为}\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}) = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{a} \\
=& \boldsymbol{a}'E[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})']\boldsymbol{a} \\
=& \boldsymbol{a'\Sigma a} \\
=& \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_i a_j \sigma_{ij}
\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的方差协方差矩阵。

类似地推导，对于矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{Ax}$ 的期望和方差协方差矩阵为，

$$\begin{aligned}
E[\boldsymbol{Ax}] &= \boldsymbol{A\mu} \\
Var[\boldsymbol{Ax}] &= \boldsymbol{A\Sigma A'}
\end{aligned}$$

注意，与向量情况不同，对于矩阵而言，对系数的转置在 $\boldsymbol{\Sigma}$ 后面。

2　非线性情况:$f(\boldsymbol{x})$

为方便讨论，或者回到我们更熟悉的符号表示。比如通常我们用 $\boldsymbol{b}$ 表示 OLS 的 K 个系数估计量，用 $\boldsymbol{\beta}$ 表示系数的真值。很多时候，我们感兴趣系数估计量的非线性变换后，方差是多少。

令 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$ 是 $\boldsymbol{b}$ 的 J 个连续、可微函数集合，定义其雅克比矩阵为，

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{b}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})}{\partial \boldsymbol{b}'}$$

其中 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{b})$ 是 $J \times K$ 的矩阵。

斯拉茨基定理表明概率极限运算子可以穿越函数符号，这意味着

$$p\lim \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\beta}), \quad p\lim \boldsymbol{C}(\boldsymbol{b}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}'} = \boldsymbol{\Gamma}$$

那么，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$ 在 $\boldsymbol{\beta}$ 处的一阶泰勒展开为，

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\Gamma} \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{\beta})$$

因此，这意味着，

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) \sim N\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{\Gamma}[Asy.Var(\boldsymbol{b})]\boldsymbol{\Gamma}'\}$$

那么，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$ 的渐进方差协方差矩阵的估计量为，

$$Est.Asy.Var[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})] = \boldsymbol{C} \cdot [Est.Asy.Var(\boldsymbol{b})] \cdot \boldsymbol{C}'$$

这种计算 $\boldsymbol{x}$ 的函数的方差协方差方法也叫德尔塔法。