

# 替代弹性的来龙去脉

陈普

## 1 边际技术替代率

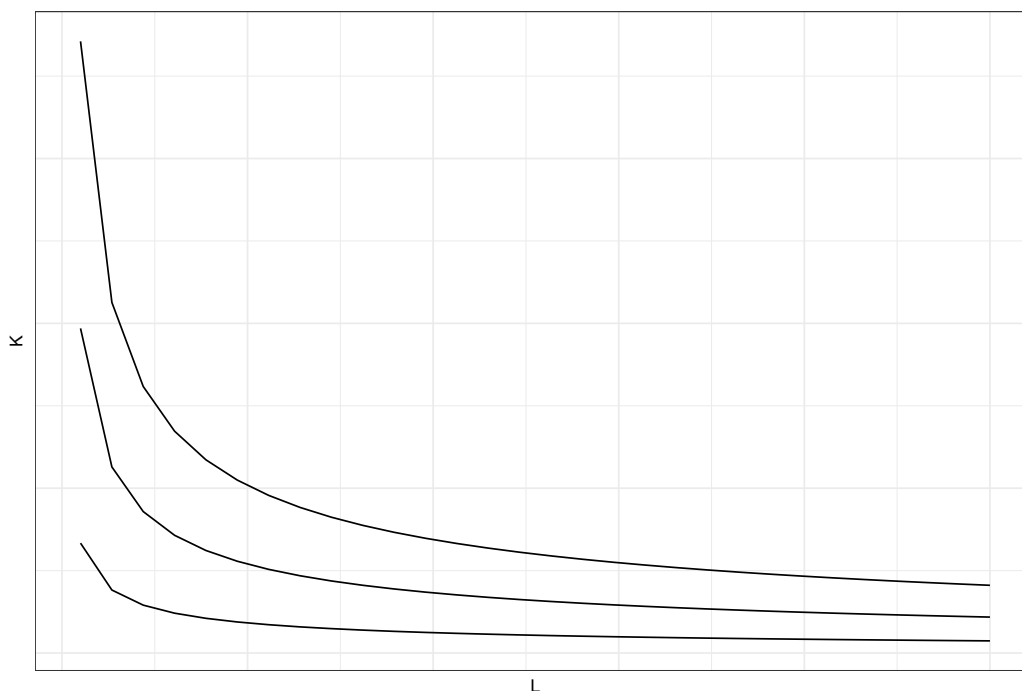


图 1: 等产量线

在等产量线上，某一点的切线的斜率表示一种投入要素对另一种投入要素替代的比率，这样的替代，产量是不变的。可以把这个斜率定义为边际技术替代率 MRTS(marginal rate of technical substitution)，

$$MRTS_{L,K} = \frac{dK}{dL}$$

注意到，这个斜率还等于两种要素的边际产量之比。因为对于生产函数  $y = f(L, K)$ ，两边微分有，

$$\begin{aligned} dy &= f_L dL + f_K dK \\ \Rightarrow \frac{dK}{dL} &= -\frac{f_L}{f_K} \quad \text{等产量线意味着 } dy = 0 \end{aligned}$$

## 2 替代弹性

替代弹性是等产量线的曲率（注意，边际技术替代率是斜率），定义成产出不变时，要素比率百分比变动除以技术替代率的百分比变动。也即等产量线斜率变动时要素投入比率如何变化，

$$\varepsilon = \frac{d \ln(K/L)}{d \ln(|f_L/f_K|)}$$

在完全竞争要素市场上，边际产量也是要素的价格，因此，有，

$$MRTS_{L,K} = \frac{dK}{dL} = -\frac{f_L}{f_K} = -\frac{w}{r}$$

其中， $w, r$  分别为工资和利率。此时替代弹性的经济含义就是投入品相对价格的变化对相对投入变化的影响。

### 3 消费的跨期替代弹性

利用替代弹性这个定义，可以引申到消费领域。比如消费者要在两期间保持效用不变，两期消费的跨期替代弹性如何计算？类似的，

$$\varepsilon = \frac{d \ln(c_2/c_1)}{d \ln(|u'(c_1)/u'(c_2)|)} = \frac{d \ln(c_2/c_1)}{d(|MRTS_{c_1,c_2}|)}$$

一个例子 对于常相对风险回避效用函数，

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}$$

有，

$$u'(c) = c^{-\sigma}$$

可以按照原公式计算，但比较麻烦。实际上，可以通过计算边际技术替代率来得到替代弹性，具体如下，

$$\begin{aligned} MRTS_{c_1,c_2} &= \left| -\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} \right| = \left( \frac{c_1}{c_2} \right)^{-\sigma} = \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^{\sigma} \\ \Rightarrow \ln MRTS_{c_1,c_2} &= \sigma \ln \frac{c_2}{c_1} \\ \Rightarrow \ln \frac{c_2}{c_1} &= \frac{1}{\sigma} \ln MRTS_{c_1,c_2} \\ \Rightarrow \varepsilon &= \frac{d \ln \left( \frac{c_2}{c_1} \right)}{d \ln MRTS_{c_1,c_2}} = \frac{1}{\sigma} \end{aligned}$$

可知此函数的跨期替代弹性为  $1/\sigma$ 。