宏观建模中如何转化变量形式使得系统存在稳态?

陈普

2022 年 2 月 4 日

在宏观建模中，我们经常会看到把某个变量做了某种转化以后，一个并不存在稳态的系统重新可以按照稳态的情况加以处理。稳态非常重要。问题在于，我们怎么知道做什么样的转化可以使得系统重新获得稳态?

1 第一个简单的例子

对于一个 Ramsey 模型，

$$
\begin{aligned}
\max_{\{C_t,N_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(C_t,1-N_t)=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t C^{1-\eta}v(1-N) \\
s.t. \quad & K_{t+1}+C_t \le F(A_tN_t,K_t)+(1-\delta)K_t \\
& 0\le C_t \\
& 0\le N_t\le 1 \\
& 0\le K_{t+1} \\
& K_0\text{给定}
\end{aligned}
$$

拉格朗日函数可以写为，

$$
\mathcal{L}=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\{u(C_t,1-N_t)+\lambda_t[F(A_tN_t,K_t)+(1-\delta)K_t-C_t-K_{t+1}]\}
$$

对 C_t,N_t,K_{t+1} 的一阶条件可以写为，

$$
\begin{aligned}
0&=u_1^t-\lambda_t \\
0&=-u_2^t+\lambda_tF_1^tA_t \\
0&=-\lambda_t+\beta\lambda_{t+1}[1-\delta+F_2^{t+1}]
\end{aligned}
$$

利用第一和第二个条件消去拉格朗日乘子，得到劳动供给条件，

$$
\frac{u_2^t}{u_1^t}=A_tF_1^t
$$

利用第一和第三个条件消去拉格朗日乘子，得到消费的跨期条件，

$$
\frac{u_1^t}{u_1^{t+1}}=\beta(1-\delta+F_2^{t+1})
$$

如果给予消费函数形式为 $u(C_t,1-N_t)=\ln C_t+B\ln(1-N_t)$，生产函数形式为 $F(A_tN_t)=$

$(A_t N_t)^{1-\theta} K_t^\theta$，则上述一阶条件再加上资源约束条件可以写为，

$$\text{劳动供给条件：} \frac{B \cdot C_t}{1-N_t} = A_t(1-\theta)(A_t N_t)^{-\theta} K_t^\theta$$

$$\text{跨期条件：} \frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta[1-\delta+\theta(A_{t+1}N_{t+1})^{1-\theta}K_{t+1}^{\theta-1}]$$

$$\text{资源约束：} K_{t+1} + C_t = (A_t N_t)^{1-\theta} K_t^\theta + (1-\delta)K_t$$

获得此表达的稳态，仅需去掉时间脚标即可。可以得到，

$$\frac{B \cdot C}{1-N} = A(1-\theta)(AN)^{-\theta}K^\theta \tag{1}$$

$$1 = \beta[1-\delta+\theta(AN)^{1-\theta}K^{\theta-1}] \Longrightarrow \frac{1}{\beta} + \delta - 1 = \theta(AN)^{1-\theta}K^{\theta-1} \tag{2}$$

$$K + C = (AN)^{1-\theta}K^\theta + (1-\delta)K \Longrightarrow C = (AN)^{1-\theta}K^\theta - \delta K \tag{3}$$

从跨期条件(2)式可知，

$$N = \underbrace{\left[\frac{1}{\beta\theta} + \frac{\delta-1}{\theta}\right]^{\frac{1}{1-\theta}}}_{G} \cdot \frac{K}{A} = \frac{G}{A} \cdot K$$

跨期条件(2)式和资源约束(3)式意味着，

$$C = \underbrace{\left[\frac{1}{\beta\theta} + \frac{\delta-1}{\theta} - \delta\right]}_{J} K = JK$$

再利用劳动供给条件(1)式和资源约束(3)式，有，

$$\frac{B \cdot C}{1-N} = (1-\theta) \cdot \frac{C+\delta K}{N}$$

注意 G, J 作为参数的组合均为常数，因此联立上面三个简化后的一阶条件，可以得到 K 的表达为，

$$K = \frac{A(1-\theta)(\delta+J)}{[BJ+(1-\theta)(\delta+J)]G}$$

从而有 C, N 的表达，

$$C = \frac{JA(1-\theta)(\delta+J)}{[BJ+(1-\theta)(\delta+J)]G}$$

$$N = \frac{(1-\theta)(\delta+J)}{[BJ+(1-\theta)(\delta+J)]}$$

注意到，如果 A 作为劳动效率按固定比例增长，比如 $A_{t+1} = aA_t$，很明显，K, C 均不存在稳态，但 $\frac{K}{A}, \frac{C}{A}$ 有稳态。因此，解这样的模型，需要把原来的变量替换成 $\frac{K}{A}, \frac{C}{A}$ 后再进行后续的动态求解。

2 包含人力资本的另一个例子

最优规划问题可以写为，

$$\begin{aligned}
\max_{c_t, u_t, k_{t+1}, h_{t+1}} \quad & E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \cdot \frac{c_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} \\
s.t. \quad & (1+n)k_{t+1} = \theta_t A k_t^\alpha (u_t h_t)^{1-\alpha} + (1-\delta_k)k_t - c_t \\
& h_{t+1} = \eta_t B(1-u_t)h_t + (1-\delta_h)h_t \\
& \ln\theta_t = \phi_1 \ln\theta_{t-1} + \epsilon_{1t} \\
& \ln\eta_t = \phi_2 \ln\eta_{t-1} + \epsilon_{2t}
\end{aligned}$$

拉格朗日函数可以写为，

$$\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \beta^t \left[\frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \lambda_t(\theta_t A k_t^{\alpha}(u_t h_t)^{1-\alpha} + (1-\delta_k)k_t - c_t - (1+n)k_{t+1}) + \right. \right.$$
$$\left. \left. \mu_t(\eta_t B(1-u_t)h_t + (1-\delta_h)h_t - h_{t+1}) \right] \right\}$$

关于 $c_t, u_t, k_{t+1}, h_{t+1}$ 的一阶条件为，

$$\begin{aligned}
c_t:&\ \ c_t^{-\sigma} = \lambda_t \\
u_t:&\ \ \lambda_t(1-\alpha)Ak_t^{\alpha}h_t^{1-\alpha}u_t^{-\alpha}\theta_t = \mu_t B h_t \eta_t \\
k_{t+1}:&\lambda_t(1+n) = \beta E_t \left[\lambda_{t+1} \left(A\alpha \left(\frac{k_{t+1}}{h_{t+1}} \right)^{\alpha-1} u_{t+1}^{1-\alpha}\theta_{t+1} + 1 - \delta_k \right) \right] \\
h_{t+1}:&\mu_t = \beta E_t \left\{ \mu_{t+1}[B(1-u_{t+1})\eta_{t+1} + 1 - \delta_k] + \lambda_{t+1}(1-\alpha)A\left(\frac{k_{t+1}}{h_{t+1}} \right)^{\alpha} u_{t+1}^{1-\alpha}\theta_{t+1} \right\}
\end{aligned}$$

消去拉格朗日乘子，再加上两个约束条件，有，

$$\begin{aligned}
c_t^{-\sigma}(1+n) &= \beta E_t \left[c_{t+1}^{-\sigma} \left(A\alpha \left(\frac{k_{t+1}}{h_{t+1}} \right)^{\alpha-1} u_{t+1}^{1-\alpha}\theta_{t+1} + 1 - \delta_k \right) \right] \\
c_t^{-\sigma}\frac{\theta_t}{\eta_t}\left(\frac{k_t}{h_t} \right)^{\alpha} u_t^{-\alpha} &= \beta E_t \left[c_{t+1}^{-\sigma} \left(\frac{k_{t+1}}{h_{t+1}} \right)^{\alpha} u_{t+1}^{-\alpha}\frac{\theta_{t+1}}{\eta_{t+1}}(B\eta_{t+1} + 1 - \delta_h) \right] \\
(1+n)k_{t+1} &= \theta_t A k_t^{\alpha}(u_t h_t)^{1-\alpha} + (1-\delta_k)k_t - c_t \\
h_{t+1} &= \eta_t B(1-u_t)h_t + (1-\delta_h)h_t
\end{aligned}$$

类似地，我们再次去除时间脚标来获取稳态，

$$\begin{aligned}
c^{-\sigma}(1+n) &= \beta \left[c^{-\sigma} \left(A\alpha \left(\frac{k}{h} \right)^{\alpha-1} u^{1-\alpha}\theta + 1 - \delta_k \right) \right] \\
c^{-\sigma}\frac{\theta}{\eta}\left(\frac{k}{h} \right)^{\alpha} u^{-\alpha} &= \beta \left[c^{-\sigma} \left(\frac{k}{h} \right)^{\alpha} u^{-\alpha}\frac{\theta}{\eta}(B\eta + 1 - \delta_h) \right] \\
(1+n)k &= \theta A k^{\alpha}(uh)^{1-\alpha} + (1-\delta_k)k - c \\
h &= \eta B(1-u)h + (1-\delta_h)h
\end{aligned}$$

通过化简有，

$$(1+n) = \beta \left[\left(A\alpha \left(\frac{k}{h} \right)^{\alpha-1} u^{1-\alpha}\theta + 1 - \delta_k \right) \right] \tag{4}$$

$$1 = \beta(B\eta + 1 - \delta_h) \tag{5}$$

$$(1+n)k = \theta A k^{\alpha}(uh)^{1-\alpha} + (1-\delta_k)k - c \Longrightarrow (1+n) = \theta A \left(\frac{k}{h} \right)^{\alpha-1} u^{1-\alpha} + (1-\delta_k) - \frac{c}{k} \tag{6}$$

$$1 = \eta B(1-u) + (1-\delta_h) \tag{7}$$

可以发现，如果单纯要解 c_t, h_t, k_t 的稳态，那么(5)和(7)式必须要成立，这本质上给我们添加了约束，而且通过这组方程，也解不出这三个变量的稳态，因为你相当于只有 2 个方程，但有 3 个未知数。但反过来，我们可以把(5)式看作消费的增长率[1]，(7)看作人力资本 h_t 的增长率，这两个增长率是相同的[2]。此时，观察(4)和(6)式，可知比率 k/h 和 c/k 是有稳态的。因此，这同样意味着我们要把原来的变量进行 k/h 和 c/k 形式的替换才能解后续的动态问题。

[1]左边的 1 实际上是 $\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\sigma}$。

[2]因为稳态中 y 与 k 必须要有同样的增长率，那么，根据 $\frac{y_t}{k_t} = A\left(\frac{k_t}{h_t}\right)^{\alpha-1} u^{1-\alpha}$，这意味着 k_t/h_t 必须恒定，即增长率 $\gamma_k = \gamma_h$。同时，根据(6)式知 c/k 要恒定，因此 $\gamma_k = \gamma_c$。

因此，我们可以令 $z_t = \frac{k_t}{h_t}, x_t = \frac{c_t}{k_t}$，原来的四个一阶条件可以重新写为，

$$\begin{aligned}
x_t^{-\sigma} z_t^{-\sigma}(1+n)\left(\frac{h_{t+1}}{h_t}\right)^{\sigma} &= \beta E_t\left[x_{t+1}^{-\sigma} z_{t+1}^{-\sigma}\left(A\alpha z_{t+1}^{\alpha-1} u_{t+1}^{1-\alpha}\theta_{t+1} + 1 - \delta_k\right)\right] \\
x_t^{-\sigma} z_t^{\alpha-\sigma}\frac{\theta_t}{\eta_t} u_t^{-\alpha}\left(\frac{h_{t+1}}{h_t}\right)^{\sigma} &= \beta E_t\left[x_{t+1}^{-\sigma} z_{t+1}^{\alpha-\sigma} u_{t+1}^{-\alpha}\frac{\theta_{t+1}}{\eta_{t+1}}(B\eta_{t+1} + 1 - \delta_h)\right] \\
(1+n)\frac{z_{t+1}}{z_t}\left(\frac{h_{t+1}}{h_t}\right)^{\sigma} &= \theta_t A z_t^{\alpha}(u_t)^{1-\alpha} + (1-\delta_k) - x_t \\
h_{t+1} &= \eta_t B(1-u_t)h_t + (1-\delta_h)h_t
\end{aligned}$$

此时可以针对上面四个一阶条件展开分析。