

# 动态规划

陈普

华东交通大学经济管理学院

2023.4

- 1 不确定情况下不能用拉格朗日法
- 2 McCandless(2008) 的动态规划
- 3 Wickens(2011) 的动态规划
- 4 Wash(2017) 的动态规划

# 最优规划

不确定性下跨期优化问题可以写成,

$$\begin{aligned} \max \quad & E_t[V(x_t)] = E_t \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s U(y_{t+s}) \right] \\ \text{s.t.} \quad & x_{t+1} = f(x_t, y_t) \end{aligned}$$

- $x_t$  是状态变量,  $y_t$  是控制变量。

拉格朗日函数可以写为,

$$\mathcal{L} = E_t \sum_{s=0}^{\infty} \{ \beta^s U(y_{t+s}) + \lambda_{t+s} [f(x_{t+s}, y_{t+s}) - x_{t+s+1}] \}$$

一阶条件为,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{t+s}} &= E_t \left\{ \lambda_{t+s} \frac{\partial f(x_{t+s}, y_{t+s})}{\partial x_{t+s}} - \lambda_{t+s-1} \right\} = 0, & s > 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_{t+s}} &= E_t \left\{ \beta^s \frac{\partial U(y_{t+s})}{\partial y_{t+s}} + \lambda_{t+s} \frac{\partial f(x_{t+s}, y_{t+s})}{\partial y_{t+s}} \right\} = 0, & s \geq 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_{t+s}} &= E_t [f(x_{t+s}, y_{t+s}) - x_{t+s+1}] = 0, & s \geq 0\end{aligned}$$

求解上述方程组时，必然要求解下面的项，

$$E_t \left[ \lambda_{t+s} \frac{\partial f(x_{t+s}, y_{t+s})}{\partial y_{t+s}} \right] = Cov_t \left[ \lambda_{t+s}, \frac{\partial f(x_{t+s}, y_{t+s})}{\partial y_{t+s}} \right] + E_t(\lambda_{t+s}) E_t \left[ \frac{\partial f(x_{t+s}, y_{t+s})}{\partial y_{t+s}} \right]$$

- 如果  $Cov_t \left[ \lambda_{t+s}, \frac{\partial f(x_{t+s}, y_{t+s})}{\partial y_{t+s}} \right] \neq 0$ ，该协方差不好计算。从而不能像无不确定性时求解那样消去  $\lambda_{t+s}$ 。
- 此时这样的跨期优化问题就要使用动态规划技术进行。

- 1 不确定情况下不能用拉格朗日法
- 2 McCandless(2008) 的动态规划
- 3 Wickens(2011) 的动态规划
- 4 Wash(2017) 的动态规划

# 一般形式

把跨期优化写成递归形式,

$$\begin{aligned} V(x_t) &= \max_{y_t} [F(x_t, y_t) + \beta V(x_{t+1})] \\ \text{s.t. } x_{t+1} &= G(x_t, y_t) \end{aligned}$$

- $x_t$  是状态变量,  $y_t$  是控制变量。

用目标函数对  $y_t$  求导, 得到一阶条件,

$$F_y(x_t, y_t) + \beta V_x(x_{t+1}) \cdot G_y = 0 \quad (1)$$

- 关键是  $V_x(x_{t+1})$  未知。
- 根据包络定理,

$$V_x(x_t) = F_x(x_t, y_t) + \beta V_x(x_{t+1}) \cdot G_x(x_t, y_t) \quad (2)$$

- 又回到了原处,  $V_x(x_{t+1})$  还是未知。
- 但如果  $G_x(x_t, y_t) = 0$  就可以消掉  $V_x(x_{t+1})$ 。

## 重要技巧

要使  $G_x(x_t, y_t) = 0$  关键在于通过把相关变量移入目标函数, 从而让预算约束不要包含  $t$  期的状态变量。



# 公式

消掉后，通过把式(2)脚标前推一期，一阶条件最终可以写成，

$$F_y(x_t, y_t) + \beta F_x(x_{t+1}, y_{t+1}) G_y = 0$$

或者，

$$F_y(x_t, y_t) + \beta F_x(G(x_t, y_t), y_{t+1}) G_y(x_t, y_t) = 0 \quad (3)$$

- 如果式(3)不包含  $y_{t+1}$ ，则通过式(3)就能得到政策函数。

# 一个例子

$$V = \max \sum_{t=0}^T \beta^t \ln c_t$$

$$s.t. \quad s_{t+1} - s_t = \alpha(s_t - c_t)$$

写成递归形式,

$$\begin{aligned} V(s_0) &= \max \sum_{t=0}^T \beta^t \left[ \ln \left( s_t - \frac{s_{t+1} - s_t}{\alpha} \right) \right] \\ &= \max \left\{ \ln \left( s_0 - \frac{s_1 - s_0}{\alpha} \right) + \beta \cdot \sum_{t=1}^T \beta^{t-1} \left[ \ln \left( s_t - \frac{s_{t+1} - s_t}{\alpha} \right) \right] \right\} \\ &= \max \left[ \ln \left( s_0 - \frac{s_1 - s_0}{\alpha} \right) + \beta \cdot V(s_1) \right] \end{aligned}$$

第三个等号是因为,

$$V(s_0) = \ln \left( s_0 - \frac{s_1 - s_0}{\alpha} \right) + \beta \ln \left( s_1 - \frac{s_2 - s_1}{\alpha} \right) + \beta^2 \ln \left( s_2 - \frac{s_3 - s_2}{\alpha} \right) + \dots$$

$$V(s_1) = \ln \left( s_1 - \frac{s_2 - s_1}{\alpha} \right) + \beta \ln \left( s_2 - \frac{s_3 - s_2}{\alpha} \right) + \dots$$

上述递归可以更一般的写作,

$$\begin{aligned} V(s_t) &= \max \left[ \ln \left( s_t - \frac{s_{t+1} - s_t}{\alpha} \right) + \beta \cdot V(s_{t+1}) \right] \\ &= \max [\ln c_t + \beta \cdot V(s_{t+1})] \end{aligned} \quad (4)$$

# 控制变量选 $s_{t+1}$

此时预算约束为,

$$s_{t+1} = x_{t+1} = G(x_t, y_t) = y_t = s_{t+1}$$

- $t+1$  期的状态变量是  $s_{t+1}$
- 该状态变量是  $t$  期的控制变量和状态变量的函数, 而  $t$  期的控制变量又恰好是  $k_{t+1}$ , 所以本质上, 约束就是,

$$k_{t+1} = k_{t+1}$$

并不包含  $t$  期的状态变量。

- 因此  $G(x_t, y_t) = G(s_t, s_{t+1}) = s_{t+1}$ , 有,

$$G_{s_t}(s_t, s_{t+1}) = 0$$

最优规划重写如下,

$$\begin{aligned} V(s_t) = \max \quad & [\ln c_t + \beta \cdot V(s_{t+1})] \\ \text{s.t.} \quad & s_{t+1} - s_t = \alpha(s_t - c_t) \end{aligned}$$

根据式(3), 上述最优规划, 有,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln c_t}{\partial s_{t+1}} + \beta \frac{\partial \ln c_{t+1}}{\partial s_{t+1}} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{c_t} \cdot \left( -\frac{1}{\alpha} \right) + \beta \frac{1}{c_{t+1}} \frac{1+\alpha}{\alpha} &= 0 \quad \text{可从约束条件获得} \\ \Rightarrow c_{t+1} &= (1+\alpha)\beta c_t \end{aligned}$$

# 控制变量选 $c_t$

此时，约束条件为，

$$s_{t+1} = G(x_t, y_t) = s_t + \alpha(s_t - c_t)$$

有，

$$G_{x_t} = -\alpha \neq 0$$

- 因此不能选  $c_t$  做控制变量。

- 1 不确定情况下不能用拉格朗日法
- 2 McCandless(2008) 的动态规划
- 3 Wickens(2011) 的动态规划
- 4 Wash(2017) 的动态规划

# Wickens(2011) 的动态规划

Wickens(2011) 的思路更绝，直接目标函数对控制变量求导为 0，

$$\frac{\partial V(x_t)}{\partial y_t} = F_{y_t}(x_t, y_t) + \beta V_{y_t}(x_{t+1}) = 0$$

因为

$$V(x_{t+1}) = F(x_{t+1}, y_{t+1}) + \beta V(x_{t+2})$$

那么直接把  $V(x_{t+2})$  看作给定的，就有，

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x_{t+1})}{\partial y_t} &= \frac{\partial F(x_{t+1}, y_{t+1})}{\partial y_{t+1}} \frac{\partial y_{t+1}}{\partial y_t} \\ &= \frac{\partial F(x_{t+1}, y_{t+1})}{\partial y_{t+1}} \frac{\partial y_{t+1}}{\partial x_{t+1}} \frac{\partial x_{t+1}}{\partial y_t} \end{aligned}$$

- $\frac{\partial y_{t+1}}{\partial x_{t+1}} \frac{\partial x_{t+1}}{\partial y_t}$  可从约束条件直接得到。



# 为什么把 $V(x_{t+2})$ 看作给定?

注意到,

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(x_{t+2})}{\partial y_t} &= \frac{\partial F(x_{t+2}, y_{t+2})}{\partial y_{t+2}} \frac{\partial y_{t+2}}{\partial y_t} + V_y(x_{t+3}) \\ &= \frac{\partial F(x_{t+2}, y_{t+2})}{\partial y_{t+2}} \frac{\partial y_{t+2}}{\partial x_{t+2}} \frac{\partial x_{t+2}}{\partial y_t} + V_y(x_{t+3})\end{aligned}$$

很显然,  $\frac{\partial x_{t+2}}{\partial y_t} = 0$ , 不断替换下去, 可知  $V_y(x_{t+2})$  最终是等于 0 的。

# 重要公式

因此, Wickens(2011) 的一阶条件公式为,

$$F_{y_t}(x_t, y_t) + \beta \frac{\partial F(x_{t+1}, y_{t+1})}{\partial y_{t+1}} \frac{\partial y_{t+1}}{\partial x_{t+1}} \frac{\partial x_{t+1}}{\partial y_t} = 0$$

# 重复前面的例子

$$\begin{aligned} V(s_t) &= \max [\ln c_t + \beta \cdot V(s_{t+1})] \\ \text{s.t. } s_{t+1} - s_t &= \alpha(s_t - c_t) \end{aligned}$$

此时，即便把  $c_t$  看作控制变量也无妨，一阶条件为，

$$\begin{aligned} \frac{V(s_t)}{\partial c_t} &= \frac{\partial \ln c_t}{\partial c_t} + \beta \frac{\partial \ln c_{t+1}}{\partial c_{t+1}} \frac{\partial c_{t+1}}{\partial s_{t+1}} \frac{\partial s_{t+1}}{\partial c_t} \\ &= \frac{1}{c_t} + \beta \frac{1}{c_{t+1}} \frac{1 + \alpha}{\alpha} (-\alpha) = 0 \\ \implies c_{t+1} &= (1 + \alpha) c_t \beta \end{aligned}$$

- 1 不确定情况下不能用拉格朗日法
- 2 McCandless(2008) 的动态规划
- 3 Wickens(2011) 的动态规划
- 4 Wash(2017) 的动态规划

# Wash(2017) 的动态规划

以  $c_t$  为控制变量

先把约束写进动态规划，确保目标函数没有下一期的状态变量，

$$V(s_t) = \max \ln c_t + \beta V[\alpha(s_t - c_t) + s_t]$$

然后，对控制变量一阶求导，有，

$$\frac{\partial V(s_t)}{\partial c_t} = \frac{1}{c_t} - \beta V_s(s_{t+1}) \cdot \alpha = 0 \quad (5)$$

最后利用包络定理，有，

$$V_s(s_t) = \beta V_s(s_{t+1}) \cdot (\alpha + 1) \quad (6)$$

那么联立式(5)和式(6)，消掉  $V_s(\cdot)$  即可。

# 注意事项

## 注意

因为控制变量是由状态变量决定，因此在消除  $V_s(\cdot)$  时，要切记，只能把  $c_t$  时间脚标往前移，不能往后移。

式(5)意味着，

$$V_s(s_{t+1}) = \frac{1}{c_t \beta \alpha}$$

$$V_s(s_{t+2}) = \frac{1}{c_{t+1} \beta \alpha}$$

把式(6)的脚标往前推一期，有，

$$V_s(s_{t+1}) = \beta V_s(s_{t+2}) \cdot (\alpha + 1)$$

于是, 有,

$$\frac{1}{c_t \beta \alpha} = \frac{\alpha + 1}{\alpha c_{t+1}}$$
$$\implies c_{t+1} = (1 + \alpha) c_t \beta$$

# Wash(2017) 的动态规划

以  $s_{t+1}$  为控制变量

先把约束写进动态规划，消掉  $c_t$

$$V(s_t) = \max \ln \left( s_t - \frac{s_{t+1} - s_t}{\alpha} \right) + \beta V(s_{t+1})$$

然后，对控制变量  $s_{t+1}$  一阶求导，有，

$$\frac{\partial V(s_t)}{\partial s_{t+1}} = -\frac{1}{c_t} \cdot \frac{1}{\alpha} + \beta V_s(s_{t+1}) = 0 \quad (7)$$

最后利用包络定理，有，

$$V_s(s_t) = \frac{1}{c_t} \cdot \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) \quad (8)$$

那么把式(8)时间脚标往后推进一期代入式(7)，消掉  $V_s(s_{t+1})$ ，就能得到  $c_{t+1} = (1 + \alpha)c_t\beta$ 。



# Heer and Maussner (2009) 的方式

也可以令政策函数为  $s_{t+1} = h(s_t)$ , 代入目标函数, 然后两边对  $s_t$  求导, 有,

$$\begin{aligned} V_s(s_t) &= \frac{1}{c_t} \cdot \left( 1 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} h_s \right) + \beta V_s(s_{t+1}) \cdot h_s \\ &= \frac{1}{c_t} \cdot \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) \quad \text{利用了式(7)} \end{aligned}$$

同样可以得到  $c_{t+1} = (1 + \alpha)c_t\beta$ 。

## 与 McCandless (2008) 的主要区别

把约束条件用来消除控制变量  $y_t$  而不是  $x_{t+1}$ , 这样就避免了式(2)中  $\beta V_x(x_{t+1}) \cdot G_x(x_t, y_t)$  项的出现。

# 参考文献

- ① Walsh C E. Monetary Theory and Policy[M]. 4th ed. The MIT Press, 2017.
- ② Wickens M. Macroeconomic Theory: A Dynamic General Equilibrium Approach[M]. 2nd ed. Princeton: Princeton University Press, 2011.
- ③ McCandless G. The ABCs of RBCs[M]. Harvard University Press, 2008.
- ④ Heer B, Maussner A. Dynamic General Equilibrium Modeling[M]. Berlin: Springer, 2009.

# 感谢您的聆听!

## Questions?

Copyright ©2021 ECJTU



The Frog Prince