比较静态分析

陈普

2023 年 10 月 21 日

1 概念

模型中，**参数**是固定不变的输入对象。**外生变量**是可以变化的输入对象，但变化方式完全由模型构建者决定。**内生变量**是由参数和外生变量最终决定的输出对象。

不同参数值下，内生变量稳态值间的比较，称为比较静态分析。比如对于一个单一的商品市场模型，

$$
\begin{aligned}
Q &= a - bP, \qquad (a, b > 0), \qquad \text{需求方程} \\
Q &- c + dP, \qquad (c, d > 0), \qquad \text{供给方程}
\end{aligned}
$$

解为，

$$
\begin{aligned}
P^* &= \frac{a+c}{b+d} \\
Q^* &= \frac{ad-bc}{b+d}
\end{aligned}
$$

一旦获得均衡解，考察参数对均衡解的影响，无非是均衡解对参数求偏导。比如 $\frac{\partial Q^*}{\partial a}$，其符号的正负就给出了相当的经济含义。

特别注意 $\frac{\partial Q^*}{\partial a}$ 与 $\frac{\partial Q}{\partial a}$ 的差异。前者是比较静态分析，是考虑了需求和供给后参数 a 对均衡产量 Q^* 的影响。后者仅仅在需求函数背景下，考虑参数 a 对需求的影响。

2 一般的情形

注意到比较静态分析涉及到计算均衡解，有时不太容易得到解析解。比如一个简单的国民收入模型，

$$
Y = C(Y, T_0) + I_0 + G_0
$$

其中 Y 是 GDP，是内生变量，其他都是参数。C 是自变量为 Y 和 T_0（税收）的消费函数。此时根本无法得到均衡解 Y^* 的解析表达，仅能说可以得到 $Y^* = Y^*(I_0, G_0, T_0)$。因此，要获得 $\partial Y^*/\partial I_0$ 之类的表达式，必须借助隐函数求导方法。

2.1 隐函数的导数

单方程情形 对于方程，

$$
F(y, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) = 0 \tag{1}
$$

最终可以得到显示解为，

$$y = f(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) \tag{2}$$

式(1)和式(2)两边全微分，有，

$$F_y dy + F_1 d\alpha_1 + \cdots + F_m d\alpha_m = 0$$
$$dy = f_1 d\alpha_1 + f_2 \alpha_2 + \cdots + f_m d\alpha_m$$

上面第二个方程替换掉第一个方程的 dy，并整理，得，

$$(F_y f_1 + F_1) d\alpha_1 + (F_y f_2 + F_2) d\alpha_2 + \cdots + (F_y f_m + F_m) d\alpha_m = 0$$

因为 $d\alpha_1, \cdots, d\alpha_m$ 独立变量，上式要为 0，只有，

$$F_y f_i + F_i = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$

即，

$$f_i = \frac{\partial y}{\partial \alpha_i} = -\frac{F_i}{F_y}$$

联立方程情形　对于联立方程组，

$$\begin{aligned} F^1(y_1, y_2, \cdots, y_m; \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) &= 0 \\ F^2(y_1, y_2, \cdots, y_m; \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) &= 0 \\ &\vdots \\ F^n(y_1, y_2, \cdots, y_m; \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) &= 0 \end{aligned}$$

该联立方程有显示解，

$$\begin{aligned} y_1 &= f^1(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) \\ y_2 &= f^2(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) \\ &\vdots \\ y_n &= f^n(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) \end{aligned}$$

类似单方程的求解思路，先是对原隐函数方程组全微分，有，

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^1}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial F^1}{\partial y_2} dy_2 + \cdots + \frac{\partial F^1}{\partial y_n} dy_n &= -\left(\frac{\partial F^1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial F^1}{\partial \alpha_m} d\alpha_m\right) \\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial F^2}{\partial y_2} dy_2 + \cdots + \frac{\partial F^2}{\partial y_n} dy_n &= -\left(\frac{\partial F^2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial F^2}{\partial \alpha_m} d\alpha_m\right) \\ &\vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial F^n}{\partial y_2} dy_2 + \cdots + \frac{\partial F^1}{\partial y_n} dy_n &= -\left(\frac{\partial F^n}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial F^n}{\partial \alpha_m} d\alpha_m\right) \end{aligned}$$

再对显示解全微分，

$$\begin{aligned} dy_1 &= \frac{\partial y_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial y_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \cdots + \frac{\partial y_1}{\partial \alpha_m} d\alpha_m \\ dy_2 &= \frac{\partial y_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial y_2}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \cdots + \frac{\partial y_2}{\partial \alpha_m} d\alpha_m \\ &\vdots \\ dy_n &= \frac{\partial y_n}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial y_n}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \cdots + \frac{\partial y_n}{\partial \alpha_m} d\alpha_m \end{aligned}$$

然后开始消去 dy_i 并整理，但这里我们假设其他参数不变，只有 α_1 变（即 $d\alpha_1 \neq 0, d\alpha_2 = \cdots = d\alpha_m = 0$），这将极大简化整理工作，整理的结果为，

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y_1} & \frac{\partial F^1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} & \frac{\partial F^2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^2}{\partial y_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial F^n}{\partial y_1} & \frac{\partial F^n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y_n} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \alpha_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial \alpha_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F^1}{\partial \alpha_1} \\ -\frac{\partial F^2}{\partial \alpha_1} \\ \vdots \\ -\frac{\partial F^n}{\partial \alpha_1} \end{bmatrix} \tag{3}$$

可见上述系数矩阵不过是多元函数 $F = (F^1, F^2, \cdots, F^n)'$ 的雅克比矩阵。利用克莱姆法则，有，

$$\frac{\partial y_j}{\partial \alpha_1} = \frac{|A_j|}{|A|}, \qquad j \in 1, 2, \cdots, n$$

其中，A_j 是把 A 的第 j 列用式(3)等号右边的列，即 $(-\frac{\partial F^1}{\partial \alpha_1}, -\frac{\partial F^2}{\partial \alpha_1}, \cdots, -\frac{\partial F^n}{\partial \alpha_1})'$ 替换。

2.2 一个 IS-LM 曲线的示例

以下方程描述了 IS 和 LM 曲线，

$$\begin{aligned} Y =& C(Y^d) + I(r) + G_0 \\ L(Y, r) =& M_0^s \end{aligned}$$

其中，Y 是总产出；Y^d 是可支配收入，由 $Y^d = Y - T(Y)$ 定义，$T(\cdot)$ 是税收函数；$C(\cdot)$ 是消费函数；$I(r)$ 是投资函数，r 是利率；G_0 是外生的政府购买；$L(\cdot)$ 是货币需求函数；M_0^s 是外生的货币供给函数。上述方程组，Y, r 是内生变量，G_0, M_o^s 是外生变量。利用前面介绍的隐函数求导方法，可以获得 G_0 或 M_0^s 的比较静态分析。

首先，对方程组全微分，有，

$$\begin{aligned} dY - C'(Y^d)[1 - T'(Y)]dY - I'(r)dr = dG_0 \\ L_Y dY + L_r dr = dM_0^s \end{aligned}$$

写成矩阵形式，有，

$$\begin{bmatrix} 1 - C'(Y^d)[1 - T'(Y)] & -I'(r) \\ L_Y & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dY \\ dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dG_0 \\ dM_0^s \end{bmatrix}$$

现在仅考虑政府购买 G_0 的比较静态分析，即令 $dM_0^s = 0$，然后两边除以 dG_0，有，

$$\begin{bmatrix} 1 - C'(Y^d)[1 - T'(Y)] & -I'(r) \\ L_Y & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dY}{dG_0} \\ \frac{dr}{dG_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

易知，

$$|J| = \begin{vmatrix} 1 - C'(Y^d)[1 - T'(Y)] & -I'(r) \\ L_Y & L_r \end{vmatrix} = [1 - C'(1 - T')]L_r + L_r I' < 0$$

那么，利用克莱姆法则，就可以得到

$$\frac{dY^*}{dG_0} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -I' \\ 0 & L_r \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{L_r}{|J|} > 0, \qquad \because L_r < 0$$

$$\frac{dr^*}{dG_0} = \frac{\begin{vmatrix} 1 - C'(1 - T') & 1 \\ L_Y & 0 \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{-L_Y}{|J|} > 0, \qquad \because L_Y > 0$$

3 RBC 模型的比较静态分析

在一般均衡模型中，得到联立方程组更加复杂。此处以 RBC 模型为例，考察其比较静态分析。消费者问题写为，

$$\max_{c_t,l_t}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t,l_t)$$
$$s.t.\quad k_{t+1}=(1-\delta)k_t+\lambda_t k_t^{\theta}h_t^{1-\theta}-c_t$$
$$\text{其中，}u(c_t,l_t)=u(c_t,1-h_t)=\ln c_t+A\cdot\ln(1-h_t)$$

这里，c_t 是个人消费，l_t 是个人闲暇，h_t 是个人提供的劳动，$\lambda_t k_t^{\theta}h_t^{1-\theta}$ 是生产函数。针对该最优规划可以得到两个一阶条件，再联合约束条件、生产函数和利率决定式，有，

$$1=\beta E_t\left[\frac{C_t}{C_{t+1}}\cdot(r_{t+1}+1-\delta)\right]\qquad\text{消费的一阶条件}$$
$$(1-H_t)(1-\theta)\frac{Y_t}{H_t}=A\cdot C_t\qquad\text{劳动的一阶条件}$$
$$Y_t=\lambda_t K_t^{\theta}H_t^{1-\theta}$$
$$C_t=Y_t+(1-\delta)K_t-K_{t+1}$$
$$r_t=\theta\cdot\frac{Y_t}{K_t}$$

注意，大写字母是相应小写字母的总量形式，因为是完全竞争经济，个人最优也是总量最优。这五个方程的系统包含五个内生变量是 C_t,K_t,Y_t,H_t,r_t。

但这是一个动态方程，比较静态分析是针对稳态时参数变化对稳态时内生变量取值的影响。获得上述动态方程，可以去掉时间脚标获得稳态，即，

$$1=\beta(r+1-\delta)\tag{4}$$
$$(1-H)(1-\theta)\frac{Y}{H}=A\cdot C\tag{5}$$
$$Y=\lambda K^{\theta}H^{1-\theta}\tag{6}$$
$$C=Y-\delta K\tag{7}$$
$$r=\theta\cdot\frac{Y}{K}\tag{8}$$

- 要么直接求解，获得 C_t,K_t,Y_t,H_t,r_t 的解的解析表达，从而就能得到关于任何参数的比较静态分析。
- 要么按照前面隐函数求导方式，先获取雅克比矩阵，再利用克莱姆法则来得到任意参数的比较静态分析。

3.1 解析解

因为这个方程不算复杂，按第一种方式的确也可以得到解析解。先用式(6)和式(8)替换掉 r 和 Y。从而有，

$$1=\beta(\theta\lambda K^{\theta-1}H^{1-\theta}+1-\delta)\tag{9}$$
$$(1-H)(1-\theta)\lambda K^{\theta}H^{-\theta}=A\cdot C\tag{10}$$
$$C=\lambda K^{\theta}H^{1-\theta}-\delta K\tag{11}$$

第一个方程意味着劳动可以表达成资本的函数，

$$H = \left(\frac{1}{\theta\lambda\beta} - \frac{1-\delta}{\theta\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\theta}} K = GK$$

其中，$G = \left(\frac{1}{\theta\lambda\beta} - \frac{1-\delta}{\theta\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\theta}}$ 是常数。第一和第三个方程意味着消费也可以表达成资本的函数，

$$C = \left(\frac{1}{\beta\theta} - \frac{1-\delta}{\theta} - \delta\right) K = JK$$

其中 $J = \frac{1}{\beta\theta} - \frac{1-\delta}{\theta} - \delta$。把 H 和 C 的上述表达代入第二个方程，就可以得到 K 的解，

$$K = \frac{(1-\theta)(\delta+J)}{G[AJ+(1-\theta)(\delta+J)]}$$

从而得到 H, C 的表达式。这样，就可以使用 H, C, K 对参数求导，获得相应的比较静态分析。

3.2 隐函数的方法

解析解通常不可得，很多时候用隐函数求导才是通行法则。比如想考察系统对折旧率的比较静态分析，针对式(9)-式(11)，有，

$$\begin{bmatrix} \beta\theta\lambda(\theta-1)K^{\theta-2}H^{1-\theta} & \beta\theta\lambda(1-\theta)K^{\theta-1}H^{-\theta} & 0 \\ (1-H)(1-\theta)\theta\lambda K^{\theta-1}H^{-\theta} & (1-\theta)\lambda K^{\theta}(-\theta H^{-\theta-1}-(1-\theta)H^{-\theta}) & -A \\ \theta\lambda K^{\theta-1}H^{1-\theta}-\delta & (1-\theta)\lambda K^{\theta}H^{-\theta} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dK \\ dH \\ dC \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta \\ 0 \\ -K \end{bmatrix} d\delta$$

运用克莱姆法则，可以获得，

$$\frac{dK}{d\delta} = \frac{\begin{vmatrix} -\beta & \beta\theta\lambda(1-\theta)K^{\theta-1}H^{-\theta} & 0 \\ 0 & (1-\theta)\lambda K^{\theta}(-\theta H^{-\theta-1}-(1-\theta)H^{-\theta}) & -A \\ -K & (1-\theta)\lambda K^{\theta}H^{-\theta} & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta\theta\lambda(\theta-1)K^{\theta-2}H^{1-\theta} & \beta\theta\lambda(1-\theta)K^{\theta-1}H^{-\theta} & 0 \\ (1-H)(1-\theta)\theta\lambda K^{\theta-1}H^{-\theta} & (1-\theta)\lambda K^{\theta}(-\theta H^{-\theta-1}-(1-\theta)H^{-\theta}) & -A \\ \theta\lambda K^{\theta-1}H^{1-\theta}-\delta & (1-\theta)\lambda K^{\theta}H^{-\theta} & -1 \end{vmatrix}}$$

3.3 更加通用的做法

实际上，针对这样的模型，我们通常不会这么复杂地去计算。我们往往求稳态，然后改变参数再求稳态，从而得到一系列参数的变化和稳态变化的数据。然后就可以绘制一条横轴为感兴趣的参数，纵轴为感兴趣的稳态变量的图来呈现比较静态分析。这也是我们在现代文献中经常看到的比较静态分析。

3.4 R 语言代码对三种方式计算的比较

解析解计算 解析解可在 R 语言中用符号计算完成，具体代码如下，

```
library(symengine)
use_vars(theta,lambda,bt,dlt,A)
G <- (1/(theta*lambda*bt)-(1-dlt)/(theta*lambda))^(1/(1-theta))
J <- 1/(bt*theta)-(1-dlt)/theta-dlt
K <- (1-theta)*(dlt+J)/(G*A*J+G*(1-theta)*(dlt+J))
dk <- D(K,dlt) |> as.function() # K对delta求导
ana <- dk(A = 1.72, bt = 0.99, dlt = 0.025, theta = 0.36, lambda = 1) # 赋值运算
```

克莱姆法则计算 注意到克莱姆法则公式的雅克比矩阵涉及内生变量本身，这些值我们要取稳态值。因此，首先求解式(9)至式(11)的解。非线性方程组求解，初值的设置至关重要。设置不好，无法得解。这样的初值问题在变量越多时越严重。因此，解非线性方程组要尽量压缩方程数目。因此，我们此处选择猜测 K 值，然后用式(8)得到 H，再利用式(9)得到 C，最后把式(10)作为验证方程，这样的话，我们可以把三方程三变量的系统最终转换成单变量单方程的系统，函数可以书写如下，

```
HCK <- function(K, dlt, slv = TRUE){
        H <- (1/(theta*lambda*bt)-(1-dlt)/(theta*lambda))^(1/(1-theta))*K
        Cm <- (1/(bt*theta)-(1-dlt)/theta-dlt)*K
        ifelse(slv,
                return((1-H)*(1-theta)*lambda*K^theta*H^(-theta)-A*Cm), # 验证方程
                return(c(Hbar = H, Cmbar = Cm))) # 返回其他内生变量稳态
}
```

但计算雅克比矩阵则需要三个方程，三个变量，因此方程系统要重新写一个函数如下，

```
HCK2 <- function(x){
        K <- x[1]
        H <- x[2]
        Cm <- x[3]
        return(c(bt*(theta*lambda*K^(theta-1)*H^(1-theta)+1-dlt)-1,
               (1-H)*(1-theta)*lambda*K^theta*H^(-theta)-A*Cm,
                Cm - lambda*K^theta*H^(1-theta)+dlt*K))
}
```

在代码中载入函数，然后如下计算，

```
# 求稳态
library(rootSolve)
library(numDeriv)
lambda <- 1
bt <- 0.99
dlt <- 0.025
theta <- 0.36
A <- 1.72

Kbar <- multiroot(HCK, dlt = dlt, start = 1)$root # 解非线性方程
Cmbar <- HCK(Kbar, dlt = dlt, FALSE)['Cmbar']
Hbar <- HCK(Kbar, dlt = dlt, FALSE)['Hbar']
# 克莱姆法则
jac1 <- jac <- jacobian(HCK2, x = c(Kbar, Hbar, Cmbar)) # 雅克比矩阵
jac1[,1] <- c(bt,0,-Kbar)
cram <- det(jac1)/det(jac)
```

模拟法则 接着前面的代码，继续书写如下，

```
dlt <- Kpic <- seq(0.01,0.05, 0.002)
for (i in 1:length(Kpic)) {
        Kpic[i] <- multiroot(HCK, dlt = dlt[i], start = 1)$root
}
pic <- data.frame(dlt, Kpic)
pos <- which.min(abs(pic$dlt - 0.025))
simu <- with(pic, (Kpic[9]-Kpic[8])/(dlt[9]-dlt[8]))
```

```
c(ana = ana, cram = cram, simu = simu) # 三种方式的比较
#       ana       cram       simu
#   -530.4709 -530.4710 -531.0540
```