常替代弹性

陈普　整理

1　第一个常替代弹性函数

一个经常使用的常替代弹性消费函数如下，

$$u(c)=\frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$$

这个常替代弹性指的是跨期替代弹性是一个常数，即第一期消费和第二期消费之间的替代弹性是一个常数。这一点可以根据替代弹性的定义[1]来计算得到。

替代弹性定义为，

$$e=\frac{\ln(c_2/c_1)}{\ln|u'(c_1)/u'(c_2)|}$$

其中脚标 1 和 2 表示时期，分母其实是边际技术替代率 $MRTS_{c_1,c_2}$。因为，

$$MRTS_{c_1,c_2}=\left|\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)}\right|=\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{-\sigma}=\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\sigma}$$

两边取对数有，

$$\begin{aligned}
&\ln MRTS_{c_1,c_2}=\sigma\ln\frac{c_2}{c_1}\\
\Longrightarrow\ &\ln\frac{c_2}{c_1}=\frac{1}{\sigma}\ln MRTS_{c_1,c_2}\\
\Longrightarrow\ &e=\frac{d\ln\left(\frac{c_2}{c_1}\right)}{d\ln MRTS_{c_1,c_2}}=\frac{1}{\sigma}
\end{aligned}$$

因此，$\frac{1}{\sigma}$ 就是消费的跨期替代弹性。

塌缩成对数函数　要注意到，当 $\sigma\to 1$ 时，该函数塌缩成对数函数，这主要用到了洛必达法则，

$$\lim_{\sigma\to 1}\frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}=\lim_{\sigma\to 1}\frac{-c^{1-\sigma}\ln c}{-1}=\ln c$$

2　另一个常替代弹性函数

另一个常替代弹性的函数经常在生产函数中使用，形式如下，

$$Y_t=[\alpha K_t^{\rho}+(1-\alpha)N_t^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}}$$

[1]关于替代弹性的详细说明，见 https://common2016.github.io/chenpu.github.io/files/ela.pdf。

按照替代弹性的定义，可以计算，

$$\begin{aligned}
MRTS_{K,N} =& \left|\frac{Y_K}{Y_H}\right| = \frac{\frac{1}{\rho}[\alpha K_t^\rho + (1-\alpha)N_t^\rho]^{\frac{1}{\rho}-1}\alpha K_t^{\rho-1}}{\frac{1}{\rho}[\alpha K_t^\rho + (1-\alpha)N_t^\rho]^{\frac{1}{\rho}-1}(1-\alpha)N_t^{\rho-1}} \\
=& \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{K_t}{N_t}\right)^{\rho-1} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{N_t}{K_t}\right)^{1-\rho} \\
\Longrightarrow \quad \ln MRTS_{K,N} =& (1-\rho)\ln\left(\frac{N_t}{K_t}\right) + \ln\frac{\alpha}{1-\alpha} \\
\Longrightarrow \quad \frac{d\ln\left(\frac{N_t}{K_t}\right)}{d\ln MRTS_{K,N}} =& \frac{1}{1-\rho} \quad \because \text{求导}
\end{aligned}$$

即资本和劳动的替代弹性为，

$$e = \frac{1}{1-\rho}$$

可以看到影响替代弹性的主要是 ρ 而不是 α。

塌缩成道格科布拉斯函数 当 $\rho \to 0$ 时，该生产函数塌缩成道格科布拉斯生产函数，

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to 0}[\alpha K_t^\rho + (1-\alpha)N_t^\rho]^{\frac{1}{\rho}} =& = \lim_{\rho\to 0} e^{\frac{1}{\rho}\ln[\alpha K_t^\rho + (1-\alpha)N_t^\rho]} = \lim_{\rho\to 0} e^{\frac{\ln[\alpha K_t^\rho + (1-\alpha)N_t^\rho]}{\rho}} \\
=& e^{\lim_{\rho\to 0}\frac{\ln[\alpha K_t^\rho + (1-\alpha)N_t^\rho - 1 + 1]}{\rho}} \\
=& e^{\lim_{\rho\to 0}\frac{\alpha K^\rho + (1-\alpha)N^\rho + 1}{\rho}} \quad \text{用到了等价无穷小} \ln(x+1) \sim x \\
=& e^{\lim_{\rho\to 0}\frac{\alpha K^\rho \ln K + (1-\alpha)N^\rho \ln N}{1}} \\
=& e^{\alpha\ln K + (1-\alpha)\ln N} \\
=& K^\alpha N^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

3 善于利用这两种函数的嵌套

- 第一个常替代弹性只有一个变量 c，所以往往用它来描述跨期替代。
- 第二常替代弹性有两个变量 K, L，所以往往用它来描述同期但不同变量的替代。

当我们在构造新的消费或生产函数时，要善于运用这些函数形式进行嵌套。比如如果涉及到内生决定的劳动力，就可以如下构造效用函数，

$$u(C, 1-L) = \frac{[C^\iota(1-L)^{1-\iota}]^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}$$

也可以更加一般地，

$$u(C, 1-L) = \frac{[C^\rho + \kappa(1-L)^\rho]^{\frac{1-\sigma}{1-\rho}} - 1}{1-\sigma}$$

很多时候，考虑到消费不仅包含私人消费，还包括政府消费，则可以把 C 再嵌套一下，

$$C = [\phi(C^p)^\rho + (1-\phi)G^\rho]^{\frac{1}{\rho}}$$

其中 C^p 表示私人消费，G 表示政府消费。可以看到这些参数都有着非常明确的经济含义，在校准的时候，就要注意。