MÉMOIRES
PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS
À L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE FRANCE
EXTRAIT DU TOME XXXIII

MÉMOIRE
SUR
LE PROBLÈME D'ANALYSE
RELATIF À L'ÉQUILIBRE
DES
PLAQUES ÉLASTIQUES ENCASTRÉES

PAR

M. JACQUES HADAMARD

PARIS
IMPRIMERIE NATIONALE

MDCCCCVIII

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

À L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT NATIONAL DE FRANCE.

TOME XXXIII. — N° 4.

MÉMOIRE

SUR

LE PROBLÈME D'ANALYSE

RELATIF À L'ÉQUILIBRE

DES

PLAQUES ÉLASTIQUES ENCASTRÉES,

PAR

Salomon

M. JACQUES HADAMARD.

Dans le présent mémoire, j'ai principalement en vue l'étude de la loi suivant laquelle varient les diverses quantités qui interviennent dans la détermination des fonctions biharmoniques lorsqu'on fait varier la *forme* du domaine qui les engendre.

Les problèmes fondamentaux relatifs à l'équation $\Delta\Delta V = 0$ et aux équations connexes $\Delta\Delta V - kV = 0$ peuvent être regardés comme résolus en principe par la théorie des équations intégrales de MM. Fredholm et Hilbert. Celle-ci permet d'établir, pour toute aire plane S, limitée par un contour C sur lequel les coordonnées x

IMPRIMERIE NATIONALE.

PDY

et y admettent, par rapport à l'arc s, des dérivées des trois premiers ordres, l'existence d'une fonction V, solution de l'équation $\Delta\Delta V = 0$ et telle que V et $\frac{dV}{dn}$ prennent sur C des valeurs données (supposées elles-mêmes dérivables).

Nous aurons à écrire, un peu plus loin, les formules par lesquelles s'exprime cette fonction V.

En particulier, on peut former ainsi une « fonction de Green d'ordre 2 » Γ_A^B, définie par les propriétés suivantes :

1° Considérée comme fonction des coordonnées du point B, Γ est égale à $r^2 \log r$ ($r = \overline{AB}$) moins une fonction analytique et régulière (Γ);

2° (Γ) et, par suite, Γ sont solutions de l'équation $\Delta\Delta\Gamma = 0$;

3° $\Gamma = \frac{d\Gamma}{dn} = 0$ en tout point du contour C.

Cette fonction $\Gamma_B^A = \Gamma_A^B$, symétrique par rapport aux deux points dont elle dépend, représente la flexion normale qu'éprouverait, en B, une plaque élastique mince, homogène et isotrope, ayant la forme de l'aire S, encastrée sur tout son contour et soumise à une force normale unique appliquée en A.

La connaissance de la fonction Γ permet de représenter par une quadrature simple unique la solution du problème précédent. Il suffit de substituer Γ_A^M à U_M (V étant toujours la fonction inconnue) dans la formule fondamentale

$$(\mathrm{F}) \qquad \iint_S (U \cdot \Delta\Delta V - V \cdot \Delta\Delta U)\, dS = -\int_C \left[U \frac{d(\Delta V)}{dn} - \frac{dU}{dn} \Delta V + \frac{dV}{dn} \Delta U - V \frac{d(\Delta U)}{dn} \right] ds.$$

De plus, une fois la fonction Γ connue, les *nombres fondamen-*

taux k et les *fonctions fondamentales* V de l'aire S relatifs à $\Delta\Delta V$, c'est-à-dire définis par les conditions

$$\Delta\Delta V - kV = 0 \quad \text{dans S,}$$

$$V = \frac{dV}{dn} = 0 \qquad \text{sur C}$$

s'obtiennent par la résolution de l'équation intégrale

$$V_A - \frac{1}{8\pi k}\iint_S \Gamma_A^M V_M dS_M = 0.$$

Dans cette équation, le « noyau » est symétrique par rapport aux deux points dont il dépend. Elle admet une infinité de racines, toutes réelles et positives.

Les diverses expressions dont nous venons de rappeler la formation dépendent :

1° Des coordonnées d'un ou plusieurs points intérieurs à S;

2° De la forme du contour C.

Je me propose, dans le présent travail, d'examiner l'influence de ce dernier élément et de ses variations : en particulier, les problèmes de maxima et de minima qui s'y rapportent.

I

Lorsqu'on déforme infiniment peu le contour C envisagé, en portant sur ses normales des longueurs infiniment petites δn, les variations infinitésimales des diverses quantités précédentes s'expriment par des formules toutes semblables à celles qui représentent les variations des intégrales définies ordinaires[1].

Prenons, par exemple, la fonction de Green Γ_A^B considérée tout à l'heure, et supposons que, sans changer les points A, B, on déforme infiniment peu le contour C en un contour C', la distance normale δn des deux contours étant considérée comme positive si c'est le contour C' qui est à l'intérieur de C, comme négative dans le cas contraire.

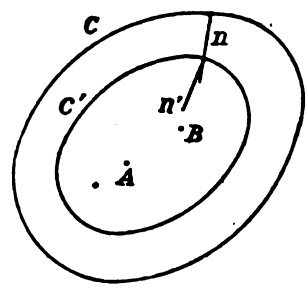

Fig. 1.

Nous allons commencer par supposer que c'est le premier cas qui se présente en chaque point. Alors la fonction Γ relative au nouveau contour est définie dans tout l'intérieur de l'ancien. On peut donc, dans l'intérieur de C', appliquer aux deux fonctions $u_M = \Gamma_A^M$, $v_M = \Gamma_A'^M$ la formule fondamentale (F), qui se réduit à

$$\int\left(\Delta\Gamma \frac{d\Gamma'}{dn'} - \Gamma' \frac{d\Delta\Gamma}{dn'}\right) ds' = 8\pi(\Gamma_A^B - \Gamma_B'^A).$$

[1] Les quantités qui nous occupent rentrent donc dans la catégorie étudiée par M. Volterra dans son mémoire bien connu sur les fonctions de lignes (*Acta Math.*, t. 12). Nous avons (*C. R.*, 9 février 1903) étendu ceci aux surfaces.

Or, sur le contour C, Γ est nul ainsi que sa dérivée normale $\frac{d\Gamma}{dn}$; au point correspondant (situé à une distance δn) de C′, Γ aura augmenté de $\delta n \frac{d\Gamma}{dn} = 0$, et $\frac{d\Gamma}{dn}$, de $\delta n \frac{d^2\Gamma}{dn^2}$.

Quant à $\frac{d\Gamma}{dn'}$, il devra être considéré comme égal à $\frac{d\Gamma}{dn}$, quoique l'angle des normales n, n' (fig. 1) aux deux contours soit infiniment petit du premier ordre, parce que la dérivée $\frac{d\Gamma}{ds}$ est nulle sur C, et, par conséquent, la dérivée $\frac{d\Gamma}{ds'}$ infiniment petite sur C′.

Donc *la formule se réduit à*

$$8\pi\left(\Gamma^{B}_{A} - \Gamma'^{A}_{B}\right) = 8\pi\left(\Gamma^{A}_{B} - \Gamma'^{A}_{B}\right) = \int_{C'} \Delta\Gamma' \frac{d^2\Gamma}{dn^2}\,\delta n\, ds,$$

ou, plus symétriquement,

$$(1) \qquad -8\pi\delta\Gamma = 8\pi\left(\Gamma^{A}_{B} - \Gamma'^{A}_{B}\right) = \int \Delta\Gamma\,\Delta\Gamma'\,\delta n\, ds = \int \frac{d^2\Gamma}{dn^2}\frac{d^2\Gamma'}{dn^2}\,\delta n\, ds$$

$\left(\text{car } \frac{d^2\Gamma}{ds^2} \text{ et } \frac{d\Gamma}{dn}\right.$ étant nuls, $\Delta\Gamma$ se réduit à $\left.\frac{d^2\Gamma}{dn^2}\right)$, formules où, aux seconds membres, Γ et Γ' désignent respectivement les fonctions Γ^{M}_{A} et Γ^{M}_{B} relatives toutes deux au contour C, tandis qu'aux premiers membres, Γ^{A}_{B} et Γ'^{A}_{B} sont relatifs, l'un au contour C, l'autre au contour C′.

Nous avons raisonné comme si C′ était partout extérieur à C; mais, dans le cas contraire, il suffirait, pour constater que la formule est encore valable, de comparer C et C′ à un troisième contour C″ qui leur soit extérieur à tous deux.

La même méthode, appliquée à la *fonction de Green g* du problème de Dirichlet, en donne la variation sous la forme

$$(2) \qquad \delta g^{A}_{B} = g'^{A}_{B} - g^{A}_{B} = \frac{-1}{2\pi}\int \frac{dg^{M}_{A}}{dn_{M}}\frac{dg^{M}_{B}}{dn_{M}}\, ds_{M}\,\delta n_{M}.$$

En raisonnant sur la *fonction de Neumann* γ, qui est définie par les relations

$$\gamma_A^M = \log \frac{1}{MA} + \text{fonct. harmonique},$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\gamma}{dn} = \text{const.} = \dfrac{2\pi}{C} \\ \displaystyle\int_C \gamma\, ds = 0 \end{array}\right\} \quad \text{sur } C$$

(où la quantité C représente la longueur du contour correspondant), on trouve

$$(2') \qquad \delta\gamma_A^B = \int \left(\frac{1}{2\pi} \frac{d\gamma_A^M}{ds} \frac{d\gamma_B^M}{ds} + \frac{1}{CR}(\gamma_A^M + \gamma_B^M) - \frac{2\pi}{C^2} \right) \delta n\, ds,$$

R étant le rayon de courbure de C.

Les formules précédentes peuvent encore s'interpréter de la manière suivante.

Comparons la relation (1) à la formule

$$(G) \qquad 8\pi V_A = \int_C \left(\frac{dV}{dn} \Delta\Gamma - V \frac{d\Delta\Gamma}{dn} \right) ds,$$

qui fait connaître une solution de l'équation

$$\Delta\Delta V = 0$$

en fonction des valeurs de V et de $\frac{dV}{dn}$ sur C, ainsi que de la fonction de Green.

Nous voyons que la quantité

$$\delta\Gamma_A^B = \Gamma_{1B}^A$$

peut être définie comme la solution (par rapport aux coordonnées de B) de l'équation

$$\Delta\Delta\Gamma_1 = 0$$

qui, sur C, satisfait aux conditions

$$(1^{bis}) \qquad \Gamma_1 = 0 \quad \frac{d\Gamma_1}{dn} = -\delta n \Delta_2 \Gamma_2^A.$$

De même, δg_2^A peut être défini comme la fonction harmonique des coordonnées de B qui prend, sur C, les valeurs $-\delta n \frac{dg_A}{dn}$.

Envisageons maintenant une *fonction fondamentale* V de l'aire donnée, satisfaisant aux relations

$$\Delta\Delta V = kV \qquad \text{dans l'aire S,}$$

$$V = \frac{dV}{dn} = 0 \quad \text{sur C.}$$

Si C est déformé en C′, k sera changé en $k+k_1$, V en $V+V_1$, k_1 et V_1 étant infiniment petits du premier ordre; et l'on a, tout d'abord,

$$\Delta\Delta V_1 = k_1 V + k V_1, \qquad \text{dans S,}$$

$$V_1 = 0, \ \frac{dV_1}{dn} = -\frac{d^2 V_1}{dn^2}\delta n \qquad \text{sur C.}$$

En appliquant à V et à V_1 la formule fondamentale dans C, *on trouve* alors

$$k_1 \iint V^2 dS = \int \Delta V \frac{d^2 V}{dn^2} \delta n ds = \int (\Delta V)^2 \delta n ds = \int \left(\frac{d^2 V}{dn^2}\right)^2 \delta n ds.$$

On serait arrivé au même résultat en considérant V comme solution d'une équation de Fredholm et tenant compte de l'expression trouvée pour la variation de la fonction Γ.

De même, si U est la fonction fondamentale qui vérifie les relations

$$\Delta U = -hU, \qquad \text{dans } S,$$

$$U = 0, \qquad \text{sur } C,$$

on a, par déformation,

$$\delta h \int U^2 dS = \int \left(\frac{dU}{dn}\right)^2 \delta n\, ds.$$

Les nombres fondamentaux k et h sont, comme il était évident à priori, décroissants quand le contour s'élargit.

Par contre, ces nombres pourraient être des extrema si C était assujetti à avoir une longueur constante, ou à limiter une aire S constante. Dans le premier cas, on devrait avoir, sur tout le contour C,

$$\left(\frac{d^2V}{dn^2}\right)^2 = \frac{\lambda}{R}, \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{dU}{dn}\right)^2 = \frac{\lambda}{R}$$

(λ étant une constante et R le rayon de courbure[1]); dans le second,

$$\left(\frac{d^2V}{dn^2}\right)^2 = \lambda \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{dU}{dn}\right)^2 = \lambda.$$

Les lignes qui vérifieront l'une ou l'autre de ces équations pourront être dites, comme dans le calcul des variations ordinaire, des *extrémales* pour les problèmes correspondants.

[1] On voit que, dans les deux exemples cités dans le texte, les contours susceptibles de répondre à la question sont nécessairement convexes, comme il était d'ailleurs évident à priori.

II

§ 1.

Avant de poursuivre les conséquences des formules qui précèdent, revenons sur le problème fondamental en lui-même, — c'est-à-dire sur la recherche de la fonction biharmonique V connaissant les valeurs de V et de $\frac{dV}{dn}$ à la frontière, — et indiquons comment on peut le résoudre par la méthode que l'on doit à M. Fredholm.

Un autre Mémoire du même auteur nous fournit une première voie par laquelle cette résolution peut s'opérer. Le problème dont il s'agit étant dérivé de la théorie de l'élasticité, il suffit de s'inspirer de la solution donnée par M. Fredholm (*Arkiv för Matematik*, t. 2, n° 28, 1906) pour le problème de l'équilibre élastique. On commencera donc[1] par traiter le cas où C se réduit à une droite (et, par conséquent, S à un demi-plan) : on est alors aisément conduit à mettre V sous la forme

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} V(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_C \left[u\left(\frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} + P\,\frac{d^2 \log \frac{1}{r}}{dn^2} \right) + vP\,\frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} \right] ds \\ - \frac{1}{\pi}\int_C \left(\frac{2uP^3}{r^4} + v\,\frac{P^2}{r^2} \right) ds, \end{aligned} \right.$$

r, n, s ayant leur signification habituelle, pendant que P représente la distance du point (x,y) à la droite donnée et que u, v sont les valeurs données de V et de sa dérivée normale.

[1] Comparer FREDHOLM (*loc. cit.*), p. 4.

IMPRIMERIE NATIONALE.

Si, maintenant, nous considérons de nouveau C comme un contour curviligne fermé, P désignant la distance du point (x, y) à la tangente du contour, l'intégrale précédente est encore (quelle que soit la distribution des valeurs de u, v) une solution de l'équation $\Delta\Delta V = 0$. Si, de plus, le point (x, y) vient en un point (x_1, y_1) du contour correspondant à la valeur s_1 de s et où la normale est n_1, les fonctions

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &k_1(s_1, s) = \frac{2P^3}{\pi r^4}, && k_2(s_1, s) = \frac{1}{\pi}\frac{P^2}{r^3},\\ &l_1(s_1, s) = \frac{d}{dn_1}\frac{2}{\pi}\frac{P^3}{r^4}, && l_2(s_1, s) = \frac{d}{dn_1}\frac{1}{\pi}\frac{P^2}{r^3}\end{aligned}\right.$$

sont finies, même pour $s_1 = s$. Enfin, si l'on suppose que u admet une dérivée, on trouve que l'intégrale $V(x, y)$ répond à la question pourvu que l'on ait :

$$(4')\left\{\begin{aligned} &u(s_1) + \int [u(s)k_1(s_1, s) + v(s)k_2(s_1, s)]\,ds = V(s_1) = V(x_1, y_1),\\ &v(s_1) + \frac{2}{R_1}u(s_1) + \int [u(s)l_1(s_1, s) + v(s)l_2(s_1, s)]\,ds = W(s_1) = \frac{dV}{dn_1}\end{aligned}\right.$$

[R_1 étant le rayon de courbure de C au point (x_1, y_1)][1].

On arrive d'ailleurs, comme nous allons le voir, à un résultat presque identique par une méthode directe. L'interprétation phy-

[1] En supposant que u a une dérivée seconde, la manière la plus rapide d'obtenir la valeur limite de l'intégrale (3) sur notre contour consiste à transformer le terme $\dfrac{d^2\log\frac{1}{r}}{dn^2}$ par la relation

$$\frac{d^2\log\frac{1}{r}}{dn^2} = -\frac{d^2\log\frac{1}{r}}{ds^2} + \frac{1}{R}\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn}$$

$\left(\text{conséquence de } \Delta\log\frac{1}{r} = 0\right)$. En intégrant par parties le terme en $\dfrac{d^2\log\frac{1}{r}}{ds^2}$ (sous la condition que u admette des dérivées premières et secondes), on est ramené à des potentiels de simples et de doubles couches ordinaires.

Ce résultat sera étendu plus loin au cas où u n'est dérivable qu'une fois.

sique du problème, telle que la donne la théorie des plaques élastiques, conduit à introduire les quantités

$$(5)\qquad \begin{cases} DV = (1-k)\Delta V + k\dfrac{d^2V}{dn^2}, \\ \mathcal{D}V = \dfrac{d}{dn}\Delta V + k\dfrac{d}{ds}\dfrac{\partial^2 V}{\partial t \partial n}, \end{cases}$$

les notations étant celles de mon Mémoire *sur l'équilibre des plaques élastiques circulaires libres ou appuyées et sur celui de la sphère isotrope*[1], avec $\lambda = 1$ et $\mu = \frac{k}{2}$. Ces quantités DV et $\mathcal{D}$V sont ainsi définies en chaque point de C[2].

La formule fondamentale (F) [voir plus haut, page 2] s'écrit, moyennant ces nouvelles notations,

$$(F_1)\qquad \begin{cases} \displaystyle\iint (U\Delta\Delta V - V\Delta\Delta U)\,dS \\ \qquad\qquad = -\displaystyle\int_C \left(U\mathcal{D}V - DV\frac{dU}{dn} + DU\frac{dV}{dn} - V\mathcal{D}U\right)ds, \end{cases}$$

les termes en k qui proviennent des expressions (5) donnant une intégrale nulle, ainsi qu'il est aisé de le constater.

Or, si l'on fait

$$U = r^2 \log r,$$

r étant la distance du point variable M à un point déterminé quelconque A du plan, on trouve, pour DU et $\mathcal{D}$U, des expressions qui, si k est choisi quelconque, deviennent infinies lorsque A et M

(1) *Annales de l'École normale supérieure*, 3e série, tome XVIII (1901), page 313.

(2) La quantité $\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial n}$ a la signification indiquée à la page 316 du Mémoire qui vient d'être cité dans la note précédente, autrement dit, satisfait à la formule (7) de ce Mémoire.

viennent coïncider avec un même point de C. Mais, pour $k=2$, on obtient simplement

$$
\begin{aligned}
\mathrm{DU} &= -\Delta(r^2\log r) + 2\frac{d^2 r^2 \log r}{dn^2} \\
&= 4\left(\frac{\mathrm{P}^2}{r^2} - \frac{1}{2}\right), \\
\mathfrak{D}\mathrm{U} &= \frac{d}{dn}\Delta(r^2\log r) + 2\frac{d}{ds}\frac{\partial^2(r^2\log r)}{\partial s\,\partial n} \\
&= -8\frac{\mathrm{P}^3}{r^4} + \frac{8}{\mathrm{R}}\left(\frac{\mathrm{P}^2}{r^2} - \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

(R étant le rayon de courbure de C en M.)

Nous chercherons dès lors, pour une fonction biharmonique quelconque dans S, une expression de la forme

$$
(6)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{V} &= \int_c \left[-\frac{\xi}{4\pi}\mathfrak{D}(r^2\log r) + \frac{\eta}{4\pi}\mathrm{D}(r^2\log r)\right] ds \\
&= \frac{1}{\pi}\int_c \left[2\frac{\mathrm{P}^3}{r^4} - \frac{2}{\mathrm{R}}\left(\frac{\mathrm{P}^2}{r^2} - \frac{1}{2}\right)\right]\xi + \left(\frac{\mathrm{P}^2}{r^2} - \frac{1}{2}\right)\eta\Bigg] ds.
\end{aligned}
\right.
$$

L'allure de cette intégrale et de sa dérivée normale lorsque le point A s'approche d'un point du contour se déduisent immédiatement des résultats écrits plus haut. On voit donc que l'intégrale V vérifiera les conditions du problème si la distribution des valeurs de ξ et de η le long de C satisfait aux équations intégrales

$$
(7)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\xi_{s_1} + \int \big(f(s_1, s)\,\xi_s + g(s_1, s)\,\eta_s\big)\,ds = \mathrm{V}(s_1), \\
&\eta_{s_1} + \int \big(h(s_1, s)\,\xi_s + i(s_1, s)\,\eta_s\big)\,ds = \frac{d\mathrm{V}}{dn_1} = \mathrm{W}(s_1),
\end{aligned}
\right.
$$

f, g, h, i étant donnés par les formules

$$
(7')\qquad \left\{
\begin{aligned}
f(s_1, s) &= -\frac{1}{4\pi}\mathfrak{D}_s(r^2\log r) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\mathrm{P}^3}{r^4} - \frac{1}{\mathrm{R}_s}\left(\frac{\mathrm{P}^2}{r^2} - \frac{1}{2}\right)\right], \\
g(s_1, s) &= \frac{1}{4\pi}\mathrm{D}_s(r^2\log r) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\mathrm{P}^2}{r^2} - \frac{1}{2}\right), \\
h(s_1, s) &= -\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dn_1}\mathfrak{D}_s(r^2\log r) = l_1(s_1, s) - \frac{2}{\mathrm{R}_s} l_2(s_1, s), \\
i(s_1, s) &= \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dn_1}\mathrm{D}_s(r^2\log r) = l_2(s_1, s),
\end{aligned}
\right.
$$

où les symboles D_s, $\mathfrak{D}_s$ signifient que les opérations D, $\mathfrak{D}$ sont appliquées à la fonction $r^2 \log r$ (r étant la distance des deux points qui correspondent aux valeurs s, s_1 de l'arc) par rapport aux coordonnées du point s, l'autre point étant considéré comme fixe, pendant que P est la distance de ce second point à la tangente au premier.

C'est évidemment aux mêmes formules qu'on parviendrait en partant des résultats de M. Lauricella[1] relatifs au problème élastique de l'espace, par l'application des relations qui servent à passer de ce problème à celui des plaques élastiques planes, savoir :

$$w = V(x, y), \qquad u = z\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad v = z\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Les équations (7) ne diffèrent, au fond, des équations (4′) précédemment formées, que par le terme $-\frac{1}{2}$ ajouté à $\frac{P^2}{r^2}$ dans les fonctions f et g. À ce terme près (lequel a pour effet d'augmenter V d'une constante), elles reviennent aux premières moyennant le changement d'inconnues

$$u = \xi, \qquad v = -\frac{2\xi}{R} + \eta. \tag{8}$$

Les fonctions f, g, h, i étant partout finies (du moment que notre courbe C est sans point double et à courbure finie), les équations (7) rentrent dans le type le plus simple considéré par M. Fredholm.

Un tel système d'équations revient, comme on sait[2], à une

[1] LAURICELLA, Alcune applicazioni della teoria delle equazioni funzionali alla fisica matematica; *Nuovo Cimento*, série 5, t. XIII, 1907.

[2] FREDHOLM, *Acta Math.*, t. 27, p. 365 et suiv. (spécialement p. 379). — Ce Mémoire, dont nous adopterons les notations pour ce qui regarde la résolution des équations intégrales, sera désigné dans ce qui va suivre par la lettre A. — Voir un exemple de calcul analogue à celui qui est indiqué dans le texte, chez Kellogg, *Zur Theorie der Integralgleichungen und des Dirichlet-schen Princips*, Thèse, Göttingue, 1902, p. 12.

équation intégrale unique, dans laquelle il faut seulement supposer que chacune des variables s, s_1 décrit deux fois le domaine d'intégration donné (c'est-à-dire la longueur de C). Chacune de ces variables doit donc être considérée comme ayant successivement deux significations différentes, suivant qu'elle porte les valeurs ξ ou les valeurs η. Suivant ces significations, la fonction f de M. Fredholm a successivement les quatre expressions f, g, h, i définies par les équations (7').

Il en résulte, bien entendu, que chaque terme des expressions D_f et $D_f\binom{x}{y}$[1] est une somme d'un certain nombre d'intégrales, obtenues en attribuant à chacune des variables d'intégration successivement les deux significations dont elle est susceptible.

La méthode de M. Fredholm, appliquée dans ces conditions, *fournit la solution du problème*. Nous avons toutefois à nous assurer :

1° Que les valeurs trouvées de ξ admettent[2] une dérivée. — Il suffit de se reporter aux formules (7) pour constater qu'il en est bien ainsi du moment que f, g et la donnée V en admettent une;

2° Que le déterminant de l'équation intégrale est différent de zéro, c'est-à-dire que les équations sans seconds membres

$$(9)\qquad \begin{cases} \xi_{s_1}+\int\left[f(s_1,s)\xi_s+g(s_1,s)\eta_s\right]ds=0, \\ \eta_{s_1}+\int\left[h(s_1,s)\xi_s+i(s_1,s)\eta_s\right]ds=0 \end{cases}$$

n'admettent pas de solution non identiquement nulle.

Nous ferons cette démonstration pour le cas d'une aire à un seul contour, auquel nous nous bornerons d'ailleurs dans tout ce qui va suivre[3].

[1] Fredholm, A.

[2] Cf. p. 10, note.

[3] Dans le cas contraire, la solution devrait être complétée comme il arrive pour le problème de Dirichlet (Kellogg, Thèse, p. 11-15).

Une solution des équations (9) serait donnée par les formules de M. Fredholm[1]. Elle admettra donc, si elle existe, des dérivées d'un ordre aussi élevé qu'on voudra, pourvu que f, g, h, i admettent les dérivées correspondantes. La formule (6) définira dès lors, tant dans la partie S du plan intérieure à C que dans la partie S′ extérieure, une fonction V telle que V éprouve, au passage de C, la discontinuité 2ξ, et $\frac{dV}{dn_1}$, la discontinuité 2η.

Cette fonction V devrait[2] être identiquement nulle dans S, et c'est ce que nous devons montrer être impossible.

À cet effet, considérons les expressions DV et $\mathfrak{D}$V.

Ces expressions sont continues au passage de C[3]. Comme elles

[1] Fredholm, A, p. 374.

[2] En vertu des formules (10), (10′), moyennant des conditions qui seront examinées à la fin de ce paragraphe.

[3] Ce fait peut se vérifier par l'application répétée des méthodes qui servent à former les discontinuités de V et de $\frac{dV}{dn_1}$. Mais on peut se dispenser d'un tel calcul en utilisant la formule fondamentale

$$\left.\begin{matrix}8\pi V_A\\ 0\end{matrix}\right\}=\Phi(A)$$
$$=-\int\left[V\mathfrak{D}(r^2\log r)-\frac{dV}{dn}D(r^2\log r)+DV\frac{d}{dn}r^2\log r-r^2\log r\,\mathfrak{D}V\right]ds.$$

Cette formule s'applique en prenant pour V, ... leurs valeurs intérieures V_i (lesquelles existent toutes, si C est analytique et régulier, car, comme nous le verrons plus loin, V_i est alors analytique et holomorphe même sur C), et en donnant au premier membre la valeur $8\pi V_A$ ou la valeur zéro, suivant que le point A, origine des rayons vecteurs, est dans S ou dans S′.

Mais elle s'applique également en prenant pour les diverses quantités qui figurent sous le signe $\int$ leurs valeurs extérieures, ou, du moins, on peut écrire, dans ces conditions, la différence des résultats relatifs à deux positions A, A′ quelconques du point A (car, si C est un très grand cercle, cette différence est infiniment petite). En un mot, si A est un point intérieur quelconque, A′ un point extérieur et que $\Psi(A)$ désigne la quantité qu'on déduit de $\Phi(A)$ en remplaçant les valeurs intérieures de V, ... par les valeurs extérieures, on a

$$\Phi(A')-\Psi(A)=-8\pi V_{A'}.$$

D'où, en tenant compte de la formule (6) et des discontinuités trouvées pour V, $\frac{dV}{dn_1}$,

$$\int\left\{[DV]\frac{d}{dn}(r^2\log r)-[\mathfrak{D}V]r^2\log r\right\}ds$$
$$=\int\left\{[DV]\frac{d}{dn}(r'^2\log r')-[\mathfrak{D}V]r'^2\log r'\right\}ds$$

(en appelant [DV], [$\mathfrak{D}$V] les discontinuités subies par $\mathfrak{D}$V, DV, et r, r'

sont nulles du côté intérieur, elles sont nulles également du côté extérieur.

Mais on a, si V vérifie l'équation $\Delta\Delta V = 0$,

$$\int\left(V\frac{d\Delta V}{dn} - \Delta V\frac{dV}{dn}\right)ds = \iint(\Delta V)^2 dS. \tag{10}$$

En ajoutant le double de l'intégrale[1]

$$\int\left(V\frac{d}{ds}\frac{\partial^2 V}{\partial t\partial n} + \frac{dV}{dn}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right)ds = \int\left(\frac{\partial^2 V}{dt^2}\frac{dV}{dn} - \frac{\partial^2 V}{\partial t\partial n}\frac{\partial V}{\partial t}\right)ds$$
$$= \iint\left[-\cos(n,y)\frac{D\left(V,\frac{\partial V}{\partial x}\right)}{D(x,y)} + \cos(n,x)\frac{D\left(V,\frac{\partial V}{\partial y}\right)}{D(x,y)}\right]ds$$

et tenant compte de l'identité

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{D\left(V,\frac{\partial V}{\partial y}\right)}{D(x,y)} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{D\left(V,\frac{\partial V}{\partial x}\right)}{D(x,y)} = 2\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\right)^2\right],$$

on peut écrire

$$\iint\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\right)^2 = \int\left(V\mathfrak{D}V - \frac{dV}{dn}DV\right)ds = 0 \tag{10'}$$

et cette formule s'applique à l'aire S′, l'intégrale simple étant infiniment petite lorsqu'on la prend le long d'un très grand cercle.

On aura donc, dans tout S′,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} = 0,$$

les rayons vecteurs issus de A, A′). Or, ceci donne $[DV] = [\mathfrak{D}V] = 0$; car, en appliquant aux deux membres de l'égalité précédente l'opération Δ, soit par rapport aux coordonnées du point A, soit par rapport à celles de A′, on a des potentiels ordinaires dont la discontinuité est [DV].

[1] t est, comme dans le Mémoire cité des *Annales de l'École normale supérieure* (voir page 11, note 1), un axe tangent à la courbe.

et, par conséquent, on voit que les valeurs extérieures de V et de $\frac{dV}{dn}$ sont les mêmes que les valeurs correspondantes relatives à la fonction

$$V = h(x^2 + y^2) + ax + by + c = V_0$$

(h, a, b, c étant des constantes). Ces valeurs devraient représenter les valeurs mêmes de 2ξ et de 2η.

Or (si h, a, b, c ne sont pas nuls) une telle détermination de ξ et de η (avec $\mathrm{D}V = \mathfrak{D}V = 0$) ne donnerait pas $V = 0$ à l'intérieur, mais bien

$$\begin{aligned} V = \int_c \left[-\frac{V_0}{8\pi} \mathfrak{D}(r^2 \log r) + \frac{1}{8\pi} \frac{dV_0}{dn} \mathrm{D}(r^2 \log r) \right] ds \\ = h(x^2 + y^2) + ax + by + c, \end{aligned}$$

en vertu de la formule fondamentale.

Il est dès lors établi (du moins tant que les coordonnées d'un point de C sont dérivables un nombre suffisant de fois par rapport à l'arc) que *le déterminant de notre équation de Fredholm est différent de zéro.*

On aura donc ξ et η par les formules mêmes que donne la méthode de M. Fredholm, c'est-à-dire sous la forme

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi_{s_1} &= V_{s_1} + \int \left(F(s_1, s) V_s + G(s_1, s) W_s \right) ds, \\ \eta_{s_1} &= W_{s_1} + \int \left(H(s_1, s) V_s + I(s_1, s) W_s \right) ds, \end{aligned} \right.$$

F, G, H, I étant quatre nouvelles fonctions déduites de f, g, h, i par les formules de M. Fredholm.

Sous la forme où nous venons de les présenter, nos raisonnements impliqueraient, relativement à la régularité des données, des hypothèses inutiles en réalité.

IMPRIMERIE NATIONALE.

Nous allons montrer que, comme nous l'avons annoncé précédemment, *nos conclusions sont valables si l'on suppose :*

1° Que, sur C, x et y admettent des dérivées (continues) des trois premiers ordres par rapport à l'arc s : autrement dit, *que la courbure* $\frac{1}{R}$ *existe et admet une dérivée continue par rapport à* s;

2° *Que les valeurs données* V *admettent, par rapport à* s, *une dérivée première, la donnée* $\frac{dV}{dn_1}$ *étant en outre continue.*

1. Commençons par ces dernières conditions. Elles correspondent à la validité des équations intégrales elles-mêmes.

L'étude de la limite de la quantité (4) ou (6) et celle de la dérivée normale correspondante lorsque le point (x, y) vient au contour, se font à l'aide de la formule mentionnée à la page 10 (note 1), — ou encore à l'aide de la formule (6 *bis*) (page 26), — dans le cas où u a une dérivée seconde.

Pour étendre le résultat obtenu au cas où u n'a qu'une dérivée première, il suffit (en ce qui concerne la formule relative à $\frac{dV}{dn_1}$, la seule qui offre une difficulté) de démontrer que $\int \left| (s-s_1) \frac{d}{dn_1}\left(\frac{P^3}{r^4}\right) \right| ds$ reste fini quand le point (x, y) tend vers (x_1, y_1) en suivant la normale en ce point.

Or $\left(\frac{s-s_1}{r}\right.$ étant assurément fini$\left.\right)$ ce fait résulte des relations

$$\left| \frac{d}{dn_1} \frac{P^3}{r^4} \right| < \frac{8P}{r^3}, \quad \frac{P}{r^2} ds = d\psi$$

$$(\psi = (r, n_1)).$$

La première d'entre elles subsisterait si l'on remplaçait la dérivée $\frac{d}{dn_1}$ par $\frac{d}{dt_1}$, t_1 étant une direction parallèle à la tangente à C au point s_1. Il en résulte que, dans les conditions qui viennent d'être examinées, $\frac{dV}{dt_1}$ tend vers une limite, laquelle n'est autre que la dérivée par rapport à s_1 de la valeur limite de V (puisqu'il en est assurément ainsi lorsque u a des dérivées d'ordre supérieur).

Quant à v, tout ce que nous venons de dire le suppose seulement continu, comme on le voit en se reportant aux expressions de k_2, l_2, $\frac{dk_2}{ds_1}$.

Ces conditions sont d'ailleurs vérifiées si $\left(\text{la courbe C admettant une courbure finie } \frac{1}{R}\right)$ la donnée W est continue et V une fois dérivable.

En effet, moyennant la seule existence d'une courbure bornée, les fonctions k_1, k_2 (et, par conséquent, les fonctions f, g, qui en sont des combinaisons linéaires à coefficients indépendants de s_1) admettent, non seulement des dérivées, mais des dérivées secondes bornées par rapport à s_1, ainsi que le montrent aisément, par exemple, les expressions de k_1 et de k_2 par les formules (31) (voir plus loin, page 41).

Dès lors, pour obtenir la dérivée — et même, s'il y a lieu, la dérivée seconde — de u ou de ξ, il suffira de tirer cette quantité de la première formule (4′) ou (7), en y considérant le terme intégral comme connu.

Si u avait une dérivée seconde et v une dérivée première, la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial t_1 \partial n_1}$ (obtenue en exprimant V à l'aide de deux coordonnées rectangulaires, rapportées à des axes respectivement tangent et normal à C en (x_1, y_1), ou à des axes parallèles à ceux-là) tendrait (toujours dans les mêmes conditions) vers une limite, dont la valeur s'obtiendrait en dérivant celles de $\frac{dV}{dn_1}$ et de V au contour, conformément à la formule (7) du mémoire précédemment cité[1].

C'est ce que l'on verra encore en démontrant que les intégrales

$$\int (s-s_1)^2 \left| \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial n_1} \frac{P^2}{r^4} \right| ds, \qquad \int (s-s_1) \left| \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial n_1} \frac{P^2}{r^2} \right| ds$$

sont limitées en valeur absolue.

$\frac{\partial}{\partial n_1}\left(\frac{P^2}{r^4}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial n_1}\left(\frac{P^2}{r^2}\right)$ peuvent être considérés comme donnés, à des facteurs numériques près, par les seconds membres des formules (32) (voir encore page 41), φ et ψ étant les angles que le rayon vecteur r fait avec n et n_1, et le calcul de leurs dérivées $\frac{\partial}{\partial t_1}$ se ramène à celui de la dérivée correspondante pour la quantité $\frac{P}{r^2} = \frac{\cos\varphi}{r}$; or on a :

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\cos\varphi}{r} = \frac{\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi}{r^2} = \frac{\sin(\varphi+\psi)}{r^2} - \frac{2\cos\varphi\sin\psi}{r^2}$$

$$= \frac{\gamma'(s-s_1)}{r^2} - \frac{2\cos\varphi\sin\psi}{r^2}$$

[1] Voir page 11, note 1.

($|\gamma'|$ étant inférieur à la plus grande valeur de la courbure sur l'arc considéré) : ce qui fournit bien le résultat annoncé.

Si la dérivée seconde de u et la dérivée de v sont continues, la convergence de $\frac{\partial^2 V}{\partial t_1 \partial n_1}$ vers sa limite sera uniforme.

2. Considérons, en second lieu, un système de valeurs de ξ, η (auquel correspondent, par les relations (8), des valeurs de u, v) satisfaisant aux équations (9).

ξ admettra une dérivée seconde, en vertu de ce qui a été démontré sur

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2},$$

et même une dérivée troisième si $\frac{1}{R}$ admet une dérivée $\left(\frac{1}{R}\right)'$. Moyennant cette dernière hypothèse, η (et par conséquent v) admettront également une dérivée première, car les dérivées $\frac{\partial k}{\partial s_1}, \frac{\partial i}{\partial s_1}$ sont bornées en même temps que la quantité $\frac{\sin(\varphi - \psi)}{r^2}$, c'est-à-dire[1] en même temps que $\left(\frac{1}{R}\right)'$.

Assurons-nous d'abord que la fonction V déduite des valeurs envisagées de ξ, η devra être nulle dans S.

Cela ne résulte pas immédiatement des formules (10), (10').

Il n'en serait ainsi que si ΔV et $\frac{d}{dn_1}\Delta V$ (ou DV et $\mathfrak{D}$V) restaient finis le long d'une courbe C_1 parallèle à C, la distance de ces deux courbes tendant vers zéro.

Or on a aisément :

$$\begin{aligned} DV = & \int \left[2uP \frac{\partial^4 \log \frac{1}{r}}{\partial n^2 \partial n_1^2} + 2v \left(P \frac{\partial^3 \log \frac{1}{r}}{\partial n \partial n_1^2} + \frac{\partial^2 \log \frac{1}{r}}{\partial n_1^2} \right) \right] ds \\ & - \int \left\{ 2uP \frac{\partial^4 \log \frac{1}{r}}{\partial n^2 \partial n_1^2} + 2v \left[P \frac{\partial^3 \log \frac{1}{r}}{\partial n \partial n_1^2} - \left(1 - \cos(n, n_1)\right) \frac{\partial^2 \log \frac{1}{r}}{\partial n \partial n_1} \right.\right. \\ & \left.\left. \qquad - \sin(n, n_1) \frac{\partial^2 \log \frac{1}{r}}{\partial s \partial n_1} \right] \right\} ds + \int 2v \frac{\partial^2 \log \frac{1}{r}}{\partial n \partial n_1} ds. \end{aligned}$$

[1] Comparer plus loin, formule (66 *bis*), page 107.

La première intégrale du dernier membre est finie, en vertu de considérations toutes semblables aux précédentes, du moment que v a une dérivée et u une dérivée seconde. Mais la seconde est la dérivée normale d'un potentiel de double couche, pour la régularité de laquelle l'existence de $\frac{dv}{ds}$ ne suffit pas.

Seulement, en vertu de l'identité

$$\frac{\partial^2 \log \frac{1}{r}}{\partial n \partial n_1} + \frac{\partial^2 \log \frac{1}{r}}{\partial s \partial s_1} = 0,$$

ce second terme peut s'écrire

$$-\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial s_1},$$

$$\mathfrak{V} = \int 2v \frac{d \log \frac{1}{r}}{ds} ds.$$

La quantité $\mathfrak{V}$ est finie dans les environs de C, moyennant l'existence de la dérivée continue $\frac{dv}{ds}$.

Dans l'intégrale $\int_{C_1} \frac{\partial V}{\partial n_1} \mathrm{D}V$, le terme $-\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial s_1}$ de DV donnera, à une quantité près qui tend certainement vers zéro,

$$\int \mathfrak{V} \frac{\partial^2 V}{\partial t_1 \partial n_1} ds_1,$$

laquelle est bien infiniment petite, puisque $\mathfrak{V}$ est fini et que $\frac{\partial^2 V}{\partial t_1 \partial n_1}$ tend vers zéro.

De même, la quantité $\mathcal{D}$V, qui introduit les dérivées troisièmes de V, n'est pas nécessairement finie moyennant les conditions précédemment supposées. Mais elle est la dérivée, par rapport à l'arc s_1 de C_1, de l'expression

$$2 \frac{\partial^2 V}{\partial t_1 \partial n_1} + \mathfrak{W}$$

où $\mathfrak{W}$ est la fonction conjuguée de ΔV, soit

$$\mathfrak{W} = 2 \int \left(u \frac{\partial^3 \log \frac{1}{r}}{\partial t \partial n^2} + v \frac{\partial^2 \log \frac{1}{r}}{\partial t \partial n} \right) ds.$$

L'intégrale $\int_{C_1} V\mathfrak{D}V ds_1$ peut alors s'écrire

$$-\int_{C_1} \frac{dV}{ds_1}\left(2\frac{\partial^2 V}{\partial t_1 \partial n_1} + \varpi\right) ds_1.$$

Or nous avons vu que (si ξ, η satisfont aux équations (9)) non seulement V, mais $\frac{dV}{ds_1}$ tendent vers zéro. D'autre part, le facteur

$$2\frac{\partial^2 V}{\partial t_1 \partial n_1} + \varpi = 2\int\left\{ u\left[\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial n_1}\left(P\frac{\partial^2 \log\frac{1}{r}}{\partial n^2} + \frac{\partial \log\frac{1}{r}}{\partial n}\right) + \frac{\partial^3 \log\frac{1}{r}}{\partial t \partial n^2}\right]\right.$$

$$\left. + v\left[\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial n_1}\left(P\frac{\partial \log\frac{1}{r}}{\partial n}\right) + \frac{\partial^2 \log\frac{1}{r}}{\partial t \partial n}\right]\right\} ds$$

reste fini (et même continu) dans nos hypothèses $\left(\text{le terme } \frac{\partial P}{\partial n_1}\frac{\partial^3 \log\frac{1}{r}}{\partial t_1 \partial n}\right.$ détruisant sensiblement, dans le coefficient de v sous le signe $\int$, le terme $\left.\frac{\partial^2 \log\frac{1}{r}}{\partial t \partial n}\right)$.

Donc l'intégrale (10′) est bien nulle dans S, et V y est identiquement nul.

3. De ce que V s'annule identiquement nul dans S, résulte le même fait pour DV et $\mathfrak{D}$V, ou DV et $2\frac{\partial^2 V}{\partial t_1 \partial n_1} + \varpi$.

On peut alors affirmer la continuité de ces quantités au passage de C, établie seulement jusqu'ici (page 15, note 3) pour le cas où les données admettent des dérivées d'ordre suffisamment élevé.

Le seul terme qui pourrait mettre cette conclusion en défaut (les autres se traitant par des méthodes toutes semblables aux précédentes) est, en effet, la dérivée normale de potentiel de double couche qui figure dans la valeur de DV. Or un théorème de M. Liapounoff[1] nous apprend que si cette dérivée a une valeur limite d'un côté de C, — et nous savons que c'est ici le cas, — elle en a une, égale à la première, du côté opposé.

Les conclusions annoncées sont donc complètement démontrées.

[1] *C. R.*, 8 novembre 1897.

§ 2.

Le résultat qui précède entraîne dès maintenant certaines conséquences qu'il y a lieu de signaler.

Il va nous permettre d'étendre au problème actuel un important théorème de M. Painlevé, celui qui s'énonce ainsi :

Une fonction harmonique V (et, par conséquent aussi, une fonction analytique de variable complexe), *définie d'un certain côté d'un arc de courbe analytique* C, *est prolongeable au delà de* C, *si la suite des valeurs qu'elle prend sur* C *est analytique.*

La démonstration repose, comme on le sait, sur les propriétés de la représentation conforme : elle ne peut, sous cette forme, s'appliquer ni au cas de l'espace, ni aux équations aux dérivées partielles autres que celle de Laplace.

Voyons comment le même théorème peut se démontrer à l'aide de la méthode de M. Fredholm.

Prenons d'abord le problème de Dirichlet lui-même. Considérons l'arc de courbe donné comme emprunté au contour d'une aire S (le reste de ce contour n'étant pas nécessairement analytique) et la fonction V comme définie à l'intérieur de S par ses valeurs sur ce contour.

On devra, avec Neumann et M. Fredholm, représenter V par un potentiel de double couche :

$$V = \int \frac{u}{\pi} \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} ds, \tag{12}$$

et u sera déterminé par l'équation intégrale

$$V_{s_1} = u_{s_1} + \int f(s_1, s) u_s ds.$$

Or la fonction $f(s_1, s)$, — qui n'est autre que $\frac{P}{r^2}$, dans le système de notations employé ci-dessus, — est visiblement analytique et holomorphe par rapport à chacune des variables dont elle dépend, pour toutes les valeurs de cette variable qui correspondent à des points de l'arc donné.

Il en est dès lors de même pour la fonction $D_f\binom{s_1}{s}$ qui figure dans la formule de résolution, puisque la série qui la définit est uniformément convergente.

Donc *les valeurs de u forment une suite analytique sur l'arc donné.*

Il reste à en déduire que le potentiel V peut être prolongé au delà de l'arc en question.

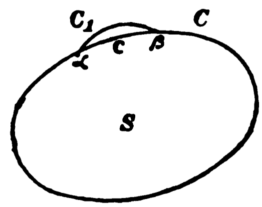

Fig. 2.

Joignons, à cet effet, deux points α, β de C par un chemin C_1 extérieur à S (fig. 2). U étant une fonction harmonique quelconque, on a, pour tout point intérieur à S,

$$\int_{c+C_1}\left(\frac{U d\log\frac{1}{r}}{dn} - \log\frac{1}{r}\frac{dU}{dn}\right) ds = 0$$

c étant l'arc $\alpha\beta$ de C.

Or on peut choisir la fonction U de manière à vérifier l'équation aux dérivées partielles donnée

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \tag{13}$$

et, sur C, les conditions

$$U = u, \qquad \frac{dU}{dn} = 0.$$

Cela résulte du théorème de Cauchy-Kowalewski, puisque l'arc C est analytique, ainsi que la suite des valeurs de u.

Cette fonction U sera d'ailleurs harmonique dans toute l'aire comprise entre c et C_1, si celle-ci a été prise suffisamment petite.

La fonction (12) peut alors s'écrire

$$V = \int_{C-c} \frac{u}{\pi} \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} ds + \frac{1}{\pi} \int_{C_1} \left(\frac{U d \log \frac{1}{r}}{dn} - \log \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} \right) ds.$$

La propriété que nous avions en vue est donc immédiatement en évidence.

Une démonstration toute semblable s'appliquerait manifestement à un potentiel de simple couche, de sorte que la possibilité du prolongement serait encore établie si V était donné par les valeurs de sa dérivée normale, celles-ci formant une suite analytique.

Il est visible, maintenant, que cette méthode est tout à fait générale.

Elle s'applique à toute équation linéaire aux dérivées partielles (*à coefficients analytiques*) *du type elliptique.* Il suffira de remplacer $\log \frac{1}{r}$ par la *solution fondamentale*, dont l'existence et l'analyticité sont aujourd'hui connues, et de faire le changement correspondant sur la fonction $f(s_1, s)$.

Elle s'applique au cas de l'espace, du moment qu'on peut y étendre la méthode de Fredholm et notre raisonnement sur le prolongement des potentiels.

Enfin elle répond aussi à la question *en ce qui concerne notre problème élastique*. Si, en effet, l'arc C est analytique ainsi que les

valeurs de V et de $\frac{dV}{dn}$, il en sera de même des quantités ξ, η. Or, l'expression (6) de V peut s'écrire, en vertu des formules (3) (4) (7′), sous la forme

$$V = \frac{1}{\pi}\int_c \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn} + P\frac{d^2\log\frac{1}{r}}{dn^2} - \frac{2}{R}\left(P\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{2}\right)\right]\xi \\ &+\left(P\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{2}\right)\eta \end{aligned} \right\} ds,$$

ou, en vertu des formules

$$\frac{d^2\log\frac{1}{r}}{dn^2} = -\frac{d^2\log\frac{1}{r}}{ds^2} + \frac{1}{R}\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn},$$

$$P = \alpha(x_0 - x) + \beta(y_0 - y)$$

$$\big(\alpha = \cos(n, x), \qquad \beta = \cos(n, y)\big),$$

sous la forme

$$(6^{bis}) \quad V(x_0, y_0) = V_0 + W_0 + x_0(V_1 + W_1) + y_0(V_2 + W_2) + C$$

avec

$$V_0 = \int \log\frac{1}{r}\frac{d^2}{ds^2}\left[\xi(\alpha x + \beta y)\right] ds,$$

$$V_1 = -\int \log\frac{1}{r}\frac{d^2}{ds^2}(\alpha\xi) ds, \qquad V_2 = -\int \log\frac{d^2}{ds^2}(\beta\xi) ds$$

$$W_0 = \int \left[\xi + (\alpha x + \beta y)\left(\frac{\xi}{R} - \eta\right)\right]\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn} ds$$

$$W_1 = \int \alpha\left(\eta - \frac{\xi}{R}\right)\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn} ds, \qquad W_2 = \int \beta\left(\eta - \frac{\xi}{R}\right)\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn} ds$$

$$C = \int \left(\frac{\xi}{R} - \frac{\eta}{2}\right) ds.$$

V étant ainsi représenté (aux facteurs x_0, y_0 près) par une somme de potentiels de simples et de doubles couches, à distributions analytiques, augmentés de la constante C, le théorème est démontré.

Comme cas particulier des propositions précédentes, les fonctions de Green dont nous avons rappelé plus haut la définition sont prolongeables analytiquement au delà de toute portion analytique du contour donné, tant que les deux points dont elles dépendent restent distincts.

Il en est de même, dès lors, des diverses fonctions fondamentales mentionnées plus haut.

Si les deux points A, B dont dépend une fonction de Green g, γ ou Γ s'approchent indéfiniment d'un même point du contour, cette fonction devient irrégulière. Mais il résulte encore des théorèmes précédents que *sa singularité ne dépend que de la forme de* C *au voisinage du point en question*. Si, sans changer un certain arc de C autour de ce point, on modifie d'une manière arbitraire la partie restante du contour, les fonctions de Green sont augmentées de quantités qui sont des fonctions holomorphes des coordonnées des deux points A, B.

§ 3.

La fonction que nous avons appelée Γ_B^A (fonction de Green d'ordre deux) jouit de certaines propriétés qui lui sont particulières et que nous devons rappeler et compléter.

M. Boggio a montré [1] que, si B coïncide avec A, on a

$$\Gamma_A^A > 0. \tag{14}$$

Il a remarqué, en outre [2], que cette inégalité ne doit pas être particulière au cas de B confondu avec A. Si, en effet, on se re-

[1] *Rendic. Ac. dei Lincei*, t. X, 1901. — [2] *Loc. cit.*, p. 201.

porte à la signification physique de la quantité Γ, c'est-à-dire si on l'envisage comme la flexion produite en B par une force unique appliquée en A, on est conduit à admettre comme physiquement évident que Γ^{A}_{B} est positif pour toutes les positions possibles de A et de B.

Notre formule

$$(1)\qquad 8\pi\delta\Gamma^{A}_{B} = -\int \Delta_{M}\Gamma^{M}_{A}\,\Delta_{M}\Gamma^{M}_{B}\,\delta n\, ds_{M}$$

va nous conduire à une extension de ces remarques. Si on y fait coïncider B avec A, elle devient

$$(15)\qquad 8\pi\delta\Gamma^{A}_{A} = -\int (\Delta\Gamma^{M}_{A})^{2}\,\delta n\, ds.$$

Elle montre que si δn est positif, c'est-à-dire *si le contour déformé est intérieur au contour primitif, la flexion* Γ^{A}_{A} *diminue dans la déformation.*

La formule (15) est relative à deux contours infiniment voisins. Mais deux contours quelconques peuvent être déduits l'un de l'autre par une déformation continue dépendant d'un paramètre α, de sorte que l'on peut écrire en vertu de (1),

$$(16)\qquad 8\pi\left(\Gamma'^{A}_{B} - \Gamma^{A}_{B}\right) = -\int \delta\alpha \int \Delta\Gamma^{M}_{A}\,\Delta\Gamma^{M}_{B}\,\frac{\delta n}{\delta\alpha}\, ds.$$

Si le second contour est intérieur au premier, on peut toujours supposer que les δn successifs seront positifs, et, si B coïncide avec A, le second membre de (16) est forcément négatif.

Ainsi *la flexion* Γ^{A}_{A} *est toujours plus petite pour un contour enveloppé que pour un contour enveloppant.*

Là encore, on peut considérer comme physiquement évident qu'il en est de même pour la flexion Γ^{A}_{B} quels que soient A et B,

en attendant que ce fait reçoive une démonstration mathématique. Du moins, cette proposition, comme l'inégalité $\Gamma^{\rm A}_{\rm B} > 0$, paraît incontestable pour tout contour convexe.

Sans tenter la démonstration mathématique de ces inégalités[1], notons qu'elles seraient établies, en vertu de la formule (1), si l'on pouvait prouver, en tout point du contour C, l'inégalité

$$\Delta\Gamma > 0, \tag{17}$$

laquelle, ainsi que l'inégalité

$$\frac{d\Delta\Gamma}{dn} < 0, \tag{18}$$

serait nécessaire, d'après la formule

$$8\pi V_{\rm A} = \int \left(\frac{dV}{dn} \Delta\Gamma - V \frac{d\Delta\Gamma}{dn} \right) ds, \tag{G}$$

pour que (comme il est encore physiquement vraisemblable) toute fonction V, solution de l'équation donnée, soit positive à l'intérieur de S si elle l'est, ainsi que sa dérivée normale, sur le contour C[2].

Mais, si nous ne sommes pas renseignés d'une manière rigoureuse sur les signes des quantités $\Gamma^{\rm A}_{\rm B}$, $\delta\Gamma^{\rm A}_{\rm B}$, nous avons des limites supérieures de leurs valeurs absolues. On a

$$(\Gamma^{\rm A}_{\rm B})^2 < \Gamma^{\rm A}_{\rm A} \Gamma^{\rm B}_{\rm B}. \tag{19}$$

[1] La seconde d'entre elles a été vérifiée, dans le cas où les deux contours sont circulaires, par M. Boggio (*Rendic. Circ. Mat. di Palermo*, t. XX, p. 128).

[2] Nous pouvons seulement affirmer qu'on a l'inégalité (18) lorsque l'un des points A, B est sur C et l'autre très voisin de lui. C'est ce que montre la formule (23) établie plus loin, dans laquelle le second membre devient très grand tandis que le terme intégral conserve une valeur finie.

Plus généralement, si Γ' est la fonction de Green relative à un contour enveloppé et Γ la fonction relative à un contour enveloppant, on a

$$(20)\qquad (\Gamma^A_B - \Gamma'^A_B)^2 < (\Gamma^A_A - \Gamma'^A_A)(\Gamma^B_B - \Gamma'^B_B).$$

En effet, si dans la relation (16), la quantité $\frac{\delta n}{\delta \alpha}$ est constamment positive, on peut appliquer à son second membre l'inégalité de M. Schwartz, et on aboutit à la conclusion indiquée [1].

Ces résultats permettent, entre autres conséquences, de compléter la définition de notre fonction de Green telle qu'elle a été donnée dans ce qui précède.

Nous avons supposé, en effet, pour appliquer la méthode de M. Fredholm, — et, par conséquent, pour définir la fonction Γ, — que C avait non seulement une tangente continue, mais même une courbure finie continue et dérivable.

Supposons qu'il en soit autrement et que, par exemple, C présente un point anguleux. On pourra tracer des contours C_1 satisfaisant aux conditions de régularité postulées jusqu'ici et se rapprochant autant qu'on le veut de C.

Si ces contours C_1 enveloppent C et sont intérieurs les uns aux autres, les quantités Γ^A_A correspondantes iront en décroissant et, — puisqu'elles sont supérieures à celle qu'on déduirait d'un contour C'_1 quelconque intérieur à C, — tendront vers une limite.

[1] L'inégalité (19) (cas particulier de [20]) résulte encore de la relation

$$\iint V \cdot \Delta\Delta V\, dS = \iint (\Delta V)^2\, dS,$$

qui est vérifiée par toute fonction V nulle sur C ainsi que sa dérivée normale, et qui donne (en posant $\Delta\Delta V = \psi$)

$$\iint \cdot \iint \psi_A \psi_B \Gamma^A_B\, dS_A\, dS_B > 0.$$

Ceci montre Γ^A_B comme un « noyau défini » au sens de M. Hilbert, et entraîne la condition (19).

Cette conclusion, établie pour les expressions Γ_A^A, s'étend par cela même aux expressions Γ_B^A. C'est, en effet, ce que montre, en vertu du critère de convergence de Cauchy, l'inégalité (20).

On pourrait de même partir du contour intérieur C_1' et admettre qu'il s'élargit de plus en plus en restant intérieur à C et tendant vers lui. Γ_A^A et Γ_B^A tendront encore chacun vers une limite déterminée.

L'identité des deux limites ainsi obtenues s'établit bien aisément si l'on admet que C est convexe, ou tout au moins convexe par rapport à chacun des deux points A, B, c'est-à-dire coupé en un seul point par une demi-droite quelconque issue de l'un d'entre eux. Il suffit d'utiliser la propriété d'homogénéité de Γ.

Il ressort de la définition même de cette fonction que si l'on substitue à la figure formée par C et les points A, B une figure homothétique de la première par rapport à un point O, avec un rapport de similitude k, la valeur de Γ est multipliée par k^2.

Or (moyennant l'hypothèse de convexité formulée tout à l'heure) on peut, en appliquant cette opération à un contour C_1' suffisamment voisin de C, avec A comme centre d'homothétie et un rapport de similitude aussi peu supérieur qu'on le voudra à l'unité, obtenir un contour extérieur à C — et, par suite, pouvant jouer le rôle de C_1.

Il est dès lors clair que les deux valeurs limites de Γ_A^A ont pour rapport l'unité, c'est-à-dire qu'elles sont égales entre elles.

L'inégalité (20) permet, ici encore, de conclure de Γ_A^A à Γ_B^A.

§ 4.

Mais les principes précédents entraînent encore deux conséquences importantes.

L'une d'elles, qui jouera un rôle essentiel dans la suite de ce travail, concerne le calcul de $\Delta\Gamma$ et de $\frac{d\Delta\Gamma}{dn}$.

D'une manière générale, lorsqu'on a exprimé une fonction biharmonique V sous la forme (6), on en déduit sans difficulté la valeur de ΔV en un point quelconque de S. Le passage à la limite, lorsque ce point vient sur C, s'effectue également par les procédés précédemment employés. Néanmoins, ce passage à la limite introduit certaines complications nouvelles : la valeur de ΔV au contour introduit les dérivées premières et secondes de ξ et de η, par conséquent aussi les dérivées des fonctions F, G, H, I.

Mais il en est tout autrement pour la fonction Γ.

Partons, en effet, de valeurs données quelconques de V, $\frac{dV}{dn}$. La combinaison des formules (6), (11) nous donne (A étant quelconque dans S) :

$$V_A = \int V_{s_1}\left[Q_{s_1A} + \int \left(F(s_1, s)Q_{sA} + H(s_1, s)R_{sA}\right)ds_1\right]ds$$
$$+ \int W_s ds\left[R_{s_1A} + \int G(s_1, s)Q_{s_1A} + I(s_1, s)R_{s_1A}ds_1\right],$$

en désignant par Q, R les coefficients de ξ et de η dans (6), soit

$$(21) \qquad (Q_{sA} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{P^3}{r^4} - \frac{1}{R}\left(\frac{P^2}{r^2} - \frac{1}{2}\right)\right], \quad R_{sA} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{P^2}{r^2} - \frac{1}{2}\right)$$

(les rayons vecteurs r et les distances P étant pris à partir du point A).

Or on a aussi la formule (G) [cf. page 6], soit

$$8\pi V_A = \int \left(W\Delta\Gamma - V\frac{d\Delta\Gamma}{dn}\right)ds.$$

Ces deux relations devant donner la même valeur de V_A, et cela

quelles que soient les valeurs de V et de W sur C, on a nécessairement :

$$(22)\qquad \Delta\Gamma_s = 8\pi\left[R_s + \int G(s_1, s) Q_{s_1} + I(s_1, s) R_{s_1}\right] ds_1,$$

$$(23)\qquad \left(\frac{d\Delta\Gamma}{dn}\right)_s = -8\pi\left[Q_s + \int F(s_1, s) Q_{s_1} + H(s_1, s) R_{s_1}\right] ds_1,$$

formules qui peuvent encore s'écrire :

$$(24)\begin{cases} 8\pi Q_s = -\left(\frac{d\Delta\Gamma}{dn}\right)_s + \int\left[-f(s_1, s)\left(\frac{d\Delta\Gamma}{dn}\right)_{s_1} + h(s_1, s)(\Delta\Gamma)_{s_1}\right] ds_1, \\ 8\pi R_s = (\Delta\Gamma)_s + \int\left[-g(s_1, s)\left(\frac{d\Delta\Gamma}{dn}\right)_{s_1} + i(s_1, s)(\Delta\Gamma)_{s_1}\right] ds_1. \end{cases}$$

§ 5.

Reprenons, d'autre part, la formule (1) -- ou, ce qui revient au même, la formule (16) — et introduisons-y la fonction

$$\Psi(A, B) = \frac{1}{8\pi}\Delta_A\Delta_B\Gamma_B^A,$$

ce qu'il nous arrivera d'écrire plus brièvement

$$(25)\qquad \Psi(A, B) = \frac{1}{8\pi}\Delta\Gamma_B^A.$$

Nous trouvons simplement (en mettant en évidence le paramètre α dont dépend la déformation du contour)

$$(26)\qquad \frac{\delta}{\delta\alpha}\Psi(A, B, \alpha) = -\int \nu\,\Psi(A, M, \alpha)\,\Psi(B, M, \alpha)\, ds,$$

où

$$\nu(s, \alpha) = \frac{\delta n}{\delta\alpha}.$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

Dans cette équation, qu'on peut appeler une *équation intégrale mixte*, nous supposerons que le contour variable C_α va en se rétrécissant constamment (de sorte que, pour $\alpha > \alpha'$, le contour C_α est intérieur à $C_{\alpha'}$) et que le mouvement de ce contour est connu. Elle contient alors la seule fonction inconnue $\Psi(A, B, \alpha)$, laquelle doit être définie (dans les cas qui nous occupent) sous la condition que les points A et B soient intérieurs (au sens large) à C_α.

La portée de ce résultat est singulièrement augmentée si l'on remarque que *nous connaissons d'autres solutions de la même équation* (26).

Soit g_B^A la fonction de Green pour le problème de Dirichlet ordinaire, relative au contour C_α. Désignons par n_A la normale intérieure menée par le point A au contour C_α qui passe par ce point.

Considérons la fonction

$$\psi_1(A, B, \alpha) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_A}\frac{\partial}{\partial n_B} g_B^A. \tag{27}$$

Effectuons les différentiations (indépendantes et, par conséquent, permutables) $\frac{\partial}{\partial n_A}, \frac{\partial}{\partial n_B}$ dans la formule (2) (p. 5). Nous voyons que *la fonction ψ_1 est encore une solution de l'équation* (26).

Prenons encore la quantité

$$\psi_2(A, B, \alpha) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t_A}\frac{\partial}{\partial t_B}\gamma_B^A, \tag{28}$$

t_A étant la tangente menée en A au contour C_α qui passe en ce point, et γ, la fonction de Neumann (voir p. 6). Nous aurons ainsi *une troisième solution de l'équation* (26), comme le montre la formule (2').

Mais la formule (2) n'est pas particulière à l'équation de Laplace. Toute équation du type elliptique (supposée, pour plus de netteté, identique à son adjointe) et de la forme

$$\Delta u + m\frac{\partial u}{\partial x} + n\frac{\partial u}{\partial y} + lu = 0$$

admet une fonction de Green G, qui donne lieu à la formule (2). Donc la quantité

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_A}\frac{\partial}{\partial n_B}G^{1}_{A}$$

vérifiera encore notre équation fonctionnelle.

Cette équation peut encore s'écrire

$$(26')\left\{\begin{aligned} &\Psi(A,B,\alpha)\\ &=\Psi(A,B,o)-\int_0^{\alpha}d\alpha_1\int_{C_{\alpha_1}}\nu\Psi(A,M,\alpha_1)\Psi(B,M,\alpha_1)\,ds\\ &=\Psi(A,B,o)-\iint\Psi(A,M,\alpha_1)\Psi(B,M,\alpha_1)\,dS\end{aligned}\right.$$

(l'intégrale double étant prise entre les contours C_0 et C_α).

Mais elle n'a, bien entendu, nullement le caractère d'une équation intégrale telle que celles de M. Fredholm. Elle n'admet point, comme celles-ci, une solution unique. *Ses solutions sont, comme celles des équations différentielles ordinaires, définies par leurs déterminations initiales, c'est-à-dire par les valeurs de* $\Psi(A, B.\, o)$.

Supposons, par exemple, que celles-ci soient finies. Alors il existera une solution de l'équation et une *seule satisfaisant à la condition de prendre, pour* $\alpha = o$, *ces valeurs* $\Psi(A, B, o)$.

On obtient cette solution par les opérations usuelles de la méthode des approximations successives. Soit $\Psi^{(0)}(A, B, \alpha)$ une première fonction quelconque finie entre $\alpha = o$ et $\alpha = \alpha_0$, prenant pour $\alpha = o$ les valeurs données (par exemple égale à $\Psi(A, B, o)$ quel que soit α). Déduisons-en la nouvelle fonction

$$(29)\left\{\begin{aligned} &\Psi^{(1)}(A,B,\alpha)\\ &=\Psi(A,B,o)-\int_0^{\alpha}d\alpha_1\int_{C_{\alpha_1}}\nu\Psi^{(0)}(A,M,\alpha_1)\Psi^{(0)}(B,M,\alpha_1)\,ds.\end{aligned}\right.$$

Imaginons qu'on applique cette même transformation à une seconde fonction $\overline{\Psi}^0$, c'est-à-dire qu'on calcule l'expression

$$\overline{\Psi}^{(1)}(A,B,\alpha)$$

$$=\overline{\Psi}(A,B,0)-\int_0^\alpha d\alpha_1\int_{C\alpha_1}\nu\overline{\Psi}^{(0)}(A,M,\alpha_1)\overline{\Psi}^0(B,M,\alpha_1)\,ds.$$

Soient $K(\alpha)$ une limite supérieure, pour chaque valeur de α, de la différence $|\overline{\Psi}^{(0)}(A,B,\alpha)-\Psi^{(0)}(A,B,\alpha)|$; H, une limite supérieure commune aux valeurs absolues des quatre fonctions $\Psi^{(0)}$, $\overline{\Psi}^0$, $\Psi^{(1)}$, $\overline{\Psi}^{(1)}$. On aura

$$(30)\qquad \left|\overline{\Psi}^{(1)}-\Psi^{(1)}\right|<2q\,H\int_0^\alpha K(\alpha)\,d\alpha=K_1(\alpha)$$

(où q est une limite supérieure de $\int_{C\alpha}\nu ds$).

Ceci suffit, d'après les principes bien connus de la méthode des approximations successives, pour affirmer :

1° Que, si l'on prend $\overline{\Psi}^{(0)}=\Psi^{(1)}$, que l'on opère sur le résultat obtenu $\Psi^{(2)}$ comme sur les premiers, et qu'on applique ainsi une série indéfinie de transformations (29), ces opérations convergent vers une fonction limite et qu'on a ainsi une solution du problème;

2° Que la limite obtenue est indépendante du choix de $\Psi^{(0)}$, d'où résulte que la solution est unique.

Ainsi, *l'ensemble de l'équation* (26′) *et de la donnée initiale* $\Psi(A,B,0)$ *définit la fonction* Ψ.

Bien que ces résultats ne soient pas applicables *de plano* aux fonctions Ψ, ψ_1, ψ_2 précédemment considérées, lesquelles deviennent infinies lorsque A et B s'approchent d'un même point du contour C_α — ou même, pour les deux dernières d'entre elles, d'un même point intérieur, — on voit qu'on peut se proposer

d'étudier nos fonctions de Green en les considérant comme définies par l'unique équation (26).

Nous ne quitterons pas ce sujet sans ajouter que cet exemple d'une équation du type (26) n'est nullement isolé en physique mathématique. C'est d'elles que dépend l'une des questions les plus anciennement posées, et cependant les plus mal connues de cette branche de la science : *la propagation des ondes à la surface des liquides, lorsque la forme des parois solides est quelconque.*

Considérons un liquide pesant qui, au repos, occupe un certain volume V, limité par une surface libre S, portion du plan $z=0$, et par des parois solides fixes.

Si la surface libre prend une forme légèrement différente S', caractérisée par des valeurs très petites de z, le liquide sera animé d'un mouvement dérivant d'un potentiel des vitesses Φ, et la quantité $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ se calculera par la résolution d'un *problème mixte* [1].

Supposons qu'on connaisse la fonction de Green $\mathcal{G}$ correspondant à ce problème mixte, pour le volume primitif V. La fonction de Green analogue $\mathcal{G}+\delta\mathcal{G}$ relative au nouveau volume V' s'en déduira par une formule toute semblable aux équations (1), (2), (2') écrites plus haut, et qui exprimera $\delta\mathcal{G}$ par une intégrale double étendue à S et contenant (linéairement) les valeurs de z sur cette aire.

Il en résulte que $\frac{d^2z}{dt^2}$ sera, en chaque point, exprimé par une intégrale double de cette même forme. En un mot, z sera solution d'une équation analogue à (26'), où t jouera le rôle du paramètre α, équation qui, toutefois, sera du second ordre et, par contre, linéaire, tandis que l'équation (26') est quadratique.

On saura écrire cette équation toutes les fois qu'on connaîtra l'expression de la fonction $\mathcal{G}$. Tel sera le cas [2] lorsque le volume primitif V aura la forme d'une *demi-sphère*.

[1] Voir mes *Leçons sur la propagation des ondes*, ch. Ier, § 7.

[2] *Leçons sur la propagation des ondes*, p. 57.

III

§ 1.

En généralisant au cas de fonctions inconnues la théorie des maxima et des minima, le Calcul des variations s'est borné jusqu'ici aux extrema soit d'intégrales définies, soit — et c'est ce que M. Kneser, dans son récent traité, appelait encore « le problème le plus général du calcul des variations pour le cas d'une variable indépendante » — de solutions d'équations différentielles ordinaires.

L'étude du monde physique offre pourtant bien d'autres phénomènes mesurables qui dépendent d'une ligne ou d'une surface arbitraire, et dont les extrema doivent par conséquent être examinés; et il n'y a aucune raison pour que la catégorie particulière traitée jusqu'à présent soit la seule importante.

C'est, en particulier, une question de l'ordre général mentionné ici que pose Lord Rayleigh, dans sa *Theory of Sound*, en indiquant la plaque circulaire comme celle qui réalise l'extremum du son fondamental, sous des conditions d'aire ou de périmètre données.

Mais, bien entendu, le physicien anglais ne démontre pas l'assertion dont nous venons de parler.

Les méthodes classiques du calcul des variations sont loin de suffire à une telle démonstration.

Nous avons, dans ce qui précède, appris à former la variation première de la quantité considérée par Lord Rayleigh et de plusieurs autres analogues; et il sera aisé d'en déduire une expression de la variation seconde.

Mais, une fois obtenue une *extrémale*, — c'est-à-dire une ligne

annulant la variation première —, on sait que le signe de la variation seconde, du moins considéré sur cette seule extrémale, ne permet pas de conclure d'une manière certaine à l'extremum.

Tout au plus, dans les cas classiques de calcul des variations, peut-on, en substituant à la variation seconde une quantité voisine, obtenir une réponse partielle à la question. C'est la méthode de Scheeffer, étendue par M. Kneser au cas de plusieurs fonctions inconnues.

Elle ne permet — et ne saurait jamais permettre — que la discussion d'un minimum *relatif*, la comparaison n'ayant lieu qu'avec des courbes variées très voisines de la primitive. Encore ce minimum relatif est-il *faible*, c'est-à-dire exige-t-il un voisinage du premier ordre : la courbe variée doit avoir non seulement tous ses points, mais encore toutes ses tangentes voisines des points et des tangentes correspondantes de l'extrémale.

La méthode de Scheeffer ne s'applique d'ailleurs pas directement aux questions qui doivent nous occuper. Elle nous fait cependant espérer la possibilité de réussir par une voie analogue, sous les mêmes conditions restrictives d'extremum relatif.

C'est ce que nous allons tenter dans un exemple voisin de celui de Lord Rayleigh.

Soit A un point donné, et considérons la quantité Γ_A^A relative à un contour C enveloppant le point A.

Si la longueur L de C est donnée, C est évidemment tout entier intérieur au cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de longueur $\frac{L}{2}$. Donc, d'après un de nos résultats précédents, la valeur de Γ_A^A sera plus petite que la valeur analogue correspondant à $\mathcal{C}$ [1]. On peut par conséquent présumer l'existence d'un maximum.

Nous connaissons, d'autre part, une extrémale, le cercle de centre A et de rayon $\frac{L}{2\pi}$.

[1] En ce qui regarde l'exemple de Lord Rayleigh, les résultats de notre I^re partie montrent de même que, pour L donné, la hauteur du son fondamental admet une limite inférieure pendant que le cercle est une extrémale.

Proposons-nous de savoir si ce cercle réalise un maximum relatif de Γ_4^4, L restant donné.

§ 2.

Il est aisé de voir qu'une première question se pose avant toute recherche de cette nature.

Pour chercher l'extremum des intégrales définies, le calcul des variations les classe d'après l'ordre des dérivées qui y figurent. C'est la manière dont interviennent les dérivées de l'ordre le plus élevé qui joue le rôle le plus essentiel.

À quelle classe d'intégrales faut-il comparer notre quantité Γ_4^4? Doit-on la traiter comme une longueur de courbe (intégrale dépendant des dérivées premières) ou comme une intégrale contenant des dérivées d'ordre supérieur?

Pour répondre à cette question, reprenons la solution du problème fondamental, en la prenant d'abord sous la forme donnée aux pages 9-10 (formules (3), (4), (4')).

Les coefficients de notre système d'équations intégrales sont alors les quatre fonctions

$$k_1(s_1, s) = \frac{2}{\pi}\frac{P^3}{r^4}, \qquad k_2(s_1, s) = \frac{1}{\pi}\frac{P^2}{r^3},$$

$$l_1(s_1, s) = \frac{dk_1}{dn_1}, \qquad l_2(s_1, s) = \frac{dk_2}{dn_1}.$$

Soit φ l'angle de la droite ss_1 (c'est-à-dire de la droite qui joint le point de C défini par la valeur s de l'arc à celui qui est défini par la valeur s_1) avec la normale n en s; soit de même ψ l'angle de la droite $s_1 s$ avec la normale en s_1 (fig. 3). On a

$$\cos\varphi = \frac{P}{r},$$

puis

$$(31)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\pi k_1}{2} = \frac{1}{r}\cos^3\varphi, \\ &\pi k_2 = \cos^2\varphi, \end{aligned} \right.$$

et on trouve facilement :

$$(32)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\pi l_1}{2} = \frac{3}{r^2}\cos^2\varphi\sin\varphi\sin\psi + \frac{1}{r^2}\cos^3\varphi\cos\psi, \\ &\frac{\pi l_2}{2} = \cos\varphi\sin\varphi\frac{\sin\psi}{r}. \end{aligned} \right.$$

Proposons-nous de trouver une limite supérieure commune aux valeurs que peuvent recevoir ces quatre quantités. Il suffit évidemment, pour cela, d'obtenir une limite supérieure de

$$\frac{\cos\varphi}{r} = \frac{P}{r^2}.$$

Nous supposerons d'abord que la courbure $\gamma = \frac{1}{R}$ de C est inférieure en valeur absolue à une quantité fixe γ_0.

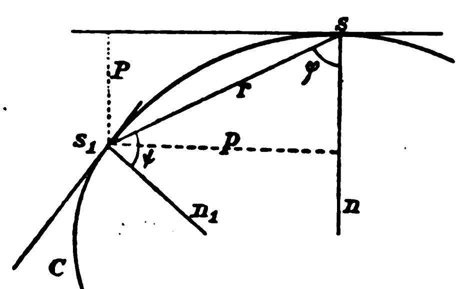

Fig. 3.

Mais cette hypothèse ne suffira pas à notre objet. Nous avons encore à supposer que la courbe C n'admet pas de points doubles.

IMPRIMERIE NATIONALE.

Plus précisément, nous appellerons *rapport de régularité* de C, une limite inférieure du rapport qui existe entre une corde quelconque r de C et le plus petit des deux arcs sous-tendus par cette corde. Nous admettrons qu'on connaît un tel rapport de régularité x, et, par conséquent, qu'on a toujours

$$\frac{r}{\sigma} > x.$$

Nous pourrons alors écrire

$$\frac{P}{r^3} = \frac{P}{\sigma^3}\frac{\sigma^3}{r^3}$$

(σ étant encore le plus petit arc sous-tendu par la corde r).

Or P et $\frac{dP}{d\sigma}$ (où s est considéré comme fixe) sont nuls pour $\sigma = 0$ et la dérivée $\frac{d^3P}{d\sigma^3}$ est égale à $\frac{1}{R_1}\cos(n, n_1)$. Donc on a

$$\left(\frac{P}{\sigma^3}\right) < \frac{1}{2}\gamma_0,$$

et par conséquent

$$\left(\frac{P}{r^3}\right) < \frac{1}{2}\frac{\gamma_0}{x^3}.$$

Mais il nous sera nécessaire d'aller un peu plus loin.

Supposons qu'au contour primitif C on en substitue un autre C' voisin du premier et ayant même avec lui un voisinage du second ordre, c'est-à-dire tel que les courbures aux points correspondants des deux courbes diffèrent d'une quantité au plus égale en valeur absolue à une limite fixe γ_1.

Nous pourrons, dans ce qui va suivre, supposer que les deux contours ont même longueur L et même que les points correspondants sont choisis de manière que les arcs qui se correspondent aient toujours même longueur.

Nous allons chercher une limite supérieure de la quantité dont varient les coefficients k_1, k_2, l_1, l_2 lorsqu'on passe d'un point de C au point correspondant de C'.

Observons d'abord que de la connaissance du nombre $\varkappa$ pour le contour C, ainsi que des limites supérieures γ_0 et γ_1 de la courbure et de sa variation, on peut aisément déduire une valeur de $\varkappa$ (différente de zéro) relative à C'. Nous appellerons, pour plus de brièveté, $\varkappa$ une limite inférieure du rapport $\frac{r}{\sigma}$ commune aux deux courbes et γ_0 une limite supérieure commune de leurs courbures.

Ceci posé, le rapport $\frac{P}{r^3}$ sera, comme précédemment, décomposé en ses deux facteurs $\frac{P}{\sigma^3}$, $\frac{\sigma^3}{r^3}$, dont le second est inférieur à $\frac{1}{\varkappa^3}$.

Nous avons formé, tout à l'heure, la dérivée $\frac{d^2P}{d\sigma^2}$ pour l'une des courbes : cette dérivée $\frac{1}{R_1}\cos(n, n_1)$ varie visiblement d'une quantité inférieure à $\gamma_1(1+L\gamma_0)$. Cette limite supérieure sera aussi celle de la variation de $\frac{2P}{\sigma^2}$.

Si, au lieu d'appliquer l'expression classique du reste de la formule de Taylor (expression qui contient une quantité indéterminée comprise entre zéro et un), on utilise la valeur de ce reste sous forme d'intégrale définie

$$F(t)=F(a)+(a-b)F'(a)+\int_a^b F''(x)(b-x)\,dx,$$

on aura

$$\frac{P}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}\int_0^\sigma \chi(s+\sigma_1)(\sigma-\sigma_1)\,d\sigma_1 \tag{33}$$

$\left[\text{en appelant } \chi(s_1) \text{ la quantité } \frac{d^2P}{d\sigma^2}-\frac{1}{R_1}\cos(n, n_1)\right]$. Cette formule, pouvant s'écrire

$$\frac{P}{\sigma^2}=\int_0^1 \chi(s+\sigma u)(1-u)\,du, \tag{33'}$$

met en évidence à la fois la limite supérieure de $\frac{P}{\sigma^3}$ et celle de sa variation.

$\frac{\sigma}{r}$ étant inférieur à $\frac{1}{x}$, il suffit, pour avoir une limite de la variation de cette quantité, de pouvoir limiter l'accroissement de son inverse $\frac{r}{\sigma}$. Or, si nous plaçons les deux courbes de manière qu'elles soient tangentes l'une à l'autre en l'une des extrémités de l'arc σ, la différence des deux valeurs de r sera inférieure à la distance des deux extrémités non coïncidentes, distance dont la dérivée par rapport à σ a pour limite supérieure une limite supérieure de l'angle des tangentes en ces points, c'est-à-dire $\gamma_1\sigma$.

Donc l'accroissement de $\frac{r}{\sigma}$ est lui-même inférieur à $\frac{1}{2}\gamma_1\sigma$.

Nous pourrons donc limiter l'accroissement de $\frac{P}{r^3}$ et la limite trouvée est égale à γ_1, multiplié par une quantité qui ne dépend que de γ_0 et de x.

Mais une évaluation toute semblable s'applique encore à l'accroissement de φ ou de ψ, grâce à la formule

$$-\frac{\partial\psi}{\partial s} = \frac{\cos\varphi}{r} - \frac{P}{r^3}. \tag{34}$$

Donc, *les accroissements de chacune des quatre fonctions* k_1, k_2, l_1, l_2 *ont une limite supérieure de la même forme : le produit de* γ_1 *par une fonction de* L, *de* γ_0 *et de* x *seuls.*

Nous exprimerons ce fait en disant que k_1, k_2, l_1, l_2 sont *continus à la Lipschitz pour l'ordre deux.*

La continuité « pour l'ordre deux » signifie, comme on voit, que les quantités en question subissent une altération très petite pour deux courbes qui ont entre elles un voisinage de second ordre.

Sauf avis contraire, d'ailleurs, dans tout ce qui va suivre, lorsque nous dirons qu'une quantité est continue à la Lipschitz, il sera sous-entendu que c'est de l'ordre *deux* qu'il s'agit.

Il est clair qu'en intégrant une ou plusieurs fois, le long d'arcs de

la courbe, une quantité continue à la Lipschitz, on obtient une nouvelle quantité possédant le même ordre de continuité.

Si nous envisagions, non plus l, et l_1, mais la dérivée de l'une ou de l'autre de ces quantités par rapport à s ou à s_1, cette dérivée contiendrait des valeurs de la dérivée de la courbure, multipliée par un facteur continu à la Lipschitz. C'est ce qui ressort immédiatement des formules (33) (34).

Quant à k_1, k_2, leurs dérivées (et même leurs dérivées secondes) sont continues pour l'ordre deux, en vertu des mêmes formules.

Nous avons utilisé jusqu'ici les quantités (4). Mais étant donnée la relation immédiate qui existe entre celles-ci et les quantités (7'), tout ce qui précède [1] subsiste pour ces dernières.

Prenons maintenant les séries auxquelles conduit, dans notre problème, l'application de la méthode de M. Fredholm, et qui représentent respectivement le déterminant D_f et la fonction $D_f\binom{x}{y}$.

Ces séries sont continues à la Lipschitz.

C'est ce qui a lieu, en effet, pour chacun des termes, et la série des coefficients de γ_1 est, d'autre part, uniformément convergente.

Imaginons, d'autre part, que nous puissions assigner une limite inférieure du déterminant D_f de l'équation, ce qui aura lieu, d'après ce que nous venons de dire, toutes les fois que notre courbe aura un voisinage du second ordre suffisamment étroit avec une courbe donnée.

Alors *les fonctions résolvantes* F, G, H, L *seront elles-mêmes continues à la Lipschitz.*

Faisons maintenant intervenir les formules (22), (23) [p. 33]. Nous voyons que :

La continuité à la Lipschitz (pour l'ordre deux) a également lieu en ce qui regarde les valeurs de $\Delta\Gamma$ *et de* $\frac{d\Delta\Gamma}{dn}$ *au contour.*

[1] La conclusion que nous venons d'énoncer en dernier lieu s'applique aux dérivées de g et à la dérivée $\frac{\partial f}{\partial s_1}$, mais non à $\frac{\partial f}{\partial s}$, à cause du facteur $\frac{1}{R}$ qui figure dans f.

Si maintenant nous nous reportons à la variation de $\Delta\Gamma_A^A$

$$\delta\Gamma_A^A = -\frac{1}{8\pi}\int(\Delta\Gamma)^2\,\delta n\,ds,$$

il ressort de ce qui précède que le coefficient de $\delta n ds$ est *continu d'ordre deux*.

Autrement dit, la variation de Γ_A^A est analogue, à une réserve près, à celle d'une intégrale où la quantité sous le signe $\int$ ne contient que des dérivées *premières*.

L'analogie résulte de ce que le coefficient de la variation δn se comporte comme une fonction des dérivées premières et secondes seulement.

Elle est incomplète toutefois en ce que ce coefficient n'est pas *linéaire* par rapport aux dérivées secondes.

Par contre, à un autre point de vue, Γ_A^A devrait être assimilé à une intégrale dont l'élément différentiel est d'ordre *zéro* (c'est-à-dire ne contient aucune dérivée), car il est lui-même continu d'ordre zéro : il varie infinitésimalement, — en vertu des théorèmes de notre deuxième partie, — si les points du contour varié sont respectivement très voisins de ceux du contour primitif, quand même les tangentes correspondantes feraient entre elles des angles très grands.

Ces circonstances paradoxales, qui auront leur répercussion sur nos conclusions finales, montrent que le calcul des variations généralisé que nous abordons en ce moment pourra présenter des différences notables avec la théorie classique.

§ 3.

Cela posé, partons d'un cercle C de centre A et de rayon $a = \frac{L}{2\pi}$. On a, en tout point de la circonférence de ce cercle [1],

$$\Delta_n \Gamma_A^n = 2, \qquad \frac{d\Delta\Gamma}{dn} = \frac{4}{a}. \tag{35}$$

On vérifie donc bien que C est une extrémale pour Γ_A^A, parmi toutes les courbes qui sont assujetties à avoir la longueur L. Il satisfait à la relation

$$\overline{\Delta\Gamma}^2 - \frac{l}{R} = 0 \tag{35'}$$

avec

$$l = 4a. \tag{35''}$$

Altérons chaque rayon dans un rapport que nous désignerons par e^u (de sorte que le nouveau rayon vecteur ρ sera

$$\rho = ae^u).$$

Nous aurons une courbe variée C′.

Nous admettrons, bien qu'on puisse arriver à se passer d'une partie de cette hypothèse, que cette courbe C′ a avec le cercle primitif C un voisinage du *quatrième* ordre. On a donc

$$\left(\frac{d^i u}{d\omega^i}\right) < \varepsilon, \qquad i = 0, 1, 2, 3, 4, \tag{36}$$

[1] On trouvera rappelée plus loin l'expression de la fonction Γ relative au cercle.

où ε est un nombre très petit donné à l'avance. Je me propose de démontrer que si ce voisinage est assez étroit, c'est-à-dire si le nombre ε est assez petit, — et si, en outre, le contour varié C' a, comme le contour primitif, la longueur L, — Γ_A^A a, pour ce nouveau contour, une valeur plus petite que pour le cercle.

À cet effet, j'emploierai d'abord, en la modifiant convenablement, la méthode classique des variations.

Soit α un paramètre qui varie de zéro à un.

Désignons par C_α la courbe déduite de C' en changeant u en αu, et par C'_α celle des homothétiques directes de C_α (par rapport à A) dont la longueur est L.

À chacune de ces courbes C_α correspondra une valeur de Γ_A^A. Nous avons déjà l'expression de $\frac{\delta\Gamma_A^A}{\delta\alpha}$, savoir

$$\frac{\delta\Gamma_A^A}{\delta\alpha} = -\frac{1}{8\pi}\int(\Delta\Gamma)^2\,\delta n\,ds = +\frac{1}{8\pi}\int(\Delta\Gamma)^2(dy\,\delta x - dx\,\delta y).$$

Soit $\mu = \frac{\delta u}{\delta\alpha}$, d'où

$$\delta x = \mu x, \quad \delta y = \mu y.$$

Il viendra

$$\frac{\delta\Gamma_A^A}{\delta\alpha} = \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\Delta\Gamma}^2\,\mu\rho^2\,d\omega. \tag{37}$$

$\rho = e^{u\alpha}$ étant le rayon vecteur de C'_α.

La variation de la longueur de courbe devra être nulle, soit

$$\int\frac{1}{R}\,\delta n\,ds = 0$$

ou

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mu\rho^2}{R}\,d\omega = 0. \tag{38}$$

D'ailleurs, u_a ne différera de αu (u étant relatif à la courbe C′) que par une constante et on aura

$$\mu = u - c, \tag{39}$$

c étant une quantité indépendante de ω, laquelle sera déterminée par l'équation (38).

Celle-ci donne

$$c\int\frac{\rho^2 d\omega}{R} = \int\frac{u\rho^2 d\omega}{R}.$$

L'intégrale

$$\int\frac{\rho^2 d\omega}{R},$$

coefficient de c, n'est autre que L. C'est ce que l'on voit immédiatement en écrivant la variation de longueur pour $\mu =$ const (c'est-à-dire dans une transformation homothétique infinitésimale). Mais il nous sera utile de déduire ce même fait de l'identité

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\rho^2}{R} &= \frac{ds}{d\omega} - \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\rho\rho'}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}\right) \\ &= a\left[e^u\sqrt{1+u'^2} - \frac{d}{d\omega}\left(\frac{u'e^u}{\sqrt{1+u'^2}}\right)\right] \end{aligned}\right. \tag{40}$$

qui ressort sans difficulté de l'expression du rayon de courbure en coordonnées polaires.

L'intégration de o à 2π donne bien

$$\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2 d\omega}{R} = L; \tag{41}$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

et l'on a, dès lors

$$(42) \qquad cL = \int \frac{u\rho^2 d\omega}{R}.$$

Écrivons maintenant la variation seconde $\frac{\delta^2 \Gamma_\lambda^2}{\delta\alpha^2}$. Nous allons nous proposer de montrer que (si ε a été pris suffisamment petit) cette quantité est négative pour toute valeur de α entre zéro et un.

On a, en différentiant (37),

$$8\pi \frac{\delta^2 \Gamma_\lambda^2}{\delta\alpha^2} = \int \delta\mu \overline{\Delta\Gamma}^2 \rho^2 d\omega + 2\int \mu \overline{\Delta\Gamma}^2 \rho\delta\rho d\omega + 2\int \mu\rho^2 d\omega \Delta\Gamma\delta(\Delta\Gamma),$$

ce que nous pourrons encore écrire sous la forme

$$(43) \qquad \begin{aligned} 8\pi \frac{\delta^2 \Gamma_\lambda^2}{\delta\alpha^2} = & \int \left(\Delta\Gamma^2 - \frac{l}{R}\right)(\rho^2\delta\mu + 2\mu\rho\delta\rho)\, d\omega \\ & + l\int \left(\frac{\rho^2}{R}\delta\mu + 2\mu\rho\frac{\delta\rho}{R}\right) d\omega \\ & + 2\int \mu\rho^2 d\omega\, \Delta\Gamma\delta(\Delta\Gamma). \end{aligned}$$

Le premier terme

$$(43_1) \qquad \int \left(\Delta\Gamma^2 - \frac{l}{R}\right)(\rho^2\delta\mu + 2\mu\rho\delta\rho)\, d\omega$$

donnera un résultat infiniment petit par rapport aux deux autres. La quantité $\Delta\Gamma^2 - \frac{l}{R}$, nulle sur C, est, d'après nos hypothèses de voisinage et les théorèmes de continuité précédemment établis, de l'ordre de ε. Or on a [d'après (42)]

$$\delta\mu = \delta c = \frac{1}{L}\int u d\omega \delta \frac{\rho^2}{R}.$$

Dans cette formule, on peut, au dernier membre, remplacer u par μ, en vertu de (41). Dès lors, en vertu de l'identité (40), qui donne

$$(44)\quad \delta\frac{\rho^2}{R} = a\delta\left(e^u\sqrt{1+u'^2}\right) - a\frac{d}{d\omega}\delta\frac{u'e^u}{\sqrt{1+u'^2}}$$
$$= ae^u\left(\mu\sqrt{1+u'^2} + \frac{\mu'}{\sqrt{1+u'^2}}\right) - a\frac{d}{d\omega}e^u\left(\frac{\mu u'}{\sqrt{1+u'^2}} + \frac{\mu'}{(1+u'^2)^{\frac{3}{2}}}\right),$$

on voit que $\delta\mu$ est de la forme

$$a^2\int[K_1\mu^2 + \mu'^2 + K_2\mu\mu']\,d\omega,$$

K_1 et K_2 tendant vers un lorsque ε tend vers zéro.

Il en ressort, d'après des raisonnements bien connus et que nous aurons à rappeler plus loin, que le terme (43_1) est au plus de l'ordre de

$$(45)\qquad \varepsilon\int\mu'^2\,d\omega.$$

Le second terme de la formule (43)

$$l\int\left(\frac{\rho^2}{R}\delta\mu + 2\mu\rho\frac{\delta\rho}{R}\right)d\omega,$$

ou (à un terme de l'ordre (45) près)

$$(43_2)\qquad 4\int\left(\frac{\rho^2 a}{R}\delta\mu + 2\mu\rho\delta\rho\right)d\omega,$$

n'est autre, au fond, que la variation seconde du problème isopérimétrique ordinaire[1].

[1] On retomberait, en effet, sur ce problème en remplaçant, dans les calculs ci-dessus, $\overline{\Delta\Gamma}^2$ par l'unité.

On le calculera en tirant l'intégrale $\int \frac{\rho^2}{R} \delta\mu d\omega$ de la relation

$$\int \frac{\rho^2}{R} \delta\mu d\omega + \int \mu\delta\left(\frac{\rho^2}{R}\right) d\omega = 0$$

(obtenue par différentiation de l'équation de condition [38]), puis remplaçant $\delta \frac{\rho^2}{R}$ par son expression (44).

Conformément à la théorie du problème isopérimétrique, il vient ainsi, à des termes près (provenant des valeurs de u') qui sont au plus de l'ordre (45), la valeur

$$4a^2 \int (\mu^2 - \mu'^2)\, d\omega. \tag{46}$$

La condition (38) se réduit à la limite à

$$\int \mu d\omega = 0, \tag{38'}$$

et moyennant cette condition, on sait, par l'étude du problème isopérimétrique (comme on le retrouverait, d'ailleurs, par un développement trigonométrique), que l'intégrale (46) est toujours négative : elle devient seulement nulle pour $\mu = a_1 \cos\omega + b_1 \sin\omega$, a_1 et b_1 étant des constantes.

En tenant compte des termes correctifs qu'il faut ajouter au premier membre de (38') pour retrouver (38), on constate aisément (voir, par exemple, p. 63, note) que l'intégrale (46), si elle est positive, est au plus de l'ordre des quantités (45).

Venons maintenant au dernier terme

$$2 \int \mu\rho^2 d\omega\, \Delta\Gamma \delta(\Delta\Gamma) \tag{43_3}$$

de l'expression (43).

Si, au lieu de considérer une courbe voisine du cercle, on étudiait la variation seconde de Γ_A^A dans la déformation d'une courbe quelconque, on aurait de même à différentier, par rapport à α, la variation première

$$(47)\qquad -\int \overline{\Delta\Gamma}^2\,\delta n\,ds.$$

En faisant porter la différentiation sur le facteur $\delta n ds$, on aurait des termes correspondants à (43_1), (43_2).

D'autre part, on peut évaluer $\delta\Delta\Gamma$ en introduisant, comme précédemment, la fonction

$$\Gamma_{1_2}^A = \delta\Gamma_2^A.$$

La variation $\delta.\Delta\Gamma$ au contour pourra être considérée comme provenant, d'une part, de la mobilité de celui-ci; de l'autre, du changement d'expression de Γ : c'est-à-dire qu'elle aura la valeur[1]

$$\delta\Delta\Gamma = \Delta\Gamma_1 + \delta n\cdot\frac{d\Delta\Gamma}{dn}.$$

La variation de l'intégrale (47) sera ainsi la somme algébrique des deux termes

$$(47')\qquad -2\int \Delta\Gamma\frac{d\Delta\Gamma}{dn}\overline{\delta n}^2\,ds - 2\int \Delta\Gamma\,\Delta\Gamma_1\,\delta n\,ds.$$

Le premier de ces deux termes sera positif toutes les fois que (comme nous avons été conduit à l'admettre dans la deuxième partie) $\Delta\Gamma$ sera positif et $\frac{d\Delta\Gamma}{dn}$ négatif au contour.

[1] Je rappelle que le déplacement normal δn est considéré comme positif lorsqu'il est dirigé vers l'*intérieur*. C'est ainsi que dans la formule (37), page 48, et dans les suivantes, $\delta n ds$ a été remplacé par $-\mu\rho^2 d\omega$.

Nous allons voir que *le second est, au contraire, toujours négatif.*

La fonction Γ_1 peut, en effet, être considérée comme une fonction biharmonique définie par les conditions aux limites (1 *bis*) (p. 7). Celles-ci nous permettent de remplacer $-\delta n \Delta\Gamma$ par $\frac{d\Gamma_1}{dn}$. Le second terme de (47′) peut donc s'écrire

$$2\int \Delta\Gamma_1 \frac{d\Gamma_1}{dn} ds.$$

Or ceci fait

$$(48) \qquad -2\iint_s \overline{\Delta\Gamma}_1^2 \, dS$$

en vertu de l'équation $\Delta\Delta\Gamma_1 = 0$ et du fait que Γ_1 est nul sur C.

Dans notre problème particulier, l'expression (47′) est remplacée par (43_3), laquelle s'écrit de la même façon

$$(49) \qquad 2\int \Delta\Gamma \frac{d\Delta\Gamma}{d\log\rho} \mu^2\rho^2 d\omega + 2\int \mu\, \Delta\Gamma\, \Delta\Gamma_1 \rho^2 d\omega$$

ou

$$(49') \qquad 2\int \Delta\Gamma \frac{d\Delta\Gamma}{d\log\rho} \mu^2\rho^2 d\omega - 2\iint \Delta\Gamma_1^2 dS.$$

La courbe C′ est supposée infiniment voisine de C. Admettons, quitte à y revenir ensuite, qu'on peut remplacer C′ par C dans l'expression (49) ou (49′).

Sur C, $\Delta\Gamma$ et $\frac{d\Delta\Gamma}{dn}$ ont les valeurs (35). Le premier terme de (49′) est donc

$$(50) \qquad 16\, a^2 \int \mu^2 d\omega.$$

D'autre part, l'expression

$$8\pi\Gamma_{1B}^{A} = -\int \Delta\Gamma_{A}^{M}\Delta\Gamma_{B}^{M}\,\delta n\,ds$$

$$= \int \Delta\Gamma_{A}^{M}\Delta\Gamma_{B}^{M}\,\mu\rho^{2}d\omega$$

donne

$$8\pi\Delta_{B}\Gamma_{1} = \int \Delta\Gamma_{B}^{M}\blacktriangle\Gamma_{A}^{M}\,\mu\rho^{2}d\omega,$$

où, comme précédemment,

$$\blacktriangle\Gamma = \Delta_{A}\Delta_{B}\Gamma.$$

On a donc (puisque $\Delta\Gamma_{A}^{M} = 2$)

$$-2\iint \Delta\Gamma_{1}^{2}dS = -\frac{a^{4}}{8\pi^{2}}\iint_{s} dS_{B}\int \mu_{\omega}d\omega\int \mu_{\omega_1}d\omega_{1}\,\blacktriangle\Gamma_{\omega,B}\blacktriangle\Gamma_{\omega_1,B}.$$

L'expression connue de Γ pour le cercle[1] est

$$\Gamma_{B}^{M} = r^{2}\log r_{1} - \tfrac{1}{2}(r_{1}^{2} - r^{2}),$$

où r_1 peut être considéré comme défini par

$$\log r_{1} = \mathfrak{R}\log\left[\rho\rho' e^{i(\omega-\varphi)} - a^{2}\right],$$

$\mathfrak{R}$ étant une partie réelle; ρ, ρ', les rayons vecteurs qui vont du

[1] Cette expression résulte des travaux connus de MM. Lauricella, Volterra, Almansi; elle a été étudiée d'une manière approfondie par M. Boggio, Sulla funzione di Green d'ordine m (*Circolo Mat. di Palermo*, t. XX).

centre A aux points B, M; ω et φ, les angles polaires correspondants. Cette expression donne

$$\Delta\Gamma_2^{\mathrm{M}} = -\frac{8}{a^2} - 16\,a^2\,\mathcal{R}\,\frac{1}{[\rho\rho' e^{i(\omega-\varphi)} - a^2]^2}.$$

Nous écrirons, en égalant à a le rayon vecteur ρ' de M,

$$\Delta\Gamma_2^{\mathrm{M}} = -\frac{8}{a^2} - 16\,a^2\left[\frac{1}{(ze^{-i\omega} - a)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a^2}{z}e^{i\omega} - a\right)^2}\right]$$

$$(z = \rho e^{i\varphi}).$$

Si alors on reporte dans

$$(51)\qquad -2\iint \Delta\Gamma_1^2 dS = -\frac{a^4}{8\pi^2}\int \mu_\omega d\omega \int \mu_{\omega_1} d\omega_1 \iint \rho d\rho d\varphi\, \Delta\Gamma_{\omega,2}\Delta\Gamma_{\omega_1,2},$$

l'intégration par rapport à φ se ramène à un calcul de résidus. Elle donne pour coefficient de $\mu_\omega \mu'_{\omega_1}$, $d\omega\, d\omega_1 \cdot \rho d\rho$, dans l'intégrale quadruple, l'expression

$$256\,\frac{\pi}{a^4}\,\mathcal{R}\,\frac{d}{d\tau}\frac{\tau}{(\tau-1)^3} + \mathrm{H},$$

où τ doit être fait égal à

$$(52)\qquad \tau = \frac{\rho^2}{a^2} e^{i(\omega-\omega_1)}$$

et où H représente une constante. Celle-ci disparait du résultat, car elle est multipliée par l'expression

$$\int_0^{2\pi} \mu d\omega \int^{2\pi} \mu_1 d\omega_1 = \left[\int_0^{2\pi} \mu d\omega\right]^2$$

(μ et μ_1 étant mis pour μ_ω et μ_{ω_1}) laquelle est nulle en vertu de (38').

L'intégration par rapport à ρ — ou, ce qui revient au même, par rapport à la variable (52) — est immédiate. En la poursuivant d'abord seulement jusqu'à la limite $\rho = a' = a\sqrt{k}\,(k<1)$, — d'où $\tau = ke^{i(\omega-\omega_1)}$, — de manière à prendre l'intégrale double du premier membre de (51) dans un cercle intérieur au premier, nous aurons

$$(51') \qquad -\frac{16a^2}{\pi}\int \mu d\omega \int \mu_1 d\omega_1\, \mathcal{R}\frac{1}{[1-ke^{i(\omega-\omega_1)}]^2}.$$

On fera cette dernière intégration en remarquant que, dans nos hypothèses, μ est certainement développable en série trigonométrique (dépourvue de terme constant)

$$(53) \qquad \mu = \sum_1^\infty a_p \cos p\omega + b_p \sin p\omega = \sum A_p(\omega),$$

et en développant d'autre part en série la fraction $\frac{1}{[1-ke^{i(\omega-\omega_1)}]^2}$. Rien n'empêche alors de faire $k=1$ et il vient

$$(54) \qquad -2\iint \Gamma_1^2 dS$$

$$= -16a^2\left[2\int_0^{2\pi} A_1^2 d\omega + \cdots + (p+1)\int A_p^2 d\omega + \cdots\right].$$

Le second membre est, en valeur absolue, supérieur à

$$\sum_p \int A_p^2 d\omega = \int \mu^2 d\omega.$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

(Il est d'un ordre de grandeur intermédiaire entre cette quantité et

$$\sum_p \int p^2 A_p^2 d\omega = \int \mu'^2 d\omega.)$$

Donc, au total, l'expression (43) [*somme des termes* (43_1), (43_2), (50), (54)] *a une valeur négative inférieure algébriquement à*

$$(55) \qquad -a^2 \int \mu'^2 d\omega - 16a^2 \int \mu^2 d\omega,$$

aux termes près que nous avons négligés.

Ceux de ces termes dont nous avons évalué l'ordre de grandeur sont plus petits (à un facteur numérique près) que la quantité (45) et, par conséquent, ne changent pas le signe de l'expression précédente tant que ε est assez petit.

Admettant encore qu'il en est de même pour l'erreur provenant du passage à la limite, dans l'expression (43_3), nous pouvons énoncer la conclusion suivante :

La dérivée seconde $\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \alpha^2}$ *reste négative tant qu'on a les inégalités* (36).

Cette conclusion est visiblement équivalente à celle qu'il fallait établir. La dérivée première $\frac{\delta \Gamma}{\delta \alpha}$, partant de zéro, sera constamment négative dans le domaine considéré, et la valeur correspondante à $\alpha = 1$ sera *plus petite que la valeur initiale.*

Nous aurons en même temps démontré que C *est la seule extrémale située dans ce même domaine,* puisque la valeur finale de la variation première est différente de zéro.

§ 4.

Il reste à examiner si le passage à la limite effectué sur la quantité (43_3) était légitime.

C'est ce que nous allons faire en calculant cette quantité sous une autre forme, qui nous montrera en même temps la véritable origine de la forme affectée par l'expression (54).

Reprenons le second terme de l'expression (47'), non plus sous la forme (48)[1], mais sous sa forme primitive, laquelle ne contient que les valeurs de $\Delta\Gamma_1$ au contour.

La fonction biharmonique Γ_1, pouvant être considérée comme définie par les conditions aux limites

$$(1\ bis)\qquad V = -\Gamma_1 = 0;\quad W = \frac{d\Gamma_1}{dn} = -\frac{\delta n}{\delta \alpha}\Delta\Gamma = \frac{\mu\rho^2 d\omega}{ds}\Delta\Gamma,$$

pourra être représentée par la formule (7), ξ et η étant définis par les formules (11) avec les déterminations (1 *bis*) qui viennent d'être données pour V, W.

Appliquons donc l'opération Δ à l'expression Γ_1 ainsi formée. On a [Q (s, A) et R (s, A) ayant le même sens que dans les formules (21)]. :

$$(56)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Delta_A Q(s, A) = -\frac{1}{4\pi}\Delta_A \mathcal{D}_s(r^2 \log r) = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{d^2}{ds^2}\frac{d\log r}{dn} + \frac{d}{ds}\frac{1}{R}\frac{d\log r}{ds}\right),\\ &\Delta_A R(s, A) = \frac{1}{4\pi}\Delta_A D_s(r^2 \log r) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{R_s}\frac{d\log r}{dn} - \frac{d^2\log r}{ds^2}\right). \end{aligned} \right.$$

Dès lors, l'opération Δ_A, appliquée à l'expression (7), donne la somme d'un potentiel de double couche de densité

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{d^2\xi}{ds^2} - \frac{\eta}{R}\right)$$

[1] Celle-ci semblerait au premier abord la plus avantageuse, car on s'assure aisément que l'expression $\Delta\Gamma_1$ est continue à la Lipschitz pour l'ordre deux, quel que soit le point intérieur donné A. Mais il est indispensable, en l'espèce, de tenir compte des points A voisins de la frontière. Or l'évaluation des termes correspondants donne lieu à des difficultés beaucoup plus sérieuses que celle à laquelle nous nous livrons dans le texte.

et d'un potentiel de simple couche de densité

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{d}{ds}\frac{1}{R}\frac{d\xi}{ds}+\frac{d^2\eta}{ds^2}\right).$$

La valeur de $\Delta\Gamma_1$ en un point du contour sera ainsi

$$(\Delta\Gamma_1)_s=2\left(\frac{d^2\xi}{ds^2}-\frac{\eta}{R}\right)$$
$$+\frac{2}{\pi}\int\left[\left(\frac{\eta_1}{R_1}-\frac{d^2\xi_1}{ds_1^2}\right)\frac{d\log r}{dn_1}-\left[\left(\frac{1}{R}\right)_1'\xi_1'+\frac{1}{R_1}\xi_1''+\eta_1'\right]\log r\right]ds_1,$$

ξ_1, η_1, R_1 étant les valeurs de ξ, η, R au point $s=s_1$.

Nous avons à multiplier par $\nu\Delta\Gamma ds$ $\left(\text{en posant } \nu=-\frac{\delta n}{\delta\alpha}=\frac{\mu\rho^2 d\omega}{ds}\right)$ et à intégrer. Il vient donc

$$(57)\left\{\begin{aligned}&-\int\Delta\Gamma\,\Delta\Gamma_1\frac{\delta n}{\delta\alpha}ds=2\int\nu\left(\xi''-\frac{\eta}{R}\right)\Delta\Gamma ds+\\&\quad+2\iint\nu_s\left\{\left(\frac{\eta_1}{R_1}-\xi_1''\right)\frac{d\log r}{dn_1}-\left[\left(\frac{1}{R}\right)_1'\xi_1''+\frac{1}{R_1}\xi_1''+\eta_1''\right]\log r\right\}ds\,ds_1.\end{aligned}\right.$$

On peut, par des intégrations par parties, faire disparaître les termes en ξ_1'', η'' (ou ξ_1'', η_1'').

Celle qui concerne les termes en $\log r$ demande seule une explication. Il faudra, pour l'effectuer, remplacer $\log r$ par

$$\log\left(\frac{r}{\sigma}\right)+\log\sigma\;(\sigma=s_1-s).$$

La différentielle

$$\frac{d}{ds_1}\left(\frac{1}{R_1}\frac{d\xi_1}{ds_1}+\frac{d^2\eta_1}{ds_1^2}\right)\log\left(\frac{r}{s_1-s}\right)ds_1$$

s'intégrera une fois par parties par rapport à s_1[1]. Dans l'intégrale double

$$\iint \nu_s \left[\frac{d}{ds_1}\left(\frac{1}{R_1}\frac{d\xi_1}{ds_1}\right) + \frac{d^2\eta_1}{ds_1^2}\right] \log(s_1 - s)\, ds\, ds_1$$

on prendra comme variable $s_1 - s = \sigma$, en écrivant

$$\int d\sigma \log\sigma \int \nu_{s_1-\sigma} \frac{d}{ds_1}\left(\frac{1}{R_1}\frac{d\xi_1}{ds_1} + \frac{d\eta_1}{ds_1}\right) ds_1,$$

et une intégration par parties fournira

$$\begin{aligned} &-\int \log\sigma\, d\sigma \int \nu'_{s_1-\sigma}\left(\frac{1}{R_1}\xi'_1 + \eta'_1\right) ds_1 \\ &= -\iint \nu'_s \left(\frac{1}{R_1}\xi'_1 + \eta'_1\right) \log(s_1 - s)\, ds\, ds_1. \end{aligned}$$

Ainsi transformées, nos formules ne contiennent plus que les dérivées premières des quantités ξ, η, ν, avec des coefficients continus à la Lipschitz pour l'ordre deux.

Or ξ et η sont donnés par les formules (11) [p. 17]. Leurs dérivées dépendent de la dérivée du second membre $\nu\Delta\Gamma$ de (1 *bis*) et, d'autre part, des dérivées premières de F, G, H, I, lesquelles sont continues pour l'ordre trois $\left(\text{ainsi que } \frac{d\Delta\Gamma}{ds}\right)$.

Remettant enfin pour ν sa valeur en fonction de μ, — ce qui n'introduira encore (même dans la valeur de ν') que des coefficients continus, — l'intégrale (57) apparaîtra comme une somme d'intégrales portant sur des quantités quadratiques par rapport aux valeurs de μ, μ'.

[1] La continuité à la Lipschitz de la dérivée $\frac{d}{ds_1}\log\left(\frac{r}{s_1 - s}\right)$ est une conséquence simple des considérations précédemment développées et, particulièrement, des formules (33), (34). Voir également plus loin, V^e partie, § 1 (formule 67 *bis*).

Remplaçons les coefficients de ces formes par les valeurs qu'ils ont aux points correspondants de C. En raison de leur continuité, les erreurs commises, de par cette altération, sont de la forme

$$\int (\varepsilon)\,\mu^2 d\omega, \tag{58}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\iint (\varepsilon)\,\mu_\omega \mu_{\omega_1}\, d\omega\, d\omega_1, \\ &\iint (\varepsilon)\,\mu_\omega \mu'_{\omega_1}\, d\omega\, d\omega_1, \\ &\iint (\varepsilon)\,\mu'_\omega \mu'_{\omega_1}\, d\omega\, d\omega_1, \end{aligned}\right. \tag{58 bis}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\iint (\varepsilon)\,\mu_\omega \mu_{\omega_1} \log r\, d\omega\, d\omega_1, \\ &\iint (\varepsilon)\,\mu_\omega \mu'_{\omega_1} \log r\, d\omega\, d\omega_1, \\ &\iint (\varepsilon)\,\mu'_\omega \mu'_{\omega_1} \log r\, d\omega\, d\omega_1, \end{aligned}\right. \tag{59}$$

(ε) désignant des quantités (variables) de l'ordre de grandeur de ε.

Les quantités (58), (58 *bis*) sont évidemment de l'ordre (45); il suffit donc d'examiner les quantités (59) et nous pouvons même nous borner à la dernière d'entre elles. Or celle-ci est, d'après l'inégalité de Schwartz, plus petite que

$$\sqrt{\iint (\varepsilon)^2 \mu'^2_\omega\, d\omega\, d\omega_1 \cdot \iint \log^2 r\, \mu'^2_{\omega_1} d\omega\, d\omega_1},$$

c'est-à-dire que

$$(\varepsilon) \mathrm{K} \int \mu'^2_\omega\, d\omega, \tag{60}$$

K étant une limite supérieure de $\int_0^{2\pi} \log^2 r\, d\omega_1$.

Donc *les quantités* (58)-(59), c'est-à-dire *les erreurs commises en remplaçant les intégrales prises sur C' par les intégrales correspondantes prises sur* C, sont bien de l'ordre (45).

Donc la démonstration de notre théorème est complète [1].

Quant aux résultats de la substitution dont nous venons de démontrer la légitimité, ils seront évidemment, eux aussi, de la forme (58), (58 *bis*), (59), sauf que les facteurs (ε) seront remplacés par des facteurs finis.

Il est d'ailleurs aisé de calculer effectivement ces résultats. Nous avons vu que l'on a, sur le cercle,

$$\Delta\Gamma = 2.$$

On a d'autre part, sur le cercle,

$$f = \frac{1}{2\pi a}\left[1+\cos(\omega-\omega_1)\right], \qquad g = -\frac{\cos(\omega-\omega_1)}{2\pi},$$

$$h = -\frac{1}{2\pi a^2}\cos(\omega-\omega_1), \qquad i = \frac{1}{2\pi a}\left[1+\cos(\omega-\omega_1)\right].$$

Les équations de Fredholm qui déterminent ξ et η sont donc :

$$\xi_\omega + \int_0^{2\pi}\left[\frac{1+\cos(\omega-\omega_1)}{2\pi}\xi_{\omega_1} - \frac{\cos(\omega-\omega_1)}{2\pi}a\eta_{\omega_1}\right]d\omega_1 = 0,$$

$$\eta_\omega + \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2\pi a}\cos(\omega-\omega_1)\xi_{\omega_1}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\pi}\big(1+\cos(\omega-\omega_1)\big)\eta_{\omega_1}\right]d\omega_1 = 2\mu a,$$

[1] Nous n'avons pas parlé de la substitution analogue dans le premier terme de (47'), cette substitution n'offrant aucune difficulté.

Il faut également ajouter à μ une constante (très petite) pour lui faire vérifier l'équation (38') au lieu de (38). On voit aisément que ceci ne trouble pas notre conclusion, les termes ainsi introduits étant de l'ordre (45).

équations dont la solution est elle-même de la forme

$$(61)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi_\omega &= \int_0^{2\pi} \mu_{\omega_1}\left[\frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1 \cos(\omega - \omega_1)\right] d\omega_1,\\ \eta_\omega &= 2\mu_\omega a + \int_0^{2\pi} \mu_{\omega_1}\left[\frac{\gamma_0}{2} + \gamma_1 \cos(\omega - \omega_1)\right] d\omega_1. \end{aligned}\right.$$

L'application des formules (57) conduit évidemment à des intégrales de la forme annoncée. L'une d'elles est

$$\begin{aligned} \mathrm{K} &= -\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu'_\omega \mu'_{\omega_1} \log\frac{r}{2a}\, d\omega\, d\omega_1 \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu'_\omega \mu'_{\omega_1} \log\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\omega-\omega_1}{2}}\right) d\omega\, d\omega_1, \end{aligned}$$

que l'on peut encore écrire

$$\mathrm{K} = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu_\omega \mu''_{\omega_1} \log\frac{1}{\sin^2\frac{\omega-\omega_1}{2}}\, d\omega\, d\omega_1$$

[par un calcul inverse de celui qui a conduit aux intégrales (59)].

C'est celle qui donne, dans le calcul précédemment fait, la partie principale du terme (54).

On a, en effet :

$$\int_0^{2\pi} \sin p\tau \log\frac{1}{\sin^2\frac{\tau}{2}}\, d\tau = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos p\tau \log\frac{1}{\sin^2\frac{\tau}{2}}\, d\tau = -\frac{1}{p},$$

et ces valeurs, transportées dans celle de K (après remplacement de ω_1 par $\omega+\tau$), expriment bien [1] cette dernière par la somme

$$\sum_p p \int A_p^2\, d\omega = \frac{1}{2} \sum_p p\,(a_p^2 + b_p^2). \tag{62}$$

On remarquera que, lorsque s'introduisait sous le signe $\int\int$ une quantité quelconque de la forme (ε), — c'est-à-dire dans la dernière intégrale (59), — nous n'avons pas pu assigner au résultat obtenu une limite supérieure égale au produit de ε par la quantité (62). Nous avons seulement pu affirmer que ce résultat était inférieur au produit de ε par

$$\int \mu'^2\, d\omega - \frac{1}{2} \sum_p p^2 (a_p^2 + b_p^2), \tag{62'}$$

lequel peut être avec K dans un rapport aussi grand qu'on veut.

Mais si, en même temps que la limite supérieure du module du facteur (ε), nous supposons donnée une limite supérieure de sa dérivée (ou simplement de sa variation totale), — ce qui aura lieu certainement si nous supposons entre C et C′ un voisinage du quatrième ordre, — la dernière intégrale (59) sera bien très petite, non seulement par rapport à (62′), mais encore par rapport à (62). C'est ce qu'on voit sur les intégrales

$$\int_0^{2\pi} (\varepsilon) \sin p\tau \log \frac{1}{\sin^2 \frac{\tau}{2}}\, d\tau,$$

$$\int_0^{2\pi} (\varepsilon) \cos p\tau \log \frac{1}{\sin^2 \frac{\tau}{2}}\, d\tau,$$

[1] On ramènerait directement à $-K$ l'intégrale (51′) en intégrant deux fois par parties par rapport à l'un des arguments, et faisant ensuite $k=1$.

IMPRIMERIE NATIONALE.

en intégrant par parties (ou appliquant le second théorème de la moyenne), les facteurs intégrés tout d'abord étant sin $p\tau$ et cos $p\tau$.

§ 5.

Nous pourrions parvenir au même résultat relatif à la quantité (43_3) par une autre méthode dont nous aurons à faire à nouveau usage dans la suite.

Ecrivons la valeur de $\Delta\Gamma$ en un point du contour, c'est-à-dire la formule

$$(22) \qquad \frac{1}{8\pi}\Delta\Gamma = R_s + \int [G(s_1, s)Q_{s_1} + I(s_1, s)R_{s_1}]ds_1.$$

Pour avoir la variation $\delta(\Delta\Gamma)$, nous n'aurons qu'à appliquer l'opération δ au second membre de cette équation. Nous aurons ainsi la valeur complète de $\delta\Delta\Gamma$, en tenant compte à la fois du changement de forme de Γ et du déplacement du point, sans avoir besoin de la décomposer comme le veut la formule $(47')$.

Les évaluations précédentes sur la continuité à la Lipschitz nous permettent évidemment de limiter le symbole δ que nous avons à former en fonction de δu, $\delta u'$, $\delta u''$, c'est-à-dire de μ, μ', μ''. Nous allons reprendre cette limitation sous une forme plus précise.

Tout d'abord, δQ_s, δR_s sont évidemment des fonctions linéaires de μ, μ', μ'', les coefficients étant continus à la Lipschitz.

Puis, pour varier les fonctions G, I, il faudra faire porter l'opération δ successivement sur chacune des fonctions $f(s_j, s_k)$, $g(s_j, s_k)$, $h(s_j, s_k)$, $i(s_j, s_k)$ qui y figurent.

Ces δf, δg, δh, δi, à leur tour, d'après les évaluations des pages 41 et suivantes (en particulier, formules 31, 32), sont des fonctions linéaires des quantités

$$(63) \qquad \delta \frac{P}{\sigma^3},$$

(64) $$\delta \frac{r}{\sigma},$$

(65) $$\delta\varphi,\ \delta\psi.$$

Pour la première, la formule (33) donne l'expression

(66) $$\delta \frac{P}{\sigma^3} = \frac{1}{\sigma^3}\int_0^\sigma \delta\chi\,(s+\sigma_1)(\sigma-\sigma_1)\,d\sigma_1$$

et $\delta\chi$ est visiblement une fonction linéaire des valeurs de μ, μ', μ'' en deux points de la courbe.

On a ensuite

(67) $$\delta \frac{r}{\sigma} = \frac{P}{r}\delta\frac{P}{\sigma} + \frac{p}{r}\delta\frac{p}{\sigma} = \frac{P\sigma}{r}\delta\frac{P}{\sigma^3} + \frac{p}{r}\delta\frac{p}{\sigma},$$

p étant (fig. 3) la distance de l'une des extrémités de σ à la normale menée à l'autre extrémité.

Le premier terme vient d'être évalué. Dans le second, on a

$$\frac{p}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}\int_s^{s+\sigma} \chi_1 ds,$$

$$\chi_1 = \cos(n, n_1),$$

et, par conséquent,

(68) $$\delta \frac{p}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}\int_s^{s+\sigma} \delta\chi_1 ds = \frac{1}{\sigma}\int_0^\sigma \delta\chi_1(s+\sigma)d\sigma;$$

$\delta\chi_1$ est une fonction linéaire des valeurs de μ, μ'.

Nous avons, il est vrai, adopté le mode de calcul des pages 41-44, comme si nous faisions encore se correspondre les points qui sont séparés par des arcs égaux. Mais il est clair qu'on traitera tout

9.

à fait de même le cas de notre correspondance radiale en substituant aux quantités (63), (64), les suivantes

$$(63') \qquad \delta\frac{P}{\sin^2\frac{\omega-\omega_1}{r}} \qquad\qquad (64') \qquad \delta\frac{r}{\sin\frac{\omega-\omega_1}{r}},$$

ω et ω_1 étant les angles polaires correspondants à deux points de la courbe et tels que leur différence soit comprise entre o et π.

Donc, en résumé, $\delta\Delta\Gamma_s$ est une somme de termes de la forme

$$(69) \qquad \mu^{(i)}, \int\ldots\int\mu_1^{(i)}\mathrm{H}\Phi\, ds_1 ds_k, \ldots \; (i=0, 1, 2),$$

Φ (savoir χ, $\chi_1\ldots$) étant des expressions, finies et continues à la Lipschitz pour l'ordre deux, qui dépendent de la forme de la courbe; H, des quantités qui peuvent devenir infinies [les quantités $\frac{1}{\sigma}$, $\frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma^2}$ des formules (66), (68), ou plutôt les quantités analogues intervenant dans le calcul des quantités (63′), (64′)], mais qui sont indépendantes de la forme de la courbe.

De plus, d'après la manière même dont nous avons conduit les calculs, ces quantités H sont telles que les intégrales (69) soient finies quels que soient les systèmes de valeurs finies données à Φ, $\mu^{(i)}$.

Remplaçons, dans ces conditions, les valeurs des Φ sur C′ par les valeurs correspondantes prises sur C. Nous n'altérons chacun des Φ que d'une quantité de l'ordre de ε; et, par conséquent, chacune des intégrales (69) que d'une quantité au plus égale à

$$\varepsilon\int_0^{2\pi}\mu_1^{(i)}\mathcal{J}(\omega_1, \omega)\,d\omega_1,$$

ω étant la valeur de l'argument au point où l'on veut calculer $\delta\Delta\Gamma$ et $\mathcal{J}$ une fonction positive telle que l'intégrale

$$(70) \qquad \mathfrak{I}(\omega) = \int_0^{2\pi}\mathcal{J}(\omega_1, \omega)\,d\omega$$

soit finie. Cette intégrale aura même, quel que soit ω, un certain maximum.

En introduisant la variable ω, au lieu de s, dans les intégrales (69), nous écrirons celles-ci

$$(69') \qquad \int \cdots \int \mu_1^{(i)} \mathrm{H}\Psi \, d\omega_1 \, d\omega_k \cdots$$

Multiplions maintenant $\mu\Delta\Gamma\rho^2 d\omega$ et intégrons à nouveau. Dans les termes qui contiennent la dérivée $\mu_1^{(i)}$, nous transformerons, comme précédemment, par intégration par parties, après avoir introduit les variables ω, $\omega_1 - \omega$, $\omega_k - \omega$, ... Moyennant ce changement de variables, les quantités H (qui ne dépendent que des différences entre les valeurs des ω) seront constantes par rapport à ω, et les conclusions qui viennent d'être formulées plus haut ne seront pas troublées par cette intégration par parties, moyennant laquelle les quantités (69') ne contiendront plus que les dérivées *premières* de μ et de μ_1.

Nous voyons dès lors, — étant donné que, comme il est facile de s'en assurer, les dérivées des Φ, introduites par l'intégration par parties, sont continues pour l'ordre trois, — que la substitution des valeurs sur C aux valeurs sur C' implique une erreur inférieure à

$$(\varepsilon) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu' \mu_1' \mathfrak{F}(\omega, \omega_1) \, d\omega \, d\omega_1$$

ou (d'après l'inégalité de Schwarz) à

$$(71) \qquad (\varepsilon) \sqrt{\iint \mu'^2 \mathfrak{F}(\omega, \omega_1) \, d\omega \, d\omega_1 \iint \mu_1'^2 \mathfrak{F}(\omega, \omega_1) \, d\omega \, d\omega_1}$$

$$< (\varepsilon) \, \mathfrak{J} \int \mu'^2 \, d\omega.$$

Nous obtiendrions, en faisant cette substitution, l'expression de $\int \mu \Delta\Gamma \delta\Delta\Gamma \rho^2 d\omega$, expression forcément équivalente aux précédentes.

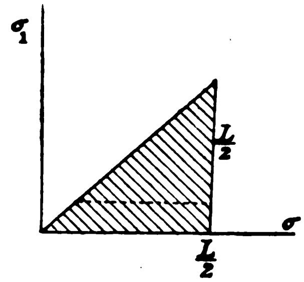

Fig. 4.

Il est aisé de voir comment les termes en $\log r$ peuvent s'y introduire. Partons de la quantité

$$\text{(66)} \qquad \frac{1}{\sigma^2}\int_0^{\sigma} \delta\chi(s+\sigma_1)(\sigma-\sigma_1)\,d\sigma_1.$$

Multiplions par $d\sigma$ et intégrons de o à $\frac{L}{2}$[1]. Nous aurons une intégrale double étendue, dans le plan des $\sigma\sigma_1$, à un triangle isocèle (fig. 4) $(0 \leqslant \sigma \leqslant \frac{L}{2};\ 0 \leqslant \sigma_1 \leqslant \sigma)$. En renversant l'ordre des intégrations, elle s'écrit

$$\int_0^{\frac{L}{2}} \delta\chi(s+\sigma_1)\,d\sigma_1 \int_{\sigma_1}^{\frac{L}{2}} \frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma^2}\,d\sigma = -\int_0^{\frac{L}{2}} \delta\chi(s+\sigma_1)\left(\log\frac{2\sigma_1}{L} - 1 + \frac{2\sigma_1}{L}\right)d\sigma_1.$$

[1] Nous rappelons que les formules telles que (66) s'appliquent au *plus petit* des deux arcs interceptés entre deux points de la courbe; ou, quand on prend ω pour variable, à l'arc qui est vu de A sous un angle inférieur à π.

§ 6.

Supposons qu'au lieu de nous donner la longueur de C, nous nous donnions l'aire de S.

La variation seconde serait-elle encore négative?

L'équation (38) doit être remplacée par

$$\int \mu\rho^2 d\omega = 0 \tag{72}$$

et détermine μ par la condition [correspondante à (42)]

$$cS = \int u\rho^2 d\omega.$$

La variation seconde est alors simplifiée par la suppression des termes (43_2). Ceux-ci disparaissent en vertu de (72).

Ainsi, *les termes en* $\int \mu'^2 d\omega$ *s'éliminent.*

Il reste :

1° Les termes analogues à (43_1).

Comme on a, ici

$$\delta\mu = \delta c = \frac{2}{S}\int u\rho\delta\rho d\omega = \frac{2a^2}{S}\int u\mu d\omega,$$

ces termes seront de l'ordre de

$$\varepsilon \int \mu^2 d\omega$$

et ne troubleront pas l'extremum;

2° Le terme (43_3), pris *sur le cercle*. Nous savons que ce terme est négatif et que sa partie principale est fournie par la quantité (54);

3° L'erreur commise en substituant ce terme au terme véritable déduit des valeurs prises sur C' et non sur C.

Ici il faut distinguer.

Si nous savons seulement que les quantités auxquelles nous avons donné le nom de (ε) sont très petites en valeur absolue, cette erreur sera seulement inférieure à la quantité (45).

Elle pourra, dès lors, *dépasser le terme* (54) et l'extremum n'est pas acquis.

Nous devons donc supposer que, non seulement les quantités (ε), mais leurs dérivées premières, sont très petites. Autrement dit, le voisinage exigé sera d'une unité plus élevé dans ce problème que dans le précédent.

Moyennant cette hypothèse, l'erreur dont il s'agit est de l'ordre de ε, multiplié par la quantité (62), c'est-à-dire n'altère le terme (54) que dans un rapport infiniment petit.

Il y a donc maximum.

Mais cet exemple nous montre les circonstances toutes nouvelles qui peuvent se présenter dans nos études actuelles.

Il est *sans analogue* dans les variations secondes des intégrales définies ordinaires.

Si, en effet, il s'agissait de la variation seconde d'une intégrale qu'on peut appeler d'ordre zéro[1] $\left(\text{intégrale curviligne} \int P\,dx + Q\,dy\right)$, la variation seconde serait de l'ordre de

$$\int \mu^2 d\omega = \sum_p \frac{a_p^2 + b_p^2}{2}.$$

[1] De cette nature est l'intégrale qui représente l'aire S.

Pour une intégrale du premier ordre $\int f(x, y, dx, dy)$, la variation seconde aurait pour partie principale

$$\int \mu'^2 d\omega = \Sigma p^2 \left(\frac{a_p^2 + b_p^2}{2}\right).$$

Or la variation seconde actuelle a pour partie principale

$$\iint \mu\mu_1'' \log r d\omega d\omega_1$$

et, trigonométriquement,

$$\Sigma p \frac{a_p^2 + b_p^2}{2}.$$

Elle *correspond donc à un ordre fractionnaire*, égal à $\frac{1}{2}$, tandis qu'à d'autres points de vue, notre fonction de ligne s'est montrée comme intermédiaire entre les intégrales qui contiennent des dérivées premières et celles qui contiennent des dérivées *secondes*.

Nous serions évidemment en état d'appliquer des considérations analogues aux précédentes à tout problème de variations, concernant les quantités mentionnées dans notre Ire partie, et dont nous connaîtrions une extrémale.

Tel est le cas pour l'exemple de Lord Rayleigh. Le cercle est évidemment une extrémale pour le premier nombre fondamental relatif à l'équation

$$\Delta\Delta V + K^2 V = 0$$

lorsque l'aire ou le périmètre sont donnés. D'autre part, la recherche de ce nombre dépend de la fonction de Green Γ, dont nous avons appris à étudier le mode de continuité, et qu'il faudra substituer dans les formules de M. Fredholm. En un mot, nous avons tous les

éléments d'une étude analogue à celle que nous avons présentée dans ce qui précède sur Γ_A^A.

Par contre, il est bien entendu qu'on ne peut espérer, dans la voie que nous avons suivie jusqu'à présent, atteindre un extremum absolu [1].

Dans l'expression (43) de la dérivée $\frac{\delta^2 \Gamma_A^A}{\delta \alpha^2}$ les termes (43_2) et (43_3), — qui constituent ce qu'on peut appeler la variation seconde proprement dite, — peuvent être étudiés en dehors du voisinage de l'extrémale; et même toute méthode destinée à juger du maximum ou du minimum doit (sauf dans des cas très particuliers justiciables d'artifices spéciaux) faire intervenir cette étude sous une forme ou sous une autre.

Mais il n'en est pas de même du terme (43_1). L'évaluation que nous en avons fournie est, par essence, limitée au voisinage d'une ligne donnée.

[1] Il est à noter qu'on pourrait assez aisément, dès maintenant, indiquer d'une manière précise les voisinages dans lesquels les extrema étudiés dans ce qui précède soient assurément valables. La véritable difficulté pour déterminer le nombre ε consiste, en effet, dans le calcul du déterminant de l'équation ou, — ce qui en tient lieu, comme nous le verrons plus loin, — des fonctions résolvantes. Or nous avons déjà constaté plus haut que, pour le cercle, nos équations de Fredholm et leurs résolvantes sont très simples.

IV

§ 1.

Les méthodes modernes du Calcul des variations ont montré la voie dans laquelle on doit rechercher les vraies conditions de l'extremum.

Nous savons que ces conditions sont directement liées aux conditions d'existence des extrémales.

Cette question est donc une des premières qui se soient posées pour les cas classiques.

Il y a été répondu, jusqu'en ces derniers temps, par l'étude des propriétés des équations différentielles du problème. Nous n'avons pas ici cette ressource, la recherche des extrémales, dans les cas qui viennent d'être cités, dépendant d'équations fonctionnelles (à la fois intégrales et différentielles) sur lesquelles nous ne possédons aucun renseignement. Il faut donc employer une méthode directe.

On sait qu'on doit à M. Hilbert l'introduction dans la science de méthodes de cette espèce. La première de celles qu'il a indiquées [1] est incomplète à notre point de vue. Elle suppose, en effet, le résultat que l'on a en vue établi dans un cas particulier (celui d'une ligne suffisamment petite).

La seconde méthode de M. Hilbert [2] échappe à cet inconvénient et est, au contraire, complète au sens précédent. Seulement, appliquée par son auteur à un cas important du problème de Dirichlet, elle n'a pas été étendue, jusqu'ici, à des problèmes non linéaires.

[1] *Nouvelles Annales de Math.*, 1900. — [2] *Math. Annalen*, 1904.

Mais le procédé que nous voudrions indiquer ici diffère de ceux de M. Hilbert sous un autre point de vue qui nous paraît important.

Toutes les « démonstrations d'existence » qui figurent dans les différents chapitres du calcul intégral sont, avant tout, des méthodes théoriques. Elles fournissent toutefois, en général, une expression du résultat cherché. Seulement cette expression est plus ou moins compliquée, et leur but n'est pas de la simplifier.

Les méthodes de M. Hilbert occupent, à cet égard, une place à part. Elles se bornent strictement à la définition et à l'existence de la solution; elles ne recherchent, pour calculer effectivement l'objet ainsi défini, aucun moyen, si pénible soit-il[1].

La méthode que j'ai en vue constitue, au contraire, l'équivalent, pour le problème actuel, des autres méthodes classiques d'approximations successives usitées en analyse. Sans prétendre plus que ces dernières à fournir le procédé de calcul le plus commode, du moins donne-t-elle *un* algorithme qui converge (sauf peut-être, dans un cas exceptionnel) vers le résultat.

Pour exposer cette méthode, je commencerai par m'adresser à un problème de calcul des variations classique. Mais, avant même d'aborder cette catégorie de questions, il nous sera utile d'examiner rapidement ce qui se passe dans le cas des minima ordinaires.

Soit

$$z = f(x, y)$$

une fonction donnée; et considérons les lignes définies par l'équation différentielle

$$\frac{dx}{-\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{dy}{-\frac{\partial f}{\partial y}} = d\alpha,$$

Ce ne sont autre chose que les lignes de plus grande pente de la surface S qui a x, y, z pour coordonnées cartésiennes.

[1] Il résulte même de cette particularité, comme l'a fait remarquer récemment M. Carathéodory, que les méthodes de M. Hilbert doivent être

Nous suivrons ces lignes dans un seul sens, celui des α croissants, de sorte que z y sera toujours décroissant.

Tout point M_0 qui correspond à un minimum de f, c'est-à-dire tout *fond* de la surface S, est un *nœud* (au sens que revêt ce mot dans les travaux classiques de M. Poincaré) pour notre équation différentielle. Toutes les lignes de plus grande pente issues d'une certaine région R qui comprend M_0 aboutissent en M_0 (ceci ayant lieu, comme il est facile de s'en assurer, même si les coordonnées de ce point annulent les dérivées secondes, ou même les dérivées d'ordre supérieur, de f).

On obtiendra donc le point M_0 en intégrant l'équation différentielle des lignes de plus grande pente et faisant croître α indéfiniment, pourvu que les valeurs initiales de x, y correspondent à un point M' de la région R.

Cette manière d'arriver au point M_0 est donc une sorte de méthode d'approximations successives dépendant *continûment* d'un paramètre. On verrait aisément qu'on peut y substituer des approximations successives du type habituel, c'est-à-dire dépendant d'un *entier* de plus en plus grand; ce second procédé reviendrait, au fond, à une intégration de l'équation différentielle par la méthode de Cauchy-Lipschitz.

Il importe d'arrêter un instant notre attention sur un cas exceptionnel : celui où f admettrait une *ligne de minima*. Une telle ligne L ne formerait pas, elle non plus, un cycle limite : il est aisé de voir que chaque trajectoire viendrait aboutir, pour $\alpha = +\infty$, en un point parfaitement déterminé de L (sauf pour des formes singulières de la surface). Cela tient à ce que les lignes de niveau voisines de L ont sensiblement la même direction qu'elle, de sorte que les lignes de pente tendent forcément à être normales à L.

considérées comme inexistantes par les géomètres qui partagent, sur l'« existence » en mathématiques, les idées de MM. Borel, Lebesgue, Baire. Elles tombent sous le coup des critiques adressées, à ce point de vue, à la démonstration connue de M. Zermelo par les géomètres que nous venons de citer.

Si le point M′ était pris en dehors de la région précédente, M_0 serait, en général[1], un autre minimum de f.

S est ainsi partagé en une série de régions analogues à R, conduisant chacune à un minimum déterminé.

Quant aux lignes qui séparent les unes des autres les différentes régions ainsi définies, ce sont, en général, des lignes de plus grande pente aboutissant à des cols, — ou, exceptionnellement, des lignes de maxima, lorsque de telles lignes existent. Ces séparatrices peuvent être appelées *lignes de faîte :* car elles donnent, à ce qu'il semble, la définition la plus naturelle des lignes de faîte topographiques, — définition qui, comme on le voit, est conforme aux idées émises à ce sujet par MM. Boussinesq et Jordan (contrairement à celles que j'avais présentées moi-même sur ce sujet[2]).

Si le point M′ est pris sur une de ces lignes de faîte (et en excluant le cas où il correspondrait à un maximum de f), le point M_0 qu'on en déduira sera un *col,* c'est-à-dire que en ce point les deux dérivées partielles de f s'annuleront encore, mais sans qu'il y ait maximum ou minimum.

Toute trajectoire (ou, suivant l'expression de M. Poincaré, toute *caractéristique*) aboutit donc à un point singulier de l'équation différentielle : il n'y a point, dans le problème actuel, de cycles limites.

On doit enfin remarquer que les séparatrices dont nous avons parlé plus haut seront inexistantes et le point M_0 nécessairement unique, si la surface S est convexe.

[1] Nous supposons (ce qui sera légitime dans la suite) qu'on n'a pas à considérer le cas où la ligne de plus grande pente s'éloignerait indéfiniment, — soit que, comme en topographie proprement dite, on ait à considérer la fonction f, non sur un plan, mais sur un sphéroïde, — soit que f soit égal à $+\infty$ en même temps que x^2+y^2.

[2] Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique (*Journal de Math.*, 1897).

§ 2.

Abordons maintenant un problème de minimum emprunté au Calcul des variations. Nous nous adresserons au cas le plus simple, celui de l'intégrale

$$I = \int_0^a f(x, y, y')\,dx$$

où y est une fonction assujettie à prendre, pour $x = o, a$ des valeurs déterminées o, b, et où $y' = \frac{dy}{dx}$.

Si, à la manière habituelle, nous considérons y comme fonction de x et d'un paramètre auxiliaire α, et que nous désignions par le symbole δ les dérivées partielles prises par rapport à α, nous admettrons tout d'abord que cette fonction y prend, quel que soit α, les valeurs données aux extrémités et que l'on a, par conséquent,

$$\delta y = o \qquad (x = o, a).$$

Nous écrirons ensuite la variation première sous la forme indiquée par du Bois-Reymond, savoir

$$\delta I = \int_0^a Q\,\delta y'\,dx$$

avec

$$Q = \frac{\partial f}{\partial y'} - \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}\,dx - h,$$

h étant une constante arbitraire qui s'élimine évidemment du résultat, en vertu des équations de condition imposées à δy.

La variation première ainsi obtenue sera nécessairement néga-

tive, et l'intégrale I toujours décroissante, si nous déterminons y, y' en fonction de x et de α de manière à vérifier la relation différentielle

$$\delta y' = \rho Q,$$

ρ étant une quantité positive et la constante h qui figure dans l'expression de Q étant calculée de manière que

$$\delta y = \int_0^x \delta y' dx$$

soit nul pour $x = a$, ce qui donne

$$h = \frac{\int_0^a \rho \left(\frac{\partial f}{\partial y'} - \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y} dx \right) dx}{\int_0^a \rho dx};$$

ρ peut être une fonction quelconque de x et de α, pourvu qu'il soit constamment positif[1], et il pourra nous être utile de profiter de cette variabilité de ρ. Quant à présent, nous nous contenterons de prendre $\rho = 1$, soit

$$\text{(E)} \qquad \delta y' = -Q = -\left(\frac{\partial f}{\partial y'} - \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y} dx - h \right),$$

$$h = \frac{1}{a} \int_0^a \left(\frac{\partial f}{\partial y'} - \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y} dx \right) dx.$$

Or l'équation précédente se traite sans aucune difficulté à la façon d'une équation différentielle ordinaire où la variable indé-

[1] Il est nécessaire, au point de vue des raisonnements ultérieurs, que ρ ne soit jamais nul : qu'il admette un minimum positif.

pendante serait α. *Elle admet une solution et une seule, si l'on donne la* **courbe initiale**, c'est-à-dire celle qui représente y en fonction de x pour $\alpha = 0$.

Supposons, en effet, que la fonction f ait des dérivées premières et secondes finies et, en particulier, que ses dérivées premières satisfassent à la condition de Lipschitz

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y_2}(x, y_2, y_2') - \frac{\partial f}{\partial y_1}(x, y_1, y_1')\right| < k(|y_2 - y_1| + |y_2' - y_1'|),$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y_2'}(x, y_2, y_2') - \frac{\partial f}{\partial y_1'}(x, y_1, y_1')\right| < k(|y_2 - y_1| + |y_2' - y_1'|).$$

Alors, si y_1 et y_2 sont deux fonctions de x nulles à l'origine et que μ soit une limite supérieure de $|y_2' - y_1'|$ (par conséquent μa une limite supérieure de $|y_2 - y_1|$), on aura

$$\left(\delta y_2' - \delta y_1'\right) < k_1 \mu$$

$$\left(\delta y_2 - \delta y_1\right) < k_1 \mu a$$

en prenant $k_1 = 2k(1 + a)^2$.

Dans certains cas, — par exemple lorsque f aura la forme simple bien connue

$$f(x, y, y') = \frac{1}{2}(Ay'^2 + 2Byy' + Cy^2)$$

(A, B, C étant des fonctions données de x), les nombres k et k_1 pourront être assignés à priori, quels que soient y_1, y_2, y_1', y_2' (et aussi pour toute valeur de x comprise entre zéro et a).

S'il en est ainsi, *notre équation définit les valeurs de y et de y' pour toute valeur de α.* Il est inutile d'indiquer les calculs qui conduisent à ces valeurs : ils reproduisent, sans modification aucune, la marche suivie dans les méthodes d'approximations suc-

IMPRIMERIE NATIONALE.

cessives employées pour la résolution des équations différentielles ordinaires (par exemple, dans la méthode de M. Picard) ou celle que nous avons employée plus haut dans la résolution de l'équation (25) [IIe Partie].

Supposons, au contraire, que k ne soit limité qu'en fonction de y et de y'. Il aura, en tout cas, une limite supérieure pour toutes les valeurs de ces quantités qui vérifient les inégalités

$$|y'| < \beta, \quad |y| < \beta a,$$

β étant un nombre positif quelconque, que nous supposerons, en tout cas, plus grand que la limite supérieure γ de $|y'|$ sur la courbe initiale.

Soit M la limite supérieure de $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ et de $\left|\frac{\partial f}{\partial y'}\right|$ pour toutes les valeurs de y, y' satisfaisant aux inégalités précédentes et pour toutes les valeurs de x comprises entre zéro et a : $|\delta y'|$ et $|\delta y|$ auront, dans les mêmes conditions, les limites supérieures

$$|\delta y'| < M_1 \quad |\delta y| < M_1 a$$

avec

$$M_1 = 2M(1+a).$$

La méthode d'approximations définira y' et y pour toute valeur de α comprise entre o et $\frac{\gamma-\beta}{M_1}$. La solution ainsi trouvée de notre équation sera d'ailleurs la seule qui, pour $\alpha = 0$, représente la courbe initiale donnée.

Mais, dans les conditions où nous allons nous placer dans un instant, nous pourrons être plus affirmatifs. Nous serons assurés, en effet, que y et y' restent finis.

S'il en est ainsi, ces fonctions seront définies quel que soit α.

Soit, d'une manière plus précise, β un nombre auquel la fonc-

tion y' cherchée, *si elle existe*, est forcément inférieure en valeur absolue. Calculons le nombre que nous avons appelé tout à l'heure M_1, en supposant que y' et y varient respectivement, non plus de $-\beta$ à $+\beta$ et de $-\beta a$ à $+\beta a$, mais de -2β à $+2\beta$ et de $-2\beta a$ à $+2\beta a$.

$|y'|$ (et par conséquent y) étant initialement supposés inférieurs à β, notre solution existera pour toutes les valeurs de α, jusques et y compris $\alpha = \frac{\beta}{M_1}$. Mais comme, par hypothèse, elle sera telle que les inégalités $|y'| < \beta$, $|y| < \beta a$ ne cessent pas d'avoir lieu, on pourra $\left(\text{en prenant pour nouvelle courbe initiale celle qui correspond à } \alpha = \frac{\beta}{M_1}\right)$ la définir de $\alpha = \frac{\beta}{M_1}$ à $\alpha = \frac{2\beta}{M_1}$; et ainsi de suite indéfiniment.

On aura donc bien, pour notre équation, une solution et une solution unique, comme nous l'avions annoncé. De plus, la convergence des approximations successives étant uniforme quel que soit x, y' est continu par rapport à cette variable.

Supposons maintenant que, sur la courbe initiale, y ait une dérivée seconde continue. *Il en sera de même pour les autres valeurs de α, et cette dérivée seconde vérifie l'équation*

$$\delta y'' = -Ay'' + \varphi(x, y, y')$$

avec

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2},$$

$$\varphi(x, y, y') = \frac{\partial f}{\partial y} - y' \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'}.$$

L'existence d'une quantité $y''(x, \alpha)$ vérifiant une telle relation et se réduisant, pour $\alpha = 0$, à $y''_0 = \frac{d^2}{dx^2} y(x, 0)$, est évidente, et il est même clair que y'' est continu.

Le fait que y'' est égal à $\frac{dy'}{dx}$ peut s'établir en généralisant un pro-

cédé [1] qui sert à légitimer la dérivation par rapport aux constantes dans la théorie des équations différentielles ordinaires. Posons

$$\eta\cdot(x,\alpha,\xi)=\frac{y'(x+\xi,\alpha)-y'(x,\alpha)}{\xi},$$

$$\Phi(x,\alpha,\xi)=\frac{1}{\xi}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_x^{x+\xi}\frac{\partial f}{\partial y}\,dx-\frac{\partial f}{\partial y'}\left[x+\xi,y(x+\xi,\alpha),y'(x+\xi,\alpha)\right]\\ \displaystyle\qquad\qquad+\frac{\partial f}{\partial y'}\left[x,y(x,\alpha),y'(x+\xi,\alpha)\right]\end{array}\right\},$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}(x,\alpha,\xi)\\ &\quad=\frac{1}{\xi\eta}\left\{\frac{\partial f}{\partial y'}\left[x,y(x,\alpha),y'(x+\xi,\alpha)\right]-\frac{\partial f}{\partial y'}\left[x,y(x,\alpha),y'(x,\alpha)\right]\right\}\\ &\quad=\frac{1}{\xi\eta}\left\{\frac{\partial f}{\partial y'}\left[x,y(x,\alpha),y'(x,\alpha)+\xi\eta\right]-\frac{\partial f}{\partial y'}\left[x,y(x,\alpha),y'(x,\alpha)\right]\right\}.\end{aligned}$$

On aura

$$\delta\eta=-\mathcal{A}(x,\alpha,\xi)\,.\,\eta+\Phi(x,\alpha,\xi).$$

Or, d'après nos hypothèses, lorsque ξ tend vers zéro, Φ et $\mathcal{A}$ tendent uniformément, quels que soient x et α, vers $\varphi\,(x,y,y')$ et A. D'autre part, dans les mêmes conditions, la valeur η_0 de η qui correspond à $\alpha=0$ tend, par hypothèse, vers y''_0. Donc la quantité

$$\eta=e^{-\int_0^\alpha \mathcal{A}d\alpha}\left[\eta_0+\int_0^\alpha \Phi e^{\int \mathcal{A}d\alpha}d\alpha\right]$$

tend vers la limite

$$y''=e^{-\int_0^\alpha \mathrm{A}d\alpha}\left[y''_0+\int_0^\alpha \varphi(x,y,y')\,e^{\int \mathrm{A}d\alpha}d\alpha\right].$$

[1] Hadamard, *Bull. de la Soc. Math. de France*, t. XXVIII, p. 64, 1900.

Voyons donc sous quelles conditions les quantités y, y' définies par notre relation différentielle resteront finies. Nous avons vu que nous pouvons pour cela, sans cercle vicieux, admettre l'existence des quantités en question. Celles-ci étant supposées vérifier la relation différentielle, l'intégrale I sera une fonction décroissante de α et restera, par conséquent, toujours inférieure à sa valeur initiale I_0.

Or on peut tout d'abord, dans des cas très étendus, qui sont ceux mêmes auxquels conduisent les applications, déduire de là une limite supérieure pour $|y|$. Il suffit que f soit positif et supérieur à $k\,|y'|$ (k étant fixe) pour toutes les valeurs de $|y'|$ supérieures à un autre nombre positif fixe k'. Alors on aura

$$|y| < \int_0^x |y'|\,dx < \frac{1}{k}\int_0^x f\,dx + k'x < \frac{I_0}{k} + k'a.$$

Si d'ailleurs les nombres k et k' ne pouvaient être assignés qu'en supposant $|y|$ inférieur à une quantité fixe Y (x variant toujours de zéro à a), la conclusion précédente serait encore valable pourvu que Y soit supérieur à $\frac{I_0}{k} + k'a$ et aussi au maximum de $|y|$ sur la courbe initiale.

Ceci étant acquis, occupons-nous de trouver également une limite supérieure de $|y'|$. Ici intervient une hypothèse essentielle, savoir que **la quantité $A = \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$ est toujours positive et non nulle.** Nous admettrons que la fonction f vérifie cette condition.

Multiplions la relation

$$\delta y'' = -Ay'' + \varphi(x, y, y')$$

par $y''dx$ et intégrons de o à a. Soit J l'intégrale

$$J(\alpha) = \int_0^a y''^2 dx;$$

on aura

$$\frac{1}{2}\delta J = -(A)J + \int_0^a \varphi y'' dx,$$

(A) étant une des valeurs que peut prendre A dans l'intervalle d'intégration.

Soit H une limite supérieure, dans les mêmes conditions, du rapport $\frac{\varphi^2}{f}$, du moins en excluant les valeurs de y' inférieures en valeur absolue au nombre fixe k', de sorte qu'on a nécessairement, dans tout l'intervalle d'intégration, l'une des inégalités

$$0 < \frac{\varphi^2}{f} < H,$$

$$|\varphi| < k''$$

(k'' est une limite supérieure des modules de f et de φ lorsque y' varie de $-k'$ à $+k'$, x variant de 0 à a et y étant compris entre les limites que nous avons appris à lui assigner). On pourra appliquer à l'intégrale $\int_0^a \varphi y'' dx$ l'inégalité de M. Schwartz, qui donne

$$\left(\int_0^a \varphi y'' dx\right)^2 < J\int_0^a \varphi^2 dx < J\left[H(I_0 + k'' a) + k''^2 a\right]$$

ou, plus simplement,

$$\left(\int_0^a \varphi y'' dx\right)^2 < JH' \qquad [H' = H(I_0 + k'' a) + k''^2 a].$$

On pourra donc écrire

$$\frac{1}{2}\delta J = -(A)J + \theta\sqrt{H'J} \qquad (|\theta| < 1).$$

On déduit aisément de là que *l'intégrale* J *vérifie l'inégalité*

$$J < \frac{H'}{A_0^2}$$

où A_0 désigne un minimum de A (et l'inégalité en question étant supposée vérifiée initialement).

Dans le cas contraire, en effet, J devrait atteindre la valeur $\frac{H'}{A_0^2}$ en croissant : or cela est impossible, la valeur trouvée δJ étant négative pour $J = \frac{H'}{A_0^2}$.

Nous avons donc obtenu une limite supérieure pour l'intégrale

$$J = \int_0^a y''^2 dx.$$

Pour déduire de là une limite supérieure de $|y'|$, nous emploierons le lemme suivant :

u étant une fonction de x, continue de $x = 0$ à $x = a$ ainsi que sa dérivée u', soient

$$J = \int_0^a u'^2 dx,$$

puis

$$\mathfrak{J}_q = \int_0^a |u|^q dx$$

(q étant un exposant fixe positif); *on aura, pour toute valeur de x comprise entre zéro et a, l'inégalité*

$$|u| < 2 \sqrt[q+2]{J \mathfrak{J}_q}.$$

D'une manière générale, *soient f une fonction positive et croissante d'une variable positive, et*

$$\mathfrak{J}_f = \int_0^a f\left(|u|\right) dx:$$

$|u|$ sera, pour toute valeur de x comprise entre zéro et a, inférieur à $2u_0$, u_0 étant le nombre positif défini par l'égalité

$$u_0^2 f(u_0) = \mathrm{J}\mathfrak{J}_f$$

Il suffit évidemment de démontrer cette dernière conclusion.

À cet effet, commençons par prendre le nombre positif u_0 arbitrairement, et désignons par λ la longueur totale des intervalles où $|u|$ est supérieur à u_0. On aura évidemment

$$\lambda f(u_0) < \mathfrak{J}_f.$$

D'autre part, u_1 et u_2 étant les valeurs de u correspondant à deux valeurs quelconques x_1 et x_2 de x comprises entre o et a, on a, d'après l'inégalité de M. Schwartz,

$$(u_1 - u_2)^2 = \left(\int_{x_1}^{x_2} u' dx\right)^2 < (x_2 - x_1) \int_{x_1}^{x_2} u'^2 dx < (x_2 - x_1)\,\mathrm{J}.$$

Or, d'après la signification de λ, on peut évidemment, quel que soit x_1, trouver x_2 tel que $(x_2 - x_1)$ soit inférieur à λ et $|u_2|$ inférieur à u_0. Donc u_1 sera (quel que soit u_0) inférieur à

$$u_0 + \sqrt{\lambda \mathrm{J}} < u_0 + \sqrt{\frac{\mathrm{J}\mathfrak{J}_f}{f(u_0)}}.$$

En choisissant u_0 comme il a été indiqué tout à l'heure, on arrive bien à la conclusion annoncée.

Ce lemme étant établi, désignons par η un nombre positif et supérieur à k'; puis :

Par $f_0(\eta)$, le minimum de $f(x, y, y')$ lorsque $y' = \pm\eta$ et que x, y prennent tous les systèmes de valeurs entre les limites qui leur sont assignées; ce minimum étant supposé fonction croissante de η pour $\eta > k'$ (quitte à le remplacer, dans le cas contraire, par une quantité égale ou inférieure qui possède cette propriété);

Par $\varphi_0(\eta)$, le maximum de $|\varphi(x, y, y')|$ dans les mêmes conditions, ce maximum devant toutefois, s'il y a lieu, être remplacé par une quantité égale ou supérieure telle que $\frac{\varphi_0^2}{f_0}$ soit fonction croissante de η;

Par $A_0(\eta)$, le minimum de A pour les mêmes valeurs de x, y et pour toutes les valeurs de y' inférieures en valeur absolue à η (A_0 étant ainsi, par définition, une fonction décroissante de η).

Si nous supposons que $|y'|$ est, pour $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0$, resté inférieur ou égal à η, nous pourrons prendre H égal à $\frac{\varphi_0^2(\eta)}{f_0(\eta)}$, et H′ (qui est évidemment dans un rapport fini avec H) égal à $K\frac{\varphi_0^2(\eta)}{f_0(\eta)}$, K étant fixe.

La quantité

$$\mathfrak{I}_{f_0} = \int_0^a f_0 |y'| dx$$

est d'ailleurs évidemment inférieure à $I_0 + k''a$.

Donc, d'après notre lemme, $|y'|$ sera constamment inférieur à $2\eta_0$, η_0 étant défini par l'égalité

$$\eta_0^2 f_0(\eta_0) = K(I_0 + k''a)\frac{\varphi_0^2(\eta)}{A_0^2(\eta) f_0(\eta)}.$$

Supposons que cette quantité η_0 soit inférieure (et non égale) à $\frac{\eta}{2}$. Il est clair que *la limite η ne saurait être atteinte par* $|y'|$ (si du moins elle n'est pas atteinte sur la courbe initiale).

IMPRIMERIE NATIONALE.

Or c'est ce qui aura lieu, pour η suffisamment grand, si l'expression

$$\frac{\varphi_0(\eta)}{\eta A_0(\eta)\sqrt{f_0(\eta) f_0\left(\frac{\eta}{2}\right)}}$$

ou, plus simplement, l'expression

$$\psi(\eta) = \frac{\varphi_0(\eta)}{\eta A_0(\eta) f_0\left(\frac{\eta}{2}\right)}$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{\eta}$.

Plaçons-nous, par exemple, dans le cas où pour $y' = \pm\infty$, la partie principale de f (tant au point de vue du calcul de f lui-même que de celui de ses dérivées) soit $P(x,y)\,|y'|^q$, P étant une fonction régulière positive (et non nulle) et q un exposant nécessairement *plus grand* que 1.

Si q est au moins égal à 2, A_0 est une constante. φ_0 étant, comme f_0, de l'ordre de η^q, l'expression $\psi(\eta)$ est de l'ordre de $\frac{1}{\eta}$ et est bien infiniment petite pour η infini.

Si q est compris entre 1 et 2, A_0 est de l'ordre de η^{q-2} et $\psi(\eta)$ de l'ordre de $\frac{1}{\eta^{q-1}}$. La condition demandée est donc encore remplie.

Elle pourrait encore l'être pour $q = 1$ (par exemple, en prenant pour f certaines fonctions de la forme $F(x,y)\sqrt{1+y'^2}$). Car il n'est pas indispensable que $\psi(\eta)$ tende vers zéro : il suffit qu'il puisse recevoir une valeur inférieure à la quantité $\frac{1}{\sqrt{4K(I_0+k''a}}$ (et cela pour une valeur de $|y'|$ supérieure à k' et au maximum de $|y'|$ sur la courbe initiale).

En résumé, nous avons obtenu un système d'hypothèses, — toujours vérifiées lorsque $f(x,y,y')$ est comparable à y'^q $(q > 1)$, — moyennant lesquelles :

1° *y et y' existent et sont continus pour toute valeur de x* comprise entre 0 et a et pour toute *valeur positive de α*;

2° *Ils restent* dans les mêmes conditions (*si grand que soit* α) *inférieurs en valeur absolue à un nombre fixe.*

§ 3.

Voyons maintenant ce que deviendront ces quantités y et y' pour $\alpha = \infty$.

À cet effet, nous distinguerons deux cas, en considérant l'expression

$$\int_0^a \left(A\delta y'^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}\delta y \delta y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\delta y^2 \right) dx,$$

c'est-à-dire la variation seconde débarrassée des termes en $\delta^2 y$, $\delta^2 y'$.

Premier cas. — Supposons que cette expression soit essentiellement positive et même (comme cela a lieu dans les travaux bien connus de Scheeffer et de Kneser) dans un rapport non infiniment petit avec son premier terme

$$\int_0^a A\delta y'^2 dx.$$

C'est ce qui arrivera, par exemple, si, pour toutes les valeurs que sont susceptibles de prendre (d'après les limitations précédentes) y, y', la forme quadratique qui figure sous le signe $\int$ est définie, ou encore, si elle le devient par l'addition de l'expression

$$2\chi(x,y)\delta y\delta y' + \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y}\delta y'\right) y^2 - \frac{d}{dx}\left(\chi(x,y)\delta y^2\right).$$

Cela a, d'autre part, certainement lieu si l'intervalle d'intégration a est suffisamment petit, car on sait que l'intégrale $\int_0^a \delta y^2 dx$ est au plus égale à $\frac{a^2}{\pi^2}\int_0^a \delta y'^2 dx$ et que, par suite (en vertu de l'inégalité de M. Schwartz), l'intégrale $\int_0^a \left|\delta y \delta y'\right| dx$ est au plus égale à $\frac{a}{\pi}\int \delta y'^2 dx$.

Si donc λ et μ désignent des limites supérieures de

$$\frac{1}{A}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}\right| \text{ et de } \frac{1}{A}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|,$$

la condition dont nous parlons se trouvera remplie toutes les fois que l'on aura

$$1 - \frac{2\lambda a}{\pi} - \frac{\mu a^2}{\pi^2} > 0$$

(l'égalité étant exclue).

L'une de ces conditions étant supposée remplie, considérons la quantité

$$\delta^2 I = -2\int_0^a Q\delta Q dx = 2\int_0^a \delta Q \delta y' dx.$$

Comme on a, à la constante δh près,

$$\delta Q = A\delta y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}\delta y - \int_0^x \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}\delta y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\delta y\right) dx,$$

il vient, par une intégration par parties immédiate,

$$\delta^2 I = 2\int_0^a \left(A\delta y'^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}\delta y \delta y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\delta y^2\right) dx.$$

D'après notre hypothèse, le second membre sera positif et supérieur à

$$2g\int_0^a A\delta y'^2 dx$$

(g étant un nombre positif fixe) : c'est-à-dire que l'on aura

$$\delta^2 I > -gA_0\delta I,$$

A_0 étant toujours un minimum de A (lequel minimum est maintenant un nombre fixe, puisque A ne s'annule pas et que nous avons limité les valeurs de y' comme celles de x et de y).

L'inégalité précédente nous donne

$$\left|\int_0^\alpha \delta y'^2 dx\right| - |\delta I| < Ce^{-gA_0\alpha},$$

C étant une constante.

Mais l'expression de $\delta y''$

$$\delta y'' = -A y'' + \varphi$$

nous fait voir que l'intégrale $\int_0^\alpha \delta y''^2 dx$ est finie $\left(\text{puisque} \int_0^\alpha y''^2 dx \text{ l'est}\right)$. Donc, d'après le lemme précédemment démontré, où l'on fera $q = 2$, on aura constamment

$$|\delta y'| < C_1 e^{-\frac{g}{4}A_0\alpha},$$

C_1 désignant une nouvelle constante.

Cette égalité nous montre que y' **tend uniformément vers une limite.**

Il en est d'ailleurs évidemment de même pour y.

Nous arrivons donc, pour $\alpha = \infty$, à une courbe limite déterminée Γ.

Cette courbe est une extrémale : car $\delta y'$ tendant uniformément vers zéro, la quantité

$$Q = \frac{\partial f}{\partial y'} - \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y} dx - h$$

doit être nulle identiquement sur Γ : ce qui donne bien

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}.$$

La courbe Γ *obtenue est indépendante du choix de la courbe initiale.* Soient, en effet, $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ deux courbes initiales différentes; $\mathcal{C}_t$, une courbe initiale variable dépendant continûment d'un paramètre t et coïncidant, pour $t = 0, 1$, avec $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ respectivement. Si y'' est fini et continu sur $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$, nous pourrons supposer qu'il en est de même sur $\mathcal{C}_t$ pour toutes les valeurs considérées de t. Les coefficients qui interviennent dans les raisonnements précédents seront alors limités quel que soit t, et les approximations obtenues, uniformément convergentes. Donc Γ devrait dépendre continûment de t.

Mais, Γ étant une extrémale qui rend positive la variation seconde (et cela dans les conditions assignées par Scheeffer), il ne peut exister d'autre extrémale infiniment voisine de la première et terminée aux mêmes extrémités.

Donc Γ est nécessairement la même, quel que soit t.

Γ est la seule extrémale passant par A et B (et sur laquelle l'ordonnée soit fonction univoque de l'abscisse). Car si $\mathcal{C}$ était une autre extrémale répondant à la question, et qu'on prenne $\mathcal{C}$ comme courbe initiale, $\delta y'$ serait identiquement nul, et la courbe finale devrait coïncider avec $\mathcal{C}$. Or nous venons de voir qu'elle coïncide avec Γ.

Elle fournit un minimum absolu de l'intégrale, puisque, partant d'une courbe quelconque $\mathcal{C}$, on parvient à Γ en faisant décroître I.

Il est remarquable que cette dernière conclusion est obtenue sans faire usage de la méthode de Weierstrass.

Nous avons donc, dans ce cas, la solution complète du problème. On voit :

1° Que la méthode se suffit à elle-même, comme la *seconde* méthode de M. Hilbert, et que nous n'avons pas eu à faire usage

d'un cas particulier, quel qu'il soit, du théorème à démontrer. Bien au contraire, les raisonnements précédents en fournissent une démonstration lorsque a est suffisamment petit $\left(\frac{b}{a}\right.$ devant toutefois rester limité$\left.\right)$: car alors, comme nous l'avons vu, notre variation seconde est assurément positive;

2° *Que le problème admet une solution et* **une seule**;

3° *Que nous possédons une limite supérieure de l'erreur commise* en s'arrêtant à une valeur déterminée de α.

§ 4.

Deuxième cas. — Si nous ne pouvons affirmer que le rapport

$$\frac{\int_0^{a}\left(A\delta y'^2+\frac{2\partial^2 f}{\partial y\partial y'}\delta y\delta y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\delta y^2\right)dx}{\int_0^{a}A\delta y'^2dx}$$

est limité inférieurement, du moins pouvons-nous en fournir une limite supérieure, savoir

$$g_1 = 1+\frac{2\lambda a}{\pi}+\frac{\mu a^2}{\pi^2}.$$

On aura donc

$$|\delta^2 I| < g_1 A_1 \delta I$$

A_1 étant un maximum de A.

Or I, allant toujours en diminuant et restant, d'autre part, en vertu de nos hypothèses, toujours supérieur à un nombre fixe

(savoir $-k''a$), tend vers une limite. Autrement dit, l'intégrale $\int \delta \mathrm{I} d\alpha$ est finie. Il en est donc de même de l'intégrale $\int \delta^2 \mathrm{I} d\alpha$.

Donc $\delta\mathrm{I}$ tend vers une limite, laquelle ne peut évidemment être autre que zéro.

Mais nous avons

$$|\delta \mathrm{I}| = \int_0^a \delta y'^2 dx.$$

D'autre part, la relation

$$\delta y'' = -\mathrm{A}y'' + \varphi$$

montre, comme précédemment, que $|y''|$ est fini $\left(\text{savoir, inférieur à } \frac{\varphi_0}{\mathrm{A}_0}\right)$ et par conséquent aussi $\delta y''$.

De même, si y''' existe pour $\alpha = 0$ et que f admette des dérivées troisièmes, y admettra par rapport à x, quel que soit α, une dérivée troisième y''' qui vérifiera l'équation

$$\delta y''' = -\mathrm{A}y''' + \psi_1(x, y, y', y'');$$

$$\psi_1 = -y''\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}y' + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y'}y''\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}y' + \frac{\partial \varphi}{\partial y'}y''.$$

Cette équation montre que y''' et $\delta y'''$ restent finis.

Dès lors, d'après le lemme déjà utilisé, $\int_0^{a^2} \delta y'^2 dx$ ne peut être infiniment petit avec $\frac{1}{\alpha}$ sans que $\delta y'$ et $\delta y''$ tendent uniformément vers zéro.

On peut donc écrire

$$-\mathrm{A}y'' + \varphi(x, y, y') = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = \varepsilon(x, \alpha),$$

ε étant une quantité inférieure en valeur absolue à une limite fonction de α seul et infiniment petite pour α infini.

Si $y'(0, \alpha)$ tend vers une limite déterminée, l'équation différentielle précédente montre (en vertu des raisonnements qui établissent la continuité des intégrales de pareilles équations) que *la courbe variable tend vers l'extrémale* Γ qui part de l'origine et dont la tangente en ce point est la limite de y'.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. y', qui n'augmente pas indéfiniment, admet, pour $x = 0$, des valeurs d'accumulation, lesquelles forment évidemment une suite continue, puisque y' est une fonction continue de α. Soit y'_1 une de ces valeurs. Pour les valeurs de α telles que $y'(0, \alpha)$ tend vers y'_1, *la courbe variable tend vers une extrémale déterminée* Γ_1, de coefficient angulaire initial y'_1.

Nous arrivons donc ainsi à *une infinité continue* d'extrémales passant par les deux points, et que notre méthode nous fournit simultanément.

Ce cas est évidemment exceptionnel. Écartons-le : les limites de y et de y' seront alors parfaitement déterminées, absolument comme dans notre première hypothèse, celle de la variation seconde positive. Ces limites nous fourniront une extrémale.

Seulement elles ne donnent pas nécessairement un minimum. De plus, nous ne connaîtrons plus une limite supérieure de l'erreur commise.

Ce dernier point était évident à priori; il résulte, en effet, des raisonnements présentés précédemment qu'une méthode de calcul donnant à priori une limite de l'erreur commise, c'est-à-dire dont les approximations sont uniformément convergentes quelle que soit la courbe initiale, ne peut conduire qu'à une extrémale unique ou à des extrémales formant une infinité continue. Or rien ne dit, dans l'hypothèse actuelle, que l'un ou l'autre de ces deux cas se présente.

Le fait que l'extrémale obtenue ne correspond plus nécessairement à un minimum ne doit pas non plus nous étonner, après ce

IMPRIMERIE NATIONALE.

que nous avons vu lorsqu'il s'agissait des minima ordinaires. Mais il est à présumer que cette circonstance est exceptionnelle et correspond à des choix spéciaux de la courbe initiale (l'ensemble de ces courbes initiales spéciales formant ce qu'on peut encore appeler des « lignes de faîte »), de sorte que, pour tous les autres choix de l'initiale, c'est notre première hypothèse qui est vérifiée à partir d'une extrême valeur de α.

On pourra même se rendre compte qu'il doit en être ainsi de la manière suivante :

Soit $\mathfrak{C}$ une courbe initiale à partir de laquelle les opérations précédentes conduisent à une extrémale Γ. Supposons que Γ ne corresponde pas à un minimum. La condition de Legendre (et, par conséquent, de Weierstrass) étant nécessairement vérifiée ici, c'est la condition de Jacobi qui ne l'est pas et, par conséquent, il n'y a même pas minimum faible, de sorte qu'il doit exister dans le voisinage (du premier ordre) immédiat de Γ des courbes C', qui donnent à I une valeur plus petite que Γ. D'autre part, soit C l'une des courbes rencontrées dans les opérations qui ont mené de $\mathfrak{C}$ à Γ, et correspondant à une très grande valeur α_0 de α. Cette courbe est très voisine de Γ, et par conséquent de C' (le voisinage étant toujours du premier ordre). Il en résulte que si j'effectue les opérations précédemment indiquées en faisant *décroître* α (I étant, par conséquent croissant) à partir de la valeur α_0, la courbe correspondant à cette valeur étant C', je trouverai, pour $\alpha = 0$, une courbe $\mathfrak{C}'$ voisine de $\mathfrak{C}$. Si, inversement, on prenait celle-ci pour courbe initiale, les approximations successives n'aboutiraient pas à Γ, mais à une extrémale toute différente, qui, ou bien donnera lieu à l'application du même procédé, ou bien fournira un minimum (relatif tout au moins).

Ceci n'a, bien entendu, pas la valeur d'une démonstration, car en prenant C' très voisin de C, nous ne sommes nullement certains de rendre nécessairement $\mathfrak{C}'$ très voisin de $\mathfrak{C}$, étant donné que nous devons prendre en même temps α_0 très grand.

Je ne m'occuperai pas ici d'élucider plus complètement cette

question, non plus que celle de savoir si, comme l'analogie le fait encore supposer, on doit arriver à une limite unique même lorsqu'il existe une infinité continue d'extrémales (tout au moins en prenant pour la quantité que nous avons appelée ρ, non plus une constante, mais une fonction convenablement choisie de x); ou si, en appliquant à notre relation différentielle la méthode de Cauchy-Lipschitz, on peut arriver à remplacer nos approximations successives continues par des approximations discontinues.

Par contre, il y a lieu de revenir un instant sur les hypothèses dont nous sommes partis.

L'hypothèse $A \neq 0$ est dans la nature des choses, puisque $A = 0$ correspond à une singularité de l'équation différentielle des extrémales. Tout au plus y aurait-il lieu de rechercher si le problème admettrait des solutions alors que A serait susceptible de changer de signe entre deux valeurs finies de y'.

Les hypothèses relatives aux valeurs infinies de y' résultent du choix de x comme variable indépendante et doivent disparaître si l'on prend l'intégrale sous forme paramétrique. C'est ce dont on se rendra compte en prenant

$$I = \int \varphi(x, y)ds = \int \varphi(x, y)\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

l'intégrale étant encore prise entre les deux points $(0, 0)$ et (a, b).

Une telle intégrale [$\varphi(x, y)$ étant positif] admettra en général un minimum I_1. Mais il n'est pas nécessaire que ce minimum corresponde à une fonction y de x. La courbe qui le fournit pourra dépasser l'une ou l'autre des ordonnées $x = 0$, $x = a$. S'il en est ainsi, le minimum (ou plutôt la limite inférieure) de l'intégrale

$$\int_0^a \varphi(x, y)\sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

ne sera pas I_1. Il sera fourni par une ligne composée d'un segment d'ordonnée et d'un arc d'extrémale tangent à ce segment.

La méthode que nous avons indiquée fait connaître une condition suffisante pour que cette circonstance ne se présente pas. Nous avons établi qu'elle est écartée lorsque (A étant différent de zéro et f régulier), f est d'ordre fini, mais supérieur à 1, en y'.

V

§ 1.

Je me propose, dans cette dernière partie, d'appliquer la méthode générale que je viens d'exposer au problème qui nous a occupés dans la troisième partie : maximum de Γ_A^A pour un contour de longueur donnée.

Ce n'est pas que, dans ce cas, nous arrivions à tirer de la nouvelle méthode des services notablement supérieurs à ceux que nous avait rendus précédemment l'étude directe de la variation seconde. Comme on va le voir, nos connaissances sur le problème biharmonique devront encore être complétées pour qu'on puisse aborder, même par cette voie, la démonstration de notre extremum absolu.

Il est cependant important de constater, dès maintenant, qu'on peut définir pour notre problème une déformation continue de la courbe analogue à celle que nous avons étudiée à propos de l'intégrale $\int f(x, y, y')dx$, et qu'elle converge vers l'extrémale C si le contour initial a été pris suffisamment voisin de celle-ci.

De plus, nous verrons que, par ce moyen, on peut diminuer un peu l'étendue des hypothèses que nous avons été obligés de faire sur le voisinage de C' et de C, dans notre troisième partie.

Prenons d'abord le contour fermé C' tout à fait quelconque, quoique régulier, et ayant la longueur donnée L.

Nous ne diminuerons pas la généralité en supposant C' convexe, puisque, sans cela, nous pourrons en diminuer la longueur (que l'on rétablira ensuite par une transformation homothétique) et augmenter tout à la fois la valeur de Γ_A^A en remplaçant C' par un contour convexe et plus grand.

Nous pouvons donc, en tout cas, supposer C′ convexe par rapport à A, ayant un point et un seul sur chaque rayon vecteur issu de A[1]. Il nous sera donc permis de prendre l'angle polaire ω pour variable indépendante et de définir C′ par la série des valeurs que prend, de $\omega = 0$ à $\omega = 2\pi$, le rayon vecteur ρ ou encore la quantité $u = \log\frac{\rho}{a}$ considérée précédemment.

La variation de Γ_A^A peut s'écrire

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\alpha} = -\int^{2\pi}\mu\left(\Delta\Gamma^2 - \frac{l}{R}\right)\rho^2 d\omega \tag{73}$$

en posant $\mu = \frac{\delta u}{\delta\alpha}$ et en désignant par l un nombre arbitraire, qui s'élimine en vertu de la relation de condition

$$\int\mu\frac{\rho^2 d\omega}{R} = 0 \tag{38}$$

$\Delta\Gamma$ et R étant continus pour l'ordre 2, nous nous donnerons

$$\mu'' = \frac{d^2\mu}{d\omega^2} = -\left(\Delta\Gamma^2 - \frac{l}{R}\right)\rho^2; \tag{74}$$

l sera choisi de manière que $\int_0^{2\pi}\mu'' d\omega = 0$.

En vertu de la relation (p. 49)

$$\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2 d\omega}{R} = L \tag{41}$$

[1] D'une manière plus précise, on pourra remplacer C′ par un contour convexe relativement à A en prenant, pour valeur de ρ correspondant à chaque valeur de ω, la plus grande des longueurs interceptées par le contour primitif sur le rayon vecteur correspondant. On altérera ensuite (d'aussi peu qu'on le voudra) la nouvelle ligne obtenue de manière à faire disparaître les discontinuités de ρ, et on opérera enfin une transformation par homothétie.

on a ainsi

$$l = \frac{1}{L}\int \Delta\Gamma^2 \rho^2 d\omega. \tag{75}$$

(74) donne

$$\mu' = \mu'_o + \int_0^\omega \mu'' d\omega, \tag{76}$$

μ'_o étant encore déterminé par la relation $\int \mu' d\omega = 0$, soit

$$2\pi\mu'_o = -\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^\omega \mu''_1 d\omega_1. \tag{77}$$

Enfin on aura

$$\mu = \mu_o + \int_0^\omega \mu'_1 d\omega = \frac{\delta u}{\delta \alpha} \tag{78}$$

et μ_o sera, cette fois, choisi de manière à assurer la condition (38), soit [en tenant toujours compte de (41)]

$$\mu_o = -\frac{1}{L}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{R} d\omega \int_0^\omega \mu'_1 d\omega_1. \tag{79}$$

Nous avons ainsi, dans les relations (74) — (79), un système d'équations à la fois différentielles et intégrales — équations « intégrales mixtes », d'un type analogue à celui de l'équation (26).

Les propriétés établies dans la troisième partie nous permettent d'affirmer que *ces équations définissent, en fonction de α, une fonction $u = \varphi(\omega, \alpha)$ prenant, pour $\alpha = 0$, des valeurs données en fonction de ω*, quelles que soient ces dernières, pourvu qu'elles soient régulières à notre point de vue (c'est-à-dire continues avec leurs

dérivées jusqu'à un ordre suffisant pour permettre l'application de notre méthode de résolution du problème fondamental).

Ce fait est une conséquence de notre proposition d'après laquelle $\Delta\Gamma$ est *continu à la Lipschitz* pour l'ordre deux[1].

Il résulte, en effet, de ce mode de continuité et de la forme des équations (74) — (79) que, si l'on altère la fonction u d'une quantité dont la dérivée seconde soit partout inférieure à une limite H, la valeur de $\mu'' = \frac{\delta u''}{\delta \alpha}$ sera altérée d'une quantité inférieure à kH. Cela suffit pour affirmer l'existence d'une solution et d'une seule pour notre équation fonctionnelle.

Cette solution pourra être prolongée, en faisant croître α, tant que la valeur de μ'' ou celle de k n'augmenteront pas indéfiniment.

Son existence ne pourra donc pas cesser, tant

1° que la courbure du contour variable n'augmente pas indéfiniment;

2° que le nombre x ne tend pas vers zéro: — dans le cas actuel, où les points doubles sont impossibles, il est aisé de voir que cette condition est contenue dans la première;

3° que la courbe ne s'approche pas indéfiniment du point A;

4° que le déterminant de l'équation de Fredholm ne tend pas vers zéro.

C'est dans cette dernière condition que réside la difficulté en vertu de laquelle le prolongement indéfini de notre solution ne peut pas, quant à présent, être étudié pour C' quelconque.

Si, en effet, nous savons démontrer que (moyennant des conditions de régularité) le déterminant de Fredholm n'est jamais nul, on ne sait pas déterminer les conditions nécessaires pour qu'il tende vers zéro.

Nous nous bornerons donc encore à l'extremum relatif. Mais le voisinage supposé ne sera pas aussi étroit que précédemment.

[1] C'est dans ce but que nous avons dû établir la continuité *à la Lipschitz*. La continuité pure et simple aurait évidemment suffi dans tout ce qui précède.

L'hypothèse que nous ferons sur le contour C′ se réduira à la suivante :

L'intégrale

$$J_{C'} = \int_0^{2\pi} u''^2 d\omega$$

est très petite. On aura

$$(80) \qquad J_{C'} < j_0,$$

j_0 étant un nombre positif pris une fois pour toutes, mais très petit.

C'est cette inégalité qui définira pour nous le *voisinage* entre C′ et C.

L'hypothèse actuellement faite est, on le voit, moins restrictive qu'un voisinage du troisième ordre.

Elle implique, par contre, *celui du second.*

En effet, u'' étant forcément nul pour deux valeurs au moins de ω, l'inégalité (80) donne, en vertu de l'inégalité de M. Schwarz,

$$(81) \qquad |u''| < \sqrt{\pi j_0}.$$

Celle-ci, à son tour, donne

$$(82) \qquad |u'| < \pi\sqrt{\pi j_0},$$

et enfin, si, comme nous pouvons le supposer[1], u s'annule également quelque part sur C′,

$$(83) \qquad |u| < \pi^2\sqrt{\pi j_0}.$$

[1] u ne peut pas être constamment positif, sans quoi C′, enveloppant C, aurait une longueur supérieure à L. Si d'autre part C′ était constamment inté-

IMPRIMERIE NATIONALE.

Tant que l'inégalité (80) sera vérifiée, les conditions d'intégrabilité de nos équations (74)-(79) le seront aussi, et la solution pourra être prolongée si grand que soit α.

Il nous incombe donc de prouver :

1° Que l'inégalité (80), vérifiée initialement, continuera à l'être pour toute valeur de α;

2° Moyennant ce fait, que J tend vers zéro.

C'est ce que nous ferons en étudiant l'expression de δJ :

$$\delta J = 2\int u''' \delta u''' d\omega - 2\int u''' \mu''' d\omega. \tag{84}$$

L'égalité

$$\mu'' = -\rho^2\left(\overline{\Delta\Gamma}^2 - \frac{l}{R}\right) = -a^2 e^{2u}\left(\overline{\Delta\Gamma}^2 - \frac{l}{R}\right) \tag{74}$$

donne

$$\mu''' = -a^2 e^{2u}\left[2u'\left(\overline{\Delta\Gamma}^2 - \frac{l}{R}\right) - l\left(\frac{1}{R}\right)' + 2\overline{\Delta\Gamma}\frac{d\Delta\Gamma}{d\omega}\right]. \tag{85}$$

Nous appliquerons à cette expression, — et, par conséquent, à l'expression qui en résulte pour δJ d'après l'égalité (84), — un traitement tout semblable à celui que nous avons appliqué à $\delta\overline{\Delta\Gamma}$ et à

$$\delta\int \mu\overline{\Delta\Gamma}^2\rho^2 d\omega$$

dans la troisième partie (pages 67 et suiv.).

rieur à C, il pourrait être laissé hors de considération comme donnant un Γ_A^A inférieur à celui qui est relatif à C. On peut d'ailleurs remarquer que, même alors [comme on le voit en évaluant la longueur de C' et tenant compte de (82)], C' devrait couper le cercle

$$u = -\frac{1}{2}\log(1 + \pi^3 j_0^2).$$

De sorte que l'on aurait

$$|u| < \frac{1}{2}\log(1 + \pi^3 j_0^2) + \pi^2\sqrt{\pi j_0}.$$

Le premier terme de la quantité entre crochets contient la dérivée u', multipliée par la quantité continue à la Lipschitz $\overline{\Delta\Gamma}^2 - \frac{l}{R}$. La dérivée de $\frac{1}{R}$ est évidemment une somme de termes contenant les dérivées premières, secondes et troisièmes de u, multipliées par des fonctions continues de u et de ses dérivées premières et secondes.

Quant à la dérivée $\frac{d\Delta\Gamma}{d\omega}$, elle sera exprimée en fonction linéaire des dérivées des quantités

$$Q_\omega, R_\omega, \quad \frac{p}{\sigma^3}, \frac{r}{\sigma}, \quad \varphi, \psi,$$

— dont les quatre dernières figurent dans les premiers membres des formules (63)-(67), — ou, pour prendre ω comme variable indépendante, en fonction linéaire des dérivées de Q_ω, R_ω, φ, ψ et des expressions

$$(63') \qquad \frac{p}{\sin^2 \frac{\omega-\omega_1}{2}}, \qquad\qquad (64') \qquad \frac{r}{\sin \frac{\omega-\omega_1}{2}}.$$

Or, on a, pour la dérivée de $\frac{p}{\sigma^3}$ par rapport à l'un ou l'autre des arcs s et s_1, des formules toutes semblables à (66). Il suffit de partir de la formule

$$(33') \qquad \frac{p}{(s_1-s)^3} = \frac{p}{\sigma^3} = \int_0^1 \chi\,[s+(s_1-s)u]\,(1-u)\,du.$$

Il vient alors

$$(66\ bis) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_1}\frac{p}{(s_1-s)^3} &= \int_0^1 \chi'[s+(s_1-s)u]\,u\,(1-u)\,du \\ &= \frac{1}{(s_1-s)^3}\int_s^{s_1} \chi'(S)(S-s)(s_1-S)\,dS, \end{aligned} \right.$$

et, pour la dérivée par rapport à s,

$$(66\ ter)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\frac{P}{(s_1-s)^3}=\int_0^1 \chi'[s+(s_1-s)u](1-u)^2\,du\\ -\frac{1}{(s_1-s)^3}\int_s^{s_1}\chi'(S)(s_1-S)^2\,dS.\end{aligned}\right.$$

Dans ces expressions, dont on aura sans difficulté les analogues pour les dérivées de (63′), χ' est une fonction linéaire des dérivées premières, secondes et troisièmes de u.

De même, on aura la relation, tout analogue à (67),

$$(67\ bis)\qquad d\left(\frac{r}{\sigma}\right)=\frac{P}{r}d\frac{P}{\sigma}+\frac{p}{r}d\frac{p}{\sigma},$$

ou encore

$$(67')\qquad d\,\frac{r}{\sin\frac{\omega-\omega_1}{2}}=\frac{P}{r}\,d\left(\frac{P}{\sin\frac{\omega-\omega_1}{2}}\right)+\frac{p}{r}\,d\left(\frac{p}{\sin\frac{\omega-\omega_1}{2}}\right),$$

et pour les dérivées de $\dfrac{p}{\sin\frac{\omega-\omega_1}{2}}$ par rapport à ω ou à ω_1, des valeurs qui se déduisent évidemment de (68) comme (66 *bis*) et (66 *ter*) de (66).

Donc [comparer formules (69), (69′)] la valeur (85) de μ'' sera une somme de termes de la forme

$$(86)\qquad \Psi u^{(i)},\quad \int\cdots\int u^{(i)}_{\omega_1}\mathrm{H}\Psi\,d\omega_1\,d\omega_k\cdots,$$

où l'indice i prend cette fois les valeurs 1, 2, 3, les Ψ étant encore continus à la Lipschitz, et les H, des quantités positives, indépendantes de la forme de C′, telles que les intégrales (86) soient

finies et restent telles lorsqu'on remplace chaque élément par sa valeur absolue, et cela quelles que soient les valeurs (finies) des $u^{(i)}$ et des Ψ.

On constatera alors, comme aux pages 68-69, qu'*il est légitime de remplacer les valeurs des Ψ par les valeurs correspondantes que prennent ces mêmes quantités sur* C.

L'erreur commise en opérant ainsi sera, sur un quelconque des termes (86), inférieure à

$$(\varepsilon)\,|u^{(i)}| \tag{87}$$

ou à

$$(\varepsilon)\int\int|u^{i}_{\omega_1}|\,\mathrm{H}\,d\omega_1\,d\omega_k\cdots \tag{87'}$$

(ε) étant limité en fonction du voisinage de C et de C′, c'est-à-dire en fonction de J.

Sur δJ, elle sera inférieure à

$$(\varepsilon)\,\mathfrak{J}\,\mathrm{J}, \tag{88}$$

$\mathfrak{J}$ étant une quantité analogue à celle qui figure dans la formule (70).

Mais, d'autre part, si, dans l'expression de δJ, nous faisons le remplacement qui vient d'être indiqué sur les Ψ, cela revient évidemment à *calculer directement δJ sur une courbe* **infiniment** *voisine* (et non plus seulement voisine) *du cercle, en s'en tenant à la première approximation.*

Le résultat de ce calcul peut alors s'obtenir aisément par une voie directe.

Sur C, le premier terme entre crochets de la formule (85) s'annule.

Dans le second, on a $l = 4a$. D'autre part, la courbure d'une ligne infiniment voisine de C est $\frac{1}{a}(1 - u - u'')$ et sa dérivée

$$(89) \qquad \left(\frac{1}{R}\right)' = -\frac{1}{a}(u' + u''').$$

Reste à évaluer (en première approximation) la valeur de $\Delta\Gamma$, pour en déduire celle de $\frac{d\Delta\Gamma}{d\omega}$.

Or l'accroissement de Γ_A^B, lorsqu'on passe de C à une courbe infiniment voisine, est, nous l'avons vu, une fonction biharmonique Γ_{1A}^B définie par les deux conditions

$$(90) \qquad \Gamma_1 = 0, \qquad \frac{d\Gamma_1}{dn} = -\delta n \Delta\Gamma = au \cdot \Delta\Gamma = 2au \qquad (\text{sur } C^{(1)}).$$

La première de ces deux conditions nous donne, comme on sait,

$$(91) \qquad \Gamma_1 = (a^2 - \rho^2)\Phi,$$

ρ étant le rayon vecteur du point B et Φ une fonction harmonique

$$\Phi = \sum \left(\frac{\rho}{a}\right)^p (\alpha_p \cos p\varphi + \beta_p \sin p\varphi)$$
$$= \sum \left(\frac{\rho}{a}\right)^p u_p$$

des coordonnées du point B.

Moyennant l'égalité (91), la condition (90) devient

$$\Phi = u \qquad (\text{sur } C).$$

(1) u est ici la fonction de ω qui définit la courbe variée infiniment voisine de C.

Autrement dit, le développement

$$\sum_p u_p = \sum_p (\alpha_p \cos p\varphi + \beta_p \sin p\varphi)$$

n'est autre que celui de u.

La même relation (91) donne ensuite

$$(92)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta\Gamma &= 2 + \frac{d\Delta\Gamma}{dn}\delta n + \Delta\Gamma_1 \\ &= 2 + \frac{4}{a}\cdot au - 4\left(\rho\frac{d\Phi}{d\rho} + \Phi\right)_{\rho=a} \\ &= 2 + 4u - 4(u + \Sigma p u_p). \end{aligned}\right.$$

Donc finalement

$$(93)\qquad \begin{aligned} \frac{d\Delta\Gamma}{d\omega} &= -4\Sigma p u'_p \\ &= -4\Sigma p^2(\beta_p \cos p\omega - \alpha_p \sin p\omega). \end{aligned}$$

Dans le terme $-\Sigma p u_p$ de la valeur de $\Delta\Gamma$, nous reconnaissons l'intégrale $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u''_{\omega_1} \log \sin^2\frac{\omega-\omega_1}{2}\,d\omega_1$, qui figurait dans l'expression de la variation seconde, et c'est le terme analogue

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u''_{\omega_1} \log \sin^2\frac{\omega-\omega_1}{2}\,d\omega_1$$

qui donne l'expression de $\frac{d\Delta\Gamma}{d\omega}$.

Cette valeur de $\frac{d\Delta\Gamma}{d\omega}$, combinée avec celle de $\left(\frac{1}{R}\right)'$, nous donne celle de μ'', soit (avec l'approximation indiquée)

$$\mu'' = -a^2(4(u' + u'') - 16\,\Sigma p u'_p),$$

et celle de δJ,

$$
(94) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta J &= a^2 \left[-4\int u' u''' d\omega + \int 16 \, \Sigma p u'_p u'''_p d\omega - 4 \int u'''^2 d\omega \right] \\ &= a^2 \left[4 \int u''^2 d\omega - 16 \int \Sigma' p u''^2_p d\omega - 4 \int u'''^2 d\omega \right], \end{aligned} \right.
$$

ce que l'on pourrait écrire

$$
(94') \quad \delta J = a^2 \left[4 \int (u''^2 - u'''^2) \, d\omega - \frac{16}{2\pi} \iint u'''_\omega u'''_{\omega_1} \log \sin^2 \frac{\omega - \omega_1}{2} \, d\omega d\omega_1 \right].
$$

Des trois intégrales qui figurent dans l'expression (94), c'est, comme on le sait (abstraction faite des coefficients), la seconde qui l'emporte en valeur absolue sur la première et la troisième sur la seconde.

Donc l'expression (94) est négative et supérieure en valeur absolue à $4a^2 J$.

L'erreur que nous avons commise en évaluant ainsi δJ est dans un rapport infiniment petit avec ce résultat, et l'on peut écrire

$$
(95) \qquad \delta J < -(4 - (\varepsilon)) a^2 J.
$$

Cette formule résout la question.

Elle montre, en effet, tout d'abord, que, pour ε assez petit, c'est-à-dire si j_0 a été pris assez petit, J est constamment décroissant.

Donc, dans sa déformation, notre contour variable ne sort jamais du domaine où les considérations précédentes sont valables.

La même inégalité montre, dans ces conditions, que J *tend vers zéro*, suivant une loi exponentielle. Par conséquent, le contour variable tend vers le cercle C.

Comme, dans cette déformation, Γ_A^A est toujours croissant (puisque sa variation peut s'écrire

$$\delta\Gamma_A^A = -\int_0^{2\pi} \mu\mu'' d\omega = \int_0^{2\pi} \mu'^2 d\omega\Big),$$

il est démontré que C donne à Γ_A^A une valeur plus grande que C', cette démonstration s'appliquant à tout contour C' pour lequel J est inférieur à j_0.

§ 2.

Nous avons bien ainsi établi l'existence du maximum relatif de Γ_A^A, dans les conditions de voisinage indiquées.

Mais, contrairement à la première méthode exposée dans la troisième partie, celle que nous venons de présenter est susceptible d'être employée à la démonstration du maximum absolu.

Il faudra tout d'abord, pour cela, nous l'avons vu, obtenir une limite inférieure du déterminant D_f de l'équation de Fredholm.

On obtiendrait d'ailleurs une telle limite inférieure si l'on trouvait une limite supérieure de la fonction résolvante $\dfrac{D_f\binom{x}{y}}{D_f}$. Cette fonction résolvante définit, en effet, une substitution réciproque de la première, et les déterminants de ces deux substitutions sont inverses l'un de l'autre.

Il faudrait aussi montrer que la courbure reste finie (d'où l'on déduira une limite inférieure de $\varkappa$). Nous avons, dans la quatrième partie, à propos de l'intégrale classique $\int f(x, y, y')\,dx$, résolu une difficulté analogue.

Enfin il faudra établir que le rayon vecteur ρ de C' reste supérieur à une limite fixe. Cette démonstration est aisée si C' reste convexe.

On peut alors montrer que la distance δ de A à une tangente quelconque T de C′ est forcément supérieure à un nombre que l'on peut assigner.

Soit, en effet, $\mathcal{C}$ un cercle qui comprend C′ à son intérieur. La valeur de Γ_A^A relative à C′ est plus petite que celle qui est relative à $\mathcal{C}$. Or, si C′ est convexe, on peut faire tendre $\mathcal{C}$ vers T, l'intérieur de $\mathcal{C}$ tendant alors vers l'un des deux demi-plans déterminés par T. Γ_A^A tend, dans ces conditions (comme le montre son expression pour le cercle) vers la limite $2\delta^2$, qui n'est autre d'ailleurs que la fonction de Green relative au demi-plan.

Si donc, pour l'une des positions de T, $2\delta^2$ est inférieur à la valeur $\frac{a^2}{2}$ que prend Γ_A^A pour C, c'est-à-dire si C′ admet une tangente située à une distance de A inférieure à $\frac{a}{2}$, le contour C′ doit être laissé hors de considération.

Mais on peut aller plus loin et se dispenser de prouver la convexité de C′ : on peut se contenter d'admettre sa convexité par rapport à A (laquelle est forcément acquise dans notre manière de procéder), en formant (comme nous allons le faire dans le supplément qui va suivre) la fonction de Green pour le *plan sectionné par une demi-droite.*

M. Almansi a, en effet[1], résolu le problème fondamental pour l'aire limitée par un limaçon de Pascal, pourvu que celui-ci admette son pôle comme point isolé.

Les considérations développées dans notre deuxième partie montrent que la fonction Γ correspondante admet une limite lorsque ce point isolé devient un point de rebroussement (le limaçon devenant une cardioïde).

Si, enfin, on transforme la figure par homothétie, avec un rapport infiniment grand, l'aire intérieure à la cardioïde devient un plan affecté d'une coupure suivant une demi-droite issue du pôle B.

La limite obtenue, dans ces conditions, pour Γ_A^A est une limite

[1] *Circolo Mat. di Palermo*, t. XIII (1899), p. 245 et suiv.

supérieure de cette quantité pour tout contour (convexe par rapport à A) passant par B.

Des considérations de cette espèce seront d'ailleurs également nécessaires pour compléter les résultats fournis par l'étude de la variation seconde.

Celle-ci, nous l'avons vu, se présente comme la différence de deux termes de signes contraires. En fait, on peut se rendre compte qu'elle n'est pas forcément positive pour toute position de C'.

C'est ainsi que si, pour un cercle donné C, on fait varier la position du point A (ce qui revient à déplacer le cercle en laissant A fixe), la fonction

$$\Gamma_A^A = \frac{(a^2-\rho^2)^2}{2a^2}$$

des coordonnées de A (ρ étant la distance de ce point au centre) a une surface représentative qui n'est convexe supérieurement que jusqu'à une certaine distance du centre et qui devient, au contraire, à courbures opposées lorsqu'on s'approche de la circonférence.

Cela tient évidemment à ce que, si A s'approche du contour, Γ_A^A devient nul, et que cette valeur, qui annule la variation première, ne correspond pas à un maximum, mais bien à un minimum.

Seulement, d'après ce que nous avons dit plus haut, on pourra précisément se dispenser de considérer les positions du contour qui s'approcheraient à moins d'une certaine distance de A. La démonstration du maximum qui nous occupe consistera donc à diviser les positions possibles de C' en deux catégories :

1° Les contours C' dont la distance minima à A descend au-dessous d'une certaine limite δ_0, et qui donnent certainement à Γ_A^A une valeur inférieure à $\frac{a^2}{2}$;

2° Ceux pour lesquels la distance minima ne descend pas au-dessous de δ_0, la question devant être alors résolue par l'étude de la variation seconde.

SUPPLÉMENT.

Existence de la fonction Γ pour le plan sectionné.

§ 1.

Nous partons de la solution donnée par M. Almansi pour le problème fondamental dans un domaine limité par un limaçon de Pascal.

Cette solution [1] consiste à introduire deux couples de variables x, y, X, Y liées par les relations

$$(1)\qquad \begin{cases} X = \frac{1}{4a} + x + a(x^2 - y^2), \\ Y = y + 2axy, \end{cases}$$

lesquelles, en posant

$$(2)\qquad \begin{cases} X + iY = Z, \\ x + iy = z, \end{cases}$$

donnent

$$(3)\qquad \frac{Z}{a} = \left(z + \frac{1}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{4a} + z + az^2\right).$$

Si le point (x, y) décrit le cercle de rayon 1, le point (X, Y) décrit un limaçon de Pascal, lequel est à *point isolé* si l'on a

$$(4)\qquad a < \frac{1}{2}.$$

[1] Voir le mémoire cité du *Circolo Mat. di Palermo*, t. XIII (1899). Nous appelons ici X, Y ce que M. Almansi nomme respectivement $x' + \frac{1}{4a}$, y'.

La méthode suivie par M. Almansi consiste à mettre la fonction biharmonique cherchée de X, Y sous la forme

$$(5) \qquad V + \left(X - \frac{1}{4a}\right) W = V + [x + a(x^2 - y^2)] W,$$

V et W étant des fonctions harmoniques, qui seront telles tant par rapport à X, Y que par rapport à x, y, et qu'on exprimera tout d'abord à l'aide de ces dernières variables.

Nous allons appliquer cette méthode à la recherche de la fonction Γ relative à l'aire du limaçon de Pascal.

Soient M′ (X′, Y′), M (X, Y) deux points intérieurs à cette aire, dont le premier sera, jusqu'à nouvel ordre, considéré comme fixe et le second comme variable, et qui correspondent à deux points (x', y'), (x, y) intérieurs au cercle de rayon 1. Nous avons à former une fonction biharmonique Γ de X, Y,

$$\Gamma = V + \left(X - \frac{1}{4a}\right) W,$$

qui prenne, sur le limaçon, c'est-à-dire pour $x^2 + y^2 = 1$, les mêmes valeurs que la quantité

$$(6) \qquad R^2 \log R,$$

$$(6') \qquad R = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2} = |Z - Z'|$$

(en désignant par Z′ l'imaginaire $X' + iY'$, par Z l'imaginaire $X + iY$) et dont les dérivées premières prennent aussi, dans les mêmes conditions, les mêmes valeurs que les dérivées correspondantes de la quantité (6).

Or la relation (3) donne

$$R = |Z - Z'| = ars,$$

où

$$r = |z - z'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

est la distance des deux points $m(x, y)$, et $m'(x', y')$, et

(7) $$s = \left| z + z' + \frac{1}{a} \right|$$

représente la distance du point m à un point n', d'affixe

(7') $$-z' - \frac{1}{a},$$

lequel ne dépend que de m' et est d'ailleurs [sous la condition (4)] extérieur au cercle $x^2 + y^2 = 1$.

On a donc

(8) $$\left\{ \begin{aligned} R^2 \log R &= a^2 r^2 s^2 \log(as) + a^2 s^2 . r^2 \log r. \\ &= R^2 \log(as) + a^2 s^2 . r^2 \log r. \end{aligned} \right.$$

Le premier terme

(9) $$R^2 \log(as)$$

est une fonction biharmonique de X, Y, puisque $\log s$ est une fonction harmonique.

Dans le second terme, le facteur $r^2 \log r$ peut, comme l'apprend

la théorie du problème biharmonique pour le cercle [1], être remplacé, à notre point de vue, par

$$r^2 \log r_1 - \frac{1}{2}(r_1^2 - r^2),$$

où r_1 est la quantité qui figure dans l'expression bien connue

$$\log\left(\frac{r}{r_1}\right)$$

de la fonction de Green ordinaire pour le cercle. Si nous désignons par $\bar{z}$, $\bar{z}'$, $\bar{Z}$, $\bar{Z}'$, les imaginaires conjuguées de z, z', Z, Z' respectivement, on peut écrire

$$r_1 = |1 - \bar{z}z'| = |1 - z\bar{z}'|.$$

Dès lors, la somme

$$R^2 \log(asr_1) - R^2 \log\left|a(1 - z\bar{z}')\left(z + z' + \frac{1}{a}\right)\right|$$

est une fonction biharmonique, elle aussi, et il ne nous reste à transformer que la partie restante

$$(10) \qquad -\frac{1}{2}a^2 s^2 (r_1^2 - r^2) = -\frac{1}{2}a^2 s^2 (1 - |z|^2)(1 - |z'|^2).$$

C'est celle-ci qu'il faut remplacer par une autre, prenant les mêmes valeurs (ainsi que ses dérivées premières) sur le cercle

$$x^2 + y^2 = 1,$$

et qui soit de la forme (5).

[1] Voir, par exemple, Boggio, Sulle funzioni di Green d'ordine, m : *Circolo Mat. di Palermo*, t. XX, p. 97-135.

Nous pourrions appliquer, à cet effet, la méthode de M. Almansi. Comme on va le voir, celle-ci, tant dans la recherche particulière de Γ que dans le cas général, peut être notablement simplifiée.

L'expression (5) peut s'écrire

$$(11) \qquad \mathcal{R}\,(f_1(z)) + (z + az^2 + \bar{z} + a\bar{z}^2)\,\mathcal{R}\,[\varphi(z)],$$

$f_1(z)$ et $\varphi(z)$ étant des fonctions analytiques de z. Cette quantité doit coïncider avec (10) à des termes près qui contiendront en facteur $(x^2 + y^2 - 1)^2$, c'est-à-dire qui seront de la forme $(z\bar{z} - 1)^2\Theta$; et comme toutes deux sont du second degré en $\bar{z}$, Θ sera une constante en $\bar{z}$.

Dans ces conditions, la somme algébrique

$$(12)\left\{\begin{aligned} S &= f_1(z) + (z + az^2 + \bar{z} + a\bar{z}^2)\,\varphi(z) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}a^2\left(z + z' + \tfrac{1}{a}\right)\left(\bar{z} + \bar{z}' + \tfrac{1}{a}\right)(1 - z\bar{z})(1 - z'\bar{z}') \\ &\quad + (z\bar{z} - 1)^2\Theta \\ &= f(z) + (\bar{z} + a\bar{z}^2)\,\varphi(z) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}a^2\left(z + z' + \tfrac{1}{a}\right)\left(\bar{z} + \bar{z}' + \tfrac{1}{a}\right)(1 - z\bar{z})(1 - z'\bar{z}') \\ &\quad + (z\bar{z} - 1)^2\Theta, \end{aligned}\right.$$

en posant

$$(13) \qquad f(z) = f_1(z) + (z + az^2)\,\varphi(z),$$

doit être purement imaginaire quel que soit z, pourvu qu'on remplace $\bar{z}$ par l'imaginaire conjuguée de z.

La condition nécessaire et suffisante pour cela est que S soit changé en $-$ S lorsqu'on permute z et $\bar{z}$, en même temps qu'on

remplace par leurs valeurs imaginaires conjuguées les différents coefficients.

Dès lors S doit être quadratique tant en z qu'en $\bar{z}$: il a la forme

$$i_0(z\bar{z})^2 + i_1 z\bar{z} + i_2 + (Az\bar{z} + A')z - (Az\bar{z} + \bar{A}')\bar{z} + Bz^2 - \bar{B}\bar{z}^2,$$

les i étant des constantes purement imaginaires et A, A′, B; $\bar{A}$, $\bar{A}'$ $\bar{B}$, des constantes imaginaires conjuguées deux à deux. Mais, comme il est indifférent à notre objet d'ajouter à S tout terme jouissant de la double propriété d'avoir sa partie réelle nulle et d'être exprimable sous la forme $f(z) + (\bar{z} + a\bar{z}^2)\varphi(z) + (z\bar{z} - 1)^2\Theta$, on peut faire disparaître les imaginaires i_0, i_1, i_2 et l'un des coefficients B, A′. En résumé, S a nécessairement la forme

$$(Az\bar{z} + A')z - (Az\bar{z} + \bar{A}')\bar{z}. \tag{14}$$

Égalant ceci à la quantité (12), nous aurons à exprimer, pour éliminer Θ, que la différence des quantités (12) et (14) s'annule ainsi que sa dérivée par rapport à $\bar{z}$, pour $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

La seconde des deux équations ainsi écrites fait connaître la valeur du produit

$$\varphi(z)(z + 2a) \tag{15}$$

par une série entière en z, convergente dans le cercle de rayon 1.

La première équation donne alors $f(z)$.

Enfin, les constantes A, A′ sont déterminées par la double condition :

1° Que le produit (15) s'annule pour $z = -2a$, ce qui est une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\varphi(z)$ soit elle-même convergente dans le cercle de rayon 1;

IMPRIMERIE NATIONALE.

2° Que la valeur de $f(z)$ ne contienne pas de puissances négatives de z.

Ce raisonnement est d'ailleurs applicable, quelles que soient les valeurs données au contour de la fonction cherchée et de sa dérivée normale.

Dans le cas qui nous occupe spécialement en ce moment, on est ainsi conduit à remplacer le terme (10) par

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &-\tfrac{1}{2}a^2s^2(r_1^2-r^2)+\frac{a^4}{2(1-2a^2)}(r_1^2-r^2)^2\\ &=-\tfrac{1}{2}a^2\left|z+z'+\tfrac{1}{a}\right|^2(1-|z|^2)(1-|z'|^2)\\ &\qquad+\frac{a^4}{2(1-2a^2)}\left[(1-|z|^2)(1-|z'|^2)\right]^2.\end{aligned}\right.$$

D'après ce qui précède, on devra ajouter à ceci le terme

$$R^2\log(asr_1).$$

En retranchant de $R^2\log R$, on voit qu'on aura

$$(17)\qquad \Gamma=R^2\log\left(\frac{R}{ar_1s}\right)+\tfrac{1}{2}a^2s^2(r_1^2-r^2)-\frac{a^4}{2(1-2a^2)}(r_1^2-r^2)^2.$$

Il est clair qu'un procédé tout semblable à celui que nous venons d'employer pourra servir dans le cas plus général examiné par M. Almansi et où l'aire donnée est représentable sur celle d'un cercle par le moyen de polynômes de degrés quelconques.

Mais on peut aller encore plus loin et opérer de même si la représentation conforme de l'aire donnée sur le cercle de rayon 1 a lieu par l'intermédiaire d'une *fonction entière* $\chi(z)$.

Cette fonction devra, bien entendu, être telle que le déterminant de la transformation soit toujours différent de zéro, c'est-à-dire que l'équation $\chi'(z)=0$ n'ait pas de racine de module inférieur à 1.

Au contraire, l'équation $\chi'\left(\frac{1}{z}\right)=0$ admettra, en général, de telles racines. Ce sont elles qui joueront, dans la détermination des inconnues, le rôle que jouait la valeur $z=-2a$ dans le calcul qui précède.

§ 2.

Jusqu'ici, tous nos calculs ont été poursuivis dans l'hypothèse

$$a<\frac{1}{2}.$$

Mais, conformément aux conclusions générales établies précédemment, la fonction Γ conserve un sens — et, effectivement, l'expression (17) a une valeur limite — pour $a=\frac{1}{2}$.

Le limaçon devient alors une cardioïde ayant pour point de rebroussement $z=-1$.

Transportons l'origine en ce point en posant

$$z=-1+t \tag{18}$$

et opérant une transformation analogue sur z' et sur les quantités imaginaires conjuguées.

On aura

$$\left\{\begin{aligned} r_1&=|\bar{t}+t'-\bar{t}t'|,\\ s&=|t+t'|,\\ r&=|t-t'|,\end{aligned}\right. \tag{19}$$

et ce seront les valeurs de r_1, s qu'on devra reporter dans les formules (16) (17).

t, t' devront d'ailleurs être finalement exprimés en fonction de Z, Z' par la formule (3), soit

$$t = \sqrt{2Z} = \sqrt{2\rho}\, e^{\frac{i\varphi}{2}} \tag{20}$$

(la détermination du radical étant choisie de manière à avoir son argument $\frac{\varphi}{2}$ compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$).

Supposons enfin qu'on augmente la cardioïde dans un rapport de similitude l indéfiniment croissant, sans changer les deux points A, B. Cela revient, nous le savons, à multiplier Γ_B^A par l^2 en changeant, d'autre part, Z, Z' en $\frac{Z}{l}, \frac{Z'}{l}$.

Or, pour $l = \infty$, le résultat obtenu *tend vers une limite déterminée*

$$\left\{\begin{aligned} \Gamma_\infty = \frac{R^2}{2} \log \left(\frac{\rho + \rho' - 2\sqrt{\rho\rho'} \cos\frac{\varphi - \varphi'}{2}}{\rho + \rho' + 2\sqrt{\rho\rho'} \cos\frac{\varphi + \varphi'}{2}} \right) \\ + 2\sqrt{\rho\rho'} \cos\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi'}{2} \left(\rho + \rho' + 2\sqrt{\rho\rho'} \sin\frac{\varphi}{2} \sin\frac{\varphi'}{2} \right), \end{aligned}\right. \tag{21}$$

(ρ', φ), (ρ', φ') étant les coordonnées polaires des points A, B rapportées au point de rebroussement O, avec cette condition que chacun des angles φ, φ' soit compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

La quantité Γ_∞ est la *fonction de Green relative au plan sectionné* par la coupure rectiligne $-\infty$ ——— o.

C'est la quantité Γ que l'on obtiendrait en considérant une plaque indéfinie en tous sens, mais fendue suivant la demi-droite en question et encastrée suivant les deux lèvres de la coupure.

Soit maintenant une aire plane quelconque S, limitée par un contour (unique) C; et, sur C, un point O que l'on puisse joindre à l'infini par un chemin rectiligne OX_1 ne rencontrant pas à nouveau le contour C. A étant un point quelconque intérieur à S, soient encore ρ, φ les coordonnées polaires de A rapportées à O

comme pôle et à un axe polaire OX directement opposé à OX_1. Quelle que soit par ailleurs la forme de C, pourvu qu'il passe par O et ne rencontre pas la demi-droite OX_1 ailleurs qu'en O, nous pouvons affirmer que Γ_A^A *sera inférieur à la limite*

$$(21') \qquad 4\rho^2 \cos^2\frac{\varphi}{2}\left(1+\sin^2\frac{\varphi}{2}\right) = 4\rho^2\left(1-\sin^4\frac{\varphi}{2}\right),$$

c'est-à-dire *à ce que devient l'expression* (21) *pour* B *confondu avec* A.

Si on avait démontré le postulat dont nous avons remarqué plus haut l'évidence physique, à savoir que $\delta\Gamma_B^A$ est négatif lorsqu'on passe d'un contour à un autre intérieur au premier, nous pourrions également affirmer que (ρ', φ' étant les coordonnées polaires de B) Γ_B^A est inférieur à la limite (21).

Sinon, on peut, malgré tout, donner une limite supérieure de Γ_B^A, à savoir

$$\sqrt{\Gamma_A^A . \Gamma_B^B},$$

Γ_A^A et Γ_B^B étant remplacés par leurs limites supérieures (21').

Pour démontrer la proposition précédente, prenons le point O pour pôle d'une cardioïde $(\mathcal{C})$

$$(\mathcal{C}) \qquad \rho = l(1+\cos\varphi).$$

On pourra choisir l de manière que $(\mathcal{C})$ contienne C à son intérieur; car la quantité $\frac{\rho}{1+\cos\varphi}$ a des valeurs finies sur C, ce dernier n'étant coupé ni par la demi-droite $\varphi = \pi$ ni, par conséquent, par les demi-droites $\varphi = \pi \pm \varepsilon$ lorsque ε est suffisamment petit.

On pourra ensuite substituer à $(\mathcal{C})$ le limaçon de Pascal (à point isolé) $\mathcal{L}$

$$(\mathcal{L}) \qquad \rho = k + l(1+\cos\varphi),$$

où $k > 0$, lequel, si petit que soit k, comprend entièrement $\mathcal{C}$ et par suite C.

La quantité Γ_A^4 (ou même, moyennant le postulat précédemment rappelé, Γ_2^4) est inférieure à la quantité analogue relative à $\mathcal{L}$. Elle est donc aussi inférieure à sa limite pour $k = 0$, c'est-à-dire à la quantité Γ relative à la cardioïde. Ceci a d'ailleurs lieu pour toute valeur de l suffisamment grande.

Or, pour $l = \infty$, Γ_2^4 tend vers la limite (21).

Donc le théorème est démontré.

Supposons, en particulier, comme nous l'avons fait dans ce qui précède, que C ne soit coupé qu'en un seul point par un rayon vecteur quelconque issu de A. Soit ρ_0 le plus petit de ces rayons vecteurs. On aura

$$\Gamma_A^4 < 4\rho_0^2.$$

Nous nous sommes proposé précédemment d'examiner si Γ_A^4 est ou non inférieur à la valeur qu'il prend pour le cercle de centre A et de rayon a, c'est-à-dire à $\frac{a^2}{2}$.

On voit que, dans cet examen, *on peut toujours supposer que* C *est entièrement extérieur au cercle de centre* A *et de rayon*

$$\frac{a}{\sqrt{8}}, \tag{22}$$

sans quoi la question serait immédiatement résolue, l'inégalité

$$\Gamma_A^4 < \frac{a^2}{2}$$

étant certaine.

Nous avons vu d'ailleurs comment cette limite (22) pouvait être remplacée par une autre plus grande $\frac{a}{2}$ lorsqu'on suppose C convexe.

TABLE DES MATIÈRES.