PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Estructural y Geotécnica
IBM 2020 Introducción a la Biomecánica
Primer Semestre 2022

Taller 2

Gustavo Barrezueta - *gabarrezueta@uc.cl*

Problema 1. *Notación indicial*
Demuestre que:

i) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$

Demostración.
Se sabe que,

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqk} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kk} \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

Desarrollando la expresión anterior, se obtiene,

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqk} = \delta_{ip}(\delta_{jq}\delta_{kk} - \delta_{jk}\delta_{kq}) - \delta_{iq}(\delta_{jp}\delta_{kk} - \delta_{jk}\delta_{kp}) + \delta_{ik}(\delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp})$$

Usando que $\delta_{kk} = 3$ y $\delta_{ab}\delta_{bc} = \delta_{ac}$

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}\epsilon_{pqk} &= 3\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{ip}\delta_{jq} - 3\delta_{iq}\delta_{jp} + \delta_{iq}\delta_{jp} + \delta_{iq}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jq} \\ &= \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp} \end{aligned}$$

□

ii) $(\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{t}) \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{u})(\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{v})(\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{u})$

Demostración.
Por definición el producto punto entre dos vectores se escribe como:

$$(\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{t}) \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{t})_k (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})_k \tag{1.2}$$

Usando que $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_k = \epsilon_{ijk} a_i b_j$, se obtiene,

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{t})_k (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})_k &= \epsilon_{ijk} s_i t_j \epsilon_{pqk} u_p v_q \\ &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{pqk} s_i t_j u_p v_q \\ &= (\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}) s_i t_j u_p v_q \\ &= \delta_{ip} s_i u_p \delta_{jq} t_j v_q - \delta_{iq} s_i v_q \delta_{jp} t_j u_p \\ &= (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{u})(\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{v})(\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{u}) \end{aligned}$$

donde en el último paso se usó $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$.

□

iii) $(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{u} \otimes (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{v})$

Demostración.

$$\begin{aligned}((\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})\boldsymbol{A})_{ij} &= (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})_{ik}\boldsymbol{A}_{kj}\\ &= u_i v_k A_{kj}\\ &= u_i(\boldsymbol{A}^T)_{jk}v_k\\ &= u_i(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{v})_j\\ &= \boldsymbol{u}\otimes(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{v})\end{aligned}$$

□

iv) $\boldsymbol{T}:\boldsymbol{W}=0$, con $\boldsymbol{T}$ tensor simétrico y $\boldsymbol{W}$ tensor antisimétrico.

Demostración.
Primero, recordamos la definición de tensor simétrico y antisimétrico. Para el primer caso se tiene que $\boldsymbol{T}$ es simétrico si cumple con $T_{ij}=T_{ji}$ y $\boldsymbol{W}$ es antisimétrico si cumple con $W_{ij}=-W_{ji}$. Es decir, si representamos sus forma matricial se obtiene,

$$[\boldsymbol{T}]=\begin{bmatrix}T_{11} & T_{12} & T_{13}\\ T_{12} & T_{22} & T_{23}\\ T_{13} & T_{23} & T_{33}\end{bmatrix} \qquad [\boldsymbol{W}]=\begin{bmatrix}0 & W_{12} & W_{13}\\ -W_{12} & 0 & W_{23}\\ -W_{13} & -W_{23} & 0\end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Notando que $\boldsymbol{T}:\boldsymbol{W}=T_{ij}W_{ij}$, y desarrollándola se obtiene,

$$T_{ij}W_{ij}=T_{11}W_{11}+T_{21}W_{21}+T_{31}W_{31}+T_{12}W_{12}+T_{22}W_{22}+T_{32}W_{32}+T_{13}W_{13}+T_{33}W_{33}=0 \tag{1.4}$$

□

v) $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{u})=0$

Demostración. El vector nabla se define como $\nabla=\frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i$. Luego,

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{u}) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\cdot(\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j))\\ &= \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k\partial x_i}(\boldsymbol{e}_k\cdot\epsilon_{ijl}\boldsymbol{e}_l)\\ &= \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k\partial x_i}\epsilon_{ijl}\delta_{kl}\\ &= \epsilon_{ijk}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k\partial x_i}\end{aligned}$$

Si desarrollan la última expresión llegarán a que los términos se cancelan llegando a sumar cero. □

Problema 2. *Transformación de coordenadas*
La Figura 1 muestra una viga curvada por una fuerza en su extremo.

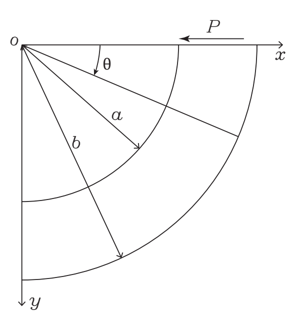

Figura 1: Viga curvada por una fuerza en el extremo

El campo de tensiones en coordenadas polares está dado por:

$$
\begin{aligned}
\sigma_r &= \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right)\sin(\theta) \\
\sigma_\theta &= \left(6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right)\sin(\theta) \\
\tau_{\theta r} &= -\left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right)\cos(\theta)
\end{aligned}
$$

Donde

$$A = \frac{P}{2N} \qquad B = -\frac{Pa^2b^2}{2N} \qquad D = -\frac{P}{N}(a^2+b^2)$$

Y

$$N = a^2 - b^2 + (a^2+b^2)\log\frac{b}{a}$$

Se pide:

i) Encuentre las tensiones $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ en coordenadas cartesianas.

Demostración.
Para este ejercicio, los guiaré en los pasos que deben seguir para resolver el problema. Queremos transformar de coordenadas polares a coordenadas cartesianas. Recordando la ley de transformación de coordenadas para tensores de segundo orden, se obtiene,

$$[\boldsymbol{A}]_{newbasis} = [\boldsymbol{Q}]^T[\boldsymbol{A}]_{oldbasis}[\boldsymbol{Q}] \tag{2.1}$$

donde las componentes del tensor $\boldsymbol{Q}$, se define como,

$$\boldsymbol{Q}_{ij} = \boldsymbol{e}_{iold} \cdot \boldsymbol{e}_{jnew} \tag{2.2}$$

En este caso, en particular, y recordando que $\hat{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta + \hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\theta$, se obtiene que el tensor $\boldsymbol{Q}$ tiene la forma,

$$[\boldsymbol{Q}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego de desarrollar la expresión 2.1 deben reemplazar $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y $\theta = \arctan y/x$. □

ii) Evalúe las tensiones en los planos $x = 0$ e $y = 0$ para las expresiones tanto en coordenadas polares y cartesianas y compare.

Demostración.
Se deja como propuesto. □