PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Ingeniería Biológica y Médica
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Estructural y Geotécnica
IBM2020 Introducción a la Biomecánica
Primer Semestre 2022

Tarea 1

Fecha de entrega: 30-Marzo-2022, 17:00.

Nota importante: Todos los desarrollos teóricos y códigos computacionales deben ser elaborados en forma individual. Los conceptos generales de los problemas pueden ser discutidos en grupos, pero las soluciones no deben ser comparadas. El informe debe contener todos los desarrollos teóricos, resultados numéricos, figuras y explicaciones pedidas para la tarea. Se considerará como parte de la evaluación de la tarea la correcta diagramación, redacción y presentación del informe, pudiendo descontarse hasta 2.0 puntos por este concepto.
Todos los códigos deben ser desarrollados en `Python` y documentados en un Jupyter notebook. Si necesita, puede también generar librerías auxiliares en formato .py. La entrega del informe es de forma electrónica mediante la plataforma Canvas, en formato PDF en un archivo cuyo nombre tenga el formato `Tarea01_ApellidoNombre.pdf`. De existir códigos auxiliares y generadores utilizados, debe incluirlos además en un archivo comprimido en formato `zip` junto al informe. **Incluya en su informe el número de horas dedicadas a esta tarea**. No se aceptarán tareas ni códigos después de la fecha y hora de entrega.

Bonus: Si la nota final de su tarea es $> 5{,}5$ y usted entrega su tarea escrita en LaTeXusando el template del curso, y entrega el archivo `.tex` y figuras dentro del archivo ZIP subido a Canvas, se abonarán 0,5 puntos a la nota final de la tarea.

Problema 1:

i) Usando notación indicial, dsemostrar que

$$\boldsymbol{A}^{-T} : \boldsymbol{A} = 3$$

ii) Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado y de frontera regular. Sean $\boldsymbol{v} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones regulares. Utilice notación indicial para demostrar que

$$\nabla \cdot (u\boldsymbol{v}) = u\nabla \cdot \boldsymbol{v} + \nabla u \cdot \boldsymbol{v}.$$

Además, utilice la propiedad anterior para demostrar la siguiente igualdad, conocida como "integración por partes",

$$\int_\Omega u\nabla \cdot \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} u\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s - \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \nabla u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Por último, fije $n = 1$ y verifique que la igualdad demostrada es una generalización de la regla de integración por partes en $\mathbb{R}$.

Hint: Para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, note que

$$\int_{\partial(a,b)} f \cdot n\,\mathrm{d}s = f(b) - f(a).$$

donde la normal de $\partial(a, b)$ está definida según

$$n(x) = \begin{cases} 1 & x = b \\ -1 & x = a \end{cases}.$$

Problema 2: Una sección en el eje corto del ventrículo izquierdo puede ser modelada con la geometría anular que se muestra en la figura 1. Este modelo considera un radio interno $a = 43$mm y un radio externo $b = 50$mm. El ventrículo es sometido a una presión interna negativa uniforme $P_{\text{int}} = -0{,}04\text{N/mm}^2$. Considere la presión externa $P_{\text{ext}} = 0\text{N/mm}^2$. El mapeo de deformación en coordenadas polares está dado por:

$$
\begin{aligned}
r &= R + \frac{B}{R},\\
\theta &= \Theta,\\
z &= \frac{Z}{1 - \frac{B^2}{R^4}},
\end{aligned}
$$

donde

$$B = \tfrac{3}{2E}\tfrac{a^2b^2}{(b^2-a^2)}\left(P_{\text{int}} - P_{\text{ext}}\right).$$

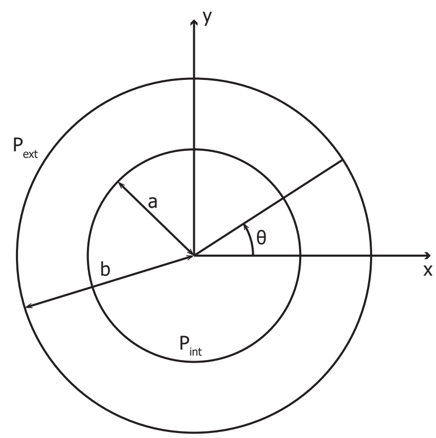

Figura 1: Modelo anular del ventrículo izquierdo

Considerando $E = 0{,}3\text{N/mm}^2$, se pide:

i) Grafique la proyección en el plano XY de la configuración de referencia (no deformada, en gris claro) y la configuración actual (deformada, en gris oscuro), sobrepuestas.[1]

ii) Grafique los campos de las componentes E_{XX}, E_{YY}, E_{XY} sobre la configuración de referencia, donde $\boldsymbol{E}$ es el tensor lagrangeano de deformaciones.

iii) Grafique los campos de las componentes $E_{RR}, E_{\Theta\Theta}, E_{R\Theta}$ sobre la configuración de referencia y compare con los gráficos anteriores.

Hint: Para el cálculo del tensor gradiente de deformación $\boldsymbol{F}$ en coordenadas cilíndricas ocupe la siguiente expresión

$$[\boldsymbol{F}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial R} & \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial r}{\partial \Theta} & \dfrac{\partial r}{\partial Z} \\ r\dfrac{\partial \theta}{\partial R} & \dfrac{r}{R}\dfrac{\partial \theta}{\partial \Theta} & r\dfrac{\partial \theta}{\partial Z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial R} & \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial z}{\partial \Theta} & \dfrac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix}$$

[1]Se recomienda estudiar el comando `meshgrid` de `numpy` y el comando `pcolor` de `matplotlib`

Problema 3: Busque en la literatura científica[2] un artículo donde se estudie el comportamiento mecánico de tejidos **blandos**[3] de algún órgano que no sea el corazón. Entregue la cita, un breve resumen en español del artículo donde se indique el tipo de tejido y sus condiciones, con qué técnica se midieron las deformaciones, e incluya al menos un gráfico donde se puedan apreciar las deformaciones experimentadas por el tejido en estudio. Indique además que medidas de deformación (qué tensor) fueron utilizadas en dicho estudio. Sea original, y procure que el artículo que incluya en su trabajo no sea utilizado por otro estudiante del curso.

[2] Se recomienda usar *Google Scholar*
[3] Es decir, que experimentan deformaciones considerables