PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Estructural y Geotécnica
IBM 2020 Introducción a la Biomecánica
Primer Semestre 2022

Taller 3

Gustavo Barrezueta - *gabarrezueta@uc.cl*

Problema 1.

i) $\operatorname{div}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{v}$

Demostración.

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) &= \frac{\partial(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})_i}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial \epsilon_{jki} u_j v_k}{\partial x_i} \\ &= \epsilon_{jki}(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} v_k + u_j \frac{\partial v_k}{\partial x_i})\end{aligned}$$

Tomando que $\epsilon_{jki} = \epsilon_{ijk}$ y $\epsilon_{jki} = -\epsilon_{ikj}$, se obtiene

$$\begin{aligned}\epsilon_{jki}(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} v_k + u_j \frac{\partial v_k}{\partial x_i}) &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} v_k - \epsilon_{ikj} u_j \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \\ &= (\nabla \times \boldsymbol{u})_k v_k - (\nabla \times \boldsymbol{v})_j u_j \\ &= \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{v}\end{aligned}$$

□

Problema 2. El deslizamiento relativo entre dos membranas pleurales dentro de un pulmón puede ser modelado localmente mediante la siguiente descripción de movimiento:

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}, t) = \begin{bmatrix} X_1 + \gamma(t) X_2 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}, \qquad t \geq 0$$

Se pide:

i) Entregue las expresión para el cambio relativo de volumen $J = \det \boldsymbol{F}$, y para el cambio relativo de área $\frac{da}{dA}$ de una superficie diferencial inicialmente orientada con normal $\boldsymbol{E}_1$ (dirección X_1)

Demostración.

$$[\boldsymbol{F}] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego, $J = \det \boldsymbol{F} = 1$. Por otro lado, para calcular la razón entre las áreas $\frac{da}{dA}$ se usa la ecuación de Nanson-Piola: $\boldsymbol{ds} = J \boldsymbol{F}^{-T} \boldsymbol{dS}$. Calculamos $[\boldsymbol{F}]^{-T}$,

$$[\boldsymbol{F}]^{-T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\gamma(t) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definimos los vectores como $\boldsymbol{ds} = da\hat{\boldsymbol{n}}$ y $\boldsymbol{dS} = dA\boldsymbol{E_1}$ y considerando que $[\boldsymbol{E}_1] = [1, 0, 0]^T$, se obtiene,

$$da\hat{\boldsymbol{n}} = dA \begin{bmatrix} 1 \\ -\gamma(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tomando norma de la ecuación anterior, se obtiene,

$$\frac{da}{dA} = \sqrt{1 + \gamma(t)^2} \tag{2.1}$$

□

ii) Entregue los valores y direcciones principales del tensor lagrangeano de deformaciones $\boldsymbol{E}$. Grafique como cambian los valores y direcciones principales de $\boldsymbol{E}$ para $t > 0$ asumiendo que $\gamma(t) = t$.

Demostración. El tensor de deformación $\boldsymbol{E}$ se define como

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I})$$

Haciendo los cálculos, se llega a la siguiente expresión para $\boldsymbol{E}$,

$$[\boldsymbol{E}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ \gamma & \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, los valores propios se calculan a través del polinimio característico de $\boldsymbol{E}$, es decir,

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{E} - \lambda\boldsymbol{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & \gamma/2 & 0 \\ \gamma/2 & \gamma^2/2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda(-\lambda + \frac{\gamma^2}{2}\lambda + \frac{\gamma^2}{4}) \end{aligned}$$

Igualando a cero la última expresión y resolviendo, se obtienes,

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_{2,3} = \frac{\gamma}{2}(\frac{\gamma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 4})$$

Finalmente, para obtener los vectores propios se debe resolver $(\boldsymbol{E} - \lambda_i\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}_i = 0$ para $i = 1, 2, 3$, obteniendose,

$$\boldsymbol{v}_1 = [0, 0, 1] \qquad \boldsymbol{v}_{2,3} = [1, \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 4}, 0]$$

□

iii) Linearize[1] el tensor $\boldsymbol{E}$ para obtener el tensor de deformaciones infinitesimales $\boldsymbol{\varepsilon}$. Calcule las deformaciones y direcciones principales de $\boldsymbol{\varepsilon}$, y grafíquelas en función de t asumiendo que $\gamma(t) = t$. Compare con el resultado obtenido en ii)

Demostración. Este ejercicio queda como propuesto. Se recuerda que el tensor $\boldsymbol{\epsilon}$ se define como $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}^T)$, donde $\boldsymbol{u}$ corresponde al campo de desplazamiento. □

Problema 3. Sea un movimiento de un continuo descrito por las siguientes ecuaciones,

$$x_1 = X_1 e^{-t} \qquad x_2 = X_2 e^t \qquad x_3 = X_3 + X_2(e^{-t} - 1)$$

y sea θ un campo de temperatura del cuerpo dado por

[1] Asumiendo que γ es pequeño

$$\theta = e^{-t}(x_1 - 2x_2 + 3x_3)$$

Determine el campo de velocidad en su forma espacial, y usando lo anterior, calcule la derivada material $D\theta/Dt$ del campo de temperatura.

Demostración. La derivada material del campo de temperatura espacial está dado por

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t} + \mathrm{grad}\theta \cdot \boldsymbol{v}$$

donde $\boldsymbol{v}$ es el campo de velocidades espacial. Lo calculamos como,

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}(\varphi^{-1}(\boldsymbol{X}, t), t)$$

Lo primero que hacemos es encontrar $\varphi^{-1}(\boldsymbol{X}, t)$,

$$X_1 = x_1 e^{t} \qquad X_2 = x_2 e^{-t} \qquad X_3 = x_3 - x_2(e^{-2t} - e^{-t})$$

Luego, derivamos $\varphi((\boldsymbol{X}, t), t)$ para obtener $V(\boldsymbol{X}, t)$

$$V_1 = -X_1 e^{-t} \qquad V_2 = X_2 e^{t} \qquad V_3 = -X_2 e^{-t}$$

Reemplazando las coordenadas materiales por las espaciales se obtiene el campo $\boldsymbol{v}$,

$$v_1 = -x_1 \qquad v_2 = x_2 \qquad v_3 = -x_2 e^{-2t}$$

Por otro lado, calculamos el gradiente y la derivada parcial del campo θ con respecto a t,

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -e^{-t}(x_1 - 2x_2 + 3x_3)$$

y

$$\mathrm{grad}\theta = [e^{-t}, -2e^{-t}, 3e^{-t}]$$

Haciendo el producto punto correspondiente y sumando estos términos con los de la derivada parcial se obtiene,

$$\frac{D\theta}{Dt} = -2x_1 e^{-t} - 3x_2 e^{-3t} - 3x_3 e{-t}$$

□