



### Tarea 3

Fecha de entrega: 27-Abril-2022, 23:59

---

**Nota importante:** Todos los desarrollos teóricos y códigos computacionales deben ser elaborados en forma individual. Los conceptos generales de los problemas pueden ser discutidos en grupos, pero las soluciones no deben ser comparadas. El informe debe contener todos los desarrollos teóricos, resultados numéricos, figuras y explicaciones pedidas para la tarea. Se considerará como parte de la evaluación de la tarea la correcta diagramación, redacción y presentación del informe, pudiendo descontarse hasta 2.0 puntos por este concepto.

**Todos los códigos deben ser desarrollados en Python** y documentados en un Jupyter notebook. Si necesita, puede también generar librerías auxiliares en formato .py. La entrega del informe es de forma electrónica mediante la plataforma Canvas, en formato PDF en un archivo cuyo nombre tenga el formato **Tarea03\_ApellidoNombre.pdf**. De existir códigos auxiliares y generadores utilizados, debe incluirlos además en un archivo comprimido en formato **zip** junto al informe. **Incluya en su informe el número de horas dedicadas a esta tarea.** No se aceptarán tareas ni códigos después de la fecha y hora de entrega.

**Bonus:** Si la nota final de su tarea es  $> 5,5$  y usted entrega su tarea escrita en  $\text{\LaTeX}$  usando el template del curso, y entrega el archivo **.tex** y figuras dentro del archivo ZIP subido a Canvas, se abonarán 0,5 puntos a la nota final de la tarea.

---

En el desarrollo de esta tarea aplicaremos los conocimientos de modelación constitutiva y propiedades mecánicas de tejidos biológicos en un caso de estudio real. Para esto, se encuentra en Canvas una carpeta con un archivo complementario a la tarea que será necesario para resolver los problemas planteados.

**Problema 1:** Lea detenidamente el artículo de **Birzle2018**, incluido en la carpeta complementaria. Escriba un resumen del artículo —en sus palabras, y con una extensión máxima de una plana— que incluya objetivos, métodos y conclusiones relevantes. Procure que su resumen incluya, al menos, alguna descripción de un comportamiento mecánico particular visto en clases que se observó (o no se observó) en el tejido estudiado.

**Problema 2:** El artículo de **Birzle2018**, propone un modelo hiperelástico compresible para describir el comportamiento mecánico del tejido pulmonar cuya densidad de energía de deformación es

$$W^{CM1}(\mathbf{C}) := c(I_1(\mathbf{C}) - 3) + \frac{c}{\beta}(I_3^{-\beta/2}(\mathbf{C}) - 1) + c_d(I_1(\mathbf{C}) - 3)^d \quad (\text{CM1})$$

donde  $c$ ,  $\beta$ ,  $c_d$  y  $d$  son parámetros del modelo y los términos  $I_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  representan los invariantes del tensor. Alternativamente, el tejido pulmonar ha sido modelado como un sólido NeoHookeano compresible (**Berger2016**) con densidad de energía dada por

$$W^{CM2}(\mathbf{C}) := \frac{\mu}{2}(I_1(\mathbf{C}) - 3) + \frac{\lambda}{2}(I_3(\mathbf{C}) - 1) - \left(\mu + \frac{\lambda}{4}\right) \ln(\sqrt{I_3(\mathbf{C})} - 1 + \Phi_0) \quad (\text{CM2})$$

donde  $\mu$ ,  $\lambda$  parámetros del modelo y  $\Phi_0$  es un término de penalización. Para cada uno de estos modelos, se pide:

- I) Derive una expresión explícita en notación directa para el segundo tensor de Piola-Kirchoff  $\mathbf{S}$  en función del tensor derecho de Cauchy-Green  $\mathbf{C}$ .
- II) Derive una expresión explícita en notación directa para el primer tensor de Piola-Kirchoff  $\mathbf{P}$  en función del tensor gradiente de deformación  $\mathbf{F}$ .
- III) Derive una expresión explícita en notación directa para el tensor de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  en función del tensor izquierdo de Cauchy-Green  $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ .

*Hint:* Puede usar que, para cualquier tensor  $\mathbf{A}$  de segundo orden, se cumple que

$$\frac{\partial I_3(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = \det(\mathbf{A})(\mathbf{A}^{-1})^T \quad (1)$$

**Problema 3:** En el laboratorio del curso se realizó un ensayo uniaxial de tejido pulmonar. Asumiendo que la dirección  $\mathbf{X}_1$  coincide con el eje axial del ensayo, algunos supuestos que se pueden hacer son los siguientes:

1. El tensor gradiente de deformación puede escribirse como

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_T & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_T \end{bmatrix}$$

2. El tensor de Cauchy puede escribirse como

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En base a estos supuestos, y usando los siguientes parámetros para los modelos CM1 y CM2 propuestos en el ejercicio anterior:

<i>Berger et al.</i>	<i>Birzle et al.</i>
$\mu = 280.8 \text{ Pa}$	$c = 286.61 \text{ Pa}$
$\lambda = 421.2 \text{ Pa}$	$c_d = 0.008238 \text{ Pa}$
$\Phi_0 = 0.99$	$\beta = 1.1738$
	$d = 6$

se pide

- I) Construya una función en Python  $\sigma_{11}(\lambda)$  que entregue la tensión axial versus el estiramiento axial para un ensayo de tracción simulado. Grafique esta función para cada modelo considerando el intervalo  $\lambda \in [0.8, 1.8]$ . Para ello, aproxime  $\lambda_T$  en función de  $\lambda$  usando el método de Newton.