PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Ingeniería Biológica y Médica
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Estructural y Geotécnica
ICE/IBM2020 Introducción a la Biomecánica
Primer Semestre 2022

Tarea 2

Fecha de entrega: 13-Abril-2022, 17:00.

Nota importante: Todos los desarrollos teóricos y códigos computacionales deben ser elaborados en forma individual. Los conceptos generales de los problemas pueden ser discutidos en grupos, pero las soluciones no deben ser comparadas. El informe debe contener todos los desarrollos teóricos, resultados numéricos, figuras y explicaciones pedidas para la tarea. Se considerará como parte de la evaluación de la tarea la correcta diagramación, redacción y presentación del informe, pudiendo descontarse hasta 2.0 puntos por este concepto.
Todos los códigos deben ser desarrollados en `Python` y documentados en un Jupyter notebook. Si necesita, puede también generar librerías auxiliares en formato .py. La entrega del informe es de forma electrónica mediante la plataforma Canvas, en formato PDF en un archivo cuyo nombre tenga el formato `Tarea02_ApellidoNombre.pdf`. De existir códigos auxiliares y generadores utilizados, debe incluirlos además en un archivo comprimido en formato `zip` junto al informe. **Incluya en su informe el número de horas dedicadas a esta tarea**. No se aceptarán tareas ni códigos después de la fecha y hora de entrega.

Bonus: Si la nota final de su tarea es $> 5{,}5$ y usted entrega su tarea escrita en LaTeXusando el template del curso, y entrega el archivo `.tex` y figuras dentro del archivo ZIP subido a Canvas, se abonarán 0,5 puntos a la nota final de la tarea.

Problema 1: Considere una viga, cuyo dominio en configuración de referencia es $B_0 = [0, L] \times [-h/2, h/2] \times [0, 1]$. El mapeo de deformación en flexión circular con curvatura R, para deformaciones moderadamente grandes, está dado por

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (X_2 + R) \sin \frac{\pi X_1}{L} \\
x_2 &= X_2 - (X_2 + R) \left\{ 1 - \cos \frac{\pi X_1}{L} \right\} \\
x_3 &= X_3
\end{aligned}
$$

Considerando un material Neo-Hookeano compresible, se tiene que el primer tensor de Piola-Kirchhoff queda determinado por la ley constitutiva

$$\boldsymbol{P} = \mu(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}^{-T}) + \lambda \ln J \boldsymbol{F}^{-T}$$

Considerando $L = 10, h = 1, R = 10, \mu = 1, \lambda = 10$, se pide:

i) Grafique la proyección en el plano $X_1 - X_2$ de la configuracióon de referencia (no-deformada) y la configuración actual (deformada), sobrepuestas.

ii) Grafique los campos de las componentes P_{11}, P_{22}, P_{12} sobre la configuración de referencia, donde $\boldsymbol{P}$ es el primer tensor de Piola-Kirchhoff

iii) Grafique los campos de las componentes $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ sobre la configuración actual, donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones de Cauchy. Compare estos resultados con el punto iii) y comente.

IV) Sea $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{N}$ la tracción material, donde $\boldsymbol{N}$ es el vector tangente al eje neutro de cada sección transversal (no-deformada). Grafique sobre la configuración material el campo $\|\boldsymbol{T}\|$. Entregue además un gráfico del campo vectorial $\boldsymbol{T}$ para la superficie definida por $X_1 = L/2$, escalando (e indicando) la magnitud empleada.

V) Sea $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}$ la tracción espacial, donde $\boldsymbol{n}$ es el vector tangente al eje neutro de cada sección transversal (deformada). Grafique sobre la configuración espacial el campo $\|\boldsymbol{t}\|$. Entregue además un gráfico del campo vectorial $\boldsymbol{t}$ para la superficie en configuración espacial que corresponde a la superficie $X_1 = L/2$ de la configuración material, usando el mismo factor de escalamiento de IV). Compare sus resultados con aquellos del punto IV) y comente.

Problema 2: Mientras usted estaba estudiando para el curso de Introducción a la Biomecánica, decide hacerse una taza de café endulzado. Al vertir el azúcar en el fluido y revolverlo, se pregunta sobre la dinámica de la disolución del azúcar en el café. Considere un grano de azúcar que acaba de caer en una taza de café como una partícula puntual. Supongamos que, al revolver la taza de café con una cuchara, se genera un campo de velocidades permanente descrito en coordenadas cilíndricas ($\boldsymbol{v} = v_r\hat{\boldsymbol{r}} + v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + v_z\hat{\boldsymbol{z}}$) por

$$\begin{aligned} v_r &= a\left(\frac{c+1}{r+1} - 1\right), \\ v_\theta &= d * r, \\ v_z &= -z, \end{aligned}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ son parámetros del problema (por ejemplo, de la forma de la taza), $r = r(\boldsymbol{x}) = r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \theta(\boldsymbol{x}) = \theta(x, y, z) = \arctan\frac{y}{x}$. El fluido tiene una distribución de temperatura descrita por

$$u(r, \theta, z, t) = \frac{k}{t}e^{\frac{-r^2}{t^2}}$$

donde $u(r, \theta, z, t)$ es la temperatura en el punto $\boldsymbol{x} = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ en el instante de tiempo t y $k \in \mathbb{R}$.

1. Si en el instante $t = 1$ el grano de azúcar en cuestión está en el punto $\boldsymbol{x} = \left(0, \frac{c}{2}, 1\right)$, determine la expresión la tasa de cambio de la temperatura de la superficie del grano de azúcar (es decir, percibida por el grano de azúcar) en dicho instante.

2. Para el mismo instante de tiempo y considerando $a = 5$, $c = 10$, $d = 2$ y $k = 1$, grafique el campo $\dot{u}$ sobre una superficie circular definida por $0 \leq r \leq 5$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Problema 3: Sea $\varphi : B_0 \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^3$ una descripción de movimiento que conserva la masa, el momentum lineal y el momentum angular, y sean $\rho(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}, t)$ y $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, t)$ la densidad de masa euleriana, el vector de fuerzas de cuerpo euleriano y el tensor de Cauchy, respectivamente. Asuma además que el cuerpo a analizar es un fluido ideal (invíscido), i.e., incapaz de sostener tensiones de corte, o, en otras palabras, que en cualquier sección del material, la tracción es paralela a la normal.

I) Demuestre que existe un campo escalar $p(\boldsymbol{x}, t)$[1] tal que

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, t) = -p(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{I} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \varphi(B_0, t),\ t \in [t_1, t_2] \tag{1}$$

II) Use el resultado anterior para demostrar que la ecuación de movimiento de un fluido ideal puede ser reducida a la ecuación de Euler,

$$-\nabla p + \rho\boldsymbol{b} = \rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla\boldsymbol{v}\ \boldsymbol{v}\right) \tag{2}$$

[1] denominado *campo de presión*

III) Considere ahora un fluido **viscoso** con viscosidad uniforme, i.e. $\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{d}$ para un campo $p(\boldsymbol{x}, t)$ y un escalar $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, donde $\boldsymbol{d}$ corresponde al tensor tasa de deformación. Suponga además que el flujo es incompresible. Por último, suponga que el flujo es de tipo *creeping*, es decir que el número de Reynolds es muy bajo, o, alternativamente, que

$$\overline{(\rho \boldsymbol{v})}^{\,\cdot} = 0.$$

a) Demuestre que en ese caso la ecuación de movimiento se puede reducir a la ecuación de Stokes

$$\mu\Delta\boldsymbol{v} - \nabla p + \rho\boldsymbol{b} = 0. \tag{3}$$

b) Suponga por último que, además de flujo *creeping*, la fuerza viscosa es lineal (y biyectiva) a la velocidad, i.e. se tiene que

$$\mu\Delta\boldsymbol{v} = T(\boldsymbol{v})$$

para alguna transformación lineal invertible T. Demuestre que en este último caso, si $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, la ecuación de movimiento se reduce a la ley de Darcy

$$\boldsymbol{v} = \frac{-1}{\mu}\boldsymbol{\kappa}\nabla p \tag{4}$$

para algún tensor[2] $\boldsymbol{\kappa}$.

Hint 1: El tensor $\boldsymbol{d}$ se define como $\boldsymbol{d} = \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{v} + \nabla\boldsymbol{v}^T)$.

Hint 2: Primero demuestre que $\nabla \cdot 2\boldsymbol{d} = \Delta\boldsymbol{v}$ y utilice esta igualdad en su desarrollo. Para esta demostración considere el Teorema de Clairaut y la conservación de masa del fluido.

[2] denominado *tensor de permeabilidad*