PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Estructural y Geotécnica
ICE3333 Elementos Finitos No-Lineales
Segundo Semestre 2021

Tarea # 2

Fecha de entrega: 20-Septiembre-2021, 18:00 hrs

Nota importante: Todos los desarrollos teóricos y códigos computacionales deben ser elaborados en forma individual. Los conceptos generales de los problemas pueden ser discutidos en grupos, pero las soluciones no deben ser comparadas. El informe debe ser elaborado en LaTeX, y debe contener todos los desarrollos teóricos, resultados numéricos, figuras y explicaciones pedidas para la tarea. Se considerará como parte de la evaluación de la tarea la correcta diagramación, redacción y presentación del informe, pudiendo descontarse hasta 2.0 puntos por este concepto. Todos los códigos desarrollados en `Python` deben ser adjuntados en un archivo `Jupyter Notebook` ejecutado. El informe en formato digital y todos los códigos utilizados (archivos `.tex,.ipynb` y figuras) deben ser enviados al correo `ice3333uc@gmail.com` y subidos a la plataforma de Canvas antes de la fecha de entrega. No cumplir con lo anterior implica nota 1.0 en la tarea. Incluya en su informe el número de horas dedicadas a esta tarea. No se aceptarán tareas ni códigos después de la fecha de entrega.

Problema # 1 (Sistema Reacción-Difusión Biestable): Sea $\Omega = [0,1]^2$. Considere el problema de evolución de un sistema biestable, definido por

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(\underbrace{-\sigma\nabla u}_{=:\boldsymbol{q}(\nabla u)}) = \underbrace{u(1-u)(u-\alpha)}_{=:f(u)}, &\quad \text{en } \Omega\times(0,T], \\ u = 0, &\quad \text{sobre } \partial\Omega, \\ u(\cdot,0) = u_0(\boldsymbol{x}), &\quad \text{en } \Omega \end{aligned}\right\} \tag{S}$$

Considere para sus cálculos que $\sigma = 0.002, \alpha = 0.5$ y $T = 5$. Se pide

i) Para resolver (S) discretize primero en el tiempo usando un esquema implícito Backward-Euler. Para esto, discretize el intervalo de tiempo $[0,T]$ de manera de obtener una secuencia de BVP no-lineales para cada paso de tiempo. Entregue la formulación fuerte $(S)_{n+1}$ asociado al paso génerico $t = t_{n+1}$, donde se asume conocida la solución $u(\cdot,t_n)$.

ii) Formule un esquema NLFEM para la solución numérica del problema $(S)_{n+1}$. Entregue las expresiones de las componentes del residual $\mathbf{R}^e$ y el operador tangente $\mathbf{TR}^e$.

iii) Implemente en `Python` las siguientes funciones asociadas a la formulación descrita en ii):

- `[M, TM] = material_RDBistable(material_state, material_parameters)`: rutina que calcula cantidades y sus derivadas a nivel de material. Para el caso particular del sistema RD-biestable, `material_state = [u, grad_u]`, `material_parameters = [sigma,alpha,dt]`, con `dt` el paso de tiempo, y `M = [q,f]`, `TM = [Tq, Tf]`.
- `[Re, TRe] = element_RDBistable_P1(element_state, element_parameters)`: rutina que calcula el residual y su tangente a nivel de un elemento triangular lineal de Lagrange (P_1) donde `element_state = [ue, uen]` es una lista con el vector con valores nodales del campo u^{eh} para la iteración actual (`ue`) y para el paso de tiempo anterior convergido (`uen`), y `element_parameters = [xe, material_parameters]`, con `xe` la lista con vectores de coordenadas nodales.

- `[R, TR] = model_RDBistable_P1(model_state, model_parameters)`: rutina que calcula el residual y su tangente a nivel de modelo donde `model_state = [u,un]` el vector de valores nodales del campo u^h para la iteración actual (`u`) y para el paso de tiempo anterior (`un`), y `model_parameters = [xyz, IEN, LM, material_parameters]`, con `xyz` la tabla de coordenadas nodales, y `IEN` la tabla de conectividad, `LM` la tabla de colocación.

iv) Utilice las rutinas descritas en iii) para resolver mediante elementos finitos no-lineales el problema espacio-tiempo descrito por (S). Considere como condición inicial la distribución dada por

$$u_0(x, y) = \sin(6\pi x)\,\sin(6\pi y) \tag{1}$$

Entregue figuras de la distribución espacial de u en $t = 0$, $t = T/2$ y $t = T$ y comente sobre sus resultados, y como afecta a la solución del problema el uso de distintos tamaños de discretización espacial y temporal. Genere además un video en `Paraview` mostrando la evolución temporal del problema.

v) Repita lo solicitado en iv) considerando la condición inicial

$$u_0(x, y) = X \sim U([0, 1]) \tag{2}$$

donde X es una variable aleatoria con densidad de probabilidad uniforme intervalo $[0, 1]$.

Problema # 2 (Test de Consistencia)

i) Derive la expresión para el test de consistencia de 4to orden basado en el uso de stencils de 5-puntos con módulo $h = 10^{-3}$.

ii) Implemente el test de consistencia de 4to orden mediante la función

```
error = ConsistencyTest(func, state, params)
```

donde `func` es la función a ser testeada, y `params` es la lista con los parámetros necesarios para dicha función. Utilice esta rutina para testear sus funciones `material_RDBistable, element_RDBistable_P1, model_RDBistable_P1` usando parámetros entregados en el problema 1 y valores de `state = [x0,x0n]` aleatorios dentro de un rango razonable.