PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Estructural y Geotécnica
ICE3333 Elementos Finitos No-Lineales
Segundo Semestre 2021

Tarea # 1

Fecha de entrega: 07-Septiembre-2021, 17:00 hrs

Nota importante: Todos los desarrollos teóricos y códigos computacionales deben ser elaborados en forma individual. Los conceptos generales de los problemas pueden ser discutidos en grupos, pero las soluciones no deben ser comparadas. El informe debe ser elaborado en LaTeX, y debe contener todos los desarrollos teóricos, resultados numéricos, figuras y explicaciones pedidas para la tarea. Se considerará como parte de la evaluación de la tarea la correcta diagramación, redacción y presentación del informe, pudiendo descontarse hasta 2.0 puntos por este concepto. Todos los códigos desarrollados en `Python` deben ser adjuntados en un archivo `Jupyter Notebook` ejecutado. El informe en formato digital y todos los códigos utilizados (archivos `.tex,.ipynb` y figuras) deben ser enviados al correo `ice3333uc@gmail.com` y subidos a la plataforma de Canvas antes de la fecha de entrega. No cumplir con lo anterior implica nota 1.0 en la tarea. Incluya en su informe el número de horas dedicadas a esta tarea. No se aceptarán tareas ni códigos después de la fecha de entrega.

Problema # 1 (Método de Newton)

i) Implemente el método de Newton en `Python`. Para lo anterior, construya la función `x, solverlog = NewtonSolver(Rfunc, solverparams)` donde

- `Rfunc(x)` entrega la lista `[R, DR]` con el residual y el operador tangente evaluados en `x`
- `solverparams` es una lista con los parámetros necesarios para el método de Newton (`[tol, nitmax]`)
- `solverlog` es una lista de listas con información sobre las iteraciones de Newton `[it, error, xit]`, donde es el número de la iteración, `error` es la norma euclidiana de `xit`, y `xit` es el valor de la solución en la iteración.

ii) Utilice su implementación del método de Newton para encontrar minimizadores de las siguientes funciones usando los puntos iniciales entregados:

- $R(x, y) := \sin(x)\sin(y)$, con puntos iniciales $(1, 1)$ y $(2, 2)$
- $R(x, y) := (x-1)^2 + (y-1)^2$, con punto iniciales $(0, 0)$ y $(2, 2)$
- $R(x, y) := \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$, con punto iniciales $(0, 0)$ y $(2, 2)$

Incluye en su informe tablas de convergencia para cada caso, donde se reporte el número de iteración y el error asociado. Comente sobre los patrones de convergencia obtenidos.

iii) Entregue gráficos de contorno[1] de las funciones descritas en ii), graficando los puntos entregados por el método de Newton para cada iteración para cada uno de los casos de condición inicial.

[1] Utilice la función `contourf` de `matplotlib`

Problema # 2 (Derivada de Gateaux) Sea $\boldsymbol{\varphi} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$; $\boldsymbol{I} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ el tensor identidad; $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$. Entregue la derivada gateaux en la dirección $\boldsymbol{\eta} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ de los siguientes mapeos

i) $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\varphi}) := \nabla\boldsymbol{\varphi}^T \nabla\boldsymbol{\varphi}$

ii) $I_1(\boldsymbol{\varphi}) := \mathrm{trace}(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\varphi}))$

iii) $J(\boldsymbol{\varphi}) := \det(\nabla\boldsymbol{\varphi})$

iv) $\Pi(\boldsymbol{\varphi}) := \int_{B_0} \frac{\mu}{2}\{I_1(\boldsymbol{\varphi}) - 3\} - \mu \ln(J(\boldsymbol{\varphi})) + \frac{\lambda}{2}\{\ln(J(\boldsymbol{\varphi}))\}^2 \, \mathrm{d}B_0$

Problema # 3 (Problemas elípticos) Sea $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Considere el problema variacional de elasticidad: Encuentre $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$ tal que

$$a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = F(\boldsymbol{v}) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V},$$

donde

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) &:= \int_\Omega \varepsilon(\boldsymbol{v}) : \mathbb{C}\varepsilon(\boldsymbol{u}), \\ \varepsilon(\boldsymbol{w}) &= \frac{1}{2}\left(\nabla\boldsymbol{w} + \nabla\boldsymbol{w}^T\right), \end{aligned} \tag{1}$$

y $\mathbb{C}$ es un tensor de cuarto orden positivo-definido, es decir,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} : \mathbb{C}\boldsymbol{\xi} \geq 0 &\qquad \forall\, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \\ \boldsymbol{\xi} : \mathbb{C}\boldsymbol{\xi} = 0 &\quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\xi} = 0 \end{aligned}$$

i) Demuestre que $a : \mathcal{V}\times\mathcal{V} \to \mathbb{R}$ definida en (1) es una forma bilineal, acotada y $\mathcal{V}$-elíptica. En particular, entregue estimaciones para las constantes γ, α de acotamiento y coercividad, respectivamente.[2]

[2] Estudie el análisis para el problema de Poisson, y la desigualdad de Korn