Prova do Método PolySum para se obter Aproximações polinomiais de somatórios de polinômios

phi

21 de março de 2019

1 Teorema

1.1 Hipotése

Seja $P(x) = x^n$, $\sum_{i=1}^{x} P(i) = Q(x) = c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n+1}x^n + 1$ e A uma matriz $(n+1) \times (n+2)$ onde, sendo $a_{i,j}$ seu elemento na linha i e coluna j

$$a_{i,j} = \begin{cases} (n)_{i-1} & \text{se } j = n+2 \\ (j)_{i-1} & \text{se } i \leq j < n+2 \\ 0 & \text{se } i > j \end{cases}$$

Então se B for a forma escalonada reduzida de A, onde $b_{i,j}$ é o elemento de B na linha i e coluna j, então $c_i = b_{i,n+2}$.

Em outras palavras: Se contruir-mos a matriz (que podemos chamar de matriz base)

$$\begin{pmatrix} (1)_0 & (2)_0 & (3)_0 & \cdots & (n)_0 & (n+1)_0 & (n)_0 \\ 0 & (2)_1 & (3)_1 & \cdots & (n)_1 & (n+1)_1 & (n)_1 \\ 0 & 0 & (3)_2 & \cdots & (n)_2 & (n+1)_2 & (n)_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n)_{n-1} & (n+1)_{n-1} & (n)_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (n+1)_n & (n)_n \end{pmatrix}$$

Então se aplicar-mos uma eliminação de Gauss-Jordan sobre esta matriz, então o valor na ultima coluna da i-ésima linha da matriz resultante será o coeficiente que multiplica o termo x^i em Q(x).

1.2 Lemas

1.2.1 Lema 1

Para todos $n \geq 0$ e $m \geq 0$ onde n e m são números naturais, e para todo c independente de x, então

$$\frac{d^m}{dx^m}\Big[(x+c)^n\Big] = \begin{cases} (n)_m(x+c)^{n-m} & \text{se } m < n \\ (n)_m & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m > n \end{cases}$$

Caso 1, $m < n$ Provamos por indução em m.

Caso Base: $m = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m}\Big[(x+c)^n\Big] &= \frac{d^0}{dx^0}\Big[(x+c)^n\Big] \\ &= (x+c)^n \\ &= 1 \cdot (x+c)^{n-0} \\ &= \frac{n!}{n!} \cdot (x+c)^{n-0} \\ &= \frac{n!}{(n-0)!} \cdot (x+c)^{n-0} \\ &= (n)_0(x+c)^{n-0} \\ &= (n)_m(x+c)^{n-m} \end{aligned}$$

Passo Indutivo: $m = k > 0$

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m}\Big[(x+c)^n\Big] &= \frac{d^k}{dx^K}\Big[(x+c)^n\Big] \\ &= \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\Big[(x+c)\Big]\right] \\ &= \frac{d}{dx}\Big[(n)_{k-1}(x+c)^{n-(k-1)}\Big] \\ &= (n)_{k-1}\frac{d}{dx}\Big[(x+c)^{n-(k-1)}\Big] \\ &= (n)_{k-1} \cdot (n-(k-1)) \cdot (x+c)^{n-(k-1)-1} \\ &= \frac{n!}{(n-(k-1))!} \cdot (n-(k-1)) \cdot (x+c)^{n-k+1-1} \end{aligned}$$

$$= \frac{n! \cdot (n-(k-1))}{(n-(k-1)-1)! \cdot (n-(k-1))} \cdot (x+c)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{(n-(k-1)-1)!} \cdot (x+c)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{(n-k+1-1)!} \cdot (x+c)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!} \cdot (x+c)^{n-k}$$

$$= (n)_k (x+c)^{n-k}$$

$$= (n)_m (x+c)^{n-k}$$

Caso 2: $m = n$

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dx^m}\Big[(x+c)^n\Big] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\Big[(x+c)^n\Big]\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\Big[(x+c)^n\Big]\right] \\
&= \frac{d}{dx}\Big[(n)_{m-1}(x+c)^{n-(m-1)}\Big] \\
&= (n)_{m-1}\frac{d}{dx}\Big[(x+c)^{n-m+1}\Big] \\
&= (n)_{n-1}\frac{d}{dx}\Big[(x+c)^{n-n+1}\Big] \\
&= \frac{n!}{(n-(n-1))!}\frac{d}{dx}\Big[(x+c)^1\Big] \\
&= \frac{n!}{(n-n+1)!}\frac{d}{dx}\Big[(x+c)^1\Big] \\
&= \frac{n!}{1!} \cdot \frac{d}{dx}\Big[x+c\Big] \\
&= \frac{n!}{0!}\left(\frac{d}{dx}\Big[x\Big] + \frac{d}{dx}\Big[c\Big]\right) \\
&= \frac{n!}{(n-n)!}(1+0) \\
&= (n)_n
\end{aligned}$$

$$= (n)_m$$

Caso 3: $m > n$ Provamos por indução em m.

Caso Base: $m = n + 1$

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dx^m}\Big[(x+c)^n\Big] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\Big[(x+c)^n\Big]\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{n+1-1}}{dx^{n+1-1}}\Big[(x+c)^n\Big]\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{n}}{dx^{n}}\Big[(x+c)^n\Big]\right] \\
&= \frac{d}{dx}\Big[(n)_n\Big] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Passo Indutivo: $m = k > n + 1$

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dx^m}\Big[(x+c)^n\Big] &= \frac{d^k}{dx^k}\Big[(x+c)^n\Big] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\Big[(x+c)^n\Big]\right] \\
&= \frac{d}{dx}\Big[0\Big] \\
&= 0
\end{aligned}$$

1.2.2 Lema 2

Se $\sum_{i=1}^{x} P(i) = Q(x)$, então $P(x) = Q(x) - Q(x-1)$.

Demonstração

$$\sum_{i=1}^{x} P(i) = Q(x)$$

$$\sum_{i=1}^{x} P(i) - Q(x-1) = Q(x) - Q(x-1)$$

$$\sum_{i=1}^{x} P(i) - \sum_{i=1}^{x-1} P(i) = Q(x) - Q(x-1)$$

$$(P(x) + P(x-1) + \cdots + P(1)) - (P(x-1) + \cdots + P(1)) = Q(x) - Q(x-1)$$

$$P(x) + (P(x-1) + \cdots + P(1)) - (P(x-1) + \cdots + P(1)) = Q(x) - Q(x-1)$$

$$P(x) = Q(x) - Q(x-1)$$

1.3 Demonstração do Teorema

Seja $P(x) = x^n$ e $\sum_{i=1}^{x} P(i) = Q(x) = c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n+1}x^n + 1$. Apartir do Lema 2, temos que $P(x) = Q(x) - Q(x-1)$, e podemos então criar $n+1$ equações tais que formemos o sistema

$$
\begin{aligned}
\frac{d^0}{dx^0}\Big[Q(x) - Q(x-1)\Big] &= \frac{d^0}{dx^0}\Big[P(x)\Big] \\
\frac{d^1}{dx^1}\Big[Q(x) - Q(x-1)\Big] &= \frac{d^1}{dx^1}\Big[P(x)\Big] \\
&\vdots \\
\frac{d^n}{dx^n}\Big[Q(x) - Q(x-1)\Big] &= \frac{d^n}{dx^n}\Big[P(x)\Big]
\end{aligned}
$$

onde a i-ésima equação é

$$
\begin{aligned}
\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}\Big[Q(x) - Q(x-1)\Big] &= \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}\Big[P(x)\Big] && \Longrightarrow \\
\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}\Big[(c_1x + \cdots + c_{n+1}x^{n+1}) - (c_1(x-1) + \cdots + c_{n+1}(x-1)^{n+1})\Big] &= \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}\Big[x^n\Big] && \Longrightarrow \\
\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}\Big[c_1(x-(x-1)) + \cdots + c_{n+1}(x^{n+1} - (x-1)^{n+1})\Big] &= \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}\Big[x^n\Big] && \Longrightarrow \\
c_1 \cdot \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}\Big[x-(x-1)\Big] + \cdots + c_{n+1} \cdot \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}\Big[x^{n+1} - (x-1)^{n+1}\Big] &= \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}\Big[x^n\Big] && \Longrightarrow
\end{aligned}
$$

Percebemos então que estas são equações lineares com incognitas $c_1, \ldots, c_{n+1}$, onde o coeficiente de c_j na equação i é $\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}\Big[x^j - (x-1)^j\Big]$, ou $\Bigg(\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}\Big[x^j\Big] - \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}\Big[(x-1)^j\Big]\Bigg)$, e o valor independente é $\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}\Big[x^n\Big]$. Se montar-mos a matrix relacionada a este sistema então obtemos uma matrix A tal que, seja $a_{i,j}$ o seu elemento na linha i e coluna j, se $j < n+2$, então $a_{i,j} = c_j$, e se $j = n+2$, $a_{i,j}$ é igual ao valor independente da equação i.

Usamos agora o Lema 1 para simplificar essa matriz.

1.3.1 Caso 1: $j = n + 2$

Como o maior valor possível de i é $n + 1$, então

$$\begin{aligned} j &= n + 2 && \implies \\ j &> i && \implies \\ j &> i - 1 && \implies \\ i - 1 &< j \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}\Big[x^n\Big] \\ &= (n)_{i-1} \end{aligned}$$

1.3.2 Caso 2: $i - 1 < j < n + 2$

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}\Big[x^j\Big] - \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}\Big[(x-1)^j\Big] \\ &= (j)_{i-1}x^{j-(i-1)} - (j)_{i-1}(x-1)^{j-(i-1)} \\ &= (j)_{i-1}\Big(x^{j-(i-1)} - (x-1)^{j-(i-1)}\Big) \end{aligned}$$

Agora que eliminamos as derivações, podemos substituir x por 1 sem perder generalidade:

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= (j)_{i-1}\Big(x^{j-(i-1)} - (x-1)^{j-(i-1)}\Big) \\ &= (j)_{i-1}\Big(1^{j-(i-1)} - (1-1)^{j-(i-1)}\Big) \\ &= (j)_{i-1}\Big(1^{j-(i-1)} - 0^{j-(i-1)}\Big) \\ &= (j)_{i-1}\Big(1 - 0\Big) \\ &= (j)_{i-1} \end{aligned}$$

1.3.3 Caso 3: $i-1=j$

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}\left[x^j\right] - \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}\left[(x-1)^j\right] \\ &= (j)_{i-1} - (j)_{i-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

1.3.4 Caso 4: $i-1>j$

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}\left[x^j\right] - \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}\left[(x-1)^j\right] \\ &= 0 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo temos na verdade três casos, e como $i-1 \geq j \implies i > j$, e $i-1 < j \implies i \leq j$, então:

$$a_{i,j} = \begin{cases} (n)_{i-1} & \text{se } j = n+2 \\ (j)_{i-1} & \text{se } i \leq j < n+2 \\ 0 & \text{se } i > j \end{cases}$$

Esta é exatamente a matriz base da hipotése, e como ela é a matriz do sistema de equações lineares cujas incógnitas são os coeficientes de Q, então de fato a ultima coluna da forma escalonada reduzida de A nos dará os valores destes coeficientes da maneira proposta pelo teorema.

2 Algoritmo

2.1 Hypothesis

O seguinte algoritmo nos dará a matriz base do método:

```
1  Função Crie-Matriz(n: Inteiro) -> Matriz de Inteiros
2    A := Nova Matriz (n + 1) x (n + 2) de Inteiros
3    Preencha A com 0s
4    Preencha a primeira linha de A com 1s
5
6    Para i de 2 até n + 1
7      Para j de i até n + 1
8        A[i, j] := A[i-1, j] * (j - i + 2)
9      Fim
10     A[i, n+2] := A[i, n]
11   Fim
12   A[n+1, n+2] := A[n, n+2]
13 Fim
```

2.2 Demonstração

Na primeira linha da matriz, a coluna será sempre maior ou igual à linha, logo $a_{1,j} = (j)_{1-1} = (j)_0$ para $1 \leq j \leq n+1$, e $a_{1,j} = (n)_{1-1} = (n)_0$ para $j = n+2$. Como para todo k, $(k)_0 = \frac{k!}{(k-0)!} = \frac{k!}{k!} = 1$, então todos os elementos na primeira linha são 1, e logo a primeira linha de A está correta logo após a linha 3.

Agora para todo i nas linhas de 6 até 11, notamos que elas apenas modificam a linha i de A, e como a primeira linha está correta, podemos utilizar "a linha anterior está correta" como nossa hipotése que será provada se demonstrarmos que a i-ésima linha também está correta.

Nas linhas 7 até 10 apenas as colunas de i até $n+2$ são modificadas, então para $j < i$, $a_{i,j} = 0$, o que é correto.

Se $i \leq j < n+2$, $a_{i,j} = a_{i-1,j} \cdot (j-i+2)$. Como nós sabemos que que todos os elementos na linha anterior estão corretos, e como $i \leq j \implies i-1 < j$, $a_{i-1,j} = (j)_{i-2}$ e

$$a_{i,j} = (j)_{i-2} \cdot (j-i+2)$$

$$a_{i,j} = \frac{j!}{(j-(i-2))!} \cdot (j-i+2)$$

$$a_{i,j} = \frac{j! \cdot (j-i+2)}{(j-i+2)!}$$

$$a_{i,j} = \frac{j! \cdot (j-i+2)}{(j-i+1)! \cdot (j-i+2)}$$

$$a_{i,j} = \frac{j!}{(j-i+1)!}$$

$$a_{i,j} = \frac{j!}{(j-(i-1))!}$$

$$a_{i,j} = (j)_{i-1}$$

O que é correto. A linha 10 do programa será correta se $a_{i,n+2} = a_{i,n}$, e como $a_{i,n} = (n)_{i-1}$ para todo $i < n+1$, e $a_{i,n+2} = (n)_{n-1}$ para todo $i \leq n+1$, então isto é verdade para todas exceto a ultima linha. Como nenhuma outra linha depende da ultima linha estar correta, não há problema em deixa-la incorreta se a corrigirmos mais tarde, o que será feito na linha 12 do programa. A linha 12 do programa é correta pois

$$\begin{aligned}
a_{n+1,n+2} &= (n)_n \\
&= \frac{n!}{(n-n)!} \\
&= \frac{n!}{0!} \\
&= \frac{n!}{1!} \\
&= \frac{n!}{(n-(n-1))!} \\
&= (n)_{n-1} \\
&= a_{n,n+2}
\end{aligned}$$

Assim a ultima linha da matriz estará correta se a linha anterior o for, e esta estará correta se a linha anterior a ela o for, e assim por diante até a linha 1, que já provamos estar correta. Logo, a matriz resultante A está completamente correta.