

Prova do Método PolySum para se obter Aproximações polinomiais de somatórios de polinômios

phi

22 de março de 2019

1 Teorema

1.1 Hipótese

Seja $P(x) = x^n$, $\sum_{i=1}^x P(i) = Q(x) = c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{n+1}x^n + 1$ e A uma matriz $(n+1) \times (n+2)$ onde, sendo $a_{i,j}$ seu elemento na linha i e coluna j

$$a_{i,j} = \begin{cases} (n)_{i-1} & \text{se } j = n+2 \\ (j)_{i-1} & \text{se } i \leq j < n+2 \\ 0 & \text{se } i > j \end{cases}$$

Então se B for a forma escalonada reduzida de A , onde $b_{i,j}$ é o elemento de B na linha i e coluna j , então $c_i = b_{i,n+2}$.

Em outras palavras: Se contruir-mos a matriz (que podemos chamar de matriz base)

$$\begin{pmatrix} (1)_0 & (2)_0 & (3)_0 & \dots & (n)_0 & (n+1)_0 & (n)_0 \\ 0 & (2)_1 & (3)_1 & \dots & (n)_1 & (n+1)_1 & (n)_1 \\ 0 & 0 & (3)_2 & \dots & (n)_2 & (n+1)_2 & (n)_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n)_{n-1} & (n+1)_{n-1} & (n)_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (n+1)_n & (n)_n \end{pmatrix}$$

Então se aplicar-mos uma eliminação de Gauss-Jordan sobre esta matriz, então o valor na ultima coluna da i -ésima linha da matriz resultante será o coeficiente que multiplica o termo x^i em $Q(x)$.

1.2 Lemas

1.2.1 Lema 1

Para todos $n \geq 0$ e $m \geq 0$ onde n e m são números naturais, e para todo c independente de x , então

$$\frac{d^m}{dx^m}[(x+c)^n] = \begin{cases} (n)_m(x+c)^{n-m} & \text{se } m < n \\ (n)_m & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m > n \end{cases}$$

Caso 1, $m < n$ Provamos por indução em m .

Caso Base: $m = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m}[(x+c)^n] &= \frac{d^0}{dx^0}[(x+c)^n] \\ &= (x+c)^n \\ &= 1 \cdot (x+c)^{n-0} \\ &= \frac{n!}{n!} \cdot (x+c)^{n-0} \\ &= \frac{n!}{(n-0)!} \cdot (x+c)^{n-0} \\ &= (n)_0(x+c)^{n-0} \\ &= (n)_m(x+c)^{n-m} \end{aligned}$$

Passo Indutivo: $m = k > 0$

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m}[(x+c)^n] &= \frac{d^k}{dx^k}[(x+c)^n] \\ &= \frac{d}{dx} \left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}[(x+c)^n] \right] \\ &= \frac{d}{dx} \left[(n)_{k-1}(x+c)^{n-(k-1)} \right] \\ &= (n)_{k-1} \frac{d}{dx}[(x+c)^{n-(k-1)}] \\ &= (n)_{k-1} \cdot (n-(k-1)) \cdot (x+c)^{n-(k-1)-1} \\ &= \frac{n!}{(n-(k-1))!} \cdot (n-(k-1)) \cdot (x+c)^{n-k+1-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n! \cdot (n - (k - 1))}{(n - (k - 1) - 1)! \cdot (n - (k - 1))} \cdot (x + c)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{(n - (k - 1) - 1)!} \cdot (x + c)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{(n - k + 1 - 1)!} \cdot (x + c)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{(n - k)!} \cdot (x + c)^{n-k} \\
&= (n)_k (x + c)^{n-k} \\
&= (n)_m (x + c)^{n-k}
\end{aligned}$$

Caso 2: $m = n$

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dx^m} [(x + c)^n] &= \frac{d}{dx} \left[\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} [(x + c)^n] \right] \\
&= \frac{d}{dx} \left[\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} [(x + c)^n] \right] \\
&= \frac{d}{dx} [(n)_{m-1} (x + c)^{n-(m-1)}] \\
&= (n)_{m-1} \frac{d}{dx} [(x + c)^{n-m+1}] \\
&= (n)_{n-1} \frac{d}{dx} [(x + c)^{n-n+1}] \\
&= \frac{n!}{(n - (n - 1))!} \frac{d}{dx} [(x + c)^1] \\
&= \frac{n!}{(n - n + 1)!} \frac{d}{dx} [(x + c)^1] \\
&= \frac{n!}{1!} \cdot \frac{d}{dx} [x + c] \\
&= \frac{n!}{0!} \left(\frac{d}{dx} [x] + \frac{d}{dx} [c] \right) \\
&= \frac{n!}{(n - n)!} (1 + 0) \\
&= (n)_n
\end{aligned}$$

$$= (n)_m$$

Caso 3: $m > n$ Provamos por indução em m .

Caso Base: $m = n + 1$

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m} [(x+c)^n] &= \frac{d}{dx} \left[\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} [(x+c)^n] \right] \\ &= \frac{d}{dx} \left[\frac{d^{n+1-1}}{dx^{n+1-1}} [(x+c)^n] \right] \\ &= \frac{d}{dx} \left[\frac{d^n}{dx^n} [(x+c)^n] \right] \\ &= \frac{d}{dx} [(n)_n] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Passo Indutivo: $m = k > n + 1$

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m} [(x+c)^n] &= \frac{d^k}{dx^k} [(x+c)^n] \\ &= \frac{d}{dx} \left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} [(x+c)^n] \right] \\ &= \frac{d}{dx} [0] \\ &= 0 \end{aligned}$$

1.2.2 Lema 2

Se $\sum_{i=1}^x P(i) = Q(x)$, então $P(x) = Q(x) - Q(x-1)$.

Demonstração

$$\sum_{i=1}^x P(i) = Q(x)$$

$$\sum_{i=1}^x P(i) - Q(x-1) = Q(x) - Q(x-1)$$

$$\sum_{i=1}^x P(i) - \sum_{i=1}^{x-1} P(i) = Q(x) - Q(x-1)$$

$$(P(x) + P(x-1) + \cdots + P(1)) - (P(x-1) + \cdots + P(1)) = Q(x) - Q(x-1)$$

$$P(x) + (P(x-1) + \cdots + P(1)) - (P(x-1) + \cdots + P(1)) = Q(x) - Q(x-1)$$

$$P(x) = Q(x) - Q(x-1)$$

1.3 Demonstração do Teorema

Seja $P(x) = x^n$ e $\sum_{i=1}^x P(i) = Q(x) = c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n+1}x^n + 1$. Apartir do Lema 2, temos que $P(x) = Q(x) - Q(x-1)$, e podemos então criar $n+1$ equações tais que formemos o sistema

$$\begin{aligned}\frac{d^0}{dx^0} [Q(x) - Q(x-1)] &= \frac{d^0}{dx^0} [P(x)] \\ \frac{d^1}{dx^1} [Q(x) - Q(x-1)] &= \frac{d^1}{dx^1} [P(x)] \\ &\vdots \\ \frac{d^n}{dx^n} [Q(x) - Q(x-1)] &= \frac{d^n}{dx^n} [P(x)]\end{aligned}$$

onde a i -ésima equação é

$$\begin{aligned}\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} [Q(x) - Q(x-1)] &= \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} [P(x)] \implies \\ \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} [(c_1x + \cdots + c_{n+1}x^{n+1}) - (c_1(x-1) + \cdots + c_{n+1}(x-1)^{n+1})] &= \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} [x^n] \implies \\ \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} [c_1(x - (x-1)) + \cdots + c_{n+1}(x^{n+1} - (x-1)^{n+1})] &= \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} [x^n] \implies \\ c_1 \cdot \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} [x - (x-1)] + \cdots + c_{n+1} \cdot \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} [x^{n+1} - (x-1)^{n+1}] &= \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} [x^n] \implies\end{aligned}$$

Percebemos então que estas são equações lineares com incógnitas c_1, \dots, c_{n+1} , onde o coeficiente de c_j na equação i é $\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} [x^j - (x-1)^j]$, ou $\left(\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} [x^j] - \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} [(x-1)^j] \right)$, e o valor independente é $\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} [x^n]$. Se montar-mos a matrix relacionada a este sistema então obtemos uma matrix A tal que, seja $a_{i,j}$ o seu elemento na linha i e coluna j , se $j < n+2$, então $a_{i,j} = c_j$, e se $j = n+2$, $a_{i,j}$ é igual ao valor independente da equação i .

Usamos agora o Lema 1 para simplificar essa matrix.

1.3.1 Caso 1: $j = n + 2$

Como o maior valor possível de i é $n + 1$, então

$$\begin{aligned} j &= n + 2 && \implies \\ j &> i && \implies \\ j &> i - 1 && \implies \\ i - 1 &< j \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} [x^n] \\ &= (n)_{i-1} \end{aligned}$$

1.3.2 Caso 2: $i - 1 < j < n + 2$

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} [x^j] - \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} [(x-1)^j] \\ &= (j)_{i-1} x^{j-(i-1)} - (j)_{i-1} (x-1)^{j-(i-1)} \\ &= (j)_{i-1} (x^{j-(i-1)} - (x-1)^{j-(i-1)}) \end{aligned}$$

Agora que eliminamos as derivações, podemos substituir x por 1 sem perder generalidade:

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= (j)_{i-1} (x^{j-(i-1)} - (x-1)^{j-(i-1)}) \\ &= (j)_{i-1} (1^{j-(i-1)} - (1-1)^{j-(i-1)}) \\ &= (j)_{i-1} (1^{j-(i-1)} - 0^{j-(i-1)}) \\ &= (j)_{i-1} (1 - 0) \\ &= (j)_{i-1} \end{aligned}$$

1.3.3 Caso 3: $i - 1 = j$

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} [x^j] - \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} [(x-1)^j] \\ &= (j)_{i-1} - (j)_{i-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

1.3.4 Caso 4: $i - 1 > j$

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} [x^j] - \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} [(x-1)^j] \\ &= 0 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo temos na verdade três casos, e como $i - 1 \geq j \implies i > j$, e $i - 1 < j \implies i \leq j$, então:

$$a_{i,j} = \begin{cases} (n)_{i-1} & \text{se } j = n + 2 \\ (j)_{i-1} & \text{se } i \leq j < n + 2 \\ 0 & \text{se } i > j \end{cases}$$

Esta é exatamente a matriz base da hipótese, e como ela é a matriz do sistema de equações lineares cujas incógnitas são os coeficientes de Q , então de fato a ultima coluna da forma escalonada reduzida de A nos dará os valores destes coeficientes da maneira proposta pelo teorema.

2 Algoritmo

2.1 Hipótese

O seguinte algoritmo nos dará a matriz base do método:

```
1  Função Crie-Matriz(n: Inteiro) -> Matriz de Inteiros
2  A := Nova Matriz (n + 1) x (n + 2) de Inteiros
3  Preencha A com 0s
4  Preencha a primeira linha de A com 1s
5
6  Para i de 2 até n + 1
7    Para j de i até n + 1
8      A[i, j] := A[i-1, j] * (j - i + 2)
9    Fim
10   A[i, n+2] := A[i, n]
11 Fim
12 A[n+1, n+2] := A[n, n+2]
13 Fim
```

2.2 Demonstração

Na primeira linha da matriz, a coluna será sempre maior ou igual à linha, logo $a_{1,j} = (j)_{1-1} = (j)_0$ para $1 \leq j \leq n+1$, e $a_{1,j} = (n)_{1-1} = (n)_0$ para $j = n+2$. Como para todo k , $(k)_0 = \frac{k!}{(k-0)!} = \frac{k!}{k!} = 1$, então todos os elementos na primeira linha são 1, e logo a primeira linha de A está correta logo após a linha 3.

Agora para todo i nas linhas de 6 até 11, notamos que elas apenas modificam a linha i de A , e como a primeira linha está correta, podemos utilizar “a linha anterior está correta” como nossa hipótese que será provada se demonstrarmos que a i -ésima linha também está correta.

Nas linhas 7 até 10 apenas as colunas de i até $n+2$ são modificadas, então para $j < i$, $a_{i,j} = 0$, o que é correto.

Se $i \leq j < n+2$, $a_{i,j} = a_{i-1,j} \cdot (j - i + 2)$. Como nós sabemos que todos os elementos na linha anterior estão corretos, e como $i \leq j \implies i - 1 < j$, $a_{i-1,j} = (j)_{i-2}$ e

$$a_{i,j} = (j)_{i-2} \cdot (j - i + 2)$$

$$a_{i,j} = \frac{j!}{(j - (i - 2))!} \cdot (j - i + 2)$$

$$a_{i,j} = \frac{j! \cdot (j - i + 2)}{(j - i + 2)!}$$

$$a_{i,j} = \frac{j! \cdot (j - i + 2)}{(j - i + 1)! \cdot (j - i + 2)}$$

$$a_{i,j} = \frac{j!}{(j - i + 1)!}$$

$$a_{i,j} = \frac{j!}{(j - (i - 1))!}$$

$$a_{i,j} = (j)_{i-1}$$

O que é correto. A linha 10 do programa será correta se $a_{i,n+2} = a_{i,n}$, e como $a_{i,n} = (n)_{i-1}$ para todo $i < n + 1$, e $a_{i,n+2} = (n)_{n-1}$ para todo $i \leq n + 1$, então isto é verdade para todas exceto a ultima linha. Como nenhuma outra linha depende da ultima linha estar correta, não há problema em deixa-la incorreta se a corrigirmos mais tarde, o que será feito na linha 12 do programa. A linha 12 do programa é correta pois

$$\begin{aligned} a_{n+1,n+2} &= (n)_n \\ &= \frac{n!}{(n - n)!} \\ &= \frac{n!}{0!} \\ &= \frac{n!}{1!} \\ &= \frac{n!}{(n - (n - 1))!} \\ &= (n)_{n-1} \\ &= a_{n,n+2} \end{aligned}$$

Assim a ultima linha da matriz estará correta se a linha anterior o for, e esta estará correta se a linha anterior a ela o for, e assim por diante até a linha 1, que já provamos estar correta. Logo, a matriz resultante A está completamente correta.