Filtrado

De señales aleatorias

PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

Marcos Cervetto – Ing. Electrónico UBA | Edgardo Marchi – Ing. Electrónico UBA

Filtrado

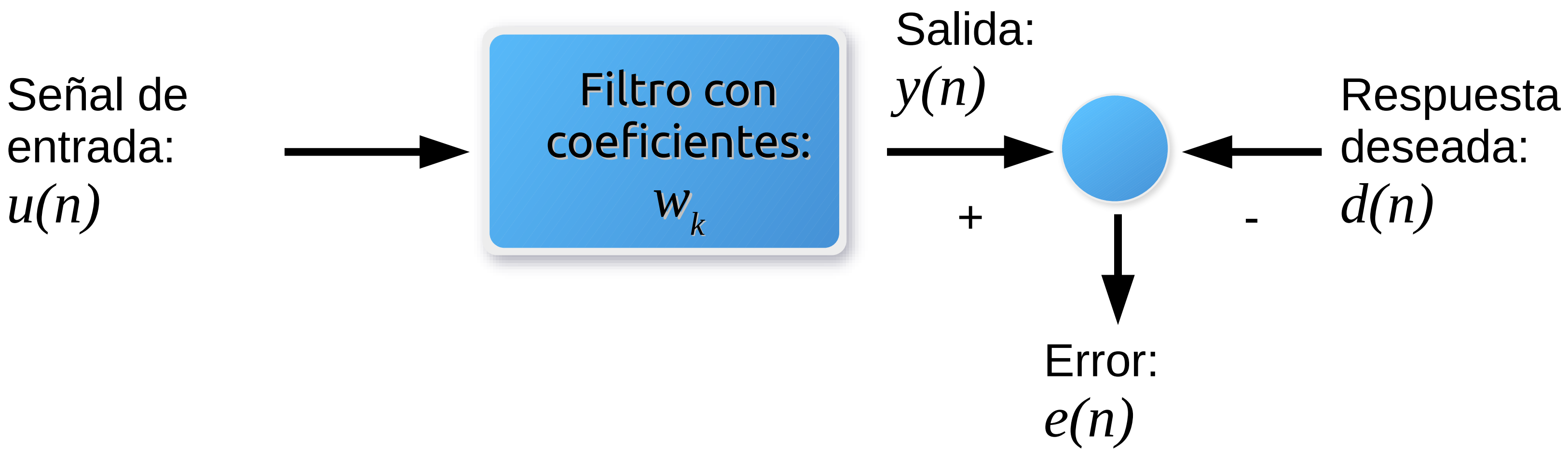
Filtros Lineales Óptimos

- Planteo del problema
- Principio de ortogonalidad
- Error cuadrático medio

Filtrado

Planteo del problema

- ¿Como obtener un filtro que sea ideal para la señal que queremos?



Filtrado

Restricciones:

El filtro es lineal	Lo cual simplifica el tratamiento matemático del problema
El filtro es en tiempo discreto	Lo cual hace posible que el filtro sea Implementado usando hardware digital o software
El filtro es IIR	Como veremos, sólo en la teoría. En la práctica se suele usar FIR por razones de estabilidad (cuando el filtro se vuelve adaptativo, mayores los problemas de inestabilidad en IIR)
Criterio de optimización	Obviamente, va a ser óptimo de acuerdo al criterio elegido

Filtrado

Planteo del problema

- ¿Como obtener un filtro que sea ideal para la señal que queremos?
  - Obteniendo los coeficientes que minimicen cierta función de costo, por ejemplo:
    - Error cuadrático medio del error
    - Esperanza del valor absoluto del error
    - Esperanza cúbica, o mayor, del valor absoluto del error.
  - ¿Qué función de costo usar?
    - El error cuadrático medio, por ser cuadrático, tiene un único mínimo por lo que es fácil de obtener. Además lleva a una matemática manejable.

Filtrado

Planteo del problema

Diseñar un filtro lineal de tiempo discreto, cuya salida $y(n)$ produce una estimación de una respuesta deseada $d(n)$ a partir de muestras de una señal de entrada $u(0), u(1), \ldots, u(n), \ldots$ de forma que el valor cuadrático medio del error, definido como la diferencia entre $y(n)$ y $d(n)$, es minimizado.

Filtrado

Principio de ortogonalidad

- Para un filtro cualquiera:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k^* u(n-k)$$

- Y para el esquema planteado:

Error del filtro

$$e(n) = d(n) - y(n)$$

Señal deseada

Salida del filtro

Filtrado

Principio de ortogonalidad

- Entonces planteamos la función de costo:

$$J = E[|e(n)|^2] = E[e(n)e^*(n)]$$

- Para minimizarla hay que buscar: $\nabla_k J = 0$
  - En función de los coeficientes del filtro $w_k = a_k + jb_k$
  - Entonces queda:

$$\nabla_k = \frac{\partial}{\partial a_k} + j\frac{\partial}{\partial b_k} \implies \nabla_k J = \frac{\partial J}{\partial a_k} + j\frac{\partial J}{\partial b_k}$$

Filtrado

Principio de ortogonalidad

- Operando un poco...

$$\nabla_k J = E[\frac{\partial e(n)}{\partial a_k} e^*(n) + j\frac{\partial e(n)}{\partial b_k} e^*(n) + \frac{\partial e^*(n)}{\partial a_k} e(n) + j\frac{\partial e^*(n)}{\partial b_k} e(n)]$$

- Y analizando la fórmula del error y la salida del filtro:

$$\frac{\partial e(n)}{\partial a_k} = -u(n-k) \qquad \frac{\partial e^*(n)}{\partial a_k} = -u^*(n-k)$$

$$\frac{\partial e(n)}{\partial bk} = ju(n-k) \qquad \frac{\partial e^*(n)}{\partial b_k} = -ju^*(n-k)$$

Filtrado

Principio de ortogonalidad

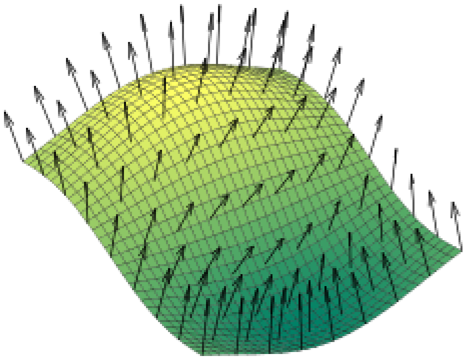
- Entonces:

$$\nabla_k J = -2E[u(n-k)\, e^*(n)]$$

- Y el mínimo error se da cuando: $\nabla_k J = 0$
  - Entonces:

$$E[u(n-k)\, e_0^*(n)] = 0$$

$$k = 0, 1, 2 \dots$$



Filtrado

Principio de ortogonalidad

$$E[u(n-k)\, e_0^*(n)] = 0$$
$$k = 0, 1, 2 \ldots$$

La condición necesaria y suficiente para que la función costo J alcance su mínimo valor es que el valor correspondiente al error de estimación $e_0(n)$ sea ortogonal a cada muestra de entrada que entre en la estimación de la respuesta deseada en el instante n

Filtrado

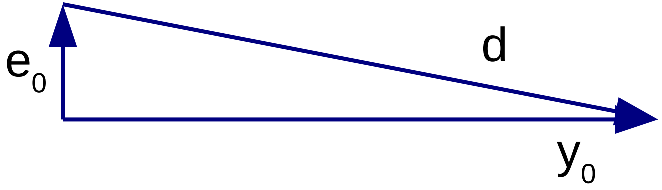
Principio de ortogonalidad

- Relación entre el error y la salida:

$$E[y(n)\, e^*(n)] = \ldots = \sum_{[k=0]}^{\infty} w_k^* E[u(n-k)e^*(n)]$$

- Entonces para el filtro óptimo:

$$E[y_0(n)\, e_0^*(n)] = 0$$



$$\widehat{d}(n/U_n) = y_0(n)$$

¡Es la proyección de la señal deseada sobre el
subespacio generado por los datos de entrada!

Filtrado

Principio de ortogonalidad: corolario

$$E[y_o(n)e_o^*(n)] = 0$$

Cuando el filtro opera en su condición óptima, la estimación de la respuesta deseada definida por la salida del filtro $y_o(n)$ y el error correspondiente de estimación $e_o(n)$ son ortogonales entre sí.

Filtrado

Principio de ortogonalidad

- Cotas para el error en el filtro óptimo:

Tenemos:

$$e_0(n) = d(n) - y_0(n) = d(n) - \widehat{d}(n/U_n)$$

En particular:

$$d(n) = \widehat{d}(n/U_n) + e_0(n)$$

definiendo:

$$J_{min} = E[|e_o(n)|^2]$$

Y por ser ortogonales*:

$$\sigma_d^2 = \sigma_{\hat{d}}^2 + J_{min}$$

*tarea para el hogar

Filtrado

Principio de ortogonalidad

- Cotas para el error en el filtro óptimo (cont.):
  - Reescribiendo todo:

Error cuadrático medio normalizado

$$\epsilon = \frac{J_{min}}{\sigma_d^2} \Rightarrow \epsilon = 1 - \frac{\sigma_{\hat{d}}^2}{\sigma_d^2}$$

  - En particular:

$$\Rightarrow 0 \leqslant \epsilon \leqslant 1$$

¡Perfecta concordancia entre la señal deseada y la salida del filtro!

¡Ninguna concordancia entre la señal deseada y la salida del filtro!

Filtrado

Ecuaciones de Wiener-Hopf

- Reescribiendo las ecuaciones en base a lo ya visto:

Coeficientes del filtro óptimo

$$E\left[u(n-k)\underbrace{\left(d^*(n)-\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} w_{o,i}u^*(n-i)}_{y_o^*(n)}\right)}_{e_0^*(n)}\right]=0 \qquad k=0,1,2\ldots$$

Filtrado

Ecuaciones de Wiener-Hopf

- Entonces, operando con la esperanza:

$$k = 0, 1, 2 \ldots$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} w_{oi} \underbrace{E[u(n-k)u^*(n-i)]}_{\text{Autocorrelación de la entrada}} = \underbrace{E[u(n-k)d^*(n)]}_{\text{Correlación cruzada entre entrada y salida deseada.}}$$

$$r(i-k) \qquad\qquad p(-k)$$

Filtrado

Ecuaciones de Wiener-Hopf

$$\sum_{i=0}^{\infty} w_{oi} r(i-k) = p(-k) \qquad k = 0, 1, 2 \ldots$$

Filtrado

Filtro de Wiener

- Llevemos todo ahora a un **filtro FIR transversal:**

$$\sum_{i=0}^{M-1} w_{oi}\, r(i-k) = p(-k)$$

- Pero si llamamos:

$$\mathbf{p} = [p(0), p(-1), \ldots, p(1-M)]^T$$

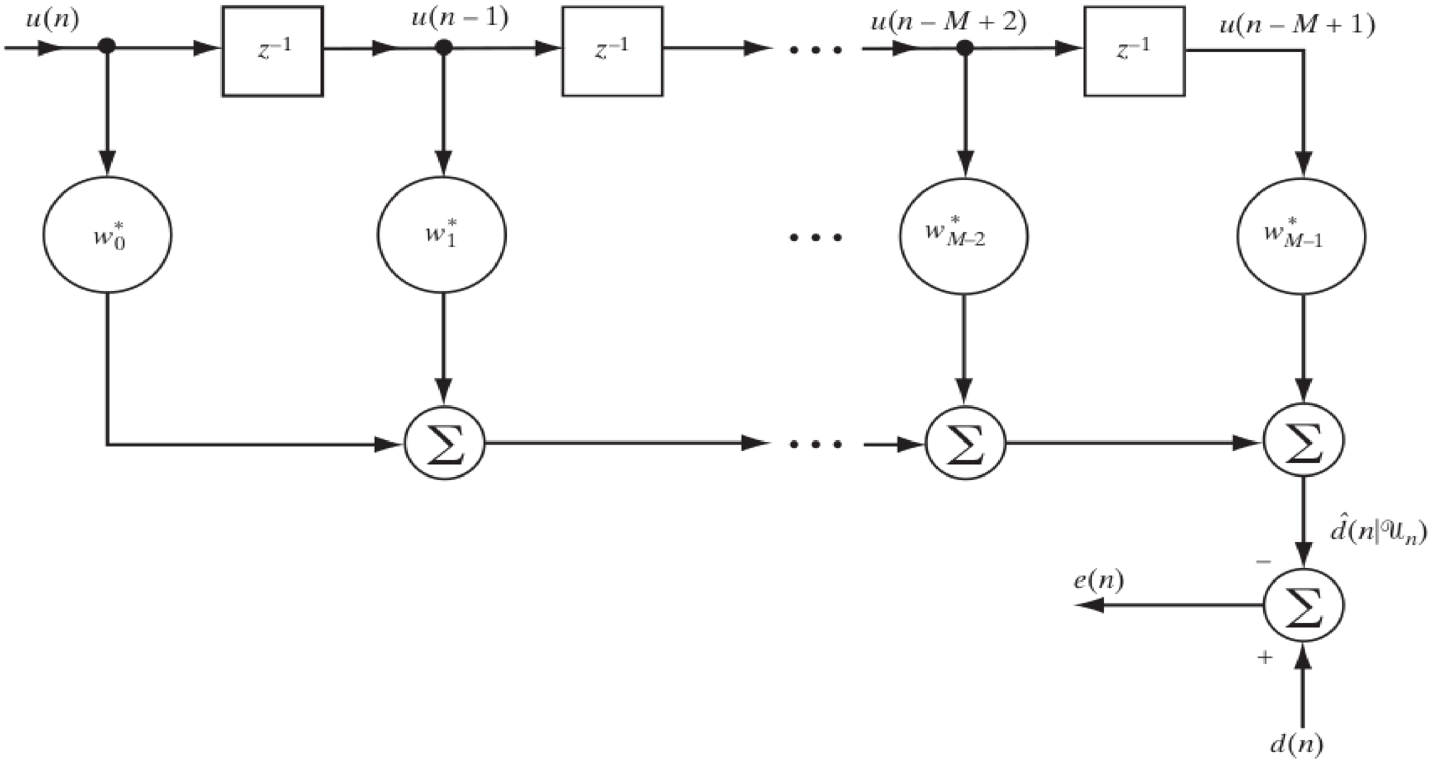
$$\mathbf{w_o} = [w_{o0}, w_{o1}, \ldots, w_{oM-1}]^T$$

- Nos queda:

$$\mathbf{R}\mathbf{w}_o = \mathbf{p} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\mathbf{w}_o = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}}$$

Filtrado

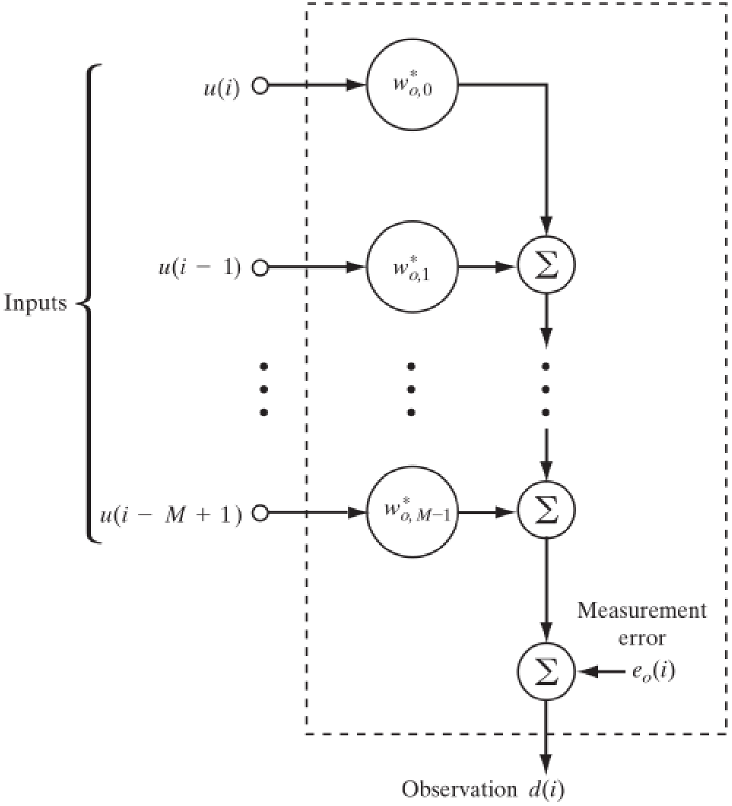
Filtro de Wiener



Método de cuadrados mínimos

Planteo

$$d(i) = \sum_{k=0}^{M-1} w_{ok}^{*} u(i-k) + e_o(i)$$



Método de cuadrados mínimos

Planteo

$$E[e_o(i)] = 0 \qquad \forall i$$

Suposición: Ruido AWN

$$E[e_o(i)e_o^*(k)] = \begin{cases} \sigma^2 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

$$E[d(i)] = \sum_{k=0}^{M-1} w_{ok}^* u(i-k)$$

Método de cuadrados mínimos

Planteo

$$e(i) = d(i) - \sum_{k=0}^{M-1} w_k^* u(i-k)$$

Función de costo

$$\varepsilon(w_0, \ldots, w_{M-1}) = \sum_{i=M}^{N} |e(i)|^2$$

Operando ....

$$\boxed{\sum_{i=M}^{N} u(i-k) e_{min}^*(i) = 0 \qquad k = 0, 1 \ldots, M-1}$$

Método de cuadrados mínimos

Ecuaciones normales

$$e_{min}(i) = d(i) - \sum_{k=0}^{M-1} w_k^* u(i-k)$$

$$k = 0, 1 \ldots, M-1$$

$$\sum_{t=0}^{M-1} \hat{w}_t \underbrace{\sum_{i=M}^{N} u(i-k)u^*(i-t)}_{\phi(t,k)} = \underbrace{\sum_{i=M}^{N} u(i-k)d^*(i)}_{z(-k)}$$

$$k = 0, 1 \ldots, M-1$$

Método de cuadrados mínimos

Ecuaciones normales

$$\sum_{t=0}^{M-1} \hat{w}_t \phi(t,k) = z(-k) \qquad k = 0, 1 \ldots, M-1$$

Autocorrelación temporal de las entradas a los taps

Correlación cruzada temporal de las entradas a los taps con la función deseada

Método de cuadrados mínimos

Formulación matricial

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi(0,0) & \cdots & \phi(M-1,0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(0,M-1) & \cdots & \phi(M-1,M-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z} = [z(0), z(-1), \ldots, z(-M+1)]^T$$

$$\hat{\mathbf{w}} = [\hat{w}_0, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{M-1}]^T$$

$$\mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{z} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{z}}$$

Método de cuadrados mínimos

Por conveniencia, se define

$$\mathbf{A}^H = [\mathbf{u}(M), \quad \mathbf{u}(M+1), \cdots \mathbf{u}(N)]$$

$$\mathbf{A}^H = \begin{bmatrix} u(M) & \cdots & u(N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(1) & \cdots & u(N-M+1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}^H = [d(M), \quad d(M+1), \cdots d(N)]$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{A}^H \mathbf{A}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}^H \mathbf{d}$$

Método de cuadrados mínimos

Por conveniencia, se define

$$\mathbf{A}^H\mathbf{A}\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{A}^H\mathbf{d}$$

$$\hat{\mathbf{w}} = \left(\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{d}$$

(*)

$$\varepsilon_{min} = \mathbf{d}^H\mathbf{d} - \mathbf{d}^H\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{d}$$

*tarea para el hogar

Método de cuadrados mínimos

Ejercicio

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} u(2) & u(1) \\ u(3) & u(2) \\ u(4) & u(3) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d(2) \\ d(3) \\ d(4) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1/34 \end{bmatrix}$$

Calcular el filtro por mínimos cuadrados y el error cometido

Muchas Gracias

¿Preguntas?