



DEPARTAMENTO
DE INDUSTRIAS
UNIVERSIDAD TÉCNICA
FEDERICO SANTA MARÍA



ILN221 - Gestión Energética I

Anexo: Modelo Matemático

Primer Semestre 2025

Equipo Académico

Profesores de Cátedra : Rodrigo Demarco, PhD.
Javier Gallardo, MSc.

Encargados de Laboratorio : Nicolás Mancilla, MSc.
Gonzalo Olivares, MSc.

Equipo de Ayudantes : Catalina Basualto
Gabriel Bustamante
Martín Cataldo
Matías Cegarra
Francisco Farías
Jorge González
Fiorella Guasch
Catalina Miño
Daniela Olmos
Sebastián Valenzuela

Índice

1. Balances de Energía y Masa	2
1.1. Balance de Energía del Sistema de Bombeo	2
1.2. Balance de Energía Succión	3
1.3. Balance de Masa del Proceso de Desalinización	3
1.4. Balance de Energía del Vertimiento	4
1.5. Balance de Energía del Llenado de Estanque	5
1.6. Balance de Energía del Proceso de Desalinización	6
2. Fracción Osmótica	8
3. Método de Euler	9
4. Modelamiento Numérico	10

1. Balances de Energía y Masa

1.1. Balance de Energía del Sistema de Bombeo

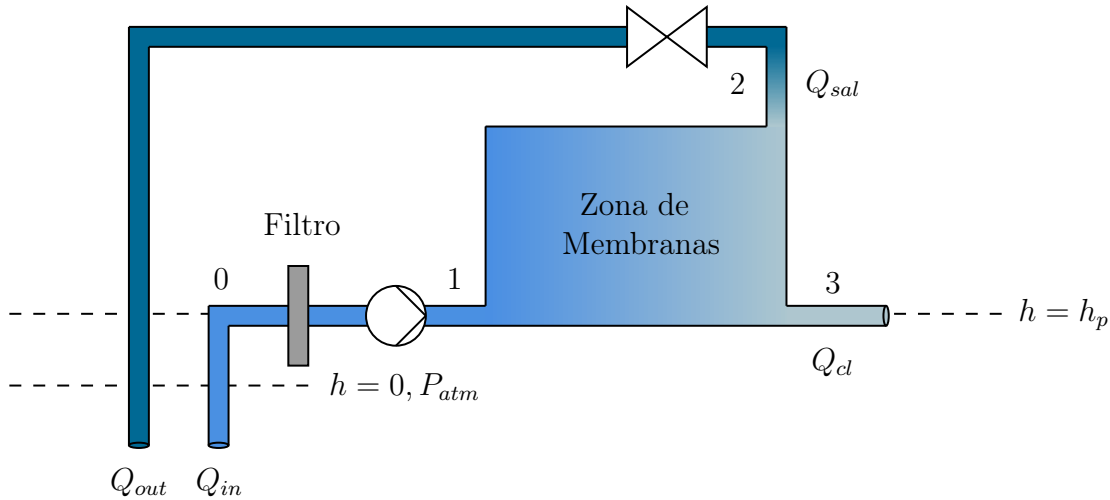


Figura 1: Esquema representativo del proceso de desalinización.

Para describir el trayecto que recorre el fluido desde su captación en el mar hasta el punto (1), se aplica la ecuación de Bernoulli considerando el paso por un filtro y una bomba. El análisis se realiza entre la columna de agua del nivel del mar, y el punto (1) en h_p . El caudal de entrada se denota como Q_{in} .

Este balance permite cuantificar el requerimiento energético del sistema de bombeo, tomando en cuenta las pérdidas por fricción en el filtro, así como establecer las condiciones de presión a la entrada de la siguiente etapa del proceso. El balance de energía general queda expresado como:

$$\frac{P_{atm}}{\rho_{in}g} + \frac{V_{in}^2}{2g} + h_{in} + H_{bomba} = \frac{P_1}{\rho_1g} + \frac{V_1^2}{2g} + h_1 + H_{fricción} + H_{turbina} \quad (1)$$

Dado que no se consideran equipos generadores de trabajo con el fluido (como turbinas) en esta etapa, se asume $H_{turbina} = 0$. Además, bajo el principio de continuidad, se considera que la velocidad del fluido permanece constante a lo largo del tramo analizado, y como el fluido no cambia de estado, su densidad se mantiene constante. Con estas simplificaciones, el balance se reduce a:

$$\frac{P_{atm}}{\rho_{in}g} + H_{bomba} = \frac{P_1}{\rho_{in}g} + h_p + H_{fricción} \quad (2)$$

El filtro y la tubería introducen pérdidas de energía al sistema, lo que se modela a través de K_{filtro} y un coeficiente de fricción f :

$$H_{fricción} = \frac{V_1^2}{2g} \left(K_{filtro} + f_1 \frac{L_{in}}{d_{in}} \right) \quad (3)$$

Como la velocidad también se puede expresar en función del caudal y el área transversal de la tubería ($V = Q/A$), se reemplaza en la ecuación de Bernoulli y se despeja la altura manométrica requerida por la bomba:

$$H_{\text{bomba}} = \frac{P_1 - P_{\text{atm}}}{\rho_{\text{in}} g} + h_p + \frac{1}{2g} \cdot \left(\frac{Q_{\text{in}}}{A_{\text{in}}} \right)^2 \left(K_{\text{filtro}} + f_1 \frac{L_{\text{in}}}{d_{\text{in}}} \right) \quad (4)$$

Finalmente, se puede expresar el requerimiento energético de la bomba como una función de las variables operativas clave: la presión en el punto (1) y el caudal de entrada:

$$H_{\text{bomba}} = f(P_1, f_1, Q_{\text{in}}) \quad (5)$$

Hint: Para encontrar el valor de los coeficientes de fricción de Darcy f_i aplique la ecuación de Blasius si el flujo es turbulento $Re > 4.000$.

1.2. Balance de Energía Succión

Para analizar la presión con la que el agua succionada llega a la bomba, se debe realizar un balance de energía entre un punto a nivel del mar y P_0 tal que:

$$P_{\text{atm}} + 0 + 0 = P_0 + \rho_{\text{in}} g h_p + \frac{1}{2} f_0 \rho_{\text{in}} \frac{L_{\text{in}}}{d} \left(\frac{Q_{\text{in}}}{A_0} \right)^2 \quad (6)$$

$$P_0 = P_{\text{atm}} - \rho_{\text{in}} g h_p - \frac{1}{2} f_0 \rho_{\text{in}} \frac{L_{\text{in}}}{d_0} \left(\frac{Q_{\text{in}}}{A_0} \right)^2 \quad (7)$$

Cabe recalcar que este valor no puede ser negativo ni menor a la presión de vapor.

1.3. Balance de Masa del Proceso de Desalinización

Para analizar el comportamiento del fluido al interior de la membrana, se plantea un balance de masa entre los puntos (1), (2) y (3).

$$\dot{m}_{\text{in}} = \dot{m}_2 + \dot{m}_3 \quad (8)$$

A partir del balance de masa en términos de flujo másico, y considerando que $\dot{m} = \rho Q$, se obtiene una relación entre los caudales volumétricos y las densidades de cada corriente:

$$\rho_{\text{in}} Q_{\text{in}} = \rho_{\text{sal}} Q_{\text{sal}} + \rho_{\text{cl}} Q_{\text{cl}} \quad (9)$$

Esta relación permite despejar la densidad de la salmuera, ρ_{sal} , en función de los caudales y densidades conocidas del sistema. Esta estimación resulta útil para aplicar posteriormente el balance de energía en la planta.

$$\rho_{\text{sal}} = \frac{\rho_{\text{in}} Q_{\text{in}} - \rho_{\text{cl}} Q_{\text{cl}}}{Q_{\text{in}} - Q_{\text{cl}}} = \frac{\dot{m}_2}{Q_2} \quad (10)$$

1.4. Balance de Energía del Vertimiento

El análisis de presión en el vertimiento de salmuera se realiza mediante un balance de energía entre el punto (2) y el punto de salida al océano. Este enfoque incluye términos relacionados con la presión, la velocidad, la altura y las contribuciones de dispositivos como bombas y turbinas, además de las pérdidas por fricción en la tubería. El balance de energía general se expresa como:

$$\frac{P_2}{\rho_{\text{sal}}g} + \frac{V_2^2}{2g} + h_2 + H_{\text{bomba}} = \frac{P_{\text{out}}}{\rho_{\text{sal}}g} + \frac{V_{\text{out}}^2}{2g} + h_{\text{out}} + H_{\text{fricción}} + H_{\text{turbina}} \quad (11)$$

Considerando los supuestos planteados (densidad constante $\rho_{\text{sal}} = \rho_2$, velocidad de salida despreciable en comparación con la velocidad en el punto (2), y ausencia de bombas o turbinas), el balance se simplifica a:

$$\frac{P_2}{\rho_{\text{sal}}g} + \frac{1}{2g}V_2^2 + h_p = \frac{P_{\text{atm}}}{\rho_{\text{sal}}g} + H_{\text{fricción}} \quad (12)$$

Adicionalmente, el flujo está regulado por una válvula instalada en la tubería, lo que introduce una pérdida de carga adicional que permite estabilizar la presión entre el punto (2) y el medio exterior. Bajo el supuesto de que el flujo se descarga directamente al océano a presión atmosférica y velocidad despreciable, el modelo se ajusta de la siguiente manera:

$$\frac{P_2}{\rho_{\text{sal}}g} + \frac{1}{2g} \left(\frac{Q_{\text{sal}}}{A_0} \right)^2 - h_p = \frac{P_{\text{atm}}}{\rho_{\text{sal}}g} + \frac{1}{2g} K_{v, \text{sal}} \left(\frac{Q_{\text{sal}}}{A_0} \right)^2 + \frac{1}{2g} f_2 \frac{L_{\text{out}}}{d_0} \left(\frac{Q_{\text{sal}}}{A_0} \right)^2 \quad (13)$$

Donde A_0 es el área de la tubería de rechazo. Esta última expresión permite evaluar el impacto de la válvula en la presión efectiva en el punto (2), considerando las variaciones de caudal y las restricciones geométricas del sistema.

Despejando para P_2 se obtiene:

$$P_2 = P_{\text{atm}} - \rho_{\text{sal}}gh_p - \frac{1}{2}\rho_{\text{sal}} \left(\frac{Q_{\text{sal}}}{A_0} \right)^2 + \frac{1}{2}\rho_{\text{sal}} K_{v, \text{sal}} \left(\frac{Q_{\text{sal}}}{A_0} \right)^2 + \frac{1}{2}\rho_{\text{sal}} f_2 \frac{L_{\text{out}}}{d_0} \left(\frac{Q_{\text{sal}}}{A_0} \right)^2 \quad (14)$$

1.5. Balance de Energía del Llenado de Estanque

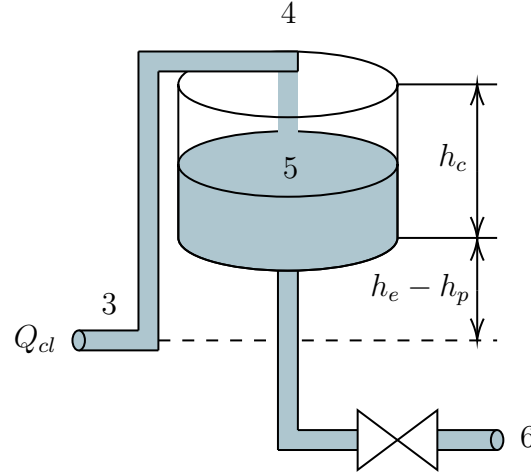


Figura 2: Esquema representativo del proceso de almacenamiento.

Tal como se observa en la Figura 2, el llenado del estanque se realiza a través del punto (4). Para determinar la presión en ese punto, se plantea un balance de energía entre los puntos (3) y (4):

$$\frac{P_3}{\rho_{cl}g} + \frac{V_3^2}{2g} + h_3 + H_{bomba} = \frac{P_4}{\rho_{cl}g} + \frac{V_4^2}{2g} + h_4 + H_{fricción} + H_{turbina} \quad (15)$$

En este tramo del sistema no se consideran bombas ni turbinas, por lo que $H_{bomba} = H_{turbina} = 0$. Además, la altura del punto (3) corresponde a la altura de la planta, $h_3 = h_p$. Por otro lado, se asume que las velocidades en ambos extremos de la tubería son iguales ($V_3 = V_4$), y por tanto, los términos cinéticos se anulan entre sí. Incorporando estas simplificaciones, la ecuación se reduce a:

$$\frac{P_3}{\rho_{cl}g} + \frac{V_3^2}{2g} + h_p = \frac{P_{atm}}{\rho_{cl}g} + (h_c + h_e) + H_{fricción} \quad (16)$$

Dado que el punto (4) corresponde al nivel de entrada del estanque, su altura se puede descomponer como la suma entre la altura del cilindro h_c y la altura de elevación del estanque h_e , es decir, $h_4 = h_c + h_e$. Además, la pérdida de carga por fricción en la tubería de largo L_{cl} se estima mediante la ecuación de Darcy-Weisbach y también depende del radio del estanque R :

$$H_{fricción} = \frac{1}{2g} f_3 \frac{L_{cl}}{d_0} \left(\frac{Q_{cl}}{A_0} \right)^2 \quad (17)$$

Reemplazando estos elementos en el balance de energía, se obtiene:

$$\frac{P_3}{\rho_{cl}g} + h_p = \frac{P_{atm}}{\rho_{cl}g} + (h_c + h_e) + \frac{1}{2g} f_3 \frac{L_{cl}}{d_0} \left(\frac{Q_{cl}}{A_0} \right)^2 \quad (18)$$

Finalmente, al despejar el término de presión P_3 , se obtiene:

$$P_3 = P_{\text{atm}} + \rho_{\text{cl}} g (h_c + h_e - h_p) + \frac{1}{2} \rho_{\text{cl}} f_3 \frac{L_{\text{cl}}}{d_0} \left(\frac{Q_{\text{cl}}}{A_0} \right)^2 \quad (19)$$

De esta forma, se establece que P_3 es una función dependiente de las alturas relativas, las características geométricas del sistema y el caudal de agua recuperada:

$$P_3 = f(h_c, h_e, h_p, Q_{\text{cl}}) \quad (20)$$

1.6. Balance de Energía del Proceso de Desalinización

En este modelo se busca calcular la presión en el punto de entrada a la planta de desalinización en (1), a partir de un balance de energía entre (1), (2) y (3). Además, se incorpora el efecto de la fracción osmótica f_o , que representa la proporción del flujo de entrada que se convierte en agua limpia.

Considérese una forma general del balance para la conservación de energía proveniente de la ecuación de Bernoulli tal que:

$$\left(\frac{P_i}{\rho_i g} + \frac{1}{2g} V_i^2 + h_i \right) Q_i = \text{cte.} \quad (21)$$

Para un volumen de control definido por la Zona de Membranas de la Figura 1, se cumple:

$$\left(\frac{P_1}{\rho_1 g} + \frac{1}{2g} V_1^2 + h_1 \right) Q_1 = \left(\frac{P_2}{\rho_2 g} + \frac{1}{2g} V_2^2 + h_2 \right) Q_2 + \left(\frac{P_3}{\rho_3 g} + \frac{1}{2g} V_3^2 + h_3 \right) Q_3 + H_{\text{fricción}} \quad (22)$$

La expresión anterior representa la conservación de energía total (presión, cinética y potencial) ponderada por los caudales que pasan por cada punto, expresada en términos de altura. Considere que el flujo de entrada total $Q_1 = Q_{\text{in}}$ se divide en dos salidas diferentes:

a) Caudal de agua de recuperación: $Q_{\text{cl}} = f_o \cdot Q_{\text{in}}$

b) Caudal de agua de rechazo: $Q_{\text{sal}} = (1 - f_o) \cdot Q_{\text{in}}$

Se puede reemplazar en la Ecuación 22 por los datos del problema:

$$\left(\frac{P_1}{\rho_{\text{in}} g} + \frac{1}{2g} V_1^2 + h_p \right) Q_{\text{in}} = \left(\frac{P_2}{\rho_{\text{in}} g} + \frac{1}{2g} V_2^2 + h_p \right) Q_{\text{sal}} + \left(\frac{P_3}{\rho_{\text{in}} g} + \frac{1}{2g} V_3^2 + h_p \right) Q_{\text{cl}} + H_{\text{fricción}} Q_{\text{in}} \quad (23)$$

En este contexto, existen pérdidas de carga debidas al proceso mismo de desalinización, pues las membranas generan esfuerzos sobre el flujo para separar el agua dulce de la sal. Es así, que por el paso a través de la membrana se producen las siguientes pérdidas de carga:

$$H_{\text{fricción}} Q_{\text{in}} = N \left(\frac{1}{2g} K_{\text{os, sal}} \left(\frac{Q_{\text{sal}}}{N A_{\text{os}}} \right)^2 \right) Q_{\text{sal}} + N \left(\frac{1}{2g} K_{\text{os, cl}} \left(\frac{Q_{\text{cl}}}{N A_{\text{os}}} \right)^2 \right) Q_{\text{cl}} \quad (24)$$

Donde A_{os} es el área osmótica dentro de la membrana, por donde fluye el agua tratada. Reemplazando en la ecuación, se obtiene:

$$\left(\frac{P_1}{\rho_{in}g} + \frac{1}{2g}V_1^2 + h_p\right) Q_{in} = \left(\frac{P_2}{\rho_{in}g} + \frac{1}{2g}V_2^2 + h_p\right) Q_{sal} + \left(\frac{P_3}{\rho_{in}g} + \frac{1}{2g}V_3^2 + h_p\right) Q_{cl} \\ + N \left(\frac{1}{2g}K_{os, sal} \left(\frac{Q_{sal}}{NA_{os}}\right)^2\right) Q_{sal} + N \left(\frac{1}{2g}K_{os, cl} \left(\frac{Q_{cl}}{NA_{os}}\right)^2\right) Q_{cl} \quad (25)$$

Despejando para P_1 se obtiene:

$$P_1 = \left(P_2 + \frac{1}{2}\rho_{in}V_2^2 + \rho_{in}gh_p\right) \frac{Q_{sal}}{Q_{in}} + \left(P_3 + \frac{1}{2}\rho_{in}V_3^2 + \rho_{in}gh_p\right) \frac{Q_{cl}}{Q_{in}} \\ + N \left(\frac{1}{2}\rho_{in}K_{os, sal} \left(\frac{Q_{sal}}{NA_{os}}\right)^2\right) \frac{Q_{sal}}{Q_{in}} + N \left(\frac{1}{2}\rho_{in}K_{os, cl} \left(\frac{Q_{cl}}{NA_{os}}\right)^2\right) \frac{Q_{cl}}{Q_{in}} \\ - \frac{1}{2}\rho_{in}V_1^2 - \rho_{in}gh_p \quad (26)$$

Por su parte, la expresión para la presión en el punto (2) debe considerar las pérdidas de carga asociadas al vertimiento de salmuera y el accesorio de coeficiente $K_{v, sal}$. Además, se pueden reescribir las velocidades en función del caudal según el principio de continuidad $V = Q/A$, por lo tanto:

$$P_2 = P_{atm} - \rho_{sal}gh_p - \frac{1}{2}\rho_{sal} \left(\frac{Q_{sal}}{A_0}\right)^2 + \frac{1}{2}\rho_{sal}K_{v, sal} \left(\frac{Q_{sal}}{A_0}\right)^2 + \frac{1}{2}\rho_{sal}f_2 \frac{L_{out}}{d_0} \left(\frac{Q_{sal}}{A_0}\right)^2 \quad (27)$$

Y la expresión para la presión en el punto (3) depende de la altura a la que se dirija el flujo hacia el estanque. Las pérdidas de carga regulares solo se modelan para la el recorrido vertical de la tubería que une (3) con (4), entonces:

$$P_3 = P_{atm} + \rho_{cl}g(h_c + h_e - h_p) + \frac{1}{2}\rho_{cl}f_3 \frac{L_{cl}}{d_0} \left(\frac{Q_{cl}}{A_0}\right)^2 \quad (28)$$

El objetivo de esta información es encontrar un valor para la presión en el punto (1), P_1 . Esta variable se obtiene despejando del balance de energía total entre los tres puntos, en función de Q_{in} y f_o . Así, P_1 es una función tal que:

$$P_1 = f(Q_{in}, f_o) = f(P_2, P_3, V_2, V_3, h_2, h_3) \quad (29)$$

Esta expresión representa la presión teórica que la bomba necesita alcanzar para mantener el sistema funcionando.

2. Fracción Osmótica

La fracción osmótica f_o representa la eficiencia del proceso de desalinización en función de la diferencia de presión aplicada. Esta depende directamente de la diferencia de presiones entre los puntos (1) y (3), ya que es necesario superar la presión osmótica para que el agua se separe de la solución salina. Se puede considerar que:

1. Cuando la diferencia de presiones es igual a la presión osmótica mínima, el sistema comienza a operar con la eficiencia mínima.
2. Cuando la diferencia de presiones alcanza el valor máximo admisible por la membrana, el sistema alcanza su eficiencia máxima.
3. En otros casos, se asume que la eficiencia es nula.

Asumiendo una relación lineal entre la eficiencia y la diferencia de presión en el intervalo permitido, se obtiene:

$$f_o = \left(\frac{0,4 - 0,01}{P_{max} - P_{osm}} \right) \cdot (\Delta P - P_{osm}) + 0,01 \quad (30)$$

Siempre que ΔP se encuentre entre P_{osm} y P_{max} .

Además, se debe verificar siempre que las presiones no sean negativas, pues implicaría que el sistema no está bombeando agua hacia la zona de membranas.

3. Método de Euler

Para simular el comportamiento dinámico del estanque de almacenamiento, es necesario modelar cómo varía su nivel de agua a lo largo del tiempo. Dado que este nivel depende tanto del caudal que entra desde la planta como del caudal que se distribuye hacia el centro de consumo, se plantea una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dV}{dh} \frac{dh}{dt} = Q_{cl} - Q_{dist} \quad (31)$$

Donde Q_{cl} representa el flujo de agua tratada proveniente del sistema de desalinización, que depende directamente del número de membranas en operación N_{op} . Por otro lado, Q_{dist} es el flujo constante que se entrega al centro de consumo, siempre y cuando el estanque sea capaz de satisfacer la demanda.

El método de Euler es una técnica numérica que permite aproximar la solución de esta ecuación diferencial paso a paso, avanzando en el tiempo mediante pequeños intervalos s . Considere una función:

$$f(h) = \frac{dh}{dt} \quad (32)$$

Con la condición inicial al tiempo $t = 0$, $h(0) = h_0$. Se define t como un arreglo de tamaño n , equiespaciado de ancho s . Luego, la aproximación de Euler es:

$$h_{s+1} = h_s + s \cdot f(h) \quad (33)$$

El proceso de cálculo para el paso s se muestra a continuación:

Tabla 1: Método de Euler.

i	t_i	h_i	h_{i+1}
0	$t_0 + s \cdot 0$	h_0	$h_1 = h_0 + s \cdot f(h_0)$
1	$t_1 + s \cdot 1$	h_1	$h_2 = h_1 + s \cdot f(h_1)$
2	$t_1 + s \cdot 2$	h_2	$h_3 = h_2 + s \cdot f(h_2)$
		\vdots	
$n - 1$	$t_0 + s \cdot (n - 1)$	h_{n-1}	$h_n = h_{n-1} + s \cdot f(h_{n-1})$

Como resultado de este modelo se obtendrá una manera de modelar los cambios en la altura de la columna de agua dentro del estanque $h(t)$ de acuerdo con el flujo proveniente de la planta Q_{cl} y el distribuido a la localidad Q_{dist} .

Si algún grupo lo estima conveniente, puede aplicar métodos de resolución alternativos, justificando adecuadamente su implementación.

4. Modelamiento Numérico

Esta sección tiene como objetivo guiar el desarrollo del código en **Jupyter Notebook** que simula el comportamiento de la planta de tratamiento. El programa debe modelar tanto el ingreso de agua de mar a la planta como el posterior proceso de separación, considerando además el vaciado del estanque de almacenamiento cuando sea necesario.

1. Captación:

El primer paso consiste en determinar el caudal de ingreso Q_{in} y la presión con la que el agua entra al sistema. Para ello, se deben utilizar:

- La ecuación de la curva del sistema hidráulico (4).
- La ecuación característica de la bomba centrífuga (34).

Se debe utilizar la bomba **Grundfos CRN 64-8-1 A-F-A-E-HQQE**, cuya curva característica está dada por:

$$H(Q) = 230,87 - 1,58 \times 10^5 \cdot Q^2 \quad (34)$$

Este análisis permitirá encontrar el punto de operación de la bomba, es decir, el caudal y la presión en el punto de ingreso (1).

2. Proceso de Desalinización:

Para encontrar los valores correctos de Q_{in} y f_o que cumplen con el funcionamiento de la bomba, se emplea un algoritmo iterativo:

- Estimar valores iniciales para f_o y Q_{in} .
- Resolver el caudal Q_{in} para un f_o dado, utilizando un método numérico como **fsolve** para encontrar el valor de Q_{in} que permite que se cumpla:

$$P_1(Q_{in}, f_o) = H_{bomba}(Q_{in}) \cdot \rho_{ing} \quad (35)$$

Es decir, encontrar una presión teórica calculada que sea igual a la entregada por la bomba.

- Ajustar la fracción osmótica f_o realizando iteraciones para actualizar Q_{in} hasta que se cumplan las características deseadas del flujo en la convergencia.

3. Operación del Estanque:

En el caso de que cambie el número de membranas operativas N_{op} , el sistema cambiará su eficiencia. Cuando el caudal producido Q_{cl} sea inferior al caudal de distribución requerido por la localidad Q_{dist} , el sistema deberá suplir esta diferencia extrayendo agua desde el estanque de almacenamiento.

Este proceso debe ser modelado utilizando el método de Euler, estimando la evolución de la altura del agua en el estanque en función del tiempo. La variación temporal de la altura estará asociada al caudal faltante que el estanque debe compensar.

4. Parámetros del Sistema:

Los siguientes parámetros deben ser considerados en el desarrollo del modelo e informados junto con los resultados de la simulación:

Tabla 2: Parámetros de decisión para el diseño y modelamiento.

Parámetro	Característica
N	Número total de membranas adquiridas
M	Número total de bombas adquiridas
R	Radio del estanque de almacenamiento
Q_{in}	Caudal de ingreso a la planta
Q_{dist}	Estimación del caudal distribuido a la localidad