Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear - Profs Mauro Rincon & Marcia Fampa
GABARITO: AP2 (Segunda Prova) - Segundo Semestre de 2005

1. Considere o sistema linear $Ax = b$ dado por;

$$\begin{cases} -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 = & 5 \\ -4x_1 & & & - & x_3 = & 2 \end{cases}$$

a.(2.0) Resolva-o, se possível, pelo método de Gauss-Jordan.

Solução: A matriz aumentada $[A \mid b]$ do sistema é dada por

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccccc} -2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & -2 & 4 & | & 5 \\ -4 & 0 & -1 & | & 2 \end{array}\right]$$

1^a Etapa) Transformar a matriz aumentada à sua forma escada reduzida por linhas, usando operações elementares em suas linhas.

Com efeito, dividindo todos os termos da primeira linha da matriz aumentada por (-2) e em seguida considere as seguintes operações entre linhas:

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$
$$L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1.$$

Após essas operações obtemos a seguinte matriz aumentada:

$$[A|b]^1 = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1/2 & 1/2 & | & -1/2 \\ 0 & -3/2 & 7/2 & | & 11/2 \\ 0 & -2 & 1 & | & 0 \end{array}\right]$$

Dividindo todos os termos da segunda linha por $(-3/2)$ e em seguinda considere as seguintes operações entre linhas:

$$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2,$$

obtendo-se a seguinte matriz aumentada

$$[A|b]^2 = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1/2 & 1/2 & | & -1/2 \\ 0 & 1 & -7/3 & | & -11/3 \\ 0 & 0 & -11/3 & | & -22/3 \end{array}\right]$$

Dividindo a terceira linha por $(-11/3)$ e em seguida considere as operações

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 7/3L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 1/2L_3, \end{array}$$

obtendo-se a seguinte matriz aumentada

$$[A|b]^3 = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1/2 & 0 & | & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{array}\right]$$

Finalmente fazendo a operação

$$L_1 \leftarrow L_1 + 1/2L_2,$$

obtemos a matriz aumentada

$$[A|b]^4 = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{array}\right],$$

ou seja temos o sistema linear $I_4x = b$, dado por

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 2 \end{array}\right]$$

Assim a solução do sistema linear é $X = (x_1, x_2, x_3) = (-1, 1, 2)$

b.(1.0) Calcule o determinante da matriz dos coeficientes A. Solução: Podemos calcular o determiante pela expansão de cofatores, mas como a matriz é de ordem 3, vamos usar o processo prático, que consiste na repetição das duas primeiras colunas e depois fazer as operações entre as diagonais obedecendo o sinal positivo e negativo conforme o sentido. Dessa forma tem-se que

$$det(A) = (-2)(-2)(-1) + (1)(4)(-4) - ((-1) + (-8)) = -11$$

c.(1.0) Determine a matriz adjunta de A.
Solução: Sabemos que $A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$. Calculando cada número A_{ij}, obtemos a seguinte matriz adjunta

$$adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 17 & 6 & 7 \\ 10 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

d.(1.0) Sem fazer cálculos, descreva uma forma de calcular a matriz inversa de A.

Solução: A inversa pode ser calculada por diversas formas, como por exemplo, pelo método de Gauss-Jordan, utilizando a matriz identidade no lugar dos termos independentes como visto, ou usando a seguinte relação:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(adj(A))$$

2. Considere a transformação linear

$$\begin{aligned} T : I\!R^3 \rightarrow \quad & I\!R^2 \\ (x, y, z) \rightarrow & (x + 2y - z, 2x - y + z) \end{aligned}$$

a.(2.0) Determine o núcleo, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T é injetora? Justificar

Solução:

i. Um vetor $v \in N(T) \Rightarrow T(v) = 0$. Logo queremos determinar (x, y, z) solução do seguinte sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear, obtemos $y = -3x$ e $z = -5x$. Assumindo $x = r$, r um número real qualquer arbitrário, temos que os vetores pertencentes ao núcleo de T são da forma: $v = r(-1, 3, 5)$. Logo v gera o núcleo, ou seja, $N(T) = [(-1, 3, 5)]$

ii. Como a base do subespaço vetorial $N(T)$ tem um único vetor, segue que $dimN(T) = 1$

iii. T não é injetora pois $dimN(T) > 0$.

b.(1.0) Qual é a dimensão de Im(T)? T é sobrejetora? Justificar

Solução: Pelo Teorema do núcleo-imagem tem-se que

$dim(N(T)) + dim(Im(T)) = dim\mathbb{R}^3 = 3$. Pelo item anterior, $dim(N(T) = 1$, logo $dimIm(T) = 2$.
T é sobrejetora, pois $dimIm(T) = dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

3. Considere o operador linear:

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \rightarrow & (x + y, 3x - y) \end{array}$$

a.(2.0) Determine os autovalores e os respectivos autovetores.

"Sugestão:Determine a matriz A associada ao operador T, ou seja $T(v) = A(v)$". Solução: A matriz A associada ao sistema é dada por;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Note que $T(v) = A(v)$, onde $v = (x, y)$.

Um número real λ é um autovalor de A se existe um vetor não-nulo $v \in \mathbb{R}^2$, associado ao autovalor λ, tal que $Av = \lambda v$.

Queremos encontrar os autovalores de A e seus autovetores associados. Como vimos, determinar os autovalores é equivalente a determinar a solução do seguinte sistema linear homogêneo:

$$(A - \lambda I)v = 0$$

Como por definição $v \neq 0$, devemos determinar λ de tal forma que a matriz do sistema homogêneo seja singular, ou seja, $det(A - \lambda I) = 0$, onde $A - \lambda I$ é dado por

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 3 & -1 - \lambda \end{bmatrix}$$

Calculando o determinante obtemos o seguinte polinômio característico $P(\lambda) = \lambda^2 - 4$. As raízes desse polinômio(autovalores de A) são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$.

Portanto os autovalores de A são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$.

Cálculo dos Autovetores v associados aos autovalores

Para encontrarmos os autovetores de A associados a $\lambda_1 = 2$, formamos o sistema linear $Av = 2v \equiv (A - 2I)v = 0$, ou

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema obtemos $-x_1+x_2 = 0$. Tomando $x_2 = r \neq 0$, tem-se que $v_1 = r(1,1)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 2$.

Para encontrarmos os autovetores de A associados a $\lambda_2 = -2$, formamos o sistema linear $Av = -2v \equiv (A + 2I)v = 0$, ou

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema obtemos $3x_1+x_2 = 0$. Tomando $x_1 = r \neq 0$, tem-se que $v_2 = r(1,-3)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = -2$.

Os autovalores de A são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$ associados aos autovetores $v_1 = r(1,1)$ e $v_2 = r(1,-3)$, respectivamente.