Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO: AD2 - Primeiro Semestre de 2006
Professores Marcia Fampa & Mauro Rincon

Nome -
Assinatura -

1. Considere o sistema linear Ax=b;

$$\begin{cases} -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 = & 0 \\ & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 = & -3 \\ -4x_1 & & & - & x_3 & + & 4x_4 = & 3 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & + & 2x_4 = & -5 \end{cases}$$

a.(2.0) Resolva-o, se possível, pelo método de eliminação de Gauss com pivoteamento.

Solução A matriz aumentada $[A \mid 0]$ do sistema é dada por

$$[A|0] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & | & -3 \\ -4 & 0 & -1 & 4 & | & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & | & -5 \end{bmatrix}$$

1^o Pivoteamento: Inicialmente é necessário obter o elemento **pivô**, que por definição é dado por:

$$\begin{aligned} \widehat{a}_{11} &= \max\{|a_{11}|, |a_{21}|, |a_{31}|, |a_{41}|\} \\ &= \max\{|-1|, |0|, |-4|, |2|\} = 4 \end{aligned}$$

Assim o pivô pertence a terceira linha do sistema, e dessa forma devemos permutar as linhas L_1 e L_3, ou seja $L_1 \leftarrow L_3$ e $L_3 \leftarrow L_1$, tendo após a permutação a nova linha 1 como a linha pivô. Dessa forma a matriz aumentada, considerando a permutação, é dada por:

$$[A|0]' = \left[\begin{array}{cccc|c} -4 & 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & -5 \end{array}\right]$$

Após a permutação, podemos aplicar o método de eliminação de Gauss, usual, ou seja, no primeiro passo, o objetivo é zerar todos os elementos da primeira coluna abaixo da diagonal principal. Para isso definimos os multiplicadores

$m_{21} = a_{21}/a_{11} = 0,\ \ m_{31} = a_{31}/a_{11} = -1/4$ e

$m_{41} = a_{41}/a_{11} = -1/2.$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - m_{21}L_1$ (como $m_{21} = 0$, a linha L_2 não se altera) , $L_3 \leftarrow L_3 - m_{31}L_1$ e $L_4 \leftarrow L_4 - m_{41}L_1$, obtemos

$$[A|0]^1 = \left[\begin{array}{cccc|c} -4 & 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 5/4 & 2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 4 & -7/2 \end{array}\right]$$

2^o Pivoteamento: Inicialmente é necessário obter o elemento **pivô**, que por definição é dado por:

$$\begin{aligned} \widehat{a}_{22} &= \max\{|a_{22}|, |a_{32}|, |a_{42}|\} \\ &= \max\{|-1|, |2|, |0|\} = 2 \end{aligned}$$

Assim o pivô pertence a terceira linha do sistema, e dessa forma devemos permutar as linhas L_2 e L_3 da matriz aumentada $[A|0]^1$, ou seja $L_2 \leftarrow L_3$ e $L_3 \leftarrow L_2$, tendo após a permutação a nova linha 2 como a linha pivô. Dessa forma a matriz aumentada, considerando a permutação, é dada por:

$$[(A|0)']^1 = \left[\begin{array}{cccc|c} -4 & 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 5/4 & 2 & -3/4 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 4 & -7/2 \end{array}\right]$$

Podemos então continuar o processo de escalonamento da matriz, que nesse passo consiste em zerar todos os elementos da segunda coluna abaixo da diagonal principal,sendo L_2 a linha pivô. Com esse objetivo, definimos os multiplicadores: $m_{32} = a_{32}/a_{22} = -1/2$ e $m_{42} = a_{42}/a_{22} = 0$. Note que elementos a_{ij} são elementos da última. Como $m_{42} = 0$ então somente precisamos efetuar operações entre as linhas L_2 e L_3, na forma: $L_3 \leftarrow L_3 - m_{32}L_2$. Após efetuarmos as operações em $[(A|0)']^1$ obtemos:

$$[(A|0)]^2 = \left[\begin{array}{cccccc} -4 & 0 & -1 & 4 & | & 3 \\ 0 & 2 & 5/4 & 2 & | & -3/4 \\ 0 & 0 & -11/8 & 2 & | & -27/8 \\ 0 & 0 & 1/2 & 4 & | & -7/2 \end{array}\right]$$

3^o Pivoteamento: De forma análoga o pivô é obtido:

$$\widehat{a}_{33} \quad = \max\{|a_{33}|, |a_{43}|\} = \max\{|-11/8|, |1/2|\} = 11/8$$

Logo o elemento pivô $\widehat{a}_{33} = a_{33}$ e nenhuma troca de linhas é necessário na matriz aumentada $[(A|0)]^2$. Seguindo o procedimento, o objetivo agora é zerar os elementos que estão na terceira coluna abaixo da diagonal principal, para isso, definimos o multiplicador: $m_43 = a_{43}/a_{33} = (1/2)/-11/8 = -4/11$ e operação entre as linhas L_3 e L_4 é dada por:
$L_4 \leftarrow L_4 + (4/11)L_2$. No final das operações obtemos;

$$[(A|0)]^3 = \left[\begin{array}{cccccc} -4 & 0 & -1 & 4 & | & 3 \\ 0 & 2 & 5/4 & 2 & | & -3/4 \\ 0 & 0 & -11/8 & 2 & | & -27/8 \\ 0 & 0 & 0 & 52/11 & | & -52/11 \end{array}\right]$$

Resolvendo o sistema triangular superior, obtemos a solução:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{-2, 0, 1, -1\}$$

b.(1.0) Mostre que o determinante da matriz triangular superior obtida do item anterior é igual ao determinante da matriz dos coeficientes.

Solução O determinante da matriz triangular superior A^3 é simplesmente o produto dos elementos da diagonal dado por:
$det(A^3) = (-4)2(-11/8)(52/11) = 52$. Sabemos que se uma matriz B é obtida de A substituindo a linha i por ela somada u um

múltiplo escalar da linha j, $i \neq j$ então $det(B) = det(A)$. Foram exatamente essas operações feitas pelo método de eliminação de Gauss. Contudo, para fazer o pivoteamento, fizemos trocas de linhas e em cada troca de linhas o determinante deve ser multiplicado por (-1). Como foram feitas duas trocas de linhas então:

$$det(A^2) = (-1)(-1)det(A) = det(A) = 52$$

c.(0.5) Calcule os determinantes: $det(A^T)$, $det(A^{-1})$, $det(A^T)^{-1}$.

Solução Sabemos que $det(A^T) = det(A) = 52$.

Temos também que sendo $AA^{-1} = I$ então

$det(AA^{-1}) = detA\ det(A^{-1}) = det\ I = 1$, onde I é matriz identidade. Logo $det(A^{-1}) = 1/detA = 1/52$.

De forma análoga tem-se que $det(A^T)^{-1} = 1/detA^T = 1/52$.

2. Considere a matriz

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

a.(1.0) Determine a matriz adjunta de B (adj(B))

Solução Da definição, a adjunta de B é a transposta da matriz dos cofatores. Calculando os cofatores, obtemos:

$B_{11} = -19$, $B_{12} = 0$, $B_{13} = -4$, $B_{21} = 0$, $B_{22} = 10$, $B_{23} = -4$, $B_{31} = 2$, $B_{32} = 20$, $B_{33} = -8$. Logo,

$$adj(B) = \begin{bmatrix} -19 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 20 \\ -4 & -4 & -8 \end{bmatrix}$$

b.(0.5) Determine, se existir, a matriz inversa B^{-1}.

Solução Sabemos que se a matriz B é invertível então

$B^{-1} = \dfrac{1}{detB} adj(B)$. Mas $detB = 0$, logo B não é invertível.

3. Considere a transformação linear $\qquad T : I\!R^3 \to I\!R^3$

$$(x, y, z) \to (x - y - 2z, -x + 2y + z, x - 3z)$$

a.(1.0) Determine o núcleo, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T é injetora? Justificar

Solução Por definição

$N(T) = \Big\{(x, y, z) \in I\!R^3;\ T(x, y, z) = (0, 0, 0)\Big\}$

Usando a definição da transformação linear, obtemos o seguinte sistema linear:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & - & y & - & 2z = & 0 \\ -x & + & 2y & + & z = & 0 \\ x & & & - & 3z = & 0 \end{array}\right.$$

Na forma matricial, podemos escrever:

$$(A|0)^0 = \left[\begin{array}{rrrr} 1 & -1 & -2| & 0 \\ -1 & 2 & 1| & 0 \\ 1 & 0 & -3| & 0 \end{array}\right]$$

Fazendo operações elementares entre as linhas da matriz obtemos:

$$(A|0)^1 = \left[\begin{array}{lrrr} 1 & -1 & -2| & 0 \\ 0 & 1 & -1| & 0 \\ 0 & 0 & 0| & 0 \end{array}\right]$$

Resolvendo o sistema obtemos $y = z$ e $x = 3y$. Logo o conjunto de soluções do sistema linear homogêneo e portanto os vetores pertencentes ao núcleo da transformação linear é dado por: $N(T) = \Big\{(x, y, z) \in I\!R^3;\ (3y, y, y)\Big\}$. Dessa forma o vetor $[3, 1, 1]$ é uma base para $N(T)$. Assim $dimN(T) = 1$ e consequentemente T não é uma aplicação linear injetora, pois tem dimensão diferente de zero.

b.(1.0) Determine a imagem, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T é sobrejetora? Justificar

Solução $Im(T) = \Big\{(a, b, c) \in I\!R^3; T(x, y, z) = (a, b, c)\Big\}$.

De forma análoga ao item anterior, obtemos daí um sistema linear, cuja matriz aumentada é dada por

$$(A|0)^0 = \left[\begin{array}{rrrr} 1 & -1 & -2| & a \\ -1 & 2 & 1| & b \\ 1 & 0 & -3| & c \end{array}\right]$$

Fazendo operações elementares entre as linhas da matriz aumentada, obtemos que:

$$(A|0)^1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2| & a \\ 0 & 1 & -1| & b+a \\ 0 & 0 & 0| & -2a-b+c \end{bmatrix}$$

Assim o sistema linear tem solução única se $-2a-b+c=0$, ou seja $c=2a+b$, com a e b variáveis livres. Portanto $Im(T) = \Big\{(a,b,c) \in I\!R^3; c = 2a+b\Big\}$. Assim $(a,b,2a+b) = a(1,0,2)+b(0,1,1)$ e portanto a base da $Im(T)$ é dada por $\Big[(1,0,2);(0,1,1)\Big]$. Logo $dimIm(T)=2$ e T não é sobrejetora ($dimIm(T) \neq 3$).

4. (1.5) Determine uma transformação linear $T : I\!R^3 \to I\!R^4$ tal que

$$N(T) = \Big\{(x,y,z) \in I\!R^3 / z = x-y$$

Solução Sabemos que $(x,y,x-y) \in N(T)$. Logo podemos escrever $x(1,0,1)+y(0,1,-1)$ e assim $\Big[(1,0,1);(0,1,-1)\Big]$ é uma base para $N(T)$. O domínio da aplicação linear é o espaço vetorial $I\!R^3$. Podemos completar a base do $N(T)$ com um vetor LI para formar uma base para o $I\!R^3$. Seja o vetor canônico $(0,0,1)$ o completamento da base. Ou seja os vetores $\Big[(1,0,1);(0,1,-1);(0,0,1)\Big]$ formam uma base para o $I\!R^3$.

Assim qualquer o vetor

$(x,y,z) = x(1,0,1)+y(0,1,-1)+(-x+y+z)(0,0,1)$.

Logo

$$T(x,y,z) = xT(1,0,1)+yT(0,1,-1)+(-x+y+z)T(0,0,1) = (-x+y+z)T(0,0,1)$$

pois $(1,0,1)$ e $(0,1,-1)$ pertencem ao núcleo de T.

Fazendo arbitrariamente $T(0,0,1) = (1,0,-1,0) \in I\!R^4$ {imagem do vetor $(0,0,1)$ pode ser qualquer vetor $(x,y,z,w) \neq (0,0,0,0)$}, tem-se que

$T(x,y,z) = -x+y+z(1,0,-1,0) = (-x+y+z,0,x-y-z,0)$

Note que é uma transformação linear e satisfaz a condição imposta pelo núcleo de T.

Na realidade temos infinitas transformações lineares satisfazendo a hipótese.

5. (1.5): Determine os autovalores e os autovetores do operador linear: $T : I\!R^3 \to I\!R^3$, definido por

$$T(x, y, z) = (x - y + 2z, -x + 4y, 2x + 3z)$$

Solução Temos que

$T(x, y, z) = (x - y, -x + 4y, 3z) = x(1, -1, 0) + y(-1, 4, 0) + z(0, 0, 3)$

A matriz associada ao operador linear é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

Logo o polinômio característico é dado por

$P_3(\lambda) = det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(4-\lambda)(3-\lambda) - 3 + \lambda = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 18\lambda + 9$

Tem-se que $\lambda = 3$ (os divisores do termo independente são candidatos a raiz) é uma raiz de $P_3(\lambda)$. Assim o polinômio pode ser fatorada na forma:

$$P_3(\lambda) = (\lambda - 3)P_2(\lambda)$$

onde $P_2(\lambda) = (-\lambda^2 + 5\lambda - 3)$. As raízes de $P_2(\lambda)$ são $\lambda_2 = 4.3028$ e $\lambda_3 = 0.6972$. Logo os autovalores do operator T, são:

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4.3028$ e $\lambda_3 = 0.6972$

Cálculo dos autovetores X associados aos autovalores λ.

(a) Autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 3$. Do polinômio característico temos

$$A - 3I = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Fazendo operações elementares entre as linhas da matriz aumentada, obtém-se

$$(A - 3I)^1 = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Daí obtém-se a solução $X_1 = (0, 0, z) = z(0, 0, 1)$. Portanto qualquer vetor da forma $X_1 = (0, 0, 1)$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda = 3$.

(b) Autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 4.3028$ De forma análoga temos que

$$A - 4.3028I = \left[\begin{array}{rrr|r} -3.3028 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -0.3028 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.3028 & 0 \end{array} \right]$$

Que é equivalente a

$$(A - 4.3028I)^1 = \left[\begin{array}{rrr|r} -3.3028 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.3028 & 0 \end{array} \right]$$

Resolvendo o sistema obtemos que $X_2 = x(1, -3.3028, 0)$. Ou seja $X_2 = (1, -3.3028, 0)$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_2 = 4.3028$.

(c) Autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = 0.6972$

$$A - 0.6972I = \left[\begin{array}{rrr|r} 0.3028 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3.3028 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.3028 & 0 \end{array} \right]$$

Fazendo de forma análoga aos anteriores obtém-se a solução $X_3 = x(1, 0.30278, 0)$, ou seja $X_3 = (1, 0.30278, 0)$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_3 = 0.6972$.

Note que os autovetores$\{X_1, X_2, X_3\}$ são LI.