Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO DA AP3 - Primeiro Semestre de 2017
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

1.(2.0) Determine se cada conjunto a seguir é ou não um subspaço de $I\!R^3$. Justifique sua resposta.

(a) $\{(x_1, x_2, x_3)^T | x_1 + x_3 = 1\}$

(b) $\{(x_1, x_2, x_3)^T | x_3 = x_1 + x_2\}$

Solução

(a) $\{(x_1, x_2, x_3)^T | x_1 + x_3 = 1\}$ não é subspaço, pois $u = (0.5, 0, 0.5)^T$ e $v = (0.3, 1, 0.7)^T$ pertencem ambos ao conjunto, enquanto $u + v$ não pertence.

(b) $\{(x_1, x_2, x_3)^T | x_3 = x_1 + x_2\}$ é subspaço, pois consedirando que $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ e $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ pertencem ambos ao conjunto, temos:

$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)^T$ pertence ao conjunto, já que $u_1 + u_2 = u_3$, $v_1 + v_2 = v_3$, e, portanto, $u_1 + v_1 + u_2 + v_2 = u_3 + v_3$.

e

$\alpha(u_1, u_2, u_3)^T = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)^T$ pertence ao conjunto para todo escalar α, já que $u_1 + u_2 = u_3$, e, portanto, $\alpha u_1 + \alpha u_2 = \alpha(u_1 + u_2) = \alpha u_3$.

2.(2.0) Qual o valor inteiro de $k > 1$ para que a matriz A não admita inversa? Justifique sua resposta.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & k^2 & k^{-1} & 5 \\ k^2 & k^4 & k^{-2} & 25 \\ k^3 & k^6 & k^{-3} & 125 \end{pmatrix}$$

Solução: $k = 5$, pois neste caso a primeira e a quarta colunas de A são iguais e se A tem duas colunas iguais, então $\det(A) = 0$. Por outro lado, A admite inversa, se e somente se $\det(A) \neq 0$.

3.(2.0) Sendo A uma matriz real quadrada de ordem 3, cujo determinante é igual a 4, qual o valor de x na equação $\det(2AA^T) = 4x$? Justifique sua resposta.

Solução:

$$\begin{aligned} \det(2AA^T) &= \det(2A) \cdot \det(A^T) = 2^3\det(A) \cdot \det(A^T) \\ &= 2^3\det(A) \cdot \det(A) = 8 \cdot 4 \cdot 4 = 32 \cdot 4. \end{aligned}$$

Logo,

$$4x = 32 \cdot 4 \Rightarrow x = 32.$$

4.(2.0) Determine os autovalores de A e os autovetores associados ao maior autovalor de A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Solução: A equação característica é

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\lambda^2 - \lambda - 12 = 0.$$

Logo, os autovalores de A são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -3$. Para encontrar os autovetores associados a $\lambda_1 = 4$, temos:

$$Ax = 4x \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 = 0 \end{array} \right.$$

Obtemos então $(x_1, x_2) = (2x_2, x_2)$. Logo, qualquer múltiplo não-nulo de $(2,1)^T$ é um autovetor associado a $\lambda_1 = 4$.

5.(2.0) Uma empresa fabrica três diferentes bebidas: A, B e C. Faz-se uma estimativa do custo de produção de um litro de cada bebida. A bebida A custa R$10,00, a bebida B e a bebida C custam R$5,00 cada. Faz-se também, uma estimativa do número de horas de mão-de-obra necessárias para produzir um litro de cada bebida, sendo necessárias 2 horas para a bebida A, 4 horas para a bebida B e 2 horas para a bebida C. A empresa tem disponível para gastar em sua produção um total de R$31,00 e 12 horas de mão-de-obra. Sabendo-se que a empresa deverá produzir um total de 5 litros das três bebidas, monte um sistema linear para determinar quanto de cada bebida a empresa deverá produzir e em seguida resolva o sistema linear pelo método de Gauss-Jordan.

Solução: Representando por x_i a quantidade, em litros, da bebida i produzida, o sistema linear que representa este problema é dados por:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 10x_A & + & 5x_B & + & 5x_C & = & 31 \\ 2x_A & + & 4x_B & + & 2x_C & = & 12 \\ x_A & + & x_B & + & x_C & = & 5 \end{array}\right.$$

Para resolvê-lo reduzimos a matriz de coeficientes do sistema linear a forma

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 & 31 \\ 2 & 4 & 2 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 & 31 \\ 0 & 15 & 5 & 29 \\ 0 & 5 & 5 & 19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 & 31 \\ 0 & 15 & 5 & 29 \\ 0 & 0 & 10 & 28 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 & 31 \\ 0 & 15 & 5 & 29 \\ 0 & 0 & 5 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 & 17 \\ 0 & 15 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 14/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 12/10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 14/5 \end{pmatrix}$$

Obtemos do sistema escalonado: $x_C = 14/5 = 2,8$, $x_B = 1$; $x_A = 12/10 = 1,2$. Logo deve-se produzir 1,2 litro da bebida A, 1 litro da bebida B e 2,8 litros da bebida C.