Gabarito

Álgebra Linear: AD2 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2016.1

Tutores: Gabriel Thomaz e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

Considere a matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ -3 & 4 & b_2 \\ 2 & -1 & b_3 \end{bmatrix}$$

Agora, vamos aplicar o método de Gauss-Jordam. Para isso vamos realizar as operações $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ acarretando em

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 10 & b_2 + 3b_1 \\ 0 & -5 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix}$$

Fazendo, $L_3 \leftarrow \frac{1}{5}L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 10 & b_2 + 3b_1 \\ 0 & -1 & \frac{b_3-2b_1}{5} \end{bmatrix}$$

Fazendo, $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3$ e $L_2 \leftarrow L_2 + 9L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{b_1+2b_3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{9b_3+5b_2-3b_1}{5} \\ 0 & -1 & \frac{b_3-2b_1}{5} \end{bmatrix}$$

E por último, $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{b_1+2b_3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{9b_3+5b_2-3b_1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{10b_3+5b_2-5b_1}{5} \end{bmatrix}$$

a) Para que o sistema tenha solução temos que:

$$\frac{10b_3 + 5b_2 - 5b_1}{5} = 0$$

Calculando,

$$\frac{10(7) + 5(-18) - 5(-4)}{5} = 70 - 90 + 20 = 0$$

Logo, o sistema tem solução.

b)Para que o sistema tenha solução temos que:

$$\frac{10b_3 + 5b_2 - 5b_1}{5} = 0$$

Calculando,

$$\frac{10(-6) + 5(3) - 5(4)}{5} = -60 + 15 - 20 = -65 \neq 0$$

Logo, o sistema não tem solução.

c) Para que o sistema tenha solução, temos que a relação entre os termos deve ser tal que:

$$\frac{10b_3 + 5b_2 - 5b_1}{5} = 0$$

2^a Questão) Solução:

a) Para determinar a matriz inversa, vamos encontrar a forma reduzida ór linhas da matriz aumentada formada pela matriz original e a identidade. Assim temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2$ e $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, a matriz inversa é

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Calculando a solução do sistema $Ax = b_1$, ou seja, $x = A^{-1}.b_1$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Calculando a solução do sistema $Ax = b_2$, ou seja, $x = A^{-1}.b_2$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -5 \\ -13 \end{bmatrix}$$

3^a Questão) Solução:

a) Vamos encontrar a transformação linear considerando a base canônica do $\mathbb{R}^2$, ou seja, considerando $T(x, y) = xT(1, 0) + yT(0, 1)$.

$T(2,-1) = -2T(1,0) + 3T(0,1) = (-1,0,1)$

$T(1,-2) = 1.T(1,0) - 2T(0,1) = (0,-1,0)$

Fazendo $2L_2 + L_1$, temos:

$-T(0,1) = (0,-2,0) + (-1,0,1)$

$\Longrightarrow -T(0,1) = (-1,-2,1) \Longrightarrow T(0,1) = (1,2,-1)$

Substituindo em L_2 :

$T(1,0) = (0,-1,0) + (2,4,-2) = (2,3,-2)$

Logo, temos que $T(x,y) = xT(1,0) + yT(0,1) = x(2,3,-2) + y(1,2,-1) = (2x+y, 3x+2y, -2x-y)$.

b) Pelo item anterior, temos uma base para a imagem: $Im(T) = \{(2,3,-2),(1,2,-1)\}$, com dimensão 2.

c) $N(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (2x+y, 3x+2y, -2x-y) = 0\}$.

Logo, obtemos o sistema

$$\begin{cases} 2x+y &= 0 \\ 3x+2y &= 0 \\ -2x-y &= 0 \end{cases}$$

que tem como única solução $(x,y,z) = (0,0,0)$. Logo, $N(T) = 0$, base vazia, dimensão 0.

d) T é injetora , pois $N(T) = 0$. T seria sobrejetora se a imagem fosse igual ao contradomínio, ou seja, se $Im(T) = \mathbb{R}^3$. Como $Im(T)$ tem dimensão 2, esta não gera $\mathbb{R}^3$. Portanto, T não é sobrejetora.

4^a Questão) Solução:

Observe que :

$T(x,y,z) = (3x-y+z, -x+5y-z, x-y+3z) = x(3,-1,1)+y(-1,5,-1)+z(1,-1,3)$

Portanto, temos que a matriz associada a transformação linear é:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Daí, segue que

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

Logo, o polinômio característico dessa transformação é

$P_3(\lambda) = det(A-\lambda I) = (3-\lambda^2)(5-\lambda)+2-2(3-\lambda)-(5-\lambda) = -\lambda^3+11\lambda^2-36\lambda+36.$

Temos que achar as raízes de $P_3(\lambda)$. Pelo enunciado, tais raízes devem dividir 36. Observe que 2 é raíz, pois $P_3(2) = -8+44-72+36 = 0$. Assim,

$$-(\lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36) = 0$$

$$-(\lambda^2(\lambda-2) - 9\lambda(\lambda-2) + 18(\lambda-2)) = 0$$

$$-((\lambda^2 - 9\lambda + 18)(\lambda - 2)) = 0$$

$$-(\lambda-6)(\lambda-3)(\lambda-2) = 0$$

Logo, os autovalores são $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 2$. Para o cálculo dos autovetores, devemos calcular, para cada autovalor, o vetor x, tal que $Ax = \lambda x \to (A-\lambda I)x = 0$.
Para $\lambda_1 = 6$:

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Operando, $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{3}L_1$, sobre a matriz aumentada desse sistema, temos:

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tomando $z = r \neq 0$ temos $y = -2r$ e $x = r$. Então $v_1 = (r, -2r, r) = r(1, -2, 1)$ com $r \neq 0$ são os autovetores associados a $\lambda_1 = 6$.

Para $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Operando, $L_3 \longleftrightarrow L_1$, sobre a matriz aumentada desse sistema, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tomando $z = r \neq 0$ temos $y - r = 0 \rightarrow y = r$ e $x - r = 0 \rightarrow x = r$. Então $v_2 = (r, r, r) = r(1, 1, 1)$ com $r \neq 0$ são os autovetores associados a $\lambda_2 = 3$.

Para $\lambda_3 = 2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Operando, $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, sobre a matriz aumentada desse sistema, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tomando $z = r \neq 0$ temos $2y = 0 \rightarrow y = 0$ e $x - 0 + r = 0 \rightarrow x = -r$. Então $v_3 = (-r, 0, r) = r(-1, 0, 1)$ com $r \neq 0$ são os autovetores associados a $\lambda_3 = 2$.