Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO DA AP1 - Segundo Semestre de 2005

Nome -
Assinatura -

Observações:

1. Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular.
2. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.
3. Você pode usar lápis para responder as questões.
4. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.
5. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

1. Seja a matriz produto $C = AB$ de ordem 2×3. Então

a.(1.5) Quantas gramas de proteína são consumidos diariamente pelas mulheres que participam do projeto?
Resposta: $c_{21} = 80.20 + 140.10 = 3000$.
Portanto são consumidos 3000 gramas de proteína pelas mulheres.

b.(1.5) Quantas gramas de gordura são consumidos diariamente pelos homens que participam do projeto?
Resposta: $c_{12} = 60.30 + 100.20 = 3800$.
Portanto são consumidos 3800 gramas de gordura pelos homens.

2. Seja $V = M_{3\times 2}$ um espaço vetorial das matrizes reais e $S \subset V$ um subconjunto definido por:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \text{onde} \quad a, b, c, d \in I\!R \right\}.$$

a.(1.5) Mostre que S é um subespaço vetorial de V.

Resposta:
(i) A matriz nula $(0)_{32} \in S$, pois tomando $a = b = c = d = 0$, obtemos

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(ii) Sejam as matrizes A e B pertencentes a S, definidas por

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix},$$

Então $A + B \in S$, pois

$$A + B = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a} & 0 \\ 0 & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{bmatrix} \quad \in S$$

(iii) Seja $\alpha \in I\!R$. Então

$$\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & 0 \\ 0 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{bmatrix} \in S$$

b.(1.5) Considere os vetores colunas de S, $v_1 = (a, 0, c)$ e $v_2 = (0, b, d)$. Sejam os escalares α e β. Então v_1 e v_2 são LI, se a igualdade:

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$$

é verdadeira se e somente se $\alpha = \beta = 0$.

Com efeito: Substituindo os vetores na igualdade obtemos:

$$\alpha(a, 0, c) + \beta(0, b, d) = (\alpha a, 0, \alpha c) + (0, \beta b, \beta d) = (0, 0, 0)$$

Assim temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \alpha a = 0 \\ \beta b = 0 \\ \alpha c + \beta d = 0 \end{cases}$$

Como por hipótese a e b são diferentes de zero então da primeira e segunda equação obtemos que a única solução do sistema é $\alpha = \beta = 0$, independente de c e d. Assim os vetores são LI.

3. Considere o conjunto de vetores, $B = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$, onde $u_1 = (1, -2)$, $u_2 = (4, 2)$ e $u_3 = (5, 0)$.

a.(0.5) Mostre que o conjunto B gera o espaço vetorial $I\!R^2$.

Solução: O conjunto B gera o $I\!R^2$ se para todo par ordenado $(x, y) \in I\!R^2$, existem constantes α, β e γ tal que

$$\begin{aligned} (x, y) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 &= \alpha(1, -2) + \beta(4, 2) + \gamma(5, 0) \\ &= (\alpha + 4\beta + 5\gamma, -2\alpha + 2\beta) \end{aligned}$$

Logo temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta + 5\gamma = x \\ -2\alpha + 2\beta = y \end{cases}$$

Para $\gamma = r \in I\!R$ tem-se que $\alpha = (2x - 10r - 4y)/10$ e $\beta = (2x + y - 10r)/10$, isto é, para todo par $(x, y) \in I\!R^2$, existem α, β e γ tal que o conjunto B gera o espaço vetorial $I\!R^2$.

b.(0.5) Verifique se B é uma base para o espaço vetorial $I\!R^2$.

Solução: Para que B seja uma base, o conjunto de vetores deve satisfazer as duas condições: (i) $[B] = I\!R^2$ e (ii) B é um conjunto LI de vetores.Vimos do item anterior que a propriedade (i) esta satisfeita. Verifiquemos então se B é LI. Por definição temos:

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = (\alpha + 4\beta + 5\gamma, -2\alpha + 2\beta) = (0, 0).$$

Logo obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta + 5\gamma = 0 \\ -2\alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$$

A solução do sistema é dado por $\alpha = \beta = -\gamma$. Para $\gamma = r \in I\!R$ temos uma infinidade de soluções dadas por $r(-1, -1, 1)$. Assim B é LD e o conjunto B não é base para o $I\!R^2$.

c.(0.5) Mostre que os vetores u_1 e u_2 são ortogonais.

Solução: Por definição de ortogonalidade entre vetores temos:

$$(u_1, u_2) = (1, -2).(4, 2) = 1.4 - 2.2 = 0$$

Logo os vetores u_1 e u_2 são ortogonais.

d.(0.5) Mostre que o vetor u_3 pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores u_1 e u_2.

Solução: Pela definição, u_3 é uma combinação linear de u_1 e u_2 se existem α e β diferentes de zero tal que $u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2$, ou seja, desenvolvendo os termos obtemos o seguinte sistema linear:

$$(\alpha + 4\beta, -2\alpha + 2\beta) = (5, 0)$$

Resolvendo o sistema linear, obtemos que $\alpha = \beta = 1$, ou seja $u_3 = u_1 + u_2$

e.(0.5) Calcule o módulo (comprimento) dos vetores u_1 e u_2.

Solução $|u_1| = ((1)^2 + (-2)^2)^{1/2} = \sqrt{5}$, e
$|u_2| = ((4)^2 + (2)^2)^{1/2} = \sqrt{2}0$

f.(0.5) Determine o espaço gerado $[B]$ pelos vetores u_1 e u_2 de B.

Solução: Vimos do item (a) que os vetores $\{u_1, u_2, u_3\}$ geram o espaço vetorial $I\!R^2$. Mas do item (d), u_3 é uma combinação linear de $\{u_1, u_2\}$. Assim $\{u_1, u_2\}$ geram o espaço vetorial $I\!R^2$. Mais especificamente

$$(x, y) = \frac{(x - 2y)}{5}u_1 + \frac{(2x + y)}{10}u_2$$

g.(0.5) Construa a partir de u_1 e u_2 uma base ortonormal para o espaço vetorial $[B]$.

Solução: Como u_1 e u_2 são ortogonais então eles são LI. Como são geradores do espaço vetorial $I\!R^2$ então eles formam uma base do $I\!R^2$. Mas especificamente eles formam uma base ortogonal. Para construir uma base ortonormal, basta que os vetores sejam unitários, ou seja, considere: $v_1 = \frac{u_1}{|u_1|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)$ e de forma análoga $v_2 = \frac{u_2}{|u_2|} = \frac{1}{\sqrt{20}}(4, 2)$. Assim o conjunto $\{v_1, v_2\}$ é uma base ortonormal para o $I\!R^2$.

h.(0.5) Calcule o ângulo, entre os vetores u_2 e u_3 de B.

Solução. Por definição

$$\cos(\theta) = \frac{u_2.u_3}{|u_2||u_3|} = \frac{20}{\sqrt{(500)}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Assim $\theta = \arccos\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.