Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO DA AP2 - Segundo Semestre de 2010
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(5.0)1. Considere o sistema linear $Ax = b$ dado por;

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & -10 \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 12 \\ -x_1 & + & 3x_2 & & & = & 5 \end{array}\right.$$

(2.0)a. Resolva-o, se possível, pelo método de Gauss-Jordan.

Solução: A matriz aumentada $[A \mid b]$ do sistema é dada por

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccccc} 2 & -3 & -1 & | & -10 \\ 1 & 1 & 4 & | & 12 \\ -1 & 3 & 0 & | & 5 \end{array}\right]$$

1^a Etapa) Transformar a matriz aumentada à sua forma escada reduzida por linhas, usando operações elementares em suas linhas.

Com efeito, dividindo todos os termos da primeira linha da matriz aumentada por 2 e em seguida considere as seguintes operações entre linhas:

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$
$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1.$$

Após essas operações obtemos a seguinte matriz aumentada:

$$[A|b]^1 = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -3/2 & -1/2 & | & -5 \\ 0 & 5/2 & 9/2 & | & 17 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & | & 0 \end{array}\right]$$

Dividindo todos os termos da segunda linha por $5/2$ e em seguinda considere as seguintes operações entre linhas:

$$L_3 \leftarrow L_3 - (3/2)L_2,$$

obtendo-se a seguinte matriz aumentada

$$[A|b]^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3/2 & -1/2 & | & -5 \\ 0 & 1 & 9/5 & | & 34/5 \\ 0 & 0 & -16/5 & | & -51/5 \end{bmatrix}$$

Dividindo a terceira linha por $(-16/5)$ e em seguida considere as operações

$$L_2 \leftarrow L_2 - 9/5L_3$$
$$L_1 \leftarrow L_1 + 1/2L_3,$$

obtendo-se a seguinte matriz aumentada

$$[A|b]^3 = \begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 0 & | & -109/32 \\ 0 & 1 & 0 & | & 17/16 \\ 0 & 0 & 1 & | & 51/16 \end{bmatrix}$$

Finalmente fazendo a operação

$$L_1 \leftarrow L_1 + 3/2L_2,$$

obtemos a matriz aumentada

$$[A|b]^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -29/16 \\ 0 & 1 & 0 & | & 17/16 \\ 0 & 0 & 1 & | & 51/16 \end{bmatrix},$$

ou seja temos o sistema linear $I_4x = b$, dado por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -29/16 \\ 17/16 \\ 51/16 \end{bmatrix}$$

Assim a solução do sistema linear é $X = (x_1, x_2, x_3) = (-29/16, 17/16, 51/16)$

(1.0)b. Calcule o determinante da matriz dos coeficientes A.

Solução: Podemos calcular o determiante pela expansão de cofatores, mas como a matriz é de ordem 3, vamos usar o processo prático, que consiste na repetição das duas primeiras colunas e depois fazer as operações entre as diagonais obedecendo o sinal positivo e negativo conforme o sentido. Dessa forma tem-se que $det(A) = (2)(1)(0) + (-3)(4)(-1) + (-1)(3)(1) - (-1)(1)(-1) - (-3)(1)(0) - (2)(3)(4) = -16$.

(1.0)c. Determine a matriz adjunta de A.
Solução: Sabemos que na matriz adjunta C, temos $C_{ji} = (-1)^{i+j}det(M_{ij})$. Logo

$$C = adj(A) = \begin{bmatrix} -12 & -3 & -11 \\ -4 & -1 & -9 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

(1.0)d. Determine a matriz inversa de A, utilizando a matriz adjunta de A no seu cálculo.

Solução:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(adj(A)) = -\frac{1}{16}\begin{bmatrix} -12 & -3 & -11 \\ -4 & -1 & -9 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

(2.0)2. Para cada das transformações lineares de $I\!R^3 \to I\!R^3$ abaixo, determine seu núcleo, sua imagem e diga se ela é injetora ou sobrejetora, justificando a resposta.

(a) $L(x) = (x_3, x_2, x_1)^T$.

Solução:

Núcleo, $N(L)$: Se x está no núcleo de L, então $L(x) = 0$, ou seja, $x_3 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_1 = 0$. Portanto, $N(L) = \{(0,0,0)^T\}$.

Imagem, $I(L)$: Dado $y = (y_1, y_2, y_3)^T \in I\!R^3$, $y = L((y_3, y_2, y_1)^T)$. Logo, $I(L) = I\!R^3$.

Como $N(L) = \{(0,0,0)^T\}$, L é injetora e como $I(L) = I\!R^3$, L é também sobrejetora.

(b) $L(x) = (x_1, x_2, 0)^T$.

Solução:

Núcleo, $N(L)$: Se x está no núcleo de L, então $L(x) = 0$, ou seja, $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Portanto, $N(L)$ é o subspaço unidimensional de $I\!R^3$ gerado por $e_3 = (0, 0, 1)^T$.

Imagem, $I(L)$: Um vetor y pertence à imagem de L se e somente se y é a soma de um múltiplo de $e_1 = (1, 0, 0)^T$ com um múltiplo de $e_2 = (0, 1, 0)^T$. Logo, $I(L)$ é o subspaço bidimensional de $I\!R^3$ gerado por $[e_1, e_2]$.

Como $N(L) \neq \{(0, 0, 0)^T\}$, L não é injetora e como $I(L) \neq I\!R^3$, L também não é sobrejetora.

(3.0)3. Considere a transformação linear

$$\begin{array}{rcl} T : I\!R^3 & \rightarrow & I\!R^3 \\ (x, y, z) & \rightarrow & (x + 2y, x - y - z, y + 2z) \end{array}$$

(1.5)a. Determine os autovalores de T.

Solução:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2 - \lambda \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) &= (1 - \lambda)(-1 - \lambda)(2 - \lambda) - 2(2 - \lambda) + (1 - \lambda) \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda - 5. \end{aligned}$$

Os autovalores satisfazem a equação $det(A - \lambda I) = 0$. Então o conjunto de autovalores é dado por $\{\lambda : -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda - 5 = 0\}$.

(0.0)b. Determine um autovetor x de T correspondente ao seu autovalor positivo, tal que $x \in I\!R^3$ e $|x| = 1$.

QUESTÃO ANULADA

(1.5)c. Determine um vetor pertencente ao Núcleo de T. A transformação T é injetora? Justifique a resposta.

Solução:

A transformação é injetora se e somente se $N(T) = \{0\}$. Logo temos que achar a solução do seguinte sistema $Ax = 0$, que na forma matricial aumentada, pode ser escrito por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ encontramos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{3}L_2$ encontramos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, temos que resolver o sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ -3y - z &= 0 \\ \frac{5}{3}z &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $z = 0 \Longrightarrow y = 0 \Longrightarrow x = 0$ e o único vetor pertencente ao núcleo de T é o vetor nulo, ou seja $N(T) = \{0\}$, o que implica que T é injetora.