Gabarito

Álgebra Linear: AD1 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2019/1

Tutores: Dionisio Henrique e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

a) $|v_1| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$
$|v_2| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{16+1+9} = \sqrt{26}$
$|v_3| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$

b) $d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\| = \sqrt{(1-4)^2 + (-1-1)^2 + (2-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{9+4+1+0} = \sqrt{14}$.

c) Para que dois vetores sejam ortogonais, o produto interno entre eles tem que ser zero. E para que sejam paralelos, as coordenadas correspondentes dos vetores devem ser proporcionais.

$< v_1, v_2 >= (1, -1, 2, 0).(4, 1, 3, 0) = 4 - 1 + 6 + 0 = 9 \Longrightarrow$ Não são ortogonais
$\frac{1}{4} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{3} \neq \frac{0}{0} \Longrightarrow v_1, v_2$ não são paralelos
$< v_1, v_3 >= (1, -1, 2, 0).(0, 0, 1, 0) = 0 + 0 + 2 + 0 = 2 \Longrightarrow$ Não são ortogonais
$\frac{1}{0} \neq \frac{-1}{0} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{0}{0} \Longrightarrow v_1, v_3$ não são paralelos
$< v_2, v_3 >= (4, 1, 3, 0).(0, 0, 1, 0) = 0 + 0 + 3 + 0 = 3 \Longrightarrow$ Não são ortogonais
$\frac{4}{0} \neq \frac{1}{0} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{0}{0} \Longrightarrow v_2, v_3$ não são paralelos

d)
$cos(\theta) = \frac{v_1 v_2}{|v_1||v_2|}$
$cos(\theta) = \frac{9}{\sqrt{6}\sqrt{26}} = \frac{9}{\sqrt{6.26}} = \frac{9}{2\sqrt{39}} = \frac{9\sqrt{39}}{78} = \frac{3\sqrt{39}}{26}$
$\Longrightarrow \theta = arccos\frac{3\sqrt{39}}{26} \approx arccos(0,72)$

e) Inicialmente, vamos mostrar que os vetores $(1, -1, 0)$, $(2, 1, 1)$ e $(2, 0, 1)$ são linearmente independentes, assim formam base para o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por eles:

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$a(1,-1,2,0) + b(4,1,3,0) + c(0,0,1,0) = (0,0,0,0)$$

Assim temos:

$$\begin{cases} a + 4b = 0 \\ -a + b = 0 \\ 2a + 3b + c = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ temos:

$$\begin{cases} a + 4b = 0 \\ 5b = 0 \\ -5b + c = 0 \end{cases}$$

Por L_2 e L_3, temos que $5b = c = 0$. Logo $c = b = 0$. E assim por L_1, $a = 0$. Portanto os vetores são LI. Logo , $\{v_1, v_2, v_3\}$ formam base para o subespaço gerado por eles contido em $\mathbb{R}^4$.

f) Vamos ortogonalizar esta base usando o método de Gram-Schmidt.

Seja $w_1 = v_1 = (1,-1,2,0)$.

Temos que $w_2 = v_2 - \left(\frac{v_2 w_1}{w_1 w_1}\right) w_1$

Logo

$$w_2 = (4,1,3,0) - \left(\frac{(1,-1,2,0)(4,1,3,0)}{(1,-1,2,0)(1,-1,2,0)}\right)(1,-1,2,0)$$

$$= (4,1,3,0) - \left(\frac{3}{2}\right)(1,-1,2,0) =$$

$$= \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0, 0\right)$$

Temos também que $w_3 = v_3 - \left(\dfrac{v_3 w_2}{w_2 w_2}\right) w_2 - \left(\dfrac{v_3 w_1}{w_1 w_1}\right) w_1$

Seguindo o raciocínio anterior, chegamos a

$$= (0, 0, , 0, 1) - (\frac{1}{3})\,(1, -1, 2, 0) =$$

$$= \left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$$

Assim, temos que a base ortogonal é $\left\{(1, -1, 2, 0)\,, \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0, 0\right), \left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)\right\}$.

g)

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$a(1, -1, 2, 0) + b(4, 1, 3, 0) + c(0, 0, 1, 0) = (x, y, z, w)$$

Assim, temos:

$$\begin{cases} a + 4b = x \\ -a + b = y \\ 2a + 3b + c = z \\ 0 = w \end{cases}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ temos

$$\begin{cases} a + 4b = x \\ 5b = y + x \\ -5b + c = z - 2x \\ 0 = w \end{cases}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ temos

$$\begin{cases} a + 4b = x \\ 5b = x + y \\ c = -x + y + z \\ 0 = w \end{cases}$$

Por L_3, temos que $c = -x+y+z$. Por L_2, temos que $b = \frac{x+y}{5}$. e por L_3 que $a = \frac{x-4y}{5}$.

Logo o espaço gerado por v_1, v_2, v_3 é da forma $= \{(\frac{x-4y}{5})(1,-1,2,0)+(\frac{x+y}{5})(4,1,3,0)+(-x+y+z)(0,0,1,0).\}$

h) Vamos aos cálculos:

hi)Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$a(1,-1,2,0) + b(4,1,3,0) + c(a_1,a_2,a_3,a_4) = (0,0,0,0)$$

Assim temos:

$$\begin{cases} a + 4b + a_1c = 0 \\ -a + b + a_2c = 0 \\ 2a + 3b + a_3c = 0 \\ a_4c = 0 \end{cases}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ temos:

$$\begin{cases} a + 4b + a_1c = 0 \\ 5b + (a_1 + a_2)c = 0 \\ -5b + (a_3 - 2a_1)c = 0 \\ a_4c = 0 \end{cases}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\begin{cases} a + 4b + a_1c = 0 \\ 5b + (a_1 + a_2)c = 0 \\ (-a_1 + a_2 + a_3)c = 0 \\ a_4c = 0 \end{cases}$$

Por L_3 e L_4, se $-a_1 + a_2 + a_3 = 0$ e $a_4 = 0$, então c pode assumir qualquer valor e os vetores seriam LD . Portanto, se $a_4 \neq 0$, c necessariamente seria nulo, e portanto os vetores seriam LI.

hii) Observando o cálculo feito no item anterior, se e $a_1 = a_2+a_3$, então $-a_1+a_2+a_3 = 0$ e se $a_4 = 0$, com $a_2, a3 \neq 0$, c poderia ser diferente de zero, o que tornaria o conjunto de vetores LD.

i) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$

$$a(1,-1,2,0)+b(4,1,3,0)=(0,1,-1,0).$$

Assim, temos:

$$\begin{cases} a+4b=0 \\ -a+b=1 \\ 2a+3b=-1 \\ 0=0 \end{cases}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ temos

$$\begin{cases} a+4b=0 \\ 5b=1 \\ -5b=-1 \\ 0=0 \end{cases}$$

Por L_3 e L_2, $b=\frac{1}{5}$. Substituindo em L_1, $a=\frac{-4}{5}$.

Portanto, se o sistema tem solução, então o vetor $(0,1,-1,0)$ pode ser escrito como combinação linear de v_1 e v_2.

2^a Questão) Solução:

$S=\{(x,y)/-x+3y=0\}$

i) Verificando se S contém o vetor nulo $(0,0)$

$-x+3y=0$

Substituindo $(0,0)$ na expressão acima temos:

$0+3.0=0$

$0=0$

Logo S não é vazio, pois contém o vetor nulo $(0,0)$.

ii) Se **u**=(a, b) e **v**=(c, d) são elementos de S então:

$$\begin{cases} -a+3b=0 \\ \\ -c+3d=0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema por adição temos:

$-a-c+3b+3d=0$

$-(a+c)+3(b+d)=0$

Logo **u**+**v** $\in$ S

iii) Se **u**=(a, b) é um elemento de S e α um escalar faremos a verificação se $\alpha\mathbf{u} \in S$:

$-a+3.b=0 \Rightarrow \alpha(-a+3.b)=0 \Rightarrow (-\alpha a)+3.(\alpha b)=0 \Rightarrow (-\alpha a, \alpha b)$ é um elemento de S.

Como as três exigências acima foram atendidas logo S é subespaço.

Mostraremos agora que S tem uma base:

$-x+3y=0 \Rightarrow x=3y \Rightarrow y=\frac{x}{3}$

Se (x,y) $\in$ S $\Rightarrow (x,y)=(x,\frac{x}{3})=x(1,\frac{1}{3})$. Então, todo vetor de S é combinação linear do vetor $(1,\frac{1}{3})$. Como o vetor $(1,\frac{1}{3})$ é linearmente independente, o conjunto $\{(1,\frac{1}{3})\}$ é uma base de S.

3^a Questão) Solução:

$S=\{(x,y,z)/x-2y+z=1\}$

i) Verificando se S contém o vetor nulo $(0,0,0)$

$x-2y+z=1$

$0-2.0+0=1$

$0 = 1$ Falso

Desta forma foi verificado que S não é subespaço de R^3, pois não contém o vetor nulo $(0,0,0)$

4^a Questão) Solução:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -6 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4)a)

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 9 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$2B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M = A^T - 2B = \begin{bmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 9 & 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -6 \\ 11 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

4)b)

$$N = B.C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} (1+2+0) & (-1+0+0) & (0-1+2) \\ (-1-8+0) & (1+0+0) & (0+4+1) \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -9 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

4)c) Não é possível calcular a matriz **L**, pois o número de colunas da matriz **M** é diferente do número de linhas da matriz **N**.