Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP3 - Primeiro Semestre de 2013
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(6.0)1. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

(a) Encontre o determinante de A utilizando expansão por cofatores e explicitando os seus cálculos.

(b) Prove que o núcleo de A, $N(A)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(c) Encontre uma base para $N(A)$, e determine sua dimensão.

(d) Prove que a imagem de A^T, $I(A^T)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(e) Encontre uma base para $I(A^T)$, e determine sua dimensão.

(f) Prove que os subespaços $N(A)$ e $I(A^T)$ são ortogonais.

Solução

(a)

$$\det(A) = (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 2(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 \times 1 = 0.$$

(b) Sejam $x_1, x_2 \in N(A)$, logo $Ax_1 = 0$ e $Ax_2 = 0$. Seja $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, onde $\alpha_1, \alpha_2 \in I\!R$. Temos $Ax = A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 = 0 + 0 = 0$. Logo, $x \in N(A)$, o que prova que $N(A)$ é subespaço vetorial de $I\!R^3$.

(c) Podemos encontrar uma base para $N(A)$ colocando A em sua forma escada reduzida por linhas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $x \in N(A)$, da forma escada reduzida por linhas de A temos que

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_3 &= 0 \\ x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $x_1 = 2x_3$ e $x_2 = -5x_3$ Fazendo $x_3 = \alpha$, vemos que $N(A)$ é formado por todos os vetores da forma $\alpha(2, -5, 1)$. Logo $\{(2, -5, 1)\}$ é uma base para $N(A)$ e sua dimensão é igual a 1.

(d) Sejam $y_1, y_2 \in I(A^T)$, logo, existem x_1 e x_2, tais que $y_1 = Ax_1$ e $y_2 = Ax_2$. Seja $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$, onde $\alpha_1, \alpha_2 \in I\!R$. Temos $y = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 = A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = Ax$, onde $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$. Logo existe x tal que $y = A^T x$, provando que $y \in I(A^T)$. Logo $I(A^T)$ é um subespaço vetorial de $I\!R^3$.

(e) Podemos encontrar base para $I(A^T)$ também colocando A em sua forma escada reduzida por linhas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

As colunas de A^T geram o espaço $I(A^T)$, ou equivalentemente, as linhas de A geram $I(A^T)$. Desta forma, $\{(1, 0, -2), (0, 1, 5)\}$ é uma base para $I(A^T)$ e sua dimensão é igual a 2.

(f) Os subespaços $N(A)$ e $I(A^T)$ são ortogonais se $x^T y = 0$ para todo $x \in N(A)$ e $y \in I(A^T)$. Se $x \in N(A)$ e $y \in I(A^T)$ então existem os escalares α, β_1, β_2, tais que $x = \alpha(2, -5, 1)$ e $y = \beta_1(1, 0, -2) + \beta_2(0, 1, 5)$. Logo, $x^T y = \alpha\beta_1(2, -5, 1)^T(1, 0, -2) +$

$\alpha\beta_2(2,-5,1)^T(0,1,5) = 0$. Portanto, $N(A)$ e $I(A^T)$ são ortogonais.

(2.0)2. Ache a dimensão e uma base para a solução geral W do sistema homogêneo

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 7y + 2z = 0 \\ x + y + 6z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

Solução

Escalonando o sistema, obtemos

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 7y + 2z = 0 \\ x + y + 6z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ -2y + 4z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x + 8z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Como $x = -8z$ e $y = 2z$, o sistema tem uma variável livre, z, logo, $\dim W = 1$ e uma base é dada por $\{(-8,2,1)\}$.

(2.0)3. Em cada item abaixo, determinar se os vetores dados geram $\mathbb{R}^3$, justificando a resposta.

(a) $v_1 = (1, -1, 1), v_2 = (2, 1, 3), v_3 = (4, -1, 5)$.

Solução: Não, pois formando a matriz cujas colunas são os vetores dados e reduzindo-a a forma escalonada, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como o posto da matriz é 2 e a dimensão de $I\!R^3$ é 3, os vetores não geram o $I\!R^3$.

(b) $v_1 = (3, 1, 4), v_2 = (2, -3, 5), v_3 = (5, -2, 9)$, $v_4 = (6, 2, 1)$.

Solução: Sim, pois formando a matriz cujas colunas são os vetores dados e reduzindo-a a forma escalonada, temos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 11 & 11 & 0 \\ 0 & 17 & 17 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 11 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Como o posto da matriz é 3 e a dimensão de $I\!R^3$ também é, os vetores geram o $I\!R^3$. Os vetores v_1, v_2 e v_4 são L.I. e formam uma base para o $I\!R^3$.