Álgebra Linear

Aula 15: Autovalores e Autovetores

Mauro Rincon

Márcia Fampa

13.1 - Definições

Definição: Seja $T : V \to V$ um operador linear e V um espaço vetorial. Um vetor $\mathbf{v} \in V, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ é um autovetor (vetor próprio) do operador T se existe $\lambda \in \mathbb{R}$, denominado autovalor (valor próprio) tal que:

$$\boxed{T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}}$$

Observação: Quando numa transformação linear o contradomínio W é o mesmo espaço vetorial V, então a transformação linear é chamada **Operador Linear**.

13.1 - Definições

Observação: Se $V = \mathbb{R}^2$ ou $V = \mathbb{R}^3$ então $\mathbf{v}$ e $T(\mathbf{v})$ têm a mesma direção. Assim, dependendo do autovalor λ temos:

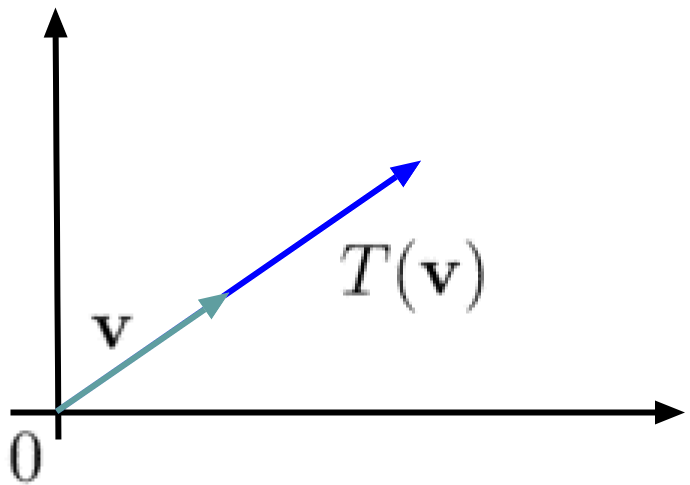
a) $|\lambda| > 1 \Rightarrow T$ dilata $\mathbf{v}$

b) $|\lambda| < 1 \Rightarrow T$ contrai $\mathbf{v}$

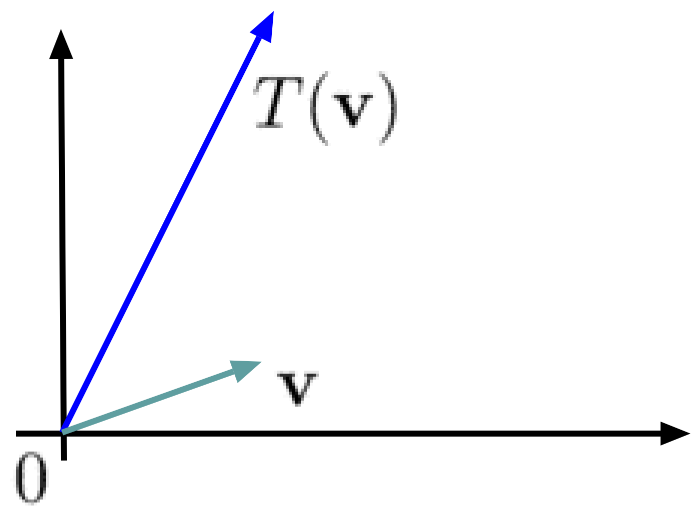
c) $\lambda = 0 \Rightarrow T$ anula $\mathbf{v}$

d) $\lambda < 0 \Rightarrow T$ inverte o sentido de $\mathbf{v}$

13.1 - Definições



$\mathbf{v}$ é um autovetor de T



$\mathbf{v}$ não é um autovetor de T

13.1 - Definições

Exemplo 1: Seja

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (4x+5y, 2x+y) \end{array}$$

Verifique se $\mathbf{v} = (5,2)$ é um autovetor de T. Por definição,

$$T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow T(\mathbf{v}) = T(5,2) = (30,12) = 6(5,2) = 6\mathbf{v}$$

Logo, $\mathbf{v} = (5,2)$ é um autovetor de T e $\lambda = 6$ é o autovalor associado a $\mathbf{v}$.

13.1 - Definições

Considere agora $\mathbf{v} = (1, 1)$. Verifique se $\mathbf{v}$ é um autovetor de T.

$$T\mathbf{v} = T(1, 1) = (9, 3) = 3(3, 1)$$

Logo, $T\mathbf{v} \neq \lambda\mathbf{v}$.
$\therefore \mathbf{v} = (1, 1)$ não é um autovetor de T.

13.1 - Definições

Exemplo 2:

$$\begin{array}{rrcl} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & T(x,y,z) = -(x,y,z) \end{array}$$

Logo, $\forall \mathbf{v} \neq 0 \in \mathbb{R}^3$ têm-se:

$$T\mathbf{v} = -1\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

onde $\boxed{\lambda = -1}$ é um autovalor associado ao autovetor $\mathbf{v}$.

13.1 - Definições

Consideraremos de agora em diante apenas os espaços vetoriais $V = \mathbb{R}^n$ e as operações lineares definidas por:

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \mathbf{v} & \longmapsto & T(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v} \end{array}$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada de ordem n.
Por definição, $\mathbf{v} \neq 0$ é um autovetor de T se:

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

13.1 - Definições

Equivalentemente,

$$\mathbf{Av} - \lambda\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{Av} - \lambda\mathbf{Iv}) = 0 \Leftrightarrow$$

$\boxed{(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0}$ (sistema linear homogêneo)

Queremos determinar as soluções não nulas do sistema homogêneo, ou seja,

$$\boxed{\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0} \text{ ou}$$

$$\det\left\{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right\} = 0, \text{ ou}$$

13.1 - Definições

$$\det \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

A equação $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ é denominada equação característica da matriz $\mathbf{A}$ e as raízes λ são os autovalores da matriz $\mathbf{A}$. O determinante $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ é um polinômio na variável λ, denominado polinômio característico e denotado por $P_n(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$

13.1 - Definições

Autovetores de A

Determinando as raízes λ do polinômio característico então os autovetores podem ser determinados pela equação:

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}}$$

13.1 - Definições

Exemplo 1: Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Determine os autovalores e autovetores de $\mathbf{A}$, ou seja, vetores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}}$$

- Equação característica:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

13.1 - Definições

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

As raízes são $\boxed{\lambda_1 = 5 \text{ e } \lambda_2 = -1}$, ou sejam, $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -1$ são os autovalores da matriz $\mathbf{A}$.

13.1 - Definições

- Cálculo dos autovetores $\mathbf{v}$ associados ao autovalor $\lambda_1 = 5$, tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} = 5\mathbf{v} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - 5\mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} -4x & + & 4y & = & 0 \\ 2x & - & 2y & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow x = y = r \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix}, r \in \mathbb{R}$$

13.1 - Definições

Assim, todos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 5$ são dados por $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix}$, onde r é um número real não nulo.

$$\lambda_1 = 5 \Leftrightarrow \mathbf{v} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ tal que: } \boxed{\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}}$$

13.1 - Definições

- Cálculos dos autovetores $\mathbf{v}$ associados ao autovalor $\lambda_2 = -1$. Têm-se:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = -\mathbf{v} \Leftrightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & + & 4y & = & 0 \\ 2x & + & 4y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \boxed{x = -2y}$$

Para $y = r \Rightarrow x = -2r$. Logo,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2r \\ r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

13.1 - Definições

Exemplo 2: Determine os autovalores e autovetores da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

I) Cálculo dos autovalores

Polinômio característico

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \end{aligned}$$

13.1 - Definições

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0$$

As soluções inteiras, caso existam, são divisoras do termo independente -36. Por inspeção $\lambda = 2$ é uma raiz. Assim, $P(\lambda)$ pode ser fatorado na forma:

$$P(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0$$

Assim, os autovalores da matriz $\mathbf{A}$ são:

$$\lambda_1 = 2; \qquad \lambda_2 = 3; \qquad \lambda_3 = 6.$$

13.1 - Definições

Cálculo dos autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$

Sistema linear homogêneo:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

Resolvendo o sistema obtemos:

$$\begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}$$

Tomando $x = r \neq 0$ então
$\mathbf{v} = (r, 0, -r) = r(1, 0, -1)$ são os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$.

13.1 - Definições

II) Cálculo dos autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 3$

Temos que $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

Resolvendo o sistema obtemos $x = y = z = r$.
Logo, $\mathbf{v} = (r, r, r) = r(1, 1, 1), r \neq 0$ são os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 3$.

13.1 - Definições

- Cálculo dos autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = 6$

Temos que $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{A} - 6\mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

A solução do sistema $x = z$ e $y = -2x$. Tomando $z = r$ então.

$$\mathbf{v} = (r, -2r, r) = r(1, -2, 1), \qquad r \neq 0$$

$\mathbf{v} = r(1, -2, 1)$ são os autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = 6$.

13.1 - Definições

Exemplo 3: Determinar os autovalores e os autovetores da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

Solução:

I) Polinômio característico

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \pm 2i}$$

ou seja, a matriz $\mathbf{A}$ não tem autovalores reais, somente complexos.

13.1 - Definições

Observação:

Definimos que λ é um autovalor da matriz $\mathbf{A}$, somente se $\lambda \in \mathbb{R}$. Dessa forma, para o exemplo anterior, dizemos que $\mathbf{A}$ não tem autovalor. Caso tivéssemos admitido λ qualquer número real ou complexo, então conseqüentemente teríamos autovetores com componentes complexas.

13.2 - Propriedades

Proposição: Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada não singular, sendo λ um autovalor de $\mathbf{A}$ associado ao autovetor $\mathbf{v}$. Então λ^{-1} é um autovalor de $\mathbf{A}^{-1}$ e todo autovetor de $\mathbf{A}$ é também um autovetor de $\mathbf{A}^{-1}$.

Demonstração:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\lambda}\mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} = \lambda^{-1}\mathbf{v}}$$

13.2 - Propriedades

Corolário: Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada. Se $\lambda = 0$ é uma autovalor de $\mathbf{A}$ então $\mathbf{A}$ é uma matriz singular.

Dem: Seja $\mathbf{v}$ um autovetor de $\mathbf{A}$ associado a $\lambda = 0$. Então,

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{v} = 0$$

Como $\mathbf{v} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{A}$ é singular.

13.2 - Propriedades

Proposição: Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada não singular. Então, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^t$ tem os mesmos autovalores.

Dem:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^t \\ &= \det(\mathbf{A}^t - \lambda \mathbf{I}^t) = \det(\mathbf{A}^t - \lambda \mathbf{I}) \end{aligned}$$

Logo as raízes (autovalores) λ de $P(\lambda)$ são as mesmas.

13.2 - Propriedades

Teorema: Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada e simétrica. Então todos os autovalores λ de $\mathbf{A}$ são números reais.

Demonstração: Seja $\mathbf{v}$ o autovetor associado a λ. Então,

$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{v}^t\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{v}^t\lambda\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}^t\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}^2$

Logo,

$$\boxed{\mathbf{v}^t\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}^2}$$

Por outro lado,

$$(\mathbf{v}^t\mathbf{A}\mathbf{v})^t = \mathbf{v}^t\mathbf{A}^t\mathbf{v} = \mathbf{v}^t\mathbf{A}\mathbf{v}$$

Assim, $(\mathbf{v}^t\mathbf{A}\mathbf{v})$ é um número real e como $\mathbf{v}^t\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}^2 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

Exercícios

- Fazer os exercícios de 1 a 11 da página 253 do livro texto.