Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP1 - Primeiro Semestre de 2016
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(3.0)1. Considere os vetores $u = (0, 1, -1)$ e $w = (2, k, 3k - 2)$ de $\mathbb{R}^3$, onde $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determine todos os possíveis valores de k de modo que os vetores u e $u + w$ sejam perpendiculares.

Solução:

Temos $u + w = (2, k + 1, 3k - 3)$. Para que u e $u + w$ sejam perpendiculares basta fazer o produto escalar entre eles igual a zero. Logo,

$$u \cdot (u+w) = (0, 1, -1) \cdot (2, k+1, 3k-3) = 0+k+1-3k+3 = -2k+4 \Leftrightarrow$$

$$k = 2.$$

(b) Determine todos os possíveis valores de k de modo que a projeção ortogonal do vetor w sobre o vetor u seja igual ao vetor $-2u$.

Solução:

$$\text{proj}_u w = \left(\frac{w \cdot u}{u \cdot u} \right) u = -2u \Leftrightarrow$$

$$\frac{-2k + 2}{2}(0, 1, -1) = (-2)(0, 1, -1) \Leftrightarrow -k + 1 = -2,$$

$$k = 3.$$

(c) Determine todos os possíveis valores de k de modo que o ângulo entre os vetores u e w seja de 60^0.

Solução:

Temos

$$\cos(60) = \frac{1}{2} = \frac{u \cdot w}{|u||w|} = \frac{-2k+2}{\sqrt{2}\sqrt{4+k^2+9k^2-12k+4}} \Leftrightarrow$$
$$-4k+4 = \sqrt{20k^2-24k+16} \Leftrightarrow$$

$$16k^2 - 32k + 16 = 20k^2 - 24k + 16 \Leftrightarrow 4k^2 = -8k \Leftrightarrow$$
$$k = -2 \text{ ou } k = 0.$$

(4.0)2. Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 2 & -5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Se possível, calcular as matrizes abaixo. Se não for possível, determinar detalhadamente a razão. Respostas não corretamente justificadas não serão consideradas.

(a) A matriz $(A - A^2)$.

Solução:

$$A - A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$
$$A - A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 61 & 108 \\ 48 & 85 \end{bmatrix}$$
$$A - A^2 = \begin{bmatrix} -56 & -99 \\ -44 & -78 \end{bmatrix}.$$

(b) A matriz $(2A - 3B^T)$.

Solução:

Não é possível calcular a diferença, pois o número de colunas de A é menor que o número de colunas de B^T.

(c) A matriz $(AB)^T$.

Solução:

Não é possível calcular o produto AB pois o número de colunas de A é maior que o número de linhas de B.

(d) A matriz $(BA)^T$.

Solução:

$$BA = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 2 & -5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} -31 & -56 \\ -10 & -17 \\ -22 & -99 \end{bmatrix}.$$

$$(BA)^T = \begin{bmatrix} -31 & -10 & -22 \\ -56 & -17 & -39 \end{bmatrix}.$$

(3.0)3. Ache a dimensão e uma base para a solução geral W do sistema homogêneo

$$\begin{cases} x + 3y - 2z + 5s - 3t = 0 \\ 2x + 7y - 3z + 7s - 5t = 0 \\ 3x + 11y - 4z + 10s - 9t = 0 \end{cases}$$

Solução

Escalonando o sistema, obtemos

$$\begin{cases} x + 3y - 2z + 5s - 3t = 0 \\ 2x + 7y - 3z + 7s - 5t = 0 \\ 3x + 11y - 4z + 10s - 9t = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x + 3y - 2z + 5s - 3t = 0 \\ y + z - 3s + t = 0 \\ 2y + 2z - 5s = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x + 3y - 2z + 5s - 3t = 0 \\ y + z - 3s + t = 0 \\ s - 2t = 0 \end{cases}$$

Em forma escalonada, o sistema tem duas variáveis livres, z e t, logo, $\dim W = 2$. Pode-se obter como segue uma base $[u_1, u_2]$ para W:

(a) Faça $z = 1$, $t = 0$. A retro-substituição dá $s = 0$, então $y = -1$ e $x = 5$. Portanto, $u_1 = (5, -1, 1, 0, 0)$.

(b) Faça $z = 0$, $t = 1$. A retro-substituição dá $s = 2$, $y = 5$ e $x = -22$. Portanto, $u_2 = (-22, 5, 0, 2, 1)$.

Multiplicando os vetores da base pelos parâmetros a e b, respectivamente, temos $au_1 + bu_2 = a(5, -1, 1, 0, 0) + b(-22, 5, 0, 2, 1) = (5a - 22b, -a + 5b, a, 2b, b)$.