Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP1 - Primeiro Semestre de 2011
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(2.0)1. Verifique se os subconjuntos W abaixo são ou não subespaços vetoriais de M(2,2) (conjunto das matrizes com duas linhas e duas colunas). Justifique suas respostas.

(a)
$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | c = a + b \;\; e \;\; d = 0; \; a, b, c, d \in I\!R \right\}.$$

(b)
$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{bmatrix} | a, b \in I\!R \right\}.$$

(c)
$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | ad - bc \neq 0 \; a, b, c, d \in I\!R \right\}.$$

(d)
$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & 1 \\ a & b \end{bmatrix} | a, b \in I\!R \right\}.$$

Solução:

(a) Sejam $M1 = \begin{bmatrix} a1 & b1 \\ a1+b1 & 0 \end{bmatrix}$ e $M2 = \begin{bmatrix} a2 & b2 \\ a2+b2 & 0 \end{bmatrix}$ em W. Temos que

$$M1 + M2 = \begin{bmatrix} a1+a2 & b1+b2 \\ a1+a2+b1+b2 & 0 \end{bmatrix} \in W$$

e

$$\alpha M1 = \begin{bmatrix} \alpha a1 & \alpha b1 \\ \alpha a1 + \alpha b1 & 0 \end{bmatrix} \in W,\ \forall \alpha \in I\!R.$$

Logo, W é subespaço veorial.

(b) Sejam $M1 = \begin{bmatrix} a1 & a1+b1 \\ a1-b1 & b1 \end{bmatrix}$ e $M2 = \begin{bmatrix} a2 & a2+b2 \\ a2-b2 & b2 \end{bmatrix}$ em W. Temos que

$$M1 + M2 = \begin{bmatrix} a1+a2 & a1+a2+b1+b2 \\ a1+a2-b1-b2 & b1+b2 \end{bmatrix} \in W$$

e

$$\alpha M1 = \begin{bmatrix} \alpha a1 & \alpha a1 + \alpha b1 \\ \alpha a1 - \alpha b1 & \alpha b1 \end{bmatrix} \in W,\ \forall \alpha \in I\!R.$$

Logo, W é subespaço vetorial.

(c) W não é subespaço vetorial, pois a matriz nula não pertence a W.

(d) W não é subespaço vetorial, pois a matriz nula não pertence a W.

(2.5)2. (a) Escrever $p = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear de $p1$, $p2$ e $p3$.

Solução:

$a(p1) + b(p2) + c(p3) = 5t^2 - 5t + 7$
$a(t^2 - 2t + 1) + b(t + 2) + c(2t^2 - t) = 5t^2 - 5t + 7$
$(a + 2c)t^2 + (-2a + b - c)t + (a + 2b) = 5t^2 - 5t + 7$

Pela igualdade de polinômios, temos:

$$\begin{cases} a + 2c = 5 \quad \Rightarrow \quad c = (5-a)/2 \\ -2a + b - c = -5 \\ a + 2b = 7 \quad \Rightarrow \quad b = (7-a)/2 \end{cases}$$

Da segunda equação temos $-2a + ((7-a)/2) - ((5-a)/2) = -5$, ou seja, $-4a + 7 - a - 5 + a = -10$, ou $a = 3$. Logo $b = 2$ e $c = 1$ e consequentemente, temos:

$$p = 3p1 + 2p2 + p3.$$

(b) Verificar se $p1$, $p2$ e $p3$ são linearmente independentes ou linearmente dependentes.

Solução:

$a(p1) + b(p2) + c(p3) = 0$
$a(t^2 - 2t + 1) + b(t + 2) + c(2t^2 - t) = 0$
$(a + 2c)t^2 + (-2a + b - c)t + (a + 2b) = 0t^2 + 0t + 0$

Pela igualdade de polinômios, temos:

$$\begin{cases} a + 2c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -a/2 \\ -2a + b - c = 0 \\ a + 2b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -a/2 \end{cases}$$

Da segunda equação temos $-2a - (a/2) + (a/2) = 0$, ou seja, $a = 0$. Logo o sistema tem solução única $a = b = c = 0$ e consequentemente, os polinômios são linearmente independentes.

(c) Determinar uma condição para a, b e c de modo que $p = at^2 + bt + c$ seja combinação linear de $p2$ e $p3$.

Solução:

$\alpha(p2) + \beta(p3) = at^2 + bt + c$
$\alpha(t + 2) + \beta(2t^2 - t) = at^2 + bt + c$
$(2\beta)t^2 + (\alpha - \beta)t + (2\alpha) = at^2 + bt + c$

Pela igualdade de polinômios, temos:

$$\begin{cases} 2\beta = a \quad \Rightarrow \quad \beta = a/2 \\ \alpha - \beta = b \\ 2\alpha = c \quad \Rightarrow \quad \alpha = c/2 \end{cases}$$

Da segunda equação temos $(c/2) - (a/2) = b$, ou seja, a condição procurada é:

$$a + 2b - c = 0.$$

(2.5)3. Considere as matrizes abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & 9 \end{bmatrix}$$

Quando for possível, determinar valores para a e b de forma que as sentenças abaixo sejam verdadeiras. Quando não for possível, justificar o motivo.

(0.5)a. AB é igual a matriz identidade.

(0.5)b.

$$B^2 = \begin{bmatrix} 22 & 26 \\ 39 & 87 \end{bmatrix}.$$

(0.5)c. B^2 é simétrica.

(0.5)d.

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 46 & 36 \\ 54 & 43 \end{bmatrix}.$$

(0.5)e.

$$A^T B^T = \begin{bmatrix} 36 & 22 & 45 & 12 \\ 89 & 36 & 16 & 14 \end{bmatrix}.$$

Solução:

(a) Efetuando o produto AB, temos

$$AB = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 + 5b & 9a + 45 \\ 28 + 4b & 7a + 36 \end{bmatrix}$$

Para termos $AB = I$, ou seja,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

devemos ter

$$\begin{aligned} 36 + 5b &= 1 \\ 9a + 45 &= 0 \\ 28 + 4b &= 0 \\ 7a + 36 &= 1 \end{aligned}$$

ou seja, $a = -5$ e $b = -7$.

(b)

$$B^2 = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16+ab & 13a \\ 13b & ab+81 \end{bmatrix}.$$

Portanto, devemos ter

$$\begin{bmatrix} 16+ab & 13a \\ 13b & ab+81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 26 \\ 39 & 87 \end{bmatrix},$$

o que implica em $a = 2$ e $b = 3$.

(c) Devemos ter

$$\begin{bmatrix} 16+ab & 13a \\ 13b & ab+81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16+ab & 13b \\ 13a & ab+81 \end{bmatrix},$$

ou seja, devemos ter $a = b$.

(d) Neste caso, temos

$$AB = \begin{bmatrix} 36+5b & 9a+45 \\ 28+4b & 7a+36 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 36+5b & 28+4b \\ 9a+45 & 7a+36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & 36 \\ 54 & 43 \end{bmatrix}.$$

o que implica em $a = 1$ e $b = 2$.

(e) Este caso é impossível pois a matriz $A^T B^T$ deveria ter duas linhas e duas colunas.

(3.0)4. Determinar a dimensão e uma base para cada um dos seguintes subespaços vetoriais:

(a)

$$\{(x, y, z) \in I\!R^3 | 2x - y + 3z = 0\}.$$

(b)

$$\{(x, y, z) \in I\!R^3 | y = 5x, z = 0\}$$

(c)

$$\{(x, y, z) \in I\!R^3 | x = 3y, z = -y\}$$

(d)

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2) | c = a - 3b \;\; e \;\; d = 0; \; a, b, c, d \in I\!R \right\}.$$

onde $M(2,2)$ é o conjunto de matrizes com duas linhas e duas colunas.

Solução:

(a) Isolando y na equação de definição, tem-se: $y = 2x + 3z$, onde x e z são variáveis livres. Qualquer vetor (x, y, z) no subespaço tem a forma: $(x, 2x + 3z, z)$ e, portanto, podemos escrever:

$$(x, y, z) = (x, 2x + 3z, z)$$

ou

$$(x, y, z) = (x, 2x, 0) + (0, 3z, z)$$

ou

$$(x, y, z) = x(1, 2, 0) + z(0, 3, 1)$$

isto é, todo vetor do subespaço é combinação linear dos vetores $(1, 2, 0)$ e $(0, 3, 1)$. Como esses dois vetores geradores do subespaço são L.I., o conjunto $\{(1, 2, 0), (0, 3, 1)\}$ é uma base do subespaço e, consequentemente sua dimensão é 2.

(b) Qualquer vetor (x, y, z) no subespaço tem a forma: $(x, 5x, 0)$ e, portanto, podemos escrever:

$$(x, y, z) = (x, 5x, 0)$$

ou

$$(x, y, z) = x(1, 5, 0)$$

isto é, o conjunto $\{(1, 5, 0)\}$ é uma base do subespaço e, consequentemente sua dimensão é 1.

(c) Qualquer vetor (x, y, z) no subespaço tem a forma: $(3y, y, -y)$ e, portanto, podemos escrever:

$$(x, y, z) = (3y, y, -y)$$

ou

$$(x, y, z) = y(3, 1, -1)$$

isto é, o conjunto $\{(3, 1, -1)\}$ é uma base do subespaço e, consequentemente sua dimensão é 1.

(d) Qualquer matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ no subespaço tem a forma $\begin{bmatrix} a & b \\ a-3b & 0 \end{bmatrix}$ e, portanto, podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a-3b & 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

isto é, o conjunto

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

é uma base do subespaço e, consequentemente sua dimensão é 2.