Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear - Profs Mauro Rincon & Marcia Fampa
AD2 (Segunda Avaliação a Distância) - Primeiro Semestre de 2010

Nome -
Assinatura -

1.(2.0) Considere o sistema linear homogêneo $Ax = 0$;

$$\begin{cases} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 = & 0 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 = & 0 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & & = & 0 \end{cases}$$

a.(1.0) Determine uma base e a dimensão do espaço vetorial $Ker(A) = N(A)$(Núcleo de A).

b.(1.0) Calcule o determinante da matriz dos coeficientes, usando a expansão de Cofatores(Fórmula de Laplace).

2.(2.0) Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{cases}$$

a.(1.0) Determine a matriz inversa de matriz dos coeficientes, usando-a para resolver o sistema linear.

b.(1.0) Resolva o sistema linear pelo método de eliminação de Gauss com pivoteamento.

3.(2.0) Seja a aplicação $\quad T : I\!R^2 \rightarrow I\!R^3$

$$(x, y) \rightarrow (x + ky, x + k, y)$$

Verifique em que caso(s) T é linear, justificando a resposta:
a) $k = x$; *b*) $k = 1$; *c*) $k = 0$

4.(3.0) Seja $T : I\!R^3 \rightarrow I\!R^3$ uma transformação linear, onde $T(v_1) = (1, 0, -1)$, $T(v_2) = (1, 1, 1)$ e $T(v_3) = (3, 1, -2)$, para $v_1 = (0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ e $v_3 = (1, 2, 0)$

a.(1.0) Determine a transformação linear e o valor de $T(v)$, onde $v = (2, -1, 9)$.

b.(1.0) Determine o núcleo, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T é injetora? Justificar

c.(1.0) Determine a imagem, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T é sobrejetora? Justificar

5.(1.0) Calcule os autovalores e os correspondentes autovetores das seguintes matrizes:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Gabarito

Álgebra Linear: AD2 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2010.1

Tutores: Cristina Lopes e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

a) $N(A) = \{x/Ax = 0\}$. Como o sistema é homogêneo, basta resolvê-lo.

Vamos representar a matriz aumentada relativa ao sistema. Em seguida, utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss para resolvê-lo :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1$ e $L_4 \leftarrow 2L_4 - L_1$ temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora, fazendo $L_3 \leftarrow 3L_3 - 5L_2$, $L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2$, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -22 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora, fazendo $L_4 \leftarrow 10L_4 - 8L_3$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -476 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, temos o seguinte sistema após a eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ -3x_2 + x_3 - 7x_4 & = & 0 \\ 10x_3 + 32x_4 & = & 0 \\ -476x_4 & = & 0 \end{cases} \tag{1}$$

Por L_4 neste sistema, temos que $x_4 = 0$.

Substituindo x_4 em L_3 temos que $x_3 = 0$.

Agora, substituindo x_3 e x_4 em L_2, temos que $x_2 = 0$. E substituindo x_1, x_2 e x_3 em L_1, temos que $x_1 = 0$.

Portanto, a solução $S = \{(0, 0, 0, 0)\}$. Desse modo, $N(A) = \vec{0}$ e a base para o núcleo é $B = \{\}$, com dimensão 0.

b) Considere o sistema homogêneo:

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & -3x_4 & = 0 \\ -x_1 & -2x_2 & +2x_3 & -x_4 & = 0 \\ x_1 & +5x_2 & +3x_3 & & = 0 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes que representa esse sistema é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos expandir o determinante em relação à uma linha ou coluna. É claro que é melhor expandir em relação a uma linha ou coluna que tenha o maior número de zeros, já que, nesse caso, os cofatores A_{ij} dos a_{ij} que são nulos não precisam ser calculados, uma vez que $a_{ij}A_{ij} = (0)(A_{ij}) = 0$.

Expandindo, então, em relação à quarta linha, obtemos:

$$det(A) = a_{41}A_{41} + a_{42}A_{42} + a_{43}A_{43} + a_{44}A_{44} \tag{2}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$$

onde M_{ij} é o determinante menor de a_{ij}.

Assim, temos:

$$A_{41} = (-1)^{4+1} det(M_{41}) = (-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \tag{3}$$

$$A_{42} = (-1)^{4+2} det(M_{42}) = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \tag{4}$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3} det(M_{43}) = (-1)^7 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \tag{5}$$

A_{44} não vamos calcular pois $a_{44} = 0$.

Expandindo

$det(M_{41}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ em relação à primeira linha, por exemplo, temos:

$$det(M_{11}) = (-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -1(5) + 1(-1)(-4) + 1(-2) = -5 + 4 - 2 = -3$$

De maneira análoga para $det(M_{42})$ temos

$$det(M_{42}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$ em relação à primeira linha, por exemplo, temos:

$$det(M_{11}) = (2)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(5) + 1(-1)(-4) + 1(3) = 10 + 4 + 3 = 17$$

E também de maneira análoga para $det(M_{43})$ temos

$$det(M_{43}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-4) + (-1)(-1)(-4) + 1(-4) = -8 - 4 - 4 = -16$$

Logo, temos de (3), (4) e (5) que

$$A_{41} = (-1)(-3) = 3$$
$$A_{42} = (1)(17) = 17$$
$$A_{43} = (-1)(-16) = 16$$

Substituindo esses valores em (2) temos:

$$det(A) = 1(3) + 5(17) + (3)(16) + 0(A_{44})$$
$$det(A) = 3 + 85 + 48 + 0$$
$$det(A) = 136$$

2^a Questão) Solução:

a) Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & = 1 \\ -x_1 & +2x_2 & +x_3 & = -2 \\ 2x_1 & +5x_2 & +3x_3 & = 1 \end{cases}$$

Formaremos a matriz aumentada $[A|I_3]$ e usaremos o Método de Gauss-Jordan para colocar a matriz $[A|I_3]$ em sua forma escada reduzida por linhas. As operações elementares feitas em uma linha de A também devem ser feitas na linha correspondente da matriz I_3. Teremos então a matriz aumentada $[C|D]$ equivalente por linhas à matriz $[A|I_3]$, onde se $C = I_3$ então $D = A^{-1}$.

O sistema linear acima pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1^a Etapa) Formaremos a matriz aumentada $[A|I_3]$. A matriz aumentada é dada por:

$$[A|I_3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2^a Etapa) Transformaremos a matriz aumentada à sua forma escada reduzida por linhas, usando operações elementares em suas linhas.

$$[A|I_3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trocando as linhas L_1 e L_2

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a 1ª linha por -1

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & | & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$ e $L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & | & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & | & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 5 & | & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando L_2 por $\dfrac{1}{5}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & | & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 9 & 5 & | & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \longleftarrow L_3 - 9L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & | & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & -9/5 & -8/5 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando L_3 por $\dfrac{-1}{4}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9/20 & 2/5 & -1/4 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_1 \longleftarrow L_1 + 2L_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9/20 & 2/5 & -1/4 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_1 \longleftarrow L_1 - L_3$ e $L_2 \longleftarrow L_2 - L_3$, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/20 & -3/5 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -5/20 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 9/20 & 2/5 & -1/4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/20 & -3/5 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 9/20 & 2/5 & -1/4 \end{array}\right]$$

Assim, como a matriz encontrada é a identidade, a matriz inversa é dada por:

$$\begin{bmatrix} -1/20 & -3/5 & 1/4 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \\ 9/20 & 2/5 & -1/4 \end{bmatrix}$$

Temos que $Ax = b \Longrightarrow x = A^{-1}b$. Então, temos:

$$x = \begin{bmatrix} -1/20 & -3/5 & 1/4 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \\ 9/20 & 2/5 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{20} + \frac{6}{5} + \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} \\ \frac{9}{20} - \frac{4}{5} - \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} \frac{-1+24+5}{20} \\ 0 \\ \frac{9-16-5}{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{28}{20} \\ 0 \\ -\frac{12}{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ 0 \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

onde x é a solução do sistema linear.

b) Vamos representar a matriz aumentada relativa ao sistema:

Em seguida, utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss com pivoteamento para resolvê-lo :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Por definição, o pivô é dado por $max = \{|a_{11}|, |a_{21}|, |a_{31}|\} = 2$.

Fazendo $L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora o pivô será $max = \{|a_{22}|, |a_{32}|\} = 5$.

Assim, temos o seguinte sistema após a eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 5x_2 + 5x_3 &= -3 \\ 4x_2 &= 0 \end{cases} \tag{6}$$

Por L_3, temos que $x_2 = 0$. Por L_2, temos que $5x_3 = -3 \Longrightarrow x_3 = \dfrac{-3}{5}$. E substituindo x_2 e x_3 em L_1 temos que $x_1 = \dfrac{7}{5}$.

Assim, a solução do sistema é $S = \left\{\left(\dfrac{7}{5}, 0, \dfrac{-3}{5}\right)\right\}$.

3^a Questão) Solução:

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$(x, y) \to (x + ky, x + k, y)$$

Vejamos em cada caso se T é linear:

$a)$ Para $k = x$, obtemos $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$(x, y) \to (x + xy\, ,\, 2x\, ,\, y)$$

Note inicialmente que T satisfaz a condição necessária, dada por $T(0, 0) = (0, 0, 0)$. Assim passamos a verificar se satisfaz as duas condições de linearidade.

Seja $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$, $u, v \in \mathbb{R}^2$.

i) $T(u+v) = T(x_1+x_2, y_1+y_2) = ((x_1+x_2)+(x_1+x_2)(y_1+y_2)\, , 2(x_1+x_2)\, , y_1+y_2) =$
$= (x_1 + x_1y_1 + x_1y_2 + x_2 + x_2y_1 + x_2y_2\, ,\, 2x_1 + 2x_2\, ,\, y_1 + y_2) = (x_1 + x_1y_1\, ,\, 2x_1\, ,\, y_1)$
$+ (x_2 + x_2y_2\, ,\, 2x_2\, ,\, y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1, 0, 0) = T(u) + T(v) + (x_1y_2 + x_2y_1, 0, 0) \neq$
$T(u) + T(v)$

ii) $T(\alpha u) = T(\alpha x_1\, ,\, \alpha y_1) = (\alpha x_1 + \alpha^2 x_1y_1\, ,\, 2\alpha x_1\, ,\, \alpha y_1) = \alpha(x_1 + \alpha x_1y_1\, ,\, 2x_1\, ,\, y_1) \neq$
$\alpha T(u)$

Logo, T não é linear.

b) Para $k = 1$, obtemos $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$(x, y) \to (x + y\,,\, x + 1\,,\, y)$$

Uma condição necessária para que a Transformação T seja linear é: $T(0, 0) = (0, 0, 0)$. Note que nesse caso $T(0, 0) = (0, 1, 0)$. Logo T é não linear.

c) Para $k = 0$, obtemos $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$(x, y) \to (x\,,\, x\,,\, y)$$

Note inicialmente que T satisfaz a condição necessária, dada por $T(0, 0) = (0, 0, 0)$.

Seja $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$, $u, v \in \mathbb{R}^2$.

i) $T(u + v) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2\,,\, x_1 + x_2\,,\, y_1 + y_2) = (x_1\,,\, x_1\,,\, y_1) + (x_2\,,\, x_2\,,\, y_2) = T(u) + T(v)$

ii) $T(\alpha u) = T(\alpha x_1\,,\, \alpha y_1) = (\alpha x_1\,,\, \alpha x_1\,,\, \alpha y_1) = \alpha(x_1\,,\, x_1\,,\, y_1) = \alpha T(u)$

Como as duas condições são satisfeitas temos, neste caso, que T é linear.

4^a Questão) Solução:

a)

$T(0, 1, 0) = (1, 0, -1)$

$T(1, 0, 1) = (1, 1, 1)$

$T(1, 2, 0) = (3, 1, -2)$

Temos que encontrar a matriz que representa a transformação linear. Assim, temos:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Desse modo, chegamos ao seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} b & = & 1 \\ a+c & = & 1 \\ a+2b & = & 3 \\ e & = & 0 \\ d+f & = & 1 \\ d+2e & = & 1 \\ h & = & -1 \\ g+i & = & 1 \\ g+2h & = & -2 \end{array} \right. \tag{7}$$

Por L_1, temos que $b = 1$. Por L_4, temos que $e = 0$. Substituindo $b = 1$ em L_3, temos que $a = 1$. Substituindo e em L_6 temos que $d = 1$. Usando $d = 1$ em L_5, encontramos $f = 0$. E substituindo $a = 1$ em L_2, temos $c = 0$.Por L_7 , $h = -1$. Substituindo em L_9, temos $g = 0$. Colocando $g = 0$ em L_8, encontramos $i = 1$.

Assim, a matriz transformação é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontrando $T(2, -1, 9)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Assim $T(2,-1,9) = (1,2,10)$.

b) Considere $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim, temos os seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y &= 0 \\ x &= 0 \\ -y + z &= 0 \end{cases} \tag{8}$$

Por este sistema, fica claro que a solução é $\{(0,0,0)\}$, ou seja, $N(T) = \vec{0}$. Logo, a base para o núcleo é $B = \{\}$, com dimensão 0.

T é injetora se, e somente se, $N(T) = 0$. Logo, T é injetora.

c) Considere $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ x \\ -y + z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, uma base para a imagem é $B = \{(1,1,0)^t, (1,0,-1)^t, (0,0,1)^t\}$, com dimensão 3 (Claramente estes vetores são LI).

Como a transformaçao é de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ (dim domínio = dim contradomínio), T é sobrejetora se, e somente se, T é injetora. Logo, T é sobrejetora.

5^a Questão) Solução:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -3 \\ -3 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

Logo o polinômio característico é dado por

$$P_3(\lambda) = det(B - \lambda I) = (3-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)$$

As raízes de $P_3(\lambda)$ são $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = -1$. Logo os autovalores da matriz A, são: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = -1$.

Cálculo dos autovetores v associados aos autovalores λ.

1. Autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 3$. Do polinômio característico temos

$$B - 3I = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_1$ e $L_1 \leftarrow L_2$, obtemos

$$B - 3I = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1.(-1)$, obtemos

$$B - 3I = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$, obtemos

$$B - 3I = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

Tomando $z = r \neq 0$ obtemos a solução $v_1 = \left(\frac{-4}{3}r, \frac{-5}{3}r, r\right) = r\left(\frac{-4}{3}, \frac{-5}{3}, 1\right)$. Portanto o vetor $v_1 = \left(\frac{-4}{3}, \frac{-5}{3}, 1\right)$ é um autovetor de B associado ao autovalor $\lambda_1 = 3$.

2. Autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 2$ De forma análoga temos que

$$B - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0| & 0 \\ -1 & 0 & -3| & 0 \\ -3 & 0 & -3| & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$ obtemos

$$B - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0| & 0 \\ 0 & 0 & -3| & 0 \\ 0 & 0 & -3| & 0 \end{bmatrix}$$

Dividindo as duas últimas linhas por -3 e resolvendo o sistema, tomando $y = r \neq 0$, obtemos que $v_2 = (0, r, 0)$. Ou seja $v_2 = r(0, 1, 0)$ é um autovetor de B associado ao autovalor $\lambda_2 = 2$.

3. Autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = -1$

$$B + 1I = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0| & 0 \\ -1 & 3 & -3| & 0 \\ 3 & 0 & 0| & 0 \end{bmatrix}$$

Dividindo a linha 1 por 4

$$B + 1I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0| & 0 \\ -1 & 3 & -3| & 0 \\ 3 & 0 & 0| & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ obtemos

$$B + 1I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0| & 0 \\ 0 & 3 & -3| & 0 \\ 0 & 0 & 0| & 0 \end{bmatrix}$$

Dividindo a linha 2 por 3

$$B + 1I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0| & 0 \\ 0 & 1 & -1| & 0 \\ 0 & 0 & 0| & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo de forma análoga aos anteriores, obtemos, tomando $z = r \neq 0$, a solução $v_3 = (0, r, r) = r(0, 1, 1)$, ou seja $v_3 = (0, 1, 1)$ é um autovetor de B associado ao autovalor $\lambda_3 = -1$.