Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear Computacional
AD1 - Primeiro Semestre de 2012
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

Nome -
Assinatura -

1.(2.0) Uma indústria produz três produtos, X, Y e Z, utilizando dois tipos de insumo, A e B. Para a manufatura de cada kg de X são utilizados 2 gramas do insumo A e 1 grama do insumo B; para cada kg de Y, 1 grama de insumo A e 3 gramas de insumo B e, para cada kg de Z, 3 gramas de A e 5 gramas de B. O preço de venda do kg de cada um dos produtos X, Y e Z é $R\$ \ 3,00$, $R\$ \ 2,00$ e $R\$ \ 4,00$, respectivamente. Com a venda de toda a produção de X, Y e Z manufaturada 1,9 **kg** de A e 2,4 **kg** de B, essa indústria arrecadou $R\$ \ 2.900,00$. Determine quantos **kg** de cada um dos produtos X, Y e Z foram vendidos.

2.(2.0) (a) Seja um triângulo ABC e sejam M e N os pontos médios de AC e BC, respectivamente. Mostre que MN é paralelo a AB e tem comprimento igual a metade do comprimento de AB, ou seja mostre que $\overrightarrow{MN} = (1/2)\overrightarrow{AB}$

(b) Verifique se os pontos dados a seguir são colineares:

i. A = (5, 1,-3), B = (0, 3, 4) e C = (0, 3,-5)

ii. A = (-1, 1, 3), B = (4, 2,-3) e C = (14, 4,-15)

(c) Dados os pontos A = (1,-2,-3), B = (-5, 2,-1) e C = (4, 0,-1). Determine o ponto D tal que A, B, C e D sejam vértices consecutivos de um paralelogramo.

(d) Verifique se o vetor u é combinação linear de v e w:
$v = (9, -12, -6),\ w = (-1, 7, 1)\ e\ u = (-4, -6, 2);$

3.(2.0) Dados $v_1 = (2, 1, 3)$ e $v_2 = (2, 6, 4)$

(a) Os vetores v_1 e v_2 geram o R^3? Justifique.

(b) Encontre um vetor v_3 que complete junto com v_1 e v_2 uma base do R^3.

(c) Use o processo de Gram-Schmidt para determinar uma base ortogonal para R^3, a partir da base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

(d) Determine a projeção ortogonal do vetor v_1 sobre v_2 $(Proj_{v_2} v_1)$

4.(2.0) Encontre uma base ortonormal para o plano $x + y + z = 0$.

5.(2.0) Calcule, se possível, a matriz indicada:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -6 & 9 & -7 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & -6 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -9 \\ -1 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se for possível calcule:

(i) $AB - BA$, (ii) $2C - D$, (iii) $(2D^t - 3E^t)^t$, (iv) $D^2 - DE$.

Gabarito

Álgebra Linear: AD1 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2012.1

Tutores: Cristina Lopes e Rodrigo Olimpio

1^a Questão)

Solução:

Considere as incógnitas:

$$\begin{aligned} x &= \text{quantidade de kg do produto X} \\ y &= \text{quantidade de kg do produto Y} \\ z &= \text{quantidade de kg do produto Z} \end{aligned}$$

Para montar o sistema relativo ao problema, vamos somar as quantidades de insumo A dos três produtos X, Y, Z e igualar a quantidade total (em gramas) de insumo A utilizada (linha L_1 do sistema). Faremos o mesmo procedimento para o insumo B (linha L_2 do sistema). Então multiplicaremos o preço de cada kg pelo seu respectivo produto e igualaremos ao valor total que a indústria arrecadou (linha L_3 do sistema). Assim temos:

$$\left\{ \begin{aligned} 2x + y + 3z &= 1900 \\ x + 3y + 5z &= 2400 \\ 3x + 2y + 4z &= 2900 \end{aligned} \right. \tag{1}$$

Utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss para resolvê-lo. Considere a seguinte matriz aumentada que representa este sistema :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix}$$

Trocando L_1 por L_2 temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & -5 & -7 & -2900 \\ 0 & -7 & -11 & -4300 \end{bmatrix}.$$

Agora, fazendo $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & -5 & -7 & -2900 \\ 0 & 0 & -6 & -1200 \end{bmatrix}.$$

Assim, temos o seguinte sistema após a eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} x + 3y + 5z & = & 2400 \\ \quad -5y - 7z & = & -2900 \\ \qquad\quad -6z & = & -1200 \end{cases} \tag{2}$$

Por L_3 neste sistema, temos que $z = 200$.

Substituindo z em L_2 temos que $-5y - 7 \times 200 = -2900 \Longrightarrow y = 300$.

Agora, substituindo y e z em L_1, temos que $x = 500$.

Logo, foram vendidos 500 kg do produto X, 300 kg do produto Y e 200 kg do produto Z.

2^a Questão)

Solução:

a) Devemos provar que $MN = \frac{1}{2}AB$.

Agora, analisando o triângulo dado e o fato de que M e N são os pontos médios de AC e BC, considere $MN = MC + CN$.

Como M é ponto médio de AC e N é ponto médio de BC, então:

$MC = \frac{1}{2}AC$ e $CN = \frac{1}{2}CB$.

Logo: $MN = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}(AC + CB) = \frac{1}{2}AB$.

b)

i) Sejam $A = (5, 1, -3)$, $B = (0, 3, 4)$ e $C = (0, 3, -5)$.

Tomemos os vetores:

$$AB = B - A = (0, 3, 4) - (5, 1, -3) = (-5, 2, 7)$$

$$AC = C - A = (0, 3, -5) - (5, 1, -3) = (-5, 2, -2).$$

Para verificar se os pontos são colineares, temos que verificar se eles são paralelos, isto é, se suas coordenadas são proporcionais. Vejamos:

$$\frac{-5}{-5} = \frac{2}{2} \neq \frac{7}{-2}$$

Logo, AB e AC não são vetores paralelos e portanto os pontos não são colineares.

ii) Sejam $A = (-1, 1, 3)$, $B = (4, 2, -3)$ e $C = (14, 4, -15)$.

Tomemos os vetores:

$$AB = B - A = (4, 2, -3) - (-1, 1, 3) = (5, 1, -6)$$

$$AC = C - A = (14, 4, -15) - (-1, 1, 3) = (15, 3, -18).$$

Para verificar se os pontos são colineares, temos que verificar se eles são paralelos, isto é, se suas coordenadas são proporcionais. Vejamos:

$$\frac{5}{15} = \frac{1}{3} = \frac{-6}{-18}$$

Logo, AB e AC são vetores paralelos e portanto os pontos são colineares.

c) Considere a origem do sistema representada pela letra O. Vamos encontrar um ponto D tal que A, B, C sejam vértices consecutivos de um paralelogramo (quadrilátero com lados opostos iguais e paralelos). Temos que $OA = (1, -2, -3)$, $OB = (-5, 2, -1)$ e $OC = (4, 0, -1)$.

Assim, $DC = OB - OA$ e $OD = OC - DC$ (pois $DC = OC - OD$). Logo, temos:

$$DC = OB - OA = (-5, 2, -1) - (1, -2, -3) = (-6, 4, 2)$$

e

$$OD = OC - DC = (4, 0, -1) - (-6, 4, 2) = (10, -4, -3).$$

Portanto, obtemos o ponto $D = (10, -4, -3)$.

d) Para mostrar que o vetor u é combinação linear de v e w, temos que mostrar que existem escalares a e b não nulos tais que:

$$u = av + bw$$

$$(-4, -6, 2) = a(9, -12, -6) + b(-1, 7, 1)$$

$$(-4, -6, 2) = (9a - b, -12a + 7b, -6a + b)$$

Assim, temos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 9a - b = -4 \\ -12a + 7b = -6 \\ -6a + b = 2 \end{cases}$$

Utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss para resolvê-lo. Considere a seguinte matriz aumentada que representa este sistema:

$$\begin{bmatrix} 9 & -1 & | & -4 \\ -12 & 7 & | & -6 \\ -6 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Multiplicando L_1 por $\dfrac{1}{9}$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{9} & | & -\dfrac{4}{9} \\ -12 & 7 & | & -6 \\ -6 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + 12L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 + 6L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{9} & | & -\dfrac{4}{9} \\ 0 & \dfrac{17}{3} & | & -\dfrac{34}{3} \\ 0 & \dfrac{1}{3} & | & -\dfrac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Agora, fazendo $L_3 \leftarrow L_2.\dfrac{3}{17}$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{9} & | & -\dfrac{4}{9} \\ 0 & 1 & | & -2 \\ 0 & \dfrac{1}{3} & | & -\dfrac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Finalmente, fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - \dfrac{1}{3}L_2$ e $L_1 \leftarrow L_1 + \dfrac{1}{9}L_2$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -\dfrac{2}{3} \\ 0 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, temos o seguinte sistema após a eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} a &= -\dfrac{2}{3} \\ b &= -2 \end{cases}$$

Da primeira e última linhas, temos que $a = -\dfrac{2}{3}$ e $b = -2$. Logo o vetor $(-4, -6, 2)$ pode ser escrito como combinação linear de $(9, -12, -6)$ e $(-1, 7, 1)$.

3^a Questão) Solução:

a) Não, pois basta tomarmos um vetor que não está no subespaço gerado por v_1 e v_2 (que é um plano que passa pela origem), que ele não será combinação linear de v_1 e v_2.

b) Para que v_1, v_2, v_3 formem uma base de $\mathbb{R}^3$ basta que v_1, v_2, v_3 sejam L.I.. Para isso , $v_3 = (a, b, c)$ deve ser um vetor que não seja combinação linear de v_1 e v_2. Por exemplo $v_3 = (0, 0, 1)$. Como a dimensão do $\mathbb{R}^3$ é igual a 3, então v_1, v_2, v_3 formam uma base para o $\mathbb{R}^3$ (teorema do completamento).

c) Primeiro, vamos ortogonalizar a base usando o método de Gram-Schmidt:
Seja $w_1 = (2, 1, 3)$.
Temos que

$$w_2 = (2, 6, 4) - \left(\frac{(2, 6, 4)(2, 1, 3)}{(2, 1, 3)(2, 1, 3)}\right)(2, 1, 3) =$$

$$= (2, 6, 4) - \left(\frac{22}{14}\right)(2, 1, 3) =$$

$$= (2, 6, 4) - \left(\frac{11}{7}\right)(2, 1, 3) =$$

$$= (2,6,4) - \left(\frac{22}{7}, \frac{11}{7}, \frac{33}{7}\right) = \left(\frac{-8}{7}, \frac{31}{7}, \frac{-5}{7}\right).$$

$$w_3 = (0,0,1) - \left(\frac{(0,0,1)\left(\frac{-8}{7}, \frac{31}{7}, \frac{-5}{7}\right)}{\left(\frac{-8}{7}, \frac{31}{7}, \frac{-5}{7}\right)\left(\frac{-8}{7}, \frac{31}{7}, \frac{-5}{7}\right)}\right)\left(\frac{-8}{7}, \frac{31}{7}, \frac{-5}{7}\right) -$$

$$\left(\frac{(0,0,1)(2,1,3)}{(2,1,3)(2,1,3)}\right)(2,1,3) =$$

$$= (0,0,1) - \left(\frac{-1}{30}\right)\left(\frac{-8}{7}, \frac{31}{7}, \frac{-5}{7}\right) - \left(\frac{3}{14}\right)(2,1,3) =$$

$$= (0,0,1) - \left(\frac{8}{210}, \frac{-31}{210}, \frac{5}{210}\right) - \left(\frac{6}{14}, \frac{3}{14}, \frac{9}{14}\right) =$$

$$= \left(\frac{-8}{210}, \frac{31}{210}, \frac{205}{210}\right) - \left(\frac{6}{14}, \frac{3}{14}, \frac{9}{14}\right) =$$

$$= \left(\frac{-98}{210}, \frac{-14}{210}, \frac{70}{210}\right) =$$

$$= \left(\frac{-7}{15}, \frac{-1}{15}, \frac{1}{3}\right)$$

Logo uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ é

$$\left\{(2,1,3), \left(\frac{-8}{7}, \frac{31}{7}, \frac{-5}{7}\right), \left(\frac{-7}{15}, \frac{-1}{15}, \frac{1}{3}\right)\right\}.$$

d)

$$proj_{v_2} v_1 = \left(\frac{v_1 v_2}{v_2 v_2}\right) v_2 =$$

$$\left(\frac{(2,1,3)(2,6,4)}{(2,6,4)(2,6,4)}\right)(2,6,4) =$$

$$\left(\frac{22}{56}\right)(2,6,4) = \left(\frac{11}{28}\right)(2,6,4) = \left(\frac{22}{28}, \frac{66}{28}, \frac{44}{28}\right) = \left(\frac{11}{14}, \frac{33}{14}, \frac{11}{7}\right).$$

4^a Questão) Solução:

Temos que $x+y+z=0 \Longrightarrow x=-y-z$. Assim, um vetor $(x,y,z) \in x+y+z=0$ se $(x,y,z)=(-y-z,y,z)$

Desse modo, temos que $(-y-z,y,z) = y(-1,1,0)+z(-1,0,1)$

Usando Gram-Schmidt:

$w_1 = (-1,1,0)$.

Temos que

$$w_2 = (-1,0,1) - \left(\frac{(-1,1,0)(-1,0,1)}{(-1,1,0)(-1,1,0)}\right)(-1,1,0) =$$

$$= (-1,0,1) - \left(\frac{1}{2}\right)(-1,1,0) =$$

$$= (-1,0,1) - \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) =$$

$$= \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, 1\right).$$

Vamos normalizar os vetores w_1 e w_2:

$|w_1| = \sqrt{(-1)^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$

$|w_2| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Dividindo w_1 e w_2 por suas respectivas normas, temos:

$$\frac{w_1}{|w_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(-1,1,0) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

$$\frac{w_2}{|w_2|} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, 1\right) = \left(\frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

Logo uma base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ é

$$\left\{\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right\}.$$

5^a Questão) Solução:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} -6 & 9 & -7 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & -6 \end{bmatrix} E = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -9 \\ -1 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

i)

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & 8+0 \\ 0+14 & 24-56 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 14 & -32 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+24 & 0+28 \\ 4-48 & 0-56 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 28 \\ -44 & -56 \end{bmatrix}$$

$$AB-BA = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 14 & -32 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 24 & 28 \\ -44 & -56 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-24 & 8-28 \\ 14-(-44) & -32-(-56) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 & -20 \\ 58 & 24 \end{bmatrix}$$

ii) Só se pode somar ou subtrair matrizes de mesma ordem. Como a matriz $2C$ é do tipo 2×3 e a matriz D é do tipo 3×3, não é possível realizar essa operação.

iii)

$$D^T = \begin{bmatrix} -6 & 1 & -6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$2.D^T = \begin{bmatrix} -12 & 2 & -12 \\ 8 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & -12 \end{bmatrix}$$

$$E^T = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -6 \\ 9 & 0 & 0 \\ -9 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$3.E^T = \begin{bmatrix} 18 & -3 & -18 \\ 27 & 0 & 0 \\ -27 & -12 & -3 \end{bmatrix}$$

$$2.D^T - 3.E^T = \begin{bmatrix} -12 - 18 & 2 - (-3) & -12 - (-18) \\ 8 - 27 & 2 - 0 & 0 - 0 \\ 0 - (-27) & 8 - (-12) & -12 - (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 & 5 & 6 \\ -19 & 2 & 0 \\ 27 & 20 & -9 \end{bmatrix}$$

$$(2.D^T - 3.E^T)^T = \begin{bmatrix} -30 & -19 & 27 \\ 5 & 2 & 20 \\ 6 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

iv)

$$D^2 = D.D = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & -6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36+4+0 & -24+4+0 & 0+16+0 \\ -6+1-24 & 4+1+0 & 0+4-24 \\ 36+0+36 & -24+0+0 & 0+0+36 \end{bmatrix}$$

$$D^2 = \begin{bmatrix} 40 & -20 & 16 \\ -29 & 5 & -20 \\ 72 & -24 & 36 \end{bmatrix}$$

$$D.E = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & -6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 6 & 9 & -9 \\ -1 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36-4+0 & -54+0+0 & 54-16+0 \\ 6-1-24 & 9+0+0 & -9-4-4 \\ -36+0+36 & -54+0+0 & 54+0+6 \end{bmatrix}$$

$$D.E = \begin{bmatrix} -40 & -54 & 38 \\ -19 & 9 & -17 \\ 0 & -54 & 60 \end{bmatrix}$$

$$D^2 - D.E = \begin{bmatrix} 40 & -20 & 16 \\ -29 & 5 & -20 \\ 72 & -24 & 36 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -40 & -54 & 38 \\ -19 & 9 & -17 \\ 0 & -54 & 60 \end{bmatrix}$$

$$D^2 - D.E = \begin{bmatrix} 40-(-40) & -20-(-54) & 16-38 \\ -29-(-19) & 5-9 & -20-(-17) \\ 72-0 & -24-(-54) & 36-60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 & 34 & -22 \\ -10 & -4 & -3 \\ 72 & 30 & -24 \end{bmatrix}$$