Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP3 - Segundo Semestre de 2014
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(2.0)1. Determine para que valores de x a matriz A abaixo é invertível:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 1 & 1 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{bmatrix}$$

Solução:

Devemos ter $\det(A) \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 1 & 1 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x-1 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 1 & x-1 \end{vmatrix} \\
&= (x-1) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} \\
&= (x-1)[(x-1)^2 - 1] = (x-1)(x^2 - 2x)
\end{aligned}$$

Temos $(x-1)(x^2-2x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 0$ ou $x = 2$. Logo, a matriz A é invertível se $x \neq 1$, $x \neq 0$ e $x \neq 2$.

(3.0)2. Para o sistema linear a seguir, obtenha um sistema equivalente cuja matriz de coeficientes esteja na forma escada reduzida por linhas e determine suas soluções.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 3y & - & 2z & + & 4t & = & 5 \\ 3x & - & 8y & - & 3z & + & 8t & = & 18 \\ 2x & - & 3y & + & 5z & - & 4t & = & 19 \end{array}\right.$$

Solução:

Considere a matriz aumentada $[A|b]$:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 4| & 5 \\ 3 & -8 & -3 & 8| & 18 \\ 2 & -3 & 5 & -4| & 19 \\ \end{bmatrix}$$

Vamos transformar esta matriz em sua forma escada reduzida por linhas, através de operações elementares entre suas linhas.

Assim, fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 4| & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -4| & 3 \\ 0 & 3 & 9 & -12| & 9 \\ \end{bmatrix}$$

Agora, fazendo $L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -8| & 14 \\ 0 & 1 & 3 & 4| & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0| & 0 \\ \end{bmatrix}$$

Desse modo, chegamos ao seguinte sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + 7x_3 - 8x_4 = 14 \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \end{array}\right. \tag{1}$$

O número de incógnitas é maior que o número de equações. Tomando $x_4 = r$ e $x_3 = s$, onde $r, s \in I\!R$, então obtemos que $x_1 = 14 - 7s + 8r$ e $x_2 = 3 - 3s - 4r$, isto é, o sistema é possível e indeterminado, e sua solução geral pode ser escrita como $S = \{14 - 7s + 8r, 3 - 3s - 4r, s, r\},$.

(2.0)3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por: $T(x,y,z) = (x+2y-z, y+z, x+y-2z)$. Determine uma base para o núcleo de T, denotado por $Ker(T)$ ou $N(T)$, e diga qual a sua dimensão.

Solução:

$N(T) = Ker(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; T(x,y,z) = 0\}$, ou seja, $(x,y,z) \in Ker(T)$ se e somente se:

$T(x,y,z) = (x+2y-z, y+z, x+y-2z) = (0,0,0)$

Logo para encontrarmos $N(T)$ temos que resolver o sistema linear homogêneo abaixo:

$$\left\{\begin{array}{lll} x+2y-z=0 & \Longrightarrow & x = z-2y = z+2z = 3z \\ y+z=0 & \Longrightarrow & y=-z \\ x+y-2z=0 & & \end{array}\right.$$

Resolvendo o sistema para $z = a$, temos: $x = 3a$ e $y = -a$.

Assim,

$Ker(T) = \{(3a,-a,a); a \in \mathbb{R}\} \Longleftrightarrow Ker(T) = \{a(3,-1,1); a \in \mathbb{R}\}$, ou ainda, que o vetor $(3,-1,1)$ gera $N(T)$:

$$N(T) = [(3,-1,1)]$$

Uma base para $N(T)$ seria $\beta = \{(3,-1,1)\}$ e a dimensão do núcleo, $dimN(T) = 1$, já que só temos um vetor na base.

(3.0)4. Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(2.0)a. Calcule os autovalores e os correspondentes autovetores de A.

(1.0)b. Determine os autovalores e os correspondentes autovetores de A^{-1}, sem calcular a matriz A^{-1}. Justifique.

Solução:

a.

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I) &= det\begin{bmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (-3-\lambda)(2-\lambda)+4 \\ &= \lambda^2+\lambda-2 = P(\lambda). \end{aligned}$$

$P(\lambda)=0 \Rightarrow \lambda^2+\lambda-2=0 \Rightarrow$ ou $\lambda=1$ ou $\lambda=-2$. Então os autovalores de A são 1 e -2. Procuramos agora os autovetores associados:

(i)$\lambda=1$. Temos

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\begin{bmatrix} -3x+4y \\ -x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x+4y=0 \\ -x+y=0 \end{cases}$$

Então temos que $x=y$. Portanto os autovetores associados a $\lambda=1$ são os vetores $v=(x,x), x\neq 0$.

(ii)$\lambda=-2$. Temos

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\begin{bmatrix} -3x+4y \\ -x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x \\ -2y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x+4y=0 \\ -x+4y=0 \end{cases} \text{ ou } x=4y.$$

Os autovetores associados a $\lambda=-2$ são os vetores da forma $v=(4y,y), y\neq 0$. (ou $v=(x,\frac{1}{4}x), x\neq 0$).

b. De acordo com a propriedade demonstrada em aula, se λ é um autovalor de A, então λ^{-1} é um autovalor de A^{-1} e todo autovetor de A é também um autovetor de A^{-1}. Logo os autovalores e respectivos autovetores de A^{-1} são:

(i) $\lambda=1$, $v=(x,x), x\neq 0$.

(ii) $\lambda=-\frac{1}{2}$, $v=(x,\frac{1}{4}x), x\neq 0$.