Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP1 - Primeiro Semestre de 2019
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(3.0)1. Considere os vetores $v_1 = (-5, 2, 1)$ e $v_2 = (1, -0.4, \alpha)$. Em cada item abaixo, determine o(s) possível(is) valor(es) para α, de forma que

(1.0)a. v_1 e v_2 sejam paralelos.

Solução:

$$\frac{-5}{1} = \frac{2}{-0.4} = \frac{1}{\alpha}.$$

Logo $\alpha = \frac{-1}{5} = -0.2$.

(1.0)b. v_1 e v_2 sejam ortogonais.

Solução:

$$v_1 \cdot v_2 = (-5) + (-0.8) + \alpha = 0.$$

Logo $\alpha = 5.8$

(1.0)c. O módulo de v_2 seja igual a $\sqrt{1.41}$.

Solução:

$$|v_2| = \sqrt{v_2 \cdot v_2} = \sqrt{1 + 0.16 + \alpha^2} = \sqrt{1.41}.$$

Logo $\alpha^2 = 0.25$. Logo $\alpha = 0.5$ ou $\alpha = -0.5$

(1.0)2. Escrever o vetor $v_3 = (-4, -18, 7)$ como combinação linear de $v_1 = (1, -3, 2)$ e $v_2 = (2, 4, -1)$.

Solução: Temos

$$v_3 = av_1 + bv_2$$

Logo

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & 2b & = & -4 \\ -3a & + & 4b & = & -18 \\ 2a & - & b & = & 7 \end{array}\right.$$

Das duas primeiras equações temos $a = 2$ e $b = -3$, que também satisfaz a terceira equação. Portanto,

$$v_3 = 2v_1 - 3v_2.$$

(3.0)3. Seja

$$S = \{(x, y, z) \in I\!R^3 / x + y - z = 0\}$$

um subspaço de $I\!R^3$ e $B = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$.

(1.0)a. Mostre que B é uma base de S.

Solução:

i. B é LI, pois, considerando:

$$\alpha_1(1, 0, 1) + \alpha_2(-1, 1, 0) = (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2, \alpha_1) = (0, 0, 0),$$

temos $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

ii. $[B] = S$, pois se $(a, b, c) \in S$, então $a = c - b$ e

$$(c - b, b, c) = c(1, 0, 1) + b(-1, 1, 0).$$

(1.0)b. Mostre que B não é uma base ortogonal de S.

Solução:

$$(1, 0, 1) \cdot (-1, 1, 0) = -1 + 0 + 0 = -1 \neq 0.$$

Logo a base não é ortogonal.

(1.0)c. Aplique o processo de Gram-Schmidt em B e a normalizaçã dos vetores para obter uma base ortonormal de S.

Solução: Sejam $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$, $w_1 = v_1 = (1, 0, 1)$ e

$$w_2 = v_2 - \left(\frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1}\right) \cdot w_1 = (-1, 1, 0) - \frac{(-1, 1, 0) \cdot (1, 0, 1)}{(1, 0, 1) \cdot (1, 0, 1)} \cdot (1, 0, 1)$$

Logo

$$w_2 = (-1,1,0) - \frac{-1}{2}\cdot(1,0,1) = \left(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$$

Temos $|w_1| = \sqrt{2}$ e $|w_2| = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Logo, a base ortonormal é:

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\},$$

ou, de forma equivalente

$$\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}.$$

(3.0)4. Resolva o sistema linear abaixo pelo método de Gauss-Jordan

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & + & w & = & 0 \\ -2x & + & 3y & + & 2z & - & w & = & 0 \\ -3x & - & y & + & z & + & 2w & = & 0 \end{array}\right.$$

Solução:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & + & w & = & 0 \\ & & 7y & + & 8z & + & w & = & 0 \\ & & 5y & + & 10z & + & 5w & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & + & w & = & 0 \\ & & y & + & (8/7)z & + & (1/7)w & = & 0 \\ & & 5y & + & 10z & + & 5w & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & + & w & = & 0 \\ & & y & + & (8/7)z & + & (1/7)w & = & 0 \\ & & & & (30/7)z & + & (30/7)w & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & + & w & = & 0 \\ & & y & + & (8/7)z & + & (1/7)w & = & 0 \\ & & & & z & + & w & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & 2z & & & = & 0 \\ & & y & + & z & & & = & 0 \\ & & & & z & + & w & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & & & - & 2w & = & 0 \\ & & y & & & - & w & = & 0 \\ & & & & z & + & w & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & & & & & = & 0 \\ & & y & & & - & w & = & 0 \\ & & & & z & + & w & = & 0 \end{array}\right.$$

Logo $x = 0$. Se $w = r$, então $y = r$ e $z = -r$. Logo $(0, r, -r, r)$ é uma solução do sistema, para qualquer $r \in I\!R$.