Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP1 - Segundo Semestre de 2018
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

1.(3.0) Considere os vetores $v_1 = (-5, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3)$, $v_3 = (1, -2, 3)$ e $v_4 = (10, 4k, -2)$

(1.0)a. Calcule o ângulo formado por v_1 e v_2.

Solução:

Seja θ o ângulo entre os vetores v_1 e v_2.

$cos(\theta) = \frac{v_1.v_2}{|v_1|.|v_2|}$.

$|v_1| = \sqrt{(-5)^2 + 1^2 + 1^2)} = \sqrt{(25 + 1 + 1)} = \sqrt{27}$.

$|v_2| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

$v_1.v_2 = 1 \times (-5) + 2 \times 1 + 3 \times 1 = -5 + 2 + 3 = 0$.

$cos(\theta) = \frac{0}{\sqrt{27} \cdot \sqrt{14}} = 0 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$.

(1.0)b. Calcule a distância $d(v_1, v_3) = |v_1 - v_3|$

Solução:

$d(v_1, v_3) = \sqrt{(-5-1)^2 + (1+2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7$.

(1.0)c. Determine o valor de k sabendo que v_1 e v_4 são paralelos, ou seja, $v_1 || v_4$. Justifique a resposta apresentando a condição que deve ser satisfeita para que os dois vetores sejam paralelos.

Solução:

Devemos ter $\frac{-5}{10} = \frac{1}{4k} = \frac{1}{-2}$. Logo $k = -\frac{1}{2}$.

2.(1.0) Sejam $v_1 = (2, -1, 3)$ e $v_2 = (3, -4, 7)$, dois vetores em $\mathbb{R}^3$. Determinar o valor de k para que o vetor $u = (0, 5, k)$ seja combinação linear de v_1 e v_2.

Solução:

Devemos ter $u = av_1 + bv_2$, para $a, b \in \mathbb{R}$, ou

$$(0, 5, k) = a(2, -1, 3) + b(3, -4, 7)$$

De onde vem o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2a & + & 3b & = & 0 \\ -a & - & 4b & = & 5 \\ 3a & + & 7b & = & k \end{array}\right.$$

o qual tem solução apenas se $k = -5$, já que das linhas 1 e 2, obtemos $a = 3$ e $b = -2$.

3.(2.0) Determinar uma base e a dimensão do espaço de soluções do sistema homogêneo

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & 2y & - & 4w & + & 3z & = & 0 \\ x & - & 2y & - & 2w & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & w & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

Solução:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & 2y & - & 4w & + & 3z & = & 0 \\ x & - & 2y & - & 2w & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & w & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

Fazendo $linha_2 := 2linha_2 - linha_1$, $linha_3 := linha_3 - linha_1$, temos

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & 2y & - & 4w & + & 3z & = & 0 \\ & - & 6y & & & + & z & = & 0 \\ & & y & + & 5w & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Fazendo, $linha_3 := 6linha_3 + linha_2$ temos o seguinte sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & 2y & - & 4w & + & 3z & = & 0 \\ & - & 6y & & & + & z & = & 0 \\ & & & & 30w & - & 5z & = & 0 \end{array}\right.$$

Do qual, obtemos da segunda linha $y = z/6$ e , da terceira linha $w = z/6$. Substituindo as igualdades na primeira linha, $2x+(z/3)-(2z/3)+3z = 0$, ou $x = -4z/3$. Logo, o conjunto-solução do sistema é:

$$S = \{(x, y, w, z)|x = -4z/3, y = z/6, w = z/6\},$$

que é um subspaço vetorial de $I\!R^4$. Tendo em vista ser apenas uma a variável livre (z), conclui-se que dim$S$=1. Logo, $\{(-4/3, 1/6, 1/6, 1)\}$ é uma base de S.

4.(4.0) Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & n \\ m & 9 \end{bmatrix}$$

(1.0)a. Calcular m e n para que a matriz (AB) seja igual a matriz identidade.

(1.0)b. Calcular m e n para que a matriz (B^2) seja igual a matriz

$$\begin{bmatrix} 22 & 26 \\ 39 & 87 \end{bmatrix}.$$

(1.0)c. Determine que hipótese deve ser satisfeita por m e n para que a matriz B^2 seja simétrica.

(1.0)d. Considerando agora $n = -2$ e $m = -3$ calcular $(AB)^T$.

Solução:

(a) Efetuando o produto AB, temos

$$AB = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & n \\ m & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 + 5m & 9n + 45 \\ 28 + 4m & 7n + 36 \end{bmatrix}$$

Para termos $AB = I$, ou seja,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

devemos ter

$$
\begin{aligned}
36 + 5m &= 1 \\
9n + 45 &= 0 \\
28 + 4m &= 0 \\
7n + 36 &= 1
\end{aligned}
$$

ou seja, $m = -7$ e $n = -5$.

(b)

$$B^2 = \begin{bmatrix} 4 & n \\ m & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & n \\ m & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 + mn & 13n \\ 13m & mn + 81 \end{bmatrix}.$$

Portanto, devemos ter

$$\begin{bmatrix} 16 + mn & 13n \\ 13m & mn + 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 26 \\ 39 & 87 \end{bmatrix},$$

o que implica em $m = 3$ e $n = 2$.

(c) Devemos ter

$$\begin{bmatrix} 16 + mn & 13n \\ 13m & mn + 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 + mn & 13m \\ 13n & mn + 81 \end{bmatrix},$$

ou seja, devemos ter $m = n$.

(d) Neste caso, temos

$$AB = \begin{bmatrix} 21 & 27 \\ 16 & 12 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 21 & 16 \\ 27 & 12 \end{bmatrix}.$$