Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP1 - Segundo Semestre de 2017
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(3.0)1. Seja V o espaço vetorial dos polinômios $a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots + a_nt^n$ com coeficientes reais, isto é, $a_i \in I\!R$. Determine se W é ou não subspaço de V, justificando sua resposta, onde:

(a) W consiste de todos os polinômios com coeficientes inteiros;
Solução
Não, porque múltiplos escalares de vetores em W nem sempre pertencem a W. Por exemplo, $v = 3 + 5t + 7t^2 \in W$, mas $\frac{1}{2}v = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}t + \frac{7}{2}t^2 \notin W$.

(b) W consiste de todos os polinômios de grau ≤ 3;
Solução
Sim, porque, W é não vazio, a soma dos elementos de W pertencem a W e múltiplos escalares de qualquer elemento de W pertencem a W.

(c) W consiste de todos os polinômios $b_0 + b_1t^2 + b_2t^4 + \ldots + b_nt^{2n}$, isto é, polinômios apenas com potências pares de t.
Solução
Sim, porque, W é não vazio, a soma dos elementos de W pertencem a W e múltiplos escalares de qualquer elemento de W pertencem a W.

(3.0)2. Considere os vetores $u = (0, 1, -1)$ e $w = (2, k, 3k - 2)$ de $I\!R^3$, onde $k \in I\!R$.

(a) Determine todos os possíveis valores de k de modo que os vetores u e $u + w$ sejam perpendiculares.

Solução:

Temos $u + w = (2, k + 1, 3k - 3)$. Para que u e $u + w$ sejam perpendiculares basta fazer o produto escalar entre eles igual a zero. Logo,

$$u\cdot(u+w) = (0, 1, -1)\cdot(2, k+1, 3k-3) = 0+k+1-3k+3 = -2k+4 \Leftrightarrow$$

$$k = 2.$$

(b) Determine todos os possíveis valores de k de modo que a projeção ortogonal do vetor w sobre o vetor u seja igual ao vetor $-2u$.

Solução:

$$\text{proj}_u w = \left(\frac{w \cdot u}{u \cdot u}\right) u = -2u \Leftrightarrow$$

$$\frac{-2k + 2}{2}(0, 1, -1) = (-2)(0, 1, -1) \Leftrightarrow -k + 1 = -2,$$

$$k = 3.$$

(c) Determine todos os possíveis valores de k de modo que o ângulo entre os vetores u e w seja de 60^0.

Solução:

Temos

$$\cos(60) = \frac{1}{2} = \frac{u \cdot w}{|u||w|} = \frac{-2k + 2}{\sqrt{2}\sqrt{4 + k^2 + 9k^2 - 12k + 4}} \Leftrightarrow$$

$$-4k + 4 = \sqrt{20k^2 - 24k + 16} \Leftrightarrow$$

$$16k^2 - 32k + 16 = 20k^2 - 24k + 16 \Leftrightarrow 4k^2 = -8k \Leftrightarrow$$

$$k = -2 \text{ ou } k = 0.$$

(2.0)3. Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 2 & -5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Se possível, calcular as matrizes abaixo. Se não for possível, determinar a razão.

(a) A matriz $(A - A^2)$.
Solução:

$$A - A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A - A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 61 & 108 \\ 48 & 85 \end{bmatrix}$$

$$A - A^2 = \begin{bmatrix} -56 & -99 \\ -44 & -78 \end{bmatrix}.$$

(b) A matriz $(AB)^T$.
Solução:
Não é possível calcular o produto AB pois o número de colunas de A é maior que o número de linhas de B.

(2.0)4. Determine nos itens abaixo, se os vetores dados são linearmente dependentes. Respostas sem a correta justificativa não serão consideradas.

(a) $(1, -2, -3)$, $(2, 3, -1)$ e $(3, 2, 1)$.

(b) $(1, -2, 3)$, $(-2, 3, -1)$, $(3, -2, 1)$ e $(-1, 2, -3)$.

Solução:

(a) Igualando a zero uma combinação linear dos três vetores, obtemos o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ -3x - y + z = 0 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 7y + 8z = 0 \\ 5y + 10z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 7y + 8z = 0 \\ 30z = 0 \end{cases}$$

O sistema acima admite apenas a solução nula. Logos os vetores são linearmente independentes.

(b) Como foram dados quatro vetores em $I\!R^3$ e a dimensão de $I\!R^3$ é 3, os vetores são necessariamente linearmente dependentes.