Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP2 - Segundo Semestre de 2007
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(2.0)1. Determine para que valores de x a matriz A abaixo é invertível:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 1 & 1 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{bmatrix}$$

Solução:

Devemos ter $\det(A) \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 1 & 1 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x-1 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 1 & x-1 \end{vmatrix} \\
&= (x-1) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} \\
&= (x-1)[(x-1)^2 - 1] = (x-1)(x^2 - 2x)
\end{aligned}$$

Temos $(x-1)(x^2-2x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 0$ ou $x = 2$. Logo, a matriz A é invertível se $x \neq 1$, $x \neq 0$ e $x \neq 2$.

(3.0)2. Determinar para que valores de a e b, o sistema linear abaixo: (a) tem uma única solução, (b) não tem solução, (c) tem uma infinidade de soluções.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = b \end{cases}$$

Solução: Calculemos primeiro o determinante da matriz A de coeficientes do sistema linear:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = a - 6.$$

(a) O sistema tem uma única solução se $\det(A) \neq 0$, ou seja, se $a \neq 6$.

Se $a = 6$, fazemos o escalonamento da matriz de coeficientes do sistema linear estendida.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -15 & b-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-5 \end{pmatrix}$$

Neste caso, se $b \neq 5$, o sistema não tem solução e se $b = 5$, o sistema tem infinitas soluções.

Logo, (b) O sistema não tem solução se $a = 6$ e $b \neq 5$. (c) O sistema tem infinitas soluções se $a = 6$ e $b = 5$.

(2.0)3. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \to (x, 2y, 0)$$

(1.0)a. Determine o núcleo, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T é injetora? Justifique.

(1.0)b. Determine a imagem, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T é sobrejetora? Justifique.

Solução:

a.

$$\begin{aligned} N(T) &= \{(x, y, z) : T(x, y, z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) : (x, 2y, 0) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(0, 0, 1) : z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Logo, $\{(0, 0, 1)\}$ é uma base para o núcleo de T e $\dim(N(T))$=1. Uma vez que $N(T) \neq (0, 0, 0)$, T não é injetora.

b.

$$\begin{aligned} Im(T) &= \{(x, 2y, 0) : x, y \in I\!R\} \\ &= \{x(1, 0, 0) + y(0, 2, 0) : x, y \in I\!R\} \end{aligned}$$

Logo,

$$\{(1, 0, 0), (0, 2, 0)\}$$

é uma base para a imagem de T e dim($Im(T)$)=2. Uma vez que dim($Im(T)$) $\neq$ dim($I\!R^3$) (dim($I\!R^3$) $= 3$), T não é sobrejetora.

(3.0)4. Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(2.0)a. Calcule os autovalores e os correspondentes autovetores de A.

(1.0)b. Determine os autovalores e os correspondentes autovetores de A^{-1}. Justifique.

Solução:

a.

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) &= det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (-3-\lambda)(2-\lambda) + 4 \\ &= \lambda^2 + \lambda - 2 = P(\lambda). \end{aligned}$$

$P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow$ ou $\lambda = 1$ ou $\lambda = -2$. Então os autovalores de A são 1 e -2. Procuramos agora os autovetores associados:

(i)$\lambda = 1$. Temos

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\begin{bmatrix} -3x + 4y \\ -x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

Então temos que $x = y$. Portanto os autovetores associados a $\lambda = 1$ são os vetores $v = (x, x), x \neq 0$.

(ii)$\lambda = -2$. Temos

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\begin{bmatrix} -3x + 4y \\ -x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x \\ -2y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + 4y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases} \text{ ou } x = 4y.$$

Os autovetores associados a $\lambda = -2$ são os vetores da forma $v = (4y, y), y \neq 0$. (ou $v = (x, \frac{1}{4}x), x \neq 0$).

b. De acordo com a propriedade demonstrada em aula, se λ é um autovalor de A, então λ^{-1} é um autovalor de A^{-1} e todo autovetor de A é também um autovetor de A^{-1}. Logo os autovalores e respectivos autovetores de A^{-1} são:
(i) $\lambda = 1$, $v = (x, x), x \neq 0$.
(ii) $\lambda = -\frac{1}{2}$, $v = (x, \frac{1}{4}x), x \neq 0$.