Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP2 - Segundo Semestre de 2018
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(2.0)1. Considere o espaço vetorial das matrizes reais, quadradas de ordem 2, $M_2(I\!R)$. Determine se a transformação abaixo é ou não linear. Justifique sua resposta.

$T : M_2(I\!R) \to I\!R,\ \ tal\ \ que$

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 2a + 3b + c - d + 4.$$

Solução: Temos que verificar se

$$T(\alpha A_1 + \beta A_2) = \alpha T(A_1) + \beta T(A_2),\ \forall A_1, A_2 \in M_2(I\!R), \forall \alpha, \beta \in I\!R.$$

Façamos então

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\ \ e\ \ A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} T(\alpha A_1 + \beta A_2) &= T\left(\alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= 2(\alpha a_1 + \beta a_2) + 3(\alpha b_1 + \beta b_2) + (\alpha c_1 + \beta c_2) - (\alpha d_1 + \beta d_2) + 4 \\ &= \alpha(2a_1 + 3b_1 + c_1 - d_1) + \beta(2a_2 + 3b_2 + c_2 - d_2) + 4 \\ &\neq \alpha T(A_1) + \beta T(A_2). \end{aligned}$$

Logo, T não é uma transformação linear.

(2.0)2. Ache todos os autovalores da matriz A abaixo, e os autovetores correspondentes ao seu menor autovalor.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solução:

Autovalores:

$$|A - \lambda I| = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_3 = 2, \;\; \lambda_2 = 1.$$

Autovetores (para $\lambda = 1$)

$$(A - I)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\{(-x_2, x_2, 0) = x_2(-1, 1, 0); \; x_2 \in I\!R\}$$

(2.0)3. Resolva o sistema linear abaixo pelo método de eliminação de Gauss com pivoteamento.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 = 1 \end{cases}$$

Solução:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1/3 & 2 & 8/3 \\ 0 & 4/3 & -1 & -11/3 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4/3 & -1 & -11/3 \\ 0 & -1/3 & 2 & 8/3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4/3 & -1 & -11/3 \\ 0 & 0 & 7/4 & 21/12 \end{array}\right)$$

Da última linha temos, $x_3 = 1$, Da segunda linha temos $x_2 = (3/4)(-11/3+1) = -2$. Da primeira linha temos $x_1 = (1/3)(1 - 4 \times (-2)) = 3$.

(4.0)4. Seja o operador linear $T : I\!R^2 \rightarrow I\!R^2$, definido por

$$T(1,2) = (1,1); \quad T(0,1) = (1,0).$$

(2.0)a. Determine $T(x,y)$.

(2.0)b. Determine $T^{-1}(x,y)$.

Solução:

(2.0)a. Seja $(x,y) = \alpha(1,2) + \beta(0,1)$. Então $x = \alpha$ e $y = 2\alpha + \beta$, ou seja $\alpha = x$ e $\beta = y - 2x$. Consequentemente, temos

$$T(x,y) = \alpha T(1,2) + \beta T(0,1) = \alpha(1,1) + \beta(1,0) = x(1,1) + (y-2x)(1,0) = (y-x,x)$$

Na forma matricial

$$T(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(2.0)b. A inversa de A é

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

E portanto,

$$T^{-1}(x,y) = A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (y, x+y).$$