Gabarito

Álgebra Linear: AD2 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2019.2
Tutores: André Ricardo & Dionísio Martins

1^a Questão) Solução:

Considere o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - 4x_2 & = & a \\ -x_1 + x_2 & = & b \\ 2x_1 - 2x_2 & = & c \end{array}\right. \tag{1}$$

Vamos resolvê-lo pelo Método de Eliminação de Gauss.

O sistema linear acima pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

A matriz aumentada é dada por:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & -4 & | & a \\ -1 & 1 & | & b \\ 2 & -2 & | & c \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & | & a \\ 0 & -3 & | & a+b \\ 0 & 6 & | & -2a+c \end{bmatrix}$$

Fazenndo $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & | & a \\ 0 & -3 & | & a+b \\ 0 & 0 & | & 2b+c \end{bmatrix}$$

Para que o sistema tenha solução, a condição necessária e suficiente é que $2b+c=0$

2^a Questão) Solução:

a) Calcularemos os cofatores $A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$, onde M_{ij} é o determinante menor de a_{ij} (eliminando-se a linha i e a coluna j da matriz A). Considerando a linha 1 da matriz, encontraremos $Det(A) = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + a_{13}.A_{13}$. Assim, temos:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2k & k-2 \end{vmatrix} = (-1)^2.[1(k-2) - (-4k)] = k - 2 + 4k = 5k - 2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -k & 2 \\ -2 & k-2 \end{vmatrix} = (-1)^3.[-k(k-2) - (-4)] = -1[-k^2 + 2k + 4] = k^2 - 2k - 4$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -k & 1 \\ -2 & -2k \end{vmatrix} = (-1)^4[2k^2 - (-2)] = 2k^2 + 2$$

Logo:

$Det(A) = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + a_{13}.A_{13}$

$Det(A) = k(5k-2) + 1(k^2 - 2k - 4) - 1(2k^2 + 2)$

$Det(A) = 5k^2 - 2k + k^2 - 2k - 4 - 2k^2 - 2$

$Det(A) = 4k^2 - 4k - 6.$

b) Uma matriz $n \times n$ é invertível se det $\neq 0$.

Vamos usar o resultado do item a):

$4k^2 - 4k - 6 = 0$. Resolvendo a equação $4k^2 - 4k - 6 = 0$, temos $k = 1,82; k = -0,82$.

Logo, para A ser invertível , $k \neq 1,82, k \neq -0,82$.

c) Utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss com pivoteamento para resolvê-lo.

Considere a seguinte matriz aumentada que representa este sistema :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Como $max|a_{i1}| = 2$, tomaremos ele como pivô, então trocamos L_1 por L_3:

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Agora, como $max|a_{i2}| = 2$, não precisamos trocar as linhas

Assim, temos o seguinte sistema após a eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - 1x_3 &= -1 \\ 2x_2 - \frac{5}{2}x_3 &= \frac{1}{2} \\ \frac{-3}{2}x_3 &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

Por L_3 neste sistema, temos que $x_3 = -\frac{1}{3}$.

Substituindo x_3 em L_2 temos:

$2x_2 - \frac{5}{6} = \frac{1}{2}$

$2x_2 = -\frac{8}{6}$

$x_2 = \frac{2}{3}$

Agora, substituindo x_2 e x_3 em L_1, temos que:

$2x_1 - 2.\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = -1$

$2x_1 - 1 = -1$

$x_1 = 0$

Logo, a solução é $S = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$.

3^a Questão) Solução:

a) $N(T) = \{(x, y, z)|T(x, y, z) = 0$. Assim temos:

$$\begin{cases} x - y - z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ x + 2y &= 0 \end{cases}$$

Usando Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - y - z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ -2z &= 0 \end{cases}$$

Através da linha 3 temos que $z = 0$. Substituindo o valor de $z = 0$ na linha 2 encontramos $y = 0$. Posteriormente substituindo os valores de $y = 0$ e $z = 0$ na linha 1 temos $x = 0$. Logo, $N(T) = (0, 0, 0)$. Como os vetores são LI, então

$$Im(T) = \{T(x, y, z) | (x + y - z, y + z, x + 2y) = x(1, 0, 1) + y(1, 1, 2) + z(-1, 1, 0)\}.$$

b) $N(T) = (0, 0, 0)$. Logo o $N(t)$ tem dimensão zero.

Conclusão: Base para $Im(T)$ é $\{(1, 0, 1), (1, 1, 2), (-1, 1, 0)\}$

Portanto, Dim $N(T) = 0$ e Dim $Im(T) = 3$.

4^a Questão) Solução:

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Portanto $A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.

Temos então que:

$$A.A^t = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & a.c+b.d \\ c.a+d.b & c^2+d^2 \end{bmatrix}.$$

Como $a.c + b.d = c.a + d.b$, para todo número real então $(A.A^t)$ é simétrica.

5^a Questão) Solução: Contra-exemplo:

Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$A - B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-1 & 0-2 \\ -2-0 & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(A-B)^2 = (A-B).(A-B) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+4 & 4+4 \\ 4+4 & 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 2-2 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+0 & -2+0 \\ -2+0 & -4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$2AB = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = B.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+6 \\ 0+0 & 0+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Então, temos:

$$A^2 - 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2+1 & 0+4+8 \\ 0+4+0 & 1+2+9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$$

Constatamos assim que $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

6^a Questão) Solução:

Temos que

$$T(x,y) = (x-y, 3x+y) = x(1,3) + y(-1,1).$$

A matriz associada ao operador linear é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Logo o polinômio característico é dado por

$$P_2(\lambda) = det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(1-\lambda) + 3$$

Tem-se que $P_2(\lambda) = 1 - \lambda - \lambda + \lambda^2 + 3$, ou seja, $P_2(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 4$. $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{12i^2}}{2} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{3i^2}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i$ Logo as raízes de $P_2(\lambda)$ são

$\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}i$ e $\lambda_2 = 1 - \sqrt{3}i$. Como as raízes são números complexos, pela definição de transformação linear o operador T não tem autovalores reais e autovetores reais.

7^a Questão) Solução: Considere a matriz $A|B$, onde A é a matriz com a linhas formadas pelos vetores a serem transformados e B a matriz com as linhas formadas pelos vetores já transformados. Usando a forma escada reduzida por linhas, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{2}{3}L_2$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 7/3 & 1/3 & -1 \end{bmatrix}$$

Agora, fazendo $L_3 \leftarrow 3L_3$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Agora, fazendo $L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Agora, fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

E fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{3}L_3$ e $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{3}L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Assim, temos: $T(x,y,z) = xT(1,0,0) + yT(0,1,0) + zT(0,0,1) = x(-2,0,1) + y(-4,-1,2) + z(7,1,-3) = (-2x - 4y + 7z, -y + z, x + 2y - 3z)$.

Logo a matriz transformação é :

$$T = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Agora, encontraremos T^{-1}, colocando a matriz $T|I$ na forma escada reduzida por linhas, onde T é a matriz transformação e I é matriz identidade. Considere

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trocando L_3 por L_1, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 7 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_2 \leftarrow -L_2$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$ e $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Podemos escrever $T^{-1}(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x - y + 2z, x + 2z)$.