Gabarito

Álgebra Linear: AD1 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2017
Tutores: Gabriel Thomaz e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

Considere as incógnitas:

$$\begin{aligned} X &= \text{quantidade de kg do produto X} \\ Y &= \text{quantidade de kg do produto Y} \\ Z &= \text{quantidade de kg do produto Z} \end{aligned}$$

Para montar o sistema relativo ao problema, vamos somar as quantidades de insumo A dos três produtos X, Y, Z e igualar a quantidade total (em gramas) de insumo A utilizada (linha L_1 do sistema). Faremos o mesmo procedimento para o insumo B (linha L_2 do sistema). Então multiplicaremos o preço de cada kg pelo seu respectivo produto e igualaremos ao valor total que a indústria arrecadou (linha L_3 do sistema). Assim temos:

$$\begin{cases} X + 2Y + 4Z = 1900 \\ X + 3Y + Z = 2100 \\ 3X + 2Y + Z = 2600 \end{cases} \tag{1}$$

Utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss para resolvê-lo. Considere a seguinte matriz aumentada que representa este sistema :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1900 \\ 1 & 3 & 1 & 2100 \\ 3 & 2 & 1 & 2600 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1900 \\ 0 & 1 & -3 & 200 \\ 0 & -4 & -11 & -3100 \end{bmatrix}.$$

Agora, fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1900 \\ 0 & 1 & -3 & 200 \\ 0 & 0 & -23 & -2300 \end{bmatrix}.$$

Assim, temos o seguinte sistema após a eliminação de Gauss:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} X + 2Y + 4Z & = & 1900 \\ Y - 3Z & = & 200 \\ -23Z & = & -2300 \end{array} \right. \tag{2}$$

Por L_3 neste sistema, temos que $Z = 100$.

Substituindo Z em L_2 temos que $Y = 500$.

Agora, substituindo Y e Z em L_1, temos que $X = 500$.

Logo, foram vendidos 500 kg do produto X, 500 kg do produto Y e 100 kg do produto Z.

2^a Questão) Solução:

a) $proj_v u = \dfrac{uv}{||v||^2} v = \dfrac{(1,-2,0)(2,0,1)}{2^2+0^2+1^2}(2,0,1) = \dfrac{2}{5}(2,0,1) = \left(\dfrac{4}{5}, 0, \dfrac{2}{5}\right).$

b) $d(u,v) = \sqrt{(2-1)^2 + (0-(-2))^2 + (1-0)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}.$

c) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Consideremos

$$a(1,-2,0) + b(2,0,1) = (a+2b, -2a, b) = (x,y,z)$$

Assim, temos:

$$\begin{cases} a + 2b = x \\ -2a = y \\ b = z \end{cases}$$

Por L_3 temos que $b = z$ e por L_2 temos que $a = \dfrac{-y}{2}$. Substituindo em L_1, temos que $x = \frac{-y}{2} + 2z$. Logo $[u, v] = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = \dfrac{-y}{2} + 2z\right\}$.

d) $[u, v] = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \left(\dfrac{-y}{2} + 2z, y, z\right)\right\}$.
$\left(\frac{-y}{2} + 2z, y, z\right) = y\left(\frac{-1}{2}, 1, 0\right) + z\,(2, 0, 1)\,.$
Logo uma base para este subespaço é $B = \left\{\left(\dfrac{-1}{2}, 1, 0\right), (2, 0, 1)\right\}$.
Tome $v_1 = \left(\dfrac{-1}{2}, 1, 0\right), v_2 = (2, 0, 1)$.
Vamos ortogonalizar esta base usando o método de Gram-Schmidt.
Seja $w_1 = v_1 = \left(\dfrac{-1}{2}, 1, 0\right)$.
Temos que $w_2 = v_2 - \left(\dfrac{v_2 w_1}{w_1 w_1}\right) w_1$.
Logo

$$w_2 = (2, 0, 1) - \left(\frac{(2, 0, 1)(\frac{-1}{2}, 1, 0)}{(\frac{-1}{2}, 1, 0)(\frac{-1}{2}, 1, 0)}\right)\left(\frac{-1}{2}, 1, 0\right)$$

$$= (2, 0, 1) - \left(\frac{-4}{5}\left(\frac{-1}{2}, 1, 0\right)\right) =$$

$$= (2, 0, 1) - \left(\frac{4}{10}, \frac{-4}{5}, 0\right) = \left(\frac{16}{10}, \frac{4}{5}, 1\right) = \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)$$

Assim, temos que a base ortogonal é $\left\{\left(\dfrac{-1}{2}, 1, 0\right), \left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{4}{5}, 1\right)\right\}$.

e)

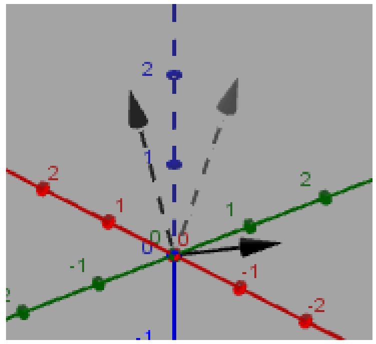

Figura 1: Vetor resultante

3^a Questão) Solução:

a) $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 9 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad 2B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \end{bmatrix}$

$$A^T - 2B = \begin{bmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 9 & 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -6 \\ 11 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

b)$C = AB = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -6 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-9 & -1+36 & 2+9 \\ -6-2 & 8+6 & -12+2 \\ -2-5 & 2+20 & -4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 35 & 11 \\ -8 & 14 & -10 \\ -7 & 22 & 1 \end{bmatrix}$

c)$C = BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -6 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6-4 & 9-2+10 \\ -1-24-2 & -9+8+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 17 \\ 27 & 4 \end{bmatrix}$

4^a Questão) Solução:

Para o conjunto ser L.D., temos que ter uma destas três matrizes dadas como combinação linear das outras duas. Assim, temos para $a, b \in \mathbb{R}$:

$av_1 + bv_2 = v_3$

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

e portanto temos o sistema

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ b = -1 \\ a = k_1 \\ -2b = k_2 \end{cases}$$

Substituindo L_2 em L_1, temos que $a - 1 = 2 \Longrightarrow a = 3$. Logo, por L_3 e L_4, encontramos que $k_1 = 3$ e $k_2 = 2$.

5^a Questão) Solução:

A matriz aumentada $[A|0]$ do sistema é dada por

$$[A|0] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Resolvendo o sistema, $x_3 = -\frac{3}{5}x_4$ e $x_1 = \frac{2}{5}x_4 - 2x_2$. Assim, o conjunto solução do sistema é:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_3 = -\frac{3}{5}x_4 \text{ e } x_1 = \frac{2}{5}x_4 - 2x_2\}$$

Como x_2 e x_4 são variáveis livres, conclui-se que $dimS = 2$. Logo, qualquer subconjunto de S com dois vetores LI forma uma base de S. Assim,

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{2}{5}x_4 - 2x_2, x_2, -\frac{3}{5}x_4, x_4) = (-2, 1, 0, 0)x_2 + (\frac{2}{5}, 0, -\frac{3}{5}, 1)x_4$.

Logo, $v1 = (-2, 1, 0, 0)$ e $v_2 = (\frac{2}{5}, 0, -\frac{3}{5}, 1)$ formam uma base para S.