Gabarito

Álgebra Linear: AD2 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2014.2

Tutores: Cristina Lopes e Rodrigo Olimpio

1ª Questão) Solução:

a) Considere o sistema linear :

$$\begin{cases} -x + 3y &= b_1 \\ 2x - y &= b_2 \\ -2x + y &= b_3 \\ 3x + y &= b_4 \end{cases}$$

A matriz aumentada dos coeficientes é dada por:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & b_1 \\ 2 & -1 & b_2 \\ -2 & 1 & b_3 \\ 3 & 1 & b_4 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1, L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & b_1 \\ 0 & 5 & b_2 + 2b_1 \\ 0 & -5 & b_3 - 2b_1 \\ 0 & 10 & b_4 + 3b_1 \end{bmatrix}.$$

De $L_4, y = \dfrac{b_4 + 3b_1}{10}$. De L_2 temos que $y = \dfrac{b_2 + 2b_1}{5}$. Comparando as duas linhas, temos que $2b_2 + 4b_1 = b_4 + 3b_1 \Rightarrow b_1 = b_4 - 2b_2$. Comparando L_2 e L_3, temos que $b_3 = -b_2$. Logo b deve ser da forma $(b_4 - 2b_2, b_2, -b_2, b_4)$.

b)

A matriz aumentada dos coeficientes é dada por:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1, L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por L_2, L_3, L_4 , $y = 0$. E por L_1, $x = 0$.

Logo a base para o espaço nulo é $(0, 0)$, dimensão 0.

c) Usando o item a), por L_2, temos que $y = \dfrac{b_2 + 2b_1}{5}$. Por L_1, $x = 3y - b_1$. Substituindo y, temos que

$x = \dfrac{3b_2 + 6b_1}{5} - b_1 \Rightarrow x = \dfrac{b_1 + 3b_2}{5}$.

Portanto a solução geral do sistema $(x, y) = \left(\dfrac{b_1 + 3b_2}{5}, \dfrac{b_2 + 2b_1}{5}\right)$ se $b_3 = -b_2$ e $b_4 = b_1 + 2b_2$, ou seja, o vetor dos termos independentes seja dado por:

$b = (b_1,\ b_2,\ -b_2,\ b_1 + 2b_2)$.

d) Usando o item b), considerando a matriz A já escalonada, temos que as colunas de A são $(-1, 0, 0, 0)^t, (3, 5, -5, 10)^t$. Como estas colunas são LIs , estes vetores formam uma base para as colunas de A.

2^a Questão) Solução:

a) Considere o sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} x - y - z &= 0 \\ x - 2y - 2z &= 0 \\ 2x + ky + z &= 0 \end{cases}$$

A matriz aumentada dos coeficientes é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & k & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & k+2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + (k+2)L_2$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & 0 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & 0 \end{bmatrix}.$$

Da última equação, temos que $(1-k)z = 0$. Logo ou $1 - k = 0 \Leftrightarrow k = 1$ ou $z = 0$. Da segunda equação, $-y - z = 0$, o que implica que $y = -z$. Da primeira equação, temos que $x = 0$.

Assim, tomando $k = 1$, a terceira linha é uma combinação linear das outras duas, ou seja a linha 3 é dependente das outras duas, logo o determinante da matriz é igual a zero e portanto o sistema tem infinitas soluções, dadas por $X = \{(0, -z, z)\}$, onde $z \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, se $k \neq 1$ então a única solução possível é a solução trivial $X = \{(0, 0, 0)\}$.

b) Note que o sistema linear homogêneo sempre tem pelo menos uma solução, que é a solução trivial $X = (0, 0, 0)$. Para que o sistema não tenha outra solução, além da solução trivial, a constante k deve satisfazer a condição, $k \neq 1$.

c) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & k & 1 \end{bmatrix}$$

a matriz dos coeficientes.

Note inicialmente, que o determinante é simplesmente o determinante da matriz triangular superior do item a), ou seja

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-k \end{bmatrix}.$$

Assim, $det(A_3) = k - 1$. Observe que como não houve troca de linhas então o sinal é o mesmo.

Vamos calcular o determinante usando a fórmula de Laplace:

Expandindo o determinante em relação à primeira coluna, obtemos:

$$det(A) = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$$

onde M_{ij} é o determinante menor de a_{ij}.

Então, temos:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}det(M_{11}) = (-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ k & 1 \end{vmatrix} = (1)(-2+2k) = -2+2k$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}det(M_{21}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ k & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1+k) = 1-k$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}det(M_{31}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = (1)(2-2) = 0$$

Assim:

$$\begin{aligned} det(A) &= (1)(A_{11}) + (1)(A_{21}) + (2)(A_{31}) \\ det(A) &= (1)(-2+2k) + (1)(1-k) + (2).0 \\ det(A) &= -2+2k+1-k \\ det(A) &= k-1 \end{aligned}$$

d) Para calcular a inversa da matriz A, usaremos a fórmula $A^{-1} = \dfrac{1}{detA}.Adj(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & k & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular $Adj(A) = [Cof(A)]^T$, onde $Cof(A)$ é a matriz dos cofatores. Por isso, calcularemos os cofatores $A_{ij} = (-1)^{i+j}det(M_{ij})$, onde M_{ij} é o determinante menor de a_{ij}.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ k & 1 \end{vmatrix} = (-1)^2.[-2+2k] = 1.(-2+2k) = -2+2k$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3.[1+4] = (-1).(5) = -5$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & k \end{vmatrix} = (-1)^4.[k+4] = 1.(k+4) = k+4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ k & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3.[-1+k] = (-1).(-1+k) = 1-k$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4.[1+2] = 1.(3) = 3$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & k \end{vmatrix} = (-1)^5.[k+2] = (-1).(k+2) = -k-2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^4.[2-2] = 1.(0) = 0$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^5.[-2+1] = (-1).(-1) = 1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^6.[-2+1] = 1.(-1) = -1$$

Assim, a matriz dos cofatores fica:

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} -2+2k & -5 & k+4 \\ 1-k & 3 & -k-2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

E portanto, calculando a transposta da matriz dos cofatores, obtemos $Adj(A)$:

$$Adj(A) = [Cof(A)]^T = \begin{bmatrix} -2+2k & 1-k & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ k+4 & -k-2 & -1 \end{bmatrix}$$

Como sabemos, $detA = k-1$, e a matriz dos coeficientes só é invertível quando $detA \neq 0$, isto é, quando $k-1 \neq 0$, o que implica que $k \neq 1$. Aplicando a fórmula $A^{-1} = \dfrac{1}{detA}.Adj(A)$, encontramos:

$$A^{-1} = \frac{1}{k-1}\begin{bmatrix} -2+2k & 1-k & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ k+4 & -k-2 & -1 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{-2+2k}{k-1} & \dfrac{1-k}{k-1} & 0 \\ \dfrac{-5}{k-1} & \dfrac{3}{k-1} & \dfrac{1}{k-1} \\ \dfrac{k+4}{k-1} & \dfrac{-k-2}{k-1} & \dfrac{-1}{k-1} \end{bmatrix}, k \neq 1$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ \dfrac{-5}{k-1} & \dfrac{3}{k-1} & \dfrac{1}{k-1} \\ \dfrac{k+4}{k-1} & \dfrac{-k-2}{k-1} & \dfrac{-1}{k-1} \end{bmatrix}, k \neq 1$$

3^a Questão) Solução:

a) Considere o sistema $Ax = 0$, com a matriz aumentada com suas colunas formadas pelos vetores dados e a última com o vetor nulo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + (1/7)L_2$ e multiplicando a terceira linha por 7 tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 59 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podemos concluir claramente que a única solução para o sistema $Ax = 0$, é $x = (0,0,0)$.

Logo, os vetores dados são LIs e formam uma base para o espaço gerado por eles.

Vamos ortogonalizar usando Gram Schmidt:

Seja $w_1 = (1,-2,0)$.

Temos que

$$w_2 = (2,3,-1) - \left(\frac{(2,3,-1)(1,-2,0)}{(1,-2,0)(1,-2,0)}\right)(1,-2,0)$$

$$= (2,3,-1) - \left(\frac{-4}{5}\right)(1,-2,0) =$$

$$= (2,3,-1) + \left(\frac{4}{5}, \frac{-8}{5}, 0\right) = \left(\frac{14}{5}, \frac{7}{5}, -1\right).$$

$$w_3 = (0,3,8) - \left(\frac{(0,3,8)\left(\frac{14}{5}, \frac{7}{5}, -1\right)}{\left(\frac{14}{5}, \frac{7}{5}, -1\right)\left(\frac{14}{5}, \frac{7}{5}, -1\right)}\right)\left(\frac{14}{5}, \frac{7}{5}, -1\right)$$

$$- \left(\frac{(0,3,8)(1,-2,0)}{(1,-2,0)(1,-2,0)}\right)(1,-2,0)$$

$$= (0,3,8) - \left(\frac{-19}{54}\right)\left(\frac{14}{5}, \frac{7}{5}, -1\right) - \left(\frac{-6}{5}\right)(1,-2,0)) =$$

$$= (0,3,8) + \left(\frac{266}{270}, \frac{133}{270}, \frac{-19}{54}\right) + \left(\frac{6}{5}, \frac{-12}{5}, 0\right) =$$

$$\left(\frac{590}{270}, \frac{295}{270}, \frac{413}{54}\right) = \left(\frac{59}{27}, \frac{59}{54}, \frac{413}{54}\right).$$

Logo , uma base ortogonal é : $\{(1,-2,0), \left(\frac{14}{5}, \frac{7}{5}, -1\right), \left(\frac{59}{27}, \frac{59}{54}, \frac{413}{54}\right)\}$

b) Vamos calcular a projeção ortogonal de v sobre S.

$$proj_S v = \left(\frac{(1,0,0)(1,-2,0)}{(1,-2,0)(1,-2,0)}\right)(1,-2,0) + \left(\frac{(1,0,0)\left(\frac{14}{5}, \frac{7}{5}, -1\right)}{\left(\frac{14}{5}, \frac{7}{5}, -1\right)\left(\frac{14}{5}, \frac{7}{5}, -1\right)}\right)\left(\frac{14}{5}, \frac{7}{5}, -1\right) +$$

$$\left(\frac{(1,0,0)\left(\frac{59}{27}, \frac{59}{54}, \frac{413}{54}\right)}{\left(\frac{59}{27}, \frac{59}{54}, \frac{413}{54}\right)\left(\frac{59}{27}, \frac{59}{54}, \frac{413}{54}\right)}\right)\left(\frac{59}{27}, \frac{59}{54}, \frac{413}{54}\right) =$$

$$\frac{1}{5}(1,-2,0) + \frac{7}{27}\left(\frac{14}{5}, \frac{7}{5}, -1\right) + \frac{2}{59}\left(\frac{59}{27}, \frac{59}{54}, \frac{413}{54}\right) =$$

$$\left(\frac{1}{5}, \frac{-2}{5}, 0\right) + \left(\frac{98}{135}, \frac{49}{135}, \frac{-7}{27}\right) + \left(\frac{2}{27}, \frac{1}{27}, \frac{826}{3186}\right) = (1,0,0).$$

Logo, concluímos que $(1,0,0)$ é vetor de $[S]$.

Observação: Note, que pelo item a), mostrou-se que os vetores $\{u_1, u_2, u_3\}$ geram o espaço $S = \mathbb{R}^3$. Como o vetor $(1,0,0) \in \mathbb{R}^3$ então a sua projeção é o próprio vetor, e os cálculos acima são desnecessários.

4^a Questão) Solução:

$$T(x,y,z) = (x + 2y + 2z, x + 2y - z, -x + y + 4z)$$

a) $T(u) = T(x,y,z) = (-1,8,-11)$

$$(x+2y+2z, x+2y-z, -x+y+4z) = (-1, 8, -11)$$

$$\begin{cases} x+2y+2z &= -1 \\ x+2y-z &= 8 \\ -x+y+4z &= -11 \end{cases}$$

Usando Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 8 \\ -1 & 1 & 4 & -11 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 3 & 6 & -12 \end{bmatrix}.$$

Trocando L_2 com L_3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2.\dfrac{1}{3}$ e $L_3 \leftarrow L_3.\left(\dfrac{-1}{3}\right)$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Da última equação, temos que $z = -3$. Da segunda equação, $y + 2z = -4 \Rightarrow y + 2.(-3) = -4 \Rightarrow y = 2$. Finalmente, substituindo y e z na primeira equação temos: $x + 2y + 2z = -1 \Rightarrow x + 2.2 + 2.(-3) = -1 \Rightarrow x = -1 - 4 + 6 \Rightarrow x = 1$.

Assim, $u = (1, 2, -3)$.

b)

$$T(v) = v$$

$$(x+2y+2z, x+2y-z, -x+y+4z) = (x,y,z)$$

$$\begin{cases} x+2y+2z &= x \\ x+2y-z &= y \\ -x+y+4z &= z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0x+2y+2z &= 0 \\ x+y-z &= 0 \\ -x+y+3z &= 0 \end{cases}$$

Usando Gauss:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Trocando L_1 com L_2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O sistema tem infinitas soluções. Por L_2, temos que $2y+2z=0 \Rightarrow y+z=0 \Rightarrow y=-z$ e por L_1, que $x=z-y \Rightarrow x=z-(-z) \Rightarrow x=2z$.

Tomando $z=r \neq 0$, com $r \in \mathbb{R}$, a solução do sistema é dada por: $S=\{(2r,-r,r), r \in \mathbb{R}\} = \{r(2,-1,1), r \in \mathbb{R}\}$.

Logo, $v = \{r(2, -1, 1), r \in \mathbb{R}\}$

c)

$$Im(T) = \{(a, b, c)|(a, b, c) = (x + 2y + 2z, x + 2y - z, -x + y + 4z)\}.$$

$$(x + 2y + 2z, x + 2y - z, -x + y + 4z) = x(1, 1, -1) + y(2, 2, 1) + z(2, -1, 4).$$

Vamos verificar se estes vetores que geram a imagem são LIs. Considere a matriz aumentada com suas linhas sendo formadas pelos vetores dados e com a coluna do termo independente nula. Vamos verificar se o vetor nulo é a única solução do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ temos :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Trocando L_2 com L_3, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por L_3, temos que $z = 0$. Por L_2, temos que $y = 0$. E por L_1, temos que $x = 0$. Logo os vetores $\{(1, 1, -1), (2, 2, 1), (2, -1, 4)\}$ formam uma base para a imagem de T, com dimensão 3.

d) $N(T) = \{(x, y, z)|T(x, y, z) = 0\}$. Assim temos:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z &= 0 \\ x + 2y - z &= 0 \\ -x + y + 4z &= 0 \end{cases}$$

Usando Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Trocando L_2 com L_3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2.\dfrac{1}{3}$ e $L_3 \leftarrow L_3.\left(\dfrac{-1}{3}\right)$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por L_3, temos que $z = 0$. Por L_2, temos que $y + 2z = 0 \Rightarrow y + 2.0 = 0 \Rightarrow y = 0$ e por L_1, que $x + 2y + 2z = 0 \Rightarrow x = 0$. Assim, $N(T) = (0,0,0)$, logo uma base para o núcleo é $\{(0,0,0)\}$ e dim N(T) = 0.

5^a Questão) Solução:

Temos que

$$T(x,y,z) = (x + 2y, x + 2y - z, y + z) = x(1,1,0) + y(2,2,1) + z(0,-1,1).$$

A matriz associada ao operador linear é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Logo o polinômio característico é dado por

$$P_2(\lambda) = det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2.(2-\lambda) + (1-\lambda) - 2(1-\lambda)$$

$$P_2(\lambda) = (1-\lambda)^2.(2-\lambda) + 1 - \lambda - 2 + 2\lambda$$

$$P_2(\lambda) = (1-\lambda)^2.(2-\lambda) + \lambda - 1$$

$$P_2(\lambda) = (1-\lambda)^2.(2-\lambda) - (1-\lambda)$$

Colocando $1-\lambda$ em evidência, temos:

$$P_2(\lambda) = (1-\lambda)[(1-\lambda).(2-\lambda) - 1]$$

Calculando as raízes de $P_2(\lambda)$, temos que: $(1-\lambda) = 0$ ou $(1-\lambda).(2-\lambda) - 1 = 0$ Da primeira equação temos: $\lambda_1 = 1$ e da segunda, $(1-\lambda).(2-\lambda) - 1 = 0 \Rightarrow 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$.

As raízes da segunda equação são $\lambda_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_3 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. Logo os autovalores do operador T são: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_3 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Cálculo dos autovetores v associados aos autovalores λ.

1. Autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 1$. Do polinômio característico temos

$$A - 1I = \begin{bmatrix} 1-1 & 2 & 0 \\ 1 & 2-1 & -1 \\ 0 & 1 & 1-1 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$A - 1I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Trocando L_2 com L_1:

$$A - 1I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_1$, obtemos

$$A - 1I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da primeira linha, temos $x+y-z = 0$ e da segunda linha, $2y = 0$, o que implica $y = 0$. Então, substituindo na primeira linha, temos: $x - z = 0 \Rightarrow x = z$. Obtemos a solução $v_1 = (x, 0, z) = (x, 0, x) = x\,(1, 0, 1)$. Portanto $(1, 0, 1)$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$.

2. Autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Para facilitar nos cálculos vamos considerar a aproximação $\lambda_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} = 0,381966$ Então

$$A - 0,381966I = \begin{bmatrix} 0,618034 & 2 & 0 \\ 1 & 1,618034 & -1 \\ 0 & 1 & 0,618034 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftrightarrow L_2 - \dfrac{1}{0,618034}L_1$, obtemos

$$A - 0,381966I = \begin{bmatrix} 0,618034 & 2 & 0 \\ 0 & -1,618034 & -1 \\ 0 & 1 & 0,618034 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftrightarrow L_3 + \dfrac{1}{1,618034}L_2$, obtemos

$$A - 0,381966I = \begin{bmatrix} 0,618034 & 2 & 0 \\ 0 & -1,618146 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo os cálculos, obtém-se os autovetores $v_2 = x(1;\ -0,309017;\ 0,5)$

3. Autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.Para facilitar nos cálculos vamos considerar a aproximação $\lambda_3 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} = 2,618034$ Então

$$A - 2,618034I = \begin{bmatrix} -1,618034 & 2 & 0 \\ 1 & -0,618034 & -1 \\ 0 & 1 & -1,618034 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftrightarrow L_2 + \dfrac{1}{1,618034}L_1$, obtemos

$$A - 2,618034I = \begin{bmatrix} -1,618034 & 2 & 0 \\ 0 & 0,618034 & -1 \\ 0 & 1 & -1,618034 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftrightarrow L_3 - \dfrac{1}{0,618034}L_2$, obtemos

$$A - 2,618034I = \begin{bmatrix} -1,618034 & 2 & 0 \\ 0 & 0,618034 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo os cálculos, obtém-se os autovetores $v_3 = x(1;\ 0,809017;\ 0,5)$