Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP1 - Primeiro Semestre de 2009
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(2.0)1. Considere o conjunto de vetores:

$$\{(1,0,-1),(1,1,0),(k,1,-1)\}$$

(1.0)a. Determine a condição a ser satisfeita por k para que os vetores do conjunto sejam linearmente independentes.

(0.5)b. Considerando agora $k=2$, calcule o módulo do vetor $(k,1,-1)$.

(0.5)c. Considerando ainda $k=2$ calcule o ângulo entre os vetores $(1,1,0)$ e $(k,1,-1)$.

Solução:

(a) Os vetores serão LI se, e somente se, a equação

$$a(1,0,-1)+b(1,1,0)+c(k,1,-1)=(0,0,0)$$

admitir apenas a solução trivial $a=b=c=0$. Dessa equação, temos

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & + & kc & = & 0 \\ & & b & + & c & = & 0 \\ -a & & & - & c & = & 0 \end{array}\right.$$

Da segunda equação temos $b=-c$ e da terceira equação temos $a=-c$. Substituindo estes resultados na primeira equação temos

$(-2+k)c = 0$. Para que esse sistema admita apenas a solução trivial, deve-se ter, portanto, $k \neq 2$. Logo, os vetores serão L.I. se $k \neq 2$.

(b)
$$||(2,1,-1)|| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

(c) Considerando $v_1 = (1,1,0)$ e $v_2 = (2,1,-1)$,

$$\cos(\theta) = \frac{v_1 \cdot v_2}{||v_1|| \cdot ||v_2||} = \frac{2+1+0}{\sqrt{1+1}\sqrt{4+1+1}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo $\theta = 30^o$.

(1.0)2. Determine a dimensão e uma base do espaço vetorial

$$S = \{(x,y,z) \in I\!R^3 | 2x + y + z = 0\}$$

Solução:

Isolando z na equação de definição, tem-se: $z = -2x - y$, onde x e y são variáveis livres. Qualquer vetor $(x,y,z) \in S$ tem a forma: $(x, y, -2x - y)$ e, portanto, podemos escrever:

$$(x,y,z) = (x, y, -2x - y)$$

ou

$$(x,y,z) = (x, 0, -2x) + (0, y, -y)$$

ou

$$(x,y,z) = x(1,0,-2) + y(0,1,-1)$$

isto é, todo vetor de S é combinação linear dos vetores $(1,0,-2)$ e $(0,1,-1)$. Como esses dois vetores geradores de S são L.I., o conjunto $\{(1,0,-2),(0,1,-1)\}$ é uma base de S e, consequentemente, dim$S$=2.

(3.0)3. Considere o sistema linear abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & - & 4z & + & 3t & = & 0 \\ x & + & 2y & - & 2z & + & 2t & = & 0 \\ 2x & + & 4y & - & 2z & + & 3t & = & 0 \end{array} \right.$$

(1.0)a. Mostre que o conjunto-solução do sistema é um subspaço vetorial de $I\!R^4$.

(2.0)b. Determine uma base e a dimensão do conjunto-solução do sistema.

Solução:

(a) Fazendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \ u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}, \ 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o sistema, em notação matricial, será dado por $Au = 0$, sendo u elemento do conjunto-solução do sistema, que chamaremos de S.

Se $u_1 \in S$ e $u_2 \in S$ então $Au_1 = 0$ e $Au_2 = 0$. Logo $Au_1 + Au_2 = 0$ ou $A(u_1 + u_2) = 0$. Logo $u_1 + u_2 \in S$.

Se $u_1 \in S$ e α é um real, temos $A(\alpha u_1) = \alpha(Au_1) = \alpha 0 = 0$. Logo $\alpha u_1 \in S$.

Logo, o conjunto-solução S do sistema linear homogêneo é um subspaço vetorial de $I\!R^4$.

(b) O conjunto-solução do sistema é:

$$S = \{(x, y, z, t)/t = 2z \ e \ x = -2y - 2z\}.$$

Tendo em vista serem duas as variáveis livres (y e z), conclui-se que dim$S = 2$. Logo, qualquer subconjunto de S com dois vetores LI formam uma base para S. Façamos (1) $y = 1$, $z = 0$ (2) $y = 0$, $z = 1$, para obter os vetores $v_1 = (-2, 1, 0, 0)$ e $v_2 = (-2, 0, 1, 2)$. O conjunto $\{v_1, v_2\}$ éuma base de S.

(4.0)4. Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & n \\ m & 9 \end{bmatrix}$$

(1.0)a. Calcular m e n para que a matriz (AB) seja igual a matriz identidade.

(1.0)b. Calcular m e n para que a matriz (B^2) seja igual a matriz

$$\begin{bmatrix} 22 & 26 \\ 39 & 87 \end{bmatrix}.$$

(1.0)c. Determine que hipótese deve ser satisfeita por m e n para que a matriz B^2 seja simétrica.

(1.0)d. Considerando agora $n = -2$ e $m = -3$ calcular $(AB)^T$.

Solução:

(a) Efetuando o produto AB, temos

$$AB = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & n \\ m & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 + 5m & 9n + 45 \\ 28 + 4m & 7n + 36 \end{bmatrix}$$

Para termos $AB = I$, ou seja,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

devemos ter

$$\begin{aligned} 36 + 5m &= 1 \\ 9n + 45 &= 0 \\ 28 + 4m &= 0 \\ 7n + 36 &= 1 \end{aligned}$$

ou seja, $m = -7$ e $n = -5$.

(b)

$$B^2 = \begin{bmatrix} 4 & n \\ m & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & n \\ m & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 + mn & 13n \\ 13m & mn + 81 \end{bmatrix}.$$

Portanto, devemos ter

$$\begin{bmatrix} 16 + mn & 13n \\ 13m & mn + 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 26 \\ 39 & 87 \end{bmatrix},$$

o que implica em $m = 3$ e $n = 2$.

(c) Devemos ter

$$\begin{bmatrix} 16+mn & 13n \\ 13m & mn+81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16+mn & 13m \\ 13n & mn+81 \end{bmatrix},$$

ou seja, devemos ter $m = n$.

(d) Neste caso, temos

$$AB = \begin{bmatrix} 21 & 27 \\ 16 & 12 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$AB^T = \begin{bmatrix} 21 & 16 \\ 27 & 12 \end{bmatrix}.$$