Álgebra Linear

Aula 14: Transformações Lineares

Mauro Rincon

Márcia Fampa

12.1 - Definições

Sejam V e W dois espaços vetoriais. Para dizer que T é uma transformação do espaço vetorial V no espaço vetorial W, escreve-se:

$$\boxed{T : V \longrightarrow W}$$

Sendo T uma função, cada vetor $\mathbf{v} \in V$ tem um só vetor imagem $\mathbf{w} \in W$, que será indicado por $\mathbf{w} = T(\mathbf{v})$.

12.1 - Definições

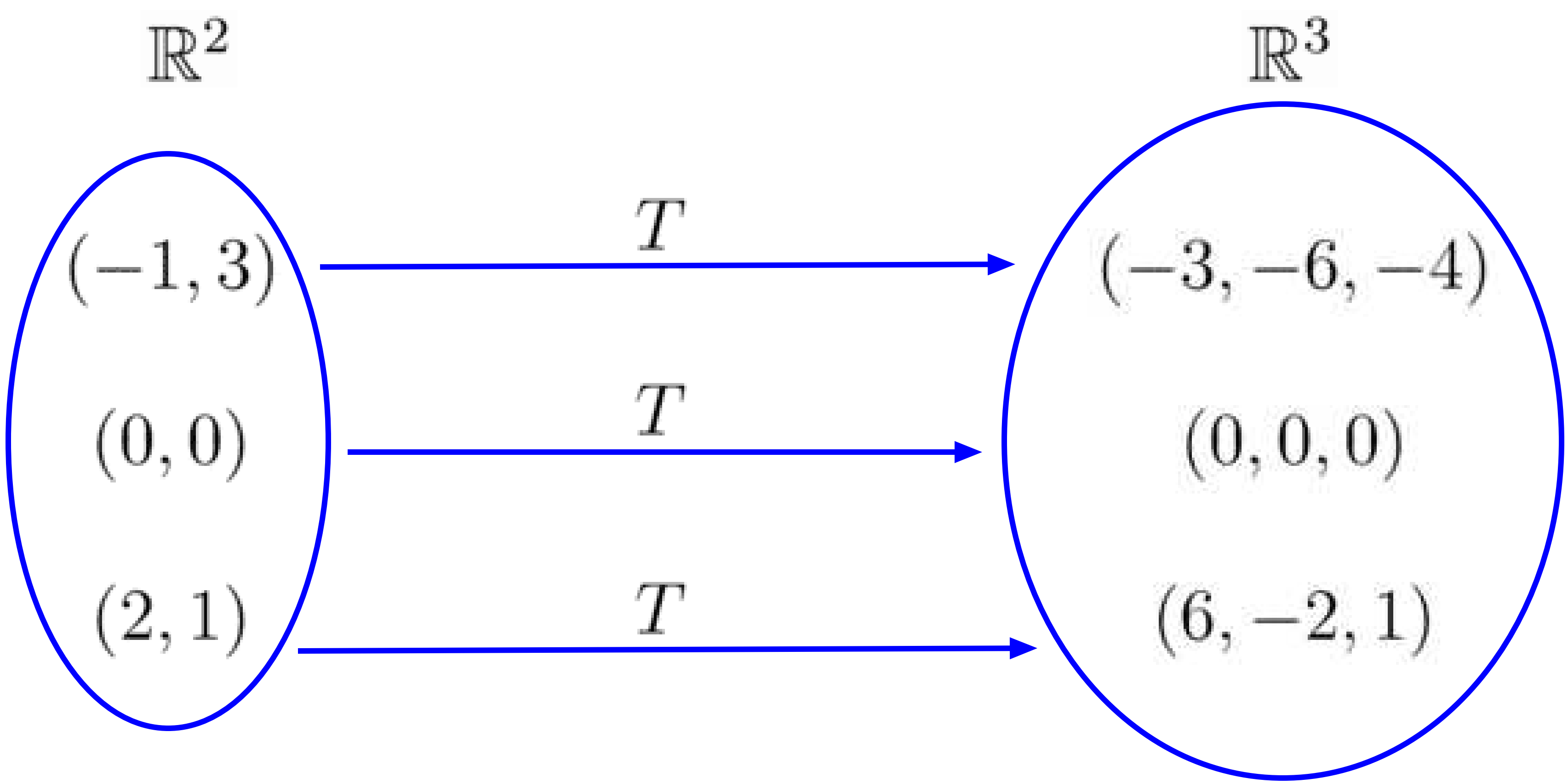
Por exemplo, seja $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R}^3$. Uma transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ associa vetores $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ com vetores $\mathbf{w} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Se a lei que define a transformação T for:

$$T(x, y) = (3x, -2y, x - y)$$

então, em particular temos:

$$\begin{aligned} T(-1, 3) &= (-3, -6, -4) \\ T(0, 0) &= (0, 0, 0) \\ T(2, 1) &= (6, -2, 1) \end{aligned}$$

12.1 - Definições



12.1 - Definições

Definição: Sejam V e W espaços vetoriais. Uma aplicação $T : V \longrightarrow W$ é chamada transformação linear se:

i) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$

ii) $T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall \mathbf{u} \in V$

12.1 - Definições

Exemplo 1: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por:
$T(x, y) = (3x, -2y, x - y)$ é uma transformação linear. De fato:

i) Sejam $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ em $\mathbb{R}^2$. Então:

$$
\begin{aligned}
T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= T(\underbrace{x_1 + x_2}_{x}, \underbrace{y_1 + y_2}_{y}) \\
&= (3(x_1 + x_2), -2(y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)) \\
&= (3x_1, -2y_1, x_1 - y_1) + (3x_2, -2y_2, x_2 - y_2) \\
&= T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) \\
&= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})
\end{aligned}
$$

Logo $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$.

12.1 - Definições

ii)

$$
\begin{aligned}
T(\alpha\mathbf{u}) &= T(\alpha(x_1, y_1)) = T(\alpha x_1, \alpha y_1) \\
&= (3(\alpha x_1), -2(\alpha y_1), \alpha x_1 - \alpha y_1) \\
&= (\alpha(3x_1), \alpha(-2y_1), \alpha(x_1 - y_1)) \\
&= \alpha(3x_1, -2y_1, x_1 - y_1) \\
&= \alpha T(\mathbf{u})
\end{aligned}
$$

$\therefore T$ é uma transformação linear.

12.1 - Definições

Exemplo 2:

$$T: \quad \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x \end{array},$$

ou seja $T(x) = 3x$ é linear. Sejam $\mathbf{u} = x_1$ e $\mathbf{v} = x_2 \in \mathbb{R}$. Então:

i) $$\begin{aligned} T(x_1 + x_2) &= 3(x_1 + x_2) = 3x_1 + 3x_2 \\ &= T(x_1) + T(x_2) \end{aligned}$$

ii) $T(\alpha x_1) = 3(\alpha x_1) = \alpha(3x_1) = \alpha T(x_1)$.

$\therefore$ Logo $T(x) = 3x$ é uma transformação linear.

12.1 - Definições

Exemplo 3:

$$\begin{aligned} T: \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto 3x+1 \end{aligned}$$

$T(x) = 3x + 1$ é uma transformação linear?

i) $T(x_1 + x_2) = 3(x_1 + x_2) + 1 = 3x_1 + 3x_2 + 1$

$$\left.\begin{array}{l} T(x_1) = 3x_1 \\ T(x_2) = 3x_2 \end{array}\right\} T(x_1 + x_2) \neq T(x_1) + T(x_2)$$

Logo $T(x) = 3x + 1$ não é uma transformação linear.

12.1 - Definições

Teorema:

Sejam V e W espaços vetoriais e $T : V \to W$ uma transformação linear. Então $T(0) = 0$.

Demonstração: Se T é uma transformação linear então:

$$T(\alpha \mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{v}).$$

Seja $\alpha = 0 \Rightarrow T(0 \cdot \mathbf{v}) = 0 \cdot T(\mathbf{v}) = 0$. Logo $T(0) = 0$.

- Nos exemplos 1 e 2 temos: $T(0,0) = (0,0,0)$ e $T(0) = 0$.
- No exemplo 3: $T(0) = 1$.

cederj

12.1 - Definições

Exemplo 4:

Verifique se a transformação:

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z, w) &\longmapsto (x + y + 1, z - w - 2) \end{aligned}$$

é linear.

Tem-se que:

$$T(0,0,0,0) = (1,-2) \neq (0,0) \Rightarrow T \text{ é não linear}$$

12.1 - Definições

Exemplo 5: $T: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x^2, 3y) \end{array}$

Temos que $T(0,0) = (0,0)$, mas T não é uma transformação linear, pois: Dados dois vetores $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$. Então:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T(x_1+x_2, y_1+y_2) = ((x_1+x_2)^2, 3(y_1+y_2)) \\ &= (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2, 3y_1 + 3y_2) \\ &= (x_1^2, 3y_1) + (x_2^2, 3y_2) + 2x_1x_2 \\ &= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) + \underline{2x_1x_2} \end{aligned}$$

Logo $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \neq T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$.

12.1 - Definições

Exemplo 6:

A transformação identidade

$$\begin{array}{rccc} I: & V & \to & V \\ & \mathbf{v} & \mapsto & \mathbf{v}, \end{array} \text{ ou seja } \boxed{I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}} \quad \text{é linear.}$$

De fato:

i) $I(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{u}+\mathbf{v} = I\mathbf{u}+I\mathbf{v}$

ii) $I(\alpha\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{u} = \alpha I\mathbf{u}$

12.1 - Definições

Exemplo 7:

A transformação nula

$$\begin{aligned} T: \quad V &\longrightarrow W \\ \mathbf{v} &\longmapsto 0, \end{aligned} \qquad \boxed{T(\mathbf{v}) = 0} \text{ é linear.}$$

De fato:

i) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = 0 = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

ii) $T(\alpha\mathbf{u}) = 0 = \alpha \cdot 0 = \alpha T(\mathbf{u})$

12.1 - Definições

Exemplo 8:

A transformação simétrica

$$\begin{array}{rccl} T: & V & \longrightarrow & V \\ & \mathbf{v} & \longmapsto & \boxed{T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}} \end{array} \text{ é linear.}$$

i) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (-\mathbf{u}-\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

ii) $T(\alpha\mathbf{u}) = -\alpha\mathbf{u} = \alpha \cdot (-\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$

12.1 - Definições

Exemplo 9:

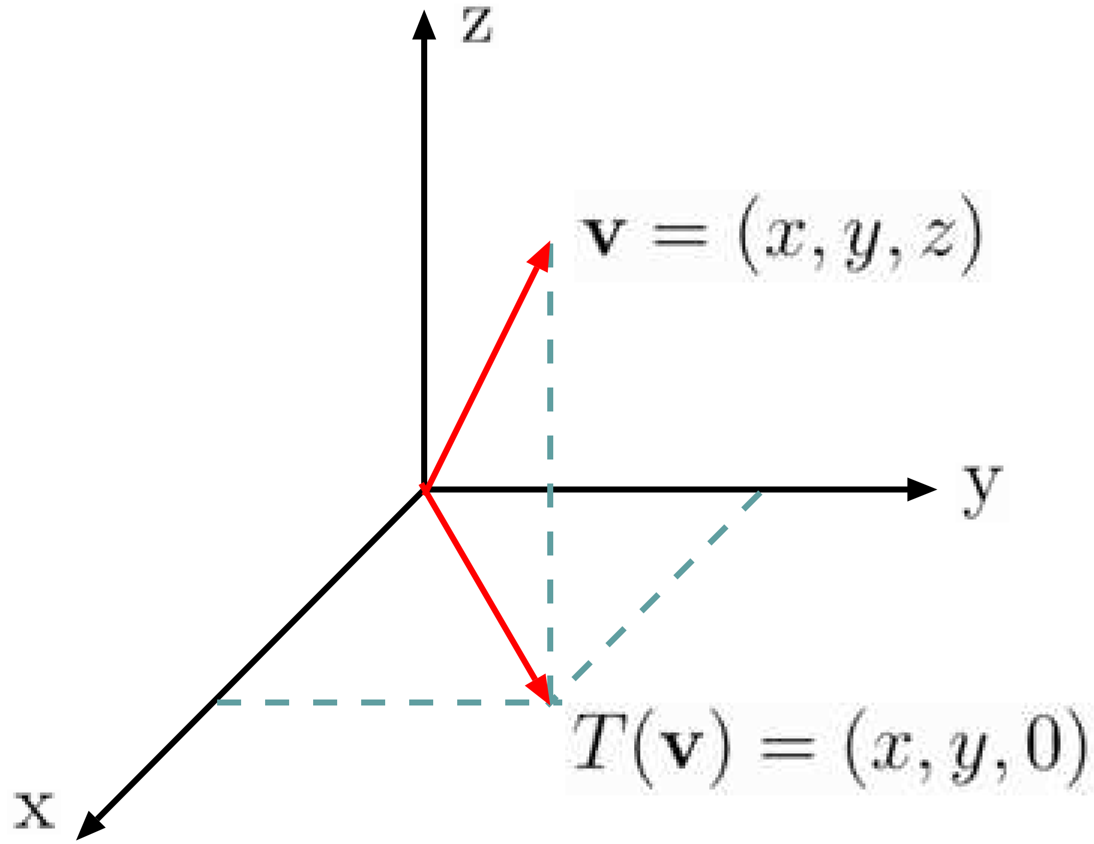
A projeção ortogonal do $\mathbb{R}^3$ sobre o $\mathbb{R}^2$, definido por:

$$\begin{array}{rrcl} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & T(x,y,z) = (x,y,0) \text{ é linear.} \end{array}$$

i) $$\begin{aligned} T((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) &= T((x_1+x_2),(y_1+y_2),(z_1+z_2)) \\ &= ((x_1+x_2),(y_1+y_2),0) \\ &= (x_1,y_1,0)+(x_2,y_2,0) \\ &= T(x_1,y_1,z_1)+T(x_2,y_2,z_2) \end{aligned}$$

ii) $T(\alpha(x_1,y_1,z_1)) = \alpha(x_1,y_1,0) = \alpha T(x_1,y_1,z_1)$

12.1 - Definições



12.1 - Definições

Exemplo 10:(Derivada)
Seja $V = P_n$ dos polinômios de grau $\leq n$. A aplicação da derivada:

$$\begin{array}{rccc} D: & P_n & \longrightarrow & P_n \\ & f & \longmapsto & D(f) = f' \end{array} \quad \text{é linear.}$$

Pelas regras de derivação, sabe-se que:

i) $D(f+g) = D(f) + D(g)$

ii) $D(\alpha f) = \alpha D(f)$

12.1 - Definições

<u>Exemplo 11:</u>(Integral)

Seja $V = P_n$ então:

$$\begin{array}{rcl} T: \quad P_n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & T(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx \quad \text{é linear.} \end{array}$$

Pois sabemos que:

i) $$\begin{aligned} T(f+g) &= \int_a^b (f(x)+g(x))dx \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = T(f)+T(g) \end{aligned}$$

ii) $$T(\alpha f) = \int_a^b (\alpha f(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx = \alpha T(f)$$

12.1 - Definições

Exemplo 12: Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Definimos a transformação:

$$\begin{array}{rccl} T_A : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \mathbf{v} & \longmapsto & \mathbf{A}\mathbf{v}, \text{ ou seja } T_A(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}. \end{array}$$

que é linear, pois:

i) $T_A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{A}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{v} = T_A(\mathbf{u}) + T_A(\mathbf{v})$

ii) $T_A(\alpha\mathbf{u}) = A(\alpha\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{A}\mathbf{u} = \alpha T_A(\mathbf{u})$

12.1 - Definições

Seja $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ então:

$$\mathbf{Av} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x + 4y \\ x + 2y \end{bmatrix}$$

Logo:

$$T_A(\mathbf{v}) = T_A(x, y) = (y, -x + 4y, x + 2y)^T$$

12.1 - Definições

Observação: Uma matriz $\mathbf{A}_{m\times n}$ sempre determina uma transformação linear:

$$\begin{array}{rcll} T_A: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \mathbf{v} & \longmapsto & T_A(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

onde $\mathbf{v}$ é considerado uma matriz $n \times 1$.

12.1 - Definições

Propriedade: Se $T: V \to W$ é uma transformação linear então:

$$\boxed{T(\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2) = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1)+\alpha_2 T(\mathbf{v}_2), \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}}$$

De forma análoga temos:

$$\boxed{T(\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{v}_n) = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1)+\alpha_2 T(\mathbf{v}_2)+\ldots+\alpha_n T(\mathbf{v}_n)}$$

Isto significa que a imagem de uma combinação linear de vetores é uma combinação linear das imagens destes vetores com os mesmos coeficientes, ou seja, considere $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base do espaço vetorial V.

12.1 - Definições

Então, $\forall \mathbf{v} \in V$, podemos escrever:

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n$$

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear.
Então:

$$T(\mathbf{v}) = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{v}_2) + \ldots + \alpha_n T(\mathbf{v}_n)$$

Se $T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_n)$ são conhecidas então sempre é possível obter a imagem de $T(\mathbf{v})$.

12.1 - Definições

Exemplo 13: Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, uma transformação linear e $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, sendo:

$$\mathbf{v}_1 = (0,1,0); \quad \mathbf{v}_2 = (1,0,1) \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_3 = (1,1,0)$$

Determine $T(\mathbf{v})$, onde $\mathbf{v} = (5,3,-2)$ sabendo que $T(\mathbf{v}_1) = (1,-2); T(\mathbf{v}_2) = (3,1)$ e $T(\mathbf{v}_3) = (0,2)$.

12.1 - Definições

- **Solução:**

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 \\
&= \alpha_1(0,1,0) + \alpha_2(1,0,1) + \alpha_3(1,1,0) \\
&= (\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2)
\end{aligned}$$

Como $\mathbf{v} = (5, 3, -2)$ temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 5 \\
\alpha_1 & & & + & \alpha_3 & = & 3 \\
 & & \alpha_2 & & & = & -2
\end{array}$$

12.1 - Definições

Logo
$\alpha_2 = -2 \Rightarrow \alpha_3 = 5 - \alpha_2 = 7; \alpha_1 = 3 - 7 = -4.$
Assim, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (-4, -2, 7)$. Portanto:

$$\boxed{\mathbf{v} = (5, 3, -2) = -4\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + 7\mathbf{v}_3}$$

Logo:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) &= -4T(\mathbf{v}_1) - 2T(\mathbf{v}_2) + 7T(\mathbf{v}_3) \\ &= -4(1, -2) - 2(3, 1) + 7(0, 2) \\ &= (-10, 20) \end{aligned}$$

$$\boxed{\therefore T(\mathbf{v}) = T(5, 3, -2) = (-10, 20)}$$

Exercícios

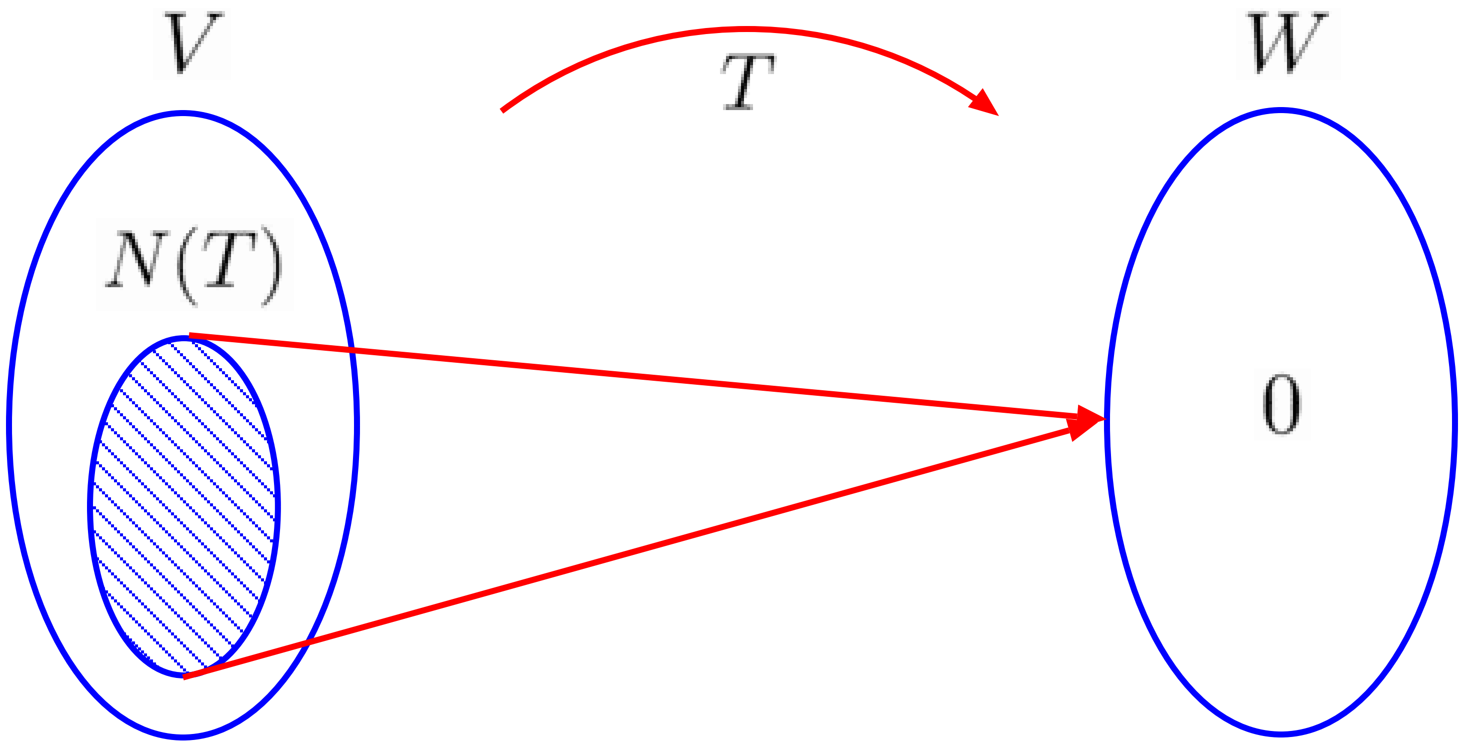
- Fazer os exercícios práticos e teóricos das páginas 269 e 270 do livro texto.

12.2 - Núcleo de uma Transformação Linear

Definição: Chama-se núcleo de uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$ ao conjunto de todos os vetores $\mathbf{v} \in V$ tal que $T(\mathbf{v}) = 0$.
Indica-se esse conjunto por:

$$\boxed{N(T) = Ker(T) = \{\mathbf{v} \in V; T(\mathbf{v}) = 0\}}$$

12.2 - Núcleo de uma Transformação Linear



- Note que $N(T) \subset V$ e $N(T) \neq \emptyset$, pois $0 \in N(T)$, desde que:

$$T(0) = 0$$

12.2 - Núcleo de uma Transformação Linear

Exemplo 14: Determine o núcleo da seguinte transformação linear:

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (x+y, 2x-y) \end{array}$$

Por definição:

$$N(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; T(x,y) = (0,0)\}$$

Assim, $(x,y) \in N(T)$ se $(x+y, 2x-y) = (0,0)$. A solução do sistema $\boxed{x = y = 0}$. Logo $N(T) = \{(0,0)\}$.

12.2 - Núcleo de uma Transformação Linear

Exemplo 15: Determine o núcleo da transformação linear:

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & T(x,y,z) = (x-y+4z, 3x+y+8z) \end{array}$$

Solução:

$$N(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; T(x,y,z) = (0,0)\}$$

ou seja, $(x,y,z) \in N(T)$ se e somente se:

$$(x-y+4z, 3x+y+8z) = (0,0)$$

12.2 - Núcleo de uma Transformação Linear

Que gera o sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ 3x + y + 8z = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema para $z = a$ obtemos:

$$\boxed{x = -3a \quad \text{e} \quad y = a}$$

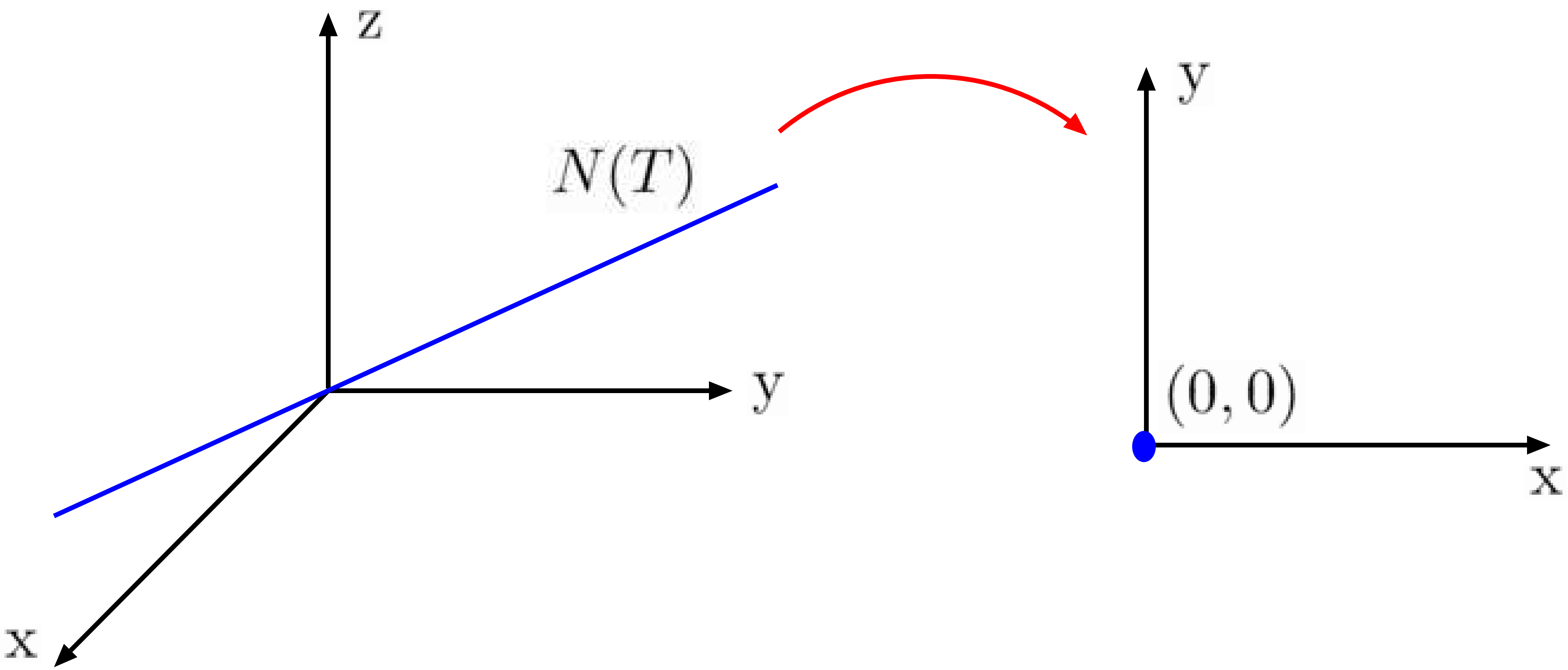
Assim:

$$N(T) = \{(-3a, a, a); a \in \mathbb{R}\} \Leftrightarrow$$
$$N(T) = \{a(-3, 1, 1); a \in \mathbb{R}\}$$

ou ainda, que o vetor $(-3, 1, 1)$ gera $N(T)$:

$$N(T) = [(-3, 1, 1)]$$

12.2 - Núcleo de uma Transformação Linear



12.2 - Núcleo de uma Transformação Linear

Propriedades do Núcleo:

1) Seja $T : V \to W$ uma transformação linear.
Então $N(T)$ é um subespaço vetorial de V.
De fato, sejam $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2 \in N(T)$, logo:

$$T(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_2) = 0$$

a) $T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) = 0 + 0 = 0$
Logo $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \in N(T)$.

b) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

$$T(\alpha\mathbf{v}_1) = \alpha T(\mathbf{v}_1) = \alpha \cdot 0 = 0$$

$\therefore \alpha\mathbf{v}_1 \in N(T)$.

12.2 - Núcleo de uma Transformação Linear

2) Uma transformação linear $T : V \to W$ é injetora se, e somente se, $N(T) = \{0\}$.

- Observação:
Definição: $T : V \to W$ é injetora se
$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V, T(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_2) \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ ou
equivalentemente,
$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ se $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2 \Rightarrow T(\mathbf{v}_1) \neq T(\mathbf{v}_2)$.

12.2 - Núcleo de uma Transformação Linear

A demonstração dessa propriedade tem duas partes:

a) T é injetora $\Rightarrow N(T) = \{0\}$.

De fato: Seja $\mathbf{v} \in N(T)$, ou seja, $T(\mathbf{v}) = 0$. Por outro lado, sabe-se que $T(0) = 0$. Logo $T(\mathbf{v}) = T(0)$. Como por hipótese T é injetora, então $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Portanto, o vetor zero é o único elemento do núcleo, isto é, $N(T) = \{0\}$.

b) $N(T) = \{0\} \Rightarrow T$ é injetora.

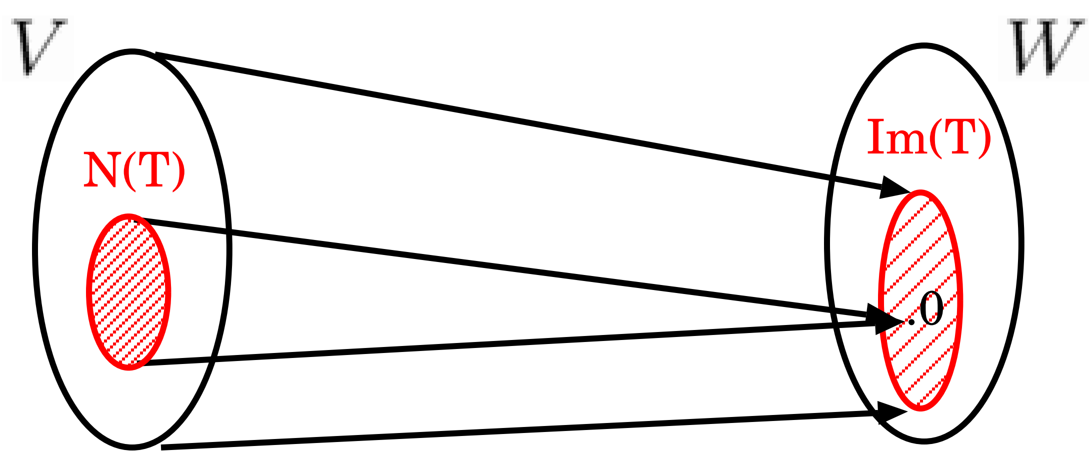
De fato: Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ tais que $T(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_2)$. Então $T(\mathbf{v}_1) - T(\mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = 0$. Logo, $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in N(T)$. Mas, por hipótese, o único elemento do núcleo é o vetor zero, assim

$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \Rightarrow T$ é injetora.

12.3 - Imagem

Definição: Chama-se imagem de uma transformação linear $T : V \to W$ ao conjunto dos vetores $\mathbf{w} \in W$ que são imagens de pelo menos um vetor $\mathbf{v} \in V$. Indica-se esse conjunto por $Im(T)$, ou seja

$$Im(T) = \{\mathbf{w} \in W; T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}, \text{para algum } \mathbf{v} \in V\}$$



12.3 - Imagem

- Observação:
Note que $Im(T) \subset W$ e $Im(T) \neq \emptyset$, desde que $T(0) = 0 \in Im(T)$.
Se $Im(T) = W \Rightarrow T$ é sobrejetora, ou seja, $\forall \mathbf{w} \in W$, existe pelo menos um $\mathbf{v} \in V$ tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.

12.3 - Imagem

Exemplo 16: Seja

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & T(x,y,z)=(x,y,0) \end{array}$$

a projeção ortogonal do $\mathbb{R}^3$ sobre o plano xy.
Então a $Im(T)$ é o próprio plano xy.

$$Im(T)=\{(x,y,0)\}\in\mathbb{R}^3; x,y\in\mathbb{R}\} \quad \text{(plano xy)}$$

Por outro lado, para o núcleo temos:

$$N(T)=\{0,0,z\}=(0,0,0), \quad \forall z\in\mathbb{R} \quad \text{(eixo z)}$$

pois $T(0,0,z)=(0,0,0), \forall z\in\mathbb{R}$.

12.3 - Imagem

Exemplo 17: Seja

$$\begin{array}{rccl} I: & V & \longrightarrow & V \\ & \mathbf{v} & \longmapsto & I(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{array}$$

Neste caso, a imagem da transformação linear é o próprio V, ou seja, $Im(I) = V$ e o núcleo, neste caso, é $N(I) = \{0\}$.

12.3 - Imagem

Exemplo 18: Seja

$$\begin{array}{rccl} T: & V & \longrightarrow & W \\ & \mathbf{v} & \longrightarrow & T(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{array}$$

Isto é, T é a transformação nula. Neste caso, $Im(T) = \{0\}$ e $N(T) = V$ (todo o espaço).

12.4 - Propriedade da Imagem

<u>Teorema</u>: A imagem de uma transformação linear $T : V \to W$ é um subespaço vetorial de W.
De fato: Sejam $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2 \in Im(T)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.
Devemos mostrar que $(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) \in Im(T)$ e $\alpha\mathbf{w}_1 \in Im(T)$.

1) Se $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in Im(T)$ então existem $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2 \in V$ tais que $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$ e $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$. Fazendo $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}_1$ tem-se:

$$\begin{cases} T(\mathbf{v}) & = & T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) & = & T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) & = & \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \\ T(\mathbf{u}) & = & T(\alpha\mathbf{v}_1) & = & \alpha T(\mathbf{v}_1) & = & \alpha\mathbf{w}_1 \end{cases}$$

Logo, $Im(T)$ é um subespaço vetorial de W.

12.5 - Teorema do Núcleo e da Imagem

Teorema: Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear então

$$\boxed{\dim(N(T)) + \dim(Im(T)) = \dim(V)}$$

Demonstração: Omitimos a demonstração que poderá ser encontrada na página 276 do livro texto.

12.5 - Teorema do Núcleo e da Imagem

Exemplo 19: (Projeção Ortogonal)

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \rightarrow & T(x,y,z)=(x,y,0) \end{array}$$

$$Im(T)=\mathbb{R}^2 \Rightarrow \dim(Im(T))=2$$

$$N(T)=\mathbb{R} \Rightarrow \dim(N(T))=1$$

Logo,

$$\begin{array}{rcl} 3=\dim(\mathbb{R}^3) & = & \dim(Im(T))+\dim(N(T)) \\ & = & 2+1=3 \end{array}$$

12.5 - Teorema do Núcleo e da Imagem

Exemplo 20: (Transformação Identidade)

$$\begin{array}{rcccc} I & : & V & \longrightarrow & V \\ & & \mathbf{v} & \longrightarrow & \mathbf{v} \end{array}$$

Neste caso,

$$\begin{array}{rcl} \dim(Im(I)) & = & \dim(V) \\ \dim(N(T)) & = & 0 \end{array}$$

12.5 - Teorema do Núcleo e da Imagem

Exemplo 21: (Transformação Nula)

$$\begin{array}{rcccc} I & : & V & \longrightarrow & V \\ & & \mathbf{v} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Neste caso,

$$\begin{array}{rcl} \dim(Im(I)) & = & 0 \\ \dim(N(T)) & = & \dim(V) \end{array}$$

12.5 - Teorema do Núcleo e da Imagem

Exercício: Determine o núcleo e a imagem da transformação linear

$$
\begin{array}{rrcl}
T : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\
 & (x, y, z) & \longrightarrow & T(x, y, z) = \\
 & & & = (x + y - z, -2x + y + z, -x + 2y)
\end{array}
$$

12.5 - Teorema do Núcleo e da Imagem

a) $N(T) = Ker(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; T(x,y,z) = (0,0,0)\} \Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ -2x & + & y & + & z & = & 0 \\ -x & + & 2y & & & = & 0 \end{array}\right.$$

Resolvendo o sistema e tomando $z = a$, temos

$$y = \frac{a}{3} \quad \text{e} \quad x = \frac{2a}{3}$$

Logo, a solução geral é

$$\left(\frac{2a}{3}, \frac{a}{3}, a\right) = a\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right), \quad a \in \mathbb{R}$$

Logo, $[2/3, 1/3, 1]$ é uma base de $N(T)$.

12.5 - Teorema do Núcleo e da Imagem

b) $Im(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3; T(x,y,z) = (a,b,c)\}$, ou seja, $(a,b,c) \in Im(T)$ se existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & a \\ -2x & + & y & + & z & = & b \\ -x & + & 2y & & & = & c \end{array}\right.$$

O sistema somente terá solução se

$$\boxed{a + b - c = 0}$$

Logo, $Im(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3; a + b - c = 0\}$.

12.5 - Teorema do Núcleo e da Imagem

Dimensão de $Im(T)$: $(a,b,c) \in Im(T) \Rightarrow c = a + b$.
Logo podemos escrever a terna:

$$\begin{aligned} (a,b,c) &= (a,b,a+b) &= (a,0,a) + (0,b,b) \\ &= a(1,0,1) &+ \quad b(0,1,1) \end{aligned}$$

Portanto: $$Im(T) = [(1,0,1);(0,1,1)]$$

Como os vetores são L.I. então:

$$B = \{(1,0,1);(0,1,1)\}$$

é uma base de $Im(T)$ e assim $\dim(Im(T)) = 2$. Note que $3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(N(T)) + \dim(Im(T)) = 1 + 2$.

12.5 - Teorema do Núcleo e da Imagem

Corolário: Seja $T : V \to W$ uma transformação linear entre os espaços vetoriais V e W.

Se $\dim(V) = \dim(W)$ então T é injetora se e somente se T é sobrejetora.

Demonstração: Use o teorema do núcleo e da imagem.

Exercícios

- Fazer os exercícios práticos e teóricos das páginas 278 e 279 do livro texto.