Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO DA AP1 - Segundo Semestre de 2014
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(1.0)1. Seja $v_1 = (1, -3, 2)$ e $v_2 = (2, 4, -1)$, dois vetores em $I\!R^3$. Determinar o valor de k para que o vetor $u = (-1, k, -7)$ seja combinação linear de v_1 e v_2.

Solução:

Devemos ter $u = av_1 + bv_2$, para $a, b \in I\!R$, ou

$$(-1, k, -7) = a(1, -3, 2) + b(2, 4, -1)$$

De onde vem o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} a & + & 2b & = & -1 \\ -3a & + & 4b & = & k \\ 2a & - & b & = & -7 \end{array} \right.$$

o qual tem solução apenas se $k = 13$, já que das linhas 1 e 3, obtemos $a = -3$ e $b = 1$.

(3.0)2. Considere os vetores $u = (0, -1, 1)$ e $w = (2, 0, k)$ de $I\!R^3$, onde $k \in I\!R$.

(a) Determine todos os possíveis valores de k de modo que os vetores u e $u + v$ sejam perpendiculares.

Solução:

Questão anulada devido a erro no enunciado. A questão será considerada correta em todas as provas.

(b) Determine todos os possíveis valores de k de modo que a projeção ortogonal do vetor w sobre o vetor u seja igual ao vetor $-5u$.
Solução:

$$\text{proj}_u w = \left(\frac{w \cdot u}{u \cdot u}\right) u = -5u \Leftrightarrow \frac{k}{2}(0,-1,1) = (0,5,-5) \Leftrightarrow \frac{k}{2} = -5,$$

$$k = -10.$$

(c) Determine todos os possíveis valores de k de modo que o ângulo entre os vetores u e w seja de 60^0.
Solução:
Temos

$$\cos(60) = \frac{1}{2} = \frac{u \cdot w}{|u||w|} = \frac{k}{\sqrt{2}\sqrt{4+k^2}} \Leftrightarrow 2k = \sqrt{8+2k^2}$$

$$4k^2 = 8 + 2k^2 \Leftrightarrow 2k^2 = 8 \Leftrightarrow k = \pm 2.$$

Resposta: $k = 2$.

(3.0)3. Determine a dimensão e uma base para cada espaço vetorial abaixo:

(a)
$$S = \{(x,y,z,w) \in I\!R^4 | x + 2y - z + w = 0\}$$

(b)
$$S = \{(x,y,z) \in I\!R^3 | 2x + y + z = 0, \ x - y = 0\}$$

Solução:

(a) Isolando w na equação de definição, tem-se: $w = -x - 2y + z$, onde x, y e z são variáveis livres. Qualquer vetor $(x,y,z,w) \in S$ tem a forma: $(x,y,z,-x-2y+z)$ e, portanto, podemos escrever:

$$(x,y,z,w) = (x,y,z,-x-2y+z)$$

ou

$$(x,y,z,w) = (x,0,0,-x) + (0,y,0,-2y) + (0,0,z,z)$$

ou

$$(x, y, z, w) = x(1, 0, 0, -1) + y(0, 1, 0, -2) + z(0, 0, 1, 1)$$

isto é, todo vetor de S é combinação linear dos vetores $(1, 0, 0, -1)$, $(0, 1, 0, -2)$ e $(0, 0, 1, 1)$. Como esses trÃªs vetores geradores de S são L.I., o conjunto $\{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -2), (0, 0, 1, 1)\}$ é uma base de S e, consequentemente, dim$S$=3.

(b) Da segunda equaÃ§Ã£o tem-se $x = y$. Isolando z na equação de definição, tem-se: $z = -2x - y$, ou seja $z = -3x$. onde x Ã© variável livre. Qualquer vetor $(x, y, z) \in S$ tem a forma: $(x, x, -3x)$ e, portanto, podemos escrever:

$$(x, y, z) = (x, x, -3x) \text{ ou } (x, y, z) = x(1, 1, -3)$$

isto é, todo vetor de S é um mÃºltiplo do vetor $(1, 1, -3)$. Como esse vetor gera S, o conjunto $\{(1, 1, -3)\}$ é uma base de S e, consequentemente, dim$S$=1.

(3.0)4. Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 2 & -5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Se possível, calcular as matrizer abaixo. Se não for possível, determinar a razão.

(a) A matriz $(A - A^2)$.
Solução:

$$A - A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A - A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 61 & 108 \\ 48 & 85 \end{bmatrix}$$

$$A - A^2 = \begin{bmatrix} -56 & -99 \\ -44 & -78 \end{bmatrix}.$$

(b) A matriz $(AB)^T$.

Solução:

Não é possível calcular o produto AB pois o número de colunas de A é maior que o número de linhas de B.

(c) A matriz $(BA)^T$.

Solução:

$$BA = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 2 & -5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} -31 & -56 \\ -10 & -17 \\ -22 & -99 \end{bmatrix}.$$

$$(BA)^T = \begin{bmatrix} -31 & -10 & -22 \\ -56 & -17 & -39 \end{bmatrix}.$$