Gabarito

Álgebra Linear: AD2 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2011.1

Tutores: Cristina Lopes e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

Seja A uma matriz de ordem n e $det(A) = 5$.

Utilizando a propriedade dos determinantes, de que o determinante da inversa de uma matriz quadrada de ordem n coincide com o inverso do determinante da matriz, temos:

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)} = \frac{1}{5}$$

Usando a propriedade: $det(k.A) = k^n.det(A)$, isto é, se multiplicamos todos os elementos de uma matriz quadrada de ordem n por um número k, seu determinante será multiplicado por k^n. Assim, para $k = 2$, temos:

$$det(2A) = 2^n.det(A) = 2^n.5$$

$$det(2A^{-1}) = 2^n.det(A^{-1}) = 2^n.\frac{1}{det(A)} = 2^n.\frac{1}{5} = \frac{2^n}{5} = 2^n.5^{-1}$$

$$det(2A)^{-1} = \frac{1}{det(2A)} = \frac{1}{2^n.5} = 2^{-n}.5^{-1}$$

2^a Questão) Solução:

Seja $M = \begin{bmatrix} (k-3) & 0 & 3 \\ 0 & (k+2) & 0 \\ -5 & 0 & (k+5) \end{bmatrix}$.

Utilizando a Regra de Sarrus:

$$detM = (k-3)(k+2)(k+5) + 15(k+2)$$

$$detM = (k+2)[(k-3)(k+5) + 15]$$

$detM = (k+2)[k^2 + 5k - 3k - 15 + 15]$

$detM = (k+2)[k^2 + 2k]$

$detM = (k+2).k.(k+2)$

$detM = k.(k+2)^2$

i) Para que a matriz M seja não invertível é necessário que $detM = 0$. Assim:

$detM = k.(k+2)^2 = 0 \Rightarrow k = 0$ ou $k = -2$.

ii) Para calcular a inversa da matriz M, usaremos a fórmula $M^{-1} = \dfrac{1}{detM}.Adj(M)$.

$$M = \begin{bmatrix} (k-3) & 0 & 3 \\ 0 & (k+2) & 0 \\ -5 & 0 & (k+5) \end{bmatrix}$$

Vamos calcular $Adj(M) = [Cof(M)]^T$, onde $Cof(M)$ é a matriz dos cofatores. Por isso, calcularemos os cofatores $A_{ij} = (-1)^{i+j}det(M_{ij})$, onde M_{ij} é o determinante menor de a_{ij}.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} (k+2) & 0 \\ 0 & (k+5) \end{vmatrix} = (-1)^2.[(k+2)(k+5)] = (k+2)(k+5)$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -5 & (k+5) \end{vmatrix} = (-1)^3.0 = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & (k+2) \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4.[0 + 5(k+2)] = 5(k+2)$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & (k+5) \end{vmatrix} = (-1)^3.0 = 0$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} (k-3) & 3 \\ -5 & (k+5) \end{vmatrix} = (-1)^4.[(k-3)(k+5) + 15] = k^2 + 2k = k(k+2)$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} (k-3) & 0 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5.0 = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ (k+2) & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4.[-3(k+2)] = -3(k+2)$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} (k-3) & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5.0 = 0$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} (k-3) & 0 \\ 0 & (k+2) \end{vmatrix} = (-1)^6.[(k-3)(k+2)] = (k-3)(k+2)$$

Assim, a matriz dos cofatores fica:

$$Cof(M) = \begin{bmatrix} (k+2)(k+5) & 0 & 5(k+2) \\ 0 & k(k+2) & 0 \\ -3(k+2) & 0 & (k-3)(k+2) \end{bmatrix}$$

E portanto, calculando a transposta da matriz dos cofatores, obtemos $Adj(M)$:

$$Adj(M) = [Cof(M)]^T = \begin{bmatrix} (k+2)(k+5) & 0 & -3(k+2) \\ 0 & k(k+2) & 0 \\ 5(k+2) & 0 & (k-3)(k+2) \end{bmatrix}$$

Como sabemos, pelo item i), que $detM = k.(k+2)^2$, aplicando a fórmula $M^{-1} = \dfrac{1}{detM}.Adj(M)$, encontramos:

$$M^{-1} = \frac{1}{k(k+2)^2} \begin{bmatrix} (k+2)(k+5) & 0 & -3(k+2) \\ 0 & k(k+2) & 0 \\ 5(k+2) & 0 & (k-3)(k+2) \end{bmatrix}$$

Logo, fatorando o termo $(k+2)$, obtemos

$$M^{-1} = \frac{1}{k(k+2)} \begin{bmatrix} (k+5) & 0 & -3 \\ 0 & k & 0 \\ 5 & 0 & (k-3) \end{bmatrix}$$

onde $k \neq -2$ e $k \neq 0$.

3^a Questão) Solução:

a) Verdadeiro.

Se uma matriz quadrada tem duas linhas ou duas colunas iguais seu determinante é zero.

$$det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix} = aec + bfa + dbc - aec - bfa - dbc = 0$$

b) Falso.

Contra-exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow detA = 14 + 2 = 16 \neq 0$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow detB = -8 - 6 = -14 \neq 0$$

A e B são invertíveis.

$$A + B = \begin{bmatrix} 2-2 & -2+2 \\ 1+3 & 7+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} \Rightarrow det(A+B) = 0$$

Mas $A + B$ é não invertível.

c) Verdadeiro.

$det(A.A^t) = detA.detA^t = detA.detA = det(A.A) = det(A^2)$

Na primeira igualdade usamos a propriedade dos determinantes que diz "O determinante do produto de duas matrizes quadradas de mesma ordem é igual ao produto dos determinantes destas matrizes, isto é, $det(A.B) = det(A).det(B)$."

Na segunda igualdade usamos a propriedade dos determinantes que diz "O determinante de uma matriz quadrada coincide com o determinante de sua transposta, ou seja, $det(A) = det(A^t)$"

d) Falso.

Contra-exemplo:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow detA = 6 - 6 = 0$

A matriz A não é nula.

e) Verdadeiro.

Se $det(A) = 7$ então $det(A^{-1}) = 1/7$. Então A^{-1} existe, e multiplicando ambos os lados de $AX = 0$ por A^{-1}, temos:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}.0$$

$$(A^{-1}A)X = 0$$

$$I_n X = 0$$

$$X = 0$$

Portanto, a única solução de $AX = 0$ é $X = 0$.

4^a Questão) Solução:

a) $T(x, y, z) = (x+y, y, 0) = x(1, 0, 0)+y(1, 1, 0)$. Temos dois vetores $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$ que geram (x, y, z). Como estes vetores são claramente LI´s, temos que $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$

formam uma base para a transformação, com dimensão 2.

b) $N(T) = \{(x,y,z)|T(x,y,z) = 0\}$. Logo, $T(x,y,z) = (x+y, y, 0) = (0,0,0)$. Chegamos ao seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + y & = & 0 \\ y & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{cases}$$

Por L_2 temos que $y = 0$. Substituindo em L_1, temos que $x = 0$. Temos que $z = r$, para qualquer $r \in \mathbb{R}$. Deste modo, temos que $N(T) = (0,0,r) = r(0,0,1)$. Logo $\{(0,0,1)\}$ é base para $N(T)$, com dimensão 1.

5^a Questão) Solução:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

Logo o polinômio característico é dado por

$$P_3(\lambda) = det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda)$$

As raízes de $P_3(\lambda)$ são $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = -1$. Logo os autovalores da matriz A, são: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = -1$.

Cálculo dos autovetores v associados aos autovalores λ.

1. Autovetores associados aos autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Do polinômio característico temos

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4| & 0 \\ 0 & 0 & 5| & 0 \\ 0 & 0 & -4| & 0 \end{bmatrix}$$

Dividindo L_1 e L_3 por (-4) e L_2 por 5, obtemos

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1| & 0 \\ 0 & 0 & 1| & 0 \\ 0 & 0 & 1| & 0 \end{bmatrix}$$

Tomando $x = r \neq 0$ e $y = s \neq 0$, obtemos a solução $v_1 = v_2 = (r, s, 0) = r(1, 0, 0) + s(0, 1, 0)$. Portanto os vetores $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ são autovetores de A associado aos autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$.

2. Autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = -1$

De forma análoga temos que

$$A - (-1)I = A + I = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4| & 0 \\ 0 & 4 & 5| & 0 \\ 0 & 0 & 0| & 0 \end{bmatrix}$$

Dividindo L_1 e L_2 por 4, obtemos

$$A + I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1| & 0 \\ 0 & 1 & 5/4| & 0 \\ 0 & 0 & 0| & 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, tomando $x = z = t \neq 0$, obtemos $v_3 = \left(t, -\frac{5}{4}t, t\right) = t\left(1, -\frac{5}{4}, 1\right)$. Ou seja $v_3 = \left(1, -\frac{5}{4}, 1\right)$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda_3 = -1$.

b) Utilizando os autovetores encontrados no item anterior : $(1, 0, 0), (0, 1, 0), \left(1, -\frac{5}{4}, 1\right)$, verificaremos se são LI's e se geram o $\mathbb{R}^3$:

$$a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c\left(1, -\frac{5}{4}, 1\right) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} a+c &= 0 \\ b-\frac{5}{4}c &= 0 \\ c &= 0 \end{cases}$$

Por L_3, $c=0$. Substituindo nas linhas anteriores, concluímos que $a=0$, $b=0$. Logo os vetores são LI's.

Agora , vamos resolver o sistema para verificarmos se os autovetores geram $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} a+c &= x \\ b-\frac{5}{4}c &= y \\ c &= z \end{cases}$$

Por L_3, $c=z$. Substituindo em L_2, temos que $b=y+\frac{5}{4}z$. E por L_1 temos que $a=x-z$. Concluímos que o sistema tem solução. Logo os autovetores $(1,0,0),(0,1,0),\left(1,-\dfrac{5}{4},1\right)$ formam uma base para o $\mathbb{R}^3$.

c) Para mostrar que a matriz A é diagonalizável, precisamos mostrar que existe uma matriz invertível M tal que $M^{-1}AM=D$, onde D é uma matriz diagonal e formada pelos autovalores de A, e M é uma matriz cujas colunas são os autovetores de A.

$$D=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontraremos primeiro a inversa de M para depois verificarmos que $M^{-1}AM=D$.

$$M.M^{-1}=I$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a matriz M pela matriz M^{-1}, obtemos os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} a+g &= 1 \\ d-\frac{5}{4}g &= 0 \\ g &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b+h &= 0 \\ e-\frac{5}{4}h &= 1 \\ h &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c+i &= 0 \\ f-\frac{5}{4}i &= 0 \\ i &= 1 \end{cases}$$

Pelo primeiro sistema, temos que $g = 0$, o que implica que $d = 0$ e $a = 1$. Pelo segundo sistema temos que $h = 0$, o que implica que $e = 1$ e $b = 0$. E pelo terceiro sistema temos que $i = 1$, o que implica que $f = \frac{5}{4}$ e $c = -1$. Logo , temos a inversa de M:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculando $M^{-1}AM$, temos:

$$M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & \frac{15}{4} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = D.$$