Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP2 - Segundo Semestre de 2011
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(2.0)1. Determinar as condições que devem ser satisfeitas pelos termos independentes, x, y, z e t do sistema linear abaixo para que o mesmo tenha solução, ou seja, para que seja compatível.

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} -a & + & 3b & = & x \\ 2a & - & b & = & y \\ -2a & + & b & = & z \\ 3a & + & b & = & t \end{array}\right.$$

Solução:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & | & x \\ 2 & -1 & | & y \\ -2 & 1 & | & z \\ 3 & 1 & | & t \end{bmatrix} \qquad L_1(-1)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & | & -x \\ 2 & -1 & | & y \\ -2 & 1 & | & z \\ 3 & 1 & | & t \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 = L_2 + L_1(-2) \\ L_3 = L_3 + L_1(2) \\ L_4 = L_4 + L_1(-3) \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & | & -x \\ 0 & 5 & | & y+2x \\ 0 & -5 & | & z-2x \\ 0 & 10 & | & t+3x \end{bmatrix} \qquad L_2(1/5) \qquad .$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & | & -x \\ 0 & 1 & | & (y+2x)/5 \\ 0 & -5 & | & z-2x \\ 0 & 10 & | & t+3x \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_3 = L_3 + L_2(5) \\ L_4 = L_4 + L_2(-10) \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & | & -x \\ 0 & 1 & | & (y+2x)/5 \\ 0 & 0 & | & z+y \\ 0 & 0 & | & t-x-2y \end{bmatrix}$$

Para que o sistema seja compatível é necessário que: $z + y = 0$ e $t - x - 2y = 0$. Isto é:

$$z = -y, \quad x = -2y + t.$$

(4.0)2. Seja a transformação linear $T : I\!\!R^2 \to I\!\!R^3$ tal que $T(-2,3) = (-1,0,1)$ e $T(1,2) = (0,-1,0)$.

(a) Determinar $T(x,y)$.
Solução:
Considerando:

$$(x,y) = \alpha(-2,3) + \beta(1,2),$$

temos

$$\begin{cases} -2\alpha + \beta = x \\ 3\alpha + 2\beta = y \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $\alpha = \frac{-2x+y}{7}$ e $\beta = \frac{3x+2y}{7}$. Logo:

$$(x, y) = (\frac{-2x+y}{7})(-2, 3) + (\frac{3x+2y}{7})(1, 2)$$

e

$$\begin{array}{rcl} T(x, y) & = & (\frac{-2x`+y}{7})T(-2, 3) + (\frac{3x+2y}{7})T(1, 2) \\ & = & (\frac{-2x+y}{7})(-1, 0, 1) + (\frac{3x+2y}{7})(0, -1, 0) \\ & = & (\frac{2x-y}{7}, \frac{-3x-2y}{7}, \frac{-2x+y}{7}). \end{array}$$

(b) Determinar uma base para N(T) e sua dimensão.

Solução:

Considerando

$$(\frac{2x-y}{7}, \frac{-3x-2y}{7}, \frac{-2x+y}{7}) = (0, 0, 0),$$

temos

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & - & y & = & 0 \\ -3x & - & 2y & = & 0 \\ -2x & + & y & = & 0 \end{array} \right.$$

A única solução que satisfaz as duas primeira equações é $x = y = 0$. Logo, a solução trivial é a única solução do sistema. Logo, o único vetor em N(T) é o vetor nulo, N(T)=(0,0). Sua dimensão é igual a zero.

(c) Determinar uma base para Im(T) e sua dimensão.

Solução:

Considerando

$$(\frac{2x-y}{7}, \frac{-3x-2y}{7}, \frac{-2x+y}{7}) = (a, b, c),$$

temos

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & - & y & = & 7a \\ -3x & - & 2y & = & 7b \\ -2x & + & y & = & 7c \end{array} \right.$$

Logo, fazendo $L_2 = L_2 - 2L_1$ e $L_3 = L_3 + L1$, temos

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 7a \\ -7x & & & = & 7b - 14a \\ 0 & + & 0 & = & 7c + 7a \end{array} \right.$$

O sistema acima tem solução para a, b, c tais que $a = -c$. Logo a Im(T) é formada pelos vetores $(a, b, -a)$, para a e b quaisquer. Uma base para Im(T) é $\{(1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ e sua dimensão é igual a 2.

(d) T é injetora? T é sobrejetora? Justifique as respostas.

Solução:

T é injetora pois N(T)=(0,0). T não é sobrejetora pois Im(T) não é igual a $\mathbb{R}^3$.

(2.0)3.

$$A = \begin{bmatrix} 2x & 6 & 4 \\ 5 & x & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre os valores de x de forma que o determinante da matriz A seja igual a 24.

Solução:

$det(A) = 2x \cdot x \cdot 1 + 6 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 5 - (4 \cdot x \cdot 1 + 6 \cdot 5 \cdot 1 + 2x \cdot 3 \cdot 1) = 2x^2 - 10x + 36$.

Sendo det(A)=24, temos $2x^2 - 10x + 12 = 0$. Logo $x = 2$ ou $x = 3$.

(b) Sendo det(A)=24, qual o determinante da matriz $(\alpha A)^n$, onde α é um número real e n é um número inteiro e positivo?

Solução:

$det(\alpha A) = \alpha^3 det(A)$, logo $det(\alpha A)^n = (\alpha^3 det(A))^n = \alpha^{3n} det(A)^n = \alpha^{3n} 24^n$

(2.0)4. Considere a matriz A e o vetor b abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0,5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular a inversa de A.

Solução:

$$
\begin{aligned}
A \;=\; & \left[\begin{array}{rrr|rrr} -2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] & L_1(-1/2) \\
\sim\; & \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} L_2 = L_2 + L_1(-1), \\ L_3 = L_3 + L_1 \end{array} \\
\sim\; & \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right] & L_2(-2/3) \\
\sim\; & \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} L_1 = L_1 + L_2(3/2), \\ L_3 = L_3 + L_2(-1/2) \end{array} \\
\sim\; & \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & 1/3 & 1 \end{array}\right] & L_3(-3) \\
\sim\; & \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right] & L_2 = L2 + L_3(1/3) \\
\sim\; & \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right] &
\end{aligned}
$$

Logo

$$
A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}
$$

(b) **Utilizando a inversa de** A, resolver o sistema linear $Ax = b$.
Solução:

$$
x = A^{-1} * b = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0,5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ 4,5 \\ 16,5 \end{pmatrix}
$$