Gabarito

Álgebra Linear: AD2 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2011.2

Tutores: Cristina Lopes e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -3 \\ + x_2 + x_4 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

O sistema linear acima pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss para resolvê-lo.

Vamos então, formar a matriz aumentada $[A|b]$.

A matriz aumentada é dada por:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & | & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 0 & | & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ e $L_4 \leftarrow L_4 + L_1$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & | & 3 \end{bmatrix}$$

Fazendo agora $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ e $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & | & 4 \end{bmatrix}$$

Trocando a terceira e quarta linhas, encontramos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a terceira linha por $\frac{1}{4}$, temos

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{array}\right]$$

Obtemos assim, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Da quarta linha temos que $x_4 = 0$; substituindo na terceira linha, obtemos $x_3 = 1$. Substituindo $x_2 = -1$ e $x_3 = 1$ na primeira linha, obtemos que $x_1 = -1$.

Logo, a solução é dada por $S = \{(-1, -1, 1, 0)\}$.

b) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

a matriz dos coeficientes.

Podemos expandir o determinante em relação à uma linha ou coluna. É claro que é melhor expandir em relação a uma linha ou coluna que tenha o maior número de zeros, já que, nesse caso, os cofatores A_{ij} dos a_{ij} que são nulos não precisam ser calculados, uma vez que $a_{ij}A_{ij} = (0)(A_{ij}) = 0$.

Expandindo, então, em relação à terceira linha, obtemos:

$$det(A) = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34} \tag{1}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}det(M_{ij})$$

onde M_{ij} é o determinante menor de a_{ij}.

Assim, temos:

$$A_{32} = (-1)^{3+2}det(M_{32}) = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \tag{2}$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4}det(M_{34}) = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \tag{3}$$

A_{31} e A_{33} não vamos calcular pois $a_{31} = a_{33} = 0$.

Expandindo $det(M_{32}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ em relação à terceira coluna, temos:

$$det(M_{32}) = 0 + 0 + (2)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 2.1.[-2+2] = 2.0 = 0$$

De maneira análoga para $det(M_{34})$ (expandindo em relação à primeira linha), temos

$$det(M_{34}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1.[9 + 4] + (-1).(-1).[-6 - 2] + 1.[-4 + 3] = 13 - 8 - 1 = 4$$

Logo, temos de (2) e (3) que

$$A_{32} = (-1)(0) = 0$$
$$A_{34} = (-1)(4) = -4$$

Substituindo esses valores em (4) temos:

$$det(A) = (0)(A_{31}) + (1)(0) + (0)(A_{33}) + (1)(-4)$$
$$det(A) = 0 + 0 + 0 - 4$$
$$det(A) = -4$$

c) Para calcular a inversa da matriz A, usaremos a fórmula $A^{-1} = \dfrac{1}{detA}.Adj(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular $Adj(A) = [Cof(A)]^T$, onde $Cof(A)$ é a matriz dos cofatores. Por isso, calcularemos os cofatores $A_{ij} = (-1)^{i+j}det(M_{ij})$, onde M_{ij} é o determinante menor de a_{ij}.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2.[0 - 4 + 0 - 0 - 9 + 4] = 1.(-9) = -9$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3.[0 + 2 + 0 - 0 + 6 - 0] = (-1).8 = -8$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4.[-4 - 3 + 0 - 0 + 4 - 0] = 1.(-3) = -3$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^5.[-6 + 0 + 0 - 2 + 0 - 0] = (-1).(-8) = 8$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3.[0 + 2 + 0 - 0 + 3 - 2] = (-1).3 = -3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4.[0 - 1 + 0 - 0 - 3 - 0] = 1.(-4) = -4$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^5.[2 + 1 + 0 - 0 - 2 - 0] = (-1).1 = -1$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^6.[3 + 0 + 0 + 1 - 0 - 0] = 1.4 = 4$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4.[4 + 0 + 0 - 0 - 0 - 6] = 1.(-2) = -2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^5.[-4 + 0 + 0 - 0 - 0 + 4] = (-1).0 = 0$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^6.[6 + 0 + 0 - 0 - 0 - 4] = 1.2 = 2$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^7.[9 - 2 - 4 + 3 + 4 - 6] = (-1).4 = -4$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5.[2+0+0-0-0-3] = (-1).(-1) = 1$$

$$A_{42} = (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^6.[-2+0+0-0-0+2] = 1.0 = 0$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^7.[3+0+0-0-0-2] = (-1).1 = -1$$

$$A_{44} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^8.[0+0-2-0+2-0] = 1.0 = 0$$

Assim, a matriz dos cofatores fica:

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} -9 & -8 & -3 & 8 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

E portanto, calculando a transposta da matriz dos cofatores, obtemos $Adj(A)$:

$$Adj(A) = [Cof(A)]^T = \begin{bmatrix} -9 & -3 & -2 & 1 \\ -8 & -4 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & -1 \\ 8 & 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Como sabemos, pelo item b), que $detA = -4$, aplicando a fórmula $A^{-1} = \dfrac{1}{detA}.Adj(A)$, encontramos:

$$A^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{bmatrix} -9 & -3 & -2 & 1 \\ -8 & -4 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & -1 \\ 8 & 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

2^a Questão) Solução:

Pela definição de matriz inversa, temos que uma matriz $A_{n\times n}$ é invertível se existe uma matriz A^{-1} tal que $A.A^{-1} = I$, onde I é a matriz identidade. Considerando a, b, c, d entradas reais, A de tamanho 2×2 e a condição $A^{-1} = -A$, temos:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{bmatrix} -a^2 - bc & -ab - bd \\ -ac - dc & -bc - d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desse modo, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -a^2 - bc &= 1 \\ -ab - bd &= 0 \\ -ac - dc &= 0 \\ -bc - d^2 &= 1 \end{cases}$$

Colocando b e c em evidência nas linhas 2 e 3 do sistema, temos que $b(-a-d) = 0$ e $c(-a-d) = 0$. Assim, concluímos que $-a - d = 0 \Longrightarrow a = -d$ ou $b = c = 0$.

Se b ou c são iguais a 0, temos pela linha 1 que $-a^2 = 1 \Longrightarrow a = \sqrt{-1}$, que não existe no conjunto dos reais.

Se $a = -d$, pela linha 4, $-bc - (-a)^2 = 1 \Longrightarrow -bc - a^2 = 1 \Longrightarrow a^2 = -1 - bc \Longrightarrow a = \sqrt{-1-bc}$. Esta raiz só pode existir no conjunto dos reais se $-1 - bc \geq 0 \Longrightarrow bc \leq -1$.

Então, para quaisquer b e $c \in \mathbb{R}$, tais que $bc \leq -1$, temos uma solução para para o sistema. E assim podemos encontrar uma matriz A que satisfaça a condição $A.A^{-1} = I$:

Ex: $b = 1, c = -1, a = 0, d = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.

3^a Questão) Solução:

Suponhamos por contradição que a transformação exista. Assim temos $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

$T(0,0) = (0,0)$

$T(1,0) = (2,0)$

$T(0,1) = (0,1)$

$T(1,1) = (1,1)$

Consideremos a, b, c, d entradas reais da matriz transformação. Desse modo temos que:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Chegamos então às seguintes igualdades:

$$\begin{cases} 0 & = & 0 \\ a & = & 2 \\ c & = & 0 \\ b & = & 0 \\ d & = & 1 \\ a+b & = & 1 \\ c+d & = & 1 \end{cases}$$

Pela linha 2, $a = 2$. Se substituirmos na linha 6, temos que $a+b = 1 \Longrightarrow b = -1$. Mas pela linha 4, $b = 0$, ou seja, chegamos em uma contradição. Assim, concluímos que o sistema não tem solução e portanto T não existe.

4^a Questão) Solução:

Considere a transformação linear

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z, w) & \rightarrow & (x+w, 3x+4y+3w, 5x+7y+2z+4w, 2w) \end{array}$$

a) Vamos determinar os autovalores da transformação linear T:

Solução:

Temos que

$$\begin{aligned} T(x,y,z,w) &= (x+w, 3x+4y+3w, 5x+7y+2z+4w, 2w) \\ &= x(1,3,5,0)+y(0,4,7,0)+z(0,0,2,0)+w(1,3,4,2) \end{aligned}$$

A matriz associada à transformação linear é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A-\lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

Utilizaremos a Fórmula de Laplace para calcular o determinante da matriz $(A-\lambda I)$. Expandindo, então, em relação à quarta coluna, obtemos:

$$det(A-\lambda I) = a_{14}A_{14} + a_{24}A_{24} + a_{34}A_{34} + a_{44}A_{44} \tag{4}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$$

onde M_{ij} é o determinante menor de a_{ij}.

Assim, aplicando a Regra de Sarrus para calcular o determinante de ordem 3, temos:

$$A_{44} = (-1)^{4+4} det(M_{44}) = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 5 \\ 0 & 4-\lambda & 7 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \tag{5}$$

$$= (1-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 \tag{6}$$

A_{14}, A_{24} e A_{34} não vamos calcular pois $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$.

Logo o polinômio característico é dado por

$$P_4(\lambda) = det(A - \lambda I) = a_{44}(1-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda)$$

As raízes de $P_4(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda)$ são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = 2$.

Logo os autovalores da matriz A, são:

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = 2$.

b) Cálculo dos autovetores v associados aos autovalores λ.

Para encontrarmos os autovetores de A associados a $\lambda_1 = 1$, formamos o sistema linear $Ax = 1x \equiv (A - I)x = 0$, ou

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isso nos dá

$$\begin{cases} 3y + 5z = 0 \\ 3y + 7z = 0 \\ z = 0 \\ x + 3y + 4z + w = 0 \Longrightarrow x + 3.0 + 4.0 + w = 0 \Longrightarrow x + w = 0 \Longrightarrow w = -x \end{cases}$$

Subtraindo a primeira linha da segunda, temos que $2z = 0 \Longrightarrow z = 0$. Substituindo $z = 0$ na primeira e segunda linhas, obtemos que $y = 0$. Assim, todos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 1$ são dados por $\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ -x \end{bmatrix}$

Analogamente, para $\lambda_2 = 4$, obtemos

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isso nos dá

$$\begin{cases} -3x + 3y + 5z = 0 \Longrightarrow -3x + 3y + 0 = 0 \Longrightarrow 3(-x+y) = 0 \Longrightarrow -x + y = 0 \Longrightarrow y = x \\ 7z = 0 \Longrightarrow z = 0 \\ -2z = 0 \Longrightarrow z = 0 \\ x + 3y + 4z - 2w = 0 \Longrightarrow x + 3x + 4.0 - 2w = 0 \Longrightarrow 4x - 2w = 0 \Longrightarrow w = 2x \end{cases}$$

Assim, todos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 4$ são dados por $\begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \\ 2x \end{bmatrix}$

Para o autovalor $\lambda_3 = 2$, temos

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isso nos dá

$$\begin{cases} -x + 3y + 5z = 0 \Longrightarrow -x + 3.\left(\dfrac{-7z}{2}\right) + 5z = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{-11z}{2} \\ 2y + 7z = 0 \Longrightarrow 2y = -7z \Longrightarrow y = \dfrac{-7z}{2} \\ 0 = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \Longrightarrow x + 3.\left(\dfrac{-7z}{2}\right) + 4z = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{13z}{2} \end{cases}$$

Tomando $z = r \neq 0$ e $w = t \neq 0$, com $r, w \in \mathbb{R}$, obtemos então que o autovetor associado ao autovalor $\lambda_3 = 2$ é dado por $\begin{bmatrix} \dfrac{-11r}{2} \\ \dfrac{-7r}{2} \\ r \\ t \end{bmatrix}$

Para o autovalor $\lambda_4 = 2$, o cálculo do autovetor é análogo.

c) $N(T) = \{(x, y, z, w) | T(x, y, z, w) = 0\}$

Assim temos que $(x + w, 3x + 4y + 3w, 5x + 7y + 2z + 4w, 2w) = (0, 0, 0, 0) \Longrightarrow$

$$\begin{cases} x + w = 0 \\ 3x + 4y + 3w = 0 \\ 5x + 7y + 2z + 4w = 0 \\ 2w = 0 \end{cases}$$

Por L_4, $w = 0$. Substituindo em L_1, $x = 0$. Substituindo x e w em L_2, temos que $y = 0$ e por L_3, $z = 0$.

Logo $N(T) = (0, 0, 0, 0)$ e portanto a base para o núcleo= $\{\}$ com dimensão zero.

Usando o Teorema do núcleo e imagem (dim T= dim N(T) + dim Im(T)), temos que T é injetora.