Gabarito

Álgebra Linear: AD2 - CEDERJ

Márcia Fampa & Mauro Rincon - 2018.1
Tutores: Dionisio Martins, Gabriel Thomaz e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

Considere as incógnitas:

$$\begin{aligned} X &= \text{quantidade de pacotes da mistura da casa} \\ Y &= \text{quantidade de pacotes da mistura especial} \\ Z &= \text{quantidade de pacotes da mistura gourmet} \end{aligned}$$

Para montar o sistema relativo ao problema, vamos somar as quantidades(em gramas) de cada tipo de café presente em cada mistura e igualar a quantidade total (em gramas) de cada tipo de café. Assim temos:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 300X + 200Y + 100Z & = & 30000 \\ 0X + 200Y + 200Z & = & 15000 \\ 200X + 100Y + 200Z & = & 25000 \end{array} \right. \tag{1}$$

Encontramos um sistema equivalente simplificando as linhas do sistema anterior:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3X + 2Y + Z & = & 300 \\ 2Y + 2Z & = & 150 \\ 2X + Y + 2Z & = & 250 \end{array} \right. \tag{2}$$

Utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss para resolvê-lo. Considere a seguinte matriz aumentada que representa este sistema :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 300 \\ 0 & 2 & 2 & 150 \\ 2 & 1 & 2 & 250 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_1$ temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 300 \\ 0 & 2 & 2 & 150 \\ 0 & -1 & 4 & 150 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2$ temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 300 \\ 0 & 2 & 2 & 150 \\ 0 & 0 & 10 & 450 \end{bmatrix}$$

Assim, temos o seguinte sistema após a eliminação de Gauss:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3X + 2Y + Z & = & 300 \\ 2Y + 2Z & = & 150 \\ 10Z & = & 450 \end{array} \right. \tag{3}$$

Por L_3 neste sistema, temos que $Z = 45$.

Substituindo Z em L_2 temos que $2Y + 90 = 150 \Longrightarrow Y = 30$.

Agora, substituindo Y e Z em L_1, temos que $X = 65$.

Logo, foram preparados 65 pacotes da mistura da casa, 30 pacotes da mistura especial e 45 pacotes da mistura gourmet.

2^a Questão) Solução:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & k \end{array} \right.$$

O sistema linear acima pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ k \end{bmatrix}$$

Utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss para resolvê-lo.

Vamos então, formar a matriz aumentada $[A|b]$.

A matriz aumentada é dada por:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 2 & -1 & | & -3 \\ 2 & 2 & -2 & | & k \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 3 & -2 & | & -6 \\ 0 & 4 & -4 & | & k-6 \end{bmatrix}$$

Fazendo agora $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{4}{3}L_2$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 3 & -2 & | & -6 \\ 0 & 0 & -4/3 & | & k+2 \end{bmatrix}$$

a) O determinante da matriz dos coeficientes é -4. Como o sistema possui o determinante da matriz dos coeficientes diferente de zero, o sistema tem uma única solução e portanto não existe valor de k para que o sistema não tenha solução.

b) Como o sistema possui uma solução única, logo não há valor de k para que o sistema tenha infinitas soluções.

c) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

a matriz dos coeficientes.

Podemos expandir o determinante em relação à uma linha ou coluna.

Expandindo, então, em relação à segunda linha, obtemos:

$$det(A) = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \tag{4}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij}) \tag{5}$$

onde M_{ij} é o determinante menor de a_{ij}. Assim, temos:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} det(M_{21}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1).(2-2) = 0 \tag{6}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} det(M_{22}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (1).(-2-2) = -4 \tag{7}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} det(M_{23}) = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1).(2+2) = -4 \tag{8}$$

$$det(A) = 1.A_{21} + 2.A_{22} - 1.A_{23} = 1.0 + 2.(-4) - 1.(-4) = -4 \tag{9}$$

Como o $det(A) \neq 0$, logo a matriz A é invertível.

3^a Questão) Solução:

a) $N(t) = \{(x, y, z, t)/T(x, y, z, t) = (0, 0, 0)\}$, ou seja

$$(x - y + z + t, x + 2y - t, x + y + 3z - 3t) = (0, 0, 0)$$

Assim, teremos o sistema

$$\begin{cases} x - y + z + t & = & 0 \\ x + 2z - t & = & 0 \\ x + y + 3z - 3t & = & 0 \end{cases} \tag{10}$$

Observe que o sistema tem mais incógnitas que equações. Vamos fazer operações entre as linhas da matriz completa do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim temos o sistema

$$\begin{cases} x - y + z + t & = & 0 \\ y + z - 2t & = & 0 \end{cases} \tag{11}$$

Pela segunda linha do sistema temos que $y = 2t - z$. Substituindo y na primeira linha, temos que $x = t - 2z$. Logo $N(t) = \{(x, y, z, t)/x = t - 2z, y = 2t - z\}$.

Temos que $(x, y, z, t) = (t - 2z, 2t - z, z, t) = z(-2, -1, 1, 0) + t(1, 2, 0, 1) = zv_1 + tv_2$. Claramente v_1 e v_2 sao LI's. Assim, uma base para o núcleo é $\{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$, e o núcleo possui dimensão 2. Além disso, T não é injetora pois $N(t) \neq 0$.

b) Utilizando a proposição, temos que as imagens dos vetores de uma base do $\mathbb{R}^4$ geram a imagem de T. Vejamos:

$$\begin{aligned} &T(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 1) \\ &T(0, 1, 0, 0) = (-1, 0, 1) \\ &T(0, 0, 1, 0) = (1, 2, 3) \\ &T(0, 0, 0, 1) = (1, -1, -3) \end{aligned}$$

Obtemos então a matriz cujas linhas geram a imagem de T:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Reduzindo por linhas a matriz acima encontramos, fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, e $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Fazendo agora $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, e $L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, $\{(1,1,1),(0,1,2)\}$ é base da imagem, e portanto, a imagem possui dimensão 2. Vale ressaltar que dimensão da imagem$+$dimensão do núcleo $= 2+2 = 4 =$ dimensão de $\mathbb{R}^4$. Portanto , dimensão da imagem é diferente da dimensão do contradomínio, logo não é sobrejetora.

4^a Questão) Solução:

a) $T(0) = 0$?

$T_A(0) = A.0 = 0 \rightarrow$ ok

Agora, usando propriedades de matrizes, temos:

$T_A(x + \lambda y) = A(x + \lambda y) = Ax + A\lambda y = Ax + \lambda Ay = T_A(x) + \lambda T_A(y) \rightarrow$ ok

b)

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x + 2y \\ 3x - 4y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

$$T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0 \\ 0 + 2.0 \\ 3.0 - 4.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{ok}$$

Usando propriedades de matrizes temos:

$$T \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(y_1 + y_2) \\ (x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) \\ 3(x_1 + x_2) - 4(y_1 + y_2) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -y_1 - y_2 \\ x_1 + 2y_1 + x_2 y_2 \\ 3x_1 - 4y_1 + 3x_2 - y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 + 2y_1 \\ 3x_1 - 4y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y_2 \\ x_2 + 2y_2 \\ 3x_2 - 4y_2 \end{pmatrix} =$$

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}. \to \text{ok}$$

E temos também:

$$T \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda y \\ \lambda x + 2\lambda y \\ 3\lambda x - 4\lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda y \\ \lambda(x + 2y) \\ \lambda(3x - 4y) \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} -y \\ x + 2y \\ 3x - 4y \end{pmatrix} = \lambda T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \text{ok.}$$

5^a Questão) Solução:

A matriz canônica é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

A equação característica de A é:

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 0 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

isto é, desenvolvendo o determinante temos, $(1-\lambda)^2(-1-\lambda) - 8(1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + \lambda^2 + 9\lambda - 9 = 0$. As raízes desta equação são $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = -3$, que são os autovalores de A.

<u>Cálculo dos autovetores v associados aos autovalores λ</u>:

O sistema homogêneo de equações lineares que permite a determinação dos autovetores associados é $(A-\lambda I)v=0$, dado por:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 0 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & -4 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_1=1$, o S.L. fica:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

isto é, o sistema admite uma infinidade de soluções. Assim:

$$\begin{cases} y+3z=0 \\ -2y-2z=0 \Rightarrow z=-y \\ -4y=0 \Rightarrow y=0 \end{cases}$$

Fazendo $x=t$, temos que os vetores $v_1=(t,0,0)=t(1,0,0)$, com $t\neq 0$ real são autovetores associados a λ_1.

Para $\lambda_2=3$, o S.L. fica:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

isto é, o sistema admite uma infinidade de soluções. Assim:

$$\begin{cases} -2x+y+3z=0 \Rightarrow 2x=y+3z \Rightarrow x=-\frac{5}{2}y \\ -4y-2z=0 \\ -4y-2z=0 \Rightarrow y=-\frac{z}{2} \end{cases}$$

Fazendo $y=t$, temos que os vetores $v_2=(-\frac{5}{2}t,t,-2t)=t(-\frac{5}{2},1,-2)=t(5,-2,4)$, com $t\neq 0$ real são autovetores associados a λ_2.

Para $\lambda_3 = -3$, o S.L. fica:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

isto é, o sistema admite uma infinidade de soluções. Assim:

$$\begin{cases} 4x + y + 3z = 0 \Rightarrow 4x + y + 3y = 0 \Rightarrow x = -y \\ 2y - 2z = 0 \\ -4y + 4z = 0 \Rightarrow y = z \end{cases}$$

Fazendo $y = t$, temos que os vetores $v_3 = (-t, t, t) = t(-1, 1, 1)$, com $t \neq 0$ real são autovetores associados a λ_3.

Então, para cada autovalor λ, os seus correspondentes autovetores geram umsubespaço chamado de subespaço próprio. Vamos agora, determinar uma base para cada um dos subespaços:

$$B_1 = \{(1, 0, 0)\}, B_2 = \{(5, -2, 4)\}, B_3 = \{(-1, 1, 1)\}$$

Para $\lambda_1 = 1$ o subespaço correspondente é dado por $S_1 = \{(x, y, z) \in R^3; (x, 0, 0)\}$. Nesse caso, como B_1 tem um único vetor, logo ele é L.I., e portanto, B_1 é uma base para S_1. Usando o mesmo pensamento, os conjuntos B_2 e B_3 são, respectivamente, bases para o subespaços $S_2 = \{(x, y, z) \in R^3; (5x, -2x, 4x)\}$ e $S_3 = \{(x, y, z) \in R^3; (-x, x, x)\}$.