Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO DA AP3 - Segundo Semestre de 2016
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(3.0)1. Considere os vetores $u = (0, 1, -1)$ e $w = (2, k, 0)$ de $I\!R^3$, onde $k \in I\!R$.

(a) Determine todos os possíveis valores de k de modo que os vetores u e $u + w$ sejam perpendiculares.

Solução:

Temos $u + w = (2, k + 1, -1)$. Para que u e $u + w$ sejam perpendiculares basta fazer o produto escalar entre eles igual a zero. Logo,

$$u \cdot (u + w) = (0, 1, -1) \cdot (2, k + 1, -1) = 0 + k + 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$k = -2.$$

(b) Determine todos os possíveis valores de k de modo que a projeção ortogonal do vetor w sobre o vetor u seja igual ao vetor $-5u$.

Solução:

$$\text{proj}_u w = \left(\frac{w \cdot u}{u \cdot u}\right) u = -5u \Leftrightarrow \frac{k}{2}(0, 1, -1) = (0, -5, 5) \Leftrightarrow \frac{k}{2} = -5,$$

$$k = -10.$$

(c) Determine todos os possíveis valores de k de modo que o ângulo entre os vetores u e w seja de 60^0.

Solução:

Temos

$$\cos(60) = \frac{1}{2} = \frac{u \cdot w}{|u||w|} = \frac{k}{\sqrt{2}\sqrt{4+k^2}} \Leftrightarrow 2k = \sqrt{8+2k^2} \Leftrightarrow$$

$$4k^2 = 8 + 2k^2 \Leftrightarrow 2k^2 = 8 \Leftrightarrow k = \pm 2.$$

(5.0)2. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

(a) Encontre o determinante de A utilizando expansão por cofatores e explicitando os seus cálculos.

(b) Prove que o núcleo de A, $N(A)$ é um subespaço vetorial de $I\!R^3$.

(c) Encontre uma base para $N(A)$, e determine sua dimensão.

(d) Prove que a imagem de A^T, $I(A^T)$ é um subespaço vetorial de $I\!R^3$.

(e) Encontre uma base para $I(A^T)$, e determine sua dimensão.

Solução

(a)

$$\det(A) = (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 2(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 \times 1 = 0.$$

(b) Sejam $x_1, x_2 \in N(A)$, logo $Ax_1 = 0$ e $Ax_2 = 0$. Seja $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, onde $\alpha_1, \alpha_2 \in I\!R$. Temos $Ax = A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 = 0 + 0 = 0$. Logo, $x \in N(A)$, o que prova que $N(A)$ é subespaço vetorial de $I\!R^3$.

(c) Podemos encontrar uma base para $N(A)$ colocando A em sua forma escada reduzida por linhas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $x \in N(A)$, da forma escada reduzida por linhas de A temos que

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_3 &= 0 \\ x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $x_1 = 2x_3$ e $x_2 = -5x_3$ Fazendo $x_3 = \alpha$, vemos que $N(A)$ é formado por todos os vetores da forma $\alpha(2, -5, 1)$. Logo $\{(2, -5, 1)\}$ é uma base para $N(A)$ e sua dimensão é igual a 1.

(d) Sejam $y_1, y_2 \in I(A^T)$, logo, existem x_1 e x_2, tais que $y_1 = A^T x_1$ e $y_2 = A^T x_2$. Seja $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$, onde $\alpha_1, \alpha_2 \in I\!R$. Temos $y = \alpha_1 A^T x_1 + \alpha_2 A^T x_2 = A^T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = A^T x$, onde $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$. Logo existe x tal que $y = A^T x$, provando que $y \in I(A^T)$. Logo $I(A^T)$ é um subespaço vetorial de $I\!R^3$.

(e) Podemos encontrar base para $I(A^T)$ também colocando A em sua forma escada reduzida por linhas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

As colunas de A^T geram o espaço $I(A^T)$, ou equivalentemente, as linhas de A geram $I(A^T)$. Desta forma, $\{(1, 0, -2), (0, 1, 5)\}$ é uma base para $I(A^T)$ e sua dimensão é igual a 2.

(2.0)3. Resolva o sistema linear abaixo pelo método de redução de Gauss-Jordan. Uma base para o espaço de soluções do sistema deve ser apresentada.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & 2y & - & 4w & + & z & = & -1 \\ 4x & - & 3y & + & 2w & & & = & 6 \end{array} \right.$$

Solução

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & -4 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 10 & -2 & 8 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & 16 & -3 & 15 \\ 0 & 1 & 10 & -2 & 8 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 8 & -\frac{3}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & 1 & 10 & -2 & 8 \end{array}\right].$$

Na solução temos: $x = \frac{15}{2} - 8w + \frac{3}{2}z$ e $y = 8 - 10w + 2z$. Uma base para o espaço de soluções do sistema, obtida tomando-se primeiramente $w = 0, z = 1$ e depois $w = 1, z = 0$, é:

$$\{(9, 10, 0, 1), (-\frac{1}{2}, -2, 1, 0)\}$$

Sejam r e s números reais. Então as soluções do sistema são dadas por:

$$r(9, 10, 0, 1) + s(-\frac{1}{2}, -2, 1, 0).$$