Gabarito

Álgebra Linear: AD2 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2017/2

Tutores: Gabriel Thomaz e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

a)Temos a matriz esxtendida $[A|b]$ dada por:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 4 & 2 & 5 & 9 \\ 2 & -1 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Como temos que fazer o pivoteamento, o pivô será o maior número em módulo da coluna. Assim, o pivô é o 5, então, temos que fazer $L_1 \longleftrightarrow L_2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 2 & -1 & -7 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 5 & 9 \\ 2 & -1 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Agora, fazendo $L_2 \longleftarrow L_1 + 5L_2$ e $L_4 \longleftarrow L_1 - (5/2)L_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 10 & -3 & 9 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & (5/2) & -8 & (3/2) & (-29/2) \end{array}\right)$$

O pivô já está na posição correta, então não precisa fazer troca de linhas. Assim, fazendo $L_3 \longleftarrow L_2 - (5/2)L_3$ e $L_4 \longleftarrow L_2 - 4L_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 10 & -3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & (-7/2) & (-39/2) \\ 0 & 0 & 29 & 3 & 61 \end{array}\right)$$

O pivô é o 29, portanto devemos fazer $L_4 \longleftrightarrow L_3$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 10 & -3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 29 & 3 & 61 \\ 0 & 0 & -8 & (-7/2) & (-39/2) \end{array}\right)$$

Fazendo, $L_4 \longleftarrow L_3 + (29/8)L_4$, temos que:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 10 & -3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 29 & 3 & 61 \\ 0 & 0 & 0 & (-155/16) & (-155/16) \end{array}\right)$$

Resolvendo por retrosubstituição, temos que

$$-\frac{155}{16}x_4 = -\frac{155}{16} \Longrightarrow x_4 = 1$$

$$29x_3 + 3x_4 = 61 \Longrightarrow 29x_3 + 3.1 = 61 \Longrightarrow x_3 = 2$$

$$10x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 3 \Longrightarrow 10x_2 - 3.2 + 9.1 = 3 \Longrightarrow x_2 = 0$$

$$5x_1 + 2x_3 - x_4 = -7 \Longrightarrow 5x_1 + 2.2 - 1 = -7 \Longrightarrow x_1 = -2$$

Assim,

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Seja $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ vamos fazer a expansão do determinante em cofatores para a linha 3. Então,

$$det(A) = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34}$$

mas $a_{31} = 0$, logo,

$$det(A) = a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34}$$

em que $A_{ij} = (-1)^{i+j}det(M_{ij})$. Temos que calcular A_{32}, A_{33} e A_{34}:

$$A_{32} = (-1)^{3+2}det(M_{32}) = -\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -(44 - 17) = -27$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}det(M_{33}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -14 + 11 = -3$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4}det(M_{34}) = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -(13 - 42) = 29$$

Portanto,

$$det(A) = 4.(-27) + 2.(-3) + 5.29 = -108 - 6 + 145 = 31.$$

c)Temos que calcular a matriz adjunta, para isso precisamos dos cofatores. Já calculamos A_{32}, A_{33} e A_{34}, temos que calcular $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{24}, A_{31}, A_{41}, A_{42}, A_{43}, A_{44}$.

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -20 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 86$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 13 \qquad A_{14} = -\begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -74$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 7 \qquad A_{22} = +\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{24} = +\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 7 \qquad A_{32} = -27$$

$$A_{33} = -3 \qquad A_{34} = 29$$

$$A_{41} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -12 \qquad A_{42} = +\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{43} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 14 \qquad A_{44} = +\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -32$$

Assim, temos que a matriz adjunta de A é dada por:

$$adj(A) = \begin{pmatrix} -20 & 7 & 7 & -12 \\ 86 & 4 & -27 & 33 \\ 13 & -3 & -3 & 14 \\ -74 & -2 & 29 & -32 \end{pmatrix}$$

Como $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$ e como, pelo item b , $det(A) = 31$:

$$A^{-1} = \frac{1}{31} \begin{pmatrix} -20 & 7 & 7 & -12 \\ 86 & 4 & -27 & 33 \\ 13 & -3 & -3 & 14 \\ -74 & -2 & 29 & -32 \end{pmatrix}$$

2^a Questão) Solução:

a) $(z, y - z) = z(1, -1) + y(0, 1)$. Como são LIs, $\{(1, -1), (0, 1)\}$ formam uma base para a imagem, com dimensão 2.

b) $N(T) = \{(x, y, z) | T(x, y, z) = 0\}$. Assim encontramos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} z & = & 0 \\ y - z & = & 0 \end{cases}$$

Pela linha 3 temos que $y = z$. Como pela linha 1, $z = 0$, temos que $y = z = 0$. E x pode assumir qualquer valor real, ou seja, $(x, y, z) = x(1, 0, 0)$. Portanto $\{(1, 0, 0)\}$ é base com dimensão 1.

3^a Questão) Solução:

a) Calculando $det(A - \lambda.I) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 2 = (-1)(\lambda - 2)(\lambda - (\sqrt{3} + 2))(\lambda + (\sqrt{3} - 2)) = 0$

$\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = \sqrt{3} + 2$

$\lambda_3 = -\sqrt{3} + 2$

Calculo dos autovetores (substituindo λ na matriz anterior e escalonando a matriz $(A - \lambda.I = 0)$):

*Para $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

Fazendo $L_2 \leftarrow -L_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

Assim chegamos a:

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & = 0 \\ x_2 & +x_3 & = 0 \end{cases}$$

Do sistema tiramos que $x_3 = x_1 = -x_2$. Logo , $x_3(1, -1, 1)$ é um autovetor para λ_1.

*Para $\lambda_2 = \sqrt{3} + 2$:

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{3}+1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{3}-1 & 0 \end{pmatrix} =$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 : (-\sqrt{3}+1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-\sqrt{3}-1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{3}-1 & 0 \end{pmatrix} =$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-\sqrt{3}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{3}+1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{3}-1 & 0 \end{pmatrix} =$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 : \frac{-\sqrt{3}+1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-\sqrt{3}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3}+1 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{3}-1 & 0 \end{pmatrix} =$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-\sqrt{3}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3}+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} L_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3}+2 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3}+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

Assim chegamos a:

$$\begin{cases} x_1 & +(\sqrt{3}+2)x_3 & = 0 \\ x_2 & +(\sqrt{3}+1)x_3 & = 0 \end{cases}$$

Do sistema tiramos que $x_3(-\sqrt{3}-2, -\sqrt{3}-1, 1)$ é um autovetor para λ_2.

De modo similar para $\lambda_3 = -\sqrt{3}+2$, temos que $x_3(\sqrt{3}-2), \sqrt{3}-1, 1)$ é um autovetor para λ_3.

b) Vamos considerar uma matriz cujas colunas são formadas pelos vetores da base dos autovetores e verificar se tem solução, igualando ao vetor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3}-2 & \sqrt{3}-2 & x \\ -1 & -\sqrt{3}-1 & \sqrt{3}-1 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{pmatrix} =$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_2 + L_1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3}-2 & \sqrt{3}-2 & x \\ 0 & -2\sqrt{3}-3 & 2\sqrt{3}-3 & x+y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{pmatrix} =$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3}-2 & \sqrt{3}-2 & x \\ 0 & -2\sqrt{3}-3 & 2\sqrt{3}-3 & x+y \\ 0 & \sqrt{3}+3 & -\sqrt{3}+3 & -x+z \end{pmatrix} =$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + (\sqrt{3}-1)L_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3}-2 & \sqrt{3}-2 & x \\ 0 & -2\sqrt{3}-3 & 2\sqrt{3}-3 & x+y \\ 0 & 0 & -6\sqrt{3}+12 & \sqrt{3}x-2x+\sqrt{3}y-y+z \end{pmatrix} =$$

Assim chegamos ao sistema:

$$\begin{cases} x_1 - (\sqrt{3}+2)x_2 + (\sqrt{3}-2)x_3 & = & x \\ -(2\sqrt{3}+3)x_2 + (2\sqrt{3}-3)x_3 & = & x+y \\ (-6\sqrt{3}+12)x_3 & & = \sqrt{3}x - 2x + \sqrt{3}y - y + z \end{cases}$$

Do sistema encontramos a solução:

$x_1 = (x - y + z)/3$

$x_2 = (-x - \sqrt{3}y + y - \sqrt{3}z + 2z)/6$

$x_3 = (-x + \sqrt{3}y + y + \sqrt{3}z + 2z)/6$

Portanto, os autovetores formam base para $\mathbb{R}^3$.