Álgebra Linear

Aula 6: Matriz

Mauro Rincon

Márcia Fampa

4.1 - Sistemas Equivalentes

- Como vimos, o método de eliminação para resolução de sistemas lineares, consiste na aplicação repetida de operações elementares, transformando o sistema original num outro sistema, cuja solução é mais facilmente obtida. Mostraremos a seguir que a aplicação das operações elementares, transforma o sistema original num outro sistema equivalente, isto é, num outro sistema linear que possui exatamente as mesmas soluções que o sistema original.

4.1 - Sistemas Equivalentes

Teorema 1: Seja S um sistema linear. Então a solução do sistema não se altera quando:

1) Troca-se duas das equações do sistema S.

2) Multiplica-se uma das equações de S por um número real

3) Soma-se uma equação a um múltiplo de outra equação.

4.1 - Sistemas Equivalentes

Demonstração:

1) Seja $\hat{S}$ o sistema linear obtido trocando-se duas linhas do sistema S.
Se $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$ é uma solução do sistema linear S então também será uma solução de $\hat{S}$ e vice-versa.

4.1 - Sistemas Equivalentes

2) Devido a **1)** podemos supor que a equação multiplicada seja a primeira. Como as demais equações de S e $\hat{S}$ coincidem basta verificar que a afirmação é satisfeita para a primeira equação. Seja $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \cdots, x_n = \alpha_n$ uma solução de S. Então

$$a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \qquad (1)$$

4.1 - Sistemas Equivalentes

Multiplicando por $\lambda \neq 0$ esta igualdade obteremos:

$$(\lambda a_{11})\alpha_1 + (\lambda a_{12})\alpha_2 + \ldots + (\lambda a_{1n})\alpha_n = \lambda b_1, \quad (2)$$

o que mostra que $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \cdots, x_n = \alpha_n$ é também uma solução de $\hat{S}$, uma vez que, para todas as equações restantes, os sistemas S e $\hat{S}$ são coincidentes. Por outro lado como $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \cdots, x_n = \alpha_n$ é solução do sistema $\hat{S}$, então a igualdade (2) é verdadeira. Dividindo (2) por λ obtemos (1). Portanto $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \cdots, x_n = \alpha_n$ é uma solução do sistema S.

4.1 - Sistemas Equivalentes

3) Por simplicidade, consideraremos as operações entre as duas primeiras equações do sistema S. Adicionaremos a segunda equação do sistema à primeira equação multiplicada por λ, obtendo o seguinte sistema linear $\hat{S}$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ (\lambda a_{11}+a_{21})x_1 & + & \dots & + & (\lambda a_{1n}+a_{2n})x_n & = & (\lambda b_1 + b_2) \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

4.1 - Sistemas Equivalentes

Seja $x_1 = \alpha_1, \cdots, x_n = \alpha_n$ uma solução do sistema S. Substituindo esta solução nas duas primeiras equações de S e aplicando a propriedade **2)** na primeira equação, temos:

$$\begin{array}{ccccccc} (\lambda a_{11})\alpha_1 & + & \ldots & + & (\lambda a_{1n})\alpha_n & = & \lambda b_1 \\ a_{21}\alpha_1 & + & \ldots & + & a_{2n}\alpha_n & = & b_2 \end{array}$$

Somando as duas equações acima e colocando o termo α_i em evidência, obtemos

$$(\lambda a_{11} + a_{21})\alpha_1 + \ldots + (\lambda a_{1n} + a_{2n})\alpha_n = (\lambda b_1 + b_2)$$

4.1 - Sistemas Equivalentes

Logo $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \cdots, x_n = \alpha_n$ satisfaz a segunda equação de $\hat{S}$. Como o restante das equações de S e $\hat{S}$ são idênticas,
$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \cdots, x_n = \alpha_n$ satisfaz a todas as equações de $\hat{S}$, e é portanto uma solução do sistema $\hat{S}$.
Mostre que toda solução de $\hat{S}$ é também solução de S.

4.2 - Matrizes

Definição: Uma matriz $m \times n$ real é uma sucessão de números reais, distribuídos em m linhas e n colunas, denotado por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

4.2 - Matrizes

Abreviadamente esta matriz pode ser expressa por (a_{ij}), onde $i = 1, 2 \cdots m$ e $j = 1, 2, \cdots n$, representam, respectivamente, as linhas e colunas da matriz. O símbolo a_{ij} que representa indistintamente todos os termos da matriz é denominado termo geral da matriz. A **i-ésima linha** é dada por

$$\boxed{\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{in} \end{bmatrix} \qquad (1 \leq i \leq m);}$$

4.2 - Matrizes

e a **j-ésima coluna** de **A** é dada por

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \qquad (1 \leq j \leq n)$$

Dizemos que **A** é **m** por **n**, denotando por $m \times n$, quando a matriz tem m linhas e n colunas. Se $m = n$, dizemos que **A** é uma matriz quadrada de ordem n, e nesse caso, os números $a_{11}, a_{22}, \cdots a_{nn}$ formam a **diagonal principal** de **A**.

4.2 - Matrizes

Exemplo 1: Sejam as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow 3 \times 2 \qquad a_{32} = 5$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow 2 \times 3 \qquad b_{13} = 4$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -7 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow 2 \times 1 \qquad d_{21} = 8$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow 3 \times 3 \qquad c_{33} = 5$$

Os elementos c_{11}, c_{22}, c_{33} em C formam a diagonal principal.

$$\mathbf{F} = [2] \Rightarrow 1 \times 1 \qquad f_{11} = 2$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} 1 \times 3 \qquad e_{12} = 0$$

Animar Voltar

4.2 - Matrizes

- Uma matriz $1 \times n$ ou $n \times 1$ é também chamada de um **vetor de dimensão** n ou simplesmente de **vetor** e será denotada por letras minúsculas, enquanto as matrizes são denotadas por letras maiúsculas do alfabeto.

4.2 - Matrizes

Exemplo 2:

$\mathbf{u} = [1\ 2\ 4\ 7\ 8]$ é um vetor de dimensão 5 e

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ é um vetor de dimensão } 3\ .$$

4.2 - Matrizes

Definição: Uma matriz quadrada $\mathbf{A} = (a_{ij})$ com todos os elementos fora da diagonal são nulos, ou seja, $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$, é denominada **matriz diagonal**.

Exemplo 3:
As matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

são exemplos de matrizes diagonais.

4.2 - Matrizes

Definição:
Duas matrizes $m \times n$, $\mathbf{A} = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, são ditas iguais se $a_{ij} = b_{ij}$ para $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, ou seja, se os elementos correspondentes forem iguais.

Exemplo 4:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & x & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} y & 2 & z \\ t & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Então $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ se e somente se
$x = -1, \quad y = 1, \quad t = 0, \quad z = 1.$

4.3 - Adição de Matrizes

<u>Definição</u>: Sejam $\mathbf{A} = (a_{ij})$ e $\mathbf{B} = (b_{ij})$ matrizes $m \times n$, a soma de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ é uma matriz $m \times n$, $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ definida por

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad 1 \leq i \leq m \quad 1 \leq j \leq n}$$

4.3 - Adição de Matrizes

Exemplo 5: Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Então

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+2 & 1+5 \\ -2+(-3) & 3+(-1) & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 6 \\ -5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Observe que a operação de adição entre matrizes, está definida somente quando ambas as matrizes tem o mesmo tamanho, ou a mesma ordem.

4.4 - Multiplicação por um escalar

Definição:

Se $\mathbf{A} = (a_{ij})$ é uma matriz $m \times n$ e α é um número real, o produto de $\mathbf{A}$ por α é a matriz $m \times n$, $\mathbf{B} = \alpha\mathbf{A}$, onde

$$\boxed{b_{ij} = \alpha a_{ij} \qquad 1 \leq i \leq m \quad 1 \leq j \leq n.}$$

Ou seja, os elementos b_{ij} são obtidos multiplicando-se o correspondente elemento a_{ij} da matriz $\mathbf{A}$ por α.

4.4 - Multiplicação por um escalar

Exemplo 6:

Sejam $\alpha = 2$ e $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Então

$$\mathbf{B} = \alpha\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (2)(2) & (2)(-3) & (2)(0) \\ (2)(-2) & (2)(1) & (2)(4) \\ (2)(0) & (2)(3) & (2)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 \\ -4 & 2 & 8 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes $m \times n$, então a diferença entre $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, denotada por $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-1)\mathbf{B}$.

4.4 - Multiplicação por um escalar

Exemplo 7:

Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Então

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1-3 & 2-2 & 1-5 \\ -2-(-3) & 3-(-1) & 0-0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

4.5 - Matriz Transposta

Definição:

Se $\mathbf{A} = (a_{ij})$ é uma matriz $m \times n$, então a matriz $n \times m$, $\mathbf{A}^t = (a^t_{ij})$, satisfazendo a condição

$$\boxed{a^t_{ij} = a_{ji} \qquad 1 \leq i \leq m \quad 1 \leq j \leq n,}$$

é chamada de transposta de $\mathbf{A}$. Assim para obter a transposta de $\mathbf{A}$, basta permutar as linhas pelas colunas.

4.5 - Matriz Transposta

Exemplo 8: Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -7 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & \boxed{-2} \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^t = \begin{bmatrix} -7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^t = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Animar Voltar

Exercícios

- Fazer os exercícios da páginas 13 a 15 do livro texto.

4.6 - Produto Escalar

Definição:

O **produto escalar** ou **produto interno** de dois vetores de dimensão n

$$\mathbf{a} = [a_1 \quad \boxed{a_2} \quad \ldots \quad a_n] \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \boxed{b_2} \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

é definido por

$$\boxed{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + \boxed{a_2 b_2} + \ldots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i .}$$

4.6 - Produto Escalar

Exemplo 1:
O produto escalar dos vetores

$$\mathbf{a} = [1 \quad 5 \quad -3] \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

é dado por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (1)(3) + (5)(0) + (-3)(-2) = 9$$

4.7 - Multiplicação de Matrizes

Definição:

Seja $\mathbf{A} = (a_{ij})$, uma matriz $m \times p$ e $\mathbf{B} = (b_{ij})$, uma matriz $p \times n$. O **produto** de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{B}$, denotado por $\mathbf{AB}$ é a matriz $\mathbf{C} = (c_{ij})$, $m \times n$ definida por

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}}$$

para $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

4.7 - Multiplicação de Matrizes

$$
\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{ip}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \boxed{c_{ij}} & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}
$$

4.7 - Multiplicação de Matrizes

Observação:

O produto $\mathbf{AB}$ está definido apenas quando o número de colunas de $\mathbf{A}$ é igual ao número de linhas de $\mathbf{B}$. Neste caso, o número de linhas do produto $\mathbf{AB}$ é igual ao número de linhas de $\mathbf{A}$ e o número de colunas de $\mathbf{AB}$ é igual ao número de colunas de $\mathbf{B}$.

$$\underset{m \times p}{\mathbf{A}} \qquad \underset{p \times n}{\mathbf{B}} \quad = \quad \underset{m \times n}{\mathbf{AB}}$$

iguais

tamanho de $\mathbf{AB}$

4.7 - Multiplicação de Matrizes

Exemplo 2:
Considere as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

O produto de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{B}$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} (4)(5)+(3)(-2)+(1)(1) & (4)(-1)+(3)(4)+(1)(3) \\ (2)(5)+(5)(-2)+(-1)(1) & (2)(-1)+(5)(4)+(-1)(3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 15 & 11 \\ -1 & 15 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4.7 - Multiplicação de Matrizes

Exemplo 3: Considere as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

4.7 - Multiplicação de Matrizes

i) *Encontre o elemento* $(3,2)$ *do produto* $\mathbf{AB}$.
O elemento $(\mathbf{AB})_{3,2}$ *é dado pelo produto escalar da terceira linha de* $\mathbf{A}$ *e da segunda coluna de* $\mathbf{B}$.

$$(\mathbf{AB})_{3,2} = [-1 \quad 2 \quad 8] \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)(-2) + (2)(1) + (8)(5) = 44.$$

4.7 - Multiplicação de Matrizes

ii) *Encontre a primeira coluna do produto* $\mathbf{AB}$.
A primeira coluna de $\mathbf{AB}$ *é dada pelo produto de* $\mathbf{A}$ *pela primeira coluna de* $\mathbf{B}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathrm{col}_1(\mathbf{B}) &= \begin{bmatrix} 7 & 0 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (7)(3) + (0)(-2) + (9)(1) \\ (1)(3) + (5)(-2) + (3)(1) \\ (-1)(3) + (2)(-2) + (8)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4.7 - Multiplicação de Matrizes

Exemplo 4: Considere as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

i) *Encontre o produto* **AB**.

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (3)(-2)+(-1)(1) & (3)(1)+(-1)(4) & (3)(6)+(-1)(2) \\ (-2)(-2)+(0)(1) & (-2)(1)+(0)(4) & (-2)(6)+(0)(2) \\ (1)(-2)+(4)(1) & (1)(1)+(4)(4) & (1)(6)+(4)(2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -7 & -1 & 16 \\ 4 & -2 & -12 \\ 2 & 17 & 14 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

4.7 - Multiplicação de Matrizes

ii) *Encontre o produto* **BA**.

$$\begin{aligned}
\mathbf{BA} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (-2)(3)+(1)(-2)+(6)(1) & (-2)(-1)+(1)(0)+(6)(4) \\ (1)(3)+(4)(-2)+(2)(1) & (1)(-1)+(4)(0)+(2)(4) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2 & 26 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

4.7 - Multiplicação de Matrizes

Exemplo 5:

Considere as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

i) *Encontre o produto* $\mathbf{AB}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (5)(5) + (3)(-3) & (5)(-1) + (3)(4) \\ (1)(5) + (7)(-3) & (1)(-1) + (7)(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 7 \\ -16 & 27 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4.7 - Multiplicação de Matrizes

ii) *Encontre o produto* **BA**.

$$\begin{aligned}
\mathbf{BA} &= \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (5)(5)+(-1)(1) & (5)(3)+(-1)(7) \\ (-3)(5)+(4)(1) & (-3)(3)+(4)(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 8 \\ -11 & 19 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

4.7 - Multiplicação de Matrizes

- Colocando o que foi visto nos exemplos anteriores de uma forma mais geral, temos que dada a matriz $\mathbf{A}$, $m \times p$, e a matriz $\mathbf{B}$, $p \times n$, o produto $\mathbf{AB}$ é uma matriz $m \times n$ e o produto $\mathbf{BA}$ existe apenas se $m = n$. Neste caso $\mathbf{BA}$ tem dimensão $p \times p$ e tem a mesma dimensão de $\mathbf{AB}$ somente se $m = n = p$. No caso particular em que os produtos $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{BA}$ são iguais, dizemos que as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ comutam. Ilustramos este caso com o exemplo a seguir.

4.7 - Multiplicação de Matrizes

Exemplo 6:

Considere as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Encontre os produtos $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{BA}$ e verifique que as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ comutam.

4.7 - Multiplicação de Matrizes

$$
\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (1)(2)+(2)(6) & (1)(4)+(2)(8) \\ (3)(2)+(4)(6) & (3)(4)+(4)(8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 20 \\ 30 & 44 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{BA} &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (2)(1)+(4)(3) & (2)(2)+(4)(4) \\ (6)(1)+(8)(3) & (6)(2)+(8)(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 20 \\ 30 & 44 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

4.7 - Multiplicação de Matrizes

Exemplo 7:

Numa faculdade a seleção de alunos para os cursos de administração, economia e direito é realizada através da aplicação de provas de matemática, português e história. Dependendo do curso escolhido pelo aluno, diferentes pesos são dados a cada uma destas provas no cálculo da média final do aluno. A tabela a seguir relaciona estes pesos.

4.7 - Multiplicação de Matrizes

	PESO		
	Administração	Direito	Economia
Matemática	2	1	2
Português	2	2	1
História	1	2	2

Suponha que três dos candidatos a ingressar para esta faculdade obtiveram os seguintes resultados nas provas de seleção:

4.7 - Multiplicação de Matrizes

	Matemática	Português	História
Candidato 1	5	6	7
Candidato 2	7	5	4
Candidato 3	4	5	5

Para determinar o total de pontos obtidos pelos três candidatos para cada um dos cursos, vamos considerar um tratamento matricial.

4.7 - Multiplicação de Matrizes

Denote por a_{ij} a nota do aluno i na prova j. Esta informação pode ser representada pela matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Seja agora b_{jk} o peso da prova j para o curso k, como representa a matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

4.7 - Multiplicação de Matrizes

O elemento (i, k) da matriz $\mathbf{AB}$ fornece o total de pontos obtidos pelo candidato i para o curso k. Por exemplo se $i = 2$ (Candidato 2) e $k = 1$ (Administração), o elemento $(2, 1)$ da matriz $\mathbf{AB}$ é

$$7(2) + 5(2) + 4(1) = 28 \text{ pontos.}$$

4.7 - Multiplicação de Matrizes

Observação:
Um vetor de dimensão n pode ser considerado uma matriz $n \times 1$. Sendo assim verifica-se facilmente pelas definições de produto escalar e de matriz transposta que o produto escalar de dois vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de dimensão n pode ser visto com o produto das matrizes $\mathbf{x}^T$ e $\mathbf{y}$, ou seja,

$$\boxed{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}.}$$

4.8 - Produto de Matrizes por Vetores

Seja $\mathbf{A}$, uma matriz $m \times n$ e $\mathbf{c}$ um vetor de dimensão n, ou seja, uma matriz de dimensão $n \times 1$. O produto de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{c}$, é a matriz $m \times 1$ dada por

$$\mathbf{Ac} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n \\ \boxed{a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{2n}c_n} \\ \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \dots + a_{mn}c_n \end{bmatrix}.$$

4.8 - Produto de Matrizes por Vetores

O lado direito desta expressão pode ser escrita como

$$c_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + c_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= c_1 col_1(\mathbf{A}) + c_2 col_2(\mathbf{A}) + \ldots + c_n col_n(\mathbf{A}).$$

Desta última expressão verificamos que o produto de uma matriz $\mathbf{A}$ $m \times n$ por um vetor $\mathbf{c}$ de dimensão n pode ser visto como uma combinação linear das colunas de $\mathbf{A}$, onde os coeficientes são os elementos do vetor $\mathbf{c}$.

4.8 - Produto de Matrizes por Vetores

Exemplo 8: Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

O produto $\mathbf{Ac}$, escrito como combinação linear das colunas de $\mathbf{A}$ é dado por

$$\mathbf{Ac} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ -13 \end{bmatrix}.$$

4.8 - Produto de Matrizes por Vetores

- Sabemos que a primeira coluna do produto $\mathbf{AB}$ é dada pelo produto de $\mathbf{A}$ pela primeira coluna de $\mathbf{B}$. Sendo assim, a primeira coluna de $\mathbf{AB}$ é dada pela combinação linear das colunas de $\mathbf{A}$ onde os coeficientes são os elementos da primeira coluna de $\mathbf{B}$.

4.8 - Produto de Matrizes por Vetores

De uma forma mais geral temos que dadas as matrizes $\mathbf{A}$, $m \times p$ e $\mathbf{B}$, $p \times n$, a j-ésima coluna do produto $\mathbf{AB}$ é dada pela combinação linear das colunas de $\mathbf{A}$ onde os coeficientes são os p elementos da j-ésima coluna de $\mathbf{B}$, ou seja

$$\boxed{col_j(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}col_j(\mathbf{B}) = b_{1j}col_1(\mathbf{A}) + b_{2j}col_2(\mathbf{A}) + \ldots + b_{pj}col_p(\mathbf{A}).}$$

O exemplo a seguir ilustra esta observação.

4.8 - Produto de Matrizes por Vetores

Exemplo 9: Considere as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ do exemplo 2. Cada coluna do produto $\mathbf{AB}$ pode ser colocada como uma combinação linear das colunas de $\mathbf{A}$, como segue abaixo

$$col_1(\mathbf{AB}) = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}col_1(\mathbf{B}) = -2\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$col_2(\mathbf{AB}) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 17 \end{bmatrix} = \mathbf{A}col_2(\mathbf{B}) = 1\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$col_3(\mathbf{AB}) = \begin{bmatrix} 16 \\ -12 \\ 14 \end{bmatrix} = \mathbf{A}col_3(\mathbf{B}) = 6\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

4.9 - Sistemas Lineares

Considere o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \ldots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

4.9 - Sistemas Lineares

Definindo agora as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

4.9 - Sistemas Lineares

e considerando que o produto $\mathbf{Ax}$ é dado por

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

Podemos escrever o sistema linear na forma matricial

$$\boxed{\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.}$$

4.9 - Sistemas Lineares

Definição: A matriz $\mathbf{A}$ é chamada de **matriz dos coeficientes** do sistema linear.

Definição: Chamamos de **matriz aumentada** do sistema linear, a matriz denotada por $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ e definida por

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

4.9 - Sistemas Lineares

Exemplo 10: Seja o sistema linear

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 5 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes, $\mathbf{A}$ e a matriz aumentada deste sistema linear, $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ são dadas por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right].$$

4.9 - Sistemas Lineares

Considerando

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix},$$

podemos escrever o sistema linear na forma matricial $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

4.9 - Sistemas Lineares

Exemplo 11: A matriz

$$\left[\begin{array}{rr|r} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

é a matriz aumentada do sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & 2x_2 & = & -1 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & 5 \end{array}\right.$$

4.9 - Sistemas Lineares

Observação:

Sendo o lado direito do sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, dado pelo produto de uma matriz por um vetor, podemos escrevê-lo como a combinação das colunas da matriz $\mathbf{A}$, com coeficientes dados pelos elementos do vetor $\mathbf{x}$. Neste caso o sistema linear é escrito com

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Exercícios

- Fazer os exercícios das páginas 25 a 28 do livro texto.