Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP2 - Segundo Semestre de 2015
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(2.0)1. Resolva o sistema linear abaixo pelo método de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} 1x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ 1x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Solução:

$$\begin{cases} 1x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ 1x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ 4x_2 + x_3 = -5 \\ x_2 - 4x_3 = -14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ 4x_2 + x_3 = -5 \\ -17x_3 = -51 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 11x_3 = 37 \\ 4x_2 + x_3 = -5 \\ -17x_3 = -51 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 68x_1 = 68 \\ 68x_2 = -136 \\ -17x_3 = -51 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & & + & = & 1 \\ & x_2 & & = & -2 \\ & & x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Logo $x_3 = 3$, $x_2 = -2$ e $x_1 = 1$.

(4.5)2. Para a transformação linear de $I\!R^3 \to I\!R^3$ dada por $L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_3, x_3)^T$ determine:

(1.0)a. uma base para o seu núcleo e sua dimensão,

(1.0)b. uma base para sua imagem e sua dimensão,

(0.5)c. se a transformação é injetora ou sobrejetora, justificando a resposta,

(1.0)d. os autovalores reais de L,

(1.0)e. os autovetores associados ao(s) autovalor(es) positivo(s) de L.

Solução:

(1.0)a. Núcleo, $N(L)$: Se x está no núcleo de L, então $L(x) = 0$, ou seja, $x_1 = x_3$ e $x_3 = 0$. Portanto, $N(L)$ é gerado por $\{(0, 1, 0)^T\}$ (dimensão $= 1$).

(1.0)b. Imagem, $I(L)$: Um vetor y pertence à imagem de L se e somente se y é a soma de um múltiplo de $v_1 = (1, 0, 0)^T$ com um múltiplo de $v_2 = (0, 1, 1)^T$. Logo, $I(L)$ é o espaço bidimensional (dimensão $= 2$) gerado por $[v_1, v_2]$.

(0.5)c. Como $N(L) \neq \{(0, 0, 0)^T\}$, L não é injetora e como $I(L) \neq I\!R^3$, L não é sobrejetora.

(1.0)d. Seja M a matriz canônina da transformação linear. Logo, devemos ter $L(x_1, x_2, x_3) = M \cdot (x_1, x_2, x_3)^T$. Portanto, temos:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$M - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}.$$

Então , $P(\lambda) = det(A - \lambda I) = -\lambda(1-\lambda)^2$. Os autovalores reais de M são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$.

(1.0)e. Os autovetores associados a $\lambda_1 = 1$ são dados por $Mv = v$ ou $(M - I)v = 0$, ou

$$(M-I)v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

resultando em $v_3 = 0$ e $v_2 = v_3$. Ou seja $v = (y, 0, 0)$, para $y \in I\!R$.

(2.0)3. Calcule o determinante de cada uma das matrizes abaixo. Caso utilize alguma propriedade dos determinantes no cálculo, deixe claro qual a propriedade utilizada.

$$(a)\, A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 5 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

$$(b)\, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Solução:

(a) $det(A) = 0$, pois a quarta linha de A é igual a primeira.

(b)

$$det(B) = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(2)(-3)(5)(2) = 60.$$

(1.5)4. Calcular a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} -2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

L1(-1/2)

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

L2=L2+L1(-1), L3=L3+L1

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

L2=L2(-2/3)

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

L1=L1+L2(3/2), L3=L3+L2(-1/2)

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & 1/3 & 1 \end{array}\right]$$

L3(-3)

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

L2=L2+L3(1/3)

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{rrr} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{array}\right]$$