01. AUTOVALORES E AUTOVETORES

Autovetores e Autovalores

Já vou adiantar que toda a teoria que você vai ver aqui só faz sentido se falamos de **matrizes quadradas** ou de **transformações lineares** $T : V \to V$ onde o domínio é igual ao contradomínio.

Então, sempre que eu falar de uma TL ou uma matriz, suponha que elas têm essas características.

A pergunta central do capítulo é a seguinte:

Será que se eu tiver uma uma **transformação linear** (ou uma **matriz**) T, existe algum vetor $\vec{v}$ **não-nulo** de forma que $T\vec{v}$ seja um vetor múltiplo de $\vec{v}$?

Esquematizando: será que existe $\vec{v}$ de forma que:

$$\boxed{T\vec{v} = \lambda\vec{v}},$$

(Sendo λ um escalar real.)

Sabemos que isso acontece em alguns casos! Olha só esse aqui:

Nesse caso eu multipliquei a matriz $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ pelo vetor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e deu o dobro dele (ou seja, $\lambda = 2$). Podemos até escrever:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A ideia é que eu pude substituir uma matriz inteira por um número λ, que nesse caso é 2.

Mas não é com todo vetor que isso acontece!

Os vetores que respeitam essa equação são chamados de **autovetores**. Nesse caso aí de cima, o $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ é um autovetor da matriz $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, pois quando eu multiplico essa matriz pelo vetor dá no mesmo que multiplicar <u>um número só</u> pelo vetor.

Esse número, λ, eu vou chamar de **autovalor**.

Então 2 é um autovalor da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, porque para alguns vetores eu posso substituí-la por esse número na hora de multiplicar.

“Mas e se eu já tiver a transformação linear T, como eu faço pra descobrir seus autovetores e os seus autovalores?”

É isso que vamos tentar descobrir agora! =D

Autoespaços

$$T \bullet \vec{v} = \lambda \vec{v}$$

Então $T \bullet \vec{v}$ e $\lambda \vec{v}$ são o mesmo vetor, certo. Então se eu subtrair um pelo outro dá o vetor nulo!

$$T \bullet \vec{v} - \lambda \vec{v} = \vec{0}$$

Dá uma vontade de colocar esse $\vec{v}$ em evidência...

Mas eu não posso fazer isso, porque T é uma matriz e λ é um escalar!

E não dá pra subtrair uma matriz de um escalar.

Mas a gente sabe que se eu multiplicar a **identidade** por qualquer matriz ou vetor não vai mudar nada, e em particular eu sei que $I \bullet \vec{v} = \vec{v}$. Então:

$$T\vec{v} - \lambda I \vec{v} = \vec{0}$$

Agora sim!

Tanto T quanto λI são matrizes, então eu posso colocar o $\vec{v}$ em evidência e subtraí-las.

$$(T - \lambda I) \bullet \vec{v} = \vec{0}$$

Repare que isso aí em cima é um **sistema homogêneo**. Né? Uma matriz vezes um vetor desconhecido sendo igual a zero!

Então a solução desse sistema é **núcleo** da matriz $T - \lambda I$.

RECADO URGENTE nº 1:

Para achar os autovetores de uma matriz T, é só resolver o sistema

O espaço-solução desse sistema eu vou chamar de **autoespaço**.

Então o autoespaço nada mais é que o conjunto de todos os autovetores de uma TL!!!

Vamos voltar ao exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pô, a gente já sabe nesse caso aí que 2 é um autovalor. Mas não sabemos quais são os outros autovetores associados a esse mesmo autovalor. Para descobrir o conjunto dos autovetores, vamos achar o autoespaço (ou seja, $\text{Nuc}(T - \lambda I)$).

$$T - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

RECADO URGENTE nº 2:

Poupe seu tempo: para achar $T - \lambda I$ é só subtrair λ da diagonal principal.

Tá, aí nesse caso a gente já sabe que $\lambda = 2$ e então é claro que:

$$T - 2I = \begin{pmatrix} 2 - 2 & 1 \\ 0 & 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Então eu tenho que resolver o sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Essa matriz já está escalonada, então se eu descartar a linha nula eu acho o núcleo:

O autoespaço dessa matriz é o espaço gerado por $(1{,}0)$, ou seja, o eixo x.

Assim, qualquer vetor pertence ao eixo x que é escolher é um autovetor da matriz T.

Por exemplo, se escolho $(50,\ 0)$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Espectros

Vamos continuar.

Lembra que quando eu falei de autovetores eu disse que $\vec{v}$ tinha que ser **não-nulo**?

Então a solução não pode ser o vetor nulo, e logo

$\text{Nuc}\,(T - \lambda I) \neq \vec{0}$!!!!!!!

Eu avisei no início do capítulo que T é uma **matriz quadrada**, e I também é, então é lógico que $T - \lambda I$ é uma matriz quadrada.

Agora pensa o seguinte:

- O núcleo dessa matriz não pode ser zero;
- Então a solução do sistema tem que ser conjunto de **infinitos** vetores;
- Numa matriz quadrada, se as linhas forem LI o sistema admite só uma solução;
- Como esse sistema admite **infinitas**, então $T - \lambda I$ é **LD.**

Mas tá ligado do que acontece quando uma matriz é LD?

Para achar os autovalores de uma matriz T, **é só resolver:**

$$\det\left(T - \lambda I\right) = 0$$

Agora a gente já sabe descobrir os autovalores da TL:

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T\left(x,\ y\right) = \left(x - y,\ y - x\right)$$

Tem que transformar isso em matriz. Calculando na base canônica:

$$T\left(1,\ 0\right) = \left(1,\ -1\right)$$

$$T\left(0,\ 1\right) = \left(-1,\ 1\right)$$

Colocando nas colunas:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

E aí, quais são os autovalores de T? É só fazer $\det\left(T - \lambda I\right) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(1-\lambda\right)^2 - 1 = 0$$

$$\left(1 - 2\lambda + \lambda^2\right) - 1 = 0$$

vou chamar esse polinômio (cujas raízes são os valores λ) de **polinômio característico**.

Então $\lambda^2 - 2\lambda$ é o polinômio característico da transformação $T(x,\ y) = (x - y,\ y - x)$.

As raízes desse polinômio são $\lambda = 0$ e $\lambda = 2$.

O **conjunto dos autovalores** de T eu vou chamar de **espectro** de T.

Então o espectro dessa matriz aí é $\{0,\ 2\}$.

Se quiser, fica como exercício calcular os autoespaços associados tanto ao autovalor 0 quando ao 2.

(Se quiser conferir, o autoespaço para o autovalor 0 é $\langle(1{,}1)\rangle$ e o autoespaço para o autovalor 2 é $\langle(1,\ \ -1)\rangle$.)

Só tem uma coisinha que eu já queria te deixar preparado: pode ser que o polinômio característico tenha **raízes complexas**.

Nesse caso, os **autovalores** serão números complexos, e os autovetores não serão mais vetores do $\mathbb{R}^n$, mas do $\mathbb{C}^n$.

Olha o caso dessa matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Então det $M - \lambda I = 0$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \to \lambda^2 + 1 = 0$$

Nesse caso as raízes do polinômio são i e $-i$.

Então temos os autovalores $\lambda = i$ e $\lambda = -i$.

Tranquilo?

Ir para Exercícios

Políticas de Privacidade Termos de Uso Time Planos Procon RJ