

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação  
Disciplina : Álgebra Linear  
GABARITO da AP2 - Primeiro Semestre de 2019  
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

---

- (2.0)1. Determine o determinante de cada uma das matrizes abaixo, utilizando as propriedades sobre determinantes vistas no curso. Em cada caso, apresente a propriedade utilizada. Em seguida, responda, justificando, para qual(is) das matrizes é possível calcular-se a inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & -7 \\ 8 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 6 \\ 1 & -3 & 5 & -3 \\ 4 & 9 & -3 & 9 \\ 2 & 7 & 8 & 7 \end{bmatrix};$$
$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

**Solução:**

- (a) Como  $A$  tem uma linha de 0s,  $\det(A)=0$ .
- (b) Como a segunda e a quarta colunas de  $B$  são iguais,  $\det(B)=0$ .
- (c) Como  $C$  é triangular,  $\det(C)$  é igual ao produto dos elementos da diagonal. Assim,  $\det(C)=-120$ .

É possível calcular a inversa apenas de  $C$ , pois é a única das três matrizes cujo determinante é diferente de zero.

- (3.0)2. Considere o sistema linear  $Ax = b$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Determine a matriz inversa de  $A$ .

**Solução:**

Forme a matriz em bloco  $M = (A : I)$  e reduza  $M$  por linhas à forma escalonada:

$$\begin{aligned} M &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -3 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

A metade esquerda de  $M$  está agora em forma triangular; logo  $A$  tem uma inversa. Além disso, reduza por linhas  $M$  à forma canônica reduzida por linhas:

$$\begin{aligned} M &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -9 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -16 & -11 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) = (I : A^{-1}) \end{aligned}$$

Assim

$$A^{-1} = \left( \begin{array}{ccc} -16 & -11 & 3 \\ \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

- (b) Determine a solução do sistema  $Ax = b$  usando a inversa de  $A$ .

**Solução:**

$$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b = \left( \begin{array}{ccc} -16 & -11 & 3 \\ \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ -1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} -41 \\ 9 \\ -6 \end{array} \right)$$

- (2.0)3. Ache os autovalores da transformação linear abaixo e os autovetores correspondentes ao autovalor negativo.

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(x, y, z) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z)$$

**Solução:**

A transformação  $T$  é dada pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3 - \lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Então,  $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)^2(-1 - \lambda)$ . Os autovalores de  $T$ , são, portanto, os autovalores de  $A$ ,

$$\lambda_1 = 3 \text{ e } \lambda_2 = -1.$$

Os autovetores associados a  $\lambda_2 = -1$  são obtidos abaixo:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= -1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x & -4z = -x \\ & 3y - 5z = -y \\ & -z = -z \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} 4x & -4z = 0 \\ & 4y - 5z = 0 \\ & 0 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x & -z = 0 \\ & y - \frac{5}{4}z = 0 \\ & 0 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Solução:  $x = z$ ,  $y = \frac{5}{4}z$ ,  $z$  qualquer. Os autovetores são do tipo  $v = (z, \frac{5}{4}z, z)$ ,  $z \neq 0$ .

- (3.0)4. Para cada das transformações lineares de  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  abaixo, determine seu núcleo, sua imagem e diga se ela é injetora ou sobrejetora, justificando a resposta.

(a)  $L(x) = (x_3, x_2, x_1)^T$ .

**Solução:**

Núcleo,  $N(L)$ : Se  $x$  está no núcleo de  $L$ , então  $L(x) = 0$ , ou seja,  $x_3 = 0$ ,  $x_2 = 0$  e  $x_1 = 0$ . Portanto,  $N(L) = \{(0, 0, 0)^T\}$ .

Imagem,  $I(L)$ : Dado  $y = (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbb{R}^3$ ,  $y = L((y_3, y_2, y_1)^T)$ . Logo,  $I(L) = \mathbb{R}^3$ .

Como  $N(L) = \{(0, 0, 0)^T\}$ ,  $L$  é injetora e como  $I(L) = \mathbb{R}^3$ ,  $L$  é também sobrejetora.

(b)  $L(x) = (x_1, x_2, 0)^T$ .

**Solução:**

Núcleo,  $N(L)$ : Se  $x$  está no núcleo de  $L$ , então  $L(x) = 0$ , ou seja,  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 0$ . Portanto,  $N(L)$  é o subespaço unidimensional de  $\mathbb{R}^3$  gerado por  $e_3 = (0, 0, 1)^T$ .

Imagem,  $I(L)$ : Um vetor  $y$  pertence à imagem de  $L$  se e somente se  $y$  é a soma de um múltiplo de  $e_1 = (1, 0, 0)^T$  com um múltiplo de  $e_2 = (0, 1, 0)^T$ . Logo,  $I(L)$  é o subespaço bidimensional de  $\mathbb{R}^3$  gerado por  $[e_1, e_2]$ .

Como  $N(L) \neq \{(0, 0, 0)^T\}$ ,  $L$  não é injetora e como  $I(L) \neq \mathbb{R}^3$ ,  $L$  também não é sobrejetora.