Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO DA AP3 - Primeiro Semestre de 2015
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(3.0)1. Ache os autovalores da matriz A abaixo e os autovetores correspondentes.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

Solução:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Então, $P(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$. Logo $\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$. Logo $(\lambda - 5)(\lambda + 2) = 0$.

Os autovalores de A são portanto,

$$\lambda_1 = 5 \text{ e } \lambda_2 = -2.$$

Os autovetores associados a $\lambda_1 = 5$ são obtidos abaixo:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 5x \\ 3x - y = 5y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x & +2y = 0 \\ 3x & -6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x & +2y = 0 \\ & 0 = 0 \end{cases}$$

Onde a equação $0 = 0$ foi obtida pela operação $L_2 := L_2 + 3L_1$. Solução: $x = 2y$. Os autovetores são do tipo $v = (2y, y) = y(2, 1)$, para todo $y \in I\!R$.

Os autovetores associados a $\lambda_2 = -2$ são obtidos abaixo:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} 4x + 2y = -2x \\ 3x - y = -2y \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rr} 6x & +2y = 0 \\ 3x & +y = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rr} 6x & +2y = 0 \\ & 0 = 0 \end{array} \right.$$

Onde a equação $0 = 0$ foi obtida pela operação $L_2 := L_2 - 0,5L_1$. Solução: $y = -3x$. Os autovetores são do tipo $v = (x, -3x) = x(1, -3)$, para todo $x \in I\!R$.

(5.0)2. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

(a) Encontre o determinante de A utilizando expansão por cofatores e explicitando os seus cálculos.

(b) Prove que o núcleo de A, $N(A)$ é um subespaço vetorial de $I\!R^3$.

(c) Encontre uma base para $N(A)$, e determine sua dimensão.

(d) Prove que a imagem de A^T, $I(A^T)$ é um subespaço vetorial de $I\!R^3$.

(e) Encontre uma base para $I(A^T)$, e determine sua dimensão.

Solução

(a)

$$\det(A) = (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 2(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 \times 1 = 0.$$

(b) Sejam $x_1, x_2 \in N(A)$, logo $Ax_1 = 0$ e $Ax_2 = 0$. Seja $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, onde $\alpha_1, \alpha_2 \in I\!R$. Temos $Ax = A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 = 0 + 0 = 0$. Logo, $x \in N(A)$, o que prova que $N(A)$ é subespaço vetorial de $I\!R^3$.

(c) Podemos encontrar uma base para $N(A)$ colocando A em sua forma escada reduzida por linhas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $x \in N(A)$, da forma escada reduzida por linhas de A temos que

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_3 &= 0 \\ x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $x_1 = 2x_3$ e $x_2 = -5x_3$ Fazendo $x_3 = \alpha$, vemos que $N(A)$ é formado por todos os vetores da forma $\alpha(2, -5, 1)$. Logo $\{(2, -5, 1)\}$ é uma base para $N(A)$ e sua dimensão é igual a 1.

(d) Sejam $y_1, y_2 \in I(A^T)$, logo, existem x_1 e x_2, tais que $y_1 = Ax_1$ e $y_2 = Ax_2$. Seja $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$, onde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Temos $y = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 = A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = Ax$, onde $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$. Logo existe x tal que $y = A^T x$, provando que $y \in I(A^T)$. Logo $I(A^T)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(e) Podemos encontrar base para $I(A^T)$ também colocando A em sua forma escada reduzida por linhas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

As colunas de A^T geram o espaço $I(A^T)$, ou equivalentemente, as linhas de A geram $I(A^T)$. Desta forma, $\{(1, 0, -2), (0, 1, 5)\}$ é uma base para $I(A^T)$ e sua dimensão é igual a 2.

(2.0)3. Resolva o sistema linear abaixo pelo método de redução de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} 2x + 2y - z + t = -1 \\ 4x - 3y + 2z = 9 \end{cases}$$

Solução

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 & 0 & 9 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 4 & -2 & 11 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 14 & 0 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & -7 & 4 & -2 & 11 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & \frac{1}{14} & \frac{3}{14} & \frac{15}{14} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{11}{7} \end{array}\right].$$

Uma base para o espaço de soluções do sistema é $\{(1,-1,1,0),(\frac{6}{7},-\frac{13}{7},0,1)\}$. Sejam r e s números reais. Então as soluções do sitema são dadas por:

$$r(1,-1,1,0)+s(\frac{6}{7},-\frac{13}{7},0,1).$$