Gabarito

Álgebra Linear: AD2 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2015.2

Tutores: Gabriel Thomaz e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

Usaremos o método de Gauss para resolver os sistemas (o método de Gauss-Jordan também pode ser usado).

a) Considere a matriz aumentada :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 5 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 9 \\ 4 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow 2L_2 - 5L_1, L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_1, L_4 \leftarrow 2L_4 - 4L_1$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 0 & -24 & -72 \\ 0 & -10 & -30 \\ 0 & -26 & -78 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow -24L_3 + 10L_2, L_4 \leftarrow -24L_4 + 26L_2$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 0 & -24 & -72 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim temos o sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 & = & 16 \\ -24x_2 & = & -72 \end{cases}$$

Por $L_2, x_2 = 3$. Substituindo em L_1, temos que $x_1 = 2$. Logo S= {2,3}.

b) Considere a matriz aumentada :

$$\begin{bmatrix} 2 & -8 & 24 & 18 & 84 \\ 4 & -14 & 52 & 42 & 190 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -8 & 24 & 18 & 84 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 22 \end{bmatrix}$$

Assim temos o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2x_1 - 8x_2 + 24x_3 + 18x_4 & = & 84 \\ \quad 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 & = & 22 \end{array} \right]$$

De L_2 do sistema obtemos x_2: $2x_2 = -4x_3 - 6x_4 + 22, x_2 = 11 - 2x_3 - 3x_4$

De L_1 obtemos x_1: $2x_1 = 8x_2 - 24x_3 - 18x_4 + 84, 2x_1 = 8(-3x_4 - 2x_3 + 11) - 24x_3 - 18x_4 + 84, x_1 = 86 - 20x_3 - 21x_4$

Assim temos que $S = \{-21x_4 - 20x_3 + 86, -3x_4 - 2x_3 + 11, x_3, x_4\}$, onde x_3 e x_4 são variáveis livres.

c) Considere a matriz aumentada :

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim temos o sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 & = & 0 \\ 2x_2 - 5x_3 & = & 0 \\ 4x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Por $L_3, x_3 = 0$. Substituindo em L_2, temos que $x_2 = 0$. Substituindo os dois valores em L_1, temos que $x_1 = 0$. Logo S= {0,0,0}.

2^a Questão) Solução:

a) Aplicamos a transformação na base A e igualamos à combinação linear dos vetores da base B para obtermos os elementos da matriz transformação desejada. Considere $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$T(1,1,1) = (2,2) \Longrightarrow a(2,1) + b(5,3)$

$T(0,1,1) = (0,-1) \Longrightarrow c(2,1) + d(5,3)$

$T(0,0,1) = (1,-2) \Longrightarrow e(2,1) + f(5,3)$

Pela primeira linha temos o sistema:

$$\begin{cases} 2a + 5b & = & 2 \\ a + 3b & = & 2 \end{cases}$$

Resolvendo, encontramos $a = -4, b = 2$.

Pela segunda linha temos o sistema:

$$\begin{cases} 2c + 5d & = & 0 \\ c + 3d & = & -1 \end{cases}$$

Resolvendo, encontramos $c = 5, d = -2$.

Pela primeira terceira linha temos o sistema:

$$\begin{cases} 2e+5f & = & 1 \\ e+3f & = & -2 \end{cases}$$

Resolvendo, encontramos $e = 13, f = -5$.

Logo, a matriz $[T]_A^B$ é

$$\begin{bmatrix} -4 & 5 & 13 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

b) Vamos aplicar a matriz do item anterior no vetor $v = (3, -4, 2)$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 5 & 13 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12-20+26 \\ 6+8-10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

c) Aplicamos a transformação na base A e igualamos à combinação linear dos vetores da base B para obtermos os elementos da matriz transformação desejada. Considere $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$T(1,0,0) = (2,3) \Longrightarrow a(1,0) + b(0,1)$

$T(0,1,0) = (-1,1) \Longrightarrow c(1,0) + d(0,1)$

$T(0,0,1) = (1,-2) \Longrightarrow e(1,0) + f(0,1)$

Pela primeira linha que $a = 2, b = 3$. Pela segunda linha $c = -1, d = 1$. E pela terceira linha temos que $e = 1, f = -2$.

Logo, a matriz $[T]_A^B$ é

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

d) Vamos aplicar a matriz do item anterior no vetor $v = (3, -4, 2)$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+4+2 \\ 9-4-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3^a Questão) Solução:

a) O $N(T) = \{(x,y,z)|T(x,y,z) = 0\}$, assim,

$$\begin{cases} \quad x - y - 2z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ \quad x \qquad - 3z = 0 \end{cases}$$

Utilizando Gauss, na matriz estendida,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

fazendo, $L_2 \longleftarrow L_2 + L_1$ e $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

fazendo $L_3 \longleftarrow L_3 - L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema possui infinitas soluções. Por L_2, temos que $z = y$ e por L_1, que $x = 3y$. Logo, tomando $z = t$, temos que $N(T) = (3t, t, T) = t(3,1,1)$, t pertencente aos reais. Assim, temos que $S = \{(3,1,1)\}$ é base para $N(T)$, com dimensão 1. Sabe-se que T é injetora $\Leftrightarrow N(T) = 0$. Como $N(T) \neq 0 \Rightarrow T$ não é injetora.

b) As imagens dos vetores de uma base do $\mathbb{R}^3$ geram a imagem de T. Vejamos,

$$T(1,0,0) = (1,-1,1)$$

$$T(0,1,0) = (-1,2,0)$$

$$T(0,0,1) = (-2,1,-3)$$

Obtemos a matriz cujas linhas geram a imagem de T

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Reduzindo por linhas a matriz acima, fazendo $L_2 \longleftarrow L_2 + L_1$ e $L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, $S = \{(1,-1,1),(0,1,1)\}$ é base da imagem, e portanto, a imagem possui dimensão 2. Além disso, $Im(T) = \mathbb{R}^2$, e portanto, não é sobrejetora, pois $Im(T) \neq \mathbb{R}^3$ que é o contradomínio.

c) A matriz de T é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

A equação característica é

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda^3 + 6\lambda = 0$$

$$\lambda(-\lambda^2 + 6) = 0$$

As raízes dessa equação são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \sqrt{6}$ e $\lambda_3 = -\sqrt{6}$, que são os autovalores de T.

d) O sistema $(A - \lambda I)v = 0$ nos permite calcular os autovetores. Considerando $v = [x \;\; y \;\; z]^T$, o sistema fica:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

- Substituindo $\lambda_1 = 0$ na equação (1)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Usando Gauss, o sistema fica na forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sistema admite infinitas soluções:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & - & 2y & = & 0 \\ & & y & & & = & z \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ccl} x & = & t \\ x & = & 3y \quad \Rightarrow y = \frac{t}{3} \Rightarrow z = \frac{t}{3} \end{array} \right.$$

Assim, os vetores $v = (t, \frac{t}{3}, \frac{t}{3}) = t(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $t \in \mathbb{R}$, são os autovetores associados a λ_1.

- Substituindo $\lambda_2 = \sqrt{6}$ na equação (1)

$$\begin{bmatrix} 1-\sqrt{6} & -1 & -2 \\ -1 & 2-\sqrt{6} & 1 \\ 1 & 0 & -3-\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} (1-\sqrt{6})x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ -\ x & + & (2-\sqrt{6})y & + & z & = & 0 \\ x & & & + & (-3-\sqrt{6})z & = & 0 \end{array} \right.$$

Esse sistema admite infinitas soluções. De L_3 temos que $x = (3+\sqrt{6})z$. Fazendo $z = t$, temos que $x = (3+\sqrt{6})t$. Substituindo em L_1,

$$(1-\sqrt{6})(3+\sqrt{6})t - y - 2t = 0$$

$$-y - (5+2\sqrt{6})t = 0$$

$$y = -(5+2\sqrt{6})t$$

Assim, os vetores $v = ((3+\sqrt{6})t, -(5+2\sqrt{6})t, t) = t((3+\sqrt{6}), -(5+2\sqrt{6}), 1)$, com $t \in \mathbb{R}$ são autovetores associados a λ_2.

- Substituindo $\lambda_3 = -\sqrt{6}$ na equação (1)

$$\begin{bmatrix} 1+\sqrt{6} & -1 & -2 \\ -1 & 2+\sqrt{6} & 1 \\ 1 & 0 & -3+\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} (1+\sqrt{6})x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ -\ x & + & (2+\sqrt{6})y & + & z & = & 0 \\ x & & & + & (-3+\sqrt{6})z & = & 0 \end{array} \right.$$

Esse sistema admite infinitas soluções. De L_3 temos que $x = (3-\sqrt{6})z$. Fazendo $z = t$, temos que $x = (3-\sqrt{6})t$. Substituindo em L_1,

$$(1+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})t - y - 2t = 0$$

$$-y + (-5 + 2\sqrt{6})t = 0$$

$$y = (-5 + 2\sqrt{6})t$$

Assim, os vetores $v = ((3 - \sqrt{6})t, (-5 + 2\sqrt{6})t, t) = t((3 - \sqrt{6}), (-5 + 2\sqrt{6}), 1)$, com $t \in \mathbb{R}$ são autovetores associados a λ_3.