# Gabarito

# Álgebra Linear: AD1 - CEDERJ

## Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2011.1

## Tutores: Cristina Lopes e Rodrigo Olimpio

**PS: Errata do gabarito** Na questão $2d$) as letras u e w estavam trocadas. Na questão $3a$), foi retirado o termo "não", ou seja os vetores são LI's.

$1^a$ Questão) Solução:

Denotemos o arranjo pequeno por A, o médio por B e o grande por C. O número de rosas por x, margaridas por y e crisântemos por z. E para cada quantidade de arranjos, as incógnitas:

$$\begin{aligned} m &= \text{quantidade de arranjos pequenos} \\ n &= \text{quantidade de arranjos médios} \\ p &= \text{quantidade de arranjos grandes} \end{aligned}$$

Assim, colocando a quantidade de flores em cada arranjo, temos:

$$\begin{aligned} A &= x + 3y + 3z \\ B &= 2x + 4y + 6z \\ C &= 4x + 8y + 6z \end{aligned}$$

Como a florista usou um total de 24 rosas, 50 margaridas e 48 crisântemos, temos:

$$m(x + 3y + 3z) + n(2x + 4y + 6z) + p(4x + 8y + 6z) = 24x + 50y + 48z$$

$$mx + 3my + 3mz + 2nx + 4ny + 6nz + 4px + 8py + 6pz = 24x + 50y + 48z$$

$$x(m + 2n + 4p) + y(3m + 4n + 8p) + z(3m + 6n + 6p) = 24x + 50y + 48z$$

Assim,

$$\begin{cases} m + 2n + 4p & = & 24 \\ 3m + 4n + 8p & = & 50 \\ 3m + 6n + 6p & = & 48 \end{cases}$$

Utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss para resolvê-lo. Considere a seguinte matriz aumentada que representa este sistema :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 24 \\ 3 & 4 & 8 & 50 \\ 3 & 6 & 6 & 48 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 24 \\ 0 & -2 & -4 & -22 \\ 0 & 0 & -6 & -24 \end{bmatrix}.$$

Agora, multiplicando $L_2$ por $-\dfrac{1}{2}$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 24 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -6 & -24 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, multiplicando $L_3$ por $-\dfrac{1}{6}$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 24 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Assim, temos o seguinte sistema após a eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} m + 2n + 4p & = & 24 \\ n + 2p & = & 11 \\ p & = & 4 \end{cases}$$

Por $L_3$ neste sistema, temos que $p = 4$. Substituindo $p$ em $L_2$ temos que $n + 8 = 11 \Longrightarrow n = 3$. Agora, substituindo $p$ e $n$ em $L_1$, temos que $m = 2$.

Logo, a florista fez 2 arranjos pequenos, 3 arranjos médios e 4 arranjos grandes.

$2^a$ Questão) Solução:

a) Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Para que $B$ possa gerar o $\mathbb{R}^3$, temos a seguinte condição a ser satisfeita:

$au + bv + cw = (x, y, z)$.

Logo, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2a + b &= x \\ -a + 3b + 5c &= y \\ a + 7c &= z \end{cases}$$

Usando a matriz aumentada do sistema, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & x \\ -1 & 3 & 5 & y \\ 1 & 0 & 7 & z \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1$, $L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & x \\ 0 & 7 & 10 & 2y + x \\ 0 & -1 & 14 & 2z - x \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow 7L_3 + L_2$ temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & x \\ 0 & 7 & 10 & 2y+x \\ 0 & 0 & 108 & 14z+2y-6x \end{bmatrix}$$

Chegamos ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2a+b=x \\ 7b+10c=2y+x \\ 108c=14z+2y-6x \end{cases}$$

Por $L_3$ temos que $c = \dfrac{-6x+2y+14z}{108}$.
Substituindo em $L_2$ temos que
$7b+10\left(\dfrac{-6x+2y+14z}{108}\right)=2y+x$
$\Longrightarrow 7b+\left(\dfrac{-60x+20y+140z}{108}\right)=2y+x \Longrightarrow$
$756b-60x+20y+140z=216y+108x \Longrightarrow b=\dfrac{168x+196y-140z}{756}$
$\Longrightarrow b=\dfrac{12x+14y-10z}{54}=\dfrac{6x+7y-5z}{27}$.
E por $L_1$ , temos que $2a = x-\left(\dfrac{6x+7y-5z}{27}\right) \Longrightarrow a=\dfrac{27x-6x-7y+5z}{54}$
$\Longrightarrow a=\dfrac{21x-7y+5z}{54}$.

Assim, concluímos que o sistema tem solução, ou seja, todo vetor de $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear de $u, v, w$, ou seja, $B$ gera o $\mathbb{R}^3$ .

b) Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Para que os vetores sejam LI´s, a seguinte condição deve ser satisfeita:

$au+bv+cw=0 \Leftrightarrow a,b,c=0.$

Logo, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2a+b &= 0 \\ -a+3b+5c &= 0 \\ a+7c &= 0 \end{cases}$$

Usando a matriz aumentada do sistema, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1$, $L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 10 & 0 \\ 0 & -1 & 14 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow 7L_3 + L_2$ temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 108 & 0 \end{bmatrix}$$

Por $L_3$ temos que $c = 0$. Substituindo em $L_2$ temos que $b = 0$. E por $L_1$ concluímos que $a = 0$. Assim, temos que os vetores que geram $B$ são LI's. Como pelo item a) o conjunto $B$ gera o $\mathbb{R}^3$, temos que $B$ é base do $\mathbb{R}^3$.

c) Vamos ortogonalizar esta base usando o método de Gram-Schmidt.

Seja $w_1 = (2, -1, 1)$.

Temos que

$$w_2 = (1,3,0) - \left( \frac{(1,3,0)(2,-1,1)}{(2,-1,1)(2,-1,1)} \right) (2,-1,1)$$

$$= (1,3,0) - \left( \frac{-1}{6} \right) (2,-1,1) =$$

$$= (1,3,0) + \left( \frac{2}{6}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{6} \right) = .$$

$$\left(\frac{8}{6},\frac{17}{6},\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{4}{3},\frac{17}{6},\frac{1}{6}\right).$$

$$w_3=(0,5,7)-\left(\frac{(0,5,7)(\frac{4}{3},\frac{17}{6},\frac{1}{6})}{(\frac{4}{3},\frac{17}{6},\frac{1}{6})(\frac{4}{3},\frac{17}{6},\frac{1}{6})}\right)\left(\frac{4}{3},\frac{17}{6},\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{(0,5,7)(2,-1,1)}{(2,-1,1)(2,-1,1)}\right)(2,-1,1)$$

$$=(0,5,7)-\left(\frac{92}{59}\right)\left(\frac{4}{3},\frac{17}{6},\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{2}{6}\right)(2,-1,1)=$$

$$=(0,5,7)-\left(\frac{92}{59}\right)\left(\frac{4}{3},\frac{17}{6},\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{4}{6},\frac{-2}{6},\frac{2}{6}\right)=(0,5,7)-\left(\frac{368}{177},\frac{1564}{354},\frac{92}{354}\right)+\left(\frac{-4}{6},\frac{+2}{6},\frac{-2}{6}\right)=$$

$$\left(\frac{-368}{177},\frac{206}{354},\frac{2386}{354}\right)+\left(\frac{-4}{6},\frac{+2}{6},\frac{-2}{6}\right)$$

$$\left(\frac{-972}{354},\frac{324}{354},\frac{2268}{354}\right)=\left(\frac{-162}{59},\frac{54}{59},\frac{378}{59}\right)$$

Logo uma base ortogonal para [B] é $\left\{(2,-1,1),\left(\frac{4}{3},\frac{17}{6},\frac{1}{6}\right),\left(\frac{-162}{59},\frac{54}{59},\frac{378}{59}\right)\right\}$.

d) $proj_v w=\left(\frac{w.v}{v.v}\right)v=\left(\frac{(0,5,7)(1,3,0)}{1^2+(3)^2+0^2}\right)(1,3,0)=\left(\frac{15}{10}\right)(1,3,0)=\left(\frac{15}{10},\frac{45}{10},0\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{9}{2},0\right)$.

$proj_u w=\left(\frac{w.u}{u.u}\right)u=\left(\frac{(0,5,7)(2,-1,1)}{2^2+(-1)^2+1^2}\right)(2,-1,1)=\left(\frac{2}{6}\right)(2,-1,1)=\left(\frac{4}{6},\frac{-2}{6},\frac{2}{6}\right)$
$=\left(\frac{2}{3},\frac{-1}{3},\frac{1}{3}\right)$

e) $d(u,w)=\sqrt{(0-2)^2+(5-(-1))^2+(7-1)^2}=\sqrt{(-2)^2+6^2+6^2}=\sqrt{4+36+36}=$
$\sqrt{76}=2\sqrt{19}$

$3^a$ Questão) Solução:

a) Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sabendo que $u, v, w$ são LI's , vamos verificar se $u + v, v + w, u + w$ também são:

$a(u + v) + b(v + w) + c(u + w) = 0 \iff au + av + bv + bw + cu + cw = au + bv + cw + av + bw + cu = 0 \leftrightarrow au + bv + cw = -av - bw - cu$

Igualando os termos semelhantes, temos que $-a = b, -b = c, a = -c$. Como $a = -b$ e $a = -c$, temos que $b = c$. Como também temos que $-b = c$, estas igualdades só são verdadeiras se $a, b, c = 0$.

Logo, $a(u + v) + b(v + w) + c(u + w) = 0$ implica que $a, b, c = 0$, ou seja, $u + v, v + w, u + w$ são LI's.

b) Sabendo que $u, v, w$ são LI's , vamos verificar se $u - v, v - w, u - w$ também são:

$a(u - v) + b(v - w) + c(u - w) = 0 \iff au - av + bv - bw + cu - cw = 0 \iff (a + c)u + (b - a)v + (-b - c)w = 0.$

Como por hipótese,$u, v, w$ são LI's , concluímos que :

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b - a = 0 \\ -b - c = 0 \end{cases}$$

Por $L_1$, temos que $a = -c$. Por $L_2$, temos que $a = b$.

Logo, o sistema tem várias soluções e $a(u - v) + b(v - w) + c(u - w) = 0$ não implica que $a, b, c = 0$, ou seja, $u - v, v - w, u - w$ não são LI's.

$4^a$ Questão) Solução:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Assim, temos os seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 = b_1 \\ 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 = b_2 \\ 2x_1 & +5x_2 & +7x_3 = b_3 \\ 3x_1 & +9x_2 & +12x_3 = b_4 \end{cases}$$

Fazendo $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1$ e $L_4 \longleftarrow L_4 - 3L_1$, obtemos

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 = b_1 \\ 0x_1 & +0x_2 & +0x_3 = b_2 - 2b_1 \\ 0x_1 & +x_2 & +x_3 = b_3 - 2b_1 \\ 0x_1 & +3x_2 & +3x_3 = b_4 - 3b_1 \end{cases}$$

Da segunda linha temos que $b_2 = 2b_1$.

Da quarta linha temos $x_2 + x_3 = \dfrac{b_4}{3} - b_1$, e da terceira linha $x_2 + x_3 = b_3 - 2b_1$, o que implica:

$$b_3 - 2b_1 = \frac{b_4}{3} - b_1$$

$$b_1 = b_3 - \frac{b_4}{3}$$

Como $b_2 = 2b_1$, temos que $b_2 = 2b_3 - \dfrac{2b_4}{3}$.

Tomemos $b_3 = \alpha$ e $b_4 = \beta$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Assim, $b_1 = \alpha - \dfrac{\beta}{3}$ e $b_2 = 2\alpha - \dfrac{2\beta}{3}$.

Portanto, o sistema tem infinitas soluções (S. P. I.) e sua solução geral é

$S = \left\{ \left( \alpha - \dfrac{\beta}{3}, 2\alpha - \dfrac{2\beta}{3}, \alpha, \beta \right), \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$

$5^a$ Questão) Solução:

a) Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$

$a(1-x+x^2)+b(2+x-3x^2) = 1-4x+6x^2 \iff = a-ax+ax^2+2b+bx-3bx^2 = 1-4x+6x^2 \iff a+2b-(a-b)x+(a-3b)x^2 = 1-4x+6x^2$

Igualando os termos semelhantes, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a+2b = 1 \\ -a+b = -4 \\ a-3b = 6 \end{cases}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ , temos:

$$\begin{cases} a+2b = 1 \\ 3b = -3 \\ -5b = 5 \end{cases}$$

Por $L_2$ e $L_3$, temos que $b = -1$. Substituindo em $L_1$, temos que $a = 3$. Logo $r(x) \in [p(x), q(x)]$.

b) $S \subset P_3$. Temos que $S \neq \{\}$ para $a \neq 0$.

Sejam $p_1 = a_1 + b_1x - b_1x^2 + a_1x^3$ e $p_2 = a_2 + b_2x - b_2x^2 + a_2x^3$.

Temos que $p_1 + p_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x - (b_1 + b_2)x^2 + (a_1 + a_2)x^3$.

Tomando $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$, temos que $p_1 + p_2 \in P_3$.

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\alpha p_1 = (\alpha a_1) + (\alpha b_1)x - (\alpha b_1)x^2 + (\alpha a_1)$.

Tomando $a = \alpha a_1$ e $b = \alpha b_1$, temos que $\alpha p_1 \in P_3$.

Logo, $S$ é subespaço de $P_3$.

c) $S \neq \{\}$, para todo $a, b$.

Sejam
$$m_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}, m_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix}.$$
Temos que
$$m_1 + m_2 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1 + a_2) & (b_1 + b_2) \\ -(b_1 + b_2) & (a_1 + a_2) \end{bmatrix}$$
Tomando $a = a_1 + a_2$ e $b = b_1 + b_2$, temos que $m_1 + m_2 \in M_{2\times 2}$.

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$.
$$\alpha m_1 = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ -\alpha b_1 & \alpha a_1 \end{bmatrix}$$
Tomando $a = \alpha a_1$ e $b = \alpha b_1$ temos que $\alpha m_1 \in M_{2\times 2}$.

$6^a$ Questão) Solução:

Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

a) Vamos determinar a matriz X na equação $XA = B$:
$$XA = B$$
$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a matriz X pela matriz A, obtemos os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} a+b+c &= 1 \\ 2a+b-c &= -1 \\ -a+b &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d+e+f &= 1 \\ 2d+e-f &= 1 \\ -d+e &= 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g+h+i &= 1 \\ 2g+h-i &= 2 \\ -g+h &= -1 \end{cases}$$

Resolvendo o primeiro sistema, temos:

Da terceira linha, $a = b$. Substituindo a por b na primeira e segunda linhas, temos o sistema:

$$\begin{cases} 2a+c &= 1 \\ 3a-c &= -1 \end{cases}$$

Pelo método da adição, teremos $5a = 0$, o que implica que $a = 0$. Substituindo na primeira equação, por exemplo, encontramos $c = 1$. Como $a = b$, teremos $b = 0$.

De maneira análoga, resolvemos os outros dois sistemas e encontraremos $d = 0$ , $e = 1$ e $f = 0$, $g = 1$, $h = 0$ e $i = 0$.

Substituindo na matriz X, obtemos:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vamos determinar agora a matriz X na equação $XB = A$:

$$XB = A$$
$$\begin{bmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & q & r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a matriz X pela matriz B, obtemos os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} j + k + l &= 1 \\ -j + k + 2l &= 2 \\ k - l &= -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m + n + o &= 1 \\ -m + n + 2o &= 1 \\ n - o &= 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p + q + r &= 1 \\ -p + q + 2r &= -1 \\ q - r &= 0 \end{cases}$$

Resolvendo o primeiro sistema, temos:

Da terceira linha, $k = l - 1$. Substituindo k na primeira e segunda linhas, temos o sistema:

$$\begin{cases} j + 2l &= 2 \\ -j + 3l &= 3 \end{cases}$$

Pelo método da adição, teremos $5l = 5$, o que implica que $l = 1$. Substituindo na primeira equação, por exemplo, encontramos $j = 0$. Como $k = l - 1$, teremos $k = 0$.

De maneira análoga, resolvemos os outros dois sistemas e encontraremos $m = 0$ , $n = 1$, $o = 0$, $p = 1$, $q = 0$ e $r = 0$.

Substituindo na matriz X, obtemos:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Seja

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcularemos a inversa, usando o método da matriz adjunta através da fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}.AdjA,$$

onde a matriz adjunta de A é a transposta da matriz dos cofatores. Chamando os cofatores de $A_{ij}$, temos:

$$A_ij = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$$

onde $M_{ij}$ é o determinante menor de $a_{ij}$.

Assim, temos:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} det(M_{11}) = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.(0+1) = 1.1 = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} det(M_{12}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1).(0-1) = (-1).(-1) = 1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} det(M_{13}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1.(-1-1) = 1.(-2) = -2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} det(M_{21}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1).(0-1) = (-1).(-1) = 1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} det(M_{22}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.(0+1) = 1.(1) = 1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} det(M_{23}) = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1).(-1-2) = (-1).(-3) = 3$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} det(M_{31}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.(2+1) = 1.(3) = 3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} det(M_{32}) = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1).(1+1) = (-1).(2) = -2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} det(M_{33}) = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.(1-2) = 1.(-1) = -1$$

Substituindo cada cofator na matriz dos cofatores $A_{ij}$, temos:

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Calculando a transposta da matriz dos cofatores, encontraremos a matriz adjunta de A:

$$AdjA = [A_{ij}]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Para calcular o determinante da matriz A, podemos expandi-lo, por exemplo, em relação à terceira coluna:

$$det(A) = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

Substituindo os cofatores e os elementos de A na fórmula acima, obtemos:

$$\begin{aligned} det(A) &= (-1).(-2) + (1).(3) + 0.(-1) \\ det(A) &= 2 + 3 + 0 \\ det(A) &= 5 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}.AdjA = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$