Gabarito

Álgebra Linear: AP1 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2007

Tutores: Rodrigo Olimpio e Cristina Lopes

1^a Questão) Solução:

Considere os vetores $u = (1, -2, -3)$, $v = (2, 3, -1)$ e $w = (3, 2, 1)$.

a)u, v, w são linearmente dependentes ?

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

$\alpha_1(1, -2, -3) + \alpha_2(2, 3, -1) + \alpha_3(3, 2, 1) = 0.$

Assim, temos o sistema linear abaixo:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$$
$$-2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$
$$-3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

Colocando o sistema na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ -2 & 3 & 2 & | & 0 \\ -3 & -1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ e também $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 7 & 8 & | & 0 \\ 0 & 5 & 10 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - \dfrac{5}{7}L_2$, encontramos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 7 & 8 & | & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{30}{7} & | & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \quad 2\alpha_2 \quad +3\alpha_3 &= 0 \\ 7\alpha_2 \quad +8\alpha_3 &= 0 \\ \frac{30}{7}\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Deste sistema, temos por L_3 que $\alpha_3 = 0$. Substituindo em L_2 concluímos que $\alpha_2 = 0$. E substituindo esses valores em L_1 temos que $\alpha_1 = 0$. Logo u,v,w são linearmente independentes.

b) Verifiquemos se u e v são paralelos:

$$\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{3} \neq \frac{-3}{-1}$$

Logo u e v não são paralelos pois as coordenadas não são proporcionais.

Vejamos se u e v são ortogonais:

$u.v = 1 \times 2 + (-2) \times 3 + (-3) \times (-1) = 2 - 6 + 3 = -1 \neq 0 \Longrightarrow u$ não é perpendicular a v.

c) Por definição, para vetores $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$, temos que

$$d(u, v) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Assim,

$d(u, v) = \sqrt{(2 - 1)^2 + (3 - (-2))^2 + (-1 - (-3))^2} = \sqrt{1 + 25 + 4} = \sqrt{30}.$

Logo $d(u, v) = |u - v| = \sqrt{30}$.

d) $|u| = \sqrt{(1^2 + (-2)^2 + (-3)^2)} = \sqrt{14}$.

$|w| = \sqrt{(3^2 + 2^2 + 1^2)} = \sqrt{14}$.

$u.w = 1 \times 3 + (-2) \times 2 + (-3) \times 1 = 3 - 4 - 3 = -4$.

Seja θ o ângulo entre os vetores u e w.

Assim, temos $cos(\theta) = \dfrac{u.w}{|u|.|w|} = \dfrac{-4}{14} \Longrightarrow \theta = \arccos\left(\dfrac{-2}{7}\right)$.

e) $proj_v u = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}.v = \dfrac{(1,-2,-3).(2,3,-1)}{(2,3,-1).(2,3,-1)}.(2,3,-1) = \dfrac{-1}{14}(2,3,-1) = \Big(\dfrac{-1}{7}, \dfrac{-3}{14}, \dfrac{1}{14}\Big)$

2^a Questão) Solução:

a) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ , \ onde \quad a,b,c,d \in \mathbb{R} \quad e \quad b = c \right\}$

Sejam $M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \in V$, $M_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in V$ e $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V$,
onde $a_1, a_2, a, b_1, b_2, b, c_1, c_2, c, d_1, d_2, d \in \mathbb{R}$, com $b_1 = c_1$, $b_2 = c_2$ e $b = c$.

Então devemos verificar se $V \neq \emptyset$, $M_1 + M_2 \in V$ e $\alpha M \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$

i) V não é vazio, já que $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ pertence à V.

ii) $M_1 + M_2 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$.
Como $b_1 = c_1$ e $b_2 = c_2$, temos $b_1 + b_2 = c_1 + c_2$. Além disso, todos os elementos de $M_1 + M_2$ são reais. Logo $M_1 + M_2 \in V$.

iii) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. $\alpha M = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}$. Como $b = c$ e $\alpha b = \alpha c$. Além disso, todos os elementos de αM são reais. Logo $\alpha M \in V$.

Considerando (i), (ii) e (iii), concluímos que V é subespaço.

b) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ , \ onde \quad a,b,c,d \in \mathbb{R} \quad e \quad b = c + 1 \right\}$

Se W é subespaço, $0 \in W$. A matriz nula $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ não pertence à W . Devido à condição $b = c + 1$, não existe possibilidade da matriz nula de ordem 2 pertencer a W.

Logo, como não satisfaz essa condição, W não é subespaço.

3^a Questão) Solução:

Seja $P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ um polinômio de grau 3, e $\hat{P}_3$ o subespaço gerado pelos polinômios $p_1(x), p_2(x)$ e $p_3(x)$, ou seja, $\hat{P}_3 = [p_1(x), p_2(x), p_3(x)]$, onde $p_1(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + 1$, $p_2(x) = x^3 + 3x^2 - x + 4$ e $p_3(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 7$.

Assim temos:

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= \alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x) \\
&= \alpha_1(x^3 + 2x^2 - 2x + 1) + \alpha_2(x^3 + 3x^2 - x + 4) + \alpha_3(2x^3 + x^2 - 7x - 7) \\
&= \alpha_1 x^3 + 2\alpha_1 x^2 - 2\alpha_1 x + \alpha_1 + \alpha_2 x^3 + 3\alpha_2 x^2 - \alpha_2 x + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 x^3 + \alpha_3 x^2 - 7\alpha_3 x - 7\alpha_3 \\
&= (\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3)x^3 + (2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (-2\alpha_1 - \alpha_2 - 7\alpha_3)x + (\alpha_1 + 4\alpha_2 - 7\alpha_3)
\end{aligned}$$

E portanto, como $P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$,

$$\begin{cases}
a_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \\
a_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\
a_1 = -2\alpha_1 - \alpha_2 - 7\alpha_3 \\
a_0 = \alpha_1 + 4\alpha_2 - 7\alpha_3
\end{cases}$$

Colocando na forma matricial,

$$\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 2 & a_3 \\
2 & 3 & 1 & a_2 \\
-2 & -1 & -7 & a_1 \\
1 & 4 & -7 & a_0
\end{array}\right]$$

Fazendo $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_1$ e $L_4 \longleftarrow L_4 - L_1$, temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 2 & a_3 \\
0 & 1 & -3 & a_2 - 2a_3 \\
0 & 1 & -3 & a_1 + 2a_3 \\
0 & 3 & -9 & a_0 - a_3
\end{array}\right]$$

Fazendo $L_3 \longleftarrow L_3 - L_2$ e $L_4 \longleftarrow L_4 - 3L_2$, encontramos

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & | & a_3 \\ 0 & 1 & -3 & | & a_2 - 2a_3 \\ 0 & 0 & 0 & | & a_1 + 2a_3 - a_2 + 2a_3 \\ 0 & 0 & 0 & | & a_0 - a_3 - 3(a_2 - 2a_3) \end{array}\right],$$

logo

$$\begin{cases} a_1 - a_2 + 4a_3 & = & 0 \\ a_0 - 3a_2 + 5a_3 & = & 0 \end{cases}$$

Tomando $a_3 = r$ e $a_2 = s$, onde $r, s \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{cases} a_1 & = & s - 4r \\ a_0 & = & 3s - 5r \end{cases}$$

Assim, temos que os coeficientes do polinômio $P_3(x)$ podem escritos como:
$(a_0, a_1, a_2, a_3) = (3s - 5r, s - 4r, s, r) = s(3, 1, 1, 0) + r(-5, -4, 0, 1)$.
Sabendo que $\hat{P}_3 \subset P_3$, e que cada coordenada representa o coeficiente de um polinômio de grau 3, temos que $\hat{P}_3 = [3x^3 + x^2 + x, -5x^3 - 4x^2 + 1]$, isto é, $\hat{P}_3$ é gerado por estes polinômios.

Verificaremos agora se os polinômios acima são linearmente independentes:

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
$\alpha(3x^3 + x^2 + x) + \beta(-5x^3 - 4x^2 + 1) = 0$
Assim, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} 3\alpha - 5\beta & = & 0 \\ \alpha - 4\beta & = & 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Logo, $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Portanto, os polinômios são linearmente independentes e

$$S = \{3x^3 + x^2 + x, -5x^3 - 4x^2 + 1\}$$

é base para o subespaço $\hat{P}_3$, com dimensão 2.

4^a Questão) Solução:

Considere a matriz aumentada $[A|b]$:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 4| & 5 \\ 3 & -8 & -3 & 8| & 18 \\ 2 & -3 & 5 & -4| & 19 \end{bmatrix}$$

Vamos transformar esta matriz em sua forma escada reduzida por linhas, através de operações elementares entre suas linhas.

Assim, fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 4| & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -4| & 3 \\ 0 & 3 & 9 & -12| & 9 \end{bmatrix}$$

Agora, fazendo $L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -8| & 14 \\ 0 & 1 & 3 & 4| & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0| & 0 \end{bmatrix}$$

Desse modo, chegamos ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 7x_3 - 8x_4 = 14 \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases} \tag{1}$$

O número de incógnitas é maior que o número de equações. Tomando $x_4 = r$ e $x_3 = s$, onde $r, s \in \mathbb{R}$, então obtemos que $x_1 = 14 - 7s + 8r$ e $x_2 = 3 - 3s - 4r$, isto é, o sistema é possível e indeterminado, e sua solução geral pode ser escrita como $S = \{14 - 7s + 8r, 3 - 3s - 4r, s, r\},$.