Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
AD2 - Segundo Semestre de 2009
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

Nome -
Assinatura -

1.(2.0) Um comerciante de café vende três misturas de grãos. Um pacote com a "mistura da casa" contém 300 gramas de café colombiano e 200 gramas de café tostado tipo francês. Um pacote com a "mistura especial" contém 200 gramas de café colombiano, 200 gramas de café brasileiro e 100 gramas de café tostado tipo francês. Um pacote com "mistura gourmet" contém 100 gramas de café colombiano, 200 de café brasileiro e 200 gramas de café tostado tipo francês. O comerciante tem 30 quilos de café colombiano, 15 quilos de café brasileiro e 25 quilos de café tostado tipo francês. Se ele deseja utilizar todos os grãos de café, quantos pacotes de cada mistura deve preparar?

2.(3.0) Considere o sistema linear;

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} x_1 & - & x_2 & + & x_4 = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 = & -3 \\ & - & 2x_2 & - & 2x_3 = & k \end{array}\right.$$

onde $k \in I\!R$. Resolvendo o sistema pelo Método de Gauss-Jordan ou Eliminação de Gauss, determine todos os valores de $k$ tal que:

a.(1.0) Sistema não tenha solução.

b.(1.0) Sistema tenha infinita soluções.

c.(1.0) Calcule o determinante da matriz dos coeficientes, usando a expansão de Cofatores(Fórmula de Laplace). A matriz dos coeficientes é invertível?

3.(3.0) Seja a aplicação $T_A : I\!R^n \to I\!R^m$, definida por $T_A(x) = Ax$, para $x \in I\!R^n$ e A uma matriz $m \times n$.

(a) Prove que $T_A$ é uma transformação linear.

(b) Usando o item anterior, mostre que as transformações são lineares:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x+2y \\ 3x-4y \end{bmatrix}, \qquad T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z \\ y+z \\ x+y \end{bmatrix}$$

(c) Dê um contra-exemplo para mostrar que a transformação dada é não linear

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |x| \\ |y| \end{bmatrix}$$

4.(2.0) Calcule os autovalores e os correspondentes autovetores. Para cada autovalor $\lambda$, os seus correspondentes autovetores geram um subespaço chamado de subespaço próprio. Determine uma base para cada um dos subespaços.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

**Gabarito**

**Álgebra Linear: AD2 - CEDERJ**

**Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2009.2**

**Tutores: Cristina Lopes e Rodrigo Olimpio**

$1^a$ Questão) Solução:

Considere as incógnitas:

$$
\begin{aligned}
X &= \text{quantidade de pacotes da mistura da casa}\\
Y &= \text{quantidade de pacotes da mistura especial}\\
Z &= \text{quantidade de pacotes da mistura gourmet}
\end{aligned}
$$

Para montar o sistema relativo ao problema, vamos somar as quantidades(em gramas) de cada tipo de café presente em cada mistura e igualar a quantidade total (em gramas) de cada tipo de café. Assim temos:

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
300X + 200Y + 100Z & = & 30000\\
0X + 200Y + 200Z & = & 15000\\
200X + 100Y + 200Z & = & 25000
\end{array}
\right. \qquad (1)
$$

Encontramos um sistema equivalente simplificando as linhas do sistema anterior:

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
3X + 2Y + Z & = & 300\\
2Y + 2Z & = & 150\\
2X + Y + 2Z & = & 250
\end{array}
\right. \qquad (2)
$$

Utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss para resolvê-lo. Considere a seguinte matriz aumentada que representa este sistema :

$$
\begin{bmatrix}
3 & 2 & 1 & 300\\
0 & 2 & 2 & 150\\
2 & 1 & 2 & 250
\end{bmatrix}
$$

Fazendo $L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_1$ temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 300 \\ 0 & 2 & 2 & 150 \\ 0 & -1 & 4 & 150 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2$ temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 300 \\ 0 & 2 & 2 & 150 \\ 0 & 0 & 10 & 450 \end{bmatrix}$$

Assim, temos o seguinte sistema após a eliminação de Gauss:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3X + 2Y + Z & = & 300 \\ 2Y + 2Z & = & 150 \\ 10Z & = & 450 \end{array} \right. \tag{3}$$

Por $L_3$ neste sistema, temos que $Z = 45$.

Substituindo $Z$ em $L_2$ temos que $2Y + 90 = 150 \Longrightarrow Y = 30$.

Agora, substituindo $Y$ e $Z$ em $L_1$, temos que $X = 65$.

Logo, foram preparados 65 pacotes da mistura da casa, 30 pacotes da mistura especial e 45 pacotes da mistura gourmet.

$2^a$ Questão) Solução:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -3 \\ & - & 2x_2 & - & 2x_3 & = & k \end{array} \right.$$

O sistema linear acima pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ k \end{bmatrix}$$

Utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss para resolvê-lo.

Vamos então, formar a matriz aumentada $[A|b]$.

A matriz aumentada é dada por:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 2 & -1 & | & -3 \\ 0 & -2 & -2 & | & k \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 3 & -2 & | & -6 \\ 0 & -2 & -2 & | & k \end{bmatrix}$$

Fazendo agora $L_3 \leftarrow 3L_3 + 2L_2$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 3 & -2 & | & -6 \\ 0 & 0 & -10 & | & 3k - 12 \end{bmatrix}$$

a) Como o sistema possui o determinante da matriz dos coeficientes diferente de zero, o sistema tem solução única e portanto não existe valor de $k$ para que o sistema não tenha solução.

b) Como o sistema possui o determinante da matriz dos coeficientes diferente de zero, o sistema tem solução única e portanto não existe valor de $k$ para que o sistema tenha infinitas soluções.

c) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

a matriz dos coeficientes.

Podemos expandir o determinante em relação à uma linha ou coluna. É claro que é melhor expandir em relação a uma linha ou coluna que tenha o maior número de zeros, já que, nesse caso, os cofatores $A_{ij}$ dos $a_{ij}$ que são nulos não precisam ser calculados, uma vez que $a_{ij}A_{ij} = (0)(A_{ij}) = 0$.

Expandindo, então, em relação à terceira linha, obtemos:

$$det(A) = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \tag{4}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$$

onde $M_{ij}$ é o determinante menor de $a_{ij}$.

Assim, temos:

$$A_{32} = (-1)^{3+2} det(M_{32}) = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \tag{5}$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} det(M_{33}) = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \tag{6}$$

$A_{31}$ não vamos calcular pois $a_{31} = 0$.

Logo, temos de (5)e (6) e que

$$\begin{aligned} A_{32} &= (-1)(-1-1) = (-1)(-2) = 2 \\ A_{33} &= (1)(2+1) = 3 \end{aligned}$$

Substituindo esses valores em (4) temos:

$$\begin{aligned} det(A) &= 0(A_{31}) + (-2)(A_{32}) + (-2)(A_{33}) \\ det(A) &= 0 + (-2)(2) + (-2)(3) \\ det(A) &= -4 - 6 \\ det(A) &= -10 \end{aligned}$$

Como $det A \neq 0$, temos que $A$ é invertível.

$3^a$ Questão) Solução:

a) $T(0) = 0$?

$T_A(0) = A.0 = 0 \to$ ok

Agora, usando propriedades de matrizes, temos:

$T_A(x + \lambda y) = A(x + \lambda y) = Ax + A\lambda y = Ax + \lambda Ay = T_A(x) + \lambda T_A(y) \to$ ok b)

i)

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x+2y \\ 3x-4y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

$$T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0 \\ 0+2.0 \\ 3.0-4.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \text{ok}$$

Usando propriedades de matrizes temos:

$$T\begin{bmatrix} x_1+\lambda x_2 \\ y_1+\lambda y_2 \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)$$

Agora, usando a linearidade de $T$:

$$= T\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \lambda T\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \to \text{ok}$$

ii)

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z \\ y+z \\ x+y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 \\ 0+0 \\ 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \text{ok}$$

Usando propriedades de matrizes temos:

$$T\begin{bmatrix} x_1+\lambda x_1 \\ y_1+\lambda y_2 \\ z_1+\lambda z_2 \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right)$$

Agora, usando a linearidade de $T$:

$$= T\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \lambda T\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{ok}$$

c)

$$T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |0| \\ |0| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{ok}$$

Mas:

$$T\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |-x| \\ |-y| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\neq -T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} |x| \\ |y| \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}.$$

$4^a$ Questão) Solução:

A matriz canônica é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

A equação característica de $A$ é:

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

isto é, desenvolvendo o determinante pela $3^a$ linha e observando a alternância dos sinais que precedem os produtos, obtemos:

$$0.A_{31} + 0.A_{32} + (3-\lambda)(-1)^{(3+3)} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$0 + 0 + (3-\lambda)(1-\lambda)(-2-\lambda) = 0$$

As raízes dessa equação são $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -2$ , que são os autovalores da matriz A.

<u>Cálculo dos autovetores v associados aos autovalores $\lambda$</u>:

O sistema homogêneo de equações lineares que permite a determinação dos autovetores associados é: $(A - \lambda I)v = 0$.

Considerando

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

o sistema fica:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

1. Substituindo $\lambda_1$ por 3 no sistema (7), obtemos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 3$.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

isto é,

$$\begin{cases} -2x & +1y & +0z = 0 \\ 0x & -5y & +1z = 0 \\ 0x & +0y & +0z = 0 \end{cases}$$

O sistema admite uma infinidade de soluções:

$$\begin{cases} -2x + y & = & 0 & \Longrightarrow & x & = & y/2 \\ -5y + z & = & 0 & \Longrightarrow & z & = & 5y \\ y & = & t \end{cases}$$

Assim, os vetores $v_1 = \left(\frac{t}{2}, t, 5t\right) = t\left(\frac{1}{2}, 1, 5\right)$, com $t \neq 0$ real são os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 3$.

2. Substituindo $\lambda_2$ por 1 no sistema (7), obtemos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 1$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

isto é,

$$\begin{cases} 0x & +1y & +0z = 0 \\ 0x & -3y & +z = 0 \\ 0x & +0y & +2z = 0 \end{cases}$$

O sistema admite uma infinidade de soluções:

$$\begin{cases} y & = & 0 \\ -3y + z & = & 0 \\ 2z & = & 0 & \Longrightarrow & z = 0 \end{cases}$$

Fazendo $x = t$, temos que os vetores $v_2 = (t, 0, 0) = t\,(1, 0, 0)$, com $t \neq 0$ real, são os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 1$.

3. Substituindo $\lambda_3$ por -2 no sistema (7), obtemos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = -2$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

isto é,

$$\begin{cases} 3x & +1y & +0z = 0 \\ 0x & +0y & +1z = 0 \\ 0x & +0y & +5z = 0 \end{cases}$$

O sistema admite uma infinidade de soluções:

$$\begin{cases} 3x + y & = & 0 & \Longrightarrow & y = -3x \\ z & = & 0 & & \\ 5z & = & 0 & \Longrightarrow & z = 0 \end{cases}$$

Fazendo $x = t$, temos que os vetores $v_3 = (t, -3t, 0) = t\,(1, -3, 0)$, com t real, são os autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = -2$.

Então, para cada autovalor $\lambda$, os seus correspondentes autovetores geram um subespaço chamado de subespaço próprio. Vamos agora, determinar uma base para cada um dos subespaços:

$B_1 = \left\{\left(\dfrac{1}{2}, 1, 5\right)\right\}, B_2 = \{(1, 0, 0)\}$ e $B_3 = \{(1, -3, 0)\}$

Para $\lambda_1 = 3$ o subespaço correspondente é dado por $S_1 = \{(x, y, z) \in I\!R^3;\ (x/2, x, 5x)\}$. Nesse caso como $B_1$ tem um único vetor então o vetor é LI e portanto $B_1$ é uma base para $S_1$. Usando o mesmo raciocínio, os conjuntos $B_2$ e $B_3$ são as bases para os subespaços: $S_2 = \{(x, y, z) \in I\!R^3;\ (x, 0, 0)\}$ e $S_3 = \{(x, y, z) \in I\!R^3;\ (x, -3x, 0)\}$, respectivamente subespaços próprios dos autovalores $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -2$.