Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP2 - Primeiro Semestre de 2008
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

1.(2.0) Determine o determinante de cada uma das matrizes abaixo, utilizando as propriedades sobre determinantes vistas no curso. Em cada caso, apresente a propriedade utilizada. Em seguida, responda, justificando, para qual(is) das matrizes é possível calcular-se a inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & -7 \\ 8 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 6 \\ 1 & -3 & 5 & -3 \\ 4 & 9 & -3 & 9 \\ 2 & 7 & 8 & 7 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Solução:

(a) Como A tem uma linha de 0s, det(A)=0.

(b) Como a segunda e a quarta colunas de B são iguais, det(B)=0.

(c) Como C é triangular, det(C) é igual ao produto dos elementos da diagonal. Assim, det(C)=-120.

É possível calcular a inversa apenas de C, pois é a única das três matrizes cujo determinante é diferente de zero.

2.(2.5) Resolva o sistema linear abaixo pelo método de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z - 4s + 2t = 4 \\ 3x - 7y + 2z - 5s + 4t = 9 \\ 5x - 10y - 5z - 4s + 7t = 22 \end{cases}$$

Solução: Aplicando as operações anbaixo à matriz aumentada do sistema, temos os seguintes sistemas equivalentes como resultado:

$$-3L_1 + 2L_2 \to L_2, \quad -5L_1 + 2L_3 \to L_3,$$

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z - 4s + 2t = 4 \\ y - 5z + 2s + 2t = 6 \\ 5y - 25z + 12s + 4t = 24 \end{cases}$$

$$-5L_2 + L_3 \to L_3,$$

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z - 4s + 2t = 4 \\ y - 5z + 2s + 2t = 6 \\ 2s - 6t = -6 \end{cases}$$

$$L_1 + 5L_2 \to L_1,$$

$$\begin{cases} 2x - 22z + 6s + 12t = 34 \\ y - 5z + 2s + 2t = 6 \\ 2s - 6t = -6 \end{cases}$$

$$L_1 - 3L_3 \to L_1, \quad L_2 - L_3 \to L_2,$$

$$\begin{cases} 2x - 22z \quad 30t = 52 \\ y - 5z \quad 8t = 12 \\ 2s - 6t = -6 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}L_1 \to L_1, \quad \frac{1}{2}L_3 \to L_3,$$

$$\begin{cases} x - 11z \quad 15t = 26 \\ y - 5z \quad 8t = 12 \\ s - 3t = -3 \end{cases}$$

O sistema acima está na forma escada reduzida por linhas e sua solução é a mesma do sistema original, dada por:

$$(x, y, z, s, t) = (26 + 11a - 15b, 12 + 5a - 8b, a, -3 + 3b, b); a, b \in I\!R.$$

3.(3.0) Considere o espaço vetorial das matrizes reais, quadradas de ordem 2, $M_2(\mathbb{R})$. Determine se cada uma das transformações abaixo é ou não linear. Justifique sua resposta.

(a) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ \ tal\ \ que\ \ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$

Solução: Temos que verificar se

$T(\alpha A_1+\beta A_2) = \alpha T(A_1)+\beta T(A_2),\ \forall A_1, A_2 \in M_2(\mathbb{R}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

Façamos então

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\ \ e\ \ A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
T(\alpha A_1 + \beta A_2) &= T\left(\alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{vmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 & \alpha b_1 + \beta b_2 \\ \alpha c_1 + \beta c_2 & \alpha d_1 + \beta d_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 + \beta b_2 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 + \beta d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta a_2 & \alpha b_1 + \beta b_2 \\ \beta c_2 & \alpha d_1 + \beta d_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha a_1 & \beta b_2 \\ \alpha c_1 & \beta d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta a_2 & \alpha b_1 \\ \beta c_2 & \alpha d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta a_2 & \beta b_2 \\ \beta c_2 & \beta d_2 \end{vmatrix} \\
&= \alpha^2 |A_1| + \alpha\beta \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ c_1 & d_2 \end{vmatrix} + \alpha\beta \begin{vmatrix} a_2 & b_1 \\ c_2 & d_1 \end{vmatrix} + \beta^2 |A_2| \\
&= \alpha^2 |A_1| + \beta^2 |A_2| + \alpha\beta \left(\begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ c_1 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_1 \\ c_2 & d_1 \end{vmatrix} \right) \\
&\neq \alpha T(A_1) + \beta T(A_2).
\end{aligned}$$

Logo, T não é uma transformação linear.

(b) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \;\; tal \;\; que \;\; \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 2a + 3b + c - d.$

Solução: Temos que verificar se

$T(\alpha A_1+\beta A_2) = \alpha T(A_1)+\beta T(A_2), \; \forall A_1, A_2 \in M_2(\mathbb{R}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

Façamos então

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \;\; e \;\; A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} T(\alpha A_1 + \beta A_2) &= T\left(\alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= 2(\alpha a_1 + \beta a_2) + 3(\alpha b_1 + \beta b_2) + (\alpha c_1 + \beta c_2) - (\alpha d_1 + \beta d_2) \\ &= \alpha(2a_1 + 3b_1 + c_1 - d_1) + \beta(2a_2 + 3b_2 + c_2 - d_2) \\ &= \alpha T(A_1) + \beta T(A_2). \end{aligned}$$

Logo, T é uma transformação linear.

4.(3.0) Seja T uma transformação linear em $\mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (z, x - y, -z).$$

(a) Indique o núcleo de T, a sua dimensão e uma base.

(b) Determine a dimensão da imagem de T.

(c) T é injetora? T é sobrejetora? Justifique as respostas.

Solução:

(a) O núcleo da transformação é dado pelo conjunto $N(T) = \{v \in \mathbb{R}^3 : T(v) = 0\}$. Determinar o núcleo da transformação consiste em resolver o sistema de equações $Av = 0$ nas variáveis v, onde A é a matriz de da transformação dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Construamos a matriz ampliada do sistema linear e resolvamos pelo método de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A solução do sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix} = v_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 \in \mathbb{R}.$$

Assim, $N(T)$ tem dimensão 1 e base $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

(b) $\dim(N(T)) + \dim(Im(T)) = \dim(\mathbb{R}^3)) \Rightarrow \dim(Im(T)) = 3 - 1 = 2.$

(c) T não é injetora nem sobrejetora, uma vez que $\dim(N(T)) \neq 0$ e $\dim(Im(T)) \neq \dim(\mathbb{R}^3)$.