Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP1 - Segundo Semestre de 2019
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(2.0)1. Considere os vetores $u = (0, 1, -1)$ e $w = (2, 3, 7)$ de $I\!R^3$.

(a) Verifique se os vetores u e w são perpendiculares. Justifique detalhadamente sua resposta.

Solução:

u e w são perpendiculares se o produto escalar entre eles for igual a zero. Temos,

$$u \cdot w = (0, 1, -1) \cdot (2, 3, 7) = 0 + 3 - 7 = -4$$

Logo, os vetores não são perpendiculares.

(b) Determine a projeção ortogonal do vetor w sobre o vetor u

Solução:

$$\text{proj}_u w = \left(\frac{w \cdot u}{u \cdot u} \right) u = \frac{-4}{2}(0, 1, -1) = (0, -2, 2)$$

(4.0)2. Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 2 & -5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Se possível, calcular as matrizes abaixo. Se não for possível, determinar detalhadamente a razão. Respostas não corretamente justificadas não serão consideradas.

(a) A matriz $(A - A^2)$.

Solução:

$$A - A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A - A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 61 & 108 \\ 48 & 85 \end{bmatrix}$$

$$A - A^2 = \begin{bmatrix} -56 & -99 \\ -44 & -78 \end{bmatrix}.$$

(b) A matriz $(2A - 3B^T)$.

Solução:

Não é possível calcular a diferença, pois o número de colunas de A é menor que o número de colunas de B^T.

(c) A matriz $(AB)^T$.

Solução:

Não é possível calcular o produto AB pois o número de colunas de A é maior que o número de linhas de B.

(d) A matriz $(BA)^T$.

Solução:

$$BA = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 2 & -5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} -31 & -56 \\ -10 & -17 \\ -22 & -99 \end{bmatrix}.$$

$$(BA)^T = \begin{bmatrix} -31 & -10 & -22 \\ -56 & -17 & -39 \end{bmatrix}.$$

(2.0)3. Determine se os vetores são linearmente dependentes. Respostas sem a correta justificativa não serão consideradas.

(a) $(1, -2, -3)$, $(2, 3, -1)$ e $(3, 2, 1)$,

(b) $(1, -2, 3)$, $(-2, 3, -1)$, $(3, -2, 1)$ e $(-1, 2, -3)$.

Solução:

(a) Igualando a zero uma combinação linear dos três vetores, obtemos o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ -3x - y + z = 0 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 7y + 8z = 0 \\ 5y + 10z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 7y + 8z = 0 \\ 30z = 0 \end{cases}$$

O sistema acima admite apenas a solução nula. Logos os vetores são linearmente independentes.

(b) Como foram dados quatro vetores em R^3 e a dimensão de R^3 é 3, os vetores são necessariamente linearmente dependentes.

(2.0)4. Seja $V = I\!R^3$. Verifique se W é ou não subspaço vetorial de V, onde:

(a) $W = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$.
Solução:
$0 \in W$ pois podemos tomar $x = y = z = 0$. E as seguintes condições são satisfeitas:

Seja $x_1 + y_1 + z_1 = 0$ e $x_2 + y_2 + z_2 = 0$.
$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = 0$
$x_3 + y_3 + z_3 = 0 \in W$, onde $x_3 = x_1 + x_2$, $y_3 = y_1 + y_2$, $z_3 = z_1 + z_2$.

Seja $\alpha \in \Re$ e $x + y + z = 0$.
$\alpha(x + y + z) = \alpha x + \alpha y + \alpha z = 0$
$x_1 + y_1 + z_1 = 0 \in W$ onde $x_1 = \alpha x, y_1 = \alpha y$ e $z_1 = \alpha z$.

Logo, W é subespaço vetorial de V.

(b) $W = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Solução:

$0 \in W$ pois podemos tomar $x = y = z = 0$.

Temos $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq 1$ e $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \leq 1$.
Sejam
$x_3 = x_1 + x_2$,
$y_3 = y_1 + y_2$,
$z_3 = z_1 + z_2$.
Então $x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = (x_1^2 + x_2^2) + (y_1^2 + y_2^2) + (z_1^2 + z_2^2) + 2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)$.

Logo é possível termos $x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 \nleq 1$, ou seja, W não é subespaço vetorial.