Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
AD1 - Segundo Semestre de 2010
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

Nome -
Assinatura -

1.(1.0) Sejam $A = (1, 1, -1)$, $B = (-3, 2, -2)$ e $C = (2, 2, -4)$. Prove que o triângulo ΔABC é um triângulo retângulo.

2.(1.0) Um cubo possui quatro diagonais. Mostre que não existem duas dessas diagonais que sejam perpendiculares entre si.

3.(3.0) (a) Sejam os vetores $u = (1, -1, 1, -1)^t$ e $v = (2, -3, -1, -2)^t$ pertencentes ao espaço vetorial $\mathbb{R}^4$, sendo t representando o transposto. Encontre a projeção de v sobre u, $proj_u(v)$.

(b) Determine o subespaço $S \subseteq \mathbb{R}^4$, gerado pelos vetores u e v.

(c) Determine uma base ortonormal para S.

4.(1.0) Encontre todos os possíveis valores de k para os quais os dois vetores $u = (1, -1, 2)^t$ e $v = (k^2, k, -3)^t$ são ortogonais.

5.(2.0) Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Calcule, se possível, as operações a seguir:

$$(a)\ D + BC;\ (b)\ B^tB;\ (c)\ B - C^t;\ (d)\ E(AF)$$

$$(e)\ F(DF);\ (f)\ \left(B^tC^t - (CB)^t\right);\ (g)\ A^3;\ (h)\ (I_2 - D)^2,$$

onde I_2 é a matriz identidade de ordem 2.

6.(2.0) Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = k \end{cases}$$

Determine, se possível, o valor de k de forma que o sistema linear tenha solução(ções), usando o método de Gauss-Jordan. Mostre a(s) solução(ções).

Gabarito

Álgebra Linear: AD1 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2010.2

Tutores: Cristina Lopes e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

Sejam $A = (1, 1, -1)$, $B = (-3, 2, -2)$ e $C = (2, 2, -4)$ os vértices do triângulo ABC.

Tomemos os vetores:

$$AB = B - A = (-3, 2, -2) - (1, 1, -1) = (-4, 1, -1)$$

$$AC = C - A = (2, 2, -4) - (1, 1, -1) = (1, 1, -3).$$

Para mostrar que o triângulo ABC é retângulo, temos que mostrar que o produto escalar entre os vetores AB e AC é zero. De fato:

$$AB.AC = (-4, 1, -1).(1, 1, -3) = (-4).1 + 1.1 + (-1).(-3) = -4 + 1 + 3 = 0.$$

Logo, AB e AC são vetores ortogonais e portanto o triângulo ABC é reto em A.

2^a Questão) Solução:

Considere o cubo unitário. Então as quatro diagonais do cubo são: $d_1 = [1, 1, 1]^t$; $d_2 = [1, 1, -1]^t$; $d_3 = [-1, 1, 1]^t$; $d_4 = [1, -1, 1]^t$. Mas $(d_i, d_j) \neq 0$, para $1 \leq i, j \leq 4$. Logo as diagonais não são perpendiculares entre si.

3^a Questão) Solução:

a) $proj_v u = \dfrac{uv}{||u||^2} u = \dfrac{(1, -1, 1, -1)^t (2, -3, -1, -2)^t}{1^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} (1, -1, 1, -1)^t = \dfrac{6}{4}(1, -1, 1, -1)^t$

$= \dfrac{3}{2}(1, -1, 1, -1)^t = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{-3}{2}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{-3}{2}\right)^t.$

b) Consideremos $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assim, temos:

$$a(1,-1,1,-1)^t + b(2,-3,-1,-2)^t = (a+2b, -a-3b, a-b, -a-2b)^t = (x,y,z,w)^t$$

Assim, temos:

$$\begin{cases} a+2b = x \\ -a-3b = y \\ a-b = z \\ -a-2b = w \end{cases}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ e $L_4 \leftarrow L_4 + L_1$ temos

$$\begin{cases} a+2b = x \\ -b = x+y \\ -3b = z-x \\ 0 = x+w \end{cases}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$, temos

$$\begin{cases} a+2b = x \\ -b = x+y \\ 0 = z-4x-3y \\ 0 = x+w \end{cases}$$

Por L_4 temos que $w = -x$. Por L_3 temos que $z = 4x + 3y$.

Desse modo, temos o subespaço de $\mathbb{R}^4$ e uma base :

$$S = \Big\{(x,y,z,w)^t / z = 4x+3y, w = -x\Big\} = (-w, y, -4w+3y, w)^t =$$

$$= w\,(-1,0,-4,1)^t + y\,(0,1,3,0)^t\,.$$

Logo, uma base para este subespaço é $B = \Big\{(1,0,-4,1)^t\,, (0,1,3,0)^t\Big\}$.

c) Vamos ortogonalizar esta base usando o método de Gram-Schmidt.

Seja $w_1 = (-1, 0, -4, 1)^t$.

Temos que

$$w_2 = (0, 1, 3, 0)^t - \left(\frac{(0,1,3,0)^t(-1,0,-4,1)^t}{(-1,0,-4,1)^t(-1,0,-4,1)^t} \right) (-1, 0, -4, 1)^t$$

$$= (0, 1, 3, 0)^t - \left(\frac{-12}{18} \right) (-1, 0, -4, 1)^t =$$

$$= (0, 1, 3, 0)^t - \left(\frac{12}{18}, 0, \frac{48}{18}, \frac{-12}{18} \right)^t = .$$

$$= (0, 1, 3, 0)^t - \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{8}{3}, \frac{-2}{3} \right)^t = \left(-\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)^t.$$

Logo uma base ortogonal para [B] é $\left\{ (-1, 0, -4, 1)^t, \left(-\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)^t \right\}$.

Vamos normalizar:

$||w_1|| = \sqrt{1^2 + (0)^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$||w_2|| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + 1 + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{18}{9}} = \sqrt{2}$

Logo, basta dividirmos os vetores da base ortogonal pelas suas respectivas normas.

Assim encontramos a base ortonormal:

$$\frac{w_1}{||w_1||} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}, 0, -\frac{4\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6} \right)^t =$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}, 0, -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{6} \right)^t.$$

$$\frac{w_2}{||w_2||} = \left(\frac{-2\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{2\sqrt{2}}{6} \right)^t =$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{3} \right)^t.$$

A base ortonormal é

$$\left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}, 0, -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^t, \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^t\right\}.$$

4^a Questão) Solução:

$u = (1, -1, 2)^t$

$v = (k^2, k, -3)^t$

Como u e v são ortogonais, o produto escalar entre eles é zero. Então, temos:

$$(1, -1, 2)^t.(k^2, k, -3)^t = 0$$

$$k^2 - k - 6 = 0$$

Calculando as raízes temos que $k_1 = 3$ e $k_2 = -2$.

5^a Questão) Solução:

a)

$$D + BC = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4.1 - 2.3 + 1.5 & 4.2 - 2.4 + 1.6 \\ 0.1 + 2.3 + 3.5 & 0.2 + 2.4 + 3.6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 - 6 + 5 & 8 - 8 + 6 \\ 0 + 6 + 15 & 0 + 8 + 18 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 21 & 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 19 & 27 \end{bmatrix}$$

b)

$$B^t.B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 16+0 & -8+0 & 4+0 \\ -8+0 & 4+4 & -2+6 \\ 4+0 & -2+6 & 1+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -8 & 4 \\ -8 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

c)

$$B - C^t = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -4 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

d)

$$E(AF) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix} . \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -3+0 \\ 1+10 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -3 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12+22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix}$$

e) Como a matriz produto DF é do tipo 2×1, não é possível calcular o produto $F(DF)$, pois o número de colunas da matriz F é diferente do número de linhas da matriz DF.

f)

$$B^t.C^t = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+0 & 12+0 & 20+0 \\ -2+4 & -6+8 & -10+12 \\ 1+6 & 3+12 & 5+18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 20 \\ 2 & 2 & 2 \\ 7 & 15 & 23 \end{bmatrix}$$

$$C.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4+0 & -2+4 & 1+6 \\ 12+0 & -6+8 & 3+12 \\ 20+0 & -10+12 & 5+18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 12 & 2 & 15 \\ 20 & 2 & 23 \end{bmatrix}$$

$$(CB)^t = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 20 \\ 2 & 2 & 2 \\ 7 & 15 & 23 \end{bmatrix}$$

$$(B^tC^t - (CB)^t) = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 20 \\ 2 & 2 & 2 \\ 7 & 15 & 23 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 12 & 20 \\ 2 & 2 & 2 \\ 7 & 15 & 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

g)

$$A^3 = A.A.A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 9-0 & 0+0 \\ -3-5 & 0+25 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -8 & 25 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 27-0 & 0+0 \\ -24-25 & 0+125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 0 \\ -49 & 125 \end{bmatrix}$$

h)

$$(I_2 - D)^2 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right)^2 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right)^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6 & 3+0 \\ 2+0 & 6+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

6^a Questão) Solução:

Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + & 2x_4 & = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + & 3x_4 & = 3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 & & = k \end{cases} \tag{1}$$

a) Método de Gauss-Jordan

O sistema linear acima pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ k \end{bmatrix}$$

1^a Etapa) Formaremos a matriz aumentada $[A|b]$. A matriz aumentada é dada por:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & | & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & | & k \end{array}\right]$$

2^a Etapa) Transformaremos a matriz aumentada à sua forma escada reduzida por linhas, usando operações elementares em suas linhas.

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & | & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & | & k \end{array}\right]$$

Fazendo $L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftrightarrow L_3 + L_1$, obtemos

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & | & k+1 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_3 \leftrightarrow L_3 + 2L_2$, obtemos

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & k+3 \end{array}\right]$$

Agora, fazendo $L_1 \leftrightarrow L_1 + L_2$, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & k+3 \end{bmatrix}$$

Para $k + 3 \neq 0$, isto é para $k \neq -3$ o sistema é impossível (S.I) e para $k = -3$ o sistema é possível (S.P).

Considere então $k = -3$, para obter a solução(ções) do sistema. Assim temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Como a matriz esta na forma escada reduzida por linhas, podemos então determinar a solução pelo Método de Gauss - Jordan. Para isso, tome $x_4 = r$, $\forall r \in \mathbb{R}$ na última equação. Então, como $x_3 - x_4 = 1$, conclui-se que $x_3 = 1 + r$. Da primeira equação do sistema temos para $x_2 = s$, $\forall s \in \mathbb{R}$: $x_1 - x_2 + x_4 = 2 \Rightarrow x_1 = 2 - r + s$

Logo o conjuntos de soluções, para $k = -3$; é dado por

$$S = \Big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; (2-r+s, s, 1+r, r) = (2, 0, 1, 0) + r(-1, 0, 1, 1) + s(1, 1, 0, 0)\Big\}$$