Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear Computacional
AD2 - Primeiro Semestre de 2014
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

Nome -
Assinatura -

1.(3.0) Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 4x_1 & + & 12x_2 & + & 8x_3 & = & a \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & b \\ & & -4x_2 & - & 4x_3 & = & c \end{cases}$$

(a) Usando o Método de Eliminação de Gauss , estabeleça uma condição que deve ser satisfeita pelos termos independentes para que o sistema seja compatível.

(b) Seja os termos independentes $(a, b, c) = (1, 0, -2) \in I\!R^3$. Nessas condições o sistema tem solução única? Se positivo determine a solução, se negativo justifique?

(c) Calcula a matriz inversa da matriz dos coeficientes do sistema, usando o método de Gauss-Jordan.

2.(2.0) Sejam as matrizes A e B. A matriz A é chamada de Matriz de Pascal e $det(A) = 1$. A matriz B é a matriz A, subtraindo uma unidade do elemento a_{44}. Explique porque o $det(B) = 0$?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & \mathbf{20} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & \mathbf{19} \end{bmatrix}$$

www.CompCEDERJ.com.br

3.(3.0) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(-2,3) = (-1,0,1)$ e $T(1,-2) = (0,-1,0)$

(a) Determinar $T(x,y)$.

(b) Determinar $N(T) = Ker(T)$ e $Im(T)$

(c) Verifique se T é injetora e sobrejetora.

4.(2.0) Determine os autovalores e autovetores da matriz inversa de A.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

www.CompCEDERJ.com.br

Gabarito

Álgebra Linear: AD2 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2014.1

Tutores: Cristina Lopes e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 8 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

a matriz dos coeficientes.

a) Usando o Método de Eliminação de Gauss com a matriz aumentada do sistema:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 8 & | & a \\ 2 & 5 & 3 & | & b \\ 0 & -4 & -4 & | & c \end{bmatrix}$$

Multiplicando L_1 por $1/4$, obtemos

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & a/4 \\ 2 & 5 & 3 & | & b \\ 0 & -4 & -4 & | & c \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & a/4 \\ 0 & -1 & -1 & | & b - \dfrac{a}{2} \\ 0 & -4 & -4 & | & c \end{bmatrix}$$

www.CompCEDERJ.com.br

Multiplicando L_2 por -1, encontramos

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & a/4 \\ 0 & 1 & 1 & | & \dfrac{a}{2} - b \\ 0 & -4 & -4 & | & c \end{bmatrix}$$

Fazendo agora $L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2$

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & a/4 \\ 0 & 1 & 1 & | & \dfrac{a-2b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & | & c + 2a - 4b \end{bmatrix}$$

Assim, a condição que deve ser satisfeita pelos termos independentes para que o sistema seja compatível é $c + 2a - 4b = 0$.

b) Como a condição para que o sistema seja compatível, ou seja, tenha solução única é que $c + 2a - 4b = 0$, então, substituindo os termos independentes $(1, 0, -2)$, temos:

$$c + 2a - 4b = 0 \Longrightarrow -2 + 2.1 - 4.0 = 0 \Longrightarrow -2 + 2 = 0 \Longrightarrow 0 = 0$$

Então como temos uma indeterminação, o sistema não tem solução única; ele tem infinitas soluções.

c)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 8 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$detA = -80 + 0 - 64 - 0 + 48 + 96 = -144 + 144 = 0$$

Como $detA = 0$, a matriz não tem inversa.

2^a Questão) :

Solução:

a) Considerando uma matriz de Pascal, temos que calcular:

$$det\begin{bmatrix} i+j \\ i \end{bmatrix}, i,j = 0,...,n.$$

Sabendo que o determinante de qualquer matriz Pascal é igual a 1, podemos utilizar a seguinte propriedade de determinantes: Se todos os elementos de uma linha ou coluna de uma matriz quadrada se descompõem em duas somas, então seu determinante é igual a soma dos determinantes que têm nessa linha ou coluna o primeiro e a segunda soma respectivamente, sendo os elementos restantes iguais aos determinantes iniciais.

$$detB = det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 19 \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1-0 \\ 1 & 2 & 3 & 4-0 \\ 1 & 3 & 6 & 10-0 \\ 1 & 4 & 10 & 20-1 \end{bmatrix}$$

$$= det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} - det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 10 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $det(A) = 1$, calculando o determinante desta última matriz pela última coluna (por cofatores), temos que

$$= det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} - det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} = 1 - 1 = 0.$$

3^a Questão) :

Solução:

a) Considerando a base canônica do $\mathbb{R}^2$, temos que $T(x,y) = xT(1,0)+yT(0,1)$. Usando as transformações dadas, concluímos que:

$$-2T(1,0) + 3T(0,1) = (-1,0,1)$$

$$1T(1,0) - 2T(0,1) = (0,-1,0)$$

Multiplicando a segunda linha por 2 e somando com a primeira linha, temos:

$$-2T(1,0) + 3T(0,1) = (-1,0,1)$$

$$-T(0,1) = -(1,2,-1)$$

Substituindo a segunda linha na primeira, temos que:

$$T(1,0) = (2,3,-2).$$

Assim , concluímos que $T(x,y) = xT(1,0)+yT(0,1) = x(2,3,-2)+y(1,2,-1) = (2x+y, 3x+2y, -2x-y)$.

b) $N(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | T(x,y) = 0\}$. Logo, para o sistema obtido por $(2x + y, 3x+2y, -2x-y) = (0,0,0)$, temos a seguinte matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Concluímos por L_2 que $y = 0$. Substituindo em L_1, temos que $x = 0$. Logo $N(T) = (0, 0)$, com dimensão 0.

E temos que $Im(T) = (2x + y, 3x + 2y, -2x - y) = x(2, 3, -2) + y(1, 2, -1)$, com dimensão 2.

c) T é injetora se e somente se $N(T) = 0$. Como pelo item anterior $N(T) = 0$, temos que T é injetora.

Vamos verificar se T é sobrejetora. Para isto, precisamos mostrar que a imagem é igual ao contradomínio. Como $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, temos que mostrar que qualquer vetor (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base da imagem, ou seja: $(x, y, z) = a(2, 3, -2) + b(1, 2, -1)$, para $a, b \in \mathbb{R}$. Desse modo, consideremos a seguinte matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & x \\ 3 & 2 & y \\ -2 & -1 & z \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2y - 3x \\ 0 & 0 & x + z \end{bmatrix}.$$

Concluímos por L_3 que $x = -z$. Por L_2 que $b = 2y - 3x$. E por L_1, temos que $2a + b = x \Rightarrow 2a + 2y - 3x = x \Rightarrow a = \frac{4x-2y}{2} = 2x - y$. Logo , o sistema tem solução e portanto qualquer vetor em $\mathbb{R}^3$ como ser escrito como combinação da base da imagem de T. Logo, T é sobrejetora.

4^a Questão) Solução:

Vamos determinar os autovalores da matriz A^{-1}:

Sabemos que se $Au = \lambda u$ então $A^{-1}u = \left(\dfrac{1}{\lambda}\right) u$, ou seja, para calcular o autovalor da inversa de A é suficiente calcular o autovalor de A e invertê-lo.

A matriz A dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

Vamos calcular o determinante da matriz $(A - \lambda I)$:

$$det(A - \lambda I) = (3-\lambda)^2(-1-\lambda) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = (3-\lambda)^2(-1-\lambda)$$

Logo o polinômio característico é dado por

$$P_3(\lambda) = det(A - \lambda I) = (3-\lambda)^2(-1-\lambda)$$

As raízes de $P_3(\lambda) = (3-\lambda)^2(-1-\lambda)$ são $\lambda = 3$ (multiplicidade 2) e $\lambda = -1$, que são os autovalores da matriz A.

De fato: $(3-\lambda)^2(-1-\lambda) = 0$ implica:

$3 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 3$ (multiplicidade 2)

$-1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

Assim, invertendo os autovalores acima, encontramos os autovalores da matriz inversa A^{-1}: $\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{1}{3}$ e $\lambda_3 = \dfrac{1}{-1} = -1$.

Uma segunda opção para calcular os autovalores da matriz inversa de A, é calcular a matriz inversa e depois seus autovalores. Vejamos:

www.CompCEDERJ.com.br

Para calcular a inversa da matriz A, usaremos a fórmula $A^{-1} = \dfrac{1}{detA}.Adj(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Sabemos que $det(A) = -9 + 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = -9$.

Vamos calcular $Adj(A) = [Cof(A)]^T$, onde $Cof(A)$ a matriz dos cofatores. Por isso, calcularemos os cofatores $A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$, onde M_{ij} é o determinante menor de a_{ij}.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^2.[-3] = 1.[-3] = -3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^3.[0] = (-1).0 = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^4.[0] = (1).0 = 0$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^3.[0] = (-1).0 = 0$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^4.[-3] = 1.[-3] = -3$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5.[0] = (-1).0 = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^4.[0 + 12] = 1.[12] = 12$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^5.[15] = (-1).[15] = -15$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^6.[9] = 1.9 = 9$$

Assim, a matriz dos cofatores fica:

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 12 & -15 & 9 \end{bmatrix}$$

E portanto, calculando a transposta da matriz dos cofatores, obtemos $Adj(A)$:

$$Adj(A) = [Cof(A)]^T = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 12 \\ 0 & -3 & -15 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Como sabemos que $det A = -9$, aplicando a fórmula $A^{-1} = \dfrac{1}{det A}.Adj(A)$, encontramos:

$$A^{-1} = \frac{1}{-9} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 12 \\ 0 & -3 & -15 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -4/3 \\ 0 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vamos determinar os autovalores da matriz A^{-1}:

A matriz A^{-1} dada por:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -4/3 \\ 0 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^{-1} - \lambda I = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & 0 & \frac{-4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} - \lambda & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{bmatrix}$$

Vamos calcular o determinante da matriz $(A^{-1} - \lambda I)$:

$$det(A^{-1} - \lambda I) = \left(\frac{1}{3} - \lambda\right)^2 (-1 - \lambda) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = \left(\frac{1}{3} - \lambda\right)^2 (-1 - \lambda)$$

Logo o polinômio característico é dado por

$$P_3(\lambda) = det(A^{-1} - \lambda I) = \left(\frac{1}{3} - \lambda\right)^2 (-1 - \lambda)$$

As raízes de $P_3(\lambda) = \left(\frac{1}{3} - \lambda\right)^2 (-1 - \lambda)$ são $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{3}$ e $\lambda_3 = -1$, que são os autovalores da matriz A^{-1}.

De fato: $\left(\frac{1}{3} - \lambda\right)^2 (-1 - \lambda) = 0$ implica:

$\frac{1}{3} - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$ (multiplicidade 2)

$-1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

Cálculo dos autovetores v associados aos autovalores λ.

Para encontrarmos os autovetores de A^{-1} associados a $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{3}$, formamos o sistema linear $A^{-1}x = \frac{1}{3}x \equiv (A^{-1} - I)x = 0$, ou

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isso nos dá

$$\begin{cases} -\dfrac{4z}{3} = 0 \Longrightarrow z = 0 \\ \dfrac{5z}{3} = 0 \Longrightarrow z = 0 \\ -\dfrac{4z}{3} = 0 \Longrightarrow z = 0 \end{cases}$$

Tomando $x = r \neq 0$ e $y = s \neq 0$, com $r, s \in \mathbb{R}$, obtemos então que os autovetores associados aos autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{1}{3}$ são dados por $\begin{bmatrix} r \\ s \\ 0 \end{bmatrix}$.

Assim, todos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{1}{3}$ são dados por $v_1 = (r, s, 0)^t$. Ou seja $v_1 = (1, 1, 0)^t$ é, por exemplo, um autovetor de A^{-1} associado aos autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{1}{3}$.

Analogamente, para o autovalor $\lambda_3 = -1$, temos

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isso nos dá

$$\begin{cases} \dfrac{4x}{3} - \dfrac{4z}{3} = 0 \Longrightarrow 4x = 4z \Longrightarrow x = z \\ \dfrac{4y}{3} + \dfrac{5z}{3} = 0 \Longrightarrow 4y = -5z \Longrightarrow y = \dfrac{-5z}{4} \end{cases}$$

Tomando $z = t \neq 0$ com $t \in \mathbb{R}$, obtemos então que os autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = -1$ dado por $\begin{bmatrix} t \\ \dfrac{-5t}{4} \\ t \end{bmatrix}$.

Assim, todos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = -1$ são dados por $v_2 = \left(t, \dfrac{-5t}{4}, t\right)^t = t\left(1, \dfrac{-5}{4}, 1\right)^t$. Ou seja $v_2 = \left(1, \dfrac{-5}{4}, 1\right)^t$ é um autovetor de A^{-1} associado ao autovalor $\lambda_3 = -1$.