Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP2 - Primeiro Semestre de 2015
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(3.0)1. Determine se as transformações de $\mathbb{R}^{n\times n}$ em $\mathbb{R}^{n\times n}$ abaixo são ou não lineares, justificando detalhadamente sua resposta.

(a) $T(A) = 3I - A$, onde I é a matriz identidade de ordem n.

(b) $T(A) = A + 2A^T$, onde A^T é a matriz transposta de A.

(c) $T(A) = A^{-1}$.

Solução:

T é uma transformação linear se

$$T(\alpha A_1 + \beta A_2) = \alpha T(A_1) + \beta T(A_2)$$

para todo A_1 e A_2 em $\mathbb{R}^{n\times n}$ e α e β escalares.

(a) $T(A) = 3I - A$.
Como $T(A_1 + A_2) = 3I - (A_1 + A_2) \neq 3I - A_1 + 3I - A_2 = T(A_1) + T(A_2)$, então T não é uma transformação linear.

(b) $T(A) = A + 2A^T$.
Como $T(\alpha A_1 + \beta A_2) = (\alpha A_1 + \beta A_2) + 2(\alpha A_1 + \beta A_2)^T = \alpha(A_1 + 2A_1^T) + \beta(A_2 + 2A_2^T) = \alpha T(A_1) + \beta T(A_2)$, então T é uma transformação linear.

(c) $T(A) = A^{-1}$.
É fácil achar um exemplo onde $T(A_1 + A_2) \neq T(A_1) + T(A_2)$, ou seja, $(A_1 + A_2)^{-1} \neq A_1^{-1} + A_2^{-1}$. Por exemplo, considere $n = 1$, $A_1 = [3]$ e $A_2 = [2]$. Neste caso temos $(A_1 + A_2)^{-1} = \left[\frac{1}{5}\right] \neq A_1^{-1} + A_2^{-1} = \left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{1}{2}\right] = \left[\frac{5}{6}\right]$. Logo, T não é uma transformação linear.

(4.0)2. Para cada das transformações lineares de $I\!R^3 \to I\!R^3$ abaixo, determine uma base para o seu núcleo e sua dimensão, uma base para sua imagem e sua dimensão, e diga se a transformação é injetora ou sobrejetora, justificando a resposta.

(2.0)a. $L(x) = (x_1 - x_3, x_2, x_3)^T$.
Solução:
Núcleo, $N(L)$: Se x está no núcleo de L, então $L(x) = 0$, ou seja, $x_1 = x_3$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$. Portanto, $N(L) = \{(0,0,0)^T\}$ (dimensão = 0).

Imagem, $I(L)$: Um vetor y pertence à imagem de L se e somente se y é a soma de um múltiplo de $v_1 = (1,0,0)^T$ com um múltiplo de $v_2 = (0,1,0)^T$ e um múltiplo de $v_3 = (0,0,1)^T$. Logo, $I(L)$ é o espaço tridimensional (dimensão = 3) $I\!R^3$ gerado por $[v_1, v_2, v_3]$.

Como $N(L) = \{(0,0,0)^T\}$, L é injetora e como $I(L)$ é todo o espaço $I\!R^3$, L é sobrejetora.

(2.0)b. $L(x) = (x_1, x_1, 0)^T$.
Solução:
Núcleo, $N(L)$: Se x está no núcleo de L, então $L(x) = 0$, ou seja, $x_1 = 0$. Portanto, $N(L)$ é o subspaço bidimensional (dimensão = 2) de $I\!R^3$ gerado por $\{(0,1,0)^T, (0,0,1)^T$.

Imagem, $I(L)$: Um vetor y pertence à imagem de L se e somente se y é a um múltiplo de $e_1 = (1,0,0)^T$. Logo, $I(L)$ é o subspaço unidimensional (dimensão = 1) de $I\!R^3$ gerado por $(1,0,0)^T$.

Como $N(L) \neq \{(0,0,0)^T\}$, L não é injetora e como $I(L) \neq I\!R^3$, L também não é sobrejetora.

(3.0)3 .

(2.0)a. Qual é a transformação linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(1,1) = (3,2,1)$ e $f(0,-2) = (0,1,0)$?

(1.0)b. Encontre a matriz canônica de f, ou seja, a matriz que determina a transformação linear.

Solução:

(2.0)a. Escrevendo o vetor (x, y) como combinação linear de $(1, 1)$ e $(0, -2)$, temos:

$$(x, y) = \alpha_1(1, 1) + \alpha_2(0, -2),$$

ou seja,

$$\begin{cases} \alpha_1 & & = x \\ \alpha_1 & - \quad 2\alpha_2 & = y \end{cases}$$

Logo $\alpha_1 = x$ e $\alpha_2 = \frac{x-y}{2}$ e, portanto:

$$(x, y) = x(1, 1) + \frac{x-y}{2}(0, -2).$$

Assim, temos:

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & xf(1,1) + \frac{x-y}{2}f(0,-2) \\ & = & x(3,2,1) + \frac{x-y}{2}(0,1,0) \\ & = & (3x, \frac{5x-y}{2}, x). \end{array}$$

(1.0)b. Seja M a matriz canônina de f. Logo, devemos ter $f(x, y) = M \cdot (x, y)^T$. Portanto, temos:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$