Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO DA AP1 - Primeiro Semestre de 2018
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(3.0)1. Sejam $u = (1, -3, 2)$ e $v = (2, 4, -1)$ dois vetores em $\mathbb{R}^3$

(1.0)a. Escrever o vetor $r = (-4, -18, 7)$ como combinação linear de u e v.

(1.0)b. Determinar o valor de k para que o vetor $t = (-1, k, -7)$ seja combinação linear de u e v.

(1.0)c. Determinar a condição para x, y e z de modo que (x, y, z) seja combinação linear dos vetores u e v.

Solução:

(a) Pretende-se que $r = au + bv$, sendo a e b escalares a determinar. Temos então:

$$(-4, -18, 7) = a(1, -3, 2) + b(2, 4, -1),$$

ou

$$\begin{array}{l} a + 2b = -4 \\ -3a + 4b = -18 \\ 2a - b = 7 \end{array}$$

cuja solução é $a = 2$, $b = -3$. Portanto $r = 2u - 3v$.

(b) Devemos ter

$$(-1, k, -7) = a(1, -3, 2) + b(2, 4, -1),$$

ou

$$\begin{aligned} a + 2b &= -1 \\ -3a + 4b &= k \\ 2a - b &= -7 \end{aligned}$$

Considerando a primeira e a terceira equações, obtemos $a = -3$ e $b = 1$. Substituindo na segunda equação concluímos que $k = 13$.

(c) Devemos ter

$$(x, y, z) = a(1, -3, 2) + b(2, 4, -1),$$

ou

$$\begin{aligned} a + 2b &= x \\ -3a + 4b &= y \\ 2a - b &= z \end{aligned}$$

O vetor (x, y, z) é combinação linear de u e v se o sistema tiver solução. Para que isto ocorra, devemos ter: das 2 primeiras equações: $-5a = y - 2x$. Da primeira e terceira equações: $-5b = z - 2x$. Substituindo a e b na terceira equação , por exemplo, temos então que :

$$x - y - 2z = 0.$$

(2.0)2. Determine se cada conjunto a seguir é ou não um subspaço de $I\!R^3$. Justifique sua resposta.

(1.0)a. $\{(x_1, x_2, x_3)^T | x_1 + x_3 = 1\}$

(1.0)b. $\{(x_1, x_2, x_3)^T | x_3 = 2x_1 + x_2\}$

Solução

(a) $\{(x_1, x_2, x_3)^T | x_1 + 2x_3 = 3\}$ não é subspaço, pois $u = (1, 0, 1)^T$ e $v = (-1, 1, 4)^T$ pertencem ambos ao conjunto, enquanto $u + v$ não pertence.

(b) $\{(x_1, x_2, x_3)^T | x_3 = x_1 + x_2\}$ é subspaço, pois consedirando que $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ e $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ pertencem ambos ao conjunto, temos:

$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)^T$ pertence ao conjunto, já que $2u_1 + u_2 = u_3$, $2v_1 + v_2 = v_3$, e, portanto, $2u_1 + 2v_1 + u_2 + v_2 = u_3 + v_3$.

e

$\alpha(u_1, u_2, u_3)^T = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)^T$ pertence ao conjunto para todo escalar α, já que $2u_1 + u_2 = u_3$, e, portanto, $2\alpha u_1 + \alpha u_2 = \alpha(2u_1 + u_2) = \alpha u_3$.

(2.0)3. Determine a dimensão e uma base do espaço vetorial

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y + z = 0\}$$

Solução:

Isolando z na equação de definição, tem-se: $z = -y$, onde y é variável livre. Qualquer vetor $(x, y, z) \in S$ tem a forma: $(x, y, -y)$ e, portanto, podemos escrever:

$$(x, y, z) = (x, y, -y)$$

ou

$$(x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, -y)$$

ou

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, -1)$$

isto é, todo vetor de S é combinação linear dos vetores $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, -1)$. Como esses dois vetores geradores de S são L.I., o conjunto $\{(1, 0, 0), (0, 1, -1)\}$ é uma base de S e, consequentemente, dim$S$=2.

(3.0)4. Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & n \\ m & 9 \end{bmatrix}$$

(1.0)a. Calcular m e n para que a matriz (AB) seja igual a matriz identidade.

(1.0)b. Calcular m e n para que a matriz (B^2) seja igual a matriz

$$\begin{bmatrix} 22 & 26 \\ 39 & 87 \end{bmatrix}.$$

(1.0)c. Determine que hipótese deve ser satisfeita por m e n para que a matriz B^2 seja simétrica.

Solução:

(a) Efetuando o produto AB, temos

$$AB = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & n \\ m & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36+5m & 9n+45 \\ 28+4m & 7n+36 \end{bmatrix}$$

Para termos $AB = I$, ou seja,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

devemos ter

$$\begin{aligned} 36+5m &= 1 \\ 9n+45 &= 0 \\ 28+4m &= 0 \\ 7n+36 &= 1 \end{aligned}$$

ou seja, $m = -7$ e $n = -5$.

(b)

$$B^2 = \begin{bmatrix} 4 & n \\ m & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & n \\ m & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16+mn & 13n \\ 13m & mn+81 \end{bmatrix}.$$

Portanto, devemos ter

$$\begin{bmatrix} 16+mn & 13n \\ 13m & mn+81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 26 \\ 39 & 87 \end{bmatrix},$$

o que implica em $m = 3$ e $n = 2$.

(c) Devemos ter

$$\begin{bmatrix} 16+mn & 13n \\ 13m & mn+81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16+mn & 13m \\ 13n & mn+81 \end{bmatrix},$$

ou seja, devemos ter $m = n$.