Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP1 - Primeiro Semestre de 2015
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(2.0)1. Detrminar uma base e a dimensão do espaço-solução do sistema homogêneo

$$\begin{cases} x + 2y - 4z + 3t = 0 \\ x + 2y - 2z + 2t = 0 \\ 2x + 4y - 2z + 3t = 0 \end{cases}$$

Solução:

Escalonando o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} x + 2y - 4z + 3t = 0 \\ 2z - t = 0 \\ 6z - 3t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 2z - t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Logo, o conjunto-solução do sistema é $S = \{(x, y, z, t) | t = 2z,\ x = -2y - 2z\}$ que é um subspaço vetorial do $\mathbb{R}^4$. Tendo em vista serem duas as variáveis livres (y e z), conclui-se que a dimensão de S é 2. Logo, qualquer subconjunto de S com dois vetores LI forma uma base de S. Façamos $(1) y = 1, z = 0$, $(2) y = 0, z = 1$, para obter os vetores

$$v_1 = (-2, 1, 0, 0) \text{ e } v_2 = (-2, 0, 1, 2).$$

O conjunto $\{v_1, v_2\}$ é uma base de S.

(2.0)2. Determine nos itens abaixo, se os vetores dados são linearmente dependentes. Respostas sem a correta justificativa não serão consideradas.

(a) $(1, -2, -3)$, $(2, 3, -1)$ e $(3, 2, 1)$.

(b) $(1, -2, 3)$, $(-2, 3, -1)$, $(3, -2, 1)$ e $(-1, 2, -3)$.

Solução:

(a) Igualando a zero uma combinação linear dos três vetores, obtemos o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ -3x - y + z = 0 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 7y + 8z = 0 \\ 5y + 10z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 7y + 8z = 0 \\ 30z = 0 \end{cases}$$

O sistema acima admite apenas a solução nula. Logos os vetores são linearmente independentes.

(b) Como foram dados quatro vetores em $I\!R^3$ e a dimensão de $I\!R^3$ é 3, os vetores são necessariamente linearmente dependentes.

(4.0)3. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se possível, determine a matriz C em cada item abaixo. Se não for possível, determine o motivo da impossibilidade.

(a) $C = A^T - 2B$.

Solução:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 5 & 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -7 \\ 7 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) $C = B^2$.

Solução:

Não é possível pois B não é uma matriz quadrada.

(c) $C = BB^T$.

Solução:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

(d) $C = B^T B$.

Solução:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 10 \end{bmatrix}.$$

(2.0)4. Determine se os conjuntos abaixo são subespaços de $I\!R^3$. Respostas sem justificativa correta não serão consideradas.

(a) $W = \{(a, b, c) | a + b - c = 2c\}$.

(b) $W = \{(a, b, c) | a + b + c = 2\}$.

Solução:

(a) Equivalentemente temos $W = \{(a, b, c) | a + b - 3c = 0\}$. Ademais, $0 = (0, 0, 0) \in W$, pois $0 + 0 - 0 = 0$. Sejam $v = (a, b, c)$ e $u = (a', b', c')$ pertencentes a W. Então para quiasquer escalares k e k', $kv + k'u = k(a, b, c) + k'(a', b', c') = (ka + k'a', kb + k'b', kc + k'c')$ e $ka + k'a' + kb + k'b' - 3kc - 3k'c' = k(a + b - 3c) + k'(a' + b' - 3c') = 0$. Assim, $kv + k'u \in W$ e W é subespaço de $I\!R^3$.

(b) W não é subespaço de $I\!R^3$, pois $(0, 0, 0) \notin W$.