Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP3 - Primeiro Semestre de 2018
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(3.0)1. Responda, justificando, se cada um dos conjuntos abaixo é LI ou LD.

(a)
$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -12 & -9 \end{bmatrix} \right\} \subset M_{2\times 2}$$

(b)
$$\{(-1,-2,0,3),(2,-1,0,0),(1,0,0,0)\} \subset I\!R^4$$

(c)
$$\{1+2x-x^2, 2-x+3x^2, 3-4x+7x^2\} \subset P_2$$

Solução:

(a) Como o conjunto tem apenas duas matrizes e com uma delas sendo múltiplo escalar da outra, o conjunto é LD.

(b) Consideremos a equação:

$$a(-1,-2,0,3)+b(2,-1,0,0)+c(1,0,0,0)=(0,0,0,0)$$

Portanto:
$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -a & + & 2b & + & c & = & 0 \\ -2a & - & b & & & = & 0 \\ 3a & & & & & = & 0 \end{array} \right.$$

Como o sistema admite apenas a solução trivial: $a=b=c=0$, o conjunto é LI.

(c) Consideremos a equação:

$$a(1+2x-x^2)+b(2-x+3x^2)+c(3-4x+7x^2)=0$$

ou

$$(a+2b+3c)+(2a-b-4c)x+(-a+3b+7c)x^2=0+0x+0x^2$$

ou

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & 2b & + & 3c & = & 0 \\ 2a & - & b & - & 4c & = & 0 \\ -a & + & 3b & + & 7c & = & 0 \end{array}\right.$$

Como este sistema admite outras soluções além da trivial (a primeira equação é igual a soma das duas outras equações) , o sistema é LD.

(3.0)2. Responda, justificando, se cada um dos subconjuntos abaixo é um subspaço vetorial do $I\!R^2$.

(a) $S=\{(x,y)/y=-x\}$.

(b) $S=\{(x,x^2)/x\in I\!R\}$.

(c) $S=\{(x,y)/x\geq 0\}$.

Solução:

(a) Sim, pois se $(x_1,-x_1)\in S$ e $(x_2,-x_2)\in S$, então $\alpha_1(x_1,-x_1)+\alpha_2(x_2,-x_2)=(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,-(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2))\in S$ para quaisquer $\alpha_1,\alpha_2\in I\!R$.

(b) Não, pois $(1,1)\in S$, $(2,4)\in S$ e $(1,1)+(2,4)=(3,5)\notin S$.

(c) Não, pois $(1,1)\in S$ e $-3(1,1)\notin S$.

(2.0)3. Seja $T: I\!R^3\to I\!R^2$ uma transformação linear e $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ uma base do $I\!R^3$, sendo $v_1=(0,1,0)$, $v_2=(1,0,1)$ e $v_3=(1,1,0)$. Determinar $T(5,3,-2)$, sabendo que $T(v_1)=(1,-2)$, $T(v_2)=(3,1)$ e $T(v_3)=(0,2)$.

Solução:

Expressemos $v=(5,3,-2)$ como combinação linear dos vetores da base:

$$(5,3,-2)=a_1(0,1,0)+a_2(1,0,1)+a_3(1,1,0)$$

ou:

$$\begin{cases} a_2 + a_3 = 5 \\ a_1 + a_3 = 3 \\ a_2 = -2 \end{cases}$$

sistema cuja solução é:

$$a_1 = -4,\ a_2 = -2,\ a_3 = 7$$

Então:

$$(5, 3, -2) = -4v_1 - 2v_2 + 7v_3$$

logo:

$$\begin{aligned} T(5,3,-2) &= -4T(v_1) - 2T(v_2) + 7T(v_3) \\ T(5,3,-2) &= -4(1,-2) - 2(3,1) + 7(0,2) \\ T(5,3,-2) &= (-10, 20) \end{aligned}$$

(2.0)4. Estabelecer a condição que deve ser satisfeita pelos termos independentes x, y e z para que o sistema abaixo seja compatível, ou seja, para que o sistema tenha solução.

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = x \\ -3a_1 + 4a_2 = y \\ 2a_1 - a_2 = z \end{cases}$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & x \\ -3 & 4 & y \\ 2 & -1 & z \end{array}\right]$$

$L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & x \\ 0 & 10 & y+3x \\ 0 & -5 & z-2x \end{array}\right]$$

$L_2 \leftarrow \frac{1}{10}L_2$

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & \frac{y+3x}{10} \\ 0 & -5 & z-2x \end{array}\right]$$

$L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & \frac{y+3x}{10} \\ 0 & 0 & z - 2x + \frac{y+3x}{2} \end{array}\right]$$

Portanto, para que o sistema seja compatível é necessário que $z - 2x + \frac{y+3x}{2} = 0$, ou seja, $2z - x + y = 0$ ou $x = y + 2z$.