Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP2 - Segundo Semestre de 2009
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(3.0)1. Considere o sistema linear $Ax = b$ representado abaixo

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} x_1 & - & x_2 & + & \alpha x_3 = & -2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & \alpha x_3 = & 3 \\ \alpha x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 = & 3 \end{array}\right.$$

(1.0)a. Determine o determinante da matriz de coeficientes A do sistema representado, em função de α.

(1.0)b. Encontre valor(es) para α para o(s) qual(is) o sistema não apresenta soluções.

(1.0)c. Encontre valor(es) para α para o(s) qual(is) o sistema tem um número infinito de soluções.

Solução:

a.

$$\det(A) = \left|\begin{array}{rrr} 1 & -1 & \alpha \\ -1 & 2 & -\alpha \\ \alpha & 1 & 4 \end{array}\right| = 8 + \alpha^2 - \alpha - 2\alpha^2 + \alpha - 4 = -\alpha^2 + 4.$$

b. e c.

O sistema linear não tem solução única se o determinante da matriz de coeficientes do sistema for igual a zero, isto é, se $-\alpha^2 + 4 = 0 \Rightarrow \alpha = 2$ ou $\alpha = -2$.

Apliquemos inicialmente operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada correspondente ao sistenma dado, como no método de eliminação de Gauss.

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1 & -1 & \alpha & -2 \\ -1 & 2 & -\alpha & 3 \\ \alpha & 1 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

Fazendo $L2 \leftarrow L1 + L2$ e $L3 \leftarrow \alpha L1 - L3$ temos:

$$\left[\begin{array}{lrrr} 1 & -1 & \alpha & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha - 1 & \alpha^2 - 4 & -2\alpha - 3 \end{array}\right]$$

Fazendo $L3 \leftarrow L3 - L2(-\alpha - 1)$ temos:

$$\left[\begin{array}{lrrr} 1 & -1 & \alpha & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - 4 & -\alpha - 2 \end{array}\right]$$

Se $\alpha = -2$, a linha 3 do último sistema é redundante e pelas duas primeiras linhas observamos que o sistema tem infinitas soluções $(-1 + 2x_3, 1, x_3)$, com $x_3 \in I\!R$.

Se $\alpha = 2$ a linha 3 do último sistema não pode ser satisfeita, indicando que o sistema não tem solução.

(2.0)2. Um empresário fabrica quatro diferentes tipos de tecido. Para executar esta tarefa ele utiliza 3 máquinas. A quantidade de horas utilizadas de cada máquina para fabricar 1 metro de cada tecido á seguinte:

(a) para fabricar-se 1 metro do tecido I utiliza-se 3 horas da máquina 1 e 1 hora da máquina 2,

(b) para fabricar-se 1 metro do tecido II utiliza-se 4 horas da máquina 1, 2 horas da máquina 2 e 1 hora da máquina 3,

(c) para fabricar-se 1 metro do tecido III utiliza-se 2 horas da máquina 1, 3 horas da máquina 2 e 1 hora da máquina 3,

(d) para fabricar-se 1 metro do tecido IV utiliza-se 2 horas da máquina 2 e 1 hora da máquina 3.

O tempo exato que cada máquina será utilizada na fabricação, no total, é de 18 horas para a máquina 1, 15 horas para a máquina 2 e 5 horas para máquina 3.

Sabendo que o empresário irá fabricar um total de 7 metros dos tecidos, determine quantos metros de cada um dos tecidos será fabricado, formulando a questão através de um sistema linear de equações e resolvendo-o pelo método de eliminação de Gauss.

Solução: Devemos encontrar a solução do sistema linear de equações

$$Ax = b,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 7 \\ 18 \\ 15 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss ao sistema $Ax = b$, temos:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 18 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right].$$

Logo, $4x_4 = 2$ ou $x_4 = 0,5$, $x_3 = \frac{1}{3}(11 - 4 * 0,5) = 3$, $x_2 = -3 + 1 * 3 + 3 * 0,5 = 1,5$ e $x_1 = 7 - 1,5 - 3 - 0,5 = 2$. Assim, o empresário irá fabricar 2 metros do tecido I, 1,5 metro do tecido II, 3 metros do tecido III e 0,5 metro do tecido IV.

(2.0)3. Determine se cada uma das transformações abaixo é ou não linear. Justifique sua resposta.

(1.0)a. Considere o espaço vetorial das matrizes reais, quadradas de ordem 2, $M_2(I\!R)$ e $T : M_2(I\!R) \to I\!R$, tal que

$$T \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Solução: Temos que verificar se

$T(\alpha A_1 + \beta A_2) = \alpha T(A_1) + \beta T(A_2),\ \forall A_1, A_2 \in M_2(I\!R), \forall \alpha, \beta \in I\!R.$

Façamos então

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \ \ e \ \ A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
T(\alpha A_1 + \beta A_2) &= T\left(\alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{vmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 & \alpha b_1 + \beta b_2 \\ \alpha c_1 + \beta c_2 & \alpha d_1 + \beta d_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 + \beta b_2 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 + \beta d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta a_2 & \alpha b_1 + \beta b_2 \\ \beta c_2 & \alpha d_1 + \beta d_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha a_1 & \beta b_2 \\ \alpha c_1 & \beta d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta a_2 & \alpha b_1 \\ \beta c_2 & \alpha d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta a_2 & \beta b_2 \\ \beta c_2 & \beta d_2 \end{vmatrix} \\
&= \alpha^2 |A_1| + \alpha\beta \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ c_1 & d_2 \end{vmatrix} + \alpha\beta \begin{vmatrix} a_2 & b_1 \\ c_2 & d_1 \end{vmatrix} + \beta^2 |A_2| \\
&= \alpha^2 |A_1| + \beta^2 |A_2| + \alpha\beta \left(\begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ c_1 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_1 \\ c_2 & d_1 \end{vmatrix} \right) \\
&\neq \alpha T(A_1) + \beta T(A_2).
\end{aligned}$$

Logo, T não é uma transformação linear.

(1.0)b.

$$T : I\!R^3 \to I\!R^2,\ T(x, y, z) = (x + y + z, 3x + 3y + 3)$$

Solução: Neste caso, temos $T(0, 0, 0) = (0, 3) \neq (0, 0)$. Logo, a transformação não é linear.

(3.0)4. Seja T uma transformação linear em $I\!R^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (x - y + z, 4x + 3y, 5x + 2y + z).$$

(1.0)a. Indique o núcleo de T, a sua dimensão e uma base.

(1.0)b. Determine a dimensão da imagem de T.

(1.0)c. T é injetora? T é sobrejetora? Justifique as respostas.

Solução:

(a) O núcleo da transformação é dado pelo conjunto $N(T) = \{v \in I\!R^3 : T(v) = 0\}$. Determinar o núcleo da transformação consiste em resolver o sistema de equações $Av = 0$ nas variáveis v, onde A é a matriz de da transformação dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Construamos a matriz ampliada do sistema linear e resolvamos pelo método de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Da segunda linha da matriz, temos $y = \frac{4}{7}z$. Substituindo o valor de y na primeira equação, temos $x - \frac{4}{7}z + z = 0$, logo $x = -\frac{3}{7}z$. A solução do sistema é então dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{7}z \\ \frac{4}{7}z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 1 \end{bmatrix}, z \in I\!R.$$

Assim, $N(T)$ tem dimensão 1 e base $\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(b) $\dim(N(T)) + \dim(Im(T)) = \dim(I\!R^3)) \Rightarrow \dim(Im(T)) = 3 - 1 = 2$.

(c) T não é injetora nem sobrejetora, uma vez que $\dim(N(T)) \neq 0$ e $\dim(Im(T)) \neq \dim(I\!R^3)$.