Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear - Profs Mauro Rincon & Marcia Fampa
AD2 (Segunda Avaliação a Distância) - Segundo Semestre de 2010

Nome -
Assinatura -

1.(3.0) Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 11 \end{cases}$$

a.(1.0) Determine a matriz inversa de matriz dos coeficientes, usando-a para resolver o sistema linear.

b.(1.0) Calcule o determinante da matriz dos coeficientes, usando a expansão de Cofatores(Fórmula de Laplace).

c.(1.0) Resolva o sistema linear pelo método de eliminação de Gauss com pivoteamento.

3.(2.0) Para $c \in \mathbb{R}$, considere as matrizes

$$E = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

As matrizes são chamadas, respectivamente de Matriz Extensão, Matriz Rotação, Matriz Reflexão e Matriz Projeção. Dê uma interpretação geométrica para essas matrizes, esboçando os gráficos..

4.(2.0) A matriz a seguir de ordem 4×4 é conhecida como Matriz de Hadamard

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

Encontre a inversa H^{-1} e apresente $v = (7,5,3,1)^t$ como uma combinação das colunas de H.

5.(1.0) Seja $T : I\!R^2 \rightarrow I\!R^2$ uma transformação linear, onde $T(1,1) = (2,2)$, $T(2,0) = (0,0)$. Encontre $T(v)$, para

$$\begin{array}{ll} (i): \quad v_1 = (2,2), & (ii): v_2 = (3,1) \\ (iii): v_3 = (-1,1) & (iv): v_4 = (a,b) \end{array}$$

6.(1.0) Encontre a imagem e o núcleo de T

$$\begin{array}{ll} (a): \ T(v_1,v_2) = (v_2,v_1) & (b): \ T(v_1,v_2) = (0,0) \\ (c): \ T(v_1,v_2,v_3) = (v_1,v_2) & (d): T(v_1,v_2) = (v_1,v_1) \end{array}$$

7.(1.0) Calcule os autovalores de A, B, AB e BA:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gabarito

Álgebra Linear: AD2 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2010.2

Tutores: Cristina Lopes e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

a) Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 5 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 7 \\ x_1 & +3x_2 & +6x_3 & = 11 \end{cases}$$

Formaremos a matriz aumentada $[A|I_3]$ e usaremos o Método de Gauss-Jordan para colocar a matriz $[A|I_3]$ em sua forma escada reduzida por linhas. As operações elementares feitas em uma linha de A também devem ser feitas na linha correspondente da matriz I_3. Teremos então a matriz aumentada $[C|D]$ equivalente por linhas à matriz $[A|I_3]$, onde se $C = I_3$ então $D = A^{-1}$.

O sistema linear acima pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

1^a Etapa) Formaremos a matriz aumentada $[A|I_3]$. A matriz aumentada é dada por:

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2^a Etapa) Transformaremos a matriz aumentada à sua forma escada reduzida por linhas, usando operações elementares em suas linhas.

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ e $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$, obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_1 \longleftarrow L_1 - L_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_1 \longleftarrow L_1 + L_3$ e $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_3$, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Assim, como a matriz encontrada é a identidade, a matriz inversa é dada por:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Temos que $Ax = b \Longrightarrow x = A^{-1}b$. Então, temos:

$$x = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 - 3.7 + 1.11 \\ -3.5 + 5.7 - 2.11 \\ 1.5 - 2.7 + 1.11 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 15 - 21 + 11 \\ \\ -15 + 35 - 22 \\ \\ 5 - 14 + 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \\ -2 \\ \\ 2 \end{bmatrix}$$

onde x é a solução do sistema linear.

b) Considere o sistema:

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 5 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 7 \\ x_1 & +3x_2 & +6x_3 & = 11 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes que representa esse sistema é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Podemos expandir o determinante em relação à uma linha ou coluna.

Expandindo, então, em relação à primeira coluna, obtemos:

$$det(A) = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \tag{1}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$$

onde M_{ij} é o determinante menor de a_{ij}.

Assim, temos:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} det(M_{11}) = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (1)(12-9) = (1)(3) = 3 \tag{2}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} det(M_{21}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (-1)(6-3) = (-1)(3) = -3 \tag{3}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} det(M_{31}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (1)(3-2) = (1)(1) = 1 \tag{4}$$

Logo, temos de (2), (3) e (4) que

$$\begin{aligned} A_{11} &= 3 \\ A_{21} &= -3 \\ A_{31} &= 1 \end{aligned}$$

Substituindo esses valores em (1) temos:

$$\begin{aligned} det(A) &= 1.3 + 1(-3) + 1.1 \\ det(A) &= 3 - 3 + 1 \\ det(A) &= 1 \end{aligned}$$

c) Vamos representar a matriz aumentada relativa ao sistema.

Em seguida, utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss com pivoteamento para resolvê-lo :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

Por definição, o pivô é dado por $max = \{|a_{11}|, |a_{21}|, |a_{31}|\} = 1$.

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Agora o pivô será $max = \{|a_{22}|, |a_{32}|\} = 2$.

Trocando L_2 por L_3 e L_3 por L_2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Multiplicando L_2 por $\dfrac{1}{2}$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5/2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5/2 & 3 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim, temos o seguinte sistema após a eliminação de Gauss:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 & = & 5 \\ x_2 + \dfrac{5x_3}{2} & = & 3 \\ \dfrac{-x_3}{2} & = & -1 \end{array} \right. \tag{5}$$

Por L_3, temos que $x_3 = 2$. Por L_2, temos que $x_2 + \dfrac{5x_3}{2} = 3 \Longrightarrow x_2 = 3 - \dfrac{5}{2}.2 \Longrightarrow x_2 = -2$. E substituindo x_2 e x_3 em L_1 temos que $x_1 = 5$.

Assim, a solução do sistema é $S = \{(5, -2, 2)\}$.

3^a Questão) Solução: Observe as figuras:

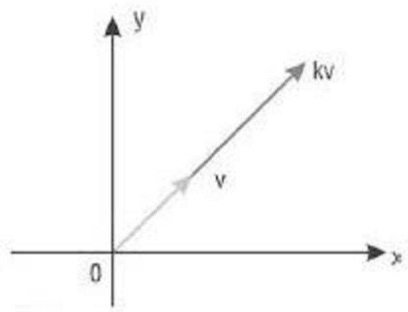

Figura 1: Extensão, com k constante real

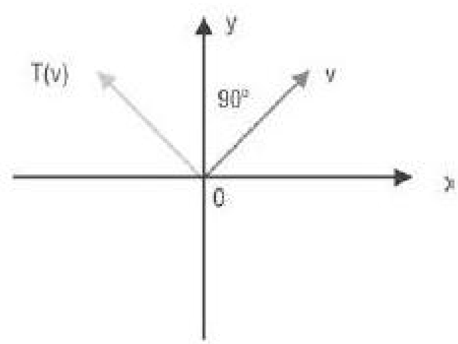

Figura 2: Rotação

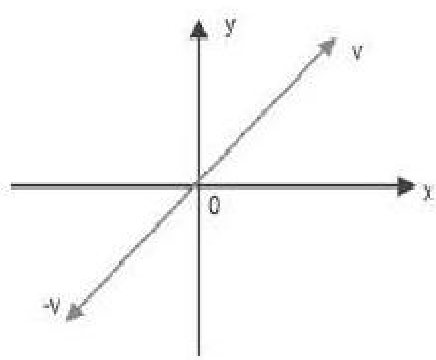

Figura 3: Reflexão

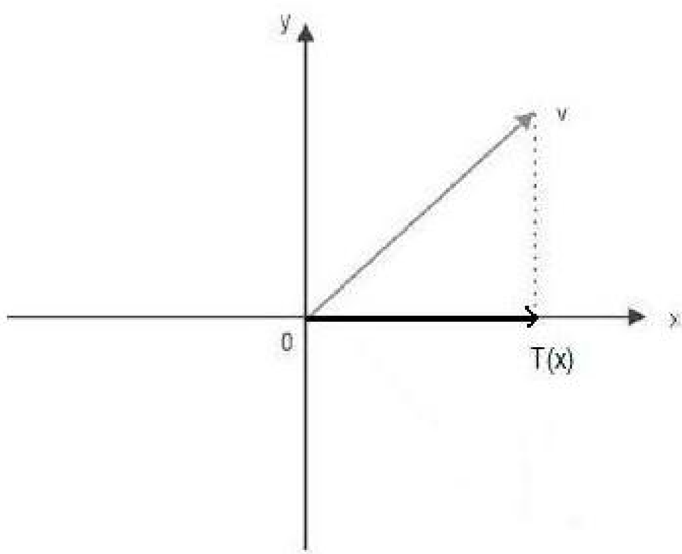

Figura 4: Projeção no eixo x

4^a Questão) Solução:

Formaremos a matriz aumentada $[E|I_4]$. As operações elementares feitas em uma linha de E também devem ser feitas na linha correspondente da matriz I_4. Teremos então a matriz aumentada $[C|D]$ equivalente por linhas à matriz $[E|I_4]$, onde se $C = I_4$ então $D = E^{-1}$. Vamos representar a matriz aumentada relativa ao sistema. Em seguida, utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss para resolvê-lo :

$$[E|I_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ e $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & | & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & | & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & | & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando L_2 por $\dfrac{-1}{2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & | & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & | & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, fazendo $L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2$, temos:

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & | & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & | & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Multiplicando L_3 por $\dfrac{-1}{2}$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & | & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3$, temos:

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & | & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Multiplicando L_4 por $\dfrac{1}{4}$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, temos:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, temos:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{array}\right]$$

Agora, fazendo $L_1 \leftarrow L_1 + L_4$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$ e $L_3 \leftarrow L_3 - L_4$, temos:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{array}\right]$$

Como a matriz encontrada é a identidade, a matriz inversa é dada por:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Vamos agora escrever o vetor $v = (7, 5, 3, 1)^t$ como combinação linear das colunas de

E. Para isso, encontraremos escalares x, y, z e w que satisfazem:

$$x\,(1,1,1,1)^t + y\,(1,-1,1,-1)^t + z\,(1,1,-1,-1)^t + w\,(1,-1,-1,1)^t = (7,5,3,1)^t$$

Obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & + & w & = & 7 \\ x & - & y & + & z & - & w & = & 5 \\ x & + & y & - & z & - & w & = & 3 \\ x & - & y & - & z & + & w & = & 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema abaixo, encontraremos os escalares.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & | & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & | & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ e $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & | & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & | & -4 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & | & -6 \end{bmatrix}$$

Trocando L_3 com L_4

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & | & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & | & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & | & -4 \end{bmatrix}$$

Multiplicando L_2 por $\frac{-1}{2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & | & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & | & -4 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & | & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & | & -4 \end{bmatrix}$$

Multiplicando L_3 por $\frac{-1}{2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & | & -4 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicando L_4 por $\frac{-1}{4}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

De L_4 temos que $w = 0$. De L_3 temos que $z - w = 2 \Rightarrow z = 2$. De maneira análoga, nas linhas 1 e 2, temos que:

$$y + w = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$x + y + z + w = 7 \Rightarrow x = 4.$$

Logo,

$$v = (7,5,3,1)^t = 4\,(1,1,1,1)^t + 1\,(1,-1,1,-1)^t + 2\,(1,1,-1,-1)^t + 0\,(1,-1,-1,1)^t$$

5^a Questão) Solução:

i) Vamos determinar a matriz que representa a transformação linear:

Seja $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a matriz que representa T.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a+b=2 \\ c+d=2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2a=0 \\ 2c=0 \end{bmatrix}$$

Desse modo, chegamos ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} a+b &= 2 \\ c+d &= 2 \\ 2a &= 0 \\ 2c &= 0 \end{cases}$$

Por L_3 e L_4, temos que $a = c = 0$. Substituindo nas linhas anteriores, temos que $b = d = 2$.

Logo

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Assim temos que

$$T(2,2) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

(ii)

$$T(3,1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(iii)

$$T(-1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(iv)

$$T(a,b) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b \\ 2b \end{bmatrix}.$$

6^a Questão) Solução:

a) Sabemos que os vetores $(1,0),(0,1)$ formam uma base canônica para o $\mathbb{R}^2$. Desse modo, vamos utilizar estes vetores para encontrar a matriz que representa cada transformação e seu núcleo.

$T(v_1,v_2) = (v_2,v_1)$. Logo $T(1,0) = (0,1)$ e $T(0,1) = (1,0)$.

Seja $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a matriz que representa T.

Assim, temos

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a = 0 \\ c = 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} b = 1 \\ d = 0 \end{bmatrix}$$

Concluímos facilmente que

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo $Im(T) = \left\{ M_{2\times 2} | \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$

Vamos encontrar o núcleo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} y = 0 \\ x = 0 \end{bmatrix}$$

Logo $N(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x, y) = (0, 0)\}$.

b) $T(v_1, v_2) = (0, 0)$. Logo $T(1, 0) = (0, 0)$ e $T(0, 1) = (0, 0)$.

Seja $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a matriz que representa T.

Assim, temos

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a = 0 \\ c = 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} b = 0 \\ d = 0 \end{bmatrix}$$

Concluímos que

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo $Im(T) = \left\{ M_{2\times 2} | \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$

Vamos encontrar o núcleo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{bmatrix}$$

Logo, concluímos que para qualquer valor de (x, y), encontramos sempre a matriz nula, ou seja, $N(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

c) Sabemos que os vetores $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ formam uma base canônica para o $\mathbb{R}^3$. Desse modo, vamos utilizar estes vetores para encontrar a matriz que representa cada transformação e seu núcleo.

$T(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2)$. Logo $T(1, 0, 0) = (1, 0)$, $T(0, 1, 0) = (0, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 0)$

Seja $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ a matriz que representa T.

Assim, temos

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a = 1 \\ d = 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} b = 0 \\ e = 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} c = 0 \\ f = 0 \end{bmatrix}$$

Concluímos facilmente que

$$T = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo $Im(T) = \left\{ M_{2\times3} | \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Vamos encontrar o núcleo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ y = 0 \end{bmatrix}$$

Logo $N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y, z) = (0, 0, z), z \in \mathbb{R}\}$.

d) $T(v_1, v_2) = (v_1, v_1)$. Logo $T(1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 1) = (0, 0)$.

Seja $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a matriz que representa T.

Assim, temos

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a = 1 \\ c = 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} b = 0 \\ d = 0 \end{bmatrix}$$

Concluímos facilmente que

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo $Im(T) = \left\{ M_{2\times2} | \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Vamos encontrar o núcleo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = 0 \end{bmatrix}$$

Logo $N(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x, y) = (0, y), y \in \mathbb{R}\}$.

7^a Questão) Solução:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Logo o polinômio característico é dado por

$$P_2(\lambda) = det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(1-\lambda) = (1-\lambda)^2$$

As raízes de $P_2(\lambda)$ são $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Logo os autovalores da matriz A, são: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 1$.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Logo o polinômio característico é dado por

$$P_2(\lambda) = det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(1-\lambda) = (1-\lambda)^2$$

As raízes de $P_2(\lambda)$ são $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$. Logo os autovalores da matriz B, são: $\lambda_3 = 1$ e $\lambda_4 = 1$.

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1+0 & 1+0 \\ 1+0 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

Logo o polinômio característico é dado por

$$P_2(\lambda) = det(AB - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

As raízes de $P_2(\lambda)$ são $\lambda_5 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_6 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. Logo os autovalores da matriz AB são: $\lambda_5 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_6 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

$$B.A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+1 \\ 0+1 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Logo o polinômio característico é dado por

$$P_2(\lambda) = det(BA - \lambda I) = (2-\lambda)(1-\lambda) - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

Como o polinômio característico de BA é o mesmo de AB, concluímos que os autovalores também são os mesmos.

Observe que: Autovalores $(AB) \neq$ Autovalores (A). Autovalores (B).

A mesma conclusão para BA.