Gabarito

Álgebra Linear: AD2 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2012.2

Tutores: Cristina Lopes e Rodrigo Olimpio

1^a Questão)

a) Solução:

Considere a matriz aumentada $[A|b]$ dada por:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & | & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & b_2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & | & b_3 \end{bmatrix}$$

Trocando a segunda linha com a terceira linha

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & | & b_1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & | & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & b_2 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, obtemos

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & | & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & | & b_3 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & b_2 \end{bmatrix}$$

Da terceira linha, observamos que para que o sistema tenha solução é necessário que $b_2 = 0$, o que significa que o sistema tem infinitas soluções, para o vetor

$b = (b1,\ 0,\ b3).$

b) Da letra a) usando a matriz A escalonada e consideramos $b = 0$. Assim temos:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Temos então o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -5w = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

onde o vetor incognita é dado por $X = (x, y, z, w)$.

Por L_2 temos que $w = 0$. Substituindo em L_1, temos que $x+2y = 0 \Longrightarrow x = -2y$.

Então $(x, y, z, w) = (-2y, y, z, 0) = y(-2, 1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0)$. Logo o conjunto $\{(-2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$ forma uma base para o espaço nulo de A.

c) Da letra a) temos que:

$$\begin{cases} x + 2y = b_1 \\ -5w = b_3 - 2b_1 \\ 0 = b_2 \end{cases}$$

Por L_2, temos que $w = (-b_3 + 2b_1)/5$. Tomando $y = s$ e $z = r$, onde $s, r \in \mathbb{R}$, entao da primeira linha temos que $x = -2s + (b_3 - b_1)/5$.

Concluímos que o sistema tem infinitas soluções, dadas por

$S = (-2s + (b_3 - b_1)/5,\ s,\ r,\ (-b_3 + 2b_1)/5).$

d) Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Considere a combinação linear das colunas de A:

$a(1,0,2)+b(2,0,4)+c(0,0,0)+d(3,0,1)=(x,y,z)$.

Chegamos ao sistema:

$$\begin{cases} a+2b+3d=x \\ 0=y \\ 2a+4b+d=z \end{cases}$$

Concluímos que $y=0$. Agora vamos considerar:

$$\begin{cases} a+2b+3d=x \\ 2a+4b+d=z \end{cases}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2-2L_1$ temos

$$\begin{cases} a+2b+3d=x \\ -5d=-2x+z \end{cases}$$

Assim , por L_2, $z=2x-5d$.

Logo, $(x,y,z)=(x,0,2x-5d)=x(1,0,2)+d(0,0,-5)$. Concluímos então que o conjunto $\{(1,0,2),(0,0,-5)\}$ forma uma base para o espaço das colunas de A.

2^a Questão) Solução:

$$\begin{cases} x - 2y - z = a \\ 2x + y + 3z = b \\ 4x - 3y + z = c \end{cases}$$

O sistema linear acima pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss para resolvê-lo.

Vamos então, formar a matriz aumentada $[A|b]$.

A matriz aumentada é dada por:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & | & a \\ 2 & 1 & 3 & | & b \\ 4 & -3 & 1 & | & c \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$, obtemos

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & | & a \\ 0 & 5 & 5 & | & b-2a \\ 0 & 5 & 5 & | & c-4a \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & | & a \\ 0 & 5 & 5 & | & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & | & c-2a-b \end{bmatrix}$$

Obtemos assim, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - 2y - z = a \\ y + z = (b - 2a)/5 \\ 0 = -2a - b + c \end{cases}$$

Da terceira linha temos que o sistema tem solução se, somente se, $-2a - b + c = 0$ ou $c = 2a + b$. Se $-2a - b + c \neq 0$ então o sistema não tem solução.

Mas tomando $y = s \in \mathbb{R}$ então do sistema obtemos: $x = s + (3a + b)/5$ e $z = -s + (b - 2a)/5$. Logo, se $-2a - b + c = 0$ então o conjunto de soluções é dado por

$S = \Big\{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3; \Big(s + (3a + b)/5;\ s;\ -s + (b - 2a)/5\Big)\Big\}$. se $-2a - b + c = 0$

Como $s \in \mathbb{R}$ então temos infinitas soluções. a) Como o sistema tem mais de uma solução, ele não pode ter solução única.

b) O sistema terá infinitas soluções se $-2a - b + c = 0$.

c) O sistema não terá solução se $-2a - b + c \neq 0$.

d) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

a matriz dos coeficientes.

Podemos expandir o determinante em relação à uma linha ou coluna.

Expandindo, então, em relação à primeira coluna, obtemos:

$$det(A) = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$$

onde M_{ij} é o determinante menor de a_{ij}.

Assim, temos:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = (1).(1+9) = (1).10 = 10$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = (-1).(-2-3) = (-1).(-5) = 5$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (1).(-6+1) = (1).(-5) = -5$$

Logo, temos:

$$\begin{aligned} det(A) &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \\ det(A) &= (1)(10) + (2)(5) + (4)(-5) \\ det(A) &= 10 + 10 - 20 \\ det(A) &= 0 \end{aligned}$$

A matriz dos coeficientes não é invertível pois $det(A) = 0$.

3^a Questão) Solução:

a) O vetor u_3 pode ser escrito como combinação linear de u_1, u_2:

$(3, 8) = -1(1, -2) + 2(2, 3)$.

Logo, concluímos que $\{(1, -2), (2, 3)\}$ forma uma base para $S = [u_1, u_2, u_3]$.

Vamos ortogonalizar usando Gram-Schmidt:

$w_1 = (1, -2)$

$$w_2 = (2,3) - \left(\frac{(2,3).(1,-2)}{(1,-2).(1,-2)}\right)(1,-2) = (2,3) - \left(\frac{-4}{5}(1,-2)\right) =$$
$$(2,3) - (\frac{-4}{5}, \frac{8}{5}) = (2,3) + (\frac{4}{5}, \frac{-8}{5}) = (\frac{14}{5}, \frac{7}{5}).$$

Logo, os vetores $\left\{(1,-2), (\frac{14}{5}, \frac{7}{5})\right\}$ formam uma base ortogonal para S, com dimensão 2.

b) $Proj_S v = \left(\frac{(1,0).(1,-2)}{(1,-2).(1,-2)}\right)(1,-2) + \left(\frac{(1,0).(\frac{14}{5},\frac{7}{5})}{(\frac{14}{5},\frac{7}{5}).(\frac{14}{5},\frac{7}{5})}\right)(\frac{14}{5}, \frac{7}{5}) =$

$$\frac{1}{5}(1,-2) + \frac{2}{7}\left(\frac{14}{5}, \frac{7}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{-2}{5}\right) + \left(\frac{28}{35}, \frac{2}{5}\right) = (1,0).$$

Concluímos que o ponto $(1,0)$ pertence ao subespaço S.

4^a Questão) Solução:

a) Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Com isto, chegamos as igualdades:

$$\begin{cases} a = 2 \\ c = 5 \\ b = 1 \\ d = 3 \end{cases}$$

Logo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

b)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Com isto, chegamos as igualdades:

$$\begin{cases} 2a + 5b = 1 \\ 2c + 5d = 0 \\ a + 3b = 0 \\ c + 3d = 1 \end{cases}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1$ e $L_4 \leftarrow 2L_4 - L_2$, obtemos

$$\begin{cases} b = -1 \\ d = 2 \end{cases}$$

Substitundo estas b, d nas linhas L_3, L_4 do sistema, encontramos $a = 3$ e $c = -5$

Logo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

c)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Com isto, chegamos as igualdades:

$$\begin{cases} 2a + 6b = 1 \\ 2c + 6d = 0 \\ a + 3b = 0 \\ c + 3d = 1 \end{cases}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1$ e $L_4 \leftarrow 2L_4 - L_2$, obtemos

$$\begin{cases} 0 = -1 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

O sistema não tem solução, logo não existe matriz que representa a transformação linear desejada.

d)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Com isto, temos o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 5x + 3y = 0 \end{cases}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow 2L_2 - 5L_1$ obtemos que $y = 0$. Substituindo em uma das equações temos que $x = 0$.

Logo $N(T) = (0, 0)$, com base de dimensão zero. Como a transformação é de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (dimensão do domínio é igual a dimensão do contradomínio), ela é injetora.

e) Pelo Teorema do Núcleo Imagem, como N(T)= 0, temos que dim (Im(T))= 2. Como a transformação é injetora e dimensão do domínio é igual a dimensão do contradomínio, temos que a dimensão da imagem é igual a dimensão do contradomínio e portanto ela é sobrejetora.

5^a Questão) Solução:

Considere a transformação linear

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\rightarrow (x+y, y, z) \end{aligned}$$

a) Vamos determinar os autovalores da transformação linear T:

Temos que

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= (x+y, y, z) \\ &= x(1,0,0) + y(1,1,0) + z(0,0,1) \end{aligned}$$

A matriz associada à transformação linear é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Logo o polinômio característico é dado por

$$P_3(\lambda) = det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda)$$

As raízes de $P_3(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda)$ são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 1$, que são os autovalores da matriz A.

b) Cálculo dos autovetores v associados aos autovalores λ.

Para encontrarmos os autovetores de A associados a $\lambda_1 = 1$, formamos o sistema linear $Ax = 1x \equiv (A - I)x = 0$, ou

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isso nos dá

$$\begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = z \end{cases}$$

Tomando $x = r \neq 0$ e $z = t \neq 0$, com $r, t \in \mathbb{R}$, obtemos então que todos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 1$ são dados por $v = (r, 0, t)^t$ ou seja,

$$v = (r, 0, t) = r(1, 0, 0) + t(0, 0, 1).$$

Os outros autovetores associados aos autovalores $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 1$ são encontrados de maneira análoga.