Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
AP3 - Segundo Semestre de 2010
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(2.0)1. Usando a expansão de cofatores (Fórmula de Laplace), determine os valores de x, para os quais, o determinante da matriz A abaixo é igual a -23.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & x & 3 & 2 \\ 1 & 5 & x & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} x & 3 & 2 \\ 5 & x & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ x & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ x & 3 & 2 \\ 5 & x & 1 \end{vmatrix} \\
&= x\begin{vmatrix} x & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2x\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix} + 10\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\
&= x(x-3) + 5(3-6) + x(1-3) + 2x(1-x) + 10(2-3) \\
&= x^2 - 3x - 15 - 2x + 2x - 2x^2 - 10 \\
&= -x^2 - 3x - 25.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\det(A) = -23 \quad &\Rightarrow \quad -x^2 - 3x - 25 = -23 \\
&\Rightarrow \quad x^2 + 3x + 2 = 0 \\
&\Rightarrow \quad x = \tfrac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4\times 1 \times 2}}{2\times 1} \\
&\Rightarrow \quad x = \tfrac{-3\pm 1}{2} \\
&\Rightarrow \quad x = -2 \text{ ou } x = -1.
\end{aligned}$$

(2.0)2. Sendo A uma matriz real quadrada de ordem 4, cujo determinante é igual a 3, qual o valor de y na equação $\det(3A^2A^TA^{-1}) = 81y$? Justifique sua resposta.

Solução:

$$\begin{array}{rcl} \det(3A^2A^TA^{-1}) & = & \det(3A) \cdot \det(A) \cdot \det(A^T) \cdot \det(A^{-1}) \\ & = & 3^4\det(A) \cdot \det(A) \cdot \det(A^T) \cdot \det(A^{-1}) \\ & = & 3^4\det(A) \cdot \det(A) \cdot \det(A) \cdot \frac{1}{\det(A)} \\ & = & 81 \cdot 3 \cdot 3. \end{array}$$

Logo,

$$81 \cdot 9 = 81y \Rightarrow y = \frac{1}{9}.$$

(3.0)3. Sabendo que $T : I\!\!R^2 \to I\!\!R^3$ é uma transformação linear e que

$$T(1,-2) = (0,1,-2) \qquad \text{e} \qquad T(-1,1) = (1,-2,5),$$

(a) determine $T(x,y)$,

(b) determine o núcleo de T,

(c) responda se T é injetora e se T é sobrejetora, justificando as respostas.

Solução:

(a) Observando, inicialmente, que $\{(1,-2),(-1,1)\}$ é uma base para $I\!\!R^2$, podemos expressar o vetor $(x,y) \in I\!\!R^2$ como combinação linear dos vetores dessa base:

$$(x,y) = a(1,-2) + b(-1,1)$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} a & - & b & = & x \\ -2a & + & b & = & y \end{array} \right.$$

sistema do qual, temos: $a = -x - y$ e $b = -2x - y$. Portanto,

$T(x,y) = aT(1,-2) + bT(-1,1)$,
$T(x,y) = (-x-y)(0,1,-2) + (-2x-y)(1,-2,5)$,
$T(x,y) = (0,-x-y,2x+2y) + (-2x-y,4x+2y,-10x-5y)$,
$T(x,y) = (-2x-y,3x+y,-8x-3y)$.

(b) $T(x,y) = (0,0,0) \Rightarrow$

$$\begin{cases} -2x & - & y & = & 0 \\ 3x & + & y & = & 0 \\ -8x & - & 3y & = & 0 \end{cases}$$

Como a única solução do sistema acima é $x = 0$ e $y = 0$, o núcleo de T é formado apenas pelo vetor nulo $(0,0)$.

(c) Como o núcleo de T é formado apenas pelo vetor nulo, T é injetora. Para verificar se T é sobrejetora, devemos ver se para todo $(a,b,c) \in I\!R^3$ existe $(x,y) \in I\!R^2$, tal que $T(x,y) = (a,b,c)$. Para tanto, o sistema abaixo deveria ter solução para quaisquer valores de a, b, c.

$$\begin{cases} -2x & - & y & = & a \\ 3x & + & y & = & b \\ -8x & - & 3y & = & c \end{cases}$$

No entanto, este sistema é equivalente a

$$\begin{cases} -2x & - & y & = & a \\ x & & & = & a+b \\ & & y & = & c-4a \end{cases} \sim \begin{cases} 0x & + & 0y & = & -a+2b+c \\ x & & & = & a+b \\ & & y & = & c-4a \end{cases}$$

Logo, (a,b,c) só pertence à imagem de T se $-a+2b+c = 0$ ou $a = 2b+c$. A imagem de T não é, portanto, igual a $I\!R^3$ e T não é sobrejetora.

4.(3.0) Dado o sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} 2x & - & 5y & + & 3z & - & 4s & + & 2t & = & 0 \\ 3x & - & 7y & + & 2z & - & 5s & + & 4t & = & 0 \\ 5x & - & 10y & - & 5z & - & 4s & + & 7t & = & 0 \end{cases}$$

(a) Determine uma base para o espaço de soluções do sistema.

(b) Qual a dimensão do espaço de soluções? Justifique a resposta.

(c) Mostre que o espaço de soluções é um subspaço vetorial de $I\!R^5$.

Solução:

(a) Aplicando as operações abaixo à matriz aumentada do sistema, temos os seguintes sistemas equivalentes como resultado:

$$-3L_1 + 2L_2 \to L_2, \quad -5L_1 + 2L_3 \to L_3,$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x & - & 5y & + & 3z & - & 4s & + & 2t & = & 0 \\ & & y & - & 5z & + & 2s & + & 2t & = & 0 \\ & & 5y & - & 25z & + & 12s & + & 4t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$-5L_2 + L_3 \to L_3,$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x & - & 5y & + & 3z & - & 4s & + & 2t & = & 0 \\ & & y & - & 5z & + & 2s & + & 2t & = & 0 \\ & & & & & & 2s & - & 6t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$L_1 + 5L_2 \to L_1,$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x & & & - & 22z & + & 6s & + & 12t & = & 0 \\ & & y & - & 5z & + & 2s & + & 2t & = & 0 \\ & & & & & & 2s & - & 6t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$L_1 - 3L_3 \to L_1, \quad L_2 - L_3 \to L_2,$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x & & & - & 22z & & & & 30t & = & 0 \\ & & y & - & 5z & & & & 8t & = & 0 \\ & & & & & & 2s & - & 6t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\frac{1}{2}L_1 \to L_1, \quad \frac{1}{2}L_3 \to L_3,$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & & & - & 11z & & & & 15t & = & 0 \\ & & y & - & 5z & & & & 8t & = & 0 \\ & & & & & & s & - & 3t & = & 0 \end{array}\right.$$

O sistema acima está na forma escada reduzida por linhas e sua solução é a mesma do sistema original, dada por:

$$(x, y, z, s, t) = (11a - 15b, 5a - 8b, a, 3b, b); a, b \in \mathbb{R},$$

logo uma base para o espaço de soluções é

$$\{(11, 5, 1, 0, 0), (-15, -8, 0, 3, 1)\}.$$

(b) A dimensão do espaço é igual a 2, pois sua base é composta por dois vetores.

(c) Dados os vetores x_1 e $x_2 \in I\!R^5$, tais que $Ax_1 = 0$ e $Ax_2 = 0$, temos que $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 = 0$, para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2 \in I\!R$. Logo, o espaço de soluções é um subspaço vetorial.