Gabarito

Álgebra Linear: AD2 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2016.2

Tutores: Gabriel Thomaz e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

a) Esse sistema linear ($Ax = b$) é representado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Agora, vamos formar a matriz aumentada $[A|I_3]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Usando as operações elementares em suas linhas, transformaremos a matriz aumentada à sua forma escada reduzida por linhas. Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2$ e $L_3 \leftarrow \frac{1}{8}L_3$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{array}\right]$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{array}\right]$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_3$ e $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{5}{2}L_3$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{8} & \frac{7}{16} & -\frac{1}{16} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{16} & \frac{5}{16} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{array}\right]$$

Assim, como a matriz que encontramos é a identidade, a matriz inversa é dada por:

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{7}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{16} & \frac{5}{16} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 10 & 7 & -1 \\ -2 & -3 & 5 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Temos que $Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b$. Então,

$$x = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 10 & 7 & -1 \\ -2 & -3 & 5 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 50-35+1 \\ -10+15-5 \\ -20-10-2 \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ -32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

b) A matriz dos coeficientes é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Expandindo em relação a primeira coluna, obtemos

$$det(A) = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

em que

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}det(M_{ij})$$

sendo M_{ij} é o determinante menor de a_{ij}. Assim

$$A_{11} = (-1)^{1+1}det(M_{11}) = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 9 = -10$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}det(M_{21}) = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1+6) = -7$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}det(M_{31}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Portanto,

$$det(A) = 1.(-10) + 1.(-7) + 1.1 = -10 - 7 + 1 = -16$$

c) A matriz aumentada é dada por:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

pivo $= max\{|a_{11}|, |a_{21}|, |a_{31}|\} = 1$. Fazendo, $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -10 \\ 0 & 2 & 3 & -6 \end{array}\right]$$

pivo $= max\{|a_{22}|, |a_{32}|\} = 2$. Fazendo, $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 8 & -16 \end{array}\right]$$

Assim, temos que $8x_3 = -16 \Rightarrow x_3 = -2$, $-2x_2 + 5.(-2) = -10 \Rightarrow x_2 = 0$ e $x_1 + 0 - 2.(-2) = 5 \Rightarrow x_1 = 1$. Portanto, a solução do sistema é $(1, 0, -2)$

2^a Questão) Solução: Observe as figuras:

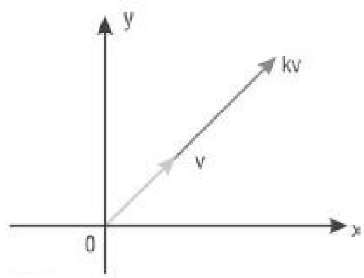

Figura 1: Extensão, com k constante real

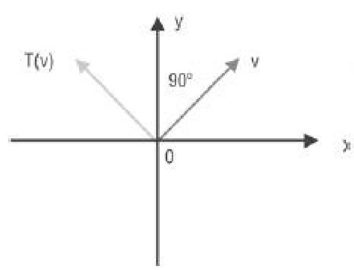

Figura 2: Rotação

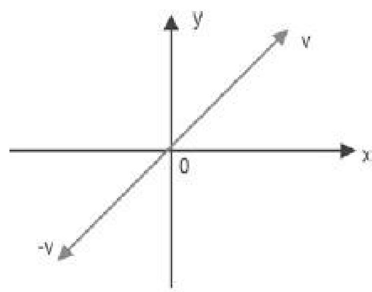

Figura 3: Reflexão

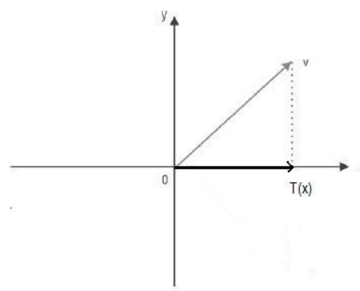

Figura 4: Projeção no eixo x

3^a Questão) Solução: vamos formar a matriz aumentada $[H|I_4]$. Usando as operações elementares em suas linhas, transformaremos a matriz aumentada à sua forma escada reduzida por linhas.

$$[H|I_4] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ e $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_4 \leftarrow -\frac{1}{4}L_4$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 + L_4$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$ e $L_3 \leftarrow L_3 - L_4$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Como a matriz encontrada é a identidade, a matriz inversa é dada por:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Agora, vamos escrever o vetor $v = (2, -1, 3, 0)^t$ como combinação linear das colunas de H. Para isso, encontraremos x, y, z, w que satisfazem:

$$x(1,1,1,1)^t + y(1,-1,1,-1)^t + z(1,1,-1,-1)^t + w(1,-1,-1,1)^t = (2,-1,3,0)^t$$

Obtemos, então, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x+y+z+w &= 2 \\ x-y+z-w &= -1 \\ x+y-z-w &= 3 \\ x-y-z+w &= 0 \end{cases} \tag{3}$$

Resolvendo o sistema abaixo encontraremos x, y, z, w.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ e $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

Daí, temos que: $4w = 0 \Rightarrow w = 0$, $-2z + 0 = 1 \Rightarrow z = \frac{-1}{2}$, $-2y + 0 - 0 = -3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$ e $x + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow x = 1$. Logo,

$$v = (2,-1,3,0)^t = 1(1,1,1,1)^t + \frac{3}{2}(1,-1,1,-1)^t - \frac{1}{2}z(1,1,-1,-1)^t + 0(1,-1,-1,1)^t$$

4^a Questão) Solução:

$T(2,0,1) = 2T(1,0,0) + T(0,0,1) = (0,0)$

$T(1,1,0) = T(1,0,0) + T(0,1,0) = (2,2)$

$T(0,1,0) = T(0,1,0) = (1,1)$

Substituindo $T(0,1,0)$ na linha 2 temos:

$T(1,1,0) = T(1,0,0) + (1,1) = (2,2)$

$\Longrightarrow T(1,0,0) = (2,2) - (1,1) = (1,1)$

Substituindo $T(1,0,0)$ na linha 1:

$2(1,1) + T(0,0,1) = (0,0)$

$\Longrightarrow T(0,0,1) = (0,0) - (2,2) = (-2,-2)$.

Logo $T(x,y,z) = xT(1,0,0)+yT(0,1,0)+zT(0,0,1) = x(1,1)+y(1,1)+z(-2,-2) = (x+y-2z, x+y-2z)$.

Assim temos:

$T(v_1) = T(2,2,1) = (2+2-2.1, 2+2-2.1) = (2,2)$

$T(v_2) = T(3,1,0) = (3+1-2.0, 3+1-2.0) = (4,4)$.

5^a Questão) Solução:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Assim, o polinômio característico é dado por:

$$P_2(\lambda) = det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2$$

As raízes de $P_2(\lambda)$ são $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Logo, os autovalores de A são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 1$.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Assim, o polinômio característico é dado por:

$$P_2(\lambda) = det(B - \lambda I) = (1-\lambda)^2$$

As raízes de $P_2(\lambda)$ são $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$. Logo, os autovalores de B são $\lambda_3 = 1$ e $\lambda_4 = 1$.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow AB - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

Assim, o polinômio característico é dado por:

$$P_2(\lambda) = det(AB - \lambda I) = (1-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 1$$

As raízes de $P_2(\lambda)$ são $\lambda_5 = 2 - \sqrt{3}$ e $\lambda_6 = 2 + \sqrt{3}$. Logo, os autovalores de AB são $\lambda_5 = 2 - \sqrt{3}$ e $\lambda_6 = 2 + \sqrt{3}$.

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow BA - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Assim, o polinômio característico é dado por:

$$P_2(\lambda) = det(BA - \lambda I) = (1-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 1$$

As raízes de $P_2(\lambda)$ são $\lambda_7 = 2 - \sqrt{3}$ e $\lambda_8 = 2 + \sqrt{3}$. Logo, os autovalores de BA são $\lambda_7 = 2 - \sqrt{3}$ e $\lambda_8 = 2 + \sqrt{3}$.

6^a Questão) Solução:

Denotemos o número de pacotes de cada mistura pelas incógnitas:

x = número de pacotes de mistura da casa

y = número de pacotes de mistura especial

z = número de pacotes de mistura gourmet

Assim, somando a quantidade(gramas) de cada tipo de café usado em cada mistura e igualando a quantidade(gramas) total de cada tipo café, temos os seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 300x + 200y + 100z &= 30000 \\ 200y + 200z &= 15000 \\ 200x + 100y + 200z &= 25000 \end{cases}$$

onde a L_1 representa a quantidade de café colombiano, L_2 a quantidade de café brasileiro e L_3 a quantidade de café francês.

Utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss para resolvê-lo. Considere a seguinte matriz aumentada que representa este sistema:

$$\begin{bmatrix} 300 & 200 & 100 & 30000 \\ 0 & 200 & 200 & 15000 \\ 200 & 100 & 200 & 25000 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 300 & 200 & 100 & 30000 \\ 0 & 200 & 200 & 15000 \\ 0 & -100 & 400 & 15000 \end{bmatrix}$$

Agora, Fazendo $L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2$ temos

$$\begin{bmatrix} 300 & 200 & 100 & 30000 \\ 0 & 200 & 200 & 15000 \\ 0 & 0 & 1000 & 45000 \end{bmatrix}$$

Assim, temos o seguinte sistema após a eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} 300x + 200y + 100z &= 30000 \\ 200y + 200z &= 15000 \\ 1000z &= 45000 \end{cases}$$

Por L_3 neste sistema, temos que $z = 45$. Substituindo z em L_2 temos que

$200y + 200.45 = 15000 \Longrightarrow y = 30$. Agora, substituindo z e y em L_1, temos que $x = 65$.

Logo , deve preparar 65 pacotes da mistura da casa, 30 pacotes da mistura especial e 45 pacotes da mistura gourmet.