Gabarito

Álgebra Linear: AD2 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2013.1

Tutores: Cristina Lopes e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

Seja

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a matriz dos coeficientes.

a) Podemos expandir o determinante em relação à uma linha ou coluna. É claro que é melhor expandir em relação a uma linha ou coluna que tenha o maior número de zeros, já que, nesse caso, os cofatores A_{ij} dos a_{ij} que são nulos não precisam ser calculados, uma vez que $a_{ij}A_{ij} = (0)(A_{ij}) = 0$.

Expandindo, então, em relação à quarta linha, obtemos:

$$det(A) = a_{41}A_{41} + a_{42}A_{42} + a_{43}A_{43} + a_{44}A_{44}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}det(M_{ij})$$

onde M_{ij} é o determinante menor de a_{ij}.

Assim, temos:

$$A_{44} = (-1)^{4+4}det(M_{44}) = (-1)^8 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)(-2 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0) = -2$$

A_{41}, A_{42} e A_{43} não vamos calcular pois $a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0$.

Assim, temos:

$$\begin{aligned}
det(A) &= (0)(A_{41}) + (0)(A_{42}) + (0)(A_{43}) + (1)(-2) \\
det(A) &= 0 + 0 + 0 - 2 \\
det(A) &= -2
\end{aligned}$$

b) Para calcular a inversa da matriz A, usaremos a fórmula $A^{-1} = \dfrac{1}{detA}.Adj(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular $Adj(A) = [Cof(A)]^T$, onde $Cof(A)$ é a matriz dos cofatores. Por isso, calcularemos os cofatores $A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$, onde M_{ij} é o determinante menor de a_{ij}.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^2.[2 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0] = 1.(2) = 2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3.(0) = (-1).0 = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4.(0) = (1).0 = 0$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5.(0) = (-1).0 = 0$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3.[1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0] = (-1).1 = -1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4.[-1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0] = 1.(-1) = -1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5.[0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0] = (-1).0 = 0$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^6.(0) = (1).0 = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4.[-1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 4] = 1.(-5) = -5$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5.[1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0] = (-1).1 = -1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^6.[-2+0+0-0-0-0] = 1.(-2) = -2$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^7.(0) = (-1).0 = 0$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^5.[-3+0+0-0-4-12] = (-1).(-19) = 19$$

$$A_{42} = (-1)^{4+2}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^6.[3+0+0-0+4-0] = 1.(7) = 7$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^7.[-6+0+0-0-0-0] = (-1).(-6) = 6$$

$$A_{44} = (-1)^{4+4}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^8.[-2+0+0-0-0-0] = 1.(-2) = -2$$

Assim, a matriz dos cofatores fica:

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & -2 & 0 \\ 19 & 7 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

E portanto, calculando a transposta da matriz dos cofatores, obtemos $Adj(A)$:

$$Adj(A) = [Cof(A)]^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 & 19 \\ 0 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Como sabemos que $detA = -2$, aplicando a fórmula $A^{-1} = \dfrac{1}{detA}.Adj(A)$, encontramos:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 & 19 \\ 0 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{19}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

c) Como podemos observar no item b), a inversa também é uma matriz triangular superior.

d)

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A matriz aumentada é dada por:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando L_1 por -1 e L_2 por $1/2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

O sistema linear correspondente à matriz é dado por:

$$\begin{cases} 1x & - & 1y & - & 2z & + & 0w = -1 \\ 0x & + & 1y & - & \dfrac{1}{2}z & + & 2w = 0 \\ 0x & + & 0y & + & 1z & + & 3w = 0 \\ 0x & + & 0y & + & 0z & + & 0w = 1 \end{cases}$$

Da última linha temos que $w = 1$. Substituindo na terceira linha temos $z + 3w = 0 \Rightarrow z + 3.1 = 0 \Rightarrow z = -3$. Substituindo w e z por seus respectivos valores na segunda linha, obtemos $y = -\frac{7}{2}$. Finalmente, substituindo y e z e w na primeira linha, encontramos $x = -\frac{21}{2}$.

2^a Questão) Solução:

Considere o sistema

$$
\begin{cases}
x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\
2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0
\end{cases} \tag{1}
$$

a) Método de Gauss-Jordan

O sistema linear acima pode ser representado por:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

1^a Etapa) Formaremos a matriz aumentada $[A|b]$. A matriz aumentada é dada por:

$$
[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix}
$$

2^a Etapa) Transformaremos a matriz aumentada à sua forma escada reduzida por linhas, usando operações elementares em suas linhas.

$$
[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix}
$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicando L_2 por $-1/4$, encontramos

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo agora $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 3 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicando L_3 por $\frac{2}{5}$

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} & | & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - 5L_2$, temos

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{4} & \frac{5}{2} & | & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} & | & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{9}{4}L_3$, temos

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & | & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} & | & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{4}L_3$, temos

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} & | & 0 \end{bmatrix}$$

Assim temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 & & & - & \frac{1}{5}x_4 = 0 \\ & x_2 & & - & \frac{1}{5}x_4 = 0 \\ & & x_3 & + & \frac{6}{5}x_4 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

De L_3 temos que $x_3 = -\frac{6}{5}x_4$. De L_2 temos que $x_2 = \frac{1}{5}x_4$. E de L_1 temos que $x_1 = \frac{1}{5}x_4$.

Tomando $x_4 = r \neq 0$, com $r \in \mathbb{R}$, obtemos então o conjunto solução $S = \left\{(\frac{1}{5}r, \frac{1}{5}r, -\frac{6}{5}r, r)\right\}$.

3^a Questão) Solução:

a) Seja A a matriz dos coeficientes do sistema da questão anterior. Seja $x \in \mathbb{R}^4$. Considere $T(x) = Ax$:

$$T(x) = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} .$$

i) $T(0) = 0$:

$$T(0) = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Agora considere $x, y \in \mathbb{R}^4$

ii) $T(x+y) = T(x) + T(y)$:

$$T(x+y) = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ x_4 + y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1 + y_1) + 5(x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) \\ (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + 2(x_3 + y_3) + 2(x_4 + y_4) \\ 2(x_2 + y_2) + 2(x_3 + y_3) + 2(x_4 + y_4) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + y_1 + 5x_2 + 5y_2 + x_3 + y_3 \\ x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + 2x_3 + 2y_3 + 2x_4 + 2y_4 \\ 2x_2 + 2y_2 + 2x_3 + 2y_3 + 2x_4 + 2y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 5x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 + 5y_2 + y_3 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 + 2y_4 \\ 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 \end{bmatrix}$$

$$= T(x) + T(y)$$

iii) $T(\lambda x) = \lambda T(x), \lambda \in \mathbb{R}$:

$$T(\lambda x) = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \\ \lambda x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 + \lambda 5x_2 + \lambda x_3 \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda 2x_3 + \lambda 2x_4 \\ \lambda 2x_2 + \lambda 2x_3 + \lambda 2x_4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \lambda(x_1 + 5x_2 + x_3) \\ \lambda(x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4) \\ \lambda(2x_2 + 2x_3 + 2x_4) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 + 5x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 \end{bmatrix} =$$

$$\lambda T(x).$$

b) Considerando $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, temos que T é injetora $\Leftrightarrow N(T) = 0$. Pela questão 2, o sistema homogêneo tem solução não-trivial, logo $N(T) \neq 0 \Rightarrow T$ não é injetora.

c) A transformação T é bijetora se for injetora e sobrejetora ao mesmo tempo. Como não é injetora, não é bijetora.

4^a Questão) Solução: Vamos achar a matriz transformação $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que faz a rotação de 90^o em relação à origem , ou seja,para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $S(x, y) = (-y, x)$. Sejam a, b, c, d as entradas da matriz transformação:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ax + by = -y \\ cx + dy = x \end{bmatrix}$$

Concluímos que $a = 0, b = -1, c = 1, d = 0$. Portanto a matriz transformação é

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Vamos mostrar que é linear.

i) $S(0) = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 + (-1).0 \\ 1.0 + 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Sejam $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

ii) $S(x + y) = S(x) + S(y)$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} (x_1 + y_1) \\ (x_2 + y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.(x_1 + y_1) + (-1).(x_2 + y_2) \\ 1.(x_1 + y_1) + 0.(x_2 + y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 - y_2 \\ x_1 + y_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} = S(x) + S(y).$$

iii) $S(\lambda x) = \lambda S(x)$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.\lambda x_1 + (-1).\lambda x_2 \\ 1.\lambda x_1 + 0.\lambda x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.\lambda x_2 \\ \lambda x_1 \end{bmatrix}.$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \lambda S(x).$$

5^a Questão) Solução:

Vamos determinar os autovalores da matriz A:

Solução:

A matriz A é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Utilizaremos a Fórmula de Laplace para calcular o determinante da matriz $(A - \lambda I)$. Expandindo, então, em relação à quarta linha, obtemos:

$$det(A - \lambda I) = a_{14}A_{14} + a_{24}A_{24} + a_{34}A_{34} + a_{44}A_{44} \tag{3}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$$

onde M_{ij} é o determinante menor de a_{ij}.

Assim, aplicando a Regra de Sarrus para calcular o determinante de ordem 3, temos:

$$A_{44} = (-1)^{4+4} det(M_{44}) = (-1)^8 \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \tag{4}$$

$$= (-1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 \tag{5}$$

A_{14}, A_{24} e A_{34} não vamos calcular pois $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$.

Logo o polinômio característico é dado por

$P_4(\lambda) = det(A - \lambda I) = a_{44}(-1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = (1-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$

As raízes de $P_4(\lambda) = (1-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$ são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = 1$.

Logo os autovalores da matriz A, são:

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = 1$.

b) Cálculo dos autovetores v associados aos autovalores λ.

Para encontrarmos os autovetores de A associados a $\lambda_1 = \lambda_4 = 1$, formamos o sistema linear $Ax = 1x \equiv (A - I)x = 0$, ou

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isso nos dá

$$\begin{cases} -2x+y+2z=0 \Longrightarrow -2x+r+2r=0 \Longrightarrow -2x=-3r \Longrightarrow x=\frac{3r}{2} \\ y-z+4w=0 \Longrightarrow y-z+4.0=0 \Longrightarrow y=z=r \\ 3w=0 \Longrightarrow w=0 \end{cases}$$

Tomando $z = r \neq 0$, com $r \in \mathbb{R}$, obtemos então que os autovetores associados aos autovalores $\lambda_1 = \lambda_4 = 1$ são dados por $\left(\dfrac{3r}{2}, r, r, 0\right)^t$ ou equivalente $\left(3r, 2r, 2r, 0\right)^t$

Assim, todos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = \lambda_4 = 1$ são dados por $v_1 = (3r, 2r, 2r, 0)^t = r\,(3, 2, 2, 0)^t$. Ou seja $v_1 = (3, 2, 2, 0)^t$ é uma base para o subespaço próprio do autovetor de A associado aos autovalores $\lambda_1 = \lambda_4 = 1$.

Analogamente, para o autovalor $\lambda_2 = -1$, temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isso nos dá

$$\begin{cases} y+2z=0 \Longrightarrow 0+0=0 \\ 3y-z+4w=0 \Longrightarrow 3y-0+4.0=0 \Longrightarrow 3y=0 \Longrightarrow y=0 \\ 2z+3w=0 \Longrightarrow 2z+3.0=0 \Longrightarrow 2z=0 \Longrightarrow z=0 \\ 2w=0 \Longrightarrow w=0 \end{cases}$$

Tomando $x = t \neq 0$ com $t \in \mathbb{R}$, obtemos então que os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = -1$ é dado por $\left(t, 0, 0, 0\right)^t$

Assim, todos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = -1$ são dados por

$v_2 = (t, 0, 0, 0)^t = t\,(1, 0, 0, 0)^t$. Ou seja $v_2 = (1, 0, 0, 0)^t$ é uma base para o subespaço próprio do autovetor de A associado ao autovalor $\lambda_2 = -1$.

Finalmente para o autovalor $\lambda_3 = 2$, obtemos

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isso nos dá

$$\begin{cases} -3x + y + 2z = 0 \Longrightarrow -3x + y + 2.0 = 0 \Longrightarrow -3x + y = 0 \Longrightarrow -3x = -y \Longrightarrow x = \frac{y}{3} \\ -z + 4w = 0 \Longrightarrow 0 + 0 = 0 \\ -z + 3w = 0 \Longrightarrow -z + 3.0 = 0 \Longrightarrow z = 0 \\ -w = 0 \Longrightarrow w = 0 \end{cases}$$

Tomando $y = s \neq 0$, com $s \in \mathbb{R}$, obtemos então que os autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = 2$ são dados por $\left(\frac{s}{3}, s, 0, 0\right)^t$ ou equivalente $\left(s, 3s, 0, 0\right)^t$

Assim, todos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = 2$ são dados por $v_3 = (s, 3s, 0, 0)^t = s\,(1, 3, 0, 0)^t$. Ou seja $v_3 = (1, 3, 0, 0)^t$ é uma base para o subespaço próprio do autovetor de A associado ao autovalor $\lambda_3 = 2$.

Observação O polinômio característico associado a matriz A é dado por:

$$P_4(\lambda) = det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(-1 - \lambda)(2 - \lambda)(1 - \lambda).$$

Note que é exatamente o produto da diagonal principal. Essa é uma propriedade de matriz triangular superior (inferior), ou seja o determinante de uma matriz triangular(inferior) é o produto de sua diagonal principal.