# Álgebra linear algorítmica

S. C. Coutinho

Este arquivo reúne as provas do curso *álgebra linear algorítmica* (MAB 115) oferecido pelo Departamento de Ciência da Computação da UFRJ.

## Primeira Prova–2010/1

1. Seja $\rho_\theta$ uma rotação anti-horário de um ângulo $\theta$ no plano. Para quais valores de $\theta$ a matriz de $\rho_\theta$ é simétrica?

2. Seja $R$ uma reflexão do plano. Sabendo-se que
$$R(1,3) = -\frac{1}{169}(241, 477),$$
determine:
   (a) a reta em torno da qual se dá esta reflexão, isto é o espelho de $R$;
   (b) um vetor unitário perpendicular a esta reta;
   (c) a matriz de $R$.

3. Para que valores de $k$ o sistema
$$\begin{cases} x - ky + z & = 0 \\ kx + (1-k^2)y + (1+k)z & = k \\ kx - ky + z & = 1-k \end{cases}$$
é (a) determinado, (b) indeterminado ou (c) impossível.

4. Sejam $W_1$ e $W_2$ os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^5$:

$W_1 = \{(x,y,u,w,z) \mid x + y - w + z = x + 3u + z = x - y + 6u + w + z = 0\}$;

$W_2 = \langle (1,0,1,0,0), (0,1,-1,0,1), (0,0,1,0,-1), (1,1,1,0,0) \rangle$

   (a) Determine uma base e a dimensão de $W_1$.
   (b) Determine uma base e a dimensão de $W_2$.
   (c) O vetor $(4,5,2,0,2)$ pertence a $W_2$?
   (d) É verdade que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$?
   (e) Determine um espaço complementar de $W_1$ em $\mathbb{R}^5$.

Resolução

1. A matriz de uma rotação é da forma

$$(\rho_\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

e sua transposta é

$$(\rho_\theta)^t = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Igualando as duas, não obtemos nenhuma restrição sobre $\cos(\theta)$. Por outro lado,

$$-\operatorname{sen}(\theta) = \operatorname{sen}(\theta),$$

donde $\operatorname{sen}(\theta) = 0$. Portanto, $\theta = \pi k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$ é a resposta.

2. (a) Como $v$ e $R(v)$ são simétricos em relação ao espelho, temos que $v + R(v)$ é um vetor sobre o espelho. Neste caso,

$$v + R(v) = \frac{1}{169}(-72, 30).$$

Portanto, o espelho tem como vetor diretor

$$\frac{1}{169}(-72, 30) = \frac{6}{169}(-12, 5);$$

ou, o que é mais simples, o próprio vetor $(-12, 5)$.

(b) O vetor $(5, 12)$ é perpendicular ao espelho porque tem produto interno nulo com $(-12, 5)$. Como $(5, 12)$ têm norma 13, concluímos que

$$u = \frac{1}{13}(5, 12),$$

é um vetor unitário perpendicular ao espelho.

(c) A matriz desta reflexão é dada por

$$I - 2u \cdot u^t = \frac{1}{169}\begin{bmatrix} 119 & -120 \\ -120 & -119 \end{bmatrix}.$$

3. A matriz aumentada do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & -k & 10 & \\ k & 1-k^2 & 1+k & k \\ k & -k & 1 & 1-k \end{bmatrix}.$$

Aplicando eliminação gaussiana a esta matriz obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -k & 10 & \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1-k^2 & -k^3+k^2-k+1. \end{bmatrix}.$$

Portanto, se $1-k^2 \neq 0$ o sistema é determinado. isto corresponde a dizer que $k \neq \pm 1$. Por outro lado, se $k = 1$, então

$$-k^3 + k^2 - k + 1 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0,$$

e o sistema é indeterminado, ao passo que se $k = -1$ temos

$$-k^3 + k^2 - k + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4,$$

e o sistema é impossível. Resumindo, o sistema é

- determinado se $k \neq \pm 1$;
- indeterminado se $k = 1$;
- impossível se $k = -1$.

4. (a) A matriz do sistema cuja solução é $W_1$ é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

cuja forma escada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

que corresponde ao sistema

$$\begin{aligned} x + y - w + z &= 0 \\ y - 3u - w &= 0 \end{aligned}$$

cuja solução pode ser parametrizada na forma

$$(x, y, u, w, z) = (-z - 3u, 3u + w, u, w, z)$$

que também podemos escrever como

$$(x, y, u, w, z) = u(-3, 3, 1, 0, 0) + w(0, 1, 0, 1, 0) + z(1, 0, 0, 0, 1).$$

Portanto,

$$W_1 = \langle(-3, 3, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 0, 1)\rangle.$$

Para saber se esta é uma base, precisamos verificar se estes vetores são linearmente independenes. Contudo, para fazer isto basta igualar

$$u(-3, 3, 1, 0, 0) + w(0, 1, 0, 1, 0) + z(1, 0, 0, 0, 1) = (z - 3u, 3u + w, u, w, z)$$

a zero, o que nos dá diretamente $u = w = z = 0$. Portanto, estes vetores são linearmente independentes; donde

$$\{(-3, 3, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 0, 1)\}$$

é uma base de $W_1$ e sua dimensão é 3.

(b) Passando, agora, a $W_2$, devemos aplicar eliminação gaussiana à matriz cujas linhas são os vetores que geram $W_2$, que é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

o que nos dá a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como os vetores não nulos que sobraram nas linhas da matriz estão em forma escada, têm que ser linearmente independentes, donde

$$\{(1,0,1,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,-1)\}$$

é uma base de $W_2$ e sua dimensão é 3.

(c) A maneira mais fácil de determinar se $(4,5,2,0,2)$ pertence a $W_2$ é aplicar eliminação gaussiana à matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

. Fazendo isto obtemos uma matriz cuja última linha é, de fato, nula, de modo que o vetor pertence a $W_2$.

(d) Se a interseção fosse nula, então a união das bases de $W_1$ e $W_2$ seria uma base de $W_1 + W_2 \subseteq \mathbb{R}^5$. Entretanto,

$$\dim(W_1) + \dim(W_2) = 6 > \dim(\mathbb{R}^5),$$

o que não pode acontecer. Logo, a interseção é diferente de zero.

(e) Para achar um espaço complementar a $W_1$, juntamos à base já obtida de $W_1$ os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^5$ e aplicamos eliminação gaussiana para ver quais destes vetores são linearmente independentes com

$$\{(-3,3,1,0,0),(0,1,0,1,0),(1,0,0,0,1)\}.$$

Fazendo isto verificamos que as três últimas linhas se anulam, de modo que os vetores $e_3$, $e_4$ e $e_5$ são dependentes dos demais. Logo, $e_1$ e $e_2$ são independentes da base dada para $W_1$. Assim, um complementar possível para $W_1$ é o subespaço $\langle e_1, e_2 \rangle$.

## Segunda Prova–2010/1

1. Seja $T$ um operador auto-adjunto de $\mathbb{R}^2$. Sabe-se que:
   (a) os autovalores de $T$ são 2 e 3;
   (b) o auto-espaço de 2 é gerado por $(1,1)$.
   Determine a matriz de $T$ na base canônica.

2. Considere o operador linear $T$ de $\mathbb{R}^3$ definido por
$$T(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y).$$
   Determine:
   (a) os autovalores de $T$;
   (b) os auto-espaços de $T$;
   (c) uma base $\beta$ de autovetores de $T$;
   (d) a matriz de mudança de base de $\beta$ para a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

3. Seja $S$ o plano do $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $(1,1,0,0)$ e $(1,0,1,1)$. Determine
   (a) o complemento ortogonal $S^\perp$ de $S$;
   (b) um operador linear $T$ de $\mathbb{R}^4$ cujo núcleo é $S$ e cuja imagem é $S^\perp$ em $S$.

4. Considere a matriz
$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ a & 2/3 & 1/3 \\ b & 1/3 & c \end{pmatrix}.$$
   Determine valores para $a, b$ e $c$ de forma que $Q$ descreva uma rotação de $\mathbb{R}^3$. Ache o eixo e o cosseno do ângulo de rotação de $Q$.

Resolução

1. Como o operador é auto-adjunto, autovetores associados a autovalores distintos têm que ser ortogonais. Logo qualquer vetor não nulo perpendicular a $(1,1)$ será autovetor associado a 3. Portanto,

$$\beta = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1) \right\}$$

é base ortonormal de autovetores de $T$. Assim,

$$(T)_\beta = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q = (\mathrm{id})_{\beta\epsilon} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$(T)_\epsilon = Q(T)_\beta Q^t,$$

já que $Q$ é ortogonal.

2. A matriz desta transformação na base canônica é

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

cujo polinômio característico é

$$\det(A - tI) = -(t+1)(t^2 - t - 2),$$

que tem raízes 2 e $-1$. Portanto, estes são os autovalores de $T$. Para calcular o auto-espaço asociado a 2, devemos resolver o sistema cuja matriz é

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aplicando eliminação gaussiana a esta matriz, obtemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

que corresponde ao sistema

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \\ y - z &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, o auto-espaço associado a 2 é gerado por $(1, 1, 1)$. Já o auto-espaço associado a $-1$ é a solução do sistema cuja matriz é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, os vetores deste auto-espaço satisfazem $x + y + z = 0$. Isto significa que o auto-espaço é

$$\langle(-1, 0, 1), (-1, 1, 0)\rangle.$$

Finalmente, a matriz mudança de base de $\beta$ para $\epsilon$ é

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Para obter o complemento ortogonal, vou completar a base $\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1)\}$ de $S$ para uma base de $\mathbb{R}^4$ e aplicar Gram-Schimdt. Podemos escolher,

$$\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}.$$

Aplicando Gram-Schmidt,

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0),$$

donde

$$w_2 = (1, 0, 1, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0) = \frac{1}{2}(1, -1, 2, 2)$$

que ao ser normalizado nos dá

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, -1, 2, 2)$$

Estes dois vetores formam uma base ortonormal de $S$. Tomando

$$w_3 = (0, 0, 1, 0) - 0 \cdot u_1 - \frac{2}{10}(1, -1, 2, 2)$$

obtemos, ao normalizar,

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-1, 1, 3, -2)$$

Para obter o último vetor, calculamos

$$w_4 = (0, 0, 0, 1) - 0 \cdot u_1 - \frac{2}{10}(1, -1, 2, 2) + \frac{2}{15}(-1, 1, 3, -2) = \frac{1}{3}(-1, 1, 0, 1);$$

teremos que

$$u_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 0, 1).$$

Portanto, $\{u_1, u_2\}$ é base ortonormal de $S$ e $S^\perp$ é gerado por $\langle u_3, u_4 \rangle$.

Para definir a transformação $T$ pedida, basta tomar

$$\begin{aligned} T(u_1) &= 0 \\ T(u_2) &= 0 \\ T(u_3) &= u_3 \\ T(u_4) &= u_4 \end{aligned}$$

o que nos dá uma matriz

$$(T)_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz de mudança de base

$$Q = (\mathrm{id})_{\beta\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{15}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{15}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{15}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} & -\frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

é ortogonal, temos que

$$(T)_\epsilon = Q(T)_\beta Q^t.$$

4. Da ortogonalidade da primeira e segunda linhas, obtemos $a = -2/3$ e da ortogonalidade da segunda e terceira colunas, $c = 2/3$. Usando o valor de $a$ já obtido, a ortogonalidade das duas últimas linhas nos dá $b = 2/3$. A matriz resultante é

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

cujo determinante é 1. Portanto, $Q$ é uma matriz ortogonal de determinante 1; isto é, $Q$ descreve uma rotação. Para calcular o eixo basta determinar um autovetor de $Q$. Para isto, resolvemos o sistema cuja matriz é

$$Q - I = \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

que, com a eliminação gaussiana, transforma-se em

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, o auto-espaço de $Q$ associado ao autovalor 1 tem equações

$$\begin{aligned} -x + y - z &= 0 \\ -y + z &= 0; \end{aligned}$$

e é gerado por $(0, 1, 1)$. Logo o eixo da rotação é a reta $\langle(0, 1, 1)\rangle$. Como $u = (1, 0, 0)$ é ortogonal ao eixo, temos que

$$Qu = (1/3, -2/3, 2/3).$$

Logo, se $\theta$ for o ângulo de rotação, então

$$\cos(\theta) = \frac{u^t Qu}{\|u\|\|Qu\|} = u^t Qu = \frac{1}{3}.$$

## Segunda Prova bis–2010/1

1. Seja $U$ o plano de equação $x - y + 2z = 0$ e $\ell$ a reta gerada por $(1, 1, 2)$.
   (a) Determine um operador linear de $\mathbb{R}^3$ cujo núcleo é $U$ e cuja imagem é $\ell$.
   (b) Prove que um operador que satisfaz as propriedades de (a) não pode ser auto-adjunto.

2. Determine *todos* os valores possíveis de $a$, $b$ e $c$ para os quais a matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$
corresponda a um operador diagonalizável.

3. Ache um paralelepípedo que seja levado em um cubo de lado 8 pelo operador linear $T$ de $\mathbb{R}^3$ definido por
$$T(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z).$$

4. Seja $R$ uma rotação de eixo $\ell$ em $\mathbb{R}^3$ e $v = (1, 1, 1)$ um vetor ortogonal a $\ell$. Sabendo-se que $Rv = (1, -1, 1)$, determine:
   (a) o cosseno do ângulo de rotação de $R$;
   (b) o eixo da rotação $R$;
   (c) a matriz de $R$ na base canônica.

Resolução

# Prova Final–2010/1

1. Seja $P$ o operador de $\mathbb{R}^2$ que descreve a projeção ortogonal sobre uma reta $\ell$. Determine a matriz de $T$ na base canônica sabendo que $P(1,1) = (10,15)$.

2. Considere os subespaços do $\mathbb{R}^4$
$$U = \{(x,y,z,w) \mid y+z+w=0\}$$
$$W = \langle (1,-,1,0,0),(2,-2,2,1),(5,-5,2,1)\rangle$$
   (a) Ache a base e a dimensão de $U+W$.
   (b) Ache a base e a dimensão de $U \cap W$.
   (c) Ache um subespaço complementar de $U$ em $\mathbb{R}^4$.

3. Seja $T$ o operador linear de $\mathbb{R}^3$ definido por $T(x,y,z) = (3x+y, x+3y, 2z)$.
   (a) Determine os autovalores e os autovetores de $T$.
   (b) Determine uma base ortonormal $B$ formada por autovetores de $T$.
   (c) Determine a matriz $Q$ de mudança de base de $B$ para a base canônica. $Q$ é uma rotação?

4. Considere a matriz
$$A = \begin{pmatrix} a & \sqrt{2} & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Determine todos os valores de $a$, $b$ e $c$ para os quais $A$ descreve uma reflexão.
   (b) Determine a equação do plano de reflexão (o espelho).

# Primeira Prova–2010/2

1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear que consiste de uma rotação anti-horária de $\pi/3$ radianos seguida de uma reflexão que tem a reta $y = 2x$ como espelho.
   (a) Determine a matriz de $T$.
   (b) Explique porque $T$ é uma isometria.
   (c) $T$ é uma rotação ou uma reflexão?

2. Determine a matriz de uma transformação linear $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que leve o paralelogramo de vértices
$$(0,0), (2,0), (2,1), (4,1)$$
no quadrado de vértices
$$(0,0), (1,0), (0,1), (1,1).$$

3. Calcule o valor de $c$ em função de $a$ e $b$ de modo que o sistema
$$\begin{cases} x + 8y - 2z & = a \\ 5x + 4y - 2z & = b \\ 7x - 16y + 2z & = c \end{cases}$$
admita (a) uma única solução, (b) nenhuma solução ou (c) mais de uma solução.

4. Considere o sistema linear $AX = b$, em que
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 10 & -2 \\ 5 & 2 & 12 & -3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 16 \\ 19 \end{bmatrix}$$
   (a) Determine geradores para o conjunto solução do sistema linear homogêneo $AX = 0$.
   (b) Determine uma expressão geral para todas as soluções de $AX = b$.

1. A matriz da rotação é

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & -\operatorname{sen}(\pi/3) \\ \operatorname{sen}(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

A reflexão se dá relativamente ao espelho $y = 2x$, que tem vetor diretor $(1,2)$. Logo, o vetor unitário perpendicular a $y = 2x$ é $u^t = (2,-1)/\sqrt{5}$, de modo que a reflexão terá matriz

$$F = I - 2uu^t = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Logo a matriz $A$ de $T$ é igual a

$$A = FR = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4\sqrt{3}-3 & 3\sqrt{3}+4 \\ 3\sqrt{3}+4 & -4\sqrt{3}+3 \end{bmatrix}.$$

Esta é uma isometria porque uma rotação e uma reflexão são isometrias e a composta de quaisquer duas isometrias também é uma isometria. Além do mais, como o determinante desta matriz é igual a $-1$, então $T$ tem que ser uma reflexão.

2. É mais fácil determinar a matriz da transformação $S^{-1}$ que leva o quadrado no paralelogramo, pois

$$S^{-1}(1,0) = (2,0) \quad \text{e} \quad S^{-1}(0,1) = (2,1);$$

que nos dá a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para achar $S$ basta calcular a inversa desta matriz; mas se

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

então obtemos o sistema

$$\begin{aligned} 2a + 2c &= 1 \\ 2b + 2d &= 0 \\ c &= 0 \\ d &= 1 \end{aligned}$$

que nos dá $a = 1/2$ $b = -1$, $c = 0$ e $d = 1$; donde

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que é a matriz de $S$.

3. A matriz aumentada do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 & -2 & a \\ 5 & 4 & -2 & b \\ 7 & -16 & 2 & c \end{bmatrix}.$$

Aplicando eliminação gaussiana a esta matriz obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 & -2 & a \\ 0 & -36 & 8 & b - 5a \\ 0 & 0 & 0 & 3a - 2b + c \end{bmatrix}.$$

Para começar, o sistema nunca tem uma única solução (determinado). Ele tem mais de uma solução (indeterminado) quando $c = -3a+2b$ e nenhuma solução (impossível) em qualquer outro caso.

4. A matrix aumentada do sistema $AX = b$ é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 10 & -2 & 16 \\ 5 & 2 & 12 & -3 & 19 \end{bmatrix},$$

cuja forma escada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que corresponde ao sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + 4z + w &= 7 \\ y + z + w &= 2 \end{aligned}$$

que tem como uma de suas soluções $[1, 1, 1, 0]^t$. Por outro lado, o sistema linear homgêneo associado corresponde

$$\begin{aligned} x + 2y + 4z + w &= 0 \\ y + z + w &= 0 \end{aligned}$$

de modo que

$$y = -z - w \quad \text{e} \quad x = -2z + w;$$

donde

$$[x, y, z, w] = [-2z + w, -z - w, z, w] = z[-2, -1, 1, 0] + w[1, -1, 0, 1].$$

Portanto o conjunto solução do sistema homogêneo associado é gerado pelos vetores $[-2, -1, 1, 0]^t$ e $[1, -1, 0, 1]^t$. Como qualquer solução de um sistema indeterminado é igual a uma solução particular somada a uma solução qualquer do sistema homogêneo associado, podemos escrever a solução geral de $AX = b$ na forma

$$[1, 1, 1, 0]^t + z[-2, -1, 1, 0]^t + w[1, -1, 0, 1]^t$$

quaisquer que sejam os valores escolhidos para $z$ e $w$.

## Segunda Prova–2010/2

1. Seja $b > 10^{900}$ um número real. Determine todos os valores de $a$ para os quais os vetores
$$(1,1,1),\ (1,a,a^2),\ (1,b,b^3)$$
são linearmente *dependentes*.

2. Seja $R$ a reflexão de $\mathbb{R}^3$ que transforma o vetor $(1,3,2)$ em $(3,2,1)$. Determine:
   (a) o plano de reflexão (o espelho);
   (b) a matriz de $R$.

3. Considere os subespaços de $\mathbb{R}^4$
$$W_1 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid y+z+w=0\};$$
$$W_2 = \langle (1,-1,0,0), (2,-2,2,1), (5,-5,2,1) \rangle$$
   (a) Ache uma base e a dimensão de $W_2$.
   (b) Ache um subespaço $W_1'$, contido em $W_2$, que satisfaz $W_1 \oplus W_1' = \mathbb{R}^4$.

4. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ a transformação linear definida por
$$T(x,y,z,w) = (x+y, y-z, z-w, y-w).$$
Determine:
   (a) uma base e a dimensão do núcleo de $T$;
   (b) uma base e a dimensão da imagem de $T$.

Resolução

1. Para que os vetores

$$(1,1,1),\ (1,a,a^2),\ (1,b,b^3)$$

sejam linearmente dependentes é preciso que existam números reais $x$, $y$ e $z$, não todos nulos, tais que

$$x(1,1,1) + y(1,a,a^2) + z(1,b,b^3) = 0;$$

o que ocorrerá se, e somente se, o sistema

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + ay + bz &= 0 \\ x + a^2y + b^3z &= 0. \end{aligned}$$

A matriz do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^3 \end{bmatrix}.$$

Eliminando as posições da primeira coluna, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & b-1 \\ 0 & a^2-1 & b^3-1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a segunda linha por $a+1$ e somando à terceira, resta

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & b-1 \\ 0 & 0 & (b^3-1)-(b-1)(a+1) \end{bmatrix};$$

de modo que o sistema só tem solução não nula (isto é, só é indeterminado) se

$$(b^3-1)-(b-1)(a+1) = 0.$$

Mas isto é equivalente a dizer que

$$b^3 - ab + a - b = 0,$$

donde

$$a(b-1) = b^3 - b = b(b-1)(b+1).$$

Como $b > 1$, podemos concluir que

$$a = b(b+1).$$

Portanto, os vetores só podem ser linearmente dependentes se $a = b(b+1)$.

2. Como $R(1,3,2) = (3,2,1)$ e $R$ é uma reflexão, podemos concluir que

$$(3,2,1) - (1,3,2) = (2,-1,-1)$$

é perpendicular ao espelho. Portanto, o plano do espelho tem equação

$$2x - y - z = 0.$$

Como o vetor unitário

$$u^t = \frac{1}{\sqrt{6}}[2,-1,-1]$$

é normal ao espelho, a matriz de $R$ será igual a

$$I - 2uu^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

é a matriz desejada.

3. Pondo os vetores que geram $W_2$ nas linhas de uma matriz e aplicando eliminação gaussiana, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\{(1,-1,0,0), (0,0,0,2,1)\}$$

é uma base de $W_2$ que, portanto, tem dimensão 2.

Para resolver (b), devemos achar uma base de $W_1$ e completá-la para obter uma base de $\mathbb{R}^4$ usando vetores contidos em $W_2$. Mas se $(x, y, z, w) \in W_1$, então

$$(x, y, z, w) = (x, -z - w, z, w) = x(1, 0, 0, 0) + z(0, -1, 1, 0) + w(0, -1, 0, 1).$$

Como

$$(1, 0, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1)$$

são linearmente independentes, então geram $W_1$. Mas $(1, -1, 0, 0) \in W_2$ é linearmente independente com estes vetores, pois a eliminação gaussiana aplicada a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nos dá

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, podemos tomar $W_1' = \langle (1, -1, 0, 0) \rangle$.

4. O núcleo de $T$ é igual ao conjunto solução do sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ y - z &= 0 \\ z - w &= 0 \\ y - w &= 0 \end{aligned}$$

de modo que $(x, y, z, w) \in N(T)$ se, e somente se,

$$(x, y, z, w) = (-w, w, w, w) = w(-1, 1, 1, 1).$$

Logo o núcleo tem base

$$B = \{(-1, 1, 1, 1)\}$$

e dimensão um. A maneira mais fácil de calcular uma base da imagem de $T$ é completar $B$ para uma base de $\mathbb{R}^4$, o que pode ser feito facilmente; por exemplo,

$$\{(-1,1,1,1),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}.$$

Mas, como vimos na demonstração do teorema do núcleo e da imagem, a imagem destes três últimos vetores têm que ser linearmente independentes e gerar a imagem. Como,

$$\begin{aligned}
T(0,1,0,0) &= (1,1,0,0)\\
T(0,0,1,0) &= (0,-1,1,0)\\
T(0,0,0,1) &= (0,0,-1,-1)
\end{aligned}$$

podemos concluir que a imagem de $T$ tem base

$$\{(1,1,0,0),(0,-1,1,0),(0,0,-1,-1)\}$$

e dimensão três.

TERCEIRA PROVA–2010/2

1. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

 (a) Determine os autovalores e autovetores de $A$.
 (b) Determine uma matriz inversível $M$ tal que $MAM^{-1}$ seja diagonal.
 (c) É possível escolher para $M$ uma matriz ortogonal?

2. Seja $P$ a matrix $3 \times 3$ que descreve a projeção ortogonal sobre o plano de equação $x + 2y + z = 0$. **Sem calcular** $P$, determine seus autovalores e os auto-espaços correspondentes. Justifique sua resposta a partir da descrição geométrica de $P$.

3. Dê exemplo de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que satisfaça

$$T(1, 1, 1) = (1, 1, 0, 0) \text{ e } T(1, -1, 0) = (1, 0, 1, 0),$$

e que leve o complemento ortogonal de $\langle(1, 1, 1), (1, -1, 0)\rangle$ em um vetor do complemento ortogonal de $\langle(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0)\rangle$.

Resolução

1. Expandindo $\det(A - \lambda I)$ pela primeira linha, obtemos o polinômio característico

$$(2 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3)$$

cujas raízes são 1, 2 e 3. Vamos calcular os autovetores correspondentes a cada um destes autovalores. Quando $\lambda = 1$, o sistema a resolver é

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de modo que $x = y = z$. Portanto, o auto-espaço associado ao autovalor 1 é gerado por $\langle(1,1,1)\rangle$. Quando $\lambda = 2$, o sistema a resolver é

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de modo que $x = y = 0$. Portanto, o auto-espaço associado ao autovalor 1 é gerado por $\langle(0,0,1)\rangle$. Finalmente, o auto-espaço associado ao autovalor 3 é o conjunto solução do sistema

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

de modo que $x = -y$ e $y = -z$. Portanto este último auto-espaço é gerado por $(-1, 1, -1)$. Como a soma das dimensões dos auto-espaços é 3, a matriz é diagonalizável e a matriz $M$ existe e é igual a

$$M = (\mathrm{id})_{B\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Não podemos escolher $M$ como sendo ortogonal porque se isto fosse possível então $A$ poderia ser escrita na forma

$$A = MDM^{-1} = MDM^t;$$

donde teríamos que

$$A^t = (MDM^t)^t = (M^t)^t D^t M^t = MDM^t = A,$$

e $A$ seria simétrica, o que não é verdade.

2. Como se trata de uma projeção ortogonal sobre o plano $x + 2y + z = 0$, devemos ter que os vetores perpendiculares a este plano são levados no zero e os vetores sobre o plano não sofrem nenhuma alteração. Mas $u = (1, 2, 1)$ é ortogonal ao plano. Por outro lado, os vetores sobre o plano são da forma

$$(x, y, z) = (-2y - z, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(-1, 0, 1).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P(1,2,1) &= 0 \\ P(-2,1,0) &= (-2,1,0) \\ P(-1,0,1) &= (-1,0,1). \end{aligned}$$

Logo, $P$ tem como autovalores 0 e 1 e os auto-espaços correspondentes são

$$V_0 = \langle (1,2,1) \rangle \ \text{ e } \ V_1 = \langle (-2,1,0), (-1,0,1) \rangle.$$

3. Como $(1,1,1)$ e $(1,-1,0)$ são ortogonais, vou completá-los acrescentando um vetor perpendicular a ambos. Se $(x,y,z)$ for este vetor, devemos ter

$$\langle (x,y,z), (1,1,1) \rangle = \langle (x,y,z), (1,-1,0) \rangle = 0;$$

donde

$$x + y + z = x - y = 0,$$

que tem como solução os vetores da forma

$$(x,y,z) = (y,y,-2y) = y(1,1,-2).$$

Normalizando os vetores, obtemos

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) \ \text{ e } \ u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2).$$

Escolheremos como base de $\mathbb{R}^3$,

$$B = \{u_1, u_2, u_3\}.$$

Nesta base a transformação é dada por

$$\begin{aligned} T(u_1) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0,0) \\ T(u_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0) \\ T(u_3) &= \frac{1}{\sqrt{6}}(0,0,0,1) \end{aligned}$$

em que o último vetor foi escolhido por estar no complemento ortogonal do subespaço $\langle(1,1,0,0),(1,0,1,0)\rangle$. Com isto,

$$(T)_{B\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad Q = (\mathrm{id})_{B\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (T)_\epsilon = (T)_{B\epsilon} Q^t$$

4. Para que

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a+3b \\ 1 & 0 & 5b \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

seja ortogonal, suas colunas devem formar uma base ortonormal. Efetuando o produto direto entre colunas distintas, verificamos que $5b = 0$, donde $b = 0$. Por outro lado, as duas primeiras colunas são vetores unitários mas, para que a terceira coluna satisfaça esta condição, devemos ter que $(a+3b)^2 + 25b^2 = 1$. Como $b = 0$, isto implica que $a = \pm 1$. Portanto, para que $Q$ seja ortogonal, devemos ter que $a = \pm 1$ e $b = 0$. Para determinar para quais destes valores $Q$ é uma rotação, calculamos o determinante. Note que

$$\det Q = \det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a,$$

pois para chegar a esta segunda matriz trocamos as colunas duas vezes. Portanto, $Q$ é uma rotação quando $a = 1$. Neste caso,

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e o eixo corresponde ao auto-espaço de 1 que é o conjunto solução do sistema

$$Q - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

que nos dá $x = y = z$. Portanto, o eixo é a reta de vetor diretor $(1, 1, 1)$. Por outro lado o vetor $u = (-1, 1, 0)/\sqrt{2}$ é unitário, perpendicular ao eixo e tem como imagem

$$Qu = (0, -1, 1)/\sqrt{2}.$$

Portanto, o cosseno do ângulo de rotação $\theta$ será

$$\cos(\theta) = \langle Qu, u \rangle = -\frac{1}{2}$$

## Prova Final–2010/2

1.1 Considere o sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= b \\ 3x + 5y + 2z &= 2b \\ 4x + ay + 3z &= 2 + b \end{aligned}$$

Determine os valores de $a$ e $b$ para os quais:
(a) o sistema é determinado, indeterminado ou impossível;
(b) o conjunto solução do sistema é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

1.2 Determine a matriz da transformação linear de $\mathbb{R}^2$ que corresponde à rotação anti-horária de um ângulo de $\pi/6$ graus seguida da projeção sobre a reta $y = 5x$.

2.1 Considere a transformação $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ cuja matriz relativa à base canônica é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determine:
(a) uma base e a dimensão do núcleo de $T$;
(b) uma base e a dimensão da imagem de $T$;
(c) o complemento ortogonal do núcleo de $T$.

2.2 Seja $R$ a reflexão de $\mathbb{R}^3$ que transforma o vetor $(1, 3, 2)$ em $(3, 2, 1)$.
(a) Determine o plano de reflexão (o espelho).
(b) Determine a matriz de $R$ na base canônica.

3.1 Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

(a) Calcule os autovalores e autovetores de $B = AA^t$.
(b) A matriz $B$ é diagonalizável?
(c) Determine, se existir, uma matriz ortogonal $Q$ tal que $QBQ^t$ seja uma matriz diagonal.

3.2 Seja $R$ a rotação de eixo $\ell = (1,1,1)$ que leva o vetor $u_1 = (1,0,0)$ em $u_2 = (0,1,0)$.

(a) Qual a relação entre $u_1 - u_2$ e $\ell$?
(b) Calcule $R(u_1 - u_2)$ e use isto para achar a matriz de $R$ na base canônica.
(c) Calcule $R^{18}$.

# Primeira Prova–2011/1

1. Calcule a decomposição LU da matriz
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 8 & 17 & 65 \\ 14 & 34 & 165 \end{bmatrix}$$

2. Considere o sistema linear de equações
$$\begin{aligned} x + ky + 7z + 9w &= k \\ 3x + (4k+1)y + 22z + 28w &= 3k+3 \\ 2x + (3k+1)y + (2k+15)z + 20w &= 2k-5 \\ x + (3k+2)y + (2k+9)z + (k+10)w &= k+30. \end{aligned}$$
Determine os valores de $k$ para os quais este sistema é (a) determinado, (b) indeterminado, (c) impossível.

3. Considere a transformação linear $S$ do plano que corresponde à reflexão $R$ que leva o vetor $(5,12)$ no vetor $(0,13)$ *seguida* da rotação *horária* de $\pi/6$ que chamaremos de $\rho$. Sabendo-se que as coordendas dos vetores acima foram dadas relativamente à base $\epsilon = \{e_1, e_2\}$ do plano formada por vetores unitários e perpendiculares entre si, determine:
(a) as matrizes de $R$ e $\rho$ relativamente à base $\epsilon$;
(b) a matriz de $S$ relativamente à base $\epsilon$;
(c) a imagem do vetor $(1,1)$ pela transformação $S$.

4. Existe alguma matriz inversível $A$, de tamanho $2\times 2$, que satisfaça à condição $A^{-1} = -A$? Dê exemplo de uma tal matriz, se a resposta for sim; caso contrário, prove que tal matriz não pode existir.

**Oferta do dia:** ganhe 1/2 ponto a mais respondendo o que acontece quando $A$ é uma matriz de tamanho $n \times n$. Mais uma vez você deve dar exemplos para todos os valores de $n$ relativos aos quais existe uma matriz com a propriedade desejada e provar que uma tal matriz não pode existir nos outros casos.

1. Aplicando eliminação gaussiana a

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 17 & 65 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 34 & 165 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

obtemos a matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 34 & -6 & 1 \end{array}\right]$$

de modo que

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}.$$

Usando eliminação para inverter o bloco da direita, aplicamos eliminação à matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 34 & -6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 14 & 6 & 1 \end{array}\right]$$

de modo que

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 14 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

e a decomposição LU da matriz dada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 8 & 17 & 65 \\ 14 & 34 & 165 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 14 & 6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}.$$

2. A matriz aumentada do sistema dado é

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 7 & 9 & | & k \\ 3 & (4k+1) & 22 & 28 & | & 3k+3 \\ 2 & (3k+1) & (2k+15) & 20 & | & 2k-5 \\ 1 & (3k+2) & (2k+9) & (k+10) & | & k+30 \end{bmatrix}$$

à qual aplicaremos eliminação gaussiana obtendo

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 7 & 9 & | & k \\ 0 & k+1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 2k & 1 & | & -8 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 & | & 32 \end{bmatrix}$$

que corresponde ao sistema triangular superior

$$\begin{aligned} x + ky + 7z + 9w &= k \\ (k+1)y + z + w &= 3 \\ 2kz + w &= -8 \\ (k-2)w &= 32 \end{aligned}$$

Para que a última equação tenha solução é preciso que $k \neq 2$. Portanto, se $k = 2$ já temos que o sistema é impossível. Como há $k$ em outras posições da diagonal, a análise precisa continuar. Se $k = 0$, o sistema se torna

$$\begin{aligned} x + +7z + 9w &= 0 \\ y + z + w &= 3 \\ w &= -8 \\ -2w &= 32; \end{aligned}$$

que também é impossível, pois as duas últimas equações são incompatíveis. Finalmente, se $k = -1$, o sistema é

$$\begin{aligned} x + ky + 7z + 9w &= k \\ z + w &= 3 \\ -2z + w &= -8 \\ -3w &= 32 \end{aligned}$$

que também é impossível. Portanto, o sistema dado originalmente é

**determinado:** se $k \neq -1, 0, 2$;
**impossível:** se $k = -1$ ou $k = 2$ ou $k = 0$;
**indeterminado:** nunca.

3. A matriz da rotação é

$$\rho = \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & \operatorname{sen}(\pi/6) \\ -\operatorname{sen}(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}.$$

Note o posicionamento do sinal, porque se trata de uma rotação *horária*. O vetor normal ao espelho em torno do qual se dá a reflexão é

$$(5, 12) - (0, 13) = (5, -1)$$

que normalizado nos dá

$$u = \frac{1}{26}(5, -1).$$

Portanto, a matriz da reflexão é

$$R = I - 2uu^t = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -12 & 5 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}.$$

Logo a matriz $S$ é igual a

$$A = \rho \cdot R = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} -12\sqrt{3}+5 & 5\sqrt{3}+12 \\ 5\sqrt{3}+12 & 12\sqrt{3}-5 \end{bmatrix},$$

donde a imagem de $(1,1)$ por $S$ é igual a

$$S \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} -7\sqrt{3}+17 \\ 17\sqrt{3}+7 \end{bmatrix},$$

4. $A^{-1} = -A$ equivale a $A^2 = -I$. Como o determinante de um produto é igual ao produto de determinante, temos que

$$\det(A^2) = \det(A)^2.$$

Se $A$ tiver tamanho $n \times n$ isto implica que

$$\det(A)^2 = (-1)^n;$$

de modo que se $n$ for ímpar $\det(A)^2 = -1$ implica que uma tal matriz não existe. No caso em que $n = 2$, podemos escrever

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

cujo quadrado é

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2+bc & bd+ab \\ cd+ac & d^2+bc \end{bmatrix}.$$

Igualando esta matriz a $-I$, obtemos o sistema

$$\begin{aligned} a^2 + bc &= -1 \\ bd + ab &= 0 \\ cd + ac &= 0 \\ d^2 + bc &= -1. \end{aligned}$$

Subtraindo a primeira da última, concluímos que $a^2 = d^2$, donde $a = d$ ou $a = -d$. No caso em $a = d$, o sistema nos dá $ac = 0$ e $ab = 0$. Tomando $a = 0$, temos $bc = -1$, o que nos permite escolher $b = 1$ e $c = -1$. Destas escolhas resulta

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

cujo quadrado é mesmo igual a $-I$. Quando $n = 2k$ podemos tomar a matriz em blocos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & E \\ 0 & \cdots & 0 & E & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

cujo quadrado é $-I$.

# Terceira Prova–2011/1

1. Considere o plano $E$ de equação $x - y + 2z = 0$. Seja $R$ a matriz na base canônica da reflexão cujo espelho é $E$ e $S$ a matriz obtida trocando-se as duas primeiras linhas de $R$ entre si.
   (a) Determine $R$.
   (b) Explique porque $S$ é uma rotação e determine a matriz de mudança de base $M$ e o ângulo de rotação $\theta$ tal que $MSM^{-1}$ é da

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Considere o operador linear do $\mathbb{R}^4$ cuja matriz na base canônica é

$$(T)_\epsilon = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & k+1 & 1 & 0 \\ 3 & k+3 & k & 4 \\ 1 & k+1 & k & k+2 \end{bmatrix}$$

   (a) Para que valores de $k$ a transformação $T$ é injetiva.
   (b) Para que valores de $k$ a transformação $T$ é inversível.

3. Considere o operador $S$ do $\mathbb{R}^4$ definido por

$$S(x, y, z, w) = (x + w, 3x + 4y + 3w, 5x + 7y + 2z + 4w, 2w).$$

   (a) Calcule os autovalores de $S$.
   (b) Calcule os autoespaços de $S$.
   (c) $S$ é diagonalizável? Justifique cuidadosamente sua resposta.

4. Analise cada cada uma das afirmações abaixo e determine se são verdadeiras ou falsas, justificando cuidadosamente suas respostas.
   (a) Existe uma transformação linear do $\mathbb{R}^3$ que leva o plano $x + y + z = 0$ no plano $x - y - z = 0$ e a reta gerada por $(1, -1, 0)$ nela mesma.
   (b) Se $A$ é uma matriz diagonalizável $n \times n$, então $A^3$ também é diagonalizável.

Resolução

1. O plano $E$ tem como vetor diretor unitário

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, -1, 2]^t$$

de modo que a reflexão será

$$R = I - 2uu^t = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Trocando-se as duas primeiras linhas obtemos a matriz

$$S = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

que tem que ser uma rotação porque $S$ é ortogonal e tem determine um. Para saber isto não preciso fazer nenhuma conta. Basta lembrar que toda reflexão é ortogonal e tem determinante $-1$. Ao trocar as linhas, a matriz continua sendo ortogonal, porque a mudança de posições dos vetores não altera o fato das linhas formarem uma base ortonormal quando consideradas como vetores. Por outro lado, a troca de linhas muda o sinal do determinante que, de $-1$, passou a valer 1.

Para calcular o eixo, achamos o autovetor de um em $S$ resolvendo o sistema $Sv = v$, cuja matriz é

$$S - I = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Aplicando eliminação gaussiana a esta matriz, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que corresponde ao sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ w &= 0 \end{aligned}$$

cuja solução é a reta de vetor diretor $u = (1, 1, 0)$. O vetor $v = (0, 0, 1)$ é perpendicular a $u$ e

$$Sv = \frac{1}{3}[2, -2, 1]^t$$

de modo que se $\theta$ for o ângulo de rotação, teremos

$$\cos\theta = \langle Sv, v\rangle = \frac{1}{3}$$

e $\theta = \arccos(1/3)$. Para determinar a base $B$ na qual a matriz desta rotação tem a forma desejada, basta calcular uma base ortonormal do plano ortogonal ao eixo; por exemplo,

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), (0, 0, 1)\right\}.$$

Assim,

$$B = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), (0, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)\right\}.$$

e a matriz $M$ é

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Aplicando eliminação gaussiana,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & k+1 & 1 & 0 \\ 3 & k+3 & k & 4 \\ 1 & k+1 & k & k+2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & -1 \\ 0 & 0 & k-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{bmatrix}$$

que corresponderá a um sistema indeterminado quando $k = -1, 1, 0$. Como o núcleo corresponde às soluções do sistema homogêneo $Tv = 0$, temos que o núcleo é não nulo quando $k = -1, 1, 0$. Mas a transformação é injetiva se, e somente se, o núcleo é nulo. Logo $T$ é injetiva se $k \neq -1, 1, 0$. Como domínio e contradomínio têm a mesma dimensão, $T$ é sobrejetiva se, e somente se, for injetiva. Como bijetiva é o mesmo que sobrejetiva e injetiva, podemos concluir que $T$ é bijetiva, e portanto, inversível quando $k = -1, 1, 0$.

3. Se

$$A = (S)_\epsilon \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

então calculamos $\det(A - tI)$ expandindo o determinante pela última linha, depois pela última coluna de uma matriz $3 \times 3$ e finalmente calculando o determinante da matriz $2 \times 2$ que resulta disto, obtendo o polinômio característico $(2-t)^2(1-t)(4-t)$. Portanto, os autovalores de $S$ são 2, 1 e 4. Para calcular o autoespaço de 2, aplicamos eliminação à matriz

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 23 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que corresponde ao sistema

$$\begin{aligned} x - 23w &= 0 \\ y + 15w &= 0 \\ w &= 0 \end{aligned}$$

cujo conjunto solução é gerado pelos vetores

$$(0, 0, 1, 0).$$

Portanto, o autoespaço de 2 é

$$\langle (0, 0, 1, 0) \rangle$$

Procedendo de maneira semelhante para os outros dois autovalores, verificamos que o autoespaço de 1 é gerado por $(-1, 1, -2, 0)$ e o autoespaço de 4 por $(0, 2, 7, 0)$. Como só temos três autovetores independentes no $\mathbb{R}^4$, não há como formar uma base de autovetores de $S$. Logo $S$ não pode ser diagonalizável.

4. (a) é falso porque a reta esta no plano de partida, mas não no da chegada. Mas se um plano for levado no outro, tudo o que está sobre o primeiro tem que ser levado no segundo. Já (b) é verdadeira porque se $A$ for diagonalizável, então existe uma matriz de mudança de base $M$ e uma matriz diagonal $D$ tal que

$$D = MAM^{-1}.$$

Mas, elevando esta fórmula ao cubo, obtemos

$$D^3 = (MAM^{-1})^3 = MAM^{-1} \cdot MAM^{-1} \cdot MAM^{-1} = MA^3M^{-1},$$

provando, assim, que $A^3$ também é diagonalizável.

## Primeira Prova–2013/2

**1:** Em computação quântica a matriz

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

descreve a chamada *porta de Hadamard*.

(a) Mostre que $H$ descreve uma reflexão do plano.

(b) Calcule o espelho desta reflexão.

**2:** Considere a cônica cuja equação é

$$x^2 - 10xy + y^2 = 2.$$

(a) Determine a forma canônica e identifique esta cônica.

(b) Determine a matriz da rotação que converte esta cônica à sua forma canônica e o respectivo ângulo de rotação.

**3:** Considere o sistema linear de equações

$$\begin{aligned} x + y + kz &= 1 \\ x + ky + z &= 1 \\ kx + y + z &= 1. \end{aligned}$$

(a) Determine os valores de $k$ para os quais este sistema é determinado, aqueles para os quais é indeterminado e aqueles para os quais é impossível.

(b) Determine as soluções do sistema (em função de $k$) para aqueles valores de $k$ para os quais o sistema é determinado.

**Oferta especial do dia:** É claro que se $\rho_1$ e $\rho_2$ são matrizes de rotações do plano, então $\rho_1\rho_2$ também é a matriz de uma rotação. Suponha, agora, que $R_1$ e $R_2$ são matrizes que correspondem a reflexões do plano: a que tipo de transformação linear corresponde a matriz $R_1R_2$?

## Solução

1. Para determinar que $H$ representa uma reflexão basta mostrar que existe uma reta $r$ cujos vetores ficam inalterados por $H$ (que faz o papel do espelho) e que todo vetor ortogonal a esta reta é levado no seu oposto. Para descobrir a reta $r$ basta resolver a equação matricial $HX = X$, em que $X$ é uma matriz de variáveis de tamanho $2 \times 1$. Tomando $X = [x, y]^t$ a equação matricial será

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

que corresponde ao sistema linear

$$(\sqrt{2} - 1)x - y = 0$$
$$x - (\sqrt{2} + 1)y = 0.$$

Observe que a segunda equação pode ser obtida multiplicando-se a primeira por $(\sqrt{2}+1)$, de modo que as duas equações são independentes. Mas, da primeira equação, temos que

$$y = (\sqrt{2} - 1)x,$$

de modo que a reta desejada tem $[1, \sqrt{2} - 1]^t$ como vetor diretor. Portanto, um vetor normal à esta reta é $v = [1 - \sqrt{2}, 1]^t$. Mas,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 - \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

de modo que $Hv = -v$. Verificamos, assim, que $H$ é realmente uma reflexão. Outra maneira de proceder para identificar uma reflexão é usar que uma matriz descreve uma reflexão se, e somente se, é ortogonal e tem determinante igual a 1.

Uma terceira maneira é supor que $u = [a, b]^t$ é um vetor unitário e calcular a matriz da reflexão cujo espelho é $u$. Como $n = [-b, a]^t$ é unitário e ortogonal a $u$, a reflexão terá por matriz

$$R = I - 2nn^t = \begin{bmatrix} -2b^2 + 1 & 2ab \\ 2ab & -2a^2 + 1. \end{bmatrix} \tag{1}$$

Para que esta matriz seja igual a $H$, devemos ter que

$$\begin{aligned} -2b^2+1 &= 1/\sqrt{2} \\ ab &= 1/2\sqrt{2} \\ -2a^2+1 &= -1/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Da primeira e da terceira equações obtemos

$$b = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \text{e} \quad a = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Como

$$\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2^2-\sqrt{2}^2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

devemos tomar $a$ e $b$ como tendo o mesmo sinal. Logo, o espelho terá como vetor diretor

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{bmatrix}.$$

Note que não basta saber que $\det(R) = 1$, nem que $R$ é da forma dada pela equação (1) para podermos concluir que $R$ é uma reflexão. Em ambos os casos precisamos saber também que $R$ é ortogonal.

2. A equação matricial correspondente à cônica dada é $X^tAX = 2$, em que

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de $A$ é

$$p(t) = \det(A - tI) = \det\begin{bmatrix} 1-t & -5 \\ -5 & 1-t \end{bmatrix} = (1-t)^2 - 25,$$

donde concluímos que $1 - t = \pm 5$. Portanto, os autovalores de $A$ são $-4$ e $6$. Com isto já podemos responder a letra (a), porque os autovalores acima correspondem à cônica

$$6x_1^2 - 4y_1^2 = 2,$$

cuja forma canônica é

$$\frac{x_1^2}{1/3} - \frac{y_1^2}{1/2} = 1.$$

Temos, portanto, que a cônica é uma hipérbole.

Para poder determinar a rotação e responder a letra (b), calculamos o autovetor associado ao autovalor 6. Para isto, precisamos resolver a equação matricial

$$\begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que corresponde ao sistema $5x + 5y = 0$, já que as duas equações são iguais. Temos, assim, um sistema indeterminado cujas soluções são da forma $[x, -x]^t$. Portanto, o vetor unitário

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

é autovetor associado a 6. Logo o autovetor associado a $-4$ terá que ser ortogonal a $u$, de modo que podemos tomá-lo como sendo

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Logo, a rotação desejada terá por matriz

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e o ângulo de rotação $\theta$ terá tangente igual a $-1$, de modo que $\theta = -\pi/4$.

Como

$$6x_1^2 - 4y_1^2 = [x_1, y_1] \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

temos que, ao expressar a equação canônica da hipérbole na forma $6x_1^2 - 4y_1^2 = 2$ estamos supondo, implicitamente, que a primeira coluna de $Q$ é um autovetor de 6 e a segunda é um autovetor de $-4$. Como $[1,-1]^t$ é autovetor de 6, então a matriz correta para $Q$ é

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e não} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. O sistema dado tem como matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & k & | & 1 \\ 1 & k & 1 & | & 1 \\ k & 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando eliminação gaussiana

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & k & | & 1 \\ 1 & k & 1 & | & 1 \\ k & 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & | & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & | & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & | & 1-k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & | & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & | & 0 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & | & 1-k \end{bmatrix}$$

que corresponde ao sistema triangular

$$\begin{aligned} x + y + kz &= 1 \\ (k-1)y + (1-k)z &= 0 \\ (2-k-k^2)z &= 1-k. \end{aligned}$$

Para saber quando o sistema é indeterminado e quando é impossível precisamos descobrir para quais valores de $k$ o coeficiente de $z$ na última equação se anula. Resolvendo $2-k-k^2=0$ descobrimos que isto ocorre quando $k=1$ ou $k=-2$. Portanto, quando $k=1$ a última equação se torna $0z=0$ e temos um sistema indeterminado, ao passo que, quando $k=2$, a última equação se torna $0z=3$ e o sistema é impossível. Note que, quando $k=1$ a segunda equação também se anula! O sistema será determinado quando $k \neq -2, 1$. Resumindo, o sistema é

**Indeterminado:** quando $k=1$;
**Impossível:** quando $k=-2$;
**Determinado:** quando $k \neq -2, 1$.

Supondo que $k \neq -2, 1$, podemos resolver o sistema triangular superior acima, obtendo

$$x = y = z = \frac{1}{k+2}.$$

**Oferta do dia:** De acordo com o exercício 33 das notas de aula, se $M$ é uma matriz que satisfaz $MM^t = I$ então, das duas uma, ou o determinante de $M$ é 1 e $M$ é uma rotação, ou o determinante de $M$ é $-1$ e $M$ é uma reflexão. Portanto, se $R_1$ e $R_2$ correspondem a reflexões, então:

$$R_1 R_1^t = R_2 R_2^t = I \quad \text{e} \quad \det(R_1) = \det(R_2) = -1.$$

Contudo,

$$(R_1 R_2)(R_1 R_2)^t = (R_1 R_2)(R_2^t R_1^t) = R_1(R_2 R_2^t) R_1^t = R_1 R_1^t = I,$$

ao passo que

$$\det(R_1 R_2) = \det(R_1)\det(R_2) = (-1)^2 = 1,$$

de modo que $R_1 R_2$ será uma rotação.

Como no caso da reflexão, não basta saber que $Q$ tem determinante 1 para podermos concluir que corresponde a uma rotação, precisamos saber também que $Q$ é ortogonal. Por exemplo, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

tem determinante igual a 1, mas não é uma rotação porque, por exemplo,

$$Ae_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

mas $\|e_1\| = 1$, ao passo que $\|Ae_1\| = \sqrt{13}$; no entanto, uma rotação não altera o comprimento de um vetor.

**4:** Seja $R$ a transformação linear do $\mathbb{R}^4$ cuja matriz é

$$R = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -4 & -2 \\ -4 & -4 & -1 & -4 \\ -2 & -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que $R$ descreve uma reflexão do $\mathbb{R}^4$.
(b) Determine o espelho desta reflexão.

**5:** Quais dos conjuntos abaixo são subespaços do $\mathbb{R}^4$? Justifique cuidadosamente suas respostas.
(a) $\{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = 0\}$;
(b) $\{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 - y^2 = 0\}$;
(c) $\{v \in \mathbb{R}^4 \mid v + ku_0 = 0 \text{ para algum } k \in \mathbb{R}^4\}$;
(d) $\{v \in \mathbb{R}^4 \mid \langle v|u_0\rangle = 3\}$;
em que $u_0 = [1, 1, -2, -3]^t$.

**6:** Considere os seguintes subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$:

$W_1 = \{[x, y, z, w]^t \mid x - y + z = x + y - z - w = 5x + y - z - 3w = 0\}$;

$W_2 = \langle [1, 2, 1, 1]^t, [1, 0, 1, 2]^t, [1, 3, 3, 2]^t, [4, 2, 4, 7]^t, [8, 17, 18, 15]^t \rangle$.

(a) Calcule uma base e a dimensão de $W_2$.
(b) Calcule uma base e a dimensão de $W_1 \cap W_2$.

**Oferta especial do dia:** Mostre que o conjunto das matrizes $A$ de tamanho $4 \times 4$ que satisfazem $A^t = -A$ é um subespaço do espaço de todas as matrizes de tamanho $4 \times 4$ e ache uma base para este subespaço.

## Solução

4. Uma reflexão tem que deixar fixos todos os vetores de um hiperplano (o espelho) e tem que inverter a normal ao hiperplano. Para determinar quais são os vetores fixados por $R$ resolvemos o sistema $Rv = v$, em que $v \in \mathbb{R}^4$ é um vetor a ser determinado. Mas $Rv = v$ equivale ao sistema homogêneo $(R - I)v = 0$ em que $I$ é a matriz identidade $4 \times 4$. Assim,

$$R - I = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & -2 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -4 & -2 \\ -4 & -4 & -8 & -4 \\ -2 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Como todas as linhas desta matriz são múltiplas umas das outras, o conjunto dos vetores fixos por $R$ corresponde ao hiperplano de equação $x+y+2z+w = 0$. Resta-nos verificar se os vetores normais a este hiperplano, que são múltiplos de $n = [1, 1, 2, 1]^t$, são levados em seus simétricos. Mas

$$Rn = \frac{1}{7}[-7, -7, -14, -7]^t = -n,$$

confirmando que $R$ é uma reflexão cujo espelho é o hiperplano de equação $x + y + 2z + w = 0$.

Não é verdade que uma matriz ortogonal e de determinante igual a $-1$ define uma reflexão em espaços de dimensão maior que dois. Por exemplo, a matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

é ortogonal, simétrica e tem determinante $-1$, mas não descreve uma reflexão porque, para isto, teria que haver um espelho, que é um hiperplano cujos vetores não são alterados pela reflexão. Acontece que a matriz acima leva cada vetor do $\mathbb{R}^3$ em seu simétrico.

Uma solução diferente da que eu dei acima, e que apareceu nas provas, consiste em escolher um vetor qualquer, digamos $e_1 = [1, 0, 0, 0]^t$ e calcular sua reflexão. O vetor normal ao hiperplano será igual a

$$Re_1 - e_1 = \frac{1}{7}[5, -2, -4, -2]^t - [1, 0, 0, 0]^t = [-2, -2, -4, -2]^t,$$

do qual obtemos $n$ por normalização.

5. Vamos considerar cada conjunto separadamente.

(a) $x^2 + y^2 = 0$ tem uma única solução real, que é $x = y = 0$. Portanto,

$$\{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = 0\} = \{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \mid x = y = 0\}$$

que é subespaço, pois todo conjunto solução de sistema homogêneo é um subespaço.

(b) Fatorando, temos que

$$0 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y).$$

Como esta igualdade só pode ser verdadeira se $x - y = 0$ ou $x + y = 0$, temos que

$$\{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 - y^2 = 0\}$$

é a união de

$$\{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0\}$$

com

$$\{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0\}.$$

Em outras palavras, o conjunto dado em (b) é a união de duas retas que se cruzam na origem. Contudo, embora os vetores $[1, 1]^t$ e $[1, -1]^t$ pertençam a esta união,

$$[1, 1]^t + [1, -1]^t = [2, 0]^t$$

não partence, pois $2^2 - 0^2 = 4 \neq 0$.

6. (a) Para determinar uma base e a dimensão de

$$W_2 = \langle [1, 2, 1, 1]^t, [1, 0, 1, 2]^t, [1, 3, 3, 2]^t, [4, 2, 4, 7]^t, [8, 17, 18, 15]^t \rangle,$$

aplicamos eliminação gaussiana à matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 7 \\ 8 & 17 & 18 & 15 \end{bmatrix}$$

cujas linhas são os geradores de $W_2$, obtendo a forma escada

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\{[1,2,1,1]^t, [0,1,2,1]^t, [0,0,8,6]^t\}$$

é uma base de $W_2$ e, portanto, $\dim(W_2) = 3$.

(b) Precisamos, primeiramente, determinar um sistema linear cujo conjunto solução é $W_1$. Supondo que $ax + by + cz + dw = 0$ é uma equação deste sistema, devemos ter que

$$\begin{aligned} a + 2b + c + d &= 0 \\ b + 2c + d &= 0 \\ 8c + 6d &= 0 \end{aligned}$$

pois os elementos da base de $W_2$ tem que anular todas as equações do sistema desejado. Mas este sistema já está em forma triangular, de modo que podemos resolvê-lo por substituição reversa, obtendo

$$c = -\frac{3}{4}d, \quad b = \frac{1}{2}d \quad \text{e} \quad a = -\frac{5}{4}d$$

em que $d$ funciona como parâmetro. Assim,

$$0 = ax + by + cz + dw = \frac{d}{4}(-5x + 2y - 3z + 4w);$$

de modo que $W_2$ é o conjunto solução de $-5x + 2y - 3z + 4w = 0$. Mas, $W_1 \cap W_2$ é o conjunto solução do sistema obtido reunindo as equações que definem $W_1$ àquelas que definem $W_2$, que é

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ x + y - z - w &= 0 \\ 5x + y - z - 3w &= 0 \\ -5x + 2y - 3z + 4w &= 0. \end{aligned}$$

Aplicando eliminação gaussiana a este sistema, obtemos a forma escada

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5, \end{bmatrix}$$

que corresponde ao sistema triangular

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 0 + y - 3w &= 0 \\ 2z - 5w &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema por substituição reversa, obtemos

$$z = \frac{5}{2}w, \quad y = 3w \quad \text{e} \quad x = \frac{1}{2}w,$$

de modo que todo vetor de $W_1 \cap W_2$ é da forma

$$\frac{z}{2}[1, 6, 5, 2]^t.$$

Portanto,

$$\{[1, 6, 5, 2]^t\}$$

é uma base de $W_1 \cap W_2$, que é um subespaço de dimensão um.

**Oferta.** Para começar, devemos mostrar que

$$U = \{A \in \mathbb{R}^{4\times 4} \mid A^t = -A\}$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^{4\times 4}$, em que $\mathbb{R}^{n\times n}$ denota o conjunto de todas as matrizes de tamanho $n \times n$. Mas, a matriz nula 0 pertence a $U$, já que $0^t = 0 = -0$. Por outro lado,

$$(A_1 + A_2)^t = A_1^t + A_2^t.$$

Mas se $A_1, A_2 \in U$, então

$$A_1^t - A_1 \quad \text{e} \quad A_2^t - A_2,$$

donde

$$(A_1 + A_2)^t = A_1^t + A_2^t = -A_1 - A_2 = -(A_1 + A_2),$$

que nos permite concluir que $A_1 + A_2 \in U$. Além disso, se $A_1 \in U$,

$$(\lambda A_1)^t = \lambda A_1^t = \lambda(-A_1) = -(\lambda A_1)$$

de forma que $\lambda A_1 \in U$. Mostramos, assim, que $U$ é subespaço vetorial do espaço das matrizes $4 \times 4$. Para calcular uma base, começamos por observar que $A^t = -A$ implica que a diagonal de $A$ é nula e que todas as posições acima da diagonal são iguais a $-1$ vezes as posições simétricas relativamente à diagonal. Isto é,

$$a_{ii} = 0 \quad \text{e} \quad a_{ij} = -a_{ji}$$

para $1 \leq i < j \leq 4$. Denotando por $E_{ij}$ as matrizes que têm zeros em todas as posições, exceto na posição $ij$, que é igual a um, podemos escrever

$$A = a_{12}(E_{12} - E_{21}) + a_{13}(E_{13} - E_{31}) + a_{14}(E_{14} - E_{41}) + \\ a_{23}(E_{23} - E_{32}) + a_{24}(E_{24} - E_{42}) + a_{34}(E_{34} - E_{43}).$$

Por sorte o conjunto

$$B = \{E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, E_{14} - E_{41}, E_{23} - E_{32}, E_{24} - E_{42}, E_{34} - E_{43}\}$$

é uma base de $U$. Como já sabemos que todo vetor de $U$ é combinação linear destes vetores, basta mostrar que são linearmente independentes. Mas,

$$\alpha(E_{12} - E_{21}) + \beta(E_{13} - E_{31}) + \gamma(E_{14} - E_{41}) + \\ \delta(E_{23} - E_{32}) + \eta(E_{24} - E_{42}) + \theta(E_{34} - E_{43}) = \\ \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ -\alpha & 0 & \delta & \eta \\ -\beta & -\delta & 0 & \theta \\ -\gamma & -\eta & -\theta & 0 \end{bmatrix}$$

que só pode ser igual à matriz nula se

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \eta = \theta = 0,$$

confirmando que o conjunto $B$ é linearmente independente e, portanto, é mesmo uma base de $U$. Como $B$ tem 6 elementos, concluímos que $U$ tem dimensão seis.

DCC-UFRJ–Álgebra Linear algorítmica–Terceira Prova–2013/2

Nome: ____________________________________________

Notas: | | | | |

**Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.**

**7:** Considere a trasformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z, w) = [x + y + 4z + 4w,\ x - y + 2z - 2w,\ x + 3y + 6z + 10w]^t.$$

Determine:

(a) uma base para a imagem de $T$ e as dimensões do núcleo e da imagem de $T$;

(b) a matriz $(T)_{\varepsilon,\beta}$, em que $\varepsilon$ é a base canônica do $\mathbb{R}^4$ e $\beta$ é a base do $\mathbb{R}^3$ formada pelos vetores $v_1 = [1, 1, 1]^t$, $v_2 = [0, 1, 2]^t$ e $v_3 = [0, 0, 1]^t$ nesta ordem.

**8:** Considere os três operadores lineares do $\mathbb{R}^3$ cujas matrizes na base canônica são dadas abaixo:

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & 5 & -4 \\ 2 & 13 & -5 \\ 8 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 11 & 1 & -2 \\ 4 & 11 & -4 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

Sabendo que *somente um destes três operadores é diagonalizável*, determine:

(a) qual das matrizes acima corresponde ao operador diagonalizável;

(b) uma matriz inversível $M$ e uma matriz diagonal $D$ tais que $MDM^{-1} = A$, em que $A$ é a matriz escolhida no item anterior.

Você deve justificar cuidadosamente o porquê da escolha que fez no item (a).

**9:** Considere a rotação do $\mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$Q = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ -4 & -8 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determine o eixo desta rotação e o cosseno e o seno do ângulo de rotação.

**Oferta especial do dia:** Seja $R$ a matrix $4 \times 4$ que descreve a reflexão do $\mathbb{R}^4$ que tem por espelho o hiperplano de equação $x - y + 2z - 7w = 0$. **Sem calcular** $R$, determine seus autovalores e os autoespaços correspondentes. Justifique sua resposta a partir da descrição geométrica de $R$.

## Solução

7. (a) Como

$$\mathrm{Im}(T) = \langle T(e_1), T(e_2), T(e_3), T(e_4)\rangle$$

e

$$T(e_1) = [1, 1, 1]^t$$
$$T(e_2) = [1, -1, 3]^t$$
$$T(e_3) = [4, 2, 6]^t$$
$$T(e_4) = [4, -2, 10]^t$$

obtemos a base da imagem de $T$ calculando a forma escada da matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 4 & -2 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{que é igual a} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a imagem de $T$ tem base

$$\{[1, 1, 1]^t, [0, -2, 2]^t\}$$

e dimensão igual a 2. Logo, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem o núcleo de $T$ tem dimensão igual a $4 - 2 = 2$.

Os erros mais comuns no item (a) foram:

- confundir núcleo com imagem;
- aplicar eliminação à transposta da matriz $B$ acima, o que daria dois vetores do $\mathbb{R}^4$ como geradores da imagem de $T$; note que isto não faz sentido, já que a imagem de $T$ é um subespaço do $\mathbb{R}^3$ e não do $\mathbb{R}^4$.

Para obter a matriz $(T)_{\varepsilon,\beta}$ precisamos determinar as coordenadas dos vetores $T(e_1)$, $T(e_2)$, $T(e_3)$ e $T(e_4)$ na base $\beta$. Mas,

$$\begin{aligned}
T(e_1) &= [1,1,1]^t = v_1 \\
T(e_2) &= [1,-1,3]^t = v_1 - 2v_2 + 6v_3 \\
T(e_3) &= [4,2,6]^t = 4v_1 - 2v_2 + 6v_3 \\
T(e_4) &= [4,-2,10]^t = 4v_1 - 6v_2 + 18v_3
\end{aligned}$$

de modo que

$$(T)_{\varepsilon,\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -6 \\ 4 & -6 & 18 \end{bmatrix}.$$

Outra maneira de fazer é calcular a matriz de mudança de base

$$(id)_{\beta\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e a partir dela calcular

$$(id)_{\varepsilon\beta} = (id)_{\beta\varepsilon}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

de modo que a matriz desejada é

$$(T)_{\epsilon\beta} = (id)_{\epsilon\beta}(T)_{\varepsilon}.$$

Note que nesta questão você *não pode ortonormalizar a base* porque foi pedida a matriz de $T$ relativamente a duas bases já dadas, a canônica $\varepsilon$ e a base $\beta$. Outro erro que várias pessoas cometeram foi o de calcular a base da imagem a partir de $T(e_1)$, $T(e_2)$ e $T(e_3)$ e esquecer que o espaço de partida é $\mathbb{R}^4$, de modo que também é necessário levar em conta $T(e_4)$.

8. O operador diagonalizável é aquele cuja matriz é

$$A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{bmatrix}$$

porque esta matriz é simétrica e todo operador cuja matriz é simétrica (operador autoadjunto) é necessariamente diagonalizável pelo Teorema Espectral.

Muita gente afirmou que para uma matriz ser diagonalizável é preciso que seja simétrica, mas isto é falso. O teorema espectral diz, apenas, que **se** a matriz do operador é simétrica **então** o operador é diagonalizável. Por exemplo, o operador cuja matriz é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

é diagonalizável, mas a matriz **não** é simétrica.

Para calcular o polinômio característico desta matriz usamos a expansão por cofatores de $\det(A - tI)$; ou seja da matriz

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \det\left(\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 17-9t & -2 & -2 \\ -2 & 14-9t & -4 \\ -2 & -4 & 14-9t \end{bmatrix}\right)$$

que é igual a

$$\frac{1}{9^3}\left((17-9t)\begin{bmatrix}14-9t & -4\\ -4 & 14-9t\end{bmatrix} - (-2)\begin{bmatrix}-2 & -4\\ -2 & 14-9t\end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix}-2 & 14-9t\\ -2 & -4\end{bmatrix}\right).$$

Expandindo os determinantes $2\times 2$, obtemos

$$\det(Q-tI) = \frac{1}{9^3}\left[(17-9t)((14-9t)^2-4^2)+2(-2(14-9t)-8)-2(8+2(14-9t)\right].$$

Efetuando as contas, obtemos o polinômio característico

$$p(t) = \det(Q-tI) = -t^3+5t^2-8t+4.$$

cujas raízes são 1 e 2, esta última com multiplicidade 2. Para calcular os autovetores de 1 precisamos resolver o sistema cuja matriz é

$$A-I = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}8 & -2 & -2\\ -2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{bmatrix} \quad \text{que tem como forma escada} \quad \frac{1}{9}\begin{bmatrix}-2 & 5 & -4\\ 0 & 9 & -9\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Portanto, os autovetores de $A$ associados a 1 são as soluções do sistema

$$\begin{aligned}-2x+5y-4z &= 0\\ y-z &= 0\end{aligned}$$

e são todos múltiplos de $[1,2,2]^t$. Por sua vez, os autovetores de $A$ associados a 2 são as soluções do sistema cuja matriz é

$$A-2I = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ -2 & -4 & -4\\ -2 & -4 & -4\end{bmatrix}$$

e cuja forma escada é, claramente, igual a

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

de modo que o sistema se reduz a uma única equação, que é $x+2y+2z=0$. Assim, o autoespaço de $A$ associado a 2 tem base $\{[-2,1,0]^t, [-2,0,1]^t\}$. Como o operador é autoadjunto, podemos diagonalizá-lo usando uma base ortonormal, o que facilita as contas. Para isto precisamos aplicar Gram-Schimdt à base do autoespaço associado a 2. Fazendo isto obtemos

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}[-2,1,0]^t,$$

ao passo que $u_2$ será a normalização do vetor

$$[-2,0,1]^t - \langle [-2,1,0]^t \mid u_1 \rangle u_1 = \frac{1}{5}[-2,-4,5]^t,$$

donde

$$u_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}[-2,-4,5]^t.$$

Tomando

$$u_3 = \frac{1}{3}[1,2,2]^t$$

temos que a matriz do operador na base ortonormal

$$B = \{u_1, u_2, u_3\}$$

é igual a

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ao passo que $M$ é a inversa da matriz

$$(id)_{\beta,\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

que, este caso, coincide com a sua transposta, pois esta é uma matriz de mudança de base entre bases ortonormais, o que faz dela uma matriz ortogonal.

9. O eixo é o autoespaço associado a 1, que é obtido resolvendo o sistema cuja matriz é

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 & 4 \\ -4 & 8 & 8 \\ -4 & -8 & -10 \end{bmatrix}, \quad \text{que tem forma escada} \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o eixo é o conjunto solução do sistema

$$-x - 2y + 2z = z = 0 \quad \text{que equivale a} \quad x + 2y = z = 0,$$

e que é gerado por $[-2, 1, 0]^t$. Para calcular o seno e o cosseno do ângulo de rotação $\theta$ precisamos escolher uma base ortonormal $B = \{u_1, u_2\}$ do **plano ortogonal ao eixo**. Podemos tomar, por exemplo,

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}[1, -2, 0]^t \quad \text{e} \quad u_2 = [0, 0, 1]^t.$$

Neste caso,

$$Qu_1 = \cos(\theta)u_1 + \operatorname{sen}(\theta)u_2.$$

Como a base é ortonormal, as coordenadas de $u_1$ e $u_2$ podem ser calculadas usando o produto interno. Como

$$Qu_1 = \left[-\frac{\sqrt{5}}{45}, -\frac{2\sqrt{5}}{45}, -\frac{4\sqrt{5}}{9}\right]^t,$$

teremos

$$\cos(\theta) = \langle u_1 \,|\, Qu_1 \rangle = -\frac{1}{9}$$
$$\operatorname{sen}(\theta) = \langle u_2 \,|\, Qu_1 \rangle = -\frac{4\sqrt{5}}{9}.$$

Os erros mais comuns nesta questão foram:

- calcular as soluções do sistema cuja matriz é

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7-1 & -4 & 4 \\ -4 & 1-1 & 8 \\ -4 & -8 & -1-1 \end{bmatrix} \quad \text{em vez de} \quad \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7-9 & -4 & 4 \\ -4 & 1-9 & 8 \\ -4 & -8 & -1-9 \end{bmatrix}$$

- calcular o cosseno a partir do vetor ao longo do eixo, em vez de um vetor perpendicular ao eixo;

- esquecer que a fórmula
$$\cos(\theta) = \langle Qu, u \rangle$$
se aplica apenas a um vetor ortogonal ao eixo que é *unitário*, no caso de um vetor $v$ que não é unitário teremos
$$\cos(\theta) = \frac{\langle Qv, v \rangle}{\|v\|^2};$$
- ignorar o sinal do seno e concluir de
$$\text{sen}(\theta)^2 = 1 - \cos(\theta)^2 = 1 - \frac{1}{81} = \frac{80}{81}$$
que
$$\text{sen}(\theta) = \pm\frac{\sqrt{80}}{9} = \pm\frac{4\sqrt{5}}{9}.$$

**Oferta Especial do Dia:** Os vetores do espelho de uma reflexão $R$ não são alterados pela reflexão, ao passo que os vetores da reta ortogonal ao espelho são invertidos. Portanto, toda reflexão tem por autovalores 1 e $-1$ e, no caso da refexão dada o autoespaço de 1 é o hiperplano $x - y + 2z - 7w = 0$, ao passo que o autoespaço de $-1$ é a reta perpendicular ao espelho, que neste caso é $\langle [1, -1, 2, -7]^t \rangle$.

# DCC-UFRJ–Álgebra Linear Algorítmica–2013/2

Nome: ______________________________________________

Notas: | | | | | |

| $1^a$ | $2^a$ | $3^a$ | Final |
|---|---|---|---|

**Leia as instruções atentamente antes de prosseguir:**

- Marque acima a razão pela qual está fazendo esta prova;
- justifique cuidadosamente todas as suas respostas;
- se está fazendo a final porque faltou a prova $n$, então resolva as questões $n.1$, $n.2$ e a questão $k.1$ ou $k.2$, para algum $k \neq n$, à sua escolha;
- se está fazendo esta prova como final, resolva as questões 1.1, 2.1, 3.1 e duas outras à sua escolha.

1.1 Determine os valores de $k$ para os quais o sistema

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 3x + 4y + (k+3)z &= 4 \\ x + 4y + (k^2 + 2k + 1)z &= 2k + 2 \end{aligned}$$

é determinado, indeterminado ou impossível.

1.2 Considere a cônica de equação $8x^2 - 12xy + 3y^2 = 12$.
(a) Determine a forma canônica e identifique esta cônica.
(b) Determine a matriz da rotação que converte esta cônica à sua forma canônica.

2.1 Considere os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^5$:

$$U = \{[x, y, z, u, w] \in \mathbb{R}^5 \,|\, x + y + z - w = x - y + z - u = 0\}$$
$$W = \langle [1, 1, 1, 1, 1]^t, [1, -1, 1, -1, 1]^t, [1, 1, 1, 1, -1]^t, [3, 1, 3, 1, 1] \rangle.$$

(a) Determine uma base e a dimensão de $W$.
(b) Determine uma base e a dimensão de $U \cap W$.

2.2 Seja $R$ a transformação linear do $\mathbb{R}^4$ cuja matriz é

$$R = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -4 & -2 \\ -4 & -4 & -1 & -4 \\ -2 & -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que $R$ descreve uma reflexão do $\mathbb{R}^4$.
(b) Determine o espelho desta reflexão.

3.1 Considere o operador do $\mathbb{R}^4$ cuja matriz na base canônica é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule os autovalores e autovetores de $A$.
(b) Determine, se existir, uma matriz diagonal $D$ e uma matriz inversível $M$ tais que $D = M^{-1}AM$.

3.2 Considere a rotação $R$ cuja matriz na base canônica é

$$\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -9 & 2 & -6 \\ -2 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

(a) Determine o eixo desta rotação.
(b) Determine o seno e o cosseno desta rotação.

## Respostas

1.1 A matriz escalonada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & k & | & 1 \\ 0 & 0 & k^2-k & | & 2k-2 \end{bmatrix}$$

de modo que o sistema é impossível se $k=0$, indeterminado se $k=1$ e determinado se $k \neq 0,1$.

1.2 A forma canônica é $u^2 - 12w^2 = 12$ e a matriz de rotação é

$$\frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

2.1 $W$ tem base $\{[1,1,1,1,1]^t, [0,1,0,1,0]^t, [0,0,0,0,1]^t\}$, dimensão três e é conjunto solução do sistema $x - z = y - u = 0$, ao passo que $U \cap W$ tem base $\{[1,1,1,1,3]^t\}$.

2.2 O espelho é $x + y + 2z + w = 0$.

3.1 Os autovalores são $0, 2, 5$. O autoespaço de 2 tem base $\{[1,0,1,0]^t, [0,1,0,0]^t$, o autoespaço de 0 tem base $\{[1,0,-1,0]^t\}$ e o autoespaço de 5 tem base $\{[3,5,2,5]^t\}$. As matrizes são

$$D = \operatorname{diag}([2,2,5,0]) \quad \text{e} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

3.2 O eixo é $\langle [0,3,1]^t \rangle$ o cosseno é $-9/11$ e o seno é $2\sqrt{10}/11$.

## Primeira Prova–2014/1

1. Determine todos os valores de $a$ e $b$ para os quais a matriz

$$Q = \begin{bmatrix} 1/3 & a \\ a & b \end{bmatrix}$$

é uma reflexão e ache os espelhos de cada uma destas reflexões.

2. Dada a equação

$$2y^2 - 12xy - 7x^2 = 5,$$

identifique a cônica correspondente e determine:
(a) sua forma canônica;
(b) a rotação que converte a equação dada em sua forma canônica.

3. Considere o sistema linear de equações

$$\begin{aligned} kx + 3y + 7z + 5w &= 1 \\ 2kx + (k^2+2)y + 16z + 10w &= k - 6 \\ 2kx + (k^2+2)y + 17z + 11w &= k - 2 \\ (2k^2 - 8)y + 4z + w &= 2k - 14 \end{aligned}$$

Determine os valores de $k$ para os quais este sistema é (a) determinado, (b) indeterminado, (c) impossível. Você deve indicar quais foram as matrizes elementares e flips que usou ao executar o processo de eliminação gaussiana.

## Solução

1. Como as reflexões são transformações ortogonais, devemos ter que as colunas de

$$Q = \begin{bmatrix} 1/3 & a \\ a & b \end{bmatrix}$$

são vetores unitários e ortogonais entre si. Isto nos dá três equações:

$$\begin{aligned} 1/9 + a^2 &= 1 \\ a^2 + b^2 &= 1 \\ a/3 + ab &= 0. \end{aligned}$$

Note que da primeira equação temos que

$$a^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}, \quad \text{donde}, \quad a = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Em particular, como $a \neq 0$, a última das equações acima nos dá

$$b = -\frac{1}{3}.$$

Juntando tudo isto vemos que $Q$ tem que ter a forma

$$Q = \begin{bmatrix} 1/3 & \pm 2\sqrt{2}/3 \\ \pm 2\sqrt{2}/3 & -1/3 \end{bmatrix},$$

de modo que

$$\det(Q) = -\frac{1}{9} - \left(\pm\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -1.$$

Portanto, há duas possibilidades para $Q$:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1/3 & 2\sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/3 & -1/3 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1/3 & -2\sqrt{2}/3 \\ -2\sqrt{2}/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

Há duas maneiras de achar o espelho. Vou usar uma delas para determinar o espelho de $Q_1$ e a outra para o espelho de $Q_2$. O primeiro método consiste em lembrar os vetores do espelho ficam fixos pela reflexão; isto é $Q_1 v = v$ para todos os vetores $v$ que pertencem ao espelho. Reescrevendo o sistema na forma $(Q_1 - I)v = 0$ e tomando $v = [x, y]^t$, temos, no primeiro caso:

$$(Q_1 - I)v = \begin{bmatrix} -2/3 & 2\sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/3 & -4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2x + 2\sqrt{2}y \\ 2\sqrt{2}x - 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Note que a segunda equação deste sistema pode ser obtida multiplicando a primeira por $\sqrt{2}$, de modo que o sistema é indeterminado. Mas, da primeira equação,

$$x = \sqrt{2}y; \quad \text{donde} \quad v = y \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Os vetores unitários na direção desta reta são

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{3}}[-\sqrt{2}, 1]^t.$$

Para aplicar o outro método de achar o espelho a $Q_2$ basta lembrar que se $w$ é um vetor qualquer do plano, então o vetor obtido da soma de $w$ com o seu reflexo sempre pertence ao espelho. Escolhendo $w = e_1$, teremos que

$$e_1 + Q_2 e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 & -2\sqrt{2}/3 \\ -2\sqrt{2}/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 \\ -2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Portanto, os vetores diretores unitários na direção do espelho de $Q_2$ são

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. A matriz associada à forma quadrática $-7x^2 - 12xy + 2y^2$ é

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

e tem como polinômio característico

$$p = \det(A - tI) = t^2 + 5t - 50,$$

cujas raízes são 5 e $-10$. Portanto, a forma canônica da cônica dada é

$$5u^2 - 10v^2 = 5, \quad \text{isto é,} \quad u^2 - 2v^2 = 1.$$

Concluímos que a cônica é uma *hipérbole*. Para determinar a rotação, precisamos resolver o sistema:

$$(A-5I)v = \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12x-6y \\ -6x-3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que o sistema é indeterminado, pois a segunda equação multiplicada por 2 dá a primeira equação; logo, tem como solução todos os múltiplos de

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Um vetor unitário na direção deste vetor é

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

que é ortogonal a

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix};$$

de modo que a rotação desejada é dada pela matriz

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. A matriz aumentada do sistema dado é

$$\left[\begin{array}{ccccc} k & 3 & 7 & 5 & | & 1 \\ 2k & (k^2+2) & 16 & 10 & | & k-6 \\ 2k & (k^2+2) & 17 & 11 & | & k-2 \\ 0 & (2k^2-8) & 4 & 1 & | & 2k-14 \end{array}\right]$$

Multiplicando esta matriz à esquerda por $C_{31}(-2)C_{21}(-2)$, obtemos

$$\begin{bmatrix} k & 3 & 7 & 5 & | & 1 \\ 0 & (k^2-4) & 2 & 0 & | & k-8 \\ 0 & (k^2-4) & 3 & 1 & | & k-4 \\ 0 & (2k^2-8) & 4 & 1 & | & 2k-14 \end{bmatrix};$$

multiplicando esta matriz por $C_{42}(-2)C_{32}(-1)$, chegamos a

$$\begin{bmatrix} k & 3 & 7 & 5 & | & 1 \\ 0 & (k^2-4) & 2 & 0 & | & k-8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}$$

que é uma matriz em forma escada, encerrando, assim, o processo de eliminação. O sistema associado a esta última matriz é

$$\begin{aligned} kx + 3y + 7z + 5w &= 1 \\ (k^2-4)y + 2z &= k-8 \\ z + w &= 4 \\ w &= 2. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema por substituição reversa, obtemos das duas últimas equações que $w = 2$ e $z = 2$. Substituindo nas duas equações anteriores, resta o sistema:

$$(2) \qquad \begin{aligned} kx + 3y + 7z + 5w &= -23 \\ (k^2-4)y &= k-12 \end{aligned}$$

Para poder continuar o processo de substituição reversa, precisamos supor que $k \neq \pm 2$. Fazendo isto, obtemos

$$y = \frac{k-12}{k^2-4}.$$

Finalmente, para podermos obter o valor de $x$ da primeira é preciso supor que $k \neq 0$. Fazendo, isto,

$$x = -\frac{47k^2 + 3k - 224}{k^3 - 4k}.$$

Resta-nos analisar o que acontece quando $k = \pm 2$ e quando $k = 0$. Quando $k = \pm 2$, o sistema (2) se torna

$$\begin{aligned} \pm 2x + 3y + 7z + 5w &= -23 \\ 0 &= \pm 2 - 12, \end{aligned}$$

que é claramente *impossível*. Por outro lado, quando $k = 0$, o sistema (2) se torna

$$\begin{aligned} 3y + 7z + 5w &= -23 \\ -4y &= -12. \end{aligned}$$

Da segunda equação, obtemos $y = 3$. Substituindo este valor para $y$, assim como $z = w = 2$ na primeira equação, obtemos

$$3 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = -23,$$

que é obviamente falso, de modo que o sistema também é impossível quando $k = 0$. Resumindo tudo, temos que

- o sistema nunca é indeterminado;
- o sistema é impossível quando $k = 0$ ou $k = \pm 2$;
- o sistema é determinado quando $k \neq 0, \pm 2$.

Neste último caso, as soluções do sistema são dadas por

$$x = -\frac{47k^2 + 3k - 224}{k^3 - 4k}, \quad y = \frac{k - 12}{k^2 - 4}, \quad z = w = 2.$$

## SEGUNDA PROVA–2014/1

4. Sabe-se que

$$P = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

é a projeção ortogonal do $\mathbb{R}^5$ sobre um hiperplano $H$.
(a) Determine um vetor normal unitário e a equação de $H$.
(b) Determine a matriz da reflexão cujo espelho é $H$.

5. Seja $A$ uma matriz $n \times m$ e considere o conjunto

$$W_A = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v^t A = 0\}.$$

(a) Mostre que $W_A$ é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^n$.
(b) Determine $W_A$ quando $A$ é uma matriz inversível.
Você deve justificar cuidadosamente suas respostas.

6. Considere os subespaços

$$U = \{[x, y, u, v, z]^t \mid x + y + u - z = x - y - 2u + z = 5x + y - u - z = 0\}$$

$$W = \langle [2, 1, 1, 0, 0]^t, [-4, -2, 1, 1, 1]^t, [0, 1, 3, 1, 0]^t, [-6, -3, 0, 1, 1]^t \rangle$$

Determine:
(a) uma base e a dimensão $U \cap W$;
(b) uma base e a dimensão $U^{\perp} + W$.

Cuidado com a ordem das variáveis!

4. Se $P$ é uma projeção ortogonal, então o vetor normal $u$ ao hiperplano $H$ sobre o qual é feita a projeção tem que satisfazer $Pu = 0$. Supondo que $u = [x, y, u, v, z]^t$, vamos resolver o sistema linear

$$P = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ u \\ v \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que equivale a

$$\begin{aligned} 3x - y - v - z &= 0 \\ -x + 3y - v - z &= 0 \\ 4u &= 0 \\ -x - y + 3v - z &= 0 \\ -x - y - v + 3z &= 0. \end{aligned}$$

Aplicando eliminação gaussiana à matriz deste sistema, obtemos a matriz escada

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que corresponde ao sistema linear

$$\begin{aligned} -x + 3y - v - z &= 0 \\ -y + v &= 0 \\ 4u &= 0 \\ -v + z &= 0 \end{aligned}$$

cuja solução, por substituição reversa, é

$$[x, y, u, v, z]^t = z[1, 1, 0, 1, 1]^t.$$

Portanto,

$$u = \frac{1}{2}[1, 1, 0, 1, 1]^t$$

é um vetor unitário normal ao hiperplano $H$, cuja equação é

$$x + y + v + z = 0.$$

A matriz da reflexão cuja espelho é $H$ é

$$I - 2uu^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1, 1, 0, 1, 1]$$

5. Como $(v^t A)^t = A^t v$, podemos reescrever

$$W_A = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v^t A = 0\}.$$

na forma

$$W_A = \{v \in \mathbb{R}^n \mid A^t v = 0\};$$

o que torna $W_A$ no conjunto solução do sistema homogêneo $A^t v = 0$. Como todo conjunto solução de sistema homogêneo é um subespaço do $\mathbb{R}^n$, segue-se que $W_A$ é subespaço do $\mathbb{R}^n$. Por outro lado, se $A$ é inversível, então $v^t A = 0$ implica que

$$(v^t A)A^{-1} = 0 \cdot A^{-1} = 0;$$

de modo que $W_A = \{0\}$ quando $A$ é inversível.

6. Para poder calcular a interseção precisamos de um sistema cujo conjunto solução seja $W$. Vamos começar achando uma base para $W$ porque isto facilitará as contas. Aplicando eliminação gaussiana, verificamos que a forma escada da matriz cujas linhas são os geradores de $W$ é

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de modo que os vetores nas três primeiras linhas da matriz acima constituem uma base de $W$. Suponha, agora, que

$$\alpha x + \beta y + \gamma u + \delta v + \eta z = 0$$

é uma equação do sistema cujo conjunto solução é $W$. Isto implica que cada um dos vetores da base de $W$ satisfaz esta equação, de modo que

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ \beta + 3\gamma + \delta &= 0 \\ 3\gamma + \delta + \eta &= 0 \end{aligned}$$

Como este sistema está em forma triangular, podemos resolvê-lo por substituição reversa, obtendo

$$\alpha = \gamma + \frac{1}{2}\delta, \quad \beta = -3\gamma - \delta, \quad \eta = -3\gamma - \delta;$$

donde

$$\left(\gamma + \frac{1}{2}\delta\right) + (-3\gamma - \delta)y + \gamma u + \delta v + (-3\gamma - \delta)z = 0$$

que equivale a

$$\gamma(x - 3y + u - 3z) + \delta\left(\frac{1}{2}\,x - y + v - z\right) = 0.$$

Portanto, $W$ é solução do sistema

$$x - 3y + u - 3z = x - 2y + 2v - 2z = 0.$$

Logo, $U \cap W$ é o conjunto solução do sistema:

$$x - 3y + u - 3z = x - 2y + 2v - 2z = x + y + u - z = x - y - 2u + z = 5x + y - u - z = 0;$$

cuja matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

tem forma escada

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que corresponde ao sistema triangular superior

$$x - 3y + u - 3z = 2y + z = u - z = 4v - z = 0.$$

Resolvendo este sistema por substituição reversa, obtemos

$$[x, y, u, v, z]^t = v[2, -2, 4, 1, 4]^t.$$

Portanto, $\{[2, -2, 4, 1, 4]^t\}$ é uma base de $U \cap W$ e $\dim(U \cap W) = 1$.

Passando ao item (b), temos que os

$$\begin{aligned} \langle [1, 1, 1, 0, -1]^t \mid [x, y, u, v, z]^t \rangle &= x + y + u - z = 0 \\ \langle [1, -1, -2, 0, 1]^t \mid [x, y, u, v, z]^t \rangle &= x - y - 2u + z = 0 \\ \langle [5, 1, -1, 0, -1]^t \mid [x, y, u, v, z]^t \rangle &= 5x + y - u - z = 0 \end{aligned}$$

de forma que

$$U^\perp = \langle [1, 1, 1, 0, -1]^t, [1, -1, -2, 0, 1]^t, [5, 1, -1, 0, -1]^t \rangle.$$

Para obter geradores para $U^{\perp} + W$ basta juntar os geradores de $U^{\perp}$ aos de $W$. A matriz cujas linhas são estes seis vetores tem forma escada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de modo que $U^{\perp} + W = \mathbb{R}^5$ e $\dim(U^{\perp}) = 5$.