Gabarito

Álgebra Linear: AD1 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2012.2

Tutores: Cristina Lopes e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

a) $proj_v u = \dfrac{uv}{||v||^2}v = \left(\dfrac{(1,0,-1)(2,1,0)}{2^2+1^2+0^2}\right)(2,1,0) = \dfrac{2}{5}(2,1,0) = \left(\dfrac{4}{5},\dfrac{2}{5},0\right).$

b) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Consideremos

$$a(1,0,-1) + b(2,1,0) = (a+2b, b, -a) = (x,y,z)$$

Assim, temos:

$$\begin{cases} a + 2b = x \\ b = y \\ -a = z \end{cases}$$

Por L_3 temos que $a = -z$ e por L_2 temos que $b = y$. Substituindo em L_1, temos que $-z + 2y = x$.

Logo $[u,v] = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 2y - z\right\}$.

$[u,v] = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, (2y-z,y,z) = y(2,1,0) + z(-1,0,1)\right\}$.

Logo uma base para este subespaço é $B = \{(2,1,0), (-1,0,1)\}$.

c)

Tome $v_1 = (2,1,0), v_2 = (-1,0,1)$.

Vamos ortogonalizar esta base usando o método de Gram-Schmidt.

Seja $w_1 = v_1 = (2,1,0)$.

Temos que $w_2 = v_2 - proj_{w1}v_2 = v_2 - \left(\frac{v_2 w_1}{w_1 w_1}\right) w_1$

Logo

$$w_2 = (-1,0,1) - \left(\frac{(-1,0,1)(2,1,0)}{(2,1,0)(2,1,0)}\right)(2,1,0)$$

$$= (-1,0,1) - \left(\frac{-4}{5}, \frac{-2}{5}, 0\right) = \left(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)$$

Assim, temos que a base ortogonal é $\left\{(2,1,0), \left(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)\right\}$.

d) O gráfico esta disponível na última página.

2^a Questão) Solução:

a) Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Assim, considere a igualdade abaixo:

$$\alpha_1(t^2 - 2t + 1) + \alpha_2(t + 2) + \alpha_3(t^2 - 3t - 1) = at^2 + bt + c$$

Somando os coeficientes dos termos semelhantes, temos:

$$(\alpha_1 + \alpha_3)t^2 + (-2\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3)t + (\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3) = at^2 + bt + c$$

Igualando os termos semelhantes dos dois lados da igualdade obtemos o seguinte sistema:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha_1 + \alpha_3 & = & a \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 & = & b \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 & = & c \end{array}\right. \tag{1}$$

Utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss para resolvê-lo. Considere a seguinte matriz aumentada que representa este sistema :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ -2 & 1 & -3 & b \\ 1 & 2 & -1 & c \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & b+2a \\ 0 & 2 & -2 & c-a \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & b+2a \\ 0 & 0 & 0 & c-5a-2b \end{bmatrix}$$

Logo, temos por L_3 que $c = 5a + 2b$. Assim , substituindo c por $5a + 2b$, temos o subespaço de P_2

$$S = [v_1, v_2, v_3] = \left\{at^2 + bt + 5a + 2b\right\}.$$

Assim , colocando a e b em evidência, temos que $S = \{a(t^2 + 5) + b(t + 2)\}$. E os vetores $t^2 + 5$ e $t + 2$ claramente são LI's.

Assim, temos que $B = \{t^2 + 5, t + 2\}$ é base para S, com dimensão 2.

b) Considere a igualdade:

$$\alpha_1(t^2 - 2t + 1) + \alpha_2(t + 2) = at^2 + bt + c$$

Temos o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 & = & a \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 & = & b \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 & = & c \end{cases} \tag{2}$$

Utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss para resolvê-lo. Considere a seguinte matriz aumentada que representa este sistema :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & 1 & b \\ 1 & 2 & c \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2a+b \\ 0 & 2 & c-a \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2a+b \\ 0 & 0 & c-5a-2b \end{bmatrix}$$

Desse modo, por L_3, temos que $c = 5a+2b$. Assim, tomando $\alpha_1 = a$ e $\alpha_2 = 2a+b$ (por L_1 e L_2), P_2 pode ser escrito como combinção linear de $\{v_1, v_2\}$. Como estes vetores são LI's, $B = \{v_1, v_2\} = \{t^2 - 2t + 1, t + 2\}$ é base para P_2.

c) Para mostrar que $p(t) = -2t - 4$ é combinação linear de v_1 e v_2, considere a, b e c escalares reais tais que:

$$a(t^2 - 2t + 1) + b(t + 2) = -2t - 4$$

Somando os coeficientes dos termos semelhantes, temos:

$$at^2 + (b - 2a)t + (a + 2b) = -2t - 4$$

Igualando os termos semelhantes dos dois lados da igualdade obtemos:

$$\begin{aligned} & a = 0 \\ & b - 2a = -2 \implies b = -2 \\ & a + 2b = -4 \implies b = -2 \end{aligned}$$

Logo, $p(t) = -2t - 4$ é combinação linear de v_1 e v_2 para $a = 0$ e $b = -2$, isto é, $0.(t^2 - 2t + 1) - 2(t + 2) = -2t - 4$.

3^a Questão) Solução:

a) Seja $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 / x + w = 0, y - 2z = 0\}, ie, (x, y, z, w) = (x, 2z, z, -x)$.
S é subespaço? (0, 0, 0) pertence à S, basta tomar $x = z = 0$.
E as duas condições abaixo são satisfeitas:

i) Temos que $(x_1, 2z_1, z_1, -x_1) + (x_2, 2z_2, z_2, -x_2) = (x_1 + x_2, 2(z_1 + z_2), z_1 + z_2, -x_1 - x_2) = (x_1 + x_2, 2(z_1 + z_2), z_1 + z_2, -(x_1 + x_2)) \in S$. Para isto, basta tomar $x = x_1 + x_2, z = z_1 + z_2$.

ii) Tomando $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que $\alpha(x_1, 2z_1, z_1, -x_1) = (\alpha x_1, 2\alpha z_1, \alpha z_1, -\alpha x_1) \in S$. Para isto basta tomar $x = \alpha x_1$ e $z = \alpha z_1$.

Logo S é subespaço vetorial do $\mathbb{R}^4$.

Temos também que $(x, y, z, w) = (x, 2z, z, -x) = x(1, 0, 0, -1) + z(0, 2, 1, 0)$.

Logo, os vetores $\{(1, 0, 0, -1), (0, 2, 1, 0)\}$ formam uma base para S (claramente estes vetores são LI).

4^a Questão) Solução:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 9 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2B = 2.\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 4 \\ -6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = A^T - 2B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 9 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -8 & 4 \\ -6 & 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 15 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$C = A.B = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26 & 32 & 11 \\ -8 & 16 & -2 \\ -11 & 20 & -1 \end{bmatrix}$$

c)

$$C = B.A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -13 & -16 \end{bmatrix}$$

OBS: Note que $A.B \neq B.A$.

5^a Questão) Solução:

Considere as incógnitas:

$$
\begin{aligned}
X &= \text{quantidade de kg do produto X} \\
Y &= \text{quantidade de kg do produto Y} \\
Z &= \text{quantidade de kg do produto Z}
\end{aligned}
$$

Para montar o sistema relativo ao problema, vamos somar as quantidades de insumo A dos três produtos X, Y, Z e igualar a quantidade total (em gramas) de insumo A utilizada (linha L_1 do sistema). Faremos o mesmo procedimento para o insumo B (linha L_2 do sistema). Então multiplicaremos o preço de cada kg pelo seu respectivo produto e igualaremos ao valor total que a indústria arrecadou (linha L_3 do sistema). Assim temos:

$$
\begin{cases}
2X + Y + 3Z &= 1900 \\
X + 3Y + 5Z &= 2400 \\
3X + 2Y + 4Z &= 2900
\end{cases}
\tag{3}
$$

Utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss para resolvê-lo. Considere a seguinte matriz aumentada que representa este sistema :

$$
\begin{bmatrix}
2 & 1 & 3 & 1900 \\
1 & 3 & 5 & 2400 \\
3 & 2 & 4 & 2900
\end{bmatrix}
$$

Trocando L_1 por L_2 temos:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 3 & 5 & 2400 \\
2 & 1 & 3 & 1900 \\
3 & 2 & 4 & 2900
\end{bmatrix}
$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ temos

$$
\begin{bmatrix}
1 & 3 & 5 & 2400 \\
0 & -5 & -7 & -2900 \\
0 & -7 & -11 & -4300
\end{bmatrix}.
$$

Agora, fazendo $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & -5 & -7 & -2900 \\ 0 & 0 & -6 & -1200 \end{bmatrix}.$$

Assim, temos o seguinte sistema após a eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} X + 3Y + 5Z &= 2400 \\ -5Y - 7Z &= -2900 \\ -6Z &= -1200 \end{cases} \tag{4}$$

Por L_3 neste sistema, temos que $Z = 200$.

Substituindo Z em L_2 temos que $-5Y - 7 \times 200 = -2900 \Longrightarrow Y = 300$.

Agora, substituindo Y e Z em L_1, temos que $X = 500$.

Logo, foram vendidos 500 kg do produto X, 300 kg do produto Y e 200 kg do produto Z.

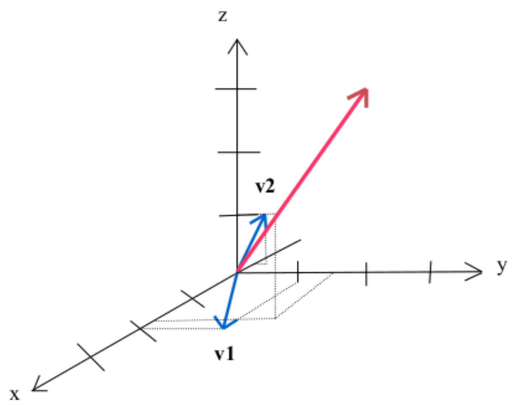

Figura 1: Esboco