Gabarito

Álgebra Linear: AD1 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2008

Tutores: Cristina Lopes e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

Sejam as bactérias divididas por espécie da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \text{quantidade de bactérias da espécie I} \\
x_2 &= \text{quantidade de bactérias da espécie II} \\
x_3 &= \text{quantidade de bactérias da espécie III}
\end{aligned}
$$

Considere o sistema

$$
\begin{cases}
2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 2300 \\
x_1 + 2x_2 &= 800 \\
x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1500
\end{cases}
\tag{1}
$$

Utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss para resolvê-lo. Considere a seguinte matriz aumentada que representa este sistema :

$$
\begin{bmatrix}
2 & 2 & 4 & 2300 \\
1 & 2 & 0 & 800 \\
1 & 3 & 1 & 1500
\end{bmatrix}
$$

Fazendo $L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$ e $L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1$ temos

$$
\begin{bmatrix}
2 & 2 & 4 & 2300 \\
0 & 2 & -4 & -700 \\
0 & 4 & -2 & 700
\end{bmatrix}.
$$

Agora, fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 2300 \\ 0 & 2 & -4 & -700 \\ 0 & 0 & 6 & 2100 \end{bmatrix}.$$

Assim, temos o seguinte sistema após a eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = & 2300 \\ 2x_2 - 4x_3 & = & -700 \\ 6x_3 & = & 2100 \end{cases} \tag{2}$$

Por L_3 neste sistema, temos que $x_3 = \frac{2100}{6} = 350$.

Substituindo x_3 em L_2 temos que $2x_2 - 4 \times 350 = -700 \Longrightarrow x_2 = 350$.

Agora, substituindo x_2 e x_3 em L_1, temos que $x_1 = 100$.

Logo, serão necessárias 100 bactérias da espécie I, 350 bactérias da espécie II e 350 bactérias da espécie III para consumir todo o alimento do tubo de ensaio.

2^a Questão) Solução:

a) $proj_v u = \dfrac{uv}{||v||^2} v = \dfrac{(1,-2,3)(2,5,4)}{2^2+5^2+4^2}(2,5,4) = \dfrac{4}{45}(2,5,4) = \left(\dfrac{8}{45}, \dfrac{20}{45}, \dfrac{16}{45}\right)$.

b) $d(u,v) = \sqrt{(2-1)^2 + (5-(-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{1+49+1} = \sqrt{51}$.

c) Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Consideremos

$$a(1,-2,3) + b(2,5,4) = (a+2b, -2a+5b, 3a+4b) = (x,y,z)$$

Assim, temos:

$$\begin{cases} a + 2b = x \\ -2a + 5b = y \\ 3a + 4b = z \end{cases}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ temos

$$\begin{cases} a + 2b = x \\ 9b = y + 2x \\ -2b = z - 3x \end{cases}$$

Por L_3 temos que $b = \dfrac{3x - z}{2}$ e por L_2 temos que $b = \dfrac{y + 2x}{9}$. Igualando estes dois valores de b temos que:

$$\frac{3x - z}{2} = \frac{y + 2x}{9} \Longrightarrow 2y + 4x = 27x - 9z \Longrightarrow x = \frac{2y + 9z}{23}$$

Logo $[u, v] = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = \dfrac{2y + 9z}{23}\right\}$.

d) $[u, v] = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \left(\dfrac{2y + 9z}{23}, y, z\right)\right\}$

Logo uma base para este subespaço é $B = \left\{\left(\dfrac{2}{23}, 1, 0\right), \left(\dfrac{9}{23}, 0, 1\right)\right\}$.

Tome $v_1 = \left(\dfrac{2}{23}, 1, 0\right), v_2 = \left(\dfrac{9}{23}, 0, 1\right)$.

Vamos ortogonalizar esta base usando o método de Gram-Schmidt.

Seja $w_1 = v_1 = \left(\dfrac{2}{23}, 1, 0\right)$.

Logo

$$w_2 = \left(\frac{9}{23}, 0, 1\right) - \left(\frac{(\frac{9}{23}, 0, 1)(\frac{2}{23}, 1, 0)}{(\frac{2}{23}, 1, 0)(\frac{2}{23}, 1, 0)}\right)\left(\frac{2}{23}, 1, 0\right)$$

$$= \left(\frac{9}{23}, 0, 1\right) - \left(\frac{\frac{18}{529}}{\frac{533}{529}}\left(\frac{2}{23}, 1, 0\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{9}{23}, 0, 1\right) - \left(\frac{36}{12259}, \frac{18}{533}, 0\right) = \left(\frac{4761}{12259}, \frac{-18}{533}, 1\right)$$

Assim, temos que a base ortogonal é $\left\{\left(\dfrac{2}{23}, 1, 0\right), \left(\dfrac{4761}{12259}, \dfrac{-18}{533}, 1\right)\right\}$.

3^a Questão) Solução:

a) Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\}$

S é subespaço. (0, 0, 0) pertence à S, basta tomar $x = 0$.

E as duas condições abaixo são satisfeitas:

i) Se (a, b, c) e (d, e, f) são elementos de S $\Rightarrow a = b = c$, e além disso, $d = e = f \Rightarrow (a, b, c) + (d, e, f) = (a, a, a) + (d, d, d) = (a + d, a + d, a + d) \Rightarrow (a + d, a + d, a + d)$ é um elemento de S.

ii) Se (a, b, c) é um elemento de S e α um escalar, $a = b = c \Rightarrow \alpha(a, b, c) = \alpha(a, a, a) \Rightarrow (\alpha a, \alpha a, \alpha a) \Rightarrow (\alpha a, \alpha a, \alpha a)$ é um elemento de S.

b) Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 2x, y = 0\}$

S é subespaço. (0, 0, 0) pertence à S, basta tomar $x = 0$.

E as duas condições abaixo são satisfeitas:

i) Se (a, b, c) e (d, e, f) são elementos de S $\Rightarrow c = 2a$ com $b = 0$, e $f = 2d$ com $e = 0 \Rightarrow (a, b, c) + (d, e, f) = (a, 0, 2a) + (d, 0, 2d) = \Big(a + d, 0, 2(a + d)\Big) \Rightarrow (a, b, c) + (d, e, f)$ é um elemento de S.

ii) Se (a, b, c) é um elemento de S e α um escalar, $c = 2a$ com $b = 0 \Rightarrow \alpha(a, b, c) = \alpha(a, 0, 2a) = \Big(\alpha a, 0, \alpha(2a)\Big) = \Big(\alpha a, 0, 2(\alpha a)\Big) \Rightarrow (\alpha a, \alpha b, \alpha c)$ é um elemento de S.

c) Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 1\}$

S não é subespaço. Basta tomar como contra-exemplo os vetores $(2, 1, 0) \in S$ e $(-2, -2, 1) \in S$, pois sua soma $(2, 1, 0) + (-2, -2, 1) = (0, -1, 1) \notin S$, já que $0 - (-1) + 1 \neq 1$.

d) Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / |x - y| = |y - z|\}$

S não é subespaço. Basta tomar como contra-exemplo os vetores $(1, 2, 3) \in S$ e $(-1, 0, -1) \in S$, pois sua soma $(1, 2, 3) + (-1, 0, -1) = (0, 2, 2) \notin S$, já que $|0 - 2| \neq |2 - 2| \Rightarrow | - 2| \neq |0| \Rightarrow 2 \neq 0$.

4^a Questão) Solução:

a) Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Temos que

$$[A_1, A_2, A_3] = aA_1 + bA_2 + cA_3 \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & c \\ c & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+c & a+c \\ -a+c & b+c \end{bmatrix}$$

Logo

$$S = [A_1, A_2, A_3] = \left\{ \begin{bmatrix} b+c & a+c \\ -a+c & b+c \end{bmatrix} / a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

b) $0 \in S$? Sim, basta tomar $a = b = c = 0$. Logo, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in S$.

Agora consideremos

$$A_4 = \begin{bmatrix} b_1 + c_1 & a_1 + c_1 \\ -a_1 + c_1 & b_1 + c_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_5 = \begin{bmatrix} b_2 + c_2 & a_2 + c_2 \\ -a_2 + c_2 & b_2 + c_2 \end{bmatrix}.$$

$A_4 + \alpha A_5 \in S$?

$$A_4 + \alpha A_5 = \begin{bmatrix} b_1 + \alpha b_2 + c_1 + \alpha c_2 & a_1 + \alpha a_2 + c_1 + \alpha c_2 \\ -a_1 - \alpha a_2 + c_1 + \alpha c_2 & b_1 + \alpha b_2 + c_1 + \alpha c_2 \end{bmatrix} = A_6$$

Considerando $a = a_1 + \alpha a_2$, $b = b_1 + \alpha b_2$ e $c = c_1 + \alpha c_2$, temos que $A_6 \in S$.

Logo, S é subespaço de $[A]_{2\times 2}$.

c) Para verificarmos que as matrizes A_1, A_2 e A_3 são linearmente independentes, suponhamos que

$$aA_1 + bA_2 + cA_3 = 0$$

isto é,

$$a \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então,

$$\begin{bmatrix} b+c & a+c \\ c-a & b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ \\ a + c = 0 \\ \\ c - a = 0 \end{cases}$$

Portanto, $a = b = c = 0$, donde A_1, A_2 e A_3 são linearmente independentes.

5^a Questão) Solução:

Seja $S = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ um conjunto de vetores contido no $\mathbb{R}^n$.

Suponhamos que:

$$v_1 = (v_{11}, v_{12}, ..., v_{1n})$$

$$v_2 = (v_{21}, v_{22}, ..., v_{2n})$$

$$\vdots$$

$$v_m = (v_{m1}, v_{m2}, ..., v_{mn})$$

Consideremos a equação

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + ... + k_m v_m = 0$$

Expressando ambos os membros da equação acima em termos das componentes e, a seguir, equacionando as componentes correspondentes, obtemos o sistema

$$\begin{aligned} v_{11}k_1 + v_{21}k_2 + ... + v_{m1}k_m &= 0 \\ v_{12}k_1 + v_{22}k_2 + ... + v_{m2}k_m &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad &\quad \vdots \\ v_{1n}k_1 + v_{2n}k_2 + ... + v_{mn}k_m &= 0 \end{aligned}$$

Esse sistema é homogêneo com n equações nas m incógnitas $k_1, k_2, ..., k_m$. Como $m > n$, segue do Teorema abaixo que o sistema admite soluções não-triviais. Portanto, $S = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ é um conjunto linearmente dependente.

Teorema: Um sistema homogêneo de equações lineares com mais incógnitas do que equações admite sempre uma infinidade de soluções.

OBS.: O Teorema acima se aplica apenas a sistemas homogêneos.