Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO DA AP3 - Segundo Semestre de 2013
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(3.0)1. Ache os autovalores da matriz A abaixo e os autovetores correspondentes ao autovalor positivo.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

Solução:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Então, $P(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$. Logo $\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$. Logo $(\lambda - 5)(\lambda + 2) = 0$.

Os autovalores de A são portanto,

$$\lambda_1 = 5 \text{ e } \lambda_2 = -2.$$

Os autovetores associados a $\lambda_1 = 5$ são obtidos abaixo:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} 4x + 2y = 5x \\ 3x - y = 5y \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rr} -x & +2y = 0 \\ 3x & -6y = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rr} -x & +2y = 0 \\ & 0 = 0 \end{array} \right.$$

Onde a equação $0 = 0$ foi obtida pela operação $L_2 := L_2 + 3L_1$. Solução: $x = 2y$. Os autovetores são do tipo $v = (2y, y) = y(2, 1)$, para todo $y \in I\!R$.

Os autovetores associados a $\lambda_2 = -2$ são obtidos abaixo:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} 4x + 2y = -2x \\ 3x - y = -2y \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rr} 6x & +2y = 0 \\ 3x & +y = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rr} 6x & +2y = 0 \\ & 0 = 0 \end{array} \right.$$

Onde a equação $0 = 0$ foi obtida pela operação $L_2 := L_2 - 0,5L_1$. Solução: $y = -3x$. Os autovetores são do tipo $v = (x, -3x) = x(1, -3)$, para todo $x \in I\!R$.

(2.0)2. Determine o núcleo da transformação linear T, de $I\!R^4$ em $I\!R^2$, estabelecendo sua dimensão e uma base para este subspaço de $I\!R^4$. A transformação T é injetora? Justifique.

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4, x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4)$$

Solução:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Ou seja, $x_1 = -x_3 - 3x_4$, $x_2 = 2x_3 + x_4$. Fazendo $x_3 = \alpha$ e $x_4 = \beta$, temos que

$$N(T) = \{(-\alpha - 3\beta, 2\alpha + \beta, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in I\!R\}.$$

A dimensão do núcleo é 2 e uma base para o núcleo é $\{(-1, 2, 1, 0)^T, (-3, 1, 0, 1)^T\}$.

T não é injetora, pois $N(T) \neq \{0\}$.

(3.0)3. Determine se cada um dos conjuntos abaixo é um subspaço do espaço das funções reais de variável real, justificando sua resposta.

(a) As funções f tais que $f(x) \leq 0$, $\forall x \in I\!R$.
Solução: Não, pois seja, por exemplo, $f(x) = -|x|$ e $\alpha = -1$. Neste caso, $f(x) \leq 0$, $\forall x \in I\!R$ e $\alpha f(x) = |x| > 0$, $\forall x \neq 0$.

(b) As funções constantes.

Solução: Sim, pois sendo W o espaço de todas as funções constantes de $I\!R$ em $I\!R$, temos: (i) A função constante $f(x) = 0$, $\forall x \in I\!R$ pertence a W. (ii) Se $f \in W$ então $f(x) = k$ para algum $k \in I\!R$, logo $\alpha f(x) = \alpha k$ e, portanto, $\alpha f \in W$. (iii) Se $f, g \in W$ então $f(x) = k_1$ e $g(x) = k_2$, logo $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = k_1 + k_2$ e portanto, $f + g \in W$.

(c) As funções da forma $a + b\text{sen}2x + \cos 2x$, $\forall x \in I\!R$.

Solução: Sim, pois sendo W o espaço de todas as funções de $I\!R$ em $I\!R$, tais que $f(x) = a + b\text{sen}2x + c\cos 2x$, para a, b e c quaisquer, temos: (i) A função constante $f(x) = 0$, $\forall x \in I\!R$ pertence a W, basta considerar $a = b = c = 0$. (ii) Se $f \in W$ então $f(x) = a + b\text{sen}2x + c\cos 2x$ para algum a, b, c, logo $\alpha f(x) = (\alpha a) + (\alpha b)\text{sen}2x + (\alpha c)\cos 2x$ e, portanto, $\alpha f \in W$. (iii) Se $f, g \in W$ então $f(x) = a_1 + b_1\text{sen}2x + c_1\cos 2x$ e $g(x) = a_2 + b_2\text{sen}2x + c_2\cos 2x$, logo $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\text{sen}2x + (c_1 + c_2)\cos 2x$ e portanto, $f + g \in W$.

(2.0)4. Use determinantes para achar os valores de k para os quais o sistema seguinte admite solução única (A resposta só será considerada correta se for baseada no cálculo de determinante):

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Solução:

O sistema tem solução única quando $D \neq 0$, onde D é o determinante da matriz de coeficientes. Calcule

$$D = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2.$$

Assim, o sistema tem solução única quando $(k-1)^2 \neq 0$, ou seja, quando $k \neq 1$.