Gabarito

Álgebra Linear: AD1 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2016.1

Tutores: Gabriel Thomaz e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

- $A_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ com $a = 2b - 3$

Vamos verificar que $(0)_{2\times3}$ não pertence a A_1, pois, tomando $a = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$. Logo, A_1 não é um subespaço vetorial de $M_{2\times3}$.

- $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 1 & d \end{pmatrix}$

Vamos verificar que $(0)_{2\times3}$ não pertence a A_2, pois, tomando $a = b = d = 0$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

. Logo, A_2 não é um subespaço vetorial de $M_{2\times3}$.

- $A_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ com $a = -2c$, $f = 2e + d$

$\rightarrow$ Vamos verificar que $(0)_{2\times3}$ pertence a A_3, pois, tomando $b = c = d = e = 0$

$$A_3 = \begin{pmatrix} (-2.0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2.0+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.

$\rightarrow$ Sejam $A, B \in A_3$, assim, $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \end{pmatrix}$ com $a_1 = -2c_1$, $f_1 = 2e_1 + d_1$, $a_2 = -2c_2$, $f_2 = 2e_2 + d_2$. $A + B \in A_3$ pois:

$$A+B=\begin{pmatrix} (a_1+a_2) & (b_1+b_2) & (c_1+c_2) \\ (d_2+d_2) & (e_1+e_2) & (f_1+f_2) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -2(c_1+c_2) & (b_1+b_2) & (c_1+c_2) \\ (d_2+d_2) & (e_1+e_2) & 2(e_1+e_2)+(d_1+d_2) \end{pmatrix}$$

fazendo $b_3=b_1+b_2$, $c_3=c_1+c_2$, $d_3=d_1+d_2$ e $e_3=e_1+e_2$ temos que,

$$A+B=\begin{pmatrix} -2c_3 & b_3 & c_3 \\ d_3 & e_3 & 2e_3+d_3 \end{pmatrix}\in A_3$$

$\rightarrow$ Seja $\alpha\in\mathbb{R}$ e $A\in A_3$. Então

$$\alpha A=\begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 & \alpha c_1 \\ \alpha d_1 & \alpha e_1 & \alpha f_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2\alpha c_1 & \alpha b_1 & \alpha c_1 \\ \alpha d_1 & \alpha e_1 & 2\alpha e_1+\alpha d_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2c_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & 2e_2+d_2 \end{pmatrix}$$

logo, $\alpha A\in A_3$.

Portanto, A_3 é subspaço vetorial de $M_{2\times 3}$.

2^a Questão) Solução:

a) Considere a matriz aumentada do sistema linear homogêneo. Temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2\leftarrow L_2+2L_1$ e $L_4\leftarrow L_4+L_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_4\leftarrow 2L_4+L_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_4 \leftarrow 4L_4 - 5L_3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por L_3, temos que $z = -w$. Por $L_2 \Longrightarrow -2y - z + w = 0 \Longrightarrow -2y - z - z = 0 \Longrightarrow y = -z$.

Por L_1,chegamos a: $x = -w$.

Logo, $S = \{(-w, w, -w, w)\} = w\,(-1, 1, -1, 1)$. Logo, temos a base:$\{(-1, 1, -1, 1)\}$, com dimensão 1.

3^a Questão) Solução:

a) Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Considere:

$a(1, 0, 2) + b(0, 1, 3) + c(0, 1, 1) = (x, y, z)$, para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Chegamos ao sistema:

$$a = x$$
$$b + c = y$$
$$2a + 3b + c = z$$

Usando a matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 2 & 3 & 1 & z \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 3 & 1 & z-2x \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & -2 & -2x-3y+z \end{bmatrix}$$

Claramente este sistema tem solução para a, b, c. Caso igualássemos ao vetor nulo como termo independente, teríamos somente o vetor nulo como solução.

Logo, concluímos que os vetores dados são linearmente independentes e geram o espaço $\mathbb{R}^3$.

b) Verifiquemos se são ortogonais (se o produto escalar é nulo):

$v_1.v_2 = (1,0,2).(0,-1,3) = 0+0+6 = 6$

$v_1.v_3 = (1,0,2).(0,1,1) = 0+0+2 = 2$

$v_2.v_3 = (0,1,3).(0,1,1) = 0+1+3 = 4$

Ou seja, não são ortogonais .

Verifiquemos se são paralelos (se as coordenadas são proporcionais):

$\frac{v_1}{v_2} = (\frac{1}{0}, 0, \frac{2}{3})$

$\frac{v_1}{v_3} = (\frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{2}{1})$

$\frac{v_2}{v_3} = (\frac{0}{0}, \frac{1}{1}, \frac{3}{1})$

Ou seja, não são paralelos .

c) $|v_1| = \sqrt{1^2+0^2+2^2} = \sqrt{5}$

$|v_2| = \sqrt{0^2+1^2+3^2} = \sqrt{10}$

$|v_3| = \sqrt{0^2+1^2+1^2} = \sqrt{2}$

Assim, vamos calcular o ângulo dois a dois:

$cos(\alpha) = \dfrac{v_1.v_2}{|v_1|.|v_2|} = \dfrac{(1,0,2),(0,1,3)}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \dfrac{0+0+6}{\sqrt{50}} = \dfrac{6}{\sqrt{50}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{5} \Longrightarrow \alpha = arcos(\dfrac{3\sqrt{2}}{5}).$

$cos(\beta) = \dfrac{v_1.v_3}{|v_1|.|v_3|} = \dfrac{(1,0,2),(0,1,1)}{\sqrt{5}\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5} \Longrightarrow \beta = arcos(\dfrac{\sqrt{10}}{5}).$

$cos(\gamma) = \dfrac{v_2.v_3}{|v_2|.|v_3|} = \dfrac{(0,1,3),(0,1,1)}{\sqrt{10}\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{20}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \Longrightarrow \gamma = arcos(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}).$

d) Como os vetores dados são LI's e geram $\mathbb{R}^3$, eles já formam uma base. Vamos usar o processo de Gram Schmdit para ortogonalizar:

Seja $w_1 = (1,0,2)$.

Temos que

$$w_2 = (0,1,3) - \left(\frac{(0,1,3)(1,0,2)}{(1,0,2)(1,0,2)}\right)(1,0,2)$$

$$= (0,1,3) - \left(\frac{6}{5}\right)(1,0,2) =$$

$$= (0,1,3) - \left(\frac{6}{5}, 0, \frac{12}{5}\right) = \left(\frac{-6}{5}, 1, \frac{3}{5}\right).$$

$$w_3 = (0,1,1) - \left(\frac{(0,1,1)(1,0,2)}{(1,0,2)(1,0,2)}\right)(1,0,2) - \left(\frac{(0,1,1)(\frac{-6}{5},1,\frac{3}{5})}{(\frac{-6}{5},1,\frac{3}{5})(\frac{-6}{5},1,\frac{3}{5})}\right)\left(\frac{-6}{5},1,\frac{3}{5}\right)$$

$$= (0,1,1) - \left(\frac{2}{5}\right)(1,0,2) - \left(\frac{\frac{8}{5}}{\frac{70}{25}}\right)\left(\frac{-6}{5},1,\frac{3}{5}\right) =$$

$$= \left(\frac{-2}{5},1,\frac{1}{5}\right) - \frac{4}{7}\left(\frac{-6}{5},1,\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{-1}{7}\right).$$

Logo uma base ortogonal para W é $\{(1,0,2), \left(\frac{-6}{5},1,\frac{3}{5}\right), \left(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{-1}{7}\right)\}$.

4^a Questão) Solução: A matriz aumentada é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & (a^2-1) & a+1 \end{bmatrix}$$

fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & (a^2-3) & a-3 \end{bmatrix}$$

fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & (a^2-3) & a-4 \end{bmatrix}$$

fazendo $L_3 \leftarrow \frac{1}{a^2-3}L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-4}{a^2-3} \end{bmatrix}$$

fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2-(\frac{a-4}{a^2-3}) \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-4}{a^2-3} \end{bmatrix}$$

fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a^2-a+1}{a^2-3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-4}{a^2-3} \end{bmatrix}$$

a) O sistema não tem solução se $a = \pm\sqrt{3}$, pois ocorrerá divisão por zero.

b) O sistema tem solução única se $a \neq \pm\sqrt{3}$.

c) Não existem valores possíveis para a para que tenha infinitas soluções.