Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO DA AP1 - Primeiro Semestre de 2010
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

1.(2.5) Considere o conjunto $B = \{v_1, v_2\}$, onde $v_1 = (-1, 0, 4)$ e $v_2 = (5, 1, -1)$.

a. (0.5) Calcule o módulo de v_1.
Solução:
$|v_1| = \sqrt{((-1)^2 + 0^2 + 4^2)} = \sqrt{(1 + 0 + 16)} = \sqrt{17}$.

b. (0.5) Calcule a distância $d(v_1, v_2) = |v_1 - v_2|$
Solução:
$d(v_1, v_2) = \sqrt{(-1-5)^2 + (0-1)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{36 + 1 + 25} = \sqrt{62}$.

c. (0.5) Calcule o ângulo formado por v_1 e v_2.
Solução:
Seja θ o ângulo entre os vetores v_1 e v_2.
$cos(\theta) = \frac{v_1.v_2}{|v_1|.|v_2|}$.
Do item (a), $|v_1| = \sqrt{17}$.
$|v_2| = \sqrt{5^2 + 1^2 + (-1)^2)} = \sqrt{(25 + 1 + 1)} = \sqrt{27}$.
$v_1.v_2 = (-1) \times 5 + 0 \times 1 + 4 \times (-1) = (-5) + 0 + (-4) = -9$.
$cos(\theta) = \frac{(-9)}{\sqrt{17}.\sqrt{27}} \Longrightarrow \theta = \text{arccos}\frac{(-9)}{\sqrt{17}.\sqrt{27}}$.

d. (1.0) Determine o espaço gerado pelos vetores v_1 e v_2 de B.
Solução:

$v_1 = (-1, 0, 4)$ e $v_2 = (5, 1, -1)$. Sejam $a, b \in \Re$.
$[v_1, v_2] = a(-1, 0, 4) + b(5, 1, -1) = (-a + 5b, b, 4a - b) = (x, y, z)$.
Assim, temos o seguinte sistema linear:

$$-a + 5b = x \quad (1)$$
$$b = y \quad (2)$$
$$4a - b = z \quad (3)$$

Considerando $b = y$, da primeira equação temos que $a = 5y - x$.
Da terceira equação temos que $a = \frac{y+z}{4}$. Igualando estes dois valores de a temos:
$5y - x = \frac{y+z}{4} \Longrightarrow 20y - 4x = y + z \Longrightarrow z = 19y - 4x$
Logo $[v_1, v_2] = \{(x, y, z) \in \Re^3 / z = 19y - 4x\}$.

(2.0)2. Considere as matrizes abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Quando for possível, calcular a matriz C abaixo. Quando não for possível, justificar o motivo.

(a) $C = B^T$.
Solução:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

(b) $C = AB$.
Solução:
Não é possível calcular $C = AB$ pois o número de colunas de A é diferente do número de linhas de B.

(c) $C = (BA)^T$.
Solução:

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 17 & -6 \\ -3 & 24 \end{bmatrix}$$

$$C = (BA)^T = \begin{bmatrix} 5 & 17 & -3 \\ 0 & -6 & 24 \end{bmatrix}.$$

(d) $C = A^2$.
Solução:

$$C = A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -20 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

(3.0)3. Considere os seguintes polinômios

$$p_1 = 2 + 2x,\ p_2 = 3 + x - x^2,\ p_3 = 2x + x^2$$

(a) Descreva o conjunto S gerado pelos polinômios p_1, p_2 e p_3.
Solução:

$$S = \{p = ax^2 + bx + c / p = \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3\}$$

onde , $\alpha, \beta, \gamma \in \Re$.
Assim temos:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \alpha(2 + 2x) + \beta(3 + x - x^2) + \gamma(2x + x^2) \\ ax^2 + bx + c &= 2\alpha + 2\alpha x + 3\beta + \beta x - \beta x^2 + 2\gamma x + \gamma x^2 \\ ax^2 + bx + c &= (\gamma - \beta)x^2 + (2\alpha + \beta + 2\gamma)x + (2\alpha + 3\beta) \end{aligned}$$

E portanto:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a &=& \gamma - \beta \\ b &=& 2(\alpha + \gamma) + \beta \\ c &=& 2\alpha + 3\beta \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad b = 2a + c$$

Assim o subespaço de P_2 gerados pelos vetores $\{2 + 2x, 3 + x - x^2, 2x + x^2\}$ é da forma $\{ax^2 + bx + c \ / \ b = 2a + c\}$.

(b) Verifique se o conjunto S gerado é um subspaço vetorial de P_2 (espaço vetorial dos polinômios de grau ≤ 2).

Solução:

$S = \{ax^2 + bx + c \ / \ b = 2a + c\}$, onde $a, b, c, d \in I\!R$

Sejam $w_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1 \in S$ e $w_2 = a_2x^2 + b_2x + c_2 \in S$.

Então devemos verificar se $S \neq \emptyset$, $w_1 + w_2 \in S$ e $\alpha w_1 \in S$, $\alpha \in I\!R$

i) S não é vazio, já que $0x^2 + 0x + 0$ pertence à S.

ii) $w_1 + w_2 = (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)$. Como $b_1 = 2a_1 + c_1$ e $b_2 = 2a_2 + c_2$, temos $b_1 + b_2 = 2(a_1 + a_2) + (c_1 + c_2)$. Logo $w_1 + w_2 \in S$.

iii) Seja $\alpha \in I\!R$. $\alpha w_1 = \alpha a_1 x^2 + \alpha b_1 x + \alpha c_1$. Como $b_1 = 2a_1 + c_1$, temos $\alpha b_1 = 2\alpha a_1 + \alpha c_1$. Logo $\alpha w_1 \in S$.

Considerando (i), (ii) e (iii), concluímos que S é um subespaço vetorial de P_2 .

(c) Verifique se p_1, p_2 e p_3 são LI ou LD.

Solução:

Considere o sistema

$$\begin{aligned}
0x^2 + 0x + 0 &= \alpha(2 + 2x) + \beta(3 + x - x^2) + \gamma(2x + x^2) \text{ ou} \\
0x^2 + 0x + 0 &= 2\alpha + 2\alpha x + 3\beta + \beta x - \beta x^2 + 2\gamma x + \gamma x^2 \text{ ou} \\
0x^2 + 0x + 0 &= (\gamma - \beta)x^2 + (2\alpha + \beta + 2\gamma)x + (2\alpha + 3\beta).
\end{aligned}$$

O sistema admite solução não trivial, dada por $\gamma = \beta$ e $\alpha = (-3/2)\beta$ para todo $\beta \in I\!R$. Logo, p_1, p_2 e p_3 são LD.

(d) Determine uma base e a dimensão para $S \subset P_2$.

Solução:

Como p_1 e p_2 são LI, $\{p_1, p_2\}$ é uma base de S, cuja dimensão é 2.

(2.5)4. Considere o sistema linear:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl}
x_1 & + & 2x_2 & = & a \\
2x_1 & - & x_2 & = & b \\
-x_1 & & & = & c \\
3x_1 & - & x_2 & = & d
\end{array}\right.$$

Estabeleça uma relação entre os termos independentes $\{a, b, c, d\}$, usando o Método de Gauss-Jordan, de tal forma que o sistema tenha solução única, diferente da solução trivial $a = b = c = d = 0$.

Solução A matriz aumentada $[A \mid \mathbf{b}]$ do sistema é dada por

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rrcc} 1 & 2 & | & a \\ 2 & -1 & | & b \\ -1 & 0 & | & c \\ 3 & -1 & | & d \end{array}\right]$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ e $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$ obtemos

$$[A^1|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{lrcc} 1 & 2 & | & a \\ 0 & -5 & | & b - 2a \\ 0 & 2 & | & c + a \\ 0 & -7 & | & d - 3a \end{array}\right]$$

Dividindo por (-3) a L_2, por (2) a L_3 e por (-7) a L_4, obtemos

$$[A^2|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{llcc} 1 & 2 & | & a \\ 0 & 1 & | & (2a - b)/5 \\ 0 & 1 & | & (a + c)/2 \\ 0 & 1 & | & (3a - d)/7 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ e $L_4 \leftarrow L_4$- L_2, obtemos

$$[A^2|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{llcc} 1 & 2 & | & a \\ 0 & 1 & | & (2a - b)/5 \\ 0 & 0 & | & (a + 2b + 5c)/10 \\ 0 & 0 & | & (a + 7b - 5d)/35 \end{array}\right]$$

Assim para que o sistema tenha solução única é necessário que:

$$\begin{cases} a + 2b + 5c = 0 \Leftrightarrow c = (-a - 2b)/5 \\ a + 7b - 5d = 0 \Leftrightarrow d = (a + 7b)/5 \end{cases}$$

Podemos então escrever que o conjunto dos termos independentes, tal que a solução do sistema é única é dado por:
$\Big\{(a, b, c, d) \in I\!R^4; (a, b, (-a - 2b)/5, (a + 7b)/5\Big\}$.