Álgebra Linear I

Maria Lúcia Torres Villela
Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática
Março de 2010

Sumário

Introdução

O objetivo deste texto é ser um apoio aos estudantes da disciplina Álgebra Linear I, do Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal Fluminense. O objetivo principal é estudar espaços vetoriais finitamente gerados e transformações lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita.

Pressupomos que o estudante esteja familiarizado com o conceito de vetores no plano e espaço e tenha os conhecimentos básicos de Geometria Analítica Plana e Espacial. Vamos interpretar geometricamente diversos conceitos, ao longo do texto.

Na Parte 1 introduziremos a álgebra das matrizes com coeficientes reais, as suas operações de adição, multiplicação e multiplicação por escalar, e as propriedades dessas operações. Apresentaremos o conceito de matrizes invertíveis. Definiremos transposta de uma matriz e matrizes ortogonais e estudaremos as suas propriedades. Além disso, definiremos equações lineares com coeficientes reais e sistemas de equações lineares com coeficientes reais. Estudaremos as operações sobre as equações que não alteram as soluções do sistema, dando origem a sistemas equivalentes. A partir da forma matricial do sistema, essas operações motivam a definição de operações elementares sobre as linhas de uma matriz. Apresentaremos um método de resolução de sistemas de equações lineares com coeficientes reais baseado na redução por linhas à forma em escada da matriz ampliada associada ao sistema. Classificaremos as soluções dos sistemas lineares homogêneos e não homogêneos. Daremos um algoritmo para calcular a inversa de matrizes invertíveis com coeficientes reais, usando operações elementares sobre as linhas da matriz.

Na Parte 2 introduziremos os conceitos de: espaço vetorial real, subespaços vetoriais, interseção de subespaços, combinação linear, espaços vetorias reais finitamente gerados, conjuntos linearmente independentes ou linearmente dependentes, base e dimensão de espaços vetoriais reais finitamente gerados, coordenadas numa base e soma e soma direta de subespaços vetoriais reais. Estudaremos transformações lineares entre espaços vetoriais reais de dimensão finita, núcleo e imagem de transformações lineares, teorema do núcleo e da imagem, representação matricial de transformações lineares entre espaços vetoriais reais de dimensão finita e suas propriedades. Finalizaremos com a álgebra das transformações lineares em espaços vetoriais de dimensão finita, apresentando as operações de adição, multiplicação por escalar e composição de transformações lineares, transformações lineares invertíveis, isomorfismo e automorfismo de espaços vetoriais.

Recomendamos os seguintes textos:

- *Álgebra Linear com aplicações*, H. Anton e C. Rorres, Bookman Companhia Editora, 8ª edição, 2000.

- *Álgebra Linear*, Boldrini e outros, Harbra, 3ª edição, 1974.

- *Álgebra Linear e Aplicações*, Carlos A. Callioli, Hygino Domingues, Roberto C.F. Costa, Atual Editora, 1990.

- *Álgebra Linear*, Renato Valladares, LTC, 1990.

- *Álgebra Linear*, Serge Lang, Editora Edgar Blücher Ltda, 1971.

- *Álgebra Linear*, S. Lipschutz, Coleção Schaum, MacGraw-Hill, 1981

- *Álgebra Linear-Introdução*, João Pitombeira de Carvalho, LTC/EDU, 2ª edição, 1977.

Texto mais avançado:

- *Álgebra Linear*, K. Hoffmann, R. Kunze, Editora Polígono, 1971.

Parte 1

Matrizes e sistemas lineares

Introduziremos o conceito de matrizes com coeficientes reais e alguns tipos especiais de matrizes: matriz nula, quadrada, diagonal, triangular superior e triangular inferior. Apresentaremos a álgebra das matrizes com coeficientes reais definindo as operações de adição, multiplicação e multiplicação por escalar e estudando as propriedades dessas operações. Introduziremos o conceito de matrizes invertíveis e matrizes nilpotentes. Definiremos transposta de uma matriz e matrizes ortogonais e estudaremos as suas propriedades.

Além disso, definiremos equações lineares com coeficientes reais e sistemas de equações lineares com coeficientes reais. Estudaremos as operações sobre as equações de um sistema linear com coeficientes reais que não alteram as soluções do sistema, dando origem a sistemas equivalentes, isto é, sistemas com o mesmo conjunto solução. A partir da forma matricial do sistema, essas operações motivam a definição de operações elementares sobre as linhas de uma matriz e o conceito de matrizes equivalentes por linhas. Apresentaremos um método de resolução de sistemas de equações lineares com coeficientes reais baseado na redução por linhas à forma em escada da matriz ampliada associada ao sistema. Classificaremos as soluções dos sistemas lineares homogêneos e não homogêneos. Daremos um algoritmo para calcular a inversa de matrizes invertíveis com coeficientes reais, usando operações elementares sobre as linhas da matriz.

Matrizes com coeficientes reais

Começamos lembrando as operações de números reais e suas propriedades, que desempenharão um papel muito importante ao longo de todo o texto.

Proposição 1 (Propriedades das operações de adição e multiplicação de $\mathbb{R}$)
As operações de adição e multiplicação no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rccc} +: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \longmapsto & a+b \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \cdot: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \longmapsto & a\cdot b \end{array}$$

têm as seguintes propriedades, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$:

A1-(Associativa) $(a+b)+c = a+(b+c)$.

A2-(Comutativa) $a+b = b+a$.

A3-(Existência de elemento neutro aditivo)

Existe $0 \in \mathbb{R}$, tal que para todo $a \in \mathbb{R}$, $a+0 = a$.

A4-(Existência de simétrico)

Para cada $a \in \mathbb{R}$, existe um único $c \in \mathbb{R}$ tal que $a+c = 0$.

Escrevemos $c = -a$.

M1-(Associativa) $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$.

M2-(Comutativa) $a\cdot b = b\cdot a$.

M3-(Existência de elemento neutro multiplicativo)

Existe $1 \in \mathbb{R}$, tal que para todo $a \in \mathbb{R}$, $1\cdot a = a$.

M4-(Existência de inverso)

Para cada $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, existe um único $c \in \mathbb{R}$, tal que $a\cdot c = 1$.

Escrevemos $c = a^{-1}$.

AM-(Distributiva) $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$.

Dizemos que $\mathbb{R}$ é a estrutura algébrica chamada *corpo*.

O corpo dos números reais será muito importante nos conceitos introduzidos a seguir.

Definição 1 (Matriz m por n)
Uma *matriz* A m por n com coeficientes reais é uma tabela com m linhas e n colunas de números reais. Denotamos $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Escrevemos $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Para cada $i = 1, \ldots, m$, $(a_{i1},\ a_{i2}, \ldots, a_{in})$ é a i-ésima linha da matriz A.

Para cada $j = 1, \ldots, n$, $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ é a j-ésima coluna da matriz A.

$M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é o conjunto de todas as matrizes m por n com coeficientes reais.

Exemplo 1

São matrizes com coeficientes reais: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & -2 & \pi \\ 3 & 0 & 1 & -3,5 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$,

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Definição 2 (Igualdade de matrizes)

Sejam $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B = (b_{ij}) \in M_{r\times s}(\mathbb{R})$. Dizemos que as matrizes A e B são *iguais* se, e somente se, $m = r$, $n = s$ e $a_{ij} = b_{ij}$, para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Nesse caso, escrevemos $A = B$.

Exemplo 2

Vamos determinar os valores de $x \in \mathbb{R}$, tais que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x^2 \\ x^3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ x^2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sejam iguais. Como $a_{11} = b_{11} = 1$, $a_{12} = b_{12} = 2$, $x^2 = a_{13} = b_{13} = 1$, $x^3 = a_{21} = b_{21} = x^2$, $a_{22} = b_{22} = 1$ e $a_{23} = b_{23} = 0$, então $x^2 = 1$ e $x^3 = x^2$. Logo, $x = 1$.

Há alguns tipos especiais de matrizes, que têm nomes especiais, conforme veremos a seguir.

Exemplo 3

Seja $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Matriz quadrada: A é matriz quadrada se, e somente se, $m = n$.

Nesse caso, dizemos que os elementos $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ formam a *diagonal principal* da matriz quadrada.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\begin{pmatrix} 1 & 4 & e \\ -1 & 0 & \ln 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ são matrizes quadradas com diagonais principais $1\ 3$ e $1\ 0\ 3$.

Matriz nula: Para quaisquer $m \geq 1$ e $n \geq 1$, existe matriz nula m por n.

$A = 0$ se, e somente se, $a_{ij} = 0$, para todo $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz nula em $M_{2\times3}(\mathbb{R})$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz nula em $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

Matriz linha: A é matriz linha se, e somente se, $m = 1$ e $n \geq 1$.

$(1\ 2\ 3\ 4) \in M_{1\times4}(\mathbb{R})$, $(0\ 1\ -2) \in M_{1\times3}(\mathbb{R})$ e $(-1\ 5) \in M_{1\times2}(\mathbb{R})$ são matrizes linhas.

Matriz coluna: A é matriz coluna se, e somente se, $n = 1$ e $m \geq 1$.

$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times1}(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in M_{4\times1}(\mathbb{R})$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times1}(\mathbb{R})$ são matrizes colunas.

Matriz diagonal: A é matriz diagonal se, e somente se, $m = n$ e $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Nesse caso, os elementos da matriz quadrada fora da diagonal principal são nulos.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ são matrizes diagonais.

Matriz identidade: Para cada $n \geq 1$, a matriz identidade de ordem n, denotada por I_n, é a matriz quadrada de ordem n tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ e $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ são as matrizes identidades de ordens 2 e 3, respectivamente.

Matriz triangular superior: A é triangular superior se, e somente se, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para todo $i > j$.

Nesse caso, os elementos da matriz quadrada abaixo da diagonal principal são nulos.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ e $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & \pi & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ são matrizes triangulares superiores.

Matriz triangular inferior: A é triangular inferior se, e somente se, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para todo $i < j$.

Nesse caso, os elementos da matriz quadrada acima da diagonal principal são nulos.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ são matrizes triangulares inferiores.

Veremos agora três operações: adição de matrizes; multiplicação de uma matriz por um número real, chamada multiplicação por escalar, e multiplicação de matrizes.

Definição 3 (Adição de matrizes)
Sejam $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. A matriz $C = A + B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é definida por $C = (c_{ij})$, onde

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

para todo $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Exemplo 4
Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ em $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Então,

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 4+1 & 0+3 \\ -1+(-1) & 0+2 & 2+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}).$$

Exemplo 5
Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ em $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$. Então, temos

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 4+1 \\ -1+5 & 2+(-1) \\ 0+(-1) & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R}).$$

Proposição 2 (Propriedades da adição)
Sejam A, B e C matrizes $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Valem as seguintes propriedades:

(a) Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

(b) Comutativa: $A + B = B + A$.

(c) Existência de elemento neutro aditivo: $A + 0 = A$, onde 0 é a matriz nula m por n.

Demonstração:

(a) Associativa: Sejam $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$. Então,

$$\begin{aligned}\big((A+B)+C\big)_{ij} &\overset{(1)}{=} (A+B)_{ij}+c_{ij}\\ &\overset{(2)}{=} (a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}\\ &\overset{(3)}{=} a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})\\ &\overset{(4)}{=} a_{ij}+(B+C)_{ij}\\ &\overset{(5)}{=} \big(A+(B+C)\big)_{ij},\end{aligned}$$

Em (1) usamos a definição de $(A+B)+C$; em (2), a definição de $A+B$; em (3), a associatividade da adição em $\mathbb{R}$; em (4), a definição de $B+C$ e em (5), a definição de $A+(B+C)$.

para todo $i=1,\dots,m$ e $j=1,\dots,n$. Logo, $(A+B)+C=A+(B+C)$.

(b) Comutativa: Sejam $A=(a_{ij})$ e $B=(b_{ij})$. Então,

$$(A+B)_{ij}\overset{(6)}{=}a_{ij}+b_{ij}\overset{(7)}{=}b_{ij}+a_{ij}\overset{(8)}{=}(B+A)_{ij},$$

Em (6) usamos a definição de $A+B$; em (7), a comutatividade da adição em $\mathbb{R}$ e em (8), a definição de $B+A$.

para todo $i=1,\dots,m$ e $j=1,\dots,n$. Logo, $A+B=B+A$.

(c) Existência de elemento neutro aditivo: Seja $0=(d_{ij})$, onde $d_{ij}=0$, para todo i,j. Então, $(A+0)_{ij}=a_{ij}+d_{ij}=a_{ij}+0=a_{ij}$, para todo $i=1,\dots,m$ e $j=1,\dots,n$. Logo, $A+0=A$. ■

Definição 4 (Multiplicação por escalar)

Sejam $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $k\in\mathbb{R}$. A matriz $C=k\cdot A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é definida por $C=(c_{ij})$, onde $c_{ij}=k\cdot a_{ij}$, para todo $i=1,\dots,m$ e $j=1,\dots,n$.

Exemplo 6

Sejam $A=\begin{pmatrix}1&4\\-1&2\\0&3\end{pmatrix}\in M_{3\times2}(\mathbb{R})$ e $B=\begin{pmatrix}2&1&3\\5&-1&0\end{pmatrix}\in M_{2\times3}(\mathbb{R})$.

Então,

$$2\cdot A=\begin{pmatrix}2&8\\-2&4\\0&6\end{pmatrix}\in M_{3\times2}(\mathbb{R}) \text{ e } (-1)\cdot B=\begin{pmatrix}-2&-1&-3\\-5&1&0\end{pmatrix}\in M_{2\times3}(\mathbb{R}).$$

Proposição 3 (Propriedades da multiplicação por escalar)

Sejam $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $k,k_1,k_2\in\mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:

(a) Distributiva: $k\cdot(A+B)=k\cdot A+k\cdot B$.

(b) Distributiva: $(k_1+k_2)\cdot A=k_1\cdot A+k_2\cdot A$.

(c) Associativa: $k_1\cdot(k_2\cdot A)=(k_1\cdot k_2)\cdot A$.

(d) $1\cdot A=A$, onde $1\in\mathbb{R}$.

(e) $0\cdot A=0_{m\times n}$, onde $0\in\mathbb{R}$.

Demonstração:

(a) Distributiva:

$$\begin{aligned}\big(k\cdot(A+B)\big)_{ij} &\overset{(1)}{=} k\cdot(A+B)_{ij}\overset{(2)}{=}k\cdot(a_{ij}+b_{ij})\overset{(3)}{=}k\cdot a_{ij}+k\cdot b_{ij}\\ &\overset{(4)}{=} (k\cdot A)_{ij}+(k\cdot B)_{ij}\overset{(5)}{=}(k\cdot A+k\cdot B)_{ij},\end{aligned}$$

Em (1) usamos a definição da multiplicação por escalar; em (2), a definição de $A+B$; em (3), a distributividade em $\mathbb{R}$; em (4), a definição da multiplicação por escalar; em (5), a definição de adição de matrizes.

para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Logo, $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$.

(b) Distributiva:

$$\begin{aligned} \big((k_1 + k_2) \cdot A\big)_{ij} &\overset{(6)}{=} (k_1 + k_2) \cdot a_{ij} \overset{(7)}{=} k_1 \cdot a_{ij} + k_2 \cdot a_{ij} \\ &\overset{(8)}{=} (k_1 \cdot A)_{ij} + (k_2 \cdot A)_{ij} \overset{(9)}{=} (k_1 \cdot A + k_2 \cdot A)_{ij}. \end{aligned}$$

para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Logo, $(k_1 + k_2) \cdot A = k_1 \cdot A + k_2 \cdot A$.

Em (6) usamos a definição da multiplicação por escalar; em (7), a distributividade em $\mathbb{R}$; em (8), a definição da multiplicação por escalar; em (9), a definição de adição de matrizes.

(c) Associativa:

$$\begin{aligned} \big((k_1 \cdot k_2) \cdot A\big)_{ij} &\overset{(10)}{=} (k_1 \cdot k_2) \cdot a_{ij} \overset{(11)}{=} k_1 \cdot (k_2 \cdot a_{ij}) \\ &\overset{(12)}{=} k_1 \cdot (k_2 \cdot A)_{ij} \overset{(13)}{=} \big(k_1 \cdot (k_2 \cdot A)\big)_{ij}, \end{aligned}$$

para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Logo, $(k_1 \cdot k_2) \cdot A = k_1 \cdot (k_2 \cdot A)$.

Em (10) usamos a definição de multiplicação por escalar; em (11), a associatividade da multiplicação em $\mathbb{R}$; em (12) e (13), novamente, a definição de multiplicação por escalar.

Deixamos os itens (d) e (e) como Exercícios. ∎

Definição 5 (Multiplicação de matrizes)
Sejam $A = (a_{ik}) \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$ e $B = (b_{kj}) \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$, para $i = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, p$ e $j = 1, \ldots, n$. O produto $C = A \cdot B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é a matriz definida por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj},$$

para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Para determinar o elemento de ordem ij do produto usamos a i-ésima linha da matriz A, matriz à esquerda, e a j-ésima coluna de B, matriz à direita, respectivamente, $(a_{i1}, \ldots, a_{ip})$ e $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix}$.

Exemplo 7
Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$. Então,

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 3\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 0 + 6\cdot(-1) & 4\cdot 0 + 5\cdot 2 + 6\cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -2 & 16 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Faça os cálculos por linha. Fixe uma linha de A e, sucessivamente, varie as colunas de B, determinando a linha de mesma ordem de AB.

$$\begin{aligned} B \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 4 & 1\cdot 2 + 0\cdot 5 & 1\cdot 3 + 0\cdot 6 \\ 0\cdot 1 + 2\cdot 4 & 0\cdot 2 + 2\cdot 5 & 0\cdot 3 + 2\cdot 6 \\ (-1)\cdot 1 + 1\cdot 4 & (-1)\cdot 2 + 1\cdot 5 & (-1)\cdot 3 + 1\cdot 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Proposição 4 (Propriedades da multiplicação de matrizes)

Valem as seguintes propriedades:

(a) Distributiva: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, para quaisquer $A \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$ e $B, C \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$.

(b) Distributiva: $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$, para quaisquer $A, B \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$ e $C \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$.

(c) Associativa: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$, para quaisquer $A \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$, $B \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$ e $C \in M_{q\times n}(\mathbb{R})$.

(d) Associativa: $k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B)$, para quaisquer $k \in \mathbb{R}$, $A \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$.

(e) Existência de elementos neutros multiplicativos, à esquerda e à direita, respectivamente: $I_m \cdot A = A$ e $A \cdot I_n = A$.

Demonstração:

(a) Distributiva: Sejam $A = (a_{ik}) \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$ e $B = (b_{kj})$ e $C = (c_{kj})$ em $M_{p\times n}(\mathbb{R})$. Então,

$$\begin{aligned}
\big(A \cdot (B + C)\big)_{ij} &\overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot (B + C)_{kj} \overset{(2)}{=} \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot (b_{kj} + c_{kj}) \\
&\overset{(3)}{=} \sum_{k=1}^{p} (a_{ik} \cdot b_{kj} + a_{ik} \cdot c_{kj}) \\
&\overset{(4)}{=} \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj} + \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot c_{kj} \\
&\overset{(5)}{=} (A \cdot B)_{ij} + (A \cdot C)_{ij} \\
&\overset{(6)}{=} (A \cdot B + A \cdot C)_{ij},
\end{aligned}$$

Em (1) usamos a definição da multiplicação de A por $B + C$; em (2), a definição de $B + C$; em (3), a distributividade em $\mathbb{R}$; em (4), a comutatividade e associatividade da adição em $\mathbb{R}$; em (5), as definições de $A \cdot B$ e $A \cdot C$; em (6), a definição da adição de matrizes.

para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Logo, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

(b) É análogo ao item anterior e será deixado como Exercício.

(c) Associativa: Sejam $A = (a_{ik}) \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$, $B = (b_{k\ell}) \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$ e $C = (c_{\ell j}) \in M_{q\times n}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\big(A \cdot (B \cdot C)\big)_{ij} &\overset{(7)}{=} \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot (B \cdot C)_{kj} \\
&\overset{(8)}{=} \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot \left(\sum_{\ell=1}^{q} b_{k\ell} \cdot c_{\ell j} \right) \\
&\overset{(9)}{=} \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{\ell=1}^{q} a_{ik} \cdot (b_{k\ell} \cdot c_{\ell j}) \right) \\
&\overset{(10)}{=} \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{\ell=1}^{q} (a_{ik} \cdot b_{k\ell}) \cdot c_{\ell j} \right)
\end{aligned}$$

Em (7) usamos a definição da multiplicação de A por $B \cdot C$; em (8), a definição de $B \cdot C$; em (9), a distributividade em $\mathbb{R}$; em (10), a associatividade da multiplicação em $\mathbb{R}$.

Em (11) usamos a comutatividade e associatividade da adição em $\mathbb{R}$; em (12), a distributividade em $\mathbb{R}$; em (13), a definição de $A \cdot B$; em (14), a definição da multiplicação de $A \cdot B$ por C.

$$\begin{aligned}
&\overset{(11)}{=} \sum_{\ell=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{p} (a_{ik} \cdot b_{k\ell}) \cdot c_{\ell j} \right) \\
&\overset{(12)}{=} \sum_{\ell=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{p} (a_{ik} \cdot b_{k\ell}) \right) \cdot c_{\ell j} \\
&\overset{(13)}{=} \sum_{\ell=1}^{q} (A \cdot B)_{i\ell} \cdot c_{\ell j} \\
&\overset{(14)}{=} \big((A \cdot B) \cdot C \big)_{ij},
\end{aligned}$$

para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Logo, $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

(d) Sejam $k \in \mathbb{R}$, $A \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$. Então,

Em (15) usamos a definição da multiplicação por escalar; em (16), definição de $A \cdot B$; em (17), a distributividade em $\mathbb{R}$; em (18), a associatividade em $\mathbb{R}$; em (19), a definição da multiplicação por escalar; em (20), a definição da multiplicação de matrizes.

$$\begin{aligned}
\big(k \cdot (A \cdot B) \big)_{ij} &\overset{(15)}{=} k \cdot (A \cdot B)_{ij} \\
&\overset{(16)}{=} k \cdot \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj} \right) \\
&\overset{(17)}{=} \sum_{k=1}^{p} k \cdot (a_{ik} \cdot b_{kj}) \\
&\overset{(18)}{=} \sum_{k=1}^{p} (k \cdot a_{ik}) \cdot b_{kj} \\
&\overset{(19)}{=} \sum_{k=1}^{p} (k \cdot A)_{ik} \cdot b_{kj} \\
&\overset{(20)}{=} \big((k \cdot A) \cdot B \big)_{ij},
\end{aligned}$$

para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Logo, $k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B$.

A outra igualdade é análoga e será deixada como Exercício, assim como o item (e), que é uma simples verificação. ■

Definição 6 (Transposta)

As linhas de A são as colunas de A^t, equivalentemente, as colunas de A são as linhas de A^t.

Seja $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. A matriz *transposta* de A, denotada por A^t, é a matriz $A^t = (b_{ji}) \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ definida por $b_{ji} = a_{ij}$, para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Exemplo 8

Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Então,

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R}) \text{ e } B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

Proposição 5 (Propriedades da transposta)

Valem as seguintes propriedades:

(a) $(A + B)^t = A^t + B^t$, para quaisquer $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(b) $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$, para quaisquer $k \in \mathbb{R}$ e $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(c) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$, para quaisquer $A \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$.

(d) $\left(A^t\right)^t = A$, para qualquer $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Demonstração:

(a) Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então,

$$\left((A+B)^t\right)_{ji} \overset{(1)}{=} \left(A+B\right)_{ij} \overset{(2)}{=} a_{ij} + b_{ij} \overset{(3)}{=} (A^t)_{ji} + (B^t)_{ji} \overset{(4)}{=} \left(A^t + B^t\right)_{ji},$$

para todo $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. Logo, $(A+B)^t = A^t + B^t$.

Em (1) usamos a definição de transposta; em (2), a definição de $A+B$; em (3), a definição de transposta de A e de B; em (4), a definição de adição de matrizes.

Deixamos como Exercício a demonstração dos outros itens. ■

Definição 7 (Matriz invertível)

Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Dizemos que A é *invertível* se, e somente se, existe $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Nesse caso, dizemos que B é a *inversa* de A e denotamos $B = A^{-1}$.

Exemplo 9

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Então, A é invertível e $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Para verificar a afirmação, faça o produto das duas matrizes.

Exemplo 10

Consideremos $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, com $ad - bc \neq 0$. Então, A é invertível e $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Observação: No exemplo anterior, o determinante da matriz A de ordem 2 é $\det(A) = ad - bc \neq 0$. Em geral, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é invertível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

O conceito de determinante será estudado em Álgebra Linear II.

Exemplo 11

Consideremos $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$. Verifique que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 12

Vamos determinar, caso exista, a inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ em $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Suponhamos que exista $B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$ tal que $A \cdot B = I_3$. Então,

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1 + 0y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} z_1 + 0z_2 + z_3 = 0 \\ z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ 2z_1 + 2z_2 + z_3 = 1 \end{cases}$$

Assim, A tem inversa B se, e somente se, os sistemas acima têm solução. Resolvendo os sistemas, obtemos: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ e $x_3 = 0$; $y_1 = -2$, $y_2 = 1$ e $y_3 = 2$; $z_1 = 1$, $z_2 = 0$ e $z_3 = -1$. Logo, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Na próxima Seção vamos aprender a resolver sistemas de *equações lineares com coeficientes reais* e apresentaremos um algoritmo para calcular, caso exista, a inversa de uma matriz.

Encerramos com a definição de um tipo especial de matriz.

Definição 8 (Matriz ortogonal)
Dizemos que uma matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é *ortogonal* se, e somente se, A é invertível e $A^{-1} = A^t$.

Exemplo 13
Verifique que as seguintes matrizes são ortogonais: $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$.

Exercícios

1. Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$. Determine:

   (a) $A + B$, (b) $2A - 3B$, (c) AC, (d) CD,
   (e) DA, (f) A^tB, (g) $2AC - 3BC$.

2. Determine os valores de $x, y \in \mathbb{R}$ para que as matrizes sejam iguais:

   (a) $A = \begin{pmatrix} x^2 - 40 & y^2 + 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 41 & 13 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 7 & y \\ 4 & x^2 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 10x-25 \end{pmatrix}$.

3. Determine, caso exista, uma matriz $B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $B^2 = A$, onde $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Seja $e_i = (c_{11}, \ldots, c_{1m})$, onde $c_{1k} = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq i \\ 1, & \text{se } k = i \end{cases}$, para $k = 1, \ldots, m$.

   (a) Mostre que se $B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, então vale a igualdade $e_i B = (b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{in})$.

   (b) Mostre que se $A = (a_{ij}) \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, então $A{e_j}^t = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$.

5. Mostre que:

   (a) $(A+B)^t = A^t + B^t$, para todo $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

   (b) $(cA)^t = cA^t$, para todo $c \in \mathbb{R}$ e $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

   (c) $(AB)^t = B^t A^t$, para todo $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$.

   (d) $(A^t)^t = A$, para todo $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

6. Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. A é dita *simétrica* se, e somente se, $A^t = A$ e A é dita *antisimétrica* se, e somente se, $A^t = -A$. Mostre que:

   (a) Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é simétrica e antisimétrica, então $A = 0$.

   (b) Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, então $A+A^t$ é simétrica e $A-A^t$ é antisimétrica.

   (c) Para cada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, existem $B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, univocamente determinadas, tais que B é simétrica, C é antisimétrica e $A = \frac{1}{2}(B+C)$.

7. Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Mostre que $AB = AC$.

8. Sejam A, B, C matrizes com coeficientes reais tais que $A \neq 0$ e $AB = AC$. Responda, justificando a sua resposta:

   (a) $B = C$?

   (b) Se existe uma matriz D, tal que $DA = I$, onde I é a matriz identidade, então $B = C$?

   (c) No exercício anterior, existe uma matriz D tal que $DA = I$?

9. Sejam $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertíveis. Mostre que:

   (a) AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

   (b) Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, aA é invertível e $(aA)^{-1} = a^{-1}A^{-1}$.

10. Mostre que se $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ são ortogonais, então AB é ortogonal.

11. Sejam $A, C \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ com C invertível.

    (a) Mostre que $(C^{-1}AC)^n = C^{-1}A^nC$, para todo $n \geq 1$.

    (b) Mostre que se A é invertível, então $(C^{-1}AC)^n = C^{-1}A^nC$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

12. Diga quais das afirmações são falsas ou verdadeiras, justificando a sua resposta:

    (a) Sejam $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$. Se $AB = 0$, então $A = 0$ ou $B = 0$.

    (b) Sejam $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ e $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Então, $(k_1A)(k_2B) = (k_1k_2)AB$.

    (c) Se A e B são matrizes simétricas, então $AB = BA$.

    (d) Se $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, então $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

    (e) Se $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, então $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

Sistemas de equações lineares

Definição 9 (Sistema de equações lineares e forma matricial)
Um *sistema de* m *equações lineares a* n *incógnitas* com coeficientes reais é um conjunto de equações do tipo

$$(\star)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & (E_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 & (E_2) \\ \qquad\vdots & \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i & (E_i) \\ \qquad\vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m & (E_m), \end{cases}$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e $b_j \in \mathbb{R}$, para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Uma *solução* de $(\star)$ é uma n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, com $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ que satisfaça às equações $E_1, \ldots, E_m$ simultaneamente.

Chamamos $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}, \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ de *matriz dos coeficientes* ou *matriz associada ao sistema*, a matriz coluna $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, de *matriz das incógnitas*, e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$, de *matriz dos termos independentes*.

O sistema $(\star)$ se reescreve *na forma matricial* como $AX = B$.

Exemplo 14
O sistema de equações lineares $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$ tem a seguinte forma matricial $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exemplo 15
O sistema de equações lineares $\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x + 5y - z = 3 \end{cases}$ tem a forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Definição 10 (Sistemas equivalentes)
Dois sistemas são ditos *equivalentes* se, e somente se, têm as mesmas soluções.

Para resolver um sistema vamos substituir o sistema dado por outro, com equações mais simples, mas com as mesmas soluções. Quais as operações sobre as equações de um sistema que determinam um sistema equivalente? A resposta está a seguir.

Proposição 6
As seguintes operações sobre as equações $E_1, \dots, E_m$ do sistema de equações lineares com coeficientes reais $(\star)$ determinam um sistema equivalente:

(I) Trocar de posição as equações E_i e E_j, $i \neq j$, e manter as outras equações. Denotamos por $E_i \leftrightarrow E_j$.

(II) Substituir E_i por cE_i, $c \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$, e manter as outras equações. Denotamos por $E_i \to cE_i$.

(III) Substituir E_i por $E_i + cE_j$, $i \neq j$, $c \in \mathbb{R}$, e manter as outras equações. Denotamos por $E_i \to E_i + cE_j$.

Demonstração: Seja $(\star\star)$ o sistema com equações $E'_1, \dots, E'_m$ obtido de $(\star)$ após uma das operações do tipo (I), ou (II), ou (III). Devemos mostrar que $(x_1, \dots, x_n)$ é solução de $(\star)$ se, e somente se, $(x_1, \dots, x_n)$ é solução de $(\star\star)$.

Caso 1 - Operação do tipo (I): $E_i \leftrightarrow E_j$.

É claro que a ordem em que as equações são escritas não altera o conjunto S das soluções do sistema, pois $S = \bigcap_{k=1}^{m} S_k$, onde S_k é o conjunto solução de E_k.

Caso 2 - Operação do tipo (II): $E_i \to cE_i$, com $c \neq 0$.

Seja $(x_1, \dots, x_n)$ uma solução de $(\star)$. Então, $(x_1, \dots, x_n)$ é solução de $E'_j = E_j$, para todo $j \neq i$, e de E_i. Portanto, $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ e, multiplicando essa igualdade por c, obtemos $c \cdot \big(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n\big) = c \cdot b_i$. Logo, $(c \cdot a_{i1})x_1 + \cdots + (c \cdot a_{in})x_n = c \cdot b_i$. Portanto, $(x_1, \dots, x_n)$ também é solução de $E'_i = cE_i$. Logo, é solução de $(\star\star)$. Reciprocamente, suponhamos que $(x_1, \dots, x_n)$ seja solução de $(\star\star)$. Então, $(x_1, \dots, x_n)$ é solução de $E_j = E'_j$, para todo $j \neq i$, e de $E'_i = cE_i$. Assim, $(c \cdot a_{i1})x_1 + \cdots + (c \cdot a_{in})x_n = c \cdot b_i$, que é equivalente a $c \cdot \big(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n\big) = c \cdot b_i$. Como $c \neq 0$, multiplicando essa igualdade por c^{-1}, obtemos $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$, logo $(x_1, \ldots, x_n)$ é solução de E_i. Portanto, $(x_1, \ldots, x_n)$ é solução de $(\star)$.

Caso 3 - Operação do tipo (III): $E_i \longrightarrow E_i + cE_j$.

Seja $(x_1, \ldots, x_n)$ uma solução de $(\star)$. Então, $(x_1, \ldots, x_n)$ é solução de $E'_k = E_k$, para todo $k \neq i$, e de E_i. Portanto, $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ e, como $j \neq i$, $c \cdot \big(a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n\big) = c \cdot b_j$. Logo, somando essas igualdades, $(a_{i1} + ca_{j1})x_1 + \cdots + (a_{in} + ca_{jn})x_n = b_i + c \cdot b_j$. Portanto, $(x_1, \ldots, x_n)$ é solução de $E'_j = E_i + cE_j$. Logo, $(x_1, \ldots, x_n)$ é solução de $(\star\star)$. Reciprocamente, suponhamos que $(x_1, \ldots, x_n)$ é solução de $(\star\star)$. Então, $(x_1, \ldots, x_n)$ é solução de $E_k = E'_k$, para todo $k \neq i$, e de $E'_i = E_i + cE_j$. Logo, $(a_{i1} + ca_{j1})x_1 + \cdots + (a_{in} + ca_{jn})x_n = b_i + c \cdot b_j$ e, como $j \neq i$, $a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j$. Multiplicando a última igualdade por c, obtemos $(c \cdot a_{j1})x_1 + \cdots + (c \cdot a_{jn})x_n = c \cdot b_j$. Subtraindo esse valor de $(a_{i1} + ca_{j1})x_1 + \cdots + (a_{in} + ca_{jn})x_n = b_i + c \cdot b_j$, obtemos $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$. Portanto, $(x_1, \ldots, x_n)$ é solução de E_i. Logo, $(x_1, \ldots, x_n)$ é solução de $(\star)$. ■

Multiplicando E_j por c, obtemos cE_j.

Resolvemos o sistema substituindo-o por um sistema equivalente, por meio das operações descritas acima. Como simplificamos as equações do sistema? A ideia é eliminar incógnitas, escrevendo equações equivalentes com menos incógnitas.

Exemplo 16

Vamos resolver o sistema do Exemplo 14.

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \sim_1 \begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \sim_2 \begin{cases} x + 3y = 1 \\ \quad -7y = 1 \end{cases} \sim_3 \begin{cases} x + 3y = 1 \\ \quad y = -\frac{1}{7} \end{cases}$$
$$\sim_4 \begin{cases} x = \frac{10}{7} \\ y = -\frac{1}{7} \end{cases}$$

Fizemos a seguinte sequência de operações sobre as equações:

em $\sim_1$: $E_1 \leftrightarrow E_2$ (destacando a incógnita x em E_1),

em $\sim_2$: $E_2 \longrightarrow E_2 - 2E_1$ (eliminando a incógnita x de E_2),

em $\sim_3$: $E_2 \longrightarrow -\frac{1}{7}E_2$ (destacando a incógnita y em E_2),

em $\sim_4$: $E_1 \longrightarrow E_1 - 3E_2$, (eliminando a incógnita y de E_1).

Exemplo 17

Vamos resolver o sistema do Exemplo 15.

$$\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x + 5y - z = 3 \end{cases} \sim_1 \begin{cases} x + 3y + z \quad = 1 \\ \quad -y - 3z = 1 \end{cases} \sim_2 \begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ \quad y + 3z = -1 \end{cases}$$

$$\sim_3 \begin{cases} x - 8z = 4 \\ y + 3z = -1 \end{cases}$$

Fizemos a seguinte sequência de operações sobre as equações do sistema:

em $\sim_1$: $E_2 \to E_2 - 2E_1$ (eliminando a indeterminada x em E_2),

em $\sim_2$: $E_2 \leftrightarrow -E_2$ (destacando a indeterminada y em E_2),

em $\sim_3$: $E_1 \to E_1 - 3E_2$ (eliminando a indeterminada y em E_1).

Não há mais incógnitas que possam ser eliminadas. O conjunto solução do sistema é:

$$\{(x, y, z) \; ; \; x - 8z = 4 \text{ e } y + 3z = -1\} = \{(8z + 4, -3z - 1, z) \; ; \; z \in \mathbb{R}\}.$$

Observamos que cada operação sobre as equações do sistema, que não altera o conjunto solução, corresponde, de maneira natural, a uma operação sobre as linhas da matriz dos coeficientes A e, simultaneamente, nas mesmas linhas da matriz dos termos independentes B, motivando a seguinte definição.

Definição 11 (Matriz ampliada associada ao sistema)

Consideremos o sistema $AX = B$, onde $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ e $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. A *matriz ampliada* associada ao sistema é $\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array} \right)$ em $M_{m\times(n+1)}(\mathbb{R})$.

Assim, cada operação sobre as equações do sistema que não altera o conjunto solução corresponde, de maneira natural, a uma operação sobre as linhas da matriz ampliada, chamada de *operação elementar*.

Exemplo 18

No exemplo anterior, a sequência de matrizes ampliadas obtidas é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \end{array} \right) \sim_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array} \right) \sim_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right).$$

É claro que não há mais incógnitas a eliminar, pois as simplificações das correspondentes equações terminaram.

Definição 12 (Operações elementares)

Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. São operações elementares sobre as linhas de A:

(I) Trocar as linhas L_i e L_j de posição, $i \neq j$, e manter as outras linhas de A. Denotamos por $L_i \leftrightarrow L_j$.

(II) Substituir a i-ésima linha L_i por cL_i, $c \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$, e manter as outras linhas de A. Denotamos por $L_i \to cL_i$.

(III) Substituir a i-ésima linha L_i por $L_i + cL_j$, onde $i \neq j$, $c \in \mathbb{R}$, e manter as outras linhas de A. Denotamos por $L_i \to L_i + cL_j$.

Definição 13 (Matrizes equivalentes por linhas)
Duas matrizes são *equivalentes por linhas* se uma pode ser obtida da outra por uma sequência finita de operações elementares.

Proposição 7
Dois sistemas que têm matrizes ampliadas equivalentes por linhas são sistemas equivalentes, isto é, têm as mesmas soluções.

Demonstração: Consideremos o sistema $AX = B$. Digamos que a matriz ampliada $\left(A \,\middle|\, B \right)$ é equivalente por linhas à matriz $\left(A' \,\middle|\, B' \right)$. Portanto, os sistemas $AX = B$ e $A'X = B'$ podem ser obtidos um do outro por uma sequência finita de operações sobre as equações que não alteram as soluções. Logo, são sistemas equivalentes. ■

Definição 14 (Matriz reduzida à forma em escada ou escalonada)
Dizemos que a matriz m por n com coeficientes reais está reduzida por linhas à *forma em escada* ou *escalonada* se, e somente se,

(a) o primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1;

(b) cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero;

(c) toda linha nula ocorre abaixo das linhas não nulas;

(d) se as linhas $1, \ldots, r$, com $r \leq m$, são as linhas não nulas e o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$.

Se a matriz tem apenas as propriedades (a) e (b) dizemos que está *reduzida por linhas.*

Exemplo 19
São exemplos de matrizes reduzidas à forma em escada: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. A matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ está reduzida por linhas.
Fazendo a sequência de operações elementares: $L_1 \leftrightarrow L_4$, $L_2 \leftrightarrow L_4$, obtemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

, matriz reduzida à forma em escada.

Observação: Cada matriz é equivalente por linhas a uma única matriz à forma em escada.

Para resolver o sistema $AX = B$, construímos a matriz ampliada associada ao sistema $\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array} \right)$ e reduzimos por linhas à forma em escada, digamos $R = \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \end{array} \right)$. Então, o conjunto solução do sistema proposto é o mesmo de $A'X = B'$, cujas equações são mais simples, pois eliminamos incógnitas. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 20

Consideremos o sistema $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ 3x + y + z = 4. \end{cases}$

Construindo a matriz ampliada associada ao sistema e reduzindo por linhas à forma em escada, temos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 11 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \sim_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & -2 & -24 \\ 0 & -2 & -2 & -14 \end{array} \right) \sim_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & -2 & -24 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{array} \right) \sim_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -7 & -2 & -24 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim_4 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{array} \right) \sim_5 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{array} \right) \sim_6$$

$$\sim_7 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Fizemos a seguinte sequência de operações elementares:

em $\sim_1$: $L_2 \to L_2 - 2L_1$, $L_3 \to L_3 - 4L_1$ e $L_4 \to L_4 - 3L_1$ (eliminando a incógnita x de E_2, E_3 e E_4);

em $\sim_2$: $L_4 \to -\frac{1}{2}L_4$ (destacando a incógnita y em E_4);

em $\sim_3$: $L_2 \leftrightarrow L_4$ (trocando E_2 e E_4 de posição);

em $\sim_4$: $L_1 \to L_1 - L_2$, $L_3 \to L_3 + 7L_2$ e $L_4 \to L_4 + 3L_1$ (eliminando a incógnita y de E_1, E_3 e E_4);

em $\sim_5$: $L_3 \to \frac{1}{5}L_3$ (destacando a incógnita z em E_3);

em $\sim_6$: $L_2 \to L_2 - 5L_3$ e $L_4 \to L_4 - 4L_3$ (eliminando a incógnita z de E_2 e E_4).

A matriz ampliada associada ao sistema está reduzida por linhas à forma em escada. O sistema dado é equivalente ao sistema $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 5 \\ 0x + 0y + 0z = 0, \end{cases}$

cujo conjunto solução é $S = \{(-1, 2, 5)\}$. O sistema tem uma única solução.

Exemplo 21

Consideremos o sistema $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ 3x + y + z = 10. \end{cases}$

Construindo a matriz ampliada associada ao sistema e reduzindo por linhas à forma em escada, temos

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 11 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \sim_1 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & -2 & -24 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{array}\right) \sim_2 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & -2 & -24 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\sim_3 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -2 & -24 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim_4 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 11 \end{array}\right) \sim_5 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 11 \end{array}\right)$$

$$\sim_6 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 39 \end{array}\right) \sim_7 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_8 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Fizemos a seguinte sequência de operações elementares:

em $\sim_1$: $L_2 \to L_2 - 2L_1$, $L_3 \to L_3 - 4L_1$ e $L_4 \to L_4 - 3L_1$ (eliminando a incógnita x de E_2, E_3 e E_4);

em $\sim_2$: $L_4 \to -\frac{1}{2}L_4$ (destacando a incógnita y em E_4);

em $\sim_3$: $L_2 \leftrightarrow L_4$ (trocando E_2 e E_4 de posição);

em $\sim_4$: $L_1 \to L_1 - L_2$, $L_3 \to L_3 + 7L_2$ e $L_4 \to L_4 + 3L_1$ (eliminando a incógnita y de E_1, E_3 e E_4);

em $\sim_5$: $L_3 \to L_3 - L_4$ (destacando a incógnita z em E_3);

em $\sim_6$: $L_2 \rightarrow L_2 - L_3$ e $L_4 \rightarrow L_4 - 4L_3$ (eliminando a incógnita z de E_2 e E_4);

em $\sim_7$: $L_4 \rightarrow -\frac{1}{39}L_4$ (fazendo o primeiro elemento não nulo de L_4 igual a 1);

em $\sim_8$: $L_1 \rightarrow L_1 + L_4$, $L_2 \rightarrow L_2 - 14L_4$ e $L_3 \rightarrow L_3 + 7L_4$ (fazendo nulos os elementos acima do primeiro elemento não nulo em L_4).

A matriz ampliada associada ao sistema está reduzida por linhas à forma em escada. O sistema dado é equivalente ao sistema $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 1, \end{cases}$

que não tem solução. Logo, o sistema proposto não tem solução.

Poderíamos ter parado em $\sim_6$. A equação $0x + 0y + 0z = 39$ não tem solução com $x, y, z \in \mathbb{R}$, logo o sistema proposto não tem solução.

Exemplo 22

Consideremos o sistema $\begin{cases} y + 3z - 2w = 2 \\ 2x + y - 4z + 3w = 1 \\ 2x + 3y + 2z - w = 5 \\ 2y + 6z - 4w = 4. \end{cases}$

Construindo a matriz ampliada associada ao sistema e reduzindo por linhas à forma em escada, temos

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & -4 & 4 \end{array}\right) \sim_1 \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -7 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim_3 \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Fizemos a seguinte sequência de operações elementares:

em $\sim_1$: $L_2 \rightarrow L_2 - L_1$, $L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1$ e $L_4 \rightarrow L_4 - 2L_1$ (eliminando a incógnita y de E_2, E_3 e E_4);

em $\sim_2$: $L_3 \rightarrow L_3 - L_2$ (eliminando equação desnecessária);

em $\sim_3$: $L_2 \rightarrow \frac{1}{2}L_2$ (destacando a incógnita x em E_2);

em $\sim_4$: $L_2 \leftrightarrow L_1$ (obtendo a forma em escada).

A matriz ampliada associada ao sistema está reduzida por linhas à forma em escada. O sistema dado é equivalente ao sistema $\begin{cases} x - \frac{7}{2}z + \frac{5}{2}w = -\frac{1}{2} \\ y + 3z - 2w = 2. \end{cases}$

As incógnitas x e y dependem dos valores de z e w. O conjunto solução do sistema proposto é

$$S = \left\{ \left(\tfrac{7}{2}z - \tfrac{5}{2}w - \tfrac{1}{2}, -3z + 2w + 2, z, w \right) \ ; \ z, w \in \mathbb{R} \right\}.$$

O sistema tem uma infinidade de soluções.

Exemplo 23

Consideremos o sistema $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

Como $B = 0$, não é necessário construir a matriz ampliada. Resolvemos o sistema reduzindo por linhas a matriz A associada ao sistema.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim_5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R.$$

Fizemos a seguinte sequência de operações elementares para obtermos a matriz R, reduzida à forma em escada:

em $\sim_1$: $L_2 \to L_2 - L_1$, $L_3 \to L_3 - L_1$ e $L_4 \to L_4 - L_1$ (eliminando a incógnita x_1 de E_2, E_3 e E_4);

em $\sim_2$: $L_2 \leftrightarrow \frac{1}{2}L_1$ (destacando a incógnita x_2 em E_2);

em $\sim_3$: $L_1 \to L_1 + L_2$ e $L_3 \to L_3 - 2L_2$ (eliminando a incógnita x_2 de E_1 e E_3);

em $\sim_4$: $L_3 \leftrightarrow -\frac{1}{2}L_3$ (destacando a incógnita x_3 em E_2);

em $\sim_5$: $L_1 \to L_1 - L_3$ e $L_4 \to L_4 - 2L_3$ (eliminando a incógnita x_3 de E_1 e E_4).

Reescrevendo as equações temos: $x_1 = 0$, $x_2 + x_5 = 0$ e $x_3 + x_4 = 0$. O conjunto solução é

$$S = \{(0, x_2, x_3, -x_3, -x_2) \ ; \ x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Observação: Sejam $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ e X matriz das n incógnitas.

(a) O sistema $AX = 0$ sempre admite solução, pois pelo menos $x_1 = \cdots = x_n = 0$ é solução, isto é, $(0, 0, \ldots, 0)$ é uma solução do sistema.

(b) Seja $R = \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \end{array}\right)$ a matriz reduzida à forma em escada equivalente por linhas a $\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right)$. O sistema $AX = B$ admite solução se, e somente se, cada linha nula de A' corresponde a uma linha nula de R.

Definição 15 (Classificação das soluções do sistema $AX = B$)
O sistema $AX = B$ se classifica, de acordo com as soluções, como:

(a) *possível e determinado*, se tem uma única solução;

(b) *possível e indeterminado*, se tem uma infinidade de soluções;

(c) *impossível*, se não tem solução.

Quando $B = 0$, o sistema $AX = 0$, chamado *sistema homogêneo*, é sempre possível. Nesse caso, só podem ocorrer (a) ou (b).

Definição 16 (Posto de uma matriz)
O *posto* de uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é o número de linhas não nulas de R, a matriz reduzida por linhas à forma em escada equivalente a A.

Exemplo 24
As matrizes A e B são matrizes reduzidas à forma em escada:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Temos $\text{posto}(A) = 2$ e $\text{posto}(B) = 3$.

A matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tem posto 2, pois reduzindo por linhas temos:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = R.$$

Logo, $\text{posto}(C) = 2$, o número de linhas não nulas de R.

Teorema 1
Seja o sistema $AX = B$, onde $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ e $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Então:

(a) O sistema de m equações lineares a n incógnitas admite solução se, e somente se, o posto da matriz ampliada $\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right)$ é igual ao posto da matriz dos coeficientes A.

(b) Se as duas matrizes têm o mesmo posto r e $r = n$, então a solução é única.

(c) Se as duas matrizes têm o mesmo posto r e $r < n$, podemos escolher $n - r$ incógnitas e haverá r incógnitas dadas em função das $n - r$ escolhidas. Dizemos que o *grau de liberdade* é $n - r$.

Demonstração: (a) Seja $R = \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \end{array}\right)$ a matriz reduzida à forma em escada equivalente a $\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right)$. O sistema $AX = B$ tem solução se, e somente se, cada linha nula de A' corresponde a uma linha nula de R se, e somente se, $\text{posto}(A) = \text{posto}(A') = \text{posto}(R) = \text{posto}\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right)$.

posto(A') < posto(R) se, e somente se, $A'X = B'$ é impossível.

(b) Nesse caso, a matriz $R = \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & B'' \\ \hline 0_1 & 0_2 \end{array}\right)$, onde 0_1 e 0_2 são as matrizes nulas $(m-n) \times n$ e $(m-n) \times 1$, logo a solução é $X = B''$ e é unica.

(c) Digamos que $1 \leq k_1 < \cdots < k_r \leq n$, com $r < n$, são as colunas onde ocorre o primeiro elemento não nulo de cada linha não nula de A'. Então, as r incógnitas x_{k_j}, $j = 1, \ldots, r$, podem ser obtidas em função dos valores das outras $n - r$ incógnitas. ■

Exemplo 25

Verifique que no Exemplo 23 $r = \text{posto}(A) = \text{posto}(A|0) = 3 < 5 = n$ e o grau de liberdade é $n - r = 5 - 3 = 2$. O sistema é possível e indeterminado. As soluções dependem dos valores atribuídos a duas das incógnitas.

Exemplo 26

Vamos resolver o sistema $\begin{cases} x + y + z + 3w + t = 1 \\ y + 2z + w = 1 \\ -y + z - 7w + t = 1 \\ 2y + 6z - 2w + 2t = 2 \\ x + 2y + 3z + 4w + t = 2. \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -7 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim_1 \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -7 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_2$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim_3 \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim_4$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim_5 \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim_6$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = R = \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \end{array} \right).$$

Fizemos a seguinte sequência de operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada:

em $\sim_1$: $L_5 \to L_5 - L_1$ (eliminando a incógnita x de E_5);

em $\sim_2$: $L_1 \to L_1 - L_2$, $L_3 \to L_3 + L_2$, $L_4 \to L_4 - 2L_2$ e $L_5 \to L_5 - L_2$ (eliminando a incógnita y de E_1, E_3, E_4 e E_5);

em $\sim_3$: $L_3 \to L_3 - L_4$ (destacando a incógnita z);

em $\sim_4$: $L_1 \to L_1 + L_3$, $L_2 \to L_2 - 2L_3$, $L_4 \to L_4 - 2L_3$(eliminando a incógnita z de E_1, E_2 e E_4);

em $\sim_5$: $L_4 \to \frac{1}{4}L_4$ (destacando a incógnita t em E_4);

em $\sim_6$: $L_2 \to L_2 - 2L_4$ e $L_3 \to L_3 + L_4$ (eliminando a incógnita t de E_2 e E_3).

Como $r = \text{posto}(R) = \text{posto}(A') = 4 < 5 = n$, então o sistema é possível e indeterminado e o grau de liberdade é $n - r = 5 - 4 = 1$. Reescrevendo as equações do sistema, temos: $x = 2$, $y + 5w = -1$, $z - 2w = 1$ e $t = -1$. O conjunto solução é

$$S = \{(2, -5w - 1, 2w + 1, w, -1) \; ; \; w \in \mathbb{R}\}.$$

Exemplo 27

Vamos determinar condições sobre $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que o sistema

$$\begin{cases} 5x - 4y = a \\ -4x + 2y = b \\ -3x + 3y = c \end{cases}$$

tenha solução.

Vamos reduzir por linhas a matriz ampliada associada ao sistema.

$$\left(\begin{array}{rr|l} 5 & -4 & a \\ -4 & 2 & b \\ -3 & 3 & c \end{array}\right) \sim_1 \left(\begin{array}{rr|l} 1 & -2 & a+b \\ -4 & 2 & b \\ -3 & 3 & c \end{array}\right) \sim_2 \left(\begin{array}{rr|l} 1 & -2 & a+b \\ 0 & -6 & 4a+5b \\ 0 & -3 & 3a+3b+c \end{array}\right) \sim_3$$

$$\left(\begin{array}{rr|l} 1 & -2 & a+b \\ 0 & 0 & -2a-b-2c \\ 0 & -3 & 3a+3b+c \end{array}\right).$$

Fizemos a seguinte sequência de operações elementares:

em $\sim_1$: $L_1 \to L_1 + L_2$ (destacando a incógnita x em E_1);

em $\sim_2$: $L_2 \to L_2 + 4L_1$ e $L_3 \to L_3 + 3L_1$ (eliminando a incógnita x em E_2 e E_3);

em $\sim_3$: $L_2 \to L_2 - 2L_3$ (eliminando a incógnita y em E_2).

Podemos parar o procedimento após $\sim_3$. O sistema proposto tem solução se, e somente se, o posto da matriz ampliada é igual a 2 (o posto da matriz associada ao sistema) se, e somente se, $-2a - b - 2c = 0$.

Como $2 = r = n$, vemos que nesse caso o sistema é determinado.

Exemplo 28

Vamos determinar condições sobre $a \in \mathbb{R}$ para que o sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ 4x + 3y + az = 2 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

(i) não tenha solução;

(ii) tenha uma única solução;

(iii) tenha uma infinidade de soluções.

Vamos reduzir por linhas a matriz ampliada associada ao sistema.

$$\left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 1 & 2 & a \\ 4 & 3 & a & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim_1 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & a-8 & 2-4a \\ 0 & 1 & -5 & 1-2a \end{array}\right) \sim_2$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -5 & 1-2a \\ 0 & -1 & a-8 & 2-4a \end{array}\right) \sim_3 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 7 & -1+3a \\ 0 & 1 & -5 & 1-2a \\ 0 & 0 & a-13 & 3-6a \end{array}\right).$$

Fizemos a seguinte sequência de operações elemntares:

em $\sim_1$: $L_2 \to L_2 - 4L_1$ e $L_3 \to L_3 - 2L_1$ (eliminando a incógnita x em E_2 e E_3);

em $\sim_2$: $L_2 \leftrightarrow L_3$ (destacando a incógnita y em E_2);

em $\sim_3$: $L_1 \to L_1 - L_2$ e $L_3 \to L_3 + L_2$ (eliminando a incógnita y em E_1 e E_3).

Para prosseguirmos precisamos saber qual o valor de $a - 13$.

Se $a - 13 \neq 0$, então $A \sim I_3$ e o sistema é possível e determinado.

Se $a - 13 = 0$, então $3 - 6a = 3 - 78 = -75 \neq 0$ e o sistema é impossível.

Portanto, não há valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que o sistema seja possível e indeterminado.

Antes de apresentar o algoritmo para calcular a inversa, se existir, faremos algumas considerações para justificar o procedimento.

Definição 17

Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Dizemos que A tem *inversa à esquerda* D se, e somente se, existe $D \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, tal que $DA = I_n$. Dizemos que A tem *inversa à direita* C se, e somente se, existe $C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, tal que $AC = I_n$.

A seguinte Proposição justificará o algoritmo para determinar se A tem ou não inversa e calculá-la, caso exista.

Proposição 8

Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(a) Se A tem inversa à esquerda D e inversa à direita C, então $D = C$.

(b) A é equivalente por linhas à matriz I_n se, e somente se, o sistema $AX = B$ tem uma única solução, para todo $B \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

(c) A tem inversa à esquerda D se, e somente se, A tem inversa à direita C.

Demonstração:

(a) Suponhamos que $D \cdot A = I_n$ e $A \cdot C = I_n$. Então,

$$D = D \cdot I_n = D \cdot (A \cdot C) = (D \cdot A) \cdot C = I_n \cdot C = C.$$

(b)

($\Longrightarrow$:) Suponhamos que A seja equivalente por linhas a I_n. Resolva o sistema $AX = B$, onde $B \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, fazendo a mesma sequência de operações elementares usada para reduzir por linhas A a I_n.

Então, $\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} I_n & B' \end{array}\right)$ e o sistema tem as mesmas soluções de $I_nX = B'$, que é possível e determinado.

Para a recíproca é suficiente que $AX = B$ seja possível e determinado para algum B.

($\Longleftarrow$:) Suponhamos que $AX = B$ tenha uma única solução, para algum B em $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Seja $R = \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \end{array}\right)$ a matriz reduzida à forma em escada equivalente a $\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right)$. Então, $r = \text{posto}(A') = \text{posto}(R) = n$. Como $A' \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, então A' não tem linha nula e, sendo a reduzida à forma em escada equivalente a A, a única possibilidade é $A' = I_n$.

(c)

($\Longrightarrow$:) Suponhamos que A tenha uma inversa à esquerda D. Então, o sistema $AX = 0$ tem uma única solução. De fato,

$$X = I_n X = (DA)X = D(AX) = D \cdot 0 = 0.$$

Pelo item (b), A é equivalente por linhas a I_n e os sistemas $AX = E_j$ têm uma única solução $C_j \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, para cada $j = 1, \dots, n$, onde $E_j = (e_{i1})$ em $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, é definida por

$$e_{i1} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Para a recíproca de (b) é suficiente a validade da hipótese para $B = 0$.

Definimos $C = (C_1\ C_2 \cdots C_n) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ como a matriz cujas colunas são C_j. Então, $AC = (AC_1\ AC_2 \cdots AC_n) = (E_1\ E_2 \cdots E_n) = I_n$. Logo, C é uma inversa à direita de A. Note que pelo item (a) $C = D$.

($\Longleftarrow$:) Suponhamos que C seja uma inversa à direita de A. Então, $AC = I_n$. Esta igualdade significa que A é uma inversa à esquerda de C. Pelo que foi feito acima, A também é uma inversa à direita de C, portanto $CA = I_n$. ■

Algoritmo para calcular a inversa de $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

Passo 1: Construir a matriz "ampliada" $\left(A \,\middle|\, I_n \right)$.

Passo 2: Determinar a matriz reduzida por linhas à forma em escada $\left(A' \,\middle|\, B' \right)$ equivalente a $\left(A \,\middle|\, I_n \right)$.

Passo 3: Comparar A' e I_n.

Se $A' \neq I_n$, então A não é invertível. Se $A' = I_n$, então A é invertível e $B' = C = A^{-1}$.

Justificativa: O algoritmo, quando A tem inversa, determina a inversa à direita. Os sistemas $AX = E_1$, $AX = E_2$, $\dots$, $AX = E_n$, cuja matriz associada é A, podem ser resolvidos, simultaneamente, usando a mesma sequência de operações elementares, reduzindo por linhas à forma em escada a matriz

$$\left(A \,\middle|\, E_1\ E_2 \cdots E_n \right) = \left(A \,\middle|\, I_n \right).$$

Quando $A' = I_n$, os sistemas têm uma única solução e a solução de $AX = E_j$ é a j-ésima coluna de B'. Assim, a inversa de A é B'. Quando $A' \neq I_n$, A não tem inversa.

Exemplo 29

Vamos determinar, caso exista, a inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Reduzindo por linhas a matriz $(A|I_3)$, obtemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Fizemos a seguinte sequência de operações elementares:

em $\sim_1$: $L_2 \rightarrow L_2 - L_1$ e $L_3 \rightarrow L_3 - 2L_1$;

em $\sim_2$: $L_3 \rightarrow L_3 - L_2$.

Como $A \not\sim I_3$, então A não é invertível.

Exemplo 30

Vamos determinar, caso exista, a inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Reduzindo por linhas a matriz $(A|I_3)$, obtemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim_4$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

Fizemos a seguinte sequência de operações elementares:

em $\sim_1$: $L_2 \rightarrow L_2 - L_1$ e $L_3 \rightarrow L_3 - 2L_1$;

em $\sim_2$: $L_3 \rightarrow L_3 - 2L_2$;

em $\sim_2$: $L_3 \leftrightarrow -L_3$;

em $\sim_4$: $L_1 \rightarrow L_1 - L_3$.

Como $A \sim I_3$, então A é invertível e $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercícios

1. Determine, se possível, o conjunto solução de cada um dos sistemas lineares:

(a) $\begin{cases} 3x + y + 4z = -1 \\ 5x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - 3y + z = 3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} -3x + 3y + 2z + w = -2 \\ 5x + 2y + z - 2w = 1 \\ 2x + 5y + 3z - w = -1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x - z = 0 \\ y - w = 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x - y - 2z - w = 0 \\ 3x + y + 3z + w = 0 \\ x - y - z - 5w = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 4x - 2y - 7z = 0 \\ 2x - 7y - 6z = 0 \\ 3x + 5y - 2z = 0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x + y - 2z + w = 0 \\ 2x - 3z + 4w = 0 \\ 3x - y + w = 0 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x - y - 2z + w = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 6w - t = 0 \\ x - 2y - z + 2w - t = 0 \\ 3x + y - 4z + 7w - t = 0 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} x - 2y + 3w = 3 \\ 3x - 4y - 2z = 0 \\ 2x - 4y + 2w = 2 \\ x + y - 3z + w = 1 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x - 2z + w = 6 \\ 4y + 3z + 2w = -1 \\ -x + 6y - z - w = 2 \end{cases}$ (j) $\begin{cases} x + 2y - w = 2 \\ x + 2z - w = 2 \\ x + 2y + 2z - w = 4 \\ 3x + 4y + 4z - 4w = 8 \end{cases}$

(k) $\begin{cases} x + y + z + 3w + t = 1 \\ y + 2z + w = 1 \\ -y + z - 7w + t = 1 \\ 2y + 6z - 2w + 2t = 2 \end{cases}$ (l) $\begin{cases} 2x + y + z + w = 2 \\ x + y + z = 2 \\ 4x + y + z + 3w = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$

(m) $\begin{cases} x - y + z + w - t = 0 \\ x + y + z + w + t = 0 \\ x + y - z - w + t = 0 \\ x - y + 3z + 3w - t = 0 \end{cases}$ (n) $\begin{cases} 2x + 4y - 8z + 16w = 32 \\ 3x + 6y - 12z + 24w = 48 \\ 2y + 2z + 10w = 16 \\ 3x + 8y - 10z + 30w = 40 \end{cases}$

2. Sejam $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $0, B \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

   (a) Mostre que se X_0 é uma solução do sistema $AX = 0$ e X_1 é uma solução de $AX = B$, então $X_0 + X_1$ é uma solução de $AX = B$.

   (b) Mostre que se X_1 e X_2 são soluções de $AX = B$, então $X_1 - X_2$ é solução de $AX = 0$.

   (c) Mostre que toda solução de $AX = B$ é a soma de uma solução particular X_P de $AX = B$ com uma solução do sistema homogêneo associado $AX = 0$.

3. Determine as condições sobre a, b, c para que o sistema admita solução:

(a) $\begin{cases} x + 8y - 8z = a \\ 5x + 4y - 2z = b \\ 7x - 16y + 20z = c \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + y + 2z = a \\ 2x + 3y - z = b \\ 4x + 5y + 3z = c \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = a \\ -x + 7z = b \\ x + y + z = c \end{cases}$

4. Determine os valores do número real k, caso existam, para que os sistemas admitam:

(i) uma única solução
(ii) mais de uma solução
(iii) nenhuma solução

(a) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + kz = 2 \\ kx + 2y + z = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y + z = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ y + 2z = k \end{cases}$ (d) $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x - 3z = -3 \\ 2x + ky - z = -2 \\ x + 2y + kz = 1 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x + kz = 0 \\ y = 0 \\ kx + z = 0 \end{cases}$

5. Determine, caso exista, a inversa da matriz A:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

6. Determine A, sabendo que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.