Gabarito

Álgebra Linear: AD1 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2011.2

Tutores: Cristina Lopes e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

a) Consideremos os pares ordenados (x, y) em $\mathbb{R}^2$. Substituiremos cada coordenada na equação $y = ax^2 + bx + c$ da parábola.

$(x, y) = (0, 1) \rightarrow 1 = 0.x^2 + b.0 + c \Rightarrow c = 1$

$(x, y) = (-1, 4) \rightarrow 4 = a.(-1)^2 + b.(-1) + c \Rightarrow a - b + c = 4$

$(x, y) = (2, 1) \rightarrow 1 = a.2^2 + b.2 + c \Rightarrow 4a + 2b + c = 1$

Assim, substituindo c por 1, temos que resolver o seguinte sistema (pelo método de Gauss-Jordan):

$$\begin{cases} a - b = 3 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases}$$

Vamos resolver usando a matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & -12 \end{bmatrix}$$

Agora, $L_2 \leftarrow \frac{1}{6}L_2$, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Assim, concluímos que:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

Como já havíamos encontrado $c = 1$, substituindo a, b e c na equação da parábola, temos: $y = x^2 - 2x + 1$.

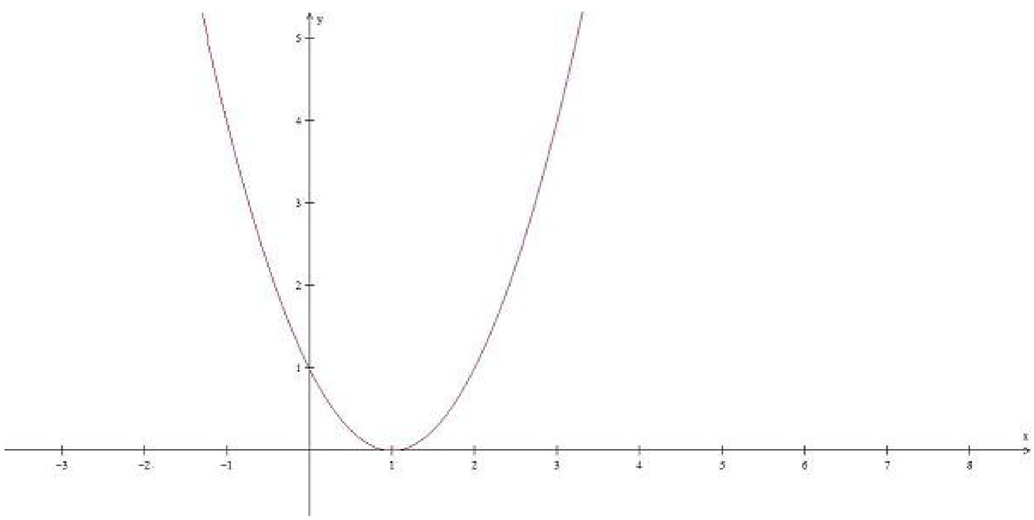

Figura 1: Parábola da função $y = x^2 - 2x + 1$

b) Consideremos os pares ordenados (x, y) em $\mathbb{R}^2$. Substituiremos cada coordenada na equação $y = ax^2 + bx + c$ da parábola.

$(x, y) = (-3, 1) \rightarrow 1 = a.(-3)^2 + b.(-3) + c \Rightarrow 9a - 3b + c = 1$

$(x, y) = (-2, 2) \rightarrow 2 = a.(-2)^2 + b.(-2) + c \Rightarrow 4a - 2b + c = 2$

$(x, y) = (-1, 5) \rightarrow 5 = a.(-1)^2 + b.(-1) + c \Rightarrow a - b + c = 5$

Assim, temos que resolver o seguinte sistema (pelo método de Gauss-Jordan):

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 1 \\ 4a - 2b + c = 2 \\ a - b + c = 5 \end{cases}$$

Vamos resolver usando a matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 9 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_1 \leftarrow \frac{1}{9}L_1$, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ 4 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Agora, $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{-2}{3} & \frac{5}{9} & \frac{14}{9} \\ 0 & \frac{-2}{3} & \frac{8}{9} & \frac{44}{9} \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow \frac{-3}{2}L_2$,

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & \frac{-5}{6} & \frac{-14}{6} \\ 0 & \frac{-2}{3} & \frac{8}{9} & \frac{44}{9} \end{bmatrix}$$

Agora, fazendo $L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{3}L_2$ e $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{2}{3}L_2$, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-5}{6} & \frac{-14}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

Agora, $L_3 \leftarrow 3L_3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-5}{6} & \frac{-7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

E fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{5}{6}L_3$ e $L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{6}L_3$, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

Assim, concluímos que:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 6 \\ c = 10 \end{cases}$$

Substituindo a, b e c na equação da parábola, temos: $y = x^2 + 6x + 10$.

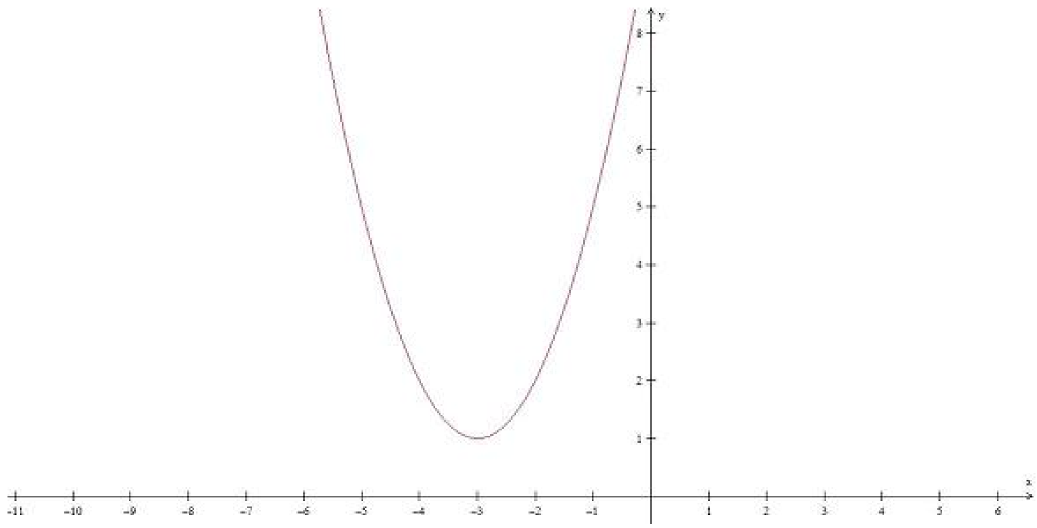

Figura 2: Parábola da função $y = x^2 + 6x + 10$

2^a Questão) Solução:

a) $W = \{(x, y, z) : x + y - z = 0\}$.

Logo $(x, y, z) \in W \Rightarrow (x, y, z) = (z - y, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(1, 0, 1)$.

Vamos verificar se os vetores do conjunto $\{(-1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ são LI's :

Sejam a, b números reais. Os vetores serão LI's se $a(-1, 1, 0) + b(1, 0, 1) = (0, 0, 0) \Longleftrightarrow a, b = 0$. Desse modo, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} -a + b = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Temos por L_2 e L_3 do sistema que $a = 0$ e $b = 0$. Logo o conjunto $\{(-1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ forma uma base para W.

b) Sejam w_1, w_2 vetores da base de W.

$$proj_W u = \frac{(uw_1)}{||w_1||} w_1 + \frac{(uw_2)}{||w_2||} . w_2.$$

Primeiro, vamos ortogonalizar a base usando o método de Gram-Schmidt:

Seja $w_1 = (-1, 1, 0)$.

Temos que

$$w_2 = (1, 0, 1) - \left(\frac{(1, 0, 1)(-1, 1, 0)}{(-1, 1, 0)(-1, 1, 0)}\right)(-1, 1, 0) =$$

$$= (1, 0, 1) - \left(\frac{-1}{2}\right)(-1, 1, 0) =$$

$$= (1, 0, 1) - \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

Logo uma base ortogonal para W é $\left\{(-1, 1, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)\right\}$.

Desse modo, normalizando os vetores da base ortogonal encontramos a projeção do vetor $u = (1, 1, 1)$ sobre W:

$$proj_W u = \left(\frac{(1, 1, 1)(-1, 1, 0)}{2}\right)(-1, 1, 0) + \left(\frac{(1, 1, 1)\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)}{\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$$proj_W u = 0 + \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{4}{6}, \frac{4}{6}, \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

c) $W^\perp = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / (a, b, c)(x, y, z) = 0\}$. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $(x, y, z) \in W$. Considere a base encontrada para W no item a).

Então, temos que $(a, b, c)(-1, 1, 0) = 0$ e $(a, b, c)(1, 0, 1) = 0$. Chegamos ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} -a + b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases}$$

Somando as linhas, concluímos que $b = -c$.

Logo, temos que $W^\perp = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | b = -c\}$.

d) $W^\perp = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | b = -c\}$.

Logo $(a,b,c) = (a,-c,c) = a(1,0,0) + c(0,-1,1)$. Estes vetores são claramentte LI's, logo o conjunto $\{(1,0,0),(0,-1,1)\}$ forma uma base para $W^{\perp}$.

3^a Questão) Solução:

i) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$X - 2A + 3B = 0$$

$$X = 2A - 3B$$

$$X = 2.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 3.\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

ii)

$$2X = A - B$$

$$2X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2}.\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

iii)

$$2(A + 2B) = 3X$$

$$2A + 4B = 3X$$

$$2.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 4.\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 3X$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = 3X$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} = 3X$$

$$X = \frac{1}{3}.\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} & 4 \end{bmatrix}$$

iv)

$$2(A - B + X) = 3(X - A)$$

$$2A - 2B + 2X = 3X - 3A$$

$$2A - 2B + 3A = 3X - 2X$$

$$X = 5A - 2B$$

$$X = 5.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 2.\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 13 & 18 \end{bmatrix}$$

4^a Questão) Solução:

a) Sejam as matrizes $C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Vamos verificar se a matriz C é combinação linear das matrizes A e B. Sejam a e b escalares reais.

$$a.A + b.B = C$$

$$a. \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + b. \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a-b & 2a \\ 3a+b & 4a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Temos então, da igualdade de matrizes, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a - b = 3 \\ 2a = 4 \\ 3a + b = 5 \\ 4a + b = 7 \end{cases}$$

Montando a matriz aumentada do sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3 \\ 2 & 0 & | & 4 \\ 3 & 1 & | & 5 \\ 4 & 1 & | & 7 \end{bmatrix}$$

Escalonando a matriz aumentada do sistema linear, temos, fazendo $L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftrightarrow L_3 - 3L_1$ e $L_4 \leftrightarrow L_4 - 4L_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 2 & | & -2 \\ 0 & 4 & | & -4 \\ 0 & 5 & | & -5 \end{bmatrix}$$

Multiplicando L_2 por $\dfrac{1}{2}$, encontramos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 4 & | & -4 \\ 0 & 5 & | & -5 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftrightarrow L_3 - 4L_2$ e $L_4 \leftrightarrow L_4 - 5L_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, concluímos que:

$$\begin{cases} b = -1 \\ a - b = 3 \Rightarrow a = 3 + b \Rightarrow a = 3 - 1 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

Como $a = 2$ e $b = -1$ são ambos não nulos, temos que a matriz C pode ser escrita como combinação linear das matrizes A e B.

Vamos agora verificar se a matriz D é combinação linear das matrizes A e B. Sejam c e d escalares reais.

$$c.A + d.B = D$$

$$c.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + d.\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c-d & 2c \\ 3c+d & 4c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos então, da igualdade de matrizes, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} c-d=-2 \\ 2c=-2 \\ 3c+d=-2 \\ 4c+d=0 \end{cases}$$

Montando a matriz aumentada do sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & | & -2 \\ 2 & 0 & | & -2 \\ 3 & 1 & | & -2 \\ 4 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Escalonando a matriz aumentada do sistema linear, temos, fazendo $L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftrightarrow L_3 - 3L_1$ e $L_4 \leftrightarrow L_4 - 4L_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 2 & | & 2 \\ 0 & 4 & | & 4 \\ 0 & 5 & | & 8 \end{bmatrix}$$

Multiplicando L_2 por $\frac{1}{2}$, encontramos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 4 & | & 4 \\ 0 & 5 & | & 8 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftrightarrow L_3 - 4L_2$ e $L_4 \leftrightarrow L_4 - 5L_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 3 \end{bmatrix}$$

Assim, como na última linha encontramos $0a + 0b = 3$, ou seja, $0 = 3$, concluímos que o sistema é impossível. Como o sistema não tem solução, a matriz D não pode ser escrita como combinação linear das matrizes A e B.

b) Para determinar o espaço vetorial gerado pelas matrizes A, B e C, basta mostrar que qualquer elemento $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ é representado pela combinação linear: $xA + yB + zC = M$, para $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$$x.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + y.\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + z.\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x - y + 3z & 2x + 4z \\ 3x + y + 5z & 4x + y + 7z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Assim, devemos mostrar que o sistema linear abaixo possui solução.

$$\begin{cases} x - y + 3z = a \\ 2x + 0y + 4z = b \\ 3x + y + 5z = c \\ 4x + y + 7z = d \end{cases}$$

Considere a seguinte matriz aumentada que representa este sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & | & a \\ 2 & 0 & 4 & | & b \\ 3 & 1 & 5 & | & c \\ 4 & 1 & 7 & | & d \end{bmatrix}$$

Escalonando a matriz aumentada do sistema linear, temos, fazendo $L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftrightarrow L_3 - 3L_1$ e $L_4 \leftrightarrow L_4 - 4L_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & | & a \\ 0 & 2 & -2 & | & b-2a \\ 0 & 4 & -4 & | & c-3a \\ 0 & 5 & -5 & | & d-4a \end{bmatrix}$$

Multiplicando L_2 por $\dfrac{1}{2}$, encontramos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & | & a \\ 0 & 1 & -1 & | & \dfrac{b}{2}-a \\ 0 & 4 & -4 & | & c-3a \\ 0 & 5 & -5 & | & d-4a \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftrightarrow L_3 - 4L_2$, $L_4 \leftrightarrow L_4 - 5L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & | & a \\ 0 & 1 & -1 & | & \dfrac{b}{2}-a \\ 0 & 0 & 0 & | & a-2b+c \\ 0 & 0 & 0 & | & a-\dfrac{5b}{2}+d \end{bmatrix}$$

Deste modo, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - y + 3z = a \\ y - z = \frac{b}{2} - a \\ 0 = a - 2b + c \\ 0 = a - \frac{5b}{2} + d \end{cases}$$

Por $L_4 \Rightarrow a = \frac{5b}{2} - d$. Por $L_3 \Rightarrow a = 2b - c$. Igualando estes valores temos:

$$\frac{5b}{2} - d = 2b - c \Rightarrow \frac{5b}{2} - 2b = d - c$$

$$\Rightarrow \frac{b}{2} = d - c \Rightarrow b = 2d - 2c.$$

Substituindo b em L_4, temos:

$$a = \frac{5(2d-2c)}{2} - d \Rightarrow a = 5d - 5c - d \Rightarrow a = 4d - 5c$$

Logo, temos que o espaço vetorial gerado por $A, B, C =$

$$[A,B,C] = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} \mid a = 4d - 5c, b = 2d - 2c \right\}.$$

5^a Questão) Solução:

Considere as incógnitas:

$$\begin{aligned} x &= \text{área do campo X em metros quadrados} \\ y &= \text{área do campo Y em metros quadrados} \end{aligned}$$

Para montar o sistema relativo ao problema, vamos somar as áreas x e y dos campos X e Y, respectivamente e igualar à área total em metros quadrados (linha L_1 do sistema). Como o campo X produz grãos na proporção $2/3$ de sacas por metro quadrado, e o campo Y produz grãos na proporção $1/2$ de sacas por metro quadrado, somaremos essas quantidades e igualaremos a 1100 sacas (linha L_2 do sistema). Assim temos:

$$\begin{cases} x + y &= 1800 \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y &= 1100 \end{cases} \tag{1}$$

Utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss para resolvê-lo. Considere a seguinte matriz aumentada que representa este sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1800 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & | & 1100 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{3}L_1$ temos

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1800 \\ 0 & -\frac{1}{6} & -100 \end{array}\right]$$

Assim, temos o seguinte sistema após a eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} x + y & = \quad 1800 \\ -\frac{1}{6}y & = \quad -100 \end{cases} \tag{2}$$

Por L_2 neste sistema, temos que $y = 600$.

Substituindo y em L_1 temos que $x + 600 = 1800 \Longrightarrow x = 1200$.

Logo, o tamanho do campo X , isto é, sua área mede 1200 metros quadrados e a área do campo Y é 600 metros quadrados.