Gabarito

Álgebra Linear: AD2 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2008.1

Tutores: Rodrigo Olimpio e Cristina Lopes

1^a Questão) Solução:

a) Para que o sistema tenha solução única, é necessário que o determinante da matriz associada ao sistema seja diferente de zero.

Aplicando a Regra de Sarrus, obtemos:

$$D = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & k & 2 & 3 \\ 1 & k & 3 & 1 & k \end{array} \right| = 9 + k - 2k + 3 - k^2 - 6 \neq 0 \Longrightarrow k^2 + k - 6 \neq 0$$

$\Longrightarrow k \neq -3$ e $k \neq 2$

b) Para que não tenha solução ou tenha infinitas soluções, $D = 0$, e portanto $k = -3$ e $k = 2$.

c)

$$\begin{cases} x + y - z & = & 1 \\ 2x + 3y + z & = & 3 \\ x + y + 3z & = & 2 \end{cases} \tag{1}$$

Para $k = 1$, considere a matriz $[A|I]$ onde A é a matriz dos coeficientes e I a identidade. Assim, vamos reduzi-la a forma escada reduzida por linhas (Método de Gauss-Jordan):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, fazendo $L_3 \leftarrow L_3 \times \dfrac{1}{4}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 + 4L_3$ e $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{4} & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Assim, temos que A^{-1} é

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -\frac{5}{4} & 1 & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

2^a Questão) Solução:

a) $N(t) = \{(x,y,z,t)/T(x,y,z,t) = (0,0,0)\}$, ou seja

$$(x - y + z + t, x + 2y - t, x + y + 3z - 3t) = (0,0,0)$$

Assim, teremos o sistema

$$
\begin{cases}
x - y + z + t & = & 0 \\
x + 2y - t & = & 0 \\
x + y + 3z - 3t & = & 0
\end{cases}
\tag{2}
$$

Observe que o sistema tem mais incógnitas que equações. Vamos fazer operações entre as linhas da matriz completa do sistema:

$$
\begin{bmatrix}
1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\
1 & 1 & 3 & -3 & 0
\end{bmatrix}
$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$
\begin{bmatrix}
1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\
0 & 2 & 2 & -4 & 0
\end{bmatrix}
$$

Agora, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, temos

$$
\begin{bmatrix}
1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

Assim temos o sistema

$$
\begin{cases}
x - y + z + t & = & 0 \\
y + z - 2t & = & 0
\end{cases}
\tag{3}
$$

Pela segunda linha do sistema temos que $y = 2t - z$. Substituindo y na primeira linha, temos que $x = t - 2z$. Logo $N(t) = \{(x, y, z, t)/x = t - 2z, y = 2t - z\}$.

Temos que $(x, y, z, t) = (t - 2z, 2t - z, z, t) = z(-2, -1, 1, 0) + t(1, 2, 0, 1) = zv_1 + tv_2$. Claramente v_1 e v_2 sao LI's. Assim, uma base para o núcleo é $\{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$, e o núcleo possui dimensão 2. Além disso, T não é injetora pois $N(t) \neq 0$.

b) Utilizando a proposição, temos que as imagens dos vetores de uma base do $\mathbb{R}^4$ geram a imagem de T. Vejamos:

$$\begin{aligned}
T(1,0,0,0) &= (1,1,1)\\
T(0,1,0,0) &= (-1,0,1)\\
T(0,0,1,0) &= (1,2,3)\\
T(0,0,0,1) &= (1,-1,-3)
\end{aligned}$$

Obtemos então a matriz cujas linhas geram a imagem de T:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Reduzindo por linhas a matriz acima encontramos, fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, e $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Fazendo agora $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, e $L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, $\{(1,1,1),(0,1,2)\}$ é base da imagem, e portanto, a imagem possui dimensão 2. Vale ressaltar que dimensão da imagem+dimensão do núcleo $= 2+2 = 4 =$ dimensão de $\mathbb{R}^4$.

3^a Questão) Solução:

Considere $k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n = 0$.

Aplicando a transformação T temos:

$$T(k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n) = T(0)$$

Sabendo que T é linear,

$$k_1T(v_1) + k_2T(v_2) + ... + k_nT(v_n) = 0$$

Como o conjunto imagem é L. I., temos que $k_1 = k_2 = ... = k_n = 0$.

Logo, $v_1, v_2, ..., v_n$ são linearmente independentes.

4^a Questão) Solução:

A matriz canônica de T é:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

A equação característica de A é:

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

isto é, desenvolvendo o determinante pela 1^a linha e observando a alternância dos sinais que precedem os produtos, obtemos:

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} - (+1)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)[(1-\lambda)(4-\lambda) + 2] - 0 + 0 = 0$$

$$(2-\lambda)[\lambda^2 - 4\lambda - \lambda + 4 + 2] = 0$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6)=0$$

As raízes dessa equação são $\lambda_1 = 2$ (raiz dupla) e $\lambda_2 = 3$, que são os autovalores da matriz A.

<u>Cálculo dos autovetores v associados aos autovalores λ</u>:

O sistema homogêneo de equações lineares que permite a determinação dos autovetores associados é: $(A-\lambda I)v = 0$.

Considerando

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

o sistema fica:

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

1. Substituindo λ_1 por 2 no sistema (4), obtemos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

isto é,

$$\begin{cases} 0x & +1y & +0z = 0 \\ 0x & -1y & -1z = 0 \\ 0x & +2y & +2z = 0 \end{cases}$$

O sistema admite uma infinidade de soluções: $\begin{cases} y & = & 0 \\ -y-z & = & 0 \\ x & = & t \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{matrix}$

Assim, os vetores $v_1 = (t, 0, 0) = t(1, 0, 0)$, $t \in \mathbb{R}$ são os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$.

2. Substituindo λ_2 por 3 no sistema (4), obtemos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 3$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

isto é,

$$\begin{cases} -1x & +1y & +0z = 0 \\ 0x & -2y & +1z = 0 \\ 0x & +2y & +1z = 0 \end{cases}$$

O sistema admite uma infinidade de soluções:

$$\begin{cases} -x + y & = & 0 & \Longrightarrow & x = y = t & & \\ 2y + z & = & 0 & \Longrightarrow & z = -2y & \Longrightarrow & z = -2t \end{cases}$$

Assim, os vetores $v_2 = (t, t, -2t) = t\,(1, 1, -2)$, $t \in \mathbb{R}$ são os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 3$.