Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP1 - Segundo Semestre de 2007
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(1.5)1. Encontre o ponto mais próximo do ponto $(1,4)$ que pertence à reta $y = \frac{1}{3}x$.

Solução: O vetor $w = (3,1)^T$ éum vetor na direção da reta $y = (1/3)x$. Seja $v = (1,4)^T$. Se Q é o ponto desejado, então Q^T é a projeção vetorial de v sobre w.

$$Q^T = \left(\frac{v^T w}{w^T w}\right) w = \frac{7}{10}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,1 \\ 0,7 \end{pmatrix}$$

Logo, $Q = (2,1, 0,7)$ é o ponto mais próximo.

(2.0)2. Encontre uma base ortonormal para o espaço coluna da matriz A abaixo, utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solução: As colunas de A são linearmente independentes e, portanto, formam uma base para um subespaço tridimensional de $\Re^4$. Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, pode-se construir uma base ortonormal da seguinte forma:
Defina:

$r_{11} = ||a_1|| = 2$
$q_1 = \frac{1}{r_{11}} a_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$
$r_{12} =< a_2, q_1 >= q_1^T a_2 = 3$
$p_1 = r_{12} q_1 = 3q_1$
$a_2 - p_1 = (-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2})^T$
$r_{22} = ||a_2 - p_1|| = 5$
$q_2 = \frac{1}{r_{22}}(a_2 - p_1) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$
$r_{13} =< a_3, q_1 >= q_1^T a_3 = 2$, $r_{23} =< a_3, q_2 >= q_2^T a_3 = -2$
$p_2 = r_{13} q_1 + r_{23} q_2 = (2, 0, 0, 2)^T$
$a_3 - p_2 = (2, -2, 2, -2)^T$
$r_{33} = ||a_3 - p_2|| = 4$
$q_3 = \frac{1}{r_{33}}(a_3 - p_2) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$

Os vetores q_1, q_2, q_3 formam uma base ortonormal para $I(A)$.

(2.5)3. Determine se cada um dos conjuntos abaixo é um subspaço do espaço das funções reais de variável real, justificando sua resposta.

(a) As funções f tais que $f(x) \leq 0$, $\forall x \in I\!R$.

Solução: Não, pois seja, por exemplo, $f(x) = -|x|$ e $\alpha = -1$. Neste caso, $f(x) \leq 0$, $\forall x \in I\!R$ e $\alpha f(x) = |x| > 0$, $\forall x \neq 0$.

(b) As funções f tais que $f(0) = 0$.

Solução: Sim, pois sendo W o espaço de todas as funções de $I\!R$ em $I\!R$, tais que $f(0) = 0$, temos: (i) A função constante $f(x) = 0$, $\forall x \in I\!R$ pertence a W. (ii) Se $f \in W$ então $f(0) = 0$, logo $\alpha f(0) = \alpha 0 = 0$, $\forall \alpha \in I\!R$ e, portanto, $\alpha f \in W$. (iii) Se $f, g \in W$ então $f(0) = 0$ e $g(0) = 0$, logo $(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0$ e portanto, $f + g \in W$.

(c) As funções f tais que $f(0) = 2$.

Solução: Não, pois sendo W o espaço de todas as funções de $I\!R$ em $I\!R$, tais que $f(0) = 2$, temos: Se $f, g \in W$ então $f(0) = 2$ e $g(0) = 2$, logo $(f+g)(0) = f(0)+g(0) = 4$ e portanto, $f+g \notin W$.

(d) As funções constantes.

Solução: Sim, pois sendo W o espaço de todas as funções constantes de $I\!R$ em $I\!R$, temos: (i) A função constante $f(x) = 0$, $\forall x \in I\!R$ pertence a W. (ii) Se $f \in W$ então $f(x) = k$ para algum

$k \in \mathbb{R}$, logo $\alpha f(x) = \alpha k$ e, portanto, $\alpha f \in W$. (iii) Se $f, g \in W$ então $f(x) = k_1$ e $g(x) = k_2$, logo $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = k_1+k_2$ e portanto, $f + g \in W$.

(e) As funções da forma $a + b\text{sen}2x + \cos 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solução: Sim, pois sendo W o espaço de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tais que $f(x) = a + b\text{sen}2x + c\cos 2x$, para a, b e c quaisquer, temos: (i) A função constante $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ pertence a W, basta considerar $a = b = c = 0$. (ii) Se $f \in W$ então $f(x) = a + b\text{sen}2x + c\cos 2x$ para algum a, b, c, logo $\alpha f(x) = (\alpha a) + (\alpha b)\text{sen}2x + (\alpha c)\cos 2x$ e, portanto, $\alpha f \in W$. (iii) Se $f, g \in W$ então $f(x) = a_1 + b_1\text{sen}2x + c_1\cos 2x$ e $g(x) = a_2 + b_2\text{sen}2x + c_2\cos 2x$, logo $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\text{sen}2x + (c_1 + c_2)\cos 2x$ e portanto, $f + g \in W$.

(2.0)4. Em cada item abaixo, determinar se os vetores dados geram $\mathbb{R}^3$, justificando a resposta.

(a) $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (2, 2, 0), v_3 = (3, 0, 0)$.

Solução: Sim, pois formando a matriz cujas colunas são os vetores dados e reduzindo-a a forma escalonada, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Como o posto da matriz é 3 e a dimensão de $\mathbb{R}^3$ também é, os vetores geram o $\mathbb{R}^3$.

(b) $v_1 = (3, 1, 4), v_2 = (2, -3, 5), v_3 = (5, -2, 9)$, $v_4 = (6, 2, 1)$.

Solução: Sim, pois formando a matriz cujas colunas são os vetores dados e reduzindo-a a forma escalonada, temos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 11 & 11 & 0 \\ 0 & 17 & 17 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 11 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Como o posto da matriz é 3 e a dimensão de $\mathbb{R}^3$ também é, os vetores geram o $\mathbb{R}^3$. Os vetores v_1, v_2 e v_4 são L.I. e formam uma base para o $\mathbb{R}^3$.

(2.0)5. Em cada um dos casos abaixo, obtenha uma expressão para A^n.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considerando que

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1+k \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

temos:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Solução: Considerando que

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \text{sen}(x)\text{sen}(y)$$

e

$$\text{sen}(x+y) = \text{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\text{sen}(y),$$

temos:

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\text{sen}2\theta \\ \text{sen}2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}.$$

Considerando que

$$\begin{bmatrix} \cos k\theta & -\text{sen}k\theta \\ \text{sen}k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & -\text{sen}(k+1)\theta \\ \text{sen}(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix},$$

temos:

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\text{sen}n\theta \\ \text{sen}n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}.$$