Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP3 - Segundo Semestre de 2015
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(2.0)1. Dado o sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

(1.0)a. Determinar o valor de k para que o sistema admita solução não trivial.

(1.0)b. Determinar uma base para o espaço de solções do sistema no caso em que ele admite solução não trivial e a dimensão deste espaço.

Solução:

(1.0)a.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ \quad - x_2 - x_3 = 0 \\ \quad (2+k)x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ \quad - x_2 - x_3 = 0 \\ \quad (1-k)x_3 = 0 \end{cases}$$

Para que o sistema admita solução não trivial, devemor ter $1-k = 0$, ou seja, $k = 1$.

(1.0)b. Se $k = 1$, as soluções do sistema são dadas por: $x_2 = -x_3$ e $x_1 + x_3 - x_3 = 0$, ou seja, $x_1 = 0$. Uma base para o espaço de soluções é então dada por $\{(0, -1, 1)\}$ (dimensão $= 1$).

(3.0)2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $T(1, 0, 0) = (1, 2)$, $T(0, 1, 0) = (0, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (-1, 3)$. Determinar:

(1.0)a. uma base para o seu núcleo e sua dimensão,

(1.0)b. uma base para sua imagem e sua dimensão,

(1.0)c. se a transformação é injetora ou sobrejetora, justificando a resposta.

Solução:

(1.0)a. Temos que

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1),$$

logo

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= xT(1, 0, 0) + yT(0, 1, 0) + zT(0, 0, 1) \\ &= x(1, 2) + y(0, 1) + z(-1, 3) \\ &= (x - z, 2x + y + 3z). \end{aligned}$$

Núcleo, $N(T)$: Se $u = (x, y, z)$ está no núcleo de T, então $T(u) = 0$, ou seja, $x = z$ e $y = -5z$. Portanto, $N(T)$ é gerado por $\{(1, -5, 1)\}$ (dimensão $= 1$).

(1.0)b. Imagem, $I(T)$:

$$\begin{aligned} I(T) &= [T(1, 0, 0), T(0, 1, 0), T(0, 0, 1)] \\ &= [(1, 2), (0, 1), (-1, 3)] \\ &= [(1, 2), (0, 1)], \end{aligned}$$

onde a última igualdade se deve por $(-1, 3)$ poder ser escrito como combinação linear de $(1, 2)$ e $(0, 1)$.

Portanto, $I(T)$ é gerada por $\{(1, 2), (0, 1)\}$ (dimensão $= 2$).

Um vetor $v = (x, y)$ pertence à imagem de T se e somente se v é a soma de um múltiplo de $v_1 = (1, 2)$ com um múltiplo de $v_2 = (0, 1)$. Logo, $I(T)$ é o espaço bidimensional (dimensão $= 2$) gerado por $[v_1, v_2]$.

(0.5)c. Como $N(T) \neq \{(0,0,0)\}$, T não é injetora e como $I(T) = I\!R^2$, T é sobrejetora.

(3.0)3. Seja a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 9 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

(1.0)a. Calcular o determinante de A.

(1.0)b. Calcular os autovalores reais de A.

(1.0)c. Calcular os autovetores associados ao autovalor real e positivo de A.

Solução:

(1.0)a.

$$det(A) = (-3)(-4)(9)^2 = 972.$$

(1.0)b.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 9-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 9-\lambda \end{bmatrix}.$$

Então , $P(\lambda) = det(A - \lambda I) = (-3-\lambda)(-4-\lambda)(9-\lambda)^2$. Os autovalores reais de A são $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -4$ e $\lambda_3 = 9$.

(1.0)c. Os autovetores associados a $\lambda_3 = 9$ são dados por $Av = 9v$ ou $(A - 9I)v = 0$, ou

$$(A - 9I)v = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -13 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

resultando em $v_1 = 0$ e $v_2 = 0$. Ou seja $v = (0,0,z)$, para $z \in I\!R$.

(2.0)4. Determinar um vetor unitário $w \in I\!R^3$ (ou seja, tal que w tem norma igual a um), que seja simultaneamente ortogonal aos vetores $u = (1,2,1)$ e $v = (1,1,1)$.

Solução:

Seja $w = (x, y, z)$ tal que w é ortogonal a u e v. Então:

$$\begin{cases} x & + & 2y & + & z = & 0 \\ x & + & y & + & z = & 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} x & + & 2y & + & z = & 0 \\ & - & y & & = & 0 \end{cases}$$

ou seja, $y = 0$ e $x = -z$. Logo, $w = (-z, 0, z) = z(-1, 0, 1)$, para $z \in \mathbb{R}$. O vetor unitário é dado por

$$\frac{(-1, 0, 1)}{\sqrt{2}} = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}).$$