Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP2 - Segundo Semestre de 2016
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(5.0)1. Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(2.0)a. Calcule os autovalores e os correspondentes autovetores de A.

(1.0)b. Determine os autovalores e os correspondentes autovetores de A^{-1}, sem calcular a matriz A^{-1}. Explique detalhadamente a solução.

(1.0)c. Calcule o determinante de A.

(1.0)d. Determine o determinante de A^{-1}, sem calcular a matriz A^{-1}. Explique detalhadamente a solução.

Solução:

a.

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) &= det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 2 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 4 = P(\lambda). \end{aligned}$$

$P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \Rightarrow$ ou $\lambda = 1$ ou $\lambda = 4$. Então os autovalores de A são 1 e 4. Procuramos agora os autovetores associados:

(i)$\lambda = 1$. Temos

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\begin{bmatrix} 3x+2y \\ x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

Então temos que $x = -y$. Portanto os autovetores associados a $\lambda = 1$ são os vetores $v = (-x, x), x \neq 0$.

(ii)$\lambda = 4$. Temos

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\begin{bmatrix} 3x+2y \\ x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x \\ 4y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x+2y=0 \\ x-2y=0 \end{cases} \quad \text{ou } x = 2y.$$

Os autovetores associados a $\lambda = 4$ são os vetores da forma $v = (2y, y), y \neq 0$. (ou $v = (x, \frac{1}{2}x), x \neq 0$).

b. De acordo com a propriedade demonstrada em aula, se λ é um autovalor de A, então λ^{-1} é um autovalor de A^{-1} e todo autovetor de A é também um autovetor de A^{-1}. Logo os autovalores e respectivos autovetores de A^{-1} são:
(i) $\lambda = 1$, $v = (-x, x), x \neq 0$.
(ii) $\lambda = \frac{1}{4}$, $v = (x, \frac{1}{2}x), x \neq 0$.

c. $\text{Det}(A) = 3 \times 2 - 2 \times 1 = 4$.

d. $\text{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\text{Det}(A)} = \frac{1}{4}$.

(2.0)2. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

(1.0)a. Resolva o sistema linear pelo método de eliminação de Gauss.

(1.0)b. Determine a matriz inversa da matriz de coeficientes e agora use-a para resolver novamente o sistema linear.

Solução:

(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ \end{bmatrix}$$

Fazendo $L2 \leftarrow L1 + L2$ e $L3 \leftarrow -2L1 + L3$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ \end{bmatrix}$$

Fazendo $L3 \leftarrow L3 - 3L2$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ \end{bmatrix}$$

Portanto, a solução do sistema é $(1, 1, -1)$.

(b)

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Fazendo $L2 \leftarrow L1 + L2$ e $L3 \leftarrow -2L1 + L3$ temos:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -2 & 0 & 1 \\ \end{array}\right]$$

Fazendo $L3 \leftarrow L3 - 3L2$ temos:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & =5 & -3 & 1 \\ \end{array}\right]$$

Fazendo $L3 \leftarrow (-1/3)L3$ e $L1 \leftarrow L1 + L2$ temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/3 & 1 & -1/3 \end{array}\right]$$

Fazendo $L1 \leftarrow L1 - 2L3$ temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4/3 & -1 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/3 & 1 & -1/3 \end{array}\right]$$

A solução do sistema linear é dada por

$$x = A^{-1} * b = \begin{bmatrix} -4/3 & -1 & 2/3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5/3 & 1 & -1/3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(3.0)3. Considere o operador linear $T : I\!R^3 \to I\!R^3$

$$(x, y, z) \to (z, x - y, -z)$$

(1.0)a. Determine o núcleo de T, uma base para esse subespaço e sua dimensão.

(1.0)b. Determine a imagem de T, uma base para esse subespaço e sua dimensão.

(1.0)c. T é injetora? T é sobrejetora? Justifique as respostas.

Solução:

a.

$$\begin{aligned} N(T) &= \{(x, y, z) : T(x, y, z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) : (z, x - y, -z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, x, 0) : x \in I\!R\} \\ &= \{x(1, 1, 0) : x \in I\!R\} \end{aligned}$$

Logo, $\{(1, 1, 0)\}$ é uma base para o núcleo de T e dim$(N(T))$=1.

b.
$$\begin{aligned} Im(T) &= \{z, x-y, -z) : x, y, z \in I\!R\} \\ &= \{a(1,0,-1) + b(0,1,0) : a, b \in I\!R\} \end{aligned}$$

Logo,
$$\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$$
é uma base para a imagem de T e $\dim(Im(T))$=2.

c. Uma vez que $N(T) \neq (0,0,0)$, T não é injetora. Uma vez que $\dim(Im(T)) \neq \dim(I\!R^3)$ ($\dim(I\!R^3) = 3$), T não é sobrejetora.