Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
Gabarito da AP2 - Segundo Semestre de 2019
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(2.0)1. Sendo A uma matriz real quadrada de ordem 4, cujo determinante é igual a 2, qual o valor de y na equação $\det(3AA^tA) = 4y$? Justifique sua resposta.

Solução:

$$\begin{aligned}
\det(3AA^TA) &= \det(3A) \cdot \det(A^T) \cdot \det(A) \\
&= 3^4\det(A) \cdot \det(A^T) \cdot \det(A) \\
&= 3^4\det(A) \cdot \det(A) \cdot \det(A) \\
&= 81 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 81 \cdot 4 \cdot 2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$4y = 81 \cdot 4 \cdot 2 \Rightarrow y = 162.$$

(2.0)2. Determine os autovalores de A e os autovetores associados ao maior autovalor de A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Solução: A equação característica é

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\lambda^2 - \lambda - 12 = 0.$$

Logo, os autovalores de A são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -3$. Para encontrar os autovetores associados a $\lambda_1 = 4$, temos:

$$Ax = 4x \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 = 0 \end{cases}$$

Obtemos então $(x_1, x_2) = (2x_2, x_2)$. Logo, qualquer múltiplo não-nulo de $(2,1)^T$ é um autovetor associado a $\lambda_1 = 4$.

(3.0)3. Determine se cada uma das transformações abaixo é ou não linear. Justifique sua resposta.

(a)
$$T : I\!R^3 \to I\!R^3,\ T(x,y,z) = (x,y,0)$$

Solução: Sejam $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ vetores em $I\!R^3$ e $\alpha \in I\!R$.Temos: $T(u_1) = (x_1, y_1, 0)$ e $T(u_2) = (x_2, y_2, 0)$. Logo

$$T(u_1+u_2) = T(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, 0) = T(u_1)+T(u_2).$$

$$T(\alpha u_1) = T(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, 0) = \alpha T(u_1).$$

Logo, a tranformação é linear.

(b)
$$T : I\!R^3 \to I\!R^2,\ T(x,y,z) = (3x+2, 2y-z)$$

Solução: Neste caso, temos $T(0,0,0) = (2,0) \neq (0,0)$. Logo, a transformação não é linear.

(c)
$$T : I\!R^2 \to I\!R^2,\ T(x,y) = (x^2, 3y)$$

Solução: Sejam $u_1 = (x_1, y_1)$ e $u_2 = (x_2, y_2)$ vetores em $I\!R^2$. Temos: $T(u_1) = (x_1^2, 3y_1)$ e $T(u_2) = (x_2^2, 3y_2)$. Logo

$$T(u_1) + T(u_2) = (x_1^2 + x_1^2, 3y_1 + 3y_2).$$

No entanto,

$$\begin{aligned} T(u_1+u_2) &= T(x_1+x_2, y_1+y_2) = ((x_1+x_2)^2, 3(y_1+y_2)) \\ &= (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2, 3y_1 + 3y_2) \neq T(u_1) + T(u_2). \end{aligned}$$

Logo, a transformação não é linear.

(3.0)4. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $T(1,0,0) = (1,2)$, $T(0,1,0) = (0,1)$ e $T(0,0,1) = (-1,3)$

(a) Determinar $N(T)$ e uma de suas bases. T é injetora? Justifique.

(b) Determinar $Im(T)$ e uma de suas bases. T é sobrejetora? Justifique.

Solução:

Temos:

$$\begin{array}{rcl} T(x,y,z) & = & xT(1,0,0) + yT(0,1,0) + zT(0,0,1) \\ & = & x(1,2) + y(0,1) + z(-1,3) \\ & = & (x - z, 2x + y + 3z) \end{array}$$

(a)

$$N(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x - z, 2x + y + 3z) = (0,0)\}$$

O sistema:

$$\begin{cases} x \quad\quad -z = 0 \\ 2x \quad +y + 3z = 0 \end{cases}$$

admite solução geral $(z, -5z, z)$, $z \in \mathbb{R}$. Logo

$$N(T) = \{(z, -5z, z) / z \in \mathbb{R}\}$$

A única variável livre é z. Portanto, $\dim N(T) = 1$. Fazendo $z = 1$, obtem-se $(1, -5, 1)$ e $\{(1, -5, 1)\}$ é uma base de $N(T)$. Ainda T não é injetora, pois $N(T) \neq \{(0,0,0)\}$.

(b)

$$Im(T) = [T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1)] = [(1,2), (0,1), (-1,3)]$$

Considerando o Teorema da dimensão, temos:

$$dim\ Im(T) = dim\ \mathbb{R}^3 - dim\ N(T) = 3, 1 = 2$$

Logo, $Im(T) = \mathbb{R}^2$ e qualquer base de $\mathbb{R}^2$ é base de $Im(T)$. Uma delas é $\{(1,2), (0,1)\}$. Ainda, T é sobrejetora, pois $Im(T) = \mathbb{R}^2$ que é o contradomínio.