Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
AD2 - Primeiro Semestre de 2007
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

Nome -
Assinatura -

1. Considere o sistema linear;

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ -x_1 - 3x_2 - x_4 = -9 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases}$$

a.(2.0) Resolva-o, se possível, método de Gauss-Jordan.

b.(1.0) Calcule o determinante da matriz dos coeficientes, usando a expansão de Cofatores(Fórmula de Laplace).

c.(1.0) Determine, caso exista, a matriz inversa de matriz dos coeficientes.

2. (2.0 pt): Descreva geometricamente as seguintes transformações lineares $L : I\!R^2 \to I\!R^2$

   (a) L(x,y)=(y,x)
   (b) L(x,y)=(-y,-x)
   (c) L(x,y)=(x,0)

3. Considere o operador linear $T : I\!R^3 \to I\!R^3$

$$(x, y, z) \to (x + y + z, x + y, y)$$

a.(1.0) Determine o núcleo, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T é injetora? Justificar

b.(1.0) Determine a imagem, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T é sobrejetora? Justificar

4. (2.0 pt): Suponha que a matriz abaixo represente a dinâmica de uma população:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Sabemos que um autovalor $\lambda \in A$ é um número real ou complexo que satisfaz a condição $Av = \lambda v$, onde $v \in I\!R^3$ é o autovetor associado a λ. Para o exemplo de dinâmica populacional v representa o número de fêmeas. Determine a proporção de fêmeas em cada grupo de tal forma que a população permaneça estável, ano após ano.

Gabarito

Álgebra Linear: AD2 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2007

Tutores: Rodrigo Olimpio e Cristina Lopes

1^a Questão) Solução:

a) Considere o sistema

$$\begin{cases} 4x_1 & +x_2 & +x_3 & & = -1 \\ 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & +3x_4 & = 5 \\ -x_1 & -3x_2 & & -x_4 & = -9 \\ 5x_1 & +x_2 & +3x_3 & & = -2 \end{cases} \tag{1}$$

Método de Gauss-Jordan

O sistema linear acima pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -9 \\ -2 \end{bmatrix}$$

1^a Etapa) Formaremos a matriz aumentada $[A|b]$. A matriz aumentada é dada por:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 & | & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & | & 5 \\ -1 & -3 & 0 & -1 & | & -9 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & | & -2 \end{bmatrix}$$

2^a Etapa) Transformaremos a matriz aumentada à sua forma escada reduzida por linhas, usando operações elementares em suas linhas.

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 & | & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & | & 5 \\ -1 & -3 & 0 & -1 & | & -9 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & | & -2 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_1 \longleftarrow -L_3$ e $L_3 \longleftarrow L_1$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & | & 9 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & | & 5 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & | & -1 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & | & -2 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \longleftarrow L_3 - 4L_1$ e $L_4 \longleftarrow L_4 - 5L_1$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & | & 9 \\ 0 & -8 & 1 & 1 & | & -13 \\ 0 & -11 & 1 & -4 & | & -37 \\ 0 & -14 & 3 & -5 & | & -47 \end{bmatrix}$$

Multiplicando L_2 por $-1/8$, encontramos

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & | & 9 \\ 0 & 1 & -1/8 & -1/8 & | & 13/8 \\ 0 & -11 & 1 & -4 & | & -37 \\ 0 & -14 & 3 & -5 & | & -47 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_1 \longleftarrow L_1 - 3L_2 \quad , \quad L_3 \longleftarrow L_3 + 11L_2$ e $L_4 \longleftarrow L_4 + 14L_2$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/8 & 11/8 & | & 33/8 \\ 0 & 1 & -1/8 & -1/8 & | & 13/8 \\ 0 & 0 & -3/8 & -43/8 & | & -153/8 \\ 0 & 0 & 5/4 & -27/4 & | & -97/4 \end{bmatrix}$$

Multiplicando agora L_3 por $-8/3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/8 & 11/8 & | & 33/8 \\ 0 & 1 & -1/8 & -1/8 & | & 13/8 \\ 0 & 0 & 1 & 43/3 & | & 51 \\ 0 & 0 & 5/4 & -27/4 & | & -97/4 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_1 \longleftarrow L_1 - \dfrac{3}{8}L_3 \quad , \quad L_2 \longleftarrow L_2 + \dfrac{1}{8}L_3$ e $L_4 \longleftarrow L_4 - \dfrac{5}{4}L_3$, ficamos com

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & | & -15 \\ 0 & 1 & 0 & 5/3 & | & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 43/3 & | & 51 \\ 0 & 0 & 0 & -74/3 & | & -88 \end{bmatrix}$$

Multiplicando L_4 por $\dfrac{-3}{74}$, obtemos

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & -4 & | & -15 \\ 0 & 1 & 0 & 5/3 & | & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 43/3 & | & 51 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 132/37 \end{array}\right]$$

E finalmente, fazendo $L_1 \longleftarrow L_1 + 4L_4$, $L_2 \longleftarrow L_2 - \frac{5}{3}L_4$ e, em seguida $L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{43}{3}L_4$, encontramos

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -27/37 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 76/37 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -5/37 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 132/37 \end{array}\right] \tag{2}$$

Como a matriz encontarda é a identidade, temos que a solução do sistema é $S = \left\{\left(\frac{-27}{37}, \frac{76}{37}, \frac{-5}{37}, \frac{132}{37}\right)\right\}$.

b) Seja

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

a matriz dos coeficientes.

Podemos expandir o determinante em relação à uma linha ou coluna. É claro que é melhor expandir em relação a uma linha ou coluna que tenha o maior número de zeros, já que, nesse caso, os cofatores A_{ij} dos a_{ij} que são nulos não precisam ser calculados, uma vez que $a_{ij}A_{ij} = (0)(A_{ij}) = 0$.

Expandindo, então, em relação à quarta coluna, obtemos:

$$det(A) = a_{14}A_{14} + a_{24}A_{24} + a_{34}A_{34} + a_{44}A_{44} \tag{3}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$$

onde M_{ij} é o determinante menor de a_{ij}.

Assim, temos:

$$A_{24} = (-1)^{2+4} det(M_{24}) = (-1)^6 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} \tag{4}$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4} det(M_{34}) = (-1)^7 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} \tag{5}$$

A_{14} e A_{44} não vamos calcular pois $a_{14} = a_{44} = 0$.

Expandindo $det(M_{24}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ em relação à primeira linha, por exemplo, temos:

$$det(M_{24}) = (4)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-9) + 1(3) + 1(14) = -36 + 3 + 14 = -19$$

De maneira análoga para $det(M_{34})$ temos

$$det(M_{34}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (4)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-7) + 1(-1) + 1(12) = -28 - 1 + 12 = -17$$

Logo, temos de (4) e (5) que

$$A_{24} = (1)(-19) = -19$$
$$A_{34} = (-1)(-17) = 17$$

Substituindo esses valores em (3) temos:

$$det(A) = 0(A_{14}) + 3(-19) + (-1)(17) + 0(A_{34})$$
$$det(A) = 0 - 57 - 17 + 0$$
$$det(A) = -74$$

c) Para determinarmos a matriz inversa dos coeficientes, faremos uso da forma escada reduzida por linhas. Para isso consideremos a matriz aumentada $A = [C|I]$ onde C é matriz dos coeficientes e I é a matriz identidade 4×4.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora precisamos fazer operações sucessivas nas linhas para chegar a sua forma escada reduzida por linhas. Assim temos:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_1 \leftarrow -L_3$ e $L_3 \leftarrow L_1$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, para $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$ e $L_4 \leftarrow L_4 - 5L_1$, encontramos

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -11 & 1 & -4 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -14 & 3 & -5 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando L_2 por $\dfrac{-1}{8}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/8 & -1/8 & 0 & -1/8 & -1/4 & 0 \\ 0 & -11 & 1 & -4 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -14 & 3 & -5 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_1 \longleftarrow L_1 - 3L_2$, $L_3 \longleftarrow L_3 + 11L_2$ e $L_4 \longleftarrow L_4 + 14L_2$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/8 & 11/8 & 0 & 3/8 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -1/8 & -1/8 & 0 & -1/8 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -3/8 & -43/8 & 1 & -11/8 & 5/4 & 0 \\ 0 & 0 & 5/4 & -27/4 & 0 & -7/4 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando agora L_3 por $-8/3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/8 & 11/8 & 0 & 3/8 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -1/8 & -1/8 & 0 & -1/8 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 43/3 & -8/3 & 11/3 & -10/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/4 & -27/4 & 0 & -7/4 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_1 \longleftarrow L_1 - \dfrac{3}{8}L_3$, $L_2 \longleftarrow L_2 + \dfrac{1}{8}L_3$ e $L_4 \longleftarrow L_4 - \dfrac{5}{4}L_3$, ficamos com

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5/3 & -1/3 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 43/3 & -8/3 & 11/3 & -10/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -74/3 & 10/3 & -19/3 & 17/3 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando L_4 por $\dfrac{-3}{74}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5/3 & -1/3 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 43/3 & -8/3 & 11/3 & -10/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5/37 & 19/74 & -17/74 & -3/74 \end{bmatrix}$$

E finalmente, fazendo $L_1 \longleftarrow L_1 + 4L_4$, $L_2 \longleftarrow L_2 - \dfrac{5}{3}L_4$ e, em seguida $L_3 \longleftarrow L_3 - \dfrac{43}{3}L_4$, encontramos

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 17/37 & 1/37 & 3/37 & -6/37 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4/37 & -7/74 & -21/74 & 5/74 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -27/37 & -1/74 & -3/74 & 43/74 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5/37 & 19/74 & -17/74 & -3/74 \end{array}\right]$$

Chegamos na forma escada reduzida por linhas da matriz dos coeficientes, que é a matriz identidade. Logo temos que a matriz abaixo é a inversa da matriz dos coeficientes:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 17/37 & 1/37 & 3/37 & -6/37 \\ -4/37 & -7/74 & -21/74 & 5/74 \\ -27/37 & -1/74 & -3/74 & 43/74 \\ -5/37 & 19/74 & -17/74 & -3/74 \end{bmatrix}$$

2^a Questão) Solução:

a) Neste caso, a transformação linear troca a coordenada x para y e a coordenada y para x, ou seja, acontece uma reflexão em torno da reta y=x.

b) A transformação linear faz a troca entre as coordenadas x e y como no item anterior, porém altera também os sinais de ambas as coordenadas. Logo, esta transformação reflete o par (x,y) em torno da reta y=-x. c) A transformação linear leva o par (x,y) em (x,0), ou

seja, ela faz uma projeção de (x,y) sobre o eixo Ox. A transformação linear é a projeção ortogonal do plano Oxy para o eixo Ox.

3^a Questão) Solução:

a)

$N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; T(x, y, z) = 0\}$.

Assim, para encontrarmos o núcleo, temos que ter $(x + y + z, x + y, y) = (0, 0, 0)$. Logo, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Pela terceira linha do sistema, temos que $y = 0$. Pelas outras linhas encontramos também que $x = z = 0$. Logo, $N(T) = 0$. Assim, $dim(N(T)) = 0$.

Temos também que T é injetora, pois $N(T) = 0$.

b)

$Im(T) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; T(x, y, z) = (a, b, c)\}$

Assim temos que:

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x+y=b \\ y=c \end{cases}$$

Pela terceira linha do sistema, temos que $y = c$. Pelas outras linhas encontramos também que $x = b - c$ e que $z = a - b$. Logo $Im(T) = (b - c, c, a - b)$. Como $dim(N(T)) = 0$, temos pelo Teorema do Núcleo-Imagem que $dim(Im(T)) = 3$. Logo a base para a imagem terá 3 vetores. Assim, podemos escrever: $(b - c, c, a - b) = b(1, 0, -1) + c(-1, 1, 0) + a(0, 0, 1)$. Como são uma base para $Im(T)$ então os vetores são LI's. Como o domínio e o contradomínio da transformação tem a mesma dimensão, T é sobrejetora, já que é injetora(item anterior).

4^a Questão) Solução:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

Logo o polinômio característico é dado por

$$P_3(\lambda) = det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(1 - \lambda)(3 - \lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

Tem-se que $\lambda = 1$ (os divisores do termo independente são candidatos a raiz) é uma raiz de $P_3(\lambda)$. Assim o polinômio pode ser fatorado na forma:

$$P_3(\lambda) = (\lambda - 1)P_2(\lambda)$$

onde $P_2(\lambda) = (-\lambda^2 + 5\lambda - 6)$. As raízes de $P_2(\lambda)$ são $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 3$. Logo os autovalores da matriz A, são:

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 3$

Cálculo dos autovetores v associados aos autovalores λ.

1. Autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 1$. Do polinômio característico temos

$$A - 1I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0| & 0 \\ 3 & 0 & 0| & 0 \\ 0 & 4 & 2| & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$, obtémos

$$(A - 1I)^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0| & 0 \\ 0 & 0 & 0| & 0 \\ 0 & 4 & 2| & 0 \end{bmatrix}$$

Tomando $y = r \neq 0$ obtémos a solução $v_1 = (0, r, -2r) = r(0, 1, -2)$. Portanto o vetor $v_1 = (0, 1, -2)$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$.

2. Autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 2$ De forma análoga temos que

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0| & 0 \\ 3 & -1 & 0| & 0 \\ 0 & 4 & 1| & 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, tomando $x = r \neq 0$, obtemos que $v_2 = (r, 3r, -12r)$. Ou seja $v_2 = r(1, 3, -12)$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda_2 = 2$.

3. Autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = 3$

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0| & 0 \\ 3 & -2 & 0| & 0 \\ 0 & 4 & 0| & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo de forma análoga aos anteriores, obtemos, tomando $z = r \neq 0$, a solução $v_3 = (0, 0, r) = r(0, 0, 1)$, ou seja $v_3 = (0, 0, 1)$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda_3 = 3$.

Como queremos a proporção de fêmeas de tal forma que a população permaneça estável, significa dizer que tendo $Av = \lambda v$ e se v é a fêmea, então temos que determinar v associada ao autovalor $\lambda_1 = 1$, ou seja $Av = v$(estabilidade) . Pense se λ fosse dois então a população duplicaria, etc. Portanto os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 1$ são $v_1 = r(0, 1, -2)$, onde $r \neq 0$.