Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
Gabarito da AP1 - Segundo Semestre de 2011
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(2.5)1. Verificar se os seguintes conjuntos são LI ou LD:

(a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -12 & -9 \end{bmatrix} \right\} \subset M(2,2)$, onde $M(2,2)$ é o conjunto de matrizes reais 2 por 2.

(b) $\{(2,-1),(1,3)\} \subset I\!R^2$

(c) $\{(-1,-2,0,3),(2,-1,0,0),(1,0,0,0)\} \subset I\!R^4$

(d) $\{1+2x-x^2, 2-x+3x^2, 3-4x+7x^2\} \subset P_2$, onde P_2 é o conjunto de polinômios de grau menor ou igual a 2.

(e) $\{(2,-1),(1,3),(0,2)\} \subset I\!R^2$

Solução:

(a) Como o conjunto tem apenas duas matrizes e uma delas é múltiplo da outra, o conjunto é LD.

(b) Examinando
$$a(2,-1)+b(1,3)=(0,0)$$
Temos, usando o método de eliminação:
$$\left\{ \begin{array}{r} 2a+b=0 \\ -a+3b=0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{r} 2a+b=0 \\ 7b=0 \end{array} \right.$$
A única solução do sistema é $a=0$ e $b=0$. Logo, o conjunto é LI.

(c) Examinando

$$a(-1,-2,0,3)+b(2,-1,0,0)+c(1,0,0,0)=(0,0,0,0)$$

Temos:

$$\begin{cases} -a+2b+c=0 \\ -2a-b=0 \\ 0=0 \\ 3a=0 \end{cases}$$

Da última equação temos $a=0$. Substituindo $a=0$ na segunda equação, temos $b=0$. Substituindo $a=b=0$ na primeira equação, temos $c=0$. Como o sistema só tem como solução $a=b=c=0$, o conjunto é LI.

(d) Examinando

$$a(1,2,-1)+b(2,-1,3)+c(3,-4,7)=(0,0,0)$$

Temos, usando o método de eliminação:

$$\begin{cases} a+2b+3c=0 \\ 2a-b-4c=0 \\ -a+3b+7c=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a+2b+3c=0 \\ -5b-10c=0 \\ 5b+10c=0 \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} a+2b+3c=0 \\ -5b-10c=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

O sistema tem infinitas soluções nas quais $b=-2c$ e $a=-2b-3c=-7c$, para todo $c \in \mathbb{R}$. Como $a=0$, $b=0$, $c=0$ não é a única solução do sistema, o conjunto é LD.

(e) Como no máximo dois vetores em $\mathbb{R}^2$ são LI, então o conjunto é LD.

(3.0) 2. Seja $S=\{x,y,z\}$ um conjunto de vetores do $\mathbb{R}^3$. Em cada caso abaixo, verifique se S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, justificando a resposta. Caso S seja um subespaço vetorial, determine uma base para o mesmo e sua dimensão.

(a) $x = y = z$,

Solução:

a) O vetor nulo $(0,0,0) \in S$.

b) Sejam $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in S$ Então $x_1 = y_1 = z_1$ e $x_2 = y_2 = z_2$. Portanto $x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = z_1 + z_2$. Logo $v_1 + v_2 \in S$.

c) Seja $\alpha \in I\!R$ e $v_1 = (x_1, y_1, z_1) \in S$. Logo $x_1 = y_1 = z_1$ e $\alpha x_1 = \alpha y_1 = \alpha z_1$ e portanto $\alpha v_1 \in S$.

De a), b) e c) conclui-se que S é subespaço vetorial.

Dim(S)=1. Uma base é $\{(1,1,1)\}$.

(b) $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$,

Solução:

Como $(0,0,0) \notin S$, S não é subespaço vetorial.

(c) $z = 2x$, $y = 0$,

Solução:

a) O vetor nulo $(0,0,0) \in S$.

b) Sejam $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in S$ Então $z_1 = 2x_1$ e $y_1 = 0$ e $z_2 = 2x_2$ e $y_2 = 0$. Portanto $z_1 + z_2 = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2)$ e $y_1 + y_2 = 0$. Logo $v_1 + v_2 \in S$.

c) Seja $\alpha \in I\!R$ e $v_1 = (x_1, y_1, z_1) \in S$. Então $z_1 = 2x_1$ e $y_1 = 0$ e $\alpha z_1 = 2\alpha x_1$ e $\alpha y_1 = 0$ portanto $\alpha v_1 \in S$.

De a) ,b) e c) conclui-se que S é subespaço vetorial.

Dim(S)=1. Uma base é $\{(1,0,2)\}$

(d) $x - y + z = 1$,

Solução:

Como $(0,0,0) \notin S$, S não é subespaço vetorial.

(e) $|x - y| = |y - z|$

Solução:

$v_1 = (0,-1,0) \in S$, $v_2 = (2,1,0) \in S$, mas $v_1 + v_2 = (2,0,0) \notin S$. Logo S não é subespaço vetorial.

2.0)3. Considere o sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} -x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 = & 0 \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & x_3 & + & x_4 = & 0 \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & 8x_3 & - & 5x_4 = & 0 \end{cases}$$

Determine uma base e a dimensão do espaço de soluções.

Solução A matriz aumentada $[A \mid 0]$ do sistema é dada por

$$[A|0] = \left[\begin{array}{cccccc} -1 & 3 & 2 & 1 & | & 0 \\ 2 & -6 & 1 & 1 & | & 0 \\ -1 & 3 & -8 & -5 & | & 0 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, obtemos

$$[A^1|0] = \left[\begin{array}{cccccc} -1 & 3 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -6 & | & 0 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$, obtemos

$$[A^2|0] = \left[\begin{array}{cccccc} -1 & 3 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{array}\right]$$

Resolvendo o sistema obtemos que $x_4 = -(5/3)x_3$ e $x_1 = 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 3x_2 + 2x_3 - (5/3)x_3 = 3x_2 + (1/3)x_3 =$ Assim o conjunto de solução do sistema é dado por:

$$S = \Big\{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_4 = -(5/3)x_3 \quad \text{e} \quad x_1 = 3x_2 + (1/3)x_3\Big\}$$

Como as variáveis x_2 e x_3 são variáveis livres, conclui-se que $dimS = 2$. Logo, qualquer subconjunto de S com dois vetores LI forma uma base de S. Por exemplo $x_2 = 1$ e $x_3 = 0$ então $x_1 = 3$ e $x_4 = 0$. Assim um vetor $v_1 = (3, 1, 0, 0) \in S$. Um outro vetor da base, pode ser escolhendo $x_2 = 0$ e $x_3 = 1$. Então $x_1 = 1/3$ e $x_4 = -5/3$. Assim um vetor $v_2 = (1/3, 0, 1, -5/3) \in S$. Note que v_1 e v_2 são LI e como são geradores de $S = [v_1, v_2]$ então $\{v_1, v_2\}$ é uma base de S.

(2.5)4. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine, se possível (caso não seja possível, explique o motivo):

(a) a matriz $C = B^T - 2A$, onde B^T é matriz transposta de A.
Solução:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -9 \\ 7 & -1 \\ 6 & -13 \end{bmatrix}$$

(b) a matriz produto: $C = A.B$
Solução:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 9 & 6 \\ -7 & 21 & -8 \\ -9 & 27 & 3 \end{bmatrix}$$

(c) a matriz produto: $C = B.A$
Solução:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 12 \\ -18 & 9 \end{bmatrix}$$

(d) a matriz B^2.
Solução:
Não é possível calcular B^2, pois B não é uma matriz quadrada.

(e) a matriz simétrica da matriz $C = A.B$.
Solução:
Não é possível. Não se define a matriz simétrica de uma dada matriz C. Por definição, uma matriz C é simétrica se $C = C^T$.