Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO DA AP2 - Primeiro Semestre de 2014
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(2.0)1. Resolva o sistema linear abaixo pela Regra de Cramer.

$$\begin{cases} 1x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 1x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Solução:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \; A_1 = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \; A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = 16, \; det(A_1) = 16, \; det(A_2) = -32, \; det(A_3) = 48.$$

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)} = 1, \; x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)} = -2, \; x_3 = \frac{det(A_3)}{det(A)} = 3.$$

(3.0)2. Calcule o determinante de cada uma das matrizes abaixo. Caso utilize alguma propriedade dos determinantes no cálculo, deixe claro qual a propriedade utilizada.

$$(a)\, A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ (b)\, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 6 \\ 1 & -3 & 5 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix},$$

$$(c)\, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Solução:

(a) $det(A) = (-1)^{2+2}(1) \begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$

$= (-1)^{2+2}(1)(-1)^{2+3}(7) \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}(1)(-1)^{2+3}(7)(10 - 56) =$ 322.

(b) $det(B) = 0$, pois a terceira linha de B é igual a primeira.

(c)

$$det(C) = (-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(2)(-3)(5)(4) = 120.$$

(3.0)3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $T(1,0,0) = (1,2)$, $T(0,1,0) = (0,1)$ e $T(0,0,1) = (-1,3)$

(1.0)a. Determinar $N(T)$ e uma de suas bases.

(0.5)b. T é injetora? Justifique.

(1.0)c. Determinar $Im(T)$ e uma de suas bases.

(0.5)d. T é sobrejetora? Justifique.

Solução:

Temos:

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= xT(1,0,0)+yT(0,1,0)+zT(0,0,1) \\ &= x(1,2)+y(0,1)+z(-1,3) \\ &= (x-z,2x+y+3z) \end{aligned}$$

(a)
$$N(T)=\{(x,y,z)\in I\!R^3/(x-z,2x+y+3z)=(0,0)\}$$

O sistema:
$$\begin{cases} x \quad -z=0 \\ 2x \quad +y+3z=0 \end{cases}$$

admite solução geral $(z,-5z,z)$, $z\in I\!R$. Logo

$$N(T)=\{(z,-5z,z)/z\in I\!R\}$$

A única variável livre é z. Portanto, $\dim N(T)=1$. Fazendo $z=1$, obtem-se $(1,-5,1)$ e $\{(1,-5,1)\}$ é uma base de $N(T)$.

(b) T não é injetora, pois $N(T)\neq\{(0,0,0)\}$.

(c)

$$Im(T)=[T(1,0,0),T(0,1,0),T(0,0,1)]=[(1,2),(0,1),(-1,3)]$$

Considerando o Teorema da dimensão, temos:

$$dim\ Im(T)=dim\ I\!R^3-dim\ N(T)=3,1=2$$

Logo, $Im(T)=I\!R^2$ e qualquer base de $I\!R^2$ é base de $Im(T)$. Uma delas é $\{(1,2),(0,1)\}$.

(d) T é sobrejetora, pois $Im(T)=I\!R^2$ que é o contradomínio.

(2.0)4. Responda, justificando a sua resposta, se a aplicação F é uma aplicação linear, onde

(1.0)a. $F: I\!R^3\to I\!R$ é definida por $F(x,y,z)=2x-7y+z$;

Solução

Seja $v=(a,b,c)$ e $w=(a',b',c')$, logo $v+w=(a+a',b+b',c+c')$ e $kv(ka,kb,kc)$, $k\in I\!R$.

Temos $F(v)=2a-7b+c$ e $F(w)=2a'-7b'+c'$. Assim

$$\begin{aligned} F(v+w) &= F(a+a', b+b', c+c') \\ &= 2(a+a') - 7(b+b') + (c+c') \\ &= (2a - 7b + c) + (2a' - 7b' + c') = F(v) + F(w). \end{aligned}$$

e

$$F(kv) = F(ka, kb, kc) = 2ka - 7kb + kc = k(2a - 7b + c) = kF(v).$$

Consequentemente, F é linear.

(1.0)b. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é definida por $F(x, y) = (x, y, x + y + 3)$.

Solução

Como $F(0, 0) = (0, 0, 3) \neq (0, 0, 0)$, F não é linear.