Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP1 - Segundo Semestre de 2015
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

1.(3.0) Considere o conjunto $B = \{v_1, v_2\}$, onde $v_1 = (1, 2, 3)$ e $v_2 = (-5, 1, 1)$.

(a) Calcule a distância $d(v_1, v_2) = |v_1 - v_2|$

Solução:

$d(v_1, v_2) = \sqrt{(-5-1)^2 + (1-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{36+1+4} = \sqrt{41}$.

(b) Calcule o ângulo formado por v_1 e v_2.

Solução:

Seja θ o ângulo entre os vetores v_1 e v_2.

$cos(\theta) = \frac{v_1.v_2}{|v_1|.|v_2|}$.

$|v_1| = \sqrt{(1^2 + 2^2 + 3^2)} = \sqrt{(1 + 4 + 9)} = \sqrt{14}$.

$|v_2| = \sqrt{(-5)^2 + 1^2 + 1^2)} = \sqrt{(25 + 1 + 1)} = \sqrt{27}$.

$v_1.v_2 = 1 \times (-5) + 2 \times 1 + 3 \times 1 = -5 + 2 + 3 = 0$.

$cos(\theta) = \frac{0}{\sqrt{14}.\sqrt{27}} = 0 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$.

(c) Determine o espaço gerado pelos vetores v_1 e v_2 de B.

Solução:

$v_1 = (1, 2, 3)$ e $v_2 = (-5, 1, 1)$. Sejam $a, b \in \Re$.

$[v_1, v_2] = a(1, 2, 3) + b(-5, 1, 1) = (a - 5b, 2a + b, 3a + b) = (x, y, z)$.

Assim, temos o seguinte sistema linear:

$$a - 5b = x \quad (1)$$
$$2a + b = y \quad (2)$$
$$3a + b = z \quad (3)$$

Fazendo $(2) \leftarrow -(2) + 2 \times (1)$ e $(3) \leftarrow -(3) + 3 \times (1)$, chegamos ao seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} a - 5b &= x \\ -11b &= 2x - y \\ -16b &= 3x - z \end{aligned}$$

Da terceira equação temos que $b = \frac{-3x+z}{16}$. Da segunda equação temos que $b = \frac{-2x+y}{11}$. Igualando estes dois valores de b temos: $\frac{-3x+z}{16} = \frac{-2x+y}{11} \Longrightarrow -33x + 11z = -32x + 16y \Longrightarrow x = -16y + 11z$ Logo $[v_1, v_2] = \{(x, y, z) \in \Re^3 / x = -16y + 11z\}$.

2.(2.0) Determinar uma base e a dimensão do espaço de soluções do sistema homogêneo

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & - & 4z & + & 3t & = & 0 \\ x & + & 2y & - & 2z & + & 2t & = & 0 \\ 2x & + & 4y & - & 2z & + & 3t & = & 0 \end{array} \right.$$

Solução: Fazendo $linha_2 := linha_2 - linha_1$, $linha_3 := linha_3 - 2linha_1$ e, posteriormente, $linha_3 := linha_3 - 3linha_2$ temos o seguinte sistema equivalente

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & - & 4z & + & 3t & = & 0 \\ & & & & 2z & - & t & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

Do qual, obtemos da segunda linha $t = 2z$ e , substituindo a igualdade na primeira linha, $x = -2y - 2z$. Logo, o conjunto-solução do sistema é:

$$S = \{(x, y, z, t) | t = 2z, x = -2y - 2z\},$$

que é um subspaço vetorial de $I\!R^4$. Tendo em vista serem duas as variáveis livres (y e z), conclui-se que dim$S$=2. Logo, qualquer subconjunto de S com dois vetores LI, forma uma base de S. Façamos (1) $y = 1$ e $z = 0$, (2) $y = 0$ e $z = 1$, para obter os vetores $v_1 = (-2, 1, 0, 0)$ e $v_2 = (-2, 0, 1, 2)$. O conjunto $\{v_1, v_2\}$ é uma base de S.

3.(2.0) Determine se cada conjunto a seguir é ou não subspaço de P_4, o conjunto de todos os polinômios de grau menor ou igual a 4. Justifique sua resposta.

i. O conjunto de polinômios em P_4 de grau par.
Solução: Não, pois dados $p_1(x) = x^2 + x$ e $p_2(x) = -x^2 + x$, temos que p_1 e p_2 pertencem ao conjunto dado, mas $p_1 + p_2$ não pertence.

ii. O conjunto de polinômios $p(x)$ em P_4 tais que $p(0) = 0$.
Solução: Sim, pois: (a) O conjunto não é vazio, já que contém o polinômio nulo. (b) Se $p(x)$ pertence ao conjunto e α é um escalar, então $\alpha p(0) = \alpha \cdot 0 = 0$, e, portanto αp pertence ao conjunto. (c) Se $p(x)$ e $q(x)$ pertencem ao conjunto, então $(p + q)(0) = p(0) + q(0) = 0 + 0 = 0$, e, portanto $p + q$ pertence ao conjunto.

4.(3.0) Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 2 & -5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Se possível, calcular as matrizer abaixo. Se não for possível, determinar a razão.

i. A matriz $(A - A^2)$.
Solução:

$$A - A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A - A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 61 & 108 \\ 48 & 85 \end{bmatrix}$$

$$A - A^2 = \begin{bmatrix} -56 & -99 \\ -44 & -78 \end{bmatrix}.$$

ii. A matriz $(AB)^T$.
Solução:
Não é possível calcular o produto AB pois o número de colunas de A é maior que o número de linhas de B.

iii. A matriz $(BA)^T$.
Solução:

$$BA = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 2 & -5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} -31 & -56 \\ -10 & -17 \\ -22 & -99 \end{bmatrix}.$$

$$(BA)^T = \begin{bmatrix} -31 & -10 & -22 \\ -56 & -17 & -39 \end{bmatrix}.$$