Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP3 - Segundo Semestre de 2018
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(3.0)1. Considere os vetores $u = (1, -2, -3)$, $v = (2, 3, -1)$ e $w = (3, 2, 1)$.

(a) Verifique se os vetores u, v, w são linearmente dependentes.

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in I\!R$.
$\alpha_1(1, -2, -3) + \alpha_2(2, 3, -1) + \alpha_3(3, 2, 1) = 0$.
Assim, temos o sistema linear abaixo:

$$\begin{array}{l} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{array}$$

Colocando o sistema na forma matricial, temos:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ -2 & 3 & 2 & | & 0 \\ -3 & -1 & 1 & | & 0 \\ \end{array}\right]$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ e também $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$, obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 7 & 8 & | & 0 \\ 0 & 5 & 10 & | & 0 \\ \end{array}\right]$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{7}L_2$, encontramos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{30}{7} & 0 \end{array}\right]$$

Assim, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{array}{rrr} \alpha_1 + & 2\alpha_2 & +3\alpha_3 = 0 \\ & 7\alpha_2 & +8\alpha_3 = 0 \\ & & \frac{30}{7}\alpha_3 = 0 \end{array}$$

Deste sistema, temos por L_3 que $\alpha_3 = 0$. Substituindo em L_2 concluímos que $\alpha_2 = 0$. E substituindo esses valores em L_1 temos que $\alpha_1 = 0$. Logo u,v,w são linearmente independentes.

(b) Verifique se os vetores u e v são paralelos e também se são ortogonais.

$$\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{3} \neq \frac{-3}{-1}$$

Logo u e v não são paralelos pois as coordenadas não são proporcionais.
Vejamos se u e v são ortogonais:
$u.v = 1 \times 2 + (-2) \times 3 + (-3) \times (-1) = 2 - 6 + 3 = -1 \neq 0 \Longrightarrow$ u não é perpendicular a v.

(c) Calcule a projeção de u sobre v.
$proj_v u = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}.v = \frac{(1,-2,-3).(2,3,-1)}{(2,3,-1).(2,3,-1)}.(2,3,-1) = \frac{-1}{14}(2,3,-1) = \left(\frac{-1}{7}, \frac{-3}{14}, \frac{1}{14}\right)$

(2.0)2. Para a transformação linear de $I\!R^3 \rightarrow I\!R^3$ abaixo, determine uma base para o seu núcleo e sua dimensão, uma base para sua imagem e sua dimensão, e diga se a transformação é injetora ou sobrejetora, justificando a resposta.

$$L(x) = (x_1 - x_3, x_2, x_2)^T.$$

Solução:

Núcleo, $N(L)$: Se x está no núcleo de L, então $L(x) = 0$, ou seja, $x_1 = x_3$ e $x_2 = 0$. Portanto, $N(L) = \{(1, 0, 1)^T\}$ (dimensão = 1).

Imagem, $I(L)$: Um vetor y pertence à imagem de L se e somente se y é a soma de um múltiplo de $v_1 = (1, 0, 0)^T$ com um múltiplo de $v_2 = (0, 1, 1)^T$. Logo, $I(L)$ é o subspaço bidimensional (dimensão = 2) de $I\!R^3$ gerado por $[v_1, v_2]$.

Como $N(L) \neq \{(0, 0, 0)^T\}$, L não é injetora e como $I(L) \neq I\!R^3$, L não é sobrejetora.

(5.0)3. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

(a) Encontre o determinante de A utilizando expansão por cofatores e explicitando os seus cálculos.

(b) Prove que o núcleo de A, $N(A)$ é um subespaço vetorial de $I\!R^3$.

(c) Encontre uma base para $N(A)$, e determine sua dimensão.

(d) Prove que a imagem de A^T, $I(A^T)$ é um subespaço vetorial de $I\!R^3$.

(e) Encontre uma base para $I(A^T)$, e determine sua dimensão.

Solução

(a)

$$\det(A) = (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 2(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 \times 1 = 0.$$

(b) Sejam $x_1, x_2 \in N(A)$, logo $Ax_1 = 0$ e $Ax_2 = 0$. Seja $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, onde $\alpha_1, \alpha_2 \in I\!R$. Temos $Ax = A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 = 0 + 0 = 0$. Logo, $x \in N(A)$, o que prova que $N(A)$ é subespaço vetorial de $I\!R^3$.

(c) Podemos encontrar uma base para $N(A)$ colocando A em sua forma escada reduzida por linhas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $x \in N(A)$, da forma escada reduzida por linhas de A temos que

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_3 &= 0 \\ x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $x_1 = 2x_3$ e $x_2 = -5x_3$ Fazendo $x_3 = \alpha$, vemos que $N(A)$ é formado por todos os vetores da forma $\alpha(2, -5, 1)$. Logo $\{(2, -5, 1)\}$ é uma base para $N(A)$ e sua dimensão é igual a 1.

(d) Sejam $y_1, y_2 \in I(A^T)$, logo, existem x_1 e x_2, tais que $y_1 = A^T x_1$ e $y_2 = A^T x_2$. Seja $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$, onde $\alpha_1, \alpha_2 \in I\!R$. Temos $y = \alpha_1 A^T x_1 + \alpha_2 A^T x_2 = A^T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = A^T x$, onde $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$. Logo existe x tal que $y = A^T x$, provando que $y \in I(A^T)$. Logo $I(A^T)$ é um subespaço vetorial de $I\!R^3$.

(e) Podemos encontrar base para $I(A^T)$ também colocando A em sua forma escada reduzida por linhas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

As colunas de A^T geram o espaço $I(A^T)$, ou equivalentemente, as linhas de A geram $I(A^T)$. Desta forma, $\{(1, 0, -2), (0, 1, 5)\}$ é uma base para $I(A^T)$ e sua dimensão é igual a 2.