GEOMETRIA ANALÍTICA E ÁLGEBRA LINEAR: UMA VISÃO GEOMÉTRICA

TOMO I

Dan Avritzer

Geometria Analítica e Álgebra Linear: Uma Visão Geométrica

Tomo I

Belo Horizonte
Editora UFMG
2009

A963g Avritzer, Dan
Geometria analítica e álgebra linear: uma visão geométrica / Dan Avritzer. – Belo Horizonte : Editora UFMG, 2009.
t. 1 : il. – (Educação a distância)

90 p. – il. (Educação a Distância)

Inclui bibliografia.
ISBN: 978-85-7041-726-8

1. Geometria analítica. 2. Álgebra linear. I.Título. II. Série

CDD: 371.39
CDU: 37.018.43

Elaborada pela Central de Controle de Qualidade da Catalogação da Biblioteca Universitária da UFMG

Este livro recebeu o apoio financeiro da Secretaria de Educação a Distância do MEC

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO DE TEXTOS DE MATEMÁTICA: Dan Avritzer
ASSISTÊNCIA EDITORIAL: Euclídia Macedo e Letícia Féres
EDITORAÇÃO DE TEXTOS: Maria do Carmo Leite Ribeiro
REVISÃO E NORMALIZAÇÃO: Maria do Rosário Alves Pereira
REVISÃO DE PROVAS: Renata Passos e Renilde Silveira
PROJETO GRÁFICO: Eduardo Ferreira
FORMATAÇÃO E CAPA: Sérgio Luz
PRODUÇÃO GRÁFICA: Warren M. Santos
IMPRESSÃO Imprensa Universitária da UFMG

EDITORA UFMG
Av. Antônio Carlos, 6627 - Ala direita da Biblioteca Central - Térreo
Campus Pampulha - 31270-901 - Belo Horizonte - MG
Tel.: + 55 31 3409-4650 - Fax: + 55 31 3409-4768
www.editora.ufmg.br - editora@ufmg.br

PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
Av. Antônio Carlos, 6627 - Reitoria - 6º andar
Campus Pampulha - CEP 31270-901 - Belo Horizonte - MG
Tel.: + 55 31 3409-4054 - Fax: + 55 31 3409-4060
www.ufmg.br - info@prograd.ufmg.br - educacaoadistancia@ufmg.br

Os Cursos de Graduação da UFMG, modalidade a distância, foram concebidos tendo em vista dois princípios fundamentais. O primeiro deles se refere à democratização do acesso à educação superior; o segundo consiste na formação de profissionais de alto nível, comprometidos com o desenvolvimento do país.

A coletânea da qual este volume faz parte visa dar suporte aos estudantes desses cursos. Cada volume está relacionado com um tema, eleito como estruturante na matriz curricular. Ele apresenta os conhecimentos mínimos que são considerados essenciais no estudo do tema. Isto não significa que o estudante deva se limitar somente ao estudo do volume. Ao contrário, ele é o ponto de partida na busca de um conhecimento mais amplo e aprofundado sobre o assunto. Nessa direção, cada volume apresenta uma bibliografia, com indicação de obras impressas e obras virtuais que deverão ser consultadas à medida que se fizer necessário.

Cada volume da coletânea está dividido em aulas, que consistem em unidades de estudo do tema tratado. Os objetivos, apresentados em cada início de aula, indicam as competências e habilidades que o estudante deve adquirir ao término de seu estudo. As aulas podem se constituir em apresentação, reflexões e indagações teóricas, em experimentos ou em orientações para atividades a serem realizadas pelos estudantes.

Para cada aula ou conjunto de aulas, foi elaborada uma lista de exercícios com o objetivo de levar o estudante a avaliar o seu progresso e a desenvolver estratégias de metacognição ao se conscientizar dos diversos aspectos envolvidos em seus processos cognitivos. Essa lista auxiliará o estudante a tornar-se mais autônomo, responsável, crítico, capaz de desenvolver sua independência intelectual. Caso ela mostre que as competências e habilidades indicadas nos objetivos não foram alcançadas, ele deverá estudar com mais afinco e atenção o tema proposto, reorientar seus estudos ou buscar ajuda dos tutores, professores especialistas e colegas.

Agradecemos a todas as instituições que colaboraram na produção desta coletânea. Em particular, agradecemos às pessoas (autores, coordenador da produção gráfica, coordenadores de redação, desenhistas, diagramadores, revisores) que dedicaram seu tempo, e esforço na preparação desta obra que, temos certeza, em muito contribuirá para a educação brasileira.

Maria do Carmo Vila
Coordenadora do Centro de Apoio à Educação a Distância
UFMG

Sumário

Apresentação

Este livro foi escrito para ser utilizado nos cursos de Educação a distância oferecidos pela UFMG para a licenciatura em Matemática. Ele está dividido em dois tomos. No primeiro, tratamos de vetores no plano e no espaço, aplicações ao estudo das cônicas, matrizes e determinantes e sistemas de equações lineares. No segundo tomo trataremos da equação cartesiana de um plano no espaço, de equação paramétricas da reta no espaço, de posições relativas de retas e planos no espaço e de transformações lineares.

Estes livros estão assentados na experiência de mais de 30 anos do autor em ministrar não só a disciplina de Geometria Analítica, mas outras disciplinas de Cálculo, História da Matemática, Álgebra Abstrata e Geometria Algébrica no Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, além da experiência de escrever um primero livro de Geometria Analítica e Álgebra Linear para a licenciatura a distância em Química ([2]).

Tal experiência talvez possa ser resumida em dois princípios básicos que orientaram a elaboração da obra. O primeiro é que se deve, no ensino da Matemática, respeitar a evolução histórica dos conceitos, explicitando para o aluno como eles evoluíram. A idéia aqui é que as dificuldades que o aluno enfrenta em seu aprendizado são, muitas vezes, semelhantes àquelas que a ciência enfrentou em sua evolução.

O segundo é que a Matemática se articula sempre em torno de exemplos, da mesma maneira que a Química e outras ciências experimentais se baseiam na experiência. Esta observação é válida, tanto nos estudos mais elementares de Matemática como na pesquisa mais sofisticada. Assim procuramos desenvolver o texto enfatizando sempre o exemplo. Por outro lado, como este livro está voltado para alunos de Matemática, procuramos dar um tratamento mais formal demonstrando alguns resultados, principalmente no estágio final do livro.

Tivemos sempre em mente que este trabalho se destina a cursos a distância. Dessa forma, o texto possui várias características específicas para ser assim utilizado. Dentre elas chamamos atenção para as seguintes:

1. Cada aula é aberta com objetivos gerais. Recomendamos que o aluno leia-os inicialmente e volte a eles no final certificando-se de que eles foram atingidos, e, se não o forem, que tente sanar a deficiência.

2. No decorrer do texto, existem exercícios. Eles foram incluídos com o objetivo de testar o entendimento do assunto tratado anteriormente. É importante que o aluno faça esses exercícios, pois eles são necessários para o seu amadurecimento.

3. Ao final de cada aula, incluímos numerosos exercícios, ordenados por nível de dificuldade. É um pouco pessoal a escolha de quantos exercícios fazer, mas o aluno deve fazer um número suficiente para se sentir seguro do conteúdo a que eles se referem.

Finalmente, ao concluir esta apresentação, gostaríamos de agradecer ao Ministério de Educação e Cultura e a Universidade Aberta do Brasil pela oportunidade de escrever estas notas e à Profa. Maria do Carmo Vila, coordenadora do programa de ensino a distância da UFMG, pela sua eficiente coordenação do programa. Gostaria de agradecer também aos colegas Hamilton Prado Bueno, Seme Gebara Neto e Maria Cristina Ferreira pelas discussões frutíferas que tivemos sobre o texto, bem como por algumas sugestões e correções e a Joana David Avritzer que revisou parte do texto.

Esperamos que este livro possa ser útil a esse importante programa de formação de professores tão necessário ao desenvolvimento de nosso país.

AULA 1

O que é a Geometria Analítica?

OBJETIVO

1. Ter uma idéia geral do que é a Geometria Analítica e do que vai ser estudado nos Curso Geometria Analítica e Álgebra Linear I e II.

1.1 - GEOMETRIA SINTÉTICA E GEOMETRIA ANALÍTICA

A geometria, como a entendemos hoje, surgiu na Grécia antiga há aproximadamente 2.600 anos. Embora Euclides não tenha sido o primeiro geômetra grego, sua obra, *Os elementos*, teve enorme influência na história da geometria e ainda hoje serve como exemplo, entre outras razões, pelo grande rigor do seu método. Esse método, conhecido como método axiomático, parte de definições e postulados tidos como evidentes e, utilizando as regras da lógica formal, chega a fatos geométricos que estão longe de ser evidentes. Essa geometria, que pouco difere da que todos aprendemos no ensino fundamental, é conhecida como Geometria Sintética.

A Geometria Analítica surgiu muito posteriormente com Descartes (1596-1650) no século XVII. Em seu livro *O discurso do método*, publicado em 1637, Descartes se propõe a encontrar um método capaz de resolver qualquer problema. Numa primeira etapa, ele duvida de todas as coisas e depois procura aquelas verdades que são claras e distintas. Em seguida, procura estudar as coisas desconhecidas comparando-as com as verdades claras e distintas. Como apêndices a *O discurso do método*, Descartes elabora três aplicações para ilustrar seu método: a geometria, a dióptrica e os meteoros. É em *A geometria* que Descartes inventa a nova geometria, a Geometria Analítica.

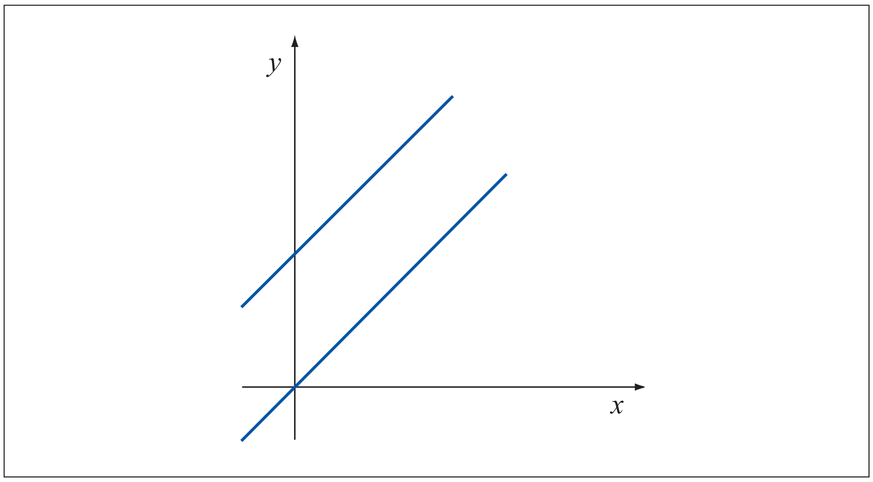


Figura 1.1 : As retas $y = x$ e $y = x+1$

Para Descartes, as verdades claras e distintas, no caso da geometria, são os segmentos que ele, como os gregos anteriormente, identifica com os números. Na consideração de um certo problema, diz ele, devemos escrever a equação que liga os segmentos conhecidos aos desconhecidos e a partir delas resolver os problemas. Ele observa que a geometria é "difícil" e a álgebra "fácil", e que seu método, nesse caso, se limitava a resolver os problemas díficeis que os gregos haviam proposto pela álgebra, mais clara e fácil de manipular.

Vamos considerar um primeiro exemplo simples.

Exemplo 1.1 Considere as retas dadas pelas equações

$$y = x \quad \text{e} \quad y = x + 1$$

Estamos interessados nos pontos do plano que satisfazem simultaneamente as duas equações. Substituindo a primeira equação na segunda temos $x = x + 1$ e logo $1 = 0$! Logo, as duas equações não possuem soluções em comum. Nesse caso, a tradução que Descartes procurava da álgebra para a geometria é que a ausência de soluções em comum significa que as retas são paralelas. Veja a Figura 1.1. $\triangleleft$

Antes de considerarmos um outro exemplo um pouco mais complicado, vamos fazer uma revisão da Geometria Analítica no plano.

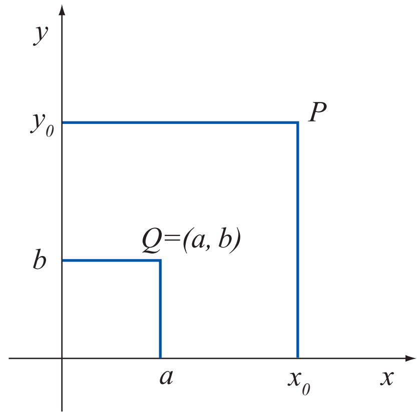


Figura 1.2 : Bijeção entre pontos do plano e pares ordenados

1.2 - REVISÃO DA GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA

O primeiro passo para iniciar o estudo da Geometria Analítica é observar que a reta pode ser posta em correspondência bijetiva com os números reais, da seguinte maneira: escolhemos um ponto, chamado origem, para representar o zero; escolhemos uma direção em geral à direita para representar o sentido positivo e uma unidade, que representa o número 1. A partir daí, pode-se mostrar que todo número real fica representado por um ponto da reta e que todo ponto da reta representa um número real.

Em seguida, para representar os pontos do plano, tomamos duas retas, que chamaremos de eixos, que se cortam perpendicularmente em um ponto. Este ponto será a origem de um sistema de coordenadas para o plano e é usualmente denotado por 0. Observe que podemos facilmente estabelecer uma bijeção entre os pontos do plano e os pares ordenados de números reais da seguinte maneira: dado um ponto P do plano, baixando duas perpendiculares a partir do ponto aos dois eixos, obtemos dois números reais. O primeiro, x_0, é chamado abscissa do ponto, o segundo, y_0, ordenada. Podemos assim representar o ponto P pelo par de números reais (x_0, y_0). Reciprocamente, dado um par de números reais (a, b) obtemos um ponto Q do plano como a interseção das paralelas aos eixos, passando pelos pontos a e b dos eixos. (Figura 1.2)

Descartes já havia observado que toda equação nas variáveis x, y, $f(x, y) = 0$ descreve uma curva no plano. Por exemplo $y = 2x + 3$ descreve a reta que se obtém, dando valores para x e calculando os valores correspondentes para y. Observe:

x	1	2											
y	5	7											

Exercício 1.2 Complete a tabela dando mais 11 valores para x e encontrando os valores correspondentes para y. A seguir faça um esboço da reta $y = 2x + 3$.

Se tomarmos a equação $x^2 + y^2 = 4$, observe que cada valor de x, $-2 < x < 2$ determina dois valores de y, por exemplo:

x	0	1											
y	± 2	$\pm\sqrt{3}$											

Exercício 1.3 Complete a tabela dando mais 11 valores para x e encontrando os valores correpondentes para y. A seguir faça um esboço da figura dada por $x^2 + y^2 = 4$, que neste caso é uma circunferência.

Toda equação $f(x, y) = 0$, do primeiro grau, determina uma reta, e toda equação da forma $x^2 + y^2 = a^2$ determina uma circunferência de centro na origem e raio a. O primeiro fato não será estudado aqui; estudaremos o segundo na próxima aula. Se você nunca estudou Geometria Analítica anteriormente, estude a equação da reta, por exemplo, no livro *Matemática,* de Gelson Iezzi e outros autores, Atual Editora, São Paulo, 2002, p. 544-551.

1.3 - RESOLVENDO A GEOMETRIA PELA ÁLGEBRA

Vamos considerar agora um outro exemplo para ilustar o que Descartes queria dizer com resolver a geometria pela álgebra.

Exemplo 1.4 Considere as retas do plano dadas por $a_1x + b_1y = c_1$ e $a_2x + b_2y = c_2$, que vamos supor distintas, com $a_1 \neq 0$ e $a_2 \neq 0$. Queremos saber se essas retas se interceptam e, em caso afirmativo, em quantos pontos.

Para tratar este problema geométrico vamos considerar as duas equações acima e considerar o sistema formado por elas:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por a_2 e a segunda por a_1 e subtraindo uma da outra temos:

$$a_2a_1x + a_2b_1y - a_1a_2x - a_1b_2y = a_2c_1 - a_1c_2.$$

Assim eliminamos x e obtemos:

$$(a_2b_1 - a_1b_2)y = a_2c_1 - a_1c_2$$

Temos duas possibilidades:

1. Se $(a_2b_1 - a_1b_2) \neq 0$, então obtemos uma única solução para o sistema dada por $y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}$ e $x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_2b_1 - a_1b_2}$.
2. Se $a_2b_1 - a_1b_2 = 0$, então, como estamos supondo as duas equações distintas, segue que $a_2c_1 - a_1c_2 \neq 0$. Para ver isto, observe que se $a_2c_1 - a_1c_2 = 0$ temos que $b_1 = \frac{a_1}{a_2}b_2$ e $c_1 = \frac{a_1}{a_2}c_2$ e a equação $a_1x + b_1y = c_1$ nada mais é que $a_1x + \frac{a_1}{a_2}b_2y = \frac{a_1}{a_2}c_2$ que pode ser reescrita como $a_2x + b_2y = c_2$, contrariando a hipótese das retas serem distintas. Segue que sistema não possui solução, é impossível.

Podemos agora traduzir, neste exemplo, o que Descartes queria dizer com resolver a geometria pela álgebra:

- Se o sistema possui uma solução, isso significa que as retas se encontram em um único ponto.
- Se o sistema não possui solução, isso significa que as retas são distintas e paralelas.

◁

Exercício 1.5 Considere as retas $2x+3y = 4$ e $6x+y = 2$. Determine se elas são paralelas ou não e caso não sejam paralelas determine seu ponto de interseção.

Exercício 1.6 Considere as retas $2x + 3y = 4$ e $4x + 6y = 2$. Determine se elas são paralelas ou não e caso não sejam paralelas determine seu ponto de interseção.

Exercício 1.7 Considere as duas retas do plano dadas por $a_1x+b_1y = c_1$ e $a_2x+b_2y = c_2$, como anteriormente, mas agora não suponha que elas sejam distintas. Execute o mesmo procedimento. Aparece uma outra possibilidade que não havia aparecido antes. Qual é ela? O que ela significa?

Utilizando o fato, aprendido na álgebra elementar, que um sistema de duas equações lineares possui sempre uma solução, nenhuma solução, ou infinitas soluções, deduzimos o resultado geométrico que duas retas que possuem dois pontos comuns são coincidentes (veja o exercício 1.7).

1.4 - A GEOMETRIA ANALÍTICA ATUAL

O final do século XIX e o princípio do século XX assistiram a grandes transformações das ciências, de uma forma geral, e da matemática, em particular. O surgimento da chamada física moderna com a teoria da relatividade proposta por Eistein e a mecânica quântica proposta por Schrödinger fez com que a matemática adotasse um tratamento, primordialmente, "vetorial" e "matricial." É o surgimento do que conhecemos como álgebra linear que vai permear todos os ramos da matemática e de outras ciências. Neste curso, vamos tratar os assuntos que já descrevemos desse ponto de vista. Essa linguagem será introduzida nas aulas 2 e 3 e utilizada nas aulas subseqüentes.

Nos anos 70 do século XX, com o avanço da ciência da computação e de suas múltiplas aplicações a todos os ramos do conhecimento, a Geometria Analítica passa a conhecer outras aplicações até então insuspeitadas. Surgem ramos do conhecimento como computação gráfica e visão computacional. Todos temos contato com estas duas áreas da ciência da computação. A computação gráfica estuda o tratamento de imagens utilizando computadores. É largamente utilizada em propaganda televisiva, por exemplo, onde estamos habituados a ver imagens que se deformam ou giram segundo vários eixos. Daremos uma idéia de como isso é feito no tomo 2 deste livro.

1.5 - OS OBJETIVOS DESTE CURSO

Podemos agora explicitar melhor quais os objetivos da disciplina que você está iniciando. Quando terminar os dois tomos deste livro, você deverá ser capaz de:

- De uma maneira geral, relacionar a geometria de planos e retas no espaço com a álgebra correspondente de equações lineares em três variáveis. Ou seja, ser capaz de estender o Exemplo 1.4 para o contexto de retas e planos no espaço.

  Mais concretamente você será capaz de:

  1. Resolver e discutir sistemas de m equações lineares em n incógnitas.

2. Saber operar com matrizes e resolver sistemas de m equações a n incógnitas, operando com as matrizes associadas, o chamado método de Gauss-Jordan.
3. Conhecer e operar com vetores no plano e no espaço.
4. Conhecer e operar com a equação de um plano no espaço.
5. Conhecer e operar com as equações paramétricas de retas no espaço.
6. Estudar a posição relativa de retas e planos no espaço.

- Conhecer a Geometria Analítica do plano e as transformações lineares do plano no plano.

  Mais concretamente você será capaz de:

  1. Saber operar com diferentes bases do plano. Conhecer os vários tipos de transformações lineares do plano.
  2. Conhecer as cônicas planas e suas equações.
  3. Saber quando é possível diagonalizar as matrizes associadas a transformações lineares do plano no plano e diagonalizá-las.

AULA 2

Vetores no plano e no espaço

OBJETIVO
Ao terminar esta aula você deverá ser capaz de:

1. Representar pontos no plano e no espaço tridimensional.
2. Saber o que é um vetor no plano e no espaço e somar 2 vetores no plano e 2 vetores no espaço.
3. Conhecer o produto escalar de 2 vetores e suas propriedades.

2.1 - PONTOS NO PLANO E NO ESPAÇO

Já vimos, na seção 1.2, que os pontos de uma reta podem ser representados por um número real, uma vez escolhido um ponto para ser a origem e um segmento orientado para ser a unidade de medida.

Vimos também como representar um ponto do plano por um par ordenado (x, y) de números reais.

Vamos ver agora como podemos utilizar um terno (x, y, z) de números reais para representar um ponto no espaço ordinário, que chamaremos aqui de espaço tridimensional. Acrescentamos ao plano xy já conhecido um outro eixo perpendicular ao plano xy, e passando pela origem do plano xy, o chamado eixo dos $z's$. Dado um ponto P no espaço, traçamos por P uma perpendicular ao plano xy obtendo assim sua projeção P' e uma perpendicular ao eixo dos $z's$, obtendo o número z_0, chamado altura do ponto P. Como anteriormente o ponto P' no plano xy possui abcissa x_0 e ordenada y_0. Obtemos assim coordenadas (x_0, y_0, z_0) para o ponto P no espaço. Reciprocamente todo terno de números reais (a, b, c) representa um único ponto Q no espaço: as coordenadas (a, b) representam um ponto P' no plano xy. Levantando por P' uma perpendicular ao plano xy e marcando a altura c obtemos o ponto Q de coordenadas (a, b, c) (ver Figura 2.1).

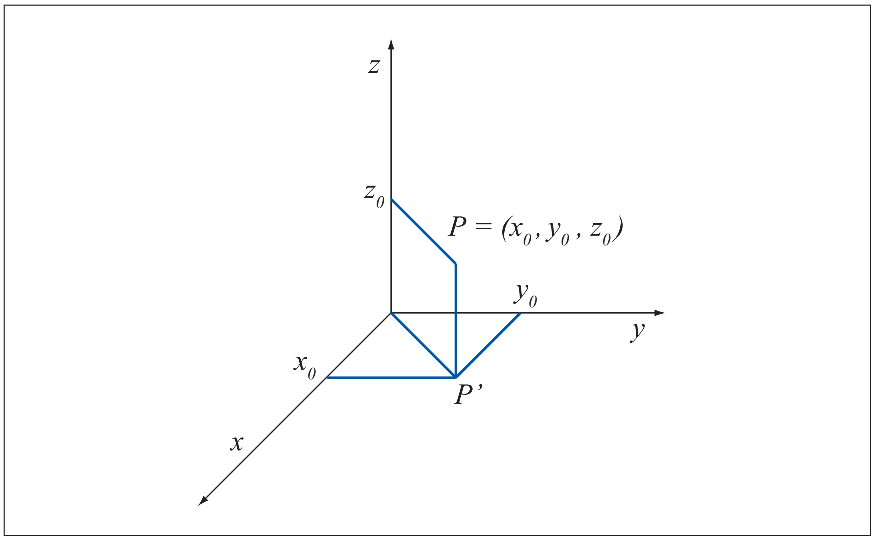


Figura 2.1 : O espaço ordinário dotado de eixos coordenados *x, y, z*

Podemos adicionar pontos no plano ou no espaço da seguinte maneira:

Se $A_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $A_2 = (a_2, b_2, c_2)$ são dois pontos no espaço, definimos o ponto $A_1 + A_2$ como sendo o ponto no espaço dado por $A_1 + A_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$. Analogamente, definimos a adição de dois pontos no plano. Vamos expor toda a teoria para pontos e vetores (que veremos em seguida) no plano ou no espaço e deixamos a cargo do aluno fazer as modificações necessárias para obter as propriedades de pontos e vetores no outro caso.

Exercício 2.1 Defina a adição de dois pontos do plano.

Exemplo 2.2

- *Se* $A_1 = (1, 2, -11)$ *e* $B_1 = (2, -3, 5)$, $A_1 + B_1 = (3, -1, -6)$.
- *Se* $A_2 = (2, -1)$ *e* $B_2 = (-2, 1)$, $A_2 + B_2 = (0, 0) = 0$.

$\triangleleft$

Denotaremos, como no último exemplo, o ponto $(0, 0)$, no plano, e o ponto $(0, 0, 0)$, no espaço, por 0 quando isto não causar confusão.

Podemos também multiplicar um ponto no plano ou no espaço por um número k. Se A=(a,b,c), então $kA = (ka, kb, kc)$.

As seguintes propriedades são satisfeitas pelas operações definidas acima:

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$.
2. $A + B = B + A$.
3. $k(A + B) = kA + kB$.
4. Se k_1 e k_2 são números, então $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$.
5. $(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$.
6. $0 + A = A$
7. $1 \cdot A = A$
8. Se denotarmos por $-A$ o ponto $(-1)A$, então $A - A = 0$.

Vamos, agora, interpretar geometricamente a adição de pontos e a multiplicação de pontos por um escalar. Faremos isto no plano, o aluno não terá dificuldades de fazer o mesmo no espaço. Consideremos um exemplo.

Exemplo 2.3 Vamos esclarecer, no caso do plano, o significado geométrico da adição de dois pontos e da multiplicação de um ponto por um escalar. Sejam $A = (-2, 2)$ e $B = (5, 4)$. Então temos $A + B = (3, 6)$. Os pontos A e B são lados de um paralelogramo e a soma $A + B$ é a diagonal. Da mesma forma, considere $3C = (3, 3)$, em que $C = (1, 1)$. O resultado significa esticar C por um fator de 3. Multiplicar um ponto por um número negativo inverte a direção. O caso geral não é diferente deste exemplo. Observe a Figura 2.2. $\triangleleft$

2.2 - VETORES NO PLANO E NO ESPAÇO: OPERAÇÕES

A força ou a velocidade, para serem caracterizadas, precisam, além de um valor, de uma direção e um sentido. É intuitivo por exemplo que, se um sólido se desloca com uma certa velocidade (numa certa direção), cada um de seus pontos possui esta velocidade. Para formalizarmos essa idéia definiremos:

Definição 2.4 Um vetor é um par ordenado de pontos, no plano ou no espaço, que denotamos por $\overrightarrow{AB}$. Visualizamos o vetor como uma seta cujo ponto inicial é A e o ponto final é B.

Definição 2.5 Dados dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$, dizemos que $\overrightarrow{AB}$ é equivalente a $\overrightarrow{CD}$ se $B - A = D - C$.

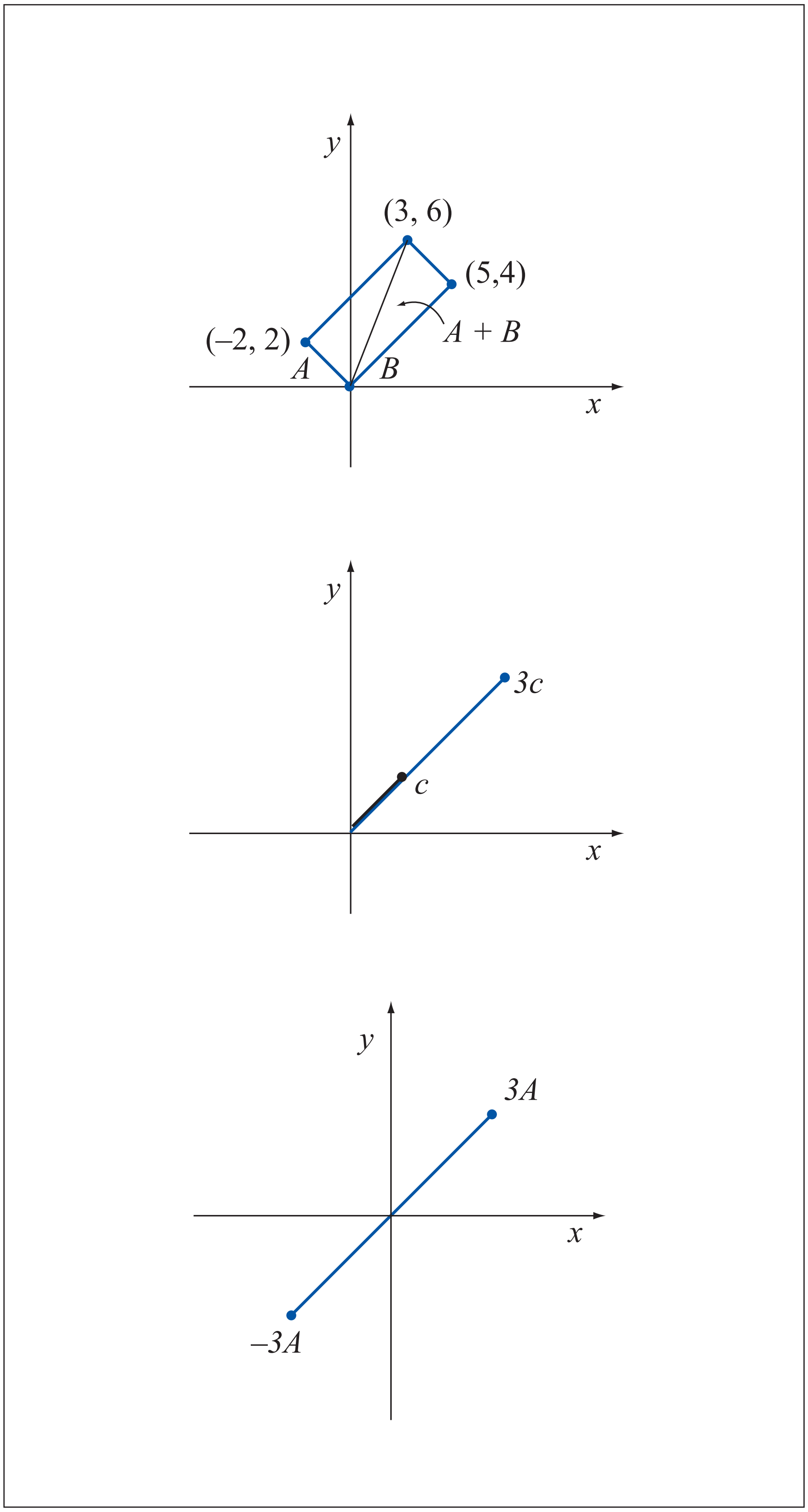


Figura 2.2: Adição de pontos, multiplicação por escalar e multiplicação por um número negativo

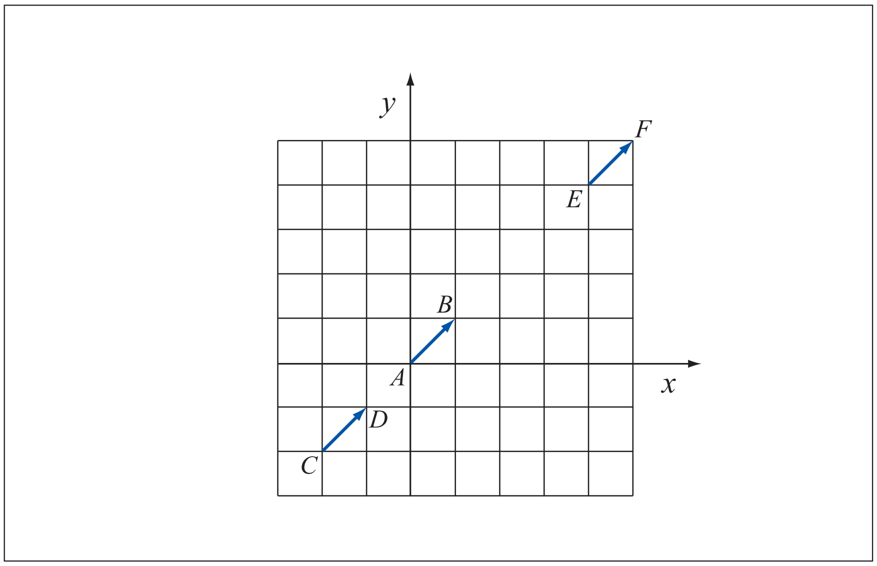


Figura 2.3 : Alguns vetores equivalentes

Exemplo 2.6 Considere os seguintes pontos do plano (veja a Figura 2.2):

$$A = (0,0), \quad B = (1,1), \quad C = (-2,-2),$$

$$D = (-1,-1), \quad E = (4,4) \text{ e } \quad F = (5,5)$$

Então $\overrightarrow{AB}$ é equivalente a $\overrightarrow{CD}$ que é equivalente a $\overrightarrow{EF}$, pois

$$B - A = (1,1) - (0,0) = (1,1) \quad \text{ e } \quad D - C = (-1,-1) - (-2,-2) = (1,1).$$

Por outro lado $\overrightarrow{BA}$ não é equivalente a $\overrightarrow{CD}$, já que $A - B = (0,0) - (1,1) = (-1,-1)$ e já vimos que $D - C = (1,1)$. ◁

Exercício 2.7 Verifique que $\overrightarrow{CD}$ não é equivalente a $\overrightarrow{FE}$. Verifique se $\overrightarrow{AF}$ é equivalente a $\overrightarrow{DE}$.

Observação 2.8 O que fizemos com as duas definições acima foi estabelecer uma relação de equivalência no conjunto de pares ordenados de pontos onde identificamos dois pares $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ se $B - A = D - C$. Não vamos formalizar aqui o que significa uma relação de equivalência, mas você já teve contato com algumas outras relações de equivalência. A primeira que todos encontramos é a relação que definimos no conjunto das frações, quando dizemos que duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são equivalentes se $ad = bc$. É ela que permite afirmar que as frações $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$, o que nos possibilita comparar frações e operar com frações. Para todos os efeitos práticos, consideramos duas frações equivalentes como iguais. O mesmo se dá com vetores. A equivalência que definimos corresponde à observação prática de que dois vetores equivalentes possuem o mesmo "efeito físico" e portanto indentificamo-los. Na prática, operamos quase que exclusivamente com um único representante da classe de equivalência, a saber, o vetor cujo ponto inicial é $0 = (0, 0)$. Veja também a próxima observação.

Observação 2.9 Considere novamente os vetores $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{FE}$. Vimos que eles são equivalentes ao vetor $\overrightarrow{AB}$ cujo ponto inicial é a origem. De maneira completamente geral, é dado um vetor qualquer $\overrightarrow{A_1B_1}$ cujo ponto inicial é (a_1, b_1) e o ponto final é (a_2, b_2). Temos $B_1 - A_1 = (a_2 - a_1, b_2 - b_1)$. Portanto, o vetor $\overrightarrow{A_1B_1}$ é equivalente ao vetor $\overrightarrow{0(B_1 - A_1)}$, ou seja, o vetor cujo ponto inicial é $(0, 0)$ e o ponto final é $(a_2 - a_1, b_2 - b_1)$. Desta maneira, podemos pensar qualquer vetor como tendo o ponto inicial na origem, bastando, para isto, olhar para seu equivalente que tem esta propriedade. A observação é muito útil quando operamos com vetores. Definimos a soma de dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ como sendo a soma dos dois pontos que são equivalentes respectivamente a $\overrightarrow{AB}$ e a $\overrightarrow{CD}$. Procedemos analogamente para multiplicar um vetor por um escalar e recorreremos ao mesmo expediente para definir o chamado produto escalar de dois vetores, na próxima seção. Exatamente o mesmo raciocínio vale para vetores no espaço.

Exercício 2.10 Dados os vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ abaixo encontre dois outros equivalentes a eles cujo ponto inicial é a origem:

$$A = (2, 3), B = (5, -1), C = (-5, 3), D = (9, -2).$$

Exercício 2.11 Encontre a soma dos dois vetores acima.

Observação 2.12 Observe no Exemplo 2.6 que o vetor $\overrightarrow{AB}$ é equivalente ao ponto $B - A = (1, 1)$ enquanto o vetor $\overrightarrow{BA}$ é equivalente a $A - B = (-1, -1)$. Ou seja $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$. Geometricamente o vetor $\overrightarrow{BA}$ tem mesma direção que $\overrightarrow{AB}$, mas sentido contrário. Este fato é completamente geral: dados quaisquer dois pontos A, B temos $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ e os vetores possuem mesma direção e sentidos opostos.

2.3 - PRODUTO ESCALAR

De acordo com a Observação 2.9, todo vetor pode ser pensado com o ponto inicial na origem. Conseqüentemente, todos os pontos podem ser identificados com vetores. Na definição a seguir e em várias outras oportunidades, faremos esta identificação que não causa confusão, pois o contexto esclarece o que queremos dizer. Ficamos assim dispensados de usar a seta na notação de um vetor, pois há pouca diferença entre os conceitos.

Definição 2.13 Dados dois vetores no espaço $\overrightarrow{A_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{A_2} = (a_2, b_2, c_2)$, o produto escalar de A_1 e A_2, denotado por $A_1 \cdot A_2$, é definido por:

$$A_1 \cdot A_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$$

O produto escalar é sempre um número.Veja o exemplo.

Exemplo 2.14 Seja $A = (1, 2, -3)$ e $B = (1, 5, 7)$.

$$A \cdot B = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + (-3)(7) = -10$$

Se os vetores estão no plano teremos: $A = (1, 2)$ $B = (4, -6)$, $A \cdot B = 4 - 12 = -8$. $\triangleleft$

O produto escalar possui 4 propriedades importantes:

1. $A \cdot B = B \cdot A$
2. Se A, B, C são 3 vetores temos: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C = (B + C) \cdot A$.
3. Se x é um número, então $(xA) \cdot B = x(A \cdot B)$
4. Se $A = 0$, então $A \cdot A = 0$ e, caso contrário, $A \cdot A > 0$.

As propriedades acima são fáceis de demonstrar e decorrem de propriedades dos números reais. Vejamos como:

Propriedade 1 $A \cdot B = B \cdot A$, pois se $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$, temos:

$$A.B = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 = B.A$$

Propriedade 3 $(xA) \cdot B = x(A \cdot B)$. Sejam $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$. Então $x(A) = (xa_1, xa_2, xa_3)$ e portanto $(xA) \cdot B = xa_1a_2 + xa_2b_2 + xa_3b_3 = x(A \cdot B)$.

Exercício 2.15 Demonstre as propriedades 2 e 4.

Definição 2.16 Dois vetores A e B, $A \neq 0$ e $B \neq 0$ são ditos perpendiculares (ou ortogonais) se $A \cdot B = 0$

O conceito de perpendicularidade é um conceito conhecido, que vem da geometria elementar e não é claro, no momento, que os dois coincidam. Veremos nos próximos parágrafos que isto é verdade. Por ora, um exemplo.

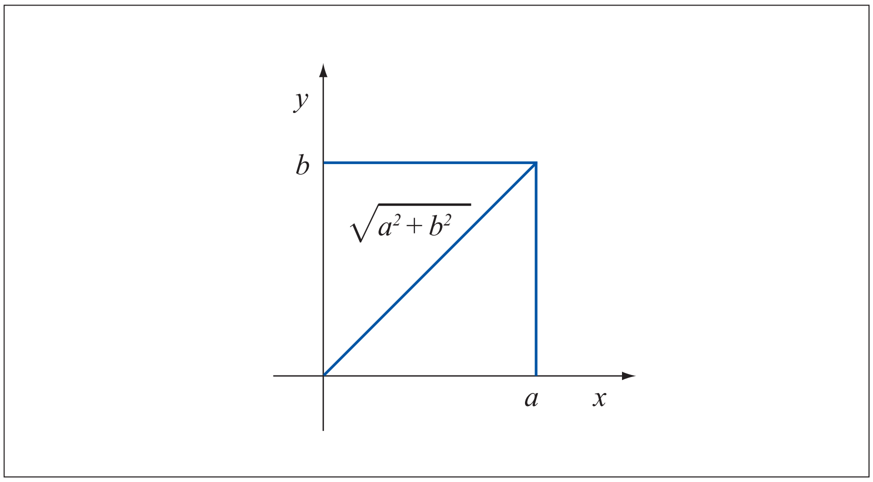


Figura 2.4 : O comprimento de um vetor no plano

Exemplo 2.17 Os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, e $e_3 = (0, 0, 1)$ são conhecidos como a base canônica do espaço ou como os vetores unitários na direção dos eixos, denominações cuja razão também será esclarecida posteriormente. Vejamos que eles são 2 a 2 perpendiculares pela definição acima:

$$e_1 \cdot e_2 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0, \text{ e da mesma forma } e_1 \cdot e_3 = 0, e_2 \cdot e_3 = 0$$

◁

2.4 - NORMA DE UM VETOR

Definição 2.18 Dado um vetor no plano ou no espaço, definimos a norma de A, $\|A\|$ como sendo $\sqrt{A.A}$.

Em coordenadas, temos: se $A = (a, b)$ é um vetor do plano, então $\|A\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Se $A = (a, b, c)$, então $\|A\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Isto mostra que a norma de um vetor coincide com a nossa noção intuitiva de comprimento. No caso do plano é simplesmente o Teorema de Pitágoras (ver Figura 2.4). No caso do espaço observe a Figura 2.5.

Exemplo 2.19 Dado $A = (1, 7)$, $\|A\| = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50}$. Dado $B = (1, 0, 2)$, $\|B\| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$. ◁

Diremos que um vetor U é unitário se $\|U\| = 1$. Dado qualquer vetor A com norma $a = \|A\|$, observe que $\frac{1}{a}A$ é um vetor e $||\frac{1}{a}A|| = \frac{1}{a}\|A\| = \frac{a}{a} = 1$. Diremos que dois vetores não nulos A, B possuem a mesma direção se existe uma constante c tal que $B = cA$. O vetor $\frac{1}{a}A$ é chamado o vetor unitário na direção de A.

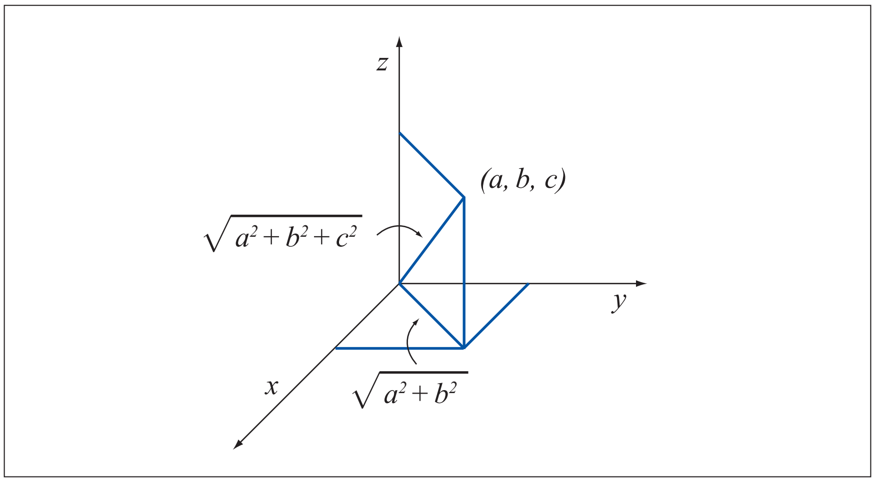


Figura 2.5 : O comprimento de um vetor no espaço

Exemplo 2.20 Se $A = (1, -1, 2)$, então $\|A\| = \sqrt{6}$. O vetor unitário na direção de A é o vetor $\frac{1}{\sqrt{6}}A = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$. $\triangleleft$

2.4.1 Distância entre dois pontos

Definição 2.21 Sejam A e B pontos no plano ou no espaço. Definimos a distância entre A e B como sendo:

$$\|A - B\| = \sqrt{(A - B) \cdot (A - B)}$$

Observação 2.22 A distância entre A e B é portanto a norma do vetor $\overrightarrow{AB}$. Dessa forma a definição coincide com a nossa intuição geométrica que decorre do Teorema de Pitágoras. Veja também o exemplo.

Exemplo 2.23 Sejam $A = (-1, 1)$ e $B = (2, 2)$.

$$A - B = (-1, 1) - (2, 2) = (-3, -1) \text{ e } \|A - B\| = \sqrt{10}.$$

O principal resultado sobre a relação entre o produto escalar de dois vetores e suas normas é a seguinte proposição, cuja demonstração será vista na próxima seção:

Proposição 2.24 *Dados dois vetores A e B temos*

$$A \cdot B = \|A\| \, \|B\| \, cos(\theta),$$

onde θ é ângulo entre os vetores A e B. Veja a Figura 2.6.

Observação 2.25 Note que se o ângulo entre dois vetores A e B é $\frac{\pi}{2}$ então, pela fórmula acima, $A \cdot B = 0$, o que coincide com o conceito expresso na Definição 2.16.

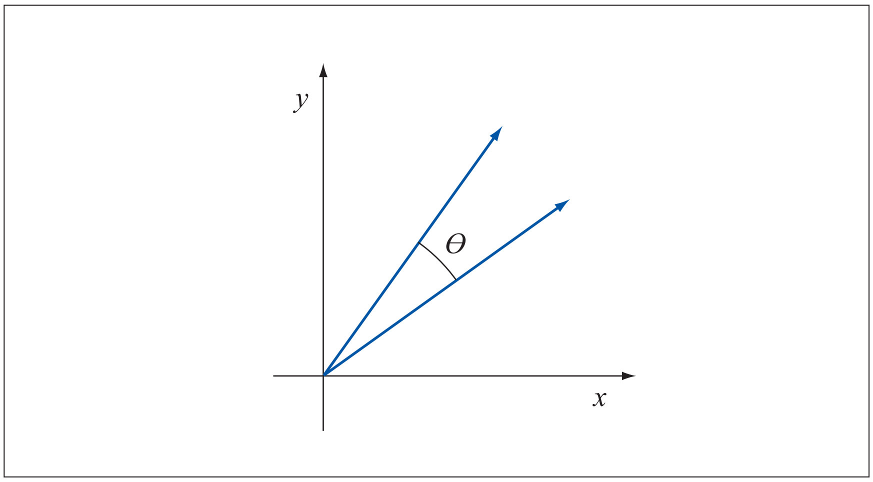


Figura 2.6: O ângulo entre os vetores A e B

2.5 - PROJEÇÃO DE UM VETOR SOBRE UM OUTRO

Sejam A e B dois vetores, $B \neq 0$. Vamos definir a projeção de A sobre B que será o vetor P da Figura 2.7.

Queremos, portanto, encontrar um vetor P tal que $A - P$ seja ortogonal a B e tal que $P = cB$, para alguma constante c que queremos determinar. Suponha que encontramos tal constante c. Então teremos:

$$(A - P) \cdot B = (A - cB) \cdot B = 0, \text{ ou seja, } A \cdot B = cB \cdot B$$

$$\text{donde temos que: } c = \frac{A \cdot B}{B \cdot B}.$$

Reciprocamente, se $c = \frac{A \cdot B}{B \cdot B}$, temos $(A - cB) \cdot B = A \cdot B - cB \cdot B = 0$.

Definição 2.26 A projeção de um vetor A sobre um vetor não nulo B é o vetor $P = cB$, onde $c = \frac{A \cdot B}{B \cdot B}$, que denotaremos por $P = Proj_B A$.

Exemplo 2.27 Sejam $A = (1, 2, -3)$ e $B = (1, 1, 2)$ vetores do espaço. Vamos calcular a projeção P de A sobre B. Temos:

$$c = \frac{A \cdot B}{B \cdot B} = \frac{1 + 2 - 6}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Portanto $P = Proj_B A = cB = -\frac{1}{2}(1, 1, 2) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1)$. ◁

Exercício 2.28 Verifique que $Proj_B A = Proj_{\lambda B} A$, para λ constante não nula. Faça um esboço para $\lambda = 1, \frac{1}{2}, -1$.

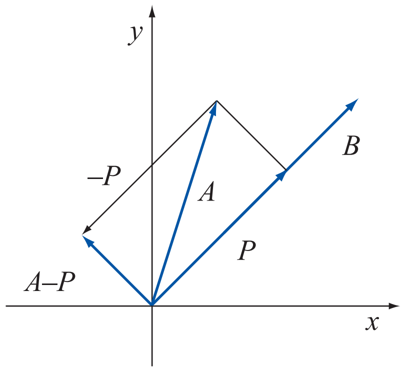


Figura 2.7: A projeção de um vetor A sobre um vetor B

Podemos agora demonstrar a Proposição 2.24:
Dados dois vetores A e B temos

$$A \cdot B = \|A\| \, \|B\| \, cos(\theta),$$

onde θ é ângulo entre os vetores A e B.

Demonstração 2.29 Da geometria elementar, temos a seguinte relação:

$$cos(\theta) = \frac{c\|B\|}{\|A\|}.$$

Substituindo o valor de c obtido acima temos:

$$\|A\| \, cos(\theta) = \frac{A \cdot B}{B \cdot B}\|B\| = \frac{A \cdot B}{\|B\|^2}\,\|B\|, \text{ donde:}$$

$$A \cdot B = \|A\| \, \|B\| \, cos(\theta).$$

Observação 2.30 Alguns autores tomam a relação

$$A \cdot B = \|A\| \, \|B\| \, cos(\theta)$$

como sendo a definição do produto escalar. Optamos por adotar a definição acima, seguindo o tratamento dado por Serge Lang em seu livro [3]. Um dos mais prolíficos e respeitados autores de livros de matemática do século passado, Lang observa que tomar a relação acima como definição dificulta a demonstração das propriedades do produto escalar, além desta relação não possuir uma generalização natural no contexto da análise funcional, vantagens do tratamento mais algébrico que adotamos aqui.

O conceito de perpendicularidade visto aqui é distinto do corrente nos cursos de geometria elementar. Vamos mostrar agora que eles são coincidentes. Para isto vamos relembrar um fato da geometria elementar. Dado um segmento $\overline{CD}$ no plano, o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de C e D é a perpendicular a $\overline{CD}$, passando pelo seu ponto médio.

Considere um vetor A e um vetor B e vamos supor que eles possuem o mesmo ponto inicial. Consideremos o vetor $-B$. A distância de A a B é $\|A - B\|$. A distância de A a $-B$ é $\|A + B\|$. Pelo resultado acima estas distâncias serão iguais se e somente se os vetores A e B são perpendiculares. Para mostrar que o conceito de perpendicularismo da geometria elementar coincide com o nosso vamos mostrar o seguinte:

Proposição 2.31 *Dados dois vetores A e B, $\|A-B\| = \|A+B\|$ se e somente se $A \cdot B = 0$.*

Demonstração: Suponhamos que $\|A - B\| = \|A + B\|$. Temos que

$$\sqrt{(A - B) \cdot (A - B)} = \sqrt{(A + B) \cdot (A + B)}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado temos:

$$A \cdot A + 2A \cdot B + B \cdot B = A \cdot A - 2A \cdot B + B \cdot B,$$

ou seja, $A \cdot B = 0$. Isto mostra que $\|A - B\| = \|A + B\|$ se e somente se $A \cdot B = 0$. □

2.6 - EXERCÍCIOS

1. Considere os pontos A e B abaixo, no plano, ou no espaço, e calcule $A+B$, $A-B$, $3A$.

   (a) $A = (2, -1)$ e $B = (-1, 1)$.
   (b) $A = (-1, 3)$ e $B = (0, 4)$.
   (c) $A = (2, -1, 5)$ e $B = (-1, 1, 1)$.
   (d) $A = (\pi, 3, -1)$ e $B = (2\pi, -3, 7)$.

2. Desenhe os pontos do exercício anterior.

3. Calcule e desenhe $A + 2B$, $A + 3B$, $A + \frac{1}{2}B$ para A e B como no exercício 1.

4. Em cada caso, determine se os vetores $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{AB}$ são equivalentes:

   (a) $C = (1, -1)$, $D = (1, 3)$, $A = (-1, 5)$, $B = (2, 2)$.
   (b) $C = (1, 4)$, $D = (-3, 5)$, $A = (5, 7)$, $B = (1, 8)$.
   (c) $C = (1, -1, 5)$, $D = (-2, 3, 4)$, $A = (3, 1, 1)$, $B = (0, 5, 0)$.
   (d) $C = (2, 3, -4)$, $D = (-1, 3, 5)$, $A = (-2, -1, 5)$, $B = (2, 2, 7)$.

5. Encontre o comprimento dos vetores A, B, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ no item anterior.

6. Encontre o produto escalar $A.A$ e $A.B$ para todos os valores de A e B no exercício 1.

7. Quais dos seguintes pares de vetores são perpendiculares?

   (a) $(1, -1, 2)$ e $(2, 1, 7)$.
   (b) $(1, -1, 1)$ e $(2, 3, 1)$.
   (c) $(\pi, 2, 1)$ e $(2, -\pi, 0)$.
   (d) $(-1, 1)$ e $(1, -1)$.
   (e) $(-5, 2)$ e $(2, 3)$.

8. Faça um esboço dos dois últimos itens do exercício acima.

9. Determine o cosseno dos ângulos do triângulo cujos vértices são:

   (a) $(2, -1, 1)$, $(1, -3, -5)$ e $(3, -4, -4)$.
   (b) $(3, 1, 1)$, $(-1, 2, 1)$ e $(2, -2, 5)$.

10. Sejam A, B, C três vetores não nulos. Mostre, por meio de um exemplo, que podemos ter $A.C = B.C$ com A e B distintos.

AULA 3

A circunferência, a esfera e as cônicas

OBJETIVO

Ao terminar esta aula você deverá ser capaz de:

1. Aplicar os conceitos de vetores no plano e no espaço vistos na aula anterior ao estudo da circunferência e da esfera.
2. Conhecer as definições da elipse, hipérbole e parábola como lugar geométrico e aplicar o conceito de vetor no plano visto na aula anterior ao estudo das cônicas acima.
3. Entender o que é uma mudança de coordenadas e utilizar mudanças de coordenadas à identificação das cônicas.

3.1 - ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA E DA ESFERA

Consideremos inicialmente o plano xy.

Definição 3.1 Uma circunferência é o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes a um ponto C dado. O ponto C é chamado de centro da circunferência, e a distância comum, o raio.

Suponha que o ponto $C = (0,0)$ é a origem do plano xy e a distância é um número r. Aplicando a fórmula de distância temos que um ponto $X = (x,y)$ satisfaz o lugar geométrico se:

$$\|X - 0\| = r, \text{ ou seja, se } \sqrt{(x^2 + y^2)} = r,$$

ou ainda se $x^2 + y^2 = r^2$, que é a equação de uma circunferência de centro na origem e raio r.

De maneira mais geral, se o centro da circunferência é um ponto $\vec{C} = (a,b)$ dado e $\vec{X} = (x,y)$ é um ponto da circunferência, o lugar geométrico é descrito pela condição que $\overrightarrow{CX} = X - C = (x-a, y-b)$ possua comprimento constante igual a r.
Temos assim $\|(x-a, y-b)\| = r$ donde obtemos a equação da circunferência de centro em $C = (a,b)$ e raio r :

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \text{ ou ainda } (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \qquad (3.1)$$

Exemplo 3.2 A equação $x^2 + y^2 = 4$ descreve a equação da circunferência de centro na origem e raio 2. $\triangleleft$

Exemplo 3.3 A equação $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$ descreve a equação da circunferência de centro em $C = (1, 3)$ e raio 2. A equação acima pode também ser escrita $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 4$ ou ainda $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$. Isto levanta a seguinte questão. Dada uma equação como acima, saber se ela representa uma circunferência e, em caso afirmativo, determinar o seu centro e raio. É o que faremos após os exercícios abaixo. $\triangleleft$

Exercício 3.4 Encontre a equação da circunferência de centro no ponto $C = (2, 1)$ e raio 3.

Retomemos a Equação 3.1 $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$. Podemos escrevê-la assim:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + d = 0,$$

onde $d = a^2 + b^2 - r^2$. Queremos responder a seguinte questão: dada uma equação como esta última, como reconhecer que ela é uma circunferência e como determinar o seu centro e raio. Considere o seguinte exemplo:

Exemplo 3.5 Determine o raio e o centro da circunferência dada pela equação $x^2 - 2x + y^2 = 0$. Esta equação não está na forma 3.1. Para colocá-la nesta forma usamos um método conhecido como completar o quadrado. Observe que os termos $x^2 - 2x$ quase formam um quadrado perfeito já que $(x-1)^2 = x^2-2x+1$. Para completar o quadrado na equação dada, somamos 1 aos dois membros da igualdade e obtemos:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \text{ ou ainda } (x-1)^2 + (y-0)^2 = 1,$$

ou seja, a equação dada é a da circunferência de raio 1 e centro no ponto $(a, b) = (1, 0)$. $\triangleleft$

Assim, dada uma equação do segundo grau em x, y para saber se ela é ou não uma circunferência, tentamos completar os quadrados como no exemplo e determinamos o seu centro e raio. Nem sempre é possível completar quadrados. Elucidaremos esta questão na próxima seção. Antes disso, vamos estudar uma situação semelhante no espaço tridimensional.

Vamos considerar agora o espaço com coordenadas x, y, z.

Definição 3.6 Uma esfera é o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes a um ponto C. O ponto C é chamado o centro da esfera, e a distância comum, o raio da esfera.

Suponha que o ponto é a origem do plano xyz e a distância é um número r. Aplicando a fórmula de distância temos que um ponto $X = (x, y, z)$ satisfaz o lugar geométrico se $\|X - 0\| = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} = r$, ou seja, se $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, que é a equação de uma esfera de centro na origem e raio r.

De maneira mais geral, se o centro da esfera é um ponto $\overrightarrow{C} = (a, b, c)$ dado e $\overrightarrow{X} = (x, y, z)$ é um ponto da esfera, o lugar geométrico é descrito pela condição que $\overrightarrow{CX} = X - C = (x - a, y - b, z - c)$ possua comprimento constante igual a r. Temos assim $\|(x - a, y - b, x - c)\| = r$, donde obtemos a equação da esfera de centro em $C = (a, b, c)$ e raio r :

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} &= r, \text{ ou ainda,} \\
(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 &= r^2 \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

Exemplo 3.7 A equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ descreve a equação da esfera de centro na origem e raio 1. ◁

Exemplo 3.8 A equação $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$ descreve a equação da esfera de centro em $C = (1, 1, 1)$ e raio 3. A equação acima pode também ser escrita $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 = 9$ ou ainda $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$. Poderíamos, como no caso da circunferência, tratar da questão de como determinar se uma equação do segundo grau em três variáveis é uma esfera e, em caso afirmativo, determinar o seu centro e raio, mas vamos optar por retornar ao plano xy e tratar de algumas outras figuras aí. ◁

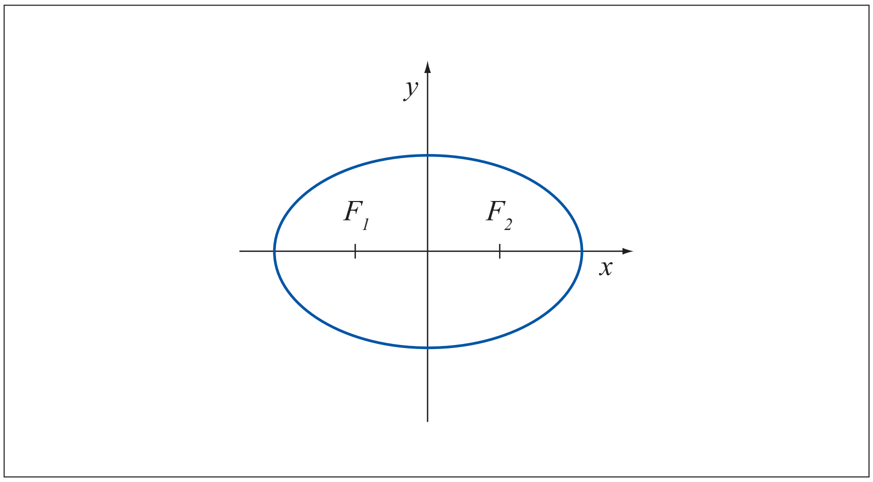


Figura 3.1: Uma elipse de focos F_1 e F_2

3.2 - ESTUDO DE CÔNICAS

3.2.1 - A Elipse

Considere novamente o plano xy.

Definição 3.9 Uma elipse é o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos dados é constante. Os dois pontos são chamados de focos da elipse.

Suponha inicialmente que os dois pontos F_1, F_2 são dados por $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, a soma das distâncias seja uma constante $2a$, e um ponto qualquer da elipse seja dado por $X = (x, y)$. Suponha que $2a > 2c$. Temos que $\|XF_1\| + \|XF_2\| = 2a$. Então:

$$\sqrt{(x-(-c))^2+y^2} + \sqrt{(x-(c))^2+y^2} = 2a,$$

ou ainda

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-(c))^2+y^2}.$$

Elevando ao quadrado obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

ou ainda

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Simplificando obtemos:

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx$$

Elevando novamente ao quadrado:

$$a^2((x-c)^2+y^2) = a^2x^2+a^2c^2-2a^2xc+a^2y^2 = c^2x^2+a^4-2cxa^2$$

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).$$

Finalmente, fazendo $a^2-c^2=b^2$ e dividindo ambos os membros por a^2b^2, temos a equação da elipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Dizemos que $2a$ é o comprimento do eixo maior da elipse e $2b$ é o comprimento do eixo menor da elipse (veja a Figura 3.1).

Exercício 3.10 Encontre a equação da elipse de focos nos pontos $F_1=(-1,0)$ e $F_2=(1,0)$ e tal que a soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a 4.

3.2.2 - A Hipérbole

Consideremos ainda o plano xy.

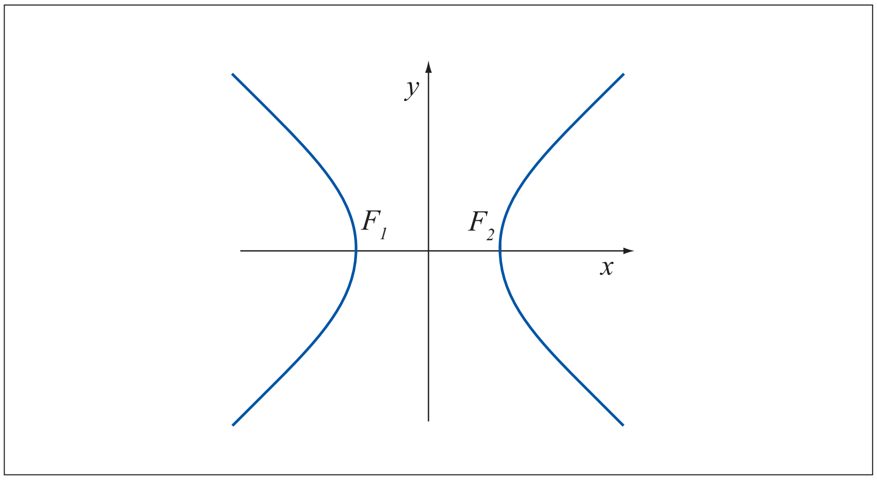


Figura 3.2: Uma hipérbole de focos F_1 e F_2

Definição 3.11 Uma hipérbole é o lugar geométrico dos pontos cujo módulo da diferença das distâncias a dois pontos dados é constante e menor que a distância entre F_1 e F_2. Os dois pontos são chamados de focos da hipérbole.

Suponha que os dois pontos F_1, F_2 são dados por $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, o módulo da diferença das distâncias seja uma constante $2a$, e um ponto qualquer da hipérbole seja dado por $X = (x, y)$. Temos $|\|XF_1\| - \|XF_2\|| = 2a$. Então:

$$|\sqrt{(x-(-c))^2+y^2} - \sqrt{(x-(c))^2+y^2}| = 2a,$$

ou ainda

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-(c))^2+y^2},$$

já que se k é um número e $|k| = a$, temos $k = a$ ou $k = -a$. Elevando ao quadrado, obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

ou ainda

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Simplificando obtemos:

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = cx - a^2.$$

Elevando novamente ao quadrado:

$$a^2((x-c)^2+y^2) = a^2x^2 + a^2c^2 - 2a^2xc + a^2y^2 = c^2x^2 + a^4 - 2cxa^2$$

$$x^2(c^2-a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2).$$

Finalmente, fazendo $c^2 - a^2 = b^2$ e dividindo ambos os membros por a^2b^2 temos a equação da hipérbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Exercício 3.12 Encontre a equação da hipérbole de focos nos pontos $F_1 = (-1, 0)$ e $F_2 = (1, 0)$ e cujo módulo da diferença das distâncias a F_1 e F_2 é igual a 1.

Nos exercícios, vamos investigar quando algumas equações do segundo grau são circunferências, elipses, hipérboles ou parábolas.

3.2.3 - A Parábola

Definição 3.13 Uma parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano xy tais que sua distância a um ponto fixo, chamado foco, é igual à sua distância a uma reta fixa, chamada diretriz.

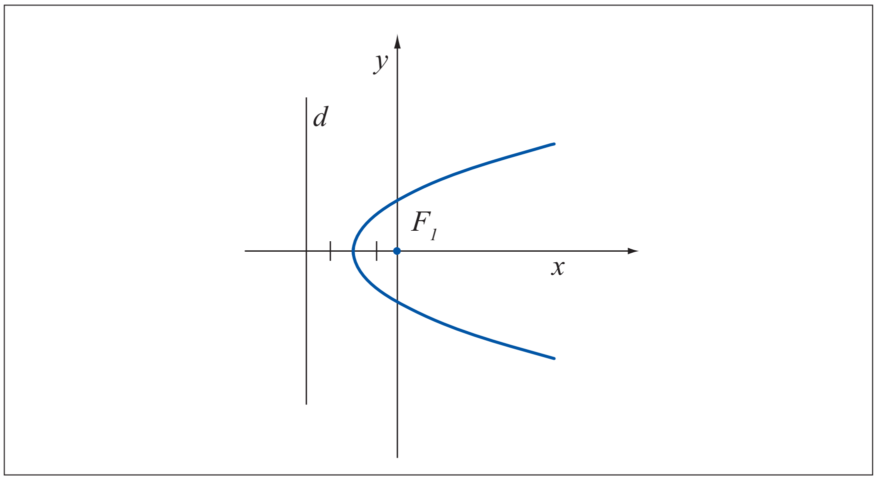


Figura 3.3: Uma parábola de foco F_1 e diretriz d

Vamos supor inicialmente que o foco é dado por $F = (c, 0)$ e a diretriz é a reta dada por $x = -c$. Vamos encontrar a equação da parábola. Para isso, suponha que um ponto da parábola é dado por $P = (x, y)$. A distância de P à diretriz é dada por $\|\overrightarrow{DP}\| = \|P - D\| = \|(x, y) - (-c, y)\| = \sqrt{(x+c)^2}$. A distância de P ao foco é dada por $\|\overrightarrow{CP}\| = \|P - C\| = \|(x - c, y)\| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Temos então que a condição $\|\overrightarrow{DP}\| = \|\overrightarrow{CP}\|$ implica que $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2}$. Elevando ao quadrado temos que: $x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2$, donde obtemos a equação da parábola com foco F e diretriz $x = -c$:

$$y^2 = 4cx$$

A reta que passa pelo foco F da parábola e é perpendicular à diretriz se chama eixo da parábola. O ponto médio do segmento sobre o eixo da parábola determinado pelo foco e a interseção com a diretriz se chama vértice da parábola. Claro que a escolha que fizemos do foco e do eixo determinaram a equação que obtivemos. Vamos estudar agora como a equação da parábola é afetada por esta escolha do foco e da diretriz. Resolva os seguintes exercícios.

Exercício 3.14 Mostre que se escolhermos para foco da parábola o ponto $F = (-c, 0)$ e para diretriz a reta $x = c$ então a equação da parábola de foco F e diretriz $x = c$ é dada por $y^2 = -4cx$.

Exercício 3.15 Mostre que se escolhermos para foco da parábola o ponto $F = (0, c)$ e para diretriz a reta $y = -c$ então a equação da parábola de foco F e diretriz $x = c$ é dada por $x^2 = 4cy$.

Vamos supor que o vértice da parábola é agora um ponto arbitrário (h, k), isto é, que a diretriz é a reta $x = h - c$ e o foco F é o ponto $F = (h + c, k)$. Vamos encontrar a equação da parábola, neste caso mais geral. Para isso, suponha novamente que um ponto da parábola é dado por $P = (x, y)$. A distância de P à diretriz é dada por $\|\overrightarrow{DP}\| = \|P - D\| = \|(x, y) - (h - c, y)\| = \sqrt{(x - h + c)^2}$. A distância de P ao foco é dada por $\|\overrightarrow{CP}\| = \|P - C\| = \|(x, y) - (h + c, k)\| = \sqrt{(x - h - c)^2 + (y - k)^2}$. Temos então que a condição $\|\overrightarrow{DP}\| = \|\overrightarrow{CP}\|$ implica que $\sqrt{(x - h + c)^2} = \sqrt{(x - h - c)^2 + (y - k)^2}$. Elevando ao quadrado temos que:

$$x^2 - 2cx + c^2 + h^2 - 2hc - 2xh =$$

$$x^2 + h^2 + c^2 + 2hc - 2xh + 2cx + y^2 - 2yk + k^2 =$$

$$y^2 - 2yk + k^2 = 4cx - 4ch$$

donde obtemos a equação da parábola com foco $F = (h + c, k)$ e diretriz $x = h - c$:

$$(y - k)^2 = 4c(x - h). \tag{3.3}$$

Podemos inverter o processo e, dada uma equação de uma parábola, encontrar o seu foco e sua diretriz. Considere o seguinte exemplo:

Exemplo 3.16 Encontre o foco e a diretriz da parábola dada pela equação.

$$y^2 - 2y = x - 5$$

Completando o quadrado obtemos:

$$y^2 - 2y + 1 = x - 5 + 1$$

donde:

$$(y - 1)^2 = x - 4 = 4\frac{1}{4}(x - 4)$$

Ou seja, tendo em mente a Equação 3.3, temos uma parábola cuja diretriz $x = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$ e cujo foco é $(\frac{17}{4}, 1)$. ◁

3.2.4 - Cônicas Padrão

As cônicas padrão são as dadas pelas equações que já estudamos até agora:

1. A elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2. A hipérbole de equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3. A parábola de equação $y^2 = 4cx$.

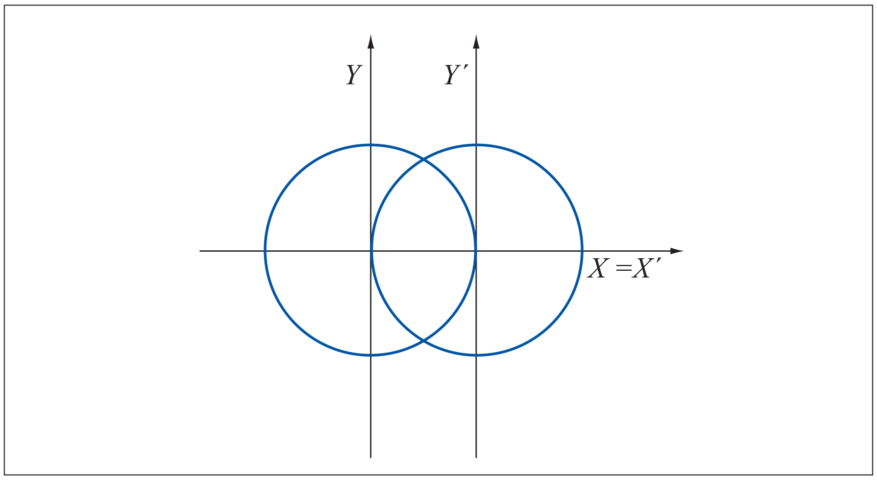


Figura 3.4: Mudança de coordenadas

Algumas cônicas podem facilmente ser reduzidas às cônicas padrão trocando os eixos x e y. É o caso da parábola $x^2 = 4cy$ que estudamos na seção anterior ou o da hipérbole $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

Algumas outras cônicas podem ser reduzidas às cônicas padrão por um processo chamado translação de eixos.
Considere o seguinte exemplo:

Exemplo 3.17 Retomemos o Exemplo 3.5. Vimos que a equação $x^2 - 2x + y^2 = 0$ pode ser transformada na equação $(x-1)^2 + (y-0)^2 = 1$, completando o quadrado. Vimos, portanto, que se trata da circunfêrencia de centro em $(1, 0)$ e raio 1. Uma outra maneira de ver isto é considerar o que chamamos uma mudança de coordenadas. Seja $x' = x - 1$ e $y' = y$ um outro sistema de coordenadas. A equação acima se torna no novo sistema de coordenadas $x'y'$, $x'^2 + y'^2 = 1$, uma circunferência de raio 1 e centro na origem. Para voltar ao velho sistema observamos o que ocorreu com a origem. Fazendo $x' = 0$ e $y' = 0$ obtemos $x = 1$ e $y = 0$. Portanto, a origem no novo sistema possui coordenadas $(1, 0)$ no velho sistema.Veja a Figura 3.4.

Observe que, no exemplo acima, o sistema $x'y'$ pode ser obtido do sistema xy adicionando o vetor $(1, 0)$ a todos os pontos do plano xy.

Definição 3.18 Dizemos que o plano $x'y'$ é obtido do plano xy por uma translação quando todo vetor (x', y') pode ser obtido de um vetor (x, y) adicionando um vetor constante (a, b). Dizemos também que efetuamos uma mudança de coordenadas, onde $x'y'$ é chamado o novo sistema de coordenadas e xy é o velho sistema de coordenadas.

Exemplo 3.19 Reduza a equação $2x^2 - 3y^2 - 2y = 1$ a uma das cônicas padrão. Para isso, vamos completar quadrados como já fizemos anteriormente. Temos

$$2x^2 - 3(y^2 + \frac{2}{3}y) = 1 \text{ ou ainda } 2x^2 - 3(y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}) + \frac{1}{3} = 1$$

donde

$$2x^2 - 3(y + \frac{1}{3})^2 = \frac{2}{3}$$

ou seja, obtemos a equação: $\frac{x^2}{\frac{1}{3}} - \frac{(y+\frac{1}{3})^2}{\frac{2}{9}} = 1$.

Para reduzir esta equação ̌ma das cônicas padrão fazemos uma mudança de variável $x' = x$ e $y' = y + \frac{1}{3}$. Obtemos:

$$\frac{x'^2}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2} - \frac{y'^2}{(\frac{\sqrt{2}}{3})^2} = 1$$

Vemos assim que a cônica em questão é uma hipérbole e a mudança de variável que fizemos é o que se chama uma translação.

Exemplo 3.20 No exemplo anterior temos $(x', y') = (x, y) + (0, -\frac{1}{3})$.

Podemos identificar um grande número de cônicas reduzindo-as a uma cônica padrão completando quadrados e efetuando uma translação de eixos. Nos exercícios veremos outros exemplos. Algumas vezes é preciso efetuar além de uma translação uma rotação de eixos para reduzir uma cônica a uma cônica padrão. É o que veremos na 2^a parte deste curso.

3.3 - EXERCÍCIOS

1. Encontre as equações das seguintes figuras no plano xy :
   (a) A circunferência de centro $C = (1, 2)$ e raio 3.
   (b) A elipse de focos $F_1 = (-2, 0)$ e $F_2 = (2, 0)$ e $2a = 5$.
   (c) A de hipébole de focos $F_1 = (-2, 0)$ e $F_2 = (2, 0)$ e $2a = 3$.

2. Encontre as equações das seguintes figuras no espaço xyz :
   (a) A esfera de centro na origem e raio 2.
   (b) A esfera de centro $C = (1, 2, 1)$ e raio 3.

3. Identifique as seguintes figuras no plano xy, dizendo se elas são circunferências, elipses, hipérboles ou parábolas e dando seus centros, raios, focos, eixos e diretrizes conforme o caso.
   (a) A figura dada por $x^2 + y^2 - 2y = 0$.
   (b) A figura dada por $2x^2 + 3y^2 = 1$.
   (c) A figura dada por $2x^2 - 3y^2 - 4y = 1$.
   (d) A figura dada por $2x^2 + 2y^2 = 1$.
   (e) A figura dada por $y^2 + 2y - 8x - 3 = 0$.

4. Encontre a equação da elipse nos seguintes casos:
   (a) Dados os vértices $(-5, 0)$ e $(5, 0)$ e o ponto $(4, \frac{12}{5})$ da mesma.
   (b) Focos $(1, 4)$ e $(3, 4)$ e comprimento do eixo maior sendo igual a 4.

5. Encontre a equação da hipérbole de centro em $(2, 3)$, um foco em $(2, 5)$ e $2a = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

6. Encontre a equação da parábola cujo eixo é paralelo ao eixo dos $y's$, cujo vértice é $(1, 3)$ e que passa pelo ponto $(5, 7)$.

AULA 4

Operações com matrizes

OBJETIVO

Ao terminar esta aula você deverá ser capaz de:

1. Saber o que é uma matriz e conhecer as operações de soma de matrizes, multiplicação de matrizes por um escalar e produto de matrizes.

4.1 - ADIÇÃO DE MATRIZES

Definição 4.1 Uma *matriz* $m \times n$ é uma tabela de números dispostos em m linhas e n colunas.

Exemplo 4.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 0 & -8 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

é uma matriz 3×3. $\triangleleft$

Exemplo 4.3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 73 & 9 & -7 \\ 0 & -8 & \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$

é uma matriz 3×4.

$\triangleleft$

Quando o número de linhas é igual ao número de colunas, dizemos que a matriz é quadrada, caso contrário, retangular. O primeiro exemplo é uma matriz quadrada 3×3, o segundo exemplo, uma matriz retangular 3×4. Matrizes são entes fundamentais em toda a matemática atual. São utilizadas para resolver sistemas de equações, para representar um certo tipo de função etc. Encontram aplicações à estatística, à física, à computação gráfica e outros vários campos do conhecimento. Neste curso você estudará várias destas aplicações em todos os capítulos que se seguirão. Mas antes vamos aprender a operar com matrizes.

Cada um dos números que compõem uma matriz é chamado uma entrada. Costumamos denotar a entrada de uma matriz na linha i e coluna j por a_{ij}. Assim a_{11} significa a entrada na primeira linha e primeira coluna, a_{32} significa a entrada na terceira linha e segunda coluna etc.

Exemplo 4.4 É muito comum denotarmos uma matriz arbitrária 3×4 assim

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

$\triangleleft$

É usual também escrevermos matrizes arbitrárias A com m linhas e n colunas, da seguinte maneira:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Uma outra maneira de escrever a matriz A , $m \times n$, é simplesmente $A = (a_{ij})$. Utilizaremos as duas maneiras conforme a nossa conveniência.

Diremos que duas matrizes são iguais se elas possuem o mesmo número de linhas e colunas e se suas entradas correspondentes são iguais.

Definição 4.5 Dadas duas matrizes A e B $m \times n$ a soma de A e B, $A + B$ é a matriz $m \times n$ tal que a entrada (i, j) é a soma da entrada (i, j) de A com a entrada (i, j) de B.

Podemos escrever se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, então $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

Exemplo 4.6 Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 73 & 9 & -7 \\ 0 & -8 & \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$

uma matriz 3×4 e

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 12 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \\ 0 & -8 & 2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$

uma matriz do mesmo tamanho.

Então

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 14 & 2 & 13 \\ 3 & 76 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 3\sqrt{2} & 8 \end{pmatrix}.$$

$\triangleleft$

Definição 4.7 Dadas uma matriz A $m \times n$ e um número c podemos definir o *produto* da matriz A por c que é a matriz cA obtida de A multiplicando todas as entradas de A por c.

Podemos escrever: se $A = (a_{ij})$, então $cA = (ca_{ij})$.

Exemplo 4.8 Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 73 & 9 & -7 \\ 0 & -8 & \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$

uma matriz 3×4.

Então

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 18 \\ 6 & 219 & 27 & -21 \\ 0 & -24 & 3\sqrt{2} & 12 \end{pmatrix}.$$

$\triangleleft$

Proposição 4.9 *Sejam A, B, C matrizes $m \times n$ e k, k_1, k_2 números. A adição de matrizes e o produto por um escalar satisfazem as seguintes propriedades:*

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$.
2. $A + 0 = A$, *onde* 0 *denota a matriz* $m \times n$ *que possui todas as entradas nulas.*
3. $A + (-A) = 0$, *onde* $-A$ *denota a matriz* $m \times n$ *que é obtida multiplicando todas as entradas de* A *por* -1.
4. $A + B = B + A$.
5. $k(A + B) = kA + kB$.
6. $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$.
7. $(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$.
8. $1 \cdot A = A$ *e* $0 \cdot A = 0$.

4.2 - PRODUTO DE MATRIZES

Já definimos a adição de matrizes e a multiplicação de uma matriz por um escalar. Vamos agora definir a mutiplicação de matrizes.

Definição 4.10 Dadas duas matrizes A, $m \times k$ e B , $k \times n$, o produto $A.B$ de A e B é a matriz C $m \times n$ tal que a entrada c_{ij} de C é a soma dos produtos das respectivas entradas da linha i de A pela coluna j de B.

A definição da multiplicação de matrizes desta maneira é um pouco misteriosa. A melhor justificativa para tal definição é que é esta a definição que "dá certo", que é útil. Isso ocorre muito em matemática. Nos próximos capítulos, justificaremos tal definição. Por ora, vamos aprender a utilizá-la.

Exemplo 4.11 Seja A a matriz 2×3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 73 & 9 \end{pmatrix}$$

B a matriz 3×4 : e

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 12 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \\ 0 & -8 & 2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix},$$

vamos calcular a matriz $C = A \cdot B$:

$$C = A {\cdot} B = \begin{pmatrix} -1+2+0 & 12+6-8 & 1-18+2\sqrt{2} & 7+14+4 \\ -2+73+0 & 24+219-72 & 2-657+18\sqrt{2} & 14+511+36 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & -17+2\sqrt{2} & 25 \\ 71 & 171 & -655+18\sqrt{2} & 561 \end{pmatrix}.$$

Assim, a entrada c_{11} do produto é o resultado da seguinte operação $1(-1) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$, da mesma forma a entrada $c_{21} = 2 \cdot (-1)1 + 73 \cdot 1 + 9.0 = 71$ e a entrada $c_{23} = 2 \cdot 1 + 73 \cdot (-9) + 9 \cdot (2\sqrt{2}) = -655 + 18\sqrt{2}$ $\triangleleft$

Exercício 4.12 Encontre as outras entradas da matriz produto, a saber, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{22}, c_{24} e confira com o resultado do exemplo acima.

Observação 4.13 Observe que não é possível multiplicar matrizes de qualquer tamanho. A definição exige que o número de entradas de cada linha da primeira matriz seja igual ao número de entradas de cada coluna da segunda matriz, isto é, temos que mutiplicar matrizes $m \times k$ por matrizes $k \times n$ e o resultado será uma matriz $m \times n$. No exemplo, a multiplicação de uma matriz 2×3 por uma 3×4 resultou numa matriz produto 2×4. Segue que $A.B$ pode existir e $B.A$ não. Em particular, a multiplicação de matrizes não é comutativa. A Proposição abaixo enumera as propriedades do produto de matrizes.

Proposição 4.14 *Sejam A, B, C matrizes de tamanho adequado e k um número. Então a multiplicação de matrizes possui as seguintes propriedades:*

1. $(A \cdot B) \cdot C) = A \cdot (B \cdot C)$.
2. $A(B + C) = AB + AC$.
3. $(B + C)A = BA + CA$.
4. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$.

Quando consideramos matrizes quadradas $n \times n$, a multiplicação de matrizes possui propriedades adicionais, que passamos a enunciar. Em uma matriz quadrada, faz sentido falar na diagonal de principal da matriz que são as entradas a_{ii}. Uma matriz quadrada tal que todas as entradas da matriz são nulas, exceto as da diagonal principal, que são todas iguais a 1, é chamada de matriz identidade e denotada por I_n ou simplesmente I.

Exemplo 4.15 *Considere a seguinte matriz A, 3×3.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 73 & 9 \\ -2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

e a matriz identidade

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos que $AI_3 = I_3A = A$ (verifique). $\triangleleft$

Dada uma matriz A, $n \times n$ temos a seguinte propriedade:

$$A.I = I.A = A \text{ onde } I \text{ denota a matriz identidade } n \times n$$

Exemplo 4.16 Podemos associar a um sistema de equações lineares uma equação matricial da seguinte maneira. Considere o sistema abaixo de 3 equações e 3 incógnitas que será resolvido mais adiante (6.15).

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + az &= 3 \\ x + ay + 3z &= 2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Podemos escrever este sistema da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ou ainda $AX = B$ onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

É muito comum escrever as variáveis de um determinado sistema de equações como um vetor coluna X, $1 \times n$, no exemplo acima um vetor 1×3. $\triangleleft$

Exercício 4.17 Verifique que $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercício 4.18 Verifique que $A \cdot B \neq B \cdot A$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & -8 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercício 4.19 Considere os sistemas lineares abaixo e os escreva na forma $AX = B$ como acima.

1.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 2x + 6y + z &= 3 \\ x + y + 3z &= -2 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x + y - z + w &= -1 \\ 2x + 3y + z + 2w &= -3 \\ x + 9y + 3z - 5w &= 2 \end{aligned}$$

4.3 - TRANSPOSTA DE UMA MATRIZ

Definição 4.20 Dada uma matriz A, $m \times n$, a *transposta* da matriz A é a matriz $n \times m$ que se obtém trocando as linhas de A com suas colunas (notação A^t).

Exemplo 4.21 Seja A a matriz 3×4

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 12 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \\ 0 & -8 & 2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

A transposta de A, A^t, será a matriz 4×3:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 12 & 3 & -8 \\ 1 & -9 & 2\sqrt{2} \\ 7 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\triangleleft$

4.4 - EXERCÍCIOS

1. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

   $A + B$, $A - B$, $3A$, $2A - 3B$.

2. Encontre A^t e B^t onde A e B são as matrizes do item anterior.

3. Em cada um dos casos abaixo encontre $(AB)C$ e $A(BC)$.

   (a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 7 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   (c)
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

AULA 5

Determinantes

OBJETIVO

Ao terminar esta aula você deverá ser capaz de:

1. Saber o que é o determinante de uma matriz quadrada e quais são suas propriedades.

5.1 - DETERMINANTES DE ORDEM 2

Vamos inicialmente considerar determinantes de uma matriz 2×2 para a partir deles considerar o caso geral. Seja

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

uma matriz quadrada 2×2. Definimos o determinante de A (denotado por Det(A) ou $|A|$.) como sendo o número:

$$Det(A) = ad - bc$$

Exemplo 5.1 *Se*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

então $Det(A) = (-3)(5) - 4.2 = -23.$ $\triangleleft$

O determinante pode ser visto como uma função da matriz A ou de suas colunas. Escrevemos $Det(A)$ ou $Det(A_1, A_2)$ onde $A = (A_1 A_2)$. A proposição seguinte dá as propriedades da função determinante:

Proposição 5.2 Seja A uma matriz 2×2. A função $Det(A)$ possui as seguintes propriedades:

1. $$Det\begin{pmatrix} a & b+b' \\ c & d+d' \end{pmatrix} = Det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + Det\begin{pmatrix} a & b' \\ c & d' \end{pmatrix}$$
   e analogamente para a primeira coluna.

2. Se t é um número então
   $$Det\begin{pmatrix} a & tb \\ c & td \end{pmatrix} = tDet\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

3. Se duas colunas da matriz A são iguais, temos $Det(A) = 0$.

4. Se a uma coluna adicionamos um múltiplo de uma outra, o determinante não se altera.

5. Se duas colunas são trocadas, o determinante muda de sinal.

6. O determinante de uma matriz é igual ao de sua transposta.

Demonstração:

1. Seja $A = Det\begin{pmatrix} a & b+b' \\ c & d+d' \end{pmatrix}$. Temos:
   $$\begin{aligned} Det(A) &= Det\begin{pmatrix} a & b+b' \\ c & d+d' \end{pmatrix} \\ &= a(d+d') - c(b+b') = ad - cb + ad' - cb' \\ &= Det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + Det\begin{pmatrix} a & b' \\ c & d' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Seja $A = \begin{pmatrix} a & tb \\ c & td \end{pmatrix}$. Então:
   $$Det(A) = atd - ctb = t(ad - bc) = tDet\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

3. Seja $A = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$. Então:
   $$Det(A) = ab - ab = 0.$$

□

Exercício 5.3 Demonstre os itens 4, 5 e 6 da Proposição anterior.

5.2 - DETERMINANTES DE ORDEM ARBITRÁRIA

Vamos definir o determinante de uma matriz quadrada arbitrária por indução a partir do caso 2×2 que consideramos inicialmente. O caso seguinte é 3×3.

Definição 5.4 Seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ uma matriz 3×3.

Definimos $Det(A)$ como sendo o número:

$$Det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

onde

$\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{kl} \\ a_{mn} & a_{op} \end{vmatrix}$ denota o determinante da matriz 2×2 $\begin{pmatrix} a_{ij} & a_{kl} \\ a_{mn} & a_{op} \end{pmatrix}$.

Uma outra maneira de dizer o que escrevemos é a seguinte. Seja A_{ij} o determinante 2×2 obtido da matriz A acima retirando a linha i e a coluna j. Assim, por exemplo, A_{11} será o determinante que se obtém da matriz A retirando a primeira linha e a primeira coluna, $A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Com esta notação o determinante da matriz A, 3×3, se escreve:

$$Det(A) = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Exemplo 5.5 *Seja* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. *$Det(A)$ será o número:*

$$Det(A) = 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 0. \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -23$$

$\triangleleft$

Vamos definir agora o determinante de uma matriz quadrada arbitrária $n \times n$.

Definição 5.6 Seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{23} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ uma matriz $n \times n$. Definimos $Det(A)$ como sendo o número:

$$Det(A) = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + \dots (-1)^{n+1} a_{1n}A_{1n}$$

onde A_{ij} é o determinante da matriz $(n-1) \times (n-1)$ obtida de A eliminando a linha i e a coluna j.

Observação 5.7 A expressão que utilizamos na definição do determinante de uma matriz $n \times n$ é conhecida como desenvolvimento de Laplace em relação à primeira linha. Pode-se escrever o desenvolvimento de Laplace, de maneira análoga, em relação a qualquer linha ou coluna da matriz. Demonstra-se que o número obtido é o mesmo independentemente da linha ou coluna escolhida, desde que cada termo a_{ij} seja afetado do sinal apropriado que é $(-1)^{i+j}$. Veja também a demonstração da Proposição 5.8 a seguir.

O determinante de uma matriz A $n \times n$ possui propriedades análogas àquelas do determinante de uma matriz 2×2. É o que veremos a seguir.

Proposição 5.8 *Seja A uma matriz $n \times n$. A função $Det(A)$ possui as seguintes propriedades:*

1. *Se uma coluna da matriz A, A^j se escreve como soma de duas colunas $A^j = A_1 + A_2$, então temos:*

$$Det\begin{pmatrix} A^1 & A^2 & \dots & A_1 + A_2 & \dots & A^n \end{pmatrix} =$$

$$= Det\begin{pmatrix} A^1 & A^2 & \dots & A_1 & \dots & A^n \end{pmatrix} +$$

$$Det\begin{pmatrix} A^1 & A^2 & \dots & A_2 & \dots & A^n \end{pmatrix}$$

2. *Se t é um número, então*

$$Det\begin{pmatrix} A^1 & A^2 & \dots & tA^i & \dots & A^n \end{pmatrix} =$$

$$= tDet\begin{pmatrix} A^1 & A^2 & \dots & A^i & \dots & A^n \end{pmatrix}$$

3. *Se duas colunas adjacentes da matriz A são iguais, então*

$$Det(A) = 0.$$

4. *Se duas colunas são trocadas, o determinante muda de sinal.*

5. *Se a uma coluna adicionamos um múltiplo de uma outra, o determinante não se altera.*

6. *O determinante de uma matriz é igual ao de sua transposta.*

7. *Se A, B são matrizes $n \times n$, então $Det(A \cdot B) = Det(A)Det(B)$.*

Demonstração:

1. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

   e vamos supor que a primeira coluna A^1 se escreve

$$A^1 = A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b'_{11} \\ b'_{21} \\ \dots \\ b'_{n1} \end{pmatrix}.$$

   A demonstração no caso em que uma outra coluna se escreve como soma de duas outras é análoga. Temos:

$$Det(A) = \begin{vmatrix} b_{11} + b'_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_{21} + b'_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} + b'_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

   Calculando o desenvolvimento de Laplace pela primeira linha temos:

$$Det(A) = (b_{11} + b'_{11}) \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$-a_{12} \begin{vmatrix} b_{21} + b'_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} + b'_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+(-1)^{n+1} a_{1n} \begin{vmatrix} b_{21} + b'_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} + b'_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix}.$$

   Observe que todos os determinantes que aparecem na expressão acima são determinantes de matrizes $(n-1) \times (n-1)$. Segue da hipótese de indução que a proposição que queremos demonstrar vale para eles. Temos:

$$Det(A) = b_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + b'_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$-a_{12} \begin{vmatrix} b_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} b'_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b'_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+(-1)^{n+1}a_{1n}\begin{vmatrix} b_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}a_{1n}\begin{vmatrix} b'_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b'_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Utilizando o desenvolvimento de Laplace temos:

$$Det(A) = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b'_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b'_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b'_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

que era o que queríamos demonstrar.

2. Esta afirmação se demonstra de maneira semelhante a anterior e será deixada como exercício.

3. Sem perda de generalidade, suponha que as duas primeiras colunas são iguais.

   Ou seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n1} & a_{23} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

   Calculando o determinante pelo desenvolvimento de Laplace pela primeira linha temos:

$$Det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{23} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{11}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{23} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix}.$$

   As duas primeiras parcelas se cancelam e as outras são nulas por hipótese de indução.

4. Seja $A = \begin{pmatrix} A^1 & A^2 & A^3 & \dots & A^n \end{pmatrix}$ uma matriz $n \times n$ onde os A^i são as colunas da matriz. Sejam A^j e A^{j+1} duas colunas adjacentes e considere o seguinte determinante:

$$Det\begin{pmatrix} A^1 & A^2 & \cdots & A^j + A^{j+1} & A^j + A^{j+1} & \cdots & A^n \end{pmatrix},$$

   que é nulo, pois a matriz possui duas colunas iguais. Utilizando a Propriedade 1, já demonstrada, temos:

$$Det\begin{pmatrix} A^1 & A^2 & \cdots & A^j + A^{j+1} & A^j + A^{j+1} & \cdots & A^n \end{pmatrix} =$$

$$= Det\begin{pmatrix} \cdots & A^j & A^j + A^{j+1} & \cdots \end{pmatrix} +$$

$$= Det\begin{pmatrix} \cdots & A^{j+1} & A^j + A^{j+1} & \cdots \end{pmatrix} =,$$

$$= Det\begin{pmatrix} \cdots & A^j & A^j & \cdots \end{pmatrix} + Det\begin{pmatrix} \cdots & A^j & A^{j+1} & \cdots \end{pmatrix} +$$

$$+Det\begin{pmatrix} \cdots & A^{j+1} & A^j & \cdots \end{pmatrix} + Det\begin{pmatrix} \cdots & A^{j+1} & A^{j+1} & \cdots \end{pmatrix}.$$

Segue que

$$= Det\begin{pmatrix} \cdots & A^j & A^{j+1} & \cdots \end{pmatrix} = -Det\begin{pmatrix} \cdots & A^{j+1} & A^j & \cdots \end{pmatrix},$$

que era o que queríamos demonstrar.

5. Considere duas colunas distintas A^k e A^j e considere o determinante:

$$Det\begin{pmatrix} \dots & \overbrace{A^k + tA^j}^{\text{coluna } k} & \dots \end{pmatrix} = Det\begin{pmatrix} \dots & \overbrace{A^k}^{\text{coluna } k} & \dots \end{pmatrix} +$$

$$+Det\begin{pmatrix} \dots & \overbrace{tA^j}^{\text{coluna } k} & \dots \end{pmatrix}.$$

Mas o primeiro termo da soma à direita é $Det(A)$, e o segundo é nulo pela propriedade 3. Segue o resultado.

6. A demonstração desta propriedade não é difícil, mas involve, no caso geral, a teoria das permutações (o leitor interessado pode consultar [3]). Vamos fazê-la apenas no caso 3×3. O que temos de ver é que o desenvolvimento de Laplace pode ser feito por qualquer linha ou coluna e obteremos o mesmo resultado.

Seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Desenvolvendo pela 1ª linha temos:

$$Det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Para considerar o desenvolvimmento por outras linhas (ou colunas), utilizamos definição análoga a 5.4, ou seja, tomamos cada termo da linha ou coluna segundo a qual estamos desenvolvendo o determinante, com o sinal apropriado, multiplicada pelo menor obtido do determinante original eliminando a linha e a coluna em que aquele elemento comparece. O sinal é dado pelo seguinte padrão: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$. A verificação da proposição pode ser feita então diretamente.

7. Aqui também a verificação está relacionada com a teoria das permutações e será omitida, a demonstração completa pode ser encontrada na referência [3] já citada.

□

Corolário 5.9 Se duas colunas da matriz A são iguais, temos

$$Det(A) = 0.$$

Demonstração: Esta é uma conseqüência imediata do item 3) da proposição anterior, pois se duas colunas, não necessariamente adjacentes, são iguais, poderemos trocá-la sucessivamente com outras até que elas se tornem adjacentes. Como na operação trocamos apenas o sinal, o resultado segue. □

5.3 - A INVERSA DE UMA MATRIZ

Definição 5.10 Dada uma matriz quadrada A, $n \times n$, diz-se que A é inversível se existe uma matriz B, $n \times n$, tal que $A \cdot B = B \cdot A = I$. A matriz inversa de A será denotada por A^{-1}.

A matriz B inversa de A, quando existe, é única. Para ver que B é única, suponha que existam duas matrizes B_1 e B_2, ambas inversas de A. Temos que $AB_1 = B_1A = I$. e $AB_2 = I$. Mas então temos $B_1 = B_1I = B_1AB_2 = IB_2 = B_2$, ou seja, $B_1 = B_2$.

Dada a matriz $A \cdot B$, sua inversa é a matriz $B^{-1}A^{-1}$, pois

$$A \cdot B \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = B^{-1}A^{-1}A \cdot B = I.$$

Suponha que A seja uma matriz $n\times$ inversível e seja A^{-1} sua inversa. Temos então que $AA^{-1} = I$. Tomando determinantes, temos que $Det(A)Det(A^{-1}) = Det(I) = 1$. Concluímos que $Det(A) \neq 0$ e que $Det(A^{-1}) = \frac{1}{Det(A)}$.

Vamos aprender a calcular a matriz inversa de matrizes 2×2 e 3×3.

Exemplo 5.11 Considere a matriz A, 2×2 dada por

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

tal que $Det(A) = ad - bc \neq 0$. A inversa de A, A^{-1} é a matriz dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{Det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Esta afirmação é de fácil verificação, pois $AA^{-1} = I$. Na próxima aula, veremos como deduzir esta fórmula. ◁

Exercício 5.12 Verifique se as seguintes matrizes 2×2 são inversíveis e em caso afirmativo encontre a matriz inversa.

1.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Vamos aprender agora como encontrar a inversa de uma matriz 3×3. Seja A uma matriz 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

onde $Det(A) \neq 0$. A matriz dos co-fatores de A é a matriz M assim definida:

$$M = \begin{pmatrix} A_{11} & -A_{12} & A_{13} \\ -A_{21} & A_{22} & -A_{23} \\ A_{31} & -A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},$$

onde A_{ij} é o determinante da matriz 2×2 obtida de A suprimindo a linha i e a coluna j. O determinante A_{ij} é chamado o menor correspondente à entrada a_{ij}. Por exemplo $A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. A matriz adjunta de A, denotada por $Adj(A)$, é a matriz transposta da matriz M dos co-fatores: $Adj(A) = M^t$. A matriz inversa de A, A^{-1}, será dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{Det(A)} Adj(A). \tag{5.1}$$

Exemplo 5.13 Vamos calcular a inversa da matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Primeiramente calculamos a matriz M dos co-fatores. Para isso, temos que calcular todos os determinantes das matrizes 2×2 obtidas de A suprimindo uma linha e uma coluna. Observe:

1. $A_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -18$ (aqui suprimimos a primeira linha e a primeira coluna).

2. $A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -2$ (aqui suprimimos a primeira linha e a segunda coluna).

3. $A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$ (aqui suprimimos a primeira linha e a terceira coluna).

Calcule os outros menores $A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{32}, A_{33}$. Você encontrará a seguinte matriz M dos co-fatores (não esqueça dos sinais!):

$$M = \begin{pmatrix} -18 & 2 & 4 \\ -11 & 14 & 5 \\ -10 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

A matriz adjunta de A será a transposta de M:

$$M = \begin{pmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

Finalmente, utilizando a fórmula 5.1, já que $Det(A) = -46$, temos que:

$$A^{-1} = -\frac{1}{46} \begin{pmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

$\triangleleft$

5.4 - EXERCÍCIOS

1. Calcule os seguintes determinantes:

   (a)
   $$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

   (b)
   $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 7 & 2 \\ 7 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

   (c)
   $$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Calcule os seguintes determinantes:

   (a)
   $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

   (b)
   $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Seja c um número e A uma matriz 3×3. Mostre que $Det(cA) = c^3 Det(A)$.

4. Seja c um número e A uma matriz $n \times n$. Mostre que $Det(cA) = c^n Det(A)$.

5. Encontre o determinante da matriz diagonal: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

6. Se x_1, x_2, x_3 são números, mostre que
   $$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

7. Se $x_1, x_2, \cdots, x_n$ são números, mostre que
   $$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \Pi_{i<j}(x_j - x_i).$$

   Este determinante é conhecido como determinante de Vandermonde.

AULA 6

Sistemas de equações lineares

OBJETIVO
Ao terminar esta aula você deverá ser capaz de:
1. Resolver sistemas de 3 equações lineares a 3 incógnitas.
2. Saber reconhecer quando estes sistemas possuem uma solução, são impossíveis, ou possuem infinitas soluções.
3. Dado um sistema de 3 equações a 3 incógnitas, saber encontrar a matriz associada e resolver o sistema pelo método de Gauss-Jordan.

6.1 - MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE VARIÁVEIS

Considere inicialmente o seguinte exemplo:

Exemplo 6.1

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

Para resolver o sistema podemos proceder de maneira muito simples, como já fizemos na Aula I, quando consideramos sistemas de duas equações e duas incógnitas (ver Exemplo 1.4). Para eliminar a variável x na primeira equação multiplicamos a primeira equação por -2 e adicionamos à segunda. Em seguida, fazemos o mesmo em relação à terceira equação. Para eliminar x nesta equação multiplicamos a primeira equação por -3 e adicionamos à terceira. Obtemos o seguinte sistema equivalente ao sistema dado:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

Observe que a segunda e a terceira equações formam um sistema de duas equações nas incógnitas y e z. Novamente, procedendo como no Exemplo 1.4, eliminamos a incógnita y encontrando o valor de z, da seguinte maneira: multiplicamos a segunda equação por 3 e a terceira por -2 e adicionamos. Obtemos:

$$\begin{aligned} x+y+2z &= 9 \\ 6y-21z &= -51 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

que, novamente, é um sistema equivalente aos 2 primeiros. Obtemos assim o valor de z, a saber, $z=3$. Substituindo nas duas primeiras equações, temos os valores de y e $x: 6y = 63-51 = 12$, donde $y=2$, e finalmente $x = 9-2-6 = 1$.

Temos que a solução do sistema dado é, portanto, $x = 1, y = 2$ e $z = 3$, solução que, neste caso, é única. $\triangleleft$

Consideremos um outro exemplo.

Exemplo 6.2 Encontre as soluções do seguinte sistema:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ x+y-z &= 0 \\ 2x+2y &= 1 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Procedendo como acima, multiplicamos a segunda equação por -2 e adicionamos à terceira para eliminar x na terceira equação. Em seguida, subtraímos a segunda equação da primeira para eliminar x na segunda equação. Obtemos:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ 2z &= 1 \\ 2z &= 1 \end{aligned}$$

Neste caso, ao eliminar a variável x, eliminamos também a variável y e obtemos a segunda equação idêntica à terceira. O sistema é, pois, equivalente ao seguinte:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ 2z &= 1 \end{aligned}$$

Obtemos que $z = \frac{1}{2}$, mas aqui ocorre algo distinto do primeiro exemplo. Observe que para $z = \frac{1}{2}$, $x = -t + \frac{1}{2}$ é sempre solução para qualquer valor de $y = t$. Vemos assim que o sistema possui infinitas soluções $x = -t + \frac{1}{2}$, $y = t$ e $z = \frac{1}{2}$. $\triangleleft$

Na próxima seção, seremos capazes de entender melhor este fenômeno.

Exercício 6.3 Encontre todas as soluções do seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 4x - y &= 7 \end{aligned}$$

Exercício 6.4 Resolva o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 0 \\ x - 2y - z &= 1 \\ x + 4y + z &= 2 \end{aligned}$$

Exercício 6.5 Encontre todas as soluções do seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned} 3x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 0 \\ 4x + 2y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

6.2 - MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

Considere novamente o sistema de equações lineares do Exemplo 6.1 que vimos no início deste capítulo:

Exemplo 6.6

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \tag{6.2}$$

◁

Vamos agora resolvê-lo de uma outra maneira. Para isso, vamos escrever uma matriz associada ao sistema do Exemplo 6.1 do seguinte modo: cada linha da matriz corresponderá a uma das equações. Teremos, portanto, uma matriz com 3 linhas. Cada coeficiente da primeira equação corresponderá ordenadamente a uma entrada da primeira linha. O termo independente será a 4ª entrada desta primeira linha. Ela terá 4 entradas. Para a segunda e terceira linhas procedemos da mesma forma. Teremos, portanto, uma matriz 3 X 4 associada ao sistema, chamada matriz aumentada. Observe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Observação 6.7 A matriz acima se chama aumentada para se distinguir da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix},$$

que é conhecida como matriz dos coeficientes do sistema. Utilizaremos, na seqüência, as duas matrizes que não podem ser confundidas.

A maneira que utilizaremos para resolver este sistema não é muito diferente da que utilizamos na Seção 6.1. Vamos operar nas linhas da matriz exatamente como operamos com as equações da seguinte maneira: inicialmente, multiplicamos a primeira linha por -2 e adicionamos à segunda. Conservamos a primeira linha e não alteramos as demais entradas. Obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Em seguida, multiplicamos a primeira linha por -3 e adicionamos à terceira. Não alteramos as demais entradas. Obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix}$$

Continuando, multiplicamos a segunda linha por 3 e a terceira por -2. O objetivo é ainda "eliminar"a variável y na terceira equação como fizemos no Exemplo 6.1 (o que faremos na etapa seguinte), embora neste método trabalhemos sem escrever as variáveis explicitamente. Não alteramos as demais entradas. Observe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 6 & -21 & -51 \\ 0 & -6 & 22 & 54 \end{pmatrix}.$$

E, finalmente, adicionando a segunda e a terceira linhas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 6 & -21 & -51 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Secretamente, sabemos que as 3 primeiras entradas das linhas da matriz correspondem respectivamente aos coeficientes de x, y, z. Podemos, portanto, ler o valor de z na última linha: $z = 3$. A segunda linha representa a equação: $6y - 21z = -51$. Como $z = 3$ obtemos $y = \frac{63-51}{6} = 2$. Levando estes valores na equação correspondente à primeira linha temos:

$$x = 9 - 2 - 2 \cdot 3 = 1.$$

Você talvez tenha observado que utilizamos um sistema misto até aqui. Para obter a solução $z = 3$ operamos com a matriz aumentada. Em seguida, para obter os valores de x e de y, escrevemos as correspondentes equações e resolvemos. Não há nada de errado com isto. Podemos assim proceder. Mas podemos também operar com a matriz até o final e obter o resultado lendo suas linhas da seguinte maneira: considere a entrada $(3, 3)$ da matriz, o coeficiente de z. Ela vale 1. Uma entrada que vale 1 e tal que todas as entradas à sua esquerda são nulas é chamada pivô. Operando com o pivô podemos zerar as entradas $(2, 3)$ e $(1, 3)$ da matriz que são os coeficientes de z das outras equações. Multiplicamos a terceira linha por 21 e adicionamos à segunda equação:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 6 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Em seguida, multiplicamos a terceira linha por -2 e adicionamos à primeira equação:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Considere agora a entrada $(2, 2)$. Ela vale 6 e não é, portanto, um pivô. Para transformá-la em um pivô dividimos a segunda linha por 6. Obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Finalmente operando com o pivô obtido zeramos a entrada $(1, 2)$, multiplicando a segunda linha por -1 e somando à primeira

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Podemos, agora sim, ler diretamente na matriz as soluções do sistema original: $x = 1, y = 2, z = 3$.

Observação 6.8 O processo que levamos a cabo para resolver o sistema utilizando a matriz aumentada se chama escalonamento ou método de Gauss-Jordan. A matriz que obtivemos no final se chama matriz escalonada reduzida por linhas. A terminologia vem da palavra escada, já que a forma da matriz lembra uma escada. Uma dúvida freqüente é a seguinte: um processo de obter a forma escalonada, o que é legítimo fazer e o que não é? Para responder a esta pergunta lembre-se de como obtivemos a matriz aumentada a partir de um sistema de equações e da sua experiência anterior com equações. Dada uma equação, você sabe que se multiplicar todos os seus termos por uma constante isso não altera suas soluções. Da mesma forma, dado um sistema de duas equações, você sabe que suas soluções não se alteram se você troca as equações de ordem ou substitui uma delas por ela multiplicada por uma constante mais a outra multiplicada por uma outra constante. São estas as operações legítimas que você pode efetuar em uma matriz de forma a trazê-la à forma escalonada reduzida por linhas:

1. Trocar as linhas da matriz.
2. Multiplicar as entradas de uma linha por uma constante não nula.
3. Substituir uma linha por ela multiplicada por uma constante mais uma outra multiplicada por outra constante.

Vamos formalizar um pouco mais o conteúdo da observação acima. Uma pergunta que podemos nos fazer é a seguinte: será sempre possível encontrar a forma escalonada de uma matriz? Ela é única? Vamos dar agora uma definição formal do que seja a forma escalonada reduzida por linhas. Em seguida, consideraremos alguns exemplos e no próximo parágrafo consideraremos as questões mais teóricas.

Definição 6.9 Uma matriz $m \times n$ se diz na forma escalonada reduzida por linhas quando:

1. Se uma linha não for totalmente nula, então a primeira entrada não nula da linha é a unidade (chamada pivô).
2. Se existirem linhas nulas, então elas deverão ser agrupadas nas linhas inferiores da matriz.
3. Em quaisquer duas linhas não nulas da matriz, o pivô pertencente à linha inferior ocorre à direita do pivô pertencente à linha superior.
4. Cada coluna que possui um pivô possui zeros nas demais entradas.

Se apenas a condição 4 não é satisfeita, a matriz se diz na forma escalonada.

Exercício 6.10 Verifique se as seguintes matrizes estão:

1. Na forma escalonada
2. Na forma escalonada reduzida por linhas
3. Em nenhuma das duas formas

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos agora considerar alguns exemplos, mostrando como podemos utilizar a forma escalonada ou a forma escalonada reduzida por linhas para resolver sistemas de equações lineares.

Exemplo 6.11 Resolva o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 1 \\ 3x - y + 2z &= 7 \\ 5x + 3y - 4z &= 2 \end{aligned}$$

Para resolver o sistema passamos à matriz aumentada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

O nosso método será achar a forma escalonada da matriz aumentada. Veremos que, no processo, encontraremos também a solução do problema. Vamos observar inicialmente que embora a forma escalonada reduzida por linhas seja única, isto é, cada matriz possui uma única forma escalonada reduzida por linhas, o caminho para chegar até ela não é. Assim, há escolhas, e um pouco é gosto pessoal. Algumas coisas são, no entanto, usuais. Procuramos na matriz uma linha em que a primeira entrada seja 1, um pivô. Utilizando este pivô, zeramos as entradas abaixo dele. No exemplo temos um pivô na primeira linha. Para zerarmos as entradas $(2, 1)$ e $(3, 1)$ procedemos como se segue:

1. Multiplicamos a primeira linha por -3 e somamos à segunda.
2. Multiplicamos a primeira linha por -5 e somamos à terceira.

Obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & 4 \\ 0 & -7 & 11 & -3 \end{pmatrix}$$

Ao chegarmos neste ponto procuramos um pivô na segunda ou terceira linha com o intuito de zerar ou a entrada $(2, 2)$ ou a entrada $(3, 2)$. Mas, observando que as referidas entradas são iguais, vemos que isto não é necessário, basta subtrairmos uma linha da outra para zerar a entrada $(3, 2)$. Obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Embora ainda não tenhamos encontrado a forma escalonada, já resolvemos o problema! Observe que a última linha significa $0x+0y+0z = 7$, e esta equação não possui evidentemente solução. O sistema é, pois, impossível.

$\triangleleft$

Exemplo 6.12 Resolva o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 10 \\ 3x + 2y + 2z &= 1 \\ 5x + 4y + 3z &= 4 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Para resolver o sistema passamos à matriz aumentada:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

O nosso método será novamente encontrar a forma escalonada da matriz aumentada. Neste caso nenhuma das linhas possui um pivô. Podemos obter um pivô dividindo a primeira linha por 2. Isto nos faria trabalhar com frações mas seria um caminho viável. Vamos optar por outro. Como queremos zerar as entradas $(2, 1)$ e $(3, 1)$, podemos multiplicar a primeira linha por -3 e a segunda por 2 e somá-las, conservando a primeira linha inalterada. Observe:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Para zerarmos a entrada $(3, 1)$ procedemos de forma semelhante. Como não há pivô, multiplicamos a primeira linha por -5 e a última por 2. Isto nos leva à seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 3 & 16 & -42 \end{pmatrix}$$

Agora sim, aparece um pivô na segunda linha. Utilizamo-lo para anular a entrada $(3, 2)$: multiplicamos a segunda linha por -3 e somamos à última, obtendo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & -14 & 42 \end{pmatrix}$$

Daqui já poderíamos encontrar as soluções $z = -3$ e em seguida x e y. Vamos, no entanto, continuar o processo de escalonamento até chegar à forma escalonada reduzida por linhas. Dividindo a última linha por -14 obtemos um pivô nesta linha:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Utilizamos este pivô para zerar as duas entradas acima dele. Obtemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Finalmente, utilizando o pivô da entrada $(2, 2)$, zeramos a entrada acima dele e, dividindo a primeira linha por 2, obtemos a forma escalonada reduzida por linhas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Podemos ler diretamente na matriz as soluções do sistema $x = 1$, $y = 2$ e $z = -3$. $\triangleleft$

Vamos considerar mais um exemplo:

Exemplo 6.13 Resolva o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 6 \\ 2x - y + 4z &= 2 \\ 4x + 3y - 2z &= 14 \end{aligned} \qquad (6.4)$$

Para resolver o sistema passamos novamente à matriz aumentada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{pmatrix}$$

Vamos encontrar a forma escalonada da matriz aumentada. Neste caso, a primeira linha possui um pivô. Vamos utilizá-lo para zerar as entradas $(2, 1)$ e $(3, 1)$. Para isto, multiplicamos a primeira linha por -2 e somamos à segunda. Em seguida, multiplicamo-la por -4 e adicionamos à terceira linha. Observe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \end{pmatrix}$$

A seguir, devemos zerar a entrada $(3, 2)$. Como não há pivôs na segunda ou terceira linha e salta aos olhos que as entradas $(2, 2)$ $(3, 2)$ são iguais, subtraímos a terceira linha da segunda. Observe o que acontece:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtemos toda uma linha de zeros. Facilmente passamos a forma escalonada reduzida por linhas. Dividindo a segunda linha por -5 conseguimos um pivô. Em seguida, multiplicamos esta nova linha por -2 para zerar a entrada acima do pivô.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta é a forma escalonada reduzida por linhas. Como não há pivôs na terceira coluna temos ali duas entradas não nulas. Para encontrar as soluções do sistema escrevemos as equações correspondentes às duas linhas não nulas $y - 2z = 2$ e $x + z = 2$. Neste caso temos infinitas soluções para o sistema. Fazendo $z = t$ temos $x = 2 - t$ e $y = 2 + 2t$. Qualquer valor de t nos fornece uma solução. Para $t = 1$ temos $x = 1, y = 4, z = 1$; para $t = 2$ temos $x = 0, y = 4, z = 2$ e assim por diante. Este exemplo é muito distinto do Exemplo 6.11. Ali não existiam soluções para o sistema, aqui existe uma infinidade de soluções. $\triangleleft$

Observação 6.14 Os três exemplos anteriores ilustram todas as possibilidades possíveis para um sistema de 3 equações e 3 incógnitas: ou eles não possuem solução (6.11), ou eles possuem uma única solução (6.12), ou possuem uma infinidade delas (6.13). Um sistema de equações lineares nunca podererá ter duas, três ou qualquer número finito de soluções, distinto de um. Há uma razão geométrica para tal fato que veremos em aulas posteriores.

Podemos ter sistemas de equações lineares que dependem de parâmetros. Neste caso, dependendo do valor dos parâmetros, poderemos ter uma solução, infinitas soluções ou até mesmo nenhuma solução. Considere o seguinte exemplo:

Exemplo 6.15 Resolva o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + az &= 3 \\ x + ay + 3z &= 2 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Para resolver o sistema passamos à matriz aumentada, como anteriormente, sem nos preocuparmos com a presença do parâmetro a que deve ser pensado como um número qualquer. No final estudaremos as possibilidades para o sistema a partir do valor de a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 1 & a & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

O nosso método será novamente encontrar a forma escalonada da matriz aumentada. Neste caso, a primeira linha possui um pivô. Vamos utilizó-lo para zerar as entradas $(2,1)$ e $(3,1)$. Para isto multiplicamos a primeira linha por -2 e somamos à segunda. Em seguida, multiplicamo-la por -1 e adicionamos à terceira linha. Observe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2+a & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Para zerarmos a entrada $(3,1)$, procedemos da forma seguinte: como há um pivô na segunda linha multiplicamo-lo por $-(a-1)$ e adicionamos à terceira linha. Isto nos leva à seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2+a & 1 \\ 0 & 0 & -(a-1)(2+a)+4 & -(a-1)+1 \end{pmatrix}$$

Efetuando as contas, a entrada $(3,3)$ se torna $6-a-a^2=-(a+3)(a-2)$ e para a entrada $(3,4)$ temos $2-a$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2+a & 1 \\ 0 & 0 & (a+3)(2-a) & 2-a \end{pmatrix}$$

Tendo em mente agora os Exemplos 6.11, 6.12, 6.13, não é difícil perceber como o sistema depende do parâmetro a. Por exemplo, se $a=2$, a última linha da matriz se anula, e estamos na situação do Exemplo 6.13. Se por outro lado $a=-3$, a última equação se torna $0z=5$, e o sistema é claramente impossível como no Exemplo 6.11. Em todos os outros casos, ou seja, para $a\neq 2,-3$ o sistema possui uma única solução como no Exemplo 6.12, pois $z=\frac{1}{a+3}$, onde só podemos dividir ambos os membros da equação por $a-2$ porque temos $a\neq 2$. $\triangleleft$

6.3 - EXERCÍCIOS

1. Encontre as soluções dos seguintes sistemas, inicialmente utilizando o método de eliminação de variáveis e em seguida encontrando a matriz aumentada, utilizando o método de Gauss-Jordan e calculando a matriz escalonada reduzida por linhas:

   (a)

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 4x - y &= 7 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 0 \\ x - 2y - z &= 1 \\ x + 4y + z &= 2 \end{aligned}$$

2. Verifique se os sistemas abaixo são impossíveis, possuem uma única solução, ou infinitas soluções.

   (a)

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ x + 3y + z &= 11 \\ 2x + 5y - 4z &= 13 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 2 \\ 2x + 2y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

   (c)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 2 \\ 2x + 2z &= 3 \end{aligned}$$

   (d)

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 10 \\ 3x + 2y + 2z &= 1 \\ 5x + 4y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

3. Encontre todas as soluções do sistema a seguir:

   (a)

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ x + 3y + z &= 5 \end{aligned}$$

4. Determine os valores de a tais que o sistema nas incógnitas x, y, z possua uma solução, nenhuma solução ou infinitas soluções:

   (a)

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= 1 \\ x + y + az &= 1 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= a \\ 2x + 6y - 11z &= a \\ x - 2y + 7z &= 1 \end{aligned}$$

   (c)

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + y + az &= 1 \\ (a-1)x + (1-a)z &= 0 \end{aligned}$$

AULA 7

Sistemas de equações lineares mais gerais - alguma teoria

OBJETIVO

Ao terminar esta aula você deverá ser capaz de:

1. Saber resolver sistemas de equações lineares de *m* equações a *n* incógnitas.
2. Ter uma idéia, ainda que rudimentar, da teoria dos sistemas de equações lineares.

7.1 - SISTEMA DE *m* EQUAÇÕES LINEARES A *n* VARIÁVEIS

Vamos agora generalizar um pouco o nosso estudo para sistema de m equações a n variáveis e entender ao mesmo tempo um pouco melhor a teoria.

Definição 7.1 *Um sistema linear de m equações a n variáveis é um sistema da forma:*

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & = & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \quad \begin{array}{r} \\ \\ (7.1) \\ \\ (7.2) \end{array}$$

Para resolver tal sistema, procedemos como no caso de um sistema de 3 equações a 3 incógnitas visto na seção anterior. A definição vista ali da forma escalonada reduzida por linhas é para matrizes $m \times n$. Assim, para resolver um sistema maior, formamos a matriz aumentada e a escalonamos. Considere o exemplo a seguir.

Exemplo 7.2 Resolva o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \qquad (7.3) \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6 \qquad (7.4) \end{aligned}$$

Para resolver o sistema passamos como anteriormente à matriz aumentada que aqui será uma matriz 4×7 já que são 6 as variáveis:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{pmatrix}$$

Observe que cada coluna corresponde a uma variável, e se numa equação uma variável não aparece, figura um zero na entrada correspondente da matriz. Vamos encontrar a forma escalonada da matriz aumentada. Neste caso, a primeira linha possui um pivô. Vamos utilizá-lo para anular as entradas $(2,1)$ e $(4,1)$. Para isso, multiplicamos a primeira linha por -2 e somamos à segunda. Em seguida a adicionamos também à terceira linha. Multiplicamos a segunda linha por -1 para aparecer um pivô. Observe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{pmatrix}$$

O pivô que aparece na entrada $(2,3)$ é então utilizado para zerar as entradas $(3,3)$ e $(4,3)$ multiplicando a segunda linha por -5 e somando à terceira e em seguida multiplicando a mesma linha por -4 e somando à quarta. Obtemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix},$$

que possui toda uma linha de zeros. Passamos, então, à forma escalonada reduzida por linhas. A linha de zeros passa para o final, dividindo a última linha por 6 conseguimos um pivô. Em seguida, multiplicamos esta nova linha por -3 para zerar a entrada acima do pivô mais à direita. Para zerar a entrada acima do pivô mais à esquerda, multiplicamos a segunda linha por 2 e somamos à primeira. Temos finalmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta é a forma escalonada reduzida por linhas. Como não há pivôs na quarta coluna, temos ali duas entradas não nulas. Para encontrar as soluções do sistema, escrevemos as equações correspondentes às três linhas não nulas. $x_6 = \frac{1}{3}$, e $x_3 + 2x_4 = 0$ e $x_1 + 3x_2 + 4x_4 + 2x_5 = 0$. Neste caso, como no Exemplo 6.13, temos infinitas soluções para o sistema. Como naquele caso podemos fazer $x_4 = t$. Mas, além disso, podemos fazer $x_2 = r$ e $x_5 = s$. Obtemos que o conjunto de soluções do sistema é dado por:

$$x_6 = \frac{1}{3} \quad x_3 = -2t \quad x_1 = -4t - 3r - 2s,$$

onde t, r, s podem assumir qualquer valor real. $\triangleleft$

Em um sistema como o acima, as variáveis correspondentes aos pivôs são chamadas variáveis dependentes (no exemplo, x_1, x_3 e x_6) e as demais são chamadas variáveis livres ou independentes, no exemplo, x_2, x_4, x_5, a quem demos os valores r, t, s.

7.2 - MATRIZES ELEMENTARES

Vamos elaborar um pouco mais a nossa teoria de sistemas lineares de equações, inicialmente formalizando as operações expostas na Observação 6.8 quando definimos quais operações são admissíveis quando queremos escalonar uma matriz.

Definição 7.3 Dada uma matriz A, $m \times n$, as seguintes operações são chamadas operações elementares nas linhas da matriz A :

1. Trocar duas linhas

2. Multiplicar uma linha por um número não nulo.

3. Somar a uma linha um múltiplo não nulo de outra linha.

Definição 7.4 Uma matriz $n \times n$ é dita elementar se ela puder ser obtida da identidade I_n através da realização de uma única operação elementar nas linhas.

Exemplo 7.5 As seguintes matrizes são elementares:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teorema 7.6 *Se uma matriz elementar E é obtida realizando uma certa operação nas linhas de I_n e se A é uma matriz $m \times n$, então o produto EA é a matriz que se obtém fazendo esta mesma operação nas linhas de A.*

Exemplo 7.7 Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 3+1 & 3.0+4 & 3.2+1.4 & 3.3+1.0 \end{pmatrix},$$

que é exatamente a matriz que se obtém de A substituindo a linha 3 por 3 vezes a linha 1 adicionada à linha 3.

Demonstração: Faremos uma demonstração no caso 3×3. O aluno não terá dificuldade de fazer o caso geral a partir deste. Observe que pela Definição 7.3 temos 3 casos a considerar, a saber:

1. Trocar duas linhas.
2. Multiplicar uma linha por um número não nulo.
3. Somar a uma linha um múltiplo não nulo de outra linha.

No primeiro caso, vamos supor, sem perda de generalidade, que trocamos a primeira e a segunda linhas.

Vamos denotar por $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a matriz elementar obtida pela troca da linha 2 pela linha 1 na matriz identidade e seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ uma matriz 3×3 qualquer.

Vamos calcular $E_{21}A$. Obtemos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Ou seja, o efeito de multiplicar pela matriz E_1 é exatamente o de trocar as linhas 1 e 2 de posição.

Exercício 7.8 Considere E_{31} a matriz elementar obtida trocando as linhas 3 e 1 na matriz identidade. Verifique o que ocorre quando calculamos $E_{31}A$ e analogamente para $E_{32}A$.

No segundo caso, em tudo semelhante ao primeiro, seja

$$E = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a matriz elementar obtida multiplicando a linha 1 por uma constante c diferente de zero. Também aqui não há perda de generalidade pois os outros casos são análogos. Obtemos:

$$\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, no terceiro caso, considere a matriz

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c.1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

resultado de multiplicar a linha 1 por $c \neq 0$ e adicionar a linha 3. Obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ca_{11} + a_{31} & ca_{12} + a_{32} & ca_{13} + a_{33} \end{pmatrix}.$$

Isto conclui a demonstração. □

Exercício 7.9 Considere uma matriz E a matriz elementar obtida trocando, por exemplo, a segunda linha da matriz identidade por ela multiplicada por um múltiplo de uma outra. Verifique o que ocorre quando calculamos EA.

Observação 7.10 O interesse do Teorema 7.6 é apenas teórico e será utilizado na demonstração de alguns resultados que seguem. Para operar é preferível utilizar o método que vimos utilizando até aqui.

Se uma operação elementar é aplicada à matriz identidade para produzir uma matriz elementar E, existe sempre uma outra operação elementar que desfaz o que a primeira operação fez. Veja a tabela.

	Operação	Operação Inversa
1	multiplicar a linha i por $c \neq 0$	multiplicar a linha i por $\frac{1}{c}$
2	trocar a linha i pela linha j	trocar a linha j pela linha i
3	trocar a linha L_j por $cL_i + L_j$	trocar a linha L_j por $-cL_i + L_j$

Temos então o seguinte resultado:

Teorema 7.11 *Toda matriz elementar é inversível, e a inversa é uma matriz elementar.*

Demonstração: Seja E uma matriz elementar e E' a matriz que se obtém desfazendo o que E faz. Temos:

$$EE' = E'E = I$$

Portanto, E e E' são inversas uma da outra. $\square$

Teorema 7.12 *Se A é uma matriz $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *A é inversível.*
2. *$AX = 0$ possui apenas a solução trivial.*
3. *A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n.*
4. *A possui uma expressão como produto de matrizes elementares.*

Demonstração: (1) => (2)
Suponha A invertível e seja X_0 uma solução. Temos:

$AX_0 = 0$ logo $A^{-1}AX_0 = 0$ e $IX_0 = 0$ donde, finalmente $X_0 = 0$.

(2) => (3)
Se $AX = 0$ temos

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = 0 \tag{7.5}$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots = \ldots \tag{7.6}$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n = 0 \tag{7.7}$$

onde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots\dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Como a solução trivial é a única possível, temos que a forma escalonada do sistema é dada pela seguinte matriz $n \times (n+1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ou seja, a forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n.

(3) => (4)

Temos que

$$E_n E_{n-1} \dots E_2 E_1 A = I_n.$$

Segue que

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_{n-1}^{-1} E_n^{-1}.$$

(4) => (5)

Se A possui uma expressão como produto de matrizes elementares, então A é invertível.

□

7.3 - SISTEMAS HOMOGÊNEOS

Definição 7.13 *Seja A uma matriz $m \times n$. O sistema de equações lineares $AX = 0$, onde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ é dito um sistema homogêneo.*

Proposição 7.14 *Seja A uma matriz $m \times n$ e considere o sistema de equações lineares $AX = 0$.*

1. *Se A é uma matriz quadrada $n \times n$, A possui apenas a solução trivial se e somente se $Det(A) \neq 0$.*
2. *Um sistema homogêneo nunca é impossível.*
3. *Se A possui mais colunas que linhas, o sistema $AX = 0$ possui infinitas soluções.*

Demonstração:

1. Sabemos do Teorema 7.11 que $AX = 0$ possui apenas a solução trivial se e somente se A é inversível. Dado B tal que $AB = I$, temos que $Det(A)Det(B) = 1$, ou seja, $Det(A) \neq 0$.

2. Todo sistema homogêneo possui pelo menos a solução trivial e não é, portanto, impossível.

3. Considere a forma escalonada reduzida por linhas de A. O sistema não é impossível. Como temos menos equações que incógnitas teremos variáveis livres e, portanto, infinitas soluções.

$\square$

Teorema 7.15 *Todo sistema de equações lineares possui infinitas soluções, uma única solução ou nenhuma solução.*

Demonstração: Em um sistema da forma $AX = B$, apenas uma das possibilidades abaixo pode ser verdadeira:

1. O sistema não possui soluções.
2. O sistema possui uma única solução.
3. O sistema possui mais de uma solução.

A demonstração estará terminada se provarmos que no caso 3) o sistema possui infinitas soluções. Para isso, suponha que o sistema $AX = B$ possui mais de uma solução e seja $X_0 = X_1 - X_2$, onde X_1, X_2 são duas soluções distintas. Segue que $X_0 \neq 0$ e teremos:

$$AX_0 = A(X_1 - X_2) = AX_1 - AX_2 = b - b = 0.$$

Temos que:

$$A(X_1 + kX_0) = AX_1 + AkX_0 = b + k0 = b$$

Como X_0 é não nulo e existem infinitas escolhas para k, o sistema $AX = B$ possui infinitas soluções. $\square$

Definição 7.16 *Dadas duas matrizes A e B $m \times n$, dizemos que elas são equivalentes se uma pode ser transformada na outra por operações elementares.*

Temos o seguinte resultado, que será demonstrado em cursos mais avançados:

Teorema 7.17 *Toda matriz A $m \times n$ é equivalente a uma única matriz escalonada reduzida por linhas.*

Como conseqüência temos o seguinte resultado fundamental que mostra a importância da forma escalonada reduzida por linhas:

Teorema 7.18 *Se as matrizes aumentadas de dois sistemas lineares $AX = C$ e $BX = D$ são equivalentes, então os sistemas possuem as mesmas soluções.*

Demonstração: Sejam A' e B' as matrizes aumentadas dos dois sistemas acima. Como elas são equivalentes, segue que existem matrizes elementares $E_1, \ldots, E_k$ tais que:

$$E_k \ldots E_1 A' \quad = \quad B'. \tag{7.8}$$

Por outro lado, existem matrizes elementares $E'_1, \ldots E'_l$ e $E''_1, \ldots E''_m$ tais que

$$E'_l \ldots E'_1 A' = F_1 \text{ e } E''_1 \ldots E''_m B' = F_2,$$

onde F_1, F_2 são as formas escalonadas reduzidas por linha de A' e B'. Substituindo 7.8 na última equação, temos que $F_1 = F_2$, pois a forma escalonada reduzida por linhas é única. Segue o resultado. $\square$

7.4 - EXERCÍCIOS

1. Verifique se os sistemas abaixo são impossíveis, possuem uma única solução, ou infinitas soluções.

   (a)
$$\begin{aligned} x-2y+3z-2w &= 0 \\ 3x-7y-2z+4w &= 0 \\ 4x+3y+5z+2w &= 0 \end{aligned}$$

   (b)
$$\begin{aligned} x-2y+3z-2w &= 0 \\ 4x-9y+z+2w &= 0 \\ 4x+3y+5z+2w &= 1 \end{aligned}$$

   (c)
$$\begin{aligned} 2x+y-3z+w &= 0 \\ 5y+4z+3w &= 0 \\ z+2w &= 0 \\ 3w &= 0 \end{aligned}$$

2. Encontre todas as soluções dos sistemas abaixo:

   (a)
$$\begin{aligned} x+y+3z-w &= 4 \\ x+3y+z+2w &= 5 \end{aligned}$$

   (b)
$$\begin{aligned} x-3y+4z-2w &= 5 \\ 2y+5z+w &= 2 \\ y-3z &= 4 \end{aligned}$$

3. Mostre que os sistemas abaixo possuem apenas a solução trivial:

   (a)

$$\begin{aligned} 3x + 4y - 2z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ -x - 3y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} 7x - 2y + 5z + w &= 0 \\ x - y + z &= 0 \\ y - 2z + w &= 0 \\ x + z + w = 0 & \end{aligned}$$

   (Sugestão: calcule o determinante da matriz de coeficientes e em seguida aplique o Teorema 7.14)

4. Seja A uma matriz $n \times n$, invertível. Mostre que para qualquer matriz B, $n \times 1$, o sistema de equações lineares $AX = B$ possui exatamente uma solução.

Referências Bibliográficas

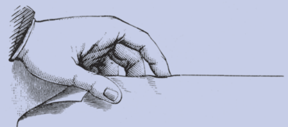
[1] ANTON, Howard; RORRES, Chris. *Elementary Linear Algebra*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1994.

[2] AVRITZER, Dan. *Elementos de geometria analítica*. Uma visão geométrica. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2006.

[3] LANG, Serge. *Linear Algebra*. Reading: Addison-Wesley, 1971.

[4] LIPSCHUTZ, Seymour. *Algebra Linear*. Rio de Janeiro: McGraw-Hill do Brasil Ltda., 1971.

[5] SANTOS, Reginaldo J. *Um curso de geometria analítica e álgebra linear*. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2003.



A presente edição foi composta pela Editora UFMG, em caracteres Chaparral Pro e Optima Std, e impressa pela Imprensa Universitária da UFMG, em sistema offset 90g (miolo) e cartão supremo 250g (capa), em 2011.