Álgebra Linear

Aula 5: Sistemas Lineares

Mauro Rincon

Márcia Fampa

3.1 - Definições

Definição 1: Uma **equação linear** nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, é uma equação do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \quad (1)$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ são constantes conhecidas.

Definição 2: Uma **solução da equação linear** (1) é um conjunto de valores das variáveis, $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$, que tem a propriedade de satisfazer a equação.

3.1 - Definições

Exemplo 1:
$x_1 = 1$ e $x_2 = -3$ é uma solução da equação linear

$$5x_1 - 2x_2 = 11,$$

já que

$$5(1) - 2(-3) = 11.$$

Note que $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ também é uma solução da equação linear.

3.1 - Definições

Definição 3:
Um **sistema linear** é um conjunto de m equações lineares, cada uma delas com n variáveis consideradas simultaneamente.

$$② \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

onde a_{ij} e b_i são constantes conhecidas e x_j são as variáveis do sistema linear para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

3.1 - Definições

Definição 4:

Uma **solução do sistema linear** 2 é um conjunto de valores das variáveis, $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$, que tem a propriedade de satisfazer cada uma de suas equações lineares.

3.1 - Definições

Exemplo 2:

$x_1 = 5$ e $x_2 = -2$ é solução do sistema linear de duas equações e duas variáveis

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2x_2 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & = & 25 \end{array} \right.$$

já que

$$1(5) + 2(-2) = 1 \quad \text{e} \quad 3(5) - 5(-2) = 25.$$

3.2 - Método de Eliminação

- Uma forma de resolver um sistema linear é substituir o sistema inicial por um outro que tenha exatamente as mesmas soluções que o sistema original, mas que possa ser resolvido de forma mais rápida e simples. O outro sistema é obtido depois de aplicar sucessivamente uma série de operações sobre as equações. As operações usadas são chamadas de operações elementares.

3.2 - Método de Eliminação

Operações Elementares

- Troca de ordem das equações do sistema.
- Multiplicação de uma equação por um escalar diferente de zero.
- Adição de uma equação a um múltiplo de outra equação.

3.2 - Método de Eliminação

Exemplo 3:

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 & ① \\ 2x_1 - x_2 = 3 & ② \end{cases}$$

- **Eliminando x_1:**

  (-2) × ① + ②

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 & ③ \\ \quad -7x_2 = -7 & ④ \end{cases}$$

Resolvendo a equação ④, concluímos que $\boxed{x_2 = 1.}$

Substituindo este valor em ③ obtemos,

$$x_1 = 5 - 3(1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 2.}$$

3.2 - Método de Eliminação

Exemplo 4:
Considere agora o sistema linear com três equações e três variáveis

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 & (1) \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 & (2) \\ 4x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 2 & (3) \end{array}\right.$$

- Eliminando x_1:
  (-2) $\times$ (1) $+$ (2)
  (-4) $\times$ (1) $+$ (3)

3.2 - Método de Eliminação

Obtemos então:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 & (4) \\ \quad\;\; 4x_2 - 3x_3 = 3 & (5) \\ \quad\;\; 8x_2 - 2x_3 = 2 & (6) \end{cases}$$

- Eliminando x_2:

  (-2) $\times$ (4) + (5)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 & (7) \\ \quad\;\; 4x_2 - 3x_3 = 3 & (8) \\ \quad\quad\quad\;\; 4x_3 = -4 & (9) \end{cases}$$

Resolvendo a equação (9) , concluímos que $\boxed{x_3 = -1.}$

3.2 - Método de Eliminação

Substituindo este valor na equação 8 obtemos,

$$x_2 = \frac{1}{4}(3 + 3(-1)) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = 0.}$$

Finalmente, conhecidos os valores de $x_2 = 0$ e $x_3 = -1$, podemos substituí-los na equação 7 , obtendo

$$x_1 = 0 + 0 - (-1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 1.}$$

Verifica-se facilmente que os valores obtidos satisfazem as três equações do sistema simultaneamente.

3.2 - Método de Eliminação

Exemplo 5:

Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 & (1) \\ 3x_1 + 9x_2 = -2 & (2) \end{cases}$$

- Eliminando x_1:

  (-3) × (1) + (2)

O novo sistema obtido é dado por

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 & (3) \\ 0 = -17 & (4) \end{cases}$$

A equação (4) não faz sentido. Isto significa que este sistema não tem solução.

3.2 - Método de Eliminação

Exemplo 6:

Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 & ① \\ 2x_1 + 6x_2 = 10 & ② \end{cases}$$

- Eliminando x_1:

  (-2) × ① + ②

O novo sistema obtido é dado por

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 & ③ \\ 0 = 0 & ④ \end{cases}$$

- A equação ④ é sempre verdadeira.

3.2 - Método de Eliminação

A equação 3, pode ser reescrita: $\boxed{x_1 = 5 - 3x_2.}$
Portanto uma solução do sistema linear é dada por

$$\left\{ \begin{array}{lcr} x_1 & = & 5 - 3r \\ x_2 & = & r \end{array} \right., r \in \mathbb{R}$$

- Este sistema linear tem uma infinidade de soluções.
- Para cada valor de r obtemos uma diferente solução. Por exemplo,

$$\begin{array}{lcl} r = 1 \Rightarrow x_1 = 2 & \text{e} & x_2 = 1 \\ r = 0 \Rightarrow x_1 = 5 & \text{e} & x_2 = 0 \end{array}$$

são soluções do sistema.

3.3- Tipos de Soluções de um Sistema Linear

Os exemplos anteriores mostram que um sistema linear pode:

- ter uma única solução,
- não ter solução ou
- ter uma infinidade de soluções.

3.3- Tipos de Soluções de um Sistema Linear

- Analisando estas três possibilidades de um ponto de vista geométrico

  - Considere o sistema linear com duas equações e duas variáveis

$$\begin{cases} a_1x_1 & + & b_1x_2 & = & c_1 \\ a_2x_1 & + & b_2x_2 & = & c_2 \end{cases} \quad (1)$$

  onde a_1 e b_1 não são simultaneamente iguais a zero e nem o são a_2 e b_2.

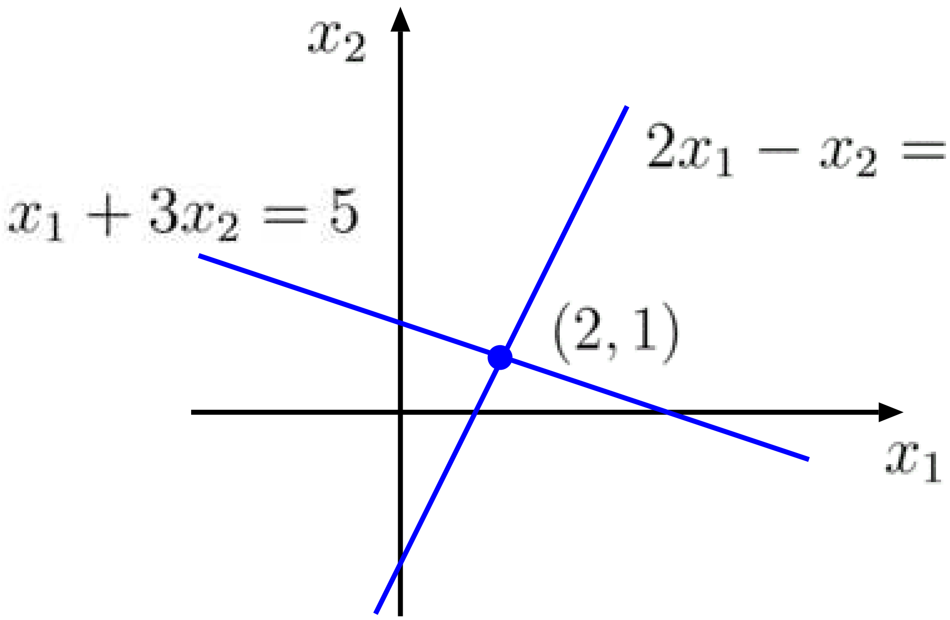
3.3- Tipos de Soluções de um Sistema Linear

- O gráfico de cada uma das equações do sistema (1) é uma linha reta. Se $x_1 = s_1$ e $x_2 = s_2$ é uma solução do sistema linear, então o par (s_1, s_2) satisfaz ambas as equações e pertence às retas por elas representadas.

  As três possibilidades descritas acima podem ser ilustradas geometricamente

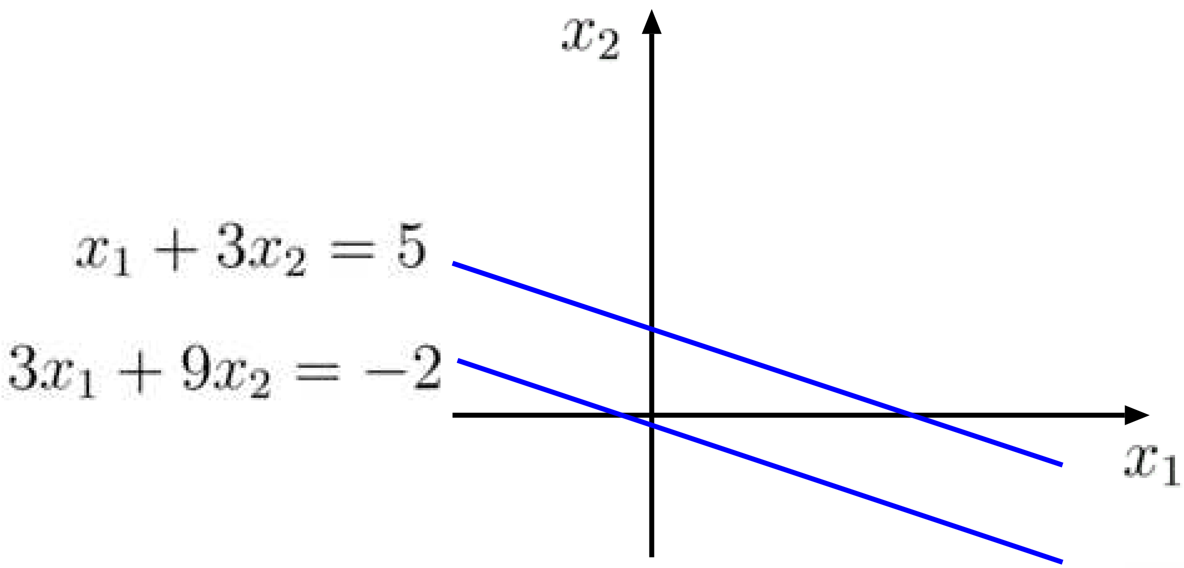
3.3- Tipos de Soluções de um Sistema Linear

1) O sistema tem exatamente uma solução. Os gráficos das equações das retas se interceptam em um ponto, como na figura abaixo, que representa o sistema linear do exemplo 3.



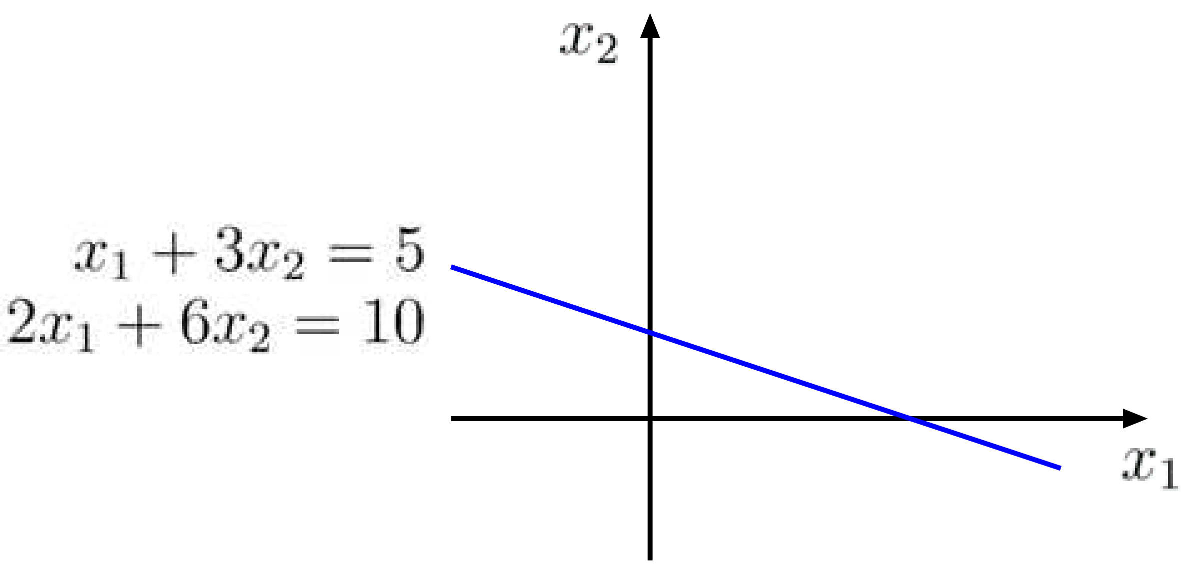
3.3- Tipos de Soluções de um Sistema Linear

2) O sistema não admite soluções. Os gráficos das equações das retas são paralelos, como na figura abaixo, que representa o sistema linear do exemplo 5. Note que não existe um único par (s_1, s_2) que pertença a ambas as retas.



3.3- Tipos de Soluções de um Sistema Linear

3) O sistema tem um número infinito de soluções. Neste caso os gráficos das equações das retas são coincidentes, como na figura abaixo, que representa o sistema do exemplo 6.



3.4 - Sistemas Lineares com $m \neq n$

Exemplo 7:

Considere agora o sistema linear com três equações e duas variáveis:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 & (1) \\ 2x_1 - x_2 = 3 & (2) \\ -x_1 + x_2 = -1 & (3) \end{cases}$$

- Eliminando x_1:

  (-2) $\times$ (1) + (2)

  (1) + (3)

3.4 - Sistemas Lineares com $m \neq n$

Obtemos então:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 & (4) \\ \quad\; -7x_2 = -7 & (5) \\ \quad\;\; 4x_2 = 4 & (6) \end{cases}$$

Resolvendo (5) ou (6), concluímos que

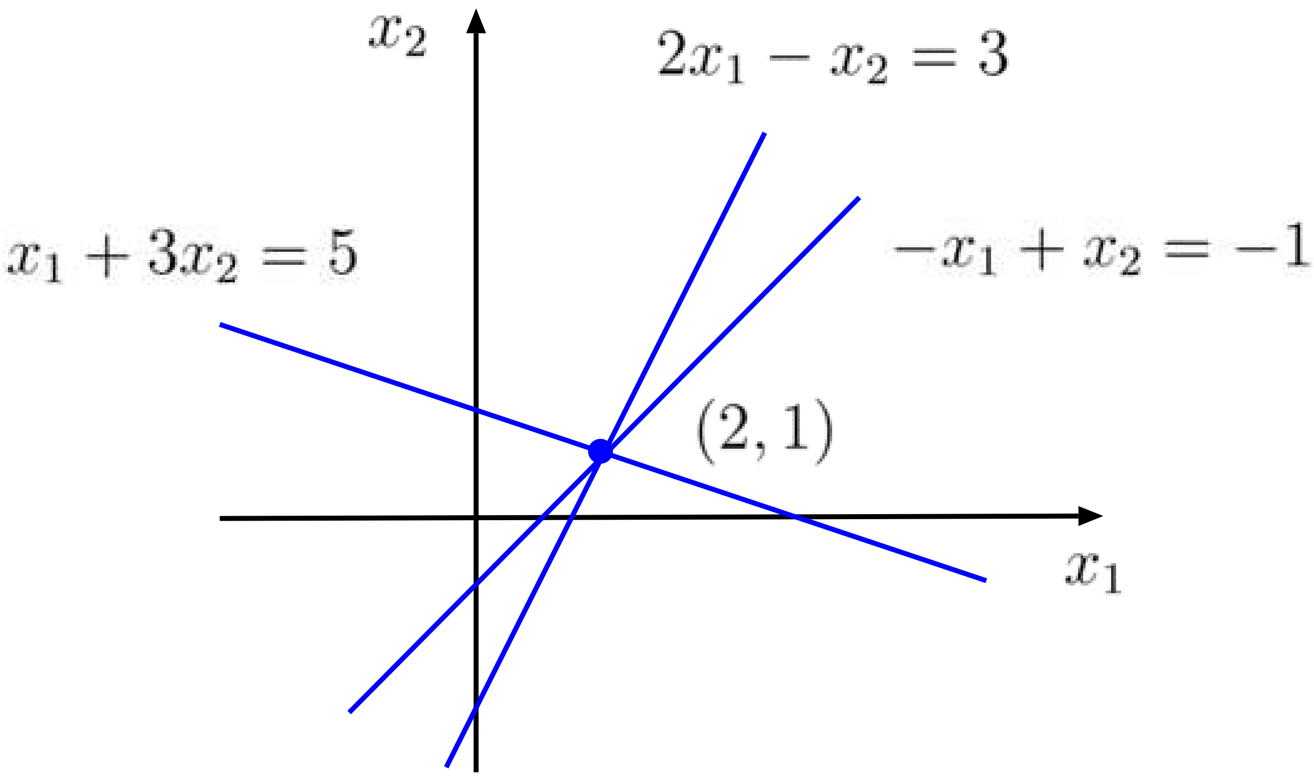
$$\boxed{x_2 = 1.}$$

Substituindo este valor na primeira equação obtemos,

$$x_1 = 5 - 3(1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 2.}$$

Analisamos este resultado graficamente, a solução do sistema é a intersecção das três retas.

3.4 - Sistemas Lineares com $m \neq n$



3.4 - Sistemas Lineares com $m \neq n$

Exemplo 8:

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 & (1) \\ 2x_1 - x_2 = 3 & (2) \\ -x_1 + x_2 = 3 & (3) \end{cases}$$

Eliminando x_1:

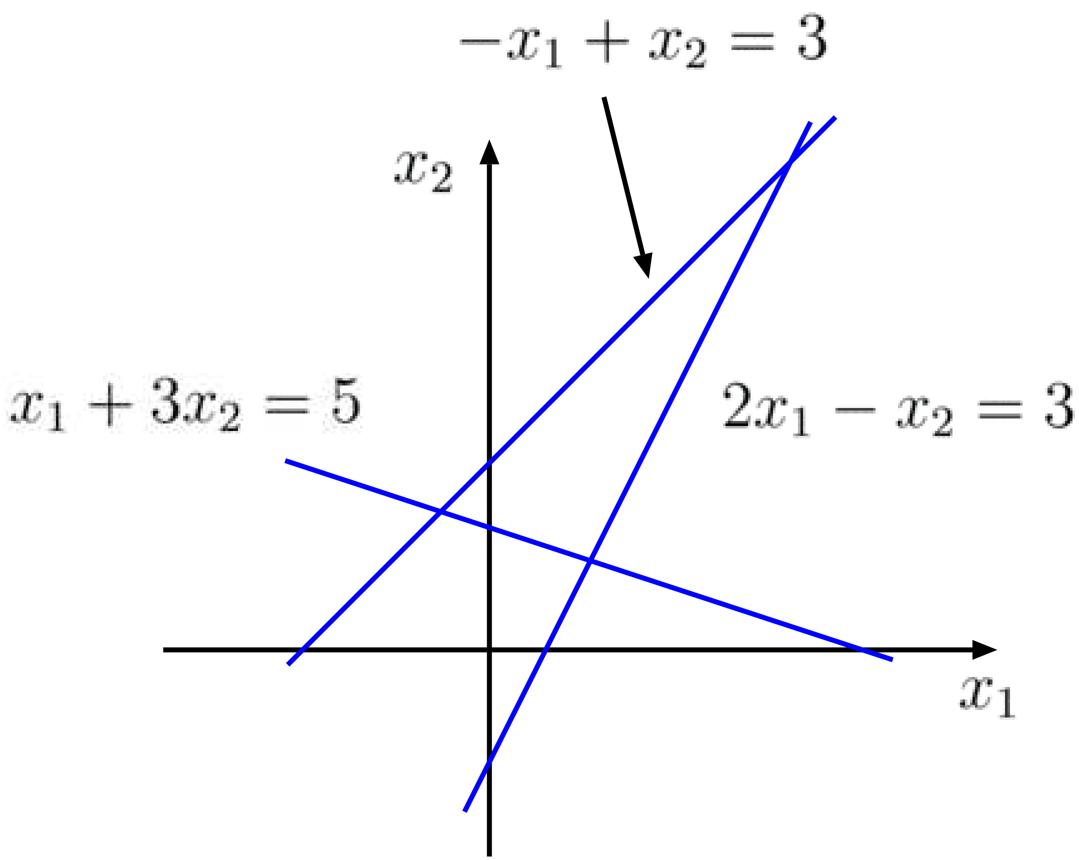
(-2) $\times$ (1) + (2)

(1) + (3)

Obtemos então:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 & (4) \\ -7x_2 = -7 & (5) \\ 4x_2 = 8 & (6) \end{cases}$$

3.4 - Sistemas Lineares com $m \neq n$



3.4 - Sistemas Lineares com $m \neq n$

Exemplo 9:

Considere agora o sistema linear com duas equações e três variáveis

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 & (1) \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 3 & (2) \end{array}\right.$$

- Eliminando x_1:

  (-2) $\times$ (1) + (2)

O novo sistema obtido é dado por

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 & (3) \\ & & x_2 & - & 3x_3 & = & 3 & (4) \end{array}\right.$$

3.4 - Sistemas Lineares com $m \neq n$

Podemos reescrever a segunda equação como

$$\boxed{x_2 = 3 + 3x_3,}$$

onde x_3 pode assumir qualquer valor real r.
Substituindo na primeira equação do sistema, obtemos

$$\boxed{x_1 = 2(3 + 3x_3) - x_3 = 6 + 5x_3.}$$

Portanto, uma solução do sistema linear é dada por

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & 6 + 5r \\ x_2 & = & 3 + 3r \\ x_3 & = & r \end{array}\right.$$

3.4 - Sistemas Lineares com $m \neq n$

Exemplo 10:

(*Planejamento da Produção de uma Fazenda*) Um fazendeiro está planejando a estratégia de plantio do próximo ano. Por informações obtidas nos órgãos governamentais, sabe-se que as culturas de feijão, arroz e milho serão as mais rentáveis na próxima safra. O custo do plantio de feijão, arroz e milho por hectare é respectivamente R$ 10,00, R$ 12,00 e R$ 15,00. O fazendeiro dispõe de R$ 1.000,00 para investir. A área cultivável da fazenda é de 80 hectares. Que área da fazenda deve ser utilizada para o cultivo de cada um dos produtos?

3.4 - Sistemas Lineares com $m \neq n$

Para resolver este problema, sejam respectivamente, x_1, x_2 e x_3 a área (em hectares) da fazenda reservada para o plantio de feijão, arroz e milho. A área total a ser plantada é dada por

$$x_1 + x_2 + x_3,$$

logo

$$x_1 + x_2 + x_3 = 80.$$

3.4 - Sistemas Lineares com $m \neq n$

A despesa do fazendeiro com o plantio é dada por

$$10x_1 + 12x_2 + 15x_3,$$

logo

$$10x_1 + 12x_2 + 15x_3 = 1000$$

O nosso problema consiste portanto, em calcular valores não-negativos de x_1, x_2, e x_3, tais que

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 80 & (1) \\ 10x_1 & + & 12x_2 & + & 15x_3 & = & 1000 & (2) \end{array} \right.$$

3.4 - Sistemas Lineares com $m \neq n$

Para resolver este sistema linear, utilizamos o mesmo método descrito nos exemplos anteriores.

- Eliminando x_1:
  (-10) × 1 + 2

O novo sistema obtido é dado por

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 80 & \text{③} \\ & & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 200 & \text{④} \end{array} \right.$$

3.4 - Sistemas Lineares com $m \neq n$

Podemos reescrever a equação 4 como

$$x_2 = 100 - 2.5x_3,$$

onde x_3 pode assumir qualquer valor real $r \geq 0$. Substituindo na equação 3 do sistema, obtemos

$$x_1 = 80 - (100 - 2.5x_3) - x_3 = -20 + 1.5x_3.$$

Portanto, uma solução do sistema linear é dada por

$$\begin{cases} x_1 &= -20 + 1.5r \\ x_2 &= 100 - 2.5r \\ x_3 &= r \end{cases}$$

3.4 - Sistemas Lineares com $m \neq n$

O sistema linear tem uma infinidade de soluções. Por exemplo, se $r = 20$, então,

$$x_1 = 10, \quad x_2 = 50, \quad x_3 = 20$$

é solução.

- Note que como $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, então r não pode assumir qualquer valor real. Por exemplo, se $r = 50$ então x_2 é negativo.

Exercícios

- Fazer os exercícios das páginas 8 e 9 do livro texto.