Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
Gabarito da AP3 - Segundo Semestre de 2009
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(2.0)1. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

calcule A^{-1} e use-a para:

(1.0)a. encontrar uma matriz $X_{2\times 2}$ tal que $AX = B$,

(1.0)b. encontrar uma matriz $Y_{2\times 2}$ tal que $YA = B$.

Solução:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 16 & -12 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \end{array}\right)$$

Logo

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a)

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B$$
$$\Rightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

(b)

$$YA = B \Rightarrow YAA^{-1} = BA^{-1}$$

$$\Rightarrow Y = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$$

(2.0)2. Seja a matriz

$$A = \begin{pmatrix} x-2 & x+3 & x-1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1.0)a. Calcule o valor de x tal que $\det(A) = 60$.

(1.0)b. Considerando agora $x = 3$ e $b^t = (8, -4, 2)$ e resolva o sistema linear $Ax = b$ pelo método de Gauss-Jordan.

Solução:

(1.0)a.

$$(x-2)+9(x+3)+4(x-1)-3(x-1)-2(x+3)-6(x-2) = 60 \Rightarrow$$

$$3x + 30 = 60 \Rightarrow x = 10$$

(1.0)b.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 8 \\ 0 & -11 & -1 & -20 \\ 0 & -16 & -5 & -22 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 8 \\ 0 & -11 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -39 & 78 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 8 \\ 0 & -11 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 8 \\ 0 & -11 & 0 & -22 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Logo $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ e $x_3 = -2$.

(1.5)3. Responda se cada uma das aplicações T abaixo é uma transformação linear, justificando as respostas.

(0.75)a. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $T(x) = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$

(0.75)b. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x) = (x_2, x_1, x_1 + x_2)^t$

Solução:

(0.75)a.

$$T(\alpha x) = (\alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| T(x).$$

Logo, $T(\alpha x) \neq \alpha T(x)$, se $\alpha < 0$ e $x \neq 0$. Portanto, T não é uma transformação linear.

(0.75)b.

$$\begin{aligned} T(\alpha x) &= (\alpha x_2, \alpha x_1, \alpha x_1 + \alpha x_2)^t = \alpha T(x), \\ T(x+y) &= (x_2 + y_2, x_1 + y_1, x_1 + y_1 + x_2 + y_2)^t \\ &= (x_2, x_1, x_1 + x_2)^t + (y_2, y_1, y_1 + y_2)^t \\ &= T(x) + T(y). \end{aligned}$$

Logo, T é uma transformação linear.

(3.0)4 .

(1.0)a. Qual é a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1,1) = (2,4,6)$, $T(0,-1,0) = (-2,-1,-3)$ e $T(0,0,2) = (-2,6,4)$?

(2.0)b. Considerando a transformação linear T do item (a), determine seu núcleo, sua imagem, a dimensão e uma base para cada um destes subespaços, e diga se ela é injetora ou sobrejetora, justificando a resposta.

Solução:

(1.0)(a) Escrevendo o vetor (x,y,z) como combinação linear de $(1,1,1)$, $(0,-1,0)$ e $(0,0,2)$, temos:

$$(x,y,z) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(0,-1,0) + \alpha_2(0,0,2),$$

ou seja,

$$\begin{cases} \alpha_1 & = x \\ \alpha_1 - \alpha_2 & = y \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 & = z \end{cases}$$

Logo $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = x - y$ e $\alpha_3 = \frac{z-x}{2}$ e, portanto:

$$(x,y,z) = x(1,1,1) + (x-y)(0,-1,0) + \frac{z-x}{2}(0,0,2).$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= xT(1,1,1) + (x-y)T(0,-1,0) + \tfrac{z-x}{2}T(0,0,2) \\ &= x(2,4,6) + (x-y)(-2,-1,-3) + \tfrac{z-x}{2}(-2,6,4) \\ &= (x + 2y - z, y + 3z, x + 3y + 2z). \end{aligned}$$

(2.0)(b)

$$N(T)=\{(x,y,z)\in I\!R^3/T(x,y,z)=(0,0,0)\}.$$

De:

$$(x+2y-z,y+3z,x+3y+2z)=(0,0,0),$$

vem o sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & & y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

cuja solução geral é $(7z,-3z,z)$, $z\in I\!R$. Logo:

$$N(T)=\{(7z,-3z,z)/z\in I\!R\}=\{z(7,-3,1)/z\in I\!R\}=[(7,-3,1)].$$

Desta forma $\{(7,-3,1)\}$ é uma base para o núcleo de T e sua dimensão é igual a 1. Como $N(T)\neq(0,0,0)$, a transformação não é injetora.

$$Im(T)=\{(a,b,c)\in I\!R^3/T(x,y,z)=(a,b,c)\}.$$

De:

$$(x+2y-z,y+3z,x+3y+2z)=(a,b,c),$$

vem o sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & a \\ & & y & + & 3z & = & b \\ x & + & 3y & + & 2z & = & c \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & a \\ & & y & + & 3z & = & b \\ & & y & + & 3z & = & c-a \end{array}\right. \sim$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & a \\ & & y & + & 3z & = & b \\ & & & & 0 & = & c-a-b \end{array}\right.$$

que somente terá solução se $c-a-b=0$. Logo:

$$\begin{aligned} Im(T) &= \{(a,b,c)/c=a+b\}=\{a(1,0,1)+b(0,1,1)/a,b\in I\!R\} \\ &= [(1,0,1),(0,1,1)]. \end{aligned}$$

Desta forma $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ é uma base para a imagem de T e sua dimensão é igual a 2. Como $Im(T)\neq I\!R^3$, a transformação não é sobrejetora.

(1.5)5. Encontre os autovalores e autovetores associados da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Solução:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ou $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$. Logo, os autovalores são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -3$. Para encontrar os autovetores associados a $\lambda_1 = 4$, resolvemos a equação $(A - 4I)x = 0$, obtendo $x = (2x_2, x_2)^t$. Logo, qualquer múltiplo não-nulo de $(2,1)^t$ é um autovetor associado a λ_1. Analogamente, resolvendo $(A + 3I)x = 0$, concluímos que qualquer múltiplo não-nulo de $(-1, 3)$ é um autovetor associado a λ_2.