Álgebra Linear

Aula 9: Matriz Inversa

Mauro Rincon

Márcia Fampa

7.1 - Definição

$\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$
$\exists b \in \mathbb{R}, b \neq 0$
tal que:

$$a \cdot b = b \cdot a = 1$$

Assim $\boxed{b = \dfrac{1}{a}}$ é **inverso** de a.

7.1 - Definição

Definição 1: Uma matriz quadrada $n \times n$, $\mathbf{A} = (a_{ij})$ é invertível (ou não singular), se existe uma matriz quadrada $n \times n$, $\mathbf{B} = (b_{ij})$ tal que

$$\boxed{\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n,}$$

onde $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade e estamos denotando o produto de matrizes por $\mathbf{AB}$. A matriz $\mathbf{B}$ é chamada de **inversa de A** e é denotada por $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.
Se $\mathbf{A}$ não tem inversa, dizemos que $\mathbf{A}$ é singular ou não invertível.

7.1 - Definição

Exemplo 1: Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/8 \\ 1/4 & -1/8 \end{bmatrix}$$

Como $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_2$, conclui-se que a matriz quadrada $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ é a inversa de $\mathbf{A}$ e que $\mathbf{A}$ é invertível.

7.1 - Definição

Teorema 1: Se uma matriz $n \times n$, $\mathbf{A} = (a_{ij})$ possui inversa, então a inversa é única.

Demonstração: Suponhamos que as matrizes $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ sejam inversas de $\mathbf{A}$.

Então, $\begin{array}{l} \mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n \\ \mathbf{AC} = \mathbf{CA} = \mathbf{I}_n \end{array}$.

Logo $\mathbf{BA} = \mathbf{AC}$.

Por outro lado,

$\mathbf{B} = \mathbf{BI}_n = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) = (\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{I}_n\mathbf{C} = \mathbf{C}$.

$\therefore \boxed{\mathbf{B} = \mathbf{C}}$, o que conclui o teorema.

7.1 - Definição

Exemplo 2: Determine a matriz inversa $\mathbf{A}^{-1}$ da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Como a matriz $\mathbf{A}$ é 2×2 então a $\mathbf{A}^{-1}$ também é 2×2. Suponha que $\mathbf{A}^{-1}$ seja dada por

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$

7.1 - Definição

Então usando a definição, queremos determinar os coeficientes $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ de tal forma que $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_2$, ou seja

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2$$

Fazendo o produto, obtemos que

$$\begin{bmatrix} x_{11} + 2x_{21} & x_{12} + 2x_{22} \\ -2x_{11} + 3x_{21} & -2x_{12} + 3x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7.1 - Definição

Assim,

$$\begin{aligned} x_{11} + 2x_{21} &= 1 \\ -2x_{11} + 3x_{21} &= 0 \end{aligned} \qquad e \qquad \begin{aligned} x_{12} + 2x_{22} &= 0 \\ -2x_{12} + 3x_{22} &= 1 \end{aligned}$$

Resolvendo os dois sistemas, obtemos a seguinte solução: $\boxed{x_{11} = \frac{3}{7}, x_{21} = \frac{2}{7}\ , x_{12} = -\frac{2}{7} \text{ e } x_{22} = \frac{1}{7}.}$
Logo A é invertível e sua inversa é dada por

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/7 & -2/7 \\ 2/7 & 1/7 \end{bmatrix}$$

7.2 - Propriedades da Inversa

Propriedades da Inversa:

1) Se uma matriz $\mathbf{A}$ é invertível então a inversa $\mathbf{A}^{-1}$ é invertível e $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.

Demonstração: Uma matriz $\mathbf{B}$ é a inversa de $\mathbf{A}^{-1}$ se

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n.$$

Como $\mathbf{A}^{-1}$ é a inversa de $\mathbf{A}$, então

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n.$$

Pelo Teorema, a inversa é única, então $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ é a inversa de $\mathbf{A}^{-1}$, ou seja, $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.

7.2 - Propriedades da Inversa

Propriedades da Inversa:

2) Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são invertíveis então $\mathbf{AB}$ é invertível e $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

Demonstração: Temos que mostrar que os produtos $(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})$ e $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{AB}$ são iguais a matriz identidade. De fato,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) &= \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AI}_n\mathbf{A}^{-1} \\
&= \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}_n \\
(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{AB} &= \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{I}_n\mathbf{B} \\
&= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}_n.
\end{aligned}$$

7.2 - Propriedades da Inversa

Propriedades da Inversa:

3) Se $\mathbf{A}$ é uma matriz invertível, então $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$.

Demonstração: Usando a segunda propriedade, temos que

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^T = \mathbf{I}_n^T = \mathbf{I}_n$$

$$(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{A}^T = (\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})^T = \mathbf{I}_n^T = \mathbf{I}_n.$$

7.2 - Propriedades da Inversa

Exemplo 3: Seja a matriz $\mathbf{A}$ dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então $\mathbf{A}^{-1}$ e $(\mathbf{A}^{-1})^T$ são dadas por

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \text{ e } (\mathbf{A}^{-1})^T = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

7.2 - Propriedades da Inversa

Por outro lado podemos verificar que

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad (\mathbf{A}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Verifique, usando a definição de matriz inversa, que

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$

7.2 - Propriedades da Inversa

Corolário 1: Se $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots \mathbf{A}_m$ são matrizes $n \times n$ invertíveis, então o produto $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_{m-1}\mathbf{A}_m$ é invertível e

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_{m-1}\mathbf{A}_m)^{-1} = \mathbf{A}_m^{-1}\mathbf{A}_{m-1}^{-1}\cdots\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}$$

Demonstração: Denotemos por $\mathbf{B}_2 = \mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_{m-1}\mathbf{A}_m$. Então o produto $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_{m-1}\mathbf{A}_m = \mathbf{A}_1\mathbf{B}_2$. Aplicando a segunda propriedade temos que

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2)^{-1} = \mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1} = (\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_{m-1}\mathbf{A}_m)^{-1}\mathbf{A}_1^{-1} \quad (1)$$

7.2 - Propriedades da Inversa

Agora queremos determinar a inversa de $(\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_{m-1}\mathbf{A}_m)$. Definimos $\mathbf{B}_3 = \mathbf{A}_3 \cdots \mathbf{A}_{m-1}\mathbf{A}_m$. Então $(\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_{m-1}\mathbf{A}_m) = \mathbf{A}_2\mathbf{B}_3$. Novamente da segunda propriedade temos

$$(\mathbf{A}_2\mathbf{B}_3)^{-1} = \mathbf{B}_3^{-1}\mathbf{A}_2^{-1} = (\mathbf{A}_3 \cdots \mathbf{A}_{m-1}\mathbf{A}_m)^{-1}\mathbf{A}_2^{-1}$$

Substituindo em 1 obtemos

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_{m-1}\mathbf{A}_m)^{-1} = (\mathbf{A}_3 \cdots \mathbf{A}_{m-1}\mathbf{A}_m)^{-1}\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}$$

Repetindo sucessivamente o processo para $\mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \cdots \mathbf{B}_{m-1}$ conclui-se o resultado.

7.2 - Propriedades da Inversa

- Definimos anteriormente uma matriz $\mathbf{B}$ sendo a inversa de uma matriz A se satisfaz as duas condições: $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$. O teorema seguinte, cuja demonstração será omitida, garante que basta verificarmos uma das duas igualdades para sabermos se uma matriz é invertível.

- Teorema 2: Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes $n \times n$. Então $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$ se e somente se $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$.

7.3 - Método Prático para Determinar a Matriz Inversa

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz $n \times n$ dada. Queremos determinar uma matriz $n \times n$, $\mathbf{B} = b_{ij}$ inversa de $\mathbf{A}$ tal que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \overbrace{\phantom{b_{11}}}^{\mathbf{x_1}} & & \overbrace{\phantom{b_{1j}}}^{\mathbf{x_j}} & & \overbrace{\phantom{b_{1n}}}^{\mathbf{x_n}} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{i1} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{matrix}} & \ldots & \boxed{\begin{matrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{ij} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{matrix}} & \ldots & \boxed{\begin{matrix} b_{1n} \\ \vdots \\ b_{in} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{matrix}} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \overbrace{}^{\mathbf{e_1}} & & \overbrace{}^{\mathbf{e_j}} & & \overbrace{}^{\mathbf{e_n}} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} & \ldots & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} & \ldots & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix}} \end{bmatrix} \end{array}$$

7.3 - Método Prático para Determinar a Matriz Inversa

A j-ésima coluna de $\mathbf{AB}$ é a matriz $\mathbf{Ax}_j$ de ordem $n \times 1$. O problema de encontrar a matriz $n \times n$, $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ satisfazendo a definição de inversa $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$ é equivalente ao problema de encontrar n matrizes de ordem $n \times 1$, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$ de forma a satisfazer a condição,

$$\mathbf{Ax}_j = \mathbf{e}_j \qquad (1 \leq j \leq n)$$

A matriz aumentada do sistema é dada por:

$$[A|\mathbf{e}_j], i \leq j \leq n \text{ ou } [\mathbf{A}|\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \cdots\ \mathbf{e}_n] = [\mathbf{A}|\mathbf{I}_n]$$

7.3 - Método Prático para Determinar a Matriz Inversa

ou seja, a matriz aumentada de ordem $n \times 2n$ é dada por

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}_n] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right]$$

7.3 - Método Prático para Determinar a Matriz Inversa

Usando o método de Gauss-Jordan, podemos transformar a matriz aumentada $[\mathbf{A}|\mathbf{I}_n]$ na forma escada reduzida por linhas, denotada por $[\mathbf{C}|\mathbf{D}]$. Assim a matriz na forma escada reduzida por linhas $\mathbf{C}$ de ordem $n \times n$ é equivalente por linhas a matriz $\mathbf{A}$. Denotando as colunas da matriz $\mathbf{D}$ por $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \cdots \mathbf{d}_n$, então a matriz aumentada $[\mathbf{C}|\mathbf{D}]$ representam n sistemas lineares dados por

$$\mathbf{C}\mathbf{x}_j = \mathbf{d}_j, \qquad (1 \leq j \leq n) \qquad 1$$

que correspondem na forma matricial ao sistema linear $\mathbf{CB} = \mathbf{D}$.

7.3 - Método Prático para Determinar a Matriz Inversa

No término do processo temos duas possibilidades a saber:

Caso 1- A matriz $\mathbf{C} = \mathbf{I}_n$. Então o sistema 1 pode ser escrito por

$$\mathbf{I}_n \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j = \mathbf{d}_j, \qquad (1 \leq j \leq n)$$

Neste caso, temos que $\mathbf{B} = \mathbf{D}$, pois as matrizes colunas $\mathbf{x}_j = \mathbf{d}_j$ são iguais, para todo $j = 1, 2 \cdots, n$ e portanto a matriz inversa é dada por $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{D}$

Caso 2- A matriz $\mathbf{C} \neq \mathbf{I}_n$. Neste caso a matriz $\mathbf{A}$ é singular e portanto não tem inversa.

7.3 - Método Prático para Determinar a Matriz Inversa

Procedimento para o cálculo da matriz inversa:

- **Passo 1.** Forme a matriz aumentada $[\mathbf{A}|\mathbf{I}_n]$.
- **Passo 2.** Usando o método de Gauss-Jordan, coloque a matriz aumentada $[\mathbf{A}|\mathbf{I}_n]$ em sua forma escada reduzida por linhas. Todas as operações elementares feitas em uma linha de $\mathbf{A}$ também devem ser feitas na linha correspondente da matriz $\mathbf{I}_n$ para não alterar a solução do sistema linear.

7.3 - Método Prático para Determinar a Matriz Inversa

Procedimento para o cálculo da matriz inversa:

- **Passo 3.** Após o **Passo 2** temos a matriz aumentada $[\mathbf{C}|\mathbf{D}]$ equivalente por linhas a matriz $[\mathbf{A}|\mathbf{I}_n]$.

1) Se $\mathbf{C} = \mathbf{I}_n$ então $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{-1}$.

2) Se $\mathbf{C} \neq \mathbf{I}_n$, então $\mathbf{A}$ é singular e $\mathbf{A}^{-1}$ não existe.

7.3 - Método Prático para Determinar a Matriz Inversa

Exemplo 4: Determine a matriz inversa da seguinte matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Passo a passo Voltar

7.3 - Método Prático para Determinar a Matriz Inversa

Não conhecemos ainda, nenhuma ferramenta para saber se uma matriz tem inversa ou não, mas sabemos que se uma matriz escada reduzida por linhas obtida de A tem uma linha nula então a matriz **A** é singular e portanto não tem inversa. Assim se em uma das etapas do processo de transformação da matriz **A** numa matriz equivalente na forma escada reduzida por linhas tiver uma matriz com pelo menos uma linha nula então pela equivalência das matrizes podemos concluir que a matriz **A** é singular.

7.3 - Método Prático para Determinar a Matriz Inversa

Exemplo 5 Determine, se existir, a matriz inversa da seguinte matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Passo a passo Voltar

7.3 - Método Prático para Determinar a Matriz Inversa

Teorema 3:

Uma matriz $n \times n$, $\mathbf{A}$ é invertível se, e somente se, $\mathbf{A}$ é equivalente por linhas a matriz identidade $\mathbf{I}_n$.

7.4 - Sistemas Lineares Inversos

Teorema 4:

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz $n \times n$. Então:

1) O sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tem solução única se, e somente se, $\mathbf{A}$ é invertível. Neste caso a solução é $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$;

Demonstração: Se a matriz $\mathbf{A}$ é invertível, então multiplicando $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ por $\mathbf{A}^{-1}$ à esquerda em ambos os membros obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Ax}) &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \\ (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{I}_n\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

7.4 - Sistemas Lineares Inversos

2) O sistema linear homogêneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ tem solução não trivial se, e somente se, $\mathbf{A}$ é singular.

<u>Demonstração:</u> $\mathbf{Ax} = 0$

$\Rightarrow$ (se $\mathbf{x}$ não é única) $\Rightarrow$ $\mathbf{A}$ é singular.

Se $\mathbf{A}$ é não singular então $\mathbf{A}$ é invertível. Logo:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ é a única solução!}$$

$\Leftarrow$ $\mathbf{A}$ singular $\Rightarrow$ $\mathbf{x}$ não é única. Suponha que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é única, então pelo item $\Rightarrow$ $\mathbf{A}$ é invertível.

7.4 - Sistemas Lineares Inversos

Exemplo 6 Considere o sistema linear não homogêneo: $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde a matriz dos coeficientes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = (1, 0, 2)^T.$$

Determine a solução do sistema usando a inversa. Como $\mathbf{A}$ é invertível então

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/4 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

7.4 - Sistemas Lineares Inversos

Exemplo 7: Considere o sistema linear homogêneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, cuja matriz dos coeficientes $\mathbf{A}$ é singular

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

A matriz $\mathbf{A}$ é equivalente por linhas a seguinte matriz

$$\mathbf{S} = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} \mathbf{Sx} = \mathbf{0} \\ \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Tomando $\boxed{x_3 = r \Rightarrow x_1 = x_2 = -r.}$

$$\mathbf{x} = (-r, -r, r), \forall r \in \mathbb{R}$$

Exercícios

- Fazer os exercícios das páginas 70 e 71 do livro texto(práticos e teóricos), e os exercícios suplementares de 1 a 26 das páginas 72 e 73.