Gabarito

Álgebra Linear: AD1 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2017

Tutores: Gabriel Thomaz e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

a) $proj_v u = \left(\dfrac{u.v}{||v||^2}\right) v = \left(\dfrac{(1,0,-4)(1,1,0)}{(1,1,0).(1,1,0)}\right)(1,1,0) = \dfrac{1}{2}(1,1,0) = (\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0).$

b) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Considere $a(1,0,-4) + b(1,1,0) = (x,y,z)$. Temos:

$$\begin{cases} a+b &= x \\ b &= y \\ -4a &= z \end{cases}$$

Pelo sistema , temos que $x = y - z/4 \Longrightarrow x - y + z/4 = 0$

Logo, o espaço gerado por $u, v = \{(x,y,z)|(x,y,z) = (y - \frac{z}{4}, y, z).\}$

c) Seja $w_1 = (1,0,-4)$.

Temos que

$$w_2 = (1,1,0) - \left(\frac{(1,1,0)(1,0,-4)}{(1,0,-4)(1,0,-4)}\right)(1,0,-4) =$$

$$= (1,1,0) - \left(\frac{1}{17}\right)(1,0,-4) = \left(\frac{16}{17}, 1, \frac{4}{17}\right).$$

Logo uma base ortogonal para este subespaço é $\{(1,0,-4), (\dfrac{16}{17}, 1, \dfrac{4}{17})\}$

d)

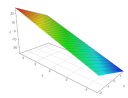

Figura 1: Espaço gerado

2^a Questão) Solução:

a) Como v_1, v_2 e v_3 geram S, vamos verificar se esses são L.I.. Assim, sejam α, β e $\gamma \in \mathbb{R}$

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0 \Longrightarrow \alpha(t^2+1) + \beta(t+2) + \gamma(t^2-3t) = 0$$

reescrevendo,

$$(\alpha+\gamma)t^2 + (\beta-3\gamma)t + (\alpha+2\beta) = 0$$

Daí, temos que

$$\alpha + \gamma = 0 \Longrightarrow \alpha = -\gamma$$

$$\beta - 3\gamma = 0 \Longrightarrow \beta = 3\gamma$$

$$\alpha + 2\beta = 0 \Longrightarrow \alpha = -2\beta$$

Substituindo a segunda relação na terceira temos que $\alpha = -6\gamma$. Levando em conta que $\alpha = -6\gamma$ e a primeira relação ($\alpha = -\gamma$), ambas só são verdadeiras se $\gamma = 0$. Sendo $\gamma = 0$, temos que, por consequência, $\alpha = \beta = 0$.

Portanto, v_1, v_2 e v_3 são L.I. e como geram S, formam uma base para S. Como temos 3 vetores, $dim(S) = 3$.

b)Repare que v_1 e v_2 são L.I., pois

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0 \Longrightarrow \alpha(t^2+1) + \beta(t+2) = 0 \Longrightarrow \alpha t^2 + \beta t + (\alpha+2\beta) = 0$$

daí, $\alpha = \beta = 0$. Temos agora que escolher um outro vetor L.I. a v_1 e v_2 e que gere P_2. Assim, considerando o item a, podemos escolher o próprio $v_3 = (t^2 - 3t)$. Assim, uma base para P_2 é $\{v_1,\, v_2 \text{ e } v_3\}$.

c)QUESTÃO ANULADA

3^a Questão) Solução:

$x+2w = 0 \Longrightarrow x = -2w$ e $y-2z = 0 \Longrightarrow y = 2z$. Logo $S = \{(x, y, z, w)|(-2w, 2z, z, w)\}$.

a) *0 $\in S$? Sim , pois basta tomar w=z=0 e o vetor nulo $\in S$.

* É fechado para soma?

Sim, pois $(-2w_1, 2z_1, z_1, w_1) + (-2w_2, 2z_2, z_2, w_2) = (-2(w_1 + w_2), 2(z_1 + z_2), (z_1 + z_2), (w_1 + w_2)) \in S$.

* É fechado para produto por escalar?

Sim, pois, para $c \in \mathbb{R}$, $c(-2w_1, 2z_1, z_1, w_1) = (-2(cw_1), 2(cz_1), cz_1, cw_1) \in S$. Basta tomar $w = cw_1, z = cz_1$.

Assim, podemos encontrar a base:

$(-2w, 2z, z, w) = w(-2, 0, 0, 1)+z(0, 2, 1, 0)$. Logo , temos a base $= \{(-2, 0, 0, 1), (0, 2, 1, 0)\}$.

4^a Questão) Solução: Antes de começar vamos calcular A^T e $2B$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 9 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2B = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 4 \\ -6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Agora, calculando:

$$C = A^T - 2B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 9 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -8 & 4 \\ -6 & 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 15 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = A.B = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1*1+9*(-3) & 1*(-4)+9*4 & 1*2+9*1 \\ (-2)*1+2*(-3) & (-2)*(-4)+2*4 & (-2)*2+2*1 \\ (-2)*1+3*(-3) & (-2)*(-4)+3*4 & (-2)*2+3*1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26 & 32 & 11 \\ -8 & 16 & -2 \\ -11 & 20 & -1 \end{bmatrix}$$

$C = A.A$. Como A é uma matriz 3×2, $A.A$ é uma multiplicação que não é possível, pois as dimensões das matrizes não são compatíveis.

$$C = B.A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1*1+(-4)*(-2)+2*(-2) & 1*9+(-4)*2+2*3 \\ (-3)*1+4*(-2)+1*(-2) & (-3)*9+4*2+1*3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -13 & -16 \end{bmatrix}$$

5^a Questão) Solução:

Considere as incógnitas:

$$\begin{aligned} x &= \text{quantidade de kg do produto X} \\ y &= \text{quantidade de kg do produto Y} \\ z &= \text{quantidade de kg do produto Z} \end{aligned}$$

Para montar o sistema relativo ao problema, vamos somar as quantidades de insumo A dos três produtos X, Y, Z e igualar a quantidade total (em gramas) de insumo A utilizada (linha L_1 do sistema). Faremos o mesmo procedimento para o insumo B (linha L_2 do sistema). Então multiplicaremos o preço de cada kg pelo seu respectivo produto e igualaremos ao valor total que a indústria arrecadou (linha L_3 do sistema). Assim temos:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z &= 1900 \\ x + 3y + 5z &= 2400 \\ 3x + 2y + 4z &= 2900 \end{cases} \tag{1}$$

Utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss para resolvê-lo. Considere a seguinte matriz aumentada que representa este sistema :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix}$$

Trocando L_1 por L_2 temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & -5 & -7 & -2900 \\ 0 & -7 & -11 & -4300 \end{bmatrix}.$$

Agora, fazendo $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & -5 & -7 & -2900 \\ 0 & 0 & -6 & -1200 \end{bmatrix}.$$

Assim, temos o seguinte sistema após a eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} x + 3y + 5z &= 2400 \\ -5y - 7z &= -2900 \\ -6z &= -1200 \end{cases} \tag{2}$$

Por L_3 neste sistema, temos que $z = 200$.

Substituindo z em L_2 temos que $-5y - 7 \times 200 = -2900 \Longrightarrow y = 300$.

Agora, substituindo y e z em L_1, temos que $x = 500$.

Logo, foram vendidos 500 kg do produto X, 300 kg do produto Y e 200 kg do produto Z.