Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP1 - Segundo Semestre de 2012
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(3.0)1. Responda, justificando, se cada um dos conjuntos abaixo é LI ou LD.

(a)
$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -12 & -9 \end{bmatrix} \right\} \subset M_{2\times 2}$$

(b)
$$\{(-1,-2,0,3),(2,-1,0,0),(1,0,0,0)\} \subset I\!\!R^4$$

(c)
$$\{1+2x-x^2, 2-x+3x^2, 3-4x+7x^2\} \subset P_2$$

Solução:

(a) Como o conjunto tem apenas duas matrizes e com uma delas sendo múltiplo escalar da outra, o conjunto é LD.

(b) Consideremos a equação:

$$a(-1,-2,0,3)+b(2,-1,0,0)+c(1,0,0,0)=(0,0,0,0)$$

Portanto:
$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -a & + & 2b & + & c & = & 0 \\ -2a & - & b & & & = & 0 \\ 3a & & & & & = & 0 \end{array} \right.$$

Como o sistema admite apenas a solução trivial: $a=b=c=0$, o conjunto é LI.

(c) Consideremos a equação:

$$a(1+2x-x^2)+b(2-x+3x^2)+c(3-4x+7x^2)=0$$

ou

$$(a+2b+3c)+(2a-b-4c)x+(-a+3b+7c)x^2=0+0x+0x^2$$

ou

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ 2a - b - 4c = 0 \\ -a + 3b + 7c = 0 \end{cases}$$

Como este sistema admite outras soluções além da trivial (a primeira equação é igual a soma das duas outras equações) , o sistema é LD.

(2.0)2. Dadas as matrizes A e B, realizar as operações abaixo quando possível e quando não for possível, justificar.

$$A=\begin{bmatrix} -8 & 4 & -6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & 3 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -2 \\ 1 & -5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

(a) $A\times B$.

(b) $B\times A$.

(c) $(2B^t)\times(A^t)$.

(d) $(B+A)^t$.

Solução:

(a)

$$AB=\begin{bmatrix} 0+8-6+3 & -32-8+30+8 \\ 0-10+7+9 & 8+10-35+24 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

(b)

$$BA=\begin{bmatrix} 0+8 & 0-20 & 0+28 & 0+12 \\ -16-4 & 8+10 & -12-14 & 2-6 \\ -8-10 & 4+25 & -6-35 & 1-15 \\ -24+16 & 12-40 & -18+56 & 3+24 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & -20 & 28 & 12 \\ -20 & 18 & -26 & -4 \\ -18 & 29 & -41 & -14 \\ -8 & -28 & 38 & 27 \end{bmatrix}$$

(c)

$$(2B^t) \times (A^t) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 6 \\ 8 & -4 & -10 & 16 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ 4 & -5 \\ -6 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ -4 & 14 \end{bmatrix}$$

(d) Não é possível somar A e B, pois dimensão de A é diferente da dimensão de B.

(3.0)3. Responda, justificando, se cada um dos subconjuntos abaixo é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$.

(a) $S = \{(x, y)/y = -x\}$.

(b) $S = \{(x, x^2)/x \in \mathbb{R}\}$.

(c) $S = \{(x, y)/x \geq 0\}$.

Solução:

(a) Sim, pois se $(x_1, -x_1) \in S$ e $(x_2, -x_2) \in S$, então $\alpha_1(x_1, -x_1) + \alpha_2(x_2, -x_2) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, -(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) \in S$ para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Não, pois $(1, 1) \in S$, $(2, 4) \in S$ e $(1, 1) + (2, 4) = (3, 5) \notin S$.

(c) Não, pois $(1, 1) \in S$ e $-3(1, 1) \notin S$.

(2.0)4. Determinar uma base e a dimensão do espaço solução do sistema homogêneo abaixo.

$$\begin{cases} x + 2y - 4z + 3t = 0 \\ x + 2y - 2z + 2t = 0 \\ 2x + 4y - 2z + 3t = 0 \end{cases}$$

Solução:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O conjunto solução do sistema é:

$$S = \{(x, y, z, t)/t = 2z \text{ e } x = -2y - 2z\}$$

que é um subspaço vetorial do $I\!R^4$.

Tendo em vista serem duas as variáveis livres (y e z), conclui-se que dim$S = 2$. Logo, qualquer subconjunto de S com dois vetores LI formam uma base de S. Façamos:

$$(1)\, y = 1,\ z = 0 \ \ (2) y = 0,\ z = 1$$

para obter os vetores

$$v_1 = (-2, 1, 0, 0) \text{ e } v_2 = (-2, 0, 1, 2)$$

O conjunto $\{v_1, v_2\}$ é uma base de S.