Consórcio cederj Fundação CECIERJ

Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear - Profs Mauro Rincon & Marcia Fampa
GABARITO: AP3 (Terceira Prova) - Segundo Semestre de 2005

1.(1.0) Determine k para que

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ k & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

seja LD.
Solução: Sejam os escalares $\alpha_1$ e $\alpha_2$ números reais. Para que os vetores(matrizes) sejam linearmente dependentes, devemos mostrar que a matriz com o termo k pode ser escrita como combinação linear das demais, ou seja,

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ k & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo a multiplicação do escalar pela matriz e somando os termos respectivos, obtemos

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ k & 0 \end{bmatrix}$$

Resulta da igualdade entre matrizes o seguinte sistema linear:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & 2 \\ & & \alpha_2 & = & -1 \\ \alpha_1 & & & = & k \end{array} \right.$$

Resolvendo o sistema linear, conclui-se que para $k = 3$ o conjunto é LD.

2.(3.0) Seja $S = \{(x, y, z) \in I\!R^3 / z = 2x - y\}$ e considere às operações usuais de adição e multiplicação por escalar.

(a) Prove que $S$ é uma subespaço vetorial do $I\!R^3$.
Solução:

i. $0 = (0, 0, 0) \in S$, pois $0 = 2.(0) - 0 = 0$

ii. Sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ pertencentes a S. Logo $z_1 = 2x_1 - y_1$ e $z_2 = 2x_2 - y_2$.
Somando as igualdades tem-se que

$$z_1 + z_2 = (2x_1 - y_1) + (2x_2 - y_2) = 2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) \in S$$

Assim $(u + v) \in S$.

iii. Seja $\alpha$ um escalar e $u \in S$. Então $z_1 = 2x_1 - y_1$. Logo

$$\alpha z_1 = \alpha(2x_1 - y_1) = 2(\alpha x_1) - \alpha y_1,$$

ou seja $\alpha u \in S$.

Das condições anteriores, resulta que o conjunto S satisfaz todas as propriedades de um subespaço vetorial.

(b) Determine uma base para $S$ e sua dimensão (dim $S$).
Solução: Temos que

$$\begin{aligned} (x, y, z) = (x, y, 2x - y) &= (x, 0, 2x) + (0, y, -y) \\ &= x(1, 0, 2) + y(0, 1, -1) \end{aligned}$$

Logo $B = \{(1, 0, 2); (0, 1, -1)\}$ gera o subespaço vetorial S.
Mostraremos que os vetores, além de gerar S também são LI.
De fato, seja $\alpha_1$ e $\alpha_2$ escalares. Considere a combinação linear:

$$\alpha_1(1, 0, 2) + \alpha_2(0, 1, -1) = (\alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_1 - \alpha_2) = (0, 0, 0)$$

Resolvendo o sistema, obtemos que a única solução possível é $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.
Portanto os vetores são LI e assim o conjunto B é uma das infinitas bases de S e dim(S)=2.

(c) Complemente a base de $S$, de tal forma a obter uma base para o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Solução: Devemos determinar um vetor $(x, y, z)$ que não possa ser escrito como combinação linear dos vetores de B. Sejam os escalares $\alpha_1$ e $\alpha_2$ e tal que

$$(x, y, z) = \alpha_1(1, 0, 2) + \alpha_2(0, 1, -1) = (\alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_1 - \alpha_2)$$

Logo temos o sistema linear

$$\begin{cases} \alpha_1 & & & = & x \\ & & \alpha_2 & = & y \\ 2\alpha_1 & - & \alpha_2 & = & z \end{cases}$$

Assim o vetor $(x, y, z)$ complementa S em relação ao espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, se não satisfaz as três equações simultaneamente, como por exemplo: $v_3 = (x, y, z) = (0, 1, 2)$. Assim $v_3$ não pode ser escrito como combinação linear dos vetores de B, ou seja, $v_3$ é linearmente independente em relação aos dois vetores de B, e portanto $\widehat{B} = \{(1, 0, 2); (0, 1, -1); (0, 1, 2)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$.

3.(2.0) Calcule o determinante da matriz A usando a expansão de cofatores (Fórmula de Laplace),

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: Podemos expandir o determinante em relação à uma linha ou coluna. É claro que é melhor expandir em relação a uma linha ou coluna que tenha o maior número de zeros, já que, nesse caso, os cofatores $A_{ij}$ dos $a_{ij}$ que são nulos não precisam ser calculados, uma vez que $a_{ij}A_{ij} = 0$. Expandindo, então, em relação à segunda linha, obtemos:

$$det(A) = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} = a_{23}A_{23},$$

pois $a_{21} = a_{22} = a_{24} = 0$. Mas sabemos que $A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$, onde $M_{ij}$ é o determinante menor de $a_{ij}$. Mas

$$A_{23} = (-1)^{2+3} det(M_{23}) = (-1) det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando a regra prática para calcular o determinante da matriz $3 \times 3$, obtemos que $(detM_{23}) = \{-2 + 0 - 15\} - \{6 + 12 + 0\} = -35$. Assim $A_{23} = (-1)det(M_{23}) = 35$. Logo

$$det(A) = a_{23}.A_{23} = -2.(35) = -70$$

4.(2.0) Considere o sistema linear $Ax = b$ dado por;

$$\begin{cases} -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 = & -3 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 = & 0 \end{cases}$$

Resolva-o, se possível, pelo método de Gauss-Jordan.
Solução: A matriz aumentada do sistema linear é dado por

$$[A|b] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 2 & -1 & 1 & | & -3 \\ 1 & -1 & 2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$1^a$ Etapa : Transformar a matriz aumentada à sua forma escada reduzida por linhas, usando operações elementares em suas linhas.

Com efeito, dividindo todos os termos da primeira linha da matriz aumentada por $(-1)$ e em seguida considere as seguintes operações entre linhas:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$
$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1.$$

Após essas operações obtemos a seguinte matriz aumentada:

$$[A|b]^1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 3 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Dividindo todos os termos da segunda linha por (3) e em seguida considere as seguintes operações entre linhas:

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2,$$

obtendo-se a seguinte matriz aumentada

$$[A|b]^2 = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & -1/3 & | & -1/3 \\ 0 & 0 & 4/3 & | & 4/3 \end{array}\right]$$

Dividindo a terceira linha por (4/3) e em seguida considere as operações

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 1/3 L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3, \end{array}$$

obtendo-se a seguinte matriz aumentada

$$[A|b]^3 = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 0 & | & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{array}\right]$$

Finalmente fazendo a operação

$$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2,$$

obtemos a matriz aumentada

$$[A|b]^4 = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{array}\right],$$

ou seja temos o sistema linear $I_4 x = b$, dado por

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -2 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right]$$

Assim a solução do sistema linear é $X = (x_1, x_2, x_3) = (-2, 0, 1)$

5.(2.0) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear satisfazendo a seguinte condição $T(1,0) = (3,-2)$ e $T(0,1) = (1,4)$. Determine $T(x,y)$.
"Sugestão: Lembre-se que os vetores $(1,0)$ e $(0,1)$ formam uma base para o $\mathbb{R}^2$".
Solução: Como $(1,0)$ e $(0,1)$ formam uma base para o $\mathbb{R}^2$ então para todo par ordenado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, existem escalares $\alpha_1$ e $\alpha_2$ tal que

$$(x,y) = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = (\alpha_1, \alpha_2),$$

ou seja, $x = \alpha_1$ e $y = \alpha_2$. Como T é uma transformação linear, então

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T(x(1,0) + y(0,1)) = xT(1,0) + yT(0,1) \\ &= x(3,-2) + y(1,4) = (3x + y, -2x + 4y) \end{aligned}$$

Logo, $T(x,y) = (3x + y, -2x + 4y)$.