Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP1 - Segundo Semestre de 2016
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(3.0)1. Em cada item abaixo, determinar se os vetores dados geram $I\!R^3$, justificando a resposta.

(1.5)a. $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (2, 2, 1), v_3 = (3, 0, 0)$.

(1.5)b. $v_1 = (3, 1, 4), v_2 = (2, -3, 5), v_3 = (7, -5, 14)$, $v_4 = (4, 5, 3)$.

Solução:

(a) Sim, pois formando a matriz cujas colunas são os vetores dados e reduzindo-a a forma escalonada, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Como o posto da matriz é 3 e a dimensão de $I\!R^3$ também é, os vetores geram o $I\!R^3$.

(b) Não, pois formando a matriz cujas colunas são os vetores dados e reduzindo-a a forma escalonada, temos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 5 \\ 4 & 5 & 14 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 5 \\ 3 & 2 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 14 & 3 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 5 \\ 0 & 11 & 22 & -11 \\ 0 & 17 & 34 & -17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como o posto da matriz é 2 e a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3, os vetores não geram o $\mathbb{R}^3$.

(3.0)2. .

(1.5)a. Sejam $V = M(n,n)$ o conjunto de matrizes quadradas de ordem n, B uma matriz fixa de V e $S = \{A \in M(n,n) | AB = 0\}$, isto é, S é o conjunto das matrizes que, multiplicadas por B, têm como resultado a matriz nula. Verifique se S é ou não um subspaço vetorial de $M(n,n)$.

Solução:

Sejam $A_1 \in S$, $A_2 \in S$, $C = A_1 + A_2$ e $D = \alpha A_1$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Como $CB = (A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B = 0 + 0 = 0$, então $C \in S$.

Como $DB = \alpha A_1 B = \alpha 0 = 0$, então $D \in S$.

Logo, S é subspaço vetorial de $M(n,n)$.

(1.5)b. Considere a reta $S = \{(x, x+3) | x \in \mathbb{R}\}$. Verifique se a reta é um subspaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

Solução:

Como $(0,3) \in S$, $(1,4) \in S$ e $(0,3) + (1,4) = (1,7) \notin S$, então S não é um subspaço vetorial.

(2.0)3. Seja $v_1 = (1,-3,2)$ e $v_2 = (2,4,-1)$, dois vetores em $\mathbb{R}^3$. Determinar o valor de k para que o vetor $u = (-1,k,-7)$ seja combinação linear de v_1 e v_2.

Solução:

Devemos ter $u = av_1 + bv_2$, para $a, b \in \mathbb{R}$, ou

$$(-1,k,-7) = a(1,-3,2) + b(2,4,-1)$$

De onde vem o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & 2b & = & -1 \\ -3a & + & 4b & = & k \\ 2a & - & b & = & -7 \end{array}\right.$$

o qual tem solução apenas se $k = 13$, já que das linhas 1 e 3, obtemos $a = -3$ e $b = 1$.

(2.0)4. Determinar uma base e a dimensão do espaço de soluções do sistema homogêneo

$$\begin{cases} x + 2y - 4z + 3t = 0 \\ x + 2y - 2z + 2t = 0 \\ 2x + 4y - 2z + 3t = 0 \end{cases}$$

Solução: Fazendo $linha_2 := linha_2 - linha_1$, $linha_3 := linha_3 - 2linha_1$ e, posteriormente, $linha_3 := linha_3 - 3linha_2$ temos o seguinte sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 2y - 4z + 3t = 0 \\ \qquad\qquad 2z - t = 0 \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

Do qual, obtemos da segunda linha $t = 2z$ e , substituindo a igualdade na primeira linha, $x = -2y - 2z$. Logo, o conjunto-solução do sistema é:

$$S = \{(x, y, z, t)|t = 2z, x = -2y - 2z\},$$

que é um subspaço vetorial de $I\!R^4$. Tendo em vista serem duas as variáveis livres (y e z), conclui-se que dim$S$=2. Logo, qualquer subconjunto de S com dois vetores LI, forma uma base de S. Façamos (1) $y = 1$ e $z = 0$, (2) $y = 0$ e $z = 1$, para obter os vetores $v_1 = (-2, 1, 0, 0)$ e $v_2 = (-2, 0, 1, 2)$. O conjunto $\{v_1, v_2\}$ é uma base de S.