

Álgebra linear algorítmica

S. C. Coutinho

Prefácio

Agradeço a todos os alunos que cursaram *álgebra linear algorítmica* em 2010 e 2011 e que serviram de cobaias para a disciplina e para as notas que a acompanharam, especialmente Fabio Ferman, Fillipe Barros da Silva, João Augusto Marrara Marzagão, Raul Barbosa, Mateus Gregório, Rochanne de Miranda Corrêa, Filipe Qiang Zhou, Júlio Zynger, Edberg dos Santos Franco, Victor Lima Campos, Daniel de Souza Gonçalves, José Alexandre Siqueira Junior, João Felipe C. da Silva, Carlos Eduardo da Silva Martins, Yuri de Jesus Lopes de Abreu, Jean Carlos Silva De Souza, João Vitor de Oliveira Silva e Igor Carpanese, que detectaram e ajudaram a corrigir alguns dos inúmeros erros do manuscrito original. Certamente muitos outros erros ainda permanecem, por favor me ajude a corrigi-los enviando uma mensagem para `collier@dcc.ufrj.br`.

Sumário

Prefácio	iii
Capítulo 1. O plano	1
1. Vetores	1
2. Transformações lineares	11
3. As cônicas	21
Exercícios	40
Capítulo 2. Sistemas lineares	45
1. Matrizes	45
2. Eliminação gaussiana	55
3. Decomposição de matrizes	76
4. Aplicações	92
Exercícios	101
Capítulo 3. O \mathbb{R}^n e suas transformações lineares	105
1. Sistemas homogêneos	105
2. O espaço \mathbb{R}^n	110
3. Operadores lineares	115
4. Dinâmica de populações	123
Exercícios	129
Capítulo 4. Espaços vetoriais	135
1. Espaços vetoriais	135
2. Bases	143
3. Bases ortonormais	156
Exercícios	161
Capítulo 5. Transformações lineares	167
1. Definição e exemplos	167
2. Mudança de base	176
3. Método dos mínimos quadrados	187
Exercícios	192
Capítulo 6. Diagonalização de operadores	199
1. Autovalores e autovetores	199

2. Rotações	205
3. Operadores autoadjuntos	216
4. Busca na rede	219
Exercícios	225
Referências Bibliográficas	231

CAPÍTULO 1

O plano

Neste capítulo estudamos os principais conceitos deste curso, vetores e transformações lineares, no contexto concreto do plano. Boa parte do que faremos aqui será generalizado para dimensões maiores em capítulos posteriores.

1. Vetores

Um vetor é, essencialmente, um segmento de reta orientado e, como tal, tem:

- um comprimento, geralmente chamado de *módulo* ou *norma*;
- uma *direção*, dada pela reta subjacente ao segmento;
- um *sentido*, que nos diz para que lado da reta subjacente o segmento aponta.

Além disso suporemos que vetores não podem “flutuar” por onde desejarem. Fixaremos para todo o sempre um ponto do plano, que chamaremos de *origem* e denotaremos por O . Todos os vetores terão uma de suas extremidades na origem e a orientação do segmento será sempre da origem para a outra extremidade, como mostra a figura.

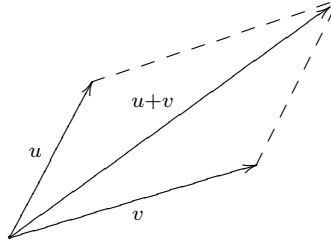


Designaremos vetores por letras, sem a necessidade de adicionar a tradicional seta no alto da letra. Se u for um vetor, seu módulo será denotado por $\|u\|$. Reservaremos as barras simples para o módulo de um número real; isto é, se $r \in \mathbb{R}$, então

$$|r| = \begin{cases} r & \text{se } r \geq 0; \\ -r & \text{se } r < 0; \end{cases}$$

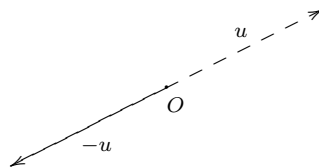
1.1. Operações com vetores. Ao contrários dos segmentos de retas, vetores não são estáticos, podemos operar com eles. A operação mais simples é a soma de vetores, definida pela *regra do paralelogramo*:

dados dois vetores u e v , formamos o paralelogramo, com vértice na origem e lados u e v ; a soma $u + v$ corresponde à diagonal maior do paralelogramo orientada da origem para o vértice oposto; como mostra a figura.



A ideia que levou a esta definição é antiga e muito natural. Por exemplo, dois cavalos puxando uma balsa, um em cada lado de um canal, oferecem uma ilustração perfeita desta regra acima. Em seu famoso *Principia*, Newton prova a regra do paralelogramo no corolário I da Lei II, que corresponde ao que hoje conhecemos como segunda lei de Newton. Contudo, apesar de usar grandezas vetoriais, Newton não introduziu o conceito de vetor, que só foi formalizado no século XIX.

Já para subtrair o vetor u do vetor v , somamos a v o vetor $-u$, obtido invertendo-se o sentido da seta de u . Como todos os vetores têm que ter seu ponto de partida na origem, uma maneira mais precisa de descrever esta receita consiste em dizer que, sobre a mesma reta ao longo da qual está u , desenhamos $-u$ como o segmento orientado de mesmo comprimento que u , mas que aponta no sentido oposto a u , como ilustra a figura.



Observe que, literalmente falando, não podemos aplicar a regra do paralelogramo a estes dois vetores. Afinal, eles são colineares e, por isso, não constituem os lados de um paralelogramo. Interpretaremos isto como significando que a soma destes vetores é o vetor zero, aquele que tem início e fim na origem, e que denotaremos por 0 . Sob estas convenções é fácil, mas muito monótono, verificar geometricamente as seguintes propriedades da soma e da subtração de vetores. Se u , v e w são vetores do plano, então

- $(u + v) + w = u + (v + w)$;
- $u + v = v + u$;
- $u + 0 = u$;
- $u + (-u) = 0$.

Segundo a primeira das propriedades acima, o posicionamento dos parêntesis não afeta o resultado final da adição de vetores. Com isso, se $k \in \mathbb{N}$, podemos abreviar

$$\underbrace{u + \cdots + u}_{k \text{ vezes}}$$

por ku , como de praxe. Como definimos $-u$ como sendo o vetor colinear e de sentido oposto a u , convém dizer que $(-1) \cdot u = -u$. Portanto, se k é um inteiro negativo, teremos

$$(1) \quad k \cdot u = \underbrace{-u - \cdots - u}_{|k| \text{ vezes}}.$$

Na verdade, vamos generalizar estas definições de modo a permitir o produto de qualquer número real λ por um vetor u . Para isso, declaramos λu como sendo o segmento orientado colinear a u cujo comprimento é igual a $|\lambda|$ vezes o comprimento de u . Para que esta definição seja compatível com (1), precisamos que λu tenha a mesma direção que u se $\lambda > 0$ e a direção oposta se $\lambda < 0$. E quando o escalar é o zero? Pela regra anterior, o vetor obtido multiplicando o escalar 0 por um vetor u tem norma $0 \cdot \|u\| = 0$; de modo que tem que ser o vetor nulo. O produto de um escalar por um vetor satisfaz as seguintes propriedades:

- $1 \cdot u = u$
- $0 \cdot u = 0$
- $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$;
- $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$;
- $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$;

em que u, v e w são vetores do plano e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Note que em $0 \cdot u = 0$ o zero que multiplica u é um escalar, ao passo que o zero à direita do sinal de igualdade é o vetor nulo.

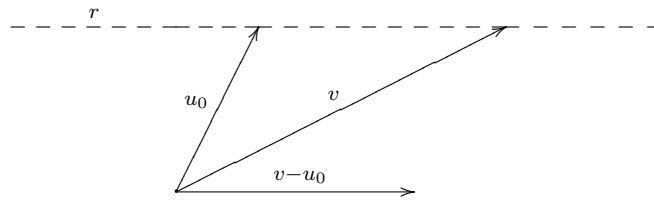
Como aplicação do que fizemos até aqui descreveremos a equação vetorial de uma reta r . O caso mais simples é aquele em que r passa pela origem. Neste caso, podemos escolher um vetor não nulo u ao longo da reta, que pode então ser descrita como o conjunto de múltiplos de u . Isto é, a reta corresponde ao conjunto

$$r = \{\lambda \cdot u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Talvez esta definição de uma reta pela origem lhe incomode. Afinal, aprendemos no ensino fundamental que uma reta é um conjunto de pontos, não de vetores. Na verdade, trata-se

apenas de uma questão de ponto de vista, já que podemos identificar um ponto qualquer P da reta com o segmento orientado que vai da origem a P , e vice-versa.

Se a reta r não passa pela origem, precisamos escolher primeiramente um vetor u_0 cuja extremidade está sobre r , e que consideraremos fixo de agora em diante. Neste caso é melhor evitar falar de um vetor “da reta” ou “sobre a reta” porque, como mostra a figura, somente uma ponta do vetor vai tocar a reta.



Se v é um outro vetor qualquer, cuja extremidade também está sobre r , então a diferença $v - u_0$ nos dá um vetor na direção da reta. Na verdade, se pudéssemos transpor o vetor da origem para a extremidade de u_0 , obteríamos o segmento orientado que vai da extremidade de u_0 à extremidade de v . Seja u um vetor qualquer nesta direção. O que dissemos acima nos permite concluir que $v - u_0$ é múltiplo escalar de u ; em símbolos, $v - u_0 = \lambda u$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Portanto,

dados um vetor u_0 com *extremidade sobre a reta r* e um vetor u na *direção de r* , qualquer outro vetor v , com extremidade em r pode ser escrito na forma $v = u_0 + \lambda u$, para algum número real λ .

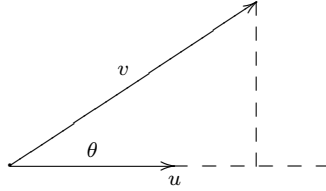
Na linguagem de conjuntos,

$$r = \{u_0 + \lambda \cdot u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Na terminologia usual, u é o *vetor diretor* da reta r e $u_0 + \lambda u$ é a *equação vetorial* de r . Uma pergunta razoável é: de que forma a equação vetorial se relaciona à equação cartesiana da reta, que é aquela que aprendemos no ensino médio? Para respondê-la, precisamos introduzir coordenadas nos nossos vetores.

1.2. Projeção e coordenadas. Como ilustrado na figura abaixo, um exercício simples de trigonometria mostra que, projetando o segmento correspondente a um vetor v sobre a reta suporte do vetor u , obtemos um segmento de comprimento $\|v\| \cdot |\cos \theta|$, em que θ é o

menor ângulo entre os vetores u e v .



Usando isto, definimos a projeção do vetor v sobre o vetor u , como sendo o vetor $\text{Proj}_u(v)$, que tem comprimento $\|v\| |\cos \theta|$ e mesma reta suporte que u . O sentido da projeção é o mesmo de u se o ângulo θ for agudo, e oposto a u se θ for obtuso.

Naturalmente, podemos determinar se o ângulo θ é agudo ou obtuso a partir do cosseno. No primeiro caso, $\cos \theta$ é positivo; no segundo, negativo. Mas isto significa que se u for um vetor de norma um, então o vetor

$$(\|v\| \cos \theta) \cdot u$$

é colinear a u e tem o mesmo comprimento e sentido de $\text{Proj}_u(v)$; de modo que estes dois vetores são iguais. Quando u não for unitário, podemos facilmente construir um vetor unitário de mesma direção e sentido que u dividindo-o por sua norma; procedimento que é conhecido como *normalizar um vetor*. Portanto, em geral,

$$(2) \quad \text{Proj}_u(v) = \frac{\|v\| \cos \theta}{\|u\|} \cdot u.$$

A noção de projeção nos permite introduzir coordenadas para vetores do plano. Já vimos que, para descrever vetores, precisamos fixar o ponto que lhes serve de origem. Para introduzir coordenadas, fixamos também dois vetores unitários não colineares no plano, que denotaremos por e_1 e e_2 . O conjunto $\{e_1, e_2\}$ é conhecido como uma *base do plano*. Para simplificar os cálculos, escolheremos sempre e_1 e e_2 como sendo vetores perpendiculares. Seja v um vetor qualquer do plano. Supondo que θ é o ângulo entre v e e_1 , um argumento trigonométrico simples mostra que

$$(3) \quad v = (\|v\| \cos \theta) \cdot e_1 + (\|v\| \sin \theta) \cdot e_2;$$

veja figura 1.

Os números $\|v\| \cos \theta$ e $\|v\| \sin \theta$ são as *coordenadas* de v relativamente à base $\{e_1, e_2\}$. Uma vez que a base esteja fixada, podemos abreviar (3) escrevendo

$$v = (\|v\| \cos \theta, \|v\| \sin \theta);$$

isto é, identificamos o vetor com seu par de coordenadas. Note que se

$$(4) \quad v = a \cdot e_1 + b \cdot e_2,$$

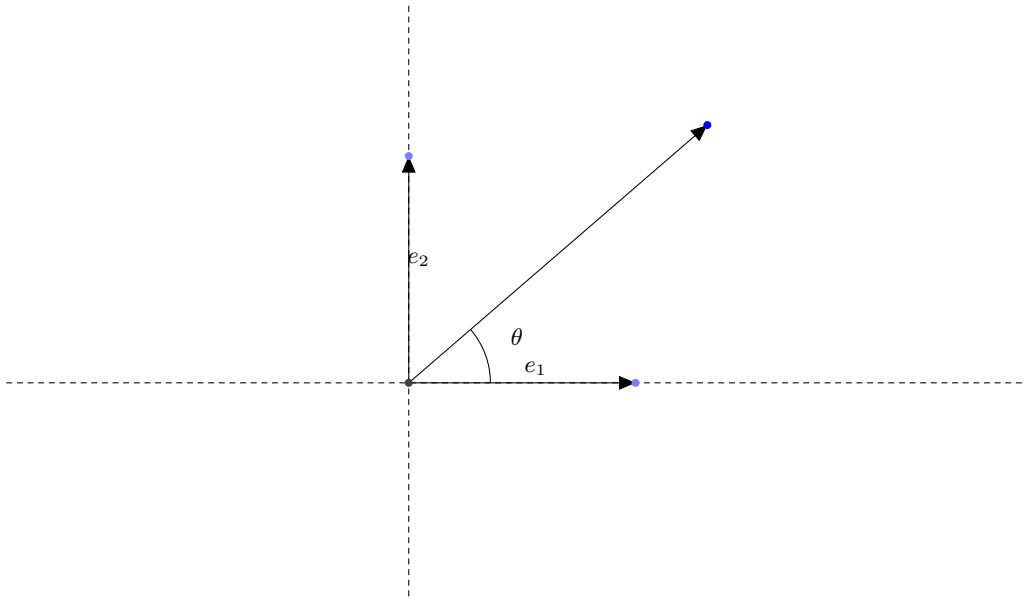


FIGURA 1. Projeções de um vetor em uma base

então segue de (3) que

$$(a \cdot e_1 + b \cdot e_2) - (\|v\| \cos \theta) \cdot e_1 + (\|v\| \sin \theta) \cdot e_2 = 0;$$

isto é,

$$(a - \|v\| \cos \theta) \cdot e_1 + (b - \|v\| \sin \theta) \cdot e_2 = 0;$$

ou ainda

$$(a - \|v\| \cos \theta) \cdot e_1 = -(b - \|v\| \sin \theta) \cdot e_2.$$

Como os vetores e_1 e e_2 não são colineares, esta última equação só é possível se

$$a - \|v\| \cos \theta = 0 \text{ e } b - \|v\| \sin \theta = 0.$$

Concluimos, assim, que, em qualquer expressão da forma (4), teremos sempre que

$$(5) \quad \begin{aligned} a &= \|v\| \cos \theta \\ b &= \|v\| \sin \theta \end{aligned}$$

Em outras palavras, as coordenadas de v relativamente à base $\{e_1, e_2\}$ ficam completamente determinadas pela expressão (4).

Vejamos de que forma as coordenadas se comportam relativamente à soma de vetores e ao produto de um vetor por um escalar. Sejam v_1 e v_2 dois vetores do plano cujas coordenadas são

$$v_1 = (a_1, b_1) \text{ e } v_2 = (a_2, b_2).$$

Note que não explicitamos as coordenadas em termos do comprimento do vetor e do ângulo que forma com e_1 : só faremos isto quando for realmente necessário. Em geral, as coordenadas serão consideradas apenas como o par de números que representam os comprimentos das projeções de v sobre e_1 e e_2 , respectivamente. Pela definição de coordenadas, temos que

$$v_1 = a_1 e_1 + b_1 e_2 \text{ e } v_2 = a_2 e_1 + b_2 e_2.$$

Pela associatividades da adição de vetores

$$v_1 + v_2 = a_1 e_1 + a_2 e_1 + b_1 e_2 + b_2 e_2;$$

que pelas propriedades do produto por escalar, podemos reescrever como

$$v_1 + v_2 = (a_1 + a_2) e_1 + (b_1 + b_2) e_2.$$

Logo, a $v_1 + v_2$ corresponde o par de coordenadas

$$(a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Um argumento semelhante mostra que se λ é um número real, então

$$\lambda \cdot v_1 = (\lambda a_1, \lambda b_1).$$

É costumeiro resumir isto dizendo-se que a adição de vetores e a multiplicação de um vetor por um escalar são feitas “coordenada a coordenada”.

Agora que sabemos escrever vetores usando coordenadas, podemos responder à pergunta formulada ao final do artigo anterior: qual a relação entre a equação vetorial e a equação cartesiana $y = ax + b$ da reta? Lembre-se que esta última equação estabelece a relação entre abscissa e ordenada de um ponto qualquer da reta. Identificando o ponto (x, y) com a extremidade de um vetor e usando a relação $y = ax + b$, temos que

$$(x, y) = (x, ax + b).$$

Apelando para as operações com vetores, podemos reescrever esta igualdade na forma

$$(x, y) = x(1, a) + (0, b).$$

Como x pode assumir qualquer valor real, podemos interpretá-lo como parâmetro. Assim, $y = ax + b$ é a reta que, passando pela extremidade do vetor $u_0 = (0, b)$, tem vetor diretor igual a $u = (1, a)$, de modo que sua equação vetorial é $u_0 + \lambda u$.

E se a equação vetorial de uma reta r for dada, como obtemos a e b , de modo que $y = ax + b$ represente a mesma reta? Suponhamos que $u_0 + \lambda u$ seja a equação vetorial de r e que as coordenadas de u e u_0 sejam

$$u_0 = (\alpha_0, \beta_0) \text{ e } u = (\alpha, \beta).$$

Dado um vetor qualquer $v = (x, y)$, com extremidade em r , temos que

$$(x, y) = v = u_0 + \lambda u = (\alpha_0, \beta_0) + \lambda(\alpha, \beta);$$

donde podemos concluir que

$$(x, y) = (\alpha_0 + \lambda\alpha, \beta_0 + \lambda\beta);$$

ou ainda, que

$$\begin{aligned} x &= \alpha_0 + \lambda\alpha; \\ y &= \beta_0 + \lambda\beta; \end{aligned}$$

que são conhecidas como *equações paramétricas da reta r*. Supondo que $\alpha \neq 0$, podemos explicitar o valor de λ da primeira equação na forma

$$\lambda = \frac{x - \alpha_0}{\alpha}.$$

Substituindo na segunda equação, obtemos

$$y = \beta_0 + \left(\frac{x - \alpha_0}{\alpha} \right) \beta;$$

que pode ser reescrita na forma

$$y = \frac{\alpha\beta_0 - \alpha_0\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}x;$$

que é a equação da reta na forma usual. Como, para chegar a esta resposta, supusemos que $\alpha \neq 0$, resta descobrir o que ocorre se $\alpha = 0$. Neste caso, as equações paramétricas serão

$$\begin{aligned} x &= \alpha_0; \\ y &= \beta_0 + \lambda\beta. \end{aligned}$$

Como a abscissa está fixa, esta é a reta vertical que corta o eixo x no ponto $(\alpha_0, 0)$. Acontece que a equação de uma reta vertical não pode ser escrita na forma $y = ax + b$. De fato, a equação da reta r acima é simplesmente $x = \alpha_0$.

1.3. Produto interno. Em física aprendemos que o *produto interno* ou *produto escalar* entre dois vetores v_1 e v_2 do plano é definido como sendo o número

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = \|v_1\| \|v_2\| \cos \theta;$$

em que θ é o menor ângulo entre os vetores v_1 e v_2 . Se $\{e_1, e_2\}$ é uma base do plano formada por vetores unitários perpendiculares entre si, de que maneira podemos expressar $\langle v_1 | v_2 \rangle$ em função das coordenadas de u e v relativas a esta base?

Para isto precisamos relacionar o ângulo θ aos ângulos que v_1 e v_2 formam com o vetor e_1 , e que são usados para determinar suas coordenadas. Chamando de α e β os ângulos entre e_1 e os vetores u e v , respectivamente, temos da figura que $\theta = \beta - \alpha$. Portanto,

$$\cos(\theta) = \cos(\beta - \alpha) = \cos(\beta) \cos(\alpha) + \sin(\beta) \sin(\alpha),$$

de modo que

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = \|v_1\| \cos(\beta) \|v_2\| \cos(\alpha) + \|v_1\| \sin(\beta) \|v_2\| \sin(\alpha).$$

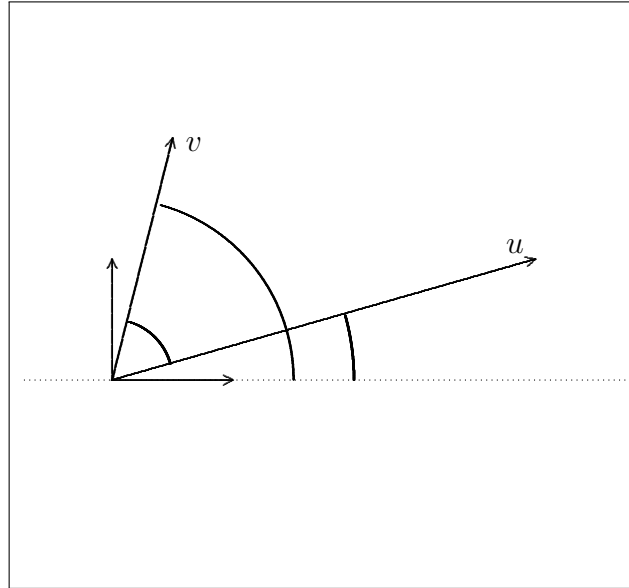


FIGURA 2. Produto interno

Denotando por (a_1, b_1) as coordenadas de v_1 e por (a_2, b_2) as coordenadas de v_2 , temos de (5) que

$$(6) \quad \langle v_1 | v_2 \rangle = a_1 a_2 + b_1 b_2.$$

Esta expressão do produto interno é muito conveniente. Por exemplo, a partir dela podemos provar facilmente as seguintes propriedades:

- (1) $\langle u | v_1 + v_2 \rangle = \langle u | v_1 \rangle + \langle u | v_2 \rangle$;
- (2) $\langle v_1 | \lambda v_2 \rangle = \lambda \langle v_1 | v_2 \rangle$;
- (3) $\langle v_1 | v_2 \rangle = \langle v_2 | v_1 \rangle$;
- (4) $\langle u | u \rangle \geq 0$;
- (5) $\langle u | u \rangle = 0$ se, e somente se, $u = 0$;

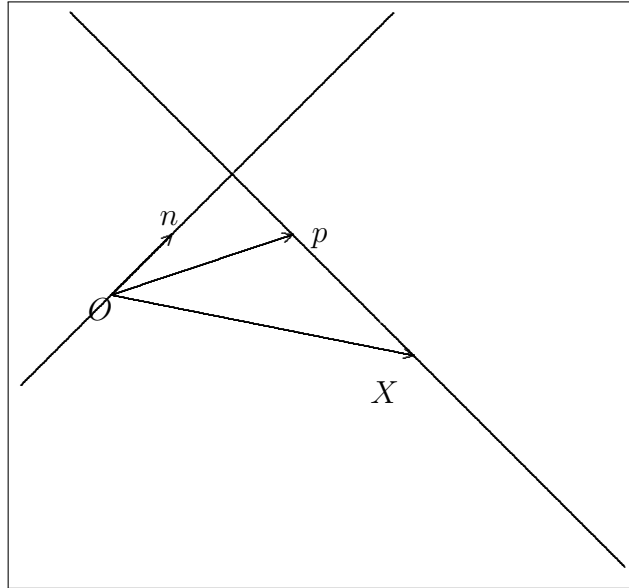
quaisquer que sejam os vetores u , v_1 e v_2 do plano e o escalar λ . Note que a propriedade (3) implica que valem os análogos de (1) e (2) com a operação sendo efetuada na primeira coordenada e a segunda coordenada estando fixa.

Finalmente, a expressão (6) também nos permite interpretar geometricamente a equação geral da reta, que tem a forma

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

em que α , β e γ são constantes. Começaremos considerando o caso especial em que $\gamma = 0$. Sejam n e v os vetores cujas coordenadas relativamente à base $\{e_1, e_2\}$ são

$$n = (\alpha, \beta) \text{ e } v = (x, y).$$



Por (6) temos que

$$\langle n | v \rangle = \alpha x + \beta y.$$

Portanto,

v pertence à reta de equação $\alpha x + \beta y = 0$ se, e somente se $\langle n | v \rangle = 0$.

Em outras palavras,

v pertence à reta de equação $\alpha x + \beta y = 0$ se, e somente se v é perpendicular ao vetor fixo n .

Note que esta reta contém a origem, que não está contida na reta de equação $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, quando $\gamma \neq 0$. Neste caso, como mostra a figura 1.3, não é o vetor v que é perpendicular ao vetor normal n , mas sim a diferença $v - p$, em que p corresponde a um vetor fixo com extremidade sobre a reta.

Portanto, a equação de uma reta geral pode ser escrita na forma

$$\langle n | (v - p) \rangle = 0;$$

que, pelas propriedades do produto interno, pode ser reescrita na forma

$$\langle n | v \rangle = \langle n | p \rangle.$$

Já vimos que o lado esquerdo desta expressão é igual a $\alpha x + \beta y$, logo

$$\gamma = -\langle n | p \rangle,$$

que é mesmo um constante, uma vez que n e p estão fixos.

2. Transformações lineares

Até aqui podemos esticar ou encolher um vetor, multiplicando-o por um escalar, ou somar dois vetores; mas há muitas outras coisas que podemos fazer a um vetor, como rodá-lo, ou refleti-lo relativamente a uma reta. O que não podemos fazer é entortá-lo, porque assim deixaria de ser um vetor. Além disso, como todos os vetores partem da origem, este ponto tem que ficar fixo por qualquer transformação de vetores. Vejamos alguns exemplos.

2.1. Projeções. Começaremos pelas projeções, porque já vimos como calculá-las. Seja u um vetor *unitário* e v um vetor qualquer do plano. Por (2), a projeção de v em u é dada por

$$\text{Proj}_u(v) = (\|v\| \cos(\theta)) \cdot u,$$

em que θ é o ângulo entre u e v . Podemos usar o produto interno para reescrever esta fórmula como

$$\text{Proj}_u(v) = \langle u | v \rangle \cdot u,$$

uma vez que u tem módulo um. Disto obtemos, com muito pouco esforço, uma fórmula para a projeção em termos das coordenadas de u e de v . De fato, se

$$u = (a, b) \text{ e } v = (x, y),$$

então

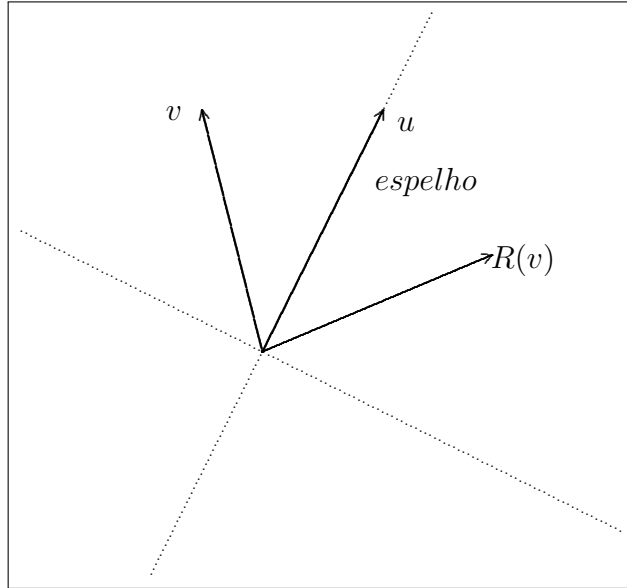
$$\text{Proj}_u(v) = ((ax + by)a, (ax + by)b) = (a^2x + aby, abx + b^2y).$$

2.2. Reflexões. As reflexões podem ser tratadas de maneira semelhante às projeções. Chamaremos de *espelho* à reta em torno do qual será realizada a reflexão e cujo vetor diretor *unitário* denotaremos por u . Já n será um vetor, também unitário, perpendicular a u . No plano, uma vez fixado u , só há duas possibilidades para n . Afinal o módulo de n está fixo, pois é igual a um, e sua direção também, já que está sobre a reta perpendicular ao espelho. Resta escolher seu sentido, para o qual temos apenas duas possibilidades. Observe que os vetores u e n formam uma base do plano, de acordo com a definição do artigo 1.2, pois são unitários e perpendiculares entre si. Portanto, se v for um vetor do plano e $R(v)$ seu reflexo relativamente ao espelho de vetor diretor u , temos que

$$R(v) = \text{Proj}_u(R(v)) + \text{Proj}_n(R(v)).$$

Resta-nos determinar as projeções de $R(v)$ sobre u e n em termos das coordenadas de v nesta base. Para isto faremos uso da descrição geométrica usual de uma reflexão.

Para começar, um vetor v e seu reflexo $R(v)$ têm ambos o mesmo módulo. Além disso, o ângulo que o vetor v forma com o espelho é o mesmo entre $R(v)$ e o espelho. A diferença é que v está de um lado do espelho, ao passo que $R(v)$ está do outro lado, como ilustra a figura 2.2.



O ponto crucial para determinar uma fórmula para o reflexo $R(v)$ de um vetor v é observar que as projeções de v e $R(v)$ sobre a u satisfazem

$$\text{Proj}_u(R(v)) = \text{Proj}_u(v).$$

ao passo que as projeções sobre a normal n satisfazem,

$$\text{Proj}_n(R(v)) = -\text{Proj}_n(v).$$

Logo,

$$R(v) = \text{Proj}_u(v) - \text{Proj}_n(v) = v - 2\text{Proj}_n(v).$$

Representando a projeção sobre n em termos do produto interno, como no artigo anterior, temos que

$$\text{Proj}_n(R(v)) = \langle n | v \rangle \cdot n,$$

donde

$$(7) \quad R(v) = v - 2\langle n | v \rangle \cdot n.$$

Encerraremos este artigo determinando uma fórmula para $R(v)$ em função das coordenadas de v . A maneira mais fácil de fazer isto consiste em usar a base $\{u, n\}$ ao descrever as coordenadas dos vetores. Afinal, relativamente a esta base, u tem coordenadas $(1, 0)$ e n tem coordenadas $(0, 1)$, pois

$$u = 1 \cdot u + 0 \cdot n \text{ e } n = 0 \cdot u + 1 \cdot n.$$

Supondo que v tem coordenadas (x, y) relativamente a esta mesma base, uma aplicação direta da fórmula (7) nos dá

$$R(x, y) = (x, y) - 2y(0, 1) = (x, -y);$$

como seria de esperar da descrição geométrica. O problema é que ao usar $\{u, n\}$ como base estamos criando uma situação um pouco artificial. Na prática, os vetores u e v são dados em termos de suas coordenadas relativamente a uma base pré-fixada do plano, e não vice-versa. Portanto, tendo em vista futuras aplicações, convém determinar como seria a fórmula da reflexão em termos das coordenadas dos vetores relativamente a uma base qualquer.

Para isto suporemos que uma base $\{e_1, e_2\}$ foi fixada e que u tem coordenadas (a, b) relativamente a esta base. Mas o produto interno de u com o vetor de coordenadas $(-b, a)$ é igual a zero e, além disso

$$\|u\| = \sqrt{a^2 + b^2} = \|n\|,$$

de modo que se u for unitário o mesmo terá que ser verdadeiro para n . Portanto, podemos escolher

$$n = (-b, a),$$

Escrevendo $v = (x, y)$, a fórmula da reflexão obtida acima nos diz que

$$R(v) = (x, y) - 2(ay - bx) \cdot (-b, a);$$

isto é,

$$R(v) = ((1 - 2b^2)x + 2aby, 2abx + (1 - 2a^2)y).$$

2.3. Rotação. Passando à rotação, digamos que ρ_θ seja a transformação que roda um vetor v de um ângulo θ no sentido anti-horário. Mais uma vez, nosso objetivo consiste em escrever uma fórmula para esta transformação em termos das coordenadas de um vetor v relativamente a uma base $\{e_1, e_2\}$ formada por vetores unitários e perpendiculares entre si.

Como já se tornou usual, diremos que as coordenadas de v são (x, y) . A fórmula (5) nos permite afirmar que

$$x = \|v\| \cos \alpha$$

$$y = \|v\| \sin \alpha$$

em que α é o ângulo entre v e o vetor e_1 . Tendo expresso x e y desta maneira, fica fácil determinar as coordenadas de $\rho_\theta(v)$. Afinal, ao rodar v de um ângulo θ no sentido anti-horário, o ângulo entre v e e_1 aumenta de α para $\alpha + \theta$. Isto é, as coordenadas de $\rho_\theta(v)$ serão

$$(\|v\| \cos(\alpha + \theta), \|v\| \sin(\alpha + \theta)).$$

Para explicitar a relação entre estas coordenadas e as coordenadas x e y de v , usamos duas bem conhecidas fórmulas de trigonometria

$$\sin(\alpha + \theta) = \sin(\alpha) \cos(\theta) + \sin(\theta) \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha + \theta) = \cos(\alpha) \cos(\theta) - \sin(\theta) \sin(\alpha).$$

Multiplicando estas expressões por $\|v\|$ e substituindo $\|v\| \cos \alpha$ por x e $\|v\| \sin \alpha$ por y , obtemos

$$\rho_\theta(x, y) = (\cos(\theta)x - \sin(\theta)y, \sin(\theta)x + \cos(\theta)y),$$

que é a fórmula desejada.

2.4. Transformações lineares. Uma coisa que transparece das fórmulas obtidas para projeções, reflexões e rotações é que as coordenadas são sempre expressões lineares sem termo constante, nas coordenadas x e y do argumento v . As transformações com esta propriedade são tão abundantes nas ciências naturais, e tão importantes no estudo dos vetores, que merecem uma designação à parte.

Seja T uma transformação (ou aplicação) do plano nele mesmo e fixemos uma base do plano. Diremos que T é uma *transformação linear do plano* se existirem constantes a, b, c e d de modo que a imagem de qualquer vetor v pode ser escrita na forma

$$T(v) = (ax + by, cx + dy) \text{ sempre que } v = (x, y).$$

A origem do uso do adjetivo linear para designar tais transformações é claro: as coordenadas do vetor imagem são, de fato, expressões lineares em x e y . Observe que excluímos a possibilidade de termos constantes nesta expressão desde o começo, porque decidimos de partida que a imagem do vetor zero por T teria que ser o mesmo vetor zero, já que todos os vetores partem de um mesmo ponto.

As transformações lineares do plano têm três propriedades importantes. Se v_1 e v_2 são dois vetores quaisquer do plano e $\lambda \in \mathbb{R}$, então:

- (1) $T(0) = 0$;
- (2) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$;
- (3) $T(\lambda v_1) = \lambda T(v_1)$.

A propriedade (1) é óbvia; provaremos a segunda e deixaremos a terceira aos seus cuidados. Suponhamos que v_1 e v_2 têm coordenadas

$$v_1 = (x_1, y_1) \text{ e } v_2 = (x_2, y_2),$$

relativamente à base fixada. Neste caso,

$$v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$

de modo que

$$T(v_1 + v_2) = (a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2), c(x_1 + x_2) + d(y_1 + y_2)).$$

Mas o lado direito da equação acima é igual a

$$((ax_1 + by_1) + (ax_2 + by_2), (cx_1 + dy_1) + (cx_2 + dy_2))$$

que é igual à soma de vetores,

$$(ax_1 + by_1, cx_1 + dy_1) + (ax_2 + by_2, cx_2 + dy_2);$$

isto é, a $T(v_1) + T(v_2)$, provando assim a propriedade desejada.

Na verdade, qualquer aplicação do plano nele mesmo que satisfaz estas três propriedades tem que ser uma transformação linear. A verificação é simples e muito importante para a caracterização final que daremos a estas transformações, por isso vamos fazê-la em detalhes. Para deixar bem claro o que queremos fazer, convém enunciá-lo de maneira bastante precisa:

se uma transformação T do plano satisfaz as propriedades (1), (2) e (3) acima então existem constantes a, b, c e d de modo que $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$;

em que a escolha das coordenadas naturalmente pressupõe que fixamos uma base do plano. Começaremos supondo v é um vetor do plano cujas coordenadas relativamente à base fixada são (x, y) . Por definição, isto significa que, se a base for constituída pelos vetores e_1 e e_2 , então

$$v = xe_1 + ye_2.$$

Portanto,

$$T(v) = T(xe_1 + ye_2).$$

Usando as propriedades (2) e (3) o lado direito desta última equação pode ser escrito na forma

$$T(v) = xT(e_1) + yT(e_2).$$

Mas, tanto $T(e_1)$ como $T(e_2)$ são vetores do plano e, como tais, podem ser escritos em termos de suas coordenadas na base $\{e_1, e_2\}$. Se

$$T(e_1) = ae_1 + ce_2 \text{ e que } T(e_2) = be_1 + de_2,$$

então

$$T(v) = x(ae_1 + ce_2) + y(be_1 + de_2) = (ax + by)e_1 + (cx + dy)e_2.$$

Podemos reformular isto diretamente em termos das coordenadas como

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy),$$

que é a fórmula que desejávamos obter. Observe que, como os vetores e_1 e e_2 estão fixados, os números reais a, b, c e d dependem apenas de T e não das coordenadas de v . Na verdade, descobrimos o que estes quatro números representam: são as coordenadas de $T(e_1)$ e $T(e_2)$. Voltaremos a usar isto no artigo 2.6. Convém resumir o que fizemos acima para uso futuro.

PROPOSIÇÃO 2.1. *Seja T uma aplicação do plano no plano e fixemos uma base do plano em relação à qual tomaremos todas as coordenadas dos vetores. As seguintes condições são equivalentes:*

- T satisfaz as propriedades (1), (2) e (3) acima;
- $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ em que $T(e_1) = (a, c)$ e $T(e_2) = (b, d)$.

2.5. Combinando transformações lineares. Duas transformações lineares do plano podem ser somadas ou compostas, disto resultando uma nova transformação linear do plano. Se S e T são transformações lineares do plano, então definimos sua soma como sendo a aplicação $S + T$ definida em um vetor v por

$$(S + T)(v) = S(v) + T(v),$$

ao passo que sua composição $S \circ T$ é definida por

$$(S \circ T)(v) = S(T(v)).$$

Note que $S \circ T$ e $T \circ S$ representam transformações que podem ser diferentes, ao passo que $S + T$ e $T + S$ sempre designam a mesma transformação, porque a soma de vetores é comutativa.

Verificaremos com cuidado que tanto $S+T$ quanto $S \circ T$ são transformações lineares. A maneira mais fácil seria provar que estas transformações satisfazem as propriedades (1), (2) e (3) do artigo anterior. Pela proposição 2.1 isto garantiria que se tratam de transformações lineares. Em vez disso, vamos deduzir uma fórmula em termos de coordenadas para $S + T$ e $S \circ T$, a partir das respectivas fórmulas para S e T . Procederemos assim porque estas fórmulas serão necessárias no artigo seguinte.

Supondo fixada uma base do plano, digamos que

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy) \text{ e que } S(x, y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y),$$

em que $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ são constantes. Por definição,

$$(S + T)(x, y) = S(x, y) + T(x, y),$$

que é igual a

$$(ax + by, cx + dy) + (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y);$$

somando os vetores, concluímos que

$$(S + T)(x, y) = ((a + \alpha)x + (b + \beta)y, (c + \gamma)x + (d + \delta)y).$$

A fórmula resultante é muito fácil de lembrar, porque apenas somamos os coeficientes de x e y em cada coordenada do vetor imagem. A fórmula da composta, infelizmente, está longe de ser tão simples. Partindo da definição temos que

$$(S \circ T)(x, y) = S(T(x, y)) = S(ax + by, cx + dy);$$

a que aplicamos a fórmula para S , obtendo

$$(S \circ T)(x, y) = (\alpha(ax + by) + \beta(cx + dy), \gamma(ax + by) + \delta(cx + dy)).$$

Reagrupando os termos,

$$(S \circ T)(x, y) = ((\alpha a + \beta c)x + (\alpha b + \beta d)y, (\gamma a + \delta c)x + (\gamma b + \delta d)y),$$

que é bem menos fácil de lembrar do que a anterior. Imagine se, ao invés de compor duas funções, precisássemos compor três ou quatro: uma rotação, seguida de uma reflexão, de

uma nova rotação e finalmente uma projeção. Problemas como este ocorrem frequentemente na prática e levaram Arthur Cayley, no século XIX, a procurar uma maneira sucinta de resolvê-los. Para isto ele inventou as matrizes.

2.6. Matriz de uma transformação linear. A ideia de Cayley é que, uma vez fixada uma base do plano, uma transformação linear fica completamente determinada por quatro números: os coeficientes de x e y nas expressões que definem as coordenadas de $T(x, y)$. Quando

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy),$$

os números são a, b, c e d . Mas isto significa que, para fazer cálculos com T basta conhecer estes números e descobrir como se transformam sob estes cálculos. Para tornar tudo mais transparente, Cayley resolveu dispor estes números em um quadro,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

e assim foram inventadas as matrizes. Como sempre, este resumo histórico não representa o que realmente aconteceu. A disposição em forma de quadro já era usada desde o século XVIII para denotar determinantes, e o nome matriz foi usado por Sylvester antes mesmo do primeiro artigo do Cayley sobre o assunto; para mais detalhes, consulte [1, p. 171]. Como a matriz de uma transformação linear depende completamente da base do plano que foi escolhida e fixada, denotaremos a matriz de T escrita acima por $(T)_\varepsilon$, em que $\varepsilon = \{e_1, e_2\}$ é a base na qual estamos escrevendo as coordenadas dos vetores do plano.

Usando esta notação e as expressões para a projeção, reflexão e rotação em termos das coordenadas dos vetores, podemos facilmente determinar as matrizes correspondentes a estas transformações lineares, que são

$$(\text{Proj}_u)_\varepsilon = \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix} \text{ e } (R)_\varepsilon = \begin{bmatrix} (1 - 2b^2) & -2ab \\ -2ab & (1 - 2a^2) \end{bmatrix}$$

em que (a, b) são as coordenadas do vetor unitário u e

$$(\rho_\theta)_\varepsilon = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

para a rotação anti-horária de um ângulo θ . Na verdade, no caso da projeção e da reflexão, a matriz pode ser expressa de maneira ainda mais compacta usando as operações com matrizes, como veremos no artigo 2.7. Enquanto isto, vamos nos contentar em descrever explicitamente as matrizes correspondentes à soma e à composição de dois operadores.

Para isto, considere duas transformações lineares T e S do plano, definidas em uma base ε por

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy) \text{ e } S(x, y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y).$$

Pela regra criada por Cayley as matrizes correspondentes na base ε serão

$$(T)_\varepsilon = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e } (S)_\varepsilon = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Usando as fórmulas para $S + T$ e $S \circ T$ obtidas no artigo anterior, temos que

$$(S + T)_\varepsilon = \begin{bmatrix} a + \alpha & b + \beta \\ c + \gamma & d + \delta \end{bmatrix} \text{ ao passo que } (S \circ T)_\varepsilon = \begin{bmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{bmatrix}.$$

Cayley deu, então, um passo à frente; ele utilizou estas fórmulas para definir a adição e a multiplicação das próprias matrizes, de modo que

$$(T)_\varepsilon + (S)_\varepsilon = (S + T)_\varepsilon \text{ e } (S)_\varepsilon \cdot (T)_\varepsilon = (S \circ T)_\varepsilon$$

Abstraindo completamente das transformações, obtemos desta forma as operações usuais com matrizes: a soma, definida entrada a entrada, e a multiplicação, definida pela regra

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{bmatrix}.$$

Portanto, a regra para multiplicação de matrizes, à primeira vista tão artificial, é obtida coletando os coeficientes de x e y na fórmula resultante da composição de duas transformações lineares.

2.7. Matrizes retangulares. Ainda que você tenha se convencido de que as matrizes quadradas 2×2 possam ser úteis na representação de transformações lineares do plano, talvez você esteja se perguntando se matrizes retangulares não são fruto da obsessão dos matemáticos em generalizar tudo o que pode ser generalizado. Apesar de ter todo o resto deste livro para lhe convencer de que não é este o caso, não custa dar alguns exemplos relacionados aos vetores do plano e suas transformações lineares.

Para começar, podemos considerar um vetor do plano como sendo uma matriz. À primeira vista o natural seria descrever um vetor como sendo uma matriz 1×2 , mas a verdade é que é melhor identificar um vetor (a, b) com a matriz

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

de tamanho 2×1 , também conhecida como *matriz coluna*. A razão para esta escolha um tanto bizarra logo ficará clara. O fato é que, somando vetores, ou as matrizes que lhes correspondem, obtemos o mesmo resultado. Mais precisamente,

a matriz coluna correspondente à soma dos vetores u com v é igual à soma das matrizes coluna correspondentes a u e v , e o mesmo pode ser dito sobre o produto de um vetor por um escalar.

Por isso, de agora em diante, consideraremos vetores do plano como sendo matrizes 2×1 sempre que isto for conveniente. Supondo que é este o caso para os vetores u e v , podemos descrever seu produto escalar, a partir do produto de matrizes, por

$$(8) \quad \langle u | v \rangle = u^t \cdot v.$$

Note que convertimos o vetor coluna u em um vetor linha tomando a sua transposta, para que fosse possível efetuar a multiplicação desejada.

Passando às transformações lineares do plano, vimos que se T é definida, na base ε , por

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

então a matriz a ela associada é

$$(T)_\varepsilon = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

No entanto, um cálculo simples mostra que se o vetor v tem coordenadas

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

na mesma base ε , então as coordenadas de Tv nesta mesma base serão

$$Tv = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Com isto podemos explicar porque escolhemos representar vetores como matrizes colunas e não linhas. Lembre-se que a uma transformação linear do plano fizemos corresponder uma matriz 2×2 . Vetores escritos como matrizes linha têm tamanho 1×2 o que nos obrigaria a multiplicá-los à esquerda das matrizes que designam as transformações. Mas isto produz um conflito com a convenção de que o argumento de uma transformação sempre aparece à direita do símbolo que a denota; assim Tv , e não vT . Para evitar a confusão que resultaria da permutação dos lados entre duas fórmulas que representam exatamente o mesmo fato, preferimos escrever os vetores como colunas, em vez de linhas.

Mais interessante ainda são as expressões para as matrizes das projeções e reflexões que obtemos combinando a multiplicação e a transposição. Por exemplo, vimos no artigo 2.1 que a projeção de um vetor v qualquer sobre um vetor unitário u é dada por

$$\text{Proj}_u(v) = \langle u | v \rangle \cdot u,$$

que (8) nos permite reescrever na forma

$$\text{Proj}_u(v) = (u^t \cdot v) \cdot u.$$

Como $u^t \cdot v$ é um escalar, esta fórmula é igual a

$$\text{Proj}_u(v) = u \cdot (u^t \cdot v).$$

Donde, pelas propriedades do produto de matrizes, obtemos

$$\text{Proj}_u(v) = (u \cdot u^t) \cdot v.$$

Portanto, a matriz que descreve a projeção de v em u é igual ao produto $u \cdot u^t$. De fato, supondo que $u = [a, b]^t$ e efetuando o produto, chegamos à mesma matriz que havíamos obtido na equação (8).

Por outro lado, como vimos no artigo 2.2, a reflexão do vetor v relativamente à reta pela origem de vetor unitário normal n é igual a

$$R(v) = v - 2 \text{Proj}_n(v).$$

Aplicando a fórmula matricial obtida acima a $\text{Proj}_n(v)$, obtemos

$$R(v) = v - 2nn^t v.$$

A presença do v em ambas as parcelas sugere pô-lo em evidência. No entanto, $(1 - 2nn^t)v$ não faz sentido. De fato, duas matrizes só podem ser somadas se têm a mesma dimensão. Contudo, mesmo considerando o escalar 1 como uma matriz 1×1 , não podemos somá-lo à matriz nn^t , que tem tamanho 2×2 . Felizmente há uma saída simples, basta considerar v como sendo o produto $I \cdot v$, em que I é a matriz identidade 2×2 . Fazendo isto, obtemos

$$R(v) = (I - 2nn^t)v.$$

Mais uma vez, se n tem coordenadas $(b, -a)$ na base ε , um cálculo elementar mostra que $I - 2nn^t$ coincide com a matriz de reflexão encontrada no artigo 2.2. Obtivemos, assim, fórmulas muito compactas para a projeção e reflexão no plano usando a multiplicação de matrizes não quadradas.

2.8. Transformações inversíveis e transformações ortogonais. Muitas das transformações que estudaremos podem ser desfeitas; isto é, admitem uma transformação inversa. Sejam S e T transformação do plano. Dizemos que S é a inversa de T se

$$S \circ T = T \circ S = \text{id},$$

em que id é a transformação identidade do plano. Fixando uma base, a fórmula acima pode ser reescrita na forma

$$(S)_\varepsilon(T)_\varepsilon = (T)_\varepsilon(S)_\varepsilon = I,$$

em que I é a matriz identidade 2×2 . Em outras palavras,

a transformação S é a inversa da transformação T se, e somente se, a matriz de S é a inversa da matriz de T ;

desde que ambas as matrizes estejam expressas relativamente a uma mesma base do plano. Sempre que for conveniente denotaremos a inversa de uma transformação T por T^{-1} .

Muitas das transformações que estudamos anteriormente admitem inversas. Este é o caso, por exemplo, das reflexões e das rotações. Das propriedades geométricas da reflexão vemos que deve ser sua própria inversa, ao passo que a inversa de uma rotação anti-horária de ângulo θ é a rotação horária de mesmo ângulo. Denotando por R a reflexão e por ρ_θ a rotação, temos que

$$(R)^{-1} = (R) \text{ e que } \rho_\theta = \rho_{(-\theta)} = \rho_{2\pi-\theta}.$$

Fixando uma base ε do plano, verificamos que, em ambos os casos a inversa da transformação coincide com a sua transposta. De fato, $(R)_\varepsilon^t = (R)_\varepsilon$; ao passo que se

$$(\rho_\theta)_\varepsilon = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

então

$$(\rho_\theta)_\varepsilon^t = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = (\rho_{(-\theta)})_\varepsilon = (\rho_\theta)_\varepsilon^{-1},$$

pois o cosseno é uma função par, ao passo que o seno é ímpar. Dizemos que uma matriz é *ortogonal* se é inversível, e sua inversa coincide com sua transposta; uma transformação do plano cuja matriz é ortogonal também é chamada de ortogonal.

3. As cônicas

Chamam-se *cônicas* as curvas que podem ser obtidas intersectando-se um cone com um plano que não contém o vértice do cone. Para construir um cone, precisamos de uma circunferência C contida em um plano P e de um ponto V , que *não* pertence a P , e que desempenhará o papel de vértice do cone. A reta que contém V e o centro da circunferência é o *eixo* do cone. Suporemos, para simplificar, que o cone seja *reto*; isto é, que o eixo é perpendicular a P . As retas que unem o vértice V aos pontos da circunferência são chamadas de *geratrizes* do cone. São os pontos das geratrizes que constituem a superfície do cone. Note que estamos considerando a superfície do cone como sendo formada por pontos que pertencem a retas e não a segmentos de retas. Em outras palavras, os cones que estamos considerando são infinitos em duas direções. Desta construção segue-se, imediatamente, que uma circunferência é uma cônica, já que a interseção do cone com P consiste apenas da circunferência C .

3.1. Elipse, hipérbole e parábola. Diante do que vimos acima, pode-se arguir que as propriedades de pelo menos uma cônica—a circunferência—vem sendo estudada pelo menos desde os primórdios da civilização, no Egito e na Mesopotâmia. Entretanto, foram os gregos os primeiros a subdividir as cônicas em três tipos e a considerá-las como parte de uma família de curvas obtidas a partir de um único cone.

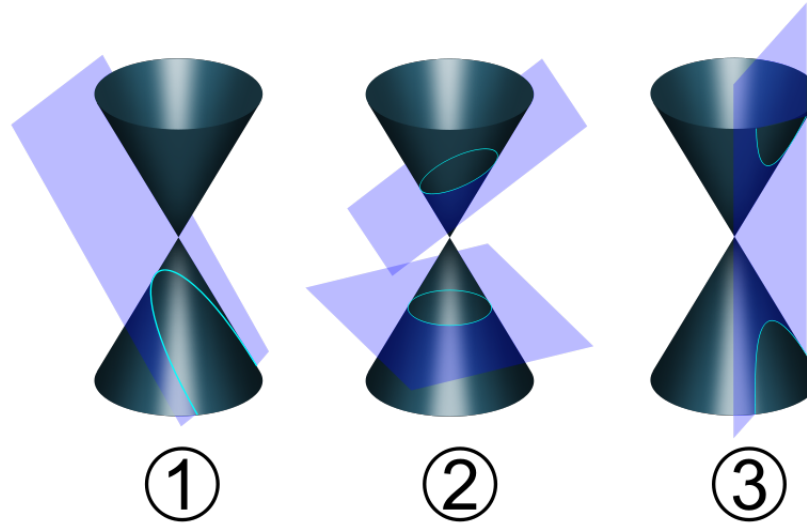


FIGURA 3. Parábola, elipse e hipérbole

Os vários tipos de cônicas estão relacionados à posição relativa entre o plano e o cone usados em sua construção. Se o plano cortar o eixo e todas as geratrizes, temos uma *elipse*; já se o plano for paralelo ao eixo, temos uma *hipérbole*, e se for paralelo a uma geratriz, uma *parábola*. Note que a circunferência é um exemplo particular de elipse.

Já que as cônicas são, por construção, curvas planas, não demorou muito até que os gregos procurassem maneiras de defini-las sem menção alguma a um cone. Isto os levou a definir estas curvas como *lugares geométricos*, que é o nome dado aos conjuntos de pontos com uma propriedade em comum. Para definir a elipse e da hipérbole, começamos fixando dois pontos F_1 e F_2 do plano, que chamaremos de *focos*. Seja ℓ um número real maior que a distância entre os focos. A *elipse* é, então, facilmente definida como o conjunto dos pontos para os quais a soma de suas distâncias a F_1 e F_2 é ℓ . Para podermos escrever uma equação vetorial para elipse, identificaremos cada ponto do plano com a extremidade do vetor que o liga a um ponto fixo O , tomado como origem. Neste caso, um ponto P do plano pertence à elipse descrita acima se

$$\|P - F_1\| + \|P - F_2\| = \ell.$$

A definição da hipérbole requer um pouco mais de cuidado. Em princípio, o que queremos fazer é substituir, na definição de elipse, a soma pela diferença, ao mesmo tempo que supomos que ℓ é menor que a distância entre os focos. Contudo, como um comprimento é sempre um número positivo, isto produz duas curvas: um ponto P está em uma delas se $\|P - F_1\| - \|P - F_2\| = \ell$, e na outra se $-\|P - F_1\| + \|P - F_2\| = \ell$. Para falar a verdade, isto corresponde ao que vemos na figura 3, na qual a hipérbole é constituída de duas partes,

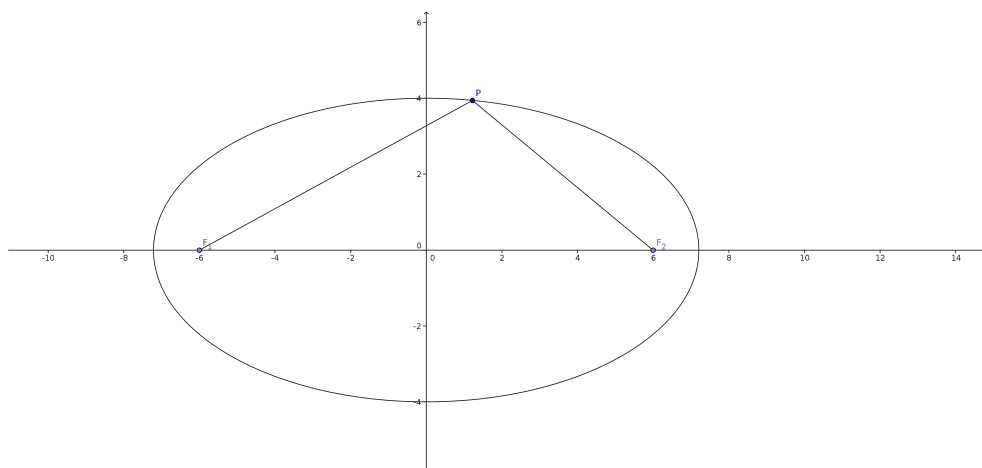


FIGURA 4. A elipse e seus focos

uma na parte do cone acima do vértice, a outra abaixo. Estas duas curvas são chamadas de *ramos* da hipérbole, que é considerada como uma única curva com dois ramos.

A definição da parábola é um pouco diferente. Em vez de três pontos do plano, fixaremos uma r reta e um ponto F que está fora da reta. A *parábola* é o conjunto dos pontos do plano que são equidistantes do ponto F e da reta r . O ponto P é conhecido como o *foco* da parábola, ao passo que a reta r é a sua *diretriz*. Um outro elemento importante é o *eixo*, que é a reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz da parábola. Como consequência da definição, temos que a parábola tem que ser simétrica relativamente ao seu eixo.

Como a equação da parábola já lhe é familiar, verificaremos que o conjunto de pontos que a definem satisfazem a equação esperada. A primeira coisa a fazer é escolher o sistema de eixos de maneira a simplificar ao máximo a tarefa de obter a equação cartesiana. Fazendo uso da simetria da curva mencionada acima, escolheremos OY como sendo o eixo da parábola e OX como sendo a reta perpendicular ao eixo que passa no vértice da parábola. Note que, pela definição da curva, o vértice da parábola estará necessariamente no ponto médio do segmento que une o foco ao ponto de interseção da diretriz com o eixo; veja figura 5. Suporemos, ainda, que o eixo OY aponta no sentido do vetor OF . Com estas escolhas, verificamos que o foco F terá coordenadas $(0, f)$, para algum número real $f > 0$, ao passo que a equação da diretriz será $y = -f$. Note que f não pode se anular, já que F não pertence a diretriz.

A principal razão para escolher os eixos desta forma é que a distância, medida ao longo da perpendicular, entre um ponto P de coordenadas (x, y) e a reta OX é igual $y + f$. Como a distância entre F e P é

$$\|PF\| = \sqrt{x^2 + (y - f)^2},$$

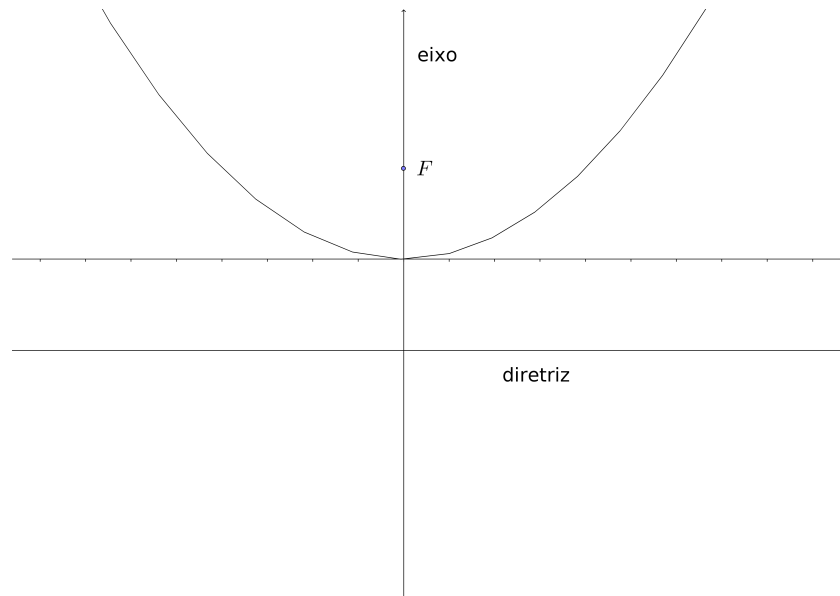


FIGURA 5. Eixo, foco e diretriz da parábola

temos que a equação da parábola será

$$y + f = \sqrt{x^2 + (y - f)^2}.$$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, obtemos

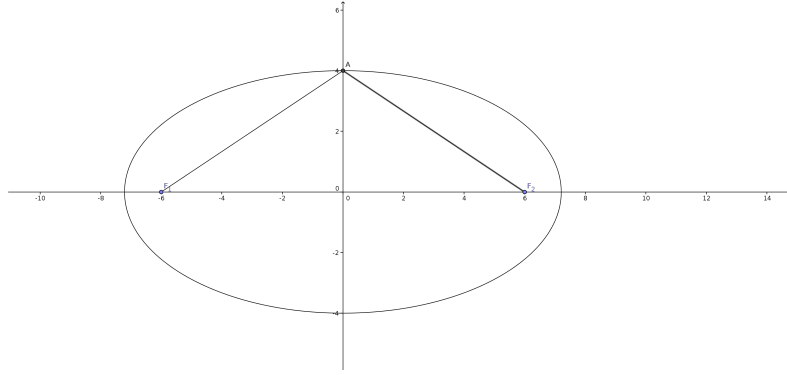
$$(y + f)^2 = x^2 + (y - f)^2.$$

Expandindo os produtos notáveis e cancelando y^2 e f^2 dos dois lados da equação

$$y = \frac{1}{4f}x^2;$$

que é a equação da parábola exatamente na forma em que você a conhece desde o ensino fundamental. Mais precisamente, mostramos que existe uma escolha de base no plano relativamente à qual uma parábola é o conjunto dos pontos (x, y) que satisfazem a equação $4fy = x^2$.

3.2. As equações. Como no caso da parábola, o segredo para obter as equações da elipse e da hipérbole em uma forma bastante simples consiste em posicionar os eixos de maneira a explorar ao máximo a simetria da figura. Mais uma vez, a experiência mostra que a melhor maneira de fazer isto é tomar o eixo OX como sendo a reta que passa pelos dois focos e tomar OY como sendo a reta perpendicular a OX no ponto médio do segmento que une os focos. Com isto, os focos F_1 e F_2 terão coordenadas $(-f, 0)$ e $(0, f)$, respectivamente. O único caso que nos interessa é aquele em que $f \neq 0$, porque se os focos coincidirem com a origem, obteremos, no caso da elipse, uma circunferência; no caso da

FIGURA 6. O triângulo isósceles F_1F_2P e o triângulo retângulo OPF_1

hipérbole, duas retas que se cortam na origem. Note, contudo, que o fato de f ter que ser diferente de zero não é usado nos cálculos que estamos prestes a fazer.

Começaremos por considerar o caso da elipse, de modo que precisamos de um número real ℓ , maior que a distância entre os focos, que é igual a $2f$. Mas, se P é um ponto de coordenadas (x, y) , então

$$\|PF_1\| = \sqrt{(x+f)^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \|PF_2\| = \sqrt{(x-f)^2 + y^2};$$

de modo que a equação da elipse será

$$(9) \quad \sqrt{(x+f)^2 + y^2} + \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = \ell.$$

Antes de podermos simplificar esta equação, há dois pontos especiais da elipse que precisamos considerar: aqueles que estão sobre os eixos OX e OY . Digamos que os pontos de interseção da elipse com o eixo OX sejam $(\pm a, 0)$, para algum número real positivo a . Neste caso, se $P = (a, 0)$, então

$$\|PF_1\| = a + f \quad \text{e} \quad \|PF_2\| = a - f,$$

de modo que

$$(10) \quad \|PF_1\| + \|PF_2\| = 2a.$$

Em outras palavras, $\ell = 2a$. Por outro lado, os pontos de interseção da elipse com o eixo OY podem ser escritos na forma $(0, \pm b)$, para algum número real positivo b . Temos, então, que o triângulo cujos vértices são o ponto $P = (0, b)$ e os focos $F_1 = (-f, 0)$ e $F_2 = (f, 0)$ é isósceles, como ilustrado na figura 6. Portanto,

$$\|PF_1\| = \|PF_2\|.$$

Substituindo isto na equação (10), obtemos

$$\|PF_1\| = \|PF_2\| = a.$$

Aplicando, então, o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo cujos vértices são a origem O e os pontos P e F_1 verificamos que

$$\|PF_1\|^2 = \|PO\|^2 + \|OF_1\|^2.$$

Substituindo os valores destas distâncias obtidos anteriormente, temos que

$$(11) \quad f^2 = a^2 - b^2.$$

Com isto estamos preparados para simplificar a equação (9). A primeira coisa a fazer é substituir ℓ por $2a$, o que nos dá

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} + \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = 2a.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado e agrupando os termos comuns, obtemos

$$(12) \quad 2(\sqrt{y^2 + x^2 - 2fx + f^2})(\sqrt{y^2 + x^2 - 2fx + f^2}) + 2(y^2 + x^2 + f^2) = 4a^2.$$

Contudo,

$$(\sqrt{y^2 + x^2 - 2fx + f^2})(\sqrt{y^2 + x^2 + 2fx + f^2}) = \sqrt{(y^2 + x^2 + f^2)^2 - 4f^2x^2},$$

de modo que (12) equivale a

$$\sqrt{(y^2 + x^2 + f^2)^2 - 4f^2x^2} = (2a^2 - y^2 - x^2 - f^2).$$

Elevando ambos os membros ao quadrado mais uma vez, obtemos

$$(y^2 + x^2 + f^2)^2 - 4f^2x^2 = (2a^2 - y^2 - x^2 - f^2)^2;$$

donde resta, depois de expandir os produtos notáveis e cancelar os termos comuns,

$$a^2y^2 + (-f^2 + a^2)x + a^2f^2 - a^4 = 0.$$

Mas, levando em conta (11), esta última equação se torna

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0,$$

que é geralmente reescrita na forma

$$(13) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Resumindo, mostramos que existe uma escolha de base relativamente à qual uma elipse consiste dos pontos (x, y) que satisfazem a equação (13).

A hipérbole pode ser tratada de maneira semelhante. Supondo, como fizemos para a elipse, que os pontos em que a curva intersecta o eixo OX têm coordenadas $(\pm a, 0)$ e definindo b como sendo o número real positivo que satisfaz

$$b^2 = a^2 - f^2;$$

a equação da hipérbole pode ser escrita na forma

$$(14) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

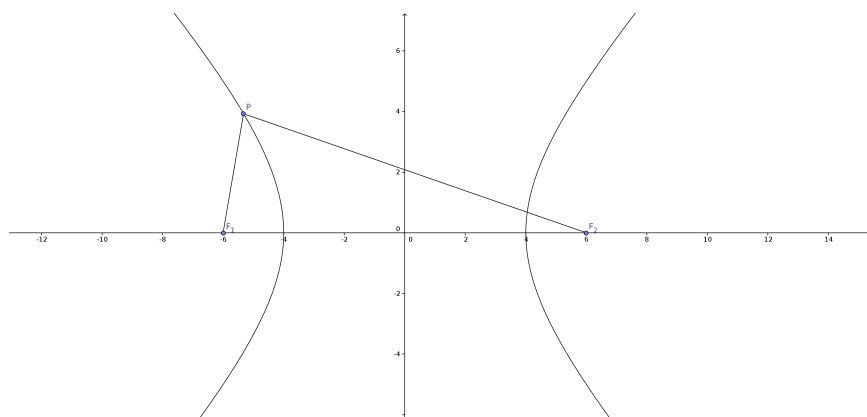


FIGURA 7. Os eixos relativamente à hipérbole e seus focos

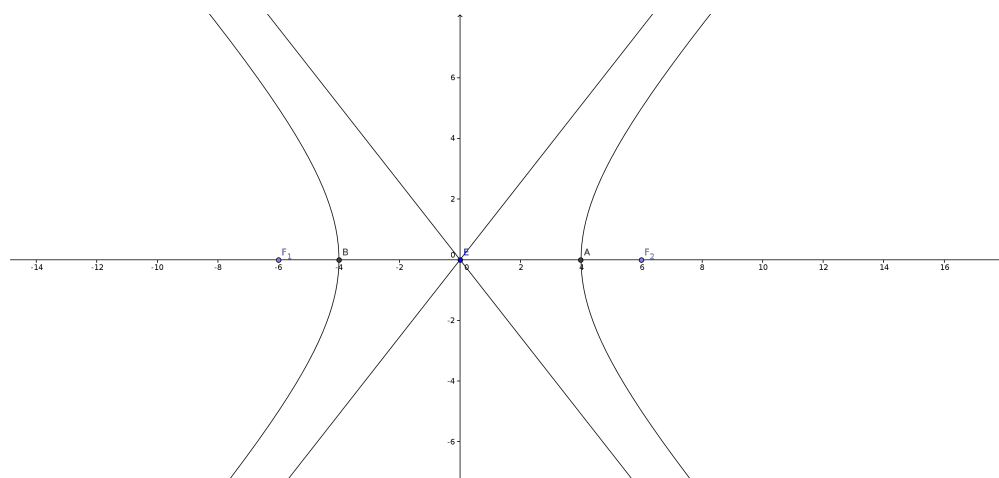


FIGURA 8. A hipérbole e suas assíntotas

Os cálculos necessários para obter esta equação são semelhantes aos que fizemos no caso da elipse e serão deixados aos seus cuidados. Note que a hipérbole *não* intersecta o eixo OY , de modo que b não tem uma interpretação geométrica tão imediata, como ocorreu no caso da elipse. Para determinar de que maneira o valor de b está relacionado à hipérbole, observe que de (14), obtemos

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Como

$$\sqrt{x^2 - a^2} < |x|,$$

concluimos que

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \leq \pm \frac{b}{a} |x|.$$

Cônica	Equação canônica
Parábola	$4fy = x^2$
Elipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Hipérbole	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

TABELA 1. As cônicas e suas equações canônicas

Portanto, se o ponto (x, y) pertence à hipérbole, então sua ordenada pertence ao intervalo

$$\left[-\frac{b|x|}{a}, \frac{b|x|}{a} \right].$$

Em outras palavras, a hipérbole está compreendida na região que fica entre as retas

$$y = -\frac{b}{a}x \text{ e } y = \frac{b}{a}x.$$

Na verdade, como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = 1;$$

temos que a hipérbole se aproxima indefinidamente das retas $y = \pm bx/a$ sem nunca tocá-las; isto é, estas retas são *assíntotas* da hipérbole.

Chamaremos de *canônicas* as equações das cônicas que deduzimos neste artigo e no anterior, porque é através delas que seremos capazes de identificar de que tipo é uma dada curva. Para referência futura reunimos as equações canônicas das três cônicas em uma tabela:

3.3. Identificação de cônicas: delimitando o problema. Suponhamos que ε seja uma base do plano cujas coordenadas serão denotadas por x e y e consideremos a curva C cujos pontos satisfazem a equação

$$(15) \quad a_5x^2 + a_4xy + a_3y^2 + a_2x + a_1y + a_0 = 0,$$

em que os coeficientes a_0, \dots, a_5 são números reais. Os matemáticos do século XVI descobriram que uma curva deste tipo é sempre uma cônica e desenvolveram um algoritmo capaz de achar uma base relativamente a cujos eixos a equação de C está na forma canônica.

Antes de prosseguir, convém introduzir a seguinte nomenclatura. Uma *forma* é um polinômio cujos monômios têm todos o mesmo grau. Se o grau dos monômios for um, temos uma *forma linear*; se for dois, temos uma *forma quadrática*. Usando esta terminologia, podemos dizer que o polinômio do lado esquerdo de (15) pode ser decomposto como a soma do termo constante a_0 , da forma linear $a_2x + a_1y$ e da forma quadrática $a_5x^2 + a_4xy + a_3y^2$.

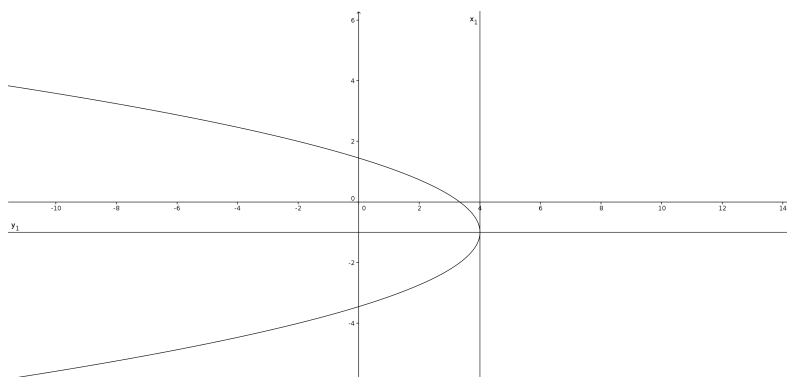


FIGURA 9. Uma parábola transladada

Sempre que a forma linear em (15) for nula, a curva correspondente será uma parábola, ou uma elipse ou hipérbole cujo centro está fora da origem. Quando $a_4 = 0$, estes dois casos podem ser tratados usando o *método de completamento de quadrados*, que consiste em aplicar a fórmula

$$bx^2 + cx = b \left(x + \frac{b}{2c} \right)^2 - \frac{b^2}{4c^2}.$$

Este é o mesmo procedimento utilizado no ensino fundamental para deduzir a fórmula das raízes de uma equação quadrática. Vejamos dois exemplos.

Nosso primeiro exemplo será a equação

$$2y^2 + 3x + 4y - 10 = 0.$$

Completando quadrados em y obtemos

$$2(y + 1)^2 + 3x - 12 = 0;$$

que equivale a

$$2(y + 1)^2 = -3(x - 4).$$

Efetuando a mudança de variáveis $y_1 = y + 1$ e $x_1 = x - 4$, obtemos

$$2y_1^2 = -3x_1;$$

que difere da forma canônica apenas porque os papéis de x_1 e y_1 estão invertidos. Isto sugere que a mudança de variáveis correta é dada por $x_1 = y + 1$ e $y_1 = x - 4$, da qual resulta a equação canônica

$$y_1 = -\frac{2}{3}x_1^2.$$

Para posicionar corretamente esta curva relativamente aos eixos x e y , começamos por situar o sistema de eixos x_1y_1 relativamente ao sistema xy e, então, esboçamos a curva canônica relativamente ao sistema x_1y_1 , conforme ilustrado na figura 9.

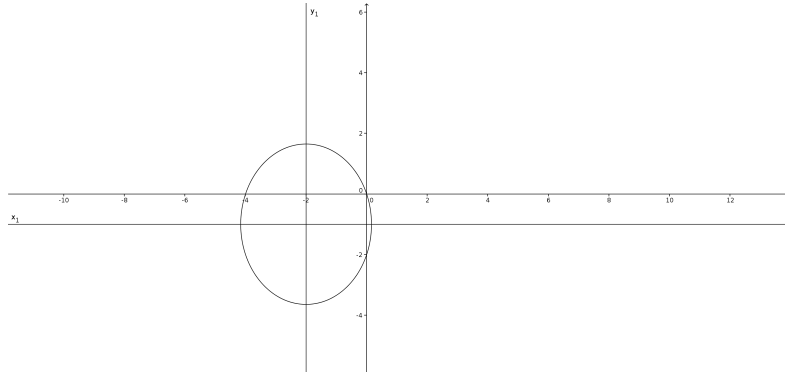


FIGURA 10. Uma elipse transladada

O caso em que a equação tem os termos em x^2 e em y^2 com coeficientes não nulos, mas não tem o termo xy , pode ser tratado de maneira semelhante. Por exemplo, se a equação for

$$2y^2 + 3x^2 + 4y + 12x = 0,$$

então podemos completar quadrados em x e y , obtendo

$$2(y + 1)^2 + 3(x + 2)^2 = 14.$$

Fazendo a mudança de variáveis $y_1 = y + 1$ e $x_1 = x + 2$, obtemos a equação canônica

$$\frac{(y + 1)^2}{7} + \frac{(x + 2)^2}{14/3} = 1;$$

esboçada na figura 10.

Note que, procedendo como nestes dois exemplos, podemos encontrar a forma canônica sempre que a equação (15) tiver $a_4 = 0$; isto é, sempre que o termo cruzado xy não aparecer na equação. Estritamente falando, os casos analisados neste artigo não pertencem ao domínio da álgebra linear, uma vez que translações não são transformações lineares, no sentido em que este conceito foi definido no artigo 2.4. Tendo isto em conta, resta-nos apenas considerar como encontrar a forma canônica de uma curva de equação (15) em que $a_4 \neq 0$. Isto é feito em duas etapas. Na primeira, achamos um sistema de coordenadas x_1y_1 relativamente ao qual a forma quadrática em (15) se escreve sem termo cruzado x_1y_1 . Tendo obtido uma equação sem termo cruzado, completamos quadrados para obter a forma canônica desejada.

3.4. Identificação de cônicas: um exemplo. Neste artigo veremos como determinar a forma canônica do gráfico da função $y = 1/x$ que, como aprendemos em cálculo, corresponde a uma hipérbole. Como vimos no artigo 3.3, para que a equação da hipérbole esteja em forma canônica os eixos devem ser escolhidos de maneira que o eixo das abscissas contenha os dois focos e o das ordenadas seja perpendicular a ele através do ponto médio

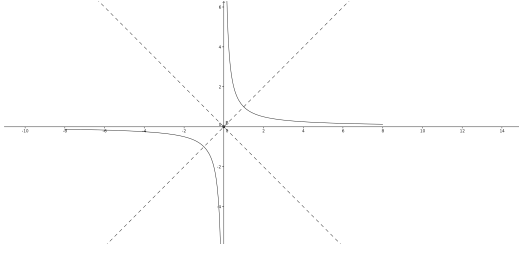


FIGURA 11. A hipérbole
 $y = 1/x$

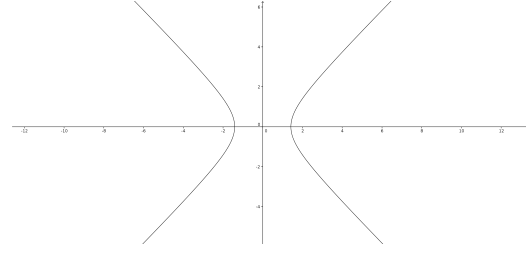


FIGURA 12. A hipérbole
 $x^2 - y^2 = 2$

do segmento que une os focos. Como $xy = 1$ não se altera quando trocamos x por y , esta hipérbole tem que ser simétrica em relação à reta $y = x$. Como esta reta forma um ângulo de $\pi/4$ radianos com o eixo x , podemos converter a figura 11 na figura 12 aplicando uma rotação de $\pi/4$ radianos, no sentido horário, à primeira figura.

Contudo como vimos no artigo 2.3 a rotação *horária* de $\pi/4$ radianos é definida pela matriz

$$\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

De fato, os vetores cujas coordenadas relativamente ao sistema xy são $[1, 1]^t$ e $[-1, 1]^t$ são transformados por ρ em

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

De maneira mais geral, se um mesmo vetor tem coordenadas $[x, y]^t$ relativamente à base $\varepsilon = \{[1, 0]^t, [0, 1]^t\}$ e $[x_1, y_1]^t$ relativamente à base

$$\beta = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

então a relação entre suas coordenadas em uma e na outra base é dada por

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} x + y \\ -x + y \end{bmatrix}.$$

Usando a inversa da matriz ρ obtemos a relação oposta

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ x_1 + y_1 \end{bmatrix};$$

em outras palavras

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - y_1) \quad \text{e} \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + y_1);$$

de modo que

$$xy = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (x_1 - y_1)(x_1 + y_1) = \frac{1}{2}(x_1^2 - y_1^2).$$

Portanto, a hipérbole cuja equação relativamente à base ε é $xy = 1$, tem equação

$$\frac{1}{2}(x_1^2 - y_1^2) = 1$$

na base β . Mas esta última equação está na forma canônica, com $a = b = \sqrt{2}$.

3.5. Diagonalização de formas quadráticas. Como vimos nos dois últimos artigos, o problema que falta resolver para termos um método sistemático, capaz de identificar a cônica de equação (15), pode ser formulado da seguinte maneira.

PROBLEMA 3.1 (Diagonalização de uma forma quadrática). *Dada uma forma quadrática $\chi = a_5x^2 + a_4xy + a_3y^2$ determine uma mudança de coordenadas, de maneira que no novo sistema de eixos χ se escreva como $\lambda_1x_1^2 + \lambda_2y_1^2$, em que λ_1 e λ_2 são números reais.*

A razão pela qual este problema é conhecido como *diagonalização* de uma forma quadrática ficará clara até o final deste artigo. Para resolver este problema usando técnicas de álgebra linear, precisamos formulá-lo de maneira matricial. Com este objetivo, definimos a matriz

$$(16) \quad A = \begin{bmatrix} a_5 & a_4/2 \\ a_4/2 & a_3 \end{bmatrix},$$

conhecida como a *matriz da forma quadrática* χ . Note que a matriz de uma forma quadrática é de um tipo muito especial, já que as entradas nas posições 1, 2 e 2, 1 sempre coincidem. Estas matrizes são conhecidas como *simétricas* e são caracterizadas pelo fato de que são iguais à sua transposta. Por exemplo, a forma quadrática

$$13x^2 - 6\sqrt{3}xy + 7y^2,$$

tem por matriz


$$A = \begin{bmatrix} 13 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 7 \end{bmatrix}$$

Voltando ao caso geral, observe que se u for o vetor de coordenadas $[x, y]^t$ na base $\varepsilon = \{e_1, e_2\}$, então

$$u^t Au = [x, y] \begin{bmatrix} a_5 & a_4/2 \\ a_4/2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a_5x^2 + a_4xy + a_3y^2 = \chi.$$

Por isso, de agora em diante, escreveremos nossas formas quadráticas sempre usando sua equação matricial $u^t Au$.

Como estamos supondo que os sistemas de eixos xy e x_1y_1 são ambos ortogonais, é sempre possível achar uma rotação que faça o par de retas subjacente aos eixos xy coincidir com as retas subjacentes ao sistema x_1y_1 . Por isso, procuraremos uma rotação que seja capaz de realizar a mudança de coordenadas proposta no problema 3.1.

 Note que esta afirmação se refere às *retas subjacentes aos eixos* e não aos *eixos* propriamente ditos. A razão para isto é que, se levarmos em conta as direções nas quais os eixos apontam, pode não ser possível achar uma rotação que leve um sistema de eixos em outro; para um exemplo, veja o exercício 11.

Começaremos tentando de que maneira a matriz A da forma χ se transforma sob a mudança de coordenadas definida por uma rotação de matriz Q . Digamos que $v = Q^{-1}u = Q^t u$, em que

$$u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Substituindo $u = Qv$ em $u^t A u$, obtemos

$$u^t A u = v^t Q^t A Q v.$$

Para que $v^t Q^t A Q v$ não tenha termos em $x_1 y_1$ é preciso que a matriz da forma quadrática na base $B = \{Qe_1, Qe_2\}$ seja diagonal; o que explica o nome pelo qual é conhecido o problema que estamos tentando resolver e que podemos reformular de maneira puramente matricial, como segue.

PROBLEMA 3.2 (Diagonalização da matriz de uma forma quadrática). *Dada a matriz A de uma forma quadrática, determinar uma matriz de rotação Q de modo que $Q^t A Q$ seja uma matriz diagonal.*

Surpreendentemente, começaremos determinando qual deve ser a matriz diagonal $Q^t A Q$ se existir a rotação desejada Q . Para isto, imagine, por um momento, que encontramos a matriz diagonal desejada e que ela seja

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Em outras palavras, estamos supondo que

$$Q^t A Q = D;$$

mas isto implica que

$$(17) \quad Q^t A Q - \lambda_1 I = D - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

tem uma linha nula. Em particular, o determinante desta matriz é nulo, de modo que

$$\det(Q^t A Q - \lambda_1 I) = 0.$$

Entretanto, como $I = Q^t Q$, podemos escrever

$$Q^t A Q - \lambda_1 Q^t Q = Q^t (A - \lambda_1 I) Q.$$

Como o determinante é uma função multiplicativa (veja exercício 12), podemos concluir que

$$0 = \det(Q^t A Q - \lambda_1 I) = \det(Q^t) \det(A - \lambda_1 I) \det(Q).$$

Mas Q é uma matriz de rotação, de forma que seu determinante é igual a 1, o que nos permite concluir que

$$\det(A - \lambda_1 I) = 0.$$

Usando a definição de A dada em (16), obtemos

$$\det \begin{bmatrix} a_5 - \lambda_1 & a_4/2 \\ a_4/2 & a_3 - \lambda_1 \end{bmatrix} = \lambda_1^2 - (a_5 + a_3)\lambda_1 + a_5 a_3 - \frac{a_4^2}{4}.$$

Em outras palavras, λ_1 é raiz do polinômio

$$(18) \quad \det(A - tI) = t^2 - (a_5 + a_3)t + a_5 a_3 - \frac{a_4^2}{4}.$$

Um cálculo semelhante mostra que λ_2 é raiz do mesmo polinômio, conhecido como o *polinômio característico* de A . As raízes do polinômio característico são os *autovalores* da matriz A .

Por exemplo, o polinômio característico associado à matriz A da forma quadrática $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2$ é

$$p_A(t) = t^2 - 20t + 64;$$

de modo que os autovalores de A são 4 e 16. Neste caso obtivemos duas raízes reais (de fato, inteiras) para o polinômio característico, mas um polinômio do segundo grau pode ter apenas uma, ou até nenhuma, raiz real, caso em que o método acima não funcionaria. Para decidir quantas raízes reais o polinômio característico (18) tem devemos calcular seu discriminante, que é igual a

$$\Delta = (a_5 + a_3)^2 - 4 \left(a_5 a_3 - \frac{a_4^2}{4} \right) = (a_5 - a_3)^2 + a_4^2.$$

Como a_3 , a_4 e a_5 são números reais, Δ é sempre maior ou igual a zero. Além disso, Δ só pode se anular se $a_3 = a_5$ e $a_4 = 0$, que corresponde à matriz $a_3 I$. Resumindo, temos a seguinte propriedade.

PROPRIEDADE 3.3. *A matriz de uma forma quadrática sempre tem dois autovalores reais, que só serão iguais se a forma quadrática for um múltiplo constante de $x^2 + y^2$.*

O que fizemos até aqui mostra que, se existir uma base B na qual $\chi = a_5 x^2 + a_4 xy + a_3 y^2$ tem a forma $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2$, então λ_1 e λ_2 são os autovalores da matriz de χ . Por exemplo, se for possível achar uma base que diagonalize $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2$, então nas coordenadas x_1 e y_1 relativas a esta base, a forma quadrática será $4x_1^2 + 16y_1^2$.



Podemos definir o polinômio característico $\det(A - tI) = 0$ para qualquer matriz A ; entretanto, não é verdade que as raízes deste polinômio são sempre reais e distintas. Para mais detalhes veja os exercícios 13 e 14.

3.6. Diagonalização de formas quadráticas: achando a rotação. No artigo anterior mostramos apenas que, *se existir uma matriz de rotação Q tal que $Q^t A Q$ seja diagonal*, então as entradas não nulas desta última matriz são os autovalores de A . Porém, nada do que fizemos até aqui garante que uma tal matriz Q realmente exista. Por outro lado, se Q existir, então podemos deduzir de (17) que

$$(Q^t A Q - \lambda_1 I) e_1 = 0,$$

já que a primeira linha de $Q^t A Q - \lambda_1 I$ é nula. Multiplicando esta equação por Q , obtemos

$$(A - \lambda_1 I) Q e_1 = 0,$$

de modo que $Q e_1$ é solução do sistema

$$(A - \lambda_1 I) w = 0, \text{ em que } w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}.$$

Contudo, $Q e_1$ é igual a primeira coluna da matriz Q .

Naturalmente, para que este argumento possa ser implementado é necessário que o sistema $(A - \lambda_1 I) w = 0$ tenha alguma solução não nula. Entretanto, λ_1 foi escolhido de modo que

$$\det(A - \lambda_1 I) = 0,$$

e todo sistema homogêneo cuja matriz tem determinante nulo sempre tem solução não nula; veja exercício 16. As soluções *não nulas* de $(A - \lambda_1 I) w = 0$ são os *autovetores* de A associados ao autovalor λ_1 .

Vejamos o que isto nos diz quando aplicado à matriz

$$A = \begin{bmatrix} 13 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 7 \end{bmatrix}$$

da forma quadrática $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2$. Verificamos no artigo anterior, os autovalores desta matriz são 4 e 16. Portanto, para achar Q , temos que resolver dois sistemas, um para cada raiz. O primeiro é

$$0 = (A - 4I)w = \begin{bmatrix} 9 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9w_1 - 3\sqrt{3}w_2 \\ -3\sqrt{3}w_1 + 3w_2 \end{bmatrix},$$

e tem por equações,

$$\begin{aligned} 9w_1 - 3\sqrt{3}w_2 &= 0 \\ -3\sqrt{3}w_1 + 3w_2 &= 0. \end{aligned}$$

Como estas duas equações são uma múltipla constante da outra, elas terão por solução todos os vetores que são múltiplos escalares de

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Procedendo da mesma maneira para a outra raiz, descobrimos que as soluções do sistema $(A - 16I)w = 0$ são todos múltiplos escalares de

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Entretanto, estes dois vetores não podem ser colunas de uma matriz de rotação. De fato, como vimos no artigo 2.3, a matriz que descreve uma rotação no plano é sempre da forma

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Mas isto significa que, considerando as colunas C_1 e C_2 desta matriz como vetores do plano, teremos

$$\|C_1\| = \|C_2\| = 1 \text{ e também que } \langle C_1 | C_2 \rangle = 0.$$

Ocorre que, embora os vetores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

sejam ortogonais, eles não são unitários. Entretanto, nossos cálculos anteriores mostram apenas que Qe_1 e Qe_2 são múltiplos escalares dos vetores acima, de modo que podemos normalizá-los sem infringir nenhuma das propriedades desejadas. Fazendo isto, obtemos a matriz

$$Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix},$$

que corresponde a uma rotação anti-horária cujo ângulo θ tem tangente igual a

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

o que significa que $\theta = \pi/6$. Analisando este exemplo com cuidado, verificamos que a propriedade crucial que nos permitiu achar a matriz de rotação Q foi a seguinte.

PROPRIEDADE 3.4. *Autovetores associados a autovalores distintos da matriz de uma forma quadrática são necessariamente ortogonais.*

Em outras palavras, se $u_1 \neq 0$ e $u_2 \neq 0$ são soluções dos sistemas

$$(A - \lambda_1 I)u_1 = 0 \quad \text{e} \quad (A - \lambda_2 I)u_2 = 0$$

então

$$\langle u_1 | u_2 \rangle = 0.$$

De fato, neste caso Q é a matriz cujas colunas são as normalizações dos vetores u_1 e u_2 , respectivamente. Note que esta propriedade pressupõe que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, caso contrário, a matriz A já seria diagonal, como vimos na propriedade 3.3 da página 34.

Suponhamos, então, que $u_1 \neq 0$ e $u_2 \neq 0$ satisfaçam as condições da propriedade 3.4. Neste caso,

$$Au_1 = \lambda_1 u_1 \quad \text{e} \quad Au_2 = \lambda_2 u_2;$$

donde

$$\langle Au_1 | u_2 \rangle = \langle \lambda_1 u_1 | u_2 \rangle = \lambda_1 \langle u_1 | u_2 \rangle.$$

Contudo,

$$\langle Au_1 | u_2 \rangle = (Au_1)^t u_2 = u_1^t A^t u_2 = \langle u_1 | A^t u_2 \rangle;$$

donde podemos concluir que

$$(19) \quad \lambda_1 \langle u_1 | u_2 \rangle = \langle u_1 | A^t u_2 \rangle.$$

Entretanto, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_5 & a_4/2 \\ a_4/2 & a_6 \end{bmatrix}$$

é *simétrica*; isto é, ela não se altera quando trocamos suas linhas por suas colunas. Como isto equivale a dizer que $A^t = A$, temos de (19) que

$$\lambda_1 \langle u_1 | u_2 \rangle = \langle u_1 | Au_2 \rangle.$$

Contudo,

$$\langle u_1 | Au_2 \rangle = \langle u_1 | \lambda_2 u_2 \rangle = \lambda_2 \langle u_1 | u_2 \rangle,$$

de modo que

$$\lambda_1 \langle u_1 | u_2 \rangle = \lambda_2 \langle u_1 | u_2 \rangle.$$

Assim,

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \langle u_1 | u_2 \rangle = 0.$$

Como estamos supondo que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, podemos concluir que

$$\langle u_1 | u_2 \rangle = 0;$$

que é a propriedade desejada.

3.7. Diagonalização de formas quadráticas: o algoritmo. Para referência futura, convém reunirmos os principais resultados dos dois últimos artigos.

PROPOSIÇÃO 3.5. *Se A é a matriz de uma forma quadrática χ em duas variáveis que não é múltiplo constante de $(x^2 + y^2)$, então*

- (1) *A tem dois autovalores reais distintos;*
- (2) *autovetores associados aos autovalores distintos de A são ortogonais;*
- (3) *existe uma matriz de rotação Q tal que $Q^t A Q$ é uma matriz diagonal.*

Seja $\{e_1, e_2\}$ a base do plano relativamente às coordenadas da qual χ foi inicialmente dada. Como consequência de (c), temos que, se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ são os autovalores de A então χ se escreve na forma $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2$, em que x_1 e y_1 são as coordenadas relativas à base $\{Qe_1, Qe_2\}$ do plano. Em outras palavras, provamos o seguinte teorema.

TEOREMA 3.6 (Diagonalização de formas quadráticas). *Toda forma quadrática em duas variáveis é diagonalizável.*

Como a demonstração deste teorema é construtiva, podemos apresentá-la na forma de um algoritmo.

ALGORITMO 3.7 (Diagonalização de formas quadráticas). *Dada uma forma quadrática $\chi = a_5 x^2 + a_4 xy + a_3 y^2$ relativamente à base uma base $\varepsilon = \{e_1, e_2\}$ do plano o algoritmo retorna:*

- *uma base B do plano;*
- *uma forma quadrática $\hat{\chi} = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2$;*

em que $\hat{\chi}$ é a expressão de χ relativamente ao sistema de coordenadas $x_1 y_1$ de B .

Caso diagonal: *se $a_4 = 0$ retorne $B = \varepsilon$ e $\hat{\chi} = \chi$.*

Inicialização: *faça*

$$A = \begin{bmatrix} a_5 & a_4/2 \\ a_4/2 & a_3 \end{bmatrix}.$$

Autovalores: *calcule as raízes reais λ_1 e λ_2 do polinômio característico $\det(A - tI) = 0$.*

Autovetor: *determine uma solução não nula u do sistema linear $(A - \lambda_1 I)u = 0$.*

Normalização: *normalize o autovetor fazendo $u_1 = u/\|u\|$.*

Matriz de rotação: *se $u_1 = [\alpha, \beta]^t$, construa a matriz*

$$Q = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Saída: *retorne Q e $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2$.*

Encerraremos este artigo usando a receita do algoritmo 3.7 para diagonalizar a forma quadrática

$$\chi = 3x^2 + 2xy + 3y^2.$$

A matriz desta forma quadrática é

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

que tem polinômio característico

$$p(t) = \det(A - tI) = \det \begin{bmatrix} 3-t & 1 \\ 1 & 3-t \end{bmatrix} = t^2 - 6t + 8;$$

cujas raízes são 2 e 4. Em outras palavras, A tem autovalores 2 e 4. Para achar um autovetor de A associado a 2, resolvemos o sistema

$$0 = (A - 2I)u = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

que equivale à equação $\alpha + \beta = 0$. Portanto, $[1, -1]^t$ é autovetor de A associado a 2. Normalizando, obtemos

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

de modo que

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

que corresponde à rotação *anti-horária* de ângulo de

$$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \text{ radianos};$$

ou, se você preferir, uma rotação *horária* de $\pi/4$ radianos. Portanto, se representarmos a forma quadrática χ relativamente às coordenadas x_1 e y_1 da base

$$B = \{Qe_1, Qe_2\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

obtemos $2x_1^2 + 4y_1^2$. Assim, por exemplo, a cônica

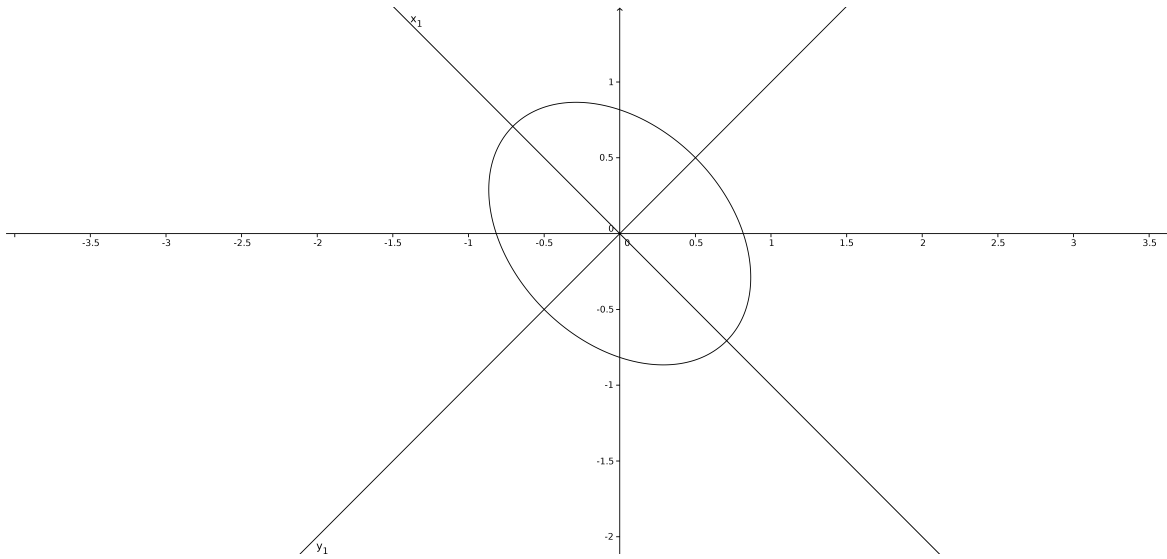
$$2x^2 + 2xy + 3y^2 = 2$$

tem equação

$$2x_1^2 + 4y_1^2 = 4;$$

na base B , de modo que sua equação canônica é

$$\frac{x_1^2}{2} + y_1^2 = 1.$$

FIGURA 13. A elipse $2x^2 + 2xy + 3y^2 = 2$.

A figura 13 ilustra esta elipse, juntamente com o sistema de eixos x_1 e y_1 .

Exercícios

1. Sejam u e v vetores do plano. Use as propriedades do produto interno para calcular

$$\langle u + v | u + v \rangle, \quad \langle u - v | u - v \rangle \quad \text{e} \quad \langle u - v | u - v \rangle$$

em função de $\langle u | v \rangle$ e das normas de u e v .

2. Prove que as diagonais de um losango são perpendiculares.

SUGESTÃO: suponha que o losango tem um dos vértices na origem e que u e v são os vetores que correspondem aos seus lados; calcule as diagonais em função de u e v , e use as fórmulas do exercício 1.

3. Seja ε uma base do plano formada por dois vetores unitários, e_1 e e_2 , perpendiculares entre si. Prove que todo vetor v do plano pode ser escrito na forma

$$v = \langle v | e_1 \rangle e_1 + \langle v | e_2 \rangle e_2.$$

4. Sejam u e v vetores do plano. Prove que:

- (a) $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$;
- (b) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$;
- (c) $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$.

A desigualdade em (a) é conhecida como *desigualdade de Schwarz* e aquela em (b) como *desigualdade triangular*.

SUGESTÃO: para provar (b), calcule $\langle u + v, u + v \rangle$ e aplique a desigualdade (a).

5. Sejam u_1 e u_2 vetores do plano e U a matriz cuja primeira linha é u_1 e cuja segunda linha é u_2 . Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:
 - (a) u_1 e u_2 não são colineares;
 - (b) $\det(U) \neq 0$.
6. Calcule o ângulo entre as retas $2x + 3y = 0$ e $5x + 2y = 0$.
7. Sejam P e Q pontos do plano e u e v vetores cujas extremidades são P e Q , respectivamente. Mostre que a distância entre P e Q é igual à norma do vetor $u - v$.
8. Prove que uma transformação linear que preserva norma de vetores tem que preservar distância entre pontos.
9. Dê exemplo de uma transformação que não é linear e que preserva a norma de vetores mas não preserva distância.
10. Prove que um operador linear T do plano tem inverso se, e somente se, a matriz de T relativamente a uma base ε do plano é invertível.
11. Mostre que não existe uma rotação capaz de levar o sistema de eixos definido pela base $\varepsilon = \{e_1, e_2\}$ do plano no sistema de eixos definido pela base $\beta = \{-e_1, e_2\}$.
12. Mostre que se A e B são matrizes 2×2 e λ é um número real, então
 - (a) $\det(\lambda A) = \lambda^2 \det(A)$;
 - (b) $\det(A^t) = \det(A)$;
 - (c) $\det(AB) = \det(A) \det(B)$;

Vamos nos referir à propriedade (b) como a *multiplicatividade do determinante*. Lembre-se que A^t designa a transposta da matriz A .
13. Os *autovalores* de uma matriz A de tamanho 2×2 são as raízes de seu polinômio característico $\det(A - tI) = 0$. Determine os autovalores das seguintes matrizes:
 - (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
 - (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
 - (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$(d) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

14. Dizemos que uma matriz A é *simétrica* se é igual à sua transposta. Prove que se A é uma matriz simétrica de tamanho 2×2 , então seus autovalores são necessariamente reais.
15. Determine uma matriz A de tamanho 2×2 e uma matriz c de tamanho 2×1 , tais que o sistema linear

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

pode ser escrito na forma $AX = c$. As matrizes A e c são chamadas de *matriz do sistema* e *matriz dos coeficientes*, respectivamente.

16. Mostre que se o determinante da matriz de um sistema linear for não nula então o sistema tem uma única solução.
17. Uma matriz A é *simétrica* se $A^t = A$. Mostre que as matrizes correspondentes a projeções e reflexões do plano têm que ser simétricas.
18. Uma matriz A é *antissimétrica* se $A^t = -A$. Prove que toda matriz $n \times n$ pode ser escrita como a soma de uma matriz simétrica com uma antissimétrica.
19. Prove que se a e b são números reais tais que $a^2 + b^2 = 1$, então

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

é uma matriz de rotação e calcule o ângulo de rotação em função de a e b .

20. Seja $\varepsilon = \{e_1, e_2\}$ uma base do plano formada por vetores unitários, perpendiculares entre si. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos uma transformação linear c_α do plano por

$$c_\alpha(e_1) = e_1 \quad \text{e} \quad c_\alpha(e_2) = e_2 + \alpha e_1.$$

Calcule a matriz de c_α relativamente a ε . Transformações como esta são conhecidas como *cisalhamentos*.

21. Determine as matrizes que correspondem às seguintes transformações lineares:
- (a) um cisalhamento que leva a reta $x = 0$ em $y = 2x$;
 - (b) uma rotação anti-horária de $\pi/6$ radianos;
 - (c) uma reflexão cujo espelho é a reta $y = 2x$;
 - (d) uma projeção sobre a reta $y = 3x$.

22. Seja f uma aplicação de um conjunto C em outro conjunto C' . A imagem de f é o subconjunto de C' definido por

$$\text{Im}(f) = \{f(c) \mid c \in C\}.$$

Calcule as imagens de cada uma das seguintes transformações lineares do plano nele próprio: cisalhamento, projeção, reflexão e rotação.

23. Uma aplicação f de um conjunto C em outro conjunto C' é *sobrejetiva* se $\text{Im}(f) = C'$; isto é, todo elemento de C' é imagem de um elemento de C por f . Quais das seguintes transformações lineares do plano nele próprio: dilatação, cisalhamento, projeção, reflexão e rotação.
24. Uma aplicação f de um conjunto C em outro conjunto C' é *injetiva* se elementos diferentes de C são levados por f em elementos diferentes de C' . Quais das seguintes transformações lineares do plano nele próprio: dilatação, cisalhamento, projeção, reflexão e rotação.
25. Dada uma transformação linear T do plano, prove que são equivalentes:
- (a) T é bijetiva;
 - (b) T tem inversa;
 - (c) T é sobrejetiva;
 - (d) T é injetiva;
 - (e) $Tv = 0$ só pode acontecer se $v = 0$.
26. Prove que se P é a matriz de uma projeção do plano em uma reta então P é simétrica e $P^2 = P$.
27. Seja P a matriz de um operador linear do plano. Prove que se P é simétrica e $P^2 = P$, então o operador que corresponde a P é uma projeção do plano em uma reta.
28. Seja P a matriz de uma projeção do plano em uma reta. Explique como determinar o vetor ao longo do qual é feita a projeção e a reta sobre a qual se dá esta projeção a partir dos coeficientes de P .
29. Sejam A e B duas matrizes quadradas inversíveis de mesmo tamanho. Prove que a inversa de AB é igual a $B^{-1}A^{-1}$. Cuidado com a troca de posição das matrizes e lembre-se que a multiplicação de matrizes não é comutativa.
30. Uma matriz quadrada Q é chamada de *ortogonal* se $Q \cdot Q^t = I$, em que I é a matriz identidade. Em outras palavras, Q é inversível e sua inversa é igual à sua transposta. Mostre que as matrizes que definem a rotação e a reflexão no plano são ortogonais.

31. Prove que toda matriz ortogonal Q de tamanho 2×2 pode ser escrita na forma

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \pm \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

relativamente a uma base ε formada por dois vetores ortogonais unitários. Mostre que esta matriz tem determinante igual a ± 1 .

32. Seja Q uma matriz ortogonal de tamanho 2×2 . Use o exercício anterior para mostrar que

- se $\det(Q) = 1$ então Q é uma rotação;
- se $\det(Q) = -1$ então Q é uma reflexão.

Em particular, qualquer matriz ortogonal 2×2 é uma rotação ou uma reflexão. Como veremos no artigo 2.1, este resultado não se estende às matrizes ortogonais 3×3 .

33. Identifique as cônicas cujas equações são dadas abaixo e, em cada caso, determine a rotação necessária para converter a equação em sua forma canônica.

- (a) $3x^2 + 2\sqrt{2}xy + 4y^2 = 1$;
- (b) $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 1$;
- (c) $x^2 + 4xy - 2y^2 = 6$;
- (d) $2x^2 - xy + 2y^2 = 15$;
- (e) $8x^2 + 5xy - 4y^2 = 4$;
- (f) $31x^2 + 10\sqrt{3}xy + 21y^2 = 144$;
- (g) $22x^2 - 4xy + 5y^2 = 36$.

CAPÍTULO 2

Sistemas lineares

Neste capítulo introduzimos um algoritmo, talvez o mais importante da álgebra linear, usando como motivação sua aplicação à solução de sistemas lineares. Interpretado como uma decomposição matricial, este mesmo algoritmo provará sua utilidade em inúmeros outras situações, entre elas o cálculo de determinantes e a inversão de matrizes. Dada a importância das matrizes neste capítulo e no resto do livro, começamos com uma revisão das propriedades básicas destes objetos matemáticos.

1. Matrizes

As matrizes foram introduzidas por A. Cayley no século XIX como uma maneira prática de efetuar cálculos com transformações lineares. Nesta seção reunimos os principais conceitos e resultados referentes às matrizes.

1.1. Definição geral. Considerando uma matriz como um quadro de números, nada nos impede de criá-las com qualquer número de linhas e colunas que desejemos. Nem mesmo há a necessidade de que a quantidade de linhas e colunas seja a mesma. Tendo isto em vista, Cayley definiu *matrizes* $m \times n$ como quadros de números com m linhas e n colunas cujas posições podem ser preenchidas por números reais, ou outros objetos matemáticos de natureza semelhante. Como seria de esperar, as matrizes para as quais $m = n$ são chamadas de *quadradas*; as demais são conhecidas como matrizes *retangulares*.

Os números que ocupam as várias posições de uma matriz são conhecidos como *entradas* ou *coeficientes* da matriz e dispostos em uma tabela, encapsulada por colchetes. Para não ter que repetir todo o quadro numérico a cada vez que nos referimos a uma matriz, vamos designá-las por letras, geralmente maiúsculas. Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & \pi & -5/7 \\ 1/8 & 9 & 8 & \pi/2 \\ 0 & -65 & 0 & 7/\pi \end{bmatrix}$$

é uma matriz com 3×4 (isto é, tem 3 linhas e 4 colunas) cujas entradas são números reais.

Para localizar uma entrada em uma matriz, definimos sua posição em termos da linha e da coluna que ocupa. Por exemplo, na matriz A acima, $\pi/2$ ocupa a posição 2, 4 e -65

$$\begin{array}{llll} A_{1,1} = 1 & A_{1,2} = 5 & A_{1,3} = \pi & A_{1,4} = -5/7 \\ A_{2,1} = 1/8 & A_{2,2} = 9 & A_{2,3} = 8 & A_{2,4} = \pi/2 \\ A_{3,1} = 0 & A_{3,2} = -65 & A_{3,3} = 0 & A_{3,4} = 7/\pi \end{array}$$

a posição 3, 2. Como frases do tipo “o número α ocupa a posição que está na interseção da linha i com a coluna j da matriz M ” são muito verbosas, vamos abreviá-las escrevendo simplesmente

$$M_{i,j} = \alpha \text{ ou } M[i, j] = \alpha.$$

conforme nossa conveniência. Assim, tomando como base a matriz A do exemplo acima mais uma vez, temos

$$A_{1,4} = -5/7 \text{ e } A[2, 2] = 9.$$

Usando esta nomenclatura, a *diagonal de uma matriz* M corresponde às posições $M_{i,i}$. Na matriz do exemplo, a diagonal é formada pelas entradas

$$A_{1,1} = 1, A_{2,2} = 9 \text{ e } A_{3,3} = 0.$$

Naturalmente a diagonal de uma matriz só se parece com uma diagonal, no sentido geométrico do termo, quando a matriz é quadrada. Chamaremos de *diagonal* as matrizes quadradas cujas únicas entradas não nulas pertencem à sua diagonal. Por exemplo, a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ é diagonal, já } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi/2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ não é.}$$

A mais importante de todas as matrizes diagonais é a matriz *identidade*. Denotada por I , ou I_n quando for necessário deixar claro que se trata de uma matriz $n \times n$, ela tem 1s ao longo da diagonal e zeros em todas as outras posições, como é o caso de

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nem sempre é conveniente definir uma matriz apresentando-a como um quadro de números. Isto ocorre, por exemplo, se a matriz for *esparsa*; isto é, se a maioria de suas entradas forem nulas, como é o caso da matriz identidade. Imagine desenhar uma matriz identidade 100×100 : o quadro numérico é enorme, mas está quase todo ocupado por zeros! Uma maneira mais econômica de definir tais matrizes consiste em defini-las coeficiente a coeficiente. Fazendo isto para a matriz A do início deste artigo teríamos Que não parece ser nada além de uma versão piorada do quadro introduzido pelo Cayley. Mas não se

esqueça de que esta matriz *não* é, de forma alguma, esparsa. Nos casos mais vantajosos, ou a matriz é esparsa ou os coeficientes podem ser facilmente descritos por uma regra (ou ambos!). Por exemplo, a matriz identidade $n \times n$ pode ser definida facilmente por

$$I_n[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{quando } i = j \\ 0 & \text{quando } i \neq j \end{cases}$$

Note que escolhemos por os índices que identificam a posição da entrada entre colchetes, em vez de usar subscritos, para evitar conflito com o n que identifica a dimensão da matriz. As matrizes de *Vandermonde*, que desempenham papel essencial nos problemas de interpolação que estudaremos adiante, também são mais facilmente definidas por uma descrição de seus coeficientes, ainda que não sejam matrizes esparsas. Dados n números reais $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, a matriz de Vandermonde $V = V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ determinada por estes números é definida pela regra

$$V_{i,j} = \alpha_i^{j-1}.$$

Quando $n = 3$ isto nos dá

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 \end{bmatrix}$$

Esta maneira de definir matrizes será muito útil na formalização das regras usadas nas operações com matrizes.

1.2. Operações com matrizes. Nosso objetivo neste artigo é adaptar as regras que descobrimos para a adição e multiplicação de matrizes 2×2 para o caso geral em que as matrizes não são nem mesmo quadradas. Antes, porém, de escrever estas regras, precisamos saber comparar duas matrizes e determinar se são ou não iguais. Como matrizes são, em última análise, uma espécie de tabela, diremos que duas delas são iguais se isto valer para as tabelas correspondentes. Mais precisamente, para que uma matriz A de tamanho $m \times n$ e uma matriz B de tamanho $r \times s$ sejam iguais, suas dimensões precisam coincidir, de modo que $m = r$ e $n = s$ e as entradas de uma mesma posição devem coincidir; isto é,

$$A_{i,j} = B_{i,j}$$

para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Em nosso estudo das operações manteremos as convenções estabelecidas acima para as matrizes A e B . Começaremos analisando a adição. Como vimos, para somar duas matrizes 2×2 , somamos os seus coeficientes entrada a entrada. Para podermos estender isto às matrizes A e B é necessário que tenham as mesmas dimensões; isto é, que $m = r$ e que $n = s$. Admitindo que isto se verifica, podemos descrever a soma $A + B$ a partir dos seus coeficientes por

$$(A + B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}.$$

Em outras palavras, a entrada i, j da soma é igual à soma das entradas i, j das matrizes A e B . Outra operação fácil de descrever desta maneira é a *multiplicação de uma matriz por um escalar*, que não apareceu antes e não deve ser confundida com a multiplicação de matrizes. Se λ for um número real, definimos a matriz $\lambda \cdot A$ por

$$(\lambda \cdot A)_{i,j} = \lambda \cdot A_{i,j}.$$

Portanto, $\lambda \cdot A$ é a matriz obtida multiplicando-se cada coeficiente de A por λ . Por exemplo,

$$(-2) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 & \pi & -5/7 \\ 1/8 & 9 & 8 & \pi/2 \\ 0 & -65 & 0 & 7/\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -10 & -2\pi & 10/7 \\ -1/4 & -18 & -16 & -\pi \\ 0 & 130 & 0 & 14/\pi \end{bmatrix}$$

As operações de adição de matrizes e multiplicação de uma matriz por um escalar satisfazem algumas propriedades simples que listamos a seguir. Se A , B e C são matrizes $m \times n$ e λ e μ são números reais, então

- (1) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- (2) $A + B = B + A$;
- (3) $A + 0 = A$;
- (4) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$;
- (5) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$;
- (6) $1 \cdot A = A$;
- (7) $0 \cdot A = 0$;

em que o símbolo 0 , usado nas propriedades (3) e no lado direito da propriedade (7) denota a matriz cujas entradas são todas nulas. Entretanto, o 0 que multiplica a matriz A do lado esquerdo de (7) é nosso velho conhecido, o número real zero. Observe que estas propriedades são muito semelhantes às da adição de vetores e multiplicação de um vetor por escalar, descritas no artigo 1.1. Prová-las fica por sua conta.

Passemos à fórmula para a multiplicação de matrizes. A maneira usual de descrevê-la recorre a uma fórmula geral, cheia de coeficientes. Mas há uma maneira mais civilizada de expressá-la. Começamos com o caso em que

$$L = \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

A regra para multiplicação de matrizes 2×2 deduzida no artigo 2.6 sugere que deveríamos definir o produto $L \cdot C$ como sendo a matriz 1×1 cuja única entrada é $\ell_1 c_1 + \ell_2 c_2$. Podemos considerar isto como uma matriz 1×1 ou como um número real, isto é, um escalar. Em

geral, se

$$L = \begin{bmatrix} \ell_1 & \cdots & \ell_n \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

então copiamos a definição acima, escrevendo,

$$(20) \quad L \cdot C = \ell_1 c_1 + \cdots + \ell_n c_n.$$

Por exemplo, quando

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

obtemos

$$L \cdot C = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32.$$

Note que escolhemos L como tendo n colunas e C como tendo n linhas, do contrário sobriam coeficientes em L ou C quando viéssemos a construir o somatório que define $L \cdot C$. Pondo de outra maneira,

só faz sentido multiplicar uma matriz $1 \times n$ por uma matriz $r \times 1$ quando $n = r$.

A propósito, as matrizes $1 \times n$ são conhecidas como *matrizes linha* e as $r \times 1$ como *matrizes coluna*.

Para estender isto às matrizes A e B do início do artigo, consideraremos cada linha de A como sendo uma matriz $1 \times n$ e cada coluna de B como sendo uma matriz $r \times 1$. A primeira coisa a notar é que, para que seja possível multiplicar uma linha de A por uma coluna de B devemos ter que $n = r$. Sob esta condição, definiremos a entrada i, j da matriz produto AB como sendo o escalar que resulta do produto da i -ésima linha de A pela j -ésima coluna de B . Para escrever uma fórmula explícita é conveniente ter uma notação para linhas e colunas de uma matriz. Utilizando a terminologia do SCILAB escreveremos $A[i, :]$ para denotar a i -ésima linha e $A[:, i]$ para denotar a i -ésima coluna da matriz A . Com isto, a fórmula que define a matriz produto AB é

$$(AB)[i, j] = A[i, :] \cdot B[:, j].$$

Note que i percorre os índices das *linhas* de A , ao passo que j percorre os índices das *colunas* de B . Como AB tem uma entrada para cada i e cada j , sua dimensão será $m \times s$. Temos, assim, que

o produto de uma matriz $m \times n$ por uma matriz $r \times s$ só existe se $n = r$; neste caso o produto será uma matriz $m \times s$.

Usaremos esta fórmula para provar que a matriz identidade merece o nome que tem; isto é, que se comporta como uma identidade relativamente à multiplicação de matrizes, de modo que

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A,$$

para toda matriz quadrada A de tamanho $n \times n$. Pela fórmula acima,

$$(A \cdot I_n)[i, j] = A[i, :] \cdot I_n[:, j].$$

Mas $I_n[:, j]$ tem apenas uma entrada não nula, que fica na posição j, j . Portanto, pela fórmula (20),

$$A[i, :] \cdot I_n[:, j] = A[i, j].$$

Logo,

$$(A \cdot I_n)[i, j] = A[i, j],$$

de modo que a entrada i, j de $A \cdot I_n$ coincide com a entrada de mesma posição de A , provando a igualdade destas duas matrizes. A igualdade $I_n \cdot A = A$ é provada de maneira semelhante, os detalhes ficam por sua conta. Argumentos parecidos permitem provar as seguintes propriedades da multiplicação de matrizes:

- (1) $A(BC) = (AB)C$;
- (2) $A \cdot 0 = 0$;
- (3) $A(B + C) = AB + AC$;

em que 0 representa a matriz nula e A, B e C representam matrizes quadradas de mesmo tamanho. A propriedade $AB = BA$ não foi listada acima por uma razão muito simples: ela é falsa. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

não é igual a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Encerraremos o artigo definindo e considerando as propriedades de mais uma operação com matrizes. Se A for a matriz do início do artigo, definimos a *transposta* A^t de A como sendo a matriz obtida trocando-se as linhas pelas colunas de A . Na notação acima,

$$(A^t)[i, :] = A[:, i];$$

ou, o que dá no mesmo,

$$(A^t)[i, j] = A[j, i].$$

Naturalmente, se a matriz A tem tamanho $m \times n$, então sua transposta tem tamanho, $n \times m$; afinal, linhas viraram colunas e vice-versa. Naturalmente, a transposta da transposta é a matriz original:

$$(A^t)^t = A.$$

O comportamento da adição e da multiplicação por escalar relativamente à transposição é muito simples. Se A e B forem matrizes de mesmo tamanho, então

$$(A + B)^t = A^t + B^t \text{ e } (\lambda \cdot A)^t = \lambda \cdot A^t;$$

qualquer que seja o escalar λ . Já o comportamento da multiplicação relativamente à transposição é um pouco mais sutil. Suponhamos que A é uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $n \times s$. Como o número de linhas de A coincide com o de colunas de B , o produto AB existe e é uma matriz $m \times s$. Portanto, a transposta $(AB)^t$ será uma matriz $s \times m$. Ao contrário do que você possa esperar, esta matriz *não* pode, em geral, ser igual a $A^t \cdot B^t$. Na verdade, como A^t tem tamanho $n \times m$ e B^t tamanho $s \times n$, o produto $A^t \cdot B^t$ sequer estará definido quando $m \neq s$. Curiosamente, os tamanhos de A^t e B^t nos permitem calcular $B^t A^t$. Mais impressionante ainda é que este produto venha a coincidir com $(AB)^t$; mas é exatamente isto que acontece. Para provar isto, lembre-se que por definição

$$(A^t)[:, j] = A[j, :] \text{ e } (B^t)[i, :] = B[:, i]$$

ao passo que

$$((AB)^t)[i, j] = (AB)[j, i];$$

que pela fórmula do produto é igual a

$$A[j, :]B[:, i] = (A^t)[:, j](B^t)[i, :];$$

que nada mais é, senão

$$(A^t)(B^t)[i, j];$$

provando, assim, a igualdade desejada.

1.3. Algumas matrizes especiais. Várias matrizes especiais aparecerão ao longo deste livro. Precisaremos introduzir algumas das mais básicas nesta seção porque algumas de suas propriedades serão necessárias já no próximo capítulo.

Os primeiros tipos especiais de matrizes que introduziremos dizem respeito ao posicionamento dos zeros. Seja A uma matriz retangular de tamanho $m \times n$. Se todas as posições abaixo da diagonal de A são nulas, então A é *triangular superior*; se são as posições acima da diagonal que são nulas, dizemos que A é *triangular inferior*. Na notação introduzida no artigo 1.2 estas definições podem ser formuladas da seguinte maneira

$$\text{se } A_{i,j} = 0 \text{ sempre que } \begin{cases} j > i \\ j < i \end{cases} \text{ então } A \text{ é } \begin{cases} \text{triangular inferior} \\ \text{triangular superior} \end{cases}$$

Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ é triangular superior e } \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & 7 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 2 & 7 & 1 \end{bmatrix} \text{ é triangular inferior.}$$

Em seguida definimos uma família de matrizes a partir das quais qualquer matriz pode ser representada. Digamos que m e n são inteiros positivos. Dados inteiros $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, definimos E_{ij} como sendo a matriz $m \times n$ que tem 1 na posição i, j e zero em todas as suas outras entradas. Usando, mais uma vez, a notação da seção 1.2, podemos definir as entradas desta matriz por

$$E_{ij}[k, \ell] = \begin{cases} 1 & \text{se } i = k \text{ e } j = \ell \\ 0 & \text{em qualquer outro caso} \end{cases}$$

Portanto, quando $m = 2$ e $n = 3$, temos as seguintes matrizes

$$E_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e assim por diante, num total de $2 \cdot 3 = 6$ matrizes, uma para cada posição não nula no quadro 2 por 3.

A importância destas matrizes está no fato de que podemos escrever qualquer matriz A de tamanho $m \times n$ como uma soma da forma

$$(21) \quad A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A[i, j] \cdot E_{i,j},$$

em que $A[i, j]$ denota a entrada de A que ocupa a posição i, j . É muito fácil somar duas matrizes representadas desta maneira, e deixamos isto por sua conta. Mais interessante é que a distributividade da multiplicação de matrizes nos permite calcular o produto de duas matrizes expressas em duplos somatórios desde que saibamos calcular $E_{i,j} \cdot E_{k,\ell}$, quaisquer que sejam $1 \leq i, k \leq m$ e $1 \leq j, \ell \leq n$. Como $E_{i,j}$ e $E_{k,\ell}$ têm apenas uma posição não nula cada, seu produto pode ter, no máximo, uma entrada não nula. Se existir, esta entrada tem que aparecer quando multiplicamos a i -ésima linha de $E_{i,j}$ pela ℓ -ésima coluna de $E_{k,\ell}$, porque qualquer posição fora desta linha e coluna são nulas. Entretanto, para que haja de fato uma entrada não nula é preciso que o 1 ocupe na i -ésima linha exatamente a mesma posição que ocupa na ℓ -ésima coluna; que é uma maneira prolixa de dizer que k tem que ser igual a j . Resumindo,

$$(22) \quad E_{i,j} \cdot E_{k,\ell} = \begin{cases} E_{i,\ell} & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j \neq k \end{cases}$$

Na decomposição que fizemos acima a matriz foi escrita diretamente a partir de suas entradas, mas pode ser conveniente decompor uma matriz em termos de matrizes menores, chamadas de *bloco*s. Por exemplo, uma matriz 4×4 qualquer pode ser considerada como

uma matriz cujas entradas são, elas próprias, matrizes 2×2 . Se a matriz 4×4 for

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 4 \\ 1 & 2 & 30 & 11 \end{bmatrix}$$

os blocos serão as matrizes,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{e } D = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 30 & 11 \end{bmatrix};$$

com o que podemos escrever

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Em geral, se r é fator de m e s é fator de n , podemos representar uma matriz $m \times n$ como uma matriz formada por blocos de tamanho $r \times s$, que terá m/r blocos por linha e n/s blocos por coluna.

Finalmente, dizemos que uma matriz quadrada A de tamanho $n \times n$ é *invertível* se existe uma matriz B , também de tamanho $n \times n$ tal que

$$A \cdot B = B \cdot A = I.$$

Observe que esta equação só faz sentido quando A e B forem ambas matrizes quadradas e de mesmo tamanho. A matriz B é chamada de *inversa* de A e geralmente denotada por A^{-1} .

Ainda que toda matriz invertível tenha que ser quadrada, nem toda matriz quadrada é invertível. Por exemplo, a matriz $E_{i,j}$ não é invertível, não importa que valores escolhamos para i e j . Podemos provar isto facilmente usando as fórmulas (21) e (22). Digamos, por exemplo, que $E_{k,\ell}$ seja uma matriz $n \times n$ com $1 \leq k, \ell \leq n$. Se $E_{k,\ell}$ tivesse como inverso uma matriz A de tamanho $n \times n$, então por (21) e pela distributividade da multiplicação de matrizes

$$E_{k,\ell}A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A[i, j] \cdot E_{k,\ell} \cdot E_{i,j},$$

de modo que, por (22),

$$E_{k,\ell}A = \sum_{j=1}^n A[\ell, j] \cdot E_{k,j}.$$

Em particular, todas as posições desta matriz localizadas fora da k -ésima linha têm que ser nulas. Contudo, a matriz identidade tem uma posição não nula, na diagonal, para cada

linha e cada coluna. Portanto,

$$E_{k,\ell}A \neq I, \text{ quaisquer que sejam } i \text{ e } j.$$

No artigo 4.2 do capítulo 2, estudaremos um algoritmo que determina se uma dada matriz quadrada tem ou não inversa e que calcula tal inversa, caso exista. Por enquanto vamos nos contentar em calcular a inversa de uma matriz triangular inferior. Começamos tratando do caso em que a matriz é 3×3 . Supondo que

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \text{ tenha inversa } X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$$

teremos

$$M \cdot X = \begin{bmatrix} a_1x_1 & a_1x_2 & a_1x_3 \\ b_2y_1 + b_1x_1 & b_2y_2 + b_1x_2 & b_2y_3 + b_1x_3 \\ c_3z_1 + c_2y_1 + c_1x_1 & c_3z_2 + c_2y_2 + c_1x_2 & c_3z_3 + c_2y_3 + c_1x_3 \end{bmatrix}.$$

Igualando esta matriz à identidade 3×3 , obtemos o sistema linear

$$\begin{array}{lll} a_1x_1 = 1 & b_2y_1 + b_1x_1 = 0 & c_3z_1 + c_2y_1 + c_1x_1 = 0 \\ a_1x_2 = 0 & b_2y_2 + b_1x_2 = 1 & c_3z_2 + c_2y_2 + c_1x_2 = 0 \\ a_1x_3 = 0 & b_2y_3 + b_1x_3 = 0 & c_3z_3 + c_2y_3 + c_1x_3 = 1 \end{array}$$

A primeira coisa que este sistema nos revela é que se a_1 for nulo então M não tem inversa, porque a primeira equação do sistema já seria impossível. Por outro lado, se $a_1 \neq 0$ então, resolvendo as três primeiras equações, obtemos

$$x_1 = 1/a_1 \text{ e } x_2 = x_3 = 0.$$

Substituindo isto no sistema, as seis últimas equações podem ser reescritas na forma

$$\begin{array}{ll} b_2y_1 + b_1/a_1 = 0 & c_3z_1 + c_2y_1 + c_1/a_1 = 0 \\ b_2y_2 = 1 & c_3z_2 + c_2y_2 = 0 \\ b_2y_3 = 0 & c_3z_3 + c_2y_3 = 1. \end{array}$$

Argumentando como acima verificamos que o sistema só terá solução se $b_1 \neq 0$; neste caso,

$$y_1 = -b_1/b_2a_1, \quad y_2 = 1/b_2 \text{ e } y_3 = 0.$$

Substituindo estes valores nas três últimas equações, vemos que o sistema terá solução

$$z_1 = (b_1c_2 - b_2c_1)/c_3b_2a_1, \quad z_2 = -c_2/c_3b_2 \text{ e } z_3 = 1/c_3.$$

se $c_3 \neq 0$; caso contrário não haverá solução. Portanto, se $a_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ e $c_3 \neq 0$, a matriz M terá inversa igual a

$$\begin{bmatrix} 1/a_1 & 0 & 0 \\ -b_1/a_1b_2 & 1/b_2 & 0 \\ (b_1c_2 - b_2c_1)/a_1b_2c_3 & -c_2/b_2c_3 & 1/c_3 \end{bmatrix}$$

Estes cálculos simples mostram que, pelo menos no caso 3×3 , determinar a inversa de uma matriz triangular inferior se reduz a achar as soluções de um sistema linear muito fácil de resolver. Voltaremos a considerar estes sistemas, conhecidos apropriadamente como triangulares inferiores, de maneira mais abrangente no artigo 2.2 do capítulo 2. Podemos concluir, do que fizemos, que

- uma matriz triangular inferior é inversível se, e somente se, não tem entradas nulas ao longo da diagonal;
- quando a inversa de uma matriz triangular inferior existe ela também é triangular inferior.

Estritamente falando, só provamos estes dois resultados para matrizes 3×3 , mas eles valem em geral. Na verdade a demonstração do caso geral é mera continuação do caso 3×3 , já podemos imaginar M como representando o vértice superior de uma matriz triangular superior $n \times n$ quando $n \geq 3$.

2. Eliminação gaussiana

Começaremos a seção analisando em detalhes um método bem conhecido para a solução de sistemas lineares com apenas duas incógnitas, do qual o algoritmo geral pode ser facilmente obtido.

2.1. Sistemas lineares com duas equações. Nos últimos anos do ensino fundamental aprendemos vários métodos para resolver sistemas lineares de duas variáveis. Um deles, o *método de adição*, consiste em multiplicar uma (ou ambas) as equações por constantes apropriadas de modo que, quando forem somadas, resta uma equação linear em apenas uma das variáveis, que pode então ser facilmente resolvida. Vejamos um exemplo. Se o sistema for

$$\begin{aligned} x + 3y &= 1 \\ 2x + 5y &= 4, \end{aligned}$$

então subtraímos da segunda equação o dobro da primeira, o que nos dá $-y = 2$; isto é, $y = -2$. Substituindo isto em qualquer das duas equações originais, podemos determinar o valor de x . De fato, da primeira equação

$$x = 1 - 3y = 1 - 3 \cdot (-2) = 7.$$

Portanto o sistema tem solução $x = 7$ e $y = -2$.

Como este método é o ponto de partida para boa parte do que faremos no curso, vamos analisá-lo em detalhe. Começaremos definindo com cuidado algumas noções básicas. Um *sistema linear* nas variáveis x e y corresponde a um par de equações

$$(23) \quad \begin{aligned} a_1x + a'_1y &= b_1 \\ a_2x + a'_2y &= b_2; \end{aligned}$$

em que $a_1, a_2, a'_1, a'_2, b_1$ e b_2 são números reais. O mesmo sistema pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} a_1x + a'_1y - b_1 &= 0 \\ a_2x + a'_2y - b_2 &= 0; \end{aligned}$$

ou, de maneira ainda mais compacta como

$$(24) \quad E_1 = 0 \quad \text{e} \quad E_2 = 0;$$

em que

$$E_1 = a_1x + a'_1y - b_1 \quad \text{e} \quad E_2 = a_2x + a'_2y - b_2$$

são polinômios lineares. Dados dois números reais x_0 e y_0 , denotaremos por $E_1(x_0, y_0)$ o número real obtido substituindo-se x por x_0 e y por y_0 no polinômio E_1 . No caso do exemplo resolvido no início deste artigo, estes polinômios serão

$$E_1 = x + 3y - 1 \quad \text{e} \quad E_2 = 2x + 5y - 4.$$

Usando esta notação, podemos definir uma *solução do sistema* (24) como sendo um par de números (x_0, y_0) para o qual

$$E_1(x_0, y_0) = E_2(x_0, y_0) = 0.$$

Levando em conta que a ordem das equações não altera o sistema, escolheremos sempre a primeira equação de maneira que nela o x apareça com coeficiente diferente de zero. Observe que esta escolha é sempre possível, porque estamos supondo que se trata de um sistema em *duas* incógnitas. No sistema (23) isto significa que podemos supor que $a_1 \neq 0$ na equação E_1 . A estratégia que adotaremos consiste em substituir o sistema

$$\begin{cases} E_1 &= 0 \\ E_2 &= 0 \end{cases} \quad \text{por um sistema da forma} \quad \begin{cases} E_1 &= 0 \\ cE_1 + E_2 &= 0, \end{cases}$$

em que c é um número real. Naturalmente c será escolhido de maneira que o segundo sistema seja mais fácil de resolver que o primeiro. De fato, se $c = -a_2/a_1$, temos que

$$(25) \quad cE_1 + E_2 = \left(a'_2 - \frac{a_2 a'_1}{a_1} \right) y - \left(b_2 - \frac{b_1 a_2}{a_1} \right);$$

de modo que $cE_1 + E_2 = 0$ é uma equação linear em uma única variável (neste caso y). Se

$$\alpha = a'_2 - \frac{a_2 a'_1}{a_1} \text{ e } \beta = b_2 - \frac{b_1 a_2}{a_1},$$

então

$$(26) \quad 0 = cE_1 + E_2 = \alpha y - \beta.$$

No caso em que $\alpha \neq 0$,

$$y = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Para achar o valor de x correspondente, substituímos y por β/α em E_1 , obtendo

$$a_1 x + a_2 \frac{\beta}{\alpha} = b_1.$$

Note que, como estamos supondo que $a_1 \neq 0$, *esta última equação sempre tem uma única solução*. Como veremos, este pequeno detalhe é de grande importância para a solução do sistema. Neste caso, resolvendo a equação linear em x obtemos

$$x = -a_2 \frac{\beta}{a_1 \alpha} + \frac{b_1}{a_1}.$$

Não podemos esquecer que, embora sempre possamos escolher $a_1 \neq 0$, o mesmo não ocorre com α , que pode muito bem ser nulo. Caso isto aconteça, (26) reduz-se a $0 = \beta$. Portanto, quando $\alpha = 0$, a equação (26) só terá solução se β também for zero. Naturalmente, se $\alpha = \beta = 0$ então qualquer número real serve de solução à equação $\alpha y = \beta$, pois o produto de zero por qualquer escalar é o próprio zero. Mas, como fizemos questão de salientar acima, a cada valor de y corresponde um (único) valor de x , já que $a_1 \neq 0$. Portanto, se (26) tiver infinitas soluções isto implica que o mesmo ocorre com o sistema

$$\begin{aligned} E_1 &= 0 \\ cE_1 + E_2 &= 0, \end{aligned}$$

Esta análise do *método de adição* nos permite formulá-lo como consistindo das seguintes etapas:

Primeira etapa: dado o sistema $E_1 = E_2 = 0$, ordenamos as equações de maneira que o coeficiente de x em E_1 não seja nulo;

Segunda etapa: escolhemos c de modo que $cE_1 + E_2 = 0$ seja uma equação apenas na variável y ;

Terceira etapa: resolvendo a equação linear em uma variável $cE_1 + E_2 = 0$ obtemos os possíveis valores de y ;

Quarta etapa: substituindo cada valor de y obtido na etapa anterior na equação $E_1 = 0$, obtemos uma equação linear, cuja solução nos dá o valor correspondente para x .

A ordenação das equações feita na primeira etapa garante que as soluções do sistema fiquem completamente determinadas pelo resultado da terceira etapa. De fato, como vimos acima, se escrevermos $cE_1 + E_2 = 0$ na forma $\alpha y = \beta$, então

- se $\alpha \neq 0$ o sistema tem uma única solução;
- se $\alpha = \beta = 0$ o sistema tem infinitas soluções;
- se $\alpha = 0$ mas $\beta \neq 0$ o sistema não tem solução.

Antes de encerrar este artigo, há um detalhe muito importante que até agora ignoramos. De fato, ainda que nosso objetivo fosse resolver o sistema $E_1 = E_2 = 0$, o que fizemos foi encontrar as soluções de $E_1 = cE_1 + E_2 = 0$. Naturalmente estes sistemas terem equações diferentes não é muito significativo, o que importa é que tenham *exatamente as mesmas soluções*, e é isto que provaremos agora. Lembre-se que, segundo a definição dada acima, os números reais x_0 e y_0 definem uma solução do sistema $E_1 = E_2 = 0$ se, e somente se, os números $E_1(x_0, y_0)$ e $E_2(x_0, y_0)$ são ambos nulos. Contudo,

$$E_1(x_0, y_0) = E_2(x_0, y_0) = 0$$

implica que, qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$,

$$cE_1(x_0, y_0) + E_2(x_0, y_0) = 0.$$

Como $E_1(x_0, y_0) = 0$ por hipótese, segue-se que x_0 e y_0 também são soluções do sistema $E_1 = cE_1 + E_2 = 0$. Mostramos, assim, que

qualquer solução de $E_1 = E_2 = 0$ também é solução de $E_1 = cE_1 + E_2 = 0$;

falta a recíproca. Para prová-la, suponha que x_1 e y_1 são números reais que definem uma solução de $E_1 = cE_1 + E_2 = 0$. Isto significa que

$$E_1(x_1, y_1) = 0$$

$$cE_1(x_1, y_1) + E_2(x_1, y_1) = 0.$$

Entretanto, qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$,

$$E_2(x_1, y_1) = (cE_1(x_1, y_1) + E_2(x_1, y_1)) - cE_1(x_1, y_1)$$

é igual a zero, já que é uma soma de termos nulos, o que prova a recíproca. Como voltaremos a usar este resultado adiante, vamos enunciá-lo como uma proposição.

PROPOSIÇÃO 2.1. *Sejam E_1 e E_2 polinômios lineares e c um número real. O sistema $E_1 = E_2 = 0$ tem exatamente as mesmas soluções que $E_1 = cE_1 + E_2 = 0$.*

2.2. Sistemas triangulares. Neste artigo começamos a considerar de que forma o método de adição pode ser generalizado para sistemas maiores, com mais equações e mais incógnitas. Começaremos considerando as etapas três e quatro do método, conforme enunciado na página 57. Afinal, antes de qualquer coisa, precisamos decidir que forma deve ter um sistema linear para que possa ser facilmente resolvido. Só então poderemos investigar como devemos proceder para, partindo de um sistema linear qualquer, chegar a um outro, mais simples de resolver, e que tenha as mesmas soluções do sistema inicial. Para simplificar a análise suporemos que todos os sistemas sob consideração têm a mesma quantidade de incógnitas e equações. Na verdade, isto não representa uma restrição significativa, porque sempre podemos supor que o sistema tem mais equações, todas nulas, ou mais incógnitas, todas com coeficientes nulos, completando assim o que falta para que o número de incógnitas seja igual ao de equações.

Lembre-se que, no caso do método de adição, o sistema fácil de resolver a que chegamos tinha:

- (1) uma equação linear nas variáveis x e y ;
- (2) uma equação linear apenas na variável y .

Suponhamos, para simplificar a análise, que a equação linear (2) tenha uma única solução. Para resolver o sistema, determinamos esta solução, que chamaremos de y_0 , a partir de (2) e a substituímos no lugar de y em (1). O resultado é uma equação linear na variável x que, sob as hipóteses feitas na página 57, sempre pode ser resolvida, retornando como solução, um valor x_0 . A solução do sistema será, então, $x = x_0$ e $y = y_0$.

Podemos generalizar isto para um sistema com n equações e n incógnitas x_1, \dots, x_n supondo que

- a primeira equação é linear nas variáveis x_1, \dots, x_n ;
- a segunda equação é linear nas variáveis x_2, \dots, x_n ;
- a terceira equação é linear nas variáveis x_3, \dots, x_n ;
- \vdots
- a $(n - 1)$ -ésima equação é linear nas variáveis x_{n-1}, x_n ;
- a n -ésima equação é linear apenas na variável x_n .

Note que a primeira equação pode depender de todas as variáveis, a segunda não pode depender da variável x_1 , a terceira não pode depender da variável x_2 , e assim por diante até a n -ésima equação, que dependerá apenas da variável x_n . Um sistema deste tipo é chamado de *triangular superior* por causa da forma que toma quando escrevemos uma equação abaixo da outra. Por exemplo, denotando por $A_{i,j}$ os coeficientes das variáveis e

por b_1, \dots, b_n os termos constantes, os sistemas triangulares superiores têm a forma

$$(27) \quad \begin{aligned} A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + A_{1,3}x_3 + \dots + A_{1,n}x_n &= b_1 \\ A_{2,2}x_2 + A_{2,3}x_3 + \dots + A_{2,n}x_n &= b_2 \\ A_{3,3}x_3 + \dots + A_{3,n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ A_{n,n}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Sempre que tratarmos de sistemas triangulares superiores, suporemos que suas equações foram ordenadas de modo que, na i -ésima equação, os coeficientes das incógnitas x_1, \dots, x_{i-1} sejam todos nulos. Isto significa que o sistema tem a forma de (27).

Antes de prosseguir, convém ilustrar como os sistemas triangulares superiores podem ser resolvidos considerando um exemplo numérico. Seja

$$\begin{aligned} x + 3y + z + w &= 1 \\ 2y - z + 5w &= 6 \\ 5z - w &= 2 \\ 4w &= 12 \end{aligned}$$

Como a quarta e última equação depende apenas de uma variável (neste exemplo w), podemos resolvê-la obtendo $w = 3$. Substituindo este valor para w nas três equações anteriores,

$$\begin{aligned} x + 3y + z + 3 &= 1 \\ 2y - z + 15 &= 6 \\ 5z - 3 &= 2, \end{aligned}$$

que pode ser reescrito na forma

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= -2 \\ 2y - z &= -9 \\ 5z &= 5. \end{aligned}$$

Como este novo sistema linear também é triangular superior, podemos resolver a última equação, obtendo $z = 1$. Substituindo o valor de z nas duas primeiras equações deste sistema,

$$\begin{aligned} x + 3y + 1 &= -2 \\ 2y - 1 &= -9, \end{aligned}$$

que equivale a

$$\begin{aligned} x + 3y &= -3 \\ 2y &= -8. \end{aligned}$$

Mais uma vez, trata-se de um sistema triangular superior que, uma vez resolvido, nos dá $y = -4$ e $x = 9$. Portanto, o sistema original tem solução

$$x = 9, \quad y = -4, \quad z = 1 \text{ e } w = 3.$$

Certamente você percebeu que se trata de um procedimento recursivo. Voltando ao caso geral, a solução da última equação nos permite encontrar o valor da variável x_n . Substituindo este valor nas $n - 1$ equações anteriores, o sistema resultante será necessariamente triangular superior. Para provar isto no caso geral, considere novamente o sistema (27). Supondo que $A_{nn} \neq 0$, podemos resolver a última equação, obtendo

$$x_n = \frac{b_n}{A_{n,n}}.$$

Denotando este número por r , vamos substituí-lo no lugar de x_n nas $n - 1$ primeiras equações do sistema. Com isto, as parcelas que envolvem x_n nestas equações tornam-se constantes, ao passo que as parcelas que envolvem x_1, \dots, x_{n-1} não são afetadas. Agrupando os termos constantes do lado direito de cada equação, o sistema resultante é

$$\begin{aligned} A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + A_{1,3}x_3 + \dots + A_{1,n-1}x_{n-1} &= b_1 - rA_{1,n} \\ A_{2,2}x_2 + A_{2,3}x_3 + \dots + A_{2,n-1}x_{n-1} &= b_2 - rA_{2,n} \\ A_{3,3}x_3 + \dots + A_{3,n-1}x_{n-1} &= b_3 - rA_{3,n} \\ &\vdots \\ A_{n-1,n-1}x_{n-1} &= b_{n-1} - rA_{n-1,n} \end{aligned}$$

Este sistema de $n - 1$ equações nas incógnitas x_1, \dots, x_{n-1} é claramente triangular superior, o que nos permite continuar o procedimento recursivamente. Note, entretanto, que para que a recursão possa de fato ocorrer, é necessário que $A_{i,i} \neq 0$, para todo $1 \leq i \leq n$. Por analogia com as matrizes (analogia esta que exploraremos detalhadamente mais adiante) dizemos que estes são os *coeficientes diagonais* do sistema (27). Este algoritmo para a solução de sistemas triangulares superiores é conhecido como *substituição reversa*, porque os valores das incógnitas são substituídos da última para a primeira equação.

Portanto, dado um sistema triangular superior de n equações x_1, \dots, x_n , podemos calcular o valor de x_n a partir da última equação e substituí-lo nas demais equações obtendo um novo sistema triangular superior, desta vez com n equações nas incógnitas x_1, \dots, x_{n-1} . Isto nos dá um algoritmo recursivo que podemos usar para resolver completamente o sistema. Portanto, sob a hipótese de que não há posições nulas na diagonal, um sistema triangular superior sempre tem uma única solução. Quando isto ocorre dizemos que o sistema é *determinado*, porque só há um valor possível para cada variável.

Mas o que ocorre se o sistema tiver zeros ao longo das posições diagonais? Por exemplo, aplicando o passo recursivo duas vezes ao sistema

$$(28) \quad \begin{aligned} x + 3y + z + w &= 1 \\ -z + 5w &= 6 \\ 4z - w &= 2 \\ 2w &= 12 \end{aligned}$$

descobrimos que $w = 6$ e que $z = 2$. Portanto, o sistema a ser resolvido na terceira passagem da recursão será

$$\begin{aligned} x + 3y &= -7 \\ 0 &= -22 \end{aligned}$$

que é evidentemente *insolúvel* ou *impossível*. Por outro lado, se o sistema fosse

$$\begin{aligned} x + 3y + z + w &= 1 \\ -z + 5w &= 28 \\ 4z - w &= 2 \\ 2w &= 12 \end{aligned}$$

então ao final das duas primeiras passagens pelo passo recursivo teríamos

$$\begin{aligned} x + 3y &= -7 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Reescrevendo esta última equação na forma $0 \cdot y = 0$, verificamos que qualquer valor de y a satisfaz. Como podemos achar um valor de x para cada um destes valores de y , o sistema tem infinitas soluções. Com isto podemos descrever a solução do sistema por

$$x = -7 - 3y_0, \quad y = y_0, \quad z = 2 \text{ e } w = 6;$$

em que y_0 foi a solução escolhida para y . Para que não reste dúvida quanto a este ponto, convém insistir que para cada y_0 escolhido temos uma solução do sistema; por exemplo, escolhendo $y_0 = 0$, encontramos a solução

$$x = -7, \quad y = 0, \quad z = 2 \text{ e } w = 6;$$

ao passo que tomando $y_0 = 4$, encontramos

$$x = -19, \quad y = 4, \quad z = 2 \text{ e } w = 6;$$

e assim por diante. Os sistemas para os quais existe uma infinidade de soluções são chamados de *indeterminados*. Portanto, a existência de coeficientes nulos ao longo da diagonal faz com o sistema possa ser impossível ou indeterminado.

Como os exemplos anteriores ilustram, a análise do caso em que há coeficientes nulos ao longo da diagonal pode ser um tanto trabalhosa. Felizmente há uma maneira de contornar este problema, que consiste em exigir que o sistema seja, não apenas triangular

superior, mas que esteja em *forma escada*; isto é, que cada equação do sistema tenha sempre uma variável a menos do que a equação anterior. Assim, se na k -ésima linha, a variável x_ℓ for a de menor índice cujo coeficiente não é nulo, então as variáveis com coeficientes não nulos na $k+1$ -ésima linha não podem ter índices menores do que $\ell+1$. Apesar de tais sistemas serem claramente triangulares superiores, nem todo sistema triangular superior está na forma escada. Por exemplo,

$$\begin{aligned}x + 3y + z + w &= 1 \\ -z + 5w &= 28 \\ 4z - w &= 2 \\ 2w &= 12,\end{aligned}$$

é triangular superior, mas não está na forma escada. Observe que um sistema na forma escada pode “pular um degrau”, como é o caso de

$$\begin{aligned}x + 3y + z + w &= 1 \\ z + 5w &= 28 \\ 9w &= 2.\end{aligned}$$

Sistemas na forma escada não estão sujeitos a fenômenos como o do exemplo (28), cuja impossibilidade só conseguimos detectar a meio caminho de sua resolução. Isto ocorre porque, um sistema em escada só pode ser impossível se sua última equação não tiver solução. Digamos, por exemplo, que

$$E_1 = 0, \dots, E_n = 0,$$

sejam as equações de um sistema linear e suponhamos que, para um dado inteiro k entre 1 e n , a primeira incógnita com coeficiente não nulo na equação E_k é x_ℓ . Se este sistema está na forma escada, então

- $\ell \geq k$;
- as equações $E_{k+1} = 0, \dots, E_n = 0$ dependem apenas das variáveis $x_{\ell+1}, \dots, x_n$.

Isto significa que, se encontramos números reais $\alpha_{\ell+1}, \dots, \alpha_n$ que constituam uma solução de $E_{k+1} = 0, \dots, E_n = 0$, então o valor de x_ℓ pode ser determinado a partir da equação $E_k = 0$. Afinal, x_ℓ tem coeficiente não nulo nesta equação. Como este argumento se aplica a todos os possíveis valores de k para os quais $1 \leq k < n$, somente a última equação pode ser impossível.

E se o sistema for indeterminado? A única maneira disto acontecer é se a escada que o sistema forma pular um degrau, caso contrário teremos um sistema triangular sem nenhuma posição nula ao longo da diagonal, que será inevitavelmente determinado. Por outro lado, dizer que o sistema pulou um degrau significa que há uma equação a menos intercalada, de modo que o sistema tem menos equações (não nulas!) do que incógnitas.

As considerações do parágrafo anterior mostram que, neste caso, se a última equação não nula for *possível*, então o sistema terá solução. Por outro lado, como há mais equações que incógnitas, teremos incógnitas sobre as quais não está sendo imposta nenhuma restrição, de modo que o sistema será mesmo indeterminado. Convém resumir tudo isto na forma de uma proposição, para referência futura.

PROPOSIÇÃO 2.2. *Seja S um sistema em forma escada com n equações e n incógnitas. Então o sistema é:*

determinado: *se não há posições nulas ao longo da diagonal;*

indeterminado: *se há menos equações não nulas que incógnitas e a última equação diferente de zero tem solução;*

impossível: *se a última equação diferente de zero não tiver solução.*

2.3. Eliminação gaussiana. Tendo determinado que os sistemas fáceis de resolver são os triangulares superiores, resta-nos descobrir como proceder para reduzir um sistema geral a esta forma. Começaremos experimentando converter

$$(29) \quad \begin{aligned} x + y + z + w &= 1 \\ 2x + 3y + z + 5w &= 5 \\ x + 7y - z + 2w &= 3 \\ 5x - y - 3z + w &= 7, \end{aligned}$$

em um sistema triangular superior. Na medida do possível, gostaríamos de usar a mesma estratégia do método de adição: multiplicar uma equação por uma constante cuidadosamente escolhida e somá-la à equação seguinte. Por exemplo, multiplicando a primeira equação do sistema acima por -2 e somando o resultado à segunda equação, obtemos

$$y - z + 3w = 3.$$

Substituindo a segunda equação do sistema original por esta, o sistema resultante será

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 1 \\ y - z + 3w &= 3 \\ x + 7y - z + 2w &= 3 \\ 5x - y - 3z + w &= 7. \end{aligned}$$

Para chegar a um sistema triangular superior ainda precisamos eliminar as variáveis x e y na terceira equação e x , y e z na última. Ao invés de tentar fazer isto diretamente, vamos proceder de maneira recursiva. Assim, usando a primeira equação, vamos eliminar o termo em x das duas últimas equações do sistema. Para isto, substituímos a terceira equação por sua soma com o produto da primeira equação por -1 e a quarta equação por sua soma com

o produto da primeira equação por -5 , do que resulta o sistema

$$\begin{aligned}x + y + z + w &= 1 \\y - z + 3w &= 3 \\6y - 2z + w &= 2 \\-6y - 8z - 4w &= 2.\end{aligned}$$

Para transformar este último sistema para a forma triangular superior, basta converter a esta forma o sistema

$$\begin{aligned}y - z + 3w &= 3 \\6y - 2z + w &= 2 \\-6y - 8z - 4w &= 2.\end{aligned}$$

que tem apenas três equações em três incógnitas, uma equação e uma incógnita a menos que o sistema original. Substituindo a segunda equação do sistema três por três por ela própria mais -6 vezes a primeira equação e procedendo de maneira análoga para sua última equação, obtemos

$$\begin{aligned}y - z + 3w &= 3 \\4z - 17y &= -16 \\-14z + 14w &= 20,\end{aligned}$$

e o problema mais uma vez se reduz a transformar em forma triangular um sistema menor, desta vez

$$\begin{aligned}4z - 17y &= -16 \\-14z + 14w &= 20,\end{aligned}$$

o que pode ser feito multiplicando por 3 a primeira linha deste sistema dois por dois e somando o resultado à última linha, do que resulta

$$\begin{aligned}4z - 17y &= -16 \\-\frac{91}{2}w &= -36.\end{aligned}$$

Reunindo as equações simplificadas, obtemos o sistema triangular superior

$$\begin{aligned}(30) \quad x + y + z + w &= 1 \\y - z + 3w &= 3 \\4z - 17y &= -16 \\-\frac{91}{2}w &= -36.\end{aligned}$$

que pode ser facilmente resolvido por substituição reversa, produzindo a solução

$$x = \frac{6}{7}, \quad y = -\frac{1}{91}, \quad z = -\frac{58}{91} \quad \text{e} \quad w = \frac{72}{91}.$$

Uma análise, ainda que superficial, dos cálculos realizados acima mostra que se trata de um procedimento recursivo baseado em uma operação inteiramente similar à utilizada no método de adição. Mais precisamente, dadas duas equações E e E' diremos que a operação que consiste em

escolher uma constante c de modo que $cE + E'$ tenha uma incógnita a menos que E ,

é uma *operação elementar* entre as linhas E e E' . Supondo que o sistema tem n equações em n incógnitas, aplicamos esta operação $n - 1$ vezes, de modo a eliminar uma das incógnitas de $n - 1$ das equações dadas. Estas $n - 1$ equações formam então um sistema com $n - 1$ incógnitas ao qual o mesmo procedimento pode ser aplicado recursivamente. Este algoritmo, conhecido como *método de eliminação de Gauss*, pode ser aplicado a qualquer sistema linear. Como uma incógnita é eliminada a cada passo da recursão, o sistema resultante ao final será triangular superior e, portanto, facilmente resolvido usando os métodos do artigo 2.2.

Naturalmente, para que os valores retornados por este algoritmo sejam soluções do sistema original é preciso que ele e o sistema triangular superior tenham exatamente as mesmas soluções. Mas isto segue da proposição 2.1, que foi deliberadamente formulada sem que o número de incógnitas nas equações fosse especificado, porque a mesma demonstração funciona se há duas ou qualquer outra quantidade delas presentes nas equações. Talvez você esteja pensando: “tudo bem, mas que só tratamos do caso em que há duas equações, disto não há como escapar”. Sem dúvida, mas na verdade isto basta. Afinal de contas, este algoritmo pode ser considerado como consistindo de uma sucessão de operações elementares aplicadas a vários *pares* de linhas. Naturalmente a palavra chave aqui é *par*: a cada operação realizada, somente uma linha é alterada por outra, as demais ficam como estão. Por isto basta saber que uma solução é comum a duas equações E e E' se, e somente se, é uma solução comum a E e $cE + E'$, que é exatamente o que a proposição 2.1 nos diz.

No próximo artigo veremos uma maneira mais prática de executar este algoritmo. Entretanto, convém desde já chamar a atenção para o fato de que a afirmação, feita acima, de que podemos aplicá-lo a *qualquer sistema linear* deve ser tomada com uma boa dose de cautela. Considere, por exemplo, o sistema

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\x + y + 2z &= 3 \\x + 2y - z &= 4.\end{aligned}$$

Usando a primeira equação para eliminar a variável x das outras duas equações, obtemos

$$x + y + z = 1$$

$$z = 2$$

$$y - 2z = 3.$$

Note que y não pode ser eliminado da última equação por uma operação elementar, já que seu coeficiente na segunda equação é nulo. Mas por que desejaríamos fazer isto? Afinal, basta trocar as duas últimas equações entre si e o sistema já está na forma triangular superior, o que basta para nossos propósitos. Voltaremos a este ponto no próximo artigo.

2.4. Eliminação em matrizes. Ao contrário do que aconteceu no método de solução de sistemas triangulares superiores por substituição reversa, as variáveis desempenham um papel totalmente secundário no algoritmo de eliminação. De fato, nunca substituímos nenhum valor nas variáveis, elas servem apenas como marcadores de posição, para sabermos quais coeficientes podem ser somados com quais outros coeficientes. Mas, sejamos realistas, para isto não precisamos escrever as variáveis, basta-nos escrever os coeficientes de uma mesma variável sistematicamente uns sobre os outros numa tabela ou, usando a terminologia da álgebra linear, numa matriz, conhecida como *matriz aumentada do sistema*. Por exemplo,

$$(31) \quad \begin{aligned} x + y + z + w &= 1 \\ 2x + 3y + z + 5w &= 5 \\ x + 7y - z + 2w &= 3 \\ 5x - y - 3z + w &= 7, \end{aligned}$$

tem como matriz aumentada

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 7 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & -3 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Agora, executando uma operação elementar entre as duas primeiras equações de (31), obtemos o sistema

$$x + y + z + w = 1$$

$$y - z + 3w = 3$$

$$x + 7y - z + 2w = 3$$

$$5x - y - 3z + w = 7,$$

cujas matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & -3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

A operação elementar que efetuamos sobre as duas primeiras equações de (31) pode ser facilmente reformulada em termos das linhas da matriz. Considerando as linhas de A como matrizes 1×5 , a operação executada substituiu a segunda linha por ela própria, somada a -2 vezes a primeira linha:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Em geral, se L e L' são duas linhas de uma matriz M e c é um número real, diremos que

ao substituir L' por $L' + cL$ em M efetuamos uma *operação elementar por linha*.

A não ser que c ou L sejam nulos, a matriz que resulta da aplicação de uma operação elementar por linha a M é diferente de M . Naturalmente, quando aplicamos uma operação elementar por linha como parte do método de eliminação, escolhemos a constante c de modo a eliminar a posição não nula mais à esquerda de L' , desde que isto seja possível. A passagem de uma matriz à outra, efetuada a partir de uma operação elementar por linha, será denotada por uma seta \rightarrow . Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 7 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & -3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & -3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

no caso da eliminação efetuada acima. Dando continuidade à aplicação da versão matricial do processo de eliminação a este exemplo, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & -3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & -2 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -8 & -4 & 2 \end{bmatrix},$$

com o quê todas as posições abaixo de 1, 1 são agora nulas. A propósito, a entrada da posição 1, 1 é conhecida como o pivô desta etapa da eliminação. Em geral, o *pivô de uma linha* é a entrada não nula mais à esquerda desta linha. Quando o pivô da i -ésima linha está na posição i, j usamos operações elementares por linha para anular todas as posições

da j -ésima coluna de uma matriz que ficam abaixo de sua i -ésima linha; isto é, aquelas localizadas nas linhas $i + 1$ até n .

Passando à segunda coluna, usamos a entrada da posição 2, 2 como pivô para anular, em dois passos, cada uma das posições desta coluna que ficam abaixo de 2, 2, como segue

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -8 & -4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -17 & -16 \\ 0 & -6 & -8 & -4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -17 & -16 \\ 0 & 0 & -14 & 14 & 20 \end{bmatrix}$$

Finalmente a entrada da posição 3, 3 é usada como pivô para eliminar 4, 3, e resta a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -17 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -91/2 & 36 \end{bmatrix}$$

da qual o sistema triangular superior pode ser facilmente obtido, bastando para isto lembrar que os coeficientes das variáveis foram escritos nas colunas na ordem em que as variáveis aparecem no sistema. Portanto, a primeira coluna corresponde aos coeficientes de x , a segunda aos de y , e assim por diante. Fazendo isto, obtemos o sistema (30) da página 65, como você pode facilmente verificar.

É importante entender que não há nada a *provar* sobre a versão matricial do método de eliminação. Afinal, do ponto de vista matemático, a única coisa que fizemos foi escrever os coeficientes do sistema em uma matriz, em vez de usar as variáveis como marcadores de posição, como vínhamos fazendo até aqui. A operação elementar por linha não passa de uma transcrição direta para a linguagem das matrizes da operação elementar sobre as equações introduzida no artigo 2.3. Porém, uma vez que o método foi traduzido em termos matriciais, nada nos impede de aplicá-lo a qualquer matriz, mesmo uma que não seja matriz aumentada de nenhum sistema.

Para um outro exemplo, um pouco menos ingênuo, considere o sistema

$$\begin{aligned} x + 4y + 6z + w &= 11 \\ 2x + 8y + 5z - w &= 9 \\ 3x + 2y + 2z - 5w &= 5 \\ 4x + 2y - z - 3w &= 1 \end{aligned}$$

cujas matriz aumentada é

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 6 & 1 & 11 \\ 2 & 8 & 5 & -1 & 9 \\ 3 & 25 & 2 & -5 & 5 \\ 4 & 2 & -1 & -3 & 1 \end{array} \right].$$

Desta vez, usamos uma barra vertical para separar os coeficientes das variáveis dos termos constantes. Esta barra não é parte da matriz, mas sim um recurso visual que nos ajuda a distinguir dois grupos de números com significados distintos e evitar confusões e erros. Um computador, por exemplo, não requer tais artifícios.

Usando operações elementares por linha para anular as posições da primeira coluna de A abaixo de 1, 1, obtemos a matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 6 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & -7 & -3 & -13 \\ 0 & -7 & -16 & -8 & -28 \\ 0 & -14 & -25 & -7 & -43 \end{array} \right].$$

Estritamente falando, o processo de eliminação descrito anteriormente não pode continuar a partir deste ponto. De fato, isto requereria usar como pivô a entrada da posição 2, 2 que, na matriz acima, é igual a zero. Entretanto, estas linhas são apenas uma representação abreviada das equações do sistema original. Como trocar a ordem das equações não afeta o conjunto solução de um sistema, estamos livres para permutar as linhas de qualquer maneira que desejarmos. No caso da matriz acima, reposicionaremos a segunda linha, que será movida para o lugar da última, de modo que a matriz se torna

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 6 & 1 & 11 \\ 0 & -7 & -16 & -8 & -28 \\ 0 & -14 & -25 & -7 & -43 \\ 0 & 0 & -7 & -3 & -13 \end{array} \right],$$

com o quê o processo de eliminação pode continuar. Tomando a entrada -7 da posição 2, 2 como pivô, anulamos a posição imediatamente abaixo dela, obtendo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 6 & 1 & 11 \\ 0 & -7 & -16 & -8 & -28 \\ 0 & 0 & 7 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & -7 & -3 & -13 \end{array} \right].$$

Finalmente, usando a entrada 7 da posição 3, 3 como pivô, obtemos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 6 & 1 & 11 \\ 0 & -7 & -16 & -8 & -28 \\ 0 & 0 & 7 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{array} \right],$$

que é triangular superior. O sistema triangular correspondente, cujas equações são,

$$\begin{aligned} x + 4y + 6z + w &= 11 \\ -7y - 16z - 8w &= -28 \\ 7z + 9w &= 13 \\ 6w &= 0 \end{aligned}$$

tem solução

$$x = \frac{41}{49}, \quad y = -\frac{12}{49}, \quad z = \frac{13}{7}, \quad \text{e} \quad w = 0.$$

Como veremos na seção 3, a troca de linhas causará sérios problemas quando o resultado da eliminação gaussiana é interpretado como uma decomposição de matrizes. Por isso, vamos usar qualificar o método de eliminação que requer a troca de linhas pela expressão com pivoteamento. Em outras palavras, a *eliminação com pivoteamento* é aquela que usa dois tipos de operações: as operações elementares por linha e a troca de duas linhas entre si.

Para chamar a atenção para a necessidade de trocar linhas ao longo da aplicação do método de eliminação acrescentamos a expressão *com pivoteamento*. À primeira vista, usar tal precisão por conta de meras trocas de linha parece apontar excesso de zelo. Entretanto, como veremos no artigo 3.3, a troca de linhas pode levar a resultados incorretos quando aplicamos a eliminação gaussiana como parte de outros algoritmos.

Ainda há um detalhe importante sobre a eliminação que não apareceu nos exemplos anteriores. Considere o sistema

$$\begin{aligned} x + 3y + z + w &= 1 \\ x + 3y + 6w &= 29 \\ x + 3y + 4z + 5w &= 31 \\ x + 3y + 16z + 2w &= 37 \end{aligned}$$

cujas matriz aumenta é

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 6 & 29 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 31 \\ 1 & 3 & 16 & 2 & 37 \end{array} \right]$$

aplicando eliminação gaussiana a esta matriz, obtemos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 28 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 30 \\ 0 & 0 & 15 & 1 & 36 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 28 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 42 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & 114 \\ 0 & 0 & 0 & 76 & 456 \end{array} \right]$$

Como a última linha é igual a quatro vezes a anterior, obtemos, finalmente

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & 114 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

que corresponde ao sistema triangular superior

$$\begin{aligned} x + 3y + z + w &= 1 \\ -z + 5w &= 28 \\ 19w &= 114, \end{aligned}$$

cujas soluções são

$$x = -7 - 3y, \quad z = 2, \quad \text{e} \quad w = 6;$$

de modo que o sistema é indeterminado.

Observe que se trata, na verdade, de um sistema em forma escada, o que sugere a seguinte definição. Uma matriz A de tamanho $n \times n$ está em *forma escada*, ou é *escalorada por linhas*, quando a seguinte condição for satisfeita para todo $1 \leq i \leq n$:

se a primeira entrada não nula da i -ésima linha está na j -ésima coluna, então a da $i + 1$ -ésima linha não pode aparecer antes da $j + 1$ -ésima coluna.

Naturalmente, a *primeira entrada não nula* de uma dada linha é aquela entrada não nula que aparece mais à esquerda naquela linha. Aplicada a uma matriz qualquer, a eliminação gaussiana sempre retorna uma matriz em forma escada. De fato, se as linhas i e j de uma matriz A têm primeira entrada não nula na coluna k , podemos usar $A_{i,k}$ como pivô para anular $A_{j,k}$, encurtando assim uma das linhas.

2.5. Outros exemplos. A melhor maneira de descrever exemplos variados de sistemas lineares é tentar entender como um sistema se comporta quando variamos os valores dos seus coeficientes. Para tornar isto viável do ponto de vista prático, permitiremos que variem apenas alguns coeficientes, que são conhecidos como os *parâmetros* do sistema.

Por exemplo, dado que o sistema

$$\begin{cases} x - ky + z & = 0 \\ kx + (1 - k^2)y + (1 + k)z & = k \\ kx - ky + z & = 1 - k \end{cases}$$

tem k como seu único parâmetro, podemos nos perguntar para que valores de k o sistema é determinado, indeterminado ou impossível. A matriz aumentada deste sistema, que é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -k & 1 & 0 \\ k & 1 - k^2 & 1 + k & k \\ k & -k & 1 & 1 - k \end{array} \right],$$

tem forma escalonada igual a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 - k^2 & -k^3 + k^2 - k + 1. \end{array} \right],$$

que corresponde ao sistema triangular superior

$$\begin{aligned} x - ky + z &= 0 \\ y + z &= k \\ (1 - k^2)z &= -k^3 + k^2 - k + 1. \end{aligned}$$

Note que se $k = 1$ todos os coeficientes da última equação se anulam, de modo que, neste caso, o sistema terá infinitas soluções; uma para cada valor que escolhermos para z . Por outro lado, se $k = -1$, então a última equação se torna $0 = 4$, o que torna o sistema impossível neste caso. Finalmente, se $k \neq \pm 1$ a última equação tem uma única solução, a saber

$$z = \frac{-k^3 + k^2 - k + 1}{(1 - k^2)};$$

da qual podemos deduzir valores para y e x usando o método de substituição reversa. Resumindo, o sistema é:

- determinado se $k \neq \pm 1$;
- indeterminado se $k = 1$;
- impossível se $k = -1$.

Note que, neste exemplo, o comportamento deste sistema ficou completamente determinado por sua última equação. Isto porque, tendo escolhido k de modo que exista um valor de z que seja solução da última equação, valores correspondentes para x e y sempre podem ser encontrados. Mais precisamente, embora os valores de x e y possam depender de k ; a possibilidade de encontrá-los não é afetada pelo valor de k escolhido. Como mostra nosso próximo exemplo, nem sempre as coisas são tão simples.

Mais uma vez trata-se de um sistema a um parâmetro, cujas equações são

$$\begin{aligned}x + ky + 7z + 9w &= k \\3x + (4k + 1)y + 22z + 28w &= 3k + 3 \\2x + (3k + 1)y + (2k + 15)z + 20w &= 2k - 5 \\x + (3k + 2)y + (2k + 9)z + (k + 10)w &= k + 30.\end{aligned}$$

Aplicando eliminação gaussiana à matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & k & 7 & 9 & k \\ 3 & (4k + 1) & 22 & 28 & 3k + 3 \\ 2 & (3k + 1) & (2k + 15) & 20 & 2k - 5 \\ 1 & (3k + 2) & (2k + 9) & (k + 10) & k + 30 \end{array} \right]$$

obtemos a matriz escalonada

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & k & 7 & 9 & k \\ 0 & k + 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2k & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & k - 2 & 16 \end{array} \right]$$

que corresponde ao sistema triangular superior

$$\begin{aligned}x + ky + 7z + 9w &= k \\(k + 1)y + z + w &= 3 \\2kz + w &= -8 \\(k - 2)w &= 16\end{aligned}$$

Para que a última equação tenha solução é preciso que $k \neq 2$. Portanto, se $k = 2$ já temos que o sistema é impossível. Entretanto, como há k em outras posições da diagonal, a análise precisa continuar. Se $k = 0$, o sistema se torna

$$\begin{aligned}x + 7z + 9w &= 0 \\y + z + w &= 3 \\w &= -8 \\-2w &= 16;\end{aligned}$$

que é indeterminado, pois as duas últimas equações coincidem e nenhuma restrição é imposta a z . Finalmente, se $k = -1$, o sistema é

$$\begin{aligned}x + ky + 7z + 9w &= k \\z + w &= 3 \\-2z + w &= -8 \\-3w &= 16\end{aligned}$$

que nos dá $w = 16/3$. Como

$$z = \frac{1}{2} \left(8 + \frac{16}{3} \right) = \frac{20}{3}$$

da penúltima equação, ao passo que

$$z = 3 - \frac{16}{3} = \frac{7}{3}$$

da antepenúltima equação, podemos concluir que o sistema é impossível neste caso. Portanto, o sistema é

determinado: se $k \neq -1, 0, 2$;

impossível: se $k = 2$ ou $k = -1$;

indeterminado: se $k = 0$.

Finalmente, considere o sistema a três parâmetros

$$\begin{cases} x + 8y - 2z &= a \\ 5x + 4y - 2z &= b \\ 7x - 16y + 2z &= c. \end{cases}$$

Desta vez, queremos c em função de a e b de modo que o sistema seja determinado, indeterminado ou impossível. A matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 & -2 & a \\ 5 & 4 & -2 & b \\ 7 & -16 & 2 & c \end{bmatrix}$$

tem forma escalonada igual a

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 & -2 & a \\ 0 & -36 & 8 & b - 5a \\ 0 & 0 & 0 & 3a - 2b + c \end{bmatrix}$$

à qual corresponde o sistema triangular superior

$$\begin{aligned}x + 8y - 2z &= a \\ -36y + 8z &= b - 5a \\ 0 &= 3a - 2b + c\end{aligned}$$

Para começar, o sistema nunca tem uma única solução, porque a única maneira da última equação fazer sentido é se seu termo constante for igual a zero. Isto ocorre quando $c = -3a + 2b$, de modo que, sob esta condição o sistema tem solução; na verdade, infinitas soluções. Resumindo, o sistema é:

determinado: nunca;

impossível: quando $c \neq -3a + 2b$;

indeterminado: quando $c = -3a + 2b$.

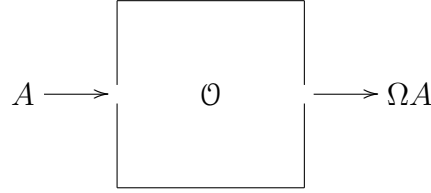
3. Decomposição de matrizes

Talvez devamos classificar a versão do método de eliminação gaussiana estudado na seção anterior como clássica, em oposição à versão moderna, que estudaremos nesta seção. Ambas são versões matriciais do método de adição, generalizado para sistemas com mais de duas incógnitas. Entretanto, na versão tradicional, as matrizes são apenas uma maneira conveniente de carregar o mínimo de informação possível, mantendo os coeficientes na posição correta, mas eliminando as variáveis e os símbolos para as operações de soma e multiplicação. A versão moderna, ao contrário, é intrinsecamente matricial e não faz sentido se não adotarmos esta linguagem, porque seu resultado é uma decomposição da matriz dada como um produto de duas outras matrizes, uma das quais é triangular superior, ao passo que a outra é triangular inferior. Para chegar a isto começamos investigando como as operações elementares por linha podem ser descritas em termos de produtos de matrizes.

3.1. Matrizes elementares. Nosso ponto de partida é exatamente o pressuposto de que operações elementares por linha podem ser descritas em termos de produtos de matrizes. Supondo que isto seja verdade, tentaremos descobrir que matriz deveria efetuar esta operação. Uma vez identificada esta matriz, uma mera multiplicação de matrizes basta para provar que o pressuposto está correto.

Considerando um contexto um pouco mais geral, digamos que \mathcal{O} é um *oráculo*, um algoritmo que pode ser aplicado a qualquer matriz $n \times n$, mas cujo funcionamento interno desconhecemos. Imagine, agora, que descobrimos, ou fomos informados, de que \mathcal{O} apenas

multiplica a matriz de entrada por uma matriz desconhecida Ω .



Neste caso, decifrar o oráculo resume-se a identificar Ω . Mas isto é muito fácil de fazer: basta dar como entrada a \mathcal{O} a matriz identidade $n \times n$. Como \mathcal{O} atua multiplicando por Ω a matriz que lhe foi dada como entrada, a saída neste caso será a própria Ω .

Passando ao caso que nos interessa, sejam $1 \leq i < j \leq n$ inteiros e suponhamos que \mathcal{O} é o oráculo que, ao receber uma matriz A , retorna a matriz obtida somando à linha j de A o produto de sua linha i por um escalar r . Levando em conta que a única posição não nula da linha i da matriz identidade I ocorre na diagonal e vale 1, podemos concluir que ao receber I este oráculo retornará a matriz

$$C_{ji}(r) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

em que o r está localizado na posição ji . Portanto, podemos afirmar que:

se \mathcal{O} for implementado como a multiplicação da matriz dada na entrada por alguma matriz Ω , então $\Omega = C_{ji}(r)$.

Resta-nos verificar que $C_{ji}(r)A$ de fato é igual à matriz obtida a partir de A substituindo-se sua j -ésima linha por ela própria somada a r vezes sua i -ésima linha. Para isto, convém reescrever $C_{ji}(r)$ na forma

$$C_{ji}(r) = I + rE_{ji},$$

em que E_{ji} é a matriz $n \times n$ que tem todas as posições nulas, exceto a posição ji , que vale 1. A vantagem de escrever $C_{ji}(r)$ desta maneira é que, como

$$A = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n A_{k\ell} E_{k\ell},$$

por (21), então,

$$(32) \quad C_{ji}(r)A = (I + rE_{ji})A = A + rE_{ji}A.$$

Por outro lado, por (22),

$$E_{ji}E_{k\ell} = \begin{cases} E_{j\ell} & \text{se } i = k \\ 0 & \text{se } i \neq k \end{cases}$$

de modo que

$$E_{ji}A = \sum_{k,\ell} A_{k\ell} E_{ji}E_{k\ell} = \sum_{\ell=1}^n A_{i\ell} E_{j\ell};$$

que é uma matriz com zeros em todas as posições, exceto na j -ésima linha, que é igual à i -ésima linha de A . Segue de (32) que $C_{ji}(r)A$ é igual à matriz A , exceto pela j -ésima linha, que será somada a r vezes a i -ésima linha de A ; como pretendíamos que acontecesse. Isto justifica que chamemos de *elementares* às matrizes $C_{ij}(r)$, já que implementam as operações elementares por linha.

Por exemplo, o sistema (31) da página 67 tem

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 7 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & -3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

por matriz aumentada. Para pôr este sistema em forma triangular superior, utilizamos as operações elementares por linha listadas na tabela 1. Para cada uma destas operações escrevemos a matriz elementar correspondente, segundo a receita que acabamos de descobrir.

Operação por linha	matriz elementar
segunda linha menos o dobro da primeira	$C_{21}(-2)$
terceira linha menos a primeira	$C_{31}(-1)$
quarta linha menos o quádruplo da primeira	$C_{41}(-5)$
terceira linha menos o quádruplo segunda	$C_{32}(-6)$
quarta linha mais o quádruplo segunda	$C_{42}(6)$
quarta linha mais sete meios da terceira	$C_{43}(7/2)$

TABELA 1. Operações por linha

Portanto,

$$(33) \quad C_{43}(7/2) \cdot C_{42}(6) \cdot C_{32}(-6) \cdot C_{41}(-5) \cdot C_{31}(-1) \cdot C_{21}(-2) \cdot A$$

deve ser igual à matriz triangular superior

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & -91/2 \end{bmatrix},$$

como é fácil de verificar efetuando as contas. Fácil, mas muito trabalhoso, a não ser que você peça ajuda a um computador.

As matrizes elementares têm duas importantes propriedades que precisamos mencionar porque serão utilizadas mais adiante. A primeira, e mais óbvia, é que qualquer matriz elementar é triangular superior ou triangular inferior. Afinal, uma matriz elementar tem apenas uma posição fora da diagonal. Quando esta posição está acima da diagonal, temos uma matriz triangular superior; quando abaixo, temos uma matriz triangular inferior. Mais precisamente, se $1 \leq i, j \leq n$ são inteiros e $a \in \mathbb{R}$, então a matriz elementar $C_{ij}(a)$ de tamanho $n \times n$ é *triangular inferior* quando $i > j$ e *triangular superior* quando $i < j$. A segunda propriedade, muito mais interessante, afirma que $C_{ij}(a)$ é uma matriz inversível quaisquer que sejam $i \neq j$ e $a \in \mathbb{R}$. Para provar isto basta exibir um inverso para $C_{ij}(a)$, o que é muito fácil, porque o inverso desta matriz é $C_{ij}(-a)$. Para provar isto, lembre-se que, por definição

$$C_{ij}(a) = I + aE_{ij} \text{ ao passo que } C_{ij}(-a) = I - aE_{ij}.$$

Portanto, pelas propriedades da multiplicação de matrizes

$$C_{ij}(a) \cdot C_{ij}(-a) = (I + aE_{ij})(I - aE_{ij}) = I + aE_{ij} - aE_{ij} - a^2E_{ij}^2 = I - a^2E_{ij}^2.$$

Como E_{ij} tem apenas uma posição não nula (a saber, a posição i, j), seu quadrado só pode ser diferente de zero se $i = j$, que nunca é o caso quando tratamos de matrizes elementares. Logo, $E_{ij}^2 = 0$; donde

$$C_{ij}(a) \cdot C_{ij}(-a) = I,$$

como devíamos provar. Esta propriedade é importante o suficiente para que devamos destacá-la em um lema.

LEMA 3.1. *Sejam i e j inteiros positivos distintos menores ou iguais a n e a um número real. A matriz elementar $C_{ij}(a) = I + aE_{ij}$ é inversível e sua inversa é igual a $C_{ij}(-a)$.*

3.2. Representação matricial de um sistema linear. Como já observamos na introdução desta seção, nosso uso de matrizes para resolver sistemas lineares tem sido muito ingênuo. As matrizes serviram somente para deixar mais claras as contas, porque nos permitiram escrever apenas os coeficientes das equações, sem incógnitas e sem os símbolos para as operações. Entretanto, há uma outra maneira de representar um sistema linear em termos de matrizes; só que desta vez o sistema é convertido em uma verdadeira equação

matricial. Além do mais, a tradução matricial do método de eliminação, discutida no artigo anterior, nos permite resolver esta equação matricial. Vejamos como seria feita esta tradução no sistema

$$\begin{aligned}x + y + z + w &= 1 \\2x + 3y + z + 5w &= 5 \\x + 7y - z + 2w &= 3 \\5x - y - 3z + w &= 7,\end{aligned}$$

que estamos considerando desde a página 67. Em primeiro lugar, ao contrário do que fizemos na matriz aumentada, trataremos os coeficientes das variáveis e os termos independentes separadamente. Numa primeira tentativa, podemos escrever o sistema como uma igualdade entre matrizes coluna:

$$\begin{bmatrix} x + y + z + w \\ 2x + 3y + z + 5w \\ x + 7y - z + 2w \\ 5x - y - 3z + w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

O lado direito já é bastante simples, mas não o lado esquerdo. Para simplificá-lo ainda mais, podemos representar os coeficientes e as variáveis em matrizes diferentes, usando a multiplicação de matrizes para combiná-los da maneira desejada:

$$\begin{bmatrix} x + y + z + w \\ 2x + 3y + z + 5w \\ x + 7y - z + 2w \\ 5x - y - 3z + w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}.$$

Desta forma, o sistema original se traduz na equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Naturalmente, o que fizemos neste exemplo é facilmente generalizado, dando origem à seguinte receita. Dado um sistema linear

$$(34) \quad \begin{aligned} A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + A_{1,3}x_3 + \cdots + A_{1,n}x_n &= b_1 \\ A_{2,1}x_1 + A_{2,2}x_2 + A_{2,3}x_3 + \cdots + A_{2,n}x_n &= b_2 \\ A_{3,1}x_1 + A_{3,2}x_2 + A_{3,3}x_3 + \cdots + A_{3,n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ A_{n,1}x_1 + A_{n,2}x_2 + A_{n,3}x_3 + \cdots + A_{n,n}x_n &= b_n \end{aligned}$$

escrevemos seu lado esquerdo como o produto da *matriz do sistema*

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \cdots & A_{2,n} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & \cdots & A_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & A_{n,3} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix}$$

pela matriz coluna X chamada de *matriz das variáveis*,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Já o lado direito de (34) corresponde a uma matriz coluna conhecida como *matriz das constantes*, que representamos por

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Com isto, o sistema (34) equivale à equação matricial

$$AX = b.$$

No próximo artigo veremos como utilizar as matrizes elementares para adaptar o método de eliminação à esta representação matricial de um sistema linear.

3.3. Decomposição LU. Suponhamos que $AX = b$ é a representação matricial de um sistema linear com n equações em n incógnitas. Segundo a receita introduzida na seção anterior, os coeficientes das variáveis aparecem na matriz A de tamanho $n \times n$ e os termos constantes na matriz coluna b . Por isso, para entender como resolver $AX = b$, começamos por aplicar a eliminação gaussiana à matriz A do sistema. Na verdade, estes cálculos não só já foram feitos, como sabemos representá-los em forma matricial.

Por exemplo, as matrizes do sistema (31), antes e depois de sua conversão à forma triangular superior, são, respectivamente

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & -91/2 \end{bmatrix}.$$

A letra U é tradicionalmente usada para designar matrizes triangulares superiores porque, em inglês, tais matrizes são conhecidas como *upper triangular*. Mas é claro que podemos obter a matriz de um sistema a partir de sua matriz aumentada simplesmente apagando a última coluna desta última, já que é nela que ficam guardados os termos constantes. Por isso, podemos reescrever a equação (33) na forma

$$(35) \quad C_{43}(7/2) \cdot C_{42}(6) \cdot C_{32}(-6) \cdot C_{41}(-5) \cdot C_{31}(-1) \cdot C_{21}(-2) \cdot A = U.$$

Denotando o produto de matrizes elementares no lado esquerdo da equação por M , podemos reescrever a equação acima na forma $M \cdot A = U$. Entretanto, como vimos no lema 3.1 da página 79, as matrizes elementares cujo produto define M são, todas elas, inversíveis. Portanto, combinando o lema 3.1 ao exercício 29 da página 43, temos que a matriz inversa M^{-1} existe e é igual a

$$C_{21}(2) \cdot C_{31}(1) \cdot C_{41}(5) \cdot C_{32}(6) \cdot C_{42}(-6) \cdot C_{43}(-7/2).$$

Efetuada este produto, obtemos

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & -7/2 & 1 \end{bmatrix},$$

que é uma matriz triangular inferior. Como de costume, denotaremos esta matriz por L , já que, em inglês, tais matrizes são chamadas de *lower triangular*. Com isto, podemos escrever $A = L \cdot U$. Isto é, escrevemos a matriz A dada como produto de uma matriz triangular inferior L por uma matriz triangular superior U . Os matemáticos, no mais intenso uso de sua capacidade imaginativa, chamam isto de *decomposição LU* da matriz A .

Tudo isto pode ser facilmente generalizado. Seja A uma matriz $n \times n$ qualquer e digamos que, depois de aplicar eliminação gaussiana *sem pivoteamento*, chegamos a uma matriz triangular superior U . Como cada operação elementar por linha aplicada a A corresponde a multiplicar esta matriz à esquerda por uma matriz elementar, concluímos que existem matrizes elementares C_1, \dots, C_m tais que

$$C_1 \cdots C_m \cdot A = U.$$

Como cada matriz elementar é inversível, temos que

$$A = C_m^{-1} \cdots C_1^{-1} \cdot U.$$

Contudo, pelo lema 3.1 as matrizes $C_1^{-1}, \dots, C_m^{-1}$ são triangulares inferiores, já que isto vale para C_1, \dots, C_m . Como o produto de matrizes triangulares inferiores é também triangular inferior, temos que

$$L = C_m^{-1} \cdots C_1^{-1}$$

é uma matriz triangular inferior e que

$$A = L \cdot U,$$

é o produto de uma matriz triangular inferior L pela matriz U , que é triangular superior. Logo, sempre que for possível reduzir uma matriz A a uma matriz triangular superior pelo método de eliminação *sem pivoteamento*, teremos que A admite uma decomposição LU. Tivemos que acrescentar *sem pivoteamento* porque, nas considerações acima, nunca tratamos do que acontece quando duas linhas da matriz mudam de posição. Voltaremos a isto no artigo 3.5.

Dada a importância da decomposição LU, não podemos prosseguir sem antes considerar como implementar um algoritmo capaz de calcular as matrizes L e U a partir de uma matriz quadrada $n \times n$ dada. A maneira óbvia de proceder consiste em aplicar o método de eliminação gaussiana à matriz A , guardando as matrizes elementares utilizadas para efetuar cada uma das operações por linha. O problema é que, para valores grandes de n , este procedimento consome muita memória. Por exemplo, se $n = 10^k$, precisaremos guardar cerca de 10^{3k} números reais; veja exercício 13. Levando em conta que sistemas com milhares de equações são comuns em aplicações práticas, isto pode facilmente exaurir a memória de um computador.

Há duas saídas plausíveis. A primeira consiste em guardar, não as matrizes elementares, mas sim o mínimo de informações necessárias para que sejamos capazes de reconstruí-las. Na prática isto significa saber quais são as linhas sobre as quais a operação incidiu e que constante multiplicou qual linha, antes de somá-la à outra. A vantagem desta maneira de proceder é que precisamos guardar apenas dois inteiros e um número real para cada operação elementar realizada, com óbvia economia de memória. Nesta versão a matriz triangular inferior só é completamente construída quando se fizer necessária.

A implementação que faremos é mais perdulária no uso de memória, mas tem a vantagem de construir completamente a matriz L , o que a torna mais útil para os propósitos deste livro. A ideia é que, cada vez que aplicamos uma operação por linha à matriz A fazemos o mesmo a uma outra matriz que, ao final da execução, conterá o valor de L^{-1} . Para isto criamos uma nova matriz, digamos \hat{A} , com o dobro das colunas de A , formada por dois blocos $n \times n$. O primeiro destes blocos é a própria matriz A , o segundo é a matriz identidade de mesmo tamanho que A . Assim, podemos representar \hat{A} na forma $[A, I]$. As operações por linha necessárias para calcular U são então aplicadas a toda a matriz \hat{A} , e não apenas às posições na suas n primeiras colunas, que correspondem à matriz A . Para entender aonde queremos chegar com isto, digamos que o esquema abaixo representa o processo de eliminação gaussiana aplicado a A

$$(36) \quad A = A_0 \xrightarrow{\omega_0} A_1 \xrightarrow{\omega_1} A_2 \xrightarrow{\omega_2} \cdots \xrightarrow{\omega_m} A_{m+1} = U,$$

em que ω_j denota a operação elementar por linha aplicada a matriz A_j e da qual resulta a matriz A_{j+1} . Denotando por C_j a matriz elementar correspondente a ω_j , temos que

$$C_j \cdot A_j = A_{j+1}.$$

Encadeando estas equações umas às outras, obtemos

$$U = A_{m+1} = C_m \cdot A_m = C_m \cdot C_{m-1} \cdot A_{m-1} = \cdots = C_m \cdots C_1 \cdot A_1 = C_m \cdots C_1 \cdot C_0 \cdot A_0.$$

Como $A_0 = A$, isto implica que

$$C_m \cdots C_1 \cdot C_0 = L^{-1}.$$

Tendo isto em vista, vejamos o que ocorre se aplicarmos a $\hat{A} = [A, I]$ exatamente as mesmas operações utilizadas em (36). A sequência de operações e matrizes é a seguinte:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \hat{A} & & & & & & \\
 \parallel & & & & & & \\
 [A_0, I] & \xrightarrow{\omega_0} & [C_0 \cdot A, C_0 \cdot I] & & & & \\
 & & \parallel & & & & \\
 & & [A_1, C_0 \cdot I] & \xrightarrow{\omega_1} & [C_1 \cdot A_1, C_1 \cdot C_0 \cdot I] & & \\
 & & & & \parallel & & \\
 & & & & [A_2, C_1 \cdot C_0 \cdot I] & \cdots & \\
 & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & \parallel \\
 & & & & & & [A_{m+1}, C_m \cdots C_0 \cdot I]
 \end{array}$$

Mas I é a matriz identidade, de modo que

$$[A_{m+1}, C_m \cdots C_0 \cdot I] = [U, L^{-1}].$$

Resumindo, mostramos que

$$\hat{A} = [A_0, I] \xrightarrow{\omega_0} [A_1, C_1] \xrightarrow{\omega_1} [A_2, C_2] \xrightarrow{\omega_2} \cdots \xrightarrow{\omega_m} [U, L^{-1}],$$

de modo que o algoritmo desejado pode ser descrito sucintamente da seguinte maneira.

ALGORITMO 3.2. *Dada uma matriz A o algoritmo retorna uma matriz triangular inferior L e uma matriz triangular superior U tais que $A = LU$, ou uma mensagem de erro.*

Inicializa: $\hat{A} = [A, I]$;

laço principal: *calcule a forma escada S de \hat{A} através da eliminação gaussiana sem pivoteamento. Se isto não for possível, retorne uma mensagem de erro e pare;*

saída: *retorne $U = S[1 : n, 1 : n]$ e $L = S[1 : n, n : 2n]^{-1}$.*

Não esqueça que I é a matriz identidade de mesmo tamanho que A . Como estamos supondo que A é uma matriz $n \times n$, este será também o tamanho de I .

Há duas observações importantes que devemos fazer sobre esta descrição do algoritmo. A primeira é que o laço principal pode falhar, já que não estamos permitindo a troca de linhas como parte do procedimento de eliminação. A segunda é que é fácil inverter uma matriz triangular inferior, para isto basta resolver um sistema triangular inferior; veja exercício 7.

3.4. Solução de equações matriciais. De posse da decomposição LU, estamos prontos para resolver um sistema linear representado em forma matricial. Digamos que o sistema tenha n equações em n incógnitas e que sua matriz seja A e sua matriz de termos constantes seja b . Denotando por X for a matriz de variáveis do sistema, podemos representá-la em forma matricial como

$$AX = b.$$

Se $A = LU$ for a decomposição LU de A , então

$$L(UX) = (LU)X = b.$$

Escrevendo $Y = UX$, a solução deste sistema pode ser obtida através da resolução de dois sistemas triangulares. Em primeiro lugar, resolvemos o sistema triangular inferior

$$LY = b$$

obtendo como solução uma matriz coluna Y_0 , que é então usado como matriz de constantes do sistema triangular superior

$$UX = Y_0.$$

Estes dois sistemas são resolvidos por substituição: direta quando a matriz do sistema é triangular inferior e reversa quando é triangular superior.

Voltando ao sistema (31) cuja matriz A tem decomposição LU dada por

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & -7/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & -91/2 \end{bmatrix},$$

podemos resolvê-lo a partir de dois sistemas triangulares. Escrevendo $Y = [x', y', z', w']^t$, o primeiro sistema que devemos resolver é $L \cdot Y = b$, cujas equações são

$$\begin{aligned} x' &= 1 \\ y' + 2x' &= 5 \\ z' + 6y' + x' &= 3 \\ (-7/2)z' - 6y' + 5x' + w' &= 7. \end{aligned}$$

Aplicando o método de substituição direta, obtemos

$$x' = 1, \quad y' = 3, \quad z' = -16 \text{ e } w' = -36.$$

Escrevendo estes valores das variáveis nas entradas de uma matriz 4×1 , temos

$$b' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -16 \\ -36 \end{bmatrix},$$

de modo que o segundo sistema a resolver será $U \cdot X = b'$, cujas equações são

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 1 \\ y - z + 3w &= 3 \\ 4z - 17w &= -16 \\ (-91/2)w &= -36. \end{aligned}$$

Como se trata de um sistema triangular superior, podemos usar substituição reversa para determinar

$$x = 6/7, \quad y = -1/91, \quad z = -58/91 \text{ e } w = 72/91,$$

que já havíamos obtido, por outro método no artigo 2.3.

3.5. Decomposição LUP. Como observamos no artigo 3.3, o algoritmo que calcula a decomposição LU de uma matriz A não funcionará corretamente se, ao aplicar o método de eliminação a A precisarmos fazer trocas de linhas. Antes de entender o porquê disto e tentar sanar o problema, precisamos descobrir qual é a matriz que, multiplicada a A , retorna uma matriz igual a A exceto pela troca de duas de suas linhas. Supondo que as linhas em questão são i e j , podemos usar a mesma ideia do oráculo, já empregada no artigo 3.3, para descobrir que a matriz desejada pode ser obtida transpondo as linhas i e j na matriz identidade. Mais precisamente, seja $T_{i,j}$ a matriz $n \times n$ definida por

$$T_{i,j}[k, :] = \begin{cases} I[k, :] & \text{se } k \neq i, j \\ I[j, :] & \text{se } k = i \\ I[i, :] & \text{se } k = j, \end{cases}$$

em que I é a matriz identidade de tamanho $n \times n$. Se A for uma matriz $n \times m$ qualquer, então $T_{i,j} \cdot A$ é igual à matriz identidade, exceto pelas linhas i e j que foram trocadas uma pela outra.

Para provar esta última afirmação convém reformular $T_{i,j}$ de uma maneira um pouco diferente. Em primeiro lugar, ao trocar as linhas i e j na identidade, mudamos os valores de apenas quatro entradas de I ; mais precisamente

- $I[i, i]$ passou a valer zero e $I[i, j]$ a valer 1;
- $I[j, j]$ passou a valer zero e $I[j, i]$ a valer 1.

Estas mudanças podem ser facilmente implementadas a partir das matrizes $E_{k,\ell}$ introduzidas no artigo 3.1. De fato, podemos anular as entradas i, i e j, j simplesmente subtraindo $E_{i,i}$ e $E_{j,j}$ da identidade. Para recolocar os uns removidos nas posições i, j e j, i , somamos $E_{i,j}$ e $E_{j,i}$ ao resultado da soma anterior. Em outras palavras,

$$T_{i,j} = I - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}.$$

Esta expressão, aparentemente uma versão complicada de uma simples troca de linhas, nos permite provar facilmente que $T_{i,j}$ efetua a desejada troca de linhas quando multiplicada à esquerda por qualquer matriz A . Isto porque podemos concluir a partir da fórmula (21) que a troca de linhas será efetuada para qualquer matriz, desde que funcione corretamente para as matrizes $E_{k,\ell}$. Como

$$T_{i,j}E_{k,\ell} = I,$$

quando i e j são ambos diferentes de k e ℓ , resta-nos considerar os casos em que isto não ocorre. Faremos um deles como amostra, os demais ficam por sua conta. Por exemplo, se $i = k$ mas $j \neq i, k, \ell$, então,

$$T_{j,i}E_{i,\ell} = (I - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i})E_{i,\ell}$$

que, pela distributividade da multiplicação de matrizes, é igual a

$$T_{j,i}E_{i,\ell} = E_{i,\ell} - E_{i,i}E_{i,\ell} - E_{j,j}E_{i,\ell} + E_{i,j}E_{i,\ell} + E_{j,i}E_{i,\ell}.$$

Apelando para (22) obtemos então que

$$(37) \quad T_{j,i}E_{i,\ell} = E_{i,\ell} - E_{i,\ell} + E_{j,\ell} = E_{j,\ell}$$

que é a resposta esperada, uma vez que o 1, localizado na i -ésima linha de $E_{i,\ell}$ foi realocado para a linha j , sem mudar sua coluna.

Já que estamos envolvidos nestes cálculos, o que ocorre se $T_{i,j}$ for multiplicado à direita de $E_{k,\ell}$? Quando, k, ℓ não são iguais a i ou j ,

$$E_{k,\ell}T_{i,j} = I;$$

ao passo que se i for diferente de j e de ℓ ,

$$E_{i,\ell}T_{i,j} = E_{i,\ell}.$$

Combinando esta última fórmula com (37) obtemos

$$(38) \quad T_{i,j}E_{i,\ell}T_{i,j} = E_{j,\ell}T_{i,j} = E_{j,\ell}.$$

equação à qual logo voltaremos.

Com isto estamos prontos para analisar a eliminação gaussiana com pivoteamento como uma decomposição de matrizes. Procedendo como no caso da decomposição LU, o processo de eliminação consiste em multiplicar a matriz A dada por matrizes elementares até que seja necessário transpor duas linhas, para o que usaremos as matrizes T . Portanto, se a matriz A for de tamanho $n \times n$ e $A[1,1] = 0$, mas $A[2,1] \neq 0$, então aplicamos $T_{1,2}$ para trocar a primeira linha com a segunda, depois do que podemos anular todas as posições da primeira coluna abaixo de 1, 1. Em outras palavras, existem números reais c_2, \dots, c_n tais que

$$(39) \quad C_{1,n}(c_n) \cdots C_{1,3}(c_2) \cdot C_{1,2}(c_1) \cdot T_{1,2}A$$

tem a forma

$$\begin{bmatrix} A[2,1] & A[2,2] & A[2,3] & \cdots & A[2,n] \\ 0 & \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & \star & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \star & \star & \cdots & \star \end{bmatrix}$$

em que os asteriscos representam posições possivelmente não nulas da matriz (39). Tanto as operações elementares por linha quanto as transposições que aplicaremos deste ponto em diante não afetarão a primeira linha. Como todas as posições da primeira coluna que ficam abaixo da primeira linha são nulas, estas operações e transposições também não afetarão esta coluna. Em outras palavras, somente as posições da submatriz $A[2:n, 2:n]$ de A serão afetadas. Como esta submatriz tem tamanho $(n-1) \times (n-1)$ podemos

considerar que o algoritmo continua aplicando recursivamente o mesmo procedimento a matrizes progressivamente menores.

Vejamos como o procedimento funciona quando aplicado à matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 8 & 5 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Como a entrada 1, 1 não é nula, podemos usá-la com pivô. Fazendo isto, obtemos

$$C(4, 1, -4) \cdot C(3, 1, -3) \cdot C(2, 1, -2) \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & -7 & -16 & -8 \\ 0 & -14 & -25 & -7 \end{bmatrix}.$$

Neste ponto aparece um problema: o pivô deveria ser a entrada 2, 2, que é nula. Resolvemos este problema utilizando a matriz $T_{2,3}$, já que a posição 3, 2 não é nula. Fazendo isto e prosseguindo com a eliminação, obtemos

$$(40) \quad C_{4,3}(1) \cdot C_{4,2}(-2) \cdot T_{2,3} \cdot C_{4,1}(-4) \cdot C_{3,1}(-3) \cdot C_{2,1}(-2) \cdot A = U$$

em que U é a matriz triangular superior

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & -7 & -16 & -8 \\ 0 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

O problema está na matriz

$$C_{4,3}(1) \cdot C_{4,2}(-2) \cdot T_{2,3} \cdot C_{4,1}(-4) \cdot C_{3,1}(-3) \cdot C_{2,1}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

que deveria ser triangular inferior, mas não é. A matriz de transposição mudou a posição de uma linha fazendo aparecer um 1 na posição 2, 3, que deveria ser nula. Felizmente, há uma maneira de contornar este problema. A estratégia consiste em utilizar a fórmula (38) para deslocar a transposição para à direita, até que esteja adjacente à matriz A .

Para começar, note que, como $T_{2,3}$ e $C_{4,1}(-4)$ comutam,

$$U = C_{4,3}(1) \cdot C_{4,2}(-2) \cdot C_{4,1}(-4) \cdot T_{2,3} \cdot C_{3,1}(-3) \cdot C_{2,1}(-2) \cdot A.$$

Por outro lado, como $T_{2,3}^2 = I$, temos que

$$U = C_{4,3}(1) \cdot C_{4,2}(-2) \cdot C_{4,1}(-4) \cdot T_{2,3} \cdot C_{3,1}(-3) \cdot T_{2,3} \cdot T_{2,3} \cdot C_{2,1}(-2) \cdot A.$$

Mas,

$$T_{2,3} \cdot C_{3,1}(-3) \cdot T_{2,3} = T_{2,3} \cdot (I - 3E_{3,1}) \cdot T_{2,3} = I - 3(T_{2,3} \cdot E_{3,1} \cdot T_{2,3})$$

que, pela fórmula (38), é igual a

$$I - 3E_{2,1} = C_{2,1}(-3),$$

de modo que

$$T_{2,3} \cdot C_{3,1}(-3) \cdot T_{2,3} = C_{2,1}(-3).$$

Isto nos permite escrever

$$U = C_{4,3}(1) \cdot C_{4,2}(-2) \cdot C_{4,1}(-4) \cdot C_{2,1}(-3) \cdot T_{2,3} \cdot C_{2,1}(-2) \cdot A,$$

com o quê $T_{2,3}$ está “uma casa” mais próximo de A do que antes. Aplicando a mesma estratégia mais uma vez, segue de

$$U = C_{4,3}(1) \cdot C_{4,2}(-2) \cdot C_{4,1}(-4) \cdot C_{2,1}(-3) \cdot T_{2,3} \cdot C_{2,1}(-2) \cdot T_{2,3} \cdot T_{2,3} \cdot A,$$

e de

$$T_{2,3} \cdot C_{2,1}(-2) \cdot T_{2,3} = C_{3,1}(-2)$$

que

$$U = C_{4,3}(1) \cdot C_{4,2}(-2) \cdot C_{4,1}(-4) \cdot C_{2,1}(-3) \cdot C_{3,1}(-2) \cdot T_{2,3} \cdot A.$$

A estratégia terá dado certo se

$$M = C_{4,3}(1) \cdot C_{4,2}(-2) \cdot C_{4,1}(-4) \cdot C_{2,1}(-3) \cdot C_{3,1}(-2)$$

for triangular inferior. Contudo $C_{i,j}(a)$ é triangular inferior sempre que $i > j$, o que ocorre com todas as matrizes elementares no produto acima. Portanto, M é mesmo triangular e o mesmo será verdadeiro para $L = M^{-1}$. Com isto, podemos escrever

$$T_{2,3} \cdot A = L \cdot U;$$

que é a forma que a decomposição LU toma quando há pivoteamento na eliminação gaussiana.

Em geral, tendo executado a eliminação gaussiana com pivoteamento sobre uma matriz A de tamanho $n \times n$, obtemos uma matriz U triangular superior e um produto de matrizes elementares, entremeadas aqui e ali por transposições. Usamos então a regra

$$(41) \quad T_{i,j} \cdot C_{k,\ell}(a) \cdot T_{i,j} = \begin{cases} C_{k,\ell}(a) & \text{se } j \neq k; \\ C_{i,\ell}(a) & \text{se } j = k; \end{cases}$$

para mover as transposições para a extremidade direita, de modo que seu produto P seja imediatamente adjacente à matriz A . Com isto obtemos uma equação da forma

$$M \cdot P \cdot A = U;$$

em que M é um produto de matrizes elementares. O último detalhe a verificar é que M é, de fato, uma matriz triangular inferior. À primeira vista isto parece óbvio, porque as matrizes elementares usadas na eliminação *são* triangulares inferiores. O problema são os T s. Tendo usado a fórmula (41) para mudar um certo T de posição precisamos mostrar que a matriz elementar resultante continua sendo triangular inferior. No caso em que i, j, k e ℓ são distintos isto é óbvio, porque a matriz elementar não é alterada. O outro caso requer uma análise mais cuidadosa. Em primeiro lugar, temos $k > \ell$ em $C_{k,\ell}(a)$ porque estamos anulando uma posição de uma linha usando um pivô que pertence a uma linha acima dela. Por outro lado, se uma transposição aparece em alguma posição à esquerda da matriz elementar $C_{k,\ell}(a)$ então as linhas que estão sendo trocadas estão ambas abaixo da ℓ -ésima linha, onde se encontra o pivô de $C_{k,\ell}(a)$. Em particular, $k < i, j$. Portanto, $\ell < k < i, j$ e consequentemente a matriz $C_{i,\ell}(a)$ também será triangular inferior. Como produtos e inversas de matrizes triangulares inferiores são também triangulares inferiores, podemos concluir que $L = M^{-1}$ é triangular inferior. Assim,

$$P \cdot A = L \cdot U;$$

em que P é uma matriz de permutação, L é triangular inferior e U é triangular superior. Esta decomposição LU generalizada é conhecida como *decomposição LUP*.

Para falar a verdade, a necessidade de escolher um pivô adequado não se resume ao caso em que a entrada que conteria o pivô é nula. Para entender qual é o problema, basta calcular a decomposição LU da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ao eliminar a posição 2, 1, obtemos

$$U = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & 1 + 10^{20} \end{bmatrix} \text{ e } L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -10^{20} & 1 \end{bmatrix}.$$

Suponhamos, contudo, que estamos representando os números em um computador em ponto flutuante. Na maioria das máquinas, a metade da distância entre 1 e o próximo número que podemos representar é da ordem de $1.11 \cdot 10^{-16}$. Neste caso, a matriz U será representada por

$$U' = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & 10^{20} \end{bmatrix}$$

contudo,

$$LU' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$A - LU' = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e o erro cometido no cálculo da posição 2, 2 é totalmente inaceitável. Para sanar o problema, devemos escolher não apenas um pivô não nulo, mas sim *o maior pivô possível*. Mais precisamente:

se o pivô atual estiver na posição i, i , buscamos a linha j , com $j > i$, cuja entrada i, j é a maior possível e trocamos de posição as linhas i e j .

Entretanto, como não estamos preocupados com a avaliação de erros, não levaremos isto em conta ao aplicar o algoritmo de eliminação. Para mais detalhes consulte [4, Lecture 22, p. 163].

4. Aplicações

Começamos esta seção aplicando o algoritmo de eliminação gaussiana com pivoteamento para calcular determinantes e inverter matrizes. Ao final, veremos como utilizar sistemas lineares para resolver problemas de interpolação polinomial; isto é, para determinar uma função polinomial que passe por um conjunto dado de pontos.

4.1. Determinantes. O *determinante* é uma função do conjunto das matrizes reais $n \times n$ no conjunto dos números reais, que satisfaz as seguintes propriedades:

- (1) o determinante de uma matriz triangular superior é igual ao produto das entradas da sua diagonal;
- (2) o determinante de uma matriz não é alterado se à matriz for aplicada uma operação elementar por linha;
- (3) o determinante muda de sinal se duas linhas da matriz forem trocadas uma com a outra.

Estas três propriedades, tomadas conjuntamente com a decomposição LUP, nos permitem calcular qualquer determinante. De fato, seja A uma matriz quadrada real de tamanho $n \times n$ e suponhamos, para começar, que aplicando eliminação gaussiana sem pivoteamento chegamos à forma escada U de A . Denotando o determinante de A por $\det(A)$, podemos concluir de (2) que $\det(A) = \det(U)$. Mas U é triangular superior, de modo que seu determinante pode ser facilmente calculado apelando para (1). Por exemplo, vimos no

artigo 2.4 que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ tem forma escada } U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & -91/2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, segundo o argumento acima, devemos ter que

$$\det(A) = \det(U) = 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{-91}{2} = -182.$$

Naturalmente no procedimento que estabelecemos acima não estamos permitindo trocas de linhas na obtenção da forma escada da matriz a partir da qual calculamos o determinante. Mas, mesmo descontando isto, o procedimento padece de um sério problema. Para que eu e você tenhamos certeza de que, através dele, obteremos ambos o mesmo valor para o determinante é necessário provar que a forma escada de uma matriz é única. De fato, se, para uma mesma matriz A , eu obtiver uma forma escada e você outra, não poderemos ter certeza de que estamos calculando o mesmo valor para o determinante de A . Felizmente isto é verdade, como passamos a provar.

Digamos que duas pessoas diferentes calculem formas escada para uma mesma matriz A e encontrem matrizes U e U' . Provaremos, usando apenas as propriedades básicas da decomposição LU, que $U = U'$. Pelo artigo 3.3, devem existir matrizes triangulares inferiores L e L' , ambas produtos de matrizes elementares, tais que

$$A = L \cdot U = L' \cdot U'.$$

Supondo que U' é inversível, podemos rearrumar a equação acima na forma

$$U \cdot (U')^{-1} = L^{-1} \cdot L'.$$

Entretanto, produtos e inversas de matrizes triangulares superiores são também triangulares superiores e o mesmo vale para matrizes triangulares inferiores. Aplicando isto à equação acima temos uma igualdade entre, à esquerda uma matriz triangular superior e à direita uma que é triangular inferior. Mas uma matriz que é simultaneamente triangular superior e inferior tem que ser diagonal. Portanto, existe uma matriz diagonal Δ tal que

$$U \cdot (U')^{-1} = \Delta = L^{-1} \cdot L'.$$

Como L e L' são produtos de matrizes elementares, obrigatoriamente terão apenas 1's ao longo da diagonal, e o mesmo será verdade para o produto $L^{-1} \cdot L' = \Delta$. Contudo somente a matriz identidade é diagonal e tem 1's ao longo de toda a diagonal. Logo,

$$U \cdot (U')^{-1} = I = L^{-1} \cdot L',$$

donde podemos concluir que $U = U'$ e que $L = L'$, provando assim a unicidade da forma escada, ao menos no caso particular em que A é inversível.

O argumento ficou um pouco insatisfatório porque (i) estamos excluindo a possibilidade de haver pivoteamento e (ii) fomos obrigados a supor que U' é inversível. Como contornar (i) levaria a um argumento técnico pouco esclarecedor, vamos nos contentar em afirmar que o pivoteamento não afeta o valor do determinante. De qualquer forma, segundo (3), a pior coisa que o pivoteamento poderia fazer é alterar o sinal do determinante. Vejamos como lidar com (ii).

Como na decomposição $A = L' \cdot U'$ a matriz L' será sempre inversível, segue que U' é inversível se, e somente se, o mesmo vale para A . A demonstração disto é muito fácil e ficará por sua conta. Logo, o argumento acima funciona perfeitamente desde que A seja inversível. Se isto não acontecer, então U' será uma matriz triangular não inversível e terá que ter uma posição nula ao longo da diagonal. Mas isto implica que $\det(U') = 0$. Ainda que exista uma forma escada diferente para A ela não poderá ser inversível, de modo que o mesmo argumento se aplicará. Portanto, se A não for inversível teremos $\det(A) = 0$, independentemente da forma escada ser única ou não. Na verdade, esta parte do argumento independe até mesmo de haver ou não troca de linhas durante a eliminação.

4.2. Inversão de matrizes. Calcular a inversa de uma matriz usando eliminação gaussiana é bastante simples. Seja A a matriz quadrada $n \times n$ que desejamos inverter. Começamos por construir a matriz $[A, I]$ de tamanho $n \times 2n$ que consiste de dois blocos adjacentes: a própria matriz A e a matriz identidade I de mesmo tamanho que A . Lembre-se que já tivemos oportunidade de usar esta matriz no artigo 3.3, onde vimos que a forma escada de $[A, I]$ é $[U, M]$, em que U é a forma escada de A e M é a matriz, produto de matrizes elementares e transposições, tal que $M \cdot A = U$. Como M é inversível, basta calcular a inversa U^{-1} de U (desde que ela exista!) e teremos a inversa de A na forma $U^{-1} \cdot M$. Mas U é triangular superior, de modo que sua inversa pode ser facilmente calculada resolvendo um sistema por substituição reversa. Tomando mais uma vez

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 8 & 5 & -1 \\ 3 & 25 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix},$$

como exemplo, construímos

$$[A, I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 25 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right],$$

cuja forma escada é

$$[U, M] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -16 & -8 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right].$$

Para inverter U , resolvemos o sistema

$$X \cdot U = I,$$

em que X é uma matriz triangular superior cujas entradas não nulas são incógnitas. Se

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 0 & 0 & x_8 & x_9 \\ 0 & 0 & 0 & x_{10} \end{bmatrix},$$

então as equações do sistema $X \cdot U = I$ serão

$$\begin{array}{ll} x_1 = 1 & -16x_5 - 7x_6 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 = 0 & -8x_5 - 3x_6 + 6x_7 = 0 \\ 6x_1 - 16x_2 - 7x_3 = 0 & -7x_8 = 1 \\ x_1 - 8x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0 & -3x_8 + 6x_9 = 0 \\ -7x_5 = 1 & 6x_{10} = 1. \end{array}$$

Utilizando o método de substituição direta, descobrimos que este sistema tem solução

$$\begin{array}{lllll} x_1 = 1, & x_2 = \frac{4}{7}, & x_3 = -\frac{22}{49}, & x_4 = \frac{109}{294}, & x_5 = -\frac{1}{7}, \\ x_6 = \frac{16}{49}, & x_7 = -\frac{4}{147}, & x_8 = -\frac{1}{7}, & x_9 = -\frac{1}{14} & x_{10} = \frac{1}{6}; \end{array}$$

de modo que

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{7} & -\frac{22}{49} & \frac{109}{294} \\ 0 & -\frac{1}{7} & \frac{16}{49} & -\frac{4}{147} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{14} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Mas de $M \cdot A = U$, podemos concluir que $U^{-1} \cdot M \cdot A = I$, de modo que

$$U^{-1} \cdot M = \begin{bmatrix} 9/49 & -23/294 & -25/147 & 109/294 \\ -11/49 & 44/147 & -13/147 & -4/147 \\ 2/7 & -3/14 & 1/7 & -1/14 \\ 0 & 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{bmatrix}$$

é a inversa desejada.

Há uma outra maneira de obter a inversa de U que é muito conveniente quando calculamos com papel e lápis, ainda que padeça de alguns problemas quando executado no computador em ponto flutuante. A ideia é simplesmente aplicar eliminação gaussiana às linhas de U , só que de baixo para cima. No exemplo anterior, havíamos obtido a matriz

$$[U, M] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -16 & -8 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right].$$

Aplicando a esta matriz a operação elementar em que a segunda linha é substituída pelo produto de $-3/2$ pela *terceira* linha, resulta

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -16 & -8 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -2 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right].$$

Mais duas operações elementares elementares com base na quarta linha e chegamos à matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 6 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -7 & -16 & 0 & -3 & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -2 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right].$$

Tomando, agora, como pivô a entrada -7 na posição 3, 3, eliminamos as posições acima dela na mesma coluna, do que resta a matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 0 & 0 & -\frac{5}{7} & \frac{47}{42} & -\frac{11}{21} & \frac{11}{42} \\ 0 & -7 & 0 & 0 & \frac{11}{7} & -\frac{44}{21} & \frac{13}{21} & \frac{4}{21} \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -2 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right].$$

Finalmente, usando a posição em 2, 2 como pivô eliminamos a entrada imediatamente acima dela, obtendo a matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{49} & -\frac{23}{294} & -\frac{25}{147} & \frac{109}{294} \\ 0 & -7 & 0 & 0 & \frac{11}{7} & -\frac{44}{21} & \frac{13}{21} & \frac{4}{21} \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -2 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right].$$

que denotaremos por $[D, Q]$. Argumentando como no artigo 3.3, podemos escrever

$$Q \cdot A = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

que é uma matriz diagonal e, portanto, facilmente inversível. De fato,

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}$$

Portanto, de $Q \cdot A = D$ podemos concluir $D^{-1} \cdot Q \cdot A = I$, de modo que a inversa de A é igual a

$$D^{-1} \cdot Q = \begin{bmatrix} \frac{9}{49} & -\frac{23}{294} & -\frac{25}{147} & \frac{109}{294} \\ -\frac{11}{7 \cdot 7} & \frac{44}{7 \cdot 21} & -\frac{13}{7 \cdot 21} & -\frac{4}{7 \cdot 21} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7 \cdot 2} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7 \cdot 2} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

que é a mesma matriz que já havíamos obtido anteriormente pelo outro método.

Resta-nos explicar porque deveríamos dar preferência ao primeiro método em detrimento do segundo, quando se trata de inverter matrizes automaticamente em um computador. Não se trata de uma questão de eficiência, a eliminação gaussiana é extremamente rápida, mas sim de estabilidade. Mais precisamente, se vamos calcular a eliminação de maneira exata, não faz diferença se usamos um método ou o outro. Mas não é isto que acontece na prática. Se a matriz que precisamos inverter vier de uma medida feita em um experimento, então os valores de suas entradas serão conhecidos apenas aproximadamente, dentro de uma certa margem de erro. Por isso, ao inverter a matriz, precisamos ser capazes de controlar o erro cometido nos cálculos efetuados pelo próprio algoritmo de inversão. Caso contrário os valores das entradas da inversa podem não ter nenhum significado real. Infelizmente, mesmo se tomarmos todos os cuidados necessários na escolha do pivô (veja

artigo 3.5), ainda não se sabe exatamente como estimar o erro da saída em termos dos limites de erro da entrada, para o método de eliminação gaussiana. Por outro lado, tal estimativa é fácil de obter no caso da substituição reversa. É por isso que, ao implementar um algoritmo, é desejável minimizar o uso da eliminação, sempre que isto for possível. Para uma discussão mais detalhada da propagação do erro na eliminação gaussiana veja [Trefethen e Bau, Lecture 22, p. 163].

4.3. Interpolação polinomial. Seja P um conjunto *finito* de pontos do plano. Em uma primeira aproximação, o problema da *interpolação polinomial* almeja obter uma função polinomial

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0,$$

de grau n e coeficientes reais, cujo gráfico contém todos os pontos de P . À primeira vista a restrição a funções polinomiais pode parecer muito forte. Entretanto, estas são as únicas funções que um computador consegue calcular diretamente, porque são definidas por uma quantidade finita de operações aritméticas elementares. Para as demais funções, teremos que utilizar aproximações que, frequentemente, são aproximações polinomiais.

Começemos com um exemplo simples. Digamos que queremos uma função polinomial de grau dois que passa pelos pontos $(1, 0)$, $(2, 1)$ e $(3, 4)$ do plano. A função pode ser escrita na forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

em que a , b e c denotam números reais. Nosso objetivo é determinar quais devem ser os coeficientes a , b e c para que $y = f(x)$ passe pelos pontos dados. Mas para que isto ocorra, devemos ter que

$$a + b + c = f(1) = 0$$

$$4a + 2b + c = f(2) = 1$$

$$9a + 3b + c = f(3) = 4$$

que podemos interpretar como um sistema linear, cuja matriz aumentada é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

Aplicando eliminação gaussiana a esta matriz, obtemos a matriz escada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

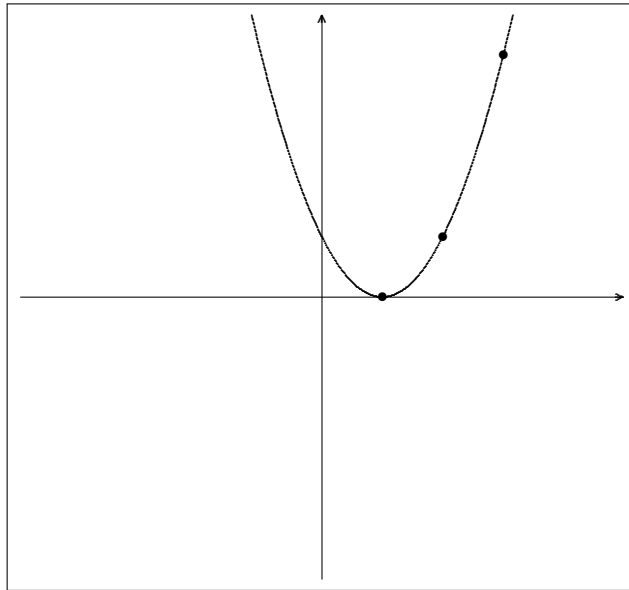


FIGURA 1. Parábola

que corresponde ao sistema triangular superior

$$a + b + c = 0$$

$$-2b - 3c = 1$$

$$c = 1$$

cuja solução é $c = 1$, $b = -2$ e $a = 1$. Portanto, o polinômio desejado é

$$f(x) = x^2 - 2x + 1,$$

cujo gráfico, esboçado na figura 1, realmente passa pelos pontos dados.

Esta maneira de executar a interpolação é conhecida como *método dos coeficientes a determinar*, por razões óbvias. O algoritmo geral para este método pode ser descrito da seguinte maneira.

ALGORITMO 4.1. *Seja P um conjunto finito de pontos do plano e n um número positivo, o algoritmo retorna um polinômio de grau n cujo gráfico passa por todos os pontos de P ou uma mensagem de erro.*

- Inicialize $S = \emptyset$;
- seja

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

um polinômio de grau n cujos coeficientes são valores a determinar (variáveis);

- Para cada ponto $(x_0, y_0) \in P$ construa a equação $f(x_0) = y_0$ e acrescente-a ao sistema S ;

- *resolva o sistema S ;*
- *se o sistema for determinado ou indeterminado, atribua os valores de uma solução aos coeficientes de f e retorne o resultado;*
- *se o sistema for impossível, retorne uma mensagem de erro.*

Problemas de interpolação surgem mesmo no caso em que a curva a ser determinada não é uma função. Por exemplo, dados os mesmos três pontos do exemplo acima, podemos determinar um círculo que passe por todos os três. Tal círculo terá equação

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

que, uma vez expandida, corresponde a

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2;$$

ou ainda a

$$x^2 - 2ax + y^2 - 2by = r^2 - a^2 - b^2.$$

Escrevendo $c = r^2 - a^2 - b^2$, determinaremos os valores de a , b e c para os quais a curva

$$x^2 - 2ax + y^2 - 2by - c = 0$$

contém os pontos dados, no nosso exemplo $(1, 0)$, $(2, 1)$ e $(3, 4)$. Fazendo as devidas substituições, obtemos o sistema

$$2a + c = 1$$

$$4a + 2b + c = 5$$

$$6a + 8b + c = 25;$$

cujas soluções são $a = -2$, $b = 4$ e $c = 5$. Como

$$r^2 = c + a^2 + b^2 = 5 + 16 + 4 = 25$$

a solução do problema é uma circunferência de raio 5 com centro no ponto $(-2, 4)$. Mais uma vez, convém observar que se estivéssemos tentando achar uma circunferência que passasse por quatro, em vez de três, pontos dados, provavelmente teríamos um sistema impossível. Afinal, como aprendemos em geometria elementar, três pontos não alinhados bastam para determinar uma circunferência.

Como os comentários que fizemos nos dois exemplos sugerem, nossa análise do problema de interpolação deixa em aberto um problema bastante importante:

qual o menor grau que um polinômio deve ter para que defina uma curva que passe por todos os pontos de um conjunto (finito) dado?

Naturalmente, o polinômio em questão poderá ter uma ou duas variáveis, dependendo do problema que estamos considerando. Veremos como solucionar este problema no próximo capítulo.

Exercícios

1. Dizemos que uma matriz $n \times n$ C *comuta* com todas as matrizes $n \times n$ se $AC = CA$, qualquer que seja a matriz A , desde que tenha tamanho $n \times n$. Prove que se λ é um escalar, então $\lambda \cdot I_n$ comuta com todas as matrizes $n \times n$.
2. Mostre que a recíproca do exercício anterior é verdadeira. Isto é, prove que se C é uma matriz que comuta com todas as matrizes $n \times n$, então existe um escalar λ tal que $C = \lambda \cdot I_n$.
3. Seja E_{ij} a matriz $n \times n$ que tem zeros em todas as suas posições, exceto na posição ij , cuja entrada é igual a 1. Calcule $A \cdot E_{ij}$ e $E_{ij} \cdot A$.
4. Mostre que se α é um escalar e $i < j$, então $(I + \alpha E_{ij})A$ é igual à matriz A com sua j -ésima linha substituída por ela própria mais α vezes a i -ésima linha de A . O que acontece quando calculamos $A(I + \alpha E_{ij})$?

5. Resolva cada um dos sistemas abaixo pelo método de adição.

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad \begin{cases} x - 2y &= -24 \\ 2x + 3y &= 2 \end{cases} & \text{(b)} \quad \begin{cases} 7x + 6z &= 1 \\ 2x + 3y &= -2 \end{cases} & \text{(c)} \quad \begin{cases} x - 7y &= 12 \\ 4x + 16y &= 16 \end{cases} \\
 \text{(d)} \quad \begin{cases} 3x + y &= 0 \\ 9x + 3y &= 0 \end{cases} & \text{(e)} \quad \begin{cases} x - y - 2z &= 0 \\ 3x - 3y &= 20 \end{cases} & \text{(f)} \quad \begin{cases} -3x + 3y &= -2 \\ 5x + 2y &= 1 \end{cases}
 \end{array}$$

6. Resolva cada um dos sistemas triangulares abaixo pelo método substituição direta ou reversa, conforme o sistema seja triangular inferior ou superior.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad \begin{cases} x - 2y - 7z &= -24 \\ 3y - 2z &= 2 \\ 4z &= 5 \end{cases} & \text{(b)} \quad \begin{cases} x + 4y + 6z &= 11 \\ 9y + 7z &= 9 \\ z &= 7 \end{cases} \\
 \text{(c)} \quad \begin{cases} 14z &= 20 \\ y + 12z &= 24 \\ 4x + 16y + 26z &= 46 \end{cases} & \text{(d)} \quad \begin{cases} 3x + y + 2z &= 0 \\ -z &= 0 \\ -3z &= 0 \end{cases} \\
 \text{(e)} \quad \begin{cases} x - y - 2z - w &= 0 \\ 5y + 3z + w &= 0 \\ -z - w &= 0 \end{cases} & \text{(f)} \quad \begin{cases} x + 2y - w &= 0 \\ y + 2z - w &= 0 \\ 2z - w &= 0 \\ -3w &= 6 \end{cases}
 \end{array}$$

7. Seja A uma matriz triangular inferior, de tamanho $n \times n$, cujas entradas diagonais são todas diferentes de zero e seja B a sua inversa.

(a) Descreva um algoritmo capaz de calcular B resolvendo n sistemas triangulares inferiores por substituição direta, um para cada coluna de B .

(b) Prove que B também é triangular inferior.

Lembre-se que se B_i é a i -ésima coluna da matriz B então $A \cdot B_i$ é igual à i -ésima coluna da matriz identidade.

8. Resolva cada um dos sistemas abaixo pelo método de eliminação gaussiana.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad \begin{cases} x - 2y - 7z &= -24 \\ 2x + 3y - 2z &= 2 \\ 3x - 5y + 4z &= 5 \end{cases} & \text{(b)} \quad \begin{cases} x + 4y + 6z &= 11 \\ 2x + 3y + 4z &= 9 \\ 3x + 2y + 2z &= 7 \end{cases} \\
 \text{(c)} \quad \begin{cases} x + 7y + 14z &= 20 \\ 3x + 9y + 12z &= 24 \\ 4x + 16y + 26z &= 46 \end{cases} & \text{(d)} \quad \begin{cases} 3x + y + 2z &= 0 \\ 9x + 3y - z &= 0 \\ 3x + 2y - 3z &= 0 \end{cases} \\
 \text{(e)} \quad \begin{cases} x - y - 2z - w &= 0 \\ 3x + y + 3z + w &= 0 \\ x - y - z - 5w &= 0 \end{cases} & \text{(f)} \quad \begin{cases} -3x + 3y + 2z + w &= -2 \\ 5x + 2y + z - 2w &= 1 \\ 2x + 5y + 3z - w &= -1 \end{cases} \\
 \text{(g)} \quad \begin{cases} x + 2y - w &= 0 \\ x + 2z - w &= 0 \\ x + 2y + 2z - w &= 0 \\ 3x + 4y + 4z - 3w &= 0 \end{cases}
 \end{array}$$

9. Escreva as equações matriciais correspondentes a cada um dos sistemas do exercícios 5, 6 e 8.

10. Seja A uma matriz triangular inferior $n \times n$, $X = [x_1, \dots, x_n]^t$ a matriz coluna das incógnitas e $b = [b_1, \dots, b_n]^t$ a matriz coluna das constantes.

(a) Mostre que a matriz A' , de tamanho $(n-1) \times (n-1)$, obtida removendo-se a primeira linha e a primeira coluna de A é triangular inferior.

(b) Mostre que se $A(1, 1) \neq 0$, então $x_1 = b_1/A(1, 1)$.

(c) Mostre que se Y_0 é solução do sistema

$$A'Y = b' - A(2:n, 1)x_1;$$

em que $b' = [b_2, \dots, b_n]^t$, então a matriz $[x_1, Y_0]^t$ é solução de $AX = b$.

(d) Descreva um algoritmo recursivo, baseado nos itens acima, capaz de resolver um sistema triangular inferior.

11. Resolva cada um dos sistemas abaixo pelo método de eliminação, indicando se são determinados, indeterminados ou impossíveis.

$$(a) \begin{cases} x - y - z + w &= 1 \\ 2x + 2y - 3z + 6w - u &= -1 \\ x - 2y - z + 2w - u &= 0 \\ 3x + y - 4z + 7w - u &= 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x - 3y - 2z + w &= 1 \\ x + 2y - 3z + 6w - u &= 1 \\ 5x - 2y - z + 2w - 8u &= 0 \\ 3x + 2y - 4z + 7w - u &= 0 \end{cases}$$

12. Suponhamos que estamos para aplicar eliminação gaussiana a partir da k -ésima linha de uma matriz A de tamanho $n \times n$:

- (a) mostre que o pivô tem que estar na linha k, ℓ em que $\ell \geq k$;
 (b) construa um exemplo em que $\ell > k$.

13. Mostre que a quantidade máxima de operações por linha necessárias para transformar uma matriz $n \times n$ dada em sua forma escada por eliminação gaussiana é igual a $n(n-1)/2$.

14. Determine os valores de k para os quais os sistemas abaixo são determinados, indeterminados ou impossíveis.

$$(a) \begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x - y + kz &= 2 \\ kx + 2y + z &= 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y &= k \\ k^2x + y &= k \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + y + kz &= 2 \\ 3x + 4y + 2z &= k \\ 2x + 3y + z &= 1 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x + 2y + 3z &= 1 \\ x + (2k + 4)y + 5z &= 5 \\ 2x + (3k + 7)y + (k + 7)z &= k^2 + 4 \end{cases}$$

15. Calcule a decomposição LU de cada uma das matrizes dadas abaixo:

$$(a) \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

16. Use método de eliminação para calcular o determinante de cada uma das matrizes 3×3 abaixo.

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(e) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(f) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

17. Use método de eliminação para calcular o determinante de cada uma das matrizes 4×4 abaixo.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

18. Usando eliminação gaussiana, determine quais das matrizes dos exercícios 16 e 17 têm inversa e calcule a inversa, quando existir.

19. Calcule a inversa da matriz resultante do seguinte produto de matrizes elementares:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

20. Determine uma função polinomial que passa pelos pontos $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$ e $(4, 4)$ para cada um dos seguintes graus: 2, 3 e 4.

21. Determine uma circunferência que passa por cada um dos seguintes conjuntos de pontos do plano:

(a) $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$ e $(4 + \sqrt{2}, 4)$;

(b) $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$ e $(5/2, (10 + \sqrt{3})/2)$.

CAPÍTULO 3

O \mathbb{R}^n e suas transformações lineares

Neste capítulo introduziremos formalmente os espaços n -dimensionais e as transformações destes espaços induzidas por matrizes, generalizando assim o que fizemos para o plano.

1. Sistemas homogêneos

Nesta seção discutimos como representar de maneira eficiente o conjunto solução de um sistema linear indeterminado, já que não podemos simplesmente listar suas infinitas soluções.

1.1. Sistemas indeterminados. Sejam A uma matriz $n \times n$, b uma matriz $n \times 1$ com coeficientes reais e X a matriz das incógnitas $[x_1, \dots, x_n]^t$. A uma solução

$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n,$$

do sistema $AX = b$ podemos associar uma matriz $v = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^t$ que, fazendo uso do que aprendemos no artigo anterior, queremos considerar como sendo um vetor do espaço \mathbb{R}^n .

Se o sistema linear for impossível ou determinado, há pouco o que dizer sobre ele. No primeiro caso não há solução; no segundo caso, há uma única solução que pode ser encontrada combinando o método de eliminação com a resolução de um sistema triangular por substituição reversa. O caso mais interessante ocorre quando o sistema $AX = b$ é indeterminado, porque há *infinitas* soluções que é preciso encontrar. Contudo, neste caso, as soluções do sistema podem ser todas obtidas a partir de uma delas e das soluções de $AX = 0$, que é o *sistema homogêneo associado* a $AX = b$. De fato, se X_1 é solução de $AX = b$ e X_0 é solução de $AX = 0$, então

$$AX_1 = b \quad \text{e} \quad AX_0 = 0 \quad \text{implicam que} \quad A(X_1 + X_0) = AX_1 + AX_0 = b + 0 = b.$$

Isto sugere que, para entender os sistemas indeterminados, basta analisar em detalhe as soluções dos sistemas homogêneos. Uma vantagem de proceder desta maneira é que o conjunto solução S_A do sistema $AX = 0$ satisfaz algumas propriedades muito interessantes. Assim, se X_1 e X_2 são soluções de $AX = 0$ e λ é um número real qualquer, temos

que

$$A(X_1 + X_2) = A(X_1) + A(X_2) = 0 + 0 = 0 \quad \text{e que} \quad A(\lambda X_1) = \lambda A(X_1) = \lambda \cdot 0 = 0;$$

donde concluímos que

- a soma de duas soluções de um sistema homogêneo, e
- o produto da solução de um sistema homogêneo por um escalar;

também são soluções do mesmo sistema.

Ainda que esta seja uma maneira inteiramente adequada de expressar uma importante propriedade dos sistemas homogêneos, há uma outra maneira, que se adapta melhor ao tipo de generalização que precisaremos encarar mais à frente. Para isto, dada uma matriz A de tamanho $n \times n$, definimos o *conjunto solução* do sistema homogêneo $AX = 0$ por

$$\mathcal{S}_A = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = 0\}$$

em que o vetor v está sendo considerado, como vimos no artigo anterior, como uma matriz coluna $n \times 1$. As propriedades acima podem então ser reescritas na forma

- se $v_1, v_2 \in \mathcal{S}_A$ então $v_1 + v_2 \in \mathcal{S}_A$;
- se $v \in \mathcal{S}_A$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então $\lambda v \in \mathcal{S}_A$.

Além disso, o vetor zero do \mathbb{R}^n pertence a \mathcal{S}_A . Contudo, as outras propriedades que as operações de soma e multiplicação por escalar no \mathbb{R}^n partilham com as operações de mesmo nome no plano são verificadas para *todo* vetor do \mathbb{R}^n . Portanto, estas propriedades continuarão válidas quando restringirmos a escolha destes vetores ao subconjunto $\mathcal{S}_A \subset \mathbb{R}^n$.

1.2. Sistemas homogêneos. Começamos analisando um exemplo extremamente simples, o sistema linear com três variáveis formado por uma única equação

$$x + y + z = 0,$$

cujas representação matricial é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0.$$

Portanto, as soluções deste sistema consistem das matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

que são iguais a

$$(42) \quad y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A última forma em que expressamos as soluções de $x + y + z = 0$ tem a grande vantagem de poder ser interpretada geometricamente. Em sintonia com o que fizemos no caso do plano, diremos que um *vetor* do espaço é um segmento orientado que tem uma de suas extremidades fixa da origem. Fixando, então, três vetores unitários e dois-a-dois perpendiculares entre si, que denotaremos por e_1 , e_2 e e_3 , verificamos que todo vetor v do espaço pode ser escrito na forma

$$(43) \quad v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3,$$

em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ correspondem aos comprimentos das projeções de v sobre e_1 , e_2 e e_3 , tomados com um sinal que indica se apontam, na mesma direção, ou na direção oposta aos vetores sobre os quais a projeção está sendo feita. Diremos que $\{e_1, e_2, e_3\}$ é uma *base ortonormal* do espaço e que a_1 , a_2 e a_3 são as *coordenadas* de v relativamente a esta base. Uma vez que a base tenha sido fixada podemos, como no caso do plano, identificar o vetor v com a tripla de coordenadas que o define, escrevendo

$$v = (a_1, a_2, a_3) \quad \text{ou ainda} \quad v = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix},$$

que tem a vantagem de tornar transparente a relação entre vetores do espaço e matrizes 3×1 . A bem da verdade, o que fizemos acima deixa muito a desejar porque, embora tenhamos escrito v como uma soma de vetores multiplicados por escalares na equação (43), jamais definimos estas duas operações para vetores do espaço. A multiplicação por escalar não é um grande problema, já que pode ser definida exatamente como a operação correspondente no plano. A adição de vetores precisa ser tratada com um pouco mais de cuidado. Digamos que queremos somar dois vetores v_1 e v_2 do espaço. Podemos supor que estes vetores não são colineares, porque a soma de vetores colineares equivale à soma dos números reais que determinam o comprimento destes vetores e aos quais associamos um sinal, para identificar para que lado da reta estes vetores apontam. Supondo, então, que v_1 e v_2 não são colineares, temos que a origem e as extremidades de v_1 e v_2 a ela opostas definem um único plano π . A soma $v_1 + v_2$ é obtida aplicando a regra do paralelogramo a v_1 e v_2 , considerados como vetores do plano π . Não é difícil, a partir disto, verificar que v é igual à soma de suas projeções sobre o plano definido pelos vetores e_1 e e_2 e sobre e_3 ; sendo esta última igual a $a_3 e_3$, para algum número real a_3 . Argumentando de maneira semelhante, concluímos que a projeção de v sobre o plano definido pelos vetores e_1 e e_2

é igual a $a_1e_1 + a_2e_2$, para uma escolha adequada de $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Reunindo tudo isto, obtemos a equação (43), que enunciamos acima.

Esta maneira de identificar vetores no espaço com matrizes nos permite considerar a equação (42) como definindo o conjunto de todos os vetores do espaço para o qual existem números reais a e b tais que

$$a_1u_1 + a_2u_2 \quad \text{em que} \quad u_1 = [-1, 1, 0]^t \quad \text{e} \quad u_2 = [-1, 0, 1]^t.$$

Entretanto, como a soma de dois vetores no espaço é feita usando a regra do paralelogramo, todos os vetores da forma $a_1u_1 + a_2u_2$ pertencem a um mesmo plano, aquele que contém a origem e os pontos nas extremidades de u_1 e u_2 . Mas já sabemos do capítulo 1 que todo vetor do plano pode ser escrito como combinação linear de quaisquer dois vetores não colineares contidos neste mesmo plano. Com isto, podemos concluir, que as extremidades dos vetores que pertencem ao conjunto

$$\pi = \{a_1u_1 + a_2u_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\},$$

definem, de maneira única, um plano.

Passando ao nosso segundo exemplo, consideremos o sistema

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 0 \\ x + 2y - 3z + w &= 0 \\ 5x + 7y - 3z + 5w &= 0, \end{aligned}$$

cujas matriz é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & 7 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Aplicando eliminação gaussiana a A , obtemos a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que corresponde ao sistema triangular

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 0 \\ y - 4z &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo este último sistema por substituição reversa, podemos escrever suas soluções em forma paramétrica como

$$\begin{aligned} x &= -5z - w \\ y &= 4z \end{aligned}$$

em que z e w funcionam como parâmetros. Substituindo estes valores de x e y na matriz $[x, y, z, w]^t$ formada pelas variáveis, verificamos que, quaisquer que sejam os valores escolhidos para z e w , a matriz

$$X_0 = \begin{bmatrix} -5z - w \\ 4z \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

satisfaz $AX_0 = 0$, de modo que X_0 representa a solução do sistema quando este é expresso em forma matricial. Contudo, utilizando as operações com matrizes, podemos escrever

$$X_0 = z \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Levando em conta nossa interpretação geométrica para as soluções da equação $x + y + z = 0$, é difícil não ser levado a pensar nestes vetores como definindo um plano, só que desta vez em um espaço de quatro, em vez de três, dimensões. Em seu livro *Desenvolvimentos da Matemática no século XIX* [2, p. 156], Felix Klein diz que, tendo em vista as fórmulas para transformações no plano e no espaço

uma generalização parece quase óbvia: substituir as três variáveis x, y, z por qualquer número n de variáveis e, correspondentemente, estudar a geometria de um espaço de n dimensões. Esta ideia era tão natural que só podemos falar em um verdadeiro avanço tendo sido feito quando houve um interesse mais penetrante neste extenso domínio e a teoria necessária foi construída de maneira precisa.

Entre os primeiros matemáticos a estudarem de maneira sistemática a geometria em n -dimensões encontram-se George Green, Augustin-Louis Cauchy, Julius Plücker, Hermann Grassman e A. Cayley que, como já vimos, definiu as matrizes e suas operações básicas.

Como a citação de Klein sugere, a ideia de que há espaços de dimensão maior do que três vinha sendo considerada desde o século XVIII. No verbete *dimension* da *Encyclopédie* que publicou com Diderot a partir de 1751, D'Alembert escreve,

Um homem astuto que conheço crê que podemos considerar a duração como uma quarta dimensão.

Isto, claro, não passa de uma opinião. Lagrange, contudo, é muito mais explícito. Em sua *Teoria das funções analíticas*, publicada em 1797, ele escreve

Pode-se aplicar a teoria das funções na mecânica. Até agora as funções se referem basicamente ao tempo, que sempre designaremos por t ; e como a posição de um ponto no espaço depende de três coordenadas retangulares x , y e z , suporemos, nos problemas de mecânica, que estas coordenadas dependem do tempo. Assim, podemos considerar a mecânica como uma geometria em quatro dimensões e a análise mecânica como uma extensão da análise geométrica.

Na verdade, o uso generalizado de mais de quatro coordenadas teve seu prenúncio em outra obra de Lagrange, a *Mecânica Analítica*, que antecede a obra citada anteriormente em nove anos.

No século XX a ideia do tempo como quarta dimensão foi introduzido por H. Minkowski em 1907 como uma maneira de geometrizar a teoria da relatividade que Einstein havia publicado dois anos antes. Apesar de ter inicialmente reagido de maneira negativa à proposta de Minkowski, que havia sido seu professor em Zurique, Einstein veio a entender a importância desta formulação geométrica e fez dela a base sobre a qual construiu sua teoria da gravitação em 1915.

A discussão sobre o significado da quarta dimensão deu origem a inúmeros livros populares, o mais famoso dos quais é provavelmente *Flatland: A Romance of Many Dimensions*, publicado em 1884 por Edwin Abbott. Nele, figuras planas tentam entender o que significa a terceira dimensão a partir daquilo que podem ver, dada sua limitação de só enxergar o que está no plano que habitam. Da mesma forma nós, habitantes de um espaço tridimensional podemos tentar imaginar como seria um objeto que só existe em um espaço de quatro dimensões a partir de suas projeção em três dimensões. Teremos oportunidade de fazer este exercício no próximo capítulo.

Hoje em dia toda esta conversa sobre quatro dimensões empalidece diante do que propõem os adeptos da teoria de cordas, cujo modelo do universo requer que habitemos um espaço de 11 dimensões, 7 das quais são tão curvadas que não conseguimos identificá-las. Espaços de dimensões grandes também aparecem quando tentamos descrever a configuração dos planetas no sistema solar. Como três coordenadas são necessárias para determinar a posição de cada um dos sete planetas, a configuração de todo o sistema de planetas, sem contar asteróides e satélites, só pode ser feita em um espaço de $3 \times 7 = 21$ dimensões, em que cada grupo de 3 coordenadas representa a posição de um planeta.

2. O espaço \mathbb{R}^n

Seguindo a deixa da seção anterior, introduzimos nesta seção os espaços de dimensão n como objetos geométricos e estudamos algumas de suas propriedades mais elementares.

2.1. O espaço \mathbb{R}^n . Consideraremos n -uplas de números reais como sendo vetores em um espaço de n dimensões (ou n -dimensional) que denotaremos por

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ vezes}}$$

Como fizemos no caso do plano, estas n -uplas serão escritas como matrizes coluna. Assim

$$v = \begin{bmatrix} a_1, \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = [a_1, \dots, a_n]^t$$

é a forma geral de um vetor do \mathbb{R}^n . Tais vetores podem ser somados e multiplicados por escalares, exatamente como já fizemos nos casos em que a dimensão era dois ou três. Mais precisamente, se

$$(44) \quad v = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^t \quad \text{e} \quad u = [\beta_1, \dots, \beta_n]^t$$

então

$$v + u = [\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n]^t;$$

ao passo que

$$\lambda v = [\lambda \alpha_1, \dots, \lambda \alpha_n]^t,$$

qualquer que seja o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$. Naturalmente não há nenhuma novidade nisto, uma vez que estamos considerando estes vetores como matrizes. Pela mesma razão, estas operações satisfazem as seguintes propriedades:

- $(u + v) + w = u + (v + w)$;
- $u + v = v + u$;
- $u + 0 = u$;
- $1 \cdot u = u$ e $0 \cdot u = 0$
- $u + (-1)u = 0$;
- $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$;
- $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$;
- $(\lambda \mu)u = \lambda(\mu u)$;

em que $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e 0 é o vetor $(0, \dots, 0)$.

Quanto ao produto interno, como nada temos senão as coordenadas dos vetores, só nos resta defini-lo a partir destas coordenadas. Descrevendo as coordenadas de u e v como em (44), definimos

$$\langle u | v \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \beta_j,$$

que a notação matricial nos permite escrever de forma compacta como

$$(45) \quad \langle u | v \rangle = u^t v;$$

em que, como sempre, fazemos os vetores u e v corresponderem a matrizes coluna. Usando as propriedades das operações com matrizes, podemos facilmente provar que o produto interno assim definido satisfaz as mesmas propriedades que o produto escalar usual do plano; a saber,

- (1) $\langle u | v_1 + v_2 \rangle = \langle u | v_1 \rangle + \langle u | v_2 \rangle$;
- (2) $\langle v_1 | \lambda v_2 \rangle = \lambda \langle v_1 | v_2 \rangle$;
- (3) $\langle v_1 | v_2 \rangle = \langle v_2 | v_1 \rangle$;
- (4) $\langle u | u \rangle \geq 0$;
- (5) $\langle u | u \rangle = 0$ se, e somente se, $u = 0$;

quaisquer que sejam os vetores u , v_1 e v_2 do \mathbb{R}^n e o escalar λ . Como nos casos do plano e do espaço, diremos que dois vetores são *ortogonais* se o produto interno deles é nulo. Também a *norma euclidiana*, ou *comprimento* de um vetor, pode ser definida a partir do produto interno por

$$\|u\| = \sqrt{\langle u | u \rangle} = \sqrt{\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2}.$$

Já o *ângulo* entre dois vetores u e v do \mathbb{R}^n é definido por

$$\arccos \left(\frac{\langle u | v \rangle}{\|u\| \|v\|} \right).$$

No capítulo 1 obtivemos a fórmula (45) para vetores do plano a partir da definição, mais geométrica, do produto interno como o produto das normas dos dois vetores pelo cosseno do ângulo entre eles. Como um vetor do \mathbb{R}^n é uma n -upla de números, faz mais sentido definir o produto interno entre dois vetores u e v do \mathbb{R}^n diretamente a partir da fórmula (45). Invertemos, então, a ordem natural e usamos a versão geométrica da fórmula do produto interno para dar sentido ao conceito de ângulo entre dois vetores. Segue desta definição, que o ângulo entre dois vetores do \mathbb{R}^n cujo produto interno é nulo é igual a $\pi/2$ radianos. Por isso diremos que vetores cujo produto interno é nulo são *ortogonais*.

Embora a maneira pela qual definimos o produto interno em \mathbb{R}^n seja a mais natural e a mais prática do ponto de vista computacional, ela esconde o fato de que há uma maneira geométrica bastante simples de definir o ângulo entre dois vetores do \mathbb{R}^n , como veremos no artigo 2.2.

Apesar de ter sido introduzido de maneira abstrata como um produto cartesiano, o espaço \mathbb{R}^n vem munido de uma base ortonormal, formada pelos vetores e_1, \dots, e_n , com e_j sendo definido como o vetor que tem todas as suas entradas nulas, exceto a que fica na j -ésima posição, que vale um. Como

$$\langle e_i | e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

podemos concluir a partir das definições para norma e ortogonalidade de vetores do \mathbb{R}^n que os vetores e_1, \dots, e_n são realmente unitários e dois a dois ortogonais. Finalmente, qualquer vetor do \mathbb{R}^n pode ser escrito na forma

$$v = [a_1, \dots, a_n]^t = \sum_{j=1}^n a_j e_j.$$

Diremos que ε é a *base canônica* do espaço \mathbb{R}^n . Você deve ficar de sobre-aviso para o fato de que esta não é nem de longe a única base de \mathbb{R}^n com que trabalharemos.

2.2. Geometria em n -dimensões. Como vimos no artigo 1.2, o conjunto solução da equação $x + y + z = 0$ é um plano e pode ser descrito como o conjunto de todos os vetores da forma

$$au_1 + bu_2 \quad \text{em que} \quad u_1 = [-1, 1, 0]^t, \quad u_2 = [-1, 0, 1]^t \quad \text{e} \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Em geral, $v, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}^n$, diremos que v é uma *combinação linear* de w_1, \dots, w_n se existem números reais a_1, \dots, a_n tais que

$$v = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n.$$

Denotaremos o conjunto dos vetores que são combinações lineares de w_1, \dots, w_n por

$$\langle w_1, \dots, w_n \rangle,$$

e diremos que este conjunto é *gerado* por w_1, \dots, w_n . Assim, o plano de equação $x + y + z = 0$ corresponde a $\langle u_1, u_2 \rangle$. Com esta notação, podemos facilmente generalizar retas e planos para espaços multidimensionais. Se w_1 e w_2 são vetores não colineares do \mathbb{R}^n , diremos que $\langle w_1 \rangle$ é a *reta* cujo vetor diretor é w_1 e que $\langle w_1, w_2 \rangle$ é o *plano* gerado por w_1 e w_2 . Como seria de esperar, se

$$v = a_1 w_1 + a_2 w_2$$

é um vetor do plano $\pi = \langle w_1, w_2 \rangle$, então a reta $\langle v \rangle$ está contida no plano π , pois

$$bv = b(a_1 w_1 + a_2 w_2) = (ba_1)w_1 + (ba_2)w_2 \in \pi.$$

A existência de uma dimensão adicional, faz com que a geometria do \mathbb{R}^4 seja muito mais rica que a do \mathbb{R}^3 . Por exemplo, dois planos distintos do \mathbb{R}^3 sempre se intersectam em uma reta. Como um plano no \mathbb{R}^3 é definido por uma única equação em x, y e z , esta propriedade bem conhecida da geometria elementar equivale ao fato de que um sistema homogêneo de duas equações em três variáveis é necessariamente indeterminado. No \mathbb{R}^4 , entretanto, as coisas são um pouco diferentes. Por exemplo, as duas primeiras coordenadas de um vetor no plano $\pi_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$ são nulas, ao passo que as duas últimas coordenadas de um vetor do plano $\pi_2 = \langle e_3, e_4 \rangle$ são nulas. Portanto, as quatro coordenadas de um vetor na interseção de π_1 e π_2 serão nulas, de modo que $\pi_1 \cap \pi_2$ contém um único ponto!

Voltando ao exemplo com que começamos este artigo, há uma segunda maneira, diferente da que adotamos no artigo 1.2, que nos permite identificar que $x + y + z = 0$. Como fizemos no caso do plano, podemos escrever

$$x + y + z = \langle [1, 1, 1]^t \mid [x, y, z]^t \rangle,$$

de modo que os vetores $v = [x, y, z]^t$ cujas coordenadas satisfazem $x + y + z = 0$ são, exatamente, aqueles cujos produtos internos com $n = [1, 1, 1]^t$ são iguais a zero. Portanto, o conjunto solução de $x + y + z = 0$ também pode ser visto como o conjunto dos vetores que são ortogonais à reta $\langle n \rangle$. Naturalmente, nada nos impede de considerar o conjunto dos vetores que não são ortogonais a um dado vetor não nulo do \mathbb{R}^n ; o resultado, contudo, não é nada parecido com um plano. Por exemplo, os vetores $[x, y, z, w]^t$ que são ortogonais a $[1, 1, 1, 1]^t$ são aqueles que satisfazem a equação

$$(46) \quad 0 = \langle [x, y, z, w]^t \mid [1, 1, 1, 1]^t \rangle = x + y + z + w.$$

Mas, de $x + y + z + w = 0$, obtemos $x = -y - z - w$, de modo que o conjunto H formado pelos vetores que satisfazem (46) pode ser escrito na forma

$$H = \{[-y - z - w, y, z, w]^t \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\}.$$

Contudo

$$[-y - z - w, y, z, w]^t = x[-1, 1, 0, 0]^t + y[-1, 0, 1, 0]^t + z[-1, 0, 0, 1]^t;$$

de modo que, usando a notação introduzida acima, podemos escrever

$$H = \langle [-1, 1, 0, 0]^t, [-1, 0, 1, 0]^t, [-1, 0, 0, 1]^t \rangle.$$

Portanto, os vetores de H são combinações lineares de três vetores; e não de dois vetores, como esperaríamos se H fosse um plano. É claro que isto não exclui a possibilidade de haver dois vetores que gerem H . Mas, para que isto seja possível têm que existir vetores w_1 e w_2 tais que

$$(47) \quad [-1, 1, 0, 0]^t = a_1 w_1 + a_2 w_2$$

$$(48) \quad [-1, 0, 1, 0]^t = b_1 w_1 + b_2 w_2$$

$$(49) \quad [-1, 0, 0, 1]^t = c_1 w_1 + c_2 w_2,$$

para escolhas adequadas de números reais a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 e c_2 . Contudo,

$$b_1[-1, 1, 0, 0]^t - a_1[-1, 0, 1, 0]^t = b_1(a_1 w_1 + a_2 w_2) - a_1(b_1 w_1 + b_2 w_2) = (b_1 a_2 - a_1 b_2) w_2.$$

Como

$$c_1[-1, 1, 0, 0]^t - a_1[-1, 0, 0, 1]^t = c_1(a_1 w_1 + a_2 w_2) - a_1(c_1 w_1 + c_2 w_2) = (c_1 a_2 - a_1 c_2) w_2;$$

concluimos que

$$b_1[-1, 1, 0, 0]^t - a_1[-1, 0, 1, 0]^t \quad \text{e} \quad c_1[-1, 1, 0, 0]^t - a_1[-1, 0, 0, 1]^t$$

são colineares; isto é, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$b_1[-1, 1, 0, 0]^t - a_1[-1, 0, 1, 0]^t = r(c_1[-1, 1, 0, 0]^t - a_1[-1, 0, 0, 1]^t).$$

Mas isto equivale a dizer que

$$0 = (b_1 - rc_1)[-1, 1, 0, 0]^t - a_1[-1, 0, 1, 0]^t + a_1[-1, 0, 0, 1]^t = [-b_1 + rc_1, b_1 - rc_1, a_1, a_1]^t$$

donde podemos concluir que

$$a_1 = b_1 - rc_1 = 0.$$

Substituindo isto de volta em (47), obtemos

$$[-1, 1, 0, 0]^t = a_2 w_2 \quad \text{e} \quad [-1, 0, 1, 0]^t - r[-1, 0, 0, 1]^t = (b_2 - rc_2) w_2;$$

que, por sua vez, implica que

$$0 = a_2[-1, 0, 1, 0]^t - r a_2[-1, 0, 0, 1]^t - (b_2 - rc_2)[-1, 1, 0, 0]^t$$

donde

$$[-a_2 + r a_2 - (b_2 - rc_2), -(b_2 - rc_2), a_2, -r a_2]^t = 0$$

Em particular, obtemos $a_2 = 0$, o que não é possível pois como $a_1 = 0$, teríamos que

$$0 = a_1 w_1 + a_2 w_2 = [-1, 1, 0, 0]^t$$

o que é uma contradição óbvia.

O argumento acima mostra que o conjunto H não é um plano, muito menos uma reta: para poder identificá-lo, introduziremos uma nova terminologia. Diremos que o conjunto solução de uma equação

$$(50) \quad a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$$

em n -variáveis, cujos coeficientes não são todos nulos, é um *hiperplano* do \mathbb{R}^n . Considerando $n = [a_1, \dots, a_n]^t \neq 0$ como um vetor do \mathbb{R} , temos que

$$\langle v | n \rangle = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n,$$

qualquer que seja o vetor se $v = [x_1, \dots, x_n]^t$ do \mathbb{R}^n . Portanto, um vetor v pertence ao hiperplano de equação (50) se, e somente se, $\langle v | n \rangle = 0$. Em outras palavras, um hiperplano pode ser igualmente bem definido como o conjunto dos vetores do \mathbb{R}^n que são ortogonais a um dado vetor não nulo.

3. Operadores lineares

Até aqui estudamos os espaços multidimensionais de um ponto de vista estático, que só nos permite considerar conjuntos de vetores como retas, planos e hiperplanos. Nesta seção veremos como definir operadores neste espaços, o que nos permitirá mover vetores, introduzindo, assim, um aspecto dinâmico destes espaços que exploraremos em mais detalhe na seção 4.

3.1. Operadores lineares e matrizes. Dada uma matriz A de tamanho $n \times n$, podemos copiar o que fizemos no primeiro capítulo e usá-la para definir uma aplicação T_A que leva um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ no vetor Av , que também pertence ao \mathbb{R}^n , já que convencionamos escrever os elementos do \mathbb{R}^n na forma matrizes coluna $n \times 1$. Pelas propriedades das operações com matrizes,

$$A(v + w) = Av + Aw \quad \text{e que} \quad A(\lambda v) = \lambda Av,$$

quaisquer que sejam os vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ e o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$. Mas isto nos remete à definição de operador linear do plano, introduzida na seção 2 do capítulo 1. Generalizando aquela definição para nosso contexto atual, diremos que um aplicação $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um *operador linear* se

- $T(v + w) = Tv + Tw$
- $T(\lambda v) = \lambda Tv$,

quaisquer que sejam os vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$.

As propriedades das operações com matrizes enunciadas acima mostram que, dada uma matriz A de tamanho $n \times n$, a aplicação induzida T_A é uma transformação linear. Isto nos leva imediatamente a perguntar: será que, como no caso do plano, todo operador linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ pode ser definido a partir de uma matriz A de tamanho $n \times n$? Para ver que a resposta é sim, escreva o vetor $v = [x_1, \dots, x_n]^t$ usando a base ε definida no artigo 2.1:

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

Supondo que $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja um operador linear, temos que

$$T(v) = x_1 T(e_1) + \dots + x_n T(e_n).$$

Como cada $T(e_j)$ é uma matriz $n \times 1$, temos que

$$T(v) = Av$$

em que A é a matriz cujas colunas são os vários $T(e_j)$; isto é,

$$A = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ T(e_1) & T(e_2) & \ddots & T(e_n) \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix}$$

Note que esta matriz tem n colunas, cada uma das quais é um vetor de \mathbb{R}^n , de modo que se trata de uma matriz de tamanho $N \times n$, como seria de esperar. Mostramos, assim, que

se $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear e $(T)_\varepsilon$ é a matriz cujas colunas são os vetores $T(e_1), \dots, T(e_n)$ (nesta ordem!) então $T(v) = (T)_\varepsilon v$ para todo vetor $v \in \mathbb{R}^n$.

A matriz $(T)_\varepsilon$, que tem tamanho $n \times n$, é conhecida como *matriz de T relativamente à base canônica* ou, para simplificar, a *matriz de T* .

O que vimos até aqui, ainda que pouco, nos permite determinar a matriz de algumas transformações lineares. Por exemplo, a projeção do espaço tridimensional sobre o plano XY é uma transformação linear $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que leva qualquer vetor ortogonal ao plano XY no vetor nulo e deixa intactos os vetores sobre o plano. Em outras palavras, $P(e_3) = 0$, ao passo que $P(e_1) = e_1$ e $P(e_2) = e_2$. Usando a receita prescrita acima,

$$(P)_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A reflexão R cujo espelho é o plano XY também é uma transformação linear de \mathbb{R}^3 nele próprio que deixa intocados os vetores do plano. Mas desta vez, qualquer vetor ortogonal ao plano é invertido para o outro lado do plano. Assim, $R(e_1) = e_1$ e $R(e_2) = e_2$, mas $R(e_3) = -e_3$. Portanto,

$$(R)_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, seja ρ a rotação de ângulo θ do \mathbb{R}^3 em torno do eixo Z . Desta vez, são os vetores ao longo do eixo Z que ficam intocados, ao passo que qualquer vetor do plano XY é rodado de um ângulo θ . Embora isto garanta que $\rho(e_3) = e_3$, o efeito de ρ sobre os outros vetores ainda não está completamente determinado porque há dois sentidos em que podemos rodar estes vetores sobre o plano. Para fixar as ideias, escolheremos a rotação no sentido que é definido pela *regra da mão direita*,

se o polegar aponta na direção e sentido do vetor diretor escolhido para o eixo, então a rotação acompanha o movimento da rotação da concha formada pelos outros dedos.

Portanto, em nosso exemplo, devemos apontar o polegar na direção e sentido de e_3 , de modo que a rotação sobre o plano XY deve ocorrer no sentido anti-horário. Seguindo um argumento semelhante ao usado no artigo 2.3, descobrimos que

$$\begin{aligned} \rho(e_1) &= (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \\ \rho(e_2) &= (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0) \end{aligned}$$

que, combinado a $\rho(e_3) = e_3$, nos permite escrever a matriz de ρ na forma

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Um aspecto insatisfatório de nossos exemplos é que todos eles têm como elementos básicos (o plano de projeção, o espelho da reflexão, o eixo da rotação) planos ou retas coordenados e, portanto, muito especiais. Veremos nos próximos artigos como determinar as matrizes de projeções e reflexões mais gerais; já a generalização das rotações terá que esperar até o capítulo 5.

3.2. Projeções. Ao contrário do que acontecia com o plano, em que só podíamos projetar um vetor sobre outro, no caso do \mathbb{R}^3 , podemos projetar um vetor sobre uma reta ou um plano. Começaremos analisando a projeção sobre uma reta, porque é semelhante ao caso análogo do plano.

Seja, então, $u \in \mathbb{R}^3$ o vetor diretor unitário de uma reta. A projeção de um vetor v sobre u pertence à reta $\langle u \rangle$. Como u é unitário, basta determinar o comprimento da projeção de v sobre u , que é igual a $\|v\| \cos(\theta)$, em que θ é o ângulo entre u e v . Contudo, pela definição do ângulo entre dois vetores, temos que

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v | u \rangle}{\|v\|},$$

pois $\|u\| = 1$ por hipótese. Assim, a projeção de v sobre u terá norma igual a

$$\|v\| \cos(\theta) = \langle v | u \rangle = u^t v.$$

Portanto, o vetor projeção desejado será igual a

$$(u^t v)u = u(u^t v) = (uu^t)v$$

pois, sendo um número, $u^t v$ comuta com u . Temos, assim, que a matriz que define a projeção sobre a reta $\langle u \rangle$ é igual a uu^t .

Para projetar um vetor qualquer $v \in \mathbb{R}^3$ sobre o plano π cujo vetor normal unitário é n , podemos proceder de duas maneiras diferentes. A primeira, e mais clara do ponto de vista geométrico, consiste em subtrair de v um múltiplo de n a fim de anular a componente de v ao longo de n , achatando assim o vetor sobre o plano normal a n . Como n é unitário, a projeção de v sobre n é igual a $n^t v$, de modo que

$$v - (n^t v)n = v - n(n^t v) = (I - n^t n)v$$

pertence a π . Portanto, a matriz que define a projeção de sobre o plano π é igual a $I - n^t n$. Por exemplo, o plano de equação $x + y + z = 0$ tem

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1);$$

por vetor normal unitário. Logo, a matriz que realiza a projeção de \mathbb{R}^3 neste plano é

$$I - u^t u = I - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

que é igual a

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Uma segunda maneira de obter a projeção consiste em determinar dois vetores não colineares u_1 e u_2 sobre π . Projetamos, então, v sobre u_1 e sobre u_2 ; a soma destas duas projeções nos dá o mesmo vetor projeção obtido no parágrafo anterior. Contudo, a bem da verdade, não é claro que estas duas maneiras de proceder produzam a mesma projeção. A verificação disto vai ter que esperar até o artigo 3.2 do capítulo 4, onde estudaremos bases ortonormais gerais do \mathbb{R}^n .

Passando ao caso geral, seja H o hiperplano de \mathbb{R}^n formado pelos vetores perpendiculares ao vetor unitário n . A *projeção* P de \mathbb{R}^n em H é o operador linear de \mathbb{R}^n para o qual valem as seguintes propriedades

$$P(w) = \begin{cases} w & \text{se } w \in H; \\ 0 & \text{se } w \in \langle n \rangle. \end{cases}$$

Copiando discaradamente o que fizemos acima, esperamos que a matriz desta projeção seja $I - nn^t$. Para verificar isto basta que a matriz satisfaça as duas propriedades acima. Como

$$n^t w = \langle n | w \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } w \in H; \\ \mu n & \text{se } w = \mu n \in \langle n \rangle. \end{cases}$$

então

$$(I - nn^t)w = w - nn^t w = \begin{cases} w & \text{se } w \in H; \\ 0 & \text{se } w \in \langle n \rangle; \end{cases}$$

que é o resultado esperado confirmando que $I - nn^t$ é a matriz da projeção ortogonal P sobre o hiperplano H .

3.3. O hipercubo do \mathbb{R}^4 . Nesta seção veremos como definir o análogo no \mathbb{R}^4 de um cubo do \mathbb{R}^3 . Como não conseguimos visualizar objetos de quatro dimensões, a saída é seguirmos os exemplos dos engenheiros e arquitetos que desenharam projeções planas detalhadas de seus projetos para que possam ser reproduzidos da maneira correta na oficina. Como cada projeção do hipercubo envolve uma quantidade razoável de cálculos, descreveremos um algoritmo que nos permita facilmente desenhar suas projeções no plano da tela de um computador. Mas, para começar, o que é este tal de hipercubo?

Nosso ponto de partida será o quadrado, que podemos considerar como uma versão plana do cubo. O quadrado unitário que queremos descrever é aquele que tem vértices na origem e nos pontos $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$. Seguindo nossa prática usual, diremos que este quadrado tem vértices nos vetores 0 , e_1 , e_2 e $e_1 + e_2$. Nem todos os vértices são ligados

entre si por lados, mas somente aqueles que são adjacentes, no sentido de diferem em apenas uma de suas coordenadas. Passando, agora ao cubo, queremos considerar aquele cujos vértices são os vetores

$$0, e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3 \quad \text{e} \quad e_1 + e_2 + e_3.$$

Mais uma vez, somente aqueles vértices que têm apenas uma coordenada diferente é que são ligados por arestas. Seguindo este padrão, definimos o hipercubo como sendo a figura do \mathbb{R}^4 que tem vértices em

$$(51) \quad 0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_1 + e_4, e_2 + e_3, e_2 + e_4, e_3 + e_4, e_1 + e_2 + e_3, \\ e_1 + e_2 + e_4, e_1 + e_3 + e_4, e_2 + e_3 + e_4 \quad \text{e} \quad e_1 + e_2 + e_3 + e_4.$$

Portanto, assim, como um quadrado tem 4 vértices e um cubo tem 8 vértices, um hipercubo tem 16 vértices. Como no caso das outras duas figuras, somente os vértices do hipercubo que diferem em uma única coordenada é que estão ligados por arestas.

Tendo definido o hipercubo, como proceder para projetá-lo na tela de um computador? Para podermos desenhar o hipercubo no plano da tela, precisaremos de um sistema de eixos cartesianos, definidos a partir de uma base ortonormal do plano. Sendo assim, a primeira coisa a fazer é encontrar dois vetores u_1 e u_2 , unitários e ortogonais entre si, sobre o plano de projeção. Usaremos estes vetores para definir o plano, de modo que fica por conta do usuário escolhê-los. Em seguida, precisamos determinar as coordenadas das projeções de cada um dos vértices do hiperplano sobre u_1 e u_2 . Contudo, já vimos que a projeção de um vetor v sobre o plano $\pi = \langle u_1, u_2 \rangle$ é igual a

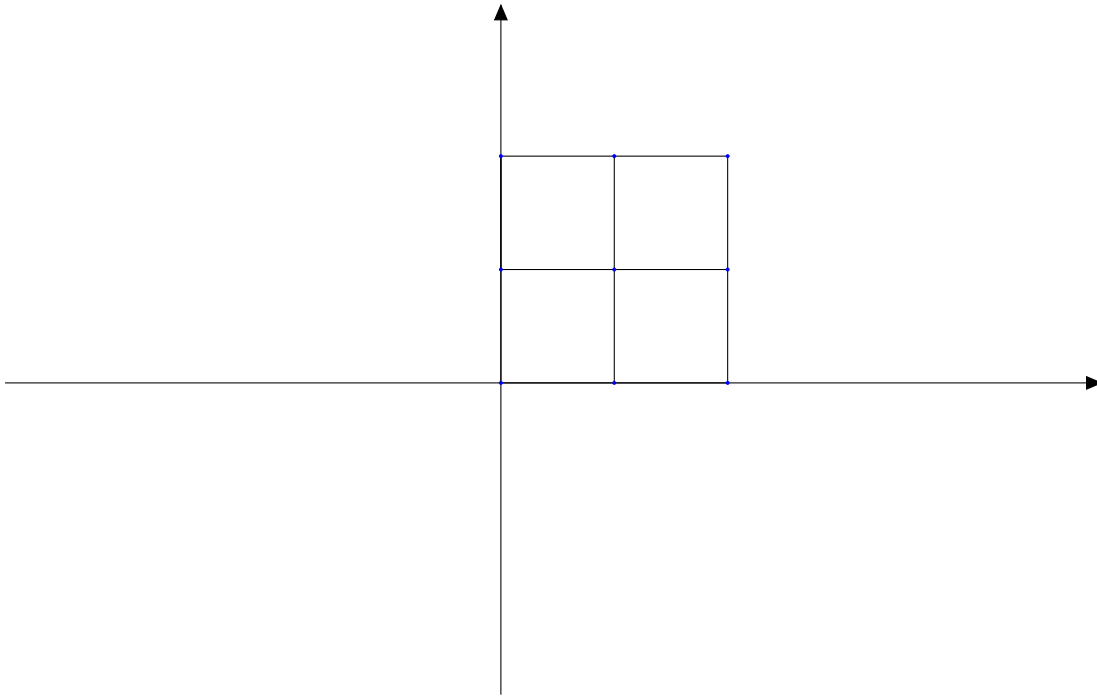
$$(u_1^t v)u_1 + (u_2^t v)u_2,$$

de modo que as coordenadas de v no sistema de eixo determinado por u_1 e u_2 são $u_1^t v$ e $u_2^t v$. Resta-nos marcar os pontos $(u_1^t v, u_2^t v)$, para cada um dos vetores v em (51). Dois destes pontos, digamos $(u_1^t v, u_2^t v)$ e $(u_1^t w, u_2^t w)$ serão ligados se v e w diferem em apenas uma coordenada.

Vejamos como fazer isto funcionar se escolhermos o plano do \mathbb{R}^4 gerado por $[1, 1, 0, 0]^t$ e $[0, 0, 1, 1]^t$. Neste caso, as projeções dos vários vértices são dadas pela tabela 1 e a figura resultante da projeção pode ser vista na figura 1.

Vértices	Projeções	Vértices	Projeções
0	(0, 0)	$e_2 + e_3$	(1, 1)
e_1	(1, 0)	$e_2 + e_4$	(1, 1)
e_2	(1, 0)	$e_3 + e_4$	(0, 2)
e_3	(0, 1)	$e_1 + e_2 + e_3$	(2, 1)
e_4	(0, 1)	$e_1 + e_2 + e_4$	(2, 1)
$e_1 + e_2$	(2, 0)	$e_1 + e_3 + e_4$	(1, 2)
$e_1 + e_3$	(1, 1)	$e_2 + e_3 + e_4$	(1, 2)
$e_1 + e_4$	(1, 1)	$e_1 + e_2 + e_3 + e_4$	(2, 2)

TABELA 1. Projeções dos vértices do hipercubo

FIGURA 1. Projeção do hipercubo no plano π

3.4. Reflexões. Agora que sabemos projetar, podemos facilmente refletir um vetor do espaço. Digamos que o *espelho*, também conhecido como *hiperplano de reflexão*, seja o hiperplano E cujo vetor normal unitário é n . Vimos no artigo anterior que se $v \in \mathbb{R}^n$ então sua projeção sobre E pode ser escrita na forma

$$v - nn^t v.$$

Geometricamente isto significa que subtraímos de v sua componente ortogonal a E , fazendo com que a diferença esteja sobre E . Para obter a reflexão precisamos apenas repor esta componente, só que do outro lado de E . Mas, para isto basta subtrair a projeção de v sobre n da projeção de v sobre E , o que nos dá

$$v - 2nn^t v = (I - 2nn^t)v$$

como reflexo de v relativamente a E . Logo, a matriz de reflexão é

$$(52) \quad I - 2nn^t$$

que, de resto, tem exatamente a mesma forma da matriz da reflexão relativamente a uma reta em \mathbb{R}^2 .

Por exemplo, para determinar a matriz da reflexão cujo espelho é o hiperplano $x + y + z + w = 0$, calculamos um vetor unitário perpendicular a este plano, digamos

$$n = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1).$$

Substituindo o vetor na fórmula (52), obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que, para achar a matriz de uma reflexão precisamos apenas conhecer um vetor unitário ortogonal ao espelho. Isto implica que uma reflexão R do \mathbb{R}^n fica completamente determinada se conhecemos um vetor v , fora do hiperplano de reflexão e sua imagem por v , porque $v - R(v)$ tem que ser um vetor ortogonal ao espelho. Para se convencer de que isto é verdade no plano, basta fazer um desenho; para o \mathbb{R}^n , precisamos de uma conta.

Suponha, então, que $R = I - 2nn^t$ é uma reflexão do \mathbb{R}^n cujo espelho é o hiperplano E normal ao vetor unitário n . Se $v \notin E$, então

$$v - R(v) = v - (v - nn^t v) = n(n^t v).$$

Como

$$n^t v = \langle n | v \rangle$$

é um escalar, mostramos que $v - R(v)$ é um múltiplo de n . Portanto, para achar $\pm n$ e calcular a matriz da reflexão basta normalizar o vetor $v - R(v)$.

Um exemplo muito importante desta última construção ocorre quando a reflexão R leva um dado vetor v de \mathbb{R}^n em um vetor colinear ao vetor e_1 da base canônica. Como o comprimento de um vetor não pode ser alterado por reflexão, deveremos ter que

$$R(v) = \|v\|e_1.$$

Portanto, o vetor unitário u normal ao espelho será obtido dividindo

$$v - \|v\|e_1$$

por seu comprimento. Diremos, neste caso, que R é a *reflexão de Householder* determinada por v . O nome é uma homenagem a A. Householder que mostrou em 1958 [3] como estas matrizes poderiam ser usadas em um algoritmo de decomposição matricial.

Por exemplo, quando $v = (1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$, o vetor n é obtido normalizando-se

$$(1, 1, 1, 1) - 2(1, 0, 0, 0) = (-1, 1, 1, 1),$$

de modo que a reflexão de Householder correspondente tem matriz

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

As reflexões de Householder serão usadas futuramente em um importante algoritmo de decomposição de matrizes.

4. Dinâmica de populações

Nesta seção veremos como utilizar espaços de n -dimensionais e seus operadores lineares para modelar o comportamento ao longo do tempo das populações de certos animais

4.1. Introdução. Tradicionalmente a população de uma espécie viva é modelada através de equações diferenciais que descrevem o crescimento ou decrescimento da população como uma função contínua do tempo. Este modelo é certamente apropriado quando se trata de bactérias ou seres humanos, cujos indivíduos podem reproduzir-se a qualquer momento. Contudo, há espécies cuja reprodução ocorre em momentos determinados do tempo, entre elas aves, insetos e répteis. Neste caso ocorre um pulso reprodutivo em momentos isolados do tempo e um modelo em que o tempo é discreto corresponde ao comportamento de tais populações de maneira mais adequada do que aquele em que o tempo é contínuo.

Destes modelos de tempo discreto o mais simples é aquele em que o número $p(k+1)$ de indivíduos em um dado momento $k+1$ (que pode ser dia, mês ou ano) é um múltiplo constante da quantidade de indivíduos no momento anterior t . Temos, assim, a equação

$$(53) \quad p(k+1) = \lambda p(k),$$

em que λ representa a taxa de crescimento populacional. Neste modelo, originalmente proposto por Thomas Malthus em seu *An Essay on the Principle of Population*, publicado em 1798, a população cresce exponencialmente sempre que $\lambda > 1$. De fato, se $p(0)$

representa o número de indivíduos inicialmente contados em uma dada população, então, depois de decorrido um tempo k , temos que

$$p(k) = \lambda^k p(0).$$

Segundo Malthus os recursos disponíveis a uma população cresceriam de maneira aritmética. Com a população crescendo a uma taxa exponencial, isto inevitavelmente levaria ao colapso futuro desta população. A sexta edição da obra de Malthus foi lida tanto por Charles Darwin, como por Alfred Russel Wallace, e inspirou ambos a proporem versões virtualmente idênticas do princípio de evolução por seleção natural.

Contudo, o modelo malthusiano é demasiadamente primitivo porque não reflete princípios elementares do comportamento de muitas populações, como o fato de que um indivíduo muito jovem não se reproduz e de que um indivíduo velho tem menores chances de sobrevivência. Para contornar este problema, o biólogo inglês P. H. Leslie introduziu em 1945 o modelo matricial que descreveremos a seguir.

Leslie separou cada população em faixas etárias com comportamento reprodutivo comum. Considere, por exemplo, uma população de salmão na qual se identificam três classes etárias, que denotaremos por $p_1(k)$, $p_2(k)$ e $p_3(k)$. A taxa de sobrevivência destas três classes etárias é a seguinte: 53 % dos salmões da classe 1 e 22 % dos salmões da classe 2 sobrevivem de um ano para o outro, mas nenhum salmão sobrevive à classe 3. Traduzindo isto em termos de equações, temos que

$$\begin{aligned} p_2(k+1) &= 0,53 \cdot p_1(k); \\ p_3(k+1) &= 0,22 \cdot p_2(k). \end{aligned}$$

Por outro lado, embora os salmões da primeira classe etária não se reproduzam, os que pertencem às outras duas classes geram novos indivíduos, em média 4 alevinos para cada membro da segunda classe etária e 5 para cada membro da terceira. Portanto,

$$p_1(k+1) = 4p_2(k) + 5p_3(k).$$

Leslie teve a ideia de representar estas três equações na forma de uma única equação matricial. Para isto, consideramos o vetor

$$p(k) = \begin{bmatrix} p_1(k) & p_2(k) & p_3(k) \end{bmatrix}^t$$

Das equações acima, obtemos

$$p(k+1) = \begin{bmatrix} 4p_2(k) + 5p_3(k) & 0,53p_1(k) & 0,22p_2(k) \end{bmatrix}^t$$

que podemos escrever na forma

$$p(k+1) = L \cdot p(k);$$

em que L é a matriz 3×3 cujas entradas são

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0,53 & 0 & 0 \\ 0 & 0,22 & 0 \end{bmatrix};$$

e é conhecida como a *matriz de Leslie* do modelo.

De posse desta matriz podemos facilmente determinar como a população de salmões evolui ao longo do tempo. Por exemplo, uma população que começa com 100 indivíduos jovens lançados em um rio corresponde a tomar

$$p(0) = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t.$$

Ao cabo de um ano, teríamos

$$p(1) = L \cdot p(0) = \begin{bmatrix} 0 & 53 & 0 \end{bmatrix}^t;$$

ao cabo de dois anos

$$p(2) = L \cdot p(1) = L^2 \cdot p(0) = \begin{bmatrix} 212 & 0 & 11,66 \end{bmatrix}^t;$$

e ao cabo de dez anos

$$p(10) = L^{10} \cdot p(0) = \begin{bmatrix} 5198,88 & 1188,14 & 260,73 \end{bmatrix}^t.$$

4.2. O modelo de Leslie. Suponhamos que temos uma população de uma espécie viva que podemos subdividir em k faixas etárias. Designaremos por $p_j(k)$ a quantidade média de indivíduos que pertencem à faixa etária j depois de ter sido decorrido um tempo k , a partir da primeira contagem feita nesta população.

O modelo de Leslie descreve o comportamento de uma população que não se reproduz continuamente ao longo do tempo, mas sim a intervalos fixos e periódicos como dias, meses ou anos. Para descrevê-lo precisamos conhecer

- a *taxa de sobrevivência* dos indivíduos entre uma faixa etária e a seguinte;
- a *taxa de fecundidade* da espécie, dada pela quantidade de descendentes de um indivíduo que nascem, em média, por unidade de tempo enquanto este indivíduo faz parte de uma dada classe etária.

Denotaremos por $s_{i,i+1}$ a porcentagem de indivíduos da faixa etária i que atingem a faixa etária $i + 1$ e por $f_{1,i}$ a taxa de fertilidade da faixa etária i . Note que $0 < s_{i,i+1} \leq 1$ já que

se trata de uma percentagem, ao passo que $f_{1,i} \geq 0$, uma vez que um indivíduo pode dar origem a muitos outros de cada vez. De posse destas taxas, podemos escrever

$$p_i(k) = \begin{cases} s_{i-1,i}p_{i-1}(k) & \text{para } 2 \leq i \leq k \\ f_{1,1}p_1(k) + \cdots + f_{1,k}p_k(k) & \text{para } i = 1. \end{cases}$$

Seguindo a ideia original de Leslie, as mesmas equações podem ser descritas compactamente em notação matricial por

$$p(k+1) = L \cdot p(k),$$

em que

$$p(k) = p_1(k) \quad \cdots \quad p_k(k)^t$$

e L é a matriz $n \times n$ definida por

$$L = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} & \cdots & f_{1,n-1} & f_{1,n} \\ s_{1,2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_{2,3} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s_{n-1,n} & 0 \end{bmatrix}$$

Tendo determinado o número de indivíduos em cada faixa etária de uma população em um dado momento, podemos usar o modelo para prever sua evolução ao longo do tempo, calculando

$$(54) \quad p(k) = L^k \cdot p(0)$$

para vários valores de k , que são inteiros maiores que zero.

Há muitas perguntas sobre o comportamento de uma dada população depois de decorrido um certo tempo (medido em múltiplos inteiros do período adotado) que podemos usar o modelo para prever. Entre elas:

- (1) qual a quantidade total de indivíduos em um dado momento?
- (2) a população atingirá uma distribuição de idades estável?

A primeira pergunta é bastante óbvia, mas a segunda precisa ser mais bem elaborada. O que de fato queremos saber com a segunda pergunta é se a população tende a uma distribuição que mantém, ao longo do tempo, a mesma proporção entre a quantidade de indivíduos nas várias faixas etárias. Note que, neste último caso, a proporção entre faixas etárias pode ser mantida, ainda que a população total não permaneça constante. Vamos nos referir às populações que satisfazem a esta propriedade como *estáveis*.

Vejamos como formular estas duas perguntas em termos da matriz de Leslie. No caso da primeira pergunta basta calcular $p(k)$ usando a equação (54) e somar suas entradas. Isto é, a população total depois de decorridos k unidades de tempo é

$$P(k) = p_1(k) + \cdots + p_k(k),$$

que é a soma da quantidade de indivíduos em cada faixa etária. Denotando por u_0 a matriz coluna $1 \times n$ cujas entradas são todas iguais a 1, a igualdade anterior pode ser reescrita na forma

$$P(k) = u_0^t p(k).$$

Quanto à segunda pergunta, devemos determinar se existe algum inteiro $k_0 \geq 0$ tal que, para todo $k \geq k_0$, o vetor $p(k)$ é múltiplo constante de $p(k_0)$. Mas, para que isto aconteça basta que $p(k_0 + 1)$ seja múltiplo constante de $p(k_0)$. De fato, se existem k_0 e λ tais que

$$p(k_0 + 1) = \lambda p(k_0),$$

então

$$(55) \quad Lp(k_0) = \lambda p(k_0).$$

Disto podemos deduzir que

$$L^r p(k_0) = L^{r-1}(Lp(k_0)) = \lambda L^{r-1} p(k_0),$$

donde o resultado desejado segue por indução em r . A igualdade (55) pode ser reescrita na forma

$$(L - \lambda I)p(k_0) = 0;$$

em que, I representa a matriz identidade de tamanho $n \times n$. Portanto, mais uma vez, a pergunta reduz-se, de certa forma, a resolver um sistema homogêneo e encontrar suas soluções positivas. Entretanto, também desta vez há um complicador: a matriz do sistema depende de λ , o fator de proporcionalidade entre $p(k_0 + 1)$ e $p(k_0)$, que é desconhecido. Voltaremos a abordar esta questão assim que tivermos introduzidos os conceitos necessários para tratá-la de maneira satisfatória. Contudo, mesmo quando aprendermos a achar λ , e assim resolver completamente o sistema $(L - \lambda I)X = 0$, tudo o que teremos feito é dar solução ao que podemos chamar de *versão estática* do problema original:

a população cuja matriz de Leslie é L admite alguma distribuição estável?

O problema é que a pergunta original é dinâmica:

a população cuja matriz de Leslie é L tende a alguma distribuição estável?

Mesmo sabendo que o modelo admite distribuições estáveis, como podemos ter certeza de que a população se aproxima delas à medida que o tempo passa? Seremos capazes de

resolver a versão estática do problema ao final deste capítulo, mas a versão dinâmica terá que esperar até o final do próximo capítulo.

4.3. Variações sobre um tema de Leslie. O modelo de Leslie padece de vários problemas, o mais importante dos quais é que uma classificação por idade não descreve de maneira adequada a evolução temporal da população de certas espécies. Para contornar este problema L. P. Lefkovitch introduziu em 1965 uma variação do modelo de Leslie em que as faixas etárias são substituídas por etapas pelas quais cada indivíduo passa ao longo de seu desenvolvimento.

Por exemplo, em um trabalho publicado em 2003 o comportamento de uma população de palmiteiros (*Euterpe edulis*, a palmeira da qual se extrai o palmito) foi estudada subdividindo-se seu ciclo de vida em sete etapas, da seguinte maneira:

- etapa 1:** 0 a 3 folhas;
- etapa 2:** 4 folhas até a planta atingir 10 mm de diâmetro;
- etapa 3:** plantas de diâmetro entre 10.1 e 20mm;
- etapa 4:** plantas de diâmetro entre 20.1 e 30mm;
- etapa 5:** plantas de diâmetro entre 30.1 e 60mm;
- etapa 6:** plantas de diâmetro entre 60.1 e 120mm;
- etapa 7:** mais de 120 mm.

Somente as plantas da etapa 7 se reproduzem e a taxa de fecundidade é $f_{1,7} = 98$. A palmeira que sobrevive a um dado ano de vida, pode-se comportar de duas maneiras diferentes: pode crescer e ingressar na próxima etapa ou entrar em estase e permanecer na mesma etapa em que estava. A probabilidade de cada um destes acontecimentos é a seguinte:

Etapa	Probabilidade de crescer	Probabilidade de estase
1	0.50	0.51
2	0.11	0.76
3	0.20	0.74
4	0.39	0.61
5	0.18	0.80
6	0.19	0.78
7	0.00	0.99

Observe que, tendo atingido a etapa 7, mesmo crescendo a planta não passará a nenhuma outra etapa. Neste caso ela pode apenas reproduzir-se e morrer ou permanecer nesta etapa. Portanto, g_7 representa a probabilidade da planta sobreviver, tendo atingido a idade adulta.

Denotando por $p_{i,i+1}$ a probabilidade da planta passar à etapa seguinte e por g_i a probabilidade de entrar em estase na etapa i , podemos escrever as equações que descrevem o comportamento desta população por

$$p_i(k+1) = \begin{cases} p_{i,i+1}p_{i-1}(k) + g_i p_i(k) & \text{para } 2 \leq i \leq 7 \\ f_{1,7}p_7 & \text{para } i = 1 \end{cases}$$

Portanto, escrevendo

$$p(k) = [p_1(k), \dots, p_7(k)]^t$$

e denotando por L a matriz

$$\begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{1,7} \\ p_{1,2} & g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{2,3} & g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{3,4} & g_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{4,5} & g_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{5,6} & g_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{6,7} & g_7 \end{bmatrix}.$$

Os autores usam este modelo para estudar o efeito da colheita sobre o comportamento de uma população de palmitinhos.

Tendo representado a distribuição de idades de uma população como um único objeto—uma matriz coluna com sete entradas—nosso próximo passo consiste em pensar estas matrizes como vetores em um espaço cujos elementos representam as várias distribuições de população possíveis para os palmitinhos. Observe que a palavra espaço está sendo usada aqui em um sentido abstrato. Os vetores deste espaço não designam posições de palmitinhos no planeta Terra, mas sim a distribuição em etapas de desenvolvimento das quantidades médias de indivíduos em uma dada população de palmitinhos.

Exercícios

1. Escreva o vetor v como combinação linear dos vetores do conjunto G , para cada um dos exemplos abaixo.
 - (a) $v = [2, 8]^t$ e $G = \{[1, -1]^t, [3, 2]^t\}$;
 - (b) $v = [0, 1]^t$ e $G = \{[3, 2]^t, [2, 2]^t\}$;
 - (c) $v = [2, 1, 3]^t$ e $G = \{[1, 1, 1]^t, [1, 1, -1]^t, [1, -4, 5]^t\}$;
 - (d) $v = [1, -1, 4]^t$ e $G = \{[1, -1, 2]^t, [1, -3, 4]^t, [-1, 3, 2]^t\}$;
 - (e) $v = [2, 1, 3, 2]^t$ e $G = \{[1, 0, 0, 1]^t, [0, 1, 2, 0]^t, [0, 1, -1, 0]^t\}$;
 - (f) $v = [1, 1, 1, 1]^t$ e $G = \{[2, 3, 1, 1]^t, [5, 6, 1, 1]^t, [1, 2, 1, 1]^t\}$.

2. Determine um conjunto finito de geradores para cada um dos seguintes conjuntos solução:
 - (a) $\{[x, y, z]^t \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\}$;
 - (b) $\{[x, y, z]^t \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = y - z = 0\}$;
 - (c) $\{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \mid x + z = y - w = 0\}$;
 - (d) $\{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = x - y + z - w = x - z + w = 0\}$;
 - (e) $\{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + w = 0\}$.
3. Determine um conjunto finito de geradores para o conjunto solução do sistema homogêneo associado a cada um dos sistemas do exercício 8 da página 102.
4. Dê exemplo de um sistema linear homogêneo cujo conjunto solução pode ser gerado por:
 - (a) $\langle (1, 1, -1), (2, 3, -1), (3, 1, -5) \rangle$ em \mathbb{R}^3 ;
 - (b) $\langle (1, -1, 0, 0), (1, 0, 1, 1), (0, 1, -1, 0) \rangle$ em \mathbb{R}^4 ;
 - (c) $\langle (1, -1, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 0, 1) \rangle$ em \mathbb{R}^5 ;
 - (d) $\langle (1, 1, 1, 0), (1, 0, 2, 1), (5, 2, 8, 3) \rangle$ em \mathbb{R}^4 ;
 - (e) $\langle (1, 2, 0, 1, 1), (1, 4, 1, 2, 0), (1, 0, 1, 1, 1) \rangle$ em \mathbb{R}^5 .
5. Escreva a matriz correspondente a cada uma das transformações lineares dadas abaixo:
 - (a) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z, w) = (x - y + z - w, x + y, 3z - 3w)$;
 - (b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $T(x, y, z) = (x + y - z, x - y - 3z, x - 2z, y + z)$;
 - (c) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $T(x, y, z, w) = (x + y, x, -x + y, x + y)$;
 - (d) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (x - y, x + y, x + y)$;
 - (e) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $T(x, y, z, w) = (x - y, z - w, x - y, z + w)$.
6. Escreva a matriz correspondente a cada uma das transformações lineares descritas abaixo:
 - (a) a projeção do \mathbb{R}^5 no hiperplano definido por $x - y - z + 2w + 5t = 0$;
 - (b) a reflexão do \mathbb{R}^3 cujo espelho é o plano de equação $x - 3y - 2z = 0$;
 - (c) a rotação do \mathbb{R}^3 de eixo $(1, 0, 0)$ por um ângulo de $\pi/3$ radianos, no sentido definido pela regra da mão direita tomando-se v no sentido do polegar.
7. Mostre que uma matriz R de tamanho $n \times n$ define uma reflexão, então R é simétrica, ortogonal e tem determinante igual a -1 .
8. Dê exemplo de uma matriz ortogonal de tamanho 3×3 que tem determinante igual a -1 , mas não descreve uma reflexão.
9. Determine a imagem de uma rotação e de uma reflexão no plano.

10. O operador linear T de \mathbb{R}^3 definido por

$$T(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y - z)$$

é inversível? Em caso afirmativo, determine $T^{-1}(x, y, z)$.

11. Calcule a inversa de cada um dos seguintes operadores lineares (quando existirem):

(a) $T_1(x, y, z) = (2x + 5y - z, 4x - y + 2z, 6x + 4y)$;

(b) $T_2(x, y, z) = (x + y - z, 3x + y + z, 3x - y + z)$;

(c) $T_3(x, y, z) = (4x - y + 3z, 3x - 2y + 5z, 2x + 3y + 4z)$;

(d) $T_4(x, y, z) = (2x + y + 2z, 3x + y + 4z, x + y + z)$;

(e) $T_5(x, y, z, w) = (x + 3y + w, x + 2y + z + w, 2x + 4y + 2z + w, x + 2z)$;

(f) $T_6(x, y, z, w) = (x + 2y - 3z + 5w, y + 4z + 3w, z - w, z)$;

12. Determine o conjunto dos vetores que são ortogonais a todos os vetores do conjunto do \mathbb{R}^3 definido por

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}.$$

13. Determine o conjunto dos vetores que são ortogonais a todos os vetores do conjunto do \mathbb{R}^3 gerado por $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$ e $(1, -1, -1)$.

14. Seja P a projeção ortogonal do \mathbb{R}^3 sobre o plano $3x + y - z = 0$.

(a) Determine a matriz de P .

(b) Determine $(Pv)_B$ para os vetores cujas coordenadas relativamente à base canônica são $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(1, 1, 0)$.

(c) Esboce o desenho, no plano $3x + y - z = 0$ da projeção do quadrado cujos vértices são $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 1, 0)$ e $D = (1, 1, 0)$.

15. Seja P a projeção ortogonal do \mathbb{R}^3 ao longo do vetor $v = (1, 1, 1)$.

(a) Determine a matriz de P .

(b) Determine $(Pv)_B$ para os vetores cujas coordenadas relativamente à base canônica são $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$ e $(1, 1, 1)$.

(c) Esboce o desenho, no plano de projeção de P , do cubo cujos vértices são os pontos acima e a origem.

16. Seja P a projeção do \mathbb{R}^4 ao longo do vetor $(1, 1, 1, 1)$. Determine a matriz de P .

17. Em um artigo chamado *Population waves*, que publicou em 1941, Harro Bernardelli descreve uma população de besouros cujo comportamento seria descrito pela matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule B^2 e B^3 .

- (b) Mostre que esta população de besouros tem comportamento oscilatório para qualquer população inicial diferente de zero.
18. Mostre que a população de salmões descrita no artigo 4.1 não pode ter comportamento oscilatório para toda população inicial.
SUGESTÃO: mostre que todas as entradas de L^5 são positivas e conclua a partir disto.
19. Determine todos os valores reais de α , β e γ para que a população descrita pela matriz de Leslie

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \end{bmatrix}$$

tenha o mesmo comportamento periódico apresentado pelos besouros de Bernardelli.

20. Considere uma população cujo comportamento demográfico ao longo do tempo é controlado pela matriz de Leslie

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

Se a população inicial medida é de 10 indivíduos para cada faixa etária

- (a) Qual será a população total em 10 anos?
 (b) Qual será a distribuição de população por faixa etária em 10 anos?
 (c) Esta população admite uma distribuição estável por faixa etária para a qual a população total permanece constante?
 (d) Esta população admite uma distribuição cuja população total é constante?
21. Considere a matriz de Leslie dada por
- $$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$
- (a) Considerando apenas as taxas de fecundidade e probabilidades de sobrevivência que aparecem na matriz, determine distribuições de população que inevitavelmente levarão à extinção.
 (b) Em quantas gerações esta população atinge uma distribuição estável?
 (c) Em quantas gerações a população total desta espécie torna-se constante?
22. Seja L uma matriz de Leslie, de tamanho $n \times n$, cujas taxas de fecundidade são todas positivas, com possível exceção da primeira. Mostre que:
- (a) a primeira linha de L^3 só tem entradas positivas;
 (b) as j -ésimas primeiras linhas de L^{j+3} têm entradas positivas;

(c) todas as entradas de L^{3+n} são positivas.

23. Dada uma matriz $n \times m$, definimos sua 1-norma pela regra

$$|A|_1 = \max\{|A(i, j)| \mid 1 \leq i \leq n \text{ e } 1 \leq j \leq m\}.$$

Prove que se B é uma matriz $n \times m$, C uma matriz $m \times k$ e λ um número real, então

- $|A + B|_1 \leq |A|_1 + |B|_1$;
- $|AC|_1 \leq |A|_1 |C|_1$;
- $|\lambda A|_1 = |\lambda| |A|_1$;

em que $|\lambda|$ denota o valor absoluto de λ .

CAPÍTULO 4

Espaços vetoriais

Como vimos no capítulo anterior, ao estudarmos operadores lineares simples do \mathbb{R}^n como reflexões ou projeções, precisamos considerar certos subconjuntos do \mathbb{R}^n , como retas, planos e hiperplanos. Neste capítulo veremos que é possível estudar as propriedades destes conjuntos de maneira unificada usando o conceito de espaço vetorial. Em particular, isto nos permitirá introduzir o conceito de dimensão, o que nos permitirá mostrar que as retas e planos do \mathbb{R}^n , introduzidos no capítulo anterior, têm dimensão um e dois, respectivamente.

1. Espaços vetoriais

Vimos no capítulo anterior que é possível definir operações de adição e multiplicação por escalar entre n -uplas de números reais e que o subconjunto do \mathbb{R}^n formado pelas soluções de um sistema linear homogêneo é fechado relativamente a estas mesmas operações. Além disso, a adição e a multiplicação por escalar do \mathbb{R}^n , assim como suas restrições ao conjunto solução de um sistema homogêneo, satisfazem as mesmas propriedades que as operações de mesmo nome que definimos para os vetores do plano. Isto significa que qualquer característica de um destes conjuntos que dependa apenas destas propriedades comuns serão necessariamente verdadeiras para os outros dois conjuntos. Seguindo uma tradição que remonta à Grécia Antiga, os matemáticos tornaram rigorosas estas analogias introduzindo o conceito de espaço vetorial. Sem faltar demasiado com a verdade, podemos dizer que a noção de espaço vetorial está para o \mathbb{R}^n , assim como a noção de triângulo está para um dado triângulo equilátero cujo lado mede um metro.

1.1. Definições básicas. Seja V um conjunto não vazio no qual estão definidas duas operações, que chamaremos de *adição* e *multiplicação por escalar*. Em outras palavras, dados $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, obtemos, de maneira única, dois novos vetores de V : a soma $u + v$ e o produto por escalar λv . Diremos que V , munido destas duas operações, é um *espaço vetorial real*, se as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. $u + (v + w) = (u + v) + w$;
2. $u + v = v + u$;
3. existe $0 \in V$ tal que $u + 0 = u$;

4. dado $v \in V$, existe $\bar{v} \in V$ tal que $v + \bar{v} = 0$;
5. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$;
6. $(\lambda + \mu)u = (\lambda + \mu)u$;
7. $(\lambda\mu)u = (\lambda)(\mu u)$;
8. $0 \cdot u = 0$ e $1 \cdot u = u$;

quaisquer que sejam $u, v, w \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

O adjetivo real refere-se ao fato dos escalares relativamente aos quais V está definido serem números *reais*, e não números complexos ou algo mais bizarro como uma classe de inteiros módulo um número primo. Os elementos de V serão chamados genericamente de *vetores*. Em particular, o elemento 0 definido pela propriedade 3 é o *vetor nulo*. Assim, na equação $0 \cdot u = 0$ da *propriedade* 8, o zero que multiplica o vetor u é um escalar, ao passo que o zero do lado direito da igualdade é o vetor nulo. Já o vetor \bar{v} definido pela propriedade 4 pode ser descrito em termos do produto por escalar por $\bar{v} = (-1) \cdot v$. De fato,

$$(1 - 1) \cdot v = 0 \cdot v = 0$$

pela propriedade 8, ao passo que, pelas propriedades 6 e 8,

$$(1 - 1) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = v + (-1) \cdot v.$$

Portanto,

$$v + (-1) \cdot v = 0.$$

A igualdade desejada é obtida somando-se \bar{v} de ambos os lados da equação acima.

Observe que a definição de espaço vetorial nada diz sobre o produto interno. A razão é que há muitos objetos em matemática que satisfazem as condições acima e, portanto, são espaços vetoriais, mas que não admitem nada semelhante a um produto interno definido de maneira natural. Por isso, pareceu aos matemáticos preferível definir a noção de espaço vetorial sem requerer a existência de um produto interno. Nunca é demais lembrar que estas estruturas não são dadas pela natureza, mas sim nomes que pessoas inventaram para descrever objetos matemáticos que ocorrem com frequência.

1.2. Subespaços. Como vimos no capítulo 3, tanto o conjunto solução de um sistema homogêneo como o subconjunto de \mathbb{R}^n gerado por uma quantidade finita de vetores nunca são vazios, porque sempre contêm o vetor nulo. Além disso, a soma de quaisquer dois elementos em um destes conjuntos sempre é um novo elemento do conjunto, e o mesmo se pode dizer do produto de um elemento por um escalar. A ubiquidade destas propriedades levou os matemáticos a definirem um subconjunto S de um espaço vetorial V como sendo um *subespaço* de V se

- $0 \in S$;
- $u + v \in S$ para todo $u, v \in S$;
- $\lambda \cdot u \in S$ para todo $u \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Isto significa que somando dois elementos de S considerados como vetores em V , obtemos um elemento de S , e que o produto de um elemento de S por um escalar também é um elemento de S . Como as propriedades 1, 2, 5, 6, 7 e 8 valem para *todos* os elementos de V , então também valem para quaisquer elementos de S . Que a propriedade 3 vale em S é parte da definição. Finalmente, se $v \in V$, então $\bar{v} = (-1) \cdot v$, tem que estar em S porque é o produto de um escalar por um elemento de S . Portanto, S também é um espaço vetorial real que, por sua vez, está contido no espaço V , o que explica porque tais conjuntos são conhecidos como subespaços.

A importância desta última afirmação não deve ser subestimada, até porque é a principal justificativa para introduzirmos a noção geral de espaço vetorial em um curso que trata basicamente do \mathbb{R}^n e de seus subespaços. Como subespaços também são espaços vetoriais, *tudo o que provarmos para um espaço vetorial geral valerá tanto para \mathbb{R}^n , quanto para seus subespaços*, independentemente da maneira como forem definidos. Isto representa uma enorme economia de tempo e esforço, que não deve ser subestimada.

Para encerrar, observe que, como os subespaços de um espaço vetorial V são subconjuntos de V , podemos aplicar a eles quaisquer operações de conjuntos que desejarmos. Por outro lado, um subespaço é um subconjunto que satisfaz algumas propriedades muito especiais, e nada garante que ao uni-los, intersejá-los ou calcular seus complementos teremos necessariamente novos subespaços de V . A bem da verdade, como todo subespaço tem que conter o vetor zero, não é possível que o complementar de um subespaço também seja um subespaço. Mas o que ocorre com a interseção? Suponhamos que U e U' sejam subespaços de um espaço vetorial V . Portanto, por hipótese, $0 \in U$ e $0 \in U'$, de modo que $0 \in U \cap U' \neq \emptyset$. Por outro lado, se v e v' pertencem $U \cap U'$, então v e v' pertencem tanto a U , quanto a U' , donde

$$v + v' \in U \text{ e } v + v' \in U',$$

já que ambos são subespaços. Logo, $v + v' \in U \cap U'$. Finalmente, se $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\lambda v \in U \text{ e } \lambda v \in U',$$

donde $\lambda v \in U \cap U'$. Verificamos, assim, que a interseção de dois subespaços de um mesmo espaço vetorial V também é um subespaço de V .

É muito fácil calcular a interseção de dois subespaços de \mathbb{R}^n que estão descritos como conjuntos solução de sistemas homogêneos. Se, por exemplo,

$$U = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = 0\} \text{ e } U' = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Bv = 0\},$$

em que A e B são matrizes de tamanhos $k \times n$ e $\ell \times n$, respectivamente. Um vetor v pertence a U e U' se satisfaz simultaneamente a condição para estar em U e a condição para estar em U' ; isto é, se

$$Av = 0 \text{ e } Bv = 0.$$

Em outras palavras, v será solução de um sistema com $k + \ell$ equações, obtidas pela reunião das equações do sistema $AX = 0$ com o sistema $BX = 0$, em que X é o vetor coluna das

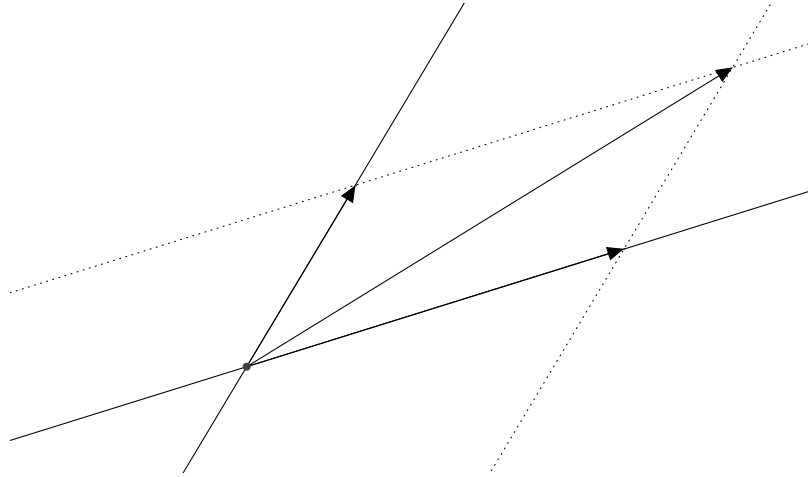


FIGURA 1. A união de duas retas pela origem não é um subespaço do plano

variáveis. Usando a notação do SCILAB podemos escrever

$$U \cap U' = \{v \in \mathbb{R}^n \mid [A; B]v = 0\}.$$

Por exemplo, a interseção dos subespaços

$$U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + w = 0\}$$

e

$$U' = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y = z + 3w = 0\}$$

do \mathbb{R}^4 é igual a

$$U \cap U' = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + w = x + 2y = z + 3w = 0\}.$$

Menos óbvio é o que acontece com a união: é possível que um subespaço seja igual à uma união de subespaços, mas isto só acontece em casos especiais e pouco interessantes, como um subespaço que está contido em outro. Para um exemplo simples de união que não é subespaço, tome duas retas do plano passando pela origem, como na figura 1. Cada uma delas é um subespaço, mas se somarmos vetores não nulos, um em cada reta, teremos um vetor que não está em uma nem na outra. Portanto, a união de duas retas distintas nunca será um subespaço do plano. Note que, neste exemplo, obteremos um subconjunto se considerarmos o conjunto que contém, não apenas a união das retas, mas também todas as somas de um vetor de uma das retas com um vetor da outra reta. Só que este subespaço será o plano inteiro. Em geral, se U e U' são subespaços de um espaço vetorial V , definimos o conjunto

$$U + U' = \{u + w \mid u \in U \text{ e } w \in U'\};$$

cujos elementos são obtidos somando um vetor de U com um vetor de U' . Note que tanto U , quanto U' , estão contidos em $U + U'$ pois o vetor nulo pertence a U e a U' , de modo que $u + 0 \in U + U'$ e $0 + w \in U + U'$ quaisquer que sejam os vetores $u \in U$ e $w \in U'$. É fácil

mostrar que $U + U'$ é subespaço de V , de fato ele é o menor subespaço de V que contém tanto U quanto U' ; veja exercício 8. Teremos mais a falar sobre a soma de subespaços no próximo artigo.

1.3. Combinações lineares. Como já vimos, os conjuntos de soluções de sistemas lineares homogêneos oferecem uma maneira sistemática de construir subespaços do \mathbb{R}^n . Contudo, há uma outra maneira de proceder, que se aplica não apenas ao \mathbb{R}^n , mas a qualquer espaço vetorial real.

Como consequência das propriedades das operações em um espaço vetorial V temos que se $u_1, \dots, u_k \in V$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ são números reais, então

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k$$

tem que ser um vetor de V . Diremos que uma expressão desse tipo é uma *combinação linear* dos vetores u_1, \dots, u_k e que os escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ são os coeficientes desta combinação linear. Por exemplo, qualquer vetor $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores e_1, \dots, e_n , em que e_i é o vetor que tem todas as suas coordenadas nulas, exceto a i -ésima coordenada, que é igual a 1, pois

$$(a_1, \dots, a_n) = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n.$$

De maneira mais geral, dado um espaço vetorial V e um subconjunto finito $C = \{u_1, \dots, u_k\} \subset V$, o conjunto $\langle C \rangle$ cujos elementos são todas as combinações lineares dos vetores de C é um subespaço de V . De fato,

$$0 = 0 \cdot u_1 + \dots + 0 \cdot u_k \in \langle C \rangle;$$

ao passo que se $b_1, \dots, b_k, c'_1, \dots, c'_k$ são escalares, então

$$(b_1 u_1 + \dots + b_k u_k) + (c'_1 u_1 + \dots + c'_k u_k) = (b_1 + c'_1) u_1 + \dots + (b_k + c'_k) u_k,$$

e

$$\lambda(b_1 u_1 + \dots + b_k u_k) = (\lambda b_1) u_1 + \dots + (\lambda b_k) u_k$$

que são todas as combinações lineares dos elementos de C e, como tal, têm que pertencer a $\langle C \rangle$. Diremos que este é o *subespaço gerado* por C e que os elementos de C são os *geradores* de $\langle C \rangle$.

Quando todos os vetores de um espaço vetorial V podem ser escritos como combinação linear dos elementos de um dado subconjunto finito de vetores de V , dizemos que V é *finitamente gerado*. Este é o caso, por exemplo, do \mathbb{R}^n , já que todos os seus elementos podem ser escritos como combinações lineares dos vetores e_1, \dots, e_n . Ao longo deste livro, suporemos que todos os espaços vetoriais que estamos considerando são finitamente gerados. Isto não quer dizer que espaços vetoriais que *não* são finitamente gerados não existam, ou que não sejam importantes. Pelo contrário, grande parte do ímpeto em estudar espaços que não são finitamente gerados deveu-se, exatamente, ao papel crucial que desempenham

em mecânica quântica. Contudo o estudo destes espaços envolve técnicas analíticas muito mais sofisticadas dos que as que temos acesso em um livro elementar como este.

Antes de prosseguir, vejamos alguns exemplos. O sistema

$$(56) \quad \begin{aligned} x + y + z + w &= 0 \\ 2x + 3y + z - 3w &= 0 \end{aligned}$$

tem por matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{cuja forma escada é} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o sistema triangular

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 0 \\ y - z - 5w &= 0 \end{aligned}$$

tem as mesmas soluções que o sistema (56). As soluções do sistema triangular são fáceis de calcular e podem ser escritas em forma paramétrica como

$$(57) \quad x = -2z - 6w \quad \text{e} \quad y = z + 5w$$

com z e w fazendo o papel de parâmetros. Considerando os elementos do conjunto solução de (56) como vetores do \mathbb{R}^4 , a parametrização (57) nos permite afirmar se $AX = 0$, então existem $z, w \in \mathbb{R}$ tais que

$$X = [x, y, z, w]^t = [-2z - 6w, z + 5w, z, w]^t.$$

Fazendo uso das operações com vetores do \mathbb{R}^4 temos, então que

$$X = z[-2, 1, 1, 0]^t + w[-6, 5, 0, 1]^t.$$

Portanto, o conjunto solução do sistema (56) é o subespaço vetorial gerado pelos vetores

$$[-2, 1, 1, 0]^t \quad \text{e} \quad [-6, 5, 0, 1]^t.$$

Nosso segundo exemplo é o sistema

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 0 \\ x + 2y &= 0 \\ z + 3w &= 0, \end{aligned}$$

usado para descrever a interseção dos subespaços U e U' do \mathbb{R}^4 no final do artigo 1.2. Neste caso, a matriz do sistema é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

que tem por forma escada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix};$$

de modo que as soluções do sistema têm forma paramétrica

$$x = 4w, \quad y = -2w \quad \text{e} \quad z = -3w.$$

Portanto, os vetores de $U \cap W$ são da forma

$$(x, y, z, w) = w(4, -2, -3, 1).$$

Em outras palavras,

$$U \cap U' = \langle (4, -2, -3, 1) \rangle.$$

Em princípio, não há diferença alguma entre apresentar um subespaço do \mathbb{R}^n como conjunto solução de um sistema linear homogêneo ou a partir de um conjunto de geradores. Na prática, contudo, uma das duas maneiras pode ser preferível, dependendo do que quisermos fazer. Considere, por exemplo, o problema de verificar se um dado vetor $v \in \mathbb{R}^n$ pertence ou não a um subespaço S do \mathbb{R}^n . Resolver este problema quando conhecemos um sistema linear homogêneo $AX = 0$ do qual S é o conjunto solução é extremamente simples, basta verificar se Av é ou não igual a zero. Mas, se conhecemos apenas geradores para S , precisamos determinar se v pode ser escrito como combinação linear destes vetores. A maneira mais simples e imediata de fazer isto consiste em usar o método dos coeficientes indeterminados. Em outras palavras, escrevemos uma equação da forma

$$v = x_1 u_1 + \cdots + x_k u_k$$

em que os x 's são variáveis. Como cada um destes vetores são n -uplas em \mathbb{R}^n , esta equação nos dá um sistema de n equações nas k variáveis x_1, \dots, x_k . O vetor v será combinação linear dos vetores u_1, \dots, u_k se, e somente se, o sistema tiver solução. Note que o sistema pode ser indeterminado, caso em que haverá muitas maneiras diferentes de escolher os coeficientes de modo a escrever v como combinação linear dos u 's.

Por exemplo, será que $(6, 11, 4, 21, 9) \in \mathbb{R}^5$ é combinação linear dos vetores

$$u_1 = (1, 2, 0, 4, 1), \quad u_2 = (0, 1, 0, 3, 1), \quad u_3 = (1, 1, 1, 1, 1) \quad \text{e} \quad u_4 = (2, 4, 1, 8, 3)?$$

Para isto escrevemos

$$(6, 11, 4, 21, 9) = x_1(1, 2, 0, 4, 1) + x_2(0, 1, 0, 3, 1) + x_3(1, 1, 1, 1, 1) + x_4(2, 4, 1, 8, 3);$$

que, igualando os coeficientes em cada entrada do vetor nos dá o sistema

$$\begin{aligned}x_1 + x_3 + 2x_4 &= 6 \\2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 &= 11 \\x_3 + x_4 &= 4 \\4x_1 + 3x_2 + x_3 + 8x_4 &= 21 \\x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 9\end{aligned}$$

cuja forma triangular superior, obtida por eliminação gaussiana, é

$$\begin{aligned}x_1 + x_3 + 2x_4 &= 6 \\x_2 + x_4 &= 3 \\x_3 + x_4 &= 4.\end{aligned}$$

Mas este último sistema é claramente indeterminado. Portanto, não apenas $(6, 11, 4, 21, 9)$ é combinação linear dos vetores dados, como há uma infinidade de possibilidades para os coeficientes. Para ver isto basta escrever as soluções parametricamente na forma

$$\begin{aligned}x_1 &= 2 - x_4 \\x_2 &= 3 - x_4 \\x_3 &= 4 - x_4,\end{aligned}$$

da qual obtemos

$$(58) \quad (6, 11, 4, 21, 9) = (2 - x_4)(1, 2, 0, 4, 1) + (3 - x_4)(0, 1, 0, 3, 1) + (4 - x_4)(1, 1, 1, 1, 1) + x_4(2, 4, 1, 8, 3);$$

qualquer que seja a escolha de x_4 .

Um problema que é muito fácil de resolver quando temos subespaços descritos em termos dos seus geradores é o de determinar sua soma. Suponhamos que U e W são subespaços de um espaço vetorial V e que

$$U = \langle u_1, \dots, u_m \rangle \quad \text{e} \quad W = \langle w_1, \dots, w_n \rangle.$$

Note que isto significa que qualquer vetor de U pode ser escrito na forma

$$a_1u_1 + \dots + a_mu_m$$

para alguma escolha de números reais a_1, \dots, a_m , ao passo que qualquer vetor de W pode ser escrito como

$$b_1w_1 + \dots + b_nw_n$$

em que $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Mas, por definição, os elementos de $U + W$ são obtidos somando um vetor de U com um vetor de W , de modo que podemos escrevê-los na forma

$$(a_1u_1 + \dots + a_mu_m) + (b_1w_1 + \dots + b_nw_n)$$

em que, como antes, os a 's e os b 's são números reais. Mas isto mostra que todo vetor de $U + W$ é uma combinação linear de $u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n$; assim,

$$U + W = \langle u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n \rangle.$$

Voltando aos espaços

$$U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + w = 0\}$$

e

$$U' = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y = z + 3w = 0\},$$

cujas interseções calculamos no artigo 1.2, vamos determinar sua soma. Para isto precisamos determinar geradores para estes subespaços de \mathbb{R}^4 . Mas se $[x, y, z, w] \in U$, então

$$[x, y, z, w] = [-y - z - w, y, z, w] = y[-1, 1, 0, 0] + z[-1, 0, 1, 0] + w[-1, 0, 0, 1];$$

de modo que

$$U = \langle [-1, 1, 0, 0], [-1, 0, 1, 0], [-1, 0, 0, 1] \rangle.$$

Por outro lado, se $[x, y, z, w] \in U'$, então

$$[x, y, z, w] = [-2y, y, -3w, w] = y[-2, 1, 0, 0] + w[0, 0, -3, 1];$$

donde

$$U' = \langle [-2, 1, 0, 0], [0, 0, -3, 1] \rangle.$$

Portanto, pelo que vimos acima:

$$U + U' = \langle [-1, 1, 0, 0], [-1, 0, 1, 0], [-1, 0, 0, 1], [-2, 1, 0, 0], [0, 0, -3, 1] \rangle.$$

Contudo,

$$e_1 = -[-2, 1, 0, 0] + [-1, 1, 0, 0], \quad \text{e} \quad e_2 = -[-2, 1, 0, 0] + 2[-1, 1, 0, 0];$$

isto é, e_1 e e_2 podem ser escritos como combinações lineares de dois dos geradores de $U + U'$. Em particular, $e_1, e_2 \in U + U'$. Contudo,

$$e_3 = e_1 + [-1, 0, 1, 0] \quad \text{e} \quad e_4 = e_1 + [-1, 0, 0, 1].$$

o que nos permite concluir que e_3 e e_4 também pertencem à soma $U + U'$. Mas isto significa que $U + U' \subseteq \mathbb{R}^4$ contém todos os geradores de \mathbb{R}^4 ; portanto, $U + U' = \mathbb{R}^4$.

2. Bases

Neste capítulo veremos como escolher um conjunto de vetores de um espaço vetorial a partir dos quais cada vetor se expressa, de maneira única, como combinação linear. Para ver que esta unicidade nem sempre é válida, basta considerar o conjunto de geradores

$$\{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$$

do \mathbb{R}^2 , em relação ao qual podemos escrever

$$(1, 1) = 1 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (0, 1) + 0 \cdot (1, 1)$$

ou, alternativamente,


$$(1, 1) = 0 \cdot (1, 0) + 0 \cdot (0, 1) + 1 \cdot (1, 1).$$

Talvez você proteste dizendo: "este exemplo não vale, você acrescentou um vetor desnecessário ao conjunto gerador, porque ele já era combinação linear dos outros dois!" Isto é verdade, mas não tive escolha, porque, como veremos, nada pior que isto pode acontecer. Começaremos a seção generalizando a noção de colinearidade para um conjunto com mais de dois vetores.

2.1. Dependência e independência linear. Seja V um espaço vetorial real e S um subconjunto finito de V . Diremos que os vetores v_1, \dots, v_k são *linearmente dependentes* se existirem números reais a_1, \dots, a_k , nem todos nulos, tais que

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0.$$

Caso contrário, o conjunto é *linearmente independente*. Diremos que um subconjunto finito de V é linearmente dependente (ou independente), se isto vale para seus vetores. Segue diretamente destas definições que dois vetores só podem ser linearmente independente se não forem colineares.

 Note que a condição de que nem todos os a 's são nulos é absolutamente essencial à definição de dependência linear, do contrário qualquer quantidade finita de vetores de V seria linearmente dependente, pois poderíamos tomar todos os a 's como sendo nulos. Por outro lado, qualquer conjunto S que contenha o vetor zero tem que ser linearmente dependente; porque tomando o coeficiente de zero como sendo igual a um e todos os outros coeficientes como sendo nulos, obtemos uma combinação linear dos vetores de S que é igual a zero, mantendo a salva-guarda de que um dos coeficientes não é nulo.

É fácil dar exemplos de conjuntos linearmente independentes em \mathbb{R}^n . Para começar, os vetores $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ definidos no artigo 2.1, são linearmente independentes, porque

$$a_1 e_1 + \dots + a_n e_n = [a_1, \dots, a_n]^t$$

só pode ser o vetor nulo se todos os a 's forem nulos. O seguinte exemplo nos oferece uma generalização fácil deste exemplo. Uma generalização deste exemplo é dada pelos vetores

$$(59) \quad u_i = b_{i,i} e_i + \sum_{j=i+1}^n b_{ij} e_j,$$

em que b 's são números reais e $b_{i,i} \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. De fato, se

$$a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = 0$$

com $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, então de (59), obtemos

$$a_1 b_{1,1} e_1 + (a_1 b_{1,2} + b_{2,2} a_2) e_2 + \dots + (a_1 b_{1,n} + \dots + a_{n-1} b_{n-1,i} + b_{n,n} a_n) e_n = 0.$$

Contudo, os vetores e_1, \dots, e_n são linearmente independentes, de modo que, da equação anterior

$$0 = b_{1,1}a_1 = a_1b_{12} + b_{2,2}a_2 = \dots = a_1b_{1n} + \dots + a_{n-1}b_{n-1,i} + b_{n,n}a_n;$$

como $b_{i,i} \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$, podemos concluir que todos os a 's são nulos. Portanto, os vetores u_1, \dots, u_n definidos em (59) são linearmente independentes. O resultado seguinte provê uma outra maneira sistemática de obter vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^n .

PROPOSIÇÃO 2.1. *Vetores não nulos do \mathbb{R}^n , que são dois-a-dois ortogonais, são necessariamente linearmente independentes.*

DEMONSTRAÇÃO. Para verificar isto, digamos que u_1, \dots, u_k são os vetores em questão. Então,

$$(60) \quad \langle u_i | u_j \rangle = 0 \quad \text{se} \quad i \neq j.$$

Suponha, então, que existem números reais a_1, \dots, a_n tais que

$$a_1u_1 + \dots + a_nu_n = 0.$$

Mas isto implica que

$$\langle u_i | a_1u_1 + \dots + a_nu_n \rangle = 0.$$

Combinando isto às propriedades do produto interno, obtemos

$$0 = \langle u_i | a_1u_1 + \dots + a_nu_n \rangle = a_1\langle u_i | u_1 \rangle + \dots + a_n\langle u_i | u_n \rangle;$$

de modo que, por (60),

$$0 = \langle u_i | a_1u_1 + \dots + a_nu_n \rangle = a_i\langle u_i | u_i \rangle.$$

Assim,

$$a_i\langle u_i | u_i \rangle = 0.$$

Como os u 's são não nulos por hipótese, temos também que

$$\langle u_i | u_i \rangle \neq 0,$$

para todo $1 \leq i \leq k$, o que nos permite concluir que $a_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq k$, provando, assim, a proposição. \square

Como veremos no artigo 2.2, um subconjunto linearmente independente do \mathbb{R}^n não pode ter mais do que n vetores. Entretanto, segue da próxima proposição que eles podem ter qualquer quantidade de vetores entre um e n .

PROPOSIÇÃO 2.2. *Todo subconjunto não vazio de um conjunto linearmente independente é também linearmente independente.*

Este resultado é consequência direta da definição de independência linear: basta observar que se $S' \subset S$ são subconjuntos finitos de um espaço vetorial, então uma combinação linear de elementos de S' pode ser considerada como uma combinação linear dos elementos de S na qual os vetores de $S \setminus S'$ aparecem multiplicados pelo escalar zero. Por via das dúvidas, vale à pena lembrar que nada semelhante vale para conjuntos linearmente dependentes. Por exemplo, se v é um vetor não nulo de um espaço vetorial qualquer, o conjunto $\{v, 2v\}$ é linearmente dependente, mas $\{v\}$ é linearmente *independente*. Combinando a proposição anterior com o exemplo (59) obtemos um resultado simples, mas que será muito útil em aplicações futuras.

PROPOSIÇÃO 2.3. *Se uma matriz está na forma escada, então suas linhas não nulas formam um conjunto linearmente independente de vetores.*

Para provar este resultado, observe que se uma matriz está na forma escada então suas linhas formam um subconjunto, *possivelmente próprio* de vetores da forma (59). Como estes vetores são linearmente independentes, a proposição 2.3 segue da proposição 2.2. No próximo artigo introduzimos a mais importante noção desta seção e discutimos alguns exemplos ilustrativos.

2.2. Bases. Observe que os subconjuntos finitos de V em relação ao qual definimos as noções de dependência e independência linear não precisam ser conjuntos de geradores. Quando um conjunto linearmente independente também é um conjunto de geradores, dizemos que é uma *base* de V . Por exemplo, combinando que vimos no capítulo 3 e no artigo 2.1 acima, podemos afirmar que o conjunto $\varepsilon = \{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base do \mathbb{R}^n . O próximo teorema explica porque preferimos bases a quaisquer outros conjuntos de geradores de um espaço vetorial.

TEOREMA 2.4. *Todo vetor de V pode ser escrito, de uma única maneira, como combinação linear dos vetores de uma base de V .*

Antes de fazer a demonstração, vamos esclarecer exatamente o que significa "de uma única maneira" neste contexto. Seja, então,

$$B = \{u_1, \dots, u_n\}.$$

uma base de V ; *uma* e não *a* porque, como veremos, há infinitas bases possíveis para qualquer espaço vetorial real. Imagine que é dado um vetor $v \in V$. Como B é uma base, será possível escrever v como combinação linear dos vetores de B . Digamos que

$$v = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$$

para alguma escolha de escalares $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$. Segundo o teorema, sendo B uma base, a_1, \dots, a_n é a única escolha de coeficientes que faz a combinação linear dos vetores u igual v ; qualquer outra escolha produzirá um vetor diferente de v . Tendo esclarecido este detalhe, podemos provar o teorema.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que duas pessoas diferentes escrevem um dado vetor $v \in V$ como combinação linear dos vetores de uma base

$$B = \{u_1, \dots, u_n\}$$

de V . Teremos assim que

$$v = a_1u_1 + \dots + a_nu_n$$

mas também que

$$v = b_1u_1 + \dots + b_nu_n.$$

Subtraindo a segunda equação da primeira,

$$(a_1u_1 + \dots + a_nu_n) - (b_1u_1 + \dots + b_nu_n) = v - v = 0;$$

que, pelas propriedades da soma e multiplicação por escalar em um espaço vetorial nos dá,

$$(a_1 - b_1)u_1 + \dots + (a_n - b_n)u_n = 0.$$

Contudo, como é base, B tem que ser linearmente independente, de modo que todos os coeficientes acima têm que ser nulos. Assim,

$$a_1 - b_1 = \dots = a_n - b_n = 0;$$

isto é,

$$a_j = b_j \text{ para todo } 1 \leq j \leq n,$$

como queríamos provar. □

Vejamos um exemplo. Seja S o subespaço do \mathbb{R}^5 definido por

$$S = \{(x, y, z, w, u) \in \mathbb{R}^5 \mid x + y - z - u = 0\}.$$

Como $u = x + y - z$, os vetores de S são da forma

$$(x, y, z, w, u) = (x, y, z, w, x + y - z);$$

que podemos reescrever como,

$$(61) \quad (x, y, z, w, u) = x(1, 0, 0, 0, 1) + y(0, 1, 0, 0, 1) + z(0, 0, 1, 0, -1) + w(0, 0, 0, 1, 0);$$

mostrando, assim, que S é gerado pelos elementos do conjunto

$$F = \{(1, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0, -1), (0, 0, 0, 1, 0)\}.$$

A independência linear destes vetores é consequência imediata da Proposição 2.3, de modo que F é uma base de S . A determinação da base de qualquer subespaço de \mathbb{R}^n pode ser feita de maneira análoga a que usamos neste exemplo. Entretanto, para provar que qualquer espaço vetorial finitamente gerado admite uma base precisamos trabalhar um pouco mais. Começamos com o seguinte lema.

LEMA 2.5. *Se u_1, \dots, u_k são vetores de um espaço vetorial V e λ é um número real, então*

$$\langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle = \langle u_1, u_2 + \lambda u_1, \dots, u_k \rangle.$$

DEMONSTRAÇÃO. Para provar isto basta observar que se $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ são escalares tais que

$$v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + c_k u_k,$$

então

$$v = (a_1 - \lambda a_2) u_1 + a_2 (u_2 + \lambda u_1) \dots + c_k u_k;$$

de modo que

$$v \in \langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle$$

implica que

$$v \in \langle u_1, u_2 + \lambda u_1, \dots, u_k \rangle.$$

Provamos, assim, que

$$\langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle \subseteq \langle u_1, u_2 + \lambda u_1, \dots, u_k \rangle.$$

A recíproca é análoga e fica aos seus cuidados. \square

Pelo resto do artigo suporemos, para simplificar o argumento, que o espaço vetorial em questão é um subespaço do \mathbb{R}^n . Seja, então, W um subespaço do \mathbb{R}^n gerado pelos vetores w_1, \dots, w_k . Dispondo estes vetores como linhas, obtemos a matriz

$$(62) \quad \begin{bmatrix} \text{---} & w_1 & \text{---} \\ \text{---} & w_2 & \text{---} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{---} & w_k & \text{---} \end{bmatrix}$$

de tamanho $k \times n$. Aplicamos, então, o método de eliminação gaussiana à matriz A . Digamos que, executando o primeiro passo da eliminação, obtemos a matriz

$$\begin{bmatrix} \text{---} & w_1 & \text{---} \\ \text{---} & w_2 - \lambda w_1 & \text{---} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{---} & w_k & \text{---} \end{bmatrix}$$

em que $\lambda \in \mathbb{R}$. De acordo com o lema 2.5, temos que,

$$\langle w_1, w_2, \dots, w_k \rangle = \langle w_1, w_2 + \lambda w_1, \dots, w_k \rangle.$$

Mas o processo de eliminação gaussiana consiste em uma sucessão de passos análogos a este, além de possíveis trocas de posição das linhas, que em nada afetam o fato de termos um conjunto de geradores. Portanto, se u_1, \dots, u_k são as linhas não nulas da matriz escada U obtida ao final da eliminação, podemos afirmar que

$$\langle w_1, w_2, \dots, w_k \rangle = \langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle.$$

Contudo, como U é uma matriz escada, suas linhas não nulas são linearmente independentes pela proposição 2.3. Portanto, o conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ é uma base de W . Com isto provamos que o seguinte teorema.

TEOREMA 2.6. *Todo espaço vetorial finitamente gerado admite uma base.*

A bem da verdade só provamos este teorema quando o espaço vetorial em questão é um subespaço de \mathbb{R}^n . Entretanto, é fácil adaptar a demonstração acima para cobrir o caso geral. Uma das vantagens de nossa demonstração é que ela provê um algoritmo capaz de determinar uma base a partir de um conjunto de geradores de qualquer subespaço do \mathbb{R}^n . Por exemplo, se W for o subespaço gerado pelos vetores

$$w_1 = (1, 2, 0, 4, 1), w_2 = (0, 1, 0, 3, 1), w_3 = (1, 1, 1, 1, 1) \text{ e } w_4 = (2, 4, 1, 8, 3).$$

Aplicando eliminação gaussiana à matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

cujas linhas são os vetores w_1, \dots, w_4 , obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, nossa discussão anterior nos diz que, os vetores

$$(1, 2, 0, 4, 1), (0, 1, 0, 3, 1) \text{ e } (0, 0, 1, 0, 1).$$

constituem uma base de W .

Talvez você esteja se perguntando o que significa dizer que uma dada linha da matriz se anulou ao longo da eliminação gaussiana. Para responder a esta pergunta basta rastrear as operações por linha que aplicamos para obter a forma escada da matriz. No exemplo acima, começamos com

$$\begin{bmatrix} \text{---} & w_1 & \text{---} \\ \text{---} & w_2 & \text{---} \\ \text{---} & w_3 & \text{---} \\ \text{---} & w_4 & \text{---} \end{bmatrix}.$$

Usando a primeira posição do vetor w_1 como pivô, obtemos

$$\begin{bmatrix} -- & w_1 & -- \\ -- & w_2 & -- \\ -- & w_3 - w_1 & -- \\ -- & w_4 - 2w_1 & -- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Usando, a segunda linha desta matriz para anular a terceira, chegamos a

$$\begin{bmatrix} -- & w_1 & -- \\ -- & w_2 & -- \\ -- & w_3 - w_1 - w_2 & -- \\ -- & w_4 - 2w_1 & -- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

No próximo passo a última linha se anula porque é igual à terceira. Mas isto significa que

$$w_3 - w_1 - w_2 = w_4 - 2w_1;$$

donde

$$w_4 = 3w_1 - w_2 - w_3.$$

Logo, pelos menos neste caso, a última linha se anulou porque pode ser escrita como combinação linear das demais. Em geral, a presença de linhas nulas ao final do processo de eliminação, sempre indica que algum dos vetores, posicionados nas linhas da matriz inicial, é combinação linear dos demais. Contudo, embora as linhas nulas sempre apareçam ao final da matriz escada, isto *não* significa que a última linha da matriz inicial sempre é combinação linear dos demais, por que pode ser necessário trocar linhas ao longo da eliminação.

2.3. Dimensão. Uma consequência imediata da noção de base é que uma base não pode estar propriamente contida dentro de outra. De fato, se B for uma base de um espaço vetorial V e $B \subsetneq F \subset V$, então existe um vetor v de F que não pertence a B . Como todo vetor de V é combinação linear dos elementos de B , isto vale também para v . Como $B \subset F$, temos que um elemento de F é combinação linear dos demais. Logo F é linearmente dependente. Nosso primeiro resultado, embora seu enunciado pareça um tanto técnico, terá consequências extremamente importantes para o resto deste livro.

LEMA DA TROCA. *Se B é uma base e F é um subconjunto linearmente independente de vetores em um espaço vetorial finitamente gerado, então $\#F \leq \#B$.*

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração é baseada em um fato bastante simples. Seja V um espaço vetorial e sejam v_1, \dots, v_m vetores de V :

FATO: se v_1, \dots, v_m são linearmente *dependentes* mas, para algum $k < m$, os vetores v_1, \dots, v_k são linearmente *independentes*, então é possível reordenar os vetores v_{k+1}, \dots, v_m de modo que $\langle v_1, \dots, v_{m-1}, v_m \rangle = \langle v_1, \dots, v_{m-1} \rangle$.

Começaremos provando este fato. Como v_1, \dots, v_m são linearmente dependentes, então

$$(63) \quad a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0,$$

em que os números reais a_1, \dots, a_m não são todos nulos. Mas, se a_{k+1}, \dots, a_m fossem todos nulos, então a expressão (63) seria uma combinação linear apenas de v_1, \dots, v_k . Como estes vetores são linearmente independentes, teríamos que $a_1 = \dots = a_k = 0$, contradizendo a hipótese de os a 's não são todos nulos. Logo, pelo menos um dos coeficientes a_{k+1}, \dots, a_m tem que ser não nulo. Portanto, reordenando os vetores v_{k+1}, \dots, v_m , podemos posicionar aquele vetor dentre eles cujo coeficiente em (63) é não na última posição. Fazendo isto, teremos, com certeza, que $a_m \neq 0$, o que nos permite escrever

$$v_m = \frac{a_1}{a_m} v_1 + \dots + \frac{a_{m-1}}{a_m} v_{m-1}.$$

Assim,

$$v_m \in \langle v_1, \dots, v_{m-1} \rangle,$$

donde obtemos a igualdade entre subespaços vetoriais desejada.

Com isto, estamos prontos para a demonstração do teorema, que consiste em várias aplicações do fato acima. Digamos que

$$V = \langle w_1, \dots, w_m \rangle$$

e que os vetores

$$u_1, \dots, u_n \in V$$

são linearmente independentes e suponhamos, por contradição, que $n > m$. Como V é gerado por w_1, \dots, w_m , temos que u_n pode ser escrito como combinação linear dos w 's. Logo, u_n, w_1, \dots, w_m são vetores linearmente dependentes e o fato nos permite concluir que, reordenando os w 's, teremos

$$V = \langle u_n, w_1, \dots, w_m \rangle = \langle u_n, w_1, \dots, w_{m-1} \rangle.$$

Para o passo seguinte, observe que u_{n-1} pode ser escrito como combinação linear dos vetores u_n, w_1, \dots, w_{m-1} , já que eles geram V . Mas isto significa que $u_{n-1}, u_n, w_1, \dots, w_{m-1}$ são vetores linearmente dependentes. Como, por outro lado, u_{n-1}, u_n são linearmente independentes, temos que uma reordenação dos w 's nos permite deduzir que

$$V = \langle u_n, w_1, \dots, w_{m-1} \rangle = \langle u_{n-1}, u_n, w_1, \dots, w_{m-2} \rangle.$$

Continuando desta maneira concluímos, ao final da m -ésima etapa, que

$$V = \langle u_{n-m+1}, \dots, u_n \rangle.$$

Mas isto significa que u_1 pode ser escrito como combinação linear u_{n-m+1}, \dots, u_n , o que não é possível pois os vetores u_1, \dots, u_n são, por hipótese, linearmente independentes. \square

A consequência mais importante do lema da troca é a seguinte.

TEOREMA 2.7. *Quaisquer duas bases de um espaço vetorial finitamente gerado têm a mesma quantidade de elementos.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam B_1 e B_2 duas bases de um mesmo espaço vetorial finitamente gerado V . Como B_1 gera V e B_2 é um conjunto linearmente independente em V , então, pelo Lema da Troca, $\#B_2 \leq \#B_1$. Contudo, também é verdade que B_2 gera V e que B_1 é um conjunto linearmente independente em V , de modo que o Lema da Troca também nos permite concluir que $\#B_1 \leq \#B_2$. A igualdade desejada é consequência imediata destas duas desigualdades. \square

Segundo este teorema, a quantidade de elementos de uma base é um número que depende apenas do espaço, e não da base escolhida. Dizemos que a quantidade de elementos de uma base do espaço vetorial real finitamente gerado V é a *dimensão* deste espaço, que será denotada por $\dim(V)$. Como consequência do Lema da Troca temos, também, a seguinte desigualdade de dimensões.

COROLÁRIO 2.8. *A dimensão de um subespaço próprio de V é sempre menor do que a dimensão de V .*

2.4. Subespaços complementares. Segundo o Lema da troca, se F é um subconjunto linearmente independente de um espaço vetorial finitamente gerado V , então $\#F \leq \dim(V)$. Se, por acaso, F gera V , então F é, na verdade, uma base de V , de modo que $\#F = \dim(V)$. Digamos que isto não acontece. Neste caso, existirá um vetor $w_1 \in V$ que não pertence ao subespaço gerado por F . Mas isto implica que o conjunto F_1 obtido acrescentando a F o vetor w_1 também será linearmente independente. Se, por acaso, F_1 também não gera V , então existirá um segundo vetor, que chamaremos de w_2 , que não pertence ao subespaço gerado por F_1 . Como antes, podemos concluir que, acrescentando w_2 a F_1 , obtemos um conjunto F_2 que também é linearmente independente. Continuando o processo, construímos uma sequência de conjuntos

$$F \subsetneq F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq F_3 \subsetneq$$

todos linearmente independentes. Entretanto, pelo Lema da Troca e o teorema 2.7, nenhum destes conjuntos pode ter mais do que $\dim(V)$ elementos. Isto significa que há um momento em que atingimos um conjunto F_s que é linearmente independente e máximo, no sentido de que qualquer vetor de V pode ser escrito como combinação linear dos elementos de F_s . Mostramos, assim, a seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 2.9. *Em um espaço vetorial finitamente gerado é sempre possível acrescentar vetores a um conjunto linearmente independente de modo a obter uma base do espaço total.*

Na prática é extremamente fácil completar um conjunto linearmente independente. Por exemplo,

$$F = \{[1, 1, 2, 3]^t, [2, 2, 3, 4]^t\}$$

é um conjunto de vetores linearmente independentes do \mathbb{R}^4 . Em vez de procurar às cegas vetores que não pertencem ao subespaço gerado por F , como sugere o procedimento acima, aplicamos eliminação gaussiana à matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

obtendo

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$[1, 1, 2, 3]^t \quad \text{e} \quad [0, 0, -1, -2]^t$$

geram o mesmo subespaço que os vetores originalmente dados. Contudo, sabemos da proposição (2.3) que se uma matriz está na forma escada, então suas linhas não nulas formam um conjunto linearmente independente de vetores. Portanto, para obter uma base de \mathbb{R}^4 a partir dos dois vetores dados, basta intercalar vetores à matriz U de maneira a obter uma matriz 4×4 em forma escada. Uma solução possível é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

o que nos permite concluir que acrescentando $e_2 = [0, 1, 0, 0]^t$ e $e_4 = [0, 0, 0, 1]^t$ a F obtemos uma base do \mathbb{R}^4 .

Voltando ao caso geral, digamos que V é um espaço finitamente gerado e que U_1 é um subespaço de V do qual conhecemos uma base B_1 . Pela proposição 2.9, existe um conjunto finito de vetores B_2 de modo que $B = B_1 \cup B_2$ é uma base de V . Digamos que U_2 seja o subespaço de V gerado por B_2 . Como o subespaço $U_1 + U_2$ contém U_1 e U_2 , então também contém B . Portanto,

$$U_1 + U_2 = V.$$

Acontece que, da maneira como os vetores de B_2 foram escolhidos, sabemos que nenhum deles pertence a U_1 . Portanto, nenhuma combinação linear de vetores de B_2 pode pertencer

a U_1 , exceto uma; aquela para a qual todos os coeficientes são nulos. Mostramos, assim, que

$$U_1 \cap U_2 = \{0\}.$$

Quando um subespaço U_2 satisfaz

$$U_1 + U_2 = V \quad \text{e} \quad U_1 \cap U_2 = \{0\},$$

dizemos que é um *complementar* U_1 ou ainda, que V é a *soma direta* de U_1 com U_2 , e escrevemos

$$V = U_1 \oplus U_2.$$

Assim, no exemplo discutido acima, temos que se

$$\langle e_2, e_4 \rangle \quad \text{é um complementar de} \quad \langle [1, 1, 2, 3]^t, [2, 2, 3, 4]^t \rangle.$$

Note o uso do artigo indefinido: *um* complementar, em vez de *o* complementar. Afinal, há muitas maneiras diferentes de acrescentar vetores a um conjunto linearmente independente para obter uma base do espaço todo. Permanecendo no âmbito do exemplo que estamos considerando, poderíamos ter escolhido $[0, 3, 5, 11]^t$ e $[0, 0, 0, 9]^t$ em vez de e_2 e e_4 , sem que a matriz 4×4 deixasse de ser escada; de modo que

$$\langle [0, 3, 5, 11]^t, [0, 0, 0, 9]^t \rangle$$

também é um complementar de $\langle [1, 1, 2, 3]^t, [2, 2, 3, 4]^t \rangle$

2.5. Coordenadas relativamente a uma base. Vimos no teorema 2.4 que cada vetor de um espaço vetorial V finitamente gerado se escreve de uma única maneira como combinação linear dos elementos de uma base B de V . Isto significa que, se fixarmos uma ordem para os vetores, teremos uma correspondência bijetiva entre os vetores de um espaço vetorial V de dimensão n e n -uplas de vetores. Mais precisamente, se

$$B = \{u_1, \dots, u_n\}$$

é uma base de V e $v \in V$ satisfaz

$$v = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$$

então a v corresponde a $[a_1, \dots, a_n]^t$ de maneira única. Note que $(v)_B$ pode ser considerado como um vetor do do espaço \mathbb{R}^n , conhecido como o *vetor de coordenadas de v relativamente à base B* . Como estamos considerando os vetores de uma base como ordenados, seria mais correto escrevê-la como uma *lista*, em vez de um *conjunto*. Acontece que a definição de base precede em muito a introdução da distinção conjuntos e listas, de modo que denotar uma base como se fosse um conjunto, mas levar em conta a ordem dos vetores, é uma espécie de fóssil vivo da nomenclatura matemática, com o qual teremos que nos acostumar.

Por exemplo, vimos no artigo 2.2 que

$$B = \{[1, 0, 0, 1]^t, [0, 1, 0, 0, 1]^t, [0, 0, 1, 0, -1]^t, [0, 0, 0, 1, 0]^t\}.$$

é uma base do subespaço do \mathbb{R}^5 definido por


$$S = \{[x, y, z, w, u]^t \in \mathbb{R}^5 \mid x + y - z - u = 0\}.$$

Os vetores de S podem ser todos escritos na forma $[x, y, z, w, x + y - z]^t$; mas

$$[x, y, z, w, x + y - z]^t = x[1, 0, 0, 0, 1]^t + y[0, 1, 0, 0, 1]^t + z[0, 0, 1, 0, -1]^t + w[0, 0, 0, 1, 0]^t.$$

Portanto, x, y, z, w são as coordenadas deste vetor relativamente à base B de S . Usando a notação introduzida anteriormente, escrevemos

$$(v)_F = [x, y, z, w]^t.$$

 Note que isto pode criar uma tremenda confusão, porque v é um vetor de \mathbb{R}^5 mas $(v)_F$ é um vetor de \mathbb{R}^4 . A razão para esta discrepância é o mesmo vetor v está sendo considerado como elemento de dois espaços diferentes. Assim,

$$(v)_\varepsilon = [x, y, z, w, x + y - z]^t$$

são as coordenadas deste vetor relativamente à base canônica do \mathbb{R}^5 . Entretanto, este mesmo vetor pertence a S , que é um subespaço de dimensão quatro de \mathbb{R}^5 , e

$$(v)_F = [x, y, z, w]^t.$$

são suas coordenadas relativamente à base B de S . Portanto, ao explicitar as coordenadas de um vetor precisamos sempre deixar claro em relação à que base isto está sendo feito.

Em geral, precisamos resolver um sistema linear para determinar quais são as coordenadas de um dado vetor relativamente a uma base dada do espaço ambiente. Entretanto, há um tipo de base relativamente à qual o cálculo das coordenadas é extremamente fácil. Seja U um subespaço do \mathbb{R}^n . Diremos que uma base

$$B = \{u_1, \dots, u_m\}$$

de U é *ortonormal* se

$$\langle u_i | u_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

Neste caso, se

$$v = a_1 u_1 + \dots + a_m u_m,$$

então

$$\langle u_i | v \rangle = a_1 \langle u_i | u_1 \rangle + \dots + a_i \langle u_i | u_i \rangle + \dots + a_m \langle u_i | u_m \rangle = a_i.$$

Portanto, quando a base de um subespaço do \mathbb{R}^n é ortonormal, o cálculo das coordenadas de um vetor se reduz ao cálculo dos produtos internos deste vetor pelo elementos da base. Como veremos na próxima seção, todo subespaço de \mathbb{R}^n admite uma base ortonormal, que pode ser determinada com a ajuda de um algoritmo bastante simples.

2.6. Um espaço de dimensão infinita. Encerramos esta seção provando que o espaço \mathcal{F} das funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} não é finitamente gerado. Para isto consideraremos o conjunto \mathcal{C} cujos elementos são as funções $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f_j(x) = x^j$ para cada $j \geq 0$. Note que se trata de um conjunto *infinito*. Portanto, se \mathcal{F} fosse finitamente gerado, haveria um inteiro $k > 0$ para o qual

$$(64) \quad f_k = c_0 f_0 + \cdots + c_{k-1} f_{k-1}$$

em que $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$. Como f_k não é a função constante, tem que existir algum $j > 0$ com $c_j \neq 0$. Digamos que escolhemos o menor $k > 0$ para o qual esta propriedade vale. Como

$$f'_k = \frac{df_k}{dx} = kx^{k-1} = k f_{k-1},$$

então, derivando (64), obtemos

$$k f_{k-1} = c_1 f_0 + \cdots + (k-1) c_{k-1} f_{k-2},$$

donde

$$f_{k-1} = \frac{c_1}{k} f_0 + \cdots + \frac{(k-1)c_{k-1}}{k} f_{k-2},$$

que contradiz a escolha de k como o menor valor para o qual uma tal relação é satisfeita. Em outras palavras, \mathcal{F} não pode ser finitamente gerado.

3. Bases ortonormais

Como vimos no artigo 2.5, uma base

$$B = \{u_1, \dots, u_m\}$$

de um subespaço U do \mathbb{R}^n é *ortonormal* se

$$\langle u_i | u_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

Nesta seção descreveremos um algoritmo capaz de determinar uma base ortonormal a partir de uma base qualquer de um dado subespaço do \mathbb{R}^n , provando com isto que todo subespaço do \mathbb{R}^n admite uma base ortonormal. Veremos, também, como interpretar este algoritmo matricialmente, o que nos permitirá decompor uma matriz quadrada qualquer como o produto de uma matriz ortogonal com uma matriz triangular.

3.1. Vetor ortogonal a um subespaço. Embora nosso objetivo seja descrever um algoritmo capaz de construir uma base ortonormal a partir de uma base B qualquer de S , começaremos discutindo um problema mais simples.

Suponhamos que S seja um subespaço de \mathbb{R}^n do qual já conhecemos uma base ortonormal

$$B = \{u_1, \dots, u_k\}$$

e que $v \neq 0$ seja um vetor de \mathbb{R}^n que *não* pertence a S . Queremos descobrir como construir, a partir de v e de B , um vetor w normal a S ; que é uma maneira sucinta de dizer que w deve ser normal a *todos* os elementos de S . Faremos isto, subtraindo de v um vetor de S ; mais precisamente, esperamos poder determinar número reais a_1, \dots, a_n de modo que

$$w = v - (a_1 u_1 + \dots + a_n u_n)$$

seja ortogonal a todo vetor de S . Como todo vetor de S é combinação linear dos vetores de B , basta que w seja ortogonal aos vetores de B para que o mesmo seja verdadeiro para todos os vetores de S .

Mas, calculando o produto interno entre w e $u_i \in B$, obtemos

$$\langle u_i | w \rangle = \langle u_i | v \rangle - a_1 \langle u_i | u_1 \rangle + \dots + a_n \langle u_i | u_n \rangle.$$

Levando em conta que B é uma base ortonormal, a equação anterior equivale a

$$\langle u_i | w \rangle = \langle u_i | v \rangle - a_i.$$

Portanto, w é ortogonal a u_i se, e somente se, $a_i = \langle u_i | v \rangle$; donde obtemos o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 3.1. *Se $B = \{u_1, \dots, u_k\}$ é uma base ortonormal de um subespaço U do \mathbb{R}^n e $v \notin U$, então*

$$v - \langle u_1 | v \rangle u_1 - \dots - \langle u_k | v \rangle u_k$$

é um vetor ortogonal a U .

Seja, por exemplo, U o subespaço do \mathbb{R}^5 gerado pelos vetores

$$u_1 = \frac{1}{2}[1, 1, 1, 1, 0]^t \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{1}{2}[1, -1, 1, -1, 0]^t,$$

que são ortogonais e unitários. É claro que $v = [6, 2, 4, 2, 1]^t$ não pertence a U , porque todos os vetores de U têm quinta coordenada igual a zero. Como

$$\langle v | u_1 \rangle = 3 \quad \text{e} \quad \langle v | u_2 \rangle = -1,$$

concluimos, pela proposição 3.1, que

$$v - 7u_1 - 3u_2 = [1, 0, -1, 0, 1]^t$$

é perpendicular a U .

3.2. O algoritmo de Gram-Schmidt. Seja S um subespaço de \mathbb{R}^n do qual conhecemos a base

$$B = \{v_1, \dots, v_k\}.$$

Construiremos uma base ortonormal B^* para S , um vetor de cada vez. Seja B_i^* a parte da base ortonormal construída até a i -ésima iteração do algoritmo. A base da construção recursiva é

$$B_1^* = \{u_1\} \quad \text{em que} \quad u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

Para a passagem de B_i^* a B_{i+1}^* usamos a proposição 3.1. Supondo que

$$B_i^* = \{u_1, \dots, u_i\}$$

seja conhecida, definimos u_{i+1} como a normalização do vetor

$$v_{i+1} - \sum_{j=1}^i (u_j^t v_{i+1}) u_j.$$

Portanto, a base ortonormal de S será B_k^* . Observe que esta construção implica que B_i^* é uma base ortonormal de

$$\langle v_1, \dots, v_i \rangle = S_i.$$

para todo $1 \leq i \leq k$. Este procedimento é conhecido como *algoritmo de Gram-Schmidt*.

Considere, por exemplo, o subespaço de dimensão três de \mathbb{R}^4 definido por

$$S = \{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - 2z - w = 0\}.$$

Os vetores de S são da forma

$$[x, y, z, w]^t = [y + 2z + w, y, z, w]^t = y[1, 1, 0, 0]^t + z[2, 0, 1, 0]^t + w[1, 0, 0, 1]^t$$

Portanto,

$$B = \{[1, 1, 0, 0]^t, [2, 0, 1, 0]^t, [1, 0, 0, 1]^t\}$$

é base de S . Usaremos B como ponto de partida para encontrar uma base ortonormal de S , através do algoritmo de Gram-Schmidt. A inicialização requer que façamos

$$B_1^* = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [1, 1, 0, 0]^t \right\},$$

que é a normalização do primeiro vetor de B . Para achar B_2^* , calculamos o produto interno

$$\left\langle [2, 0, 1, 0]^t, \frac{1}{\sqrt{2}} [1, 1, 0, 0]^t \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2};$$

de modo que o segundo vetor de B_2^* será a normalização de

$$[2, 0, 1, 0]^t - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} [1, 1, 0, 0]^t = [1, -1, 1, 0]^t;$$

que é igual a

$$\frac{1}{\sqrt{3}} [1, -1, 1, 0]^t.$$

Portanto,

$$B_2^* = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [1, 1, 0, 0]^t, \frac{1}{\sqrt{3}} [1, -1, 1, 0]^t \right\},$$

De modo semelhante, o último vetor da base ortonormal é obtido normalizando

$$[1, 0, 0, 1]^t - \frac{1}{\sqrt{2}} [1, 1, 0, 0]^t - \frac{1}{\sqrt{3}} [1, -1, 1, 0]^t$$

o que nos dá o vetor

$$\frac{1}{6}[1, -1, -2, 6]^t.$$

Portanto, a base ortonormal de S calculada a partir de B pelo algoritmo de Gram-Schmidt será

$$B_3^* = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}[1, 1, 0, 0]^t, \frac{1}{\sqrt{3}}[1, -1, 1, 0]^t, \frac{1}{\sqrt{42}}[1, -1, -2, 6]^t \right\}.$$

Combinando o algoritmo de Gram-Schmidt à proposição 3.1 podemos construir um complemento para subespaços do \mathbb{R}^n que se destacam por suas propriedades especialmente atraentes. Dado um subespaço U do \mathbb{R}^n , definimos seu *complemento ortogonal* como sendo o conjunto U^{perp} dos vetores de \mathbb{R}^n que são perpendiculares a todos os vetores de U . Para nos convencer de que U^\perp é mesmo um complemento de U , devemos verificar que: (1) U^\perp é ser um subespaço de \mathbb{R}^n , (2) a interseção $U \cap U^\perp$ contém apenas o vetor zero e (3) a soma $U + U^\perp$ é igual a todo o espaço V . Deixaremos aos seus cuidados verificar (1). Para provar (2) basta notar que todos os vetores de $U \cap U^\perp$ são perpendiculares a si próprios, o que só pode acontecer com o vetor nulo. Finalmente, se v for um vetor qualquer de \mathbb{R}^n que não pertence a U e B for uma base ortonormal de U então, pela proposição 3.1,

$$w = v - \sum_{j=1}^i (u_j^t v) u_j.$$

é ortogonal a U e, portanto, pertence a U^\perp . Mas disso segue que

$$v = \sum_{j=1}^i (u_j^t v) u_j + w \in U + U^\perp$$

o que prova (3). Note que o algoritmo de Gram-Schmidt foi usado neste argumento para garantir que U admite uma base ortonormal B .

3.3. Decomposição QR. O algoritmo de Gram-Schmidt tem uma importante interpretação matricial. Suponhamos que, aplicando este algoritmo a um conjunto linearmente independente qualquer

$$B = \{v_1, \dots, v_m\}$$

de \mathbb{R}^n , obtemos uma base ortonormal

$$B^* = \{u_1, \dots, u_m\}.$$

Isto implica, por construção, que u_j é a normalização do vetor w_j definido recursivamente por

$$w_1 = v_1 \text{ e } w_j = v_j - \sum_{i=1}^j \langle v_j, u_i \rangle u_i.$$

Escrevendo

$$R_{ij} = \begin{cases} \langle v_j, u_i \rangle & \text{se } i \neq j; \\ \|w_i\| & \text{se } i = j, \end{cases}$$

temos que

$$v_1 = w_1 \text{ e } v_j = w_j + \sum_{i=1}^j R_{ij} u_i;$$

donde

$$v_1 = R_{11} u_1 \text{ e } v_j = R_{jj} u_j + \sum_{i=1}^j R_{ij} u_i;$$

Portanto, se Q for a matriz cujas colunas são os vetores u_j e R a matriz cujas entradas são os R_{ij} , podemos concluir das equações acima que $A = QR$. Além disso, R é uma matriz triangular superior, pois $R_{ij} = 0$ sempre que $i > j$.

Observe ainda que, como as colunas de Q são os vetores da base B^* , então

$$Q^t Q = \begin{bmatrix} - & u_1^t & - \\ - & u_2^t & - \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ - & u_n^t & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ u_1 & u_2 & \ddots & u_n \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^t u_1 & u_1^t u_2 & \cdots & u_1^t u_n \\ u_2^t u_1 & u_2^t u_2 & \cdots & u_2^t u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n^t u_1 & u_n^t u_2 & \cdots & u_n^t u_n \end{bmatrix}.$$

Como B^* é uma base ortonormal de \mathbb{R}^n , temos que

$$u_i^t u_j = \langle u_i | u_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

de modo que $Q^t Q = I$. Como no caso do plano, matrizes cuja inversa é igual à sua transposta são chamadas de *ortogonais*. Portanto, como resultado do algoritmo de Gram-Schmidt, temos que toda matriz pode ser decomposta como o produto de uma matriz ortogonal por uma matriz triangular superior.

Interpretando o exemplo do artigo 3.2 de maneira matricial, podemos concluir que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pode ser decomposta como produto de

$$(65) \quad Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{42} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{42} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{42} \\ 0 & 0 & 6/\sqrt{42} \end{bmatrix} \quad \text{por} \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{42}/6 \end{bmatrix}$$

A decomposição QR nos dá uma nova maneira de resolver um sistema $AX = b$, em que A é uma matriz quadrada. Calculando a decomposição QR de A , escrevemos $QRX = b$. Como Q é ortogonal, sua inversa é igual a Q^t . Multiplicando ambos os membros do sistema por Q^t , obtemos $RX = Q^tb$. Como R é triangular superior, este último sistema pode ser resolvido por substituição reversa.

Exercícios

- Quais dos seguintes subconjuntos de \mathbb{R}^n são subespaços? Justifique a sua resposta detalhadamente.
 - $\{[x, y]^t \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$;
 - $\{[x, y, z]^t \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 9z + 4 = 0\}$;
 - $\{[x, y]^t \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y^2 = 0\}$;
 - $\{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y = 4x - 3y + 7z + w = 0\}$.
- Quais são os sistemas do exercício 8 da página 102 cujos conjuntos soluções são subespaços? Justifique detalhadamente a sua resposta.
- Quais dos seguintes subconjuntos do conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas reais são subespaços?
 - O conjunto das matrizes simétricas.
 - O conjunto das matrizes inversíveis.
 - O conjunto das matrizes cuja diagonal é nula.
 - O conjunto das matrizes cujo determinante é nulo.
 - O conjunto das matrizes que têm a soma dos elementos da diagonal igual a zero.
- Escreva o vetor v como combinação linear dos vetores do conjunto G , para cada um dos exemplos abaixo.
 - $v = [2, 8]^t$ e $G = \{[1, -1]^t, [3, 2]^t\}$;
 - $v = [0, 1]^t$ e $G = \{[3, 2]^t, [2, 2]^t\}$;
 - $v = [2, 1, 3]^t$ e $G = \{[1, 1, 1]^t, [1, 1, -1]^t, [1, -4, 5]^t\}$;
 - $v = [1, -1, 4]^t$ e $G = \{[1, -1, 2]^t, [1, -3, 4]^t, [-1, 3, 2]^t\}$;
 - $v = [2, 1, 3, 2]^t$ e $G = \{[1, 0, 0, 1]^t, [0, 1, 2, 0]^t, [0, 1, -1, 0]^t\}$;
 - $v = [1, 1, 1, 1]^t$ e $G = \{[2, 3, 1, 1]^t, [5, 6, 1, 1]^t, [1, 2, 1, 1]^t\}$.

5. Determine um conjunto finito de geradores para cada um dos seguintes subespaços:
 - (a) $\{[x, y, z]^t \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\}$ em \mathbb{R}^3 ;
 - (b) $\{[x, y, z]^t \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = y - z = 0\}$ em \mathbb{R}^3 ;
 - (c) $\{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \mid x + z = y - w = 0\}$ em \mathbb{R}^4 ;
 - (d) $\{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = x - y + z - w = x - z + w = 0\}$ em \mathbb{R}^4 ;
 - (e) $\{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + w = 0\}$ em \mathbb{R}^4 .
6. Determine um conjunto finito de geradores para o conjunto solução do sistema homogêneo associado a cada um dos sistemas do exercício 8 da página 102.
7. Determine um conjunto finito de geradores para cada um dos subconjuntos de matrizes do exercício 3 que são subespaços.
8. Sejam U e U' subespaços de um espaço vetorial V .
 - (a) Mostre que $U + U'$ é um subespaço de V .
 - (b) Mostre que todo subespaço de V que contém U e U' também contém $U + U'$.
9. Quais dos subconjuntos abaixo são linearmente dependentes e quais são linearmente independentes? Justifique a sua resposta.
 - (a) $\{[1, 0, 1]^t, [1, 3, 2]^t, [1, 1, -1]^t\}$ em \mathbb{R}^3 ;
 - (b) $\{[1, 0, 1, -1]^t, [1, 1, 0, 1]^t, [0, 1, -1, 2]^t, [0, 2, 2, -4]^t\}$ em \mathbb{R}^4 ;
 - (c) $\{[1, 1, -1]^t, [2, 3, -1]^t, [3, 1, -5]\}$ em \mathbb{R}^3 ;
 - (d) $\{[3, 1, 2, 3]^t, [2, 1, 3, 2]^t, [1, 3, 2, 1]^t\}$ em \mathbb{R}^4 ;
 - (e) $\{[1, 2, 3]^t, [5, 6, 7]^t, [8, 1, 2]^t, [1, 0, 1]^t\}$ em \mathbb{R}^3 ;
 - (f) $\{[1, 0, 0, 0]^t, [1, 1, 0, 0]^t, [1, 1, 1, 0]^t, [1, 1, 1, 1]^t\}$ em \mathbb{R}^4 ;
 - (g) $\{[1, 0, 0, 0]^t, [1, 1, 1, 1]^t, [1, 3, 4, 1]^t, [6, 4, 5, 2]^t\}$ em \mathbb{R}^3 .
10. Quais dos subconjuntos abaixo são linearmente dependentes e quais são linearmente independentes? No caso daqueles que são linearmente dependentes, escreva cada um dos vetores do conjunto (quando possível), como combinação linear dos demais.
 - (a) $\{[1, 2, -3, 1]^t, [2, 0, 4, 1]^t, [5, -4, 14, -3]^t\}$ em \mathbb{R}^4 ;
 - (b) $\{[2, 1, 2, 1]^t, [6, 3, 6, 3]^t, [5, 1, 4, 3]^t\}$ em \mathbb{R}^4 ;
 - (c) $\{[1, 1, 0]^t, [1, 0, 1]^t, [0, 1, 1]^t\}$ em \mathbb{R}^3 ;
 - (d) $\{[1, 0, 0, 1]^t, [1, 1, 0, 1]^t, [1, 1, 1, 1]^t, [1, 0, 1, 1]^t, [1, 0, 1, 0]^t\}$ em \mathbb{R}^4 .
11. Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^n$. Sabendo-se que estes vetores são linearmente independentes, determine se o mesmo ocorre com os seguintes vetores:
 - (a) $u + v, v + w$ e $u + w$;
 - (b) $u - v, v - w$ e $w - u$.
12. Calcule a base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços:
 - (a) $\langle [1, 2, 3]^t, [1, 1, 1]^t, [-1, 0, 1]^t, [1, 4, 7]^t \rangle$ em \mathbb{R}^3 ;
 - (b) $\langle [1, -1, 0, 2]^t, [3, 5, 2, -4]^t, [5, 3, 2, 0]^t \rangle$ em \mathbb{R}^4 ;
 - (c) $\langle [1, 1, 2, 3, 6]^t, [1, 2, 3, 1, 6]^t, [1, 0, 1, 0, 9]^t \rangle$ em \mathbb{R}^4 ;

- (d) $\{[x, y, z]^t \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\}$ em \mathbb{R}^3 ;
 (e) $\{[x, y, z]^t \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = y - z = 0\}$ em \mathbb{R}^3 ;
 (f) $\{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \mid x + z = y - w = 0\}$ em \mathbb{R}^4 ;
 (g) $\{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = x - y + z - w = x - z + w = 0\}$ em \mathbb{R}^4 ;
 (h) $\{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + w = 0\}$ em \mathbb{R}^4 .

13. Seja $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$, e considere o conjunto

$$S = \{v_1 - v_2, v_1 - v_3, \dots, v_1 - v_n\}.$$

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras:

- (a) o conjunto S é linearmente independente;
 (b) S é um conjunto de geradores de \mathbb{R}^n ;
 (c) S é uma base de \mathbb{R}^n .

14. Dados números reais r_1, \dots, r_n defina os polinômios

$$\ell_i = \frac{(x - r_1) \cdots (x - r_{i-1})(x - r_{i+1}) \cdots (x - r_n)}{(r_i - r_1) \cdots (r_i - r_{i-1})(r_i - r_{i+1}) \cdots (r_i - r_n)}$$

para cada $1 \leq i \leq n$. Mostre que os polinômios ℓ_1, \dots, ℓ_n definem uma base do espaço dos polinômios na variável x , com coeficientes reais e grau menor ou igual a n .

15. Mostre que os subespaços de \mathbb{R}^4 definidos abaixo são iguais:

$$U = \langle [1, -1, -3]^t, [3, -2, -8]^t, [2, 1, -3]^t \rangle;$$

$$U' = \langle [1, 1, -1]^t, [2, 3, -1]^t, [3, 1, -5]^t \rangle.$$

16. Calcule uma base e a dimensão do conjunto solução sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y - z + w - t & = 0 \\ x - 2z - w + t & = 0 \\ y + z + w - t & = 0 \\ 2x - 6y - 7z - 8w + 8t & = 0 \\ 3x + 7y - 2z + 4w - 4t & = 0. \end{cases}$$

17. Dê exemplo de um sistema linear homogêneo cujo conjunto solução coincida com cada um dos subespaços vetoriais abaixo:

- (a) $\langle [1, 1, -1]^t, [2, 3, -1]^t, [3, 1, -5]^t \rangle$ em \mathbb{R}^3 ;
 (b) $\langle [1, -1, 0, 0]^t, [1, 0, 1, 1]^t, [0, 1, -1, 0]^t \rangle$ em \mathbb{R}^4 ;
 (c) $\langle [1, -1, 0, 1, 0]^t, [-1, 1, 0, 0, 1]^t \rangle$ em \mathbb{R}^5 ;
 (d) $\langle [1, 1, 1, 0]^t, [1, 0, 2, 1]^t, [5, 2, 8, 3]^t \rangle$ em \mathbb{R}^4 ;
 (e) $\langle [1, 2, 0, 1, 1]^t, [1, 4, 1, 2, 0]^t, [1, 0, 1, 1, 1]^t \rangle$ em \mathbb{R}^5 .

18. Complete cada um dos seguintes conjuntos para uma base de \mathbb{R}^4 :

- (a) $\{[2, 1, 4, 3]^t, [2, 1, 2, 0]^t\}$;
- (b) $\{[0, 1, 2, 3]^t, [1, 2, 3, 4]^t, [0, 0, 0, 1]^t\}$;
- (c) $\{[0, 2, 1, 0]^t, [0, 1, 2, 0]^t\}$;
- (d) $\{[1, 2, 3, 4]^t, [4, 3, 2, 1]^t\}$;

19. Considere os seguintes subespaços de \mathbb{R}^4 :

$$U = \{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \mid x + z = y - w = 0\};$$

$$W = \{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \mid x - w = 0\}.$$

Determine:

- (a) bases para U e W ;
- (b) as dimensões de U e W ;
- (c) uma base de \mathbb{R}^4 que contenha uma base de U ;
- (d) uma base de $U + W$ e sua dimensão;
- (e) uma base de $U \cap W$ e sua dimensão;
- (f) um subespaço U' tal que $U + U' = \mathbb{R}^4$.

20. Considere os seguintes subespaços de \mathbb{R}^4 :

$$U = \langle [1, 0, 1, 1]^t, [1, -1, 1, 1]^t, [0, 1, 0, 0]^t \rangle;$$

$$W = \{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - w = 0\}.$$

Determine:

- (a) bases para U e W ;
- (b) as dimensões de U e W ;
- (c) um sistema homogêneo cujo conjunto solução é U ;
- (d) uma base de $U + W$ e sua dimensão;
- (e) uma base de $U \cap W$ e sua dimensão;

21. Considere os seguintes subespaços de \mathbb{R}^4 :

$$U = \{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z = x + y - z + w = 0\};$$

$$W = \{[x, y, z, w]^t \in \mathbb{R}^4 \mid y + z - w = x + ky - w = 0\}.$$

- (a) Determine os valores reais de k para os quais $\dim[U \cap W]^t = 1$.
- (b) Determine os valores reais de k para os quais $\dim[U + W]^t = 3$.

22. Ache uma base para $U \cap W$ sabendo-se que U e W são os seguintes subespaços de \mathbb{R}^4 :

$$U = \langle [4, -3, 2, 0]^t, [7, 0, 5, 3]^t \rangle;$$

$$W = \langle [2, -5, 3, 1]^t, [5, -2, 6, 4]^t, [7, -7, 9, 5]^t \rangle;$$

23. Mostre que todo subespaço de um espaço vetorial finitamente gerado também é finitamente gerado.

SUGESTÃO: a dimensão de um subespaço é sempre menor que a do espaço ambiente.

24. Prove que se U é um subespaço de V e U' é um complementar de U em V , então

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim(U').$$

25. Mostre que se U e W são planos distintos do \mathbb{R}^3 que contêm a origem, então $U + W = \mathbb{R}^3$ mas $\dim(U) + \dim(W) > 3$.

26. Sejam U_1 e U_2 subespaços de um espaço vetorial finitamente gerado V . Mostre que

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2).$$

SUGESTÃO: Seja B uma base de $U_1 \cap U_2$. Determine um conjunto S_1 de vetores que completa B para uma base de U_1 e um conjunto S_2 que completa B para uma base de U_2 . Mostre que $B \cup S_1 \cup S_2$ é uma base de V e conclua a equação desejada contando os elementos de $B \cup S_1 \cup S_2$ de duas maneiras diferentes.

27. Sejam U e W subespaços vetoriais de \mathbb{R}^{10} de dimensões 8 e 9, respectivamente. Só há dois valores possíveis para a dimensão de $U \cap W$. Quais são estes valores?

28. Sejam U e W subespaços vetoriais de \mathbb{R}^n . Sabendo-se que U não está contido em W , nem W está contido em U , prove que existe um vetor de $U + W$ que não está em U nem em W .

29. Use o método de Gram-Schmidt para achar bases ortonormais para os subespaços dados abaixo:

- (a) $\langle [1, 2, 1]^t, [2, 1, 1]^t \rangle \subset \mathbb{R}^3$;
 (b) $\langle [1, 1, 0, 1]^t, [1, 0, -1, 1]^t \rangle \subset \mathbb{R}^4$;
 (c) $\langle [1, 1, 0, 1]^t, [1, 0, -1, 1]^t, [1, 1, 1, 0]^t \rangle \subset \mathbb{R}^4$.

30. Determine os complementos ortogonais de cada um dos espaços do exercício anterior.

31. Seja S um subespaço de \mathbb{R}^n . Calcule $\dim(S^\perp)$ em função de $\dim(S)$.

32. Determine o complemento ortogonal do subespaço de \mathbb{R}^3 definido por

$$\{[x, y, z]^t \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}.$$

33. Determine o complemento ortogonal do subespaço do \mathbb{R}^3 gerado por $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$ e $(1, -1, -1)$.

CAPÍTULO 5

Transformações lineares

Aplicações são o instrumento matemático que usamos quando queremos efetuar transformações sobre um conjunto, ou quando desejamos comparar dois conjuntos. Como já vimos no caso do \mathbb{R}^n , os operadores lineares proveem uma maneira adequada de fazer isto quando os objetos sobre os quais estamos operando são vetores. Neste capítulo consideramos a noção de transformação linear para espaços vetoriais gerais e estudamos suas propriedades básicas.

1. Definição e exemplos

1.1. Definição. Como um espaço vetorial vem munido de operações, queremos que uma aplicação de um espaço vetorial em outro preserve, de alguma maneira, estas aplicações. O que sabemos do caso do plano, sugere que a definição correta deva ser a seguinte. Sejam V e W espaços vetoriais reais. Uma aplicação $T : V \rightarrow W$ que satisfaz

$$(66) \quad T(u + v) = T(u) + T(v) \quad \text{e} \quad T(\lambda u) = \lambda T(u);$$

qualquer que sejam $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ é uma *transformação linear* entre estes espaços.

Quando $V = W$ costuma-se dizer que T é um *operador linear* de V . Portanto, ao usar a palavra operador estamos implicitamente supondo que os conjuntos de partida e de chegada da transformação linear são os mesmos. Como transformações lineares bijetivas são muito importantes, também adotaremos uma terminologia específica para elas; vamos chamá-las de *isomorfismos*. Portanto, um isomorfismo é uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ é um isomorfismo se cada vetor de W é a imagem por T de um único vetor de V . Quando existe um isomorfismo entre dois espaços vetoriais dados, dizemos que eles são *isomorfos*.

Observe que não dissemos como uma transformação linear age sobre o vetor nulo. A razão é que isto é consequência das duas propriedades enunciadas em (66). De fato, se v é um vetor qualquer de V , então

$$T(0) = T(0 \cdot u) = 0 \cdot T(u) = 0,$$

pois o escalar zero multiplicado por qualquer vetor dá zero. Ao longo deste capítulo estudaremos várias outras propriedades das transformações lineares que, como o fato de que

levam o vetor nulo nele próprio, dependem apenas de (66) e das propriedades que já estudamos dos espaços vetoriais, como a existência de bases e o fato de que toda base de um mesmo espaço vetorial tem a mesma quantidade de elementos.

Transformações lineares de \mathbb{R}^m em \mathbb{R}^n sempre podem ser representadas por matrizes. Para ver porque isto é verdade, basta generalizar o que fizemos quando $m = n = 2$. Seja, portanto, $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear. Como sempre, denotaremos por e_i o vetor cuja única coordenada não nula é a i -ésima, que vale 1. Com isto, podemos escrever um vetor $v \in \mathbb{R}^m$ em forma matricial como

$$(67) \quad v = [x_1, \dots, x_m]^t.$$

De agora em diante alternaremos entre a representação de um vetor como uma n -upla ou como uma matriz $n \times 1$ sempre que necessário e sem nenhum comentário adicional. Mas (67) equivale a dizer que

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_m e_m.$$

Portanto, aplicando T a v e utilizando as propriedades que definem uma transformação linear, obtemos

$$T(v) = x_1 T(e_1) + \dots + x_m T(e_m).$$

Logo, se

$$T(e_j) = [a_{1j}, \dots, a_{nj}]^t$$

são as coordenadas de $T(e_j)$, então

$$T(v) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} x_1 + \dots + \begin{bmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix} x_m,$$

que podemos reescrever na forma AX com

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

Nada disto é uma grande novidade porque os exemplos de operadores lineares do \mathbb{R}^n que encontramos no capítulo 3 foram, todos eles, descritos em forma matricial. Este foi o caso, por exemplo, das projeções e das reflexões do \mathbb{R}^n . No próximo artigo veremos que, em última análise, toda transformação linear pode ser expressa em termos de matrizes, mesmo quando o espaço em que estão definidas não é o \mathbb{R}^n .

1.2. Isomorfismos. Neste artigo veremos como usar a noção de coordenada introduzida no artigo 2.5 para mostrar que todo espaço vetorial de dimensão finita V pode ser identificado com \mathbb{R}^n , em que n é a dimensão de V . Para isto, escolhemos uma base

$$B = \{v_1, \dots, v_n\}$$

de V . Dado um vetor qualquer $v \in V$ podemos escrevê-lo na forma

$$v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n,$$

em que a_1, \dots, a_n são números reais; de modo que

$$(v)_B = [a_1, \dots, a_n]^t,$$

é o vetor de coordenadas de v . Para o que fizemos até agora bastaria que B fosse um conjunto de geradores. Como B é uma base, temos também que cada vetor $v \in V$ admite um *único* conjunto de coordenadas. Portanto, uma vez que uma base B tenha sido fixada, a cada vetor $v \in V$ corresponde exatamente um vetor de coordenadas $(v)_B \in \mathbb{R}^n$.

Podemos reformular isto dizendo que a aplicação $c_B : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ que a cada vetor $v \in V$ associa o vetor $(v)_B$ de suas coordenadas relativamente à base B é bijetiva. Entretanto, tendo construído c_B é difícil não se perguntar se esta é uma transformação linear. Para verificar isto, escolhemos dois vetores $v, w \in V$ e determinamos as coordenadas de ambos relativamente a B . Digamos que

$$(v)_B = (a_1, \dots, a_n) \text{ e } (w)_B = (b_1, \dots, b_n).$$

Isto se traduz nas combinações lineares

$$v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n \text{ e } w = b_1v_1 + \dots + b_nv_n$$

que, somadas nos dão

$$v + w = (a_1 + b_1)v_1 + \dots + (a_n + b_n)v_n;$$

donde concluímos que

$$(v)_B + (w)_B = (v + w)_B.$$

De maneira semelhante, podemos verificar que se λ é um escalar, então

$$\lambda(v)_B = (\lambda v)_B.$$

confirmando, assim, que c_B é mesmo uma transformação linear. Temos, portanto, que c_B é um isomorfismo entre V e \mathbb{R}^n . Apesar de simples, este resultado é importante o suficiente para ser enunciado como um teorema.

TEOREMA 1.1. *Todo espaço vetorial de dimensão n é isomorfo ao \mathbb{R}^n .*

Vejamos um exemplo. Considere o subespaço do \mathbb{R}^4 definido por

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0\}.$$

Os vetores deste espaço podem ser escritos na forma

$$(68) \quad (x, y, z, w) = (x, y, x + y, w) = x(1, 0, 1, 0) + y(0, 1, 1, 0) + w(0, 0, 0, 1).$$

Como estes vetores são linearmente independentes, temos que

$$B = \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

é uma base de S . Pelo que fizemos anteriormente, a cada vetor de S pode ser associado, de maneira única, um vetor de \mathbb{R}^3 . Na verdade, segundo a equação (68), o vetor $v = (x, y, z, w) \in S$ tem coordenadas

$$(v)_B = (x, y, w)$$

relativamente à base B dada. Naturalmente, se muda a base, mudam também as coordenadas. Por exemplo,

$$B' = \{(1, -1, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$$

também é base de S . Como

$$(x, y, x + y, w) = x(1, -1, 0, 0) + (x + y)(0, 1, 1, 1) + (w - x - y)(0, 0, 0, 1).$$

então o mesmo vetor $v = (x, y, z, w) \in S$ tem coordenadas

$$(v)_{B'} = (x, x + y, w - x - y)$$

relativamente à base B' .

A consequência mais importante do teorema 1.1 é que, ao estudar o \mathbb{R}^n estamos, na verdade, estudando todos os possíveis espaços vetoriais de dimensão finita. Isto ocorre porque o isomorfismo entre um dado espaço vetorial V de dimensão n e o \mathbb{R}^n nos permite traduzir qualquer propriedade de V , que dependa apenas da soma e da multiplicação por escalar neste espaço, em termos da propriedade análoga em \mathbb{R}^n e vice-versa.

1.3. Núcleo e imagem de uma transformação linear. Como qualquer aplicação entre dois conjuntos, uma transformação linear tem uma imagem. Mais precisamente, se $T : V \rightarrow W$ é uma transformação linear de espaços vetoriais, sua *imagem* é o conjunto dos vetores de W que são imagem por T de algum vetor de V . Em outras palavras,

$$\text{Im}(T) = \{Tv \mid v \in V\}.$$

Nossa primeira observação é que $\text{Im}(T)$ é mais que um simples conjunto, ela é um subespaço de W . Isto é fácil de verificar, porque, para começar, $T(0) = 0$ implica que $0 \in \text{Im}(T)$. Além disso, se $Tv, Tv' \in \text{Im}(T)$ então

$$Tv + Tv' = T(v + v') \in \text{Im}(T);$$

ao passo que, se $\lambda \in \mathbb{R}$, então temos também que

$$\lambda T(v) = T(\lambda v) \in \text{Im}(T).$$

Portanto, valem todas as propriedades necessárias para garantir que $\text{Im}(T)$ é um subespaço de W .

Se $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ for uma base de V , então todos os vetores de V podem ser escritos como combinação linear dos vetores de B . Levando em conta que T é linear, isto implica que qualquer vetor de $\text{Im}(T)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $T(u_1), \dots, T(u_n)$. Logo,

$$\text{Im}(T) = \langle T(u_1), \dots, T(u_n) \rangle.$$

Num arroubo de entusiasmo você poderia achar que estes vetores formam uma base de $\text{Im}(T)$. Infelizmente isto não é verdade. Para identificar o problema, consideremos uma combinação linear destes vetores que seja igual ao vetor nulo,

$$a_1 T(u_1) + \dots + a_n T(u_n) = 0.$$

Usando a linearidade de T , podemos reescrever isto na forma

$$T(a_1 u_1 + \dots + a_n u_n) = 0.$$

Se pudéssemos deduzir disto que

$$a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = 0,$$

bastaria apelar para o fato de B ser base de V para concluir que todos os a 's têm que ser nulos, o que nos permitiria afirmar que os vetores $T(u_1), \dots, T(u_n)$ são mesmo linearmente independentes. Portanto, removendo tudo o que é circunstancial, podemos dizer que a condição de que precisamos para garantir que a imagem de uma base de V é uma base de $\text{Im}(T)$ é $T(v) = 0$ se, e somente se, $v = 0$. O problema é que há muitas transformações lineares interessantes para as quais isto é falso, entre elas as projeções. De fato, a imagem da projeção é o subespaço sobre o qual os vetores estão sendo projetados, e todos os vetores perpendiculares à imagem serão projetados no zero.

Isto põe em relevo a importância de identificar aqueles vetores que são levados no zero por uma transformação linear. Para isto, dada uma transformação linear $T : V \rightarrow W$, definimos seu *núcleo* por

$$N(T) = \{v \in V \mid Tv = 0\}.$$

Mais uma vez, não se trata de um mero conjunto, mas sim de um subespaço vetorial de V . Para confirmar isto, observe que $0 \in N(T)$ uma vez que $T(0) = 0$. Por outro lado, se $v, u \in N(T)$ então

$$T(v) = T(u) = 0,$$

de modo que

$$T(v + u) = T(v) + T(u) = 0 + 0 = 0,$$

e, para todo número real λ ,

$$T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Antes de analisar em maior profundidade a informação codificada pelo núcleo de uma transformação linear, convém explicitar o que o núcleo e a imagem representam no caso de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Como já vimos, tais transformações podem ser descritas na forma $Tv = Av$, em que A é uma matriz $n \times m$ e v é representado como uma matriz $m \times 1$. Tomando a base canônica de \mathbb{R}^m , as considerações feitas anteriormente mostram que

$$\text{Im}(T) = \langle Te_1, \dots, Te_m \rangle = \langle Ae_1, \dots, Ae_m \rangle.$$

Contudo o produto Ae_i é igual à i -ésima coluna de A . Por outro lado, o núcleo de T é o conjunto dos vetores $v \in \mathbb{R}^m$ tais que $Av = 0$, que é simplesmente o conjunto solução do sistema $AX = 0$ em \mathbb{R}^m . Portanto, se a transformação $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ for descrita pela matriz A , então:

- a imagem de T é gerada pelas colunas de A em \mathbb{R}^n ;
- o núcleo de T é o subespaço solução de $AX = 0$ em \mathbb{R}^m .

Portanto, ao menos no caso do \mathbb{R}^n , estas noções não são mais que novos nomes para subespaços que já vínhamos descrevendo sob outra terminologia.

Vejamos um exemplo numérico. Seja $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z, w) = [x + y, y - z, z - w, y - w]^t.$$

A imagem de T é gerada pela imagem dos vetores da base canônica de \mathbb{R}^4 por T , donde

$$\text{Im}(T) = \langle [1, 0, 0, 0]^t, [1, 1, 0, 1]^t, [0, -1, 1, 0]^t, [0, 0, -1, -1]^t \rangle.$$

Mas, aplicando eliminação gaussiana à matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\{[1, 0, 0, 0]^t, [0, 1, 0, 1]^t, [0, 0, 1, 1]^t\}$$

é uma base da imagem de T . Em particular $\text{Im}(T)$ tem dimensão 3. Note também que, neste exemplo, as imagens dos vetores da base canônica não são linearmente independentes. Pelas considerações anteriores, podemos concluir que isto indica que o núcleo de

T não deve ser nulo. Mas $N(T)$ é igual ao conjunto solução do sistema

$$x + y = 0$$

$$y - z = 0$$

$$z - w = 0$$

$$y - w = 0$$

de modo que $(x, y, z, w) \in N(T)$ se, e somente se,

$$[x, y, z, w]^t = [-w, w, w, w]^t = w[-1, 1, 1, 1]^t.$$

Logo o núcleo tem base

$$B = \{[-1, 1, 1, 1]^t\}$$

e dimensão um.

1.4. Teorema do núcleo e da imagem. Neste artigo provaremos um importante resultado sobre transformações lineares. Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita e $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Como vimos no artigo 1.3, podemos associar a T dois subespaços vetoriais: o núcleo, que é um subespaço de V , e a imagem, que é um subespaço de W .

Como W tem dimensão finita e $\text{Im}(T) \subset W$, então $\text{Im}(T)$ tem que ter dimensão finita. Na verdade, $\dim(\text{Im}(T)) < \dim(W)$. Podemos, então, nos perguntar como determinar uma base de $\text{Im}(T)$. Contudo, já sabemos que se

$$B = \{v_1, \dots, v_n\},$$

for uma base de V , então,

$$T(B) = \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$$

é um conjunto de geradores de $\text{Im}(T)$. O problema é que também sabemos que $T(B)$ só será base de $\text{Im}(T)$ quando T for injetiva. Contudo, é possível, com o devido cuidado, escolher B de tal maneira que uma base de $\text{Im}(T)$ pode ser facilmente lida a partir de $T(B)$.

A construção de uma tal base B tem por ponto de partida uma base β do núcleo de T . Segundo a proposição 2.9, podemos acrescentar vetores linearmente independentes a β até obter uma base de V . A base B de V construída desta forma pode ser escrita como a união de β com um conjunto β' , em que este último contém os vetores que precisamos acrescentar a β até obter uma base. Em outras palavras, β' gera um espaço complementar do núcleo de T . Mas,

$$T(B) = T(\beta) \cup T(\beta'),$$

é um conjunto de geradores para $\text{Im}(T)$. Contudo, $T(\beta) = \{0\}$ porque os vetores de β pertencem ao núcleo de T , de modo que

$$T(B) = T(\beta') \cup \{0\}.$$

Isto é, $T(\beta')$ é um conjunto de geradores para $\text{Im}(T)$. Provaremos que os vetores de $T(\beta')$ são linearmente independentes, de modo que formam uma base para $\text{Im}(T)$. Se

$$\beta' = \{w_1, \dots, w_m\},$$

então

$$T(\beta') = \{T(w_1), \dots, T(w_m)\}.$$

Seja

$$a_1 T(w_1) + \dots + a_m T(w_m) = 0.$$

Se $T(w_1), \dots, T(w_m)$ forem realmente linearmente independentes, então devemos ser capazes de mostrar que os a s têm que ser todos nulos. Contudo, da última equação segue, pela linearidade de T , que

$$T(a_1 w_1 + \dots + a_m w_m) = 0,$$

o que significa que $a_1 w_1 + \dots + a_m w_m \in N(T)$. Portanto,

$$a_1 w_1 + \dots + a_m w_m \in N(T) \cap \langle \beta' \rangle = \{0\},$$

já que $\langle \beta' \rangle$ é um espaço complementar de $N(T)$. Mas isto implica que

$$a_1 w_1 + \dots + a_m w_m = 0$$

e como os w s são linearmente independentes, podemos concluir que os a s são todos nulos, como queríamos mostrar. Portanto,

se β' for o conjunto de vetores acrescentados a uma base β do núcleo de T de modo a obter uma base de V , então $T(\beta')$ é uma base da imagem de T .

Por exemplo, o núcleo da transformação $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $T(x, y, z, w) = [x + y, 0, 0, z]^t$ é o conjunto dos vetores (x, y, z, w) para os quais

$$T(x, y, z, w) = [x + y, 0, 0, z]^t = [0, 0, 0, 0]^t;$$

que corresponde a ter $y = -x$ e $z = 0$. Isto é,

$$N(T) = \{[x, -x, 0, w]^t \mid x, w \in \mathbb{R}\}.$$

Como

$$[x, -x, 0, w]^t = x[1, -1, 0, 0]^t + w[0, 0, 0, 1]^t,$$

e os vetores $[1, -1, 0, 0]^t$ e $[0, 0, 0, 1]^t$ são linearmente independentes, então

$$\beta = \{[1, -1, 0, 0]^t, [0, 0, 0, 1]^t\}$$

é uma base de $N(T)$. Para completá-la, basta acrescentar dois vetores linearmente independentes com estes dois. Digamos que escolhemos os vetores $[0, 0, 1, 0]^t$ e $[1, 0, 0, 0]^t$; neste caso,

$$\beta' = \{[0, 0, 1, 0]^t, [1, 0, 0, 0]^t\}.$$

Portanto, o que provamos acima nos garante que

$$T(\beta') = \{[0, 0, 0, 1]^t, [1, 0, 0, 0]^t\}$$

é uma base de $\text{Im}(T)$, como é fácil de verificar diretamente.

Resumindo, mostramos que se $T : V \rightarrow V'$ é uma transformação linear e se

- β é uma base de $N(T)$;
- β' é uma base de um complementar de $N(T)$;

então $T(\beta')$ é uma base de $\text{Im}(T)$. Em particular,

$$\dim(N(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = |\beta| + |\beta'| = |\beta \cup \beta'|,$$

em que a última igualdade vem do fato de β e β' não terem elementos em comum, uma vez que B é formada por vetores linearmente independentes. Como $B = \beta \cup \beta'$ é uma base de V ,

$$|\beta \cup \beta'| = \dim(V).$$

Combinando tudo isto, provamos o seguinte resultado.

TEOREMA DO NÚCLEO E DA IMAGEM. *Se $T : V \rightarrow W$ é uma transformação linear entre espaços vetoriais reais de dimensão finita V e W , então*

$$\dim(V) = \dim(N(T)) + \dim(\text{Im}(T)).$$

Uma aplicação simples deste teorema está relacionada à descrição de quando um operador linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é injetivo, sobrejetivo ou bijetivo. Digamos que $m < n$. Neste caso, o teorema nos diz que

$$n = \dim(N(T)) + \dim(\text{Im}(T)) \leq \dim(N(T)) + m;$$

donde

$$0 < n - m \leq \dim(N(T));$$

que implica que $N(T) \neq \{0\}$. Lembrando que uma transformação linear é injetiva se, e somente se, seu núcleo é zero, podemos concluir que, se $m < n$ então T não pode ser injetiva. Por outro lado, se $m > n$ então

$$\dim(\text{Im}(T)) = n - \dim(N(T)) \leq n < m;$$

de modo que $\text{Im}(T) \subsetneq \mathbb{R}^m$. Mas isto significa que T não pode ser sobrejetiva. Reformulando tudo isto de maneira mais positiva, podemos dizer que:

- se T é injetiva então $n \leq m$;
- se T é sobrejetiva então $n \geq m$;
- se T é bijetiva então $n = m$.

Note que a recíproca de cada uma destas afirmações é falsa. Quando $m = n$ o teorema do núcleo e da imagem nos diz ainda que $N(T) = \{0\}$ se, e somente se, $\dim(\text{Im}(T)) = n$. Em outras palavras, se $n = m$ então as seguintes afirmações são equivalentes:

- T é bijetiva;
- T é sobrejetiva;
- T é injetiva;

que também é equivalente a dizer que T tem inversa.

2. Mudança de base

Nesta seção veremos como e porque é importante podermos descrever as matrizes de uma transformação linear relativamente a outras bases que não a canônica. Aprenderemos também como relacionar matrizes de uma mesma transformação linear relativas a diferentes bases do \mathbb{R}^n .

2.1. Matrizes e bases. Seja $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base do \mathbb{R}^n e T um operador linear do \mathbb{R}^n . Se $v \in \mathbb{R}^n$, podemos escrevê-lo na forma

$$(69) \quad v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n,$$

em que os α 's são números reais. Aplicando T a esta expressão, obtemos

$$(70) \quad T(v) = \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_n T(u_n),$$

uma vez que T é linear. Mas $T(u_1), \dots, T(u_n)$ são vetores de \mathbb{R}^n , de modo que também podemos escrevê-los como combinação linear dos elementos de B , digamos

$$T(u_j) = a_{1j}u_1 + \dots + a_{nj}u_n \quad \text{para } 1 \leq j \leq n.$$

Em vez de substituir estas expressões em (70), usamos a noção de coordenadas, introduzida no artigo 2.5. Como a_{1j}, \dots, a_{nj} são as coordenadas de $T(u_j)$ relativamente à base B , escrevemos

$$(Tu_j)_B = [a_{1j}, \dots, a_{nj}]^t;$$

de modo que (70) na forma

$$(71) \quad (Tv)_B = \alpha_1 (T(u_1))_B + \dots + \alpha_n (T(u_n))_B,$$

donde

$$(Tv)_B = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \alpha_1 + \dots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} \alpha_n = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix},$$

que é a mesma expressão obtida no artigo 1.1, exceto que todas as coordenadas referem-se agora à base B e não à base canônica. Escrevendo

$$(T)_B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

podemos dizer que

$$(72) \quad (Tv)_B = (T)_B(v)_B$$

que usaremos frequentemente neste capítulo e no próximo.

Antes de passar adiante, há duas propriedades das coordenadas de um vetor relativamente a uma base para a qual precisamos chamar sua atenção. Para isto fixaremos uma base B de \mathbb{R}^n . Dados dois vetores $v, v' \in \mathbb{R}^n$ e um escalar λ , temos que

- $(v)_B + (v')_B = (v + v')_B$;
- $\lambda(v)_B = (\lambda v)_B$.

Note que estas propriedades já foram usadas, implicitamente, quando escrevemos a equação (71).

As demonstrações seguem diretamente das definições. Por exemplo, se

$$(v)_B = (a_1, \dots, a_n) \text{ e } (v')_B = (a'_1, \dots, a'_n)$$

então, supondo que

$$B = \{u_1, \dots, u_n\},$$

temos, por definição que

$$v = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n \text{ e } v' = a'_1 u_1 + \cdots + a'_n u_n;$$

donde

$$v + v' = (a_1 + a'_1)u_1 + \cdots + (a_n + a'_n)u_n,$$

que equivale a dizer que

$$(v + v')_B = (a_1 + a'_1, \dots, a_n + a'_n).$$

A outra igualdade é provada de maneira análoga. Usaremos estas duas propriedades, de agora em diante, sem nenhuma cerimônia.

2.2. Rotações no espaço. A maneira mais fácil de construir uma rotação no espaço é fixar uma reta para servir de eixo e girar todos os pontos em torno desta reta. Digamos, por exemplo, que ρ é a transformação que roda o espaço \mathbb{R}^3 em torno do eixo z de um ângulo θ . Naturalmente o vetor diretor do eixo, que é e_3 , não é alterado por ρ , ao passo que, no plano xy a transformação atua como a rotação estudada na seção 2.3 do capítulo 1. Suporemos que o sentido da rotação obedece à regra da mão direita; isto é,



FIGURA 1. Regra da mão direita

se o polegar aponta na direção e sentido do vetor diretor escolhido para o eixo, então a rotação acompanha o movimento da rotação da concha formada pelos outros dedos.

Como neste exemplo o polegar apontará na direção e sentido de e_3 , a rotação sobre o plano $z = 0$ será no sentido anti-horário. Portanto, teremos que

$$\begin{aligned}\rho(e_1) &= (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \\ \rho(e_2) &= (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0) \\ \rho(e_3) &= (0, 0, 1)\end{aligned}$$

e a matriz correspondente será

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Em geral, se u for um vetor unitário ao longo do eixo e θ for o ângulo de rotação, teremos

- $\rho(u) = u$;
- $\rho(w)$ e w formam um ângulo θ para todo vetor w perpendicular a u .

Para poder escrever a matriz de ρ , determinaremos uma base ortonormal $\{w_1, w_2\}$ do plano $W = \langle u \rangle^\perp$. Como o ângulo entre dois vetores não muda quando ambos são rodados por

ρ , podemos concluir que $\rho(w_1)$ é perpendicular a u , de modo que, ao escrevê-lo como combinação linear da base

$$B = \left\{ \frac{u}{\|u\|}, w_1, w_2 \right\},$$

obtemos

$$\rho(w_1) = \langle \rho(w_1), w_1 \rangle w_1 + \langle \rho(w_1), w_2 \rangle w_2.$$

Para poder explicitar esta fórmula basta calcular

$$\langle \rho(w_1), w_1 \rangle \text{ e } \langle \rho(w_1), w_2 \rangle.$$

Como as rotações também não alteram o comprimento dos vetores, temos que $\rho(w_1)$ é unitário, de modo que os produtos internos acima são iguais aos cossenos dos ângulos entre os vetores. Mas o ângulo entre w_1 e $\rho(w_1)$ é θ pela definição da rotação, o que nos permite concluir que

$$\langle \rho(w_1), w_1 \rangle = \cos(\theta).$$

Por outro lado, como w_2 é ortogonal a w_1 , o ângulo que forma com $\rho(w_1)$ é o que falta em θ para complementar $\pi/2$, donde

$$\langle \rho(w_1), w_2 \rangle = \cos(\pi/2 - \theta) = \sin(\theta).$$

Assim, as coordenadas de $\rho(w_1)$ relativamente a B são

$$(0, \cos(\theta), \sin(\theta))$$

Como w_2 é perpendicular a w_1 , um argumento semelhante mostra que

$$(0, -\cos(\pi/2 - \theta), \sin(\pi/2 - \theta)) = (0, -\sin(\theta), \cos(\theta)).$$

Portanto, a matriz de ρ relativamente à base B é

$$(\rho)_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Por exemplo, digamos que o eixo é a reta de vetor diretor $(1, 1, 0)$ e o ângulo de rotação é $\pi/3$. Normalizando o vetor diretor do eixo, obtemos

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$$

de modo que podemos escolher

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) \text{ e } w_2 = (0, 0, 1),$$

como uma base ortonormal do plano perpendicular ao eixo. Portanto, segundo o que acabamos de ver, a matriz da rotação desejada relativamente à base

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), (0, 0, 1) \right\}$$

será

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

em que o sentido da rotação é dado pela regra da mão direita. Isto é, se o polegar aponta na direção de $(1, 1, 0)/\sqrt{2}$ então a rotação acompanha o movimento da rotação da concha formada pelos outros dedos.

Infelizmente, o que gostaríamos mesmo é de ter a matriz desta rotação relativamente à base canônica, e não relativamente à base B . Para resolver este problema devemos descobrir como proceder para mudar as coordenadas de um vetor de uma base para outra.

2.3. Mudança de bases. Sejam B e B' duas bases de \mathbb{R}^n . Nosso objetivo neste artigo é relacionar as coordenadas de um vetor v relativas à B às suas coordenadas relativas a B' . Digamos que

$$B = \{u_1, \dots, u_n\}$$

Contudo, como

$$B' = \{w_1, \dots, w_n\}$$

é outra base de \mathbb{R}^n , podemos escrever cada vetor de B como combinação linear dos vetores de B' ; isto é,

$$u_j = m_{1j}w_1 + \dots + m_{nj}w_n$$

para $1 \leq j \leq n$. Em outras palavras,

$$(u_j)_{B'} = \begin{bmatrix} m_{1j} \\ \vdots \\ m_{nj} \end{bmatrix}$$

Considere, agora, um vetor qualquer v em \mathbb{R}^n . Se

$$(v)_B = (a_1, \dots, a_n).$$

então, por definição

$$v = a_1u_1 + \dots + a_nu_n;$$

donde

$$(v)_{B'} = a_1(u_1)_{B'} + \dots + a_n(u_n)_{B'}.$$

Substituindo as expressões para as coordenadas dos vetores u relativamente à base B' na expressão acima, obtemos

$$(v)_{B'} = a_1 \begin{bmatrix} m_{11} \\ \vdots \\ m_{n1} \end{bmatrix} + \dots + a_n \begin{bmatrix} m_{1n} \\ \vdots \\ m_{nn} \end{bmatrix};$$

que pode ser reescrita como um produto de matrizes na forma

$$(v)_{B'} = \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Como

$$(v)_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

esta equação matricial equivale a

$$(73) \quad (v)_{B'} = M(v)_B$$

em que

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

é conhecida, por razões óbvias, como a *matriz de mudança de base de B para B'* . Note que

as colunas de M são as coordenadas de cada um dos vetores de B relativamente à base B' .

Em particular, as colunas (e linhas) da matriz M são linearmente independentes, o que significa que M é inversível. Assim, podemos deduzir da fórmula (73) que

$$M^{-1}(v)_{B'} = (v)_B$$

de modo que a matriz que converte as coordenadas de um vetor escritas na base B' para suas coordenadas na base B é M^{-1} .

Voltando ao exemplo do final do artigo 2.2, as bases em questão são, a base canônica ε e a base ortonormal

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), (0, 0, 1) \right\}$$

Portanto, a matriz que transforma coordenadas da base B para coordenadas na base ε é

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cujas inversas correspondem à matriz que muda coordenadas na base canônica para coordenadas na base B . Por sorte, B é uma base ortonormal, de modo que, como vimos no artigo 3, a inversa de M é igual à sua transposta, o que facilita enormemente os cálculos.

Ainda que possa não parecer, o que fizemos basta para determinarmos a matriz de um operador linear relativamente à base canônica, quando conhecemos sua matriz relativamente a qualquer outra base. Para isto, suponhamos que T é um operador linear do \mathbb{R}^n e que B é uma base deste espaço. Se M for a matriz que muda coordenadas na base B em coordenadas na base ε , então

$$(v)_\varepsilon = M(v)_B \text{ que é equivalente a } M^{-1}(v)_\varepsilon = (v)_B.$$

Por outro lado, por (72),

$$(Tv)_B = (T)_B(v)_B.$$

Combinando estas fórmulas, obtemos

$$(Tv)_B = (T)_B M^{-1}(v)_\varepsilon.$$

Analogamente,

$$(Tv)_\varepsilon = M(Tv)_B$$

de modo que

$$(Tv)_\varepsilon = M(Tv)_B = M(T)_B M^{-1}(v)_\varepsilon.$$

Mas, aplicando (72) quando a base é ε ,

$$(Tv)_\varepsilon = (T)_\varepsilon(v)_\varepsilon;$$

de modo que

$$(T)_\varepsilon(v)_\varepsilon = M(T)_B M^{-1}(v)_\varepsilon.$$

Mas, multiplicando uma matriz A pelo vetor coluna e_j obtemos a j -ésima coluna de A , o que nos permite concluir que

$$(T)_\varepsilon = M(T)_B M^{-1}.$$

Obtivemos assim, uma fórmula que nos permite transformar a matriz de uma transformação escrita em qualquer base para a matriz da mesma transformação relativa à base canônica.

Aplicando esta fórmula à rotação descrita ao final do artigo anterior, temos que sua matriz na base canônica é

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que é igual a

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Teremos muitas oportunidades de usar estas fórmulas durante o curso, por isso convém reescrevê-las todas juntas. Para isto, sejam, $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base, T um operador do \mathbb{R}^n e M a matriz que transforma coordenadas relativas à base B em coordenadas relativas à base canônica. Em primeiro lugar, se $v \in \mathbb{R}^n$, então

- as entradas de $(v)_B$ são os coeficientes da combinação linear que expressa v relativamente à base B ;
- as colunas da matriz $(T)_B$ são os vetores $(T(u_i))_B$;
- as colunas da matriz M são os vetores $(u_i)_\varepsilon$.

Temos, assim, as seguintes fórmulas

- $(Tv)_B = (T)_B(v)_B$;
- $(v)_\varepsilon = M(v)_B$;
- $(T)_\varepsilon = M(T)_B M^{-1}$.

As outras fórmulas podem ser determinados a partir destas levando em conta que M^{-1} muda as coordenadas da base canônica para a base B .

2.4. Construindo transformações lineares. Neste artigo veremos como construir alguns exemplos de transformações lineares com propriedades especificadas.

Suponha dados dois espaços vetoriais V e W e dois subespaços $V' \subset V$ e $W' \subset W$. Começaremos desenvolvendo um método para construir uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ cujo núcleo é V' e cuja imagem é W' . Para começar, isto só é possível se

$$(74) \quad \dim(V) = \dim(V') + \dim(W'),$$

para que os dados sejam compatíveis com o *teorema do núcleo e da imagem*. Supondo que esta condição é satisfeita, podemos escolher uma base B' de V' e, usando a proposição 2.9, acrescentar-lhe vetores de modo a obter uma base B de V . Neste caso

$$B = B' \cup C,$$

em que C é o conjunto que contém os vetores acrescentados a B' para completar a base. Note que, combinando (74) a

$$|B| = \dim(V) = |B'| + |C| = \dim(V') + |C|$$

podemos concluir que $|C| = \dim(W')$. Isto nos permite definir T enviando

- todos os vetores de B' em *zero*;
- cada vetor de C em um vetor de uma base de W' .

Por exemplo, digamos que queremos construir um operador linear T do \mathbb{R}^4 cujo núcleo é o plano S gerado pelos vetores $(1, 1, 0, 0)$ e $(1, 0, 1, 1)$ e cuja imagem é o complemento ortogonal deste plano. Para obter o complemento ortogonal, completamos a base $\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1)\}$ de S para a base

$$\{[1, 1, 0, 0]^t, [1, 0, 1, 1]^t, [0, 0, 1, 0]^t, [0, 0, 0, 1]^t\}$$

de \mathbb{R}^4 e aplicamos Gram-Schmidt, obtendo a base ortonormal β formada pelos vetores

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0), \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, -1, 2, 2), \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-1, 1, 3, -2) \\ \text{e } u_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 0, 1).$$

Como

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \langle (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1) \rangle$$

temos que $\{u_1, u_2\}$ é base ortonormal de S e S^\perp é gerado por $\langle u_3, u_4 \rangle$. Para definir a transformação T pedida, basta tomar

$$\begin{aligned} T(u_1) &= 0 & T(u_3) &= u_3 \\ T(u_2) &= 0 & T(u_4) &= u_4 \end{aligned}$$

que nos dá a matriz

$$(T)_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por sua vez, as colunas da matriz de mudança de base que transforma coordenadas na base β em coordenadas na base canônica são os vetores de β escritos na base canônica

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{15}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{15}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{15}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} & -\frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Como β é uma base ortonormal, podemos concluir do artigo 3.3 do capítulo 4 que Q é uma matriz ortogonal. Portanto,

$$(T)_\varepsilon = Q(T)_\beta Q^{-1} = Q(T)_\beta Q^t$$

de modo que

$$(T)_\varepsilon = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Outro problema que aparece frequentemente em questões práticas é o seguinte:

dados dois subespaços U e W de um espaço vetorial V , determinar um isomorfismo de V nele próprio que leva U em W .

Note que este problema só tem solução se U e W tiverem a mesma dimensão, porque um isomorfismo preserva todas propriedades algébricas, como é o caso da dimensão. Para resolver o problema, escolhemos uma bases B' para U e B'' para W e completamos ambas de modo a obter bases $B' \cup C'$ e $B'' \cup C''$ para V , em que

$$B' \cap C' = B'' \cap C'' = \emptyset.$$

O isomorfismo desejado pode ser construído levando-se os vetores de B' um a um nos vetores de B'' e fazendo o mesmo entre os vetores de C' e C'' .

Considere, por exemplo, as retas

$$U = \langle [1, 1, 1]^t \rangle \text{ e } W = \langle [0, 1, 1]^t \rangle$$

de \mathbb{R}^3 . Como qualquer vetor na direção de $[1, 1, 1]^t$ gera U , preferimos trocá-lo por

$$\frac{1}{\sqrt{3}}[1, 1, 1]^t$$

na construção da base, porque isto nos permite acrescentar vetores de modo a obter uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 ; por exemplo,

$$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}[1, 1, 1]^t, \frac{1}{\sqrt{2}}[0, 1, -1]^t, \frac{1}{\sqrt{6}}[2, -1, -1]^t \right\}.$$

Procedendo de maneira semelhante para W , podemos escolher a base

$$B'' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}[0, 1, 1]^t, [1, 0, 0]^t, \frac{1}{\sqrt{2}}[0, -1, 1]^t \right\}.$$

O isomorfismo ψ fica então definido por

$$\begin{aligned} \psi[1, 1, 1]^t / \sqrt{3} &= [0, 1, 1]^t \sqrt{2} \\ \psi[0, 1, -1]^t / \sqrt{2} &= [1, 0, 0]^t \\ \psi[2, -1, -1]^t / \sqrt{6} &= [0, -1, 1]^t / \sqrt{2} \end{aligned}$$

donde obtemos a matriz

$$(\psi)_{(B' \cup C'), \varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que pusemos nas colunas as coordenadas dos vetores de B'' relativamente à base canônica, razão pela qual obtivemos

$$(\psi)_{B', \varepsilon}$$

e não

$$(\psi)_{B', B''}$$

como talvez você estivesse esperando. Para obter a matriz $(\psi)_{\varepsilon, \varepsilon}$ precisamos ainda inverter a matriz

$$M = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

para obter a mudança de coordenadas de ε para B' . Como a base é ortonormal, a matriz M é ortogonal e sua inversa é igual à sua transposta, assim

$$(\psi)_{\varepsilon, \varepsilon} = (\psi)_{B', \varepsilon} M^t = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 0 & 6 & -6 \\ 2\sqrt{6} & \sqrt{6}(2 + \sqrt{2}) & \sqrt{6}(2 - \sqrt{2}) \\ 2\sqrt{6} & \sqrt{6}(2 - \sqrt{2}) & \sqrt{6}(2 + \sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

Apesar de termos descrito a solução geral do problema em termos de uma reta, nada nos impede de considerar duas retas, em vez de uma, como origem e alvo da transformação. Adaptando um pouco o problema acima, podemos perguntar qual é o operador linear de \mathbb{R}^3 que leva as retas

$$U_1 = \langle (1, 1, 1) \rangle \text{ e } U_2 = \langle (0, 1, 0) \rangle,$$

respectivamente nas retas

$$W_1 = \langle (0, 1, 1) \rangle \text{ e } W_2 = \langle (1, 0, 0) \rangle.$$

A primeira coisa a observar é que os vetores que definem as retas não são perpendiculares. Em particular, não podemos nos dar ao trabalho de escolher bases ortonormais ao resolver este problema. Mas a única razão para escolher estas bases é que simplificam as contas, nada mais. Como os vetores diretores das retas na partida e na chegada não são colineares, os conjuntos

$$\{(1, 1, 1), (0, 1, 0)\} \text{ e } \{(0, 1, 1), (1, 0, 0)\}$$

são linearmente independentes e podemos completá-los a bases de \mathbb{R}^3 acrescentando um vetor a cada um. Como $(0, 0, 1)$ é independente de ambos os conjuntos, podemos acrescentá-lo a ambos, obtendo as bases

$$B' = \{(0, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\} \text{ e } B'' = \{(0, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}.$$

O isomorfismo ψ fica então definido por

$$\begin{aligned}\psi(1, 1, 1) &= (0, 1, 1) \\ \psi(0, 1, 0) &= (1, 0, 1) \\ \psi(0, 0, 1) &= (0, 0, 1)\end{aligned}$$

donde obtemos a matriz

$$(\psi)_{B', \varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para obter a matriz $(\psi)_{\varepsilon, \varepsilon}$ precisamos ainda inverter a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que muda coordenadas de ε para B' já que, neste exemplo, ela não é ortogonal. Um cálculo fácil mostra que

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde

$$(\psi)_{\varepsilon, \varepsilon} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

que é a matriz da transformação desejada.

3. Método dos mínimos quadrados

Nesta seção veremos como aplicar álgebra linear para resolver o problema de encontrar a função que melhor se adapta a um conjunto de pontos dados. Note que não se trata de interpolação, uma vez que não exigiremos que a curve passe por todos os pontos dados. O que queremos é a curva que melhor aproxima os pontos dados, e as duas geralmente não coincidem. Começamos estudando a imagem de uma transformação linear, que desempenhará papel significativo em nossa solução do problema.

3.1. Imagem de uma transformação linear. Seja $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear. Como qualquer outra aplicação, esta transformação tem uma imagem, definida por

$$\text{Im}(T) = \{Tv \mid v \in \mathbb{R}^m\}.$$

O que torna a imagem de uma transformação linear particularmente interessante é que a linearidade de T faz de $\text{Im}(T)$ um subespaço vetorial. Na verdade isto é consequência do seguinte fato, mais geral, que provaremos a seguir: se U é um subespaço de \mathbb{R}^m e $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear, então $T(U) = \{Tu \mid u \in U\}$ é um subespaço de \mathbb{R}^n .

Para começar, $0 \in T(U)$ uma vez que $0 \in U$ e $T(0) = 0$. Suponha, agora que $u, u' \in U$ e que $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, pela linearidade de T ,

$$(75) \quad T(u) + T(u') = T(u + u') \quad \text{e} \quad \lambda T(u) = T(\lambda u).$$

Como U é um subespaço de \mathbb{R}^m , então

$$u + u' \in U \quad \text{e} \quad \lambda u \in U$$

donde

$$T(u + u') \in T(U) \quad \text{e} \quad T(\lambda u) \in T(U).$$

Combinando isto com (75), concluímos que

$$T(u) + T(u') \in T(U) \quad \text{e} \quad \lambda T(u) \in T(U),$$

o que prova que $T(U)$ é mesmo um subespaço do \mathbb{R}^n .

A linearidade de T também nos permite calcular, facilmente, geradores para $T(U)$ a partir de geradores para U . Digamos, por exemplo, que o subespaço U de \mathbb{R}^m tem geradores u_1, \dots, u_k . Portanto, dado $u \in U$, podemos escrevê-lo na forma

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k$$

para alguma escolha de escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Como $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear, temos

$$T(u) = \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_k T(u_k);$$

donde concluímos que todo elemento de $T(U)$ pode ser escrito como combinação linear de $T(u_1), \dots, T(u_k)$. Resumiremos tudo isto em uma proposição para referência futura.

PROPOSIÇÃO 3.1. *Se $U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ é um subespaço de \mathbb{R}^m e $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear, então*

$$T(U) = \langle T(u_1), \dots, T(u_k) \rangle$$

é um subespaço de \mathbb{R}^n .

Antes de prosseguir, vejamos um exemplo. Seja T a transformação do \mathbb{R}^3 no \mathbb{R}^4 definida pela fórmula

$$T(x, y, z) = [x, x + y, x + z, z + y]^t.$$

Como \mathbb{R}^3 é gerado pelos vetores e_1 , e_2 e e_3 , a proposição 3.1 nos permite concluir que

$$\text{Im}(T) = T(\mathbb{R}^3)$$

é gerado pelas imagens destes vetores por T , que são, respectivamente,

$$[1, 1, 1, 0]^t, [0, 1, 0, 1]^t \text{ e } [0, 0, 1, 1]^t.$$

Por outro lado, a reta r de vetor diretor $[1, 1, 1]^t$ tem por imagem

$$T(r) = \langle [1, 2, 2, 2]^t \rangle.$$

Já calcular a imagem do plano U ortogonal à reta r dá mais trabalho. A equação deste plano é dada por

$$0 = \langle [x, y, z]^t \mid [1, 1, 1]^t \rangle = x + y + z;$$

de modo que qualquer vetor $[x, y, z]^t$ de U tem que satisfazer

$$[x, y, z]^t = [-y - z, y, z]^t = y[-1, 1, 0]^t + z[-1, 0, 1]^t.$$

Portanto,

$$U = \langle [-1, 1, 0]^t, [-1, 0, 1]^t \rangle.$$

Calculando a imagem destes vetores por T , concluímos que

$$T(U) = \langle [-1, 0, -1, 1]^t, [-1, -1, 0, 1]^t \rangle.$$

Observe que, apesar de r ser perpendicular a U , não é verdade que $T(r)$ é perpendicular a $T(U)$. Para ver isto basta calcular o produto interno entre o gerador de $T(r)$ e o primeiro dos geradores de $T(U)$, que dá

$$\langle [1, 2, 2, 2]^t \mid [-1, 0, -1, 1]^t \rangle = -1,$$

e não zero como seria o caso se $T(r)$ e $T(U)$ fossem ortogonais. No artigo 2.1 veremos que há transformações lineares que preservam perpendicularidade e que, por isso, têm propriedades extremamente especiais.

3.2. Motivação. O problema dos mínimos quadrados foi originalmente estudado por Legendre e Gauss como uma maneira de determinar a função polinomial que melhor se adapta a um dado conjunto de pontos obtidos como resultados de uma série de medições de alguma magnitude física. A primeira impressão é que a melhor maneira de resolver o problema é por interpolação. Entretanto, os resultados de uma medição nunca são exatos, de modo que a função que representa a solução correta do problema passará próxima, mas não exatamente nos pontos dados. Isto significa que o método de interpolação não produz necessariamente a melhor solução do problema, que consistiria na curva que *melhor se adapta* aos pontos dados, ainda que não passe exatamente sobre estes pontos.

Gauss e Legendre propuseram, independentemente, que a curva polinomial $y = f(x)$ que melhor se adapta aos pontos

$$\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$$

do \mathbb{R}^2 é aquela que corresponde ao polinômio f que minimiza o número

$$(76) \quad |f(x_1) - y_1|^2 + \cdots + |f(x_n) - y_n|^2.$$

Uma vantagem adicional deste método é que o polinômio escolhido terá grau $m = n - 1$, ao passo que o polinômio usado na interpolação tem que ter grau maior que $n - 1$. A soma (76) pode ser escrita de maneira compacta usando-se a matriz de Vandermonde V construída a partir das abscissas dos n pontos dados por

$$V(i, j) = x_{i-1}^j.$$

Como o polinômio f terá grau $n - 1$, seu vetor de coeficientes será

$$\underline{a} = [a_0, \dots, a_{n-1}]^t.$$

Denotando por Y o vetor das ordenadas dos n pontos dados, a soma (76) equivale a tomar a norma euclidiana do vetor $V\underline{a} - Y$. Isto significa que o problema que queremos resolver é um caso especial do seguinte

dados um vetor b e uma transformação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $m \leq n$,
determine um vetor u tal que a norma $\|b - Tu\|$ é a menor possível.

De fato, em nosso caso, $b = Y$, $u = \underline{a}$ e T é a transformação de \mathbb{R}^{n-1} em \mathbb{R}^n definida por $T(w) = Vw$.

Observe que este problema só faz sentido se T não for inversível, do contrário $b \in \text{Im}(T)$ e $u = T^{-1}(b)$, de modo que a distância mínima seria zero. De agora em diante suporemos sempre que T não é inversível e que $b \notin \text{Im}(T)$. Por outro lado, como $Tu \in \text{Im}(T)$, o número $\|b - Tu\|$ corresponde à menor distância possível entre b e a imagem de T . Isto nos permite resolver o problema em duas etapas:

Primeira etapa: determine o vetor $y \in \text{Im}(T)$ para o qual $\|b - y\|$ é mínima;

Segunda etapa: determine um vetor $u \in \mathbb{R}^m$ tal que $y = T(u)$.

3.3. Análise da primeira etapa. Seja T um operador de \mathbb{R}^2 cuja imagem é uma reta. Uma figura simples mostra que a distância mínima entre $b \in \mathbb{R}^2 \setminus \text{Im}(T)$ e a imagem de T é realizada pela projeção ortogonal de b em $\text{Im}(T)$. Na verdade, o mesmo vale para qualquer transformação T de \mathbb{R}^m em \mathbb{R}^n e qualquer ponto $b \in \mathbb{R}^n$ que não pertence à imagem de T . Para entender provar isto basta mostrar o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 3.2. *O menor valor de $\|b - T(v)\|$ é atingido quando $b - Tv$ é perpendicular à imagem de T .*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que v foi escolhido de maneira que $b - Tv$ é ortogonal a $\text{Im}(T)$ e seja w um vetor qualquer do \mathbb{R}^n . Se $e = v - w$, temos que

$$\|b - Tw\| = \langle b - Tw | b - Tw \rangle = \langle (b - Tv) + Te | (b - Tv) + Te \rangle$$

que, pelas propriedades do produto interno é igual a

$$\langle b - Tv | (b - Tv) \rangle + 2\langle b - Tv | Te \rangle + \langle Te | Te \rangle.$$

Portanto, mostramos que

$$\|b - Tw\| = \|b - Tv\| + 2\langle b - Tv | Te \rangle + \|Te\|.$$

Como $b - Tv$ é perpendicular aos vetores da imagem de T , segue-se que

$$\langle b - Tv | Te \rangle = 0,$$

donde

$$\|b - Tw\| = \|b - Tv\| + \|Te\|.$$

Como $\|Te\| \geq 0$, podemos concluir que

$$\|b - Tw\| \geq \|b - Tv\|,$$

como queríamos mostrar. \square

Resta-nos descobrir como calcular v de modo que $r = b - Tv$ seja ortogonal à imagem de T . Mas, denotando por A a matriz de T , temos que

$$r^t(Av) = \langle r | T(v) \rangle = 0 \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^m.$$

Contudo,

$$r^t(Av) = (A^t r)^t v;$$

o que nos permite reformular a perpendicularidade desejada como

$$(A^t r)^t v = 0 \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^m.$$

Entretanto, as propriedades do produto interno nos garantem que isto só pode acontecer se $A^t r$ for, ele próprio, nulo. Portanto,

$$\begin{aligned} r = b - Tv \text{ é ortogonal a todos os vetores de } \text{Im}(T) \text{ se, e somente se,} \\ A^t r = 0. \end{aligned}$$

Mas isto significa que podemos calcular r resolvendo o sistema homogêneo $A^t r = 0$. Uma vez calculado r , v é obtido resolvendo-se o sistema linear $r = b - Av$.

3.4. A segunda etapa e a conclusão. Tendo mostrado como a projeção ortogonal w de b sobre $\text{Im}(T)$ pode ser calculada, resta-nos explicar como determinar um vetor u tal que $w = T(u)$, resolvendo assim o problema posto no início da seção. Para começar, combinando $Au = w$ com $A^t(w - b) = 0$, temos que

$$A^t(Au - b) = 0;$$

donde

$$(77) \quad A^t Au = A^t b;$$

que é conhecida como *equação normal* do problema. Para resolvê-la, podemos usar qualquer método de solução de sistemas lineares. Na verdade, Gauss introduziu sua versão do método de eliminação em grande parte para resolver sistemas decorrentes da aplicação do método dos mínimos quadrados.

Reunindo todas as peças do quebra-cabeças anteriormente montado, temos o seguinte algoritmo capaz de resolver o problema posto no início da seção.

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS. *Sejam $m \leq n$ números inteiros positivos, A uma matriz $n \times m$ e b um vetor do \mathbb{R}^n que não pertence à imagem de A . O vetor u que minimiza a norma euclidiana $\|Au - b\|$ é o vetor solução do sistema $A^t Au = A^t b$.*

A eliminação gaussiana é apenas uma das maneiras pelas quais podemos resolver um problema de mínimos quadrados. Afinal, para resolver a equação normal (77) basta termos uma decomposição bem comportada da matriz $A^t A$. Contudo, como

$$(A^t A)^t = A^t (A^t)^t = A^t A,$$

trata-se um sistema cuja matriz é simétrica e, para estas matrizes, há métodos de resolução mais rápidos e eficientes do que a eliminação gaussiana; por exemplo, aqueles que usam a *decomposição de Cholesky* de uma matriz.

Exercícios

- Escreva a matriz correspondente a cada uma das transformações lineares dadas abaixo:
 - $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z, w) = [x - y + z - w, x + y, 3z - 3w]^t$;
 - $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $T(x, y, z) = [x + y - z, x - y - 3z, x - 2z, y + z]^t$;
 - $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $T(x, y, z, w) = [x + y, x, -x + y, x + y]^t$;
 - $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = [x - y, x + y, x + y]^t$;
 - $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $T(x, y, z, w) = [x - y, z - w, x - y, z + w]^t$.
- Escreva a matriz correspondente a cada uma das transformações lineares descritas abaixo:
 - a projeção do \mathbb{R}^5 no hiperplano definido por $x - y - z + 2w + 5t = 0$;
 - a reflexão do \mathbb{R}^3 cujo espelho é o plano de equação $x - 3y - 2z = 0$;
 - a rotação do \mathbb{R}^3 de eixo $(1, 1, 1)$ por um ângulo de $\pi/3$ radianos, no sentido definido pela regra da mão direita tomando-se v no sentido do polegar.
- Determine uma base e a dimensão da imagem e do núcleo de cada uma das transformações lineares dadas abaixo:
 - $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z, w) = [x - y + z - w, x + y, 3z - 3w]^t$;
 - $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $T(x, y, z) = [x + y - z, x - y - 3z, x - 2z, y + z]^t$;
 - $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $T(x, y, z, w) = [x + y, x, -x + y, x + y]^t$;
 - $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = [x - y, x + y, x + y]^t$;

(e) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $T(x, y, z, w) = [x - y, z - w, x - y, z + w]^t$.

4. Determine o núcleo e a imagem de uma rotação e de uma reflexão no plano.
5. Sejam B_1 e B_2 bases do \mathbb{R}^n e denote, respectivamente, por M_1 e M_2 as matrizes que mudam coordenadas nas bases B_1 e B_2 em coordenadas na base canônica. Mostre que: a matriz que muda coordenadas na base B_1 em coordenadas na base B_2 é igual a $M_2^{-1}M_1$.
6. Sejam B_1 e B_2 bases, respectivamente, do \mathbb{R}^m e do \mathbb{R}^n . Mostre que se T é uma transformação linear de \mathbb{R}^m em \mathbb{R}^n , então a j -ésima coluna da matriz $(T)_{B_1B_2}$ definida por

$$(T)_{B_1B_2}(v)_{B_1} = (Tv)_{B_2}$$

é igual $(Tv_j)_{B_2}$, em que v_j é o j -ésimo vetor da base B_1 .

7. Sejam B_1 e B_2 bases, respectivamente, do \mathbb{R}^m e do \mathbb{R}^n e denote por M_1 e M_2 as matrizes que mudam coordenadas nas bases B_1 e B_2 em coordenadas na base canônica. Mostre que se T é uma transformação linear de \mathbb{R}^m em \mathbb{R}^n , então matriz $(T)_{B_1B_2}$ definida no exercício anterior satisfaz

$$M_2(T)_{B_1B_2}M_1^{-1} = (T)_\varepsilon.$$

8. Considere as seguintes bases de \mathbb{R}^2 :

$$B_1 = \{[1, 1]^t, [-1, 1]^t\} \text{ e } B_2 = \{[2, 1]^t, [1, -2]^t\},$$

além da base canônica ε . Determine:

- (a) as coordenadas de $(2, 3)$ em relação à base B_1 ;
 (b) as matrizes de mudança de base $(I)_{B_1\varepsilon}$, $(I)_{\varepsilon B_1}$, $(I)_{B_2\varepsilon}$ e $(I)_{\varepsilon B_2}$;
 (c) as coordenadas do vetor $(v)_{B_2} = (0, 2)$ relativamente às bases ε e B_1 .
9. Seja $B_1 = \{[1, 3]^t, [2, 4]^t\}$. Determine B_2 , sabendo-se que é uma base de \mathbb{R}^2 e que a matriz de mudança de base

$$(I)_{B_1B_2} = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ -11 & 8 \end{bmatrix}$$

10. Seja

$$B = \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]^t, \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]^t \right\}$$

uma base de \mathbb{R}^2 e x' e y' os eixos correspondentes aos vetores de B .

- (a) Mostre que a matriz de mudança de base $(I)_{B\varepsilon}$ é ortogonal.
 (b) Determine o ângulo entre o primeiro vetor da base B e o vetor $e_1 = (1, 0)$.
 (c) Esboce a posição dos eixos x' e y' relativamente a x e y .

- (d) Determine as equações da reta $x + y = 2$ e da hipérbole $xy = 2$ na base B
- (e) Determine a equação da parábola $y' = (x')^2$ relativamente à base canônica e esboce seu gráfico.

11. Seja $B = \{[1, 0, 1]^t, [0, 1, 1]^t, [-1, 1, -1]^t\}$ uma base de \mathbb{R}^3 . Determine:
- (a) as matrizes de mudança de base $(I)_{B\varepsilon}$ e $(I)_{\varepsilon B}$;
 - (b) a equação cartesiana, em relação às coordenadas na base B , do plano gerado pelos vetores $[1, 0, 1]^t$ e $[0, 1, 1]^t$.

12. Seja $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de \mathbb{R}^n e considere o conjunto

$$B' = \{v_1 - v_2, v_1 - v_3, \dots, v_1 - v_n, v_1 + v_2 + \dots + v_n\}.$$

- (a) Mostre que B' também é uma base de \mathbb{R}^n .
- (b) Calcule a matriz de mudança de base de B para B' .

13. Determine a matriz de cada um dos operadores lineares de \mathbb{R}^2 relacionados abaixo na base canônica e na base $B = \{(1, 1), (1, 2)\}$:

- (a) $T(x, y) = [3x + 4y, 8x - y]^t$;
- (b) $T(v_1) = 3v_1 + 8v_2$ e $T(v_2) = 9v_1 - 6v_2$;
- (c) $T(v_1) = v_2$ e $T(v_2) = -v_1$.

14. Considere a seguinte base de \mathbb{R}^3 :

$$B = \{[1, 1, 1]^t, [1, 1, 0]^t, [1, 0, -1]^t\}.$$

Para cada uma das transformações lineares T dadas abaixo determine as matrizes $(T)_{B\varepsilon}$, $(T)_{\varepsilon B}$, $(T)_{\varepsilon\varepsilon}$ e $(T)_{BB}$:

- (a) $T(x, y, z) = [2x + 3y, z, 7x - z]^t$;
- (b) $T(x, y, z) = [4x + 2y + 6z, y + z, 3x - z]^t$;
- (c) $T(v_1) = v_1 + 4v_2 - v_3$, $T(v_2) = 2v_1 - v_3$ e $T(v_3) = 8v_2 + 5v_3$;
- (d) $T(v_1 - v_2 - v_3) = v_1 + v_2$, $T(v_2 + v_3) = v_3$ e $T(v_3) = 8v_2 + 5v_3$;
- (e) $T(v_1) = [1, 2, 0]$, $T(v_2) = [1, 0, 1]$ e $T(v_3) = [1, -1, 1]$;
- (f) $T(1, 1, -1) = v_1 + v_2$, $T(-1, 1, 1) = v_2 - v_3$ e $T(1, 0, 1) = v_1 - v_3$;
- (g) $T(v_1) = 2v_1$, $T(v_2) = 5v_2$ e $T(v_3) = -8v_3$.

15. Seja T uma transformação linear de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^2 que satisfaz

$$T(1, 0, 0) = [2, 0]^t, \quad T(0, 1, 0) = (1, 1) \text{ e } T(0, 0, 1) = [1, -1]^t.$$

- (a) Determine $T(x, y, z)$.
- (b) Encontre um vetor $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (3, 2)$.
- (c) O vetor v encontrado em (b) é único? Justifique sua resposta.

16. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que satisfaça

$$T(1, 2, -1) = [1, 0]^t \text{ e } T(2, 1, 4) = [0, 1]^t.$$

Mostre que existem muitas transformações lineares que satisfazem estas restrições, mas que para todas elas a imagem de $[1, 1, 1]^t$ é a mesma. Justifique sua resposta.

17. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear para a qual

$$T(1, 1, 2) = [1, 1]^t, \quad T(0, 1, 0) = [0, -2]^t \text{ e } T(0, 1, 1) = [0, 0]^t.$$

Determine:

- (a) $T(x, y, z)$;
- (b) uma transformação linear S de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^3 tal que $S(1, 1) = [1, 1, 2]^t$ e $S(0, -2) = [0, 1, 0]^t$;
- (c) a transformação composta $S \circ T$.

18. O operador linear T de \mathbb{R}^3 definido por

$$T(x, y, z) = [3x, x - y, 2x + y - z]^t$$

é inversível? Em caso afirmativo, calcule a matriz na base canônica de T^{-1} e determine $T^{-1}(x, y, z)$.

19. Considere os operadores $D(\alpha, \beta)$ e $S(\gamma)$ de \mathbb{R}^2 cujas matrizes relativas à base canônica são

$$D(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \text{ e } S(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Prove que, dado um operador linear T de \mathbb{R}^2 , podemos determinar números reais α, β, γ e θ de modo que a matriz de T na base canônica pode ser escrita como um produto $\rho_\theta D(\alpha, \beta) S(\gamma)$, em que ρ_θ denota a rotação anti-horária de ângulo θ .

20. Dê exemplo de um operador linear T de \mathbb{R}^3 cuja imagem seja gerada por $[1, 0, 1]^t$ e $[1, 2, 2]^t$.
21. Dê exemplo de um operador linear T de \mathbb{R}^3 cujo núcleo seja a reta $\langle [1, -1, 1]^t \rangle$.
22. Dê exemplo de um operador linear T de \mathbb{R}^3 cujo núcleo seja gerado por $[1, -1, 1]^t$ e cuja imagem seja gerada por $[1, 0, 1]^t$ e $[1, 2, 2]^t$.
23. Dê exemplo de uma transformação linear T de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^4 cuja imagem seja gerada por $[1, 2, 0, -4]^t$ e $[2, 0, -1, -3]^t$. Qual o núcleo do seu exemplo?
24. Dê exemplo uma transformação linear T de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^4 cuja imagem seja gerada seja o plano de equações $x - y + z = y - w = 0$ e cujo núcleo seja a reta de equações $x - y + z = y - z = 0$.

25. Dê exemplo uma transformação linear T de \mathbb{R}^4 em \mathbb{R}^3 cuja imagem seja gerada seja o plano de equação $x - y + z = 0$ e cujo núcleo seja o plano gerador pelos vetores $[1, 0, 1, 1]^t$ e $[0, 1, -1, 1]^t$.
26. Para cada um dos itens abaixo, determine um operador linear *injetivo* de \mathbb{R}^3 que faz o que se pede:
- (a) leva a reta $y - 3x = z = 0$ na reta $y - x = z = 0$;
 - (b) leva o plano $x + y - z = 0$ no plano $z = 0$;
 - (c) leva o plano $x - z = 0$ no plano $y = 0$;
 - (d) leva o plano $x + y + z = 0$ na reta $x - y = z = 0$;
 - (e) leva a reta $y - 3x = z = 0$ no plano $y - x = 0$.
27. Dê exemplo de uma transformação linear de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^4 que aplica o plano $x + y - z = 0$ no plano $x - y = z - w = 0$.
28. Dê exemplo de um operador linear injetivo de \mathbb{R}^3 que aplica o plano $x - y - z = 0$ no plano $2x + y - z = 0$.
29. Seja T um operador de \mathbb{R}^2 cuja imagem está contida em seu núcleo. Mostre que existe uma base B de \mathbb{R}^2 relativamente à qual a matriz de T é da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ para algum número real } \gamma.$$

30. Seja S o subespaço do \mathbb{R}^3 gerado pelos vetores $[1, 0, 0]^t$, $[0, 1, 1]^t$ e $[1, -1, -1]^t$.
- (a) Determine o complemento ortogonal S^\perp de S .
 - (b) Dê exemplo de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que tem S como imagem e S^\perp como núcleo.
31. Seja T a reflexão do \mathbb{R}^3 através do plano $x + y = 0$.
- (a) Encontre uma base ortonormal B relativa à qual T é diagonal.
 - (b) Calcule a matriz de T na base canônica.
32. Seja P a projeção ortogonal do \mathbb{R}^3 sobre o plano $3x + y - z = 0$.
- (a) Determine o núcleo e a imagem de P .
 - (b) Determine uma base ortonormal B relativa à qual a matriz de P é $\text{diag}(1, 1, 0)$.
 - (c) Determine $(Pv)_B$ para os vetores cujas coordenadas relativamente à base canônica são $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(1, 1, 0)$.
 - (d) Esboce o desenho, no plano $3x + y - z = 0$ da projeção do quadrado cujos vértices são $A = [0, 0, 0]^t$, $B = [1, 0, 0]^t$, $C = [0, 1, 0]^t$ e $D = [1, 1, 0]^t$.
33. Seja P a projeção ortogonal do \mathbb{R}^3 ao longo do vetor $v = (1, 1, 1)$.
- (a) Determine o núcleo e a imagem de P .
 - (b) Determine uma base ortonormal B relativa à qual a matriz de P é $\text{diag}(1, 1, 0)$.

- (c) Determine $(Pv)_B$ para os vetores cujas coordenadas relativamente à base canônica são $[1, 0, 0]^t$, $[0, 0, 1]^t$, $[0, 1, 0]^t$, $[0, 1, 1]^t$, $[1, 0, 1]^t$, $[1, 1, 0]^t$ e $[1, 1, 1]^t$.
- (d) Esboce o desenho, no plano de projeção de P , do cubo cujos vértices são os pontos acima e a origem.
34. Seja P a projeção do \mathbb{R}^4 ao longo do vetor $[1, 1, 1, 1]^t$. Determine as coordenadas de $[x, y, z, w]^t$ numa base B relativamente à qual a matriz de P é $\text{diag}(1, 1, 1, 0)$.
35. Determine a matriz na base canônica da rotação de $\pi/6$ radianos em torno do eixo $y = x$ e $z = 0$.

CAPÍTULO 6

Diagonalização de operadores

Neste capítulo veremos que, para alguns operadores lineares muito importantes, uma escolha criteriosa da base nos permite obter a matriz do operador em forma diagonal, o que reduz em muito os custos de alguns cálculos com esta matriz, como é o caso da potenciação. Entre as aplicações incluem-se a caracterização das rotações em três e quatro dimensões e a descrição do algoritmo que deu origem ao mecanismo de busca utilizado pelo Google.

1. Autovalores e autovetores

Calcular com matrizes diagonais é extremamente fácil. Por isso é conveniente descobrir se um dado operador linear admite uma base relativamente à qual sua matriz é diagonal. Tais operadores são chamados *diagonalizáveis*. Infelizmente nem todo operador linear é diagonalizável. Como veremos no artigo 1.2, o operador cuja matriz na base canônica é igual a

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

não pode ser diagonalizado, apesar de ser extremamente simples. Portanto, a pergunta que discutiremos nesta seção é a seguinte:

dado um operador T , em um espaço vetorial de dimensão finita V , como determinar se existe uma base B de V relativa à qual a matriz de T é diagonal?

1.1. Definições e primeiros exemplos. Seja T um operador linear em um espaço vetorial de dimensão finita V . Suponhamos, para começar, que exista uma base B de V para a qual

$$(T)_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Isto significa que se

$$B = \{v_1, \dots, v_n\},$$

então

$$T(v_j) = \lambda_j v_j \text{ para todo } 1 \leq j \leq n.$$

Como você deve lembrar, encontramos equações como estas quando estudamos a diagonalização de formas quadráticas no artigo 3.5. Como no caso bidimensional, se $T(v) = \lambda v$ para algum vetor não nulo $v \in V$ e algum escalar λ , diremos que v é um *autovetor* de T associado ao *autovalor* λ . Observe que um autovetor *não pode ser nulo*.

Fixando um autovalor λ do operador T , podemos considerar o conjunto de todos os autovetores associados a λ . Este conjunto não pode ser um subespaço de V porque não contém o vetor zero que, por definição, não é um autovetor. Entretanto, basta acrescentá-lo para termos um subespaço. De maneira geral, se λ é um escalar qualquer, então

$$V_\lambda = \{v \in V \mid Tv = \lambda v\}$$

é um subespaço de V , como é facilmente verificado. Este espaço será diferente de zero exatamente quando λ for um autovalor de T . Neste caso diremos que V_λ é o *autoespaço* de T associado ao autovalor λ .

Voltando à questão posta no início da seção, definimos um operador como sendo diagonalizável se sua matriz em uma base adequada B é diagonal. Portanto, se a base for

$$B = \{v_1, \dots, v_n\},$$

então para que $(T)_B$ seja diagonal, devemos ter que

$$(78) \quad T(v_i) = \lambda_i v_i \text{ para todo } 1 \leq i \leq n.$$

Com isto podemos caracterizar a diagonalizabilidade de um operador da seguinte maneira.

PROPOSIÇÃO 1.1. *Um operador T de um espaço vetorial V de dimensão finita é diagonalizável se, e somente se, V admite uma base formada apenas por autovetores de T .*

Observe que em (78) não estamos supondo que os λ 's sejam todos distintos. Na verdade, nada impede que sejam todos iguais.

Vejam alguns exemplos. Se T é um operador linear não injetivo, então todos os vetores *não nulos* de $N(T)$ são autovetores associados ao autovalor zero. Isto é, $N(T) = V_0$. Um caso particular deste exemplo é dado pelas projeções ortogonais sobre um hiperplano H do \mathbb{R}^n . Neste caso, os múltiplos do vetor normal a H constituem V_0 . Como os elementos de H são levados neles próprios pela projeção, temos que $V_1 = H$.

As rotações no plano oferecem outra classe interessante de exemplos. Se o ângulo de rotação θ não for múltiplo inteiro de π , então a rotação não admite nenhum autovalor e, portanto, nenhum autovetor. Se $\theta = k\pi$, para algum inteiro k , então

- $V_1 = \mathbb{R}^2$ se k for par;
- $V_{-1} = \mathbb{R}^2$ se k for ímpar.

Já as reflexões do plano sempre têm dois autovalores distintos, 1 e -1 , de modo que

- V_1 é o hiperplano de reflexão ou espelho;
- V_{-1} é a reta normal ao espelho.

Nestes casos a interpretação geométrica dos operadores nos ajudou a encontrar exemplos (ou não) de autovalores e autovetores. Mas como proceder no caso geral? Para tratar deste problema da maneira mais realista possível, suporemos que a matriz de um operador T relativa a uma base B é conhecida e tentaremos descobrir como calcular seus autovalores e autovetores. Para simplificar a notação, seja A esta matriz. Se v for um autovetor de T associado ao autovalor λ , então

$$A(v)_B = \lambda(v)_B.$$

Denotando por I a matriz identidade de mesmo tamanho que A , podemos reescrever esta equação na forma

$$(A - \lambda I)(v)_B = 0.$$

Como a definição de autovetor requer que $v \neq 0$, a equação anterior implica que o sistema definido pela matriz $A - \lambda I$ tem que ser indeterminado. Portanto, esta matriz terá, necessariamente, determinante zero quando λ for um dos seus autovalores. Contudo, $\det(A - \lambda I)$ é uma expressão polinomial em λ . Em outras palavras, se t for uma variável, então os autovalores de A serão raízes do polinômio

$$p_A(t) = \det(A - tI);$$

que, como no caso bidimensional estudado no artigo 3.5, este é o *polinômio característico* de A .

Por exemplo, uma rotação de ângulo θ no plano, tem por matriz

$$(\rho_\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix};$$

de modo que, para calcular seus autovalores basta determinar o polinômio característico

$$p(t) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) - t & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) - t \end{bmatrix} = t^2 - 2\cos(\theta)t + 1$$

Como este polinômio quadrático tem discriminante igual a

$$4(\cos(\theta)^2 - 1) \leq 0;$$

só existem autovalores (reais) quando $\cos(\theta) = \pm 1$; que corresponde a dizer que $\theta = k\pi$, como já havíamos determinado a partir da geometria do problema.

Finalmente, devemos considerar como definir de maneira puramente matricial o que significa dizer que um operador é diagonalizável. Mas, se B é uma base para a qual a matriz $(T)_B$ é diagonal, então

$$M(T)_\varepsilon M^{-1} = (T)_B \text{ é diagonal,}$$

em que M é a matriz que muda coordenadas na base B em coordenadas na base ε . Portanto,

uma matriz quadrada A é diagonalizável se existe uma matriz inversível M tal que MAM^{-1} é uma matriz diagonal.

1.2. Mais exemplos. Nosso próximo exemplo diz respeito ao operador T de \mathbb{R}^3 cuja matriz na base canônica é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico será

$$p_A(t) = \det A = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 2 \\ -1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & 2-t \end{vmatrix} = -t^3 + 3t^2 + t - 3$$

cujas raízes são -1 , 1 e 3 . Portanto, T admite três autovalores distintos. Para descobrir os autovetores associados a -1 , devemos resolver o sistema homogêneo $(A - (-1)I)X = 0$ cuja matriz é

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Aplicando eliminação gaussiana a esta matriz, e simplificando o resultado, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que corresponde ao sistema linear

$$\begin{aligned} x + z &= 0 \\ y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

cujas soluções são dadas por

$$(x, y, z) = (-z, -2z, z) = z(-1, -2, 1).$$

Logo, os autovetores de A associados ao autovalor -1 são os múltiplos não nulos de $(-1, -2, 1)$. Portanto, o autoespaço associado a -1 é

$$V_{(-1)} = \langle (-1, -2, 1) \rangle.$$

Cálculos semelhantes mostram que

$$V_1 = \langle (1, -1, 0) \rangle \text{ e } V_3 = \langle (1, 0, 1) \rangle.$$

Como o conjunto

$$B = \{(-1, -2, 1), (1, -1, 0), (1, 0, 1)\},$$

é linearmente independente, podemos concluir que o operador T é diagonalizável e que

$$(T)_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

É hora de voltar à matriz

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que, no começo da seção, afirmamos não poder ser diagonalizada. De fato, como o polinômio característico desta matriz é igual a

$$\det \begin{bmatrix} 1-t & 1 \\ 0 & 1-t \end{bmatrix} = (1-t)^2,$$

então J tem 1 como seu único autovalor. Os autovetores associados a este autovalor são facilmente calculados resolvendo o sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cujas soluções são todas múltiplos de $[1, 0]^t$. Portanto, J não admite dois autovetores independentes, o que significa que não pode ser diagonalizado.

Finalmente, um exemplo mais geral e muito importante em aplicações. Seja E uma matriz que não tem entradas negativas. Diremos que E é *estocástica por linhas* se a soma das entradas de cada uma de suas linhas é sempre iguais a um. Uma matriz é *estocástica por colunas* se sua transposta é estocástica por linhas.

Seja, pois, E uma matriz estocástica por linhas de tamanho $n \times n$. Se

$$u = e_1 + \cdots + e_n = (1, 1, \dots, 1),$$

então $Eu = u$; de modo que u é um autovetor associado ao autovalor um. Mas os autovalores de uma matriz A são os mesmos de sua transposta, pois

$$\det(A - sI) = \det((A - sI)^t) = \det(A^t - sI).$$

Logo, toda matriz estocástica por colunas também tem 1 como autovalor, ainda que não possamos identificar facilmente seus autovetores. Resumindo:

toda matriz estocástica (por linhas ou por colunas) tem 1 como um de seus autovalores.

Veremos aplicações de matrizes estocásticas na seção 4.

1.3. Uma proposição útil. Para poder afirmar que o operador do último exemplo do artigo acima era diagonalizável precisamos verificar (ainda que não tenhamos efetuado os cálculos) que os autovetores que determinamos eram linearmente independentes, do contrário não teríamos uma base. A proposição que provaremos neste artigo significa que nunca mais teremos que fazer isto.

PROPOSIÇÃO 1.2. *Autovetores associados a autovalores distintos têm que ser linearmente independentes.*

Para provar isto, consideremos um operador linear T de um espaço vetorial de dimensão finita V . Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ autovalores *distintos* de T e v_1, \dots, v_m autovetores associados a cada um destes autovalores. Provaremos por indução em j que o conjunto

$$C_j = \{v_1, \dots, v_j\}$$

é linearmente independente. Como autovetores têm que ser não nulos, $C_1 = \{v_1\}$ tem que ser linearmente independente, o que prova a base da indução. Suponha, agora, que C_j é linearmente independente. Usaremos isto para provar que C_{j+1} também é. Digamos que

$$(79) \quad a_1 v_1 + \dots + a_{j+1} v_{j+1} = 0.$$

Calculando a imagem deste vetor por T temos que

$$a_1 T(v_1) + \dots + a_{j+1} T(v_{j+1}) = 0.$$

Por outro lado, como v_i é autovetor associado a λ_i ,

$$0 = a_1 T(v_1) + \dots + a_{j+1} T(v_{j+1}) = a_1 \lambda_1 v_1 + \dots + a_{j+1} \lambda_{j+1} v_{j+1}.$$

Logo,

$$0 = \lambda_{j+1}(a_1 v_1 + \dots + a_{j+1} v_{j+1}) - (a_1 \lambda_1 v_1 + \dots + a_{j+1} \lambda_{j+1} v_{j+1});$$

isto é,

$$a_1(\lambda_{j+1} - \lambda_1)v_1 + \dots + a_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j)v_j = 0.$$

Aplicando a hipótese de indução, podemos concluir que os coeficientes desta combinação linear têm que ser nulos; donde

$$a_1(\lambda_{j+1} - \lambda_1) = \dots = a_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j) = 0.$$

Como os λ 's são todos distintos,

$$\lambda_{j+1} - \lambda_i \neq 0 \text{ para todo } 1 \leq i \leq j.$$

Logo,

$$a_1 = \cdots = a_j = 0.$$

Substituindo isto em (79), resta apenas $a_{j+1}v_{j+1} = 0$. Como $v_{j+1} \neq 0$, temos também que $a_{j+1} = 0$. Logo, v_1, v_2, \dots, v_{j+1} são linearmente independentes. O resultado desejado segue pelo princípio de indução finita.

O seguinte corolário é a principal aplicação que faremos desta proposição.

COROLÁRIO 1.3. *Um operador de \mathbb{R}^n que tem n autovalores distintos tem que ser diagonalizável.*

Cada autovalor admite um autovetor associado, que a proposição garante serem linearmente independentes. Temos, assim, n autovetores linearmente independentes em \mathbb{R}^n , de modo que T tem que ser diagonalizável.

2. Rotações

Nesta seção estudaremos as rotações nos espaços vetoriais de dimensões três e quatro e descreveremos a maneira como são construídas.

2.1. Transformações ortogonais. Seja ρ uma rotação de \mathbb{R}^3 . Começamos lembrando que toda rotação tem que ser uma transformação linear que preserva a norma de vetores. Portanto, podemos descrever ρ a partir de sua matriz na base canônica, que chamaremos de Q . Como ρ tem que preservar a norma de um vetor, devemos ter também que

$$\langle \rho(u), \rho(u) \rangle = \langle u, u \rangle;$$

para todo vetor $u \in \mathbb{R}^3$, cuja expressão matricial é

$$(Qu)^t(Qu) = u^t u;$$

donde

$$u^t Q^t Q u = u^t u,$$

que só pode valer para todo $u \in \mathbb{R}^3$ se $Q^t Q = I$. Portanto, *toda rotação é uma transformação linear ortogonal*. Contudo, a recíproca é falsa pois a matriz de uma reflexão também é ortogonal. Isto nos leva à pergunta: *que propriedades nos permitem identificar as rotações dentre as transformações ortogonais?*

A resposta para isto está relacionada à noção de orientação. Dizemos que três vetores não nulos $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ têm *orientação positiva* se w está do mesmo lado do plano $\langle u, v \rangle$ que o produto vetorial $u \times v$; do contrário estes vetores têm orientação negativa. Em outras palavras, vetores orientados positivamente têm a mesma posição relativa que os vetores e_1, e_2, e_3 da base canônica, que satisfazem $e_1 \times e_2 = e_3$. Como as rotações não alteram a posição relativa entre os vetores, podemos afirmar que

as rotações preservam a orientação de qualquer tripla de vetores à qual forem aplicadas.

Podemos traduzir o fato de u, v, w terem orientação positiva em termos do produto interno. Afinal, se dois vetores estão do mesmo lado de um plano que não os contém, então o ângulo entre eles tem que ser agudo. Isto, por sua vez, implica que o produto interno entre estes vetores será necessariamente positivo. Como a recíproca desta afirmação também é verdadeira, obtemos o seguinte resultado.

LEMA 2.1. *Três vetores $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ estão positivamente orientados se, e somente se, $\langle (u \times v) | w \rangle > 0$.*

O número $\langle (u \times v), w \rangle$ é conhecido como o *produto misto* dos vetores u, v, w e denotado por $[u, v, w]$. Combinando o que vimos até aqui, podemos afirmar que

se ρ é uma rotação do \mathbb{R}^3 , então $[\rho(u), \rho(v), \rho(w)] = [u, v, w]$.

Antes de poder aplicar esta propriedade, precisamos de uma maneira de calcular o produto misto a partir das coordenadas dos vetores. Mas, se

$$u = (u_1, u_2, u_3) \text{ e } v = (v_1, v_2, v_3),$$

então, utilizando o determinante formal usual para calcular o produto vetorial, obtemos

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, -u_1v_3 + u_3v_1, u_2v_1 - u_1v_2)$$

de modo que se $w = (w_1, w_2, w_3)$, então

$$[u, v, w] = w_1(u_2v_3 - u_3v_2) - w_2(u_1v_3 - u_3v_1) + w_3(u_2v_1 - u_1v_2);$$

que é igual ao determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ u & v & w \\ | & | & | \end{bmatrix}.$$

Portanto, se Q for a matriz de ρ , então

$$[\rho(u), \rho(v), \rho(w)] = \det \begin{bmatrix} | & | & | \\ Qu & Qv & Qw \\ | & | & | \end{bmatrix}.$$

Contudo, a matriz cujo determinante esta sendo calculado na fórmula acima é igual a QA . Portanto,

$$[\rho(u), \rho(v), \rho(w)] = \det(QA) = \det(Q) \det(A).$$

Como

$$[u, v, w] = \det(A),$$

a transformação ortogonal ρ cuja matriz é Q só pode preservar a orientação dos vetores u, v, w se $\det(Q) > 0$. Como o determinante de uma matriz ortogonal só pode ser 1 ou -1 , podemos ser mais precisos e afirmar que $\det(Q) = 1$. Resumindo, temos a seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 2.2. *Uma matriz 3×3 que corresponde a uma rotação do \mathbb{R}^3 tem que ser ortogonal de determinante um.*

Entretanto, isto ainda não responde à nossa pergunta original, porque não sabemos se toda matriz ortogonal de determinante um é uma rotação. Para poder responder a esta questão investigaremos estas transformações em mais detalhes no próximo artigo. Antes disto, porém, devemos observar que, ao contrário do que ocorre no \mathbb{R}^2 , uma matriz ortogonal 3×3 de determinante -1 não descreve necessariamente uma reflexão. Considere, por exemplo, o operador do \mathbb{R}^3 cuja matriz relativamente à base canônica é

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Como $A^t = A$, temos que

$$AA^t = A^2 = I;$$

de modo que A é uma matriz ortogonal. Por outro lado,

$$\det(A) = (-1)^3 = -1.$$

Contudo esta matriz *não* pode representar uma reflexão, porque, qualquer que seja o vetor $v \in \mathbb{R}^3$, temos $Av = -v$, o que impede que haja um espelho, que seria o plano correspondente ao autoespaço de 1.

2.2. Autovalores de matrizes ortogonais. Seja Q uma matriz ortogonal que, a esta altura, podemos supor que é de tamanho $n \times n$, e seja

$$\det(Q - \lambda I)$$

seu polinômio característico. Como $QQ^t = I$, então

$$\det(Q - \lambda I) = \det(Q - \lambda QQ^t) = \det(Q(I - \lambda Q^t)).$$

Como o determinante de um produto de matrizes é igual ao produto dos determinantes destas matrizes,

$$\det(Q - \lambda I) = \det(Q) \det(I - \lambda Q^t).$$

Supondo que $\det(Q) = 1$ isto se simplifica para

$$\det(Q - \lambda I) = \det(I - \lambda Q^t).$$

Contudo, o determinante da transposta de uma matriz é igual ao determinante da própria matriz, donde

$$\det(Q - \lambda I) = \det((I - \lambda Q^t)^t) = \det(Q) \det(-\lambda Q + I).$$

Mas, para qualquer matriz B de tamanho $n \times n$ e qualquer escalar c , temos que

$$\det(cB) = c^n \det(B);$$

de modo que

$$\det(Q - \lambda I) = (-\lambda)^n \det\left(Q - \frac{1}{\lambda} I\right).$$

Assim, no caso em que n é ímpar $(-\lambda)^n = -\lambda^n$, de modo que

$$(80) \quad \det(Q - \lambda I) = -\lambda^n \det\left(Q - \frac{1}{\lambda} I\right).$$

Fazendo $\lambda = 1$, esta última equação nos dá

$$\det(Q - I) = -\det(Q - I);$$

que só é possível se $\det(Q - I) = 0$; isto é, se 1 é raiz do polinômio característico de Q . Portanto, 1 tem que ser autovalor de Q , o que só pode acontecer se houver um vetor não nulo $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $Qu = u$. Temos, então, uma reta inteira $\langle u \rangle$ cujos vetores não são modificados pela ação de Q . Esta reta é o *eixo* em torno do qual se manifesta a ação de Q . Usando esta nomenclatura, podemos resumir o que fizemos neste artigo de maneira bastante sucinta.

PROPOSIÇÃO 2.3. *Em um espaço de dimensão ímpar, todo operador ortogonal de determinante igual a um tem ao menos um eixo.*

Como 3 é ímpar, podemos deduzir desta proposição que toda rotação do \mathbb{R}^3 admite um eixo.

⚠ É muito importante você observar que a proposição acima se aplica apenas a espaços vetoriais de dimensão *ímpar*. Quando a dimensão do espaço é par, a equação (80) não nos permite concluir nada quando tomamos $\lambda = 1$. Nem isto não é um mero defeito da nossa demonstração. Como veremos no artigo 2.4 uma rotação do \mathbb{R}^4 pode não ter nenhum eixo.

2.3. Caracterizando as rotações em dimensão três. Suponhamos que T seja um operador de \mathbb{R}^3 cuja matriz Q relativamente à base canônica é ortogonal de determinante igual a um. Já sabemos, do artigo anterior, que T tem um como um de seus autovalores. Seja u um autovetor de T associado ao autovalor um. Se v for um vetor ortogonal a u , então

$$\langle Tu | Tv \rangle = (Qu)^t Qv = u^t Q^t Qv.$$

Como Q é ortogonal, $Q^t Q = I$ e obtemos

$$\langle Tu | Tv \rangle = u^t v = \langle u | v \rangle = 0,$$

pois v é ortogonal a u por hipótese. Portanto, *qualquer vetor do plano S ortogonal a u é levado em outro vetor do mesmo plano S* . Em outras palavras, aplicando T apenas aos vetores de S obtemos um operador de S , que denotaremos por $T|_S$. Construímos, então, uma base ortonormal B para \mathbb{R}^3 formada por u , ao qual acrescentamos dois vetores unitários $w_1, w_2 \in S$ que são perpendiculares um ao outro. Como u é autovetor de Q associado ao autovalor um temos que

$$Tu = u,$$

e como T leva vetores de S em outros vetores de S ,

$$Tw_1 = a_1 w_1 + a_2 w_2 \text{ e } Tw_2 = b_1 w_1 + b_2 w_2$$

pois $w_1, w_2 \in S$. Portanto,

$$(T)_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \end{bmatrix}.$$

Denotando por A a matriz 2×2 igual a

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

podemos escrever

$$(T)_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}.$$

Como T é ortogonal,

$$I = (T)_B ((T)_B)^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^t \end{bmatrix}$$

de modo que AA^t tem que ser igual à matriz identidade 2×2 . Por outro lado,

$$1 = \det(T)_B = \det(A)$$

de modo que A é uma matriz 2×2 ortogonal de determinante um. Mas estas matrizes são nossas velhas conhecidas, e já sabemos que podem ser escritas na forma

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

para algum ângulo θ . Portanto, na base

$$B = \{u, w_1, w_2\}$$

a matriz da transformação T será

$$(81) \quad (T)_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Geometricamente isto significa que T tem o autoespaço de um como eixo e efetua uma rotação no plano perpendicular a este eixo. Em outras palavras, T é uma rotação. Isto nos permite enunciar a caracterização das rotações do espaço tridimensional que estávamos procurando.

TEOREMA 2.4. *Um operador de \mathbb{R}^3 é uma rotação se, e somente se, sua matriz na base canônica é ortogonal e tem determinante igual a um.*

Como é fácil de verificar, a mesma afirmação se aplica à matriz de T em qualquer base ortonormal de \mathbb{R}^3 . Entretanto o resultado é falso se a base *não* for ortonormal. Contudo, este teorema não esgota tudo o que aprendemos sobre rotações na argumentação acima. De fato, vimos também que toda rotação de \mathbb{R}^3 :

- tem um eixo;
- efetua uma rotação no plano ortogonal ao eixo.

Estas últimas afirmações são muito úteis na construção de exemplos, como aliás já sabemos desde o artigo 2.2.

Encerraremos nosso estudo das rotações com mais um exemplo. Sendo $u = (1, 1, 1)$ como antes, construiremos a matriz da reflexão R do \mathbb{R}^3 cujo eixo é u , que é dada por

$$R = I - 2uu^t = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como esta é uma matriz ortogonal que não descreve uma rotação, $\det(R) = -1$. Mas, mudando o sinal de uma das linhas da matriz, o determinante troca de sinal, de modo que

$$Q = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

tem que ser uma matriz ortogonal de determinante igual a um. Logo Q descreve uma rotação: quais são o eixo e o ângulo desta rotação? Para determinar o eixo, calculamos o

autovetor do autovalor 1 resolvendo o sistema

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

cujas soluções satisfazem

$$x = y + z = 0$$

de modo que $u = (0, 1, -1)$ determina o eixo de Q . Para calcular o ângulo de rotação, escolhemos um vetor w qualquer do plano W ortogonal a u , calculamos Qw e determinamos o ângulo entre estes dois vetores. Escolhendo $w = (1, 0, 0)$, temos que

$$Qw = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix},$$

donde

$$\langle w, Qw \rangle = w^t Qw = -\frac{1}{3}.$$

Logo o ângulo de rotação θ satisfaz

$$\cos(\theta) = -\frac{1}{3}$$

pois w é um vetor unitário. O ângulo θ correspondente será de, aproximadamente, 1,9106 radianos.

2.4. Caracterizando as rotações em dimensão quatro. Nos artigos anteriores utilizamos nosso conhecimento intuitivo de qual deveria ser o comportamento geométrico de uma rotação para caracterizar no teorema 2.4 as matrizes que correspondem a este tipo de transformação em um espaço de dimensão três. Naturalmente não podemos fazer nada semelhante em dimensão maior, porque não conseguimos visualizar estes espaços. Por isso, procedemos por analogia. Já que, tanto em dimensão dois, quanto em dimensão três, uma rotação é caracterizada como um operador cuja matriz é ortogonal e de dimensão zero, *definimos* uma rotação em dimensão n como sendo um operador do \mathbb{R}^n cuja matriz na base canônica é ortogonal e tem determinante um. Nosso objetivo neste artigo consiste em inventar um procedimento que nos permita construir sistematicamente matrizes de rotações no \mathbb{R}^4 .

Para começar, o argumento que usamos no artigo 2.2 para provar que uma rotação do \mathbb{R}^3 sempre tem um eixo não funcionará em espaços de dimensão par. Para contornar este problema precisaremos usar uma proposição cuja demonstração será o tema do próximo artigo. Antes, porém, uma definição: um subespaço U é *invariante* por um operador T de um espaço vetorial dado se $T(u) \in U$ para todo $u \in U$. Por exemplo, o eixo é um subespaço invariante por uma rotação do \mathbb{R}^3 . Entretanto, ao contrário do que acontece com

o eixo de uma rotação, um subespaço pode ser invariante mesmo quando seus vetores são alterados pela transformação. Este é o caso do plano ortogonal ao eixo de uma rotação: embora os vetores sejam modificados pela transformação, isto acontece sem que sejam movidos para fora do plano ortogonal. No caso das reflexões, o espelho e reta normal ao espelho são ambos subespaços invariantes.

PROPOSIÇÃO 2.5. *Todo operador de \mathbb{R}^4 admite um plano invariante.*

Note que a proposição acima se aplica a qualquer operador do \mathbb{R}^4 . Quando o operador é ortogonal, como é o caso da rotação, podemos afirmar muito mais, como mostra a seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 2.6. *Se um plano U do \mathbb{R}^4 é invariante por um operador ortogonal, então seu complemento ortogonal U^\perp também é invariante pelo mesmo operador.*

DEMONSTRAÇÃO. Note, primeiramente, que,

$$(82) \quad \langle Qw | Qu \rangle = (Qw)^t Qu = w^t Q^t Qu = w^t u = 0;$$

pois Q é ortogonal e $w \in U^\perp$. Em segundo lugar temos que Q é inversível, já que tem determinante não nulo. Mas isto implica que o subespaço $Q(U)$ tem dimensão igual a de U . Entretanto, U é invariante por Q , de modo que $Q(U) \subseteq U$. Portanto, $Q(U)$ é um subespaço de U e ambos têm a mesma dimensão, o que só é possível se $Q(U) = U$. Mas isto significa que todo vetor de U pode ser escrito na forma Qu , para algum $u \in U$. Podemos, então, concluir de (82) que Qw é ortogonal a todos os elementos de U . Logo, $Qw \in U^\perp$ para todo $w \in U^\perp$ como queríamos mostrar. \square

Seja, então, ρ uma rotação no \mathbb{R}^4 e $Q = (\rho)_\varepsilon$ sua matriz na base canônica. Lembre-se que, por definição, ρ ser uma rotação equivale a dizer que Q é ortogonal e tem determinante igual a um. As duas proposições acima nos permitem afirmar que existe um subespaço U de dimensão dois no \mathbb{R}^4 que é invariante por Q e cujo complemento ortogonal U^\perp também é invariante por Q . Sejam,

$$B = \{u_1, u_2\} \quad \text{e} \quad B^\perp = \{w_1, w_2\}$$

bases ortonormais de U e U^\perp , respectivamente. Como todo vetor de U é ortogonal a todo vetor de U^\perp ,

$$\beta = B \cup B^\perp = \{u_1, u_2, w_1, w_2\}$$

é uma base ortonormal do \mathbb{R}^4 . Mas, U e U^\perp são invariantes por ρ , de modo que

$$(\rho)_\beta = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$$

em que cada bloco é uma matriz 2×2 . Contudo,

$$(\rho)_\beta = (id)_{\beta\varepsilon} Q (id)_{\beta\varepsilon}^t$$

de modo que $(\rho)_\beta$ também é uma matriz ortogonal de determinante igual a um. Mas isto implica que Q_1 e Q_2 também são matrizes ortogonais e de determinante um, só que de tamanho 2×2 . Portanto, pelo que vimos no artigo 2.3, existem ângulos θ_1 e θ_2 tais que

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$(\rho)_\beta = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{bmatrix}$$

que desempenha o mesmo papel para rotações do \mathbb{R}^4 que (81) desempenhou para rotações do \mathbb{R}^3 .

2.5. O Teorema de Cayley Hamilton. Neste artigo provaremos a proposição 2.5 da qual dependeu nossa construção das rotações do \mathbb{R}^4 no artigo anterior. Como veremos, a proposição é uma consequência do seguinte teorema.

TEOREMA DE CAYLEY HAMILTON. *Se $p(t)$ é o polinômio característico de uma matriz A , então $P(A) = 0$.*

Por trás deste enunciado aparentemente inócua esconde-se um resultado bastante estranho. Afinal de contas, quando determinamos o polinômio característico de uma matriz A consideramos a variável t como definindo números, que são os autovalores da matriz. O teorema, contudo, nos convida a substituir a própria matriz A no lugar da variável t . Para ganharmos um pouco mais de sentimento do real significado do teorema, vamos verificar que vale para matrizes de tamanho 2×2 . Seja, então,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

uma matriz 2×2 . Um cálculo simples mostra que o polinômio característico de A é

$$p(t) = t^2 - (a_{11} + a_{22})t + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).$$

Entretanto,

$$A^2 = \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{11}a_{21} + a_{21}a_{22} & a_{22}^2 + a_{12}a_{21} \end{bmatrix},$$

ao passo que

$$(a_{11} + a_{22})A = \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{11}a_{22} & a_{11}a_{12} + a_{22}a_{12} \\ a_{11}a_{21} + a_{22}a_{21} & a_{11}a_{22} + a_{22}^2 \end{bmatrix};$$

donde

$$A^2 - (a_{11} + a_{22})A = \begin{bmatrix} a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} & 0 \\ 0 & a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} \end{bmatrix} = (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})I;$$

que podemos reescrever na forma

$$A^2 - (a_{11} + a_{22})A + (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})I_2 = 0;$$

conforme predito pelo teorema de Cayley-Hamilton. Ao fazer a verificação para o caso em que a matriz tem tamanho 2×2 , estamos seguindo nos passos de Cayley. Ao enunciar o teorema em seu artigo *A memoir on the theory of matrices* Cayley prova sua validade para matrizes 2×2 e então acrescenta

verifiquei o teorema no caso seguinte mais simple, de uma matriz de ordem 3 [...] mas não achei necessário empreender o trabalho de obter uma prova formal do teorema no caso geral de uma matriz de qualquer grau [ordem].

O trecho original do artigo pode ser visto na figura 1. O mesmo resultado já havia sido observado cinco anos antes por W. R. Hamilton em seu *Lectures on Quaternions*.

Como o caso que realmente nos interessa é aquele em que a matriz tem tamanho 4×4 , poderíamos fazer as contas com caneta e uma (grande) folha de papel ou, alternativamente, poderíamos usar um sistema de computação algébrica. Fica a seu critério escolher qual dos dois métodos você prefere e executar o cálculo necessário. Supondo o teorema conhecido, vamos apenas usá-lo para provar que todo operador de \mathbb{R}^4 admite um plano invariante.

Seja, então, T um operador do \mathbb{R}^4 e seja A sua matriz relativa à base canônica. O polinômio característico

$$p(t) = \det(A - tI)$$

de A tem grau quatro. Como um polinômio irreduzível cujos coeficientes são números reais só pode ter grau um ou dois, só é possível fatorar $p(t)$ como o produto de (1) quatro polinômios de grau um, (2) dois polinômios de grau um e um polinômio irreduzível de grau dois ou (3) dois polinômios irreduzíveis de grau dois; veja o exercício 30. Nos casos (1) e (2) existem pelo menos dois números reais λ_1 e λ_2 e dois vetores não nulos v_1 e v_2 tais que

$$T(v_1) = \lambda_1 v_1 \quad \text{e} \quad T(v_2) = \lambda_2 v_2,$$

de modo que $\langle v_1, v_2 \rangle$ será um plano invariante por T . Já no caso (3), podemos escrever

$$p(t) = p_1(t)p_2(t),$$

em que $p_1(t)$ e $p_2(t)$ são ambos polinômios irreduzíveis de grau dois com coeficientes reais. Pelo teorema de Cayley-Hamilton temos que

$$(83) \quad 0 = p(A) = p_1(A)p_2(A).$$

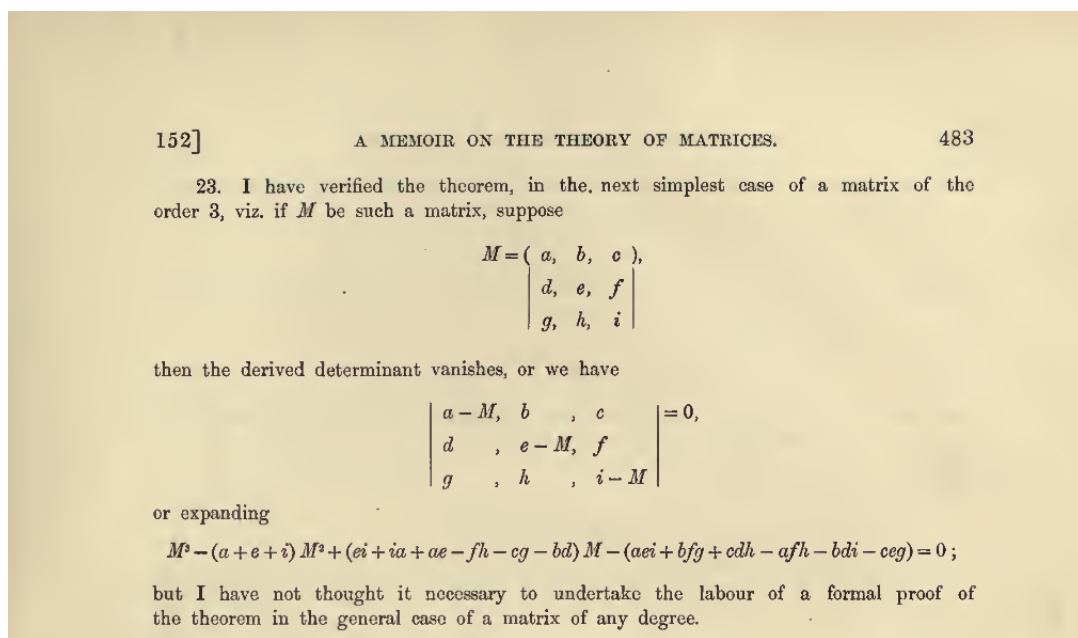


FIGURA 1. O teorema de Cayley-Hamilton

Note que *não* podemos concluir disto que $p_1(A) = 0$ ou $p_2(A) = 0$, porque o produto de duas matrizes não nulas pode ser igual a zero. Entretanto, se v_0 for um vetor não nulo qualquer do \mathbb{R}^4 , teremos de (83) que

$$0 = p_1(A)p_2(A)v_0.$$

Há, então, duas possibilidades essencialmente equivalentes. A primeira é que

$$p_2(A)v_0 = 0;$$

isto é, v pertence ao núcleo da matriz $p_2(A)$. Neste caso, se

$$p_2(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0,$$

então

$$0 = p_2(A)v_0 = (a_2A^2 + a_1A + a_0I)v_0.$$

Como p_2 tem grau dois, o coeficiente a_2 não pode ser igual a zero, de modo que

$$(84) \quad T^2v_0 = A^2v_0 = -\frac{a_1}{a_2}Av_0 - \frac{a_0}{a_2}v_0.$$

Mas isto significa que o subespaço $U = \langle v_0, Tv_0 \rangle$ é invariante por T , pois se aplicarmos T a um vetor qualquer $b_1v_0 + b_2Tv_0$ de U , obteremos

$$T(b_1v_0 + b_2Tv_0) = b_1T(v_0) + b_2T^2(v_0) = -\frac{a_0}{a_2}v_0 + (b_1 - \frac{a_1}{a_2})Tv_0 \in U,$$

por (84). Ainda precisamos nos certificar de que U é realmente um plano. Entretanto, para que U não fosse um plano $T(v_0)$ teria que ser colinear a v_0 . Isto é, teria que existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(v_0) = \lambda v_0$. Como, por construção, $v_0 \neq 0$, o número real λ seria um autovalor de T . Isso, entretanto, não é possível, porque estamos supondo que $p(t)$ não tem raízes reais e os autovalores de T são as raízes do seu polinômio característico.

Resta-nos, apenas, considerar o caso em que $p_1(A)v_0 \neq 0$. Mas, neste caso, repetimos o argumento que acabamos de fazer, so que com o vetor não nulo $p_1(A)v_0$ no papel que pertenceu a v_0 e $p_2(A)$ no papel antes desempenhado por $p_1(A)$.

3. Operadores autoadjuntos

Já vimos que nem todo operador de \mathbb{R}^n é diagonalizável. Contudo, há uma classe muito importante de operadores lineares que sempre são diagonalizáveis: os operadores autoadjuntos. Nesta aula discutiremos estes operadores e algumas de suas aplicações.

3.1. Definições e exemplos. Um operador T de \mathbb{R}^n é *autoadjunto* se $\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle$, quaisquer que sejam os vetores $u, v \in \mathbb{R}^n$. Dito desta maneira, fica difícil identificar quais dos operadores que já conhecemos são autoadjuntos. O que precisamos é de uma tradução matricial da propriedade que define esta classe de operadores. Digamos que A é a matriz do operador T na base canônica. Então,

$$\langle Tu, v \rangle = (Au)^t v = u^t A^t v$$

ao passo que

$$\langle u, Tv \rangle = u^t (Av).$$

Como T é autoadjunto, teremos que

$$u^t A^t v = u^t (Av);$$

que só pode valer para toda escolha de $u, v \in \mathbb{R}^n$ se $A^t = A$. Portanto, *os operadores autoadjuntos são aqueles cuja matriz na base canônica é simétrica*. Uma afirmação análoga pode ser feita para a matriz do operador em qualquer base ortonormal, como pode ser facilmente verificado se levarmos em conta que, neste caso, a matriz de mudança de base é ortogonal.

De posse deste critério, podemos afirmar que muitos dos operadores que já estudamos são autoadjuntos, entre eles as projeções e as reflexões. Outra classe importante de operadores autoadjuntos está relacionada ao estudo das *formas quadráticas*, que estudamos, no

caso bidimensional, ao tratar da classificação das cônicas na seção 3. Outra área importante dos operadores autoadjuntos (mais precisamente, dos operadores hermitianos, seus primos quando os escalares são complexos) é a computação quântica.

3.2. Uma propriedade dos operadores autoadjuntos. Neste artigo consideraremos uma propriedade dos operadores autoadjuntos que será utilizada para provar que estes operadores sempre são diagonalizáveis. A propriedade é a seguinte.

PROPOSIÇÃO 3.1. *Todos os autovalores de um operador autoadjunto são números reais.*

Para provar esta propriedade precisaremos aplicar a matrizes complexas um fato que aprendemos no contexto de matrizes reais. Como a demonstração é exatamente a mesma nos dois casos, tudo o que você precisa fazer é relê-la pensando que agora os coeficientes são complexos. Seja A uma matriz $n \times n$ real. O fato de que precisamos é o seguinte: *se λ é uma raiz complexa do polinômio característico de A , então existe um vetor não nulo v , com coeficientes complexos, que satisfaz $Av = \lambda v$.* Em outras palavras, toda raiz do polinômio característico de A é um autovalor complexo de A ao qual associamos um autovetor complexo. Antes de passar às contas convém lembrar algumas propriedades do conjugado complexo. Sejam λ e μ números complexos, então

- (1) $\bar{\bar{\lambda}} = \lambda$ se, e somente se, λ for um número real;
- (2) $\bar{\lambda}\lambda$ é um número real não negativo;
- (3) $\bar{\lambda}\lambda = 0$ se, e somente se, $\lambda = 0$;
- (4) $\overline{\lambda + \mu} = \bar{\lambda} + \bar{\mu}$;
- (5) $\overline{\lambda \cdot \mu} = \bar{\lambda} \cdot \bar{\mu}$.

Suponhamos, então, que λ é uma raiz do polinômio característico de A e que $v \neq 0$ é um vetor complexo tal que $Av = \lambda v$. Provaremos que se A for simétrica, então $\lambda = \bar{\lambda}$, de modo que λ tem que ser um número real. Para isto, começamos tomando o conjugado de $Av = \lambda v$. Usando as propriedades acima, obtemos

$$A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v};$$

em que \bar{v} é o vetor obtido tomando o conjugado de cada uma das entradas de v . Note que A não foi alterada por conjugação porque seus coeficientes são reais. Desta equação segue que

$$(85) \quad v^t A \bar{v} = \bar{\lambda} v^t \bar{v}.$$

Por outro lado, transpondo $Av = \lambda v$ e lembrando que A é simétrica, temos que

$$v^t A = \lambda v^t;$$

donde

$$(86) \quad v^t A \bar{v} = \lambda v^t \bar{v}.$$

Comparando (85) com (86), obtemos

$$(87) \quad \bar{\lambda} v^t \bar{v} = \lambda v^t \bar{v}.$$

A igualdade desejada segue se mostrarmos que $v^t \bar{v} \neq 0$. Contudo, se $v = (a_1, \dots, a_n)$, então

$$v^t \bar{v} = \bar{a}_1 a_1 + \dots + \bar{a}_n a_n.$$

Mas, pelas propriedades (2) e (3) do conjugado complexo, este número só pode ser zero se $v = 0$. Portanto, como $v \neq 0$, podemos cancelar $v^t \bar{v}$ de (87) e concluir que λ é igual a seu conjugado, de modo que tem que ser um número real.

3.3. Diagonalização de operadores autoadjuntos. Neste artigo provamos o seguinte resultado.

TEOREMA ESPECTRAL. *Todo operador autoadjunto é diagonalizável. Além disso, a base de autovetores sempre pode ser escolhida ortonormal.*

A demonstração fornece um algoritmo recursivo que poderia, em princípio, ser usado para diagonalizar um operador autoadjunto. Para descrever este algoritmo partiremos da matriz A que representa um dado operador autoadjunto T do \mathbb{R}^n relativamente à base canônica. Como mostramos no artigo anterior, T admite um autovalor real, que chamaremos de λ , ao qual corresponde um autovetor (real) u , que podemos supor ser unitário. Completando u para obter uma base de \mathbb{R}^n e aplicando Gram-Schmidt, obtemos uma base ortonormal B de \mathbb{R}^n cujo primeiro elemento é u . Como $Tu = \lambda u$, temos que

$$QAQ^{-1} = (T)_B = \begin{bmatrix} \lambda & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

em que os α 's são números reais, C é uma matriz real $(n-1) \times (n-1)$ e Q é a matriz que muda coordenadas na base B em coordenadas na base ε . Contudo, como B é uma base ortonormal de \mathbb{R}^n , a matriz Q é ortogonal. Transpondo a equação acima e levando em conta que Q é ortogonal, obtemos

$$QA^t Q^t = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & & & \\ \vdots & & C^t & \\ \alpha_n & & & \end{bmatrix}$$

Mas A é simétrica, de modo que

$$QA^t Q^t = QAQ^t.$$

Igualando as matrizes correspondentes concluímos que os α 's são todos nulos e que $C^t = C$, donde

$$QAQ^t = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{C} \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

Como C é simétrica de tamanho $(n-1) \times (n-1)$, podemos continuar recursivamente até diagonalizar T .

4. Busca na rede

O PAGERANK foi o algoritmo originalmente usado pelo Google para ordenar as páginas obtidas em uma busca. Como uma última aplicação da álgebra linear, veremos como o PAGERANK usa um problema de autovalores e autovetores para determinar o peso que especifica a posição de uma dada página em uma busca.

4.1. Grafos na web. Há muitas maneiras de interpretar a web como um grafo.

\vdots

A ser escrito!

\vdots

Apesar de ser estocástica, a matriz A pode ter coeficientes nulos, o que permite que o autoespaço associado ao autovalor 1 tenha dimensão maior que um. Para contornar este problema, substituímos A por uma outra matriz, que chamaremos de G . Se S for a matriz $n \times n$ cujas entradas são todas iguais a $1/n$, definimos

$$G = (1 - m)A + mS,$$

em que m é um número real entre 0 e 1. A versão original do PAGERANK utilizava $m = 0,15$. O ponto crucial é que esta matriz deve ser estocástica por coluna e ter todas as suas entradas positivas. Mas A e S são estocásticas por coluna, o que equivale a dizer que

$$u_0^t A = u_0^t S = u_0^t, \text{ em que } u_0^t = (1, 1, \dots, 1);$$

donde

$$u_0^t G = (1 - m)u_0^t A + mu_0^t S = ((1 - m) + m)u_0^t = u_0^t,$$

comprovando que G também é estocástica por coluna. Por outro lado, como a soma de matrizes é feita entrada a entrada, é suficiente discutir o que acontece com cada entrada de

G para entender porque esta matriz é positiva. Mas

$$G(i, j) = (1 - m)A(i, j) + m\frac{1}{n}.$$

Há dois casos a considerar. Se $A(i, j) = 0$, então

$$G(i, j) = m\frac{1}{n}$$

é claramente positivo; mas se $A(i, j) > 0$ e

$$\mu = \min\{A(i, j), 1/n\},$$

então

$$G(i, j) = (1 - m)A(i, j) + m\frac{1}{n} \geq (1 - m)\mu + m\mu = \mu$$

que tem que ser um número positivo. Portanto, em qualquer dos casos, $G(i, j) > 0$ e G é uma matriz positiva, como havíamos afirmado. A razão pela qual dispendemos este esforço adicional para obter uma matriz positiva vai se tornar clara nos próximos artigos.

4.2. Matrizes estocásticas por colunas. No artigo anterior vimos como representar o grafo dirigido resultante de uma busca na forma de uma matriz estocástica por coluna positiva G . Como vimos no artigo 1.2 que matrizes estocásticas por colunas sempre têm 1 como um de seus autovalores. Nesta seção provaremos que se uma matriz estocástica por coluna também é positiva, então o autoespaço de 1 (1) *contém um autovetor p cujas coordenadas são todas positivas e (2) tem dimensão igual a um.*

As entradas de p correspondem aos pesos de cada uma das páginas pesquisadas. Feita a busca e calculado p , as páginas são listadas em ordem decrescente de peso. A demonstração de (1) e (2) será feita em etapas. Começamos introduzindo uma maneira de medir o comprimento de um vetor que é mais adequada às matrizes estocásticas por colunas do que a norma euclidiana usual.

Se $v = (v_1, \dots, v_n)$. Definimos sua 1-norma como sendo o número

$$|v|_1 = |v_1| + \dots + |v_n|.$$

É fácil mostrar que a 1-norma satisfaz às propriedades esperadas de uma norma; isto é:

- $|v + w|_1 \leq |v|_1 + |w|_1$;
- $|\lambda v|_1 \leq |\lambda| |v|_1$;
- $|v|_1 \geq 0$;
- $|v|_1 = 0$ se, e somente se, $v = 0$.

Por exemplo, se

$$v = [v_1, \dots, v_n]^t \quad \text{e} \quad w = [w_1, \dots, w_n]^t$$

então, pela definição da 1-norma

$$(88) \quad |v + w|_1 = |v_1 + w_1| + \cdots + |v_n + w_n|.$$

Contudo, o módulo de um número real satisfaz a desigualdade triangular, donde

$$|v_i + w_i| \leq |v_i| + |w_i| \quad \text{para todo} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Substituindo estas desigualdades em (88), obtemos

$$|v + w|_1 \leq |v_1| + |w_1| + \cdots + |v_n| + |w_n|;$$

que, reagrupando as parcelas, nos dá a desigualdade desejada. As outras propriedades ficam como exercício para você.



Note que, embora possa ocorrer que a 1-norma de um vetor seja igual à sua norma euclidiana, em geral as duas são muito diferentes; por exemplo, as normas do vetor

$$w = (1, 2, 3, \dots, n) = \sum_{i=1}^n i e_i$$

são

$$\|w\| = \sqrt{\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}} \quad \text{e} \quad |w|_1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

É razoável esperar que a 1-norma seja mais adequada ao estudo das matrizes estocásticas por colunas do que a norma euclidiana, uma vez que uma matriz estocástica por coluna A tem que satisfazer $|A(:, i)| = 1$, para todo $1 \leq i \leq n$. Na verdade, a 1-norma admite uma tradução matricial muito conveniente para o que faremos adiante. Denotando por $|v|$ o vetor

$$(|v_1|, \dots, |v_n|)$$

cujas coordenadas são os módulos das entradas de v e por u_0 o vetor

$$(1, \dots, 1) = \sum_{i=1}^n e_i$$

podemos escrever

$$|v|_1 = u_0^t |v|.$$

Com isto podemos voltar à discussão das questões (1) e (2) enunciadas acima.

Por todo o resto deste artigo suporemos que G é uma matriz estocástica por coluna positiva $n \times n$. Começaremos provando uma propriedade referente a vetores que têm coordenadas positivas e negativas, e que, para os propósitos deste curso, chamaremos de *mistos*.

Propriedade 1: V_1 não contém vetores mistos.

Suponha, por contradição, que v seja um vetor misto em V_1 . Se $v = (v_1, \dots, v_n)$, então a igualdade $Gv = v$ pode ser reescrita na forma

$$v_i = G_i v;$$

em que G_1, \dots, G_n são as *linhas* de G . Como G é positiva e v é misto, temos que

$$|v_i| = |G_i v| < G_i |v|.$$

Como

$$\sum_{i=1}^n G_i |v| = G |v|$$

podemos concluir de $u_0^t G = u_0^t$, que

$$|v|_1 = u_0^t |v| < u_0^t G |v| = |v|_1$$

que nos dá a esperada contradição. Note que o que provamos é, na verdade, mais forte que o enunciado original de (1).

Passando a (2), devemos provar

Propriedade 2: $\dim(V_1) = 1$.

Mais uma vez o argumento será por contradição. Digamos que v e v' sejam vetores linearmente independentes em V_1 . Se

$$d = u_0^t v = \sum_{i=1}^n v_i \text{ e } d' = u_0^t v' = \sum_{i=1}^n v'_i$$

então o vetor

$$w = d'v - dv' = (u_0^t v')v - (u_0^t v)v' \neq 0,$$

satisfaz

$$u_0^t w = (u_0^t v')(u_0^t v) - (u_0^t v)(u_0^t v') = 0;$$

de forma que w tem que ser misto, o que viola a propriedade 1, provando o que desejávamos. Combinando as propriedades 1 e 2, mostramos a seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 4.1. *Se G é estocástica por coluna positiva então existe um vetor unitário p de coordenadas positivas que gera o autoespaço associado a 1.*

Com já mencionamos, este vetor especial, será considerado como um vetor de pesos. As páginas de maior peso serão listadas no início, quando a busca for apresentada ao usuário.

4.3. Calculando o vetor peso. Para que esta maneira de ponderar as páginas listadas em uma busca seja viável, devemos ser capazes de determinar o vetor peso de forma altamente eficiente. Afinal uma busca típica relaciona milhões de resultados e não toma mais que uma fração de segundos. O seguinte resultado será necessário à justificativa do funcionamento do algoritmo. Denotaremos por u_0 o vetor $(1, \dots, 1)$, e por W o subespaço

$$W = \{v \in \mathbb{R}^n \mid u_0^t v = 0\}.$$

Portanto, na terminologia do artigo anterior, todos os vetores não nulos de W são mistos.

PROPOSIÇÃO 4.2. *Seja G uma matriz estocástica por coluna positiva. Se $w \in W$ então*

- (a) $Gw \in W$;
- (b) $|Gw|_1 \leq c|w|_1$;

para alguma constante $0 < c < 1$.

Como $u_0^t G = u_0^t$, temos que

$$u_0^t Gw = u_0^t w = 0,$$

para todo $w \in W$, o que prova (a). Antes de passar à demonstração de (b), vamos expressar a 1-norma de w como um produto de matrizes. Como w é misto, não podemos usar u_0 , como fizemos no artigo anterior. A solução é definir o vetor de sinais $s(w)$ cujas coordenadas (s_1, \dots, s_n) satisfazem

$$s_i = \begin{cases} 1 & \text{se } w_i > 0 \\ -1 & \text{se } w_i < 0 \\ 0 & \text{se } w_i = 0. \end{cases}$$

Usando este vetor, podemos escrever

$$|w|_1 = s(w)^t w.$$

Em particular,

$$|Gw|_1 = s(Gw)^t Gw.$$

Contudo, se G_j for a j -ésima coluna de G , temos que

$$-u_0^t G_j < s(Gw)^t G_j < u_0^t G_j$$

pois as entradas de G_j são todas positivas. Como G é estocástica por coluna ,

$$-1 < s(Gw)^t G_j < 1.$$

o que nos permite concluir que

$$c = \max\{|s(Gw)^t G_j| \mid 1 \leq j \leq n\} < 1.$$

Logo, de

$$|Gw|_1 = s(Gw)^t Gw = \sum_{j=1}^n (s(Gw)^t G_j) w_j$$

segue que

$$|Gw|_1 = s(Gw)^t Gw \leq c \sum_{j=1}^n w_j \leq c|w|_1;$$

que nos dá a desigualdade desejada.

Com isto podemos enunciar e provar um algoritmo que, tendo como entrada uma matriz estocástica por coluna positiva G e uma tolerância $e > 0$, calcula um autovetor de G associado ao autovalor 1:

Inicializa: escolha um vetor unitário positivo $v^{(0)}$ qualquer;
Iteração: enquanto $|v^{k+1} - v^{(k)}|_1 > e$ repita $v^{k+1} = Gv^{(k)}$;
Saída: retorne $\mathbf{p} = v^{(k)}$.

Para provar que o algoritmo funciona, devemos mostrar

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v^{(k)}$$

é um autovetor de G associado a 1. Seja \mathbf{p} o autovetor positivo de 1-norma igual a um associado a 1. Digamos que $\delta = \mathbf{p} - v^{(0)}$. Se todas as entradas de δ fossem positivas, teríamos que cada uma das coordenadas de \mathbf{p} seria maior que sua correspondente em $v^{(0)}$. Como $v^{(0)}$ e \mathbf{p} são ambos vetores positivos, isto só pode ocorrer se $|q|_1 > |v^{(0)}|_1$, o que não é possível, já que ambos têm 1-norma igual a 1. Como o mesmo argumento funciona se todas as coordenadas de δ forem negativas, δ tem que ser um vetor misto. Aplicando a proposição,

$$|G\delta|_1 < c|\delta|_1;$$

donde segue por indução em k que

$$|G^k \delta|_1 < c^k |\delta|_1.$$

Como δ está fixo, temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G^k \delta = 0,$$

pois o único vetor cuja 1-norma é zero é o vetor nulo. Contudo,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G^k \delta = q - \lim_{k \rightarrow \infty} v^{(k)};$$

de modo que $\mathbf{p} = \lim_{k \rightarrow \infty} v^{(k)}$, é um autovetor positivo de G associado a 1.

Por exemplo, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0.5168758 & 0.3896685 & 0. & 0.2140355 & 0.1937507 \\ 0.4831242 & 0.6103315 & 0. & 0.3231644 & 0.1426122 \\ 0. & 0. & 1. & 0.1735320 & 0.2065034 \\ 0. & 0. & 0. & 0.2610884 & 0.2998340 \\ 0. & 0. & 0. & 0.0281797 & 0.1572998 \end{bmatrix}$$

é estocástica *por colunas*, mas não é positiva, de modo que, tomando $m = 0.15$, temos que

$$G = (1 - m)A + mS = \begin{bmatrix} 0.4693445 & 0.3612182 & 0.03 & 0.2119302 & 0.1946881 \\ 0.4406555 & 0.5487818 & 0.03 & 0.3046898 & 0.1512203 \\ 0.03 & 0.03 & 0.88 & 0.1775022 & 0.2055279 \\ 0.03 & 0.03 & 0.03 & 0.2519251 & 0.2848589 \\ 0.03 & 0.03 & 0.03 & 0.0539528 & 0.1637048 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o algoritmo a G com $e = 10^{-5}$, obtemos, ao cabo de dez iterações, o vetor

$$v^{(10)} = [0.2815365, 0.3404141, 0.2916703, 0.0503566, 0.0360227]^t.$$

Os erros cometidos a cada iteração são listados na tabela 1. Fica claro mesmo neste exemplo simples que, a despeito de sua incrível eficiência, não se trata de um algoritmo fácil de executar usando apenas lápis e papel.

Iteração	1	2	3	4	5
Erro	0.4262234	0.1443139	0.0412772	0.0112782	0.0030381
Iteração	6	7	8	9	10
Erro	0.0008146	0.0002181	0.0000584	0.0000156	0.0000042

TABELA 1. Erros por iteração

Exercícios

1. Ache os autovalores e autovetores das matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Ache os autovalores e autovetores das matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Determine a base dos autoespaços de cada uma das matrizes do exercício anterior.

4. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine os autovalores e autovetores de A .
- (b) Esta matriz é diagonalizável? Por quê?

5. Sejam $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, -1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$.

- (a) Mostre que estes vetores formam uma base B do \mathbb{R}^3 .
- (b) Determine a matriz na base B do operador linear definido por

$$T(v_1) = 2v_1, \quad T(v_2) = -v_2 \text{ e } T(v_3) = -v_2.$$

- (c) Determine a matriz na base canônica deste mesmo operador.

6. Determine a matriz na base canônica de um operador linear do \mathbb{R}^3 que tenha autovalores 1, -2 e 0 associados aos autovetores $(1, 0, -1)$, $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 1)$.

7. Seja T o operador linear do \mathbb{R}^3 definido por $T(x, y, z) = [x + y + z, 2y + z, 2y + 3z]^t$.

- (a) Ache os autovalores e autovetores de T .
- (b) Ache uma base para cada autoespaço de T .
- (c) Este operador é diagonalizável? Se a resposta for sim, determine uma base B de autovetores para T e calcule a matriz $(T)_B$.

8. Seja T o operador linear do \mathbb{R}^3 definido por $T(x, y, z) = [2x + y, y - z, 2y + 4z]^t$.

- (a) Ache os autovalores e autovetores de T .
- (b) Ache uma base para cada autoespaço de T .
- (c) Este operador é diagonalizável? Se a resposta for sim, determine uma base B de autovetores para T e calcule a matriz $(T)_B$.

9. Quais das matrizes A abaixo são diagonalizáveis? Para aquelas que forem diagonalizáveis determine uma matriz M inversível M tal que $M^{-1}AM$ é diagonal.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. Calcule A^{100} , quando A for a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

11. Verifique se as matrizes

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

representam rotações. Em caso afirmativo calcule o eixo e o ângulo de rotação.

12. Determine a transformação linear que descreve o movimento rígido que leva o segmento de extremos $A = [-6, 2]^t$ e $B = [-1, 2]^t$ no segmento de extremos $C = [-2, 6]^t$ e $D = [1, 2]^t$, respectivamente. Prove que esta transformação é uma rotação e calcule seu ângulo.
13. Seja R uma rotação de eixo ℓ em \mathbb{R}^3 e $v = [1, 1, 1]^t$ um vetor ortogonal a ℓ . Sabendo-se que $Rv = [1, -1, 1]^t$, determine:
- (a) o cosseno do ângulo de rotação de R ;
 - (b) o eixo da rotação R ;
 - (c) a matriz de R na base canônica.

14. Determine números reais a , b e c de modo que a matriz

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{14} & a \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{14} & b \\ 1/\sqrt{3} & -3/\sqrt{14} & c \end{bmatrix}$$

seja uma rotação do \mathbb{R}^3 .

15. Considere a matriz

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ a & 2/3 & 1/3 \\ b & 1/3 & c \end{pmatrix}.$$

Determine valores para a, b e c de forma que Q descreva uma rotação de \mathbb{R}^3 . Ache o eixo e o cosseno do ângulo de rotação de Q .

16. Quais das seguintes matrizes representam rotações do \mathbb{R}^4 ? Para cada uma delas, determine planos invariantes ortogonais e o ângulo de rotação em cada um destes planos.

$$(a) \quad \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -2 & 5 & -2 & -4 \\ 5 & -2 & -2 & -4 \\ -2 & -2 & 5 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad (b) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (c) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

17. Seja T o operador de \mathbb{R}^3 definido por $T(x, y, z) = [x + 4y + 2z, 4x - 5y - 4z, 2x - 4y + z]^t$.

(a) Ache uma base ortonormal B do \mathbb{R}^3 constituída por autovetores de T .

(b) Determine uma matriz M tal que $M^t(T)_\varepsilon M = (T)_B$.

18. Considere o operador linear T de \mathbb{R}^2 dado por $T(x, y) = [5x - y, -x + 5y]^t$.

(a) Encontre os vértices de um retângulo que tenha a origem como um dos seus vértices e que seja levado por T num quadrado de lado 12.

(b) Encontre a imagem por T do triângulo de vértices $A = [0, 0]^t$, $B = [2, 2]^t$ e $C = [1, -1]^t$.

19. Considere o operador do \mathbb{R}^3 cuja matriz na base canônica é

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Encontre os vértices de um paralelepípedo que tenha a origem como um de seus vértices e que seja levado por T em um cubo de aresta igual a 70 unidades.

20. Sejam T um operador autoadjunto, u um autovetor de T e w um vetor perpendicular a u . Prove que Tw também é perpendicular a u .

21. Seja T um operador autoadjunto de \mathbb{R}^2 . Sabe-se que:

(a) os autovalores de T são 2 e 3;

(b) o autoespaço de 2 é gerado por $[1, 1]^t$.

Determine a matriz de T na base canônica.

22. Considere o operador linear T de \mathbb{R}^3 definido por

$$T(x, y, z) = [y + z, x + z, x + y]^t.$$

Determine:

- (a) os autovalores de T ;
 - (b) os autoespaços de T ;
 - (c) uma base β de autovetores de T ;
 - (d) a matriz de mudança de base de β para a base canônica do \mathbb{R}^3 .
23. Seja S o plano do \mathbb{R}^4 gerado pelos vetores $[1, 1, 0, 0]^t$ e $[1, 0, 1, 1]^t$. Determine
- (a) o complemento ortogonal S^\perp de S ;
 - (b) um operador linear T de \mathbb{R}^4 cujo núcleo é S e cuja imagem é S^\perp em S .
24. Seja U o plano de equação $x - y + 2z = 0$ e ℓ a reta gerada por $[1, 1, 2]^t$.
- (a) Determine um operador linear de \mathbb{R}^3 cujo núcleo é U e cuja imagem é ℓ .
 - (b) Prove que um operador que satisfaz as propriedades de (a) não pode ser autoadjunto.
25. Determine *todos* os valores possíveis de a , b e c para os quais a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

corresponda a um operador diagonalizável.

26. Ache um paralelepípedo que seja levado em um cubo de lado 8 pelo operador linear T de \mathbb{R}^3 definido por

$$T(x, y, z) = [2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z]^t.$$

27. Segundo o *Teorema do Valor Intermediário*, se uma função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ para dois números reais $a < b$, então existe um número real r entre a e b no qual f se anula. Use isto para mostrar que todo polinômio de grau ímpar tem uma raiz real.
28. Mostre que se um polinômio cujos coeficientes são reais tem um número complexo α como uma de suas raízes, então o conjugado de α também é raiz do mesmo polinômio.
29. Um polinômio de grau n cujos coeficientes são reais é *irredutível* se não pode ser escrito como o produto de dois polinômios, ambos de grau estritamente menor que n .
- (a) Mostre que nenhum polinômio de grau ímpar e coeficientes reais é irredutível.
 - (b) Determine uma condição sobre $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que o polinômio $ax^2 + bx + c$ seja irredutível.

30. Segundo o *Teorema Fundamental da Álgebra* um polinômio $f(x)$, de grau n e coeficientes reais, pode ser fatorado na forma

$$f(x) = a \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$$

em que $a \in \mathbb{R}$ e os α 's são números complexos. Use este teorema e os exercícios anteriores para mostrar que f só pode ser irredutível se $n = 1$ ou $n = 2$.

como um número real vezes um produto de termos lineares da forma $x - \alpha$, em que α é um número real. Use este resultado e os dois exercícios anteriores para mostrar que um polinômio cujos coeficientes são reais só pode ser irredutível se tiver grau um ou dois. Lembre-se que um polinômio cujos coeficientes são

Referências Bibliográficas

- [1] A. J. Crilly, *Arthur Cayley: mathematician laureate of the Victorian Age*, Johns Hopkins University Press (2006).
- [2] F. Klein, *Development of mathematics in the 19th century*, translated by M. Ackerman with an appendix by R. Hermann, Math Sci Press (1979).
- [3] A. S. Householder, *Unitary triangularization of a nonsymmetric matrix*, J. Assoc. Comput. Mach. **5** (1958) 339–342.
- [4] L. N. Trefethen e D. Bau, *Numerical linear algebra*, SIAM (1997).