Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP2 - Primeiro Semestre de 2012
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(2.0)1. Determine o determinante de cada uma das matrizes abaixo, utilizando as propriedades sobre determinantes vistas no curso. Em cada caso, apresente a propriedade utilizada. Em seguida, responda, justificando, para qual(is) das matrizes é possível calcular-se a inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & -7 \\ 8 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 6 \\ 1 & -3 & 5 & -3 \\ 4 & 9 & -3 & 9 \\ 2 & 7 & 8 & 7 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Solução:

(a) Como A tem uma linha de 0s, det(A)=0.

(b) Como a segunda e a quarta colunas de B são iguais, det(B)=0.

(c) Como C é triangular, det(C) é igual ao produto dos elementos da diagonal. Assim, det(C)=-120.

É possível calcular a inversa apenas de C, pois é a única das três matrizes cujo determinante é diferente de zero.

(3.0)2. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Determine a matriz inversa de A.

Solução:

Forme a matriz em bloco $M = (A \vdots I)$ e reduza M por linhas à forma escalonada:

$$M = \left(\begin{array}{rrr c rrr} 1 & 2 & -4 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr c rrr} 1 & 2 & -4 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & \vdots & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr c rrr} 1 & 2 & -4 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -5 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

A metade esquerda de M está agora em forma triangular; logo A tem uma inversa. Além disso, reduza por linhas M à forma canônica reduzida por linhas:

$$M \sim \left(\begin{array}{rrr c rrr} 1 & 2 & 0 & \vdots & -9 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr c rrr} 1 & 0 & 0 & \vdots & -16 & -11 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) = \left(I \vdots A^{-1}\right)$$

Assim

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -16 & -11 & 3 \\ \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(b) Determine a solução do sistema $Ax = b$ usando a inversa de A.

Solução:

$$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} -16 & -11 & 3 \\ \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -41 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

(2.0)3. Ache os autovalores da transformação linear abaixo e os autovetores correspondentes ao autovalor negativo.

$$T : I\!R^3 \to I\!R^3 \text{ tal que } T(x, y, z) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z)$$

Solução:

A transformaç ao T é dada pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Então, $P(\lambda) = det(A - \lambda I) = (3-\lambda)^2(-1-\lambda)$. Os autovalores de T, são, portanto, os autovalores de A,

$$\lambda_1 = 3 \text{ e } \lambda_2 = -1.$$

Os autovetores associados a $\lambda_2 = -1$ são obtidos abaixo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rr} 3x & -4z = -x \\ & 3y - 5z = -y \\ & -z = -z \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rr} 4x & -4z = 0 \\ & 4y - 5z = 0 \\ & 0 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rr} x & -z = 0 \\ & y - \frac{5}{4}z = 0 \\ & 0 = 0 \end{array} \right.$$

Solução: $x = z$, $y = \frac{5}{4}z$, z qualquer. Os autovetores são do tipo $v = (z, \frac{5}{4}z, z)$, $z \neq 0$.

(3.0)4. Para cada das transformações lineares de $I\!R^3 \to I\!R^3$ abaixo, determine seu núcleo, sua imagem e diga se ela é injetora ou sobrejetora, justificando a resposta.

(a) $L(x) = (x_3, x_2, x_1)^T$.

Solução:

Núcleo, $N(L)$: Se x está no núcleo de L, então $L(x) = 0$, ou seja, $x_3 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_1 = 0$. Portanto, $N(L) = \{(0, 0, 0)^T\}$.

Imagem, $I(L)$: Dado $y = (y_1, y_2, y_3)^T \in I\!R^3$, $y = L((y_3, y_2, y_1)^T)$. Logo, $I(L) = I\!R^3$.

Como $N(L) = \{(0, 0, 0)^T\}$, L é injetora e como $I(L) = I\!R^3$, L é também sobrejetora.

(b) $L(x) = (x_1, x_2, 0)^T$.

Solução:

Núcleo, $N(L)$: Se x está no núcleo de L, então $L(x) = 0$, ou seja, $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Portanto, $N(L)$ é o subspaço unidimensional de $I\!R^3$ gerado por $e_3 = (0, 0, 1)^T$.

Imagem, $I(L)$: Um vetor y pertence à imagem de L se e somente se y é a soma de um múltiplo de $e_1 = (1, 0, 0)^T$ com um múltiplo de $e_2 = (0, 1, 0)^T$. Logo, $I(L)$ é o subspaço bidimensional de $I\!R^3$ gerado por $[e_1, e_2]$.

Como $N(L) \neq \{(0, 0, 0)^T\}$, L não é injetora e como $I(L) \neq I\!R^3$, L também não śobrejetora.