Gabarito

Álgebra Linear: AD2 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2005

Tutores: Rodrigo Olimpio e Cristina Lopes

1^a Questão) Solução:

a) Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - 6x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = -2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \tag{1}$$

a) Método de Gauss-Jordan

O sistema linear acima pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -6 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1^a Etapa) Formaremos a matriz aumentada $[A|b]$. A matriz aumentada é dada por:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

2^a Etapa) Transformaremos a matriz aumentada à sua forma escada reduzida por linhas, usando operações elementares em suas linhas.

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 & | & 1 \\ 1 & -6 & -1 & -2 & | & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & | & -2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Dividindo a primeira linha por 2 obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & -1/2 & | & 1/2 \\ 1 & -6 & -1 & -2 & | & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & | & -2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftrightarrow L_3 + L_1$ e $L_4 \leftrightarrow L_4 - 2L_1$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & -1/2 & | & 1/2 \\ 0 & -13/2 & -5/2 & -3/2 & | & 3/2 \\ 0 & 5/2 & 5/2 & -1/2 & | & -3/2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicando L_2 por $-2/13$, encontramos

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1/2 & 3/2 & -1/2 & | & 1/2 \\ 0 & 1 & 5/13 & 3/13 & | & -3/13 \\ 0 & 5/2 & 5/2 & -1/2 & | & -3/2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & | & 0 \\ \end{array}\right]$$

Fazendo $L_3 \leftrightarrow L_3 - \frac{5}{2}L_2$ e $L_4 \leftrightarrow L_4 - 4L_2$, obtemos

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1/2 & 3/2 & -1/2 & | & 1/2 \\ 0 & 1 & 5/13 & 3/13 & | & -3/13 \\ 0 & 0 & 20/13 & -14/13 & | & -12/13 \\ 0 & 0 & -20/13 & 14/13 & | & 12/13 \\ \end{array}\right]$$

Multiplicando agora L_3 por $13/20$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & -1/2 & | & 1/2 \\ 0 & 1 & 5/13 & 3/13 & | & -3/13 \\ 0 & 0 & 1 & -7/10 & | & -3/5 \\ 0 & 0 & -20/13 & 14/13 & | & 12/13 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_4 \leftrightarrow L_4 + \frac{20}{13}L_3$ ficamos com

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & -1/2 & | & 1/2 \\ 0 & 1 & 5/13 & 3/13 & | & -3/13 \\ 0 & 0 & 1 & -7/10 & | & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando $L_1 \leftrightarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 17/13 & -8/13 & | & 8/13 \\ 0 & 1 & 5/13 & 3/13 & | & -3/13 \\ 0 & 0 & 1 & -7/10 & | & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

E finalmente, fazendo $L_1 \leftrightarrow L_1 - \frac{17}{13}L_3$ e em seguida $L_2 \leftrightarrow L_2 - \frac{5}{13}L_3$, encontramos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/10 & | & 7/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7/10 & | & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

O sistema linear correspondente à matriz (2) na forma escada reduzida por linhas é dado por:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\quad + \frac{3}{10}x_4 = \frac{7}{5} \\ \qquad x_2 \qquad\quad + \frac{1}{2}x_4 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 \; - \frac{7}{10}x_4 = -\frac{3}{5} \end{cases} \tag{3}$$

e tem exatamente as mesmas soluções do sistema original (1).

3^a Etapa) Resolver o sistema linear obtido na Etapa 2.

Resolvendo cada equação para a incógnita correspondente ao primeiro elemento não-nulo de cada linha não-nula do sistema linear (3), temos:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{5} - \frac{3}{10}r \\ x_2 = -\frac{1}{2}r \\ x_3 = -\frac{3}{5} + \frac{7}{10}r \\ x_4 = r \end{cases} \tag{4}$$

onde r é um número real arbitrário.

Logo (4) é a solução do sistema linear dado (1). Como r pode assumir qualquer valor real, o sistema dado (1) tem uma infinidade de soluções.

b) Seja

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -6 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

a matriz dos coeficientes.

Podemos expandir o determinante em relação à uma linha ou coluna. É claro que é melhor expandir em relação a uma linha ou coluna que tenha o maior número de zeros, já que, nesse caso, os cofatores A_{ij} dos a_{ij} que são nulos não precisam ser calculados, uma vez que $a_{ij}A_{ij} = (0)(A_{ij}) = 0$.

Expandindo, então, em relação à terceira linha, obtemos:

$$det(A) = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34} \tag{5}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$$

onde M_{ij} é o determinante menor de a_{ij}.

Assim, temos:

$$A_{31} = (-1)^{3+1} det(M_{31}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -6 & -1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} \tag{6}$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} det(M_{32}) = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \tag{7}$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} det(M_{33}) = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \tag{8}$$

A_{34} não vamos calcular pois $a_{34} = 0$.

Expandindo $det(M_{31}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -6 & -1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ em relação à primeira linha, por exemplo, temos:

$$det(M_{31}) = (1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(5) - 3(4) - 1(-13) = 6$$

De maneira análoga para $det(M_{32})$ e $det(M_{33})$ temos

$$det(M_{32}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2(5) - 3(5) - 1(5) = -10$$

e

$$det(M_{33}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(4) - 1(5) - 1(17) = -14$$

Logo, temos de (6), (7) e (8) que

$$A_{31} = (1)(6) = 6$$
$$A_{32} = (-1)(-10) = 10$$
$$A_{33} = (1)(-14) = -14$$

Substituindo esses valores em (5) temos:

$$det(A) = (-1)(6) + 2(10) + 1(-14) + 0(A_{34})$$
$$det(A) = -6 + 20 - 14 + 0$$
$$det(A) = 0$$

2^a Questão)

a) Para determinarmos a matriz inversa dos coeficientes, faremos uso da forma escada reduzida por linhas. Para isso consideremos a matriz aumentada $A = [C|I]$ onde C é matriz dos coeficientes e I é a matriz identidade 3×3.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora precisamos fazer operações sucessivas nas linhas para chegar a sua forma escada reduzida por linhas. Primeiro faremos com que o primeiro elemento não nulo de cada linha da matriz dos coeficientes seje 1. Assim temos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} L_1 \times \tfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - 2 \times L_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Retira-se a primeira linha da matriz e faz-se o mesmo na nova matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} L_1 \times \tfrac{2}{5} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 4 \times L_1 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \frac{-9}{5} & \frac{-8}{5} & 1 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow \tfrac{-1}{4} \times L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{20} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix}$$

Logo chegamos a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{20} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix}$$

Lembrando que precisamos botar na forma escada reduzida por linhas a matriz dos coeficientes, isto é, as três primeiras colunas da matriz anterior. Temos que o primeiro elemento não-nulo de cada linha é 1 e que linhas não nulas têm o primeiro elemento não-nulo à direita do primeiro elemento não-nulo da linha anterior. Assim, temos que zerar todos os elementos não-nulos das colunas que contém o primeiro elemento não-nulo de cada linha. Então temos

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{20} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - \tfrac{1}{2} L_2 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{9}{20} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3, \;\; L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{20} & \frac{-3}{5} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{20} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix}$$

Chegamos na forma escada reduzida por linhas da matriz dos coeficientes, que é a matriz identidade. Logo temos que a matriz abaixo é a inversa da matriz dos coeficientes:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{20} & \frac{-3}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{9}{20} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix}$$

Para resolvermos o sistema $Cx = b$ é só encontrarmos $x = C^{-1}b$. Então:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = C^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{-1}{20} & \frac{-3}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{9}{20} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ 0 \\ \frac{-3}{5} \end{bmatrix}.$$

Assim temos que a solução do sistema é: $(\frac{7}{5}, 0, \frac{-3}{5})$.

b) Consideremos $[C|b]$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

O pivô $\hat{a}_{11} = max\{|2|, |-1|, |2|\} = 2$. Como$|a_{11}| = |a_{31}|$, podemos deixar do mesmo modo. Logo temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} m_{21} = \frac{-1}{2}, \quad m_{31} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \quad L_2 \leftarrow L_2 - m_{21}L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - m_{31}L_1 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O pivô $\hat{a}_{22} = max\{|-4|, |\frac{5}{2}|\} = 4$. Logo devemos trocar a linha 2 pela linha 3:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix} m_{32} = \tfrac{5}{8}, \quad L_3 \leftarrow L_3 - \tfrac{5}{8}L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}$$

Assim, transformamos a matriz dos coeficientes em uma matriz triangular superior. A partir disso, temos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_2 &= 0 \\ \frac{5}{2}x_3 &= \frac{-3}{2} \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema de baixo para cima temos que $x_3 = \frac{-3}{5}, x_2 = 0, x_1 = \frac{7}{5}$. Logo a solução do sistema linear é $S = (\frac{7}{5}, 0, \frac{-3}{5})$.

3^a Questão) Solução: Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y) \rightarrow (x + ky, x + k, y)$$

Vejamos em cada caso se T é linear:

$a)$ Para $k = x$, obtemos $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y) \rightarrow (x + xy\, ,\, 2x\, ,\, y)$$

Note inicialmente que T satisfaz a condição necessária, dada por $T(0,0) = (0,0,0)$. Assim passamos a verificar se satisfaz as duas condições de linearidade.
Seja $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$, $u, v \in \mathbb{R}^2$.

i) $T(u+v) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) + ((x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)\, , 2(x_1 + x_2)\, , y_1 + y_2) =$
$= (x_1 + x_1y_1 + x_1y_2 + x_2 + x_2y_1 + x_2y_2\, ,\, 2x_1 + 2x_2\, ,\, y_1 + y_2) = (x_1 + x_1y_1\, ,\, 2x_1\, ,\, y_1)$
$+ (x_2 + x_2y_2\, ,\, 2x_2\, ,\, y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1, 0, 0) = T(u) + T(v) + (x_1y_2 + x_2y_1, 0, 0) \neq T(u) + T(v)$

ii) $T(\alpha u) = T(\alpha x_1\, ,\, \alpha y_1) = (\alpha x_1 + \alpha^2 x_1 y_1\, ,\, 2\alpha x_1\, ,\, \alpha y_1) = \alpha(x_1 + \alpha x_1 y_1\, ,\, 2x_1\, ,\, y_1) \neq \alpha T(u)$

Logo, T não é linear.

b) Para $k = 1$, obtemos $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$(x, y) \to (x + y \, , \, x + 1 \, , \, y)$$

Uma condição necessária para que a Transformação T seja linear é: $T(0, 0) = (0, 0, 0)$. Note que nesse caso $T(0, 0) = (0, 1, 0)$. Logo T é não linear.

c) Para $k = 0$, obtemos $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$(x, y) \to (x \, , \, x \, , \, y)$$

Note inicialmente que T satisfaz a condição necessária, dada por $T(0, 0) = (0, 0, 0)$.

Seja $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$, $u, v \in \mathbb{R}^2$.

i) $T(u+v) = T(x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_1+x_2 \, , \, x_1+x_2 \, , \, y_1+y_2) = (x_1 \, , \, x_1 \, , \, y_1)+(x_2 \, , \, x_2 \, , \, y_2) = T(u) + T(v)$

ii) $T(\alpha u) = T(\alpha x_1 \, , \, \alpha y_1) = (\alpha x_1 \, , \, \alpha x_1 \, , \, \alpha y_1) = \alpha(x_1 \, , \, x_1 \, , \, y_1) = \alpha T(u)$

Como as duas condições são satisfeitas temos, neste caso, que T é linear.

4^a Questão) a)

$$x - 3y = 0$$

$$x - z = 0$$

$$z - x = 0$$

Assim temos que $x = z = 3y$. Logo temos que $(3y, y, 3y) = y(3, 1, 3)$ pertence ao núcleo de T. Tomando y=a, temos que $N(T) = \{a(3, 1, 3), a \in \Re\}$ ou $N(T) = [(3, 1, 3)]$. Logo, $\{(3, 1, 3)\}$ é base para o núcleo de T, com $dim(N(T)) = 1$.

Sabemos que T é injetora $\iff N(T) = 0$. Logo a transformação T não é injetora, pois $N(T) \neq 0$.

b) Sejam $a, b, c \in \Re$.

$$x - 3y = a \tag{9}$$

$$x - z = b \tag{10}$$

$$z - x = c \tag{11}$$

Fazendo (9) - (10) e (9) + (11) temos:

$$x - 3y = a \tag{12}$$

$$-3y + z = a - b \tag{13}$$

$$-3y + z = a + c \tag{14}$$

Igualando (13) e (14) temos que $c = -b$. logo $Im(T) = \{(a, b, c) \in \Re^3 / c + b = 0\}$.

Temos também que $(a, b, c) = (a, b, -b) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, -1)$. Como os vetores são L.I então $Im(T) = [(1, 0, 0), (0, 1, -1)]$. Logo o conjunto $\{(1, 0, 0), (0, 1, -1)\}$ é base para $Im(T)$, com $dim(Im(T)) = 2$. Observe que o teorema do núcleo- imagem está satisfeito, isto é, $Dim(T) = dim(N(T)) + dim(Im(T))$.

Temos que $T : \Re^3 \to \Re^3$, isto é, as dimensões do domínio e do contradomínio da transformação são iguais. Logo T é injetora $\Longleftrightarrow$ T é sobrejetora.

Como pelo item a) T não é injetora, então T não é sobrejetora.

5^a Questão) Solução:

i) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Um número real λ é um autovalor de A se existe um vetor não-nulo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$Ax = \lambda x \tag{15}$$

Todo vetor não-nulo x satisfazendo (15) é chamado um autovetor de A associado ao autovalor λ.

Queremos encontrar os autovalores de A e seus autovetores associados. Queremos, então, encontrar todos os números reais λ e todos os vetores não-nulos

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

satisfazendo (15), isto é

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{16}$$

A equação (16) fica

$$x_1 + 3x_2 = \lambda x_1$$

$$-x_1 + 5x_2 = \lambda x_2$$

ou

$$\begin{aligned} (\lambda - 1)x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 + (\lambda - 5)x_2 = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

A equação (17) é um sistema homogêneo com duas equações e duas incógnitas, que possui uma solução não-trivial se e somente se o determinante de sua matriz de coeficientes é diferente de zero, isto é, se e somente se

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ 1 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = 0$$

Ou seja queremos determinar as raízes do polinômio característico $P(\lambda)$ dado por

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 5) + 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda + 4) = 0$$

Logo $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$ são as raízes do polinômio característico e portanto são os autovalores de A.

Para encontrarmos os autovetores de A associados a $\lambda_1 = 2$, formamos o sistema linear $Ax = 2x \equiv (A - 2I)x = 0$, ou

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isso nos dá

$$-x_1 + 3x_2 = 0$$

Todas as soluções desse último sistema são dadas por:

$$x_1 = 3x_2$$

Seja

$$x_2 = \text{um número real r arbitrário}$$

Assim, todos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$ são dados por $\begin{bmatrix} 3r \\ r \end{bmatrix}$, onde r é um número real qualquer não-nulo.

Analogamente, para $\lambda_2 = 4$, obtemos de (17)

$$(4-1)x_1 - 3x_2 = 0$$

$$x_1 + (4-5)x_2 = 0$$

ou

$$3x_1 - 3x_2 = 0$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

Todas as soluções desse último sistema homogêneo são dadas por:

$$x_1 = x_2$$

$$x_2 = \text{um número real r arbitrário}$$

Portanto, todos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 4$ são dados por $\begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix}$, onde r é qualquer número real não-nulo.

ii) Seja

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vamos agora, encontrar os autovalores e os autovetores associados de uma outra maneira. Sendo $f(\lambda) = det(B - \lambda I_3)$ o polinômio característico de B e a equação $f(\lambda) = det(B - \lambda I_3) = 0$, chamada equação característica de B, temos por um teorema que os autovalores de B são as raízes do polinômio característico de B. Assim, seu polinômio característico é:

$$f(\lambda) = det(B - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \tag{18}$$

$$f(\lambda) = (3-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)$$

As raizes possíveis de $f(\lambda)$ são $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = -1$, que são os autovalores de B.

Para encontrar um autovetor $\vec{x_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ associado a $\lambda_1 = 3$, formamos o sistema:

$$Bx = \lambda x \quad (\text{ no caso } \lambda_1 = 3)$$

$$(B - 3I_3)x = 0$$

De (18) temos

$$\begin{bmatrix} 3-3 & -1 & -3 \\ 0 & 2-3 & -3 \\ 0 & 0 & -1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 + 3x_3 = 0$$

$$-x_2 + 3x_3 = 0$$

$$-4x_3 = 0$$

Portanto, todos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 3$ são dados por $r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

onde r é qualquer número real não-nulo.

Para encontrar um autovetor $\vec{x_2}= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ associado ao autovalor $\lambda_2 = 2$, formamos o sistema:

$$(B - 2I_3)x = 0$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} 3-2 & -1 & -3 \\ 0 & 2-2 & -3 \\ 0 & 0 & -1-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 - x_2 - 3x_3 = 0$$

$$-3x_3 = 0$$

$$-3x_3 = 0$$

Logo $x_3 = 0$ e substituindo na primeira equação obtemos que $x_1 = x_2 = r$, onde $r \in \Re$, $r \neq 0$

Portanto, o autovetor v_2 associado ao autovalor $\lambda_2 = 2$ é $r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Para encontrar um autovetor $\vec{x_3}= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ associado ao autovalor $\lambda_3 = -1$, formamos o sistema:

$$(B + 1I_3)x = 0$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} 3-(-1) & -1 & -3 \\ 0 & 2-(-1) & -3 \\ 0 & 0 & -1-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$4x_1 - x_2 - 3x_3 = 0$$

$$3x_2 - 3x_3 = 0$$

Portanto, todos os autovetores v_3 associados ao autovalor $\lambda_3 = -1$ são dados por $r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, onde r é qualquer número real não-nulo.