# Álgebra Linear

## Aula 3: Espaços Vetoriais 2

Mauro Rincon

Márcia Fampa

cederj

# 2.7 - Dependência e Independência Linear

Definição: Os vetores $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n} \in V$ são chamados linearmente dependentes (LD) se

$$\alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} + \cdots + \alpha_n\mathbf{v_n} = \mathbf{0}$$

para algum $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$. Caso contrário dizemos que são LI.

# 2.7 - Dependência e Independência Linear

Exemplo 1:

Seja $V = \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{v_1} = (1,2)$, $\mathbf{v_2} = (0,1)$ e $\mathbf{v_3} = (-1,1)$. Verifique se os vetores são LD ou LI.

Com efeito,

$\alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} + \alpha_3\mathbf{v_3} = \mathbf{0} \Leftrightarrow$

$(\alpha_1 - \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = (0,0)$

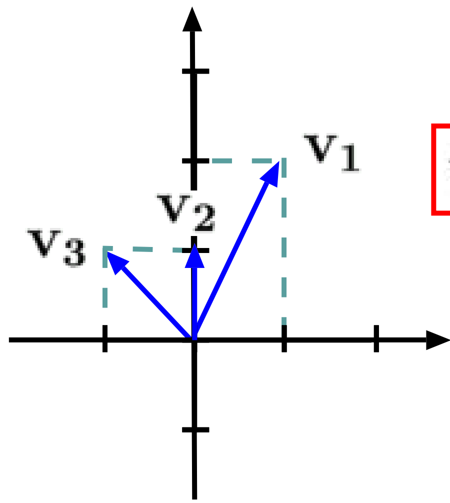
Igualando os termos,

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha_1 - \alpha_3 & = & 0 \\ 2\alpha_2 + \alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_3 \\ \alpha_2 = -2\alpha_1 - \alpha_3 = -3\alpha_1 \end{array}$$

# 2.7 - Dependência e Independência Linear

Tomando $\alpha_3 = a \to \alpha_1 = a \ \wedge \ \alpha_2 = -3a$.
Logo, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (a, -3a, a) \ \forall a \in \mathbb{R}$
Assim, $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_2}\}$ são LD.

Geometricamente:




$$\boxed{\mathbf{v_3} = -1\mathbf{v_1} + 3\mathbf{v_2}}$$

## 2.7 - Dependência e Independência Linear

Exemplo 2:

Considere agora somente os vetores $\mathbf{v_1} = (1,2)$ e $\mathbf{v_2} = (0,1)$ em $V$. Então $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ são LI ou LD.

Com efeito,

$\alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} = 0 \Leftrightarrow (\alpha_1, 2\alpha_1 + \alpha_2) = (0,0)$

Logo,

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 & = & 0 \end{array}\right\} \boxed{\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0}$$

Assim, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) = (0,0) \Rightarrow \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ são LI.

# 2.7 - Dependência e Independência Linear

Exemplo 3:

Seja $V = M_{3\times 1}(\mathbb{R})$. Verifique se os vetores

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$ são LI ou LD.

Com efeito, $\alpha_1 \mathbf{v_1} + \alpha_2 \mathbf{v_2} = 0 \Leftrightarrow$

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \alpha_2 = 0}$$

Assim, $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ são LI.

# 2.7 - Dependência e Independência Linear

Exemplo 4:

$V = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$, onde
$p_1(x) = x^2 + x - 1$, $p_2(x) = 2x + 3$ e
$p_3(x) = -x^2 + 1$.
$V$ é um conjunto LD ou LI?

$$\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\alpha_1(x^2 + x - 1) + \alpha_2(2x + 3) + \alpha_3(-x^2 + 1) = 0$$
$$0x^2 + 0x + 0 = 0$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & - & & & \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & & & = & 0 \\ -\alpha_1 & + & 3\alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \end{array}\right\} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$\therefore V$ é LI.

# 2.7 - Dependência e Independência Linear

Exemplo 5:

Verifique que todo conjunto $V$ contendo o vetor nulo é um conjunto LD.

Com efeito, seja $V = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_i}, \cdots, \mathbf{v_n}\}$, onde $\mathbf{v_i} = \mathbf{0}$. Então,

$\alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} + ... + \alpha_i\mathbf{v_i} + ... + \alpha_n\mathbf{v_n} = \mathbf{0}$

tem pelo menos uma solução não trivial, por exemplo: $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0 \wedge \alpha_i \neq 0$

# 2.7 - Dependência e Independência Linear

Teorema: Um conjunto $V = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_i}, \cdots, \mathbf{v_n}\}$ é LD se, e somente se, pelo menos um destes é combinação linear dos outros.

# 2.7 - Dependência e Independência Linear

➡ Demonstração:

$(\Rightarrow)$ Seja $V$ LD. Por definição, existe pelo menos uma constante $\alpha_i \neq 0$, tal que

$$\alpha_1 \mathbf{v_1} + \alpha_2 \mathbf{v_2} + \ldots + \alpha_i \mathbf{v_i} + \ldots + \alpha_n \mathbf{v_n} = \mathbf{0}$$

Logo,

$$\boxed{\mathbf{v_i} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\mathbf{v_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_i}\mathbf{v_2} \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i}\mathbf{v_n}}$$

ou seja, $\mathbf{v_i}$ é uma combinação linear dos outros vetores.

# 2.7 - Dependência e Independência Linear

($\Leftarrow$) Seja $\mathbf{v_i}$ uma combinação linear dos outros vetores,

$$\mathbf{v_i} = \beta_1\mathbf{v_1} + \beta_2\mathbf{v_2} + ... + \beta_{i-1}\mathbf{v_{i-1}} + \beta_{i+1}\mathbf{v_{i+1}} + ... + \beta_n\mathbf{v_n} \Rightarrow$$

$$\beta_1\mathbf{v_1} + \beta_2\mathbf{v_2} + ... + \beta_{i-1}\mathbf{v_{i-1}} - 1\mathbf{v_i} + \beta_{i+1}\mathbf{v_{i+1}} + ... + \beta_n\mathbf{v_n} = 0$$

Como $\beta_i = -1 \neq 0$ então $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n}\}$ é <u>LD</u>. ■

⇨ <u>Corolário</u>: Um conjunto $V = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n}\}$ é LI se, e somente se, nenhum desses vetores for combinação linear dos outros.

## 2.7 - Dependência e Independência Linear

Exemplo: Considere $V = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ e $W = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$, onde $\mathbf{v_1} = (1,2)$, $\mathbf{v_2} = (0,1)$ e $\mathbf{v_3} = (-1,1)$. Vimos que $V$ é LD e $W$ é LI.
Mostremos que $\mathbf{v_3}$ é combinação linear de $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$.

De fato,

$$\mathbf{v_3} = \alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} \Leftrightarrow$$
$$(-1,1) = \alpha_1(1,2) + \alpha_2(0,1) = (\alpha_1, 2\alpha_1 + \alpha_2)$$

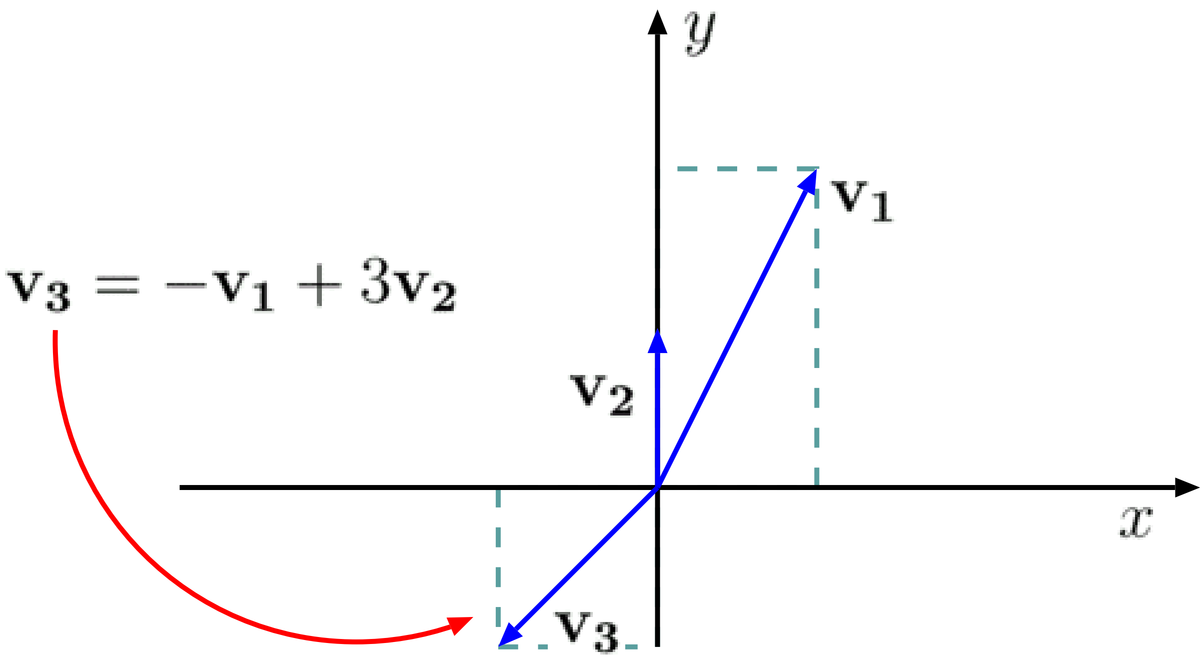
Logo, $\boxed{\alpha_1 = -1 \wedge \alpha_2 = 3}$

Ou seja, $\boxed{\mathbf{v_3} = -\mathbf{v_1} + 3\mathbf{v_2}}$

# 2.7 - Dependência e Independência Linear

Pode-se mostrar também que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v_1} & = & 3\mathbf{v_2} & - & \mathbf{v_3} \\ \mathbf{v_2} & = & \frac{1}{3}\mathbf{v_1} & + & \frac{1}{3}\mathbf{v_3} \end{bmatrix}$$



## 2.7 - Dependência e Independência Linear

**Propriedades de Dependência e Independência Linear**

Seja $V$ um espaço vetorial.

**1)** Se $S = \{\mathbf{v}\} \subset V \wedge \mathbf{v} \neq 0$ então $S$ é LI.

**2)** Considera-se, por definição, que $\emptyset \subset V$ é LI.

**3)** Se $S_1 \subset S$ é LD $\Rightarrow S$ é LD.

**4)** Se $S$ é LI então $S_1 \subset S$ também é LI.

**5)** Se $S_1 = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n}\} \subset V$ é LI e $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n}, \mathbf{w}\} \subset V$ é LD, então $w = \alpha_1 \mathbf{v_1} + \alpha_2 \mathbf{v_2} + \ldots + \alpha_n \mathbf{v_n}$

## Exercícios

- Fazer os exercícios das páginas 183 e 184 do livro texto.

# 2.8 - Base e dimensão

## 2.8.1 - Base de um espaço vetorial $V$

Um conjunto $B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n}\} \subset V$ é uma base do espaço vetorial $V$ se:

**a)** $B$ é LI

**b)** $B$ gera $V \Leftrightarrow [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n}] = V$

## 2.8 - Base e dimensão

- Exemplo 1: $B = \{(1,0) \text{ e } (1,1)\}$ é base do $\mathbb{R}^2$:

  **a)** $B$ é LI

  $\alpha_1(1,0) + \alpha_2(1,1) = (0,0) \Leftrightarrow$

  $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2) = (0,0) \Leftrightarrow \boxed{\alpha_1 = \alpha_2 = 0}$

  **b)** $[B] = \mathbb{R}^2$. Seja $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Então:

  $(x,y) = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(1,1) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2)$

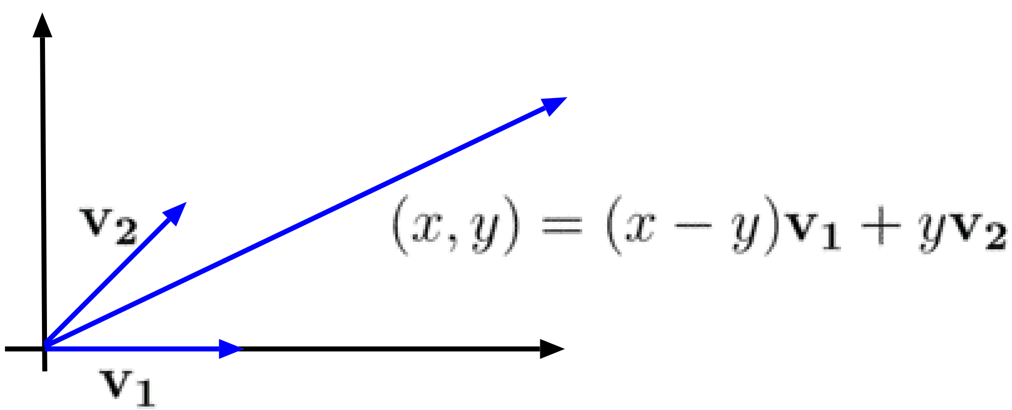
  Logo, $\boxed{\alpha_2 = y \text{ e } \alpha_1 = x - y}$

## 2.8 - Base e dimensão

Assim, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, têm-se:

$$(x, y) = (x - y)(1, 0) + y(1, 1)$$

De **a)** e **b)** têm-se que $B$ é uma base do $\mathbb{R}^2$.



# 2.8 - Base e dimensão

Observações:

**1)** Quando $B = \{(1,0),(0,1)\}$ então $B$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, denominada canônica. De fato:

**a)** $B$ é LI, pois
$\alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

**b)** $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \boxed{(x,y) = x(1,0) + y(0,1)}$

**2)** De forma análoga temos que:
$B = \{(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,1)\}$
é uma base do $\mathbb{R}^n$, denominada base canônica.

**3)** Para $B = \{1\}$ então temos a base canônica do $\mathbb{R}$.

## 2.8 - Base e dimensão

- Exemplo 2:
  Seja
  $$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$
  Mostre que $B$ é uma base para $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

## 2.8 - Base e dimensão

De fato:

**a)** $B$ é LI, pois:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, $\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$

**b)** $[B] = M_{22}$, pois:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 2.8 - Base e dimensão

- Exemplo 3:
  $B = \{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ é uma base do espaço vetorial $P_n$. De fato,

  **a)** $B$ é LI, pois:
  $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n = 0$
  Logo, $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$

  **b)** Seja $p \in P_n$ então
  $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$. Logo $p$ é uma combinação linear de $B$. Portanto, $B$ é uma base para $P_n$, chamada de base canônica. Observe que a base $B$ tem $(n+1)$ vetores: $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$

## 2.8 - Base e dimensão

- Exemplo 4:
  $B = \{(1,-1),(3,-3)\}$ não é uma base de $\mathbb{R}^2$, pois $B$ é LD.

- Exemplo 5:
  $B = \{(1,-1)\}$ não é uma base de $\mathbb{R}^2$, pois $B$ não gera o $\mathbb{R}^2$.
  De fato, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) \neq \alpha_1(1,-1)$

## 2.8 - Base e dimensão

Observação: Todo conjunto LI de um espaço vetorial $V$ é base do subespaço por ele gerado.

- Exemplo:
  $B = \{(1, 2, 1), (-1, -3, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ é LI e gera o subespaço
  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 3x - y - z = 0\}$.
  Então $B$ é uma base de $S$.

## 2.8 - Base e dimensão

Teorema:
Se $B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n}\}$ é uma base de um espaço vetorial $V$, então todo conjunto com mais de $\underline{n}$ vetores é LD.

De fato,
Seja $B' = \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \cdots, \mathbf{w_m}\}$ um conjunto de $m$ vetores de $V$, com $m > n$. Queremos mostrar que $B'$ é LD. Sejam $x_1, x_2, \cdots, x_m$ não todos nulos tais que:

$$\boxed{x_1\mathbf{w_1} + x_2\mathbf{w_2} + ... + x_m\mathbf{w_m} = \mathbf{0}} \quad (1)$$

## 2.8 - Base e dimensão

Como $B$ é uma base de $V$ e $\mathbf{w_i} \in B' \subset V$ então $\exists\ \alpha_i, \beta_i, ..., \eta_i$ tal que:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{w_1} & = & \alpha_1\mathbf{v_1} & + & \alpha_2\mathbf{v_2} & + & ... & + & \alpha_n\mathbf{v_n} \\ \mathbf{w_2} & = & \beta_1\mathbf{v_1} & + & \beta_2\mathbf{v_2} & + & ... & + & \beta_n\mathbf{v_n} \\ \vdots & = & \vdots & + & \vdots & + & ... & + & \vdots \\ \mathbf{w_m} & = & \eta_1\mathbf{v_1} & + & \eta_2\mathbf{v_2} & + & ... & + & \eta_n\mathbf{v_1} \end{array}\right. \quad ②$$

Substituindo ② em ① e ordenando os termos:

$$\begin{array}{rcl} (\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + ... + \eta_1 x_m)\mathbf{v_1} & + & \\ (\alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \eta_2 x_m)\mathbf{v_2} & + & \\ \vdots & & \\ (\alpha_n x_1 + \beta_3 x_2 + ... + \eta_n x_m)\mathbf{v_n} & = & \mathbf{0} \end{array} \quad ③$$

## 2.8 - Base e dimensão

Como os vetores $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n}\}$ são uma base para $V$ então eles são LI. Então,

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \alpha_1 x_1 & + & \beta_1 x_2 & + & \ldots & + & \eta_1 x_m & = & 0 \\ \alpha_2 x_1 & + & \beta_2 x_2 & + & \ldots & + & \eta_2 x_m & = & 0 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \ldots & = & 0 \\ \alpha_n x_1 & + & \beta_n x_2 & + & \ldots & + & \eta_n x_m & = & 0 \end{array}\right.$$

Sendo $m > n$, o sistema admite mais de uma solução, além da solução trivial.

$\therefore B' = \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \cdots, \mathbf{w_m}\}$ é LD. ■

## 2.8 - Base e dimensão

<u>Corolário</u>: Duas bases quaisquer de um espaço vetorial têm o mesmo número de vetores.
De fato, sejam

$$A = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n}\}$$
$$B = \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \cdots, \mathbf{w_m}\}$$

duas bases para $V$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Como } A \text{ é base e } B \text{ é LI} \Rightarrow n \geq m \\ \text{Como } B \text{ é base e } A \text{ é LI} \Rightarrow m \geq n\end{array}\right\} m = n$$

# 2.8 - Base e dimensão

Exemplos:

**1)** A base canônica do $\mathbb{R}^3$ tem três vetores. Logo, qualquer base do $\mathbb{R}^3$ tem três vetores.

**2)** A base canônica de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tem quatro vetores. Portanto, toda base do $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tem quatro vetores.

**3)** A base canônica de $P_n$ tem $(n+1)$ vetores. Portanto, toda base do $P_n$ tem $(n+1)$ vetores.

# 2.8 - Base e dimensão

## 2.8.2 - Dimensão de um espaço vetorial $V$

Definição: A dimensão de um espaço vetorial $V$ não nulo é o número de vetores de uma base para $V$.
Denota-se por dim $V$.

Se $V$ não possui base, dim $V = 0$ (por exemplo, $V = \{0\}$ é LD)

Exemplos:

**1)** $\dim \mathbb{R} = 1$
**2)** $\dim \mathbb{R}^n = n$
**3)** $\dim M_{2\times 2} = 4$
**4)** $\dim M_{m\times n} = m \times n$
**5)** $\dim P_n = n + 1$

cederj

## 2.8 - Base e dimensão

Observação: Seja $V$ um espaço vetorial, $\dim V = n$. Se $S \subset V$ é um subespaço de $V \Rightarrow \dim S \leq n$. Se $\dim S = n \Rightarrow S = V$.

Suponha $V = \mathbb{R}^3$. Então se $S \subset \mathbb{R}^3$, temos $\dim S = 0, 1, 2$ ou $3$

**a)** $\dim S = 0 \Rightarrow S = \{0\}$

**b)** $\dim S = 1 \Rightarrow S$ é uma reta, passando pela origem

**c)** $\dim S = 2 \Rightarrow S$ é um plano, passando pela origem

**d)** $\dim S = 3 \Rightarrow S = \mathbb{R}^3$

## 2.8 - Base e dimensão

Teorema: Seja $V$ um espaço vetorial de dimensão $n$. Qualquer conjunto de vetores LI em $V$ é parte de uma base, isto é, pode ser completado até formar uma base de $V$.

Demonstração: Exercício

## 2.8 - Base e dimensão

Exemplo: Sejam $\mathbf{v_1} = (1, 0, 2)$ e $\mathbf{v_2} = (0, -1, 3)$. Complete o conjunto $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ de modo a formar uma base do $\mathbb{R}^3$.

Sabemos que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Deve-se acrescentar um vetor

$\mathbf{v_3} = (a, b, c) \neq \alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} = (\alpha_1, -\alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2)$

Existem infinitos vetores, por exemplo,

$\mathbf{v_3} = (2, -1, 0)$.

$\therefore \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$

## 2.8 - Base e dimensão

Teorema: Seja $B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n}\}$ uma base de um espaço vetorial $V$. Então, todo vetor $\mathbf{v} \in V$ se exprime de maneira única como combinação linear dos vetores de $B$.

## 2.8 - Base e dimensão

Demonstração:

$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v_1} + \alpha_2 \mathbf{v_2} + \ldots + \alpha_n \mathbf{v_n}$ ①

Suponha, por absurdo, que $\mathbf{v}$ pode ser representado por:

$\mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{v_1} + \beta_2 \mathbf{v_2} + \ldots + \beta_n \mathbf{v_n}$ ②

Subtraindo membro a membro, temos:

$\mathbf{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{v_1} + (\alpha_2 - \beta_2)\mathbf{v_2} + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{v_n}$

Sendo $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n}\}$ uma base $\Rightarrow$ LI. Assim,

$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \ldots = \alpha_n - \beta_n = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_i = \beta_i}$

$\therefore$ A representação de $\mathbf{v}$ é única.

## Exercícios

- Fazer os exercícios das páginas 191 a 193 do livro texto.