# Gabarito

# Álgebra Linear: AD1 - CEDERJ

## Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2018.1

## Tutores: Gabriel Thomaz e Rodrigo Olimpio

$1^a$ Questão) Solução:

Vamos encontrar o espaço $S^t$. Para isto, considere $(x, y, z, w) \in S^t$ :

$(x, y, z, w).(1, 1, 0, -1) = 0, (x, y, z, w).(1, -2, 1, 0) = 0$. Assim, temos o seguinte sistema:

$$x + y - w = 0$$

$$x - 2y + z = 0$$

Pela linha 1, $x = w - y$. Pela linha 2, $2y - z$. Logo, comparando estes dois valores: $w - y = 2y - z \Longrightarrow w + z = 3y \Longrightarrow y = \frac{w+z}{3}$.

Substituindo $y$ na linha 1, encontramos $x = \frac{2w-z}{3}$.

Logo $(x, y, z, w) = (\frac{2w-z}{3}, \frac{w+z}{3}, z, w) = z(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0) + w(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1)$.

Agora vamos ortonormalizar o conjunto: $\left\{(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1)\right\}$.

Por Gram schmidt:

$w_1 = \left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0\right)$.

Temos que

$$w_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1\right) - \left(\frac{(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1).(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0)}{(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0).(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0)}\right)\left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1\right) - \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1\right) - \left(\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}, \frac{-1}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right).$$

Agora, vamos normalizar:

$||w_1|| = \frac{\sqrt{11}}{3}$

$||w_2|| = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Dividindo os vetores $w_1$ e $w_2$ por suas respectivas normas, temos a seguinte base ortonormal :

$\left\{(\frac{-\sqrt{11}}{11}, \frac{\sqrt{11}}{11}, \frac{3\sqrt{11}}{11}, 0), (\frac{\sqrt{7}}{7}, \frac{\sqrt{7}}{7}, \frac{\sqrt{7}}{7}, \frac{2\sqrt{7}}{7})\right\}.$

$2^a$ Questão) Solução:

a) Vamos usar a definição de ortogonalidade entre vetores e o produto interno não usual dado. Assim temos:

$(a, b.c)(1, 2, 1) = 0$ , $(a, b, c).(1, 1, 1) = 0$. Usando o produto dado:

$2.a.1 + 3.b.2 + c.1 = 0 \Longrightarrow 2a + 6b + c = 0.$

$2.a.1 + 3.b.1 + c.1 = 0 \Longrightarrow 2a + 3b + c = 0$

Pela linha 1, $c = -2a - 6b$ e pela linha 2, $c = -2a - 3b$. Igualando estes dois valores de $c$, temos que $b = 0$. Logo, $c = -2a$

Deste modo, $(a, b, c) = (a, 0, -2a) = a(1, 0, -2)$. Então, vamos normalizar o vetor:

$||(1, 0, -2)|| = \sqrt{(1, 0, -2).(1, 0, -2)} = \sqrt{2.1.1 + 3.0.0 + (-2).(-2)} = \sqrt{2 + 4} = \sqrt{6}.$

Dividindo o vetor por sua norma(não usual) , temos o vetor unitário : $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, 0, \frac{-2\sqrt{6}}{6}\right).$

$3^a$ Questão) Solução:

a) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ :

$a(9, -12, -6) + b(-1, 7, 1) = (-4, -6, 2)$

Assim temos o sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 9a - b = -4 \\ -12a + 7b = -6 \\ -6a + b = 2 \end{array}\right\}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow 9L_2 + 12L_1$ , $L_3 \leftarrow 9L_3 + 6L_1$ :

$$\left\{\begin{array}{l} 9a - b = -4 \\ 0 + 51b = -102 \\ 0 + 3b = -6 \end{array}\right\}$$

Por $L_3$, $b = -2$. Substituindo em $L_1$, $a = \frac{2}{3}$.

Logo, como o sistema tem solução, $U$ é combinação linear de $V$ e $W$.

b) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ :

$a(5,4,-3) + b(2,1,1) = (-3,-4,1)$

Assim temos o sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 5a + 2b = -3 \\ 4a + b = -4 \\ -3a + b = 1 \end{array}\right\}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow 5L_2 - 4L_1$ , $L_3 \leftarrow 5L_3 + 3L_1$ :

$$\left\{\begin{array}{l} 5a + 2b = -3 \\ 0 - 3b = -8 \\ 0 + 11b = -4 \end{array}\right\}$$

Por $L_3$, $b = \frac{-4}{11}$. E por $L_2$ , $b = \frac{8}{3}$. Dois valores diferentes para $b$.

Logo, como o sistema não tem solução, $U$ não é combinação linear de $V$ e $W$.

$4^a$ Questão) Solução:

a) Vamos analisar os vetores $AB, ACeAD$, verificando a condição de coplanaridade ($det = 0$).

$$AB = B - A = (3,1,2) - (2,2,1) = (1,-1,1).$$

$$AC = C - A = (2,3,0) - (2,2,1) = (0,1,-1).$$

$$AD = D - A = (2,3,2) - (2,2,1) = (0,1,1).$$

Agora, calculamos o determinante com as linhas da matriz formada pelos vetores encontrados:

$$det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$det = 2$. Portanto, os pontos A, B , C , D não são coplanares.

b)

$$AB = B - A = (3,2,0) - (2,0,2) = (1,2,-2).$$

$$AC = C - A = (0,2,1) - (2,0,2) = (-2,2,-1).$$

$$AD = D - A = (10,-2,1) - (2,0,2) = (8,-2,-1).$$

Agora, calculamos o determinante com as linhas da matriz formada pelos vetores encontrados:

$$det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 8 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$det = 0$. Portanto, os pontos A, B , C , D são coplanares.

$5^a$ Questão) Solução:

Para determinar $m$, vamos precisar do vetor diretor da reta $r$ e do vetor normal ao plano $\Pi$, e verificar para qual valor de $m$ o produto interno desses dois vetores é igual a 0.

1)Cálculo do vetor diretor de $r$:

Dado uma reta na forma $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ onde $(x_0, y_0, z_0)$ é um ponto onde a reta passa, o vetor diretor dessa reta é dado por $V = (a, b, c)$.

Assim, no nosso caso, o vetor diretor de $r$ é dado por $V = (2, m, 1)$.

2)Cálculo do vetor normal a $\Pi$:

Dado uma equação do plano na forma $ax + by + cz + d = 0$, o vetor normal a esse plano é dado por $N = (a, b, c)$.

Assim, no nosso caso, o vetor normal a $\Pi$ é dado por $N = (2, -1, -2)$.

Agora, fazendo $V.N = (2, m, 1).(2, -1, -2) = 4 - m - 2$. E como queremos que $V$ e $N$ sejam perpendiculares, $V.N = 0$. Portanto,

$$4 - m - 2 = 0 \Longrightarrow 2 - m = 0 \Longrightarrow m = 2.$$

Assim, para $m = 2$ a reta e o plano são paralelos. A reta não está contida no plano pois o ponto da reta (1, 1, 1) não satisfaz a equação do plano. Para verificar isso, basta substituirmos (1,1,1) na equação do plano e vamos achar uma incoerência:

$$2 * 1 - 1 - 2 * 1 = -1$$

Não deu zero, como deveria.

$6^a$ Questão) Solução:

Considere a origem do sistema representada pela letra $O$. Vamos encontrar um ponto D tal que A, B, C sejam vértices consecutivos de um paralelogramo (quadrilatero com lados opostos iguais e paralelos).

Temos que $OA = (1, -2, -3)$, $OB = (-5, 2, -1)$ e $OC = (4, 0, -1)$. Assim, $DC = OB - OA$ e $OD = OC - DC$(pois $DC = OC - OD$). Logo, temos:

$$DC = OB - OA = (-5, 2, -1) - (1, -2, -3) = (-6, 4, 2)$$

e

$$OD = OC - DC = (4, 0, -1) - (-6, 4, 2) = (10, -4, -3).$$

Portanto, obtemos o ponto $D = (10, -4, -3)$.

$7^a$ Questão) Solução:

$(i)$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 14 & 80 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 28 \\ 52 & 56 \end{bmatrix}$$

$$AB - BA = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 14 & 80 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 24 & 28 \\ 52 & 56 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 & -20 \\ -38 & 24 \end{bmatrix}$$

$(ii)$ não é possível, pois as dimensão para a subtração são distintas.

$(iii)$

$$CD = \begin{bmatrix} -6 & 9 & -7 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 87 & -15 & -42 \\ -33 & 25 & -12 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 9 & -7 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & -12 & -8 \\ 44 & -6 & -30 \end{bmatrix}$$

$$CD - BC = \begin{bmatrix} 87 & -15 & -42 \\ -33 & 25 & -12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 28 & -12 & -8 \\ 44 & -6 & -30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 59 & -3 & -34 \\ -77 & 31 & 18 \end{bmatrix}$$

$(iv)$

$$CC^t = \begin{bmatrix} -6 & 9 & -7 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 7 \\ 9 & -3 \\ -7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 166 & -55 \\ -55 & 62 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 32 \\ 16 & 72 \end{bmatrix}$$

$$CC^t - B^2 = \begin{bmatrix} 166 & -55 \\ -55 & 62 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 32 \\ 16 & 72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 158 & -87 \\ -71 & -10 \end{bmatrix}$$

$8^a$ Questão) Solução:

Temos que:

$$A = \begin{bmatrix} x & 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad B^t = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Portanto, $AB^t = \begin{bmatrix} x & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = 2x - 12 - 10$ Como, queremos que $AB^t = 0$, temos que

$$2x - 12 - 10 = 0 \Longrightarrow 2x = 22 \Longrightarrow x = 11.$$