Gabarito

Álgebra Linear: AD1 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2014.1

Tutores: Cristina Lopes e Rodrigo Olimpio

1^a Questão)

Solução:

O espaço-coluna de A é o espaço formado pelas linhas de A^t e vice-versa. Vamos escalonar as linhas da matriz A^t para encontrar uma base para o espaço coluna de A. Considere a matriz A^t:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, os vetores $(1,1,3),(0,1,-1)$ formam uma base do espaço-linha de A^t ou, de modo equivalente, os vetores $w_1 = (1,1,3)^t \qquad w_2 = (0,1,-1)^t$ formam uma base para o espaço coluna de A. Como temos dois vetores L.I então o espaço coluna de A tem dimensão $n = 2$

De forma análoga para a matriz B temos:

$$B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, os vetores $(1,0,0),(0,1,0)$ formam uma base do espaço-linha de B^t ou, seja a transposta desses vetores , $w_1 = (1,0,0)^t$ e $w_2 = (0,1,0)^t$ formam uma base para o espaço-coluna de B, com dimensão 2.

b)

Considere a matriz A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ e $L_2 \leftarrow L_3 - 3L_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, os vetores $(1, 1, 0), (0, 2, 1)$ formam uma base para o espaço-linha de A, com dimensão 2.

Agora, considere a matriz B:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que a matriz B é igual a matriz A escalonada.

Portanto, os vetores $(1, 1, 0), (0, 2, 1)$ que são L.I formam uma base para o espaço-linha de B, com dimensão 2.

c) Pelo item anterior, podemos concluir que o espaço gerado pelas linhas (colunas) de A é igual ao espaço pelas linhas (colunas) de B.

2^a Questão)

Solução:

a) $C_1(A) = (1,1,3) = u, L_2(A) = (1,3,1) = v$

$d = |C_1(A) - L_2(A)| = \sqrt{(1-1)^2 + (1-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$

b) $|u| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{11}$

$|v| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$

$cos\theta = \dfrac{u.v}{|u||v|} \Rightarrow cos\theta = \dfrac{(1,1,3)(1,3,1)}{\sqrt{11}\sqrt{11}} = \dfrac{1.1 + 1.3 + 3.1}{11} = \dfrac{1+3+3}{11} = \dfrac{7}{11} \Rightarrow \theta = arcos\dfrac{7}{11}.$

c) $L_2(A) = (1,3,1) = v, w = [C_1(A), C_2(A)] = [(1,1,3),(1,3,1)]$
$proj_w v = \dfrac{vw_1}{w_1w_1}w_1 + \dfrac{vw_2}{w_2w_2}w_2 =$

$\dfrac{(1,3,1)(1,1,3)}{(1,1,3)(1,1,3)}(1,1,3) + \dfrac{(1,3,1)(1,3,1)}{(1,3,1)(1,3,1)}(1,3,1) = (\dfrac{7}{11}, \dfrac{7}{11}, \dfrac{21}{11}) + (1,3,1) = (\dfrac{18}{11}, \dfrac{40}{11}, \dfrac{32}{11}).$

d) Seja $w_1 = (1,1,3)$.

Temos que

$$w_2 = (0,1,-1) - \left(\frac{(0,1,-1)(1,1,3)}{(1,1,3)(1,1,3)}\right)(1,1,3) =$$

$$= (0,1,-1) - \left(\frac{-2}{11}\right)(1,1,3) =$$

$$(\frac{2}{11}, \frac{13}{11}, \frac{-5}{11}).$$

Logo, uma base ortogonal para o espaço-coluna de A é $\{(1,1,3), (\frac{2}{11}, \frac{13}{11}, \frac{-5}{11})\}$.

3^a Questão)

Solução:

a) $(2x_4, x_2, x_3, x_4) = x_4(2,0,0,1) + x_3(0,0,1,0) + x_2(0,1,0,0)$.

Como os vetores são LI's, o conjunto $\{(2,0,0,1), (0,0,1,0), (0,1,0,0)\}$ forma uma base para o subespaço.

b) $x_1 = -x_2 - x_3$ e $x_4 = -x_3 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2 - x_3, x_2, x_3, -x_3) = x_2(-1,1,0,0) + x_3(-1,0,1,-1)$.

Como os vetores são LI's, o conjunto {(-1,1,0,0),(-1,0,1,-1)} forma uma base para o subespaço.

c) Vamos encontrar o subespaço gerado pelos vetores dados, escalonando a matriz formada por eles:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_2 \leftarrow L_3 - 2L_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, temos que o conjunto $\{(1,1,1,1),(0,1,2,3)\}$ forma uma base para o subespaço.

4^a Questão)

Solução:

Considere o vetor $v \in V$, $w \in W$. Por hipótese $(v, w) = 0$, para qualquer $v \in V$ a $w \in W$

Suponhamos por absurdo, que existam um vetor $u \neq 0$ tal que $u \in V$, $u \in W$. Como V e W são espaços ortogonais

$0 = (u, u) = |u|^2$. Assim a única possibilidade da equação ser verdadeira é que $u = 0$, o que é um absurdo pois estamos supondo que u não é vetor nulo. Logo o único vetor comum é o vetor nulo.

5^a Questão)

Solução:

Considere a matriz aumentada $[A|b]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & b_1 \\ 2 & 5 & -4 & b_2 \\ 4 & 9 & -8 & b_3 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_3 - 4b_1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - 2b_1 \end{bmatrix}$$

Condição para o sistema ter solução única: $b_3 - b_2 - 2b_1 = 0$.