Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO DA AP3 - Primeiro Semestre de 2014
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(3.0)1. Ache os autovalores da matriz A abaixo e os autovetores correspondentes a cada autovalor.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

Solução:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Então, $P(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$. Logo $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$. Logo $(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$.

Os autovalores de A são portanto,

$$\lambda_1 = 4 \text{ e } \lambda_2 = -1.$$

Os autovetores associados a $\lambda_1 = 4$ são obtidos abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 4x \\ 3x + 2y = 4y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x & +2y = 0 \\ 3x & -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x & +2y = 0 \\ & 0 = 0 \end{cases}$$

Onde a equação $0 = 0$ foi obtida pela operação $L_2 := L_2 3L_1$. Solução: $x = \frac{2}{3}y$. Os autovetores são do tipo $v = (\frac{2}{3}y, y) = y(\frac{2}{3}, 1)$, para todo $y \in I\!R$.

Os autovetores associados a $\lambda_2 = -1$ são obtidos abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = -x \\ 3x - 2y = -y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x & +2y = 0 \\ 3x & +3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x & +2y = 0 \\ & 0 = 0 \end{cases}$$

Onde a equação $0 = 0$ foi obtida pela operação $L_2 := L_2 - 1,5L_1$. Solução: $y = -x$. Os autovetores são do tipo $v = (x, -x) = x(1, -1)$, para todo $x \in I\!R$.

(2.0)2. Determine se cada conjunto a seguir é ou não um subspaço de $I\!R^3$. Justifique detalhadamente sua resposta.

(a) $\{(x_1, x_2, x_3)^T | x_1 + x_3 = 1\}$

(b) $\{(x_1, x_2, x_3)^T | x_3 = x_1 + x_2\}$

Solução

(a) $\{(x_1, x_2, x_3)^T | x_1 + x_3 = 1\}$ não é subspaço, pois $u = (0.5, 0, 0.5)^T$ e $v = (0.3, 1, 0.7)^T$ pertencem ambos ao conjunto, enquanto $u + v$ não pertence.

(b) $\{(x_1, x_2, x_3)^T | x_3 = x_1 + x_2\}$ é subspaço, pois consedirando que $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ e $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ pertencem ambos ao conjunto, temos:

$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)^T$ pertence ao conjunto, já que $u_1 + u_2 = u_3$, $v_1 + v_2 = v_3$, e, portanto, $u_1 + v_1 + u_2 + v_2 = u_3 + v_3$.

e

$\alpha(u_1, u_2, u_3)^T = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)^T$ pertence ao conjunto para todo escalar α, já que $u_1 + u_2 = u_3$, e, portanto, $\alpha u_1 + \alpha u_2 = \alpha(u_1 + u_2) = \alpha u_3$.

(3.0)3. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Encontre bases para o núcleo de A, $N(A)$, e para a imagem de A^T, $I(A^T)$.

Solução

Podemos encontrar bases para $N(A)$ e $I(A^T)$ colocando A em sua forma escada reduzidapor linhas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $(1,0,1)$ e $(0,1,1)$ formam uma base para o espaço linha de A, temos que $(1,0,1)^T$ e $(0,1,1)^T$ formam uma base para $I(A^T)$. Se $x \in N(A)$, da forma escada reduzida por linhas de A temos que

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$x_1 = x_2 = -x_3$$

Fazendo $x_3 = \alpha$, vemos que $N(A)$ é formado por todos os vetores da forma $\alpha(-1,-1,1)^T$. Observe que $(-1,-1,1)^T$ é ortogonal a $(1,0,1)^T$ e a $(0,1,1)^T$.

(2.0)4. (a) Qual é a transformação linear $f : I\!R^2 \to I\!R^3$ tal que $f(1,1) = (3,2,1)$ e $f(0,-2) = (0,1,0)$?

(b) Encontre a matriz canônica de f, ou seja, a matriz que determina a transformação linear.

Solução:

(1.0)(a) Escrevendo o vetor (x,y) como combinação linear de $(1,1)$ e $(0,-2)$, temos:

$$(x,y) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(0,-2),$$

ou seja,

$$\begin{cases} \alpha_1 & & = x \\ \alpha_1 & - \; 2\alpha_2 & = y \end{cases}$$

Logo $\alpha_1 = x$ e $\alpha_2 = \frac{x-y}{2}$ e, portanto:

$$(x,y) = x(1,1) + \frac{x-y}{2}(0,-2).$$

Assim, temos:

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & xf(1,1) + \frac{x-y}{2} f(0,-2) \\ & = & x(3,2,1) + \frac{x-y}{2}(0,1,0) \\ & = & (3x, \frac{5x-y}{2}, x). \end{array}$$

(1.0)(b) Seja M a matriz canônina de f. Logo, devemos ter $f(x,y) = M \cdot (x,y)^T$. Portanto, temos:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$