Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear Computacional
AD2 - Segundo Semestre de 2013
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

Nome -
Assinatura -

1.(2.0) Ana e Beto estão planejando comprar frutas para a proxima semana. Cada um deles quer comprar algumas maçãs, tangerinas e laranjas, porém em quantidades diferentes. A Tabela 1 mostra o que pretendem comprar. Nas proximidades existem duas bancas de frutas - a do João e do Dudu - cujos preços estão apresentados na Tabela 2. Quanto gastarão Ana e Beto para fazer suas compras em cada uma das duas bancas? O sistema linear deve ser resolvido pelo Método de Eliminação de Gauss.

	Maçãs	Tangerinas	Laranjas
Ana	6	3	10
Beto	4	8	5

	João	Dudu
Maçã	\$ 0.10	\$ 0.15
Tangerina	\$ 0.40	\$ 0.30
Laranja	\$ 0.10	\$ 0.20

2.(2.0) Seja $A = \begin{bmatrix} cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & cos\theta \end{bmatrix}$

(a) Mostre que $A^2 = \begin{bmatrix} cos2\theta & -\text{sen}2\theta \\ \text{sen}2\theta & cos2\theta \end{bmatrix}$

(b) Prove, usando o Principio da Indução Finita (Indução Matemática) que $A^n = \begin{bmatrix} cosn\theta & -\text{sen}n\theta \\ \text{sen}n\theta & cosn\theta \end{bmatrix}$ para $n \geq 1$

3.(2.0) Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(a) Calcule o determinante da matriz A

(b) Calcule, se existir, a inversa de A, usando a matriz Adjunta.

(c) Determine a solução do sistema $Ax = b = (0, 0, 0, 1)^t$

4.(2.0) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear, definida por $T(x, y, z) = (0, z, y - z)$.

(a) Determine uma base e a dimensão da $Im(T)$.

(b) Determine uma base e a dimensão da $N(T) = Ker(T)$.

5.(2.0) Considere matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(a) Determine os autovalores e autovetores da matriz.

(b) Mostre que os autovetores formam uma base do $\mathbb{R}^3$

Gabarito

Álgebra Linear: AD2 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2013.2

Tutores: Cristina Lopes e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

Considere A a matriz que representa a quantidade de frutas a serem compradas por cada pessoa e B a matriz que representa o preço pago pelas frutas em cada banca:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 10 \\ 4 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.10 & 0.15 \\ 0.40 & 0.30 \\ 0.10 & 0.20 \end{bmatrix}$$

Para encontrar o gasto de cada pessoa em cada uma das bancas, podemos multiplicar as matrizes :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 10 \\ 4 & 8 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0.10 & 0.15 \\ 0.40 & 0.30 \\ 0.10 & 0.20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.80 & 3.80 \\ 4.10 & 4.00 \end{bmatrix}.$$

Logo, se Ana comprar na banca de João gastará $R\$2,80$ e na banca de Dudu gastará $R\$3,80$. Se Beto comprar na banca de João gastará $R\$4,10$ e na banca de Dudu gastará $R\$4,00$.

2^a Questão) Solução:

a)

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos^2\theta - sen^2\theta & -2cos\theta sen\theta \\ 2cos\theta sen\theta & -sen^2\theta + cos^2\theta \end{bmatrix}$$

Usando as identidades geométricas já conhecidas, temos que:

$$A^2 = \begin{bmatrix} cos2\theta & -sen2\theta \\ sen2\theta & cos2\theta \end{bmatrix}.$$

b) Para $n = 1$, sabemos que é válido. Agora, vamos supor que seja válido para $n = k$. Vamos mostrar que também vale para $n = k + 1$. Considere as identidades trigonométricas já conhecidas, como no item anterior. Assim temos:

$$A^{k+1} = A^k.A = \begin{bmatrix} cosk\theta & -senk\theta \\ senk\theta & cosk\theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} cos\theta cosk\theta - senk\theta sen\theta & -cosk\theta senk\theta - senk\theta cos\theta \\ senk\theta cos\theta + cosk\theta sen\theta & -senk\theta sen\theta - cosk\theta cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos[(k+1)\theta] & -sen[(k+1)\theta] \\ sen[(k+1)\theta] & cos[(k+1)\theta] \end{bmatrix}.$$

Assim como queríamos demonstrar. #

3^a Questão) Solução:

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a matriz dos coeficientes.

a) Podemos expandir o determinante em relação à uma linha ou coluna. É claro que é melhor expandir em relação a uma linha ou coluna que tenha o maior número de zeros, já que, nesse caso, os cofatores A_{ij} dos a_{ij} que são nulos não precisam ser calculados, uma vez que $a_{ij}A_{ij} = (0)(A_{ij}) = 0$.

Expandindo, então, em relação à primeira coluna, obtemos:

$$det(A) = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$$

onde M_{ij} é o determinante menor de a_{ij}.

Assim, temos:

$$A_{41} = (-1)^{4+1} det(M_{41}) = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(0+0+0+1-0-0) = (-1)(1) = -1$$

A_{11}, A_{21} e A_{31} não vamos calcular pois $a_{11} = a_{21} = a_{31} = 0$.

Assim, temos:

$$\begin{aligned} &det(A) = (0)(A_{11}) + (0)(A_{21}) + (0)(A_{31}) + (1)(-1) \\ &det(A) = 0 + 0 + 0 - 1 \\ &det(A) = -1 \end{aligned}$$

b) Para calcular a inversa da matriz A, usaremos a fórmula $A^{-1} = \dfrac{1}{detA}.Adj(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular $Adj(A) = [Cof(A)]^T$, onde $Cof(A)$ é a matriz dos cofatores. Por isso, calcularemos os cofatores $A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$, onde M_{ij} é o determinante menor de a_{ij}.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^2.[0+0+0-0-0+1] = 1.(1) = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3.[0+0+0-0-0-0] = (-1).0 = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4.(0) = (1).0 = 0$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5.[0+0+0+1-0-0] = (-1).1 = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3.[0+0+0-1-0+1] = (-1).0 = 0$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4.[0+0+0-1-0-0] = 1.(-1) = -1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5.[0+0+0+1-0-0] = (-1).1 = -1$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^6.[0+0+0+1-0-0] = (1).1 = 1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4.[0+0+0-1-0-0] = 1.(-1) = -1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5.[0+0+0-1-0-0] = (-1).(-1) = 1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^6.(0) = 1.0 = 0$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^7.[0+0+0-0-0-0] = (-1).0 = 0$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5.[0+0+0+1-0-0] = (-1).(1) = -1$$

$$A_{42} = (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^6.(0) = 1.(0) = 0$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^7.(0) = (-1).(0) = 0$$

$$A_{44} = (-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^8.(0) = 1.(0) = 0$$

Assim, a matriz dos cofatores fica:

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E portanto, calculando a transposta da matriz dos cofatores, obtemos $Adj(A)$:

$$Adj(A) = [Cof(A)]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como sabemos que $detA = -1$, aplicando a fórmula $A^{-1} = \frac{1}{detA}.Adj(A)$, encontramos:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A matriz aumentada é dada por:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Trocando L_1 por L_4 e L_2 por L_3, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$, encontramos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema linear correspondente à matriz é dado por:

$$\begin{cases} 1x & + & 1y & + & 0z & + & 1w = 1 \\ 0x & - & 1y & + & 1z & + & 0w = 0 \\ 0x & + & 0y & + & 1z & + & 0w = 0 \\ 0x & + & 0y & + & 0z & + & 1w = 0 \end{cases}$$

Das duas últimas linhas temos que $z = 0$ e $w = 0$. Substituindo $z = 0$ na segunda linha temos $-y + 0 = 0 \Rightarrow y = 0$. Finalmente, substituindo y e w na primeira linha, encontramos $x = 1$.

Logo, a solução do sistema é dada por $S = \{(1, 0, 0, 0)\}$.

4^a Questão):

Solução:

a) $T(x, y, z) = (0, z, y - z) = z(0, 1, -1) + y(0, 0, 1)$. Claramente estes dois vetores são LI's, portanto uma base para $Im(T)$ é $\{(0, 1, -1), (0, 0, 1)\}$, com dimensão 2.

b) $N(T) = \{(x, y, z)|T(x, y, z) = 0\}$. Assim , temos:

$(0, z, y - z) = (0, 0, 0) \Rightarrow z = 0, y - z = 0 \Rightarrow y = z = 0$.

Logo $N(T) = \{(x, y, z)|(0, 0, 0)\}$, com dimensão 1.

5^a Questão) Solução:

a) Vamos determinar os autovalores da matriz A:

Solução:

A matriz A é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

Vamos calcular o determinante da matriz $(A - \lambda I)$:

$$det(A - \lambda I) = (3-\lambda)^2(-1-\lambda) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = (3-\lambda)^2(-1-\lambda)$$

Logo o polinômio característico é dado por

$$P_3(\lambda) = det(A - \lambda I) = (3-\lambda)^2(-1-\lambda)$$

As raízes de $P_3(\lambda) = (3-\lambda)^2(-1-\lambda)$ são $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = -1$, que são os autovalores da matriz A.

De fato: $(3-\lambda)^2(-1-\lambda) = 0$ implica:

$3 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 3$ (multiplicidade 2)

$-1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

Cálculo dos autovetores v associados aos autovalores λ.

Para encontrarmos os autovetores de A associados a $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, formamos o sistema linear $Ax = 3x \equiv (A - I)x = 0$, ou

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isso nos dá

$$\begin{cases} -4z = 0 \Longrightarrow z = 0 \\ 5z = 0 \Longrightarrow z = 0 \\ -4z = 0 \Longrightarrow z = 0 \end{cases}$$

Tomando $x = r \neq 0$ e $y = s \neq 0$, com $r, s \in \mathbb{R}$, obtemos então que os autovetores associados aos autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ são dados por $v = (r, s, 0)^t$

Assim, todos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ são dados por $v = (r, s, 0)^t = r\,(1, 0, 0)^t + s\,(0, 1, 0)^t$. Ou seja $v_1 = (1, 0, 0)^t$ e $v_2 = (0, 1, 0)^t$ são os autovetores de A associados aos autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$.

Analogamente, para o autovalor $\lambda_3 = -1$, temos

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isso nos dá

$$\begin{cases} 4x - 4z = 0 \Longrightarrow 4x = 4z \Longrightarrow x = z \\ 4y + 5z = 0 \Longrightarrow 4y = -5z \Longrightarrow y = \dfrac{-5z}{4} \end{cases}$$

Tomando $z = t \neq 0$ com $t \in \mathbb{R}$, obtemos então que os autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = -1$ é dado por $t(1, -5/4, 1)$

Assim, todos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = -1$ são dados por $v_3 = \left(t, \dfrac{-5t}{4}, t\right)^t = t\left(1, \dfrac{-5}{4}, 1\right)^t$. Ou seja $v_3 = \left(1, \dfrac{-5}{4}, 1\right)^t$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda_3 = -1$.

b) Para mostrar que os autovetores formam uma base do $\mathbb{R}^3$, vamos utilizar os autovetores encontrados anteriormente : $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(1, -5/4, 1)$, e verificar se são LI's e se geram o $\mathbb{R}^3$:

$$a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c\,(1, -5/4, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} a + c &= 0 \\ b - \dfrac{5c}{4} &= 0 \\ c &= 0 \end{cases}$$

Por L_3, $c = 0$. Substituindo nas linhas anteriores, concluímos que $a = b = 0$. Logo os vetores são LI's.

Agora, vamos resolver o sistema para verificarmos se os autovetores geram $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} a + c &= x \\ b - \dfrac{5c}{4} &= y \\ c &= z \end{cases}$$

Por L_3, $c = z$. Substituindo em L_1, temos que $a = x - z$. E por L_2 temos que $b = y - (5z)/4$. Concluímos que o sistema tem solução. Logo todo vetor $\forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito na forma $(x, y, z) = (x - z)(1, 0, 0) + (y - (5z)/4)(0, 1, 0) + z(1, \dfrac{-5}{4}, 1) = (x - z)v_1 + (y - (5z)/4)v_2 + zv_3$. Isso, significa que os vetores $\{v_1, v_2, v_3\}$ formam uma base para o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.