Gabarito

Álgebra Linear: AD2 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2017

Tutores: Gabriel Thomaz e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

a) Considere a matriz extendida $[A|b]$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & -1 & k & -1 \end{bmatrix}$$

O pivô é dado por $max = \{|a_{11}|, |a_{21}|, |a_{31}|, |a_{41}|\} = 2$. Fazendo $L_2 \longleftarrow 2L_2 + L_1$, $L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1$ e $L_4 \longleftarrow L_4 + \frac{1}{2}L_1$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1/2 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & -1/2 & k & -1 \end{bmatrix}$$

Agora, o pivô é dado por $max = \{|a_{22}|, |a_{32}|, |a_{42}|\} = 10$. Fazendo $L_3 \longleftarrow 5L_3 + L_2$ e $L_4 \longleftarrow L_4 - \frac{9}{10}L_2$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 7/2 & 14 & 7 \\ 0 & 0 & -7/5 & (5k-18)/5 & -14/5 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_4 \longleftarrow 5L_4$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 7/2 & 14 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & (5k-18) & -14 \end{bmatrix}$$

Agora, o pivô é dado por $max = \{|a_{33}|, |a_{43}|\} = 7$. Fazendo $L_3 \longleftrightarrow L_4$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & (5k-18) & -14 \\ 0 & 0 & 7/2 & 14 & 7 \end{bmatrix}$$

Fazendo, $L_4 \longleftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_3$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & (5k-18) & -14 \\ 0 & 0 & 0 & (10+5k)/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Daí, temos que $det(A) = 700 + 350k$.

i)Para que tenhamos solução única $det(A) \neq 0$. Portanto,

$$700 + 350k \neq 0 \longrightarrow k \neq -2$$

ii)Para que tenhamos infinitas soluções $det(A) = 0$. Portanto,

$$700 + 350k = 0 \longrightarrow k = -2$$

b)

i) Usando a expansão em cofatores, temos que:

$det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$

$det(A) = -2A_{11} + 2A_{12} + 1A_{13} + 0A_{14}$

$det(A) = -2A_{11} + 2A_{12} + A_{13}$

onde $A_{ij} = (-1)^{i+j}det(M_{ij})$, em que M_{ij} é o determinante menor de a_{ij}. Assim,

$$A_{11} = (-1)^{1+1}det(M_{11}) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}det(M_{12}) = -1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}det(M_{12}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -19$$

Portanto, $det(A) = -2(-2) + 2(-3) + (-19) = 4 - 6 - 19 = -21$.

ii) Vamos calcular a matriz adjunta de A. Assim, pelo ítem anterios já temos os valores de $A_{11} = -2$, $A_{12} = -3$, $A_{13} = -19$. Da mesma maneira que foi feito antes temos que:

$A_{14} = (-1)^{1+4}det(M_{14}) = 7$

$A_{21} = (-1)^{2+1}det(M_{21}) = -23$

$A_{22} = (-1)^{2+2}det(M_{22}) = -3$

$A_{23} = (-1)^{2+3}det(M_{23}) = -40$

$A_{24} = (-1)^{2+4}det(M_{24}) = 7$

$A_{31} = (-1)^{3+1}det(M_{31}) = 16$

$A_{32} = (-1)^{3+2}det(M_{32}) = 3$

$A_{33} = (-1)^{3+3}det(M_{33}) = 26$

$A_{34} = (-1)^{3+4}det(M_{34}) = -14$

$A_{41} = (-1)^{4+1}det(M_{41}) = 14$

$A_{42} = (-1)^{4+2}det(M_{42}) = 0$

$A_{43} = (-1)^{4+3}det(M_{43}) = 28$

$A_{44} = (-1)^{4+4}det(M_{44}) = -7$

Assim, $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj A$

$$A^{-1} = \frac{1}{-21} \begin{bmatrix} -2 & -23 & -16 & 14 \\ -3 & -3 & 3 & 0 \\ -19 & -40 & 26 & 28 \\ 7 & 7 & -14 & -7 \end{bmatrix}$$

2^a Questão) Solução:

a) $N(T) = \{(x,y,z) | T(x,y,z) = 0\}$. Assim encontramos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y - z &= 0 \\ x + y &= 0 \\ -y &= 0 \end{cases}$$

Pela linha 3 temos que $y = 0$. Substituindo nas linhas anteriores obtemos que $x = 0$ e $z = 0$. Portanto, $N(T) = (0,0,0)$, base vazia com dimensão zero. E T é injetora, pois o núcleo é o vetor nulo.

b) Colocando as coordenadas em evidência:

$(x + y - z, x + y, -y) = x(1,1,0) + y(1,1,-1) + z(-1,0,0)$

Assim, o conjunto $\{(1,1,0),(1,1,-1),(-1,0,0)\}$ é formado por vetores LI(vide item anterior) e é base para a imagem de T, com dimensão 3. Temos que T é uma transformação de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$. Logo, pelo teorema do nucleo-imagem, T é sobrejetora se e somente se T é injetora. Portanto, pelo item anterior, concluímos que T é sobrejetora (imagem igual o contradomínio).

3^a Questão) Solução:

Considere a matriz A. Assim,

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Logo, o polinômio característico é $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0$. O que nos leva aos autovalores de A, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 1$. Como queremos que a população permaneça estável, temos que encontrar os autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = 1$, visto que com ele temos que $Av = v$. Assim, usando que $(A - \lambda_3 I)v = 0$, temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, $x = 0$ e $z = -2y$. Assim, os vetores

$$v = (0, t, -2t) = t(0, 1, 2)$$

com $t \neq 0$ são os autovetores associados a $\lambda_3 = 1$.

4^a Questão) Solução:

Observe que A_n é a matriz quadrada de ordem n onde os elementos da diagona principal valem zero e todos os outros 1. Vamos calcular alguns determinantes:

$$det(A_2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.0 - 1.1 = -1$$

Cálculo por cofator:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$$

onde M_{ij} é o determinante menor de a_{ij}.

Calculando o determinate de A_3 por cofator, em relação a linha 1 da matriz:

$$det(A_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Temos que $det(A_3) = 0.det(A_{11}) + 1.det(A_{12}) + 1.det(A_{13})$.

Claramente, $det(A_{11}) = 0$.

$$A_{12} = (-1)^{1+2} det(M_{12}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \tag{1}$$

Logo, $det(A_{12}) = -1.(0.1 - 1.1) = -1(-1) = 1$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} det(M_{13}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{2}$$

Logo, $det(A_{13}) = 1.(1.1 - 0.1) = 1.(1 - 0) = 1$

Portanto , $det(A_3) = det(A_{11}) + det(A_{12}) + det(A_{13}) = 0 + 1 + 1 = 2$.

Fazendo o mesmo procedimento para as matrizes posteriores, temos que :

$det(A_4) = -3$

$det(A_5) = 4$

$det(A_6) = -5$

$det(A_7) = 6$

e assim por diante. Portanto, chegamos à "fórmula" geral do cálculo de determinante para A_n:

Para $n > 1$,

$det(A_n) = -(n - 1)$, se n é par.

$det(A_n) = (n - 1)$, se n é ímpar.