Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP3 - Segundo Semestre de 2008
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(3.0)1. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(1.0)(a) Determine a matriz $C = A^T - 2B$, onde A^T é matriz transposta de A.

(1.0)(b) Determine, se possível: a matriz produto: $C = A.B$, o determinante de C e afirme se a matriz C admite inversa, justificando a afirmação.

(1.0)(c) Determine, se possível: a matriz produto: $C = B.A$, o determinante de C e afirme se a matriz C admite inversa, justificando a afirmação.

Solução:

a)

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -6 & -3 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2B = 2.\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = A^T - 2B = \begin{bmatrix} 1 & -6 & -3 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -7 \\ 11 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

b)

$$C = A.B = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 35 & 11 \\ -8 & 14 & -10 \\ -4 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

$\det(C) = 0$, pois $L_2 = 2L_1$, logo C não admite inversa.

c)

$$C = B.A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -28 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det(C) = 1 \times 0 - 9 \times (-28) = 252$. Como $\det(C) \neq 0$, C admite inversa.

(3.0)2. Seja W o subspaço de $I\!R^4$ gerado pelos vetores

$$u_1 = (1, -2, 5, -3), \quad u_2 = (2, 3, 1, -4), \quad u_3 = (3, 8, -3, -5).$$

(2.0)(a) Determine uma base e a dimensão de W.

(1.0)(b) Estenda a base de W obtida no item anterior a uma base de todo o espaço $I\!R^4$.

Solução:

(a) Forme a matriz A cujas linhas e são os vetores dados e reduza-a por linha à forma escalonada:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & 8 & -3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 14 & -18 & 4 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

As linhas não-zero $(1, -2, 5, -3)$ e $(0, 7, -9, 2)$ da matriz escalonada formam uma base do espaço linha de A e, portanto, de W. Assim, dim(W)=2.

(b) Procuremos quatro vetores linearmente independentes que incluam os dois vetores acima. Os quatro vetores $(1, -2, 5, -3)$, $(0, 7, -9, 2)$, $(0, 0, 1, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$ são linearmente independentes (pois formam uma matriz escalonada), e portanto constituem uma base de $\mathbb{R}^4$ que é uma extensão da base de W.

(2.0)3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear e $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$, sendo $v_1 = (0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ e $v_3 = (1, 1, 0)$. Determinar $T(5, 3, -2)$, sabendo que $T(v_1) = (1, -2)$, $T(v_2) = (3, 1)$ e $T(v_3) = (0, 2)$.

Solução:

Expressemos $v = (5, 3, -2)$ como combinação linear dos vetores da base:

$$(5, 3, -2) = a_1(0, 1, 0) + a_2(1, 0, 1) + a_3(1, 1, 0)$$

ou:

$$\begin{cases} a_2 + a_3 = 5 \\ a_1 + a_3 = 3 \\ a_2 = -2 \end{cases}$$

sistema cuja solução é:

$$a_1 = -4,\ a_2 = -2,\ a_3 = 7$$

Então:

$$(5, 3, -2) = -4v_1 - 2v_2 + 7v_3$$

logo:

$$\begin{aligned} T(5, 3, -2) &= -4T(v_1) - 2T(v_2) + 7T(v_3) \\ T(5, 3, -2) &= -4(1, -2) - 2(3, 1) + 7(0, 2) \\ T(5, 3, -2) &= (-10, 20) \end{aligned}$$

(2.0)4. Estabelecer a condição que deve ser satisfeita pelos termos independentes x, y e z para que o sistema abaixo seja compatível, ou seja, para que o sistema tenha solução.

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = x \\ -3a_1 + 4a_2 = y \\ 2a_1 - a_2 = z \end{cases}$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{rr|c} 1 & 2 & x \\ -3 & 4 & y \\ 2 & -1 & z \end{array}\right]$$

$L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & x \\ 0 & 10 & y+3x \\ 0 & -5 & z-2x \end{array}\right]$$

$L_2 \leftarrow \frac{1}{10}L_2$

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & \frac{y+3x}{10} \\ 0 & -5 & z-2x \end{array}\right]$$

$L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & \frac{y+3x}{10} \\ 0 & 0 & z-2x+\frac{y+3x}{2} \end{array}\right]$$

Portanto, para que o sistema seja compatível é necessário que $z - 2x + \frac{y+3x}{2} = 0$, ou seja, $2z - x + y = 0$ ou $x = y + 2z$.