Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO DA AP3 - Primeiro Semestre de 2009
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(2.0)1. Considere os vetores: $u = (2, -2, 3)$, $v = (2, 3, -1)$ e $w = (-3, 2, 1)$.

(0.5)a. Determine se u, v e w são linearmente dependentes.

Solução:

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in I\!R$.
$\alpha_1(2, -2, 3) + \alpha_2(2, 3, -1) + \alpha_3(-3, 2, 1) = 0$.
Assim, temos o sistema linear abaixo:

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 &= 0 \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Colocando o sistema na forma matricial, temos:

$$\left[\begin{array}{rrrcr} 2 & 2 & -3 & | & 0 \\ -2 & 3 & 2 & | & 0 \\ 3 & -1 & 1 & | & 0 \\ \end{array}\right]$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ e também $L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_1$, obtemos:

$$\left[\begin{array}{rrrcr} 2 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 5 & -1 & | & 0 \\ 0 & -8 & 11 & | & 0 \\ \end{array}\right]$$

Fazendo $L_3 \leftarrow 5L_3 + 8L_2$, encontramos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 5 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 47 & | & 0 \\ \end{bmatrix}$$

Assim, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{array}{rrr} 2\alpha_1+ & 2\alpha_2 & -3\alpha_3 = 0 \\ & 5\alpha_2 & -\alpha_3 = 0 \\ & & 47\alpha_3 = 0 \end{array}$$

Deste sistema, temos por L_3 que $\alpha_3 = 0$. Substituindo em L_2 concluímos que $\alpha_2 = 0$. E substituindo esses valores em L_1 temos que $\alpha_1 = 0$. Logo u,v,w são linearmente independentes.

(0.5)b. Ache a distância entre u e v.

Solução:

Por definição, para vetores $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$, temos que

$$\text{distância}(u, v) = d(u, v) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Assim,

$d(u, v) = \sqrt{(2-2)^2 + (3-(-2))^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{0 + 25 + 16} = \sqrt{41}$.

Logo $d(u, v) = |u - v| = \sqrt{41}$.

(0.5)c. Determine $\cos\theta$, sendo θ o ângulo entre u e w.

Solução:

$|u| = \sqrt{(2^2 + (-2)^2 + 3^2)} = \sqrt{17}$.
$|w| = \sqrt{((-3)^2 + 2^2 + 1^2)} = \sqrt{14}$.
$u.w = 2 \times (-3) + (-2) \times 2 + 3 \times 1 = -6 - 4 + 3 = -7$.
Seja θ o ângulo entre os vetores u e w.

Assim, temos $cos(\theta) = \dfrac{u.w}{|u|.|w|} = \dfrac{-7}{\sqrt{238}} \Longrightarrow \theta = \arccos\Big(\dfrac{-7}{\sqrt{238}}\Big)$.

(0.5)d. Determine a projeção ortogonal de u sobre v.

Solução:

$proj_v u = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}.v = \dfrac{(2,-2,3).(2,3,-1)}{(2,3,-1).(2,3,-1)}.(2,3,-1) = \dfrac{-5}{14}(2,3,-1) = \Big(-\dfrac{10}{14}, -\dfrac{15}{14}, \dfrac{5}{14}\Big)$

(3.0)2. Considere o espaço vetorial real $M_3(I\!R)$, das matrizes quadradas de ondem 3. Seja T uma transformação definida em $M_3(I\!R)$:

$$T(A) = A - A^T, \ \forall A \in M_3(I\!R).$$

(1.0)a. Prove que T é uma transformação linear.

(2.0)b. Indique o núcleo de T, a sua dimensão e uma base.

Solução:

(1.0) a. (i) $T(A_1+A_2) = (A_1+A_2)-(A_1^T+A_2^T) = (A_1-A_1^T)+(A_2-A_2^T) = T(A_1)+T(A_2)$.

(ii) $T(\alpha A) = \alpha A - (\alpha A)^T = \alpha A - \alpha A^T = \alpha(A - A^T) = \alpha T(A)$

Considerando (i) e (ii), concluímos que T é linear.

(2.0) b. O núcleo da transformação linear é dado pelo conjunto:

$$N(T) = \{A \in M_3(I\!R) : T(A) = 0\}$$

Vejamos então:

$$T(A) = 0 \Leftrightarrow A - A^T = 0 \Leftrightarrow A = A^T.$$

O núcleo é portanto constituído pelas matrizes reais simétricas de ordem 3, ou seja

$$N(T) = \{A \in M_3(I\!R) : A = A^T\}.$$

Para determinar uma base e a dimensão de $N(T)$, notemos que uma matriz do núcleo terá a forma:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}, \ \forall a,b,c,d,e,f \in I\!R$$

Podemos escrever a matriz como a seguinte combinação linear de matrizes:

$$a\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$
$$d\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + f\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Concluímos que a $\dim N(T) = 6$ e uma base para o espaço nulo é dada por:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(2.0)3. Determine os valores de a e b para os quais o sistema linear abaixo tem uma única solução e em seguida resolva-o.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & 7x_2 & = & a \\ x_1 & + & x_2 & = & b \\ x_1 & + & 2x_2 & = & a+b-1 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & = & 5a+2b \end{array} \right.$$

Solução: Primeiramente, aplicaremos o método de eliminação

$$\begin{aligned} 3x_1 - 7x_2 &= a \\ x_1 + x_2 &= b \\ x_1 + 2x_2 &= a+b-1 \\ 5x_1 + 3x_2 &= 5a+2b \end{aligned}$$

Fazendo

$L1 - L2 \times 3 \Longrightarrow -10x_2 = a - 3b \Longrightarrow x_2 = \frac{-a+3b}{10}$

$L1 - L3 \times 3 \Longrightarrow -13x_2 = -2a - 3b + 3 \Longrightarrow x_2 = \frac{2a+3b-3}{13}$

$L1 \times 5 - L4 \times 3 \Longrightarrow -44x_2 = -10a - 6b \Longrightarrow x_2 = \frac{-10a-6b}{-44}$

Igualando a primeira e a última expressões para x_2, chegamos a $b = 2a$. Substituindo esse valor de b nas equações e igualando a primeira e a segunda expressões para x_2, chegamos a $a = 2 \Longrightarrow b = 4$, isto é, $a = 2, b = 4$ são os valores para os quais o sistema linear tem solução única. Se substituirmos esses valores de a e b em qq expressão para x_2, encontramos $x_2 = 1$. Consequentemente, colocando $x_2 = 1$ em qualquer uma das linhas do sistema, encontramos $x_1 = 3$. Logo {3,1} é a solução do sistema linear.

(3.0)4. Considere a transformação linear

$$\begin{array}{rcl} T : I\!\!R^3 & \rightarrow & I\!\!R^3 \\ (x, y, z) & \rightarrow & (x + 2z, y - z, -x + y + z) \end{array}$$

(1.0)a. Determine os autovalores de T.

Solução:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^3 + 2(1-\lambda) + (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 4).$$

Considere $det(A - \lambda I) = 0$. Então $\lambda_1 = 1$ é uma raiz real e para o polinômio de grau dois, temos as raízes complexas: $\lambda_2 = 1 + i\sqrt{3}$ e $\lambda_3 = 1 - i\sqrt{3}$.

(1.0)b. Determine um autovetor x de T, tal que $x \in I\!\!R^3$ e $|x| = 1$.

Solução:

$Av = \lambda v \Longrightarrow (A - \lambda I)v = 0$

Para $\lambda_1 = 1$ teremos:

$$(A-\lambda I)v_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ & & \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x_3 = 0 &\Longrightarrow x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 &\Longrightarrow x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 &\Longrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Tomando $x_1 = r \neq 0$, temos que $v_1 = r(1,1,0)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$.

Como $|v| = 1$ pelo dado inicial do problema, temos que fazer:

$|v_1| = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2r^2} = 1 \Longrightarrow ^{+}_{-} \sqrt{2}\, r = 1 \Longrightarrow r = ^{+}_{-} \frac{\sqrt{2}}{2}$

Assim o autovetor $\hat{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0)$ associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$ satisfaz a condição do problema. De forma análoga temos que $\widehat{x} = \frac{-\sqrt{2}}{2}(1,1,0)$ também satisfaz.

(1.0)c. A transformação T é injetora? E sobrejetora? Justifique as respostas.

Solução:

A transformação é injetora se e somente se $N(T) = \{0\}$. Logo temos que achar a solução do seguinte sistema $Ax = 0$, que na forma matricial aumentada, pode ser escrito por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_1 + L_3$ encontramos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_2 - L_3$ encontramos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, temos que resolver o sistema:

$$\begin{aligned} x + 2z &= 0 \\ y - z &= 0 \\ -4z &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $z = 0 \Longrightarrow y = 0 \Longrightarrow x = 0$ e o único vetor pertencente ao núcleo de T é o vetor nulo, ou seja $N(T) = \{0\}$, o que implica que T é injetora.

Como a dimensão do domínio de T é igual a dimensão do contra-domínio de T e a transformação linear é injetora, então T também é sobrejetora.