Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP2 - Primeiro Semestre de 2017
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(3.0)1. Considere a matriz A abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 10 & 2 & -1 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule o determinante de A utilizando expansão em cofatores.

(b) Responda se a matriz A tem inversa, justificando sua resposta (resposta sem justificativa não será considerada).

(c) Caso a resposta do item acima tenha sido sim, determine o determinante da matriz A^{-1} (inversa de A), sem calcular a matriz A^{-1}. Explique detalhadamente a solução.

Solução:

(a)

$$det(A) = -3 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 10 & -1 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & 2 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
det(A) = \; & -3((10) + (2 \times (-1) \times 5) + (0) \\
& -(0) - (2 \times 4 \times 1) - (1 \times 7 \times (-1))) \\
& +1((1 \times 10 \times 9) + (2 \times 2 \times 5) + (4 \times 7 \times 4) \\
& -(4 \times 10 \times 5) - (2 \times 4 \times 9) - (1 \times 7 \times 2)) \\
= \; & -3(10 - 10 - 8 + 7) + 1(90 + 20 + 112 - 200 - 72 - 14) \\
= \; & 3 + 1(222 - 286) \\
= \; & 3 - 64 \\
= \; & -61
\end{aligned}
$$

(b) Sim, porque o determinante na matriz A é diferente de zero.

(c)

$$det(A^{-1}) = 1/det(A) = -1/61.$$

(2.0)2. Resolva o sistema linear $Ax = b$ pelo método de Gauss-Jordan, onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 15 \\ 22 \\ 13 \end{bmatrix},$$

Solução:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 15 \\ 4 & 10 & 2 & 22 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L2 \leftarrow L2 - 4L1$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 15 \\ 0 & 2 & -14 & -38 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L3 \leftarrow L3 - L2$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 15 \\ 0 & 2 & -14 & -38 \\ 0 & 0 & 17 & 51 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L1 \leftarrow L1 - L2$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 18 & 53 \\ 0 & 2 & -14 & -38 \\ 0 & 0 & 17 & 51 \\ \end{bmatrix}$$

Fazendo $L2 \leftarrow L2/2$ $L3 \leftarrow L3/17$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 18 & 53 \\ 0 & 1 & -7 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \end{bmatrix}$$

Fazendo $L1 \leftarrow L1 - 18L3$ $L2 \leftarrow L2 + 7L3$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \end{bmatrix}$$

Portanto, a solução do sistema é $x = (-1, 2, 3)$.

(3.0)3. Considere o operador linear $T : I\!R^3 \to I\!R^3$

$$(x, y, z) \to (y, -y, x + z)$$

(a) Determine o núcleo de T, uma base para esse subespaço e sua dimensão.

(b) Determine a imagem de T, uma base para esse subespaço e sua dimensão.

(c) T é injetora? T é sobrejetora? Justifique as respostas.

Solução:

(a)

$$\begin{aligned} N(T) &= \{(x, y, z) : T(x, y, z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) : (y, -y, x + z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, 0, -x) : x \in I\!R\} \\ &= \{x(1, 0, -1) : x \in I\!R\} \end{aligned}$$

Logo, $\{(1, 0, -1)\}$ é uma base para o núcleo de T e dim($N(T)$)=1.

(b)
$$\begin{aligned} Im(T) &= \{y, -y, x+z) : x, y, z \in I\!R\} \\ &= \{a(1,-1,0) + b(0,0,1) : a, b \in I\!R\} \end{aligned}$$

Logo,
$$\{(1,-1,0),(0,0,1)\}$$
é uma base para a imagem de T e $\dim(Im(T))$=2.

(c) Uma vez que $N(T) \neq (0,0,0)$, T não é injetora. Uma vez que $\dim(Im(T)) \neq \dim(I\!R^3)$ ($\dim(I\!R^3) = 3$), T não é sobrejetora.

(2.0)4. Determine se as transformações de $I\!R^{n\times n}$ em $I\!R^{n\times n}$ abaixo são ou não lineares, justificando detalhadamente sua resposta.

(a) $T(A) = 3I - A$, onde I é a matriz identidade de ordem n.

(b) $T(A) = A + 2A^T$, onde A^T é a matriz transposta de A.

Solução:

T é uma transformação linear se
$$T(\alpha A_1 + \beta A_2) = \alpha T(A_1) + \beta T(A_2)$$
para todo A_1 e A_2 em $I\!R^{n\times n}$ e α e β escalares.

(a) $T(A) = 3I - A$.
Como $T(A_1 + A_2) = 3I - (A_1 + A_2) \neq 3I - A_1 + 3I - A_2 = T(A_1) + T(A_2)$, então T não é uma transformação linear.

(b) $T(A) = A + 2A^T$.
Como $T(\alpha A_1 + \beta A_2) = (\alpha A_1 + \beta A_2) + 2(\alpha A_1 + \beta A_2)^T = \alpha(A_1 + 2A_1^T) + \beta(A_2 + 2A_2^T) = \alpha T(A_1) + \beta T(A_2)$, então T é uma transformação linear.