Gabarito

Álgebra Linear: AD2 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2015.1

Tutores: Cristina Lopes e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

Considere o sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} & & z & -3w = & b \\ x & +3y & -2z & +8w = & -9 \\ x & +3y & -z & +5w = & -7 \end{array}\right. \tag{1}$$

Método de Gauss-Jordan

O sistema linear acima pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 & 8 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ -9 \\ -7 \end{bmatrix}$$

1^a Etapa) Formaremos a matriz aumentada $[A|b]$. A matriz aumentada é dada por:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 & | & b \\ 1 & 3 & -2 & 8 & | & -9 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & | & -7 \end{bmatrix}$$

2^a Etapa) Transformaremos a matriz aumentada à sua forma escada reduzida por linhas, usando operações elementares em suas linhas.

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 & | & b \\ 1 & 3 & -2 & 8 & | & -9 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & | & -7 \end{bmatrix}$$

Trocando L_1 com L_3

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -2 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & b \end{array}\right]$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & b \end{array}\right]$$

Trocando L_2 com L_3

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & b \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, temos

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-2 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$, temos

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & b-7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-2 \end{array}\right]$$

a) Se $b - 2 = 0$ então $b = 2$, e o sistema tem infinitas soluções.

b) Caso contrário, isto é, se $b \neq 2$, o sistema não tem solução.

2^a Questão) Solução:

a) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = (0,0,3,5)^t.$$

Expandindo o determinante em relação à última linha, obtemos:

$$det(A) = a_{41}A_{41} + a_{42}A_{42} + a_{43}A_{43} + a_{44}A_{44}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$$

onde M_{ij} é o determinante menor de a_{ij}.

Então, temos:

$$A_{41} = (-1)^{4+1} det(M_{41}) = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(8-3+0-2-0+18) = (-1)(21) = -21$$

$$A_{44} = (-1)^{4+4} det(M_{44}) = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1)(0-4-3-9-2-0) = (1)(-18) = -18$$

Assim:

$$\begin{aligned} det(A) &= (3)(A_{41}) + (0)(A_{42}) + (0)(A_{43}) + (-2)(A_{44}) \\ det(A) &= (3)(-21) + (-2)(-18) \\ det(A) &= -63 + 36 \\ det(A) &= -27 \end{aligned}$$

b) Seja $Ax = b$ dado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

A matriz aumentada é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & | & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & | & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & | & 5 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ e $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & | & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & | & 3 \\ 0 & -6 & -9 & -5 & | & 5 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$ e $L_4 \leftarrow L_4 + 6L_2$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -18 & -3 & | & 3 \\ 0 & 0 & -39 & -5 & | & 5 \end{bmatrix}$$

Multiplicando L_3 por $-\dfrac{1}{18}$, encontramos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{6} & | & -\dfrac{1}{6} \\ 0 & 0 & -39 & -5 & | & 5 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_4 \leftarrow L_4 + 39L_3$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{6} & | & -\dfrac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{3}{2} & | & -\dfrac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Multiplicando L_4 por $\frac{2}{3}$, encontramos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & | & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix}$$

O sistema linear correspondente à matriz é dado por:

$$\begin{cases} 1x & + & 2y & + & 3z & + & 1w = 0 \\ 0x & + & 1y & - & 5z & + & 0w = 0 \\ 0x & + & 0y & + & 1z & + & \frac{1}{6}w = -\frac{1}{6} \\ 0x & + & 0y & + & 0z & + & 1w = -1 \end{cases}$$

Da última linha temos que $w = -1$. Substituindo na terceira linha temos $z + \frac{w}{6} = -\frac{1}{6} \Rightarrow z - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} \Rightarrow z = 0$. Substituindo w e z por seus respectivos valores na segunda linha, obtemos $y - 5z = 0 \Rightarrow y - 5.0 = 0 \Rightarrow y = 0$. Finalmente, substituindo y e z e w na primeira linha, encontramos $x + 2.0 + 3.0 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$. Logo, a solução do sistema é dada por $S = \{(1, 0, 0, -1)\}$.

3^a Questão) Solução:

a) $A^2 = -2A^4$. Assim temos que:

$(I_n + A^2).(I_n - 2A^2) = I_n \Rightarrow I_n^2 - 2A^2 + A^2 - 2A^4 = I_n^2 - 2A^2 + 2A^2 = I_n^2 = I_n$.

Portanto a igualdade é verdadeira.

b) $A = P^tDP$. Fazendo o transposto dos dois lados da igualdade: $A^t = (P^tDP)^t = P^tD^t(P^t)^t = P^tDP = A$.

Portanto a igualdade é verdadeira.

c) Falso. Contra exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 15 & 20 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 6 & 20 \end{bmatrix}$$

d) $B^t = (A.A^t)^t = (A^t)^t.A^t = A.A^t = B$

e) Falso. Contra exemplo:

Sejam $A = A^t$ e $B = B^t$. Fazendo $A.B$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = C$$

$$\Longrightarrow C^t = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \Longrightarrow C \neq C^t$$

4^a Questão) Solução:

a)

i) $T(1,0,0) = (1,0)$

ii) $T(1,1,0) = (2,3) \Longrightarrow T(1,0,0) + T(0,1,0) = (2,3)$

iii) $T(1,1,1) = (4,7) \Longrightarrow T(1,0,0) + T(0,1,0) + T(0,0,1) = (4,7)$

Substituindo i) em ii) temos:

$T(0,1,0) = (2,3) - (1,0) = (1,3)$.

Agora, substituindo em iii) temos :

$T(0,0,1) = (4,7) - (1,0) - (1,3) = (2,4)$. Assim, temos: $T(x,y,z) = xT(1,0,0) + yT(0,1,0) + zT(0,0,1) = x(1,0) + y(1,3) + z(2,4) = (x+y+2z, 3y+4z)$.

b) $(x + y + 2z, 3y + 4z) = (-2, 0)$

Assim temos

$$\begin{cases} x + y + 2z &= -2 \\ 3y + 4z &= 0 \end{cases}$$

Pela segunda linha temos que $y = \frac{-4z}{3}$

Pela primeira linha temos que $y = -2 - x - 2z$

Substuindo, temos: $-2 - x - 2z = \frac{-4z}{3} \Longrightarrow -6 - 3x - 6z = -4z \Longrightarrow z = \frac{-6-3x}{2}$

Substituindo na primeira linha : $x + y - 6 - 3x = -2 \Longrightarrow y = 2x + 4$

Logo, o vetor que queríamos encontrar é da forma $(x, y, z) = (x, 2x + 4, \frac{-6-3x}{2})$.

c)

$(x + y + 2z, 3y + 4z) = x(1, 0) + y(1, 3) + z(2, 4)$

Como um subespaço de $\mathbb{R}^2$ tem que ter dimensão menor ou igual a 2, considere os vetores $\{(1, 0), (1, 3)\}$.

Temos que qualquer vetor que pertence a T pode ser escrito como combinação linear de $\{(1, 0), (1, 3)\}$. Veja:

$$\begin{cases} a + b &= x + y + 2z \\ 3b &= 3y + 4z \end{cases}$$

Pela segunda linha: $b = y + \frac{4z}{3}$. Substitundo na primeira linha $a = x + \frac{2z}{3}$.

O sistema tem solução. Portanto uma base para a imagem é $\{(1, 0), (1, 3)\}$, com dimensão 2.

d)

$$\begin{cases} x + y + 2z &= 0 \\ 3y + 4z &= 0 \end{cases}$$

Pela segunda linha: $y = \frac{-4z}{3}$. Substitundo na primeira linha $x = -2z + \frac{4z}{3} \Longrightarrow x = \frac{-2z}{3}$

Assim temos que $N(T) = \{(\frac{-2z}{3}, \frac{-4z}{3}, z)\}$. Portanto uma base para o núcleo é $\{(\frac{-2}{3}, \frac{-4}{3}, 1)\}$, com dimensão 1.

5^a Questão) Solução:

Temos que

$$T(x, y, z) = (3x - y - 3z, 2y - 3z, -z) = x(3, 0, 0) + y(-1, 2, 0) + z(-3, -3, -1).$$

A matriz associada ao operador linear é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

Logo o polinômio característico é dado por

$$P_3(\lambda) = det(A - \lambda I) = (3 - \lambda).(2 - \lambda).(-1 - \lambda)$$

Calculando as raízes de $P_3(\lambda)$, temos que: $(3-\lambda) = 0$ ou $(2-\lambda) = 0$ ou $(-1-\lambda) = 0$. Da primeira equação temos: $\lambda_1 = 3$, da segunda, $\lambda_2 = 2$ e da terceira, $\lambda_3 = -1$.

Cálculo dos autovetores v associados aos autovalores λ.

1. Autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 3$. Do polinômio característico temos

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 3-3 & -1 & -3 \\ 0 & 2-3 & -3 \\ 0 & 0 & -1-3 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1$, obtemos

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Trocando L_2 com L_3, obtemos

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da primeira linha, temos $-y - 3z = 0$ e da segunda linha, $-4z = 0$, o que implica $z = 0$. Então, substituindo na primeira linha, temos: $-y - 3.0 = 0 \Rightarrow y = 0$. Obtemos a solução $v_1 = (x, 0, 0) = x\,(1, 0, 0)$. Tomando $x = r \neq 0$, $r \in \mathbb{R}$, obtemos a solução $v_1 = r\,(1, 0, 0)$ Portanto $(1, 0, 0)$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_1 = 3$.

1. Autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 2$. Do polinômio característico temos

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2$, obtemos

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da segunda linha, temos $-3z = 0$, o que implica $z = 0$. Da primeira linha, temos $x - y - 3z = 0$, o que implica $x - y - 3.0 = 0$, e portanto, $x = y$. Então, para $x = s \neq 0$, $s \in \mathbb{R}$, obtemos a solução $v_2 = (s, s, 0) = s(1, 1, 0)$. Portanto qualquer vetor da forma $v_2 = s(1, 1, 0)$, é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_2 = 2$.

1. Autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = -1$. Do polinômio característico temos

$$A - (-1)I = \begin{bmatrix} 3-(-1) & -1 & -3 \\ 0 & 2-(-1) & -3 \\ 0 & 0 & -1-(-1) \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$A + 1I = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da primeira linha, temos $4x - y - 3z = 0$ e da segunda linha, $3y - 3z = 0$, o que implica $y = z$. Então, substituindo na primeira linha, temos: $4x - y - 3y = 0 \Rightarrow 4x = 4y \Rightarrow x = y$. Tomando $z = t \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$, obtemos a solução $v_3 = (t, t, t) = t\,(1, 1, 1)$. Portanto $(1, 1, 1)$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_3 = -1$.