Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP2 - Primeiro Semestre de 2007
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(2.0)1. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Determine a matriz inversa de A.

Solução:

Forme a matriz em bloco $M = (A \vdots I)$ e reduza M por linhas à forma escalonada:

$$M = \left(\begin{array}{rrrcrrr} 1 & 2 & -4 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrrcrrr} 1 & 2 & -4 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & \vdots & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrcrrr} 1 & 2 & -4 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -5 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

A metade esquerda de M está agora em forma triangular; logo A tem uma inversa. Além disso, reduza por linhas M à forma canônica reduzida por linhas:

$$M \sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & -9 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -16 & -11 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) = \left(I \vdots A^{-1}\right)$$

Assim

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -16 & -11 & 3 \\ \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(b) Determine a solução do sistema $Ax = b$ usando a inversa de A.

Solução:

$$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} -16 & -11 & 3 \\ \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -41 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

(2.0)2. Ache os autovalores da transformação linear abaixo e os autovetores correspondentes ao autovalor negativo.

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(x, y, z) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z)$$

Solução:

A transformaç ao T é dada pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Então, $P(\lambda) = det(A - \lambda I) = (3-\lambda)^2(-1-\lambda)$. Os autovalores de T, são, portanto, os autovalores de A,

$$\lambda_1 = 3 \text{ e } \lambda_2 = -1.$$

Os autovetores associados a $\lambda_2 = -1$ são obtidos abaixo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x \qquad -4z = -x \\ \qquad 3y - 5z = -y \\ \qquad\qquad -z = -z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x \qquad -4z = 0 \\ \qquad 4y - 5z = 0 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \qquad -z = 0 \\ \qquad y - \frac{5}{4}z = 0 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

Solução: $x = z$, $y = \frac{5}{4}z$, z qualquer. Os autovetores são do tipo $v = (z, \frac{5}{4}z, z)$, $z \neq 0$.

(2.0)3. Ache a dimensão e a base para a solução geral do sistema homogêneo abaixo.

$$\begin{cases} x + 2y + z - 3t = 0 \\ 2x + 4y + 4z - t = 0 \\ 3x + 6y + 7z + t = 0 \end{cases}$$

Solução:

Reduza o sistema à forma escalonada:

$$\begin{cases} x + 2y + z - 3t = 0 \\ \qquad\qquad 2z + 5t = 0 \\ \qquad\qquad 4z + 10t = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x + 2y + z - 3t = 0 \\ \qquad\qquad 2z + 5t = 0 \end{cases}$$

As variáveis livres são y e t, e $\dim W = 2$. Faça:

(a) $y = 1$, $t = 0$, obtendo a solução $u_1 = (-2, 1, 0, 0)$

(b) $y = 0$, $t = 2$, obtendo a solução $u_1 = (11, 0, -5, 2)$

Então $[u_1, u_2]$ é uma base de W.

(2.0)4. Para cada das transformações lineares de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ abaixo, determine seu núcleo, sua imagem e diga se ela é injetora ou sobrejetora, justificando a resposta.

(a) $L(x) = (x_3, x_2, x_1)^T$.

Solução:

Núcleo, $N(L)$: Se x está no núcleo de L, então $L(x) = 0$, ou seja, $x_3 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_1 = 0$. Portanto, $N(L) = \{(0,0,0)^T\}$.

Imagem, $I(L)$: Dado $y = (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbb{R}^3$, $y = L((y_3, y_2, y_1)^T)$. Logo, $I(L) = \mathbb{R}^3$.

Como $N(L) = \{(0,0,0)^T\}$, L é injetora e como $I(L) = \mathbb{R}^3$, L é também sobrejetora.

(b) $L(x) = (x_1, x_2, 0)^T$.

Solução:

Núcleo, $N(L)$: Se x está no núcleo de L, então $L(x) = 0$, ou seja, $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Portanto, $N(L)$ é o subspaço unidimensional de $\mathbb{R}^3$ gerado por $e_3 = (0,0,1)^T$.

Imagem, $I(L)$: Um vetor y pertence à imagem de L se e somente se y é a soma de um múltiplo de $e_1 = (1,0,0)^T$ com um múltiplo de $e_2 = (0,1,0)^T$. Logo, $I(L)$ é o subspaço bidimensional de $\mathbb{R}^3$ gerado por $[e_1, e_2]$.

Como $N(L) \neq \{(0,0,0)^T\}$, L não é injetora e como $I(L) \neq \mathbb{R}^3$, L também não śobrejetora.

(2.0)5. Use a regra de Cramer para resolver o sistema linear a seguir.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x + 2y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 9 \end{cases}$$

Solução:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 \quad \det(A_1) = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4$$
$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 9 & 3 \end{vmatrix} = -4 \quad \det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix} = -8$$

Portanto,

$$x_1 = \frac{-4}{-4} = 1, \;\; x_2 = \frac{-4}{-4} = 1, \;\; x_3 = \frac{-8}{-4} = 2.$$