Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
AD1 - Primeiro Semestre de 2006
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

Nome -
Assinatura -

1.(5.0) *O item (g) vale* 1.0 *ponto e o restante valem* 0.5 *ponto cada.*

Considere a matriz formada pelos vetores colunas:

$$A = [v_1,\ v_2,\ v_3] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule o módulo (comprimento) de cada vetor da matriz A.

(b) A partir dos vetores $v_i \in A$, determine uma matriz U cujos vetores colunas $u_i,\ i = 1, 2, 3$ são unitários.

(c) Calcule a distância $d(v_1, v_2) = |v_1 - v_2|$

(d) Verifique se existem vetores de A, dois a dois, que são ortogonais ou paralelos.

(e) Calcule o ângulo formado pelos vetores $\{v_2, v_3\}$ de A.

(f) Mostre que o conjunto de vetores $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ são linearmente dependentes (LD).

(g) Seja $V = I\!R^4$. Mostre que S é um subespaço vetorial de V gerado pelo conjunto de vetores $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ se e somente se

$$S = \Big\{(x, y, z, w) \in I\!R^4; z = (x + 10y)/3 \wedge w = (x + y)/3\Big\}$$

e determine uma base B para S.

(h) Usando o processo de Gram-Schmidt, determine a partir da base B, uma base ortogonal de S.

(i) Determine a partir de B uma base ortonormal de S.

2.(1.0) Determinar os subespaços de P_2 (espaço vetorial dos polinômios de grau ≤ 2) gerados pelos seguintes vetores:

$$\Big\{2 + 2x,\ 3 + x - x^2,\ 2x + x^2\Big\}$$

e verifique se os vetores são LI ou LD.

3.(1.0) Prove que se u e v são vetores LI então u+v e u-v também o são.

4.(1.0) Seja $V = M_{3\times 2}$ um espaço vetorial das matrizes reais e $S \subset V$ um subconjunto definido por:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ -b & b \\ c & -c \end{bmatrix}, \quad \text{onde} \quad a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Mostre que S é um subespaço vetorial de V.

5.(2.0) Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = -6 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -38 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$$

a.(1.0) Resolva-o, se possível, método de Gauss-Jordan.

b.(1.0) O que podemos afirmar se substituirmos somente a terceira componente do vetor dos termos independentes $b = (-6, -38, -3)$ pelo vetor $\widehat{b} = (-6, -38, 1)$.

Gabarito

Álgebra Linear: AD1 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2006

Tutores: Rodrigo Olimpio e Cristina Lopes

1^a Questão) Solução:

Considere o conjunto $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, onde $v_1 = (2, 1, 4, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 3, 0)$ e $v_3 = (3, 0, 1, 1)$.

a)

$|v_1| = \sqrt{(2^2 + 1^2 + 4^2 + 1^2)} = \sqrt{22}$.
$|v_2| = \sqrt{((-1)^2 + 1^2 + 3^2 + 0^2)} = \sqrt{11}$.
$|v_3| = \sqrt{(3^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2)} = \sqrt{11}$.

b)

$$V = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{22}}{22} & \frac{-\sqrt{11}}{11} & \frac{3\sqrt{11}}{11} \\ \frac{\sqrt{22}}{22} & \frac{\sqrt{11}}{11} & 0 \\ \frac{2\sqrt{22}}{11} & \frac{3\sqrt{11}}{11} & \frac{\sqrt{11}}{11} \\ \frac{\sqrt{22}}{22} & 0 & \frac{\sqrt{11}}{11} \end{bmatrix}$$

c)

Por definição, para vetores $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$, temos que

$$d(v_1, v_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (w_2 - w_1)}.$$

Assim,

$$d(v_1, v_2) = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (1 - 1)^2 + (3 - 4)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{9 + 0 + 1 + 1} = \sqrt{11}.$$

Logo $d(v_1, v_2) = |v_1 - v_2| = \sqrt{11}$.

d)

i) v_1 e v_2

$v_1.v_2 = 2 \times (-1) + 1 \times 1 + 4 \times 3 + 0 = -2 + 1 + 12 = 11 \Longrightarrow v_1$ não é perpendicular a v_2.

São paralelos? $\frac{-1}{2} \neq 1 \neq \frac{3}{4} \neq 0$. Logo não são paralelos, pois as coordenadas não são proporcionais.

ii) v_1 e v_3

$v_1.v_3 = 2 \times 3 + 0 + 4 \times 1 + 1 \times 1 = 11 \neq 0 \Longrightarrow v_1$ e v_3 não são ortogonais.

Verifiquemos se são paralelos:

$$\frac{3}{2} \neq 0 \neq \frac{1}{4} \neq 1$$

Logo não são paralelos.

iii) v_2 e v_3

$v_2.v_3 = -1 \times 3 + 1 \times 0 + 3 \times 1 + 0 = 0 \Longrightarrow v_2 \perp v_3$

e) Seja θ o ângulo entre os vetores v_1 e v_2.

$cos(\theta) = \frac{v_1.v_2}{|v_1|.|v_2|}$. Usando resultados dos itens anteriores, temos:

Sabemos do item anterior que $v_2 \perp v_3$. Logo $\theta = 90°$. Para os outros vetores, usando a fórmula temos:

Seja α o ângulo entre os vetores v_1 e v_2.

$cos(\alpha) = \frac{11}{\sqrt{22}.\sqrt{11}} \approx 0,7 \Longrightarrow \alpha \approx 45°$.

Seja β o ângulo entre os vetores v_1 e v_3.

$cos(\beta) = \frac{11}{\sqrt{22}.\sqrt{11}} \approx 0,7 \Longrightarrow \approx 45°$.

f) v_1, v_2, v_3 são linearmente independentes ? Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \Re$.

$\alpha_1(2,1,4,1) + \alpha_2(-1,1,3,0) + \alpha_3(3,0,1,1) = 0$. Assim, temos o sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Pela segunda e quarta equações temos que $-\alpha_2 = -\alpha_3$. Logo o sistema tem infinitas soluções, o que implica que o conjunto é L.D.

g) $\in S$? Sim, pois $x, y = 0 \Longrightarrow z, w = 0$. Seja:
$v_1 = (x_1, y_1, \dfrac{x_1 + 10y_1}{3}, \dfrac{x_1 + y_1}{3})$ e $v_1 = (x_2, y_2, \dfrac{x_2 + 10y_2}{3}, \dfrac{x_2 + y_2}{3})$

Assim temos que:

$v_1 + \lambda v_2 = (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, \dfrac{x_1 + \lambda x_2 + 10y_1 + \lambda 10y_2}{3}, \dfrac{x_1 + \lambda x_2 + y_1 + \lambda y_2}{3}) \in S$

Logo é subespaço de $\Re^4$.

Agora consideremos o sistema: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = x \\ \alpha_1 + \alpha_2 = y \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = \frac{x+10y}{3} \\ \alpha_1 + \alpha_3 = \frac{x+y}{3} \end{cases}$$

Pela segunda e quarta equações temos que $\alpha_2 = y - \alpha_1$ e $\alpha_3 = \frac{x+y}{3} - \alpha_1$. Logo para qualquer $\alpha_1 \in \Re$ com $\alpha_2 = y - \alpha_1$ e $\alpha_3 = \frac{x+y}{3} - \alpha_1$, o sistema tem solução.

Reciprocamente, se fizermos:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = x \\ \alpha_1 + \alpha_2 = y \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = z \\ \alpha_1 + \alpha_3 = w \end{cases}$$

Temos pela segunda e quarta equações do sistema anterior que $\alpha_2 = y - \alpha_1$ e $\alpha_3 = w - \alpha_1$. Substituindo esses valores na primeira equação temos:

$2\alpha_1 - y + \alpha_1 + 3w - 3\alpha_1 = x \Longrightarrow w = \frac{x+y}{3}$.

Agora fazendo as mesmas substituições na terceira equação temos:

$4\alpha_1 + 3y - 3\alpha_1 + w - \alpha_1 = z \Longrightarrow z = \frac{x+10y}{3}$.

como queríamos demonstrar.

Agora vamos determinar uma base β para S.

$S = (x, y, z, w) = (x, y, \frac{x+10y}{3}, \frac{x+y}{3})$.

Logo podemos tomar $\beta = \{(1, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (0, 1, \frac{10}{3}, \frac{1}{3})\}$ como base,pois é LI e gera S.

h) Seja $w_1 = (1, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Agora temos :

$w_2 = v_2 - \big(\dfrac{v_2.w_1}{w_1.w_1}\big).w_1 = (0, 1, \dfrac{10}{3}, \dfrac{1}{3}) - \big(\dfrac{(0,1,\frac{10}{3},\frac{1}{3}).(1,0,\frac{1}{3},\frac{1}{3})}{(1,0,\frac{1}{3},\frac{1}{3}).(1,0,\frac{1}{3},\frac{1}{3})}\big)(1, 0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3})$
$= (-1, 1, 3, 0)$

Logo uma base ortogonal é $\{(1, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (-1, 1, 3, 0)\}$.

i)

$\|w_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2} = \frac{\sqrt{11}}{3}$.

$\|w_2\| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$.

Logo basta dividirmos os vetores da base ortogonal pela sua respectiva norma. Assim teremos a seguinte base ortonormal:

$\{(\frac{3\sqrt{11}}{11}, 0, \frac{\sqrt{11}}{11}, \frac{\sqrt{11}}{11}\}, (\frac{-\sqrt{11}}{11}, \frac{\sqrt{11}}{11}\ \frac{3\sqrt{11}}{11}, 0)\}$.

2^a Questão) Solução:

Para que os vetores $\{2+2x, 3+x-x^2, 2x+x^2\}$ gerem subespaços de P_2, a combinação linear desses vetores tem que ser um polinômio de grau 2.

Sejam $u = 2+2x$, $v = 3+x-x^2$ e $w = 2x+x^2$.

Assim temos:

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= \alpha u + \beta v + \gamma w \\
ax^2+bx+c &= \alpha(2+2x) + \beta(3+x-x^2) + \gamma(2x+x^2) \\
ax^2+bx+c &= 2\alpha + 2\alpha x + 3\beta + \beta x - \beta x^2 + 2\gamma x + \gamma x^2 \\
ax^2+bx+c &= (\gamma-\beta)x^2 + (2\alpha+\beta+2\gamma)x + (2\alpha+3\beta)
\end{aligned}$$

E portanto:

$$\begin{cases} a = \gamma - \beta \\ b = 2(\alpha+\gamma)+\beta \quad \Longrightarrow \quad b = 2a + c \\ c = 2\alpha + 3\beta \end{cases}$$

Assim os subespaços de P_2 gerados pelos vetores $\{2+2x, 3+x-x^2, 2x+x^2\}$ são da forma $\{ax^2 + bx + c \; / \; b = 2a + c\}$.

Verificaremos agora se os vetores são linearmente independentes ou linearmente dependentes:

$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$

Da etapa anterior temos que:

$$(\gamma - \beta)x^2 + (2\alpha + \beta + 2\gamma)x + (2\alpha + 3\beta) = 0$$

O polinômio de grau 2 acima só será o polinômio nulo se seus coeficientes forem nulos. Então:

$$\begin{cases} \gamma - \beta & = & 0 & \Longrightarrow & \gamma = \beta \\ 2\alpha + \beta + 2\gamma & = & 0 & & \\ 2\alpha + 3\beta & = & 0 & \Longrightarrow & 2\alpha = -3\beta \end{cases}$$

Assim, temos:

$$2\alpha + \beta + 2\gamma = 0$$

$$-3\beta + \beta + 2\beta = 0$$

$$0 = 0$$

Logo o sistema tem infinitas soluções e portanto os vetores $\{2 + 2x, 3 + x - x^2, 2x + x^2\}$ são linearmente dependentes (L. D.).

3^a Questão) Solução:

Demonstração:

Temos por hipótese que u e v são L. I., ou seja, sempre que $au + bv = 0$, temos $a = b = 0$.

Queremos mostrar que: $c(u + v) + d(u - v) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c = d = 0$.

De fato:

$$c(u + v) + d(u - v) = 0$$

$$cu + cv + du - dv = 0$$

$$(c + d)u + (c - d)v = 0$$

Como por hipótese u e v são L. I. então:

$$\begin{cases} c+d &= 0 \\ c-d &= 0 \end{cases}$$

sistema que admite somente a solução $c = d = 0$. Logo, $u+v$ e $u-v$ são L. I..

4^a Questão) Solução:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ -b & b \\ c & -c \end{bmatrix} \text{, } onde \quad a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

S é subespaço. S não é vazio: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ pertence à S, se tomarmos $a = b = c = 0$.

E as duas condições abaixo são satisfeitas:

i) Seja $M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & -a_1 \\ -b_1 & b_1 \\ c_1 & -c_1 \end{bmatrix} \in S$ e $M_2 = \begin{bmatrix} a_2 & -a_2 \\ -b_2 & b_2 \\ c_2 & -c_2 \end{bmatrix} \in S$, onde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Então:

$$M_1 + M_2 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & -a_1 - a_2 \\ -b_1 - b_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & -c_1 - c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & -(a_1 + a_2) \\ -(b_1 + b_2) & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & -(c_1 + c_2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_3 & -a_3 \\ -b_3 & b_3 \\ c_3 & -c_3 \end{bmatrix} \in S \text{ , onde } a_3 = a_1 + a_2 \text{ , } b_3 = b_1 + b_2 \text{ , } c_3 = c_1 + c_2 \quad (a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{R}).$$

ii) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $M = \begin{bmatrix} a & -a \\ -b & b \\ c & -c \end{bmatrix} \in S$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\alpha M = \begin{bmatrix} \alpha a & -\alpha a \\ -\alpha b & \alpha b \\ \alpha c & -\alpha c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -d \\ -e & e \\ f & -f \end{bmatrix} \in S \ , \ onde \quad d = \alpha a, e = \alpha b, f = \alpha c.$$

5^a Questão) Solução:

Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = -6 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -38 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases} \tag{1}$$

a) Método de Gauss-Jordan

O sistema linear acima pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -38 \\ -3 \end{bmatrix}$$

1^a Etapa) Formaremos a matriz aumentada $[A|b]$. A matriz aumentada é dada por:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & | & -6 \\ 3 & -2 & -4 & | & -38 \\ 1 & 2 & 3 & | & -3 \end{bmatrix}$$

2^a Etapa) Transformaremos a matriz aumentada à sua forma escada reduzida por linhas, usando operações elementares em suas linhas.

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & | & -6 \\ 3 & -2 & -4 & | & -38 \\ 1 & 2 & 3 & | & -3 \end{bmatrix}$$

Dividindo a primeira linha por 2 obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & -3 \\ 3 & -2 & -4 & | & -38 \\ 1 & 2 & 3 & | & -3 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftrightarrow L_2 - 3L_1$, $L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & -3 \\ 0 & -8 & -13 & | & -29 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicando L_2 por $-1/8$, encontramos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & -3 \\ 0 & 1 & 13/8 & | & 29/8 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

E finalmente, fazendo $L_1 \leftrightarrow L_1 - 2L_2$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/4 & | & -41/4 \\ 0 & 1 & 13/8 & | & 29/8 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

O sistema linear correspondente à matriz (2) na forma escada reduzida por linhas é dado por:

$$\begin{cases} x_1 \qquad - \dfrac{1}{4}x_3 = -\dfrac{41}{4} \\ \qquad x_2 \quad + \dfrac{13}{8}x_3 = \dfrac{29}{8} \end{cases} \tag{3}$$

e tem exatamente as mesmas soluções do sistema original (1).

3^a Etapa) Resolver o sistema linear obtido na Etapa 2.

Resolvendo cada equação para a incógnita correspondente ao primeiro elemento não-nulo de cada linha não-nula do sistema linear (3), temos:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-41 + r}{4} \\ x_2 = \dfrac{29 - 13r}{8} \\ x_3 = r \end{cases} \tag{4}$$

onde r é um número real arbitrário.

Logo (4) é a solução do sistema linear dado (1). Como r pode assumir qualquer valor real, o sistema dado (1) e tem uma infinidade de soluções (o sistema é compatível e indeterminado).

b) Trocando o termo independente temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & -6 \\ 3 & -2 & -4 & -38 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_1 \times \frac{1}{2}$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & -4 & -38 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora se fizermos $L_2 \leftarrow L_2 - 3 \times L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -8 & -13 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ou seja, na terceira linha temos $0 = 4$, o que torna o sistema impossível.