Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO: AP2 - Primeiro Semestre de 2006
Professores Marcia Fampa & Mauro Rincon

Nome -
Assinatura -

1. Considere o sistema linear $Ax = b$ dado por;

$$\begin{cases} -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 = & 4 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & x_3 = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 = & -2 \end{cases}$$

a.(2.0) Resolva-o, se possível, pelo método de eliminação de Gauss com pivoteamento.

Solução A matriz aumentada $[A \mid 0]$ do sistema é dada por

$$[A|0] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & | & 4 \\ 4 & 1 & -1 & | & 1 \\ 2 & 2 & -1 & | & -2 \end{bmatrix}$$

1^o Pivoteamento: Inicialmente é necessário obter o elemento **pivô**, que por definição é dado por:

$$\begin{aligned} \widehat{a}_{11} &= \max\{|a_{11}|, |a_{21}|, |a_{31}|\} \\ &= \max\{|-1|, |4|, |2|\} = 4 \end{aligned}$$

Assim o pivô pertence a segunda linha do sistema, e dessa forma devemos permutar as linhas L_1 e L_2, ou seja $L_1 \leftarrow L_2$ e $L_2 \leftarrow L_1$, tendo após a permutação a nova linha 1 como a linha pivô. Dessa forma a matriz aumentada, considerando a permutação, é dada por:

$$[A|0]' = \left[\begin{array}{ccccc} 4 & 1 & -1 & | & 1 \\ -1 & -1 & 2 & | & 4 \\ 2 & 2 & -1 & | & -2 \end{array}\right]$$

Após a permutação, podemos aplicar o método de eliminação de Gauss, usual, ou seja, no primeiro passo, o objetivo é zerar todos os elementos da primeira coluna abaixo da diagonal principal. Para isso definimos os multiplicadores

$m_{21} = a_{21}/a_{11} = -1/4$, $m_{31} = a_{31}/a_{11} = 1/2$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - (-1/4)L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 1/2L_1$, obtemos

$$[A|0]^1 = \left[\begin{array}{ccccc} 4 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -3/4 & 7/4 & | & 17/4 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & | & -5/2 \end{array}\right]$$

2^o Pivoteamento: Inicialmente é necessário obter o elemento **pivô**, que por definição é dado por:

$$\begin{aligned} \widehat{a}_{22} &= \max\{|a_{22}|, |a_{32}|, |a_{42}|\} \\ &= \max\{|-3/4|, |3/2|\} = 3/2 \end{aligned}$$

Assim o pivô pertence a terceira linha do sistema, e dessa forma devemos permutar as linhas L_2 e L_3 da matriz aumentada $[A|0]^1$, ou seja $L_2 \leftarrow L_3$ e $L_3 \leftarrow L_2$, tendo após a permutação a nova linha 2 como a linha pivô. Dessa forma a matriz aumentada, considerando a permutação, é dada por:

$$[(A|0)']^1 = \left[\begin{array}{ccccc} 4 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & | & -5/2 \\ 0 & -3/4 & 7/4 & | & 17/4 \end{array}\right]$$

Podemos então continuar o processo de escalonamento da matriz, que nesse passo consiste em zerar todos os elementos da segunda coluna abaixo da diagonal principal,sendo L_2 a linha pivô. Com esse objetivo, definimos o multiplicador: $m_{32} = a_{32}/a_{22} = -1/2$. Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - (-1/2)L_2$. Após efetuarmos as operações em $[(A|0)']^1$ obtemos:

$$[(A|0)]^2 = \left[\begin{array}{ccccc} 4 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & | & -5/2 \\ 0 & 0 & 3/2 & | & 3 \end{array}\right]$$

Resolvendo o sistema triangular superior, obtemos a solução:

$$X = \{x_1, x_2, x_3\} = \{1, -1, 2\}$$

b.(1.0) Mostre que o determinante da matriz triangular superior obtida do item anterior é igual ao determinante da matriz dos coeficientes.

Solução O determinante da matriz triangular superior A^2 é simplesmente o produto dos elementos da diagonal dado por:

$det(A)^2 = 4(3/2)(3/2) = 9$. Sabemos que se uma matriz B é obtida de A substituindo a linha i por ela somada a um múltiplo escalar da linha j, $i \neq j$ então $det(B) = det(A)$. Foram exatamente essas operações feitas pelo método de eliminação de Gauss. Contudo, para fazer o pivoteamento, foram feitas permutações entre linhas e em cada permutação o determinante deve ser multiplicado por (-1). Como foram feitas duas permutações de linhas então:

$$det(A)^2 = (-1)(-1)det(A) = det(A) = 9$$

c.(1.0) Podemos afirmar que existe a matriz A^{-1}(inversa de A)? Justifique.

Solução Vimos que uma condição necessária e suficiente para que uma matriz A tenha inversa é que $det(A) \neq 0$.

d.(1.0) Calcule os determinantes: $det(A^T)$, $det(A^{-1})$, $det(A^T)^{-1}$.

Solução Sabemos que $det(A^T) = det(A) = 9$.

Temos também que sendo $AA^{-1} = I$ então

$det(AA^{-1}) = detA\ det(A^{-1}) = det\ I = 1$, onde I é matriz identidade. Logo $det(A^{-1}) = 1/detA = 1/9$.

De forma análoga tem-se que $det(A^T)^{-1} = 1/detA^T = 1/9$.

2(1.5) Considere as aplicações: $T : \mathbb{R}^3 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^2$. Justificando as respostas, verifique se as aplicações são transformações lineares:

Solução. Sabemos que aplicação T é uma transformação linear se satisfaz as condições

i) $T(0) = 0$;

ii) $T(u + v) = T(u) + T(v), \forall u, v \in \mathbb{R}^3$

iii) $T(\alpha u) = \alpha T(u), \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^3$

Sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$

a.(0.5) $T(x,y,z) = (x-y, x+2yz)$. Note que

$$\begin{aligned} T(u+v) &= T((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) = T(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \\ &= (x_1+x_2-(y_1+y_2),\ x_1+x_2+2(y_1+y_2)(z_1+z_2)) \\ &= T(x_1,y_1,z_1)+T(x_2,y_2,z_2)+2y_1z_2+2y_2z_1 \\ &= T(u)+T(v)+2y_1z_2+2y_2z_1. \end{aligned}$$

Logo T não é uma transformação linear.

b.(0.5) $T(x,y,z) = (x+z, 1-y)$ Note que $T(0,0,0) = (0,1)$. Assim T não é uma transformação linear.

c.(0.5) $T(x,y,z) = (0,0)$. É claro que $T(0,0,0) = (0,0)$ e

$$\begin{aligned} T(u+v) &= T((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) = T(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = (0,0) \\ &= T(x_1,y_1,z_1)+T(x_2,y_2,z_2) = (0,0)+(0,0) = (0,0) = T(u)+T(v) \end{aligned}$$

Por outro lado

$$T(\alpha u) \ = T(\alpha(x_1,y_1,z_1) = T(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) = (0,0) = \alpha T(u).$$

Assim T é uma transformação linear.

3.(1.5) Sabendo que: $T: I\!R^2 \rightarrow I\!R^3$ é uma transformação linear e $T(1,1) = (2,5,-4)$ e $T(1,0) = (1,-2,-3)$, onde $\{(1,1);(1,0)\}$ é uma base do $I\!R^2$, determine a transformação linear.

Solução Por definição de base tem-se

$(x,y) = \alpha(1,1)+\beta(1,0)$. Daí obtemos que $\alpha = y$ e $\beta = x-y$ Sendo T uma transformação linear, tem-se

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T(\alpha(1,1)+\beta(1,0)) = yT(1,1)+(x-y)T(1,0) \\ &= y(2,5,-4)+(x-y)(1,-2,-3) = (x+y, -2x+7y, -3x-y) \end{aligned}$$

Logo $T(x,y) = (x+y, -2x+7y, -3x-y)$ é a transformação linear.

4.(2.0) Chama-se isomorfismo do espaço vetorial V no espaço vetorial W a uma transformação linear: $T: V \rightarrow W$ que é **bijetora**. Nesse caso dizemos que os espaços vetoriais V e W são isomorfos. Verifique se os espaços vetoriais $P_2(x)$ e $I\!R^3$ são isomorfos, mediante a transformação linear:

$T : P_2 \quad \rightarrow \quad I\!R^3; \quad T(ax^2 + bx + c) = (a, a + b, b - c).$

Solução Devemos mostrar que a transformação linear é bijetora, ou seja, que é injetora e sobrejetora.

Com efeito, temos que o núcleo de T é dado por

$T(ax^2 + bx + c) = (a, a + b, b - c) = (0, 0, 0)$. Logo a única solução possível é $a = b = c = 0$. Assim o vetor $0 = (0, 0, 0)$ é o único vetor de $N(T)$, o que significa que a transformação linear é injetora.

T é sobrejetora. Devemos mostrar que todo $(x, y, z) \in I\!R^3$ é imagem de algum vetor através de T, ou seja

$T(ax^2 + bx + c) = (a, a + b, b - c) = (x, y, z)$. Resolvendo o sistema tem-se que $a = x$, $b = y - x$ e $c = -x + y - z$. Logo todo vetor (x, y, z) pode ser escrito na forma:

$(x, y, z) = x(1, 1, 0) + (y - x)(0, 1, 1) + (-x + y - z)(0, 0, -1)$ Assim $Img(T) = I\!R^3$ e T é sobrejetora.