1

AD 1 - ALGEBRA - 2016-2   / /

BRENO DE LIMA CAPUTO FILHO

MAT: 13213050397

1) a) $b = (-2, 2, 2)^t$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Espaço Coluna de A: forma-se pelas linhas de A^t.

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad L2 = L2 - L1$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad L2 = \frac{1}{2} L2$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad L3 = L3 - L2$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os vetores $(1,1,3)^t$, $(0,1,-1)^t$ formam uma base para o espaço coluna de A. Como são dois vetores L.I., temos que o espaço coluna de A tem dim. = 2

Espaço Coluna de B: analogamente a A

$$B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad L_2 = L_2 - L_1$$

$$B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad L_2 = \frac{1}{2} L_2$$

$$B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad L_3 = L_3 - L_2$$

$$B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os vetores $(1,0,0)^t$, $(0,1,0)^t$ formam uma base do espaço-coluna de B e possui dim = 2.

b) Espaço Linha de A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - 3L_1 \end{matrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad L_3 = L_3 + L_2$$

3)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os vetores (1,1,0), (0,2,1) formam uma base do espaço-linha de A com dim=2

Espaço Linha B:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

→ A matriz B é igual A escalonada. Logo, os vetores (1,1,0), (0,2,1) formam a base do espaço linha de B, e como são L.I. tem dim = 2

c)

$$A^t \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to A^t . B^t =$$

$$\begin{bmatrix} (1.1)+(1.1)+(3.0) & (1.0)+(1.2)+(3.1) & (1.0)+(1.0)+(3.0) \\ (1.1)+(3.1)+(1.0) & (1.0)+(3.2)+(1.1) & (1.0)+(3.0)\ (1.0) \\ (0.1)+(1.1)+(-1.0) & (0.0)+(1.2)+(-1.1) & (0.0)+(1.0)+(-1.0) \end{bmatrix}$$

$$A^t . B^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$(A.B)^t$

$$A.B=\begin{bmatrix}(1.1)+(1.0)+(0.0) & (1.1)+(1.2)+(0.0) & (1.0)+(1.1)+(0.0)\\ (1.1)+(3.0)+(1.0) & (1.1)+(3.2)+(1.0) & (1.0)+(3.1)+(1.0)\\ (3.1)+(1.0)+(-1.0) & (3.1)+(1.2)+(-1.0) & (3.0)+(1.1)+(-1.0)\end{bmatrix}$$

$$A.B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 7 & 3\\ 3 & 5 & 1\end{bmatrix} \qquad (A.B)^t=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 3 & 7 & 5\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

//

$B^t.A^t$:

$$=\begin{bmatrix}(1.1)+(0.1)+(0.0) & (1.1)+(0.3)+(0.1) & (1.3)+(0.1)+(0.-1)\\ (1.1)+(2.1)+(0.0) & (1.1)+(2.3)+(0.1) & (1.3)+(2.1)+(0.-1)\\ (0.1)+(1.1)+(0.0) & (0.1)+(1.3)+(0.1) & (0.3)+(1.1)+(0.-1)\end{bmatrix}$$

$$B^t.A^t=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 3 & 7 & 5\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

//

Portanto verifica-se que $(A.B)^t = B^t . A^t$

d) $(A^t.B^t)x = b$

$$\begin{bmatrix}2 & 5 & 0\\ 4 & 7 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 2\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}2x+5y+0z=-2\\ 4x+7y+0z=2\\ x+y+0z=2\end{cases}$$

tilibra

5

$\Rightarrow 4x + 7y = 2$
$\;\; -4x - 4y = -8$
$\;\; 3y = -6$
$\;\; y = -\frac{6}{3} \Rightarrow \boxed{y = -2}$

$\to x + y = 2$
$\;\; x - 2 = 2 \Rightarrow \boxed{x = 4}$

- Verificando em (I)
$2x + 5y = -2 \Rightarrow 2.4 + 5.(-2) = -2$
$= 8 - 10 = -2 \Rightarrow \boxed{-2 = -2}$

$S = \{(4, -2, z);\ z \in \mathbb{R}\}$

e) $(B^t . A^t)x = b$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + 3z = -2 \\ 3x + 7y + 5z = 2 \\ x + 3y + z = 2 \end{cases} \quad (L1 - L2)$$

$\Rightarrow x + y + 3z = -2$
$\;\; -x - 3y - z = -2$
$\;\; y + 2z = 0$
$\boxed{y = -2z} \quad \boxed{z = -\frac{y}{2}}$

$\to x + 3y + z = 2 \Rightarrow x + 3(-2z) + z = 2$
$\Rightarrow x - 6z + z = 2 \Rightarrow x - 5z = 2$

$\Rightarrow \boxed{x = -\frac{2}{52}}$

$\Rightarrow$ Sistema Indeterminado ou Impossível

2) a) $W = \{(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R} \text{ e } y = 0\}$
Solução:
W é subespaço?
$W = \{(x,0,z); x,z \in \mathbb{R}\}$
I) $(0,0,0) \in W$?
$(x,0,z) = (0,0,0)$
$$\begin{cases} x = 0 \\ 0 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
$\rightarrow (0,0,0) \in W$

II) Sejam $u = (x_1, 0, z_1)$ e $v = (x_2, 0, z_2) \in W$
Temos:
$u + v = (x_1, 0, z_1) + (x_2, 0, z_2) = (x_1 + x_2, 0, z_1 + z_2) \in W$

III) Sejam $u = (x_1, 0, z_1) \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$
Temos: $\alpha u = \alpha(x_1, 0, z_1) \Rightarrow (\alpha x_1, \alpha 0, \alpha z_1)$
$\Rightarrow (\alpha x_1, 0, \alpha z_1) \in W$

$\rightarrow$ Verificando por I, II e III temos que W é um subspaço de $V = \mathbb{R}^3$

Base e dimensão:
$W = \{(x,0,z); x,z \in \mathbb{R}\}$
Temos:

7

$(x, 0, z) = (x, 0, 0) + (0, 0, z) = x(1, 0, 0) + z(0, 0, 1)$

$\rightarrow$ Prova que $\{(1,0,0), (0,0,1)\}$ geram W
Base $W = \{(1,0,0), (0,0,1)\}$

Verificar que são L.I. Assim, temos que $a, b \in \mathbb{R}$:
$a(1,0,0) + b(0,0,1) = (0,0,0)$
$(a, 0, b) = (0,0,0) \rightarrow a = b = 0$

Com isso, o conjunto $\{(1,0,0), (0,0,1)\}$ é uma base de W e sua $\dim(W) = 2$

b) $W = \{(x, y, z); z = x \text{ e } y = 3x\}$
Solução:
$\begin{cases} z = x \\ y = 3x \end{cases}$

$W = \{(x, 3x, x) \in \mathbb{R}^3; x \in \mathbb{R}\}$

$\rightarrow$ W é subespaço
I) $(0,0,0) \in W$?
$(x, 3x, x) = (0,0,0)$
$\begin{cases} x = 0 \\ 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{3} \Rightarrow x = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

Logo, $(0,0,0) \in W$

II) Sejam $u=(x_1,3x_1,x_1)$ e $v=(x_2,3x_2,x_2) \in W$
Temos:
$u+v=(x_1,3x_1,x_1)+(x_2,3x_2,x_2)=(x_1+x_2,3x_1+3x_2,x_1+x_2)$
$\Rightarrow (x_1+x_2,3(x_1+x_2),x_1+x_2) \in W$

III) Seja $u=(x_1,3x_1,x_1) \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:
$\alpha u=\alpha(x_1,3x_1,x_1)=(\alpha x_1,3\alpha x_1,\alpha x_1) \in W$

$\rightarrow$ Verificando por I, II e III temos que W é um subespaço de $V=\mathbb{R}^3$

Base e dimensão:
$$W=\{(x,3x,x);\ x \in \mathbb{R}\}$$

$(x,3x,x)=x(1,3,1)$

$\rightarrow$ Prova que $\{(1,3,1)\}$ gera W

Por possuir apenas um vetor não precisa provar que é L.I.

Com isso, o conjunto $\{(1,3,1)\}$ é uma base de W e sua $\dim W=1$

c) $\{(x,y,z);\ x+y+z=0\}$
Solução: $x+y+z=0$
$z=-x-y$

9

/ /

Assim: $W = \{(x, y, -x-y);\ x, y \in \mathbb{R}\}$

W é um subspaço?

I) $(0,0,0) \in W$

$(x, y, -x-y) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ -x-y = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = 0$$

Logo: $(0,0,0) \in W$

II) Sejam $u = (x_1, y_1, -x_1-y_1)$ e
$V = (x_2, y_2, -x_2-y_2) \in W$

Temos:

$u+V = (x_1, y_1, -x_1-y_1) + (x_2, y_2, -x_2-y_2)$

$\Rightarrow (x_1+x_2, y_1+y_2, -x_1-y_1-x_2-y_2)$

$\Rightarrow (x_1+x_2, y_1+y_2, -(x_1+x_2)-(y_1+y_2)) \in W$

III) Sejam $u = (x_1, y_1, -x_1-y_1) \in W$ e
$\alpha \in \mathbb{R}$. Temos:

$\alpha u = \alpha(x_1, y_1, -x_1-y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, -\alpha x_1 - \alpha y_1) \in W$

→ Verificando por I, II e III temos que W é um subspaço de $V = \mathbb{R}^3$

→ Base e dimensão

Temos: $W = \{(x, y, -x-y);\ x, y \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow (x, y, -x-y) = (x, 0, -x) + (0, y, -y)$

$\Rightarrow x(1,0,-1) + y(0,1,-1)$

→ Provar que $\{(1,0,-1), (0,1,-1)\}$ geram W

Base de $W = \{(1,0,-1), (0,1,-1)\}$

tilibra

Verificar que são L.I. Assim temos que:
$a, b \in \mathbb{R}$
$a(1,0,-1) + b(0,1,-1) = (0,0,0)$
$(a, b, -a-b) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ -a-b = 0 \to 0 = 0 \Rightarrow a = b = 0 \end{cases}$$

Com isso, o conjunto $\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ é uma base de W e sua dim W = 2

d) $W = \{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2 \leq 2\}$
Solução:
W é um subspaço?
I) $(0,0,0) \in W$
$\to (x,y,z) = (0,0,0)$
$\to 0^2+0^2+0^2 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 2$

II) Sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $V = (x_2, y_2, z_2) \in W$
Temos:
$u+V = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$
$\Rightarrow (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \in W$

Supondo: $u = (1,1,1)$, $V(1,1,1) \in W$
$u+V = (2,2,2) \Rightarrow 2^2+2^2+2^2 \leq 2$
$16 \leq 2$ (FALSO)

W não é um Subspaço de $V = \mathbb{R}^3$

11

3) Para V, temos: $V = \begin{bmatrix} a & c \\ c & d \end{bmatrix}$

Verificar que $[0]_{2\times2} \in V$

$\begin{bmatrix} a & c \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a=0 & c=0 \\ c=0 & d=0 \end{bmatrix}$

Conclusão: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in V$

$\Rightarrow$ Sejam $M, N \in V \Rightarrow M+N \in V$?

$M = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} a_2 & c_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in V$

$M+N = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & c_1+c_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix} \in V$

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $M \in V$. Então:

$\alpha M = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha c_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{bmatrix}$, logo $\alpha M \in V$

Portanto, V é um subspaço de $M_{2\times2}$

Para W, temos: $W = \begin{bmatrix} a & c+1 \\ c & d \end{bmatrix}$

Verificar que $[0]_{2\times2} \in W$?

$\begin{bmatrix} a & c+1 \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow [0]_{2\times2} \notin W$

$a=0$ $\quad c+1=0 \Rightarrow c=-1$

$c=0$ $\quad d=0$

Logo, W não é um subspaço vetorial de $M_{2\times 2}$

4) $\begin{cases} x - 3y - 2z + 4t = 5 \\ 3x - 8y - 3z + 8t = 18 \\ 2x - 3y + 5z - 4t = 19 \end{cases}$

Solução

$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & 4 & 5 \\ 3 & -8 & -3 & 8 & 18 \\ 2 & -3 & 5 & -4 & 19 \end{array}\right]$ $L2 \leftarrow L2 - 3L1$
$L3 \leftarrow L3 - 2L1$

$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & -12 & 9 \end{array}\right]$ $L3 \leftarrow L3 - 3L2$

$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\begin{cases} x - 3y - 2z + 4t = 5 \\ y + 3z - 4t = 3 \end{cases}$

$\rightarrow y + 3z - 4t = 3 \Rightarrow \boxed{y = -3z + 4t + 3}$

$\rightarrow x - 3y - 2z + 4t = 5$
$\rightarrow x - 3(-3z + 4t + 3) - 2z + 4t = 5$
$\rightarrow x + 9z - 12t - 9 - 2z + 4t = 5$
$\rightarrow x + 7z - 8t - 9 = 5$
$\rightarrow x = -7z + 8t + 5 + 9 \Rightarrow \boxed{x = -7z + 8t + 14}$

(13)

$W = \{(x, y, z, s, t)\}$

$W = \{(-7z + 8t + 14, -3z + 4t + 3, z, t) \in \mathbb{R}^4; z, t \in \mathbb{R}\}$