Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP3 - Segundo Semestre de 2011
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(3.0)1. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Encontre bases para o núcleo de A, $N(A)$, e para a imagem de A^T, $Im(A^T)$.

(b) Calcule o determinante de A usando a expansão de cofatores (Fórmula de Laplace).

(c) Se possível, determine a matriz transposta de A. Se não for possível, justifique.

(d) Se possível, determine a matriz inversa de A. Se não for possível, justifique.

Solução

(a) Podemos encontrar bases para $N(A)$ e $I(A^T)$ colocando A em sua forma escada reduzida por linhas.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $(3,0,1)$ e $(0,2,1)$ formam uma base para o espaço linha de A, temos que $(3,0,1)^T$ e $(0,2,1)^T$ formam uma base para $Im(A^T)$. Se $x \in N(A)$, da forma escada reduzida por linhas de A temos que

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$3x_1 = 2x_2 = -x_3$$

Fazendo $x_3 = \alpha$, vemos que $N(A)$ é formado por todos os vetores da forma $\alpha(-1/3, -1/2, 1)^T$. Observe que $(-1/3, -1/2, 1)^T$ é ortogonal a $(3,0,1)^T$ e a $(0,2,1)^T$.

(b) Expandindo em relação à segunda linha, obtemos:

$$det(A) = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = 2A_{22} + A_{23},$$

Temos $A_{ij} = (-1)^{i+j}det(M_{ij})$, onde M_{ij} é o determinante menor de a_{ij}.

$$A_{22} = (-1)^{2+2}det(M_{22}) = det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 3 \times 4 - 2 \times 3 = 6.$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}det(M_{23}) = (-1)det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = -(3 \times 6 - 2 \times 3) = -12.$$

Logo $\det(A) = 2 \times 6 - 12 = 0$,

(c)

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(d) Não é possível inverter A, pois o determinante de A é igual a zero.

(2.0)2. Seja $V = M_{3\times 2}$ um espaço vetorial das matrizes reais e $S \subset V$ um subconjunto definido por:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ -b & b \\ c & -c \end{bmatrix}, \quad \text{onde} \quad a, b, c \in I\!R \right\}.$$

Mostre que S é um subespaço vetorial de V.

Solução

S é não vazio, pois

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pertence e S.

A soma dos elementos de S pertencem a S, pois:

$$\begin{bmatrix} a_1 & -a_1 \\ -b_1 & b_1 \\ c_1 & -c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & -a_2 \\ -b_2 & b_2 \\ c_2 & -c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -a \\ -b & b \\ c & -c \end{bmatrix},$$

onde $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$, e $c = c_1 + c_2$.

Múltiplos escalares de qualquer elemento de S pertencem a S, pois:

$$\alpha \begin{bmatrix} a & -a \\ -b & b \\ c & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -d \\ -e & e \\ f & -f \end{bmatrix},$$

onde $d = \alpha a$, $e = \alpha b$, e $f = \alpha c$.

Logo, S é um subespaço vetorial de V.

3.(2.0) Ache a dimensão e uma base para a solução geral W do sistema homogêneo

$$\begin{cases} x + 4y + 2s - 5t + z = 0 \\ x + 3y + 5s - 3t - 7z = 0 \\ 3x + 12y + 3s - 15t - 3z = 0 \end{cases}$$

Solução

Escalonando o sistema, obtemos

$$\begin{cases} x + 4y + 2s - 5t + z = 0 \\ x + 3y + 5s - 3t - 7z = 0 \\ 3x + 12y + 3s - 15t - 3z = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x & + & 4y & + & 2s & - & 5t & + & z & = & 0 \\ & - & y & + & 3s & + & 2t & - & 8z & = & 0 \\ & & & - & 3s & & & - & 6z & = & 0 \end{array}\right. \rightarrow$$

Em forma escalonada, o sistema tem duas variáveis livres, z e t, logo, $\dim W = 2$. A retro-substituição dá $s = -2z$, $y = -14z + 2t$, $x = 59z - 3t$. Pode-se obter como segue uma base $[u_1, u_2]$ para W:

(a) Faça $z = 1$, $t = 0$. A retro-substituição dá $s = -2$, então $y = -14$ e $x = 59$. Portanto, $u_1 = (59, -14, -2, 0, 1)$.

(b) Faça $z = 0$, $t = 1$. A retro-substituição dá $s = 0$, $y = 2$ e $x = -3$. Portanto, $u_2 = (-3, 2, 0, 1, 0)$.

Multiplicando os vetores da base pelos parâmetros a e b, respectivamente, temos $au_1 + bu_2 = a(59, -14, -2, 0, 1) + b(-3, 2, 0, 1, 0) = (59a - 3b, -14a + 2b, -2a, b, a)$.

(3.0)4. Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que

$$T(x, y, z) = (x - y - 2z, -x + 2y + z, x - 3z),$$

determinar:

(a) seu núcleo, uma base para este subespaço e sua dimensão,

(b) sua imagem, uma base para este subespaço e sua dimensão.

(c) Informe se T é sobrejetora e também se T é injetora. Justifique.

Solução

(a)

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - y - 2z & = & 0 \\ -x + 2y + z & = & 0 \\ x - 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

Da última equação, temos $x = 3z$. Substituindo na segunda equação, temos $-3z + 2y + z = 0 \rightarrow y = z$. Substituindo as duas relações na primeira equação , ela é também satisfeita, logo:

$$N(T) = \{(3z, z, z); z \in \mathbb{R}\}.$$

Base: $\{(3, 1, 1)\}$ e dimensão igual a 1.

(b)

$$\begin{cases} x - y - 2z & = & a \\ -x + 2y + z & = & b \\ x - 3z & = & c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y - 2z & = & a \\ y - z & = & b + a \\ y - z & = & c - a \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x - y - 2z & = & a \\ y - z & = & b + a \\ 0 & = & c - b - 2a \end{cases}$$

O sistema é compatível se $c - b - 2a = 0$, logo:

$$Im(T) = \{(a, b, c) \in I\!R^3 / c = 2a + b\}.$$

Base: $\{(1, 0, 2), (0, 1, 1)\}$ e dimensão igual a 2.

(c) T não é sobrejetora, pois $Im(T) \neq I\!R^3$. T não é injetora, pois $N(T) \neq \{(0, 0, 0)\}$.