Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO DA AP3 - Primeiro Semestre de 2008
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

1.(2.0) Seja

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

calcule A^{-1} e use-a para:

(a) encontrar uma matriz $X_{2\times 2}$ tal que $AX = B$.

(b) encontrar uma matriz $Y_{2\times 2}$ tal que $YA = B$.

Solução:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right)$$

Logo

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a)

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B$$
$$\Rightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$YA = B \Rightarrow YAA^{-1} = BA^{-1}$$
$$\Rightarrow Y = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ -14 & 9 \end{pmatrix}$$

2.(2.0) Determine se cada conjunto a seguir é ou não um subspaço de $\mathbb{R}^3$. Justifique sua resposta.

(a) $\{(x_1, x_2, x_3)^T | x_1 + x_3 = 1\}$

(b) $\{(x_1, x_2, x_3)^T | x_3 = x_1 + x_2\}$

Solução

(a) $\{(x_1, x_2, x_3)^T | x_1 + x_3 = 1\}$ não é subspaço, pois $u = (0.5, 0, 0.5)^T$ e $v = (0.3, 1, 0.7)^T$ pertencem ambos ao conjunto, enquanto $u + v$ não pertence.

(b) $\{(x_1, x_2, x_3)^T | x_3 = x_1 + x_2\}$ é subspaço, pois consedirando que $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ e $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ pertencem ambos ao conjunto, temos:

$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)^T$ pertence ao conjunto, já que $u_1 + u_2 = u_3$, $v_1 + v_2 = v_3$, e, portanto, $u_1 + v_1 + u_2 + v_2 = u_3 + v_3$.

e

$\alpha(u_1, u_2, u_3)^T = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)^T$ pertence ao conjunto para todo escalar α, já que $u_1 + u_2 = u_3$, e, portanto, $\alpha u_1 + \alpha u_2 = \alpha(u_1 + u_2) = \alpha u_3$.

3.(2.0) Determine o núcleo da transformação linear T, de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^2$, estabelecendo sua dimensão e uma base para este subspaço de $\mathbb{R}^4$. A transformação T é injetora? Justifique.

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4, x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4)$$

Solução:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Ou seja, $x_1 = -x_3 - 3x_4$, $x_2 = 2x_3 + x_4$. Fazendo $x_3 = \alpha$ e $x_4 = \beta$, temos que

$$N(T) = \{(-\alpha - 3\beta, 2\alpha + \beta, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in I\!R\}.$$

A dimensão do núcleo é 2 e uma base para o núcleo é $\{(-1, 2, 1, 0)^T, (-3, 1, 0, 1)^T\}$.

T não é injetora, pois $N(T) \neq \{0\}$.

4.(2.0) Determine os autovalores de A e os autovetores associados ao maior autovalor de A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Solução: A equação característica é

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\lambda^2 - \lambda - 12 = 0.$$

Logo, os autovalores de A são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -3$. Para encontrar os autovetores associados a $\lambda_1 = 4$, temos:

$$Ax = 4x \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 = 0 \end{cases}$$

Obtemos então $(x_1, x_2) = (2x_2, x_2)$. Logo, qualquer múltiplo não-nulo de $(2, 1)^T$ é um autovetor associado a $\lambda_1 = 4$.

5(2.0) Uma empresa fabrica três diferentes bebidas: A, B e C. Faz-se uma estimativa do custo de produção de um litro de cada bebida. A bebida A custa R\$10,00, a bebida B e a bebida C custam R\$5,00 cada. Faz-se também, uma estimativa do número de horas de mão-de-obra necessárias para produzir um litro de cada bebida, sendo necessárias 2 horas para a bebida A, 4 horas para a bebida B e 2 horas para a bebida C. A empresa tem disponível para gastar em sua produção um total de R\$31,00 e 12 horas de mão-de-obra. Sabendo-se que a empresa deverá produzir um total de 5 litros das três bebidas, monte um sistema linear para determinar quanto de cada bebida a empresa deverá produzir e em seguida resolva o sistema linear pelo método de Gauss-Jordan.

Solução: Representando por x_i a quantidade, em litros, da bebida i produzida, o sistema linear que representa este problema é dados por:

$$\begin{cases} 10x_A + 5x_B + 5x_C = 31 \\ 2x_A + 4x_B + 2x_C = 12 \\ x_A + x_B + x_C = 5 \end{cases}$$

Para resolvê-lo reduzimos a matriz de coeficientes do sistema linear a forma

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 & 31 \\ 2 & 4 & 2 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 & 31 \\ 0 & 15 & 5 & 29 \\ 0 & 5 & 5 & 19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 & 31 \\ 0 & 15 & 5 & 29 \\ 0 & 0 & 10 & 28 \end{pmatrix}$$

Obtemos do sistema escalonado: $x_C = 28/10 = 2,8$, $x_B = (29 - 5 * 2,8)/15 = 1$; $x_A = (31 - 5*1 - 5*2,8)/10 = 1,2$. Logo deve-se produzir 1,2 litro da bebida A, 1 litro da bebida B e 2,8 litros da bebida C.