Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
AD2 - Segundo Semestre de 2008
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

Nome -
Assinatura -

1. Considere o sistema linear;

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & & + & x_4 & = & -1 \\ & - & 2x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & -3 \\ -2x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & & & = & -1 \end{array}\right.$$

a.(1.5) Resolva-o, se possível, método de Gauss-Jordan.

b.(1.5) Calcule o determinante da matriz dos coeficientes, usando a expansão de Cofatores(Fórmula de Laplace).

2. (2.0 pt): Seja a aplicação $T : I\!R^2 \rightarrow I\!R^3$

$$(x, y) \rightarrow (x + ky, y - k, x + y)$$

Verifique em que caso(s) T é linear, justificando a resposta:
$a)$ $k = y$; $b)$ $k = 1$; $c)$ $k = 0$

3. Considere o operador linear $T : I\!R^3 \rightarrow I\!R^3$

$$(x, y, z) \rightarrow (x - 3y, x - z, z - x)$$

a.(1.5) Determine o núcleo, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T é injetora? Justificar

b.(1.5) Determine a imagem, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T é sobrejetora? Justificar

4. (2.0 pt): Calcule os autovalores e os correspondentes autovetores da seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Gabarito

# Álgebra Linear: AD2 - CEDERJ

## Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2008.2

## Tutores: Cristina Lopes e Rodrigo Olimpio

$1^a$ Questão) Solução:

Considere o sistema

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} 2x_1 & - & x_2 & + & & + & x_4 & = & -1 \\ & - & 2x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & -3 \\ -2x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & & & = & -1 \end{array}\right. \tag{1}$$

a) Método de Gauss-Jordan

O sistema linear acima pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$1^a$ Etapa) Formaremos a matriz aumentada $[A|b]$. A matriz aumentada é dada por:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & | & -3 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & | & -1 \end{bmatrix}$$

$2^a$ Etapa) Transformaremos a matriz aumentada à sua forma escada reduzida por linhas, usando operações elementares em suas linhas.

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccccc} 2 & -1 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & | & -3 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & | & -1 \\ \end{array}\right]$$

Trocando $L_4$ por $L_1$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 3 & 0 & | & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & | & -3 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & | & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & | & -1 \\ \end{array}\right]$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$ , $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$, obtemos

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 3 & 0 & | & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & | & -3 \\ 0 & 8 & 5 & 1 & | & 1 \\ 0 & -9 & -6 & 1 & | & 1 \\ \end{array}\right]$$

Multiplicando $L_2$ por $-1/2$, encontramos

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 8 & 5 & 1 & | & 1 \\ 0 & -9 & -6 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo agora $L_3 \leftarrow L_3 - 8L_2$ , $L_4 \leftarrow L_4 + 9L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 9 & -11 & | & -11 \\ 0 & 0 & -\frac{21}{2} & \frac{29}{2} & | & \frac{29}{2} \end{bmatrix}$$

Multiplicando $L_3$ por $1/9$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{9} & | & -\frac{11}{9} \\ 0 & 0 & -\frac{21}{2} & \frac{29}{2} & | & \frac{29}{2} \end{bmatrix}$$

E fazendo $L_4 \leftarrow L_4 + \frac{21}{2}L_3$, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{9} & | & -\frac{11}{9} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & | & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

Multiplicando agora $L_4$ por $3/5$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{9} & | & -\frac{11}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ \end{bmatrix}$$

Para $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2$, vamos encontrar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -6 & | & -7 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{9} & | & -\frac{11}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ \end{bmatrix}$$

E para $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -6 & | & -7 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{9} & | & \frac{8}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{9} & | & -\frac{11}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - 5L_3$, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & | & -\frac{8}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{9} & | & \frac{8}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{9} & | & -\frac{11}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ \end{bmatrix}$$

E finalmente, fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{11}{9}L_4$ , $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{8}{9}L_4$ e $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{9}L_4$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ \end{bmatrix} \tag{2}$$

O sistema linear correspondente à matriz (2) na forma escada reduzida por linhas é dado por:

$$\begin{cases} 1x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 = -1 \\ 0x_1 & + & 1x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 = 0 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 1x_3 & + & 0x_4 = 0 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 = 1 \end{cases} \tag{3}$$

e tem exatamente as mesmas soluções do sistema original (1).

$3^a$ Etapa) Resolver o sistema linear obtido na Etapa 2.

O sistema linear acima na verdade já está resolvido, e sua solução é dada por:

$$\begin{cases} x_1 &= -1 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 1 \end{cases} \tag{4}$$

isto é, $S = \{(-1, 0, 0, 1)\}$.

b) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

a matriz dos coeficientes.

Podemos expandir o determinante em relação à uma linha ou coluna. É claro que é melhor expandir em relação a uma linha ou coluna que tenha o maior número de zeros, já que, nesse caso, os cofatores $A_{ij}$ dos $a_{ij}$ que são nulos não precisam ser calculados, uma vez que $a_{ij}A_{ij} = (0)(A_{ij}) = 0$.

Expandindo, então, em relação à primeira linha, obtemos:

$$det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} \tag{5}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$$

onde $M_{ij}$ é o determinante menor de $a_{ij}$.

Assim, temos:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} det(M_{11}) = (-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} \tag{6}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} det(M_{12}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \tag{7}$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} det(M_{14}) = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \tag{8}$$

$A_{13}$ não vamos calcular pois $a_{13} = 0$.

Expandindo $det(M_{11}) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ em relação à segunda linha, por exemplo, temos:

$$det(M_{11}) = 0 + (-1)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + (-1)(12) + (-1)(-10) = -2$$

De maneira análoga para $det(M_{12})$, expandindo o determinante em relação à primeira linha, temos

$$det(M_{12}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + (1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 0 + (-1)(-1) + (-3)(-5) = 1 + 15 = 16$$

E para $det(M_{14})$, expandindo o determinante em relação à primeira linha, temos

$$det(M_{14}) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + (-2)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 0 + (2)(-5) + (1)(-8) = -10 - 8 = -18$$

Logo, temos de (6),(7) e (8) que

$$A_{11} = (1)(-2) = -2$$
$$A_{12} = (-1)(16) = -16$$
$$A_{14} = (-1)(-18) = 18$$

Substituindo esses valores em (5) temos:

$$det(A) = 2(A_{11}) + (-1)(A_{12}) + 0(A_{13}) + (1)(A_{14})$$
$$det(A) = 2(-2) + (-1)(-16) + 0 + (1)(18)$$
$$det(A) = -4 + 16 + 18$$
$$det(A) = 30$$

$2^a$ Questão) Solução:

$T$ é linear se e só se: $T(0) = 0, T(x+y) = T(x) + T(y), T(\lambda x) = \lambda T(x)$.

a) Para $k = y$ temos $T : (x, y) \to (x + y^2, y - y, x + y) = (x + y^2, 0, x + y)$. $T(0) = 0$? $T(0,0) = (0 + 0^2, 0 - 0, 0 + 0) = (0,0,0)$ ok!

Agora, temos que

$$\begin{aligned} T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) &= ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)^2, 0, (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)) \\ &= ((x_1 + x_2) + {y_1}^2 + 2y_1y_2 + {y_2}^2, 0, (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)) \\ &= (x_1 + y_1^2 + 2y_1y_2, 0, x_1 + y_1) + (x_2 + y_2^2, 0, x_2 + y_2) \neq T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) \end{aligned}$$

Então $T$ não é linear.

b) Para $k = 1$ temos $T : (x, y) \to (x + y, y - 1, x + y)$.

$T(0) = 0$? $T(0,0) = (0 + 0, 0 - 1, 0 + 0) = (0, -1, 0) \Longrightarrow T$não é linear.

c) Para $k = 0$ temos $T : (x, y) \to (x, y, x + y)$.

$T(0) = 0$? $T(0, 0) = (0, 0, 0 + 0) = (0, 0, 0)$ ok!

Agora, temos que

$$\begin{aligned} T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2) \\ &= (x_1, y_1, x_1 + y_1) + (x_2, y_2, x_2 + y_2) \\ &= T(x_1, y_1) + T(x_2 + y_2) \quad \text{ok!} \end{aligned}$$

E também que

$$\begin{aligned} T(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x, \lambda y, \lambda x + \lambda y) \\ &= (\lambda x, \lambda y, \lambda(x + y)) \\ &= \lambda(x, y, x + y) = \lambda T(x, y) \quad \text{ok!} \end{aligned}$$

Então $T$ é linear.

$3^a$ Questão) Solução:

a) $N(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / T(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$, ou seja

$$(x - 3y, x - z, z - x) = (0, 0, 0)$$

Assim, teremos o sistema

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x - z = 0 \\ z - x = 0 \end{cases} \tag{9}$$

No sistema, por $L_2$ e $L_3$, temos que $x = z$. Por $L_1$ temos que $x = 3y \Longrightarrow z = 3y$.

Logo $N(t) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/(x,y,z) = (3y,y,3y)\}$ e portanto, temos que $(3y,y,3y) = y(3,1,3)$.

Assim, temos que S$= \{(3,1,3)\}$ é base para $N(T)$, com dimensão 1. Sabemos que $T$ é injetora $\Leftrightarrow N(T) = 0$. Como $N(T) \neq 0 \Rightarrow T$ não é injetora .

b) As imagens dos vetores de uma base do $\mathbb{R}^3$ geram a imagem de $T$. Vejamos:

$$T(1,0,0) = (1,1,-1)$$
$$T(0,1,0) = (-3,0,0)$$
$$T(0,0,1) = (0,-1,1)$$

Obtemos então a matriz cujas linhas geram a imagem de $T$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Reduzindo por linhas a matriz acima encontramos, fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fazendo agora $L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2$, :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, $\{(1,1,-1),(0,3,-3)\}$ é base da imagem, e portanto, a imagem possui dimensão 2. Vale ressaltar que dimensão da imagem $+$ dimensão do núcleo $=$ $2 + 1 = 3 =$ dimensão de $\mathbb{R}^3$.

$4^a$ Questão) Solução:

A matriz canônica é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A equação característica de $A$ é:

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

isto é, desenvolvendo o determinante pela $3^a$ linha e observando a alternância dos sinais que precedem os produtos, obtemos:

$$0.A_{31} + 0.A_{32} + (1-\lambda)(-1)^{(3+3)} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$0 + 0 + (1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0$$

$$(1 - 2\lambda + \lambda^2)(2-\lambda) = 0$$

As raízes dessa equação são $\lambda_1 = 1$ (raiz dupla) e $\lambda_2 = 2$, que são os autovalores da matriz A.

<u>Cálculo dos autovetores v associados aos autovalores $\lambda$</u>:

O sistema homogêneo de equações lineares que permite a determinação dos autovetores associados é: $(A - \lambda I)v = 0$.

Considerando

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

o sistema fica:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

1. Substituindo $\lambda_1$ por 1 no sistema (10), obtemos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 1$.

   $$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   isto é,

   $$\begin{cases} 0x & -1y & -3z = 0 \\ 0x & +1y & -3z = 0 \\ 0x & +0y & +0z = 0 \end{cases}$$

   O sistema admite uma infinidade de soluções:

   $$\begin{cases} -y-3z & = & 0 & \Longrightarrow & y & = & -3z \\ y-3z & = & 0 & \Longrightarrow & y & = & 3z \\ x & = & t & & & & \end{cases}$$

   Subtraindo as duas primeiras linhas temos que $-6z = 0$ e portanto $y = z = 0$.

   Assim, os vetores $v_1 = (t, 0, 0) = t(1, 0, 0)$, $t \in \mathbb{R}$ são os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 1$.

2. Substituindo $\lambda_2$ por 2 no sistema (10), obtemos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 2$.

   $$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

isto é,

$$\begin{cases} -1x & -1y & -3z = 0 \\ 0x & +0y & -3z = 0 \\ 0x & +0y & -1z = 0 \end{cases}$$

O sistema admite uma infinidade de soluções:

$$\begin{cases} -x - y - 3z & = & 0 & \Longrightarrow & -x - y & = & 3z \\ -z & = & 0 & \Longrightarrow & z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y & = & 0 & \Longrightarrow & x & = & -y \\ x & = & t & \Longrightarrow & y = -t \end{cases}$$

Assim, os vetores $v_2 = (t, -t, 0) = t\,(1, -1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$ são os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 2$.