Parte 3

A Álgebra das Transformações Lineares

As funções que têm interesse entre espaços vetoriais reais de dimensão finita são as transformações lineares. Estudaremos transformações lineares e mostraremos que toda transformação linear está perfeitamente determinada pelos seus valores numa base do domínio. Introduziremos o conceito de núcleo de transformações lineares e mostraremos que o núcleo é um subespaço do domínio, a imagem é um subespaço do contradomínio e as dimensões do núcleo, da imagem e do domínio estão relacionadas pelo importante teorema do núcleo e da imagem.

Faremos uma representação matricial de transformações lineares entre espaços vetoriais reais de dimensão finita e estudaremos as suas propriedades. Introduziremos o conceito de matriz de mudança de base e matrizes semelhantes.

Apresentaremos o conceito de transformações lineares invertíveis, mostraremos que uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita $n \geq 1$ é invertível se, e somente se, qualquer matriz que a representa é invertível. Introduziremos os conceitos de isomorfismo e automorfismo de espaços vetoriais.

Mostraremos que, a menos de isomorfismo, $\mathbb{R}^n$ é o único espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$.

Apresentaremos a álgebra das transformações lineares em espaços vetoriais de dimensão finita, definindo as operações de adição, multiplicação por escalar e composição de transformações lineares. Estudaremos o espaço vetorial $\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \longrightarrow W \ ; \ T$ é uma transformação linear $\}$ quando

V e W são espaços vetoriais de dimensão finita. Finalizaremos com o estudo do espaço $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$, conhecido como espaço dual de V, o espaço dos funcionais lineares de V.

Transformações Lineares

Vamos estudar as funções que têm interesse entre espaços vetoriais reais.

Definição 1 (Transformação linear)
Sejam V e W espaços vetoriais reais. Uma função $T : V \longrightarrow W$ é uma *transformação linear* se, e somente se,

(a) $T(v + v') = T(v) + T(v')$, para quaisquer $v, v' \in V$;

(b) $T(a \cdot v) = a \cdot T(v)$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$ e para qualquer $v \in V$.

Exemplo 1
Para qualquer espaço vetorial real V, a *função identidade* $I : V \longrightarrow V$, definida por $I(v) = v$, para cada $v \in V$, é uma transformação linear.

Exemplo 2
Para qualquer espaço vetorial real V, a função $O : V \longrightarrow \{0_W\}$, definida por $O(v) = 0_W$, para cada $v \in V$, chamada de *função identicamente nula*, é uma transformação linear.

Exemplo 3
Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (2x-y, x+y, x+3y)$. Mostraremos que T é uma transformação linear. De fato, sejam $v = (x, y)$, $v' = (x', y')$ em $\mathbb{R}^2$ e $a \in \mathbb{R}$. Então:

$$\begin{aligned}
T(v+v') &\overset{(1)}{=} T(x+x', y+y') \\
&\overset{(2)}{=} (2(x+x') - (y+y'), (x+x') + (y+y'), (x+x') + 3(y+y')) \\
&\overset{(3)}{=} ((2x-y) + (2x'-y'), (x+y) + (x'+y'), (x+3y) + (x'+3y')) \\
&\overset{(4)}{=} (2x-y, x+y, x+3y) + (2x'-y', x'+y', x'+3y') \\
&\overset{(5)}{=} T(v) + T(v').
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(a \cdot v) &\overset{(6)}{=} T(ax, ay) \\
&\overset{(7)}{=} (2(ax) - ay, ax + ay, ax + 3(ay)) \\
&\overset{(8)}{=} (a \cdot (2x-y), a(x+y), a(x+3y)) \\
&\overset{(9)}{=} a(2x-y, x+y, x+3y) \\
&\overset{(10)}{=} a \cdot T(v).
\end{aligned}$$

Em (1) usamos a definição da adição em $\mathbb{R}^2$; em (2), a definição de T; em (3), as propriedades da adição e da multiplicação em $\mathbb{R}$; em (4), a definição da adição em $\mathbb{R}^2$ e em (5), a definição de T.

Em (6) usamos a definição da multiplicação por escalar em $\mathbb{R}^2$; em (7), a definição de T; em (8), as propriedades da adição e da multiplicação em $\mathbb{R}$; em (9), a definição da multiplicação por escalar em $\mathbb{R}^2$ e em (10), a definição de T.

Exemplo 4
A função derivação $D : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ definida por $D(f(t)) = f'(t)$ é linear.

Exemplo 5
A função $T : \mathcal{C}[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(f(x)) = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ é linear.

Exemplo 6
Seja $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (2x+y+w, 2y+z-w)$.

T é linear. De fato, dados $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & w' \end{pmatrix}$ temos:

$A + A' = \begin{pmatrix} x+x' & y+y' \\ z+z' & w+w' \end{pmatrix}$ e $a \cdot A = \begin{pmatrix} a\cdot x & a\cdot y \\ a\cdot z & a\cdot w \end{pmatrix}$. Então,

Em (1) usamos a definição de T; em (2), propriedades da adição e multiplicação em $\mathbb{R}$; em (3), a definição da adição em $\mathbb{R}^2$ e em (4), a definição de T.

Em (5) usamos a definição de T; em (6), as propriedades comutativa da multiplicação e distributiva em $\mathbb{R}$; em (7), a definição da multiplicação por escalar em $\mathbb{R}^2$ e em (8), a definição de T.

$$\begin{aligned} T(A+A') &\overset{(1)}{=} (2(x+x') + (y+y') + (w+w'), 2(y+y') + (z+z') - (w+w')) \\ &\overset{(2)}{=} ((2x+y+w) + (2x'+y'+w'), (2y+z-w) + (2y'+z'-w')) \\ &\overset{(3)}{=} (2x+y+w, 2y+z-w) + (2x'+y'+w', 2y'+z'-w') \\ &\overset{(4)}{=} T(A) + T(A') \ \text{ e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(a\cdot A) &\overset{(5)}{=} (2(a\cdot x) + a\cdot y + a\cdot w, 2(a\cdot y) + a\cdot z - a\cdot w) \\ &\overset{(6)}{=} (a\cdot(2x+y+w), a\cdot(2y+z-w)) \\ &\overset{(7)}{=} a\cdot(2x+y+w, 2y+z-w) \\ &\overset{(8)}{=} a\cdot T(A). \end{aligned}$$

Exemplo 7
A função $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(x,y) = x\cdot y$ não é linear, pois $T(2,4) = 8$, $T(1,2) = 2$ e $4 = 2T(1,2) \neq T(2,4) = 8$.

Exemplo 8
Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. A função

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x_1,\ldots,x_n) &\longmapsto (y_1,\ldots,y_m), \end{aligned}$$

Veja o Exercício 5c.

onde $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ é linear.

Por exemplo, $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y,z) = (2x+y+3z, 4x+5y+6z)$ é linear, pois

$$\begin{pmatrix} 2x+y+3z \\ 4x+5y+6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

e $T = T_A$, para $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Proposição 1 (Propriedades)
Sejam V e W espaços vetoriais reais e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. Valem as seguintes propriedades:

(a) $T(0_V) = 0_W$;

(b) $T(-v) = -T(v)$, para todo $v \in V$;

(c) $T(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = a_1T(v_1) + \cdots + a_nT(v_n)$, para quaisquer $a_1, \ldots, a_n$ em $\mathbb{R}$ e $v_1, \ldots, v_n \in V$.

Demonstração:

(a) Como $T(0_V) = T(0_V + 0_V) = T(0_V) + T(0_V)$, somando $-T(0_V)$ a ambos os membros da igualdade, então $0_W = T(0_V)$.

(b) Temos que $T(-v) = T((-1) \cdot v) = (-1) \cdot T(v) = -T(v)$.

(c) A demonstração é por indução sobre $n \geq 1$.

Se $n = 1$, então $T(a_1v_1) = a_1T(v_1)$, pois T é linear.

Seja $n \geq 1$ tal que $T(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = a_1T(v_1) + \cdots + a_nT(v_n)$. Então,

$$\begin{aligned} T(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n + a_{n+1}v_{n+1}) &\overset{(1)}{=} T\big((a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) + a_{n+1}v_{n+1}\big) \\ &\overset{(2)}{=} T(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) + T(a_{n+1}v_{n+1}) \\ &\overset{(3)}{=} a_1T(v_1) + \cdots + a_nT(v_n) + a_{n+1}T(v_{n+1}). \end{aligned}$$

Em (1) usamos a associatividade da adição em V; em (2), que T é linear e em (3), a hipótese de indução e que T é linear.

Logo, a igualdade vale para $n + 1$. Portanto, a igualdade vale para todo $n \geq 1$. ■

Exemplo 9

A função $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + 1, x + 2y)$ não é linear, pois $T(0, 0) = (1, 0) \neq (0, 0)$.

Teorema 1

Sejam V e W espaços vetoriais reais, com $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n \geq 1$, $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V e $w_1, \ldots, w_n \in W$. Então existe uma única transformação linear $T : V \longrightarrow W$ tal que $T(v_1) = w_1, \ldots, T(v_n) = w_n$.

Demonstração: Suponhamos que existe $T : V \longrightarrow W$ linear tal que $T(v_1) = w_1, \ldots, T(v_n) = w_n$. Então, dado $v \in V$ existem $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ unicamente determinados tais que $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$. Portanto,

$$\begin{aligned} T(v) &= T(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) \\ &= a_1T(v_1) + \cdots + a_nT(v_n) = a_1w_1 + \cdots + a_nw_n. \end{aligned}$$

Agora que sabemos a expressão de T, definimos

$$T(v) = a_1w_1 + \cdots + a_nw_n, \text{ para } v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n.$$

Vamos mostrar que $T(v_j) = w_j$, para $j = 1, \ldots, n$ e que T é linear.

De fato,

$v_j = 0 \cdot v_1 + \cdots + 1 \cdot v_j + \cdots + 0 \cdot v_n$ e

$T(v_j) = 0 \cdot w_1 + \cdots + 1 \cdot w_j + \cdots + 0 \cdot w_n = w_j$.

Dados $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ e $v' = a'_1v_1 + \cdots + a'_nv_n$, então

$v + v' = (a_1 + a'_1)v_1 + \cdots + (a_n + a'_n)v_n$,

$$\begin{aligned} T(v + v') &= (a_1 + a'_1)w_1 + \cdots + (a_n + a'_n)w_n \\ &= (a_1w_1 + \cdots + a_nw_n) + (a'_1w_1 + \cdots + a'_nw_n) \\ &= T(v) + T(v') \end{aligned}$$

Para $a \in \mathbb{R}$, temos $a \cdot v = (a \cdot a_1)v_1 + \cdots + (a \cdot a_n)v_n$ e

$$\begin{aligned} T(a \cdot v) &= (a \cdot a_1)w_1 + \cdots + (a \cdot a_n)w_n \\ &= a \cdot (a_1w_1 + \cdots + a_nw_n) \\ &= a \cdot T(v). \ \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 10

Vamos determinar a única transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1) = (2,1,3)$ e $T(1,0) = (1,1,-1)$.

Como $\alpha = \{(1,1),(1,0)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$, podemos escrever (x,y) como combinação linear de α, a saber,

$$(x,y) = a(1,1) + b(1,0) = (a+b,a) \Longleftrightarrow \begin{cases} a+b = x \\ a = y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = y \\ b = x-y \end{cases}$$

Logo, $(x,y) = y(1,1) + (x-y)(1,0)$ e

$$\begin{aligned} T(x,y) &= yT(1,1) + (x-y)T(1,0) \\ &= y(2,1,3) + (x-y)(1,1,-1) \\ &= (x+y, x, -x+4y). \end{aligned}$$

Exemplo 11

Seja $0 \leq \theta < 2\pi$ e $R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a função rotação de θ no sentido anti-horário. Geometricamente, verificamos que:

$R_\theta(v + v') = R_\theta(v) + R_\theta(v')$, para todo $v, v' \in \mathbb{R}^2$ e

$R_\theta(a \cdot v)$, para todo $a \in \mathbb{R}$ e para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

Portanto, R_θ é linear. Para determinar R_θ, basta conhecê-la numa base do $\mathbb{R}^2$. Temos $R_\theta(1,0) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ e $R_\theta(0,1) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$.

Como $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$, logo

$$\begin{aligned} R_\theta(x,y) &= xR_\theta(1,0) + yR_\theta(0,1) \\ &= x(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) + y(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \\ &= (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta). \end{aligned}$$

Exemplo 12

Seja $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a simetria com respeito ao plano Π passando pela origem. Por semelhança e congruência de triângulos retângulos, verificamos que:

$S(v + v') = S(v) + S(v')$, para quaisquer $v, v' \in \mathbb{R}^3$ e

$S(a \cdot v) = a \cdot S(v)$, para todo $a \in \mathbb{R}$ e para todo $v \in V$.

Logo, S é linear. Para determinar S, basta conhecer S numa base do $\mathbb{R}^3$.

Observamos que: $S(v) = v$, para todo $v \in \Pi$ e $S(v) = -v$, se v é normal ao plano.

Tomando $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$, onde v_1 é normal ao plano e v_2, v_3 é uma base para o plano Π, temos $S(v_1) = -v_1$, $S(v_2) = v_2$ e $S(v_3) = v_3$.

Para ilustrar, vamos determinar a expressão de S para $\Pi : x + y + z = 0$.

Tomamos $\alpha = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, -1, 0), v_3 = (0, 1, -1)\}$. Então,

$(x, y, z) = a(1, 1, 1) + b(1, -1, 0) + c(0, 1, -1) = (a + b, a - b + c, a - c)$.

Resolvendo o sistema $\begin{cases} a + b = x \\ a - b + c = y \\ a - c = z \end{cases}$ obtemos $a = \frac{x+y+z}{3}$, $b = \frac{2x-y-z}{3}$ e $c = \frac{x+y-2z}{3}$. Portanto,

$(x, y, z) = \frac{x+y+z}{3}(1, 1, 1) + \frac{2x-y-z}{3}(1, -1, 0) + \frac{x+y-2z}{3}(0, 1, -1)$,

$$\begin{aligned} S(x, y, z) &= \tfrac{x+y+z}{3} S(1, 1, 1) + \tfrac{2x-y-z}{3} S(1, -1, 0) + \tfrac{x+y-2z}{3} S(0, 1, -1) \\ &= \tfrac{x+y+z}{3}(-1, -1, -1) + \tfrac{2x-y-z}{3}(1, -1, 0) + \tfrac{x+y-2z}{3}(0, 1, -1) \\ &= \left(\tfrac{x-2y-2z}{3}, \tfrac{-2x+y-2z}{3}, \tfrac{2x-2y+z}{3}\right) \end{aligned}$$

Exercícios

1. Quais das seguintes funções $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ são lineares?

   (a) $T(x, y) = (1 + x, y)$

   (b) $T(x, y) = (2x + y, x - y)$

   (c) $T(x, y) = (xy, x)$

   (d) $T(x, y) = (e^x, y)$

2. Mostre que as seguintes funções são transformações lineares:

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $T(x, y) = (x - y, 2x + y, x + 3y)$.

   (b) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, tal que $T(a, b, c) = a + bt + ct^2$.

   (c) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x + y - z)$.

   (d) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, tal que

   $$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - y & x + y + z \\ x + y - z & 2y - 3z \end{pmatrix}.$$

(e) $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, tal que
$T(a,b,c,d) = (2a+b-c+d)+(a-b+c+d)t+(a+2b-2c)t^2$.

(f) $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que
$T(x,y,z,w) = (2x-y+z+3w, x+y-2z+w, x-2y-3z+2w)$.

3. Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $T(-1,1) = (3,2,1)$ e $T(0,1) = (1,1,0)$. Encontre $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) = (5,3,2)$.

4. Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $T(1,0,0) = (2,0)$, $T(0,1,0) = (1,1)$ e $T(0,0,1) = (0,-1)$. Determine $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (3,2)$.

5. Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ fixa. Considere a função $T : M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ definida por $T(X) = AX$.

   (a) Mostre que T é linear.

   (b) Mostre que T é a transformação nula se, e somente se, $A = O$.

   (c) Mostre que A induz a transformação linear $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por
   $$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_m),$$
   onde $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)]_\beta$, β é a base canônica do $\mathbb{R}^m$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)]_\alpha$, α é a base canônica do $\mathbb{R}^n$ e $Y = AX$.

Toda transformação linear $T : V \longrightarrow V$ é chamada de *operador linear*.

6. Existe um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1,1) = (1,2,3)$, $T(1,2,3) = (1,4,9)$ e $T(2,3,4) = (1,8,27)$? Justifique a sua resposta.

7. Sabendo que as seguintes funções $T : V \longrightarrow V$ são operadores lineares, indique como construir uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V tal que $T(v_1), \dots, T(v_n)$ sejam conhecidos:

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é a simetria com respeito a uma reta r passando pela origem.

   (b) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é a projeção ortogonal sobre uma reta r passando pela origem.

   (c) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é a projeção ortogonal sobre um plano Π passando pela origem.

   (d) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é a simetria com respeito a uma reta r passando pela origem.

   (e) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é a projeção ortogonal sobre uma reta r passando pela origem.

Imagem e Núcleo de Transformações lineares

Primeiramente, lembramos alguns conceitos importantes sobre funções em geral.

Definição 2

Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função. A *imagem* de f é

$$\text{Imagem}(f) = \{f(a)\ ;\ a \in A\} = f(A) \subset B \text{ e}$$

f é dita *sobrejetora* se, e somente se, $f(A) = B$. f é dita *injetora* se, e somente se, se $a \neq a'$, então $f(a) \neq f(a')$. Equivalentemente, f é injetora se, e somente se, se $f(a) = f(a')$, então $a = a'$. f é dita *bijetora* se, e somente se, f é injetora e sobrejetora.

Veremos que para funções lineares, a imagem é facilmente determinada.

Proposição 2 (Propriedade da Imagem)

Sejam V e W espaços vetoriais reais e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. Então,

(a) Imagem(T) é um subespaço de W.

(b) Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, então Imagem$(T) = [T(v_1), \ldots, T(v_n)]$.

Demonstração:

(a) $0_W = T(0_V) \in T(V)$.

Se $w = T(v)$ e $w' = T(v')$ com $v, v' \in V$, então

$$w + w' = T(v) + T(v') = T(v + v') \in T(V),$$

pois $v + v' \in V$.

Se $w = T(v)$, com $v \in V$ e $a \in \mathbb{R}$, então

$$a \cdot w = a \cdot T(v) = T(a \cdot v) \in T(V),$$

pois $a \cdot v \in V$.

(b) É claro que $[T(v_1), \ldots, T(v_n)] \subset T(V)$.

Seja $w \in T(V)$. Então, existe $v \in V$ tal que $w = T(v)$.

Como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, existem $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, tais que $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$. Logo,

$$w = T(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = a_1T(v_1) + \cdots + a_nT(v_n) \in [T(v_1), \ldots, T(v_n)].$$

Portanto, $T(V) \subset [T(v_1), \ldots, T(v_n)]$. ■

Exemplo 13

Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x + y + z, -x - y - z)$, T é linear. Como $\alpha = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$, então

$$\text{Imagem}(T) = [T(e_1), T(e_2), T(e_3)] = [(1,-1)] \subsetneq \mathbb{R}^2,$$

logo T não é sobrejetora.

Definição 3 (Núcleo)
Sejam V e W espaços vetoriais reais e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. O *núcleo* de T é o subconjunto de V definido por

$$\text{Núcleo}(T) = \{v \in V\,; T(v) = 0_W\}.$$

Exemplo 14
No Exemplo 13 temos que

$$\begin{aligned}\text{Núcleo}(T) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ T(x,y,z) = (x+y+z, -x-y-z) = (0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x+y+z = 0\}.\end{aligned}$$

Portanto, o núcleo de T é um plano passando pela origem, um subespaço de dimensão 2 do $\mathbb{R}^3$.

Proposição 3 (Propriedades do núcleo)
Sejam V e W espaços vetoriais reais e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear.

(a) Núcleo(T) é um subespaço de V.

(b) T é injetora se, e somente se, Núcleo$(T) = \{0_V\}$.

Demonstração:

(a) Como $T(0_V) = 0_W$, então $0_V \in$ Núcleo(T). Sejam $v, v' \in$ Núcleo(T) e $a \in \mathbb{R}$. Então, $T(v+v') = T(v)+T(v') = 0_V+0_V = 0_V$ e $T(a\cdot v) = a\cdot T(v) = a\cdot 0_V = 0_V$, logo $v+v'$, $a\cdot v \in$ Núcleo(T).

(b)

($\Longrightarrow$:) Suponhamos que T seja injetora. Seja $v \in$ Núcleo(T). Então, $0_W = T(v) = T(0_V)$. Assim, $v = 0_V$ e Núcleo$(T) = \{0_V\}$.

($\Longleftarrow$:) Suponhamos que Núcleo$(T) = \{0_V\}$. Sejam $v, v' \in V$ tais que $T(v) = T(v')$. Então, $0_W = T(v) - T(v') = T(v-v')$, logo $v - v' \in$ Núcleo$(T) = \{0_V\}$, portanto $v - v' = 0_V$, isto é, $v = v'$. Então, T é injetora. ■

Exemplo 15
Vamos determinar o núcleo e a imagem da seguinte transformação linear $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (x+w, y+z)$.

As matrizes $e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_{22} =$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ formam uma base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Temos $T(e_{11}) = (1,0)$, $T(e_{12}) = (0,1)$, $T(e_{21}) = (0,1)$ e $T(e_{22}) = (1,0)$. Logo,

$$\begin{aligned} \text{Imagem}(T) &= [T(e_{11}), T(e_{12}), T(e_{21}), T(e_{22})] \\ &= [(1,0),(0,1),(0,1),(1,0)] \\ &= [(1,0),(0,1)] = \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Portanto, T é sobrejetora.

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \text{Núcleo}(T) &\iff T(A) = (x+w, y+z) = (0,0) \\ &\iff x = -w \text{ e } y = -z \\ &\iff A = \begin{pmatrix} -w & -z \\ z & w \end{pmatrix}, \text{ com } z, w \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Logo, T não é injetora e $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Núcleo}(T)) = 2$.

Exemplo 16

Vamos determinar o núcleo e a imagem de $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z,w) = (x+y+z+w, 2x-y-w, x-2y-z-2w)$.

$(a,b,c) \in \text{Imagem}(T) \iff$ existe $v = (x,y,z,w)$ tal que $(a,b,c) = T(v)$, isto é, $(a,b,c) = (x+y+z+w, 2x-y-w, x-2y-z-2w)$.

Para determinar equações para a imagem devemos determinar condições sobre a, b, c para que o sistema a seguir tenha solução:

$$\begin{cases} x+y+z+w = a \\ 2x-y-w = b \\ x-2y-z-2w = c \end{cases}$$

Reduzindo por linhas a matriz ampliada associada ao sistema temos

$$\left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & -1 & 0 & -1 & b \\ 1 & -2 & -1 & -2 & c \end{array}\right) \sim_1 \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -3 & -2 & -3 & b-2a \\ 0 & -3 & -2 & -3 & c-a \end{array}\right) \sim_2$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -3 & -2 & -3 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-b+c \end{array}\right)$$

Fizemos a sequência de operações elementares: em $\sim_1$: $L_2 \to L_2 - 2L_1$, $L_3 \to L_3 - L_1$; em $\sim_2$: $L_3 \to L_3 - L_2$.

Logo, o sistema admite solução se, e somente se, $a - b + c = 0$, que é equivalente a $(a,b,c) \in \text{Imagem}(T)$ se, e somente se, $a - b + c = 0$.

Portanto, a imagem de T é um plano pela origem e T não é sobrejetora.

$v = (x,y,z,w) \in \text{Núcleo}(T)$ se, e somente se,

$$T(v) = (x+y+z+w, 2x-y-w, x-2y-z-2w) = (0,0,0).$$

Para determinar o núcleo devemos resolver o sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ 2x-y-w=0 \\ x-2y-z-2w=0 \end{cases}$$

Reduzindo por linhas a matriz associada ao sistema temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fizemos as mesmas operações elementares em $\sim_1$ e $\sim_2$, em $\sim_3$: $L_2 \to -\frac{1}{3}L_2$ e em $\sim_4$: $L_1 \to L_1 - L_2$.

Logo, $x + \frac{1}{3}z = 0$ e $y + \frac{2}{3}z + w = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Núcleo}(T) &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \; ; \; x = -\tfrac{1}{3}z \text{ e } y = -\tfrac{2}{3}z - w\} \\ &= \{\left(-\tfrac{1}{3}z, -\tfrac{2}{3}z - w, z, w\right) \; ; \; z, w \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Então, T não é injetora e $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Núcleo}(T)) = 2$.

Exemplo 17

Seja $D : \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ a derivação. Vamos determinar o núcleo e a imagem de D. Temos $D(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + 4a_4t^3 = 0$ se, e somente se, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$ e $a_4 = 0$. Logo, $\text{Núcleo}(D) = \{f(t) = a_0 \; ; \; a_0 \in \mathbb{R}\}$.

Como $1, t, t^2, t^3, t^4$ é uma base de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$, então

$$\begin{aligned} \text{Imagem}(D) &= [D(1), D(t), D(t^2), D(t^3), D(t^4)] \\ &= [0, 1, 2t, 3t^2, 4t^3] \\ &= [1, t, t^2, t^3] = \mathcal{P}_3(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Portanto, $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Imagem}(D)) = 4 < 5 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}_4(\mathbb{R}))$ e D não é sobrejetora. D não é injetora, pois $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Núcleo}(D)) = 1 > 0$.

Veremos que podemos relacionar as dimensões do domínio, do núcleo e da imagem de uma transformação linear.

Teorema 2 (Teorema do Núcleo e da Imagem)

Sejam V e W espaços vetoriais reais, com $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$, e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. Então,

$$\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(\text{Núcleo}(T)) + \dim_{\mathbb{R}}(\text{Imagem}(T)).$$

Demonstração: Como Núcleo(T) é um subespaço de V, então temos que $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Núcleo}(T)) \leq \dim_{\mathbb{R}}(V) = n$. Seja $\alpha = \{u_1, \ldots, u_r\}$ uma base para Núcleo(T). Completamos α a uma base β de V.

Digamos que $\beta = \{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_\ell\}$. Então,

$$n = \dim_{\mathbb{R}}(V) = r + \ell = \dim_{\mathbb{R}}(\text{Núcleo}(T)) + \ell.$$

Vamos mostrar que $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Imagem}(T)) = \ell$ e obteremos o resultado do Teorema. Temos que

$$\text{Imagem}(T) = [T(u_1), \ldots, T(u_r), T(v_1), \ldots, T(v_\ell)] = [T(v_1), \ldots, T(v_\ell)],$$

pois $T(u_1) = 0_W, \ldots, T(u_r) = 0_W$.

É suficiente mostrar que $T(v_1), \ldots, T(v_\ell)$ é linearmente independente.

Suponhamos que $0_W = a_1T(v_1) + \cdots + a_\ell T(v_\ell) = T(a_1v_1 + \cdots + a_\ell v_\ell)$. Logo, $a_1v_1 + \cdots + a_\ell v_\ell \in$ Núcleo(T). Portanto, existem $b_1, \ldots, b_r \in \mathbb{R}$ tais que $a_1v_1 + \cdots + a_\ell v_\ell = b_1u_1 + \cdots + b_ru_r$. Assim,

$$a_1v_1 + \cdots + a_\ell v_\ell - b_1u_1 - \cdots - b_ru_r = 0_V.$$

Como β é linearmente independente, temos que $a_1 = \cdots = a_\ell = -b_1 = \cdots = -b_r = 0$. ■

Volte aos Exemplos 13, 15, 16 e 17 e verifique o Teorema do Núcleo e da Imagem.

Exemplo 18

Consideremos a transformação linear $T : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(a + bt) = (a - b, a + b)$.

Temos que

$$\text{Núcleo}(T) = \{f(t) = a + bt\,;\ T(a + bt) = (a + b, a - b) = (0, 0)\} = \{0\},$$

em virtude do sistema $\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 0 \end{cases}$ ter como solução $a = b = 0$.

Logo, $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Núcleo}(T)) = 0$ e T é injetora.

Como

$$\begin{aligned} 2 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}_1(\mathbb{R})) &= \dim_{\mathbb{R}}(\text{Núcleo}(T)) + \dim_{\mathbb{R}}(\text{Imagem}(T)) \\ &= 0 + \dim_{\mathbb{R}}(\text{Imagem}(T)) \\ &= \dim_{\mathbb{R}}(\text{Imagem}(T)), \end{aligned}$$

Imagem$(T) \subset \mathbb{R}^2$ e $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2) = 2$, então Imagem$(T) = \mathbb{R}^2$ e T é sobrejetora.

Exemplo 19

Toda transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ não é injetora.

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem. temos

$$4 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) = \dim_{\mathbb{R}}(\text{Núcleo}(T)) + \dim_{\mathbb{R}}(\text{Imagem}(T)).$$

Como Imagem(T) é um subespaço do $\mathbb{R}^3$ temos que $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Imagem}(T)) \leq 3$, logo

$$\dim_{\mathbb{R}}(\text{Núcleo}(T)) = 4 - \dim_{\mathbb{R}}(\text{Imagem}(T)) \geq 4 - 3 \geq 1,$$

portanto Núcleo$(T) \neq \{(0, 0, 0, 0)\}$ e T não é injetora.

Exemplo 20

Toda transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ não é sobrejetora.

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem. temos
$$3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = \dim_{\mathbb{R}}(\text{Núcleo}(T)) + \dim_{\mathbb{R}}(\text{Imagem}(T)).$$
Assim,
$$\dim_{\mathbb{R}}(\text{Imagem}(T)) = 3 - \dim_{\mathbb{R}}(\text{Núcleo}(T)) \leq 3 < 4 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4),$$
logo Imagem$(T) \subsetneq \mathbb{R}^4$ e T não é sobrejetora.

Exemplo 21

Seja $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por
$$T(a + bt + ct^2) = (2a - b + c, -a + 2b + c, a + b + 2c).$$
Vamos verificar se T é injetora ou sobrejetora.

Vamos determinar o núcleo de T.

$a+bt+ct^2 \in$ Núcleo$(T) \iff (2a-b+c, -a+2b+c, a+b+2c) = (0, 0, 0)$.

Vamos resolver o sistema
$$\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ 2a - b + c = 0 \\ -a + 2b + c = 0. \end{cases}$$
Reduzindo por linhas a matriz associada ao sistema, temos
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fizemos a seguinte sequência de operações elementares: em $\sim_1$: $L_2 \to L_2 - 2L_1$, $L_3 \to L_3 + L_1$; em $\sim_2$: $L_2 \to -\frac{1}{3}L_2$; em $\sim_3$: $L_1 \to L_1 - L_2$, $L_3 \to L_3 - 3L_2$.

Logo, $a + c = 0$ e $b + c = 0$, isto é, $a = -c$ e $b = -c$, com $c \in \mathbb{R}$.

Assim, $f(t) \in$ Núcleo(T) se, e somente se, $f(t) = -c-ct+ct^2 = c(-1-t+t^2)$, com $c \in \mathbb{R}$. Logo, Núcleo$(T) = [-1-t+t^2]$. Portanto, $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Núcleo}(T)) = 1$ e T não é injetora.

Como $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Imagem}(T)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})) - \dim_{\mathbb{R}}(\text{Núcleo}(T)) = 3 - 1 = 2$, Imagem$(T) \subset \mathbb{R}^3$ e $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3$, portanto Imagem$(T) \subsetneq \mathbb{R}^3$ e T não é sobrejetora.

Exercícios

1. Determine, para cada transformação linear do Exercício 2 da Seção 1:

   (a) o núcleo, sua dimensão e uma base,

   (b) a imagem, sua dimensão e uma base.

2. Diga quais das transformações lineares do Exercício 2 da Seção 1 são injetoras, sobrejetoras ou bijetoras.

3. Seja $D : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida por $D(f(t)) = f'(t)$, isto é,

   $D(a + bt + ct^2) = b + 2ct$.

   (a) Mostre que D é linear.

   (b) Determine a imagem e o núcleo de D.

4. Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz fixa.

   Seja $T : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{n\times n}(\mathbb{R})$ definida por $T(X) = XA - AX$. Mostre que T é linear.

5. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   Determine o núcleo e a imagem de $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $T(X) = XA - AX$.

6. Encontre uma base e a dimensão da imagem e do núcleo da transformação linear $T_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Veja o Exercício 5c da Seção 1.

7. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, tal que sua imagem é gerada por $w_1 = (1, 1, 2, 1)$ e $w_2 = (2, 1, 0, 1)$.

8. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cujo núcleo é gerado por $v_1 = (1, 1, 0)$.

9. (a) Existe uma transformação linear injetora $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$? Por quê?

   (b) Existe uma transformação linear sobrejetora $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$? Por quê?

   (c) Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ injetora e não sobrejetora? Sobrejetora e não injetora? Por quê?

10. Sejam V e W espaços vetoriais reais, tais que $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(W) = n \geq 1$, e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. Mostre que T é injetora se, e somente se, T é bijetora.

11. Sejam V um espaço vetorial real com $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ e $T : V \longrightarrow V$ uma transformação linear tal que Núcleo(T) = Imagem(T). Mostre que n é par.

12. Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Seja $T : V \longrightarrow V$ uma transformação linear. Mostre que as seguintes afirmações sobre T são equivalentes:

    (a) Imagem$(T) \cap$ Núcleo$(T) = \{0_V\}$.

    (b) Se $T(T(v)) = 0_V$, então $T(v) = 0_V$.

13. Seja $T : V \longrightarrow V$ uma transformação linear e seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$.

    Mostre que se $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ é linearmente independente, então $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente.

14. Seja $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear com a seguinte propriedade: se $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, então $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ é linearmente independente em W.

    Mostre que T é injetora.

Matrizes de transformações lineares

Vamos fazer uma representação matricial de transformações lineares que generaliza o caso especial apresentado no Exercício 5c da Seção 1.

Definição 4
Sejam V e W espaços vetoriais reais, tais que $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n \geq 1$ e $\dim_{\mathbb{R}}(W) = m \geq 1$, $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$ bases, respectivamente, de V e W e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear.

Definimos *a matriz de* T *de* α *para* β como a matriz $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ definida por

$$T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} T(v_1)]_{\beta} & T(v_2)]_{\beta} & \cdots & T(v_n)]_{\beta} \end{pmatrix}.$$

A j-ésima coluna de $T]^{\alpha}_{\beta}$ é $T(v_j)]_{\beta} \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$, o vetor coordenada na base β da imagem por T do j-ésimo vetor da base α.

Exemplo 22
Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (2x + y - z, x + 3y + 2z)$. Consideremos $\alpha = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ e $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$, as bases canônicas do $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Como $T(e_1) = (2, 1)$, $T(e_2) = (1, 3)$ e $T(e_3) = (-1, 2)$, então $T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Temos que se $v = (x, y, z)$, então

$$T(v)]_{\beta} = \begin{pmatrix} 2x + y - z \\ x + 3y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T]^{\alpha}_{\beta} \cdot v]_{\alpha}.$$

Vamos mostrar agora a propriedade da matriz $T]^{\alpha}_{\beta}$.

Proposição 4 (Representação matricial)
Sejam V e W espaços vetoriais reais, tais que $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n \geq 1$ e $\dim_{\mathbb{R}}(W) = m \geq 1$, $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$ bases, respectivamente, de V e W e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. Então, para cada $v \in V$, temos

$$T(v)]_{\beta} = T]^{\alpha}_{\beta} \cdot v]_{\alpha}.$$

Demonstração: Escrevendo v como combinação linear da base α de V, temos:

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n, \text{ logo } v]_{\alpha} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Aplicando T a v, temos que:

$$T(v) = x_1T(v_1) + x_2T(v_2) + \cdots + x_nT(v_n) = \sum_{j=1}^{n} x_jT(v_j).$$

Para cada $j = 1, \ldots, n$, escrevendo $T(v_j)$ como combinação linear da base β de W, temos que existem $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj} \in \mathbb{R}$, tais que

$$T(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m = \sum_{k=1}^{m} a_{kj}w_k \text{ e } T(v_j)]_\beta = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} T(v) &= \sum_{j=1}^{n} x_jT(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j\Big(\sum_{k=1}^{m} a_{kj}w_k\Big) \\ &\overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\Big(x_ja_{kj}w_k\Big) \\ &\overset{(2)}{=} \sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j\Big)w_k. \end{aligned}$$

Em (1) usamos a distributividade do produto por escalar em V; em (2), a comutatividade e associatividade da adição em V e a distributividade do produto por escalar em V.

Assim, tomando $A = (a_{kj})$, para $k = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$, temos

$$T(v)]_\beta = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Como $A = T]^\alpha_\beta$, finalmente, obtemos

$$T(v)]_\beta = T]^\alpha_\beta \cdot v]_\alpha. \quad \blacksquare$$

Exemplo 23

Seja $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (2a + b + c, -a + b + 3c, 4a + 2b + c).$$

Sejam $\alpha = \{1, t, t^2\}$ e $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ as bases canônicas, respectivamente, de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^3$.

Temos $T(1) = (2, -1, 4)$, $T(t) = (1, 1, 2)$ e $T(t^2) = (1, 3, 1)$. Logo,

$$T]^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$T(a+bt+ct^2)]_\beta = \begin{pmatrix} 2a+b+c \\ -a+b+3c \\ 4a+2b+c \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{T]_\beta^\alpha} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{(a+bt+ct^2)]_\alpha}.$$

Exemplo 24

Vamos determinar a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que a matriz $T]_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, onde $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\beta = \{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$.

A matriz e_{ij} tem o elemento de ordem ij igual a 1 e os outros elementos iguais a 0.

Como $v = (x,y) = x(1,0) + y(0,1)$, então $v]_\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e

$$T(x,y)]_\beta = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x-y \\ -x \\ y \end{pmatrix}.$$ Portanto,

$$\begin{aligned} T(x,y) &= (2x+y)e_{11} + (x-y)e_{12} - xe_{21} + ye_{22} \\ &= \begin{pmatrix} 2x+y & x-y \\ -x & y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplo 25

Sejam $\alpha = \{(1,-1),(0,2)\}$ e $\beta = \{(1,0,-1),(0,1,2),(1,2,0)\}$ bases, respectivamente, do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Vamos determinar a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T]_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Dado $v = (x,y)$ escrevemos v como combinação linear da base α de V, obtendo:

$$\begin{aligned} (x,y) = a(1,-1) + b(0,2) = (a, -a+2b) &\iff a = x \text{ e } -a+2b = y \\ &\iff a = x \text{ e } 2b = x+y \\ &\iff a = x \text{ e } b = \tfrac{x+y}{2}. \end{aligned}$$

Logo, $v]_\alpha = \begin{pmatrix} x \\ \frac{x+y}{2} \end{pmatrix}$.

Da propriedade de $T]_\beta^\alpha$, temos que

$$T(v)]_\beta = T]_\beta^\alpha \cdot v]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \frac{x+y}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{3x+y}{2} \\ -\frac{(x+y)}{2} \end{pmatrix},$$ que é equivalente

a
$$\begin{aligned} T(x,y)=T(v) &= x(1,0,-1)+\tfrac{3x+y}{2}(0,1,2)-\tfrac{(x+y)}{2}(1,2,0)\\ &= \left(\tfrac{x-y}{2},\tfrac{x-y}{2},2x+y\right). \end{aligned}$$

Exemplo 26

Seja $S:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ a simetria com respeito à reta r gerada por $(1,1)$. Vamos determinar $S(x,y)$.

Veja Exercício 7 da Seção 1.

Conforme já foi observado, S é uma transformação linear. Basta saber os valores de S numa base do $\mathbb{R}^2$ para determinar S. Temos que:

(i) $S(v)=v$, para todo $v\in r$;

(ii) $S(v)=-v$, para todo $v\in s$, onde s é a reta passando pela origem perpendicular a r.

A equação da reta r é $y=x$, em virtude de
$(x,y)\in r \iff (x,y)=a(1,1)=(a,a)$, para algum $a\in\mathbb{R}\iff y=a=x$.

Logo, a equação de s é $y=-x$.

Portanto, tomando $v_1=(1,1)\in r$ e $v_2=(1,-1)\perp s$, temos a base do $\mathbb{R}^2$ $\alpha=\{v_1,v_2\}$ tal que $S(v_1)=v_1$, $S(v_2)=-v_2$.

Assim, $S(v_1)]_\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $S(v_2)]_\alpha=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ e $S]_\alpha^\alpha=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$.

Escrevendo $v=(x,y)$ como combinação linear de α, temos:
$$\begin{aligned}(x,y)=a(1,1)+b(1,-1)=(a+b,a-b) &\iff a+b=x \text{ e } a-b=y\\ &\iff a=\tfrac{x+y}{2} \text{ e } y=\tfrac{x-y}{2}.\end{aligned}$$

Logo, $(x,y)]_\alpha=\begin{pmatrix}\frac{x+y}{2}\\ \frac{x-y}{2}\end{pmatrix}$ e
$$S(x,y)]_\alpha=S]_\alpha^\alpha\cdot(x,y)]_\alpha=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{x+y}{2}\\ \frac{x-y}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x+y}{2}\\ \frac{-x+y}{2}\end{pmatrix},$$
portanto $S(x,y)=\left(\frac{x+y}{2}\right)(1,1)+\left(\frac{-x+y}{2}\right)(1,-1)=(y,x)$.

Veremos agora uma aplicação interessante da representação matricial de uma transformação linear.

Exemplo 27

Seja V um espaço vetorial real com $\dim_{\mathbb{R}}(V)=n\geq 1$. Sejam α e β bases de V e consideremos a transformação linear identidade $I:V\longrightarrow V$ definida por $I(v)=v$. Fixemos a base α no domínio de I e a base β no contradomínio.

Da definição de $I]_\beta^\alpha$, segue que
$$I]_\beta^\alpha=\begin{pmatrix} I(v_1)]_\beta & \cdots & I(v_n)]_\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1]_\beta & \cdots & v_n]_\beta\end{pmatrix}.$$

Além disso, da propriedade da representação matricial de transformações lineares, temos que

$$v]_\beta = I(v)]_\beta = I]_\beta^\alpha \cdot v]_\alpha.$$

A expressão acima motiva a seguinte definição

Definição 5 (Matriz de mudança de base)
Seja V um espaço vetorial real de dimenão $n \geq 1$. Sejam $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ e β bases de V. A matriz $I]_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} v_1]_\beta & \cdots & v_n]_\beta \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é chamada *matriz de mudança de base de* α para β.

Exemplo 28
Consideremos as bases do $\mathbb{R}^3$ $\alpha = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ e $\beta = \{w_1 = (1,0,0), w_2 = (1,1,0), w_3 = (1,1,1)\}$. Vamos determinar a matriz $I]_\beta^\alpha$ de mudança da base α para β.

Temos que:

$v_1 = w_1 = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3$, então $v_1]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$v_2 = -w_1 + w_2 = (-1) \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3$, então $v_2]_\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$v_3 = -w_2 + w_3 = 0 \cdot w_1 + (-1) \cdot w_2 + 1 \cdot w_3$, então $v_3]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Logo,

$$I]_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} v_1]_\beta & v_2]_\beta & v_3]_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para $v = (x, y, z)$ temos que $v]_\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e

$$v]_\beta = I]_\beta^\alpha \cdot v]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z \end{pmatrix}.$$

Assim, $(x, y, z) = (x-y)w_1 + (y-z)w_2 + zw_3$.

Exemplo 29
Sejam $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\beta = \{w_1 = 1 + t^2, w_2 = 1 - t, w_3 = 1 + t + t^2\}$ bases

de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Sabendo que $I]^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ vamos determinar

(i) v_1, v_2, v_3;

(ii) $v]_{\beta}$, onde $v]_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

(iii) v do item anterior.

(i) Da definição de $I]^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} v_1]_{\beta} & v_2]_{\beta} & v_3]_{\beta} \end{pmatrix}$ segue que:

$v_1]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, logo $v_1 = w_1 + w_2 + w_3 = (1 + t^2) + (1 - t) + (1 + t + t^2) = 3 + 0t + 2t^2 = 3 + 2t^2$;

$v_2]_{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, logo $v_2 = 2w_1 - w_2 + w_3 = 2(1+t^2) - (1-t) + (1+t+t^2) = 2 + 2t + 3t^2$;

$v_3]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, logo $v_3 = w_1 + w_2 + 0 \cdot w_3 = (1+t^2) + (1-t) + 0 \cdot (1+t+t^2) = 2 - t + t^2$.

(ii) $v]_{\beta} = I]^{\alpha}_{\beta} \cdot v]_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e

(iii) De $v]_{\beta}$ temos $v = 3w_2 = 3(1 - t) = 3 - 3t$ ou, a partir de $v]_{\alpha}$, temos $v = v_1 - v_2 + v_3 = (3 + 0t + 2t^2) - (2 + 2t + 3t^2) + (2 - t + t^2) = 3 - 3t$.

Exemplo 30

Seja $V = \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ e seja $I]^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Determine α, se $\beta = \{w_1 = 1, w_2 = 1 + t\}$.

Seja $\alpha = \{v_1, v_2\}$.

Como $v_1]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, então $v_1 = w_1 + w_2 = 1 + (1+t) = 2+t$ e $v_2 = w_1 + 2w_2 = 1 + 2(1 + t) = 3 + 2t$. Logo, $\alpha = \{2 + t, 3 + 2t\}$.

(b) Determine β, se $\alpha = \{v_1 = 1 + t, v_2 = 1 - t\}$.

Seja $\beta = \{w_1, w_2\}$. Como $v_1]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, então

$$1+t = v_1 = w_1 + w_2 \text{ e } 1-t = v_2 = w_1 + 2w_2.$$

Vamos resolver o sistema $\begin{cases} w_1 + w_2 = 1+t & (1) \\ w_1 + 2w_2 = 1-t. & (2) \end{cases}$

Subtraindo a equação (1) de (2), obtemos $w_2 = (1-t) - (1+t) = -2t$. Substituindo na equação (1), temos $w_1 = 1+t-w_2 = 1+t+2t = 1+3t$. Logo, $\beta = \{1+3t, -2t\}$.

Vamos agora ver uma propriedade importante da matriz de mudança de base.

Proposição 5 (Propriedade da matriz de mudança de base)
Seja V um espaço vetorial real de dimensão $n \geq 1$. Sejam α e β bases de V. A matriz $I]^{\alpha}_{\beta}$ é invertível e $\left(I]^{\alpha}_{\beta}\right)^{-1} = I]^{\beta}_{\alpha}$.

Demonstração: Basta mostrarmos que $I]^{\alpha}_{\beta} \cdot I]^{\beta}_{\alpha} = I_n$, a matriz identidade de ordem n. Primeiramente, observamos que as matrizes $I]^{\alpha}_{\beta}$ e $I]^{\beta}_{\alpha}$ têm a seguinte propriedade:

$$I]^{\alpha}_{\beta} \cdot I]^{\beta}_{\alpha} \cdot v]_{\beta} = v]_{\beta}, \text{ para todo } v]_{\beta}.$$

De fato, para todo $v]_{\beta}$, temos

$$I]^{\alpha}_{\beta} \cdot I]^{\beta}_{\alpha} \cdot v]_{\beta} = I]^{\alpha}_{\beta} \cdot \left(I]^{\beta}_{\alpha} \cdot v]_{\beta}\right) = I]^{\alpha}_{\beta} \cdot v]_{\alpha} = v]_{\beta}.$$

Para cada $j = 1, \ldots, n$, seja $E_j = (c_{i1}) \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ tal que $c_{j1} = 1$ e $c_{k1} = 0$, para $1 \leq k \neq j \leq n$.

Então, para toda matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, temos que

$$A \cdot E_j = A^j,$$

onde A^j é a j-ésima coluna de A.

Consideremos $A = I]^{\alpha}_{\beta} \cdot I]^{\beta}_{\alpha}$. Para cada $j = 1, \ldots, n$, fazemos $v]_{\beta} = E_j$. Assim,

$$E_j = v]_{\beta} = I]^{\alpha}_{\beta} \cdot I]^{\beta}_{\alpha} \cdot v]_{\beta} = AE_j = A^j.$$

Portanto,

$$I]^{\alpha}_{\beta} \cdot I]^{\beta}_{\alpha} = A = \begin{pmatrix} A^1 & A^2 & \cdots & A^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & E_2 & \cdots & E_n \end{pmatrix} = I_n. \quad \blacksquare$$

Exemplo 31
Consideremos as bases do $\mathbb{R}^3$ $\alpha = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ e $\beta = \{w_1 = (1,1,1), w_2 = (0,0,1), w_3 = (1,-1,0)\}$. Vamos determinar $I]^{\alpha}_{\beta}$. A base α é a base canônica do $\mathbb{R}^3$. É trivial escrever um elemento qualquer do $\mathbb{R}^3$ como combinação linear de α, em particular, é imediato escrever os elementos de β como combinação linear de α. Assim,

$$I]^{\beta}_{\alpha} = \begin{pmatrix} w_1]_\alpha & w_2]_\alpha & w_3]_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para determinar $I]^{\alpha}_{\beta}$ calculamos $\left(I]^{\beta}_{\alpha}\right)^{-1}$. Pelo algoritmo apresentado na Parte 1, reduzimos por linhas a matriz $\left(I]^{\beta}_{\alpha} \,\middle|\, I_3 \right)$. Logo,

Fizemos a seguinte sequência de operações elementares: em $\sim_1$: $L_2 \to L_2 - L_1$, $L_3 \to L_3 - L_1$; em $\sim_2$: $L_2 \leftrightarrow L_3$; em $\sim_3$: $L_3 \to -\frac{1}{2}L_3$; em $\sim_4$: $L_1 \to L_1 - L_3$, $L_2 \to L_2 + L_3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \sim_4$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right). \text{ Logo, } I]^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercícios

1. Sejam $\alpha = \{(-1,1),(1,0)\}$ e $\beta = \{(1,1,-1),(2,1,0),(3,0,1)\}$ bases do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Sabendo que $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é a transformação linear tal que
$$T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$
determine $T(x,y)$.

2. Sejam $\alpha = \{(1,0,0),(2,-1,0),(0,1,1)\}$ e $\beta = \{(-1,1),(0,1)\}$ bases, respectivamente, do $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$. Determine $T]^{\alpha}_{\beta}$, onde $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é definida por $T(x,y,z) = (2x+y-z, x+2y)$.

3. Seja $T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, onde $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear, $\alpha = \{(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1)\}$ e $\beta = \{(-1,0),(0,-1)\}$.

   (a) Determine $T(x,y,z)$.

   (b) Determine a imagem de T e uma base para esse subespaço.

   (c) Determine o núcleo de T e uma base para esse subespaço.

   (d) T é injetora? T é sobrejetora? Justifique sua resposta.

4. Considere a função $T: M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por
$$T\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = (a+b, c-d, 2a).$$

   (a) Mostre que T é linear.

   (b) Determine $T]^{\alpha}_{\beta}$, onde α e β são as bases canônicas, respectivamente, de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^3$.

   (c) Determine $v \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, tal que $T(v) = (3, -2, 4)$.

   (d) Determine a imagem e o núcleo de T.

   (e) T é sobrejetora ou injetora? Justifique.

5. Seja $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que:

   (i) $T(v) = -3v$, para todo $v = (t, -t, t)$, $t \in \mathbb{R}$;

   (ii) $T(v) = 2v$, para todo $v = (x, y, z)$ tal que $x - y + z = 0$.

   Determine $T(x, y, z)$.

6. Seja $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ o operador linear tal que:

   (i) $T(v) = 2v$, para todo $v = (t, t, t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$;

   (ii) $T(v) = 3v$, para todo $v = (x, y, z, w)$ tal que $x + y + z + 2w = 0$.

   Determine $T(x, y, z, w)$

7. Consideremos as bases $\alpha = \{(-3, 0, -3), (-3, 2, -1), (1, -6, -1)\}$ e $\beta = \{(-6, -6, 0), (-2, -6, 4), (-2, -3, 7)\}$ do $\mathbb{R}^3$.

   (a) Determine a matriz de mudança de base $I]^{\alpha}_{\beta}$.

   (b) Determine $v]_{\alpha}$, onde $v = (-5, 8, -5)$.

   (c) Calcule $v]_{\beta}$, usando a matriz obtida no item (a).

8. Sejam $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ bases de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, assim relacionadas:

   $u_1 = v_1 + v_3$
   $u_2 = 2v_1 + v_2 + v_3$
   $u_3 = v_1 + 2v_2 + v_3$

   Determine as matrizes de mudança de base $I]^{\alpha}_{\beta}$ e $I]^{\beta}_{\alpha}$.

9. Sejam $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\beta = \{(1, 1), (1, -1)\}$ bases do $\mathbb{R}^2$.

(a) Determine $(1,0)]_\beta$ e $(0,1)]_\beta$.

(b) Determine $I]^\alpha_\beta$.

(c) Determine $(x,y)]_\beta$

10. Consideremos $\alpha = \{1, t, t^2, t^3\}$, a base canônica de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, e a base $\beta = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}$.

    (a) Determine $1]_\beta$, $t]_\beta$, $t^2]_\beta$ e $t^3]_\beta$.

    (b) Determine $I]^\alpha_\beta$.

    (c) Determine $v]_\beta$, onde $v = 1 + 2t - t^3$.

    (d) Determine $u \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, sabendo que $u]_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

11. A matriz de mudança da base $\alpha = \{1+t, 1-t^2\}$ para uma base β, ambas do mesmo subespaço de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, é $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Determine a base β.

12. Seja $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $S(x,y) = (2y, x-y, x)$. Determine $S]^\alpha_\beta$, onde $\alpha = \{(1,-1),(0,2)\}$ e $\beta = \{(1,0,-1),(0,1,2),(1,2,0)\}$.

13. Determine o operador linear T de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ cuja matriz em relação à base $\beta = \{1+t, 1+2t\}$ é $T]^\beta_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

14. Para cada um dos operadores lineares T em $\mathbb{R}^2$, determine a matriz $T]^\alpha_\alpha$, onde α é a base canônica do $\mathbb{R}^2$:

    (a) T é definido por $T(1,0) = (2,4)$ e $T(0,1) = (5,8)$.

    (b) T é a rotação anti-horária de $\frac{\pi}{2}$.

    (c) T é a simetria com respeito à reta $y = -x$.

    (d) T é a simetria com respeito à reta $y = 3x$.

15. Seja V um espaço vetorial real de dimensão $n \geq 1$ e $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Mostre que $I]^\alpha_\alpha = I_n$, a matriz identidade de ordem n.

Composição de transformações lineares

Transformações lineares são funções e a composição é feita como a composição de funções foi definida.

Definição 6 (Composição de transformações lineares)
Sejam V, W e U espaços vetoriais reais, $T : V \longrightarrow W$ e $S : W \longrightarrow U$ transformações lineares, então $S \circ T : V \longrightarrow U$ é a função definida por

$$(S \circ T)(v) = S(T(v)), \text{ para cada } v \in V.$$

Exemplo 32
Sejam as transformações lineares $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por $T(x, y) = (x + 2y, x - y, 3x - 2y)$ e $S(x, y, z) = (x + y - z, 2x + y - z)$. Então, $S \circ T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é a função

$$\begin{aligned}
(S \circ T)(x, y) &= S(T(x, y)) \\
&= S(x + 2y, x - y, 3x - 2y) \\
&= ((x + 2y) + (x - y) - (3x - 2y), 2(x + 2y) + (x - y) \\
&\quad -(3x - 2y)) \\
&= (-x + 3y, 5y).
\end{aligned}$$

Logo, $S \circ T$ é linear.

A propriedade do Exemplo acima vale em geral.

Proposição 6 (Propriedades da composição de transformações lineares)
Sejam V, W e U espaços vetoriais reais, $T : V \longrightarrow W$ e $S : W \longrightarrow U$ transformações lineares. Valem as seguintes propriedades:

(a) $S \circ T : V \longrightarrow U$ é linear.

(b) Se $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n \geq 1$, $\dim_{\mathbb{R}}(W) = r \geq 1$, $\dim_{\mathbb{R}}(U) = m \geq 1$, α, β e δ são bases, repectivamente, de V, W e U, então

$$(S \circ T)]_{\delta}^{\alpha} = S]_{\delta}^{\beta} \cdot T]_{\beta}^{\alpha}.$$

Demonstração:
(a) Sejam $v, v' \in V$ e $a \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned}
(S \circ T)(v + v') &\overset{(1)}{=} S(T(v + v')) \\
&\overset{(2)}{=} S(T(v) + T(v')) \\
&\overset{(3)}{=} S(T(v)) + S(T(v')) \\
&\overset{(4)}{=} (S \circ T)(v) + (S \circ T)(v') \text{ e}
\end{aligned}$$

Em (1) usamos a definição da composição; em (2), que T é linear; em (3), que S é linear e em (4), novamente, a definição da composição.

$$\begin{aligned}(S\circ T)(a\cdot v) &\overset{(5)}{=} S(T(a\cdot v))\\ &\overset{(6)}{=} S(a\cdot T(v))\\ &\overset{(7)}{=} a\cdot S(T(v))\\ &\overset{(8)}{=} a\cdot (S\circ T)(v).\end{aligned}$$

Em (5) usamos a definição da composição; em (6), que T é linear; em (7), que S é linear e em (8), novamente, a definição da composição.

(b) Para qualquer $v]_\alpha$, temos

$$\begin{aligned}S]_\delta^\beta\cdot T]_\beta^\alpha\cdot v]_\alpha &= S]_\delta^\beta\cdot\big(T(v)]_\beta\big)\\ &= S(T(v)]_\delta = (S\circ T)(v)]_\delta\\ &= (S\circ T)]_\delta^\alpha\cdot v]_\alpha.\end{aligned}$$

Seja $A = S]_\delta^\beta\cdot T]_\beta^\alpha$ e seja $B=(S\circ T)]_\delta^\alpha$.

Mostramos acima que $A\cdot v]_\alpha = B\cdot v]_\alpha$, para todo $v]_\alpha$.

Procederemos de maneira análoga à demonstração da Proposição 5. Para cada $j=1,\dots,n$, seja $E_j=(c_{i1})\in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ tal que $c_{j1}=1$ e $c_{k1}=0$, para $1\le k\ne j\le n$.

Tomando $v]_\alpha = E_j$, para cada $j=1,\dots,n$, temos

$$A^j = A\cdot E_j = B\cdot E_j = B^j.$$

Assim, as colunas de A e B são as mesmas, obtendo que $A=B$. ■

Exemplo 33

Podemos fazer também a composição $T\circ S$ das transformações lineares do Exemplo 32 $T:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ e $S:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ definidas por

$$T(x,y)=(x+2y,x-y,3x-2y) \text{ e } S(x,y,z)=(x+y-z,2x+y-z).$$

Vamos determinar $T(S(x,y,z))$, usando a representação matricial.

Fixemos $\alpha=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $\beta=\{(1,0),(0,1)\}$, as bases canônicas, respectivamente, do $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

Temos que $T(1,0)=(1,1,3)$, $T(0,1)=(2,-1,-2)$, $S(1,0,0)=(1,2)$, $S(0,1,0)=(1,1)$ e $S(0,0,1)=(-1,-1)$.

Portanto, $T]_\alpha^\beta=\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\\3&-2\end{pmatrix}$, $S]_\beta^\alpha=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$ e

$$(T\circ S)]_\alpha^\alpha = T]_\alpha^\beta\cdot S]_\beta^\alpha=\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&3&-3\\-1&0&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}T(S(x,y,z))]_\alpha &= \big((T\circ S)(x,y,z)\big)\big]_\alpha = (T\circ S)]_\alpha^\alpha\cdot(x,y,z)]_\alpha\\ &= \begin{pmatrix}5&3&-3\\-1&0&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5x+3y-3z\\-x\\-x+y-z\end{pmatrix}\end{aligned} \quad \text{e}$$

$T(S(x,y,z)) = (5x+3y-3z, -x, -x+y-z)$.

Exemplo 34

Sejam $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definidas a seguir. Vamos determinar $T \circ S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, onde $S(a,b) = a + bt + (2a+b)t^2$ e $T(a+bt+ct^2) = (2a-b+c, 2a+b-c, a+b-c)$.

Sejam $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}$, $\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $\delta = \{1,t,t^2\}$ as bases fixadas, respectivamente, no $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Então,

$T(1) = (2,2,1)$, $T(t) = (-1,1,1)$, $T(t^2) = (1,-1,-1)$;

$S(1,0) = 1+2t^2$, $S(0,1) = t+t^2$; $T]^{\delta}_{\beta} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $S]^{\alpha}_{\delta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Logo, $(T \circ S)]^{\alpha}_{\beta} = T]^{\delta}_{\beta} \cdot S]^{\alpha}_{\delta} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Portanto,

$T(S(a,b))]_{\beta} = (T \circ S)]^{\alpha}_{\beta} \cdot (a,b)]_{\alpha} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$ e

$T(S(a,b)) = (4a, 0, -a)$.

Lembramos um resultado de Fundamentos de Matemática Elementar.

Proposição 7

Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função. f é bijetora se, e somente se, existe uma função $g : B \longrightarrow A$ tal que $g \circ f = I_A$ e $f \circ g = I_B$, onde I_A e I_B são as funções identidades, respectivamente, em A e B. Nesse caso, dizemos que f é *invertível*, chamamos g de *inversa* de f e denotamos $f^{-1} = g$.

Demonstração:

($\Longrightarrow$:) Dado $b \in B$, como f é sobrejetora, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$ e a é único, pois f é injetora. Definimos $g : B \longrightarrow A$ por

$$g(b) = a \text{ se, e somente se, } f(a) = b.$$

Então,

$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = a = I_A(a)$, para todo $a \in A$, e

$(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = b = I_B(b)$, para todo $b \in B$.

Portanto, $g \circ f = I_A$ e $f \circ g = I_B$.

($\Longleftarrow$:) Dado $b \in B$, temos que $b = I_B(b) = (f \circ g)(b) = f(g(b))$. Tomando

$a = g(b) \in A$, obtemos que $b = f(g(b)) = f(a)$, com $a \in A$, logo f é sobrejetora.

Sejam agora $a, a' \in A$ tais que $f(a) = f(a')$.

Aplicando g e usando que $g \circ f = I_A$, obtemos:

$$a = I_A(a) = (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(f(a')) = (g \circ f)(a') = I_A(a') = a'.$$

Logo, f é injetora. ■

Definição 7 (Isomorfismo)
Sejam V e W espaços vetoriais reais. Dizemos que uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$ é um *isomorfismo* de espaços vetoriais se, e somente se, T é bijetora. Quando $W = V$ e $T : V \longrightarrow V$ é bijetora, dizemos que T é um *automorfismo* de V.

Exemplo 35
Seja V um espaço vetorial real. Então, a função identidade $I_V : V \longrightarrow V$ definida por $I_V(v) = v$, para cada $v \in V$, é um automorfismo, pois é uma transformação linear bijetora.

Proposição 8
Sejam V e W espaços vetoriais reais e $T : V \longrightarrow W$ um isomorfismo. Então, $T^{-1} : W \longrightarrow V$ é linear.

Demonstração: Sejam $w, w' \in W$. Pela Proposição 7, temos que:

$T^{-1}(w) = v$ se, e somente se, $T(v) = w$ $\quad (\star)$

e $T^{-1}(w') = v'$ se, e somente se, $T(v') = w'$. $\quad (\star\star)$

Logo,

$$\begin{aligned} T^{-1}(w + w') &\overset{(1)}{=} T^{-1}(T(v) + T(v')) \\ &\overset{(2)}{=} T^{-1}(T(v + v')) \\ &\overset{(3)}{=} (T^{-1} \circ T)(v + v') \\ &\overset{(4)}{=} I_V(v + v') \\ &\overset{(5)}{=} v + v' \\ &\overset{(6)}{=} T^{-1}(w) + T^{-1}(w') \end{aligned}$$

Em (1) usamos $(\star)$ e $(\star\star)$; em (2), que T é linear; em (3), a definição da composição; em (4), que $T^{-1} \circ T = I_V$; em (5), a definição de I_V e em (6), novamente, $(\star)$ e $(\star\star)$.

e, para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T^{-1}(a \cdot w) &\overset{(7)}{=} T^{-1}(a \cdot T(v)) \\ &\overset{(8)}{=} T^{-1}(T(a \cdot v)) \\ &\overset{(9)}{=} (T^{-1} \circ T)(a \cdot v) \\ &\overset{(10)}{=} I_V(a \cdot v) \end{aligned}$$

Em (7) usamos $(\star)$; em (8), que T é linear; em (9), a definição da composição; em (10), que $T^{-1} \circ T = I_V$; em (11), a definição de I_V e em (12), novamente, $(\star)$.

$$\overset{(11)}{=} \quad a \cdot v$$
$$\overset{(12)}{=} \quad a \cdot T^{-1}(w). \quad \blacksquare$$

Definição 8

Sejam V e W espaços vetoriais reais. Dizemos que V e W são *isomorfos* se, e somente se, existe $T : V \longrightarrow W$ um isomorfismo, isto é, uma transformação linear bijetora.

Exemplo 36

$\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ são isomorfos. De fato, consideremos $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida por $T(a, b, c) = a + bt + ct^2$. Então, dados $v = (a, b, c)$ e $v' = (a', b', c')$ em $\mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} T(v + v') &\overset{(1)}{=} T(a + a', b + b', c + c')) \\ &\overset{(2)}{=} (a + a') + (b + b')t + (c + c')t^2 \\ &\overset{(3)}{=} (a + bt + ct^2) + (a' + b't + c't^2) \\ &\overset{(4)}{=} T(v) + T(v') \text{ e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\lambda \cdot v) &\overset{(5)}{=} T(\lambda \cdot a, \lambda \cdot b, \lambda \cdot c) \\ &\overset{(6)}{=} (\lambda \cdot a) + (\lambda \cdot b)t + (\lambda \cdot c)t^2 \\ &\overset{(7)}{=} \lambda \cdot (a + bt + ct^2) \\ &\overset{(8)}{=} \lambda \cdot T(v). \end{aligned}$$

Em (1) usamos a definição da adição em $\mathbb{R}^3$; em (2), a definição de T; em (3), a associatividade e comutatividade da adição em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e em (4), a definição de T.

Em (5) usamos a definição da multiplicação por escalar no $\mathbb{R}^3$; em (6), a definição de T; em (7), propriedade da multiplicação por escalar em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e em (8), a definição de T.

Logo, T é linear. Temos $0 = T(a, b, c) = a + bt + ct^2$ se, e somente se, $a = 0$, $b = 0$ e $c = 0$. Assim, Núcleo$(T) = \{(0, 0, 0)\}$ e T é injetora. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem,

$3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = \dim_{\mathbb{R}}(\text{Núcleo}(T)) + \dim_{\mathbb{R}}(\text{Imagem}(T)) = \dim_{\mathbb{R}}(\text{Imagem}(T))$.

Como $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = 3$, Imagem$(T) \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Imagem}(T)) = 3$, obtemos que Imagem$(T) = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e T é sobrejetora.

Nesse caso, $T^{-1} : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é dada por $T^{-1}(a + bt + ct^2) = (a, b, c)$.

Observação: Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita, digamos que $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ e $\dim_{\mathbb{R}}(W) = m$. Seja $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que:

(a) Se $n > m$, então T não é injetora.

(b) Se $n < m$, então T não é sobrejetora.

(c) Se T é bijetora, então $n = m$.

Antes de darmos mais Exemplos de isomorfismos veremos uma propriedade muito importante da representação matricial de transformações lineares entre espaços vetoriais de mesma dimensão.

Proposição 9

Sejam V e W espaços vetoriais reais de dimensão $n \geq 1$, α e β bases, respectivamente, de V e W e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. Então, T é um isomorfismo se, e somente se, $T]^{\alpha}_{\beta}$ é matriz invertível. Nesse caso, $T^{-1}]^{\beta}_{\alpha} = \big(T]^{\alpha}_{\beta}\big)^{-1}$.

Demonstração:

($\Longrightarrow$:) Suponhamos que T seja um isomorfismo. Então, existe $T^{-1} : W \longrightarrow V$ linear, tal que $T \circ T^{-1} = I_W$ e $T^{-1} \circ T = I_V$. Segue da representação matricial

$$I_n = I_W]^{\beta}_{\beta} = (T \circ T^{-1})]^{\beta}_{\beta} = T]^{\alpha}_{\beta} \cdot T^{-1}]^{\beta}_{\alpha},$$

Fez o Exercício 15 da Seção 3?

assim como,

$$I_n = I_V]^{\alpha}_{\alpha} = (T^{-1} \circ T)]^{\alpha}_{\alpha} = T^{-1}]^{\beta}_{\alpha} \cdot T]^{\alpha}_{\beta},$$

mostrando que $T]^{\alpha}_{\beta}$ é invertível e$\big(T]^{\alpha}_{\beta}\big)^{-1} = T^{-1}]^{\beta}_{\alpha}$.

($\Longleftarrow$:) Suponhamos que $A = T]^{\alpha}_{\beta} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ seja invertível. Consideremos B a inversa de A. Seja $S : W \longrightarrow V$ a única transformação linear tal que $S]^{\beta}_{\alpha} = B$. Então,

$$I_W]^{\beta}_{\beta} = I_n = A \cdot B = T]^{\alpha}_{\beta} \cdot S]^{\beta}_{\alpha} = (T \circ S)]^{\beta}_{\beta},$$

mostrando que $I_W = T \circ S$. Analogamente,

$$I_V]^{\alpha}_{\alpha} = I_n = B \cdot A = S]^{\beta}_{\alpha} \cdot T]^{\alpha}_{\beta} = (S \circ T)]^{\alpha}_{\alpha},$$

mostrando que $I_V = S \circ T$. Portanto, T é um isomorfismo, $S = T^{-1}$ e $T^{-1}]^{\beta}_{\alpha} = \big(T]^{\alpha}_{\beta}\big)^{-1}$. ■

Exemplo 37

Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ definida por $T(a, b) = a + (a + b)t$. Vamos mostrar que T é invertível e vamos determinar T^{-1}.

Fixemos $\alpha = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ e $\beta = \{1, t\}$ as bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$. Temos que $T(1, 0) = 1 + t$ e $T(0, 1) = t$. Logo,

$$T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} T(e_1)]_{\beta} & T(e_2)]_{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+t)]_{\beta} & t]_{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Reduzindo por linhas a matriz aumentada $(T]^{\alpha}_{\beta} \mid I_2)$ obtemos, substituindo $L_2 \rightarrow L_2 - L_1$,

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Logo, T é invertível, $T^{-1}]^{\beta}_{\alpha} = \big(T]^{\alpha}_{\beta}\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e

$$T^{-1}(a + bt)]_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a + b \end{pmatrix}.$$

Portanto, $T^{-1}(a + bt) = a(1, 0) + (-a + b)(0, 1) = (a, -a + b)$.

Exemplo 38

Seja $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(a + bt + ct^2) = (a - b, 2b, b + c)$. Vamos determinar, caso exista, a inversa de T.

Fixemos $\alpha = \{1, t, t^2\}$ e $\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ bases, respectivamente, de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^3$. Temos que:

$$T(1) = (1,0,0),\ T(t) = (-1,2,1) \text{ e } T(t^2) = (0,0,1).$$

Então,

$$T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} T(1)]_{\beta} & T(t)]_{\beta} & T(t^2)]_{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos verificar se a matriz acima é invertível. Reduzindo por linhas a matriz aumentada, obtemos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \sim_4$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right).$$

Fizemos a seguinte sequência de operações elementares: em $\sim_1$: $L_1 \to L_1 + L_3$, $L_2 \to L_2 - 2L_3$; em $\sim_2$: $L_2 \leftrightarrow L_3$; em $\sim_3$: $L_3 \to -\frac{1}{2}L_3$; em $\sim_4$: $L_1 \to L_1 - L_3$, $L_2 \to L_2 - L_3$.

Logo, existe $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $T^{-1}]^{b}eta_{\alpha} = \left(T]^{\alpha}_{\beta}\right)^{-1}$ e

$$\begin{aligned} T^{-1}(a,b,c)]_{\alpha} &= T^{-1}]^{\beta}_{\alpha} \cdot (a,b,c)]_{\beta} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \\ &= \begin{pmatrix} a + \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} \\ -\frac{b}{2} + c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Logo, $T^{-1}(a,b,c) = \left(a + \frac{b}{2}\right) + \frac{b}{2}t + \left(c - \frac{b}{2}\right)t^2$.

Encerramos esta Seção com o importante resultado a seguir.

Proposição 10

Todo espaço vetorial real V com dimensão $n \geq 1$ é isomorfo ao $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: Dado o espaço vetorial V escolhemos uma base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V. Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^n$. Definimos $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$ como a única transformação linear tal que $T(e_1) = v_1, \ldots, T(e_n) = v_n$. Então,

$$\begin{aligned} T(x_1,\dots,x_n) &= T(x_1e_1+\cdots+x_ne_n) \\ &= x_1T(e_1)+\cdots+x_nT(e_n) \\ &= x_1v_1+\cdots+x_nv_n. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que T é um isomorfismo.

Temos que Imagem$(T) = [T(e_1),\dots,T(e_n)] = [v_1,\dots,v_n] = V$. Portanto, T é sobrejetora. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem,

$$n = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = \dim_{\mathbb{R}}(\text{Núcleo}(T)) + n.$$

Logo, $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Núcleo}(T)) = 0$. Como T é bijetora e linear, então T é um isomorfismo. ■

Exercícios

1. Seja $D : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definida por $D(a+bt+ct^2+dt^3) = b+2ct+3dt^2$.

   (a) Mostre que D é linear.

   (b) Determine o núcleo de D e a imagem de D.

   (c) Determine $D]_\alpha^\alpha$, onde $\alpha = \{1,t,t^2,t^3\}$ é a base canônica de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

   (d) Seja $T = D \circ D$. Determine T; $T]_\alpha^\alpha$, onde $\alpha = \{1,t,t^2,t^3\}$ é a base canônica de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$; Núcleo$(T)$ e Imagem(T).

   (e) Determine um isomorfismo $S : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$.

2. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $R : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ as transformações lineares definidas por $T(x,y,z) = (y, x+z)$, $S(x,y) = (2x, x-y, x+y)$ e $R(x,y) = (y, 2x)$. Determine:

   (a) $T \circ S$ (b) $S \circ T$ (c) $R \circ T$ (d) $S \circ R$ (e) $R^3 = R \circ R \circ R$

3. Sejam F e T os operadores lineares do $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ definidos por

   $$T(a+bt) = b+at \text{ e } F(a+bt) = a.$$

   Determine os operadores:

   (a) $F \circ T$ (b) $T \circ F$ (c) $T^2 = T \circ T$ (d) $F^2 = F \circ F$

4. Seja $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o operador linear tal que $T(1) = 1+t+t^2$, $T(t) = 1+t^2$ e $T(t+2t^2) = 4t^2$. T é invertível? Se for, determine $T^{-1}(a+bt+ct^2)$.

5. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por
$$T(x, y, z) = (2x - y + z, x + y, 3x + y + z).$$
Verifique se T é bijetora. Se for, determine $T^{-1}(x, y, z)$.

6. Seja $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear com $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(W)$. Mostre que T é injetora se, e somente se, T é sobrejetora.

7. Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Mostre que para todo natural $n \geq 1$, T^n é operador linear, onde $T^1 = T$, $T^2 = T \circ T$ e, para todo $n \geq 2$, $T^n = T^{n-1} \circ T$.

8. Sejam $S : V \longrightarrow V$ e $T : V \longrightarrow V$ operadores lineares invertíveis. Mostre que $S \circ T$ é um operador linear invertível e $(S \circ T)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

9. Seja V um espaço vetorial real com $\dim_{\mathbb{R}} V = n$. Seja $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V.

   (a) Mostre que $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$ definida por
   $$T(x_1, \ldots, x_n) = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$$
   é linear.

   (b) Determine o núcleo e a imagem de T.

   (c) Mostre que T é um isomorfismo de espaços vetoriais.

   (d) Exiba T no caso em que $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e α é a base canônica de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   (e) Exiba T no caso em que $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e α é a base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

   (f) Exiba T no caso em que $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ e $\alpha = \{(1, 0, 1), (-1, 2, 1)\}$.

10. Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por: uma simetria S com respeito à reta $y = x$, seguida da projeção ortogonal P sobre a reta $y = x$, seguida de uma contração C de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e finalizada por uma rotação horária R de $\frac{\pi}{4}$.

    Observe que $T = R \circ C \circ P \circ S$.

11. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a projeção ortogonal sobre o plano $x + y - z = 0$.

    (a) Encontre uma base β do $\mathbb{R}^3$, tal que $T]_{\beta}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Determine $T(x, y, z)$.

12. Seja $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de um espaço vetorial V. Sejam T e S operadores lineares de V definidos por $T(v_1) = v_1 - v_2$, $T(v_2) = v_1 + v_3$ e $T(v_3) = v_2$; $S(v_1) = 2v_1 + v_3$, $S(v_2) = v_1$ e $S(v_3) = v_2 - 2v_1$.

    Determine:

    (a) $(T \circ S)^{-1}$.

    (b) $T^{-1}(v_1)$, $T^{-1}(v_2)$ e $T^{-1}(v_3)$.

13. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (2x - y, x + 3y, -2y)$ e sejam $\alpha = \{(-1, 1), (2, 1)\}$ e $\beta = \{(0, 0, 1), (0, 1, -1), (1, 1, 0)\}$ bases, respectivamente, do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

    (a) Determine $T]^{\alpha}_{\beta}$.

    (b) Determine $T]^{\alpha}_{\gamma}$, onde γ é a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

O espaço vetorial $\mathcal{L}(V,W)$

Sejam V e W espaços vetoriais reais. Vamos construir, a partir de V e W, um novo espaço vetorial. Definimos

$$\mathcal{L}(V,W) = \{T : V \longrightarrow W\ ;\ T \text{ é linear }\}.$$

Vamos dar a $\mathcal{L}(V,W)$ uma estrutura de espaço vetorial real. Para isto, precisamos definir operações de adição e de multiplicação por escalar.

Definição 9 (Operações em $\mathcal{L}(V,W)$)

Sejam $T, S \in \mathcal{L}(V,W)$ e $a \in \mathbb{R}$. Definimos

$T + S : V \longrightarrow W$ por $(T+S)(v) = T(v) + S(v)$, para cada $v \in V$;

$a \cdot T : V \longrightarrow W$ por $(a \cdot T)(v) = a \cdot T(v)$, para cada $v \in V$.

É claro que $T+S$ e $a \cdot T$ são funções cujo domínio é V e contradomínio é W. Para as definições acima estarem bem postas, precisamos verificar que $T+S$ e $a\cdot T$ são transformações lineares, isto é, $T+S, a\cdot T \in \mathcal{L}(V,W)$.

De fato, sejam $v, v' \in V$ e $c \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned}
(T+S)(v+v') &\overset{(1)}{=} T(v+v') + S(v+v') \\
&\overset{(2)}{=} \big(T(v) + T(v')\big) + \big(S(v) + S(v')\big) \\
&\overset{(3)}{=} \big(T(v) + S(v)\big) + \big(T(v') + S(v')\big) \\
&\overset{(4)}{=} (T+S)(v) + (T+S)(v') \quad \text{e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(T+S)(c\cdot v) &\overset{(5)}{=} T(c\cdot v) + S(c\cdot v) \\
&\overset{(6)}{=} c\cdot T(v) + c\cdot S(v) \\
&\overset{(7)}{=} c\cdot\big(T(v) + S(v)\big) \\
&\overset{(8)}{=} c\cdot\big((T+S)(v)\big);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a\cdot T)(v+v') &\overset{(9)}{=} a\cdot T(v+v') \\
&\overset{(10)}{=} a\cdot\big(T(v) + T(v')\big) \\
&\overset{(11)}{=} a\cdot T(v) + a\cdot T(v') \\
&\overset{(12)}{=} (a\cdot T)(v) + (a\cdot T)(v') \quad \text{e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a\cdot T)(c\cdot v) &\overset{(13)}{=} a\cdot T(c\cdot v) \\
&\overset{(14)}{=} a\cdot\big(c\cdot T(v)\big) \\
&\overset{(15)}{=} c\cdot\big(a\cdot T(v)\big) \\
&\overset{(16)}{=} c\cdot(a\cdot T)(v).
\end{aligned}$$

Em (1) usamos a definição da adição em $\mathcal{L}(V,W)$; em (2), que T e S são lineares; em (3), a comutatividade e associatividade da adição em W e em (4), a definição da adição em $\mathcal{L}(V,W)$.

Em (5) usamos a definição da adição em $\mathcal{L}(V,W)$; em (6), que T e S são lineares; em (7), a distributividade em W e em (8), a definição da adição em $\mathcal{L}(V,W)$.

Em (9) usamos a definição da multiplicação por escalar em $\mathcal{L}(V,W)$; em (10), que T é linear; em (11), a distributividade em W e em (12), a definição da multiplicação por escalar em $\mathcal{L}(V,W)$.

Em (13) usamos a definição da multiplicação por escalar em $\mathcal{L}(V,W)$; em (14), que T é linear; em (15), propriedade da multiplicação por escalar em W e em (16), a definição da multiplicação por escalar em $\mathcal{L}(V,W)$.

Exemplo 39

Sejam $T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ definidas por

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x+y, x-y, 2x) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} S : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & R^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x-y, 2y, -x+y) \end{array}$$

Então, $2T + 3S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é a transformação linear definida por

$$\begin{aligned} (2T+3S)(x, y) &= 2T(x, y) + 3S(x, y) \\ &= 2(x+y, x-y, 2x) + 3(2x-y, 2y, -x+y) \\ &= (8x-y, 2x, x+3y). \end{aligned}$$

Agora estamos prontos para o resultado principal.

Proposição 11

As operações definidas acima em $\mathcal{L}(V, W)$ têm as seguintes propriedades, para quaisquer $T, S, R \in \mathcal{L}(V, W)$ e $a, b \in \mathbb{R}$:

A1-(Associativa): $(T+S)+R = T+(S+R)$.

A2-(Comutativa): $T+S = S+T$.

A3-(Existência de elemento neutro aditivo): A transformação linear *identicamente nula* $O : V \longrightarrow W$ definida por $T(v) = 0_W$, para cada $v \in V$, é tal que $T + O = T$, para rodo $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

A4-(Existência de simétrico): Para cada $T \in \mathcal{L}(V, W)$ existe $S \in \mathcal{L}(V, W)$, tal que $T + S = O$. Tomamos $S : V \longrightarrow W$ definida por $S = -T$.

Me1: $1 \cdot T = T$.

Me2-(Associativa): $a \cdot (b \cdot T) = (a \cdot b) \cdot T$.

AMe1-(Distributiva): $a \cdot (T+S) = a \cdot T + a \cdot S$.

AMe2-(Distributiva): $(a+b) \cdot T = a \cdot T + b \cdot T$.

Demonstração: Faremos a demonstração de algumas das propriedades e as outras serão deixadas como Exercício.

A1-(Associativa): Para todo $v \in V$ temos

$$\begin{aligned} \big((T+S)+R\big)(v) &\overset{(1)}{=} (T+S)(v) + R(v) \\ &\overset{(2)}{=} \big(T(v)+S(v)\big) + R(v) \\ &\overset{(3)}{=} T(v) + \big(S(v)+R(v)\big) \\ &\overset{(4)}{=} T(v) + \big(S+R\big)(v) \\ &\overset{(5)}{=} \big(T+(S+R)\big)(v), \end{aligned}$$

Em (1) e (2) usamos a definição da adição em $\mathcal{L}(V, W)$; em (3), a associatividade da adição em W; em (4) e (5), a definição da adição em $\mathcal{L}(V, W)$.

logo $(T+S)+R = T+(S+R)$.

Me2-(Associativa): Para todo $v \in V$, temos

$$\begin{aligned} \big(a \cdot (b \cdot T)\big)(v) &\overset{(6)}{=} a \cdot (b \cdot T)(v) \\ &\overset{(7)}{=} a \cdot \big(b \cdot T(v)\big) \end{aligned}$$

Em (6) e (7) usamos a definição da multiplicação por escalar em $\mathcal{L}(V, W)$;

$$
\begin{aligned}
&\overset{(8)}{=} (a \cdot b) \cdot T(v)\\
&\overset{(9)}{=} \big((a \cdot b) \cdot T\big)(v),
\end{aligned}
$$

em (8), a associatividade da multiplicação por escalar em W; em (9), a definição da multiplicação por escalar em $\mathcal{L}(V, W)$.

logo $a \cdot (b \cdot T) = (a \cdot b)T$.

AMe1-(Distributiva): Para todo $v \in V$, temos

$$
\begin{aligned}
\big(a \cdot (T + S)\big)(v) &\overset{(10)}{=} a \cdot \big(T + S\big)(v)\\
&\overset{(11)}{=} a \cdot (T(v) + S(v))\\
&\overset{(12)}{=} a \cdot T(v) + a \cdot S(v)\\
&\overset{(13)}{=} (a \cdot T)(v) + (a \cdot S)(v)\\
&\overset{(14)}{=} \big(a \cdot T + a \cdot S\big)(v),
\end{aligned}
$$

Em (10) usamos a definição da multiplicação por escalar em $\mathcal{L}(V, W)$; em (11), a definição da adição em $\mathcal{L}(V, W)$; em (12), a distributividade em W; em (13), a definição da multiplicação por escalar em $\mathcal{L}(V, W)$ e em (14), a definição da adição em $\mathcal{L}(V, W)$.

logo $a \cdot (T + S) = a \cdot T + a \cdot S$ ■

Corolário 1

$\mathcal{L}(V, W)$, com as operações definidas acima, é um espaço vetorial real.

Proposição 12 (Propriedade da representação matricial)

Sejam V e W espaços vetoriais reais, tais que $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n \geq 1$ e $\dim_{\mathbb{R}}(W) = m \geq 1$, $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$ bases, respectivamente, de V e W. Se $T, S \in L(V, W)$ e $a \in \mathbb{R}$, então $(T+S)]^{\alpha}_{\beta} = T]^{\alpha}_{\beta} + S]^{\alpha}_{\beta}$ e $(a \cdot T)]^{\alpha}_{\beta} = a \cdot \big(T]^{\alpha}_{\beta}\big)$.

Demonstração: Para cada $j = 1, \ldots, n$ temos que $(T + S)(v_j) = T(v_j) + S(v_j)$. Segue dessa igualdade e de propriedade do vetor coordenada, que

$$(T + S)(v_j)]_{\beta} = \big(T(v_j) + S(v_j)\big)]_{\beta} = T(v_j)]_{\beta} + S(v_j)]_{\beta}. \qquad (\star)$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
(T + S)]^{\alpha}_{\beta} &\overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} (T + S)(v_1)]_{\beta} & \cdots & (T + S)(v_n)]_{\beta} \end{pmatrix}\\
&\overset{(2)}{=} \begin{pmatrix} T(v_1)]_{\beta} + S(v_1)]_{\beta} & \cdots & T(v_n)]_{\beta} + S(v_n)]_{\beta} \end{pmatrix}\\
&\overset{(3)}{=} \begin{pmatrix} T(v_1)]_{\beta} & \cdots & T(v_n)]_{\beta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S(v_1)]_{\beta} & \cdots & S(v_n)]_{\beta} \end{pmatrix}\\
&\overset{(4)}{=} T]^{\alpha}_{\beta} + S]^{\alpha}_{\beta}.
\end{aligned}
$$

Em (1) usamos a definição da representação matricial de $T + S$; em (2), $(\star)$ para cada $j = 1, \ldots, n$; em (3), a definição da adição de matrizes; em (4), as definições das representações matriciais de T e S.

Para cada $j = 1, \ldots, n$ temos que $(a \cdot T)(v_j) = a \cdot T(v_j)$. Segue dessa igualdade e de propriedade do vetor coordenada, que

$$(a \cdot T)(v_j)]_{\beta} = \big(a \cdot T(v_j)\big)]_{\beta} = a \cdot \big(T(v_j)]_{\beta}\big). \qquad (\star\star)$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
(a \cdot T)]^{\alpha}_{\beta} &\overset{(5)}{=} \begin{pmatrix} (a \cdot T)(v_1)]_{\beta} & \cdots & (a \cdot T)(v_n)]_{\beta} \end{pmatrix}\\
&\overset{(6)}{=} \begin{pmatrix} a \cdot \big(T(v_1)]_{\beta}\big) & \cdots & a \cdot \big(T(v_n)]_{\beta}\big) \end{pmatrix}\\
&\overset{(7)}{=} a \cdot \begin{pmatrix} T(v_1)]_{\beta} & \cdots & T(v_n)]_{\beta} \end{pmatrix}\\
&\overset{(8)}{=} a \cdot \big(T]^{\alpha}_{\beta}\big). \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Em (5) usamos a definição da representação matricial de $a \cdot T$; em (6), $(\star\star)$ para cada $j = 1, \ldots, n$; em (7), a definição da multiplicação por escalar de matrizes; em (8), a definição da representação matricial de T.

Proposição 13

Sejam V e W espaços vetoriais reais tais que $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ e $\dim_{\mathbb{R}}(W) = m$, então $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}(V, W)) = n \cdot m$.

Demonstração: Se $V = \{0_V\}$ ou $W = \{0_W\}$ então $\mathcal{L}(V, W) = \{O\}$ é o espaço vetorial identicamente nulo e $0 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}(V, W)) = \begin{cases} 0 \cdot m, & \text{se } V = \{0_V\} \\ n \cdot 0, & \text{se } W = \{0_W\}. \end{cases}$

Suponhamos que $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n \geq 1$ e $\dim_{\mathbb{R}}(W) = m \geq 1$. Fixemos $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V e $\beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$ uma base de W. Consideremos a função

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{L}(V, W) & \longrightarrow & M_{m\times n}(\mathbb{R}) \\ & T & \longmapsto & T]^{\alpha}_{\beta} \end{array}$$

Vamos mostrar que φ é um isomorfismo de espaços vetoriais reais.

De fato, sejam $T, S \in \mathcal{L}(V, W)$ e $a \in \mathbb{R}$. Então, segue da definição de φ e da Proposição anterior que

$\varphi(T + S) = (T + S)]^{\alpha}_{\beta} = T]^{\alpha}_{\beta} + S]^{\alpha}_{\beta} = \varphi(T) + \varphi(S)$ e

$\varphi(a \cdot T) = (a \cdot T)]^{\alpha}_{\beta} = a \cdot \left(T]^{\alpha}_{\beta}\right) = a \cdot \varphi(T)$,

mostrando que φ é linear.

Temos que Núcleo$(\varphi) = \{T \in \mathcal{L}(V, W)\ ;\ \varphi(T) = T]^{\alpha}_{\beta} = 0_{m\times n}\}$. Logo, para cada $v \in V$, temos

$$T(v)]_{\beta} = T]^{\alpha}_{\beta} \cdot v]_{\alpha} = 0_{m\times n} \cdot v]_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{m\times 1}(\mathbb{R}) \text{ e}$$

$T(v) = 0 \cdot w_1 + \cdots + 0 \cdot w_m = 0_W$. Portanto, $T = O$ é a tranformação linear identicamnete nula e φ é injetora.

Dada $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, seja $T : V \longrightarrow W$ a transformação linear tal que $T]^{\alpha}_{\beta} = A$. Então, $\varphi(T) = A$, mostrando que φ é sobrejetora.

Assim, $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Núcleo}(\varphi)) = 0$ e Imagem$(\varphi) = M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, concluímos que

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}(V, W)) &= \dim_{\mathbb{R}}(\text{Núcleo}(\varphi)) + \dim_{\mathbb{R}}(\text{Imagem}(\varphi)) \\ &= 0 + \dim_{\mathbb{R}}\left(M_{m\times n}(\mathbb{R})\right) = m \cdot n. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Um caso particular do exposto acima é obtido com $W = \mathbb{R}$.

Definição 10 (Espaço dual)

Seja V um espaço vetorial real com $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$. O *espaço dual de* V é $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{R}) = \{f : V \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ f \text{ é linear}\}$. O elemento $f \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ é chamado *funcional linear sobre* V.

Observamos que $\dim_{\mathbb{R}}(V^*) = n$.

Exemplo 40
Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 2x + 3y$. Então, f é um funcional linear.

Exemplo 41
Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = 2x - 3y + z$. Então, f é um funcional linear.

Exemplo 42
Seja $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ fixado. Então, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$$
é um funcional linear.

Teorema 3
Seja V um espaço vetorial real com $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n \geq 1$. Seja $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V. Sejam os funcionais lineares $f_1, \dots, f_n \in V^*$ definidos por
$$f_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$
Então, $\{f_1, \dots, f_n\}$ é uma base de V^*, chamada de *base dual* de α.

Demonstração: Temos que:
$$f_1(v_1) = 1, f_1(v_2) = 0, \dots, f_1(v_n) = 0;$$
$$f_2(v_1) = 0, f_2(v_2) = 0, \dots, f_2(v_n) = 0;$$
$$\vdots$$
$$f_n(v_1) = 0, f_n(v_2) = 0, \dots, f_n(v_n) = 1.$$

Como α é uma base de V, para cada $i = 1, \dots, n$, existe uma única transformação linear $f_i : V \longrightarrow \mathbb{R}$ com a propriedade descrita acima. Assim, $f_i \in V^*$, para $i = 1, \dots, n$.

Como $\dim_{\mathbb{R}}(V^*) = n$, basta mostrar que $\{f_1, \dots, f_n\}$ é linearmente independente.

De fato, suponhamos que $\sum_{i=1}^{n} a_if_i = a_1f_1 + \cdots + a_nf_n = O$. Então, para cada $j = 1, \dots, n$, temos
$$0 = O(v_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_if_i\right)(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_if_i(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{ij} = a_j.$$
Logo, $a_1 = \cdots = a_n = 0$. ■

Exemplo 43
A base dual da base canônica do $\mathbb{R}^n$ $\alpha = \{e_1, \dots, e_n\}$ é $f_1(x_1, \dots, x_n) = x_1$, $f_2(x_1, \dots, x_n) = x_2$, ..., $f_n(x_1, \dots, x_n) = x_n$.

De fato,

$$\begin{aligned} f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= f_i(x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n) \\ &= f_i\Big(\sum_{j=1}^{n} x_je_j\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_jf_i(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j\delta_{ij} \\ &= x_i\delta_{ii} \\ &= x_i. \end{aligned}$$

Encerramos essa Seção com um conceito que será importante na disciplina Álgebra Linear II.

Definição 11 (Matrizes semelhantes)
Sejam A, $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Dizemos que A é *semelhante* a B se, e somente se, existe $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertível tal que $A = P^{-1}BP$.

Proposição 14
Seja V um espaço vetorial real com $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n \geq 1$ e seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Se α e β são bases de V, então $T]^{\alpha}_{\alpha}$ e $T]^{\beta}_{\beta}$ são matrizes semelhantes.

Demonstração: Seja P a matriz de mudança da base β para α, isto é, $P = I]^{\beta}_{\alpha}$. Então, $P^{-1} = \big(I]^{\beta}_{\alpha}\big)^{-1} = I]^{\alpha}_{\beta}$ e

$$P^{-1}\cdot T]^{\alpha}_{\alpha}\cdot P = I]^{\alpha}_{\beta}\cdot T]^{\alpha}_{\alpha}\cdot I]^{\beta}_{\alpha} = (I_V\circ T\circ I_V)]^{\beta}_{\beta} = T]^{\beta}_{\beta}. \qquad \blacksquare$$

Exercícios

1. Sejam T e S os operadores lineares do $\mathbb{R}^2$ definidos por $T(x,y) = (y,x)$ e $S(x,y) = (0,x)$. Determine os operadores:

   (a) $S+T$ (b) $2S-3T$ (c) T^n, para todo natural $n \geq 1$

   (d) S^n, para todo natural $n \geq 1$

2. Demonstre as propriedades A2, A3, A4, Me1 e AMe2 da Proposição 11.

3. Seja $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Definimos o *traço* de A por
   $$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$
   Mostre que $\mathrm{tr} : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear.

4. Seja $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ e $T : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(f(t)) = \int_0^1 f(t)dt$. Mostre que T é um funcional linear.

5. Determine a base dual da base $\{(1,1),(1,-1)\}$ do $\mathbb{R}^2$.

6. Mostre que a relação de semelhança é uma relação de equivalência em $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

7. Sejam A, $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que A é *semelhante* a B.

   (a) Mostre que $\det(A) = \det(B)$.

   (b) Mostre que A^m é semelhante a B^m, para todo natural $m \geq 1$.

Use que o determinante do produto de matrizes é o produto dos determinantes e que o determinante da inversa é o inverso do seu determinante.