Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO DA AP2 - Primeiro Semestre de 2013
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(3.0)1. Determine se as transformações de $\mathbb{R}^{n\times n}$ em $\mathbb{R}^{n\times n}$ abaixo são ou não lineares, justificando detalhadamente sua resposta.

(a) $T(A) = A + I$, onde I é a matriz identidade de ordem n.
(b) $T(A) = A + A^T$, onde A^T é a matriz transposta de A.
(c) $T(A) = \frac{7}{2}A$.

Solução:

T é uma transformação linear se

$$T(\alpha A_1 + \beta A_2) = \alpha T(A_1) + \beta T(A_2)$$

para todo A_1 e A_2 em $\mathbb{R}^{n\times n}$ e α e β escalares.

(a) $T(A) = A + I$.
Como $T(A_1+A_2) = A_1+A_2+I \neq A_1+I+A_2+I = T(A_1)+T(A_2)$, então T não é uma transformação linear.

(b) $T(A) = A + A^T$.
Como $T(\alpha A_1+\beta A_2) = (\alpha A_1+\beta A_2)+(\alpha A_1+\beta A_2)^T = \alpha(A_1+A_1^T)+\beta(A_2 + A_2^T) = \alpha T(A_1) + \beta T(A_2)$, então T é uma transformação linear.

(c) $T(A) = \frac{7}{2}A$.
Como $T(\alpha A_1 + \beta A_2) = \frac{7}{2}(\alpha A_1 + \beta A_2) = \alpha(\frac{7}{2}A_1) + \beta(\frac{7}{2}A_2) = \alpha T(A_1) + \beta T(A_2)$, entã T é uma transformação linear.

(2.0)2. Ache os autovalores da matriz A abaixo e os autovetores correspondentes ao menor autovalor positivo.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solução:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ -5 & 2 & 5 & -1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de A são as reaizes de $P(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$.

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I) &= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \left(-\lambda(1-\lambda)(-1-\lambda) + 5 - 2(1-\lambda) + 5\lambda\right) \\ &\quad + \left(5\lambda + 4 + 5 + 2\lambda(-1-\lambda)\right) \\ &= \lambda^4 - 10\lambda^2 + 9 \end{aligned}$$

Logo

$$\lambda^2 = \frac{10 \pm 8}{2} = 9 \text{ ou } 1.$$

Portanto,

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = 3.$$

Os autovetores associados a $\lambda_2 = 1$ são obtidos abaixo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z = x \\ w = y \\ x = y \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Logo, os autovetores são do tipo $v = (x, -x, x, -x) = x(1, -1, 1, -1)$, $x \neq 0$.

(2.0)3. Seja P o espaço de polinômios de grau menor ou igual a 2. Encontre a dimensão e uma base do subspaço de P, gerado pelos vetores dados em cada um dos itens abaixo.

(a) $x, x-1, x^2+1$.

Solução:

Representando o polinômio ax^2+bx+c pelo vetor (a,b,c), a dimensão do subespaço é dada pelo número de linhas linearmente independentes da matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo, a dimensão do subespaço é igual a 3 e os três vetores (ou equivalentemente, os três polinômios) dados, $x, x-1, x^2+1$, formam uma base para o subespaço.

(b) $x^2, x^2-x-1, x+1$.

Solução:

Representando o polinômio ax^2+bx+c pelo vetor (a,b,c), a dimensão do subespaço é dada pelo número de linhas linearmente independentes da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo, a dimensão do subespaço é igual a 2 e dois quaisquer dos vetores dados, por exemplo, $x^2, x+1$, formam uma base para o subespaço.

(3.0)4. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcule o determinante da matriz A.

(b) Determine a matriz inversa de A.

(c) Determine a solução do sistema $Ax = b$, usando a inversa de A.

Solução:

(a) Calcule o determinante da matriz A.

$$det(A) = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$det(A) = (-1)(4+0+12-6-0-0)+(1)(12+0+4-2-0-2) = 2.$

(b) Determine a matriz inversa de A.

Forme a matriz em bloco $M = (A \vdots I)$ e reduza M por linhas à forma escalonada:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -6 & \vdots & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & \vdots & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -6 & \vdots & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & \vdots & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -6 & \vdots & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & \vdots & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -6 & \vdots & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & \vdots & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -6 & \vdots & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \vdots & 1 & -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

A metade esquerda de M está agora em forma triangular; logo A tem uma inversa. Além disso, reduza por linhas M à forma canônica reduzida por linhas:

$$M \sim \left(\begin{array}{cccc:cccc} 2 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -6 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:cccc} 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -7 & 31 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{13}{2} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{31}{2} & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Assim

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{13}{2} & -1 & 2 \\ -\frac{7}{2} & \frac{31}{2} & 3 & -5 \\ 1 & -5 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(c) Determine a solução do sistema $Ax = b$ usando a inversa de A.

$$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{13}{2} & -1 & 2 \\ -\frac{7}{2} & \frac{31}{2} & 3 & -5 \\ 1 & -5 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$