Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear - Profs Mauro Rincon & Marcia Fampa
AD2 (Segunda Avaliação a Distância) - Primeiro Semestre de 2012

Nome -
Assinatura -

1.(1.0) Determine as condições necessárias entre os elementos $\{a, b, c\}$ para que o sistema tenha solução.

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & = & a \\ -2x_1 & + & x_2 & = & b \\ -x_1 & + & x_2 & = & c \end{array}\right.$$

2.(3.0) Seja $k \in I\!R$ e a matriz A dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & k+1 & 1 \\ k & -k & 3 \\ k & -8 & k-1 \end{bmatrix};$$

a.(1.0) Calcule o determinante da matriz dos coeficientes, usando a expansão de Cofatores(Fórmula de Laplace).

b.(1.0) Determine os valores de k para os quais a matriz A é invertível.

c.(1.0) Considere o vetor dos termos independentes $b = (1, 0, -1)$ e $k = 1$. Determine a solução do sistema linear $Ax = b$, usando o método de eliminação de Gauss com pivoteamento.

3.(2.0) Seja $T : I\!R^3 \to I\!R^3$ uma transformação linear, definida por

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z).$$

(a) Determine o núcleo e a imagem de T

(b) Qual é a dimensão do núcleo e da imagem de T

4.(1.0) Seja A uma matriz quadrada. Mostre que $(A + A^T)$ é uma matriz simétrica.

5.(1.0) Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem. Mostre que em geral, não vale a igualdade: $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.(Sugestão: Dê um contra-exemplo)

6.(1.0) Determine os autovalores e os autovetores do operador linear:

$$T : I\!R^2 \to I\!R^2$$

definido por

$$T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y).$$

7.(1.0) Verifique se o operador linear $T : I\!R^3 \to I\!R^3$, definido por

$$T(1,1,1) = (1,0,0); \quad T(-2,1,0) = (0,-1,0), \quad T(-1,-3,-2) = (0,1,-1)$$

é invertível e, em caso afirmativo, determine $T^{-1}(x, y, z)$.

Gabarito

Álgebra Linear: AD2 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2012.1
Tutores: Cristina Lopes e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

Considere o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & = & a \\ -2x_1 + x_2 & = & b \\ -x_1 + x_2 & = & c \end{array}\right. \tag{1}$$

Vamos resolvê-lo pelo Método de Eliminação de Gauss.

O sistema linear acima pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

A matriz aumentada é dada por:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & a \\ -2 & 1 & | & b \\ -1 & 1 & | & c \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftrightarrow L_2 + 2L_1$ e $L_3 \leftrightarrow L_3 + L_1$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & a \\ 0 & 5 & | & b+2a \\ 0 & 3 & | & c+a \end{bmatrix}$$

Multiplicando L_2 por $1/5$, encontramos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & a \\ 0 & 1 & | & \dfrac{b+2a}{5} \\ 0 & 3 & | & c+a \end{bmatrix}$$

E finalmente, fazendo $L_3 \leftrightarrow L_3 - 3L_2$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & a \\ 0 & 1 & | & \dfrac{b+2a}{5} \\ 0 & 0 & | & c+a-3\left(\dfrac{b+2a}{5}\right) \end{bmatrix}$$

Assim encontramos, após igualar os denominadores na última linha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & a \\ 0 & 1 & | & \dfrac{b+2a}{5} \\ 0 & 0 & | & \dfrac{-a-3b+5c}{5} \end{bmatrix}$$

Para que o sistema tenha solução, a condição necessária e suficiente é que

$$\frac{-a - 3b + 5c}{5} = 0,$$

isto é, $-a - 3b + 5c = 0$ ou $a + 3b - 5c = 0$.

2^a Questão) Solução:

a) Calcularemos os cofatores $A_{ij} = (-1)^{i+j}det(M_{ij})$, onde M_{ij} é o determinante menor de a_{ij} (eliminando-se a linha i e a coluna j da matriz A). Considerando a linha 1 da matriz, encontraremos $Det(A) = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + a_{13}.A_{13}$. Como $a_{11} = 0$, não precisamos calcular A_{11}. Assim, temos:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} k & 3 \\ k & k-1 \end{vmatrix} = (-1)^3.[(k-1)k - 3k] = -1.(k^2 - 4k) = -k^2 + 4k$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} k & -k \\ k & -8 \end{vmatrix} = (-1)^4[-8k - (-k^2)] = k^2 - 8k$$

Logo, $Det(A) = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + a_{13}.A_{13} = 0 + (k+1)(-k^2 + 4k) + 1(k^2 - 8k) = -k^3 + 4k^2 - k^2 + 4k + k^2 - 8k = -k^3 + 4k^2 - 4k$.

b) Uma matriz $n \times n$ é invertível se det $\neq 0$.

Vamos usar o resultado do item a):

$-k^3 + 4k^2 - 4k = k(-k^2 + 4k - 4)$. Resolvendo a equação $k(-k^2 + 4k - 4) = 0$, temos $k = 0, k = 2$.

Logo, para A ser invertível , $k \neq 0, k \neq 2$.

c) Utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss com pivoteamento para resolvê-lo.

Considere a seguinte matriz aumentada que representa este sistema :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -8 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Como $max|a_{i1}| = 1$, tomaremos ele como pivô, então trocamos L_1 por L_2:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Agora, como $max|a_{i2}| = 7$, usaremos ele como pivô, então trocamos L_3 por L_2

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{2}{7}L_2$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{5}{7} \end{bmatrix}.$$

Assim, temos o seguinte sistema após a eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -7x_2 - 3x_3 &= -1 \\ \frac{1}{7}x_3 &= \frac{5}{7} \end{cases}$$

Por L_3 neste sistema, temos que $x_3 = 5$. Substituindo x_3 em L_2 temos que $-7x_2 - 15 = -1 \implies x_2 = -2$. Agora, substituindo x_2 e x_3 em L_1, temos que

$x_1 = -17$.

Logo, a solução é $S = \{(-17, -2, 5)\}$.

3^a Questão) Solução:

a) $N(T) = \{(x, y, z)|T(x, y, z) = 0$. Assim temos:

$$\begin{cases} x + 2y - z &= 0 \\ y + 2z &= 0 \\ x + 3y + z &= 0 \end{cases}$$

Usando Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O sistema tem infinitas soluções. Por L_2, temos que $z = \frac{-y}{2}$ e por L_1, que $x = z - 2y = \frac{-5y}{2}$.

Logo $N(T) = (\frac{-5y}{2}, y, \frac{-y}{2}) = y(\frac{-5}{2}, 1, \frac{-1}{2})$.

$Im(T) = \{(a,b,c)|(a,b,c) = (x+2y-z, y+2z, x+3y+z)\}$.

$(x+2y-z, y+2z, x+3y+z) = x(1,0,1) + y(2,1,3) + z(-1,2,1)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & x \\ 0 & 1 & 2 & y \\ 1 & 3 & 1 & z \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & x \\ 0 & 1 & 2 & y \\ 0 & 1 & 2 & z-x \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & x \\ 0 & 1 & 2 & y \\ 0 & 0 & 0 & z-x-y \end{bmatrix}.$$

Por L_3, temos que $z = x+y$. Logo, $Im(T) = \{(a,b,c)|(a,b,c) = (x,y,x+y) = x(1,0,1) + y(0,1,1)\}$. Como estes vetores são LI, temos que $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ formam uma base para a imagem de T.

b) $N(T) = (\frac{-5y}{2}, y, \frac{-y}{2}) = y(\frac{-5}{2}, 1, \frac{-1}{2})$, logo uma base para o núcleo é $\{(\frac{-5}{2}, 1, \frac{-1}{2})\}$.

$Im(T) = \{(a,b,c)|(a,b,c) = (x,y,x+y) = x(1,0,1) + y(0,1,1)\}$, logo uma base para $Im(T)$ é $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$.

Portanto, Dim $N(T) = 1$ e Dim $Im(T) = 2$.

4^a Questão) Solução:

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Portanto $A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.

Temos então que:

$$A + A^t = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{bmatrix}.$$

Logo, $(A + A^t)$ é simétrica.

5^a Questão) Solução:

Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem. Vamos mostrar que, em geral, não vale a igualdade $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Contra-exemplo:

Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+1 & 0+2 \\ -2+0 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^2 = (A+B).(A+B) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-4 & 0+8 \\ 0-8 & -4+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ -8 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 2-2 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+0 & -2+0 \\ -2+0 & -4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$2AB = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = B.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+6 \\ 0+0 & 0+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Então, temos:

$$A^2+2AB+B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2+1 & 0-4+8 \\ 0-4+0 & 1-2+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

Constatamos assim que $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

6^a Questão) Solução:

Temos que

$$T(x,y) = (4x+5y, 2x+y) = x(4,2) + y(5,1)$$

.

A matriz associada ao operador linear é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 5 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Logo o polinômio característico é dado por

$$P_2(\lambda) = det(A - \lambda I) = (4-\lambda)(1-\lambda) - 10$$

Tem-se que $P_2(\lambda) = 4 - 4\lambda - \lambda + \lambda^2 - 10$, ou seja, $P_2(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 6$.

As raízes de $P_2(\lambda)$ são $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = -1$. Logo os autovalores do operador T são: $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = -1$.

Cálculo dos autovetores v associados aos autovalores λ.

1. Autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 6$. Do polinômio característico temos

$$A - 6I = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftrightarrow L_2 + L_1$, obtemos

$$A - 6I = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da primeira linha, temos $-2x + 5y = 0$, o que implica $y = \dfrac{2x}{5}$. Então, para $x = r \neq 0$, $r \in \mathbb{R}$, obtemos a solução $v_1 = \left(x, \dfrac{2x}{5}\right) = x\left(1, \dfrac{2}{5}\right)$. Portanto qualquer vetor da forma $v_1 = x\left(1, \dfrac{2}{5}\right)$, $x \neq 0$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_1 = 6$.

1. Autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = -1$. Do polinômio característico temos

$$A - (-1)I = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftrightarrow 5L_2 - 2L_1$, obtemos

$$A + 1I = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da primeira linha, temos $5x + 5y = 0$, o que implica $y = -x$. Então, para $x = s \neq 0$, $s \in \mathbb{R}$, obtemos a solução $v_2 = (x, -x) = x(1, -1)$. Portanto qualquer vetor da forma $v_2 = x(1, -1)$, $x \neq 0$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_2 = -1$.

7^a Questão) Solução:

Considere a matriz $A|B$, onde A= matriz com a linhas formadas pelos vetores a serem transformados e B a matriz com as linhas formadas pelos vetores já transformados. Usando a forma escada reduzida por linhas, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{2}{3}L_2$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 7/3 & 1/3 & -1 \end{bmatrix}$$

Agora, fazendo $L_3 \leftarrow 3L_3$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Agora, fazendo $L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Agora, fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

E fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{3}L_3$ e $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{3}L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Assim, temos: $T(x, y, z) = xT(1, 0, 0) + yT(0, 1, 0) + zT(0, 0, 1) = x(-2, 0, 1) + y(-4, -1, 2) + z(7, 1, -3) = (-2x - 4y + 7z, -y + z, x + 2y - 3z)$.

Logo a matriz transformação é :

$$T = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Agora, encontraremos T^{-1}, colocando a matriz $T|I$ na forma escada reduzida por linhas, onde T é a matriz transformação e I é matriz identidade. Considere

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trocando L_3 por L_1, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 7 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_2 \leftarrow -L_2$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$ e $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Podemos escrever $T^{-1}(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x - y + 2z, x + 2z)$.