# Parte 2

# Espaços vetoriais reais

Introduziremos o conceito de espaço vetorial real, com ênfase em espaços vetoriais finitamente gerados, e estudaremos as suas propriedades. Apresentaremos os conceitos de subespaços vetoriais, subespaços finitamente gerados, interseção de subespaços, combinação linear, espaços vetoriais reais finitamente gerados, conjuntos linearmente independentes ou linearmente dependentes, base e dimensão de espaços vetoriais reais finitamente gerados, coordenadas numa base e soma e soma direta de subespaços vetoriais reais.

Estudaremos transformações lineares entre espaços vetoriais reais de dimensão finita, núcleo e imagem de transformações lineares, teorema do núcleo e da imagem, representação matricial de transformações lineares entre espaços vetoriais reais de dimensão finita e suas propriedades; funcionais lineares e suas propriedades.

Finalizaremos com a álgebra das transformações lineares em espaços vetoriais reais de dimensão finita, apresentando as operações de adição, multiplicação por escalar e composição de transformações lineares; transformações lineares invertíveis, isomorfismo e automorfismo de espaços vetoriais.

# Espaços vetoriais e subespaços

Definição 1 (Espaço vetorial real)

Um *espaço vetorial real* é um conjunto não vazio $V$ munido com operações de adição e multiplicação por escalar

$$\begin{array}{rcl} +: V \times V & \longrightarrow & V \\ (v,w) & \longmapsto & v+w \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{R} \times V & \longrightarrow & V \\ (a,v) & \longmapsto & a \cdot v, \end{array}$$

tendo as seguintes propriedades, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ e $u, v, w \in V$:

A1 (Associativa): $u + (v + w) = (u + v) = w$;

A2 (Comutativa): $u + v = v + u$;

A3 (Existência de elemento neutro aditivo):

Existe $\theta \in V$, tal que $v + \theta = v$, para todo $v \in V$;

A4 (Existência de simétrico):

Para cada $v \in V$, existe $u \in V$, tal que $u + v = \theta$;

Me1: $1 \cdot v = v$;

Me2 (Associativa): $a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v$;

AMe1 (Distributiva): $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$;

AMe2 (Distributiva): $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$.

Os elementos de $V$ são chamados de *vetores*.

Terminologia:
Espaços vetoriais reais são também chamados de $\mathbb{R}$-espaços vetoriais ou espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Aqui diremos simplesmente espaços vetoriais.

Exemplo 1

$V = \mathbb{R}$ é um espaço vetorial real com as operações usuais de adição e multiplicação de números reais.

Exemplo 2

$\mathbb{C} = \{a + bi \ ; \ a, b \in \mathbb{R}\}$ com as operações usuais de adição de números complexos e a multiplicação de um número real por um número complexo, a saber,

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \text{ e } a \cdot (c + di) = (a \cdot c) + (a \cdot d)i,$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, é um espaço vetorial real.

Exemplo 3

$V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$, com as operações usuais de adição de matrizes e multiplicação de um número real por uma matriz, é um espaço vetorial real.

De fato, já mostramos a validade de A1, A2, A3, Me1, Me2, AMe1 e AMe2. Só falta verificar A4. Seja $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Definindo $B = (b_{ij})$ por $b_{ij} = -a_{ij}$, para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$, temos que

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a_{ij} + (-a_{ij}) = 0,$$

para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Logo, $A + B = 0_{m\times n}$.

Verifique as oito propriedades das operações.

Exemplo 4

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \ ; \ x, y \in \mathbb{R}\}$ com as operações:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \text{ e } a \cdot (x, y) = (a \cdot x, a \cdot y),$$

onde $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$, é um espaço vetorial real.

Verifique as oito propriedades das operações.

Exemplo 5

$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \ ; \ x, y, z \in \mathbb{R}\}$, com as operações:

$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$ e

$a \cdot (x, y, z) = (a \cdot x, a \cdot y, a \cdot z)$,

onde $x, y, z, x', y', z' \in \mathbb{R}$, é um espaço vetorial real.

A adição é feita coordenada a coordenada e a multiplicação por escalar é feita em cada coordenada.

Exemplo 6

Inspirados nos Exemplos 1, 4 e 5, para cada natural $n \geq 1$, vamos mostrar que

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \ ; \ x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\},$$

munido com as operações:

$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ e

$a \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (a \cdot x_1, \ldots, a \cdot x_n)$,

para quaisquer $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, a \in \mathbb{R}$, é um espaço vetorial.

De fato, sejam $u = (x_1, \ldots, x_n)$, $v = (y_1, \ldots, y_n)$ e $w = (z_1, \ldots, z_n)$ e $a, b \in \mathbb{R}$, então:

Em (1) usamos a definição da adição de $v + w$; em (2), a definição da adição de $u$ e $v + w$; em (3), em cada coordenada, a associatividade da adição em $\mathbb{R}$; em (4) e (5), a definição da adição no $\mathbb{R}^n$.

A1 (Associativa):

$$\begin{aligned} u + (v + w) &\overset{(1)}{=} u + (y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n) \\ &\overset{(2)}{=} \big(x_1 + (y_1 + z_1), \ldots, x_n + (y_n + z_n)\big) \\ &\overset{(3)}{=} \big((x_1 + y_1) + z_1, \ldots, (x_n + y_n) + z_n\big) \\ &\overset{(4)}{=} (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) + (z_1, \ldots, z_n) \\ &\overset{(5)}{=} (u + v) + w \end{aligned}$$

Em (1) e (3) usamos a definição da adição no $\mathbb{R}^n$ e em (2), em cada coordenada, a comutatividade da adição em $\mathbb{R}$.

A2 (Comutativa):

$$\begin{aligned} u + v &\overset{(1)}{=} (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ &\overset{(2)}{=} (y_1 + x_1, \ldots, y_n + x_n) \\ &\overset{(3)}{=} v + w \end{aligned}$$

0 é elemento neutro da adição em $\mathbb{R}$.

A3 (Existência de elemento neutro aditivo): A $n$-upla $o = (0, \ldots, 0)$ é o elemento neutro, pois para todo $u = (x_1, \ldots, x_n)$ temos que

$$u + o = (x_1 + 0, \ldots, x_n + 0) = (x_1, \ldots, x_n) = u.$$

A4 (Existência de simétrico): O simétrico de $u = (x_1, \dots, x_n)$ é o elemento $v = (-x_1, \dots, -x_n)$, pois

$$u + v = (x_1 + (-x_1), \dots, x_n + (-x_n)) = (0, \dots, 0) = \mathbf{o}.$$

O simétrico de $x \in \mathbb{R}$ é $-x$, pois $x + (-x) = 0$.

Me2 (Associativa):

$$\begin{aligned} a \cdot (b \cdot v) &\overset{(1)}{=} a \cdot (b \cdot y_1, \dots, b \cdot y_n) \\ &\overset{(2)}{=} \big(a \cdot (b \cdot y_1), \dots, a \cdot (b \cdot y_n)\big) \\ &\overset{(3)}{=} \big((a \cdot b) \cdot y_1, \dots, (a \cdot b) \cdot y_n\big) \\ &\overset{(4)}{=} (a \cdot b) \cdot (y_1, \dots, y_n) \\ &\overset{(5)}{=} (a \cdot b) \cdot v \end{aligned}$$

Em (1) usamos a definição de $b \cdot v$; em (2), a definição da multiplicação pelo escalar $a$; em (3), em cada coordenada, a associatividade da multiplicação em $\mathbb{R}$ ; em (4), a definição da multiplicação pelo escalar $a \cdot b$; em (5), a definição de $v$.

AMe1 (Distributiva):

$$\begin{aligned} a \cdot (u + v) &\overset{(1)}{=} a \cdot (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ &\overset{(2)}{=} \big(a \cdot (x_1 + y_1), \dots, a \cdot (x_n + y_n)\big) \\ &\overset{(3)}{=} (a \cdot x_1 + a \cdot y_1, \dots, a \cdot x_n + a \cdot y_n) \\ &\overset{(4)}{=} (a \cdot x_1, \dots, a \cdot x_n) + (a \cdot y_1, \dots, a \cdot y_n) \\ &\overset{(5)}{=} a \cdot u + a \cdot v \end{aligned}$$

Em (1) usamos a definição de adição no $\mathbb{R}^n$; em (2), a definição de multiplicação por escalar no $\mathbb{R}^n$; em (3), em cada coordenada a distributividade em $\mathbb{R}$; em (4), a definição de adição no $\mathbb{R}^n$; em (5), novamente, a definição de multiplicação por escalar no $\mathbb{R}^n$.

Deixamos como Exercício mostrar:

Me1: $1 \cdot v = v$ e

AMe2 (Distributiva): $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$.

Antes de darmos outros Exemplos de espaços vetoriais reais vamos mostrar mais algumas propriedades importantes.

### Proposição 1 (Propriedades adicionais)

Seja $V$ um espaço vetorial real. Valem as seguintes propriedades:

(a) o elemento neutro é único.

(b) o simétrico é único.

### Demonstração:

(a) Sejam $\theta$ e $\theta'$ em $V$ elementos neutros da adição. Então,

$$\theta \overset{(1)}{=} \theta + \theta' \overset{(2)}{=} \theta'.$$

Em (1) usamos que $\theta'$ é elemento neutro e em (2), que $\theta$ é elemento neutro.

(b) Sejam $u, u' \in V$ simétricos de $v \in V$. Então, $u + v = 0$, $u' + v = 0$ e

$$u = 0 + u = (u' + v) + u = u' + (v + u) = u' + 0 = u'.$$

Daqui por diante, denotamos o elemento neutro aditivo de um espaço vetorial $V$ por $0_V$ e o simétrico de $v$ por $-v$.

### Exemplo 7

Seja $n \in \mathbb{N}$ fixado e $t$ uma indeterminada. Definimos

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = \{f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n\ ;\ a_j \in \mathbb{R},\ \text{para cada } j = 0, \ldots, n\}.$$

Para $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ e $g(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n$ em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{R}$ definimos

$f(t) + g(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_n + b_n)t^n$ e

$k \cdot f(t) = (k \cdot a_0) + (k \cdot a_1)t + \cdots + (k \cdot a_n)t^n$.

Com essas operações, $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial.

Exemplo 8

Seja $t$ uma indeterminada. Definimos o conjunto dos polinômios com coeficientes reais como

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n\ ;\ n \in \mathbb{N} \text{ e } a_j \in \mathbb{R},\ \text{para cada } j = 0, \ldots, n\}.$$

$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial com as operações usuais de adição de polinômios e multiplicação de um número real por um polinômio.

Observamos que $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, além disso, $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ e

$$\mathcal{P}_0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \subset \cdots \subset \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}_{n+1}(\mathbb{R}) \subset \cdots.$$

Exemplo 9

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Definimos

$$\mathcal{F}(I) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ f \text{ é função }\}.$$

$\mathcal{F}(I)$ é um espaço vetorial, com as operações usuais de adição e multiplicação por um número real, a saber, para $f, g \in \mathcal{F}(I)$ e $k \in \mathbb{R}$,

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, para todo $x \in I$ e

$(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$, para todo $x \in I$.

De fato, para quaisquer $f, g, h \in \mathcal{F}(I)$ e $k, \ell \in \mathbb{R}$, temos:

A1 (Associativa): Para todo $x \in I$,

$$\begin{aligned}(f + (g + h))(x) &\overset{(1)}{=} f(x) + (g + h)(x)\\ &\overset{(2)}{=} f(x) + (g(x) + h(x))\\ &\overset{(3)}{=} (f(x) + g(x)) + h(x)\\ &\overset{(4)}{=} (f + g)(x) + h(x)\\ &\overset{(5)}{=} ((f + g) + h)(x),\end{aligned}$$

Em (1), (2), (4) e (5) usamos a definição de adição de funções e em (3), a associatividade da adição em $\mathbb{R}$.

logo $f + (g + h) = (f + g) + h$.

A2 (Comutativa): Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x).$$

Logo, $f + g = g + f$.

A3 (Existência de elemento neutro aditivo): A função $o : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $o(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, é o elemento neutro, pois $o + f = f$, para todo $f \in \mathcal{F}(I)$.

A4 (Existência de simétrico): Dada $f \in \mathcal{F}(I)$ tomamos $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = -f(x)$, para cada $x \in I$. Então, $f + g = o$.

Me2 (Associativa): Para todo $x \in I$, temos

$$\begin{aligned}(k \cdot (\ell \cdot f))(x) &\overset{(1)}{=} k \cdot (\ell \cdot f)(x)\\ &\overset{(2)}{=} k \cdot (\ell \cdot f(x))\\ &\overset{(3)}{=} (k \cdot \ell) \cdot f(x)\\ &\overset{(4)}{=} ((k \cdot \ell) \cdot f)(x),\end{aligned}$$

logo, $k \cdot (\ell \cdot f) = (k \cdot \ell) \cdot f$.

Em (1), (2) e (4) usamos a definição da multiplicação de uma função por um número real e em (3), a associatividade da multiplicação de números reais.

Deixamos as propriedades Me1, AMe1 e AMe2 como exercício.

Os subconjuntos de um espaço vetorial que interessam são os subespaços vetoriais.

**Definição 2 (Subespaço vetorial)**

Seja $V$ um espaço vetorial real. Um subconjunto não vazio $W$ de $V$ é chamado um *subespaço vetorial* de $V$ se, e somente se, $W$ é um espaço vetorial com as operações de $V$.

**Exemplo 10**

$\{0_V\}$ e $V$ são subespaços de $V$, chamados de *subespaços triviais*.

Quais condições $W \subset V$ deve satisfazer para ser um subespaço? A resposta está a seguir.

**Proposição 2**

Seja $V$ um espaço vetorial. Um subconjunto não vazio $W$ de $V$ é um subespaço de $V$ se, e somente se,

(a) $0_V \in W$;

(b) se $u, w \in W$, então $u + w \in W$;

(c) se $w \in W$ e $k \in \mathbb{R}$, então $k \cdot w \in W$.

**Demonstração:**

($\Longrightarrow$:) Suponhamos que $W \neq \emptyset$ seja um subespaço de $V$. Então, pela definição de subespaço, $W$ está munido com as operações de $V$ e valem (b) e (c). Como existe $w \in W$ e $-w = (-1) \cdot w \in W$, logo $0_v = w + (-w) \in W$.

Fez o Exercício 1b?

(:$\Longleftarrow$) Suponhamos que $W \subset V$ tenha as propriedades (a), (b) e (c). De (a) segue que $W \neq \emptyset$. De (b) e (c) segue que as operações de $V$ estão fechadas em $W$. As propriedades A1, A2, Me1, AMe1, AMe2 valem em $W$ pois valem em qualquer subconjunto de $V$. Vale A3, pois $0_V \in W$ é o elemento neutro da adição. Para cada $w \in W$, $-w = (-1) \cdot w \in W$, valendo A4. Portanto, $W$ é um espaço vetorial. ■

Geometricamente, planos que passam pela origem são subespaços vetoriais do $\mathbb{R}^3$.

**Exemplo 11**

$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, ; \, x - 2y + 3z = 0\}$ é um subespaço do $\mathbb{R}^3$.

De fato:

(a) $0 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$, logo, $(0, 0, 0) \in W$.

(b) Sejam $u = (x, y, z), w = (x', y', z')$ em $W$. Então, $x - 2y + 3z = 0$, $x' - 2y' + 3z' = 0$. Como $u + w = (x + x', y + y', z + z')$, temos

Em (1) usamos a distributividade em $\mathbb{R}$; em (2), a comutatividade e associatividade da adição em $\mathbb{R}$ e em (3), que $u, w \in W$.

$$\begin{aligned}(x + x') - 2(y + y') + 3(z + z') &\overset{(1)}{=} x + x' - 2y - 2y' + 3z + 3z' \\ &\overset{(2)}{=} (x - 2y + 3z) + (x' - 2y' + 3z') \\ &\overset{(3)}{=} 0 + 0 = 0,\end{aligned}$$

logo $u + w \in W$.

Em (4) usamos a comutatividade da multiplicação e a distributividade em $\mathbb{R}$ e em (5), que $u \in W$.

(c) Sejam $u = (x, y, z) \in W$ e $a \in \mathbb{R}$.

Então, $x - 2y + 3z = 0$, $a \cdot u = (a \cdot x, a \cdot y, a \cdot z)$ e

$$(a \cdot x) - 2(a \cdot y) + 3(a \cdot z) \overset{(4)}{=} a \cdot (x - 2y + 3z) \overset{(5)}{=} a \cdot 0 = 0.$$

Logo, $a \cdot u \in W$.

Geometricamente, retas no plano que não passam pela origem não são subespaços do $\mathbb{R}^2$, enquanto retas no plano passando pela origem são subespaços do $\mathbb{R}^2$.

**Exemplo 12**

$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, ; \, 2x - y = 3\}$ não é subespaço do $\mathbb{R}^2$, pois $(0, 0) \notin U$.

$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, ; \, 2x - y = 0\}$ é subespaço do $\mathbb{R}^2$.

**Exemplo 13**

Vamos mostrar que $W$ é um subespaço de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$, onde

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \, ; \, a + b + c = 0 \text{ e } 2a - b + d = 0 \right\}.$$

Primeiramente, escrevemos $A \in W$ como $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -a - b & -2a + b \end{pmatrix}$, onde $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) É claro que tomando $a = b = 0$, temos $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$.

(b) Sejam $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -a - b & -2a + b \end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ -a' - b' & -2a' + b' \end{pmatrix}$ em $W$. Então,

$$A + A' = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ (-a-b)+(-a'-b') & -2a+b+(-2a'+b') \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ -(a+a')-(b+b') & -2(a+a')+(b+b') \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ -a''-b'' & -2a''+b'' \end{pmatrix} \in W,$$ onde tomamos $a'' = a + a'$ e $b'' = b + b'$.

(c) Seja $k \in \mathbb{R}$ e $A$ como em (b). Então,

$$k \cdot A = \begin{pmatrix} k\cdot a & k\cdot b \\ k\cdot(-a-b) & k\cdot(-2a+b) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} k\cdot a & k\cdot b \\ -(k\cdot a)-(k\cdot b) & -2(k\cdot a)+(k\cdot b) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a' & b' \\ -a'-b' & -2a'+b' \end{pmatrix}$$ está em $W$, onde tomamos $a' = k\cdot a$ e $b' = k\cdot b$.

Usamos a distributividade e a comutatividade da multiplicação em $\mathbb{R}$.

## Exercícios

1. Seja $V$ um espaço vetorial real. Mostre que:

   (a) Para todo $v \in V$, temos $0 \cdot v = 0_V$.

   (b) Para cada $v \in V$, o simétrico de $v$ é $(-1)\cdot v$.

2. Mostre que os seguintes conjuntos são espaços vetoriais reais, com as operações usuais de adição e multiplicação por um número real:

   (a) $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)\ ;\ x, y \in \mathbb{R}\}$.

   (b) $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\ ;\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

   (c) $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   (d) $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, onde $n \in \mathbb{N}$.

   (e) $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

3. Seja $V = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ x > 0\}$. Para $x, y \in V$ e $k \in \mathbb{R}$, definimos:

   $x \oplus y = x \cdot y$, onde $\cdot$ é a multiplicação de números reais, e

   $k \odot x = x^k$, a $k$-ésima potência de $x$.

   Mostre que $V$ é um espaço vetorial real com as operações $\oplus$ e $\odot$.

4. Determine, em cada item, se o subconjunto $W$ de $V$ é um subespaço vetorial de $V$:

   (a) $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\; x - 3y = 1\,\}$.

   (b) $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\; x - 3y = 0\,\}$.

   (c) $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{\,(x, 2x, -3x)\,;\; x \in \mathbb{R}\,\}$.

   (d) $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\; 2x + y - z = 2\,\}$.

   (e) $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\; 2x + y - z = 0\,\}$.

   (f) $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $W = \{\,a + bt + ct^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})\,;\; 2a + b - c = 0\,\}$.

   (g) $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\; f \text{ é função}\}$ e
   $W = \{f \in V\,;\; f \text{ é função ímpar}\}$.

   (h) $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$ e $W = \{f \in V\,;\; f \text{ é função par}\}$.

   (i) $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$ e $W = \mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f \in V\,;\; f \text{ é contínua}\}$.

   (j) $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$ e $W = \mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{f \in V\,;\; f \text{ é derivável}\}$.

   (k) $V = \mathbb{R}^4$ e $W = \{\,(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4\,;\; 2x - y + 3z - w = 0\,\}$.

   (l) $V = M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ e $W = \{\,X \in V\,;\; AX = 0\,\}$, onde $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz dada.

   (m) $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V\,;\; a + d = 0,\; b - 2d = 0 \right\}$.

   (n) $V = \mathbb{R}^n$ e $W = \{\,(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\,;\; a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\,\}$, onde $a_1, \dots, a_n$ são números reais fixados nem todos nulos, isto é, tais que $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$.

   $W$ é chamado um *hiperplano* do $\mathbb{R}^n$.

   (o) $V = M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $W = \{\,A \in V\,;\; A^t = -A\}$.

   (p) $V = M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $W = \{\,A \in V\,;\; A^t = A\}$.

5. Sejam $V$ um espaço vetorial e $U$ e $W$ subespaços de $V$. Mostre que:

   (a) $U \cap W$ é um subespaço de $V$;

   (b) $U \cup W$ é um subespaço de $V$ se, e somente se, $U \subset W$ ou $W \subset U$;

   (c) $U + W = \{u + w\,;\; u \in U, w \in W\}$ é um subespaço de $V$.

6. Determine $U \cap W$ e interprete geometricamente $U$, $W$ e $U \cap W$, onde
   $U = \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\; 2x + y - z = 0\,\}$ e
   $W = \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\; x + y + 2z = 0\,\}$.

7. Determine $U \cap W$, onde $U = \{\,(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4\,;\; x - w = 0\,\}$ e
   $W = \{\,(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4\,;\; x + y + z = 0, y - w = 0\,\}$.

# Combinação linear, dependência e independência linear

Vamos aprender a construir subespaços de um espaço vetorial real. Para isto introduzimos o seguinte conceito.

**Definição 3 (Combinação linear)**
Seja $V$ um espaço vetorial. Sejam $v_1, \ldots, v_m$ em $V$ e $a_1, \ldots, a_m$ em $\mathbb{R}$. Dizemos que $v = a_1v_1 + \cdots + a_mv_m$ é uma *combinação linear* de $v_1, \ldots, v_m$.

**Exemplo 14**
Se $V = \mathbb{R}$ e $v_1 = 1$, então para todo $v = a \in \mathbb{R}$ temos $v = a \cdot 1 = av_1$ é combinação linear de $v_1$.

**Exemplo 15**
$V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (1, 1)$ e $v = (3, 3) = 3v_1$ é uma combinação linear de $v_1$.

**Exemplo 16**
Sejam $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (1, -1)$ em $\mathbb{R}^2$. Observamos que dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x, y) = av_1 + bv_2 = a(1, 1) + b(1, -1) = (a + b, a - b), \text{ pois } \begin{cases} a + b = x \\ a - b = y \end{cases}$$

é um sistema possível e determinado, cujas soluções são $a = \frac{x+y}{2}$ e $b = \frac{x-y}{2}$. Portanto, qualquer vetor do $\mathbb{R}^2$ é combinação linear de $v_1$ e $v_2$, a saber,

$$(x, y) = \tfrac{x+y}{2}(1, 1) + \tfrac{x-y}{2}(1, -1).$$

**Exemplo 17**
Sejam $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$. Para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) \\ &= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) \\ &= xe_1 + ye_2 + ze_3. \end{aligned}$$

**Exemplo 18**
Sejam $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0 \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ em $\mathbb{R}^n$

Para todo $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (x_1, 0 \ldots, 0) + (0, x_2, \ldots, 0) + \cdots + (0, \ldots, 0, x_n) \\ &= x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, 0 \ldots, 0) + \cdots + x_n(0, 0, \ldots, 1) \\ &= x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n. \end{aligned}$$

**Definição 4 (Subespaço gerado)**
Seja $V$ um espaço vetorial real e sejam $v_1, \dots, v_m$ em $V$. O conjunto $W$ de todas as combinações lineares de $v_1, \dots, v_m$ é um subespaço de $V$ chamado de *subespaço gerado* por $v_1, \dots, v_m$ e é denotado por $W = [v_1, \dots, v_m]$. Assim,

$$\begin{aligned} W &= [v_1, \dots, v_m] \\ &= \{a_1v_1 + \cdots + a_mv_m \,;\, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

e dizemos que $v_1, \dots, v_m$ são *geradores* ou *geram* $W$.

Precisamos mostrar que, efetivamente, $W = [v_1, \dots, v_m]$ é um subespaço de $V$. De fato,

(a) Tomando $a_1 = \cdots = a_m = 0 \in \mathbb{R}$, temos $0_V = 0v_1 + \cdots + 0v_m \in W$.

(b) Sejam $u = a_1v_1 + \cdots + a_mv_m$ e $w = b_1v_1 + \cdots + b_mv_m$ em $W$. Então,

$$\begin{aligned} u + w &= (a_1v_1 + \cdots + a_mv_m) + (b_1v_1 + \cdots + b_mv_m) \\ &\overset{(1)}{=} (a_1v_1 + b_1v_1) + \cdots + (a_mv_m + b_mv_m) \\ &\overset{(2)}{=} (a_1 + b_1)\cdot v_1 + \cdots + (a_m + b_m)\cdot v_m \in W, \end{aligned}$$

pois $a_j + b_j \in \mathbb{R}$, para todo $j = 1, \dots, n$.

Em (1) usamos a comutatividade e associatividade da adição em $V$ e em (2), a distributividade da multiplicação por escalar em $V$.

(c) Sejam $u = a_1v_1 + \cdots + a_mv_m$ em $W$ e $k \in \mathbb{R}$. Então, da distributividade e da associatividade da multiplicação por escalar, temos

$$k \cdot u = k \cdot (a_1v_1 + \cdots + a_mv_m) = (k \cdot a_1)v_1 + \cdots + (k \cdot a_m)v_m \in W,$$

pois $k \cdot a_j \in \mathbb{R}$, para todo $j = 1, \dots, n$.

**Exemplo 19**
Seja $v_1 = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Então,

$$\begin{aligned} [v_1] &= \{a(1,1) \,;\, a \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a,a) \,;\, a \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x = y\}. \end{aligned}$$

**Exemplo 20**
Vamos determinar o subespaço $W$ do $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (1, 0, -1)$ e $v_3 = (-1, 2, -1)$.

$v \in W = [v_1, v_2, v_3]$ se, e somente se, existem $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tais que $v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$. Assim,

$$\begin{aligned} v = (x, y, z) &= a_1(1, -1, 0) + a_2(1, 0, -1) + a_3(-1, 2, -1) \\ &= (a_1 + a_2 - a_3, -a_1 + 2a_3, -a_2 - a_3) \end{aligned}$$

Determinar o subespaço $W$ é equivalente a determinar quais as condições sobre $x, y, z$ para que o sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_2 - a_3 = x \\ -a_1 + 2a_3 = y \\ -a_2 - a_3 = z \end{cases}$$

tenha solução.

Reduzindo por linhas a matriz ampliada associada ao sistema, obtemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ -1 & 0 & 2 & y \\ 0 & -1 & -1 & z \end{array}\right) \sim_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & 1 & x+y \\ 0 & -1 & -1 & z \end{array}\right) \sim_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 0 & x+y+z \end{array}\right)$$

Fizemos a seguinte sequência de operações elementares:

em $\sim_1$: $L_2 \to L_2 + L_1$;

em $\sim_2$: $L_3 \to L_3 + L_2$.

O sistema tem solução se, e somente se, $x + y + z = 0$. Logo,

$$W = [v_1, v_2, v_3] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\ x + y + z = 0\}.$$

Exemplo 21

Vamos determinar equações para o subespaço $W$ de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gerado por $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Temos que $v = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in W$ se, e somente se, existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $v = av_1 + bv_2 + cv_3$. Assim,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} &= a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+b+c & a+b+c \\ a+b & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, $v = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in W$ se, e somente se, o sistema $\begin{cases} a+b+c = x \\ a+b+c = y \\ a+b = z \\ a = w \end{cases}$

tem solução.

Reduzindo por linhas a matriz ampliada associada ao sistema, obtemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 & w \end{array}\right) \sim_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & y-x \\ 1 & 1 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 & w \end{array}\right) \sim_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & x-z \\ 0 & 0 & 0 & y-x \\ 0 & 1 & 0 & z-w \\ 1 & 0 & 0 & w \end{array}\right).$$

Fizemos a seguinte sequência de operações elementares:

em $\sim_1$: $L_2 \to L_2 - L_1$; e em $\sim_2$: $L_1 \to L_1 - L_3$; $L_3 \to L_3 - L_4$.

Portanto,

$$\begin{aligned} W &= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \; ; \; y - x = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ z & w \end{pmatrix} \; ; \; x, z, w \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; x, z, w \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Exemplo 22

Vamos determinar equações para $W = [\ (1,1,1,1),(2,1,0,0),(3,2,1,1)\ ]$, subespaço do $\mathbb{R}^4$. Temos que

$$(x,y,z,w) = a(1,1,1,1) + b(2,1,0,0) + c(3,2,1,1),$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Reduzindo por linhas a matriz ampliada associada ao sistema, obtemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & 1 & 2 & y \\ 1 & 0 & 1 & z \\ 1 & 0 & 1 & w \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & -1 & -1 & y-x \\ 0 & -2 & -2 & z-x \\ 0 & -2 & -2 & w-x \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & -1 & -1 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & z-2y+x \\ 0 & 0 & 0 & w-2y+x \end{array}\right)$$

Logo, $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \; ; \; x - 2y + z = 0 \text{ e } x - 2y + w = 0\}$.

Definição 5 (Vetores linearmente independentes ou dependentes)

Seja $V$ um espaço vetorial real. Dizemos que os vetores $v_1, \ldots, v_n$ em $V$ são *linearmente independentes* se, e somente se,

$$\text{se } a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0_V, \text{ então } a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

Caso contrário, existem $a_1, \ldots, a_n$ em $\mathbb{R}$, nem todos nulos, tais que $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0_V$ e dizemos que $v_1, \ldots, v_n$ são *linearmente dependentes*.

Exemplo 23

$0_V$ é linearmente dependente em qualquer espaço vetorial $V$, pois $1 \cdot 0_V = 0_V$.

Exemplo 24

$0_V, v_1, \ldots, v_n$ são linearmente dependentes em qualquer espaço vetorial $V$, pois $1 \cdot 0_V + 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_n = 0_V$.

Exemplo 25

Se $v \neq 0_V$, então $v$ é linearmente independente.

De fato, suponhamos por absurdo que exista $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ tal que $a \cdot v = 0_V$. Então,

$$0_V = a^{-1} \cdot 0_V = a^{-1}(a \cdot v) = (a^{-1} \cdot a) \cdot v = 1 \cdot v = v,$$

contradizendo o fato de $v \neq 0_V$.

Exemplo 26

Os vetores $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (2, 4)$ em $\mathbb{R}^2$ são linearmente dependentes, pois como $v_2 = 2v_1$, temos $2 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2 = (0, 0)$.

Proposição 3

Seja $V$ um espaço vetorial real. Os vetores $v_1, \ldots, v_n$ em $V$, com $n > 1$, são linearmente dependentes se, e somente se, um deles é combinação linear dos outros. Equivalentemente, os vetores $v_1, \ldots, v_n$ em $V$, com $n > 1$, são linearmente independentes se, e somente se, nenhum deles é combinação linear dos outros.

Demonstração: Faremos a demonstração da primeira afirmação.

($\Longrightarrow$:) Suponhamos que $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente dependentes. Então, existem $a_1, \ldots, a_n$ em $\mathbb{R}$ nem todos nulos, tais que $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0_V$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $a_1 \neq 0$. Logo,

Caso necessário, reenumeramos os vetores.

$a_1v_1 = -a_2v_2 - \cdots - a_nv_n$,

$v_1 = -({a_1}^{-1} \cdot a_2)v_2 - \cdots - ({a_1}^{-1} \cdot a_n)v_n$ e $v_1$ é combinação linear de $v_2, \ldots, v_n$.

($\Longleftarrow$:) Suponhamos, sem perda de generalidade, que $v_1$ seja combinação linear de $v_2, \ldots, v_n$. Então, existem $a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, tais que $v_1 = a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$. Logo, $1 \cdot v_1 - a_2v_2 - \cdots - a_nv_n = 0_V$ é uma combinção linear nula com nem todos os coeficientes nulos. Portanto, os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente dependentes. ■

Exemplo 27

Dados dois vetores em qualquer espaço vetorial, para determinar se são linearmente independentes ou dependentes não é preciso fazer cálculos, basta olhar para os vetores.

$v_1 = (1, 2, 3)$ e $v_2 = (1, 1, -1)$ são linearmente independentes no $\mathbb{R}^3$.

$f_1(t) = 1$ e $f_2(t) = 1 + t$ são linearmente independentes em $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ são linearmente dependentes em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Exemplo 28

Vamos verificar se $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 2, 1)$, $v_3 = (3, 3, 4, 3)$, $v_4 =$

$(-1,1,-1,1)$ e $v_5 = (-1,3,0,3)$ são linearmente dependentes ou independentes. Sejam $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$ tais que $a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+a_4v_4+a_5v_5 = (0,0,0,0)$. Então,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} &= a_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}3\\3\\4\\3\end{pmatrix} + a_4\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix} + a_5\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1&1&3&-1&-1\\1&1&3&1&3\\1&2&4&-1&0\\1&1&3&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Vemos que obtemos um sistema linear homogêneo de $m = 4$ equações com $n = 5$ incógnitas. Logo, o número $r$ de linhas não nulas da reduzida por linhas da matriz associada ao sistema tem a propriedade

$$r \leq m = 4 < 5 = n.$$

Veja no Exercício 8 uma generalização desse resultado.

Portanto, esse sistema tem solução não nula. Assim, os vetores são linearmente dependentes.

### Exemplo 29

Os polinômios $f_1(t) = 1 + t, f_2(t) = t$ e $f_3(t) = 1 + t + t^2$ são linearmente dependentes ou independentes em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$?

Fazemos a combinação linear nula $a_1f_1(t) + a_2f_2(t) + a_3f_3(t) = 0$. Assim,

$0 = a_1(1 + t) + a_2t + a_3(1 + t + t^2) = (a_1 + a_3) + (a_1 + a_2 + a_3)t + a_3t^2$.

Logo, $\begin{cases} a_1 + a_3 = 0\\ a_1 + a_2 + a_3 = 0\\ a_3 = 0\end{cases}$

Resolvendo o sistema, obtemos $a_3 = 0$, $a_1 = -a_3 = 0$ e $a_2 = -a_1 - a_3 = 0$. Portanto, os polinômios são linearmente independentes.

### Proposição 4 (Propriedade da independência linear)

Sejam $V$ um espaço vetorial e $v_1, \ldots, v_m$ vetores em $V$ linearmente independentes. Então, cada $v \in [\, v_1, \ldots, v_m \,]$ se escreve de uma única maneira como combinação linear de $v_1, \ldots, v_m$.

Demonstração: Sejam $a_1, \ldots, a_m$ e $b_1, \ldots, b_m$ em $\mathbb{R}$, tais que

$$a_1v_1 + \cdots + a_mv_m = b_1v_1 + \cdots + b_mv_m.$$

Então, $(a_1 - b_1)v_1 + \cdots + (a_m - b_m)v_m = 0_V$. Como esses vetores são linearmente independentes, temos que $a_j - b_j = 0$, para todo $j = 1, \ldots, m$. Portanto, $a_j = b_j$, para todo $j = 1, \ldots, m$. ■

Mais uma propriedade interessante.

### Proposição 5

Seja $V$ um espaço vetorial real e sejam $v_1, \ldots, v_m$ vetores em $V$ tais que $v_m = a_1v_1 + \cdots + a_{m-1}v_{m-1}$. Então, $[v_1, \ldots, v_{m-1}] = [v_1, \ldots, v_m]$.

**Demonstração:**

($\subset$:) Como $b_1v_1 + \cdots + b_{m-1}v_{m-1} = b_1v_1 + \cdots + b_{m-1}v_{m-1} + 0v_m$, para quaisquer $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$, segue que $[v_1, \ldots, v_{m-1}] \subset [v_1, \ldots, v_m]$.

Essa inclusão independe do vetor $v_m$.

($\supset$:) Seja $v \in [v_1, \ldots, v_m]$. Então, existem números reais $b_1, \ldots, b_m$, tais que $v = b_1v_1+\cdots+b_{m-1}v_{m-1}+b_mv_m$. Substituindo $v_m = a_1v_1+\cdots+a_{m-1}v_{m-1}$, obtemos:

$$\begin{aligned} v &= b_1v_1 + \cdots + b_{m-1}v_{m-1} + b_m(a_1v_1 + \cdots + a_{m-1}v_{m-1}) \\ &= (b_1 + b_ma_1)v_1 + \cdots + (b_{m-1} + b_ma_{m-1})v_{m-1}. \end{aligned}$$

Logo, $v \in [v_1, \ldots, v_m]$. Portanto, $[v_1, \ldots, v_m] \subset [v_1, \ldots, v_{m-1}]$. ■

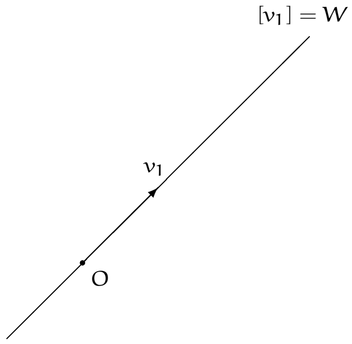
Usando os nossos conhecimentos de vetores no plano e no espaço, vamos determinar os subespaços do $\mathbb{R}^2$ e do $\mathbb{R}^3$.

### Exemplo 30

Vamos mostrar que os subespaços do $\mathbb{R}^2$ são $\{(0,0)\}$, retas que passam pela origem ou $\mathbb{R}^2$.

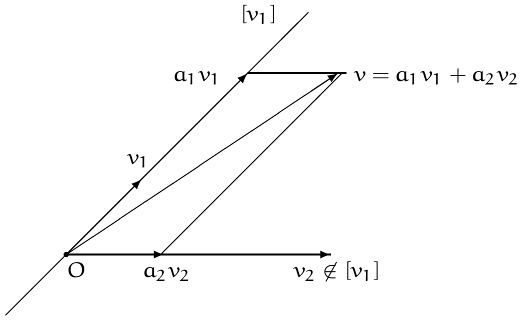
De fato, é claro que $\{(0,0)\}$ é um subespaço do $\mathbb{R}^2$.

Seja $W \neq \{(0,0)\}$ um subespaço do $\mathbb{R}^2$. Então, existe $v_1 \neq (0,0)$, tal que $v_1 \in W$. Assim, $[v_1] = \{kv_1 \; ; \; k \in \mathbb{R}\} \subset W$. Se $W = [v_1]$, então $W$ é a reta que passa pela origem $O$ na direção de $v_1$.




Caso contrário, $[v_1] \subsetneq W$ e existe $v_2 \in W$ tal que $v_2 \notin [v_1]$. Nesse caso, $v_1$ e $v_2$ são linearmente independentes e $[v_1, v_2] \subset W$.

Cada $v \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear de $v_1$ e $v_2$. Por quê?



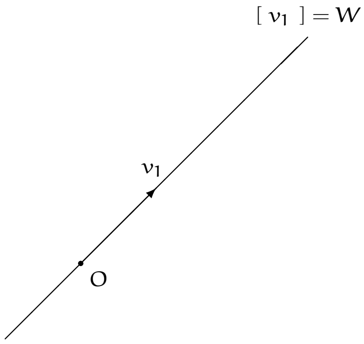

Dado $v \in \mathbb{R}^2$, a reta paralela a $v_1$ passando pelo ponto $v$ intersecta a reta passando pela origem $O$ paralela a $v_2$ no ponto $a_2v_2$; assim como, a reta paralela a $v_2$ passando pelo ponto $v$ intersecta a reta passando pela origem $O$ paralela a $v_1$ no ponto $a_1v_1$. Pela regra do paralelogramo, $v = a_1v_1 + a_2v_2$. Assim, $\mathbb{R}^2 = [v_1, v_2] \subset W$. Logo, $W = \mathbb{R}^2$.

Exemplo 31

Vamos mostrar que os subespaços do $\mathbb{R}^3$ são $\{(0,0,0)\}$, retas que passam pela origem, panos que passam pela origem ou $\mathbb{R}^3$.

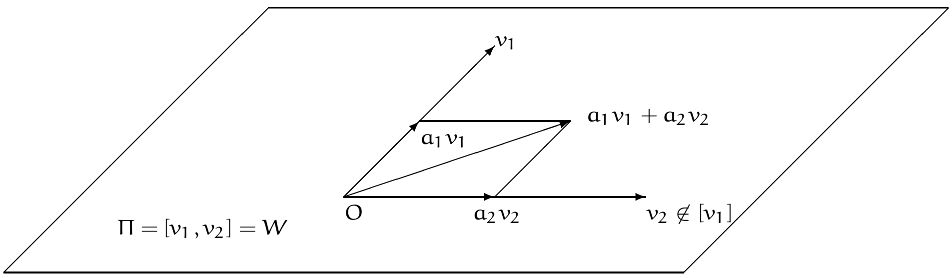
De fato, é claro que $\{(0,0,0)\}$ é um subespaço do $\mathbb{R}^3$.

Seja $W \neq \{(0,0,0)\}$ um subespaço do $\mathbb{R}^3$. Então, existe $v_1 \neq (0,0,0)$, tal que $v_1 \in W$. Assim, $[v_1] = \{kv_1 \ ; \ k \in \mathbb{R}\} \subset W$. Se $W = [v_1]$, então $W$ é a reta que passa pela origem $O$ na direção de $v_1$.




Caso contrário, $[v_1] \subsetneq W$ e existe $v_2 \in W$ tal que $v_2 \notin [v_1]$. Nesse caso, $v_1$ e $v_2$ são linearmente independentes e $[v_1, v_2] \subset W$.

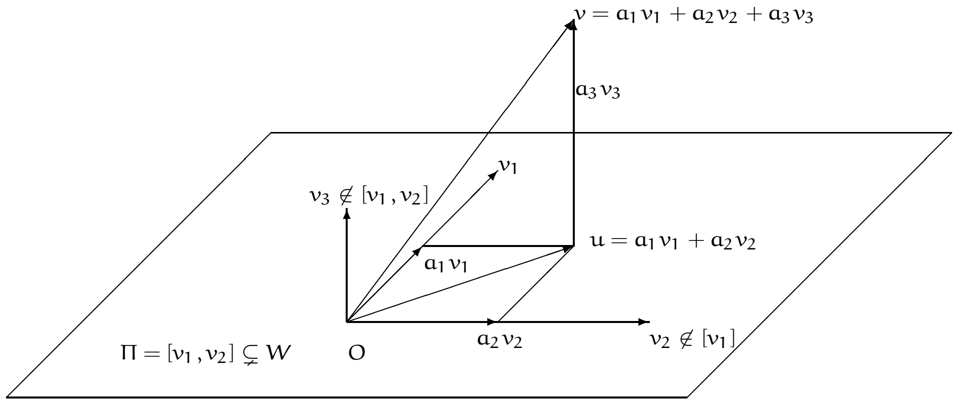
Se $W = [v_1, v_2]$, então $W$ é o plano $\Pi$ que passa pela origem $O$ paralelo às direções de $v_1$ e $v_2$.



Caso contrário, $\Pi = [v_1, v_2] \subsetneq W$ e existe $v_3 \in W$ tal que $v_3 \notin [v_1, v_2]$ e, nesse caso, $[v_1, v_2, v_3] \subset W$.

Cada $v \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como uma combinação linear de $v_1, v_2, v_3$.

Por quê?




A reta paralela a $v_3$ passando por $v$ intersecta o plano $\Pi = [v_1, v_2]$ no ponto $u$. Assim, $v - u = a_3 v_3$, para algum $a_3 \in \mathbb{R}$. Como $u = a_1 v_1 + a_2 v_2$, então $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$.

Portanto, $\mathbb{R}^3 = [v_1, v_2, v_3] \subset W$, logo $W = \mathbb{R}^3$.

## Exercícios

1. Escreva $(1, 1, 2)$ como combinação linear de $v_1 = (1, 0, 1)$ e $v_2 = (0, 1, 1)$.

2. Escreva $(1, 2, 3, 4)$ como combinação linear de $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 0, 0)$ e $v_4 = (1, 0, 0, 0)$.

   Mostre que todo $v \in \mathbb{R}^4$ se escreve de uma única maneira como combinação linear de $v_1, v_2, v_3, v_4$.

3. Mostre que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ é linearmente dependente.

4. Mostre que $\{1, 1+t, (1+t)^2\}$ é linearmente independente em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

5. Mostre que $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 1, -1)\}$ gera $\mathbb{R}^3$.

6. Sejam $u, v, w$ vetores não-nulos de um espaço vetorial real $V$.

(a) Mostre que $\{u, v\}$ é linearmente dependente se, e somente se, $u = av$, para algum $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

(b) Mostre que se $\{u, v\}$ é linearmente independente e $\{u, v, w\}$ é linearmente dependente, então $w$ é combinação linear de $u, v$.

7. Seja $V$ um espaço vetorial real e $v_1, \ldots, v_m$ vetores de $V$. Mostre que:

   (a) Se $v_1, \ldots, v_m$ são linearmente independentes e $v \notin [v_1, \ldots, v_m]$, então $v_1, \ldots, v_m, v$ são linearmente independentes.

   (b) Se $v_m$ é uma combinação linear de $v_1, \ldots, v_{m-1}$, então temos que $[v_1, \ldots, v_{m-1}] = [v_1, \ldots, v_m]$.

Generalização do Exemplo 28.

8. Mostre que qualquer subconjunto do $\mathbb{R}^m$ com $v_1, \ldots, v_n$ vetores tal que $n > m$ é linearmente dependente.

9. Determine equações para $W = [v_1, v_2, v_3, v_4]$, onde $v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (1, 1, -1, 1)$, $v_3 = (1, 1, 0, 1)$ e $v_4 = (1, -1, 2, 1)$.

10. Determine equações para $W = [v_1, v_2, v_3]$, onde $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 1)$ e $v_3 = (2, -1, 1)$.

11. Mostre que em $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ :

    (a) $\{\text{sen}\, x, \cos x\}$ é linearmente independente;

    (b) $\{1, \text{sen}^2 x, \cos^2 x\}$ é linearmente dependente;

    (c) $\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$ é linearmente independente.

12. Mostre que $\{2, \text{tg}^2 x, \sec^2 x\}$ é linearmente dependente em $\mathcal{F}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

13. Encontre um sistema linear homogêneo cujo conjunto das soluções $W$ seja gerado por $(1, -2, 0, 3)$, $(1, -1, -1, 4)$ e $(1, 0, -2, 5)$.

# Base e dimensão

Vamos estudar mais detalhadamente apenas os espaços vetoriais finitamente gerados.

Definição 6 (Espaço vetorial finitamente gerado)
Dizemos que um espaço vetorial real $V$ é *finitamente gerado* se, e somente se, existem $v_1, \ldots, v_m$ em $V$ tais que $V = [v_1, \ldots, v_m]$.

Exemplo 32
$\mathbb{R}^n$ é espaço vetorial finitamente gerado, pois $\mathbb{R}^n = [e_1, \ldots, e_n]$.

Exemplo 33
Para cada $n \geq 0$, $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ é espaço vetorial finitamente gerado, pois

$$f(t) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \text{ se, e somente se, } f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n,$$

para $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Logo, $f(t)$ é uma combinação linear de $1, t, \ldots, t^n$ e assim, $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = [1, t, \ldots, t^n]$.

Exemplo 34
O espaço vetorial $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de todos os polinômios com coeficientes reais não é finitamente gerado. Não há subconjunto finito de polinômios com coeficientes reais que gere $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Um possível conjunto de geradores é $1, t, \ldots, t^n, \ldots$, para todo $n \geq 0$.

Definição 7 (Base)
Seja $V \neq \{0\}$ um espaço vetorial real finitamente gerado. Um subconjunto $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ é chamado uma *base* de $V$ se, e somente se,

(i) $V = [v_1, \ldots, v_n]$;

(ii) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente.

A propriedade (i) significa que $\alpha$ gera $V$, assim cada elemento $v \in V$ é uma combinação linear dos vetores de $\alpha$. A propriedade (ii) significa que a combinação linear é única.

Exemplo 35
$\alpha = \{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base do $\mathbb{R}^n$. Com efeito, já mostramos que

$$v = (x_1, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n,$$

logo $\alpha$ gera $\mathbb{R}^n$.

$\alpha$ é chamada de base canônica do $\mathbb{R}^n$.

Falta verificar que $\alpha$ é linearmente independente.

De fato, $(0, \ldots, 0) = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = (x_1, \ldots, x_n)$ se, e somente se, $x_1 = \cdots = x_n = 0$.

$\alpha$ é chamada de base canônica de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

Exemplo 36

$\alpha = \{1, t, \ldots, t^n\}$ é uma base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. Já mostramos que $\alpha$ gera $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. Agora,

$$0 = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \text{ se, e somente se, } a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0,$$

mostrando que $\alpha$ é linearmente independente.

Proposição 6

Todo espaço vetorial $V \neq \{0\}$ finitamente gerado tem uma base.

Demonstração: Como $V$ é finitamente gerado existe um conjunto finito de geradores para $V$. Entre todos os conjuntos finitos de geradores consideremos um que tenha o menor número de geradores, digamos $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$. Então, $V = [v_1, \ldots, v_n]$. Afirmamos que $\alpha$ é linearmente independente.

De fato, se $n = 1$, então $V = [v_1] \neq \{0\}$, logo $v_1 \neq 0$ e $\alpha = \{v_1\}$ é linearmente independente. Podemos supor que $n \geq 2$. Suponhamos, por absurdo, que $\alpha$ seja linearmente dependente. Pela Proposição 3, um dos vetores de $\alpha$ é combinação linear dos outros. Sem perda de generalidade, podemos supor que $v_n = a_1 v_1 + \cdots + a_{n-1} v_{n-1}$. Pela Proposição 5, $[v_1, \ldots, v_{n-1}] = [v_1, \ldots, v_n] = V$, contradizendo o fato de o número mínimo de geradores ser $n$. Portanto, $\alpha$ é uma base de $V$. ■

Observação: Outra demonstração da Proposição acima pode ser feita. Como $V \neq \{0\}$, todo conjunto com um vetor não nulo é linearmente independente. Escolhemos entre todos os subconjuntos finitos linearmente independentes um que tenha o maior número de elementos. Basta mostrar agora que esse conjunto, forçosamente, gera $V$.

Portanto, uma base de um espaço vetorial não nulo finitamente gerado tem o mínimo de geradores e o máximo de vetores linearmente independentes.

Teorema 1

Seja $V \neq \{0\}$ um espaço vetorial real finitamente gerado. Então, todas as bases de $V$ têm o mesmo número de elementos.

Demonstração: Sejam $\alpha$ e $\beta$ bases de $V$ com, respectivamente, $m$ e $n$ elementos. Como $\alpha$ é base $V$ e $\beta$ gera $V$, então $m =$ mínimo de geradores $\leq n$. Como $\alpha$ é base $V$ e $\beta$ é linearmente independente, então $m =$ máximo de vetores li $\geq n$. Portanto, $m = n$. ■

É claro que $V = \{0\}$ é um espaço vetorial real finitamente gerado.

Definição 8 (Dimensão)

Seja $V \neq \{0\}$ um espaço vetorial real finitamente gerado. Chamamos de *dimensão* de $V$ ao número de elementos de uma base de $V$ e denotamos por $\dim_{\mathbb{R}}(V)$. Quando $V = \{0\}$ definimos $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 0$.

Exemplo 37

$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$, pois $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base do $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 38

$\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}_n(\mathbb{R})) = n+1$, pois $\{1, t \ldots, t^n\}$ é uma base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

Exemplo 39

Seja $V$ um espaço vetorial real com $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n \geq 1$. Todo subespaço $W$ de $V$ é finitamente gerado e $\dim_{\mathbb{R}}(W) \leq n$. Vale que:

$$\begin{array}{lcl} W = V & \Longleftrightarrow & \dim_{\mathbb{R}}(W) = \dim_{\mathbb{R}}(V) \\ W \subsetneq V & \Longleftrightarrow & \dim_{\mathbb{R}}(W) < \dim_{\mathbb{R}}(V) \end{array}$$

Exemplo 40

Seja $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x+y-2z=0 \text{ e } 2x-y+2z=0\}$.

$W$ é um subespaço do $\mathbb{R}^3$. Vamos determinar a dimensão de $W$. Para isto, vamos determinar uma base de $W$. Reduzindo por linhas a matriz associada ao sistema homogêneo, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \sim_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Fizemos a sequência de operações elementares: em $\sim_1$: $L_2 \to L_2 - 2L_1$; em $\sim_2$: $L_2 \to -\frac{1}{3}L_2$ e em $\sim_3$: $L_1 \to L_1 - L_2$.

Temos $n = 3$ incógnitas e posto $r = 2$. Logo, o grau de liberdade é $n - r = 3 - 2 = 1$. As incógnitas $x$ e $y$ podem ser dadas em função da incógnita $z$.

Logo, $x = 0$ e $y - 2z = 0$. Portanto,

$$\begin{array}{rcl} W & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x = 0 \text{ e } y - 2z = 0\} \\ & = & \{(0,2z,z) \,;\, z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{(0,2,1)z \,;\, z \in \mathbb{R}\}, \text{ mostrando que } W = [(0,2,1)] \end{array}$$

Geometricamente, $W$ é a reta de interseção de dois planos que passam pela origem.

Como $\{(0,2,1)\}$ é l.i., então é uma base de $W$ e $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 1$.

Exemplo 41

Seja $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Definimos o subespaço $W$ por

$$W = \left\{ \begin{array}{l} f(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \,;\, a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0, a_0 + a_1 + 3a_2 - 3a_3 = 0, \\ 3a_0 + a_1 + 7a_2 - 7a_3 = 0 \end{array} \right\}.$$

Vamos determinar a dimensão de $W$.

Reduzindo por linhas a matriz associada ao sistema linear homogêneo nas incógnitas $a_0, a_1, a_2, a_3$, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 7 & -7 \end{pmatrix} \sim_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fizemos a sequência de operações elementares: em $\sim_1$: $L_2 \to L_2 - 2L_1$, $L_3 \to L_3 - 3L_1$; em $\sim_2$: $L_2 \to \frac{1}{2}L_2$; em $\sim_3$: $L_1 \to L_1 + L_2$, $L_3 \to L_3 - 4L_2$.

Temos $n = 4$ incógnitas e posto $r = 2$. Logo, o grau de liberdade é $n - r = 4 - 2 = 2$. As incógnitas $a_0$ e $a_1$ podem ser dadas em função das $r = 2$ incógnitas $a_2$ e $a_3$. Temos que

$$\begin{aligned} f(t) \in W &\iff a_0 + 2a_2 - 2a_3 = 0 \text{ e } a_1 + a_2 - a_3 = 0 \\ &\iff a_0 = -2a_2 + 2a_3 \text{ e } a_1 = -a_2 + a_3. \end{aligned}$$

Logo, $f(t) \in W$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} f(t) &= (-2a_2 + 2a_3) + (-a_2 + a_3)t + a_2t^2 + a_3t^3 \\ &= (-2a_2 - a_2t + a_2t^2) + (2a_3 + a_3t + a_3t^3) \\ &= a_2(-2 - t + t^2) + a_3(2 + t + t^3), \end{aligned}$$

mostrando que $\{-2 - t + t^2, 2 + t + t^3\}$ gera $W$. Esse conjunto é linearmente independente, pois fazendo a sua combinação linear igual a $0$, com os coeficientes $a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, obtemos

Leia de trás para a frente as igualdades acima e faça $f(t) = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= a_2(-2 - t + t^2) + a_3(2 + t + t^3) \\ &= (-2a_2 + 2a_3) + (-a_2 + a_3)t + a_2t^2 + a_3t^3 \end{aligned}$$

logo, $a_2 = 0$ e $a_3 = 0$.

### Exemplo 42

Vamos determinar uma base e a dimensão de

$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 ; x - y + z - w = 0 \text{ e } -2x + 3y + 4z - w = 0\}$.

Reduzindo por linhas a matriz associada ao sistema, obtemos:

Fizemos a seguinte sequência de operações elementares: em $\sim_1$: $L_2 \to L_2 + 2L_1$ e em $\sim_2$: $L_1 \to L_1 + L_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -3 \end{pmatrix} \sim_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Logo, $x + 7z - 4w = 0$ e $y + 6z - 3w = 0$.

Portanto, $v = (x, y, z, w) \in W$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} v &= (-7z + 4w, -6z + 3w, z, w) \\ &= (-7z, -6z, z, 0) + (4w, 3w, 0, w) \\ &= z(-7, -6, 1, 0) + w(4, 3, 0, 1), \end{aligned}$$

mostrando que $\{v_1 = (-7, -6, 1, 0), v_2 = (4, 3, 0, 1)\}$ gera $W$. Esse conjunto é linearmente independente, pois

$(0, 0, 0, 0) = zv_1 + wv_2 = (-7z + 4w, -6z + 3w, z, w) \iff z = w = 0$.

Portanto, $\{v_1, v_2\}$ é uma base $W$ e a dimensão de $W$ é 2.

### Proposição 7

Todo subconjunto de vetores linearmente independentes de um espaço vetorial real $V$ de dimensão finita $n \geq 1$ pode ser completado a uma base de $V$.

Demonstração: Sejam $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n \geq 1$ e $\alpha = \{v_1, \ldots, v_r\} \subset V$ um conjunto linearmente independente com $r \leq n$. Seja $W = [v_1, \ldots, v_r]$. Se $W = V$, então $\alpha$ é uma base de $V$, $r = n$ e nada há a fazer. Suponhamos que $W \subsetneq V$. Então, $r = \dim_{\mathbb{R}}(W) < \dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ e existe $v_{r+1} \in V$ tal que $v_{r+1} \notin [v_1, \ldots, v_r]$. Portanto, $\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}\}$ é linearmente independente. Se $V = [v_1, \ldots, v_{r+1}]$ acabamos. Caso contrário, existe $v_{r+2} \in V$ tal que $v_{r+2} \notin [v_1, \ldots, v_{r+1}]$. Continuando, esse processo tem de parar, pois não podemos ter mais de $n$ vetores linearmente independentes. ■

Exemplo 43
Determine uma base de $W$ que contenha $v_1 = (0, 1, -1, -1)$, onde

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,;\, x + 2y - z + 3w = 0\}.$$

Como $W$ é o espaço das soluções de um sistema linear homogêneo de posto $r = 1$ com $n = 4$ incógnitas, então o grau de liberdade é $n - r = 4 - 1 = 3$. Portanto, $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 3$.

Logo, uma base de $W$ tem três vetores de $W$ linearmente independentes.

Vamos escolher $v_2 \in W$ tal que $v_2 \notin [v_1] = \{a(0, 1, -1, -1) \,;\, a \in \mathbb{R}\}$. Assim, $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente. Por exemplo, $v_2 = (0, 3, 0, -2)$.

Dando valores à primeira, segunda e terceira coordenadas, obtemos a quarta coordenada dos vetores de $W$.

Agora, devemos selecionar $v_3 \in W$ tal que $v_3 \notin [v_1, v_2]$. Temos que

$$[v_1, v_2] = \{av_1 + bv_2 = (0, a + 3b, -a, -a - 2b) \,;\, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Como toda combinação linear de $v_1$ e $v_2$ tem a primeira coordenada nula, escolhemos $v_3 = (1, 1, 0, -1)$. Portanto, $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\} \subset W$ é linearmente independente e é uma base de $W$.

Tomamos $x = 1$, $y = 1$ e $z = 0$. Logo, $w = -1$.

Definição 9 (Vetor coordenada)
Sejam $V$ um espaço vetorial real de dimensão $n \geq 1$ e $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de $V$. Para cada $v \in V$, existem $a_1, \ldots, a_n$ em $\mathbb{R}$ unicamente determinados tais que $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$. O *vetor coordenada de* $v$ na base $\alpha$, denotado por $v]_\alpha$, é a matriz $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ definida por

$$v]_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Daqui por diante, as bases serão *bases ordenadas*, com a ordem em que escrevemos os vetores da base. Por exemplo, na base $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $v_1$ é o primeiro elemento, $v_2$, o segundo, $\ldots$, $v_n$, o $n$-ésimo.

Exemplo 44

Sejam $V = \mathbb{R}^n$ e $\alpha = \{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica. Então, para cada vetor $v = (x_1, \ldots, x_n)$ temos que $v]_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Exemplo 45

Sejam $V = P_3(\mathbb{R})$ e $\alpha = \{1, t, t^2, t^3\}$ a base canônica.

Dados $f(t) = 2 + 3t - t^2 + t^3$ e $g(t) = -1 + t^2 - 2t^3$, temos que

$$f(t)]_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } g(t)]_\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 46

Vamos determinar o vetor coordenada de $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ na seguinte base $\alpha = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1)\}$ do $\mathbb{R}^3$.

Escrevendo $v$ como combinação linear de $v_1, v_2, v_3$, temos:

$$(x, y, z) = a(1, 0, 0) + b(1, 1, 0) + c(1, 1, 1) = (a + b + c, b + c, c),$$

logo $\begin{cases} a + b + c = x \\ b + c = y \\ c = z \end{cases}$

Reduzindo por linhas a matriz ampliada associada ao sistema, obtemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array}\right) \sim_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x-y \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array}\right) \sim_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x-y \\ 0 & 1 & 0 & y-z \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array}\right).$$

Fizemos a sequência de operações elementares: em $\sim_1$: $L_1 \to L_1 - L_2$; em $\sim_2$: $L_2 \to L_2 - L_3$.

Logo, $a = x - y$, $b = y - z$ e $c = z$ e $(x, y, z)]_\alpha = \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \\ z \end{pmatrix}$.

Proposição 8 (Propriedades do vetor coordenada)

Sejam $V$ um espaço vetorial real de dimensão $n \geq 1$ e $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de $V$. Valem as seguintes propriedades, para quaisquer $v, w \in V$ e $a \in \mathbb{R}$:

(a) $(v + w)]_\alpha = v]_\alpha + w]_\alpha$;

(b) $(a \cdot v)]_\alpha = a \cdot \big(v]_\alpha\big)$.

Demonstração: Sejam $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$, $w = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n$ e $a \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned} v+w &= (a_1v_1+\cdots+a_nv_n)+(b_1v_1+\cdots+b_nv_n)\\ &= (a_1+b_1)v_1+\cdots(a_n+b_n)v_n \end{aligned}$$

e $a\cdot v = a\cdot(a_1v_1+\cdots+a_nv_n) = (a\cdot a_1)\cdot v_1+\cdots+(a\cdot a_n)\cdot v_n$. Logo,

$$(v+w)]_\alpha = \begin{pmatrix} a_1+b_1\\ \vdots\\ a_n+b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_n \end{pmatrix} = v]_\alpha + w]_\alpha$$

e $$(a\cdot v)]_\alpha = \begin{pmatrix} a\cdot a_1\\ \vdots\\ a\cdot a_n \end{pmatrix} = a\cdot\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_n \end{pmatrix} = a\cdot\left(v]_\alpha\right). \qquad \blacksquare$$

Usamos as definições da adição de matrizes e da multiplicação de um número real por uma matriz.

## Exercícios

1. Encontre uma base e a dimensão do espaço $W$ das matrizes simétricas dois por dois com coeficientes reais.

2. Encontre uma base $\alpha$ e dê a dimensão do espaço das matrizes diagonais três por três com coeficientes reais. Complete $\alpha$ a uma base $\beta$ de $M_{3\times3}(\mathbb{R})$.

3. No Exercício 4 da Seção 1 (exceto itens (g), (h), (i) e (j)) dê a dimensão de $V$ e determine uma base e a dimensão de cada subespaço $W$.

4. Seja $W = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ 2x+y-3z=0\}$. Escolha $v_1\in W$ tal que $v_1\neq(0,0,0)$. Determine $v_2\in W$ tal que $\alpha=\{v_1,v_2\}$ é uma base de $W$, justificando a sua construção.

5. Complete $\{(1,0,1),(1,0,2)\}$ a uma base $\alpha$ do $\mathbb{R}^3$, justificando a sua resposta.

6. Diga quais das afirmações são falsas ou verdadeiras, justificando a sua resposta:

   (a) $W = \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ yz=0\,\}$ é um subespaço do $\mathbb{R}^3$.

   (b) $(1,-1,2)$ pertence ao subespaço gerado por $u=(1,2,3)$ e $v=(3,2,1)$.

   (c) $W=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4\ ;\ x=y\}$ tem dimensão 2.

   (d) Sejam $u,v,w$ vetores do espaço vetorial $V$. Se $\{u,v\}$ é linearmente independente e $w\neq0$, então $\{u,v,w\}$ é linearmente independente.

(e) Sejam $u, v, w$ vetores do espaço vetorial $V$. Se $\{u, v\}$ é linearmente independente e $w \notin [u, v]$ então $\{u, v, w\}$ é linearmente independente.

(f) Se $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ é linearmente independente e $\dim(V) = n$, então $\{v_1, \ldots, v_n w\}$ é linearmente dependente, para todo $w \in V$.

7. Determine as coordenadas do vetor $(4, -5, 3) \in \mathbb{R}^3$ em relação às seguintes bases do $\mathbb{R}^3$:

   (a) $\alpha = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, a base canônica.

   (b) $\beta = \{(1, 1, 1), (1, 2, 0), (3, 1, 0)\}$.

   (c) $\gamma = \{(1, 2, 1), (0, 3, 2), (1, 1, 4)\}$.

8. Determine as coordenadas do polinômio $f(t) = 4 - 5t + 3t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ em relação às seguintes bases de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$:

   (a) $\alpha = \{1, t, t^2\}$, a base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

   (b) $\beta = \{1 + t + t^2, 1 + 2t, 3 + t\}$.

   (c) $\gamma = \{1 + 2t + t^2, 3t + 2t^2, 1 + t + 4t^2\}$.

9. Seja $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,;\, 2x - y + z + 3w = 0\}$.

   (a) Mostre que $\alpha = \{(1, 2, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 3, -1)\}$ é uma base de $W$.

   (b) Determine $\;v]_\alpha$, para cada $v = (x, y, z, w) \in W$.

10. Seja $V$ um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de $V$. Mostre que para todo $m \geq 1$, para todo $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ e para todo $w_1, \ldots, w_m \in V$:

    $(a_1 w_1 + \cdots + a_m w_m)]_\alpha = a_1 \cdot \big(w_1]_\alpha\big) + \cdots + a_m \cdot \big(w_m]_\alpha\big)$.

# Soma e soma direta de subespaços

A partir de subespaços $U$ e $W$ de um espaço vetorial real $V$, podemos construir subespaços de $V$. Por exemplo, já vimos que $U \cap W$ é um subespaço, tal que $U \cap W \subset U$ e $U \cap W \subset W$. Observamos que $U \cap W$ é o maior subespaço de $V$ contido em $U$ e em $W$.

Lembramos que a união de subespaços nem sempre é um subespaço.
Faça o Exercício 1.

Agora vamos construir o menor subespaço de $V$ que contém $U \cup W$.

Definição 10 (Soma de subespaços)
Sejam $V$ um espaço vetorial real e $U$ e $W$ subespaços de $V$. A *soma* dos subespaços $U$ e $W$ é definida por

$$U + W = \{v \in V\ ;\ v = u + w,\ \text{tal que } u \in U \text{ e } w \in W\}.$$

De fato, $U + W$ é um subespaço de $V$, pois

(a) $0_V \in U$ e $0_v \in W$ e $0_V = 0_V + 0_V$.

(b) Se $v = u + w$ e $v' = u' + w'$, com $u, u' \in U$ e $w, w' \in W$, então

$$v + v' = (u + w) + (u' + v') = (u + u') + (w + w') \in U + W,$$

em virtude de $u + u' \in U$ e $w + w' \in W$.

Usamos a comutatividade e associatividade da adição em $V$.

(c) Se $v = u + w$ com $u \in U$ e $w \in W$ e $a \in \mathbb{R}$, então

$$a \cdot v = a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot w \in U + W,$$

pois $a \cdot u \in U$ e $a \cdot w \in W$.

Exemplo 47
Sejam $U = [(1, 1)]$ e $W = [(1, -1)]$ subespaços do $\mathbb{R}^2$. Então, $U \cap W = \{(0, 0)\}$ e

$$U + W = \{a(1, 1) + b(1, -1)\ ;\ a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

Exemplo 48
Sejam $U = [(1, 1, 1)]$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x + y + z = 0\}$ subespaços do $\mathbb{R}^3$. Geometricamente, $U$ é a reta pela origem ortogonal ao plano $W$ que passa pela origem e $U \cap W = \{(0, 0, 0)\}$.

Sabemos que $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$. Tomando $w_1 = (1, -1, 0)$ e $w_2 = (0, 1, -1)$ em $W$ temos uma base de $W$ e $u_1 = (1, 1, 1)$ é uma base de $U$. Logo,

$$U + W = \{a(1, 1, 1) + b(1, -1, 0) + c(0, 1, -1)\ ;\ a, b, c \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3,$$

pois $\alpha = \{u_1, w_1, w_2\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$.

Como a dimensão do $\mathbb{R}^3$ é 3, qualquer conjunto com três vetores linearmente independentes do $\mathbb{R}^3$ é uma base.

Exemplo 49
Sejam $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y - z = 0\}$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + z = 0\}$. Geometricamente, $U$ e $W$ são planos pela origem concorrentes, pois seus vetores normais $\eta_1 = (1, 1, -1)$ e $\eta_2 = (1, 1, 1)$ são linearmente independentes.

Nesse caso, $U \cap W = [(1, -1, 0)]$ é a reta pela origem, interseção dos planos. Faça um desenho para visualizar que a soma de quaisquer dois planos concorrentes pela origem é $\mathbb{R}^3$. Logo, $U + W = \mathbb{R}^3$.

Vamos mostrar que há uma relação entre as dimensões dos subespaços $U$, $W$, $U \cap W$ e $U + W$, sempre que $U$ e $W$ têm dimensões finitas.

Proposição 9
Sejam $U$ e $W$ subespaços de dimensão finita de um espaço vetorial real $V$. Então,

$$\dim_{\mathbb{R}}(U + W) = \dim_{\mathbb{R}}(U) + \dim_{\mathbb{R}}(W) - \dim_{\mathbb{R}}(U \cap W).$$

Demonstração: Suponhamos que $U \cap W \neq \{0_V\}$. Seja $\alpha = \{v_1, \ldots, v_\ell\}$ uma base de $U \cap W$. Então, $\alpha \subset U \cap W$ é um subconjunto linearmente independente de $U \cap W$, $U$ e $W$. Podemos completar $\alpha$ a uma base $\beta$ de $U$ e a uma base $\gamma$ de $W$. Escolhemos $\{u_1, \ldots, u_r\} \subset U$ e $\{w_1, \ldots, w_s\} \subset W$, tais que $\beta = \{v_1, \ldots, v_\ell, u_1, \ldots, u_r\}$ é uma base de $U$ e $\gamma = \{v_1, \ldots, v_\ell, w_1, \ldots, w_s\}$ é uma base de $W$.

Vamos mostrar que $\delta = \{v_1, \ldots, v_\ell, u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s\}$ é uma base de $U + W$, obtendo a fórmula proposta para as dimensões,

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}}(U + W) &= \ell + r + s \\ &= (\ell + r) + (\ell + s) - \ell \\ &= \dim_{\mathbb{R}}(U) + \dim_{\mathbb{R}}(W) - \dim_{\mathbb{R}}(U \cap W). \end{aligned}$$

(i) $\delta$ gera $U + W$:

Seja $v = u + w$, com $u \in U$ e $w \in W$. Como $\beta$ é uma base de $U$ e $\gamma$ é uma base de $W$, então, existem $a_1, \ldots a_\ell, b_1, \ldots, b_r \in \mathbb{R}$ e $c_1, \ldots, c_\ell, d_1, \ldots, d_s \in \mathbb{R}$ tais que

$u = a_1v_1 + \cdots + a_\ell v_\ell + b_1u_1 + \cdots + b_ru_r$ e

$w = c_1v_1 + \cdots + c_\ell v_\ell + d_1w_1 + \cdots + d_sw_s$.

Portanto,

$u+w = (a_1+c_1)v_1+\cdots+(a_\ell+c_\ell)v_\ell+b_1u_1+\cdots+b_ru_r+d_1w_1+\cdots+d_sw_s$.

(ii) $\delta$ é linearmente independente:

Sejam $a_1, \ldots a_\ell, b_1, \ldots, b_r, c_1, \ldots, c_s \in \mathbb{R}$, tais que

$$a_1v_1 + \cdots + a_\ell v_\ell + b_1u_1 + \cdots + b_ru_r + c_1w_1 + \cdots + c_sw_s = 0_v. \ (\star)$$

Então,

$$a_1v_1 + \cdots + a_\ell v_\ell + b_1u_1 + \cdots + b_ru_r = -c_1w_1 - \cdots - c_sw_s \in U \cap W.$$

Portanto, existem $d_1, \ldots, d_\ell \in \mathbb{R}$, tais que

$$-c_1w_1 - \cdots - c_sw_s = d_1v_1 + \cdots + d_\ell v_l,$$

logo $d_1v_1 + \cdots + d_\ell v_l + c_1w_1 + \cdots + c_sw_s = 0_V$. Como $\gamma$ é linearmente independente, então $d_1 = \cdots = d_\ell = c_1 = \cdots = c_s = 0$. Substituindo em $(\star)$, obtemos $a_1v_1+\cdots+a_\ell v_\ell+b_1u_1+\cdots+b_ru_r = 0_v$. Como $\beta$ é linearmente independente concluímos que $a_1 = \cdots = a_\ell = b_1 = \cdots = b_r = 0$. Logo, $\delta$ é linearmente independente.

Quando $U \cap W = \{0_V\}$, temos $\ell = \dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = 0$, começamos com $\beta = \{u_1, \ldots, u_r\}$ e $\gamma = \{w_1, \ldots, w_s\}$ bases de $U$ e $W$, respectivamente, e mostramos que $\delta = \beta \cup \gamma$ é uma base de $U + W$. Nesse caso,

$$\dim_{\mathbb{R}}(U + W) = \dim_{\mathbb{R}}(U) + \dim_{\mathbb{R}}(W). \quad \blacksquare$$

Definição 11 (Soma direta)
Sejam $U$ e $W$ subespaços do espaço vetorial $V$. Dizemos que a soma $U + W$ é uma *soma direta* se, e somente se, $U \cap W = \{0_V\}$. Nesse caso, escrevemos $U \oplus W$.

Exemplo 50
Verifique que no Exemplo 47 temos $U \oplus W = \mathbb{R}^2$ e no Exemplo 48 temos $U \oplus W = \mathbb{R}^3$ pois, em ambos os casos, $U \cap W = 0_V$. Enquanto, no Exemplo 49 a soma $U + W = \mathbb{R}^3$ não é uma soma direta, pois $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = 1 \neq 0$.

Exemplo 51
Vamos determinar o subespaço $U + W$ do $\mathbb{R}^4$, onde

$U = [u_1 = (1, 1, 2, 1), u_2 = (1, 2, 1, 0)]$ e

$W = [w_1 = (1, -1, 1, 1), w_2 = (1, 1, 2, 0)]$.

Primeiramente, observamos que

$$\begin{aligned} v \in U + W &\iff v = u + w, \text{ onde } u \in U \text{ e } w \in W, \\ &\iff v = a_1u_1 + a_2u_2 + b_1w_1 + b_2w_2, \\ &\qquad \text{com } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}, \\ &\iff v \in [u_1, u_2, w_1, w_2]. \end{aligned}$$

Logo, $U + W = [u_1, u_2, w_1, w_2]$.

Quando fazemos operações elementares nas linhas de um matriz $A$, na prática fazemos combinações lineares com as linhas de $A$ e o espaço gerado pelas linhas de $A$ é o mesmo espaço gerado pelas linhas não nulas (são linearmente independentes) da reduzida $R$ à forma em escada equivalente a $A$.

Vamos reduzir por linhas a matriz cujas linhas são $u_1, u_2, w_1, w_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim_3$$

Fizemos a sequência de operações elementares: em $\sim_1$: $L_2 \to L_2 - L_1$, $L_3 \to L_3 - L_1, L_4 \to L_4 - L_1$; em $\sim_2$: $L_1 \to L_1 - L_2$, $L_3 \to L_3 + 2L_2$;

em $\sim_3$: $L_4 \to -L_4$;
em $\sim_4$: $L_1 \to L_1 - 2L_4$,
$L_2 \to L_2 + L_4$, $L_3 \to L_3 + 2L_4$;
em $\sim_5$: $L_3 \to -\frac{1}{3}L_3$;
em $\sim_6$: $L_2 \to L_2 + L_3$,
$L_1 \to L_1 - 3L_3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, $U + W = [e_1, e_2, e_3, e_4] = \mathbb{R}^4$. Como $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 2$, $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$ e $\dim_{\mathbb{R}}(U+W) = 4$, então $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = 0$, logo $U \cap W = \{(0,0,0,0)\}$ e a soma é uma soma direta.

**Exemplo 52**

Vamos determinar o subespaço $U + W$ de $\mathbb{R}^4$, onde

$U = \{(x,y,z,w)\ ;\ x + y - z + w = 0\}$ e

$W = [(1,1,0,0),(1,0,-1,0),(0,1,0,1)]$.

Primeiramente, determinamos geradores para $U$.

Temos que $v = (x,y,z,w) \in U$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} v = (x,y,z,w) &= (-y+z-w, y, z, w) \\ &= y(-1,1,0,0) + z(1,0,1,0) + w(-1,0,0,1). \end{aligned}$$

se, e somente se, $v \in [(-1,1,0,0),(1,0,1,0),(-1,0,0,1)]$.

Logo, $U = [(-1,1,0,0),(1,0,1,0),(-1,0,0,1)]$.

Reduzimos por linhas a matriz cujas linhas são os geradores de $U$ e de $W$.

Fizemos a seguinte sequência de operações elementares:
em $\sim_1$: $L_2 \to L_2 + L_1$,
$L_3 \to L_3 + L_1$, $L_4 \to L_4 - L_1$,
$L_5 \to L_5 - L_1$;
em $\sim_2$: $L_4 \to L_4 - L_2$,
$L_6 \to L_6 - L_2$;
em $\sim_3$: $L_4 \to L_4 + 2L_3$,
$L_5 \to L_5 + 2L_3$,
$L_6 \to L_6 + L_3$;
em $\sim_4$: $L_5 \to L_5 - L_4$,
$L_6 \to L_6 - L_4$;
em $\sim_5$: $L_4 \to \frac{1}{2}L_4$;
em $\sim_6$: $L_1 \to L_1 + L_4$,
$L_2 \to L_2 + L_4$, $L_3 \to L_3 - L_4$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_6$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, $U + W = [e_1, e_2, e_3, e_4] = \mathbb{R}^4$. Como $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 3$ e $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 3$, então $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = 2$. Nesse caso, a soma não é soma direta.

## Exercícios

1. Sejam $V$ um espaço vetorial real e $U$ e $W$ subespaços de $V$.

   (a) Mostre que $U \cap W$ é o maior subespaço de $V$ contendo $U$ e $W$.

   (b) Mostre $U + W$ é o menor subespaço de $V$ contendo $U \cup W$.

2. Considere os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^3$:
   $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x = 0\}$,
   $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ y - 2z = 0\}$ e
   $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x = y = z\}$.

   (a) Determine uma base e a dimensão de cada um dos subespaços
   $$U, V, W, U \cap V, U \cap W, V \cap W, U + V, U + W, V + W.$$

   (b) Entre as somas de subespaços $U + V, U + W, V + W$ quais são somas diretas?

3. Seja $V$ um espaço vetorial real e $U$ e $W$ subespaços de $V$ tais que $U \cap W = \{0_V\}$. Mostre que se $v = u + w = u' + w'$, com $u, u' \in U$ e $w, w' \in W$, então $u = u'$ e $w = w'$.

4. Considere o espaço vetorial real $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e os subespaços
   $$U = \left\{ \begin{pmatrix} x & -x \\ y & z \end{pmatrix} ; x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \text{ e } W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix} ; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

   (a) Determine as dimensões de $U$, $W$, $U \cap W$ e $U + W$.

   (b) Mostre que $U + W = V$.

5. Consideremos os subespaços de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$,

   $U = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})\ ;\ A^t = A\}$ e $W = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})\ ;\ A^t = -A\}$.

   (a) Mostre que $U \cap W = \{0\}$.

   (b) Dê $\dim_{\mathbb{R}}(U)$, $\dim_{\mathbb{R}}(W)$ e $\dim_{\mathbb{R}}(U + W)$.

   (c) Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

      i. Mostre que se $A = B + C$, onde $B \in U$ e $C \in W$, então $A^t = B - C$.

      ii. Mostre que $B = \frac{A+A^t}{2}$ e $C = \frac{A-A^t}{2}$.

      iii. Mostre que $M_{n\times n}(\mathbb{R}) = U \oplus W$.