Gabarito

Álgebra Linear: AD1 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2015.2

Tutores: Gabriel Thomaz e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

O conjunto gerado por u, v, w , para ser base de $\mathbb{R}^3$, dever ser linermente independente. Assim, w no pode ser combinao linear de u e v.

Considere $au + bv + cw = (0, 0, 0)$, para a, b, c escalares reais. Temos:

$$\begin{cases} a + 2b + xc &= 0 \\ b + yc &= 0 \\ -a + zc &= 0 \end{cases}$$

Considerando a matriz aumentada :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & x & 0 \\ 0 & 1 & y & 0 \\ -1 & 0 & z & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & x & 0 \\ 0 & 1 & y & 0 \\ 0 & 2 & x+z & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & x & 0 \\ 0 & 1 & y & 0 \\ 0 & 0 & x+z-2y & 0 \end{bmatrix}$$

Assim temos o sistema:

$$\begin{cases} a + 2b + xc & = & 0 \\ b + yc & = & 0 \\ (x + z - 2y)c & = & 0 \end{cases}$$

Por L_3, temos que para $c = 0$, temos a condio de que $x + z - 2y \neq 0$. Logo , podemos pegar um vetor em $\mathbb{R}^3$ que satisfaa esta condio(existem infinitas opes), por ex, $(1, 0, 0)$.

b) $proj_v w = (\frac{w.v}{v.v})v = \left(\frac{(1,0,0).(2,1,0)}{(2,1,0).(2,1,0)}\right)(2,1,0) = \frac{2}{5}(2,1,0) = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$.

c) Vamos usar o Processo de Gram-Schmidt para ortogonalizar
a base $\{(1, 0, -1), (2, 1, 0), (1, 0, 0)\}$:
Seja $w_1 = (1, 0, -1)$.
Temos que

$$w_2 = (2, 1, 0) - \left(\frac{(2, 1, 0)(1, 0, -1)}{(1, 0, -1)(1, 0, -1)}\right)(1, 0, -1) =$$

$$= (2, 1, 0) - \left(\frac{2}{2}\right)(1, 0, -1) = (1, 1, 1) \,.$$

$$w_3 = (1, 0, 0) - \left(\frac{(1, 0, 0)(1, 0, -1)}{(1, 0, -1)(1, 0, -1)}\right)(1, 0, -1) - \left(\frac{(1, 0, 0)(1, 1, 1)}{(1, 1, 1)(1, 1, 1)}\right)(1, 1, 1) =$$

$$= (1, 0, 0) - \left(\frac{1}{2}\right)(1, 0, -1) - \left(\frac{1}{3}\right)(1, 1, 1) = \left(\frac{1}{6}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{6}\right).$$

Logo a base ortogonal $\{(1, 0, -1), (1, 1, 1)\,, \left(\frac{1}{6}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{6}\right)\}$.

2^a Questão) Solução:

a) i) $S \neq \{\}$? Sim, pois basta tomar qualquer $a, b, c \in \mathbb{R}$.

ii) S fechado para soma?

Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & -a_1 \\ -b_1 & b_1 \\ c_1 & -c_1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_2 & -a_2 \\ -b_2 & b_2 \\ c_2 & -c_2 \end{bmatrix}$$

Temos que

$$A + B = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & -a_1 - a_2 \\ -b_1 - b_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & -c_1 - c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1 + a_2) & -(a_1 + a_2) \\ -(b_1 + b_2) & (b_1 + b_2) \\ (c_1 + c_2) & -(c_1 + c_2) \end{bmatrix}.$$

Logo, tomando $a = a_1 + b_2$, $b = b_1 + b_2$, $c = c_1 + c_2$, temos que S fechado para soma.

iii) S fechado para produto por escalar??

Seja $d \in \mathbb{R}$ e

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & -a_1 \\ -b_1 & b_1 \\ c_1 & -c_1 \end{bmatrix}.$$

Temos que

$$dA = \begin{bmatrix} da_1 & -da_1 \\ -db_1 & db_1 \\ dc_1 & -dc_1 \end{bmatrix}$$

Logo, tomando $a = da_1$, $b = db_1$, $c = dc_1$, temos que S fechado para produto por escalar.

3^a Questão) Solução:

a) $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 / x + w - y = 0, w - 2z = 0\}$

i) $S \neq \{\}$? . Sim, basta escolhermos valores para y e z, encontrando os valores correspondentes para $(x, y, z, w) = (y - 2z, y, z, 2z)$

ii) S fechado para soma?

Seja $V = (y_1 - 2z_1, y_1, z_1, 2z_1)$ e $W = (y_2 - 2z_2, y_2, z_2, 2z_2)$.

$V + W = (y_1 - 2z_1 + y_2 - 2z_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, 2z_1 + 2z_2) = ((y_1 + y_2) - 2(z_1 + z_2), y_1 + y_2, z_1 + z_2, 2(z_1 + z_2))$.

Basta tomar $y = y_1 + y_2$ e $z = z_1 + z_2$. Logo, S fechado para soma.

iii) S fechado para produto por escalar?

Seja $V = (y_1 - 2z_1, y_1, z_1, 2z_1)$ e $c \in \mathbb{R}$.

Temos que $c.V = (c(y_1 - 2z_1), cy_1, cz_1, c2z_1) = (cy_1 - 2cz_1, cy_1, cz_1, 2cz_1)$ Ento, basta tomar $y = cy_1$, $z = cz_1$. S fechado para produto por escalar.

4^a Questão) Solução:

Como C é uma matriz simétrica $C^T = C$.

- $D = ((AC^T)B)$

Sendo A uma matriz de dimensão 3×2 e C^T de dimensão 2×2 tem-se que a multiplicação dessas matrizes resulta em uma matriz 3×2. Como B tem dimensão 2×3, a operação para se calcular D é possível, sendo D uma matriz 3×3.

$$D = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -9 & 4 & -2 \\ -15 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

- $E = BC$

Como B tem dimensão 2×3 e C dimensão 2×2 a operação para se calcular E **não é possível**.

- $G = (BA)C$

Sendo B uma matriz de dimensão 2×3 e B de dimensão 3×2 tem-se que a multiplicação dessas matrizes resulta em uma matriz 2×2. Como C tem dimensão 2×2, a operação para se calcular G é possível, sendo G uma matriz 2×2.

$$G = \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

5^a Questão) Solução:

Considere as três incógnitas

X = quantidade produzida do produto X;

Y = quantidade produzida do produto Y;

Z = quantidade produzida do produto Z.

tais produtos usam dois fertilizantes, A e B. Cada kg de X utiliza 4 gramas de A + 1 grama de B. Cada kg de Y utiliza 1 grama de A + 4 gramas de B. Cada kg de Z utiliza 3 gramas de A + 2 gramas de B.

Para montar o sistema relativo ao problema, vamos somar as quantidades de fertilizante A dos tres produtos X, Y, Z e igualar a quantidade total (em gramas) de fertilizante A utilizado. Faremos o mesmo procedimento para o fertilizante B. Assim as duas primeiras equações dos sistema são dadas por:

$$4X + Y + 3Z = 2500$$

$$X + 4Y + 2Z = 2000$$

Para a terceira equação multiplicaremos o preç de cada kg pelo seu respectivo produto e igualaremos ao valor total que a indústria arrecadou. Assim,

$$3X + 2Y + 5Z = 3500$$

Portanto o sistema linear é dado por:

$$\begin{cases} 4X + Y + 3Z &= 2500 \\ X + 4Y + 2Z &= 2000 \\ 3X + 2Y + 5Z &= 3500 \end{cases}$$

e a matriz aumentada definida por:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 3 & 2500 \\ 1 & 4 & 2 & 2000 \\ 3 & 2 & 5 & 3500 \end{array}\right]$$

Para resolver esse sistema vamos aplicar o método de eliminação gaussiana. Primeiramente vamos trocar de posição as L1 e L2:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 2000 \\ 4 & 1 & 3 & 2500 \\ 3 & 2 & 5 & 3500 \end{array}\right]$$

Fazendo $L2 \leftarrow L2 - 4L1$ e $L3 \leftarrow L3 - 3L1$ temos,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 2000 \\ 0 & -15 & -5 & -5500 \\ 0 & -10 & -1 & -2500 \end{array}\right].$$

Trocando L2 por L3 e L3 por L2, temos,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 2000 \\ 0 & -10 & -1 & -2500 \\ 0 & -15 & -5 & -5500 \end{array}\right].$$

Fazendo $L2 \leftarrow -\frac{1}{10}L2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 2000 \\ 0 & 1 & \frac{1}{10} & 250 \\ 0 & -15 & -5 & -5500 \end{array}\right].$$

E para finalizar, fazendo, $L3 \leftarrow L3 + 15L2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 2000 \\ 0 & 1 & \frac{1}{10} & 250 \\ 0 & 0 & -\frac{35}{10} & -1750 \end{array}\right].$$

Agora, basta realizar a retrosubstituição, assim:

$$-\frac{35}{10}Z = -1750 \Longrightarrow Z = 500$$

$$Y + \frac{1}{10}.500 = 250 \Longrightarrow Y = 200$$

$$X + 4.200 + 2.500 = 2000 \Longrightarrow X = 200$$