Álgebra Linear

Aula 13: Método de Eliminação de Gauss

Mauro Rincon

Márcia Fampa

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

Considere a matriz aumentada $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$, onde $\mathbf{A}$ é uma matriz triangular superior de ordem 3 dada por:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{bmatrix}$$

que representa o seguinte sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ & & & & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array} \right.$$

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

Se $a_{ii} \neq 0$ então o sistema linear pode ser resolvido por retrosubstituição,

$$\begin{aligned} x_3 &= b_3/a_{33} \\ x_2 &= (b_2 - (a_{23}x_3))/a_{22} \\ x_1 &= (b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3))/a_{11} \end{aligned}$$

De um modo geral, se a matriz quadrada $\mathbf{A}$ é de ordem n então o algoritmo para a determinação da solução $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ é dado por:

Seja $a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$.
Então $x_n = b_n/a_{nn}$.
Para $j = n-1, n-2, \cdots, 2, 1$

$$x_j = \frac{b_j - \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk}x_k}{a_{jj}}$$

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

Seja $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ um sistema linear. O Método de Eliminação de Gauss para resolução do sistema é dado pelas seguintes etapas:

- **Etapa 1**: Obtenção da matriz aumentada $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ do sistema.

- **Etapa 2**: Transformação da matriz aumentada $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ à uma matriz aumentada $[\overline{\mathbf{A}}|\overline{\mathbf{b}}]$ onde $\overline{\mathbf{A}}$ é uma matriz triangular superior.

- **Etapa 3**: Resolver o sistema linear $[\overline{\mathbf{A}}|\overline{\mathbf{b}}]$ da Etapa 2 por retro substituição.

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

Etapa 1:

Considere o sistema linear de ordem 3 dado por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = & b_3 \end{cases}$$

A matriz aumentada do sistema é

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right]$$

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

Etapa 2:

- Fase 1: Zerar todos os elementos da primeira coluna abaixo da diagonal principal. Seja $a_{11} \neq 0$, definimos os seguintes multiplicadores: $m_{21} = a_{21}/a_{11}$ e $m_{31} = a_{31}/a_{11}$ e façamos a seguinte operação: $\begin{cases} L_2^{(1)} & \leftarrow & L_2 - m_{21} \cdot L_1 \\ L_3^{(1)} & \leftarrow & L_3 - m_{31} \cdot L_1 \end{cases}$

  Após as operações, obtemos:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & b_3^{(1)} \end{array}\right]$$

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

- Fase 2: Zerar todos os elementos da 2^a coluna abaixo da diagonal principal. Agora o pivô é o elemento $a_{22}^{(1)}$ e linha pivô é a linha 2 de $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(1)}$. Suponha $a_{22}^{(1)} \neq 0$, definimos o multiplicador $m_{32} = a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ e façamos a seguinte operação: $L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} - m_{32} \cdot L_2^{(1)}$

  Após as operações obtemos:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & \boxed{0} & a_{33}^{(2)} & b_3^{(2)} \end{array}\right]$$

- Note que $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(2)}$ é uma matriz aumentada cuja matriz é uma matriz triangular superior.

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

Etapa 3:
Resolução do sistema $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(2)}$ que na forma triangular superior, ou seja:

$$\begin{aligned} x_3 &= b_3^{(2)}/a_{33}^{(2)}, \quad a_{33}^{(2)} \neq 0 \\ x_2 &= (b_2^{(2)} - (a_{23}^{(2)} x_3))/a_{22}^{(2)} \\ x_1 &= (b_1^{(2)} - (a_{12}^{(2)} x_2 + a_{13}^{(2)} x_3))/a_{11}^{(2)} \end{aligned}$$

Assim a solução $\{x_1, x_2, x_3\}$ de $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(2)}$ é a mesma solução de $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$.

- Observação: Note que sendo a matriz triangular superior então

$$det(\mathbf{A}^{(2)}) = a_{11}^{(2)} \cdot a_{22}^{(2)} \cdot a_{33}^{(2)} = det(\mathbf{A})$$

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

Exemplo 1: Resolva o sistema linear pelo Método de Eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

Etapa 1:

A matriz aumentada do sistema é

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(0)} = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -5 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

Etapa 2:

- Fase 1: Zerar todos os elementos da primeira coluna abaixo da diagonal principal.
  Linha pivô $= L_1$ e $a_{11} = 1$ é o pivô.
  Multiplicadores: $m_{21} = 2$ e $m_{31} = -2$

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(1)} = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{lcl} L_2^{(1)} & \leftarrow & L_2^{(0)} - 2L_1^{(0)} \\ L_3^{(1)} & \leftarrow & L_3^{(0)} - (-2)L_1^{(0)} \end{array}$$

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

- Fase 2: Zerar todos os elementos da 2^a coluna abaixo da diagonal principal.

$a_{22}^{(1)} = 3 \neq 0$ é o elemento pivô e $L_2^{(1)}$ é a linha pivô.

Define o multiplicador: $m_{32} = \dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = -\dfrac{7}{3}$.

Então:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(2)} = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{14}{3} & 0 \end{array}\right] L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} - \left(\frac{-7}{3}\right) L_2^{(1)}$$

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

Etapa 3: Resolvendo o sistema por retrosubstituição.

$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(2)}$ representa o sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ & & 3x_2 & - & 5x_3 & = & -3 \\ & & & - & \dfrac{14}{3}x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\boxed{x_3 = 0} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{-3-(-5x_3)}{3} = -1$$

$$\boxed{\mathbf{x} = (1, -1, 0)}$$

$$x_1 = \frac{2-(-x_2+2x_3)}{1} = 1$$

Observação: $det(\mathbf{A}) = det(\mathbf{A}^{(2)}) = 1 \cdot 3 \cdot \left(\dfrac{-14}{3}\right) = -14$

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

Exemplo 2:

Considere o mesmo sistema do Exemplo 1, usando $a_{22} = 2$ como coeficiente de x_2 na segunda linha.

Então:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -5 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

Etapa 2:

- Fase 1: Zerar todos os elementos da primeira coluna abaixo da diagonal principal.

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(1)} = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2^{(1)} \leftarrow L_2^{(0)} - 2L_1^{(0)} \\ L_3^{(1)} \leftarrow L_3^{(0)} + 2L_1^{(0)} \end{array}$$

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

- Fase 2: Zerar todos os elementos da 2^a coluna abaixo da diagonal principal. Mas nesse caso o pivô $a_{22}^{(1)} = 0$ e portanto não podemos calcular o multiplicador $m_{32} = \dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$.
  Dessa forma o algoritmo falha e não podemos resolver o sistema, embora a solução do sistema seja $\mathbf{x} = (1, -1, 0)$.

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

O pivoteamento consiste em tomar como pivô o maior elemento em valor absoluto da coluna a ser zerada, ou seja, em cada fase o pivô será escolhido por:

$$\hat{a}_{jj} = \max |a_{jk}|, \qquad k = j, j+1, ..., n$$

Se o maior elemento em valor absoluto pertence a linha k então troca-se as linhas, ou seja:

$$L_j \leftarrow L_k \qquad \text{e} \qquad L_k \leftarrow L_j$$

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Exemplo 3: Considere a matriz aumentada do exemplo 2

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -5 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

Pivô:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{11} &= \max\{|a_{11}|; |a_{21}|; |a_{31}|\} \\ &= \max\{1, 2, 2\} = 2 \end{aligned}$$

Então podemos escolher como pivô $a_{21} = 2$ ou $a_{31} = -2$

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Escolhendo $a_{21} = 2$ como pivô então:

$$L_2 \leftarrow L_1 \qquad \text{e} \qquad L_1 \leftarrow L_2$$

Assim,

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(0)'} = \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & -5 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Aplica-se o MEG:

$$m_{21} = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad m_{31} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 5/2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2^{(1)} \leftarrow L_2^{(0)} - \frac{1}{2} L_1^{(0)} \\ L_3^{(1)} \leftarrow L_3^{(0)} + L_1^{(0)} \end{array}$$

Escolha do pivô para a fase 2:

$$\begin{aligned} a_{22}^{(1)} &= \max\{|a_{22}|; |a_{32}|\} \\ &= \max\{2, 3\} = 3 \end{aligned}$$

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Mas $3 \in L_3$ de $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(2)}$. Então,

$$L_2 \leftarrow L_3 \qquad \text{e} \qquad L_3 \leftarrow L_2$$

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(1)'} = \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 5/2 & 2 \end{array}\right]$$

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

- Fase 2: Zerar os elementos da 2ª coluna abaixo da diagonal principal.

  Linha pivô $= L_2^{(1)}$ e o pivô $= -3$

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7/6 & 0 \end{array}\right] \quad L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} - \frac{2}{3} L_2^{(1)}$$

Logo, $\frac{7}{6}x_3 = 0 \Rightarrow \boxed{x_3 = 0}$

$$x_2 = \frac{3-(2x_3)}{-3} = -1$$

$$x_1 = \frac{0-(2x_2-x_3)}{2} = 1$$

$\boxed{\text{Solução: } \mathbf{x} = (1, -1, 0)}$

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Observação 1: Foram trocadas duas linhas durante o processo: $L_1 \leftarrow L_2$ e $L_2 \leftarrow L_3$
Neste caso, o número de permutações é dois.
Assim,

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^2) = 2.(-3).(7/6) = -7$$

Observação 2: Quando o número de permutações

$$\begin{cases} \text{é par} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = \det(\overline{\mathbf{A}}) \\ \text{é ímpar} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = -\det(\overline{\mathbf{A}}) \end{cases}$$

onde $\overline{\mathbf{A}}$ é a matriz triangular superior obtida pelo MEG com pivoteamento.

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Observação 3: Se durante o processo de aplicação do MEG com pivoteamento o pivô

$$a_{ii}^{(j)} = \max\{|a_{ik}|\} = 0 \text{ para } k = i, i+1, ..., n$$

então $\det(\mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \mathbf{A}$ é não invertível.

Neste caso, o sistema tem infinitas soluções ou não tem solução.

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Exemplo 4: Resolva o sistema linear pelo Método de Eliminação de Gauss com pivoteamento e calcule o determinante da matriz

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -4 \\ -x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 7 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_4 = -10 \end{cases}$$

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Etapa 1: Matriz aumentada

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(0)} = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & -10 \end{array}\right]$$

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Etapa 2:

- Fase 1: Escolha do pivô na primeira coluna

$$
\begin{aligned}
a_{11}^{(1)} &= \max\{|a_{11}|; |a_{21}|; |a_{31}|; |a_{41}|;\} \\
&= \max\{|1|; |0|; |-2|; |4|;\} = 4
\end{aligned}
$$

Mas $4 \in L_4 \Rightarrow L_1 \leftarrow L_4$ e $L_4 \leftarrow L_1$.

Se $\hat{a}_{11} = 0 \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \mathbf{A}$ é singular.

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Logo,

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(0)'} = \left[\begin{array}{rrrr|r} 4 & 3 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

Zerar os elementos da 1ª coluna abaixo da diagonal principal.

Definimos os multiplicadores:

$$\begin{aligned} m_{21} &= \tfrac{a_{21}}{a_{11}} = 0 \\ m_{31} &= \tfrac{a_{31}}{a_{11}} = -\tfrac{2}{4} = -\tfrac{1}{2} \\ m_{41} &= \tfrac{a_{41}}{a_{11}} = \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Então,

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(1)} = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 4 & 5/2 & 2 \\ 0 & 5/4 & -1 & 1/4 & -3/2 \end{array}\right] \begin{array}{lcl} L_2^{(1)} & \leftarrow & L_2^{(0)} \\ L_3^{(1)} & \leftarrow & L_3^{(0)} + \frac{1}{2}L_1^{(0)} \\ L_4^{(1)} & \leftarrow & L_4^{(0)} - \frac{1}{4}L_1^{(0)} \end{array}$$

- Fase 2: Escolha do pivô $a_{22}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} a_{22}^{(1)} &= \max\{|a_{22}^1|; |a_{32}^1|; |a_{42}^1|\} \\ &= \max\{|-1|; |1/2|; |5/4|\} = 5/4 \in L_4 \end{aligned}$$

Logo, L_4 é a linha pivô e $5/4$ é o pivô.

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Neste caso, $L_2 \leftarrow L_4$ e $L_4 \leftarrow L_2$

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(1)'} = \left[\begin{array}{rrrr|r} 4 & 3 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 5/4 & -1 & 1/4 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & 4 & 5/2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Próximo passo: zerar os elementos que estão na 2ª coluna abaixo da diagonal principal.

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Definimos os multiplicadores:

$$m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{1/2}{5/4} = \frac{2}{5}$$
$$m_{42} = \frac{a_{42}}{a_{22}} = \frac{-1}{5/4} = \frac{-4}{5}$$

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(2)} = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 5/4 & -1 & 1/4 & -3/2 \\ 0 & 0 & 22/5 & 13/5 & 13/5 \\ 0 & 0 & 1/5 & -6/5 & -6/5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} - \frac{2}{5} L_2^{(1)} \\ L_4^{(2)} \leftarrow L_4^{(1)} + \frac{4}{5} L_2^{(1)} \end{array}$$

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

- Fase 3: Escolha do pivô na 3^a coluna.

$\hat{a}_{33}^{(2)} = max\{|a_{33}^{(2)}|, |a_{43}^{(2)}|\} = max\left\{\left|\frac{22}{5}\right|, \left|\frac{1}{5}\right|\right\} = \frac{22}{5}.$

Mas $\frac{22}{5} \in L_3 \Rightarrow$ não precisa trocar linhas.

Próximo Passo: Zerar os elementos da 3^a coluna abaixo da diagonal principal.

$$\text{Multiplicador: } m_{43} = \frac{a_{43}}{a_{33}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{22}{5}} = \frac{1}{22}$$

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^3 = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & \frac{5}{4} & -1 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{22}{5} & \frac{13}{5} & \frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{29}{22} & -\frac{29}{22} \end{array}\right] \quad L_4^{(2)} \leftarrow L_4^{(1)} - \frac{1}{22} L_3^{(2)}$$

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Etapa 3: Resolução do sistema linear $\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \overline{\mathbf{b}}$ onde $\overline{\mathbf{A}}$ é uma matriz triangular superior.
Aplicando o método de Retrosubstituição obtemos:

$$x_4 = \frac{-\frac{29}{22}}{\frac{-29}{22}} = 1 \qquad x_3 = \frac{\frac{13}{5} - \left(\frac{13}{5} \cdot x_4\right)}{\frac{22}{5}} = 0$$

$$x_2 = \frac{-\frac{3}{2} - \left(-x_3 - \frac{1}{4}x_4\right)}{\frac{5}{4}} = -1$$

$$x_1 = \frac{-10 - (3x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4)}{4} = -2$$

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Logo a solução é $\mathbf{x} = (-2, -1, 0, 1)$.

Determinante:

$$det(\mathbf{A}) = -det(\mathbf{A}') = -(-det(\mathbf{A}^{(1)'})) = det(\mathbf{A}^{(2)}) = det(\mathbf{A}^{(3)}) = 4 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{22}{5} \cdot \frac{-29}{22} = -29$$

11.3 - Algoritmo do Método Eliminação de Gauss com Pivoteamento

- Resolver o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ de ordem $n \times n$, onde $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$.

  - Entrada de dados: (a_{ij}), $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n+1$, onde estamos denotando $b_i = a_{i,n+1}$.

  - Saída de dados: solução $\mathbf{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ ou mensagem de que a matriz é singular.

11.3 - Algoritmo do Método Eliminação de Gauss com Pivoteamento

Para $k = 1, 2, \cdots, n-1$

Pivoteamento

$$a^1_{kk} = max|a_{jk}|; j = k, k+1, \cdots, n$$

$se \quad a^1_{kk} = 0 \longrightarrow$ sistema não tem solução única

$cc \quad$ Para $i = 1, 2, \cdots, n$

$$c_{ki} = a_{ki}$$
$$a_{ki} = a_{ji}$$
$$a_{ji} = c_{ki}$$

Para $\quad i = k+1, \cdots, n$

$$m = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$

Para $\quad j = k+1, \cdots, n, n+1$

$$a_{ij} = a_{ij} - m \cdot a_{kj}$$

11.3 - Algoritmo Retrosubstituição

$$x_n = \quad a_{n,n+1}/a_{n,n} \qquad (a_{n,n+1} = b_n)$$

Para $i = n-1, \cdots, 2, 1$

$$x_i = \frac{(a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j)}{a_{ii}}$$

Exercícios

- Usando o Método de Eliminação de Gauss com Pivoteamento resolva os sistemas abaixo e calcule o determinante da matriz dos coeficientes:

  8a, 9b, 10a da página 55 do livro texto.
  12a, 12b, 12c da página 70 do livro texto.