Álgebra Linear

Aula 10: Determinantes

Mauro Rincon

Márcia Fampa

8.1 - Definições

Definição 1: Seja $S = \{1, 2, \cdots, n\}$ o conjunto de todos os inteiros de 1 a n, arrumados em ordem crescente. Uma outra ordem $\{j_1, j_2, \cdots j_n\}$ dos elementos do conjunto S é chamado de **permutação** de S.

8.1 - Definições

Exemplo 1: Considere $S = \{1, 3, 5, 6\}$. Então, 5361 é uma permutação de S, que corresponde à função $f : S \rightarrow S$ definida por:

$$f(1) = 5; f(3) = 3; f(5) = 6; f(6) = 1.$$

De quantas maneiras diferentes podemos representar o conjunto S?

$$4.3.2.1 = 24$$

maneiras diferentes de representar o conjunto de permutações de S, ou temos 24 permutações de S.

8.1 - Definições

De uma forma geral para um conjunto S de n números temos

$$\boxed{n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1}$$

permutações. Denotemos por S_n as permutações de S. A expressão acima é representada por $n!$ e denominada **n fatorial** ou **fatorial de n**. Assim temos

$$1! = 1$$
$$2! = 2.1 = 2$$
$$3! = 3.2.1 = 6$$
$$4! = 4.3.2.1 = 24$$
$$5! = 5.4.3.2.1 = 120$$
$$6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$$
$$7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 5040$$

8.1 - Definições

- Exemplo 2: Seja $S = \{1, 4, 9\}$. Então S_3 tem $3! = 3.2.1 = 6$ permutações do conjunto S, a saber: 149, 419, 941, 194, 491, 914.

- Uma permutação $j_1, j_2, \cdots, j_n$ do conjunto $S = \{1, 2 \cdots, n\}$ tem uma **inversão** se um inteiro j_r precede um inteiro menor j_s. Um permutação é denominada **par**(**ímpar**) se o número total de inversões é **par**(**ímpar**).

- Exemplo 3: Seja $S = \{1, 4, 9\}$. Então a permutação:

$$\begin{cases} \text{194 é ímpar pois o 9 está antes do 4(uma inversão)} \\ \text{914 é par pois o 9 está antes do 1 e do 4} \end{cases}$$

8.1 - Definições

Mostra-se que se $n \geq 2 \Rightarrow S_n$ tem $n!/2$ permutações pares e $n!/2$ ímpares. No exemplo anterior temos 6 permutações no total, sendo 3 pares e 3 ímpares.

$$\text{Pares}\begin{cases} 149 \longrightarrow 0 \\ 491 \longrightarrow 2 \\ 914 \longrightarrow 2 \end{cases} \qquad \text{Ímpares}\begin{cases} 194 \longrightarrow 1 \\ 419 \longrightarrow 1 \\ 941 \longrightarrow 3 \end{cases}$$

8.1 - Definições

Definição 2: Seja $\mathbf{A} = a_{ij}$ uma matriz quadrada de ordem $n \times n$. Definimos o **determinante** de $\mathbf{A}$, denotado por $det(\mathbf{A})$ ou $|\mathbf{A}|$ o número real dado por:

$$\boxed{det(\mathbf{A}) = \sum (\pm) a_{1j_1}\, a_{2j_2}\, \ldots a_{nj_n}}$$

onde j_1, j_2 e j_n são todas as permutações do conjunto $S = \{1,\ 2; \cdots n\}$. O sinal$(+)$ do determinante corresponde à permutação par de $j_1, j_2 \cdots j_n$ e o sinal (-) à permutação ímpar.

8.1 - Definições

Exemplo 4: Se $\mathbf{A} = a_{11}$ é uma matriz 1×1, então S_1 tem uma única permutação $1! = 1$. Como o número de inversões é zero o sinal do determinante é positivo. Logo $det(\mathbf{A}) = a_{11}$.

8.1 - Definições

Exemplo 5: Se $\mathbf{A}$ é uma matriz 2×2 dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

então para calcular o $det(\mathbf{A})$, escrevemos os termos da matriz na forma:

$$a_{1\_}a_{2\_} \qquad \text{e} \qquad a_{1\_}a_{2\_}$$

8.1 - Definições

Os espaços vazios serão preenchidos por todos os elementos de S_2, que são 12 e 21, dado que $S = \{1, 2\}$. Temos que 12 é uma permutação par (número de inversões é zero) e 21 é uma permutação ímpar (uma inversão). Assim o termo $a_{11}a_{22}$ tem sinal positivo e o termo $a_{12}a_{21}$ tem sinal negativo. Logo

$$\boxed{det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Uma maneira prática de se calcular o determinante de uma matriz 2×2 é observar que o determinante é o resultado da subtração entre os produto das diagonais.

8.1 - Definições

Exemplo 6: Calcule o determinante da seguinte matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

Então

$$det(\mathbf{A}) = (2)(4) - (-1)(3) = 11$$

8.1 - Definições

Exemplo 7: Considere uma matriz de ordem 3×3, dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

Então para calcular $det(\mathbf{A})$, escrevemos os seis termos $3! = 6$ da matriz,

$$\begin{array}{lll} a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}\,, & a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}\,, & a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_} \\ a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}\,, & a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}\,, & a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_} \end{array}$$

8.1 - Definições

Os espaços vazios serão preenchidos por todos os elementos de S_3 colocando os sinais de + ou - conforme a permutação. Assim

$$\boxed{\begin{aligned} det(\mathbf{A}) = \; & \{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\} - \\ & \{a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}\} \end{aligned}}$$

8.1 - Definições

Uma regra prática de se calcular o determinante de uma matriz **A** de ordem 3×3 é dado a seguir: Repita as duas primeiras colunas de **A**, some os produtos de cada um dos três elementos no sentido da esquerda para a direita e subtraia os produtos dos elementos no sentido da direita para a esquerda.

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccccccccc} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\ & \searrow & & \swarrow\searrow & & \swarrow\searrow & & \swarrow & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\ & \swarrow & & \swarrow\searrow & & \swarrow\searrow & & \searrow & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} \end{array}\right]$$

8.1 - Definições

Exemplo 8: Calcule o determinante da matriz abaixo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Passo a passo

Voltar

$$\begin{aligned} det(\mathbf{A}) &= \{(-1)(1)(4) + (2)(5)(-3) + (3)(2)(1)\} \\ &\quad + \{-(-3)(1)(3) - (1)(5)(-1) - (2)(2)(4)\} \\ &= (-28) + (-2) = -30 \end{aligned}$$

8.2 - Propriedades de Determinantes

Teorema 1: Seja $\mathbf{A}$ uma matriz de ordem $n \times n$. Então o determinante de $\mathbf{A}$ e de sua transposta $\mathbf{A}^T$ são iguais, ou seja,

$$\boxed{det(\mathbf{A}) = det(\mathbf{A}^T)}$$

8.2 - Propriedades de Determinantes

Demonstração: Sejam as matrizes $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ e $\mathbf{A}^T = [b_{ij}]$, onde por definição de matriz transposta $b_{ij} = a_{ji} \quad (1 \leq i, j \leq n)$. O determinante é definido por,

$$\boxed{det(\mathbf{A}^T) = \sum (^+_-) b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n} = \sum (^+_-) a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}}$$

O segundo termo é um produto de números reais e podemos ordenar os índices das linhas em sua ordem natural, sem alterar o sinal, ou seja,

$$\boxed{a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} = a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}}$$

Pode-se mostrar usando propriedades de permutações que a permutação $k_1, k_2, \cdots k_n$ e a permutação $j_1, j_2, \cdots j_n$ tem o mesmo sinal, isto é, ou ambas são pares ou ímpares. Portanto $det(\mathbf{A}^T) = det(\mathbf{A})$.

8.2 - Propriedades de Determinantes

Podemos ilustrar a propriedade das permutações usada no último teorema com o seguinte exemplo: Seja o número

$$\boxed{b_{14}b_{32}b_{43}b_{21} = a_{41}a_{23}a_{34}a_{12} = a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}}$$

Observando o último termo temos que o número de inversões na permutação 2341 é 3 e para o primeiro termo o número de inversões na permutação 4231 é 5. Como o sinal é negativo para ambos os termos então temos $det(A) = det(A^T)$.

8.2 - Propriedades de Determinantes

Exemplo 9: Calcule o determinante da matriz transposta definida no **Exemplo 8**.

Solução: A matriz transposta é dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Usando a fórmula obtemos:

$$\begin{aligned} det(\mathbf{A}^T) &= \{(-1)(1)(4) + (2)(1)(3) + (-3)(2)(5)\} \\ &\quad - \{(-3)(1)(3) + (-1)(1)(5) + (2)(2)(4)\} \\ &= (-4 + 6 - 30) - (-9 - 5 + 16) = -30 = det(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

8.2 - Propriedades de Determinantes

Teorema 2: Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes de ordem $n \times n$, onde a matriz $\mathbf{B}$ é obtida de uma matriz $\mathbf{A}$ trocando-se duas linhas (ou colunas), então

$$\boxed{det(\mathbf{B}) = -det(\mathbf{A}).}$$

8.2 - Propriedades de Determinantes

Demonstração: Suponha que $\mathbf{B}$ é obtida de $\mathbf{A}$ trocando-se as linhas r e s de $\mathbf{A}$ e $r < s$. Assim temos que $b_{rj} = a_{sj}$ e $b_{sj} = a_{rj}$. Para o restante dos termos $b_{ij} = a_{ij}$, se $i \neq r$ e $i \neq s$. Logo

$$\begin{aligned} det(\mathbf{B}) &= \sum (\pm) b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{rj_r} \cdots b_{sj_s} \cdots b_{nj_n} \\ &= \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{sj_r} \cdots a_{rj_s} \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{rj_s} \cdots a_{sj_r} \cdots a_{nj_n} \end{aligned}$$

A permutação $j_1, j_2, \cdots, j_s \cdots j_r \cdots j_n$ é obtida da permutação $j_1, j_2, \cdots, j_r \cdots j_s \cdots j_n$ trocando-se apenas os dois números j_r por j_s. Isto significa que o número de inversões é ímpar e portanto o sinal do determinante da matriz $\mathbf{B}$ é ao contrário do sinal do determinante da matriz $\mathbf{A}$. Para as colunas a demonstração é análoga

8.2 - Propriedades de Determinantes

Exemplo 10: Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix},$$

onde a matriz **B** foi obtida trocando-se as linhas da matriz **A**. Temos que $det(\mathbf{A}) = 23$ e $det(\mathbf{B}) = -23$

8.2 - Propriedades de Determinantes

Teorema 3: Sejam **A** e **B** matrizes de ordem $n \times n$. Então

1) Se **A** tem uma linha (ou coluna) nula, então $det(\mathbf{A}) = 0$.

Demonstração:

Suponha que a r é a linha nula de **A**. Como cada termo na definição do determinante de A contém um fator da r-ésima linha de **A**, cada termo do $det(\mathbf{A})$ é nulo. Logo $det(\mathbf{A}) = 0$.

8.2 - Propriedades de Determinantes

2) Se $\mathbf{A}$ tem duas linhas (ou colunas) iguais, então $det(\mathbf{A}) = 0$.

Demonstração:

Suponha que as linhas r e s da matriz $\mathbf{A}$ sejam iguais. Seja $\mathbf{B}$ uma matriz obtida de $\mathbf{A}$ trocando-se as linhas r e s. Então pelo Teorema 2 temos que $det(\mathbf{A}) = -det(\mathbf{B})$. Por outro lado $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ e portanto $det(\mathbf{A}) = det(\mathbf{B})$. Das duas condições temos que $det(\mathbf{A}) = -det(\mathbf{A}) = 0$.

8.2 - Propriedades de Determinantes

3) Se $\mathbf{B}$ é obtida de $\mathbf{A}$ multiplicando-se uma linha (ou coluna) por um escalar α, então $det(\mathbf{B}) = \alpha\, det(\mathbf{A})$.

Demonstração:

Suponha que a r-ésima linha de $\mathbf{A}$ seja multiplicada por α. Denotemos esta nova matriz por $\mathbf{B}$. Então $b_{ij} = a_{ij}$ se $i \neq r$ e $b_{rj} = \alpha\, a_{rj}$. Da definição de determinante temos:

$$\begin{aligned} det(\mathbf{B}) &= \sum (\pm) b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{rj_r} \cdots \cdots b_{nj_n} \\ &= \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots \alpha\, a_{rj_r} \cdots a_{nj_n} \\ &= \alpha \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{rj_r} \cdots a_{nj_n} = \alpha\, det(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

8.2 - Propriedades de Determinantes

4) Se $\mathbf{A}$ é uma matriz triangular superior (ou inferior) então $det(\mathbf{A}) = a_{11}\ a_{22}\ \cdots a_{nn}$, isto é, o determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

8.2 - Propriedades de Determinantes

5) O determinante do produto de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{B}$ é igual ao produto dos seus determinantes, ou seja, $det(\mathbf{AB}) = det(\mathbf{A})\, det(\mathbf{B})$

6) Se $\mathbf{B}$ é obtida de $\mathbf{A}$ substituindo a linha i por ela somada a um múltiplo escalar de uma linha j, $i \neq j$, então $det(\mathbf{B}) = det(\mathbf{A})$

8.2 - Propriedades de Determinantes

Exemplo 11: Calcule o determinante da matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Solução: A matriz $\mathbf{A}$ tem uma linha nula, logo do teorema 3 conclui-se que $det(\mathbf{A}) = 0$. De outro modo usando a fórmula temos:

$$\begin{aligned} det(A) = & \quad \{(-1.0.4) + (2.0.3) + (-3.5.0)\} \\ - & \quad \{(2.0.4) + (-1.0.5) + (-3.0.3)\} = 0 \end{aligned}$$

8.2 - Propriedades de Determinantes

Exemplo 12: Calcule o determinante da matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Solução: A matriz $\mathbf{A}$ tem duas linhas iguais. Do teorema 3 conclui-se que $det(\mathbf{A}) = 0$. De outro modo usando a fórmula temos:

$$\begin{aligned} det(\mathbf{A}) &= \{(1.2.-1) + (2.4.3) + (4.1.5)\} \\ &\quad - \{(2.1.-1) + (1.4.5) + (4.2.3)\} \\ &= 42 - 42 = 0 \end{aligned}$$

8.2 - Propriedades de Determinantes

Exemplo 13: Calcule o determinante da matriz triangular superior **A**, dada por $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Solução: Usando o teorema temos que,
$det(\mathbf{A}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} = 1 \cdot (-1) \cdot (-2) = 2.$

Esta propriedade de matrizes triangulares é muito útil no cálculo de determinantes. Usando propriedades elementares entre linhas de uma matriz quadrada qualquer podemos transformá-la numa matriz equivalente triangular. Usando a propriedade anterior podemos então calcular o determinante.

8.2 - Propriedades de Determinantes

Exemplo 14: Calcule os determinantes das matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ e $\mathbf{AB}$, onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -18 \\ -2 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

Solução: Temos que

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -18 \\ -2 & 1 & -6 \end{bmatrix} = (-2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 9 \\ -2 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= (-2) \cdot (3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

8.2 - Propriedades de Determinantes

Logo $det(\mathbf{B}) = -6.det(\mathbf{A}) = -6.(-4) = 24$. Por outro lado o produto $\mathbf{AB}$ é dado por:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -15 \\ -3 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Usando a definição temos que $det(\mathbf{AB}) = -96$. Mas $det(\mathbf{AB}) = det(A) \cdot det(\mathbf{B}) = -4 \cdot 24 = -96$.

8.2 - Propriedades de Determinantes

Exemplo 15: Calcule o determinante da matriz **B**, tal que a segunda linha de **B** é obtida somando-se a segunda linha da matriz **A** pelo produto de 3 vezes a primeira linha da matriz **A**.

Solução: A matriz **A** e a matriz **B** são dadas por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Usando diretamente a definição de determinante, temos que $det(\mathbf{A}) = -4$ e $det(\mathbf{B}) = -4$.
Por outro lado, temos que $det(\mathbf{A}) = det(\mathbf{B}) = -4$.

8.2 - Propriedades de Determinantes

Corolário: Se uma matriz $\mathbf{A}$ é invertível , então $det(\mathbf{A}) \neq 0$ e

$$det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{det(\mathbf{A})}$$

Demonstração: Por definição, se $\mathbf{A}^{-1}$ é a matriz inversa de $\mathbf{A}$ então $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = I$. Pelo teorema anterior temos que
$det(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) = det(\mathbf{A})\, det(\mathbf{A}^{-1}) = det(\mathbf{I}) = 1$. Assim temos que $det(\mathbf{A}) \neq 0$ e $det(\mathbf{A}^{-1}) = \dfrac{1}{det(\mathbf{A})}$.

8.2 - Propriedades de Determinantes

Exemplo 16: Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Temos que $det(\mathbf{A}) = 4$ e $det(\mathbf{A}^{-1}) = \dfrac{1}{4}$, ou seja $det(\mathbf{A}^{-1}) = \dfrac{1}{det(\mathbf{A})} = \dfrac{1}{4}$.

Exercícios

- Fazer os exercícios de 10 a 21 e os exercícios teóricos de T.1 a T.16 das páginas 84 e 85 do livro texto.