Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO DA AP2 - Primeiro Semestre de 2018
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(2.0)1. Sendo A uma matriz real quadrada de ordem 5, cujo determinante é igual a 3, qual o valor de y na equação $\det(2AA^tA^{-1}) = 4y$? Justifique sua resposta.

Solução:

$$\begin{aligned}
\det(2AA^TA^{-1}) &= \det(2A)\cdot\det(A^T)\cdot\det(A^{-1})\\
&= 2^5\det(A)\cdot\det(A^T)\cdot\det(A^{-1})\\
&= 2^5\det(A)\cdot\det(A)\cdot\frac{1}{\det(A)}\\
&= 32\cdot 3\cdot 3\cdot\tfrac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$4y = 32\cdot 3 \Rightarrow y = 24.$$

(3.0)2. Determine o núcleo da transformação linear T, de $I\!R^4$ em $I\!R^2$, estabelecendo sua dimensão e uma base para este subspaço de $I\!R^4$. A transformação T é injetora? Justifique.

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+x_2-x_3+2x_4, x_1+2x_2-3x_3+x_4)$$

Solução:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & -3 & 1 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0\end{array}\right)$$

Ou seja, $x_1 = -x_3 - 3x_4$, $x_2 = 2x_3 + x_4$. Fazendo $x_3 = \alpha$ e $x_4 = \beta$, temos que

$$N(T) = \{(-\alpha - 3\beta, 2\alpha + \beta, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in I\!R\}.$$

A dimensão do núcleo é 2 e uma base para o núcleo é $\{(-1,2,1,0)^T, (-3,1,0,1)^T\}$.

T não é injetora, pois $N(T) \neq \{0\}$.

(2.0)3. Determine os autovalores de A e os autovetores associados ao maior autovalor de A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Solução: A equação característica é

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\lambda^2 - \lambda - 12 = 0.$$

Logo, os autovalores de A são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -3$. Para encontrar os autovetores associados a $\lambda_1 = 4$, temos:

$$Ax = 4x \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 = 0 \end{cases}$$

Obtemos então $(x_1, x_2) = (2x_2, x_2)$. Logo, qualquer múltiplo não-nulo de $(2,1)^T$ é um autovetor associado a $\lambda_1 = 4$.

(3.0)4. Uma empresa fabrica três diferentes bebidas: A, B e C. Faz-se uma estimativa do custo de produção de um litro de cada bebida. A bebida A custa R$10,00, a bebida B e a bebida C custam R$5,00 cada. Faz-se também, uma estimativa do número de horas de mão-de-obra necessárias para produzir um litro de cada bebida, sendo necessárias 2 horas para a bebida A, 4 horas para a bebida B e 2 horas para a bebida C. A empresa tem disponível para gastar em sua produção um total de R$31,00 e 12 horas de mão-de-obra. Sabendo-se que a empresa deverá produzir um total de 5 litros das três bebidas, monte um sistema linear para determinar quanto de cada bebida a empresa deverá produzir e em seguida resolva o sistema linear pelo método de Gauss-Jordan.

Solução: Representando por x_i a quantidade, em litros, da bebida i produzida, o sistema linear que representa este problema é dados por:

$$\begin{cases} 10x_A + 5x_B + 5x_C = 31 \\ 2x_A + 4x_B + 2x_C = 12 \\ x_A + x_B + x_C = 5 \end{cases}$$

Para resolvê-lo reduzimos a matriz de coeficientes do sistema linear a forma

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 & 31 \\ 2 & 4 & 2 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 & 31 \\ 0 & 15 & 5 & 29 \\ 0 & 5 & 5 & 19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 & 31 \\ 0 & 15 & 5 & 29 \\ 0 & 0 & 10 & 28 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 30 & 0 & 10 & 64 \\ 0 & 15 & 5 & 29 \\ 0 & 0 & 10 & 28 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 30 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 10 & 28 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1,2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2,8 \end{pmatrix}$$

Obtemos do sistema escalonado: $x_C = 2,8$, $x_B = 1$; $x_A = 1,2$. Logo deve-se produzir 1,2 litro da bebida A, 1 litro da bebida B e 2,8 litros da bebida C.