# Gabarito

# Álgebra Linear: AD2 - CEDERJ


## Mauro Rincon & Márcia Fampa - Primeiro Semestre 2019

## Tutores: Dionisio


1ª Questão)a) Solução:

Usando o Método de Gauss-Jordan com a matriz aumentada do sistema:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 \end{array}\right]$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_1$

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 0 & -5 & -15 \\ 0 & 8 & 21 \\ 0 & 3 & -6 \end{array}\right]$$

$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{8}{5}L_2$

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 0 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -6 \end{array}\right]$$

$L_2 \leftarrow \frac{-1}{5}L_2$

$L_4 \leftarrow \frac{1}{3}L_4$

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 8 \\ 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 1 & | & -2 \end{bmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 1 & | & -2 \end{bmatrix}$$

$L_3 \leftrightarrow L_4$

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & | & -3 \end{bmatrix}$$

Reescrevendo o sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & 2 \\ x_2 & = & 3 \\ x_2 & = & -2 \\ 0 & = & -3 \end{array} \right. \tag{1}$$

Não existe solução para este sistema.

1)b)Usando o Método de Gauss-Jordan com a matriz aumentada do sistema:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 & 6| & 12 \\ 1 & -1 & 4 & 5| & 15 \end{bmatrix}$$

$L_2 \leftrightarrow L_1$

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 5| & 15 \\ \\ 2 & -4 & 5 & 6| & 12 \end{bmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 5| & 15 \\ \\ 0 & -2 & -3 & -4| & -18 \end{bmatrix}$$

$L_2 \leftarrow \frac{-1}{2} L_2$

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 5| & 15 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2| & 9 \\ \end{bmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & 7| & 24 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2| & 9 \\ \end{bmatrix}$$

Reescrevendo o sistema:

$$\begin{cases} x_1 & +0x_2 & +\frac{11}{2}x_3 & +7x_4 = & 24 & I \\ & +x_2 & +\frac{3}{2}x_3 & +2x_4 = & 9 & II \\ \end{cases} \tag{2}$$

Obtendo $x_2$ a partir da equação II

$$x_2 + \frac{3}{2}x_3 + 2x_4 = 9$$
$$x_2 = 9 - \frac{3}{2}x_3 - 2x_4$$

Substituindo o valor de $x_2$ na equação I

$$x_1 + 0.(9 - \tfrac{3}{2}x_3 - 2x_4) + \tfrac{11}{2}x_3 + 7x_4 = 24$$
$$x_1 + \tfrac{11}{2}x_3 + 7x_4 = 24$$
$$x1 = 24 - \tfrac{11}{2}x_3 - 7x_4$$

A solução do sistema é dada por:

$$X = \begin{pmatrix} 24 - \frac{11}{2}x_3 - 7x_4 \\ 9 - \frac{3}{2}x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

1)c) Usando o Método de Eliminação de Gauss com a matriz aumentada do sistema:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & |0 \\ 2 & -1 & -1 & |0 \\ 3 & 4 & 1 & |0 \end{bmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & |0 \\ 0 & 1 & 3 & |0 \\ 0 & 7 & 7 & |0 \end{bmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2$

$$
[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & |0 \\ 0 & 1 & 3 & |0 \\ 0 & 0 & -14 & |0 \end{bmatrix}
$$

Reescrevendo o sistema:

$$
\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & -x_2 & -2x_3 & = & 0 \quad I \\ & x_2 & +3x_3 & = & 0 \quad II \\ & & -14x_3 & = & 0 \quad III \end{array} \right. \tag{3}
$$

Obtendo $x_3$ a partir da equação III

$$
\begin{aligned} -14x_3 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}
$$

Substituindo o valor de $x_3$ a partir da equação II

$$
\begin{aligned} x_2 + 3.0 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}
$$

Substituindo os valores de $x_2$ e $x_3$ em I

$$
\begin{aligned} x_1 - 0 - 2.0 &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}
$$

$$
X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$2^a$ Questão)a) Solução

Sendo a matriz dos coeficientes A dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Expandindo, então, em relação à primeira linha, obtemos:

$$det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \tag{4}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij}) \tag{5}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} det(M_{11}) = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (1).(-1-(-4)) = 3 \tag{6}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} det(M_{12}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1).(2-(-3)) = -5 \tag{7}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} det(M_{13}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1).(8-(-3)) = 11 \tag{8}$$

$$det(A) = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + a_{13}.A_{13}$$
$$det(A) = 1.3 + (-1).(-5) - 2.11$$
$$det(A) = 3 + 5 - 22$$
$$det(A) = -14$$

2)b) A inversa da matriz $A$ existe pois o $det(A) \neq 0$, segue abaixo o cálculo da inversa da matriz $A$.

$$[A|I_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$

$$[A|I_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & | & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2$

$$[A|I_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & | & 11 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

$L_3 \leftarrow \frac{-1}{14} L_3$

$$[A|I_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & | & \frac{-11}{14} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{14} \end{bmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3$

$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$

$$[A|I_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & \frac{-4}{7} & 1 & \frac{-1}{7} \\ \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{5}{14} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{14} \\ \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{-11}{14} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{14} \end{bmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_2$

$$[A|I_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{-3}{14} & \frac{1}{2} & \frac{1}{14} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{5}{14} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{14} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{-11}{14} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{14} \end{bmatrix}$$

Logo a matriz inversa de A é:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{14} & \frac{1}{2} & \frac{1}{14} \\ \frac{5}{14} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{14} \\ \frac{-11}{14} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{14} \end{bmatrix}$$

3. Questão: **QUESTÃO ANULADA**

4.(3.5) Seja a transformação line ar $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$;

$T(x, y, z) = (x - 2z; \ -x - 2y; \ x - y + 2z)$

a.(1.0) Determinar o núcleo, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T é injetora? Justifique!

b.(1.0) Determinar a imagem, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T é sobrejetora. Justifique

c.(1.0) Determine, se existirem, os autovalores reais de T.

d.(0.5) Determine os autovetores associados aos autovalores reais.

$4^a$ Questão) Solução:

a) $N(T) = \{(x, y, z);\ T(x, y, z) = 0\}$. Assim encontramos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - 2z & = & 0 \\ -x - 2y & = & 0 \\ x - y + 2z & = & 0 \end{cases}$$

O sistema pode ser resolvido facilmente, obtendo-se $x = y = z = 0$ como a única solução do sistema linear. Portanto, $N(T) = (0, 0, 0)$, base vazia com dimensão zero. Consequentemente $T$ é injetora, pois o núcleo é o vetor nulo.

b) Colocando as coordenadas em evidência:

$(x - 2z, -x - 2y, x - y + 2z) = x(1, -1, 1) + y(0, -2, -1) + z(-2, 0, 2)$

Assim, o conjunto $\{(1, -1, 1), (0, -2, -1), (-2, 0, 2)\}$ gera o subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$. Como $N(T) = (0, 0, 0)$ então os vetores que geram um espaço são Linearmente Independentes e portanto o conjunto é uma base do $\mathbb{R}^3$. Como $dim(N(T) = 0$ então $dim(Im(T) = 3 = dim(\mathbb{R}^3)$. Temos que $T$ é uma transformação de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$. Logo, pelo teorema do Núcleo e Omagem, $T$ é sobrejetora se e somente se $T$ é injetora. Portanto, pelo item anterior, concluímos que $T$ é sobrejetora (imagem igual o contradomínio).

c) Determine, se existirem, os autovalores reais de T.

Queremos determinar o número $\lambda$ talque $T(x, y, z) = \lambda(x, y, z)$, ou seja

$(x - 2z, -x - 2y, x - y + 2z) = \lambda(x, y, z)$. Na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}$$

Que é equivalente a determinar as raízes do polinômo característico

$$det(T - \lambda I) = det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & -2 \\ -1 & -2 - \lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - 10$$

Observamos que o polinômio característico $P_3(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - 10$ tem uma única raiz real $\lambda_1 = -2.13375$ e tem duas raízes complexas conjugadas $\lambda_2$ e $\lambda_3$.

Note que $P_3(\lambda_1) = P_3(-2.13375) = 0,00012$, ou seja o autovalor $\lambda_1$ é um autovalor aproximado.

Denotando por $A_1 = (T - \lambda_1 I)$ a matriz dos coeficientes, substituindo o autovalor $\lambda_1 = -2.13375$, e então resolvendo o sistema linear homogêneo: $A_1 v_1 = (0,0,0)$, obtemos como solução o autovetor aproximado:

$$v_1 = r(0.638213; 4,771686, 1), \qquad \text{associado ao autovalor } \lambda_1 = -2.13375, \text{ onde } r \in \mathbb{R}$$