Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP2 - Primeiro Semestre de 2011
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(3.0)1. Determinar para que valores de a e b, o sistema linear abaixo: (i) tem uma única solução, (ii) não tem solução, (iii) tem uma infinidade de soluções.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & y & + & 6z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & b \\ 2x & + & 5y & - & 3z & = & 2 \end{array}\right.$$

Solução: Calculemos primeiro o determinante da matriz A de coeficientes do sistema linear:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -11a + 11.$$

(i) O sistema tem uma única solução se $\det(A) \neq 0$, ou seja, se $a \neq 1$.

Se $a = 1$, fazemos o escalonamento da matriz de coeficientes do sistema linear estendida.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & b \\ 2 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & b-1 \\ 0 & 3 & -15 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & -3b+3 \end{pmatrix}$$

Neste caso, se $b \neq 1$, o sistema não tem solução e se $b = 1$, o sistema tem infinitas soluções.

Logo, (ii) O sistema não tem solução se $a = 1$ e $b \neq 1$. (iii) O sistema tem infinitas soluções se $a = 1$ e $b = 1$.

(3.0)2. Considere o operador linear $T : I\!R^3 \to I\!R^2$

$$(x, y, z) \to (x + 2z, 2y - x)$$

(a) Determine o núcleo, uma base para esse subespaço e sua dimensão.

(b) Determine a imagem, uma base para esse subespaço e sua dimensão.

(c) T é injetora? T é sobrejetora? Justifique as respostas.

Solução:

(a)
$$\begin{aligned} N(T) &= \{(x,y,z) : T(x,y,z) = (0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) : (x+2z, 2y-x) = (0,0)\} \\ &= \{(x, x/2, -x/2) : x \in I\!R\} \\ &= \{x(1, 1/2, -1/2) : x \in I\!R\} \end{aligned}$$

Logo, $\{(1, 1/2, -1/2)\}$ é uma base para o núcleo de T e $\dim(N(T))$=1.

(b)
$$\begin{aligned} Im(T) &= \{(x-2z, 2y-x) : \forall x,y,z \in I\!R\} \\ &= \{a(1,0) + b(0,1) : \forall a,b \in I\!R\}, \end{aligned}$$

uma vez que $x - 2y = a$, $2y - x = b$ tem solução $\forall a, b \in R$.
Logo,
$$\{(1,0),(0,1)\}$$
é uma base para a imagem de T e $\dim(Im(T))$=2.

(c) Uma vez que $N(T) \neq (0,0,0)$, T não é injetora. Uma vez que $\dim(Im(T)) = \dim(I\!R^2)$ $(\dim(I\!R^2) = 2)$, T é sobrejetora.

(3.0)3. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Sabendo que $\det(A)$=4, calcule o determinante da cada matriz abaixo, utilizando as propriedades dos determinantes. Em cada caso, enuncie a propriedade utilizada.

(a)
$$B = \begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{bmatrix}$$

(b)

$$C = \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

(c)

$$D = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

Solução:

(a) det(B)=$2^3 \times 4 = 32$. (Multiplicando-se uma linha de uma matriz por uma constante k seu determinante fica multiplicado por k. Logo, multiplicando-se todas as linhas de uma matriz 3×3 por k, seu determinante fica multiplicado por k^3.)

(b) det(C)=-4. (Trocando-se entre si duas linhas de uma matriz, seu determinante fica multiplicado por -1.)

(c) det(D)=4. (det(A)=det(A^T).)

(1.0)4. Calcular a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} -2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

L1(-1/2)

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

L2=L2+L1(-1), L3=L3+L1

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

L2=L2(-2/3)

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

L1=L1+L2(3/2), L3=L3+L2(-1/2)

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & 1/3 & 1 \end{array}\right]$$

L3(-3)

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

L2=L2+L3(1/3)

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{rrr} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{array}\right]$$