Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP3 - Primeiro Semestre de 2010
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(2.0)1. Determine os valores de a e b para os quais o sistema linear abaixo tem uma única solução e em seguida resolva-o.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & a \\ 3x_1 & - & 7x_2 & = & b \\ 5x_1 & + & 3x_2 & = & 2a+5b \\ x_1 & + & 2x_2 & = & a+b-1 \end{array}\right.$$

Solução: Primeiramente, aplicaremos o método de eliminação

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= a \\ 3x_1 - 7x_2 &= b \\ 5x_1 + 3x_2 &= 2a + 5b \\ x_1 + 2x_2 &= a + b - 1 \end{aligned}$$

Fazendo

$3 \times L1 - L2 \Longrightarrow 10x_2 = 3a - b \Longrightarrow x_2 = \frac{3a-b}{10}$

$5 \times L1 - L3 \Longrightarrow 2x_2 = 3a - 5b \Longrightarrow x_2 = \frac{3a-5b}{2}$

$L1 - L4 \Longrightarrow -x_2 = -b + 1 \Longrightarrow x_2 = b - 1$

Igualando a primeira e a segunda expressões para x_2, chegamos a $a = 2b$. Substituindo esse valor de a nas equações e igualando a primeira e a última expressões para x_2, chegamos a $b = 2 \Longrightarrow a = 4$, isto é, $a = 4, b = 2$ são os valores para os quais o sistema linear tem solução única. Se substituirmos esses valores de a e b em qq expressão para x_2, encontramos $x_2 = 1$. Consequentemente, colocando $x_2 = 1$ em qualquer uma das linhas do sistema, encontramos $x_1 = 3$. Logo {3,1} é a solução do sistema linear.

(3.0)2. Considere a transformação linear

$$\begin{array}{rcl} T : I\!R^3 & \rightarrow & I\!R^3 \\ (x, y, z) & \rightarrow & (y + 4z, x - z, x - y + z) \end{array}$$

(1.0)a. Determine os autovalores de T.

Solução:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 4 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) &= \lambda^2(1 - \lambda) - 1 - 4 - (-4\lambda - \lambda + 1 - \lambda) \\ &= \lambda^2(1 - \lambda) - 5 - (-6\lambda + 1) \\ &= \lambda^2(1 - \lambda) + 6\lambda - 6 = \lambda^2(1 - \lambda) - 6(1 - \lambda) \\ &= (\lambda^2 - 6)(1 - \lambda). \end{aligned}$$

Considere $det(A - \lambda I) = 0$. Então $\lambda_1 = 1$ é uma raiz real e para o polinômio de grau dois, temos as raízes também reais: $\lambda_2 = +\sqrt{6}$ e $\lambda_3 = -\sqrt{6}$.

(1.0)b. Determine um autovetor x de T, tal que $|x| = 1$.

Solução:

$Av = \lambda v \Longrightarrow (A - \lambda I)v = 0$

Para $\lambda_1 = 1$ teremos:

$$(A-\lambda I)v_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \end{bmatrix}$$

Da última equação temos $x_1 = x_2$. Substituindo a igualdade na primeira e na segunda equações temos $x_3 = 0$. Tomando $x_1 = r \neq 0$, temos que $v_1 = r(1,1,0)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$.

Como $|v| = 1$ pelo dado inicial do problema, temos que fazer:

$|v_1| = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2r^2} = 1 \Longrightarrow \pm \sqrt{2}\, r = 1 \Longrightarrow r = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

Assim o autovetor $\hat{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0)$ associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$ satisfaz a condição do problema. De forma análoga temos que $\widehat{x} = \frac{-\sqrt{2}}{2}(1,1,0)$ também satisfaz.

(1.0)c. A transformação T é injetora? É sobrejetora? Justifique as respostas.

Solução:

A transformação é injetora se e somente se $N(T) = \{0\}$. Logo temos que achar a solução do seguinte sistema $Ax = 0$, que na forma matricial aumentada, pode ser escrito por:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Trocano L_1 com L_2 temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_1 - L_3$ encontramos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_2 - L_3$ encontramos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, temos que resolver o sistema:

$$\begin{aligned} x - z &= 0 \\ y + 4z &= 0 \\ 6z &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $z = 0 \Longrightarrow y = 0$ e $x = 0$ e o único vetor pertencente ao núcleo de T é o vetor nulo, ou seja $N(T) = \{0\}$, o que implica que T é injetora.

Como a dimensão do domínio de T é igual a dimensão do contra-domínio de T e a transformação linear é injetora, então T também é sobrejetora.

3. (3.0) Seja W o subspaço de $I\!R^4$ gerado pelos vetores $v_1 = (-1, 0, 4, 3)$, $v_2 = (5, 1, -6, -5)$ e $v_3 = (5, 2, 8, 5)$.

(2.0)a. Determine uma base e a dimensão de W.

(1.0)b. Estenda a base de W obtida no item anterior a uma base de todo o espaço $I\!R^4$.

Solução

(a) Forme a matriz A cujas linhas são os vetores dados e reduza-a por linha à forma escalonada:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & -6 & -5 \\ 5 & 2 & 8 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 14 & 10 \\ 0 & 2 & 28 & 20 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 14 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

As linhas não-zero (-1,0,4,3) e (0,1,14,10) da matriz escalonada formam uma base do espaço linha de A e, portanto, de W. Assim, dim(W)=2.

(b) Procuremos quatro vetores linearmente independentes que incluam os dois vetores acima. Os quatro vetores (-1,0,4,3), (0,1,14,10), (0,0,1,0) e (0,0,0,1) são linearmente independentes (pois formama uma matriz escalonada), e portanto constituem uma base de $I\!R^4$ que é uma extensão dabase de W.

4.(2.0) Determinar uma base e a dimensão do espaço de soluções do sistema homogêneo

$$\begin{cases} -2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ -4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Solução: Fazendo $linha_2 := linha_2 - linha_1$, $linha_3 := linha_3 - 2linha_1$ e, posteriormente, $linha_3 := linha_3 - 3linha_2$ temos o seguinte sistema equivalente

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ & - & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

Do qual, obtemos da segunda linha $2x_4 = -x_2 - x_3$ e , substituindo a igualdade na primeira linha, $x_2 = 2x_1$. Logo, o conjunto-solução do sistema é:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 = \frac{x_2}{2}, x_4 = -\frac{x_2}{2} - \frac{x_3}{2}\},$$

que é um subspaço vetorial de $I\!R^4$. Tendo em vista serem duas as variáveis livres (x_2 e x_3), conclui-se que dim$S$=2. Logo, qualquer subconjunto de S com dois vetores LI, forma uma base de S. Façamos (1) $x_2 = 1$ e $x_3 = 0$, (2) $x_2 = 0$ e $x_3 = 1$, para obter os vetores $v_1 = (\frac{1}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2})$ e $v_2 = (0, 0, 1, -\frac{1}{2})$. O conjunto $\{v_1, v_2\}$ é uma base de S.