Gabarito Parte I

Álgebra Linear: AD1 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2005

Tutores: Rodrigo Olimpio e Cristina Lopes

1. Considere o conjunto $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, onde $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (-5, 1, 1)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$.

   (a) $|v_1| = \sqrt{(1^2 + 2^2 + 3^2)} = \sqrt{(1 + 4 + 9)} = \sqrt{14}$.
   $|v_2| = \sqrt{((-5)^2 + 1^2 + 1^2)} = \sqrt{(25 + 1 + 1)} = \sqrt{27}$.
   $|v_3| = \sqrt{(0^2 + 0^2 + 1^2)} = \sqrt{(0 + 0 + 1)} = \sqrt{1} = 1$.

   (b) Por definição, para vetores $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$, temos que

   $$d(v_1, v_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

   Assim, $d(v_1, v_2) = \sqrt{(-5-1)^2 + (1-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{36 + 1 + 4} = \sqrt{41}$.

   Logo $d(v_1, v_2) = |v_1 - v_2| = \sqrt{41}$.

   (c) i) v_1 e v_2

   $v_1.v_2 = 1 \times (-5) + 2 \times 1 + 3 \times 1 = -5 + 2 + 3 = 0 \Longrightarrow v_1 \perp v_2$.

   ii) v_1 e v_3

   $v_1.v_3 = 1 \times 0 + 2 \times 0 + 3 \times 1 = 0 + 0 + 3 = 3 \neq 0 \Longrightarrow v_1$ e v_3 não são ortogonais.

   Verifiquemos se são paralelos:

   $$\frac{x_3}{x_1} = \frac{0}{1} = 0,\ \frac{y_3}{y_1} = \frac{0}{2} = 0,\ \frac{z_3}{z_1} = \frac{1}{3}$$

   isto é, as coordenadas de v_1 e v_3 não são proporcionais $\Longrightarrow v_1$ e v_3 não são paralelos.

iii) v_2 e v_3

$v_2.v_3 = -5 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 1 = 0 + 0 + 1 = 1 \neq 0 \Longrightarrow v_2$ e v_3 não são ortogonais.

Verifiquemos se são paralelos :

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{0}{-5} = 0, \ \frac{y_3}{y_2} = \frac{0}{1} = 0, \ \frac{z_3}{z_2} = \frac{1}{1} = 1$$

$\Longrightarrow v_2$ e v_3 não são paralelos.

(d) Seja θ o ângulo entre os vetores v_1 e v_2.

$cos(\theta) = \frac{v_1.v_2}{|v_1|.|v_2|}$. Usando resultados dos itens anteriores, temos:

Sabemos do item anterior que $v_1 \perp v_2$. Logo $\theta = 90°$. Usando a fórmula temos:

$cos(\theta) = \frac{0}{\sqrt{14}.\sqrt{27}} = 0 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} = 90°$.

Seja α o ângulo entre os vetores v_1 e v_3.

$cos(\alpha) = \frac{v_1.v_3}{|v_1|.|v_3|} = \frac{3}{\sqrt{14}.1} \approx 0,8 \Longrightarrow \alpha \approx 0,64$ rad $\approx 36,8°$.

Seja β o ângulo entre os vetores v_2 e v_3.

$cos(\beta) = \frac{v_2.v_3}{|v_2|.|v_3|} = \frac{1}{\sqrt{27}.1} \approx 0,1924 \Longrightarrow \beta \approx 1,37$ rad $\approx 78,9°$.

(e) v_1, v_2, v_3 são linearmente independentes ? Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \Re$.

$\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(-5,1,1) + \alpha_3(0,0,1) = 0$. Assim, temos o sistema linear abaixo:

$$\alpha_1 - 5\alpha_2 = 0 \quad (1)$$

$$2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \quad (2)$$

$$3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \quad (3)$$

Fazendo $(1) \times 2 - (2)$ e também $(1) \times 3 - (3)$ chegamos ao seguinte sistema:

$$\alpha_1 - 5\alpha_2 = 0$$
$$-11\alpha_2 = 0$$
$$-16\alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

Deste sistema, temos da segunda equação que $\alpha_2 = 0$. Substituindo nas outras duas equações concluímos que $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Logo v_1,v_2,v_3 são linearmente independentes. Vamos ver agora se B gera $\Re^3$.

$(x, y, z) = a(1, 2, 3) + b(-5, 1, 1) + c(0, 0, 1)$, para $a, b, c \in \Re$. Assim, temos o seguinte sistema:

$$a - 5b = x \tag{4}$$
$$2a + b = y \tag{5}$$
$$3a + b + c = z \tag{6}$$

Fazendo $(4) \times 2 - (5)$ e também $(4) \times 3 - (6)$ chegamos ao seguinte sistema:

$$a - 5b = x \tag{7}$$
$$-11b = 2x - y \tag{8}$$
$$-16b - c = 3x - z \tag{9}$$

De (8) temos que $b = \frac{-2x+y}{11}$. Substituindo b em (7), temos que
$a = x + \frac{(-10x+5y)}{11} = \frac{x+5y}{11}$.

Agora, substituindo b em (9), temos:
$c = -3x + z - 16\left(\frac{-2x+y}{11}\right) = -3x + z + \frac{(32x-16y)}{11} = \frac{-33x+11z+32x-16y}{11} = \frac{-x-16y+11z}{11}$.

Ou seja, (x, y, z) pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\{v_1, v_2, v_3\}$, já que o sistema anterior possui solução única. Como $\{v_1, v_2, v_3\}$ são linearmente independentes, segue que B é uma base para $\Re^3$.

(f) Seja $w_1 = v_1 = (1,2,3)$.

$$w_2 = v_2 - \left(\frac{v_2.w_1}{w_1.w_1}\right).w_1 =$$

$$(-5,1,1) - \left(\frac{(-5,1,1).(1,2,3)}{(1,2,3)(1,2,3)}\right).(1,2,3) =$$

$$(-5,1,1) - 0 = (-5,1,1).$$

$$w_3 = v_3 - \left(\frac{v_3.w_1}{w_1.w_1}\right).w_1 - \left(\frac{v_3.w_2}{w_2.w_2}\right).w_2 =$$

$(0,0,1) - \left(\frac{(0,0,1).(1,2,3)}{(1,2,3)(1,2,3)}\right).(1,2,3) - \left(\frac{(0,0,1).(-5,1,1)}{(-5,1,1)(-5,1,1)}\right).(-5,1,1) =$
$(0,0,1) - \left(\frac{3}{14}, \frac{6}{14}, \frac{9}{14}\right) - \left(\frac{-5}{27}, \frac{1}{27}, \frac{1}{27}\right) = \left(\frac{-3}{14} + \frac{5}{27}, \frac{-6}{14} - \frac{1}{27}, 1 - \frac{9}{14} - \frac{1}{27}\right) =$
$\left(\frac{-11}{378}, \frac{-176}{378}, \frac{121}{378}\right) = \left(\frac{-11}{378}, \frac{-88}{189}, \frac{121}{378}\right)$.

Assim temos que $w_1 = (1,2,3), w_2 = (-5,1,1), w_3 = \left(\frac{-11}{378}, \frac{-88}{189}, \frac{121}{378}\right)$.

Podemos verificar se o processo está correto fazendo o produto escalar entre os vetores:

$w_1.w_2 = (1,2,3)(-5,1,1) = -5 + 2 + 3 = 0.$

$w_1.w_3 = (1,2,3)\left(\frac{-11}{378}, \frac{-88}{189}, \frac{121}{378}\right) = \frac{-11}{378} - \frac{176}{189} + \frac{363}{378} = \frac{-11-352+363}{378} = 0.$

$w_2.w_3 = (-5,1,1)\left(\frac{-11}{378}, \frac{-88}{189}, \frac{121}{378}\right) = \left(\frac{-55}{378}, \frac{-88}{189}, \frac{121}{378}\right) = \frac{55-176+121}{378} = 0.$

Logo $\{w_1, w_2, w_3\}$ formam uma base ortogonal do $\Re^3$.

(g) $|w_1| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

$|w_2| = \sqrt{(-5)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{27}$

$|w_3| = \sqrt{\left(\frac{-11}{378}\right)^2 + \left(\frac{-176}{378}\right)^2 + \left(\frac{121}{378}\right)^2} = \sqrt{\frac{121}{378}} = \frac{11}{\sqrt{378}}$.

Dessa forma, tomando $w_i' = \frac{w_i}{|w_i|}$, para i=1,2,3, temos:

$w_1' = \frac{w_1}{|w_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$

$w_2' = \frac{w_2}{|w_2|} = \left(\frac{-5}{\sqrt{27}}, \frac{1}{\sqrt{27}}, \frac{1}{\sqrt{27}}\right)$

$w_3' = \frac{w_3}{|w_3|} = \left(\frac{-\sqrt{378}}{378}, \frac{-8\sqrt{378}}{189}, \frac{11\sqrt{378}}{378}\right)$, ou seja,

$\{w_1', w_2', w_3'\}$ formam uma base ortonormal do $\Re^3$.

(h) Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \Re$.

$\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(-5,1,1) + \alpha_3(7,3,5) = 0$. Assim, temos o sistema linear abaixo:

$$\alpha_1 - 5\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0 \tag{10}$$
$$2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \tag{11}$$
$$3\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \tag{12}$$

Fazendo $(10) \times 2 - (11)$ e $(10) \times 3 - (12)$ chegamos ao seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 5\alpha_2 + 7\alpha_3 &= 0 \\ -11\alpha_2 + 11\alpha_3 &= 0 \\ -16\alpha_2 + 16\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Neste sistema, temos da segunda e terceira equações que $\alpha_2 = \alpha_3$, isto é, para quaisquer valores de α_2 e α_3, desde que eles sejam iguais, essas equações serão satisfeitas. Logo o sistema linear tem infinitas soluções, ou seja, o conjunto $\{v_1, v_2, \hat{v}_3\}$ é linearmente dependente.

(i) $(7,3,5) = \alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(-5,1,1)$. Assim, temos o seguinte sistema linear:

$$\alpha_1 - 5\alpha_2 = 7 \tag{13}$$
$$2\alpha_1 + \alpha_2 = 3 \tag{14}$$
$$3\alpha_1 = \alpha_2 = 5 \tag{15}$$

Fazendo $(13) \times 2 - (14)$ e $(13) \times 3 - (15)$, chegamos ao seguinte sistema:

$$\alpha_1 - 5\alpha_2 = 7$$
$$-11\alpha_2 = 11$$
$$-16\alpha_2 = 16$$

Deste sistema, temos da segunda e terceira equações que $\alpha_2 = -1$. Substituindo α_2 em (13), temos que $\alpha_1 = 2$.

Logo $\hat{v}_3$ pode ser escrito como combinação linear de v_1 e v_2, com coeficientes $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = -1$.

(j) $v_1 = (1, 2, 3)$ e $v_2 = (-5, 1, 1)$. Sejam $a, b, c \in \Re$.

$[v_1, v_2] = a(1, 2, 3) + b(-5, 1, 1) = (a - 5b, 2a + b, 3a + b) = (x, y, z)$. Assim, temos o seguinte sistema linear:

$$a - 5b = x \tag{16}$$
$$2a + b = y \tag{17}$$
$$3a + b = z \tag{18}$$

Fazendo $(16) \times 2 - (17)$ e $(16) \times 3 - (18)$, chegamos ao seguinte sistema linear:

$$a - 5b = x$$
$$-11b = 2x - y$$
$$-16b = 3x - z$$

Da terceira equação temos que $b = \frac{-3x+z}{16}$. Da segunda equação temos que $b = \frac{-2x+y}{11}$. Igualando estes dois valores de b temos:

$\frac{-3x+z}{16} = \frac{-2x+y}{11} \Longrightarrow -33x + 11z = -32x + 16y \Longrightarrow x = -16y + 11z$

Logo $[v_1, v_2] = \{(x, y, z) \in \Re^3 / x = -16y + 11z\}$.

2) Solução: $S = \{(x, y)/x + 3y = 0\}$

S é subespaço. S não é vazio: (0, 0) pertence à S pois $0 + 3.0 = 0$.

E as duas condições abaixo são satisfeitas:

i) Se (a, b) e (c, d) são elementos de S $\Rightarrow a + 3.b = 0$ e $c + 3.d = 0 \Rightarrow$ $(a + c) + 3.(b + d) = 0 \Rightarrow (a, b) + (c, d)$ é um elemento de S.

ii) Se (a, b) é um elemento de S e α um escalar, $a+3.b = 0 \Rightarrow \alpha(a+3.b) = 0$ $\Rightarrow (\alpha a) + 3.(\alpha b) = 0 \Rightarrow (\alpha a, \alpha b)$ é um elemento de S.

Mostraremos agora que S tem uma base:

Se (x,y) $\in$ S $\Rightarrow (x, y) = (x, \frac{-x}{3}) = x(1, \frac{-1}{3})$. Então, todo vetor de S é combinação linear do vetor $(1, \frac{-1}{3})$. Como o vetor $(1, \frac{-1}{3})$ é linearmente independente, o conjunto $\{(1, \frac{-1}{3})\}$ é uma base de S.

3) Solução:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -6 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 9 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$2B = 2.\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = A^T - 2B = \begin{bmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 9 & 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -6 \\ 11 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

b)

$$C = A.B = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -6 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 35 & 11 \\ -8 & 14 & -10 \\ -7 & 22 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$C = B.A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -6 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 17 \\ -27 & 4 \end{bmatrix}$$

OBS: Note que $A.B \neq B.A$.