Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP2 - Primeiro Semestre de 2016
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(4.0)1. Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(2.0)a. Calcule os autovalores e os correspondentes autovetores de A.

(1.0)b. Determine os autovalores e os correspondentes autovetores de A^{-1}, sem calcular a matriz A^{-1}. Explique detalhadamente a solução.

(0.5)c. Calcule o determinante de A.

(0.5)d. Determine o determinante de A^{-1}, sem calcular a matriz A^{-1}. Explique detalhadamente a solução.

Solução:

a.

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) &= det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (-3-\lambda)(2-\lambda) + 4 \\ &= \lambda^2 + \lambda - 2 = P(\lambda). \end{aligned}$$

$P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow$ ou $\lambda = 1$ ou $\lambda = -2$. Então os autovalores de A são 1 e -2. Procuramos agora os autovetores associados:

(i)$\lambda = 1$. Temos

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\begin{bmatrix} -3x+4y \\ -x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x+4y=0 \\ -x+y=0 \end{cases}$$

Então temos que $x = y$. Portanto os autovetores associados a $\lambda = 1$ são os vetores $v = (x, x), x \neq 0$.

(ii)$\lambda = -2$. Temos

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\begin{bmatrix} -3x+4y \\ -x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x \\ -2y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x+4y=0 \\ -x+4y=0 \end{cases} \quad \text{ou } x = 4y.$$

Os autovetores associados a $\lambda = -2$ são os vetores da forma $v = (4y, y), y \neq 0$. (ou $v = (x, \frac{1}{4}x), x \neq 0$).

b. De acordo com a propriedade demonstrada em aula, se λ é um autovalor de A, então λ^{-1} é um autovalor de A^{-1} e todo autovetor de A é também um autovetor de A^{-1}. Logo os autovalores e respectivos autovetores de A^{-1} são:
(i) $\lambda = 1$, $v = (x, x), x \neq 0$.
(ii) $\lambda = -\frac{1}{2}$, $v = (x, \frac{1}{4}x), x \neq 0$.

c. $\mathrm{Det}(A) = -3 \times 2 - 4 \times (-1) = -2$.

d. $\mathrm{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{Det}(A)} = -\frac{1}{2}$.

(3.0)2. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + \alpha x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - \alpha x_3 = 3 \\ \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

(2.0)a. Determine a sua solução (em função de α), considerando $|\alpha| \neq 1$.

(1.0)b. Determine para que valor de α este sistema não tem solução. Justifique.

Solução:

Apliquemos inicialmente operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada correspondente ao sistema dado, como no método de eliminação de Gauss.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha & -2 \\ -1 & 2 & -\alpha & 3 \\ \alpha & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L2 \leftarrow L1 + L2$ e $L3 \leftarrow \alpha L1 - L3$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha - 1 & \alpha^2 - 1 & -2\alpha - 2 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L3 \leftarrow L3 - L2(-\alpha - 1)$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - 1 & -\alpha - 1 \end{bmatrix}$$

(a) Considerando $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -1$, temos pela linha 3, que $x_3 = \frac{-\alpha-1}{\alpha^2-1} = \frac{-1}{\alpha-1}$. Pela linha 2 temos que $x_2 = 1$. Substituindo x_2 e x_3 na linha 1 temos:

$x_1 - 1 - \frac{\alpha}{\alpha-1} = -2$

Resolvendo essa equação temos que $x_1 = \frac{1}{\alpha-1}$.

Neste caso, portanto, a solução do sistema é $(\frac{1}{\alpha-1}, 1, \frac{-1}{\alpha-1})$.

(b) O sistema original não terá solução única se o determinante das matrizes de coeficientes dos sistemas representados acima for igual a zero, isto é, se $\alpha^2 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1$ ou $\alpha = -1$.

Se $\alpha = 1$ a linha 3 do último sistema não pode ser satisfeita, indicando que o sistema não tem solução.

(3.0)3. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$(x, y, z) \to (x + 2z, 2y - x)$$

(1.0)a. Determine o núcleo de T, uma base para esse subespaço e sua dimensão.

(1.0)b. Determine a imagem de T, uma base para esse subespaço e sua dimensão.

(1.0)c. T é injetora? T é sobrejetora? Justifique as respostas.

Solução:

a.
$$\begin{aligned} N(T) &= \{(x,y,z) : T(x,y,z) = (0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) : (x+2z, 2y-x) = (0,0)\} \\ &= \{(x, x/2, -x/2) : x \in I\!R\} \\ &= \{x(1, 1/2, -1/2) : x \in I\!R\} \end{aligned}$$

Logo, $\{(1, 1/2, -1/2)\}$ é uma base para o núcleo de T e dim($N(T)$)=1.

b.
$$\begin{aligned} Im(T) &= \{(x+2z, 2y-x) : x,y,z \in I\!R\} \\ &= \{a(1,0) + b(0,1) : a,b \in I\!R\} \end{aligned}$$

Logo,

$$\{(1,0),(0,1)\}$$

é uma base para a imagem de T e dim($Im(T)$)=2.

c. Uma vez que $N(T) \neq (0,0,0)$, T não é injetora. Uma vez que $\dim(Im(T)) = \dim(I\!R^2)$ $(\dim(I\!R^2) = 2)$, T é sobrejetora.