Gabarito

Álgebra Linear: AD1 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2018/2

Tutores: Dionísio Henrique, Gabriel Thomaz e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

Considere as incógnitas:

X = quantidade de kg do produto X

Y = quantidade de kg do produto Y

Z = quantidade de kg do produto Z

Para montar o sistema relativo ao problema, vamos somar as quantidades de insumo A dos três produtos X, Y, Z e igualar a quantidade total (em gramas) de insumo A utilizada (linha L1 do sistema). Faremos o mesmo procedimento para o insumo B (linha L2 do sistema). Então multiplicaremos o preço de cada kg pelo seu respectivo produto e igualaremos ao valor total que a indústria arrecadou (linha L3 do sistema). Assim temos:

$$\begin{cases} X + 2Y + 4Z = 1400 \\ 2X + Y + 3Z = 1400 \\ X + 4Y + 5Z = 2100 \end{cases}$$

Utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss para resolvê-lo. Considere a seguinte matriz aumentada que representa este sistema :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1400 \\ 2 & 1 & 3 & 1400 \\ 1 & 4 & 5 & 2100 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$ e $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$ temos,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1400 \\ 0 & -3 & -5 & -1400 \\ 0 & 2 & 1 & 700 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \longleftarrow 3L_3 + 2L_2$ temos,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1400 \\ 0 & -3 & -5 & -1400 \\ 0 & 0 & -7 & -700 \end{bmatrix}$$

Assim, temos o seguinte sistema após a eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} X + 2Y + 4Z = 1400 \\ -3Y - 5Z = -1400 \\ -7Z = -700 \end{cases}$$

Por L_3 neste sistema, temos que $Z = 100$. Substituindo Z em L_2, temos que $-3Y = -5 * 100 = -1400 \Rightarrow Y = 300$. Agora, substituindo Z e Y em L_1, temos que $X = 400$. Logo, foram $400kg$ do produto X, $300kg$ do produto Y e $100kg$ do produto Z.

2^a Questão) Solução:

a) $proj_v u = \dfrac{uv}{||v||^2} v = \dfrac{(2,0,-1)(1,-1,1)}{(1,-1,1)(1,-1,1)}(1,-1,1) = \dfrac{1}{3}(1,-1,1) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{-1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

b) $d(u,v) = \sqrt{(1-2)^2 + (-1-0)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$.

c) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Consideremos

$$a(2,0,-1) + b(1,-1,1) = (2a+b, -b, -a+b) = (x,y,z)$$

Assim, temos:

$$\begin{cases} 2a + b = x \\ -b = y \\ -a + b = z \end{cases}$$

Considere a matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & x \\ 0 & -1 & y \\ -1 & 1 & z \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & x \\ 0 & -1 & y \\ 0 & 3 & 2z+x \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$ temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & x \\ 0 & -1 & y \\ 0 & 0 & 2z+x+3y \end{bmatrix}.$$

Por L_3 temos que $x = -3y - 2z$.

Logo $S = [u, v] = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y, z) = (-3y - 2z, y, z)\Big\}$.

d) $[u, v] = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, (-3y - 2z, y, z) = y(-3, 1, 0) + z(-2, 0, 1)\Big\}$

Logo uma base para este subespaço é $B = \{(-3, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$.

Tome $v_1 = (-3, 1, 0), v_2 = (-2, 0, 1)$.

Vamos ortogonalizar esta base usando o método de Gram-Schmidt.

Seja $w_1 = v_1 = (-3, 1, 0)$.

Temos que $w_2 = v_2 - \left(\dfrac{v_2 w_1}{w_1 w_1}\right) w_1$.

Logo

$$w_2 = (-2, 0, 1) - \left(\frac{(-2, 0, 1)(-3, 1, 0)}{(-3, 1, 0)(-3, 1, 0)}\right)(-3, 1, 0)$$

$$= (-2, 0, 1) - \left(\frac{6}{10}\right)(-3, 1, 0) =$$

$$= (-2, 0, 1) - \left(\frac{-18}{10}, \frac{6}{10}, 0\right) = \left(\frac{-2}{10}, \frac{-6}{10}, 1\right) = \left(\frac{-1}{5}, \frac{-3}{5}, 1\right)$$

Assim, temos que a base ortogonal é $\left\{(-3, 1, 0), \left(\dfrac{-1}{5}, \dfrac{-3}{5}, 1\right)\right\}$.

e) Veremos se w pode ser escrito como combinação linear de $(-3,1,0)$ e $(-2,0,1)$, que é base para S.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Então considere $a(-3,1,0)+b(-2,0,1) = (1,1,-2)$.

$$\begin{cases} -3a-2b=1 \\ a=1 \\ b=-2 \end{cases}$$

Substituindo L_2 e L_3 em L_1 temos que a igualdade é verdadeira : $-3.1-2.-2=1$.

Logo, $(1,1,-2) \in S$.

f)

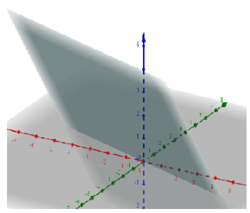

Figura 1: Espaço gerado

3^a Questão) Solução:

Seja $W = (x,y,z) : x+y+z=0$. Logo, $(x,y,z) \in W \Rightarrow (x,y,-x-y) = x(1,0,-1)+y(0,1,-1)$. Vamos verificar se os vetores do conjunto $\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ são LI's.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Os vetores serão linearmente independentes se $a(1,0,-1)+b(0,1,-1) = (0,0,0) \Leftrightarrow a, b = 0$. Deste modo, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ -a-b=0 \end{cases}$$

Temos por L_1 e L_2 que $a=b=0$. Logo o conjunto forma uma base para W. Porém, como, $(1,0,-1).(0,1,-1) = 1$, vemos que esta base não é ortogonal. Assim, vamos aplicar o processor de ortogonolização de Gram-Schmidt.

Seja $w_1 = (1, 0, -1)$. Temos que:

$$w_2 = (0, 1, -1) - \frac{(0, 1, -1).(1, 0, -1)}{(1, 0, -1).(1, 0, -1)}(1, 0, -1)$$
$$w_2 = (0, 1, -1) - \frac{1}{2}(1, 0, -1)$$
$$w_2 = (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$$

Logo, uma base ortognal para W é $\{(1, 0, -1), (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})\}$. Basta normalizarmos os vetores. Como $|w_1| = \sqrt{(1, 0, -1).(1, 0, -1)} = \sqrt{2}$ e $|w_2| = \sqrt{(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}).(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, temos que,

$$\frac{w_1}{|w_1|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\frac{w_2}{|w_2|} = (-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}, -\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}}) = (-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6})$$

Assim, uma base ortonormal para W é $\{(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6})$.

4^a Questão) Solução:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} -6 & 9 & -7 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & -6 \end{bmatrix} E = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -9 \\ -1 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4(i)

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & 8-0 \\ 0+14 & 24-56 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 14 & -32 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+24 & 0+28 \\ 4-48 & 0-56 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 28 \\ -44 & -56 \end{bmatrix}$$

$$AB - BA = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 14 & -32 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 24 & 28 \\ -44 & -56 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-24 & 8-28 \\ 14-(-44) & -32-(-56) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 & -20 \\ 58 & 24 \end{bmatrix}$$

4(ii)$2C - D = ?$

Só se pode somar ou subtrair matrizes de mesma ordem. Como a matriz $2C$ é do tipo 2×3 e a matriz D é do tipo 3×3, logo não é possível realizar essa operação.

4(iii)

$$D^T = \begin{bmatrix} -6 & 1 & -6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$2.D^T = \begin{bmatrix} -12 & 2 & -12 \\ 8 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & -12 \end{bmatrix}$$

$$E^T = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -6 \\ 9 & 0 & 0 \\ -9 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$3.E^T = \begin{bmatrix} 18 & -3 & -18 \\ 27 & 0 & 0 \\ -27 & -12 & -3 \end{bmatrix}$$

$$2.D^T - 3.E^T = \begin{bmatrix} -12-18 & 2-(-3) & -12-(-18) \\ 8-27 & 2-0 & 0-0 \\ 0-(-27) & 8-(-12) & -12+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 & 5 & 6 \\ -19 & 2 & 0 \\ 27 & 20 & -9 \end{bmatrix}$$

$$(2.D^T - 3.E^T)^T = \begin{bmatrix} -30 & -19 & 27 \\ 5 & 2 & 20 \\ 6 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

4(iv)

$$D^2 = D.D = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & -6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36+4+0 & -24+4+0 & 0+16+0 \\ -6+1-24 & 4+1+0 & 0+4+-24 \\ 36+0+36 & -24+0+0 & 0+0+36 \end{bmatrix}$$

$$D^2 = \begin{bmatrix} 40 & -20 & 16 \\ -29 & 5 & -20 \\ 72 & -24 & 36 \end{bmatrix}$$

$$D.E = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & -6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 6 & 9 & -9 \\ -1 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36-4+0 & -54+0+0 & 54-16+0 \\ 6-1-24 & 9-0+0 & -9-4-4 \\ -36-0+36 & -54+0+0 & 54+0+6 \end{bmatrix}$$

$$D.E = \begin{bmatrix} -40 & -54 & 38 \\ -19 & 9 & -17 \\ 0 & -54 & 60 \end{bmatrix}$$

$$D^2 - D.E = \begin{bmatrix} 40-(-40) & -20-(-54) & 16-38 \\ -29-(-19) & 5-9 & -20-(-17) \\ 72-0 & -24-(-54) & 36-60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 & 34 & -22 \\ -10 & -4 & -3 \\ 72 & 30 & -24 \end{bmatrix}$$

4(v)-

$$det(D) = [(-6.1.-6) + (1.0.0) + (-6.4.4)] - [(0.1.-6) + (4.0.-6) + (-6.1.4)]$$

$$det(D) = [36 + 0 - 96] - [0 + 0 - 24]$$

$$det(D) = -60 + 24$$

$$det(D) = -36$$

4(vi)- Como a matriz C não é uma matriz quadrada não é possível calcular o determinante.

5^a Questão) Solução:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 = 0 \qquad I \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \qquad II \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \qquad III \end{cases}$$

Da equação I temos:

$x_1 = 3x_2 - 6x_3 - x_4 \quad IV$

Da equação II temos:

$x_1 = -2x_2 - x_3 - x_4 \quad V$

Substituindo x_1 de IV em V temos:

$3x_2 - 6x_3 - x_4 = -2x_2 - x_3 - x_4$

$3x_2 + 2x_2 = -x_3 + 6x_3$

$5x_2 = 5x_3$

$x_2 = \frac{5x_3}{5}$

$x_2 = x_3 \quad VI$

Substituindo x_3 de VI em V temos:

$x_1 = -2x_2 - x_2 - x_4$

$x_1 = -3x_2 - x_4 \quad VII$

Substituindo x_1 de VII e x_3 de VI em III temos:

$4.(-3x_2 - x_4) + 3x_2 + 4x_2 + x_4 = 0$

$-12x_2 - 4x_4 + 7x_2 + x_4 = 0$

$-5x_2 - 3x_4 = 0$

$-3x_4 = 5x_2$

$x_4 = -\frac{5x_2}{3} \quad VIII$

Substituindo x_4 de VIII em VII temos:

$x_1 = -3x_2 - \left(-\frac{5x_2}{3}\right)$

$x_1 = -3x_2 + \frac{5x_2}{3}$

$x_1 = \frac{-9x_2+5x_2}{3}$

$x_1 = -\frac{4x_2}{3}$

O sistema é possível e indeterminado e o conjunto solução do sistema é dado por:

$S = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^3 / x_1 = -\frac{4x_2}{3}; x_2; x_3 = x_2; x_4 = -\frac{5x_2}{3}\right\}$

Fazendo $x_2 = 1$ obtemos uma base $(-\frac{4}{3}, 1, 1, -\frac{5}{3})$.

Como só temos uma incógnita na base do espaço solução, então $dimS = 1$.