Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP1 - Segundo Semestre de 2008
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

1.(2.5) Considere o conjunto $B = \{v_1, v_2\}$, onde $v_1 = (1,2,3)$ e $v_2 = (-5,1,1)$.

a. (0.5) Calcule o módulo de v_1.
Solução:
$|v_1| = \sqrt{(1^2+2^2+3^2)} = \sqrt{(1+4+9)} = \sqrt{14}$.

b. (0.5) Calcule a distância $d(v_1, v_2) = |v_1 - v_2|$
Solução:
$d(v_1, v_2) = \sqrt{(-5-1)^2+(1-2)^2+(1-3)^2} = \sqrt{36+1+4} = \sqrt{41}$.

c. (0.5) Calcule o ângulo formado por v_1 e v_2.
Solução:
Seja θ o ângulo entre os vetores v_1 e v_2.
$cos(\theta) = \frac{v_1.v_2}{|v_1|.|v_2|}$.
Do item (a), $|v_1| = \sqrt{14}$.
$|v_2| = \sqrt{(-5)^2+1^2+1^2)} = \sqrt{(25+1+1)} = \sqrt{27}$.
$v_1.v_2 = 1 \times (-5) + 2 \times 1 + 3 \times 1 = -5+2+3 = 0$.
$cos(\theta) = \frac{0}{\sqrt{14}.\sqrt{27}} = 0 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$.

d. (1.0) Determine o espaço gerado pelos vetores v_1 e v_2 de B.
Solução:

$v_1 = (1,2,3)$ e $v_2 = (-5,1,1)$. Sejam $a, b \in \Re$.
$[v_1, v_2] = a(1,2,3) + b(-5,1,1) = (a-5b, 2a+b, 3a+b) = (x,y,z)$.
Assim, temos o seguinte sistema linear:

$$a - 5b = x \qquad (1)$$
$$2a + b = y \qquad (2)$$
$$3a + b = z \qquad (3)$$

Fazendo $(2) \leftarrow -(2) + 2 \times (1)$ e $(3) \leftarrow -(3) + 3 \times (1)$, chegamos ao seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} a - 5b &= x \\ -11b &= 2x - y \\ -16b &= 3x - z \end{aligned}$$

Da terceira equação temos que $b = \frac{-3x+z}{16}$. Da segunda equação temos que $b = \frac{-2x+y}{11}$. Igualando estes dois valores de b temos:
$\frac{-3x+z}{16} = \frac{-2x+y}{11} \Longrightarrow -33x + 11z = -32x + 16y \Longrightarrow x = -16y + 11z$
Logo $[v_1, v_2] = \{(x,y,z) \in \Re^3 / x = -16y + 11z\}$.

2.(2.0) (a) Sejam $V = M(n,n)$ o conjunto de matrizes quadradas de ordem n, B uma matriz fixa de V e $S = \{A \in M(n,n) | AB = 0\}$, isto é, S é o conjunto das matrizes que, multiplicadas por B, têm como resultado a matriz nula. Verifique se S é ou não um subspaço vetorial de $M(n,n)$.

Solução:

Sejam $A_1 \in S$, $A_2 \in S$, $C = A_1 + A_2$ e $D = \alpha A_1$, onde $\alpha \in I\!R$.

Como $CB = (A_1 + A_2)B = A_1 B + A_2 B = 0 + 0 = 0$, então $C \in S$.

Como $DB = \alpha A_1 B = \alpha 0 = 0$, então $D \in S$.

Logo, S é subspaço vetorial de $M(n,n)$.

(b) Considere a reta $S = \{(x, x+3) | x \in I\!R\}$. Verifique se a reta é um subspaço vetorial de $I\!R^2$.

Solução:

Como $(0,3) \in S$, $(1,4) \in S$ e $(0,3) + (1,4) = (1,7) \notin S$, então S não é um subspaço vetorial.

3.(1.5) Seja $v_1 = (1, -3, 2)$ e $v_2 = (2, 4, -1)$, dois vetores em $I\!R^3$. Determinar o valor de k para que o vetor $u = (-1, k, -7)$ seja combinação linear de v_1 e v_2.

Solução:

Devemos ter $u = av_1 + bv_2$, para $a, b \in I\!R$, ou

$$(-1, k, -7) = a(1, -3, 2) + b(2, 4, -1)$$

De onde vem o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & 2b & = & -1 \\ -3a & + & 4b & = & k \\ 2a & - & b & = & -7 \end{array}\right.$$

o qual tem solução apenas se $k = 13$, já que das linhas 1 e 3, obtemos $a = -3$ e $b = 1$.

4.(2.0) Determinar uma base que não seja ortogonal do seguinte subspaço vetorial do $I\!R^3$.

$$S = \{(x, y, z) \in I\!R^3 | x + y - z = 0\}$$

Em seguida, aplicar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt a base, para obter uma nova base ortonormal para S.

Solução:

Observemos que dim$S$=2 e, portanto, uma base de S tem dois vetores. Isolando x na igualdade $x + y - z = 0$, temos $x = -y + z$. Se fizermos (1) $y = 0$ e $z = 1$, (2) $y = 1$ e $z = 0$, obteremos os vetores $v_1 = (1, 0, 1)$ e $v_2 = (-1, 1, 0)$, sendo $B = \{v_1, v_2\}$ uma base de S, pois v_1 e v_2 são LI. Como $< v_1, v_2 >= -1$, B não é ortogonal. Procuremos uma base $B' = \{u_1, u_2\}$ que seja ortonormal aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{(1, 0, 1)}{\sqrt{2}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$w_2 = v_2 - < v_2, u_1 > u_1 = (-1, 1, 0) - (-\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$w_2 = (-1, 1, 0) - (-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$$

$$u_2 = \frac{w_2}{|w_2|} = \frac{(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$$

Logo, $B' = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})\}$ é uma base ortonormal de S.

5.(2.0) Determinar uma base e a dimensão do espaço de soluções do sistema homogêneo

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & - & 4z & + & 3t & = & 0 \\ x & + & 2y & - & 2z & + & 2t & = & 0 \\ 2x & + & 4y & - & 2z & + & 3t & = & 0 \end{array}\right.$$

Solução: Fazendo $linha_2 := linha_2 - linha_1$, $linha_3 := linha_3 - 2linha_1$ e, posteriormente, $linha_3 := linha_3 - 3linha_2$ temos o seguinte sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & - & 4z & + & 3t & = & 0 \\ & & & & 2z & - & t & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Do qual, obtemos da segunda linha $t = 2z$ e , substituindo a igualdade na primeira linha, $x = -2y - 2z$. Logo, o conjunto-solução do sistema é:

$$S = \{(x, y, z, t) | t = 2z, x = -2y - 2z\},$$

que é um subspaço vetorial de $I\!R^4$. Tendo em vista serem duas as variáveis livres (y e z), conclui-se que dim$S$=2. Logo, qualquer subconjunto de S com dois vetores LI, forma uma base de S. Façamos (1) $y = 1$ e $z = 0$, (2) $y = 0$ e $z = 1$, para obter os vetores $v_1 = (-2, 1, 0, 0)$ e $v_2 = (-2, 0, 1, 2)$. O conjunto $\{v_1, v_2\}$ é uma base de S.