# Gabarito

# Álgebra Linear: AD1 - CEDERJ

## Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2013.1

## Tutores: Cristina Lopes e Rodrigo Olimpio

$1^a$ Questão) Solução:

a) $\sqrt{(2-3)^2+(-3-1)^2+(-1-0)^2+(-2-1)^2} = \sqrt{1+16+1-9} = \sqrt{27}$.

b) $cos\theta = \dfrac{vw}{|v||w|} = \dfrac{6-3+0-2}{\sqrt{18}\sqrt{11}} = \dfrac{1}{\sqrt{198}} = \dfrac{\sqrt{198}}{198} = \dfrac{3\sqrt{22}}{198} = \dfrac{\sqrt{22}}{66}$.

c) Sejam $a, b$ escalares reais. Sabendo que os vetores são transpostos, por conveniência, trabalharemos com os vetores linha.

Assim, temos: $(3,1,0,1) = a(1,-1,1,-1) + b(2,-3,-1,-2)$

Chegamos ao sistema:

$$\begin{cases} a+2b=3 \\ -a-3b=1 \\ a-b=0 \\ -a-2b=1 \end{cases}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ , $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ , $L_4 \leftarrow L_4 + L_1$ temos

$$\begin{cases} a+2b=3 \\ -b=4 \\ -3b=3 \\ 0=4 \end{cases}$$

Na última igualdade, que não é verdadeira, constatamos que o sistema é impossível, ou seja, não tem solução.

Logo $w$ não é linearmente dependente de $\{u, v\}$.

d) Sejam $a, b, c$ escalares reais. Considere um vetor genérico do $\mathbb{R}^4 : (x, y, z, w)$.

$a(1, -1, 1, -1) + b(2, -3, -1, -2) + c(3, 1, 0, 1) = (x, y, z, w)$

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = x \\ -a - 3b + c = y \\ a - b = z \\ -a - 2b + c = w \end{cases}$$

Usando o método de eliminação de Gauss com a matriz aumentada do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ -1 & -3 & 1 & y \\ 1 & -1 & 0 & z \\ -1 & -2 & 1 & w \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ , $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ , $L_4 \leftarrow L_4 + L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & -1 & 4 & x + y \\ 0 & -3 & -3 & z - x \\ 0 & 0 & 4 & x + w \end{bmatrix}$$

Assim temos:

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = x \\ -b + 4c = x + y \\ -3b - 3c = z - x \\ 4c = x + w \end{cases}$$

Desse modo, observando as linhas do sistema e tentando colocar uma coordenada dependendo de outras, por $L_4$, temos que $4c = x+w$. Por $L_2$, temos que $4c = x+y+b$. Igualando estes dois valores, temos: $x + w = x + y + b \Longrightarrow b = w - y$. Logo temos que $c = \frac{x+w}{4}, b = w - y$.

Substituindo estes valores em $L_3$, temos:

$-3(w-y)-3(\frac{x+w}{4}) = z-x \Longrightarrow -3w+3y-(\frac{3x+3w}{4}) = z-x \Longrightarrow -12w+12y-3x-3w = 4z-4x.$

Desta última igualdade, temos que $x = -12y+4z+15w$. Portanto, temos que:

$S = \{(x,y,z,w)/x = -12y+4z+15w\}.$

e) Sejam $a, b$ escalares reais. Assim, temos:

$a(1,-1,1,-1)+b(2,-3,-1,-2) = (x,y,z,w).$

Chegamos ao sistema:

$$\begin{cases} a+2b = x \\ -a-3b = y \\ a-b = z \\ -a-2b = w \end{cases}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ , $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ , $L_4 \leftarrow L_4 + L_1$ temos

Usando o método de eliminação de Gauss com a matriz aumentada do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & -3 & y \\ 1 & -1 & z \\ -1 & -2 & w \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ , $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ , $L_4 \leftarrow L_4 + L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & & x \\ 0 & -1 & x+y & \\ 0 & -3 & z-x & \\ 0 & 0 & x+w & \end{bmatrix}$$

Assim temos:

$$\begin{cases} a+2b = x \\ -b = x+y \\ -3b = z-x \\ 0 = x+w \end{cases}$$

Temos , por $L_4$, que $x = -w$. Por $L_3$, temos que $b = \frac{x-z}{3}$ e por $L_2$, $b = -x - y$. Igualando os dois valores de $b$, encontramos que $x = \dfrac{z-3y}{4}$.

Logo, podemos encontrar uma base: $(x, y, z, w) = (\dfrac{-3y+z}{4}, y, z, \dfrac{3y-z}{4}) = y(\dfrac{-3}{4}, 1, 0, \dfrac{3}{4}) + z(\dfrac{1}{4}, 0, 1, \dfrac{-1}{4})$.

Ortogonalizando pelo método de Gram Schmidt:

Seja $w_1 = v_1 = \left(\dfrac{-3}{4}, 1, 0, \dfrac{3}{4}\right)$.

Temos que $w_2 = v_2 - proj_{w1}v_2 = v_2 - \left(\frac{v_2 w_1}{w_1 w_1}\right) w_1$

Logo

$$w_2 = \left(\frac{1}{4}, 0, 1, \frac{-1}{4}\right) - \left(\frac{-3}{17}\right)\left(\frac{-3}{4}, 1, 0, \frac{3}{4}\right).$$

$$= \left(\frac{1}{4}, 0, 1, \frac{-1}{4}\right) - \left(\frac{9}{68}, \frac{-3}{17}, 0, \frac{-9}{68}\right) = \left(\frac{8}{68}, \frac{3}{17}, 1, \frac{-8}{68}\right) = \left(\frac{2}{17}, \frac{3}{17}, 1, \frac{-2}{17}\right).$$

Considere o vetor $w = (3, 1, 0, 1)$ e a base $(w1, w2)$ encontrada pelo método de Gram Schmidt. Temos que:

$proj_S w = (w.w_1)w_1 + (w.w_2)w_2 =$

$\left((3,1,0,1)\left(\dfrac{-3}{4}, 1, 0, \dfrac{3}{4}\right)\right)(\dfrac{-3}{4}, 1, 0, \dfrac{3}{4}) + \left((3,1,0,1)(\dfrac{2}{17}, \dfrac{3}{17}, 1, \dfrac{-2}{17})\right)\left(\dfrac{2}{17}, \dfrac{3}{17}, 1, \dfrac{-2}{17}\right)$

$= \left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{-3}{4}, 1, 0, \dfrac{3}{4}\right) + \left(\dfrac{7}{17}\right)\left(\dfrac{2}{17}, \dfrac{3}{17}, 1, \dfrac{-2}{17}\right) = \left(\dfrac{3}{8}, \dfrac{-1}{2}, 0, \dfrac{-3}{8}\right) + \left(\dfrac{14}{289}, \dfrac{21}{289}, \dfrac{7}{17}, \dfrac{-14}{289}\right) = \left(\dfrac{979}{2312}, \dfrac{-247}{578}, \dfrac{7}{17}, \dfrac{-979}{2312}\right)$.

f) Da letra d) temos:

$S = \{(x, y, z, w) = (-12y + 4z + 15w, y, z, w) = y(-12, 1, 0, 0) + z(4, 0, 1, 0) + w(15, 0, 0, 1)\}$

Vamos usar Gram Schmdit para ortogonalizar a base:

Seja $w_1 = v_1 = (-12, 1, 0, 0)$.

Temos que $w_2 == v_2 - \left(\frac{v_2 w_1}{w_1 w_1}\right) w_1$ :

$$w_2 = (4,0,1,0) - \left(\frac{-48}{145}\right)(-12,1,0,0)\,.$$

$$= (4,0,1,0) - \left(\frac{576}{145}, \frac{-48}{145}, 0, 0\right) = \left(\frac{4}{145}, \frac{48}{145}, 1, 0\right).$$

Temos que $w_3 = v_3 - \left(\frac{v_3 w_2}{w_2 w_2}\right) w_2 - \left(\frac{v_3 w_1}{w_1 w_1}\right) w_1$ :

$$w_2 = (15,0,0,1) - \left(\frac{-1740}{4669}\right)\left(\frac{4}{145}, \frac{48}{145}, 1, 0\right) - \left(\frac{-36}{29}\right)(-12,1,0,0)\,.$$

$$= (15,0,0,1) - \left(\frac{6960}{677005}, \frac{83520}{677005}, \frac{1740}{4669}, 0\right) - \left(\frac{432}{29}, \frac{-36}{29}, 0, 0\right) = \left(\frac{63075}{677005}, \frac{756900}{677005}, \frac{-1740}{4669}, 1\right)$$

$$= \left(\frac{12615}{135401}, \frac{151380}{135401}, \frac{-1740}{4669}, 1\right).$$

Logo, uma base ortogonal para S é:
$S = \{(-12,1,0,0)\,, \left(\frac{4}{145}, \frac{48}{145}, 1, 0\right), \left(\frac{12615}{135401}, \frac{151380}{135401}, \frac{-1740}{4669}, 1\right)\}.$

$2^a$ Questão) Solução:

Para mostrar que $P_2$ é combinação linear de $P_1$ e $P_3$, considere $a$, $b$ escalares reais tais que:

$$aP_1 + bP_3 = P_2$$

$$a(2x+5) + b(2x^3 - 4x - 1) = -2x^2 + x - 5$$

Somando os coeficientes dos termos semelhantes, temos:

$$2bx^3 + (2a - 4b)x + (5a - b) = -2x^2 + x - 5$$

Igualando os termos semelhantes dos dois lados da igualdade obtemos:

$$\begin{aligned}
2b &= 0 &&\Longrightarrow \quad b = 0\\
2a - 4b &= 1 &&\Longrightarrow \quad a = 1/2\\
5a - b &= -5 &&\Longrightarrow \quad a = -1
\end{aligned}$$

Logo, $P_2$ não é combinação linear de $P_1$ e $P_3$, já que os valores do escalar $a$ são diferentes.

$3^a$ Questão) Solução:

i) Para que os vetores $u$ e $v$ sejam ortogonais é necessário que $u.v = 0$.

$$(1, -2, 1)^t.(k^3, k, k^2)^t = 0$$

$$k^3 - 2k + k^2 = 0 \Longrightarrow k(k^2 + k - 2) = 0$$

Isso implica que $k = 0$ ou $k^2 + k - 2 = 0$. Da segunda equação, obtemos que $k = -1$ ou $k = 2$.

ii)Para que os vetores $u$ e $v$ sejam paralelos é necessário que as coordenadas de $u$ e $v$ sejam proporcionais.

$$\frac{k^3}{1} = \frac{k}{-2} = \frac{k^2}{1}$$

Da primeira igualdade temos $\frac{k^3}{1} = \frac{k}{-2} \Longrightarrow -2k^3 = k \Longrightarrow k = \sqrt{\frac{-1}{2}}$, que não existe em $\mathbb{R}$. Da segunda igualdade, temos $\frac{k}{-2} = k^2 \Longrightarrow k = \frac{-1}{2}$. Se fizermos a última proporção $k^3 = k^2$, obtemos $k = 0$ ou $k = 1$.
Assim, as coordenadas de $u$ e $v$ não são proporcionais. Logo, os vetores só serão paralelos para $k = 0$.

$4^a$ Questão) Solução:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

a)

$$A + B.C = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A + B.C = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4-6+5 & 8-8+6 \\ 0+6+15 & 0+8+18 \end{bmatrix}$$

$$A + B.C = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 21 & 26 \end{bmatrix}$$

$$A + B.C = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 19 & 27 \end{bmatrix}$$

b)

$$B^t.B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16+0 & -8+0 & 4+0 \\ -8+0 & 4+4 & -2+6 \\ 4+0 & -2+6 & 1+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -8 & 4 \\ -8 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

c)

$$B - C^t = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -4 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

d)

$$B^t.C^t = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+0 & 12+0 & 20+0 \\ -2+4 & -6+8 & -10+12 \\ 1+6 & 3+12 & 5+18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 20 \\ 2 & 2 & 2 \\ 7 & 15 & 23 \end{bmatrix}$$

$$C.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+0 & -2+4 & 1+6 \\ 12+0 & -6+8 & 3+12 \\ 20+0 & -10+12 & 5+18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 12 & 2 & 15 \\ 20 & 2 & 23 \end{bmatrix}$$

$$(C.B)^t = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 20 \\ 2 & 2 & 2 \\ 7 & 15 & 23 \end{bmatrix}$$

$$B^t.C^t - (C.B)^t = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 20 \\ 2 & 2 & 2 \\ 7 & 15 & 23 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 12 & 20 \\ 2 & 2 & 2 \\ 7 & 15 & 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$5^a$ Questão) Solução:

Denotando por $X$, $Y$ e $Z$ os três amigos que usam o computador todas as noites, considere o sistema

$$\begin{cases} 2X + Z = Y + 2 \\ X + 4Z = 3 + 2Y \\ X + 9Z = Y + 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X - Y + Z = 2 \\ X - 2Y + 4Z = 3 \\ X - Y + 9Z = 10 \end{cases} \tag{1}$$

a) Método de Gauss-Jordan

O sistema linear acima pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$1^a$ Etapa) Formaremos a matriz aumentada $[A|b]$. A matriz aumentada é dada por:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 1 & -2 & 4 & | & 3 \\ 1 & -1 & 9 & | & 10 \end{bmatrix}$$

$2^a$ Etapa) Transformaremos a matriz aumentada à sua forma escada reduzida por linhas, usando operações elementares em suas linhas.

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 1 & -2 & 4 & | & 3 \\ 1 & -1 & 9 & | & 10 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1$ , $L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1$, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 8 & | & 8 \end{array}\right]$$

Multiplicando $L_2$ por $-1$, encontramos

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 8 & | & 8 \end{array}\right]$$

Multiplicando $L_3$ por $-1/8$, encontramos

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_1 \leftrightarrow L_1 + L_2$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 0 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

E finalmente, fazendo $L_1 \leftrightarrow L_1 + 2L_3$ , $L_2 \leftrightarrow L_2 + 3L_3$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

O sistema linear correspondente à matriz (2) na forma escada reduzida por linhas é dado por:

$$\begin{cases} X + 0Y + 0Z & = & 3 \\ 0X + Y + 0Z & = & 2 \\ 0X + 0Y + Z & = 1 \end{cases} \tag{3}$$

e tem exatamente as mesmas soluções do sistema original (1).

$3^a$ Etapa) Resolver o sistema linear obtido na Etapa 2.

Assim, temos:

$$\begin{cases} X = 3 \\ \\ Y = 2 \\ \\ Z = 1 \end{cases} \tag{4}$$

que é a solução do sistema linear dado (1).

Logo, o amigo $X$ usa 3 horas de computador, o amigo $Y$ usa 2 horas e o amigo $Z$ usa 1 hora, totalizando 6 horas $(3 + 2 + 1 = 6)$.