Álgebra Linear

Aula 1: Vetores

Mauro Rincon

Márcia Fampa

Informações sobre o curso

- Bibliografia
  - Introdução a Álgebra Linear com Aplicações
    6ª edição
    Editora: LTC
    Autor: Bernard Kolman

1.1 - Vetores

- Grandezas Físicas Escalares
  - Massa
  - Pressão
- Grandezas Físicas Vetoriais
  - Velocidade
  - Força
  - Deslocamento

1.1 - Vetores

- Notação de Vetores: $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}$.

- Todos os segmentos orientados que têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento são representantes de um mesmo vetor.

- Por exemplo: No paralelogramo os segmentos orientados AB e CD determinam o mesmo vetor:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

1.1 - Vetores

Quando escrevemos $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$, estamos afirmando que o vetor $\mathbf{v}$ é determinado pelo segmento orientado AB de origem A e extremidade B. Porém, qualquer outro segmento de mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido de AB representa também o vetor $\mathbf{v}$.

1.1 - Vetores

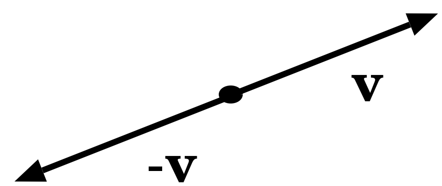
- O comprimento ou módulo do vetor $\mathbf{v}$ é representado por $|\mathbf{v}|$.

- **Vetor Nulo**
  - Qualquer ponto do espaço é representante do vetor zero (ou vetor nulo), que é indicado por $\mathbf{0}$.

1.1 - Vetores

Vetor Simétrico (ou oposto)

- A cada vetor não nulo $\mathbf{v}$ corresponde um vetor simétrico $(-\mathbf{v})$, que tem o mesmo módulo, a mesma direção, porém com sentido oposto de $\mathbf{v}$.



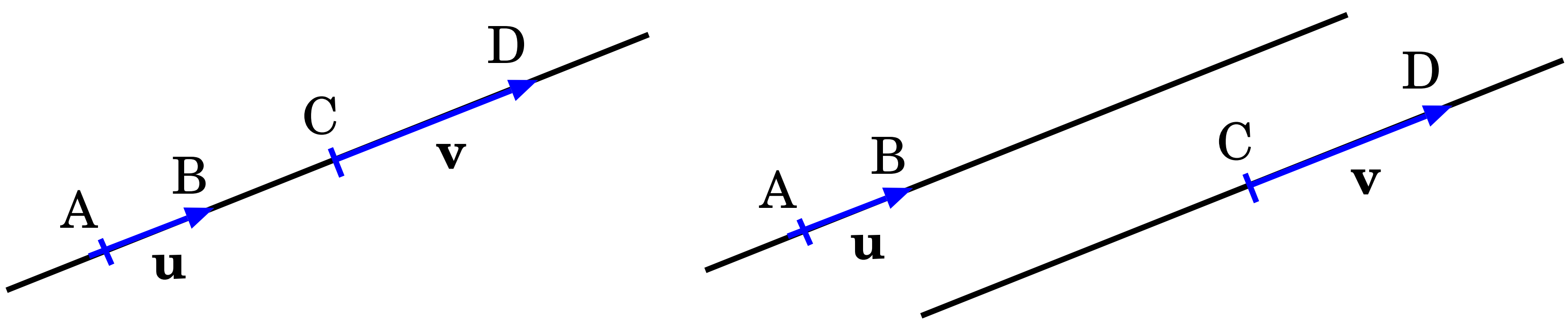
Vetor Unitário

- Um vetor $\mathbf{v}$ é unitário se o seu comprimento é um, ou seja $|\mathbf{v}| = 1$.

1.1 - Vetores

Vetores Colineares

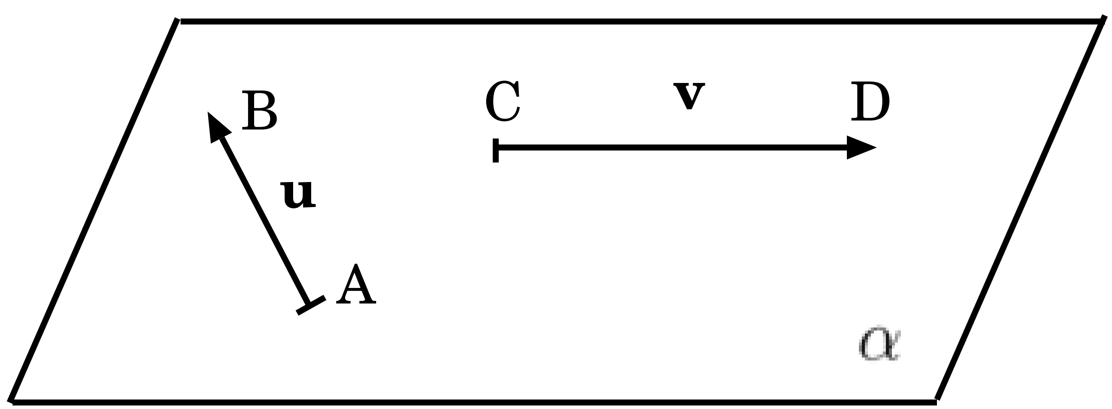
- Dois vetores **u** e **v** são chamados de colineares se tiverem a mesma direção, ou seja, **u** e **v** são colineares se tiverem representantes AB e CD pertencentes a uma mesma reta ou a retas paralelas.



1.1 - Vetores

Vetores Coplanares

- Quando os vetores não nulos **u** e **v** possuem representantes AB e CD pertencentes a um plano, diz-se que eles são coplanares.

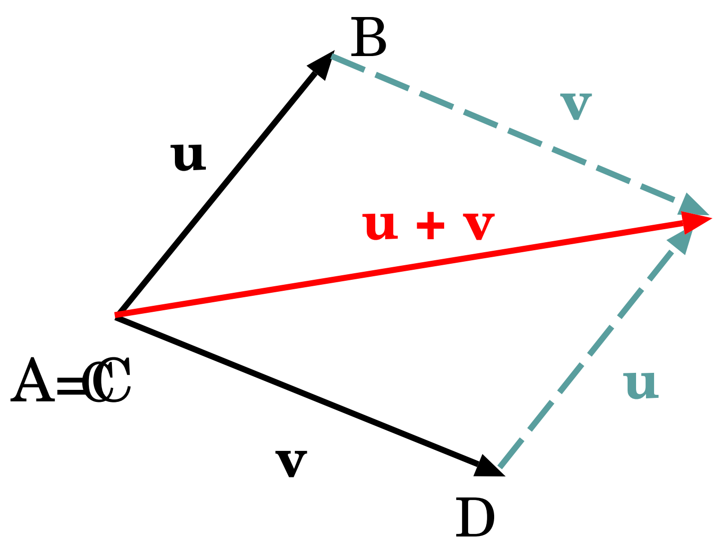


1.2 - Operações com vetores

1.2.1 - Adição de vetores

Regra do Paralelogramo

- Uma forma prática de calcular a soma entre dois vetores é construindo um paralelogramo.



Adição Voltar

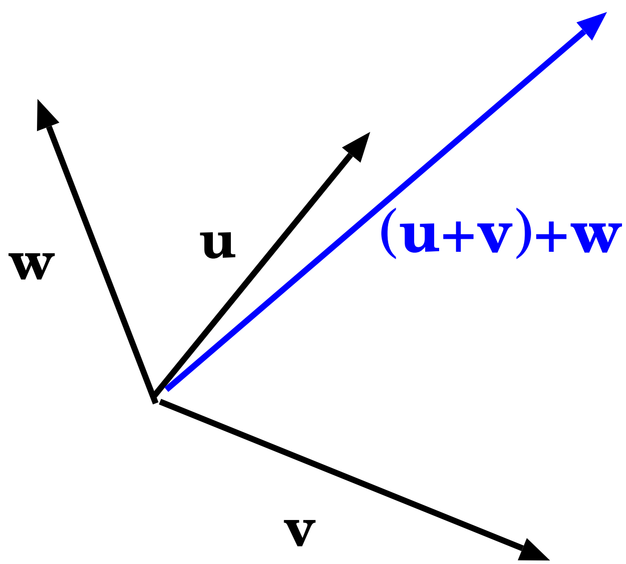
- Note que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.

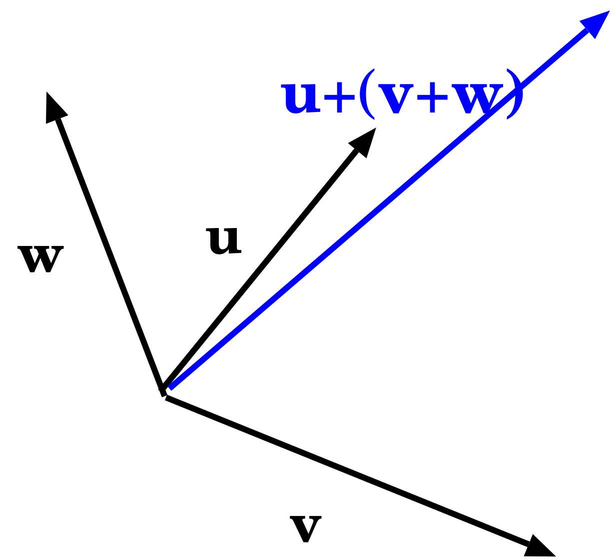
1.2 - Operações com vetores

1.2.1 - Adição de vetores

Propriedades da Adição

1) Associativa: $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$





Adição Voltar

1.2 - Operações com vetores

1.2.1 - Adição de vetores

Propriedades da Adição

2) Comutativa: $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

3) Existe um único vetor nulo $\mathbf{0}$ tal que, para todo vetor $\mathbf{v}$, se tem:

$$\mathbf{v}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{v}=\mathbf{v}$$

4) Para todo vetor $\mathbf{v}$, existe um único vetor $-\mathbf{v}$ (vetor oposto de $\mathbf{v}$) tal que:

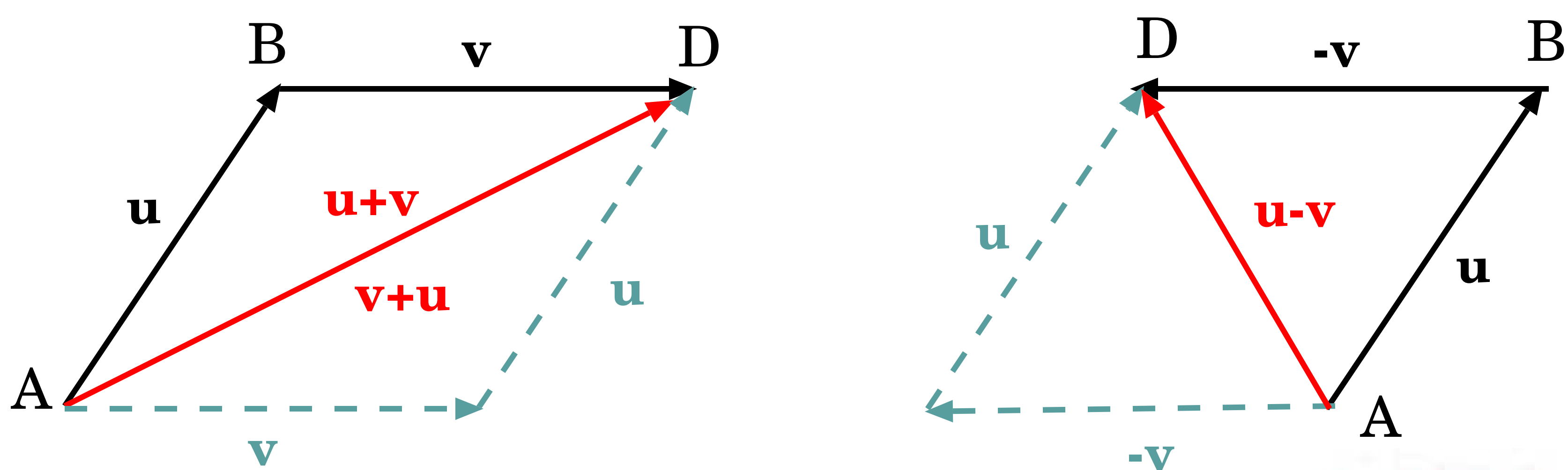
$$\mathbf{v}+(-\mathbf{v})=-\mathbf{v}+\mathbf{v}=\mathbf{0}$$

1.2 - Operações com vetores

1.2.1 - Adição de vetores

Observação

- Diferença entre dois vetores: Dados dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ então a diferença entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é dado pela soma: $\mathbf{u} + (-\mathbf{v})$. Por exemplo:



1.2 - Operações com vetores

1.2.2 - Multiplicação de um número real por um vetor

Dado um vetor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e um número real k, chama-se produto do número real $k \neq 0$ pelo vetor $\mathbf{v}$. O vetor $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$, tal que:

a) <u>Módulo</u>: $|\mathbf{u}| = |k\mathbf{v}| = |k| \cdot |\mathbf{v}|$.

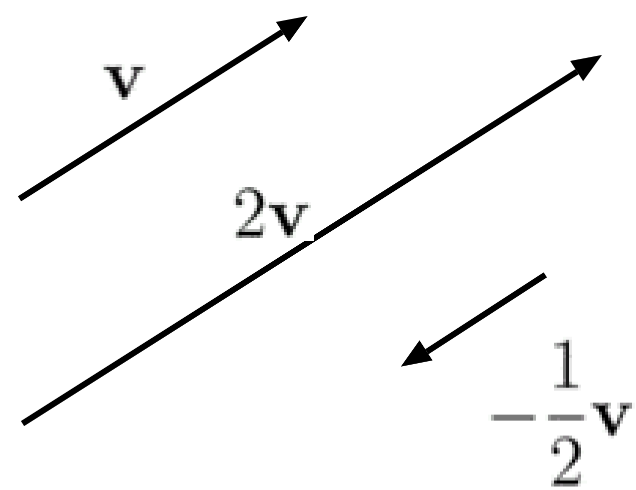
b) <u>Direção</u>: $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ tem a mesma direção.

c) <u>Sentido</u>: Se $k > 0$ então $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ tem o mesmo sentido. Se $k < 0$ então $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ tem sentidos contrários.

1.2 - Operações com vetores

1.2.2 - Multiplicação de um número real por um vetor

- Observação: Se $k = 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ então $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
  Se $k = -1$ então $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$ é o vetor simétrico.
  Por exemplo:



1.2 - Operações com vetores

1.2.2 - Multiplicação de um número real por um vetor

Propriedades da multiplicação por um número real

Sejam **u** e **v** dois vetores quaisquer e a e b números reais. Então:

a) $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$

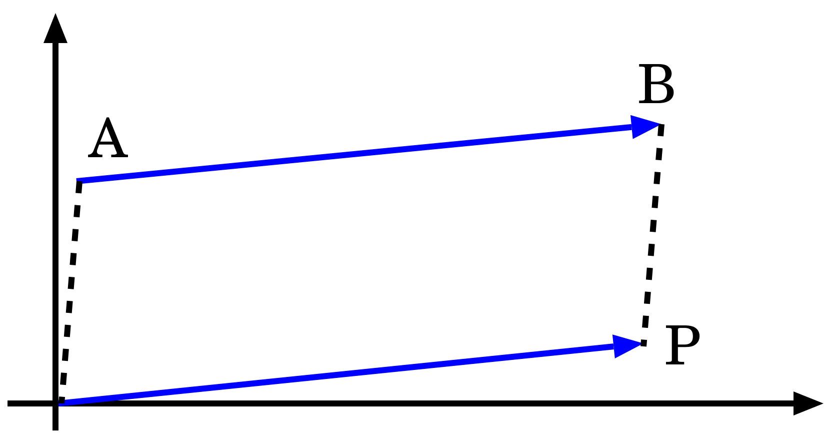
b) $(a+b)(\mathbf{u}) = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$ (propriedade distributiva)

c) $a(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$

d) $1(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$

1.3 - Vetores no $\mathbb{R}^2$

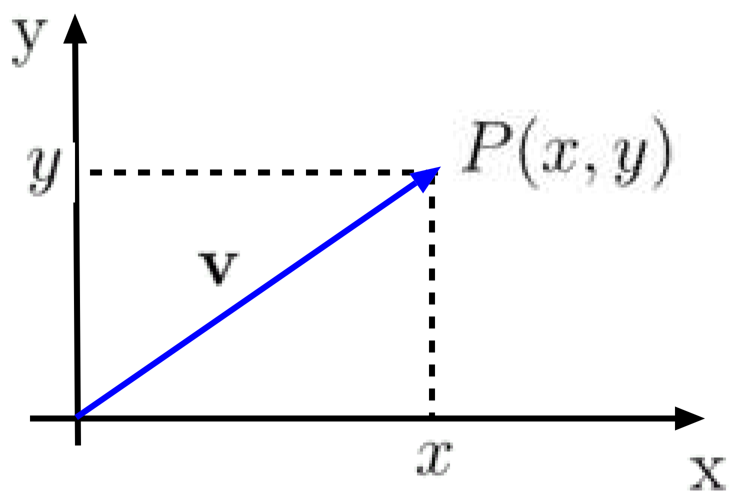
O conjunto:
$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$
é interpretado geometricamente como sendo o plano cartesiano XOY.
Todo vetor $\overrightarrow{AB}$ considerado neste plano tem sempre um representante, cuja origem é a origem do sistema.



1.3 - Vetores no $\mathbb{R}^2$

Vetores representados por segmentos de retas orientados com origem na origem do sistema

- Cada vetor do plano é determinado pelo ponto extremo do segmento. Desta forma, o ponto $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$ está associado ao vetor $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ e escreve-se $\mathbf{v} = (x, y)$.



1.3 - Vetores no $\mathbb{R}^2$

Vetores representados por segmentos de retas orientados com origem na origem do sistema

- A origem do sistema $O(0,0)$ é o vetor nulo.
- O vetor simétrico de $\mathbf{v} = (x, y)$ é o vetor $-\mathbf{v} = (-x, -y)$.

1.4 - Igualdade e Operações

Igualdade

- Dois vetores $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$, são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Escreve-se $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.
- Exemplos:

1) Os vetores $\mathbf{u} = (1, 2)$ e $\mathbf{v} = (1, 2)$ são iguais.

2) Sejam $\mathbf{u} = (x - 1, 3)$ e $\mathbf{v} = (3, 2y - 1)$. Determine x e y de tal forma que $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Usando a definição:

$$x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$$
$$3 = 2y - 1 \Leftrightarrow y = 2$$

1.4 - Igualdade e Operações

Operações

- Sejam os vetores $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Define-se:

a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

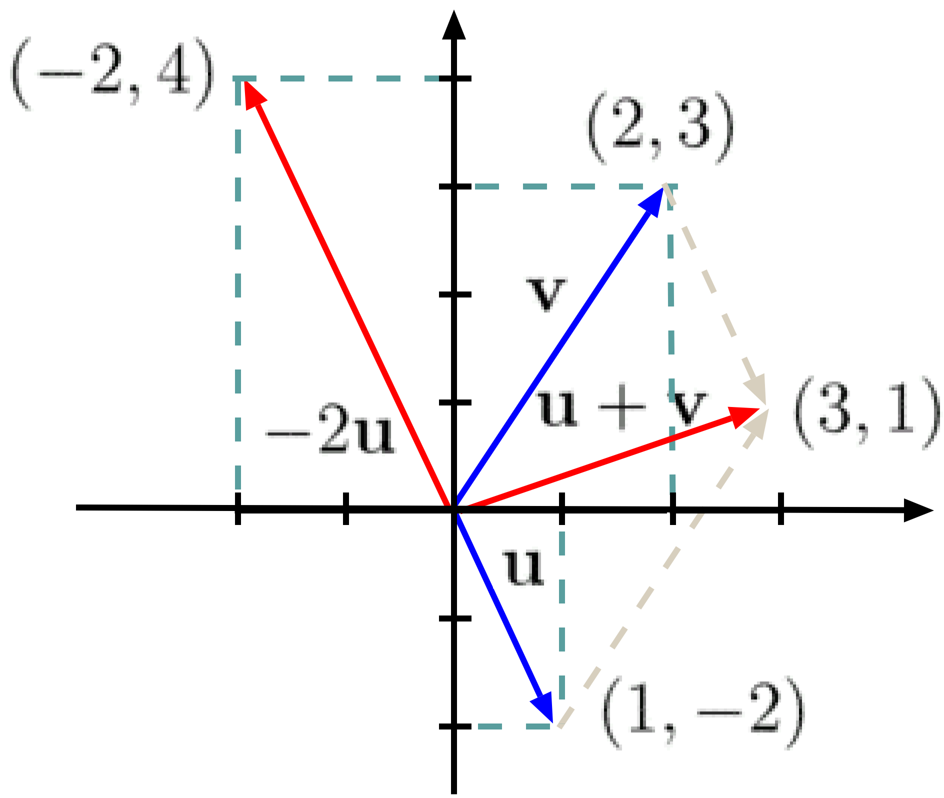
b) $\alpha\mathbf{u} = \alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1)$

1.4 - Igualdade e Operações

Operações

- Exemplo: Sejam $\mathbf{u} = (1, -2)$ e $\mathbf{v} = (2, 3)$.

Então: $\begin{cases} \mathbf{u} + \mathbf{v} = (1 + 2, -2 + 3) = (3, 1) \\ -2\mathbf{u} = -2(1, -2) = (-2, 4) \end{cases}$



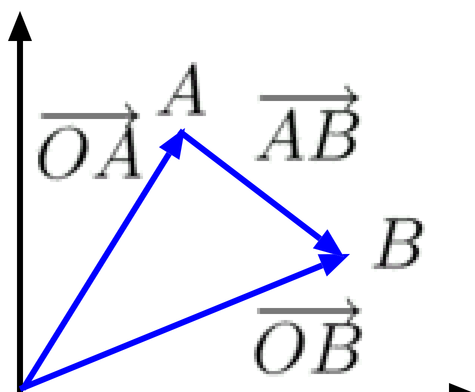
1.5 - Vetor definido por dois pontos

Consideremos o vetor $\overrightarrow{AB}$ de origem no ponto $A(x_1, y_1)$ e extremidade $B(x_2, y_2)$. Então o vetor pode ser escrito na forma:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Logo:

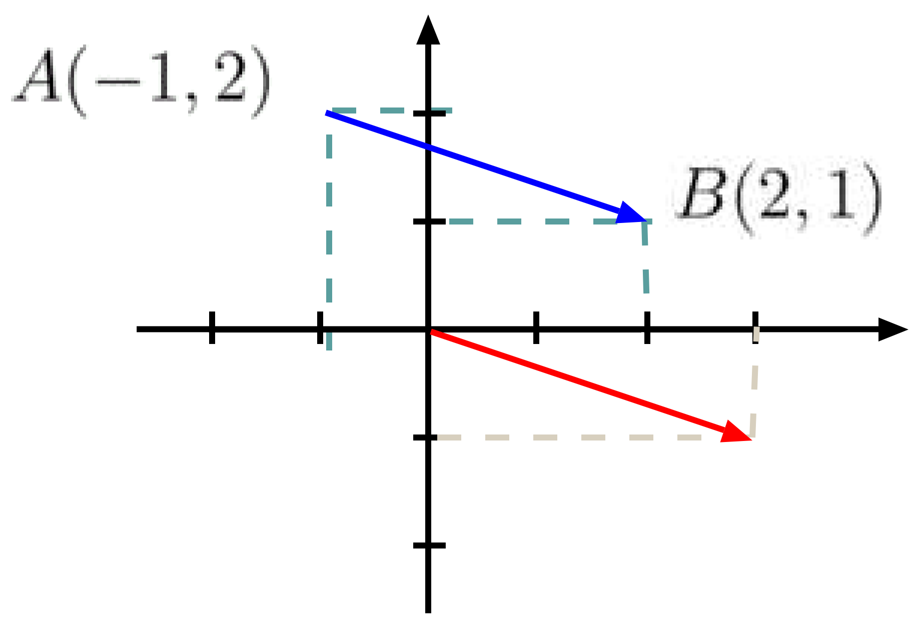
$$\overrightarrow{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$



1.5 - Vetor definido por dois pontos

- Por exemplo, se $A(-1,2)$ e $B(2,1)$, então:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2-(-1), 1-2) = (3,-1)$$



1.6 - Produto Escalar

Definição

- Chama-se produto escalar de dois vetores $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ e representa-se por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ou "$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$" ao número real:
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 + y_1 y_2)$$

- Por exemplo:
Seja $\mathbf{u} = (-1, 2)$ e $\mathbf{v} = (2, 3)$. Então:
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 4$$

1.6 - Produto Escalar

Módulo de um vetor

- O módulo de um vetor $\mathbf{v} = (x, y)$, representado por $|\mathbf{v}|$ é um número real não negativo, dado por:
  $|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{(x, y) \cdot (x, y)} = \sqrt{x^2 + y^2}$

- Por exemplo:
  Seja $\mathbf{v} = (2, -3)$, então:
  $|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

1.6 - Produto Escalar

Vetor unitário

- Quando $|\mathbf{v}| = 1$, dizemos que o vetor é unitário.

Observação

1) Para cada vetor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ é possível obter um vetor unitário $\mathbf{u}$ fazendo $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$.

- Por exemplo, seja $\mathbf{v} = (2, -3)$ então $|\mathbf{v}| = \sqrt{13}$. Logo:

$$\mathbf{u} = \frac{(2,-3)}{\sqrt{13}} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right) \text{ e } |\mathbf{u}| = 1.$$

1.6 - Produto Escalar

2) Dado um vetor $\overrightarrow{AB}$ com extremidades nos pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$. O módulo do vetor $\overrightarrow{AB}$ é dado por:

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

que é a distância entre os pontos A e B.

1.6 - Produto Escalar

Propriedades do Produto Escalar

- Dados quaisquer vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

  I) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0$ para $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

  II) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ (comutativa)

  III) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ (distributiva)

  IV) $\alpha(\mathbf{u}.\mathbf{v}) = (\alpha\mathbf{u}).\mathbf{v} = \mathbf{u}.(\alpha\mathbf{v})$

1.6 - Produto Escalar

Observação

- Das propriedades **(I)** - **(IV)** obtemos que:

1) $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + 2\mathbf{u}.\mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2$

De fato:

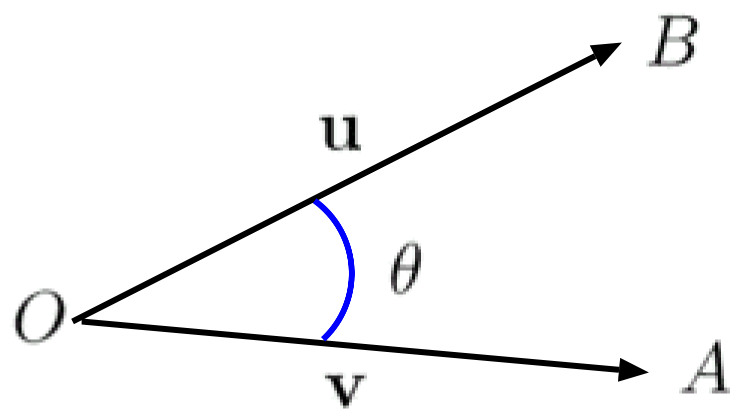
$$\begin{aligned} |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v}).(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u}.(\mathbf{u}+\mathbf{v}) + \mathbf{v}.(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u}.\mathbf{u} + \mathbf{u}.\mathbf{v} + \mathbf{v}.\mathbf{u} + \mathbf{v}.\mathbf{v} \\ &= |\mathbf{u}|^2 + 2\mathbf{u}.\mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2 \end{aligned}$$

Mostre que, de forma análoga:

$$|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 - 2\mathbf{u}.\mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2$$

1.7 - Ângulo de dois vetores

O ângulo de dois vetores $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB}$, não nulos, é o ângulo θ formado pelas semi-retas OA e OB, onde $0 \leq \theta \leq \pi$.



1.7 - Ângulo de dois vetores

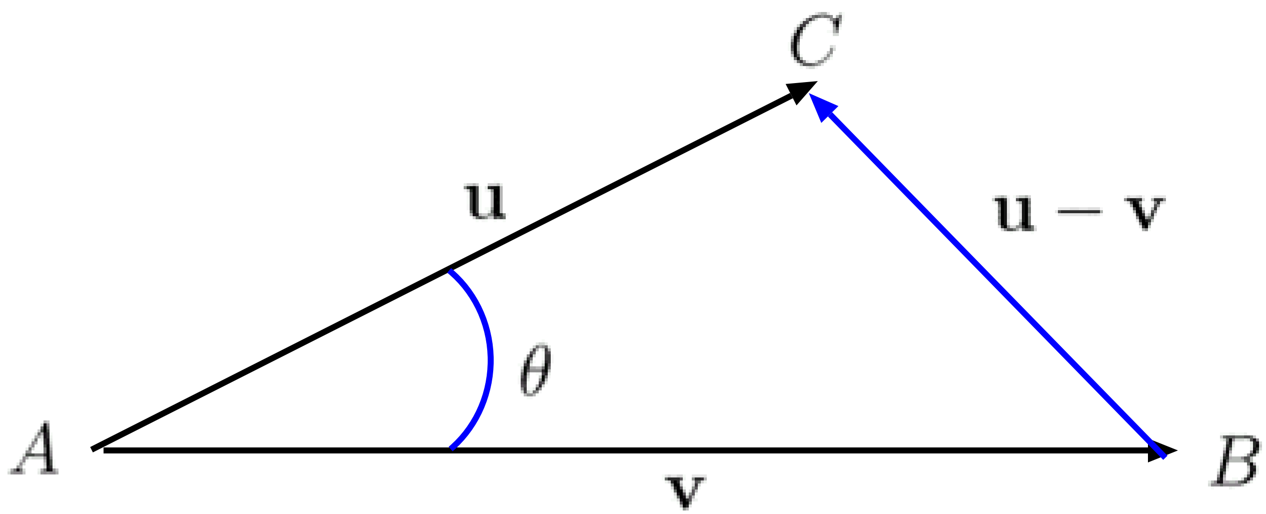
Cálculo do Ângulo de dois Vetores

- Sejam os vetores não nulos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. O ângulo θ formado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ pode ser calculado pela fórmula:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|.|\mathbf{v}|}}$$

1.7 - Ângulo de dois vetores

Cálculo do Ângulo de dois Vetores



1.7 - Ângulo de dois vetores

Cálculo do Ângulo de dois Vetores

- De fato: Aplicando a lei dos co-senos ao triângulo ABC, temos:

$$|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cos\theta \quad (1)$$

Mas sabemos que:

$$|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2 \quad (2)$$

Comparando (1) e (2), obtemos:

$$|\mathbf{u}|^2 - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cos\theta$$

1.7 - Ângulo de dois vetores

Cálculo do Ângulo de dois Vetores

- Logo:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos\theta$$

Daí:

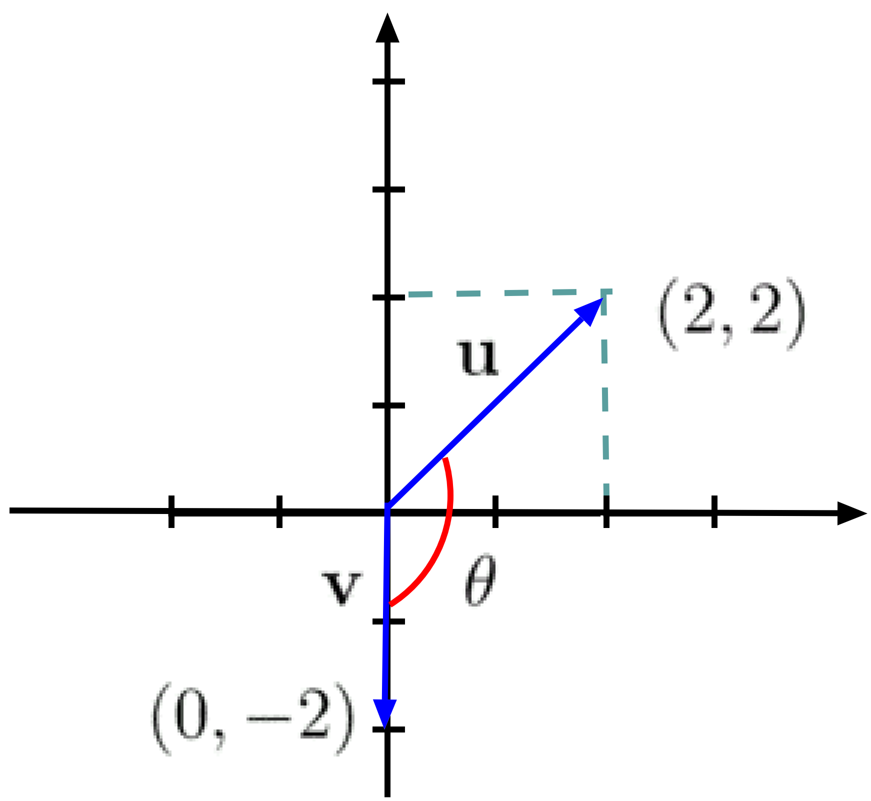
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}$$

Com o valor do $\cos\theta$ calculado então o ângulo θ pode ser determinado.

- Note que $0 \leq \theta \leq \pi$.

1.7 - Ângulo de dois vetores

- Exemplo: Seja $\mathbf{u} = (2, 2)$ e $\mathbf{v} = (0, -2)$.
  Determine o ângulo θ entre vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.



1.7 - Ângulo de dois vetores

- Resolução do Exemplo:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}$$

Temos que:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$$
$$|\mathbf{v}| = \sqrt{0^2+(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Assim:

$$\cos\theta = \frac{-4}{\sqrt{8}\cdot 2}$$

Logo

$$\theta = \arccos\frac{-\sqrt{2}}{2} = 135^o = \frac{3\pi}{4}$$

1.8 - Paralelismo e Ortogonalidade de Dois Vetores

a) Vetores Paralelos:

Dizemos que dois vetores $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ são paralelos (ou colineares), se existe um número real α tal que:

$$\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v} \Leftrightarrow (x_1, y_1) = \alpha(x_2, y_2) = (\alpha x_2, \alpha y_2)$$

Logo:

$$\boxed{\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \alpha} \quad (3)$$

A relação (3) significa que dois vetores são paralelos se suas componentes são proporcionais.

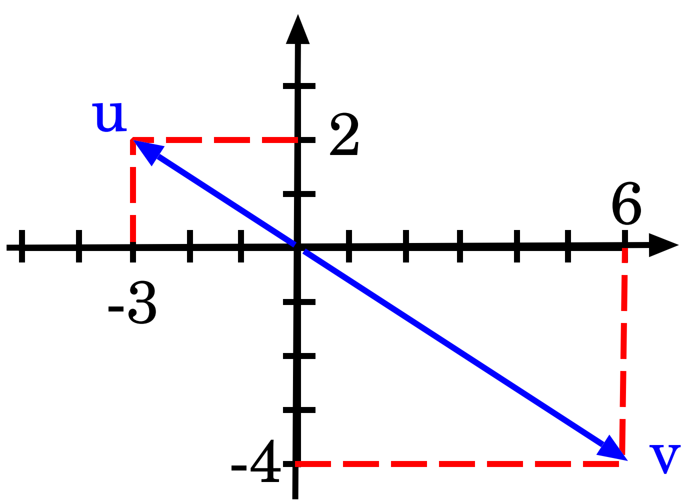
1.8 - Paralelismo e Ortogonalidade de Dois Vetores

- Por exemplo, os vetores $\mathbf{u} = (-3, 2)$ e $\mathbf{v} = (6, -4)$ são paralelos pois:

$$\frac{-3}{6} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

ou seja,

$$\boxed{\mathbf{u} = -\frac{1}{2}\mathbf{v}}$$



1.8 - Paralelismo e Ortogonalidade de Dois Vetores

b) Vetores Ortogonais:

Dois vetores $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ são ortogonais ($\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$), se o ângulo θ por eles formado é de 90^o, ou seja, $\cos\theta = 0$. Da definição de ângulo temos:

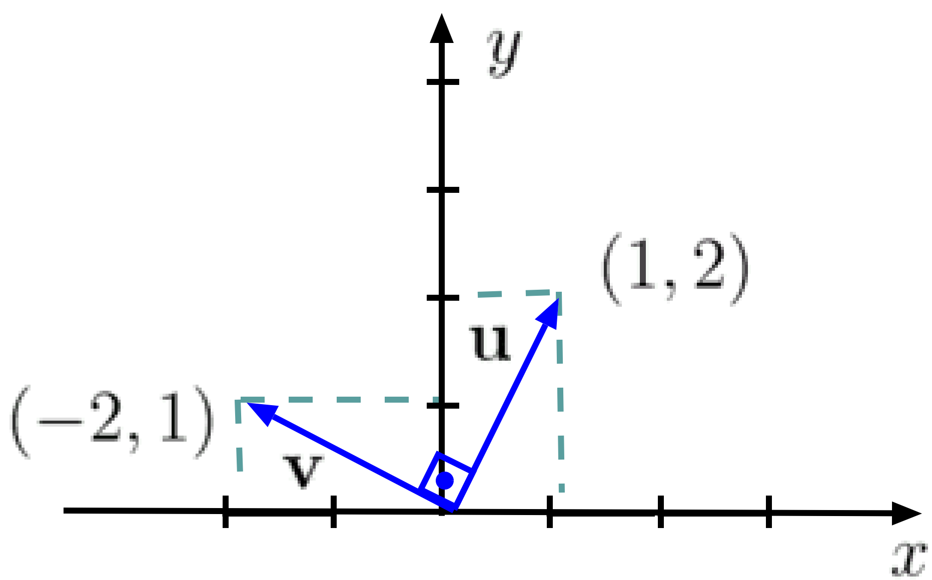
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}$$

Assim, $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Também dizemos que dois vetores são ortogonais se pelo menos um deles é o vetor nulo. Portanto, $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

1.8 - Paralelismo e Ortogonalidade de Dois Vetores

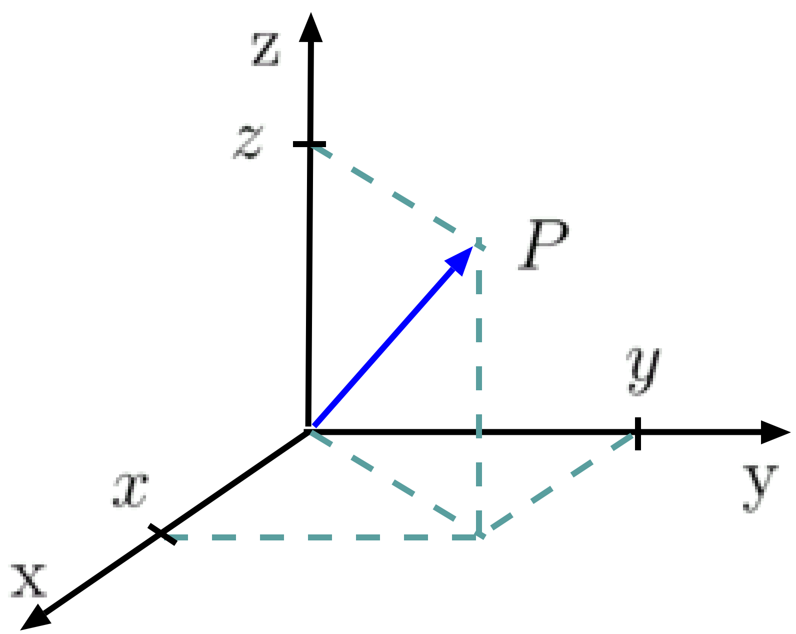
- Exemplo:
  Os vetores $\mathbf{u} = (1, 2)$ e $\mathbf{v} = (-2, 1)$ são ortogonais. De fato:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1, 2) \cdot (-2, 1) = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = 0$$



1.9 - Vetores no $\mathbb{R}^3$

- O conjunto $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$ é interpretado geometricamente como sendo o espaço cartesiano tridimensional $OXYZ$. Neste espaço, o ponto $P(x, y, z)$ individualiza o vetor $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ e escreve-se $\mathbf{v} = (x, y, z)$.



1.9 - Vetores no $\mathbb{R}^3$

- A origem do sistema $O(0,0,0)$ representa o vetor nulo. O vetor simétrico de $\mathbf{v} = (x, y, z)$ é o vetor $-\mathbf{v} = (-x, -y, -z)$.
- Propriedades:

1) Dois vetores $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$.

2) Dados $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$
$$\alpha\mathbf{u} = \alpha(x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$$

1.9 - Vetores no $\mathbb{R}^3$

- Propriedades:

3) Se $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ são dois pontos quaisquer no espaço, então:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

4) Produto escalar:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

5) Módulo do vetor $\mathbf{v} = (x, y, z)$ é dado por:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

1.9 - Vetores no $\mathbb{R}^3$

- Propriedades:

6) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores não-nulos e θ é o ângulo formado por eles, então:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}$$

7) Sejam $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$.

a) $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$ se, e somente se, $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

b) $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ se, e somente se, $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

1.10 - Vetores no $\mathbb{R}^n$

- O conjunto

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ vezes}} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$$

Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores do $\mathbb{R}^n$, então eles são representados por: $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{v} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

1.10 - Vetores no $\mathbb{R}^n$

- Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ então define-se:

  a) $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, se e somente se, $x_i = y_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

  b) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$.

  c) $\alpha\mathbf{u} = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$.

  d) $\mathbf{u}.\mathbf{v} = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n)$.

  e) $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}.\mathbf{u}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$.

Exercícios

Faça os seguintes exercícios da seção 3.1, páginas 115/116 do livro texto.

1) (a), (c) e (e)
2) (a) e (b)
3)
5) (a), (b) e (c)
7) (a), (b) e (c)
10) (a) e (d)
12) (a) e (c)
14)
19) (a) e (b)
21) (b) e (c)
24) (a), (b) e (c)

Exercícios Teóricos

- T.1, T.3, T.5 e T.8.

Álgebra Linear

Aula 2: Espaços Vetoriais

Mauro Rincon

Márcia Fampa

2.1 - Espaços Vetoriais

Dizemos que um conjunto V, não vazio, é um espaço vetorial (sobre $\mathbb{R}$) se, e somente se:

I) Existe uma adição:
$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$ com as seguintes propriedades.

a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}, \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ (comutativa)

b) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}, \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ (associativa)

2.1 - Espaços Vetoriais

c) Existe um elemento neutro $\mathbf{0} \in V$ tal que:
$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}, \ \forall \mathbf{u} \in V$

d) Para todo elemento $\mathbf{u} \in V$, existe o oposto(simétrico) $(-\mathbf{u}) \in V$ tal que:
$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

2.1 - Espaços Vetoriais

II) Está definida uma multiplicação de:

$$\mathbb{R} \times V \mapsto V$$
$$(\alpha, \mathbf{u}) \mapsto \alpha\mathbf{u}$$

satisfazendo as seguintes condições:

a) $\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$

b) $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$

c) $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$

d) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Para $\forall\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ e $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2.1 - Espaços Vetoriais

Observação:

1) Os elementos do espaço vetorial V são chamados vetores.

2) Se na definição, tomarmos como escalares o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, V seria um espaço vetorial complexo.

2.1 - Espaços Vetoriais

Exemplos de Espaços Vetoriais

- Exemplo 1: $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por um número real assim definidas:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$\alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1)$$

Para verificar os oito axiomas do espaço vetorial, considere $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ e $\mathbf{w} = (x_3, y_3)$. Tem-se:

2.1 - Espaços Vetoriais

I) Propriedades da Adição

a) (Comutativa da Adição)

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = (x_1, y_1)+(x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

b) (Associativa da Adição)

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) = \\ &= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = \\ &= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3) = \\ &= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) = \\ &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}\end{aligned}$$

2.1 - Espaços Vetoriais

I) Propriedades da Adição

c) (Elemento Neutro)

$\exists \mathbf{0} = (0,0) \in \mathbb{R}^2, \forall \mathbf{u} = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = (x_1, y_1) + (0,0) = (x_1 + 0, y_1 + 0) =$$
$$= (x_1, y_1) = \mathbf{u}$$

d) (Elemento Simétrico)

$\forall \mathbf{u} = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2, \exists (-\mathbf{u}) = (-x_1, -y_1) \in \mathbb{R}^2$

tal que:

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (x_1, y_1) + (-x_1, -y_1) =$$
$$(x_1 - x_1, y_1 - y_1) = (0,0)$$

2.1 - Espaços Vetoriais

II) Propriedades da Multiplicação por um escalar

a) $\alpha(\beta\mathbf{u}) = \alpha(\beta(x_1, y_1)) = \alpha(\beta x_1, \beta y_1) =$
$= (\alpha\beta x_1, \alpha\beta y_1) = \alpha\beta(x_1, y_1) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$

b) $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = (\alpha + \beta)(x_1, y_1) =$
$= ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)y_1) =$
$= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha y_1 + \beta y_1) =$
$= (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\beta x_1, \beta y_1) = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$

2.1 - Espaços Vetoriais

II) Propriedades da Multiplicação por um escalar

c) $\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \alpha((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) =$
$= \alpha(x_1 + x_2, y_1 + y_2) =$
$= (\alpha(x_1 + x_2), \alpha(y_1 + y_2)) =$
$= (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2) =$
$= (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2 + \alpha y_2) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$

d) $1\mathbf{u} = 1(x_1, y_1) = (1 \cdot x_1, 1 \cdot y_1) = (x_1, y_1) = \mathbf{u}$

Assim $V = \mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial.

2.1 - Espaços Vetoriais

- Exemplo 2: Os conjuntos $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \ldots, \mathbb{R}^n$ são espaços vetoriais com operações de adição e multiplicação por escalar usuais. O conjunto $\mathbb{R}$ também é um espaço vetorial pois satisfaz todas as propriedades de um espaço vetorial. Os vetores, neste caso, são números reais.

2.1 - Espaços Vetoriais

- Exemplo 3: O espaço vetorial das matrizes

Sabemos que se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ então $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. O vetor $\mathbf{u}$ também pode ser denotado na forma de matriz (matriz-coluna $n \times 1$):

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

2.1 - Espaços Vetoriais

É fácil ver que $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ e $\alpha\mathbf{u}$ na notação matricial são vetores, ou seja:

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_1 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

$$\alpha\mathbf{u} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$$

2.1 - Espaços Vetoriais

Representa-se por $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes reais de ordem $m \times n$.

Seja $\mathbf{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ então $\mathbf{A}$ é representada por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

2.1 - Espaços Vetoriais

Dadas duas matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ então a adição e multiplicação por um escalar são dadas por:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

2.1 - Espaços Vetoriais

$$\alpha\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, prova-se que $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial. Note que o vetor nulo e o vetor unidade são dados por:

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

2.1 - Espaços Vetoriais

- Exemplo 4: Polinômios
  $P_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, a_i \in \mathbb{R}$
  (conjunto dos polinômios de grau $\leq n$)

  P_n é um espaço vetorial, em relação às operações usuais. Sejam

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$
$$Q_n(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$$

2.1 - Espaços Vetoriais

Então:

$$P_n(x) + Q_n(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \\ (a_2 + b_2)x^2 + \ldots + (a_n + b_n)x^n \in P_n$$

$$\alpha P_n(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \ldots + \alpha a_n x^n \in P_n$$

O vetor nulo é dado por:

$$\mathbf{0} = 0 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^n$$

Dessa forma é fácil provar que:

$$P_n(x) + \mathbf{0} = P_n(x)$$
$$1 \cdot P_n(x) = P_n(x)$$

2.1 - Espaços Vetoriais

- Exemplo 5: (Exemplo de conjunto que não é um espaço vetorial)
  Seja $\mathbb{R}^2 = \{(a,b)|a,b \in \mathbb{R}\}$.
  Definimos as seguintes operações:

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$
$$\alpha \odot (a,b) = (\alpha a, b)$$

2.1 - Espaços Vetoriais

Note que a seguinte propriedade não é satisfeita:

b) $(\alpha+\beta)\odot\mathbf{u}=(\alpha+\beta)\odot(a,b)=$
$((\alpha+\beta)a,b)=(\alpha a+\beta a,b)$

Por outro lado:

$$\alpha\odot\mathbf{u}+\beta\odot\mathbf{u}=\alpha\odot(a,b)+\beta\odot(a,b)$$
$$=(\alpha a,b)+(\beta a,b)=(\alpha a+\beta a,2b)$$

Assim $(\alpha+\beta)\odot\mathbf{u}\neq\alpha\odot\mathbf{u}+\beta\odot\mathbf{u}\Rightarrow\mathbb{R}^2$ não é um espaço vetorial.

2.2 - Propriedades dos Espaços Vetoriais

1) Existe um único vetor nulo em V.

2) Cada vetor $\mathbf{u} \in V$, admite apenas um simétrico $(-\mathbf{u}) \in V$.

3) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ se $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ então $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

4) $\forall \mathbf{u} \in V, \ -(-\mathbf{u}) = \mathbf{u}$.

5) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \exists! \mathbf{x} \in V$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{v}$. O vetor $\mathbf{x}$ será representado por $\mathbf{x} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$.

6) $\forall \mathbf{u} \in V, \mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

7) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

8) Se $\lambda \mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda = 0$ ou $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

9) $\forall \mathbf{u} \in V \Rightarrow (-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$.

Exercícios

- Fazer os exercícios das páginas 167 e 168 do livro texto.

2.3 - Subespaços Vetoriais

- Sejam V um espaço vetorial e S um subconjunto não-vazio de V.

  S é um subespaço vetorial de V se S é um espaço vetorial em relação à adição e à multiplicação por escalar definidas em V.

- Teorema: Um subconjunto S não vazio, de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V se estiverem satisfeitas as condições.

2.3 - Subespaços Vetoriais

I) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in S \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in S.$

II) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in S \Rightarrow \alpha \mathbf{u} \in S.$

Demonstração:

Seja $\mathbf{u} \in S$. Pela condição **(II)**, $\alpha \mathbf{u} \in S, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
Tomando $\alpha = 0$ então $0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \in S$.
Tomando $\alpha = -1$ então $(-1) \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u} \in S$.
As propriedades restantes são uma conseqüência de S ser um subconjunto não vazio de V.

2.3 - Subespaços Vetoriais

<u>Observação</u>:

Todo espaço vetorial V admite pelo menos dois subespaços vetoriais: o subespaço nulo $\{\mathbf{0}\}$ e o próprio espaço vetorial V.

Estes subespaços são chamados <u>subespaços triviais</u>. Os demais subespaços, se existirem, são chamados <u>subespaços próprios</u>.

2.3 - Subespaços Vetoriais

<u>Exemplo 1</u>:

Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 2x\}$.

Mostre que S é um subespaço vetorial de V.

1) $S \neq \emptyset$, pois $(0, 0) \in S$.

2) Sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in S$? De fato:

Se $\mathbf{u} \in S \Rightarrow \mathbf{u} = (x_1, 2x_1)$.

Se $\mathbf{v} \in S \Rightarrow \mathbf{v} = (x_2, 2x_2)$.

Logo $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1, 2x_1) + (x_2, 2x_2) =$

$(x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2) = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2))$.

Assim, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S$, pois a segunda componente é o dobro da primeira.

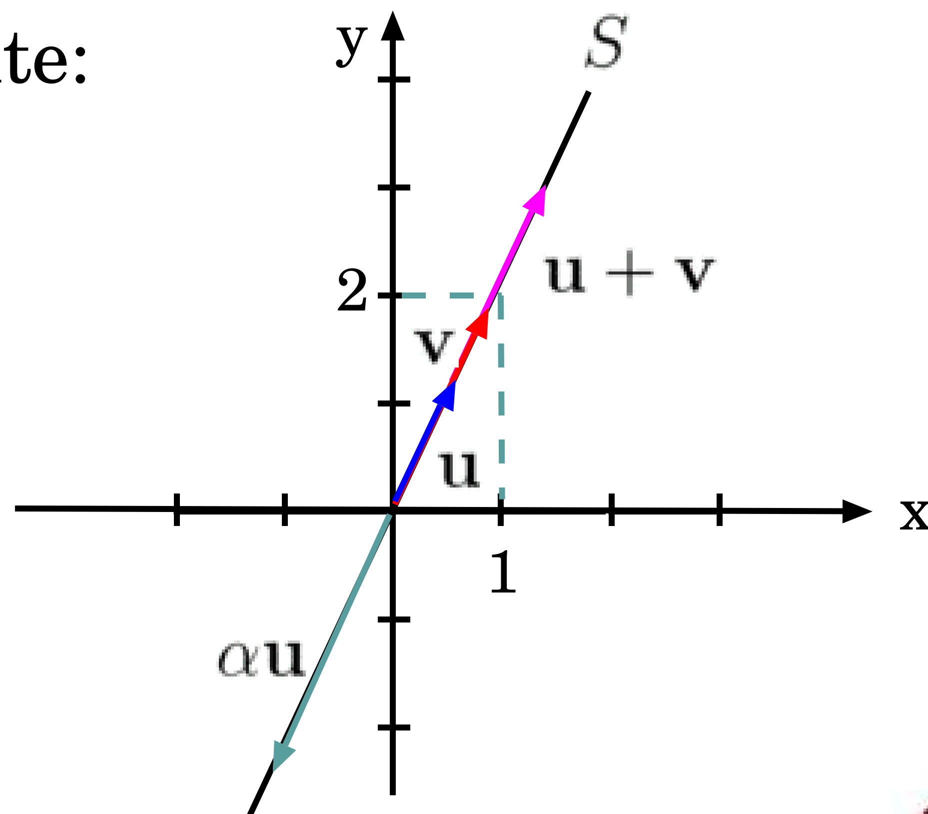
2.3 - Subespaços Vetoriais

3) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in S \Rightarrow \alpha\mathbf{u} \in S?$

$\alpha\mathbf{u} = \alpha(x_1, 2x_1) = (\alpha x_1, 2(\alpha x_1)) \in S.$

$\therefore S$ é um subespaço vetorial.

Geometricamente:



2.3 - Subespaços Vetoriais

- Considere agora S como o seguinte subconjunto do $\mathbb{R}^2$:

$$S = \{(x, 4 - 2x); x \in \mathbb{R}\}$$

Sejam $\mathbf{u} = (1, 2) \in S$ e $\mathbf{v} = (0, 4) \in S$. Então:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (1, 6) \notin S \text{ ou } \alpha\mathbf{u} \notin S, \text{ se } \alpha \neq 1.$$

$\therefore$ S não é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$.

De forma análoga, mostre que:

$$S = \{(x, |x|); x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

$\therefore$ S não é um espaço vetorial.

2.3 - Subespaços Vetoriais

Exemplo 2:

Seja $V = M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial dado por:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}, a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$$

Seja $S \subset V$, dado por:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & e & f \end{bmatrix}, a, b, e, f \in \mathbb{R} \right\}$$

2.3 - Subespaços Vetoriais

Mostre que S é um subespaço vetorial de V. De fato:

1) S é não vazio, pois $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in S$.

2) Sejam as matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in S \Rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} \in S$.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & e_1 & f_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & e_2 & f_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & 0 \\ 0 & e_1 + e_2 & f_1 + f_2 \end{bmatrix} \in S$$

2.3 - Subespaços Vetoriais

3) $\alpha \mathbf{A} = \alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & e_1 & f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 & 0 \\ 0 & \alpha e_1 & \alpha f_1 \end{bmatrix} \in S$

$\therefore S$ é um subespaço vetorial do espaço V.

2.3 - Subespaços Vetoriais

Exemplo 3:

Considere o sistema homogêneo:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases}$$

Denotando:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.3 - Subespaços Vetoriais

Então o sistema linear homogêneo:

$$\boxed{\mathbf{AX} = \mathbf{0}}$$

Seja $S = \left\{ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ o conjunto de todas as soluções homogêneas. Mostre que S é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$. Com efeito:

1) $S \neq \emptyset$, pois $\mathbf{A0} = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in S$.

2.3 - Subespaços Vetoriais

2) Sejam $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in S \Rightarrow \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \in S$?
De fato:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Se } \mathbf{X}_1 \in S \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{X}_1 = \mathbf{0} \\ \text{Se } \mathbf{X}_2 \in S \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{X}_2 = \mathbf{0} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mathbf{A}\mathbf{X}_1 + \mathbf{A}\mathbf{X}_2 = \mathbf{0} \text{ ou} \\ \mathbf{A}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) = \mathbf{0} \end{array}$$

Logo $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \in S$.

3) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{X}_1 \in S \Rightarrow \alpha \mathbf{X}_1 \in S$.
Temos que: $\mathbf{A}\mathbf{X}_1 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha \mathbf{A}\mathbf{X}_1 = \alpha \mathbf{0} = \mathbf{0}$
ou
$\mathbf{A}(\alpha \mathbf{X}_1) = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha \mathbf{X}_1 \in S \Rightarrow S$ é um subespaço vetorial.

2.4 - Combinação Linear

Definição: Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vetores em um espaço vetorial V. Um vetor $\mathbf{v} \in V$ é uma combinação linear de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ se existem reais $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, tais que:

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i$$

2.4 - Combinação Linear

Exemplo 1:

Considere os seguintes vetores do $\mathbb{R}^3$;
$\mathbf{v}_1 = (1,2,1), \mathbf{v}_2 = (1,0,2)$ e $\mathbf{v}_3 = (1,1,0)$.
Verifique se $\mathbf{v} = (1,2,4)$ é uma combinação linear de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$.
Com efeito:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 \\
&= \alpha_1(1,2,1) + \alpha_2(1,0,2) + \alpha_3(1,1,0) \\
&= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2).
\end{aligned}$$

2.4 - Combinação Linear

Sendo $\mathbf{v} = (1, 2, 4)$ tem-se:

$$(1, 2, 4) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2)$$

Logo:

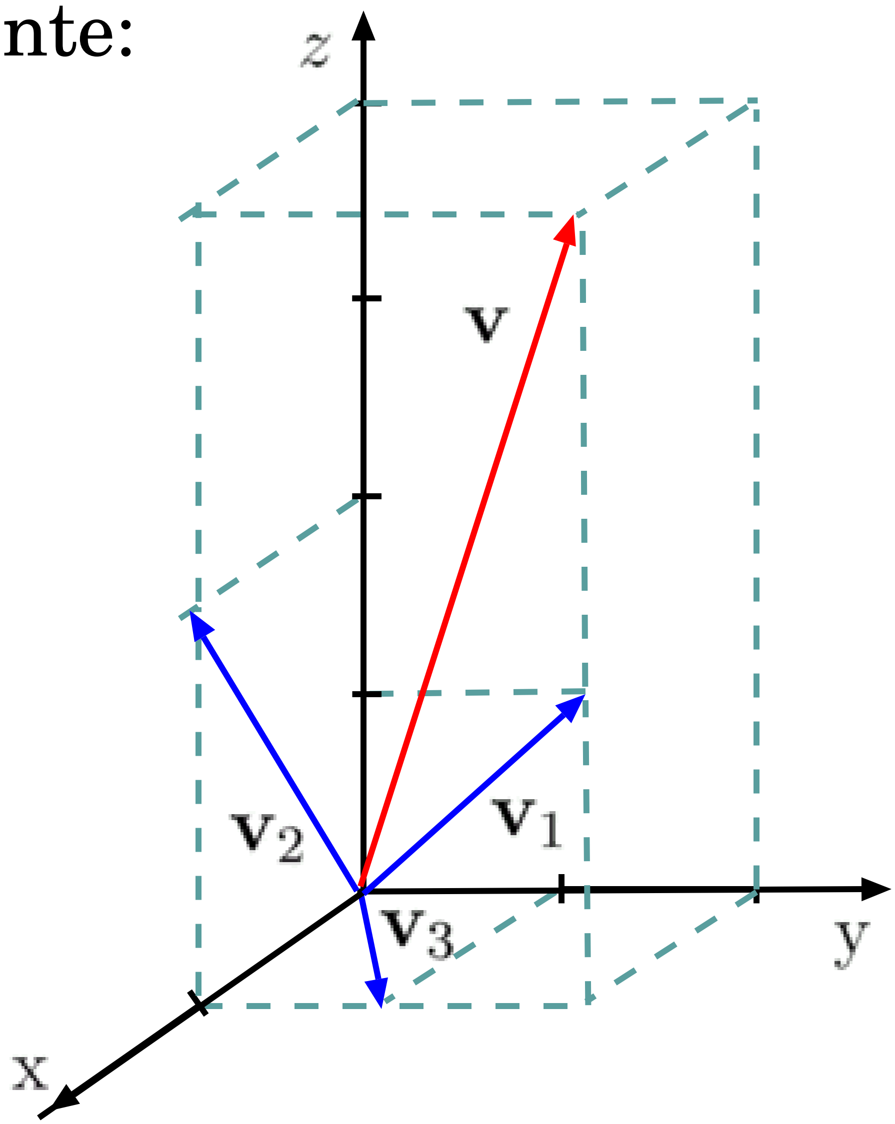
$$\left.\begin{array}{rcccccl} \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 1 \\ 2\alpha_1 & + & & & \alpha_3 & = & 2 \\ \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & & & = & 4 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = -2 \end{array}}$$

$\therefore$ $\mathbf{v}$ é combinação linear de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$.

$$\boxed{\mathbf{v} = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3}$$

2.4 - Combinação Linear

Geometricamente:



2.4 - Combinação Linear

Exemplo 2:

Seja P_2 o espaço vetorial dos polinômios de grau ≤ 2 e os vetores

$$\mathbf{v}_1 = 2x^2 - x + 3 \text{ e } \mathbf{v}_2 = -x^2 + 4x - 2$$

Mostre que $\mathbf{v} = 4x^2 - 2x + 6$ é uma combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. De fato:

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 \Leftrightarrow$$

$$4x^2 - 2x + 6 = \alpha_1(2x^2 - x + 3) + \alpha_2(-x^2 + 4x - 2) =$$

$$= (2\alpha_1 - \alpha_2)x^2 + (-\alpha_1 + 4\alpha_2)x + (3\alpha_1 - 3\alpha_2)$$

2.4 - Combinação Linear

Determinação das constantes $\underline{\alpha_1 \text{ e } \alpha_2}$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2\alpha_1 & - & \alpha_2 & = & 4 \\ -\alpha_1 & + & 4\alpha_2 & = & -2 \\ 3\alpha_1 & - & 2\alpha_2 & = & 6 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 0 \end{array}}$$

Logo $\boxed{\mathbf{v} = 2 \cdot \mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2}$ é uma combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

2.5.1 - Soma de dois Subespaços Vetoriais

Sejam S_1 e S_2 subespaços de V. Então:

$$S = S_1 + S_2$$

é o conjunto de todos os vetores $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ tal que $\mathbf{u} \in S_1$ e $\mathbf{v} \in S_2$.

- Teorema: A soma S de dois subespaços vetoriais S_1 e S_2 de V é um subespaço vetorial.

2.5.1 - Soma de dois Subespaços Vetoriais

- Prova:
  Se $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u_2} \in S_1 \Rightarrow \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in S_1$.
  Se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2 \in S_2 \Rightarrow \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in S_2$.
  Sendo $S = S_1 + S_2$ então:

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1 \in S \text{ e } \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2 \in S$$

Assim:

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2) =$$
$$= (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \in S_1 + S_2 = S$$

2.5.1 - Soma de dois Subespaços Vetoriais

- Prova:
  Por outro lado:

$$\alpha \mathbf{u}_1 \in S_1 \text{ e } \alpha \mathbf{u}_2 \in S_2$$

Como $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \in S$ então:

$$\alpha(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \alpha \mathbf{u}_1 + \alpha \mathbf{u}_2 \in S_1 + S_2 = S$$

$\therefore S$ é um subespaço vetorial.

2.5.1 - Soma de dois Subespaços Vetoriais

Exemplo:

$$S_1 = \{(a, b, 0); a, b \in \mathbb{R}\}$$
$$S_2 = \{(0, 0, c); c \in \mathbb{R}\}$$

Então:

$$S = S_1 + S_2 = \{(a, b, c); a, b, c \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$$

2.5.2 - Soma direta de dois Subespaços Vetoriais

- Sejam S_1 e S_2 dois subespaços vetoriais de V. Diz-se que V é a soma direta de S_1 e S_2 e representa-se por $V = S_1 \oplus S_2$. Se $V = S_1 + S_2$ e $S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{0}\}$.

- <u>Exemplo</u>:

$$S_1 = \{(0, b, 0, d); b, d \in \mathbb{R}\}$$
$$S_2 = \{(a, 0, c, 0); a, c \in \mathbb{R}\}$$

Então:

$$\begin{cases} S_1 + S_2 = \{(a, b, c, d); a, b, c, d \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^4 \\ S_1 \cap S_2 = \{(0, 0, 0, 0) = \mathbf{0}\} \end{cases}$$

Logo $S_1 \oplus S_2$.

2.5.3 - Interseção de dois Subespaços Vetoriais

- Seja $S = S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{v} \in V; \mathbf{v} \in S_1 \text{ e } \mathbf{v} \in S_2\}$. Prova-se que S é um subespaço vetorial.

- Exemplo:

Seja V o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem 2:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

2.5.3 - Interseção de dois Subespaços Vetoriais

Considere:

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} ; a, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Então, $S = S_1 \cap S_2$:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; a \in \mathbb{R} \right\}$$

2.6 - Subespaços Gerados

Seja V um espaço vetorial e $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ com $A \neq \emptyset$.
O conjunto S de todos os vetores de V que são combinações lineares dos vetores de $\mathbf{A}$ é um subespaço vetorial de V.
De fato: Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v} \in S$. Logo:

$$\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n$$
$$\mathbf{v} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \beta_n\mathbf{v}_n$$

2.6 - Subespaços Gerados

Então:

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = (\alpha_1+\beta_1)\mathbf{v}_1+(\alpha_2+\beta_2)\mathbf{v}_2+\ldots+(\alpha_n+\beta_n)\mathbf{v}_n$$

e para $\lambda \in \mathbb{R}$, temos:

$$\lambda\mathbf{u} = (\lambda\alpha_1)\mathbf{v}_1 + (\lambda\alpha_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (\lambda\alpha_n)\mathbf{v}_n$$

Portanto $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \in S$ e $(\lambda\mathbf{u}) \in S$ e dessa forma S é um subespaço vetorial de V.

2.6 - Subespaços Gerados

Notação: $S = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n]$ ou $S = G(A)$.

i) Os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ são os geradores do espaço.

ii) A é o conjunto gerador.

iii) Se $A = \emptyset$, define-se $[\emptyset] = \{\mathbf{0}\}$.

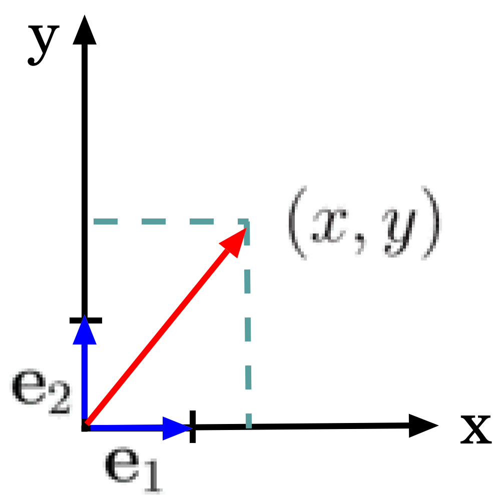
2.6 - Subespaços Gerados

Exemplos:

1) Os vetores $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0,1)$ geram o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, i. e., $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ temos:

$$(x,y) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 = x(1,0) + y(0,1) = (x,y)$$

Assim $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = \mathbb{R}^2$.



2.6 - Subespaços Gerados

2) Os vetores $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$ do $\mathbb{R}^3$ geram um subespaço:

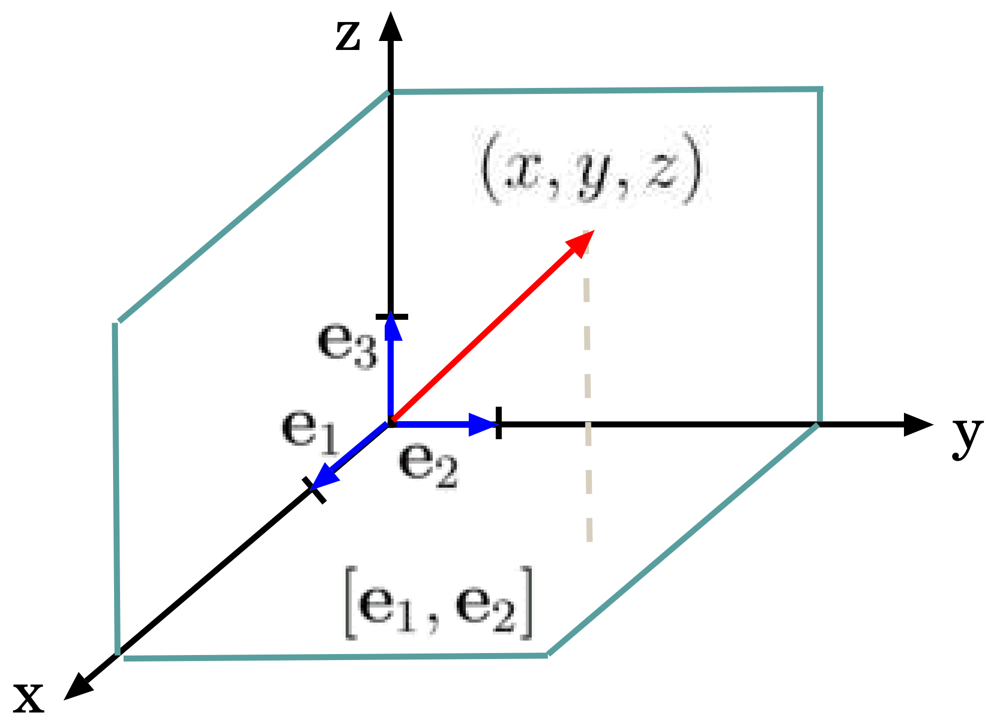
$$S = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3; x,y \in \mathbb{R}\}$$
$$(x,y,0) = x(1,0,0) + y(0,1,0) = (x,y,0)$$

Logo $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = S \subset \mathbb{R}^3$.(subespaço próprio)

3) $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$ e $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ então $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

2.6 - Subespaços Gerados



2.6 - Subespaços Gerados

4) Seja $V = \mathbb{R}^3$. Determine o subespaço gerado pelos vetores:

$$\mathbf{v}_1 = (1,1,1); \mathbf{v}_2 = (1,1,0) \text{ e } \mathbf{v}_3 = (1,0,0)$$

Solução:

$$\mathbf{v} \in [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] \Rightarrow$$
$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 \Leftrightarrow$$
$$(x,y,z) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(1,0,0)$$

2.6 - Subespaços Gerados

Daí resulta:

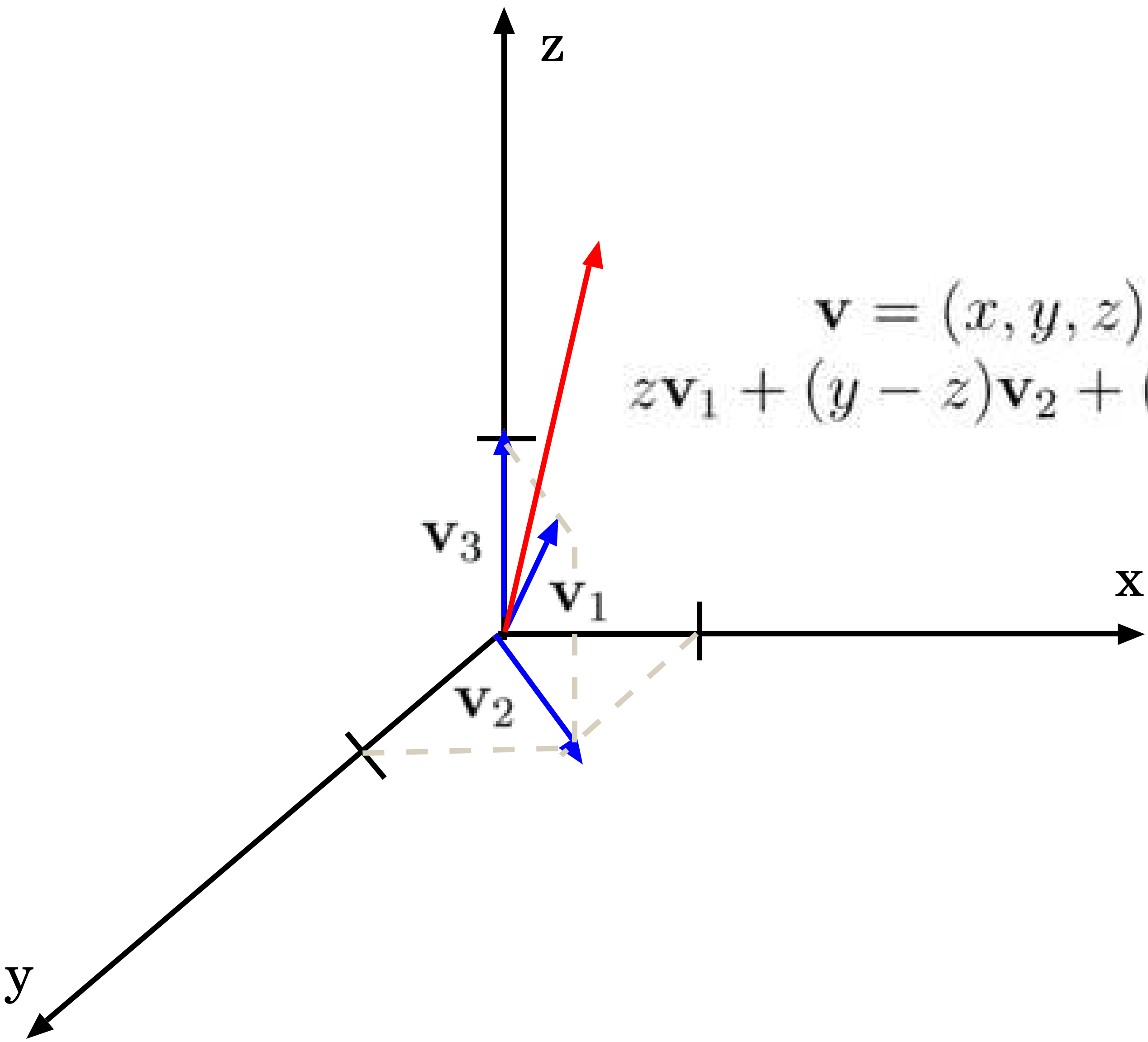
$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = x \\ \alpha_1 + \alpha_2 = y \\ \alpha_1 = z \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \alpha_1 = z \\ \alpha_2 = y - z \\ \alpha_3 = x - y \end{array}}$$

Logo:

$$(x, y, z) = z(1,1,1) + (y-z)(1,1,0) + (x-y)(1,0,0)$$

Assim $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = \mathbb{R}^3$.

2.6 - Subespaços Gerados



$$\mathbf{v} = (x, y, z) =$$
$$z\mathbf{v}_1 + (y - z)\mathbf{v}_2 + (x - y)\mathbf{v}_3$$

2.6 - Subespaços Gerados

5) Considere o exemplo anterior, com os vetores $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1); \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0); \mathbf{v}_3 = (1, 0, 0)$.
Vamos acrescentar o vetor $\mathbf{v}_4 = (0, 0, 2)$.
Qual é o espaço gerado pelos vetores $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4] = S$?

Solução:

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 + \alpha_4\mathbf{v}_4$$

2.6 - Subespaços Gerados

Fazendo os cálculos obtemos:

$$\begin{array}{ccccccccl} \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & & & = & x \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & & & & & = & y \\ \alpha_1 & + & & & & + & 2\alpha_4 & = & z \end{array}$$

Tomando $\alpha_4 = a \in \mathbb{R}$. Então:
$\alpha_1 = z - 2a; \alpha_2 = y - z + 2a; \alpha_3 = x - y.$
Assim:

$$\mathbf{v} = (x, y, z) = (z-2a)\mathbf{v}_1 + (y-z+2a)\mathbf{v}_2 + (x-y)\mathbf{v}_3 + a\mathbf{v}_4$$

Logo $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4] = \mathbb{R}^3$.

Exercícios

- Fazer os exercícios propostos no livro texto, nas folhas 174 e 175.

Álgebra Linear

Aula 3: Espaços Vetoriais 2

Mauro Rincon

Márcia Fampa

2.7 - Dependência e Independência Linear

Definição: Os vetores $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n} \in V$ são chamados linearmente dependentes (LD) se

$$\alpha_1 \mathbf{v_1} + \alpha_2 \mathbf{v_2} + \cdots + \alpha_n \mathbf{v_n} = \mathbf{0}$$

para algum $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$. Caso contrário dizemos que são LI.

2.7 - Dependência e Independência Linear

Exemplo 1:
Seja $V = \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{v_1} = (1,2)$, $\mathbf{v_2} = (0,1)$ e $\mathbf{v_3} = (-1,1)$. Verifique se os vetores são LD ou LI.

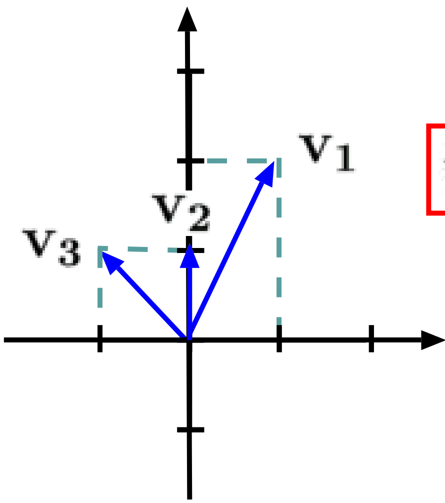
Com efeito,
$\alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} + \alpha_3\mathbf{v_3} = \mathbf{0} \Leftrightarrow$
$(\alpha_1 - \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = (0,0)$
Igualando os termos,

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha_1 - \alpha_3 & = & 0 \\ 2\alpha_2 + \alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_3 \\ \alpha_2 = -2\alpha_1 - \alpha_3 = -3\alpha_1 \end{array}$$

2.7 - Dependência e Independência Linear

Tomando $\alpha_3 = a \rightarrow \alpha_1 = a \ \wedge \ \alpha_2 = -3a$.
Logo, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (a, -3a, a) \ \forall a \in \mathbb{R}$
Assim, $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_2}\}$ são LD.

Geometricamente:



$$\boxed{\mathbf{v_3} = -1\mathbf{v_1} + 3\mathbf{v_2}}$$

2.7 - Dependência e Independência Linear

Exemplo 2:

Considere agora somente os vetores $\mathbf{v_1} = (1,2)$ e $\mathbf{v_2} = (0,1)$ em V. Então $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ são LI ou LD.

Com efeito,

$\alpha_1 \mathbf{v_1} + \alpha_2 \mathbf{v_2} = 0 \Leftrightarrow (\alpha_1, 2\alpha_1 + \alpha_2) = (0,0)$

Logo,

$$\left.\begin{array}{rcrcl} \alpha_1 & & & = & 0 \\ 2\alpha_1 & + & \alpha_2 & = & 0 \end{array}\right\} \boxed{\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0}$$

Assim, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) = (0,0) \Rightarrow \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ são LI.

2.7 - Dependência e Independência Linear

Exemplo 3:

Seja $V = M_{3\times 1}(\mathbb{R})$. Verifique se os vetores

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$ são LI ou LD.

Com efeito, $\alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} = 0 \Leftrightarrow$

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \alpha_2 = 0}$$

Assim, $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ são LI.

2.7 - Dependência e Independência Linear

Exemplo 4:

$V = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$, onde

$p_1(x) = x^2 + x - 1$, $p_2(x) = 2x + 3$ e

$p_3(x) = -x^2 + 1$.

V é um conjunto LD ou LI?

$\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\alpha_1(x^2 + x - 1) + \alpha_2(2x + 3) + \alpha_3(-x^2 + 1) = 0$

$0x^2 + 0x + 0 = 0$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & - & & & \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & & & = & 0 \\ -\alpha_1 & + & 3\alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \end{array}\right\} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$\therefore V$ é LI.

2.7 - Dependência e Independência Linear

Exemplo 5:

Verifique que todo conjunto V contendo o vetor nulo é um conjunto LD.

Com efeito, seja $V = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_i}, \cdots, \mathbf{v_n}\}$, onde $\mathbf{v_i} = \mathbf{0}$. Então,

$\alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} + \ldots + \alpha_i\mathbf{v_i} + \ldots + \alpha_n\mathbf{v_n} = \mathbf{0}$

tem pelo menos uma solução não trivial, por exemplo: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0 \wedge \alpha_i \neq 0$

2.7 - Dependência e Independência Linear

➩ Teorema: Um conjunto $V = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_i}, \cdots, \mathbf{v_n}\}$ é LD se, e somente se, pelo menos um destes é combinação linear dos outros.

2.7 - Dependência e Independência Linear

Demonstração:

($\Rightarrow$) Seja V LD. Por definição, existe pelo menos uma constante $\alpha_i \neq 0$, tal que

$$\alpha_1 \mathbf{v_1} + \alpha_2 \mathbf{v_2} + \ldots + \alpha_i \mathbf{v_i} + \ldots + \alpha_n \mathbf{v_n} = \mathbf{0}$$

Logo,

$$\boxed{\mathbf{v_i} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\mathbf{v_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_i}\mathbf{v_2} \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i}\mathbf{v_n}}$$

ou seja, $\mathbf{v_i}$ é uma combinação linear dos outros vetores.

2.7 - Dependência e Independência Linear

($\Leftarrow$) Seja $\mathbf{v_i}$ uma combinação linear dos outros vetores,

$$\mathbf{v_i} = \beta_1 \mathbf{v_1} + \beta_2 \mathbf{v_2} + ... + \beta_{i-1} \mathbf{v_{i-1}} + \beta_{i+1} \mathbf{v_{i+1}} + ... + \beta_n \mathbf{v_n} \Rightarrow$$

$$\beta_1 \mathbf{v_1} + \beta_2 \mathbf{v_2} + ... + \beta_{i-1} \mathbf{v_{i-1}} - 1 \mathbf{v_i} + \beta_{i+1} \mathbf{v_{i+1}} + ... + \beta_n \mathbf{v_n} = 0$$

Como $\beta_i = -1 \neq 0$ então $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n}\}$ é LD. ■

⇨ Corolário: Um conjunto $V = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n}\}$ é LI se, e somente se, nenhum desses vetores for combinação linear dos outros.

2.7 - Dependência e Independência Linear

Exemplo: Considere $V = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ e $W = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$, onde $\mathbf{v_1} = (1, 2)$, $\mathbf{v_2} = (0, 1)$ e $\mathbf{v_3} = (-1, 1)$. Vimos que V é LD e W é LI. Mostremos que $\mathbf{v_3}$ é combinação linear de $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$.

De fato,

$$\mathbf{v_3} = \alpha_1 \mathbf{v_1} + \alpha_2 \mathbf{v_2} \Leftrightarrow$$
$$(-1, 1) = \alpha_1(1, 2) + \alpha_2(0, 1) = (\alpha_1, 2\alpha_1 + \alpha_2)$$

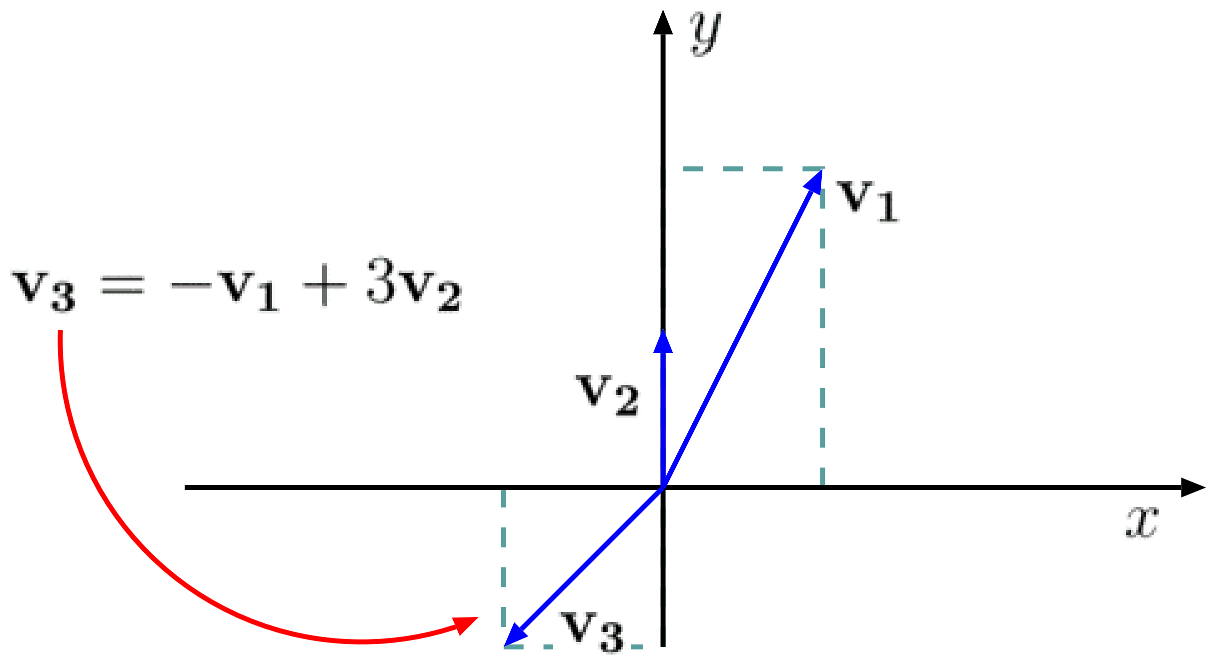
Logo, $\boxed{\alpha_1 = -1 \wedge \alpha_2 = 3}$

Ou seja, $\boxed{\mathbf{v_3} = -\mathbf{v_1} + 3\mathbf{v_2}}$

2.7 - Dependência e Independência Linear

➡ Pode-se mostrar também que:

$$\begin{cases} \mathbf{v_1} = 3\mathbf{v_2} - \mathbf{v_3} \\ \mathbf{v_2} = \frac{1}{3}\mathbf{v_1} + \frac{1}{3}\mathbf{v_3} \end{cases}$$



2.7 - Dependência e Independência Linear

Propriedades de Dependência e Independência Linear

Seja V um espaço vetorial.

1) Se $S = \{\mathbf{v}\} \subset V \wedge \mathbf{v} \neq 0$ então S é LI.

2) Considera-se, por definição, que $\emptyset \subset V$ é LI.

3) Se $S_1 \subset S$ é LD $\Rightarrow S$ é LD.

4) Se S é LI então $S_1 \subset S$ também é LI.

5) Se $S_1 = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n}\} \subset V$ é LI e $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n}, \mathbf{w}\} \subset V$ é LD, então $w = \alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} + ... + \alpha_n\mathbf{v_n}$

Exercícios

- Fazer os exercícios das páginas 183 e 184 do livro texto.

2.8 - Base e dimensão

2.8.1 - Base de um espaço vetorial V

Um conjunto $B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n}\} \subset V$ é uma base do espaço vetorial V se:

a) B é LI

b) B gera $V \Leftrightarrow [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n}] = V$

2.8 - Base e dimensão

- Exemplo 1: $B = \{(1,0) \text{ e } (1,1)\}$ é base do $\mathbb{R}^2$:

  a) B é LI

  $\alpha_1(1,0) + \alpha_2(1,1) = (0,0) \Leftrightarrow$

  $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2) = (0,0) \Leftrightarrow \boxed{\alpha_1 = \alpha_2 = 0}$

  b) $[B] = \mathbb{R}^2$. Seja $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Então:

  $(x,y) = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(1,1) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2)$

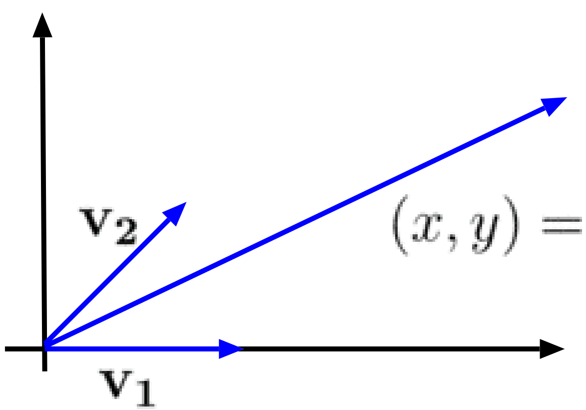
  Logo, $\boxed{\alpha_2 = y \text{ e } \alpha_1 = x - y}$

2.8 - Base e dimensão

Assim, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, têm-se:

$$(x,y) = (x-y)(1,0) + y(1,1)$$

De a) e b) têm-se que B é uma base do $\mathbb{R}^2$.



$$(x,y) = (x-y)\mathbf{v_1} + y\mathbf{v_2}$$

2.8 - Base e dimensão

Observações:

1) Quando $B = \{(1,0),(0,1)\}$ então B é uma base de $\mathbb{R}^2$, denominada canônica. De fato:

a) B é LI, pois
$\alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

b) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \boxed{(x,y) = x(1,0) + y(0,1)}$

2) De forma análoga temos que:
$B = \{(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,1)\}$
é uma base do $\mathbb{R}^n$, denominada base canônica.

3) Para $B = \{1\}$ então temos a base canônica do $\mathbb{R}$.

2.8 - Base e dimensão

- Exemplo 2:
Seja

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Mostre que B é uma base para $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

2.8 - Base e dimensão

De fato:

a) B é LI, pois:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, $\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$

b) $[B] = M_{22}$, pois:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.8 - Base e dimensão

- Exemplo 3:
  $B = \{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ é uma base do espaço vetorial P_n. De fato,

  a) B é LI, pois:
  $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_n x^n = 0$
  Logo, $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$

  b) Seja $p \in P_n$ então
  $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$. Logo p é uma combinação linear de B. Portanto, B é uma base para P_n, chamada de base canônica.
  Observe que a base B tem $(n+1)$ vetores: $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$

2.8 - Base e dimensão

- Exemplo 4:
  $B = \{(1,-1),(3,-3)\}$ não é uma base de $\mathbb{R}^2$, pois B é LD.

- Exemplo 5:
  $B = \{(1,-1)\}$ não é uma base de $\mathbb{R}^2$, pois B não gera o $\mathbb{R}^2$.
  De fato, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) \neq \alpha_1(1,-1)$

2.8 - Base e dimensão

Observação: Todo conjunto LI de um espaço vetorial V é base do subespaço por ele gerado.

- Exemplo:
  $B = \{(1, 2, 1), (-1, -3, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ é LI e gera o subespaço
  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 3x - y - z = 0\}$.
  Então B é uma base de S.

2.8 - Base e dimensão

Teorema:
Se $B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n}\}$ é uma base de um espaço vetorial V, então todo conjunto com mais de $\underline{n}$ vetores é LD.

De fato,
Seja $B' = \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \cdots, \mathbf{w_m}\}$ um conjunto de m vetores de V, com $m > n$. Queremos mostrar que B' é LD. Sejam $x_1, x_2, \cdots, x_m$ não todos nulos tais que:

$$\boxed{x_1\mathbf{w_1} + x_2\mathbf{w_2} + \ldots + x_m\mathbf{w_m} = \mathbf{0}} \quad ①$$

2.8 - Base e dimensão

Como B é uma base de V e $\mathbf{w_i} \in B' \subset V$ então $\exists\ \alpha_i, \beta_i, ..., \eta_i$ tal que:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{w_1} & = & \alpha_1\mathbf{v_1} & + & \alpha_2\mathbf{v_2} & + & ... & + & \alpha_n\mathbf{v_n} \\ \mathbf{w_2} & = & \beta_1\mathbf{v_1} & + & \beta_2\mathbf{v_2} & + & ... & + & \beta_n\mathbf{v_n} \\ \vdots & = & \vdots & + & \vdots & + & ... & + & \vdots \\ \mathbf{w_m} & = & \eta_1\mathbf{v_1} & + & \eta_2\mathbf{v_2} & + & ... & + & \eta_n\mathbf{v_1} \end{array}\right. \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1) e ordenando os termos:

$$\begin{array}{rcl} (\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + ... + \eta_1 x_m)\mathbf{v_1} & + & \\ (\alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \eta_2 x_m)\mathbf{v_2} & + & \\ \vdots & & \\ (\alpha_n x_1 + \beta_3 x_2 + ... + \eta_n x_m)\mathbf{v_n} & = & \mathbf{0} \end{array} \quad (3)$$

2.8 - Base e dimensão

Como os vetores $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n}\}$ são uma base para V então eles são LI. Então,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} \alpha_1 x_1 & + & \beta_1 x_2 & + & \ldots & + & \eta_1 x_m & = & 0 \\ \alpha_2 x_1 & + & \beta_2 x_2 & + & \ldots & + & \eta_2 x_m & = & 0 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \ldots & = & 0 \\ \alpha_n x_1 & + & \beta_n x_2 & + & \ldots & + & \eta_n x_m & = & 0 \end{array} \right.$$

Sendo $m > n$, o sistema admite mais de uma solução, além da solução trivial.
$\therefore B' = \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \cdots, \mathbf{w_m}\}$ é LD. ■

2.8 - Base e dimensão

Corolário: Duas bases quaisquer de um espaço vetorial têm o mesmo número de vetores.
De fato, sejam

$$A = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n}\}$$
$$B = \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \cdots, \mathbf{w_m}\}$$

duas bases para V.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Como } A \text{ é base e } B \text{ é LI} \Rightarrow n \geq m \\ \text{Como } B \text{ é base e } A \text{ é LI} \Rightarrow m \geq n \end{array}\right\} m = n$$

2.8 - Base e dimensão

Exemplos:

1) A base canônica do $\mathbb{R}^3$ tem três vetores. Logo, qualquer base do $\mathbb{R}^3$ tem três vetores.

2) A base canônica de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tem quatro vetores. Portanto, toda base do $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tem quatro vetores.

3) A base canônica de P_n tem $(n+1)$ vetores. Portanto, toda base do P_n tem $(n+1)$ vetores.

2.8 - Base e dimensão

2.8.2 - Dimensão de um espaço vetorial V

Definição: A dimensão de um espaço vetorial V não nulo é o número de vetores de uma base para V.
Denota-se por dim V.

Se V não possui base, dim $V = 0$ (por exemplo, $V = \{0\}$ é LD)

Exemplos:

1) dim $\mathbb{R} = 1$

2) dim $\mathbb{R}^n = n$

3) dim $M_{2\times 2} = 4$

4) dim $M_{m\times n} = m \times n$

5) dim $P_n = n + 1$

2.8 - Base e dimensão

Observação: Seja V um espaço vetorial, $\dim V = n$. Se $S \subset V$ é um subespaço de $V \Rightarrow \dim S \leq n$. Se $\dim S = n \Rightarrow S = V$.

Suponha $V = \mathbb{R}^3$. Então se $S \subset \mathbb{R}^3$, temos $\dim S = 0, 1, 2$ ou 3

a) $\dim S = 0 \Rightarrow S = \{0\}$

b) $\dim S = 1 \Rightarrow S$ é uma reta, passando pela origem

c) $\dim S = 2 \Rightarrow S$ é um plano, passando pela origem

d) $\dim S = 3 \Rightarrow S = \mathbb{R}^3$

2.8 - Base e dimensão

Teorema: Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Qualquer conjunto de vetores LI em V é parte de uma base, isto é, pode ser completado até formar uma base de V.

Demonstração: Exercício

2.8 - Base e dimensão

Exemplo: Sejam $\mathbf{v_1} = (1, 0, 2)$ e $\mathbf{v_2} = (0, -1, 3)$.
Complete o conjunto $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ de modo a formar uma base do $\mathbb{R}^3$.
Sabemos que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Deve-se acrescentar um vetor
$\mathbf{v_3} = (a, b, c) \neq \alpha_1 \mathbf{v_1} + \alpha_2 \mathbf{v_2} = (\alpha_1, -\alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2)$
Existem infinitos vetores, por exemplo,
$\mathbf{v_3} = (2, -1, 0)$.
$\therefore \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$

2.8 - Base e dimensão

<u>Teorema</u>: Seja $B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n}\}$ uma base de um espaço vetorial V. Então, todo vetor $\mathbf{v} \in V$ se exprime de maneira única como combinação linear dos vetores de B.

2.8 - Base e dimensão

Demonstração:

$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} + ... + \alpha_n\mathbf{v_n}$ (1)

Suponha, por absurdo, que $\mathbf{v}$ pode ser representado por:

$\mathbf{v} = \beta_1\mathbf{v_1} + \beta_2\mathbf{v_2} + ... + \beta_n\mathbf{v_n}$ (2)

Subtraindo membro a membro, temos:

$\mathbf{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{v_1} + (\alpha_2 - \beta_2)\mathbf{v_2} + ... + (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{v_n}$

Sendo $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n}\}$ uma base $\Rightarrow$ LI. Assim,

$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = ... = \alpha_n - \beta_n = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_i = \beta_i}$

$\therefore$ A representação de $\mathbf{v}$ é única.

Exercícios

- Fazer os exercícios das páginas 191 a 193 do livro texto.

Álgebra Linear

Aula 4: Espaços Vetoriais 3

Mauro Rincon

Márcia Fampa

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

2.9.1 - Conjunto Ortogonal de Vetores

- Definição: Seja V um espaço vetorial. Diz-se que um conjunto de vetores $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ é ortogonal se dois vetores quaisquer, distintos, são ortogonais, ou seja:

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0, \text{ para } i \neq j$$

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

- Exemplo:
  $B = \{(1, 2, -3); (3, 0, 1); (1, -5, -3\} \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto ortogonal.
  De fato:

$$(1, 2, -3) \cdot (3, 0, 1) = (1 \cdot 3) + (2 \cdot 0) + (-3 \cdot 1) = 0$$
$$(1, 2, -3) \cdot (1, -5, -3) = (1 \cdot 1) + (2 \cdot -5) + (-3 \cdot -3) = 0$$
$$(3, 0, 1) \cdot (1, -5, -3) = (3 \cdot 1) + (0 \cdot -5) + (1 \cdot -3) = 0$$

$\therefore$ os vetores são ortogonais.

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

Teorema: Um conjunto ortogonal de vetores não-nulos $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é LI.
De fato:

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \quad (1)$$

Seja $\mathbf{v}_i \in A$ e façamos o produto escalar em (1)

$$(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n) \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \cdot \mathbf{v}_i = 0 \Leftrightarrow$$
$$\alpha_1(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_i) + \alpha_2(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_i) + \ldots + \alpha_n(\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_i) = 0$$

Como A é ortogonal $\Rightarrow (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j) = 0$ se $i \neq j$.
Logo $\alpha_i(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) = 0$. Como $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_i = 0$
$\therefore A$ é LI.

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

2.9.2 - Base Ortogonal

- Diz-se que uma base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de V é ortogonal se o conjunto de vetores é um conjunto ortogonal.

- Exemplo:
  $\{(1, 2, -3); (3, 0, 1); (1, -5, -3)\}$ é uma base ortogonal do $\mathbb{R}^3$.

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

2.9.3 - Base Ortonormal

- Definição: Uma base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de um espaço vetorial V é ortonormal se B é uma base ortogonal e todos os seus vetores são unitários $|\mathbf{v}_i| = 1$, ou seja:

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq j \\ 1 \text{ se } i = j \end{cases}$$

Note que $1 = |\mathbf{v}_i| = \sqrt{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i} \Rightarrow \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = 1.$

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

- Exemplos:

1) $B = \{(1,0);(0,1)\}$ é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^2$.

$(1,0)\cdot(0,1) = 0$(ortogonal)

$(1,0)\cdot(1,0) = 1$(unitário)

$(0,1)\cdot(0,1) = 1$(unitário)

2) $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, onde $\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ \mathbf{u}_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right) \\ \mathbf{u}_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{cases}$

Tem-se que:

$\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_3 = 0$ (são ortogonais)

$\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_3 = 1$ (unitários)

Logo B é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$.

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

- Base Ortogonal $\Rightarrow$ Base Ortonormal

  Vimos que se $\mathbf{v}$ é um vetor não nulo então $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ é unitário ($|\mathbf{u}| = 1$).
  Diz-se neste caso, que $\mathbf{v}$ está normalizado.
  Assim se $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ é umas base ortogonal, então:

$$\widehat{B} = \left\{ \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}, \frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|}, \ldots, \frac{\mathbf{v}_n}{|\mathbf{v}_n|} \right\}$$

  é uma base ortonormal.

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

- Exemplo:
  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, sendo $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, 1, 1)$ e $\mathbf{v}_3 = (0, -1, 1)$.
  Temos que $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = 0$. ($B$ é ortogonal)
  Mas $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 3$, $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = 6$, $\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3 = 2$, ou seja $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ não são unitários.
  Mas $|\mathbf{v}_1| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{v}_2| = \sqrt{6}$, $|\mathbf{v}_3| = \sqrt{2}$.
  Então:
  $$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1) \right\}$$
  é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$.

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

2.9.4 - Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

- Teorema: Seja $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$: base de V. Então existe uma base ortogonal

$$\widehat{B} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\} \text{ para } V$$

Demonstração: Suponhamos que B não seja ortogonal. Considere:

$$\boxed{\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1} \quad (1)$$

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

Queremos determinar α na igualdade:

$$\boxed{\mathbf{w_2} = \mathbf{v}_2 - \alpha\mathbf{w}_1} \quad ②$$

de forma que:

$$0 = \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_1 = (\mathbf{v}_2 - \alpha\mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1 - \alpha\mathbf{w}_1\mathbf{w}_1$$

Logo

$$\boxed{\alpha = \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}}$$

Substituindo α em ② :

$$\boxed{\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\right) \cdot \mathbf{w}_1} \quad ③$$

Assim $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ são ortogonais.

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

Considere agora o vetor:

$$\boxed{\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_2 \mathbf{w}_2 - \alpha_1 \mathbf{w}_1}$$

Queremos determinar α_1 e α_2 tal que:

$$\mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{w}_2 = 0, \text{ isto é:}$$

$$0 = (\mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{w}_1) = (\mathbf{v}_3 - \alpha_2 \mathbf{w}_2 - \alpha_1 \mathbf{w}_1) \cdot \mathbf{w}_1$$
$$0 = (\mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{w}_2) = (\mathbf{v}_3 - \alpha_2 \mathbf{w}_2 - \alpha_1 \mathbf{w}_1) \cdot \mathbf{w}_2$$

Logo:

$$(\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1) - \alpha_2(\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_1) - \alpha_1(\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1) = 0$$
$$(\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2) - \alpha_2(\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2) - \alpha_1(\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2) = 0$$

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

Mas $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ são ortogonais. Logo:

$$(\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1) - \alpha_1(\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1) = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}}$$

$$(\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2) - \alpha_2(\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2) = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2}}$$

Logo:

$$\boxed{\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \left(\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2}\right) \cdot \mathbf{w}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\right) \cdot \mathbf{w}_1} \quad (4)$$

Assim $\mathbf{w}_3$ é ortogonal a $\mathbf{w}_1$ e a $\mathbf{w}_2$.

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

Pode-se concluir o teorema por indução.
Suponha, por este processo, que tenham sido obtidos $(n-1)$ vetores:

$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_{n-1}$ e considera-se o vetor:

$$\boxed{\mathbf{w}_n = \mathbf{v}_n - \alpha_{n-1}\mathbf{w}_{n-1} - \ldots - \alpha_2\mathbf{w}_2 - \alpha_1\mathbf{w}_1} \quad (5)$$

Queremos determinar $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}\}$ tais que:

$$\mathbf{w}_n \cdot \mathbf{w}_i = 0, \;\; i = 1, 2, \ldots, n-1$$

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

Fazendo o produto escalar de 5 com $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_{n-1}$, obtem-se:

$$\begin{cases} \mathbf{w}_n \cdot \mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{w}_1 - \alpha_1(\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1) = 0 \\ \mathbf{w}_n \cdot \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{w}_2 - \alpha_2(\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2) = 0 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_n \cdot \mathbf{w}_{n-1} = \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{w}_{n-1} - \alpha_{n-1}(\mathbf{w}_{n-1} \cdot \mathbf{w}_{n-1}) = 0 \end{cases}$$

Logo:

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}, \alpha_2 = \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2}, \ldots, \alpha_{n-1} = \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{w}_{n-1}}{\mathbf{w}_{n-1} \cdot \mathbf{w}_{n-1}}}$$

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

Substituindo em 5 tem-se que $\mathbf{w}_n$ é ortogonal $\mathbf{w}_{n-1}, \mathbf{w}_{n-2}, \ldots, \mathbf{w}_1$.

$$\widehat{B} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$$

é uma base ortogonal para V.

$$B' = \left\{ \frac{\mathbf{w}_1}{|\mathbf{w}_1|}, \frac{\mathbf{w}_2}{|\mathbf{w}_2|}, \ldots, \frac{\mathbf{w}_n}{|\mathbf{w}_n|} \right\}$$

é uma base ortonormal para V.

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

Exemplo:
$B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v}_2\}$, base do $\mathbb{R}^2$, onde $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$.
Use o Processo de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal do $\mathbb{R}^2$.

- Etapa 1: Base Ortogonal

  1) $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (1, 0)$

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

2)

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\right) \cdot \mathbf{w}_1$$

Mas

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1 = (1,1) \cdot (1,0) = 1$$
$$\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1 = (1,0) \cdot (1,0) = 1$$

Então:

$$\boxed{\mathbf{w}_2 = (1,1) - \left(\frac{1}{1}\right) \cdot (1,0) = (1,1) - (1,0) = (0,1)}$$

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

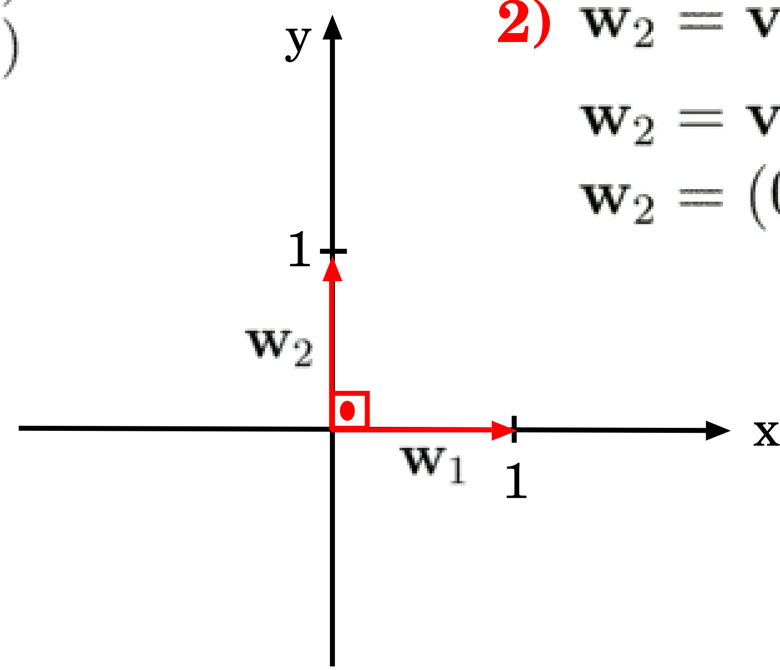
$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = (1,0) \\ \mathbf{v}_2 = (1,1) \end{cases}$$

1) $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (1,0)$

2) $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\right) \cdot \mathbf{w}_1$

$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{w}_1$

$\mathbf{w}_2 = (0,1)$



Animar Voltar

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

- Exemplo:
  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, base do $\mathbb{R}^3$, onde $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, -1)$ e $\mathbf{v}_3 = (-1, 2, 3)$.
  Use o Processo de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$.

  - Etapa 1: Base Ortogonal

    1) $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

2)

$$\mathbf{w}_{=}\mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\right) \cdot \mathbf{w}_1$$

Mas

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1 = (-1, 0, -1) \cdot (1, 1, 1) = -2$$
$$\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1 = (1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1) = 3$$

Então:

$$\boxed{\mathbf{w}_2 = (-1, 0, -1) - \left(\frac{-2}{3}\right) \cdot (1, 1, 1) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)}$$

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

3) $$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \left(\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2}\right) \cdot \mathbf{w}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\right) \cdot \mathbf{w}_1$$

Sabendo que:

$$\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2} = 1, \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1} = \frac{4}{3}$$

Então:

$$\boxed{\mathbf{w}_3 = (-1, 2, 3) - 1\left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right) - \frac{4}{3}(1, 1, 1) = (-2, 0, 2)}$$

Logo $\widehat{B} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ é ortogonal.

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

Mas:

$$|\mathbf{w}_1| = \sqrt{3}; |\mathbf{w}_2| = \frac{\sqrt{6}}{3}; |\mathbf{w}_3| = 2\sqrt{2}$$

Definindo:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{|\mathbf{w}_1|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{|\mathbf{w}_2|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{w}_3}{|\mathbf{w}_3|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-2, 0, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$$

$B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$: base ortonormal

2.10 - Complementos Ortogonais

Definição: Seja S um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Um vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ é dito ortogonal a S se ele for ortogonal a todos os vetores de S. O conjunto de todos os vetores em $\mathbb{R}^n$ que são ortogonais a S é chamado Complemento Ortogonal de S em $\mathbb{R}^n$ e é representado por $S^\perp$.
Logo:

$$S^\perp = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n; \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0, \forall \mathbf{v} \in S\}$$

Observação: $S \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbf{0} \in S^\perp$.

2.10 - Complementos Ortogonais

- Exemplo:
  Seja $V = \mathbb{R}^3$ com o produto interno usual.

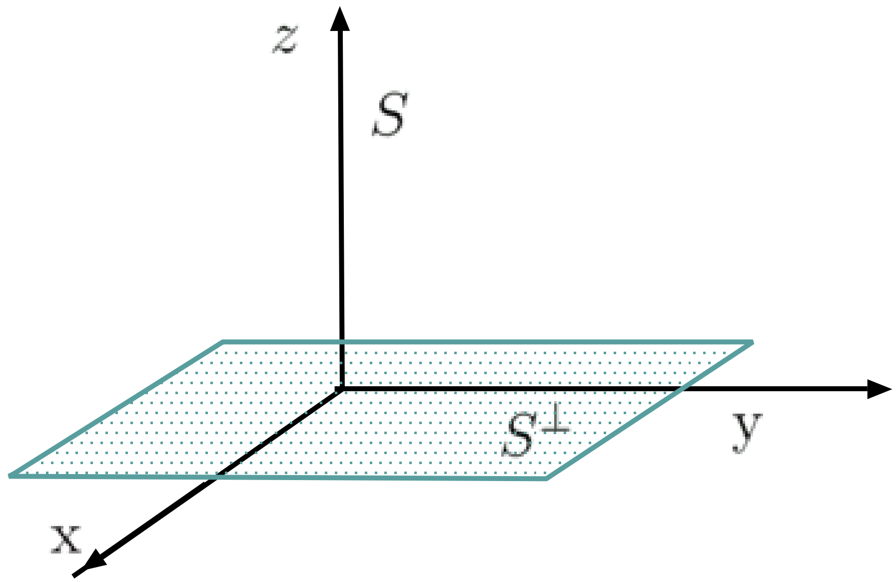
$$S = \{(0,0,c); c \in \mathbb{R}\}$$

Então

$$\mathbf{u} = (x,y,z) \in S^{\perp} \Leftrightarrow (x,y,z)\cdot(0,0,c) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x\cdot 0 + y\cdot 0 + z\cdot c \Rightarrow \boxed{z = 0} \Rightarrow$$

$$\boxed{S^{\perp} = \{(x,y,0); x,y \in \mathbb{R}\}}$$

2.10 - Complementos Ortogonais



2.10 - Complementos Ortogonais

Teorema:
Seja S um subespaço do $\mathbb{R}^n$. Então:

a) $S^{\perp}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

b) $S \cap S^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.

2.10 - Complementos Ortogonais

- Demonstração:

a) Sejam $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2 \in S^\perp \Rightarrow \begin{array}{l} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} = 0, \forall \mathbf{v} \in S \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v} = 0, \forall \mathbf{v} \in S \end{array}$

Logo $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v} = 0 + 0 = 0$.

$\therefore \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in S^\perp$.

Por outro lado temos:

$(\alpha \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}) = \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha \mathbf{u}_1 \in S^\perp$

$\therefore S^\perp$ é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^n$.

b) Seja $\mathbf{u} \in S \cap S^\perp \Rightarrow \mathbf{u} \in S$ e $\mathbf{u} \in S^\perp$.

Mas $\mathbf{u} \in S^\perp \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{u} = 0.}$

2.10 - Complementos Ortogonais

Teorema:
Seja S um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Então:

$$\mathbb{R}^n = S \oplus S^\perp$$

De fato: Se $S = \{\mathbf{0}\}$ então
$S^\perp = \mathbb{R}^n \Rightarrow S + S^\perp = \mathbb{R}^n$.
Seja $S \neq \{\mathbf{0}\}$ um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e considere
$B = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_p\}$ uma base ortonormal de S e
seja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.
Considere:

$$\boxed{\mathbf{v}_1 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \ldots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_p)\mathbf{w}_p \in S}$$

2.10 - Complementos Ortogonais

Definimos $\boxed{\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1.}$
Afirmo que: $\mathbf{v}_2 \in S^{\perp}$, ou seja, $\boxed{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_i = 0.}$
De fato:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1 &= (\mathbf{v} - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{w}_1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_1 = 0 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_3 = \ldots = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_p = 0 \end{aligned}$$

Assim, $\mathbf{v}_2 \in S^{\perp}$, pois é ortogonal a todos os vetores da base $B = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_p\}$ de S.
$\therefore$ Como $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.
Como $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n; \mathbf{v}_1 \in S$ e $\mathbf{v}_2 \in S^{\perp} \Rightarrow \mathbb{R}^n = S \oplus S^{\perp}$.
(Vimos que $S \cap S^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$)

2.11 - Projeção Ortogonal

Seja $\mathbb{R}^n = S \oplus S^\perp$, e considere $B = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_p\}$ uma base ortonormal de S. Sabemos que:

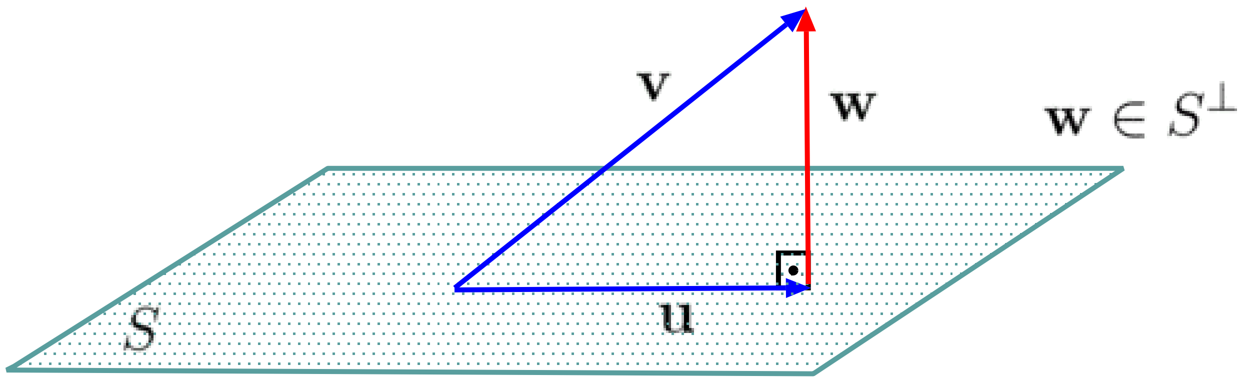
$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n; \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{u} \in S \text{ e } \mathbf{w} \in S^\perp$$

Então vimos que:

$$\boxed{\mathbf{u} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \ldots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_p)\mathbf{w}_p \in S}$$

O vetor $\mathbf{u}$ é chamado de projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre S e representa-se $\mathbf{u} = \text{proj}_s \mathbf{v}$.

2.11 - Projeção Ortogonal



2.11 - Projeção Ortogonal

Observação: Se $B = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_p\}$ é uma base ortogonal de S então:

$$\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1\cdot\mathbf{w}_1}\right)\mathbf{w}_1 + \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2\cdot\mathbf{w}_2}\right)\mathbf{w}_2 + \ldots + \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_p}{\mathbf{w}_p\cdot\mathbf{w}_p}\right)\mathbf{w}_p$$

$$\boxed{\mathbf{u} = \mathrm{proj}_S\mathbf{v}}$$

2.11 - Projeção Ortogonal

Exemplo: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ com base ortonormal $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, onde:

$$\mathbf{w}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}\right) \text{ e } \mathbf{w}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Seja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3; \mathbf{v} = (2, 1, 3)$. Determine a projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ em S e o vetor $\mathbf{w} \in S^\perp$.
Por definição:

$$\mathbf{u} = \text{proj}_S \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2$$

2.11 - Projeção Ortogonal

Mas

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_1) = (2,1,3)\cdot\left(\tfrac{2}{3},\tfrac{-1}{3},\tfrac{-2}{3}\right) = \tfrac{-1}{3}$$
$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_2) = (2,1,3)\cdot\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{5}{\sqrt{2}}$$

Logo:

$$\mathbf{u} = \mathrm{proj}_S\mathbf{v} = \frac{-1}{3}\mathbf{w}_1 + \frac{5}{\sqrt{2}}\mathbf{w}_2 = \left(\frac{41}{18},\frac{-1}{9},\frac{49}{18}\right).$$

Por outro lado:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} \Leftrightarrow \mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u} = \left(\frac{-5}{18},\frac{10}{9},\frac{5}{18}\right)$$

2.11 - Projeção Ortogonal

Além disso a distância de $\mathbf{v}$ ao plano S:

$$||\mathbf{w}|| = ||\mathbf{v} - \mathbf{u}|| = ||\mathbf{v} - \text{proj}_S\mathbf{v}|| = 1,38889$$

- Teorema: Seja S um subespaço de $\mathbb{R}^n$ então, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ o vetor em S mais próximo de $\mathbf{v}$ é $\text{proj}_S\mathbf{v}$, ou seja,

$$\boxed{||\mathbf{v} - \text{proj}_S\mathbf{v}|| \leq ||\mathbf{v} - \mathbf{u}||, \forall \mathbf{u} \in S}$$

Exercícios

- Fazer os exercícios das páginas 231 a 236 do livro texto.

Álgebra Linear

Aula 5: Sistemas Lineares

Mauro Rincon

Márcia Fampa

3.1 - Definições

Definição 1: Uma **equação linear** nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, é uma equação do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \qquad ①$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ são constantes conhecidas.

Definição 2: Uma **solução da equação linear** ① é um conjunto de valores das variáveis, $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$, que tem a propriedade de satisfazer a equação.

3.1 - Definições

Exemplo 1:
$x_1 = 1$ e $x_2 = -3$ é uma solução da equação linear

$$5x_1 - 2x_2 = 11,$$

já que

$$5(1) - 2(-3) = 11.$$

Note que $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ também é uma solução da equação linear.

3.1 - Definições

Definição 3:
Um **sistema linear** é um conjunto de m equações lineares, cada uma delas com n variáveis consideradas simultaneamente.

②
$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

onde a_{ij} e b_i são constantes conhecidas e x_j são as variáveis do sistema linear para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

3.1 - Definições

Definição 4:

Uma **solução do sistema linear** 2 é um conjunto de valores das variáveis, $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$, que tem a propriedade de satisfazer cada uma de suas equações lineares.

3.1 - Definições

Exemplo 2:
$x_1 = 5$ e $x_2 = -2$ é solução do sistema linear de duas equações e duas variáveis

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - 5x_2 = 25 \end{cases}$$

já que

$$1(5) + 2(-2) = 1 \quad \text{e} \quad 3(5) - 5(-2) = 25.$$

3.2 - Método de Eliminação

- Uma forma de resolver um sistema linear é substituir o sistema inicial por um outro que tenha exatamente as mesmas soluções que o sistema original, mas que possa ser resolvido de forma mais rápida e simples. O outro sistema é obtido depois de aplicar sucessivamente uma série de operações sobre as equações. As operações usadas são chamadas de operações elementares.

3.2 - Método de Eliminação

Operações Elementares

- Troca de ordem das equações do sistema.
- Multiplicação de uma equação por um escalar diferente de zero.
- Adição de uma equação a um múltiplo de outra equação.

3.2 - Método de Eliminação

Exemplo 3:

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 & ① \\ 2x_1 - x_2 = 3 & ② \end{cases}$$

- Eliminando x_1:

  (-2) × ① + ②

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 & ③ \\ \quad\;\; -7x_2 = -7 & ④ \end{cases}$$

Resolvendo a equação ④, concluímos que $\boxed{x_2 = 1.}$

Substituindo este valor em ③ obtemos,

$$x_1 = 5 - 3(1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 2.}$$

3.2 - Método de Eliminação

Exemplo 4:

Considere agora o sistema linear com três equações e três variáveis

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \quad (1) \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \quad (2) \\ 4x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \quad (3) \end{array}\right.$$

- Eliminando x_1:

  (-2) $\times$ (1) + (2)

  (-4) $\times$ (1) + (3)

3.2 - Método de Eliminação

Obtemos então:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 & (4) \\ \phantom{x_1 -{}} 4x_2 - 3x_3 = 3 & (5) \\ \phantom{x_1 -{}} 8x_2 - 2x_3 = 2 & (6) \end{cases}$$

- Eliminando x_2:

  (-2) $\times$ (4) + (5)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 & (7) \\ \phantom{x_1 -{}} 4x_2 - 3x_3 = 3 & (8) \\ \phantom{x_1 - 4x_2 -{}} 4x_3 = -4 & (9) \end{cases}$$

Resolvendo a equação (9) , concluímos que $\boxed{x_3 = -1}$.

3.2 - Método de Eliminação

Substituindo este valor na equação 8 obtemos,

$$x_2 = \frac{1}{4}(3 + 3(-1)) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = 0.}$$

Finalmente, conhecidos os valores de $x_2 = 0$ e $x_3 = -1$, podemos substituí-los na equação 7 , obtendo

$$x_1 = 0 + 0 - (-1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 1.}$$

Verifica-se facilmente que os valores obtidos satisfazem as três equações do sistema simultaneamente.

3.2 - Método de Eliminação

Exemplo 5:
Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 & (1) \\ 3x_1 + 9x_2 = -2 & (2) \end{cases}$$

- Eliminando x_1:
  (-3) × (1) + (2)

O novo sistema obtido é dado por

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 & (3) \\ 0 = -17 & (4) \end{cases}$$

A equação (4) não faz sentido. Isto significa que este sistema não tem solução.

3.2 - Método de Eliminação

Exemplo 6:

Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 & (1) \\ 2x_1 + 6x_2 = 10 & (2) \end{cases}$$

- Eliminando x_1:

  (-2) × (1) + (2)

O novo sistema obtido é dado por

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 & (3) \\ 0 = 0 & (4) \end{cases}$$

- A equação (4) é sempre verdadeira.

3.2 - Método de Eliminação

A equação 3, pode ser reescrita: $\boxed{x_1 = 5 - 3x_2.}$
Portanto uma solução do sistema linear é dada por

$$\begin{cases} x_1 &= 5 - 3r \\ x_2 &= r \end{cases}, r \in \mathbb{R}$$

- Este sistema linear tem uma infinidade de soluções.
- Para cada valor de r obtemos uma diferente solução. Por exemplo,

$$\begin{array}{lcl} r = 1 \Rightarrow x_1 = 2 & \text{e} & x_2 = 1 \\ r = 0 \Rightarrow x_1 = 5 & \text{e} & x_2 = 0 \end{array}$$

são soluções do sistema.

3.3- Tipos de Soluções de um Sistema Linear

Os exemplos anteriores mostram que um sistema linear pode:

- ter uma única solução,
- não ter solução ou
- ter uma infinidade de soluções.

3.3- Tipos de Soluções de um Sistema Linear

- Analisando estas três possibilidades de um ponto de vista geométrico

  - Considere o sistema linear com duas equações e duas variáveis

$$\left\{\begin{array}{lllll} a_1x_1 & + & b_1x_2 & = & c_1 \\ a_2x_1 & + & b_2x_2 & = & c_2 \end{array}\right. \qquad (1)$$

onde a_1 e b_1 não são simultaneamente iguais a zero e nem o são a_2 e b_2.

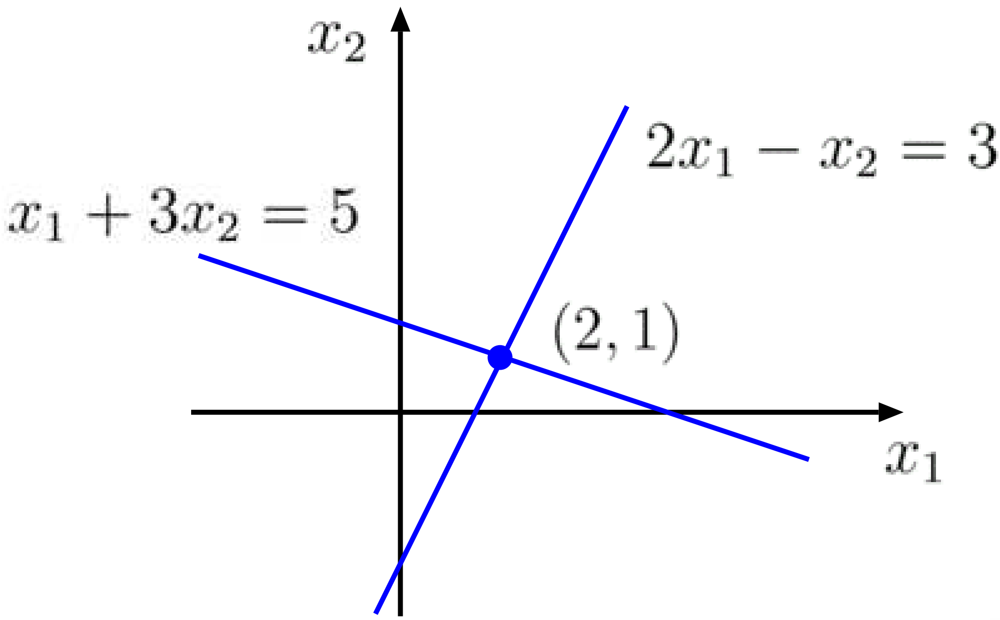
3.3- Tipos de Soluções de um Sistema Linear

- O gráfico de cada uma das equações do sistema ① é uma linha reta. Se $x_1 = s_1$ e $x_2 = s_2$ é uma solução do sistema linear, então o par (s_1, s_2) satisfaz ambas as equações e pertence às retas por elas representadas.

  As três possibilidades descritas acima podem ser ilustradas geometricamente

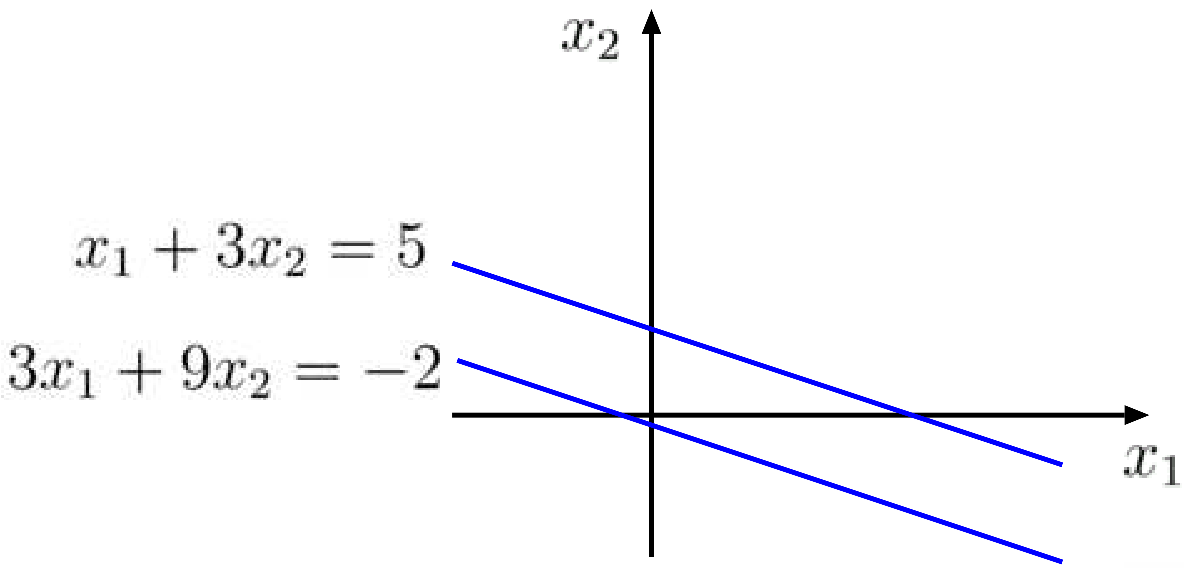
3.3- Tipos de Soluções de um Sistema Linear

1) O sistema tem exatamente uma solução. Os gráficos das equações das retas se interceptam em um ponto, como na figura abaixo, que representa o sistema linear do exemplo 3.



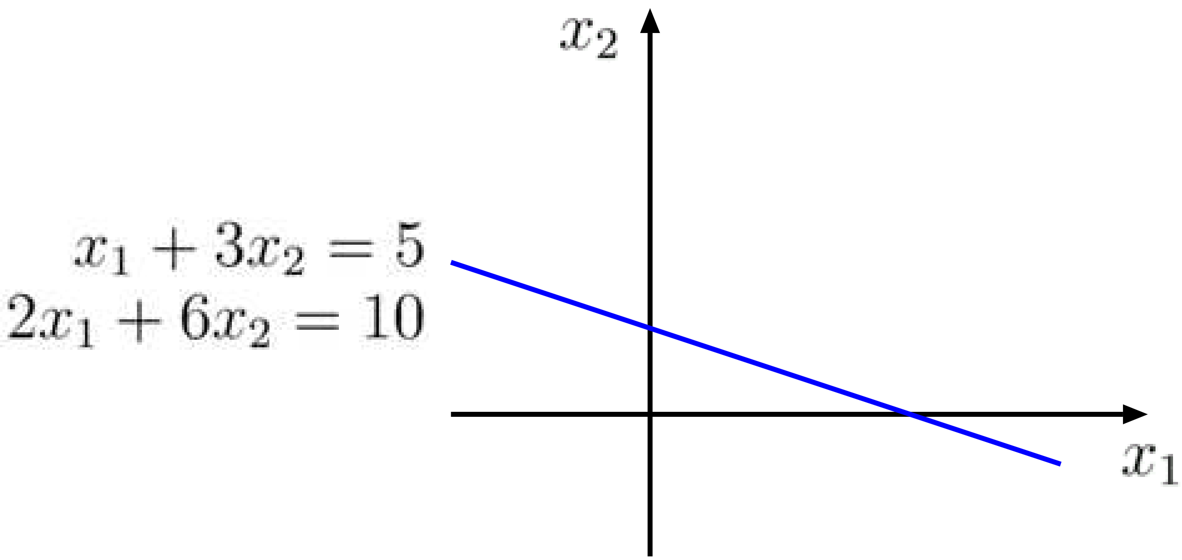
3.3- Tipos de Soluções de um Sistema Linear

2) O sistema não admite soluções. Os gráficos das equações das retas são paralelos, como na figura abaixo, que representa o sistema linear do exemplo 5. Note que não existe um único par (s_1, s_2) que pertença a ambas as retas.



3.3- Tipos de Soluções de um Sistema Linear

3) O sistema tem um número infinito de soluções. Neste caso os gráficos das equações das retas são coincidentes, como na figura abaixo, que representa o sistema do exemplo 6.



3.4 - Sistemas Lineares com $m \neq n$

Exemplo 7:

Considere agora o sistema linear com três equações e duas variáveis:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 & ① \\ 2x_1 - x_2 = 3 & ② \\ -x_1 + x_2 = -1 & ③ \end{cases}$$

- Eliminando x_1:

  (-2) $\times$ ① + ②

  ① + ③

3.4 - Sistemas Lineares com $m \neq n$

Obtemos então:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 & (4) \\ \quad\;\; -7x_2 = -7 & (5) \\ \quad\;\;\;\; 4x_2 = 4 & (6) \end{cases}$$

Resolvendo (5) ou (6), concluímos que

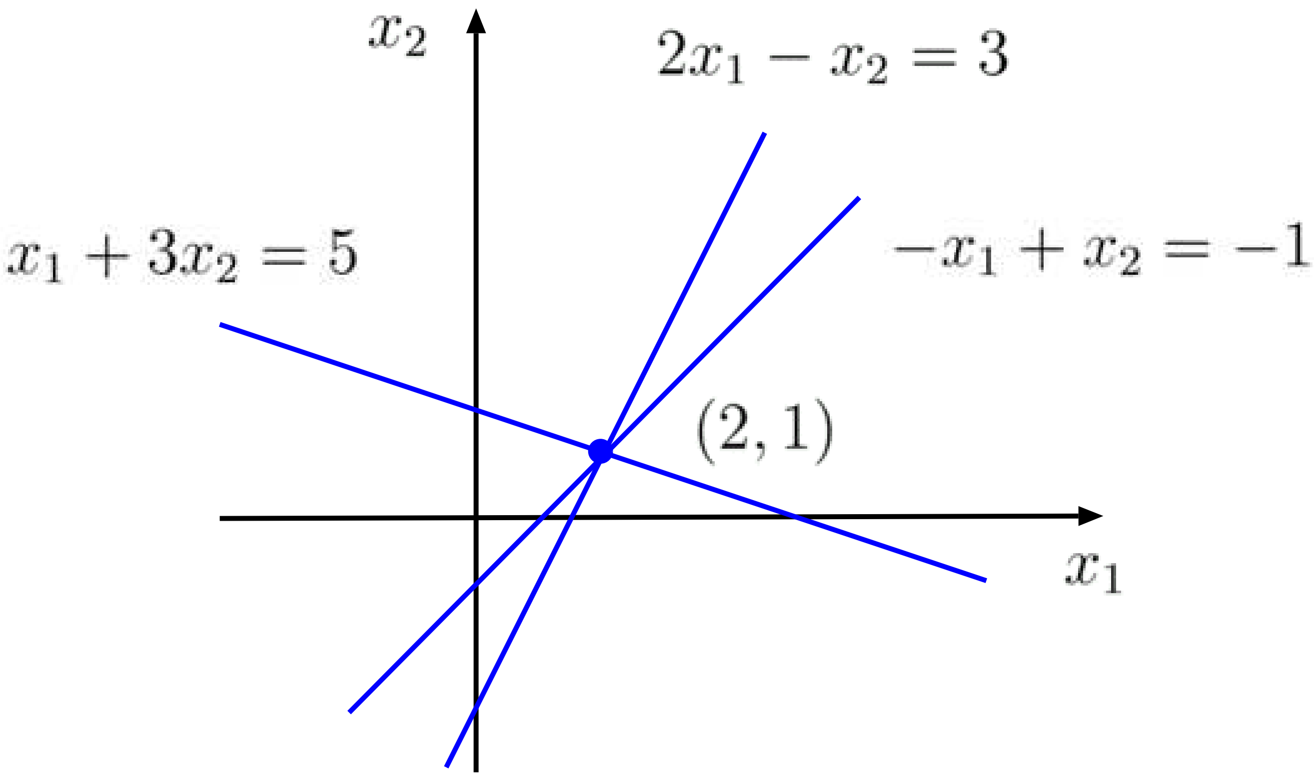
$$\boxed{x_2 = 1.}$$

Substituindo este valor na primeira equação obtemos,

$$x_1 = 5 - 3(1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 2.}$$

Analisamos este resultado graficamente, a solução do sistema é a intersecção das três retas.

3.4 - Sistemas Lineares com $m \neq n$



3.4 - Sistemas Lineares com $m \neq n$

Exemplo 8:

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 & ① \\ 2x_1 - x_2 = 3 & ② \\ -x_1 + x_2 = 3 & ③ \end{cases}$$

- Eliminando x_1:

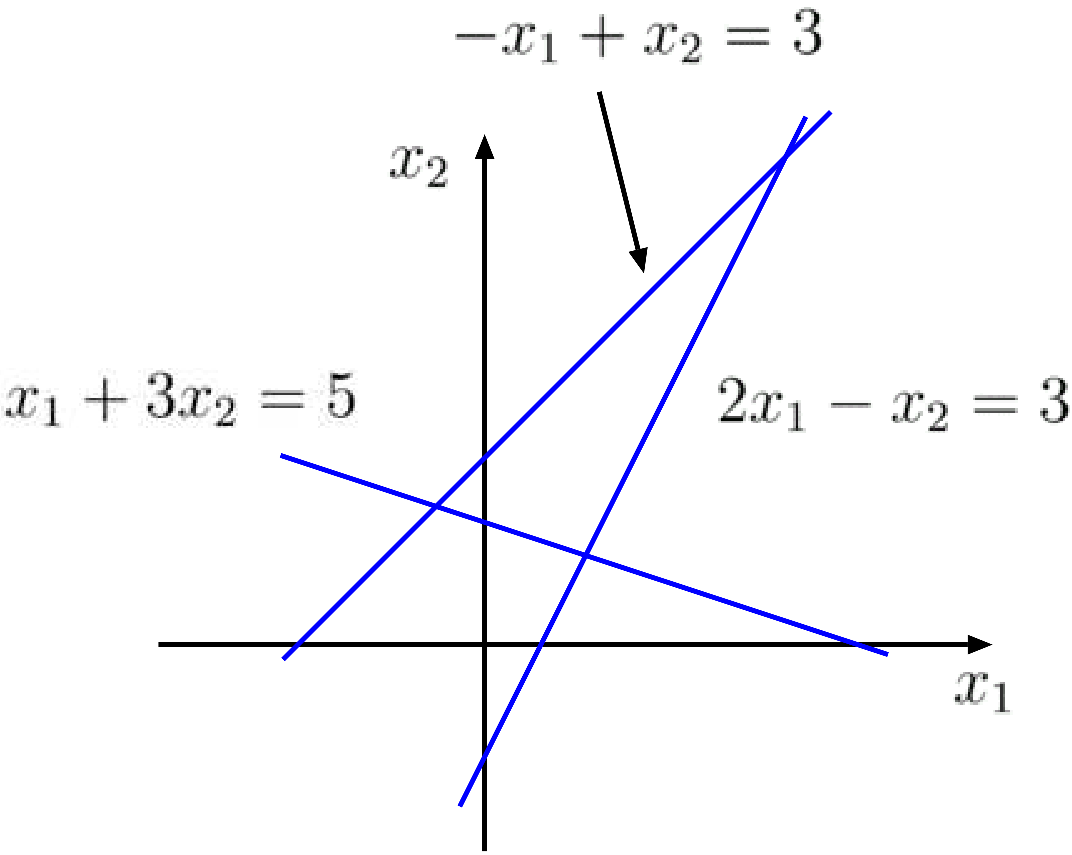
  (-2) × ① + ②

  ① + ③

Obtemos então:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 & ④ \\ -7x_2 = -7 & ⑤ \\ 4x_2 = 8 & ⑥ \end{cases}$$

3.4 - Sistemas Lineares com $m \neq n$



3.4 - Sistemas Lineares com $m \neq n$

Exemplo 9:

Considere agora o sistema linear com duas equações e três variáveis

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 & (1) \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 3 & (2) \end{cases}$$

- Eliminando x_1:

  (-2) × (1) + (2)

O novo sistema obtido é dado por

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 & (3) \\ \qquad x_2 - 3x_3 = 3 & (4) \end{cases}$$

3.4 - Sistemas Lineares com $m \neq n$

Podemos reescrever a segunda equação como

$$\boxed{x_2 = 3 + 3x_3,}$$

onde x_3 pode assumir qualquer valor real r.
Substituindo na primeira equação do sistema, obtemos

$$\boxed{x_1 = 2(3 + 3x_3) - x_3 = 6 + 5x_3.}$$

Portanto, uma solução do sistema linear é dada por

$$\left\{\begin{array}{lll} x_1 & = & 6 + 5r \\ x_2 & = & 3 + 3r \\ x_3 & = & r \end{array}\right.$$

3.4 - Sistemas Lineares com $m \neq n$

Exemplo 10:

(*Planejamento da Produção de uma Fazenda*) Um fazendeiro está planejando a estratégia de plantio do próximo ano. Por informações obtidas nos órgãos governamentais, sabe-se que as culturas de feijão, arroz e milho serão as mais rentáveis na próxima safra. O custo do plantio de feijão, arroz e milho por hectare é respectivamente R$ 10,00, R$ 12,00 e R$ 15,00. O fazendeiro dispõe de R$ 1.000,00 para investir. A área cultivável da fazenda é de 80 hectares. Que área da fazenda deve ser utilizada para o cultivo de cada um dos produtos?

3.4 - Sistemas Lineares com $m \neq n$

Para resolver este problema, sejam respectivamente, x_1, x_2 e x_3 a área (em hectares) da fazenda reservada para o plantio de feijão, arroz e milho. A área total a ser plantada é dada por

$$x_1 + x_2 + x_3,$$

logo

$$x_1 + x_2 + x_3 = 80.$$

3.4 - Sistemas Lineares com $m \neq n$

A despesa do fazendeiro com o plantio é dada por

$$10x_1 + 12x_2 + 15x_3,$$

logo

$$10x_1 + 12x_2 + 15x_3 = 1000$$

O nosso problema consiste portanto, em calcular valores não-negativos de x_1, x_2, e x_3, tais que

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 80 \quad (1) \\ 10x_1 & + & 12x_2 & + & 15x_3 & = & 1000 \quad (2) \end{array}\right.$$

3.4 - Sistemas Lineares com $m \neq n$

Para resolver este sistema linear, utilizamos o mesmo método descrito nos exemplos anteriores.

- Eliminando x_1:
  (-10) $\times$ 1 + 2

O novo sistema obtido é dado por

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 80 & (3) \\ \quad\;\; 2x_2 + 5x_3 = 200 & (4) \end{cases}$$

3.4 - Sistemas Lineares com $m \neq n$

Podemos reescrever a equação 4 como

$$x_2 = 100 - 2.5x_3,$$

onde x_3 pode assumir qualquer valor real $r \geq 0$. Substituindo na equação 3 do sistema, obtemos

$$x_1 = 80 - (100 - 2.5x_3) - x_3 = -20 + 1.5x_3.$$

Portanto, uma solução do sistema linear é dada por

$$\begin{cases} x_1 & = & -20 + 1.5r \\ x_2 & = & 100 - 2.5r \\ x_3 & = & r \end{cases}$$

3.4 - Sistemas Lineares com $m \neq n$

O sistema linear tem uma infinidade de soluções. Por exemplo, se $r = 20$, então,

$$x_1 = 10, \quad x_2 = 50, \quad x_3 = 20$$

é solução.

- Note que como $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, então r não pode assumir qualquer valor real. Por exemplo, se $r = 50$ então x_2 é negativo.

Exercícios

- Fazer os exercícios das páginas 8 e 9 do livro texto.

Álgebra Linear

Aula 6: Matriz

Mauro Rincon

Márcia Fampa

4.1 - Sistemas Equivalentes

Como vimos, o método de eliminação para resolução de sistemas lineares, consiste na aplicação repetida de operações elementares, transformando o sistema original num outro sistema, cuja solução é mais facilmente obtida. Mostraremos a seguir que a aplicação das operações elementares, transforma o sistema original num outro sistema equivalente, isto é, num outro sistema linear que possui exatamente as mesmas soluções que o sistema original.

4.1 - Sistemas Equivalentes

Teorema 1: Seja S um sistema linear. Então a solução do sistema não se altera quando:

1) Troca-se duas das equações do sistema S.

2) Multiplica-se uma das equações de S por um número real

3) Soma-se uma equação a um múltiplo de outra equação.

4.1 - Sistemas Equivalentes

Demonstração:

1) Seja $\hat{S}$ o sistema linear obtido trocando-se duas linhas do sistema S.
Se $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$ é uma solução do sistema linear S então também será uma solução de $\hat{S}$ e vice-versa.

4.1 - Sistemas Equivalentes

2) Devido a **1)** podemos supor que a equação multiplicada seja a primeira. Como as demais equações de S e $\hat{S}$ coincidem basta verificar que a afirmação é satisfeita para a primeira equação. Seja $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \cdots, x_n = \alpha_n$ uma solução de S. Então

$$a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \qquad (1)$$

4.1 - Sistemas Equivalentes

Multiplicando por $\lambda \neq 0$ esta igualdade obteremos:

$$(\lambda a_{11})\alpha_1 + (\lambda a_{12})\alpha_2 + \ldots + (\lambda a_{1n})\alpha_n = \lambda b_1, \quad ②$$

o que mostra que $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \cdots, x_n = \alpha_n$ é também uma solução de $\hat{S}$, uma vez que, para todas as equações restantes, os sistemas S e $\hat{S}$ são coincidentes. Por outro lado como $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \cdots, x_n = \alpha_n$ é solução do sistema $\hat{S}$, então a igualdade ② é verdadeira. Dividindo ② por λ obtemos ①. Portanto $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \cdots, x_n = \alpha_n$ é uma solução do sistema S.

4.1 - Sistemas Equivalentes

3) Por simplicidade, consideraremos as operações entre as duas primeiras equações do sistema S. Adicionaremos a segunda equação do sistema à primeira equação multiplicada por λ, obtendo o seguinte sistema linear $\hat{S}$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ (\lambda a_{11} + a_{21})x_1 & + & \dots & + & (\lambda a_{1n} + a_{2n})x_n & = & (\lambda b_1 + b_2) \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

4.1 - Sistemas Equivalentes

Seja $x_1 = \alpha_1, \cdots, x_n = \alpha_n$ uma solução do sistema S. Substituindo esta solução nas duas primeiras equações de S e aplicando a propriedade **2)** na primeira equação, temos:

$$\begin{array}{ccccccc} (\lambda a_{11})\alpha_1 & + & \dots & + & (\lambda a_{1n})\alpha_n & = & \lambda b_1 \\ a_{21}\alpha_1 & + & \dots & + & a_{2n}\alpha_n & = & b_2 \end{array}$$

Somando as duas equações acima e colocando o termo α_i em evidência, obtemos

$$(\lambda a_{11} + a_{21})\alpha_1 + \ldots + (\lambda a_{1n} + a_{2n})\alpha_n = (\lambda b_1 + b_2)$$

4.1 - Sistemas Equivalentes

Logo $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \cdots, x_n = \alpha_n$ satisfaz a segunda equação de $\hat{S}$. Como o restante das equações de S e $\hat{S}$ são idênticas,
$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \cdots, x_n = \alpha_n$ satisfaz a todas as equações de $\hat{S}$, e é portanto uma solução do sistema $\hat{S}$.
Mostre que toda solução de $\hat{S}$ é também solução de S.

4.2 - Matrizes

Definição: Uma matriz $m \times n$ real é uma sucessão de números reais, distribuídos em m linhas e n colunas, denotado por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

4.2 - Matrizes

Abreviadamente esta matriz pode ser expressa por (a_{ij}), onde $i = 1, 2 \cdots m$ e $j = 1, 2, \cdots n$, representam, respectivamente, as linhas e colunas da matriz. O símbolo a_{ij} que representa indistintamente todos os termos da matriz é denominado termo geral da matriz. A **i-ésima linha** é dada por

$$\boxed{[a_{i1} \quad a_{i2} \cdots a_{in}] \qquad (1 \leq i \leq m);}$$

4.2 - Matrizes

e a **j-ésima coluna** de **A** é dada por

$$\boxed{\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \qquad (1 \leq j \leq n)}$$

Dizemos que **A** é **m** por **n**, denotando por $m \times n$, quando a matriz tem m linhas e n colunas. Se $m = n$, dizemos que **A** é uma matriz quadrada de ordem n, e nesse caso, os números $a_{11}, a_{22}, \cdots a_{nn}$ formam a **diagonal principal** de **A**.

4.2 - Matrizes

Exemplo 1: Sejam as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow 3 \times 2 \qquad a_{32} = 5$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow 2 \times 3 \qquad b_{13} = 4$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -7 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow 2 \times 1 \qquad d_{21} = 8$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow 3 \times 3 \qquad c_{33} = 5$$

Os elementos c_{11} , c_{22} , c_{33} em C formam a diagonal principal.

$$\mathbf{F} = [2] \Rightarrow 1 \times 1 \qquad f_{11} = 2$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} 1 \times 3 \qquad e_{12} = 0$$

Animar Voltar

cederj

4.2 - Matrizes

- Uma matriz $1 \times n$ ou $n \times 1$ é também chamada de um **vetor de dimensão** n ou simplesmente de **vetor** e será denotada por letras minúsculas, enquanto as matrizes são denotadas por letras maiúsculas do alfabeto.

4.2 - Matrizes

Exemplo 2:

$\mathbf{u} = [1\ 2\ 4\ 7\ 8]$ é um vetor de dimensão 5 e

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ é um vetor de dimensão } 3\ .$$

4.2 - Matrizes

Definição: Uma matriz quadrada $\mathbf{A} = (a_{ij})$ com todos os elementos fora da diagonal são nulos, ou seja, $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$, é denominada **matriz diagonal**.

Exemplo 3:
As matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

são exemplos de matrizes diagonais.

4.2 - Matrizes

Definição:

Duas matrizes $m \times n$, $\mathbf{A} = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, são ditas iguais se $a_{ij} = b_{ij}$ para $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, ou seja, se os elementos correspondentes forem iguais.

Exemplo 4:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & x & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} y & 2 & z \\ t & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Então $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ se e somente se

$x = -1, \quad y = 1, \quad t = 0, \quad z = 1.$

4.3 - Adição de Matrizes

Definição: Sejam $\mathbf{A} = (a_{ij})$ e $\mathbf{B} = (b_{ij})$ matrizes $m \times n$, a soma de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ é uma matriz $m \times n$, $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ definida por

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad 1 \leq i \leq m \quad 1 \leq j \leq n}$$

4.3 - Adição de Matrizes

Exemplo 5: Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Então

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+2 & 1+5 \\ -2+(-3) & 3+(-1) & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 6 \\ -5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Observe que a operação de adição entre matrizes, está definida somente quando ambas as matrizes tem o mesmo tamanho, ou a mesma ordem.

4.4 - Multiplicação por um escalar

Definição:

Se $\mathbf{A} = (a_{ij})$ é uma matriz $m \times n$ e α é um número real, o produto de $\mathbf{A}$ por α é a matriz $m \times n$, $\mathbf{B} = \alpha\mathbf{A}$, onde

$$\boxed{b_{ij} = \alpha a_{ij} \qquad 1 \leq i \leq m \quad 1 \leq j \leq n.}$$

Ou seja, os elementos b_{ij} são obtidos multiplicando-se o correspondente elemento a_{ij} da matriz $\mathbf{A}$ por α.

4.4 - Multiplicação por um escalar

Exemplo 6:

Sejam $\alpha = 2$ e $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Então

$$\mathbf{B} = \alpha\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (2)(2) & (2)(-3) & (2)(0) \\ (2)(-2) & (2)(1) & (2)(4) \\ (2)(0) & (2)(3) & (2)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 \\ -4 & 2 & 8 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes $m \times n$, então a diferença entre $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, denotada por $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-1)\mathbf{B}$.

4.4 - Multiplicação por um escalar

Exemplo 7:

Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Então

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1-3 & 2-2 & 1-5 \\ -2-(-3) & 3-(-1) & 0-0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

4.5 - Matriz Transposta

Definição:

Se $\mathbf{A} = (a_{ij})$ é uma matriz $m \times n$, então a matriz $n \times m$, $\mathbf{A}^t = (a^t_{ij})$, satisfazendo a condição

$$\boxed{a^t_{ij} = a_{ji} \qquad 1 \leq i \leq m \quad 1 \leq j \leq n,}$$

é chamada de transposta de $\mathbf{A}$. Assim para obter a transposta de $\mathbf{A}$, basta permutar as linhas pelas colunas.

4.5 - Matriz Transposta

Exemplo 8: Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -7 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & \boxed{-2} \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^t = \begin{bmatrix} -7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^t = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Animar Voltar

Exercícios

- Fazer os exercícios da páginas 13 a 15 do livro texto.

4.6 - Produto Escalar

Definição:

O **produto escalar** ou **produto interno** de dois vetores de dimensão n

$$\mathbf{a} = [a_1 \quad \boxed{a_2} \quad \ldots \quad a_n] \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \boxed{b_2} \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

é definido por

$$\boxed{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + \boxed{a_2 b_2} + \ldots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.}$$

4.6 - Produto Escalar

Exemplo 1:
O produto escalar dos vetores

$$\mathbf{a} = [1 \quad 5 \quad -3] \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

é dado por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (1)(3) + (5)(0) + (-3)(-2) = 9$$

4.7 - Multiplicação de Matrizes

Definição:

Seja $\mathbf{A} = (a_{ij})$, uma matriz $m \times p$ e $\mathbf{B} = (b_{ij})$, uma matriz $p \times n$. O **produto** de **A** por **B**, denotado por **AB** é a matriz $\mathbf{C} = (c_{ij})$, $m \times n$ definida por

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}}$$

para $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

4.7 - Multiplicação de Matrizes

$$
\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \boxed{c_{ij}} & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}
$$

4.7 - Multiplicação de Matrizes

Observação:

O produto $\mathbf{AB}$ está definido apenas quando o número de colunas de $\mathbf{A}$ é igual ao número de linhas de $\mathbf{B}$. Neste caso, o número de linhas do produto $\mathbf{AB}$ é igual ao número de linhas de $\mathbf{A}$ e o número de colunas de $\mathbf{AB}$ é igual ao número de colunas de $\mathbf{B}$.

$$\underset{m \times p}{\mathbf{A}} \qquad \underset{p \times n}{\mathbf{B}} \quad = \quad \underset{m \times n}{\mathbf{AB}}$$

iguais

tamanho de **AB**

4.7 - Multiplicação de Matrizes

Exemplo 2:
Considere as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

O produto de **A** por **B** é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} (4)(5)+(3)(-2)+(1)(1) & (4)(-1)+(3)(4)+(1)(3) \\ (2)(5)+(5)(-2)+(-1)(1) & (2)(-1)+(5)(4)+(-1)(3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 15 & 11 \\ -1 & 15 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4.7 - Multiplicação de Matrizes

Exemplo 3: Considere as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

4.7 - Multiplicação de Matrizes

i) *Encontre o elemento* $(3,2)$ *do produto* $\mathbf{AB}$.
O elemento $(\mathbf{AB})_{3,2}$ *é dado pelo produto escalar da terceira linha de* $\mathbf{A}$ *e da segunda coluna de* $\mathbf{B}$.

$$(\mathbf{AB})_{3,2} = [-1 \quad 2 \quad 8] \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)(-2) + (2)(1) + (8)(5) = 44.$$

4.7 - Multiplicação de Matrizes

ii) *Encontre a primeira coluna do produto* $\mathbf{AB}$.
A primeira coluna de $\mathbf{AB}$ *é dada pelo produto de* $\mathbf{A}$ *pela primeira coluna de* $\mathbf{B}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\cdot \mathrm{col}_1(\mathbf{B}) &= \begin{bmatrix} 7 & 0 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (7)(3)+(0)(-2)+(9)(1) \\ (1)(3)+(5)(-2)+(3)(1) \\ (-1)(3)+(2)(-2)+(8)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

4.7 - Multiplicação de Matrizes

Exemplo 4: Considere as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

i) *Encontre o produto* **AB**.

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (3)(-2)+(-1)(1) & (3)(1)+(-1)(4) & (3)(6)+(-1)(2) \\ (-2)(-2)+(0)(1) & (-2)(1)+(0)(4) & (-2)(6)+(0)(2) \\ (1)(-2)+(4)(1) & (1)(1)+(4)(4) & (1)(6)+(4)(2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -7 & -1 & 16 \\ 4 & -2 & -12 \\ 2 & 17 & 14 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

cederj

4.7 - Multiplicação de Matrizes

ii) *Encontre o produto* $\mathbf{BA}$.

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-2)(3) + (1)(-2) + (6)(1) & (-2)(-1) + (1)(0) + (6)(4) \\ (1)(3) + (4)(-2) + (2)(1) & (1)(-1) + (4)(0) + (2)(4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 26 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}.$$

4.7 - Multiplicação de Matrizes

Exemplo 5:

Considere as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

i) *Encontre o produto* **AB**.

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (5)(5)+(3)(-3) & (5)(-1)+(3)(4) \\ (1)(5)+(7)(-3) & (1)(-1)+(7)(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 7 \\ -16 & 27 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4.7 - Multiplicação de Matrizes

ii) *Encontre o produto* **BA**.

$$\begin{aligned}\mathbf{BA} &= \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (5)(5)+(-1)(1) & (5)(3)+(-1)(7) \\ (-3)(5)+(4)(1) & (-3)(3)+(4)(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 8 \\ -11 & 19 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

4.7 - Multiplicação de Matrizes

Colocando o que foi visto nos exemplos anteriores de uma forma mais geral, temos que dada a matriz $\mathbf{A}$, $m \times p$, e a matriz $\mathbf{B}$, $p \times n$, o produto $\mathbf{AB}$ é uma matriz $m \times n$ e o produto $\mathbf{BA}$ existe apenas se $m = n$. Neste caso $\mathbf{BA}$ tem dimensão $p \times p$ e tem a mesma dimensão de $\mathbf{AB}$ somente se $m = n = p$. No caso particular em que os produtos $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{BA}$ são iguais, dizemos que as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ comutam. Ilustramos este caso com o exemplo a seguir.

4.7 - Multiplicação de Matrizes

Exemplo 6:

Considere as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Encontre os produtos $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{BA}$ e verifique que as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ comutam.

4.7 - Multiplicação de Matrizes

$$
\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (1)(2)+(2)(6) & (1)(4)+(2)(8) \\ (3)(2)+(4)(6) & (3)(4)+(4)(8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 20 \\ 30 & 44 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{BA} &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (2)(1)+(4)(3) & (2)(2)+(4)(4) \\ (6)(1)+(8)(3) & (6)(2)+(8)(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 20 \\ 30 & 44 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

4.7 - Multiplicação de Matrizes

Exemplo 7:

Numa faculdade a seleção de alunos para os cursos de administração, economia e direito é realizada através da aplicação de provas de matemática, português e história. Dependendo do curso escolhido pelo aluno, diferentes pesos são dados a cada uma destas provas no cálculo da média final do aluno. A tabela a seguir relaciona estes pesos.

4.7 - Multiplicação de Matrizes

	PESO		
	Administração	Direito	Economia
Matemática	2	1	2
Português	2	2	1
História	1	2	2

Suponha que três dos candidatos a ingressar para esta faculdade obtiveram os seguintes resultados nas provas de seleção:

4.7 - Multiplicação de Matrizes

	Matemática	Português	História
Candidato 1	5	6	7
Candidato 2	7	5	4
Candidato 3	4	5	5

Para determinar o total de pontos obtidos pelos três candidatos para cada um dos cursos, vamos considerar um tratamento matricial.

4.7 - Multiplicação de Matrizes

Denote por a_{ij} a nota do aluno i na prova j. Esta informação pode ser representada pela matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Seja agora b_{jk} o peso da prova j para o curso k, como representa a matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

4.7 - Multiplicação de Matrizes

O elemento (i, k) da matriz $\mathbf{AB}$ fornece o total de pontos obtidos pelo candidato i para o curso k. Por exemplo se $i = 2$ (Candidato 2) e $k = 1$ (Administração), o elemento $(2, 1)$ da matriz $\mathbf{AB}$ é

$$7(2) + 5(2) + 4(1) = 28 \text{ pontos.}$$

4.7 - Multiplicação de Matrizes

Observação:

Um vetor de dimensão n pode ser considerado uma matriz $n \times 1$. Sendo assim verifica-se facilmente pelas definições de produto escalar e de matriz transposta que o produto escalar de dois vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de dimensão n pode ser visto com o produto das matrizes $\mathbf{x}^T$ e $\mathbf{y}$, ou seja,

$$\boxed{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}.}$$

4.8 - Produto de Matrizes por Vetores

➡ Seja **A**, uma matriz $m \times n$ e **c** um vetor de dimensão n, ou seja, uma matriz de dimensão $n \times 1$. O produto de **A** por **c**, é a matriz $m \times 1$ dada por

$$\mathbf{Ac} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n \\ \boxed{a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{2n}c_n} \\ \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \dots + a_{mn}c_n \end{bmatrix}.$$

4.8 - Produto de Matrizes por Vetores

O lado direito desta expressão pode ser escrita como

$$c_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + c_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= c_1 col_1(\mathbf{A}) + c_2 col_2(\mathbf{A}) + \dots + c_n col_n(\mathbf{A}).$$

Desta última expressão verificamos que o produto de uma matriz $\mathbf{A}$ $m \times n$ por um vetor $\mathbf{c}$ de dimensão n pode ser visto como uma combinação linear das colunas de $\mathbf{A}$, onde os coeficientes são os elementos do vetor $\mathbf{c}$.

4.8 - Produto de Matrizes por Vetores

Exemplo 8: Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

O produto $\mathbf{Ac}$, escrito como combinação linear das colunas de $\mathbf{A}$ é dado por

$$\mathbf{Ac} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ -13 \end{bmatrix}.$$

4.8 - Produto de Matrizes por Vetores

- Sabemos que a primeira coluna do produto $\mathbf{AB}$ é dada pelo produto de $\mathbf{A}$ pela primeira coluna de $\mathbf{B}$. Sendo assim, a primeira coluna de $\mathbf{AB}$ é dada pela combinação linear das colunas de $\mathbf{A}$ onde os coeficientes são os elementos da primeira coluna de $\mathbf{B}$.

4.8 - Produto de Matrizes por Vetores

De uma forma mais geral temos que dadas as matrizes $\mathbf{A}$, $m \times p$ e $\mathbf{B}$, $p \times n$, a j-ésima coluna do produto $\mathbf{AB}$ é dada pela combinação linear das colunas de $\mathbf{A}$ onde os coeficientes são os p elementos da j-ésima coluna de $\mathbf{B}$, ou seja

$$\boxed{col_j(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}col_j(\mathbf{B}) = b_{1j}col_1(\mathbf{A}) + b_{2j}col_2(\mathbf{A}) + \ldots + b_{pj}col_p(\mathbf{A}).}$$

O exemplo a seguir ilustra esta observação.

4.8 - Produto de Matrizes por Vetores

Exemplo 9: Considere as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ do exemplo 2. Cada coluna do produto $\mathbf{AB}$ pode ser colocada como uma combinação linear das colunas de $\mathbf{A}$, como segue abaixo

$$col_1(\mathbf{AB}) = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}col_1(\mathbf{B}) = -2\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$col_2(\mathbf{AB}) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 17 \end{bmatrix} = \mathbf{A}col_2(\mathbf{B}) = 1\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$col_3(\mathbf{AB}) = \begin{bmatrix} 16 \\ -12 \\ 14 \end{bmatrix} = \mathbf{A}col_3(\mathbf{B}) = 6\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

4.9 - Sistemas Lineares

Considere o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \dots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

4.9 - Sistemas Lineares

Definindo agora as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

4.9 - Sistemas Lineares

e considerando que o produto $\mathbf{Ax}$ é dado por

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

Podemos escrever o sistema linear na forma matricial

$$\boxed{\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.}$$

4.9 - Sistemas Lineares

➡ Definição: A matriz $\mathbf{A}$ é chamada de **matriz dos coeficientes** do sistema linear.

➡ Definição: Chamamos de **matriz aumentada** do sistema linear, a matriz denotada por $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ e definida por

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

4.9 - Sistemas Lineares

Exemplo 10: Seja o sistema linear

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 5 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes, **A** e a matriz aumentada deste sistema linear, $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ são dadas por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right].$$

4.9 - Sistemas Lineares

Considerando

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix},$$

podemos escrever o sistema linear na forma matricial $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

4.9 - Sistemas Lineares

Exemplo 11: A matriz

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

é a matriz aumentada do sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & 2x_2 & = & -1 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & 5 \end{array}\right.$$

4.9 - Sistemas Lineares

Observação:

Sendo o lado direito do sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, dado pelo produto de uma matriz por um vetor, podemos escrevê-lo como a combinação das colunas da matriz $\mathbf{A}$, com coeficientes dados pelos elementos do vetor $\mathbf{x}$. Neste caso o sistema linear é escrito com

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Exercícios

- Fazer os exercícios das páginas 25 a 28 do livro texto.

Álgebra Linear

Aula 7: Propriedades das Operações com Matrizes

Mauro Rincon

Márcia Fampa

cederj

5.1 - Soma de Matrizes

Teorema: Sejam $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, e $\mathbf{D}$ matrizes $m \times n$.

1) Comutativa: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

2) Associativa: $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$.

3) Elemento Neutro: Existe uma única matriz $\mathbf{0}$, tal que $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$ para toda matriz $\mathbf{A}$. A matriz $\mathbf{0}$ é chamada de **matriz nula** ou **elemento neutro**.

4) Matriz Negativa: Para cada matriz $\mathbf{A}$, existe uma única matriz $\mathbf{D}$, tal que $\mathbf{A} + \mathbf{D} = \mathbf{0}$. Denotaremos $\mathbf{D}$ por $-\mathbf{A}$. Esta matriz recebe o nome de **inversa aditiva** ou **negativa** de $\mathbf{A}$.

5.1 - Soma de Matrizes

Demonstração:

1) Comutativa: O elemento (i,j) da matriz $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ é $a_{ij}+b_{ij}$ e o elemento (i,j) da matriz $\mathbf{B}+\mathbf{A}$ é $b_{ij}+a_{ij}$. Como a_{ij} e b_{ij} são números reais, então $a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$.
Logo, $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$.

2) Associativa: Como

$$
\begin{aligned}
a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}) &= (a_{ij}+b_{ij})+c_{ij} \Rightarrow \\
\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= (\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}
\end{aligned}
$$

5.1 - Soma de Matrizes

3) Elemento Neutro: Seja $\mathbf{U} = (u_{ij})$. Então

$$\mathbf{A} + \mathbf{U} = \mathbf{A}$$

se e somente se $a_{ij} + u_{ij} = a_{ij}$,
o que se verifica se e somente se $u_{ij} = 0$.
Logo, $\mathbf{U} = \mathbf{0}$.

4) Matriz Negativa: Seja $\mathbf{D} = (d_{ij})$. Então

$$\mathbf{A} + \mathbf{D} = \mathbf{0}$$

se e somente se

$$a_{ij} + d_{ij} = 0 \Leftrightarrow d_{ij} = -a_{ij} \Leftrightarrow \mathbf{D} = -\mathbf{A}$$

5.2 - Multiplicação de Matrizes

Teorema: Considere as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$.

1) Associativa: Existindo o produto $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$, então

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}.$$

2) Distributiva (à esquerda): Existindo o produto $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})$, então

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}.$$

3) Distributiva (à direita): Existindo o produto $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}$, então

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}.$$

5.2 - Multiplicação de Matrizes

Demonstração:

1) Associativa: $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$. Seja $\mathbf{D} = \mathbf{BC}$.

- elemento (k, j) de $\mathbf{D}$: $d_{kj} = \sum_{l=1}^{q} b_{kl}c_{lj}$ ①
- elemento (i, j) de $\mathbf{AD}$: $(\mathbf{AD})_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}d_{kj}$ ②
- Substituindo ① em ②: $(\mathbf{AD})_{ij} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} a_{ik}b_{kl}c_{lj}$
- Seja $\mathbf{Z} = \mathbf{AB} \equiv$ elemento (i, j) de $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$:

$$
\begin{aligned}
((\mathbf{AB})\mathbf{C})_{ij} &= (\mathbf{ZC})_{ij} = \sum_{l=1}^{q} z_{il}c_{lj} = \sum_{l=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj} \\
&= \sum_{l=1}^{q}\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kl}c_{lj} = (\mathbf{A}(\mathbf{BC}))_{ij}
\end{aligned}
$$

5.2 - Multiplicação de Matrizes

2) Distributiva (à esquerda): $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$.

Seja $\mathbf{D} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$.

- elemento (k, j) de $\mathbf{D}$: $d_{kj} = b_{kj} + c_{kj}$
- elemento (i, j) da matriz $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})$

$$(\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}))_{ij} = (\mathbf{AD})_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}d_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}.$$

- elemento (i, j) da matriz $\mathbf{AB} + \mathbf{AC} \equiv$ soma dos elementos (i, j) das matrizes $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{AC}$

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB}+\mathbf{AC})_{ij} &= (\mathbf{AB})_{ij} + (\mathbf{AC})_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right) + \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj} = (A(B+C))_{ij}.\end{aligned}$$

5.2 - Multiplicação de Matrizes

3) Distributiva (à direita): $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$.

A demonstração da propriedade 3 é análoga a demonstração da propriedade 2.

5.2 - Multiplicação de Matrizes

Exemplo 1: Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Verifique que $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$.

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{BC}} = \begin{bmatrix} 9 & -14 \\ 17 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{AB}} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -14 \\ 17 & 1 \end{bmatrix}$$

5.2 - Multiplicação de Matrizes

Exemplo 2: Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verifique que $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$.

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B+C}} = \begin{bmatrix} 17 & -3 \\ 21 & 11 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} + \mathbf{AC} = \underbrace{\begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 8 & 11 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{AB}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 13 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{AC}} = \begin{bmatrix} 17 & -3 \\ 21 & 11 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

5.3 - Matriz Identidade

Definição: A **matriz identidade** de ordem n, denotada por $\mathbf{I}_n$, é a matriz diagonal que tem todos os elementos da diagonal iguais a um, ou seja

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja uma matriz $\mathbf{A}$, $m \times n$. Então

$$\boxed{\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}.}$$

5.3 - Matriz Identidade

Exemplo 3: Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Verifique que $\mathbf{I}_2\mathbf{A} = \mathbf{A}$ e $\mathbf{A}\mathbf{I}_3 = \mathbf{A}$.

$$\mathbf{I}_2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(2)+0(6) & 1(-3)+0(2) & 1(4)+0(1) \\ 0(2)+1(6) & 0(-3)+1(2) & 0(4)+1(1) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}}.$$

$$\mathbf{A}\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(1)-3(0)+6(0) & 2(0)-3(1)+6(0) & 2(0)-3(0)+6(1) \\ 6(1)+2(0)+1(0) & 6(0)+2(1)+1(0) & 6(0)+2(0)+1(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longleftarrow \mathbf{A}$$

5.4 - Propriedades da Potenciação

Definição: Sendo $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada de ordem m, define-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^0 &= \mathbf{I}_m, \quad \text{sendo} \quad \mathbf{A} \neq O; \\ \mathbf{A}^p &= \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \ldots \cdot \mathbf{A}}_{p\ \ fatores}; \end{aligned}$$

onde p é um inteiro positivo.

5.4 - Propriedades da Potenciação

Exemplo 4: Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule $\mathbf{A}^2$.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1(1) - 1(1) & 1(-1) - 1(2) \\ 1(1) + 2(1) & 1(-1) + 2(2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

5.4 - Propriedades da Potenciação

Teorema: Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes quadradas e α e β inteiros não negativos.

1) $\mathbf{A}^\alpha \mathbf{A}^\beta = \mathbf{A}^{\alpha+\beta}$

2) $(\mathbf{A}^\alpha)^\beta = \mathbf{A}^{\alpha\beta}$

3) Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ comutam, ou seja, se $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, então $(\mathbf{AB})^\alpha = \mathbf{A}^\alpha \mathbf{B}^\alpha$.
Demonstração: Para $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ é imediato. Por simplicidade, seja $\alpha = 2$.

$$(\mathbf{AB})^2 = (\mathbf{AB})(\mathbf{AB}) = \mathbf{ABAB} = \mathbf{AABB} = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2.$$

5.4 - Propriedades da Potenciação

Exemplo 5: Sejam $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1) Verifique que **A** e **B** comutam.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(1)+4(0) & 4(-1)+4(1) \\ 0(1)+4(0) & 0(-1)+4(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(4)-1(0) & 1(4)-1(4) \\ 0(4)+1(0) & 0(4)+1(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$\boxed{\mathbf{AB} = \mathbf{BA}}$$

5.4 - Propriedades da Potenciação

2) Verifique que $(\mathbf{AB})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{AB})^2 &= (\mathbf{AB})(\mathbf{AB}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4(4)+0(0) & 4(0)+0(4) \\ 0(4)+4(0) & 0(0)+4(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2 &= (\mathbf{AA})(\mathbf{BB}) = \left(\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 4(4)+4(0) & 4(4)+4(4) \\ 0(4)+4(0) & 0(4)+4(4) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1(1)-1(0) & 1(-1)-1(1) \\ 0(1)+1(0) & 0(-1)+1(1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 16 & 32 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 16(1)+32(0) & 16(-2)+32(1) \\ 0(1)+16(0) & 0(-2)+16(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

5.4 - Propriedades da Potenciação

Exemplo 6: Sejam $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1) Verifique que **A** e **B** não comutam.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(1)+4(0) & 4(-1)+4(1) \\ 0(1)+3(0) & 0(-1)+3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(4)-1(0) & 1(4)-1(3) \\ 0(4)+1(0) & 0(4)+1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\boxed{\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}}$$

5.4 - Propriedades da Potenciação

2) Verifique que $(\mathbf{AB})^2 \neq \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{AB})^2 &= (\mathbf{AB})(\mathbf{AB}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4(4)+0(0) & 4(0)+0(3) \\ 0(4)+3(0) & 0(0)+3(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2 &= (\mathbf{AA})(\mathbf{BB}) = \left(\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 4(4)+4(0) & 4(4)+4(3) \\ 0(4)+3(0) & 0(4)+3(3) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1(1)-1(0) & 1(-1)-1(1) \\ 0(1)+1(0) & 0(-1)+1(1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 16 & 28 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 16(1)+28(0) & 16(-2)+28(1) \\ 0(1)+9(0) & 0(-2)+9(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

5.5 - Propriedades da Multiplicação por Escalar

<u>Teorema</u> Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes de mesmo tamanho e r e s escalares.

1) $r(s\mathbf{A}) = (rs)\mathbf{A}$.

2) $(r+s)\mathbf{A} = r\mathbf{A} + s\mathbf{A}$.

3) $r(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = r\mathbf{A} + r\mathbf{B}$.

4) $\mathbf{A}(r\mathbf{B}) = r(\mathbf{AB}) = (r\mathbf{A})\mathbf{B}$.

5.5 - Propriedades da Multiplicação por Escalar

Demonstração:

1) O elemento (i, j) da matriz $r(s\mathbf{A})$ é dado por
$$(r(s\mathbf{A}))_{ij} = r(sa_{ij}) = rsa_{ij} = ((rs)\mathbf{A})_{ij}.$$

2) $((r+s)\mathbf{A})_{ij} = (r+s)a_{ij} = ra_{ij}+sa_{ij} = (rA)_{ij}+(s\mathbf{A})_{ij}.$

3) $(r(\mathbf{A}+\mathbf{B}))_{ij} = r(a_{ij}+b_{ij}) = ra_{ij}+rb_{ij} = (r\mathbf{A})_{ij}+(r\mathbf{B})_{ij}.$

4) O elemento (i, j) da matriz $\mathbf{A}(r\mathbf{B})$ é dado por

$$(\mathbf{A}(r\mathbf{B}))_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(rb_{kj}) = r\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = r(\mathbf{AB})_{ij}$$

$$= \sum_{k=1}^{p}(ra_{ik})b_{kj} = ((r\mathbf{A})\mathbf{B})_{ij}.$$

5.5 - Propriedades da Multiplicação por Escalar

Exemplo: Sejam

$$r = 3, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Verifique que $\mathbf{A}(r\mathbf{B}) = r(\mathbf{AB})$.

$$\mathbf{A}(r\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 9 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 3 \\ 27 & 12 \end{bmatrix},$$

$$r(\mathbf{AB}) = 3 \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 3 \\ 27 & 12 \end{bmatrix}.$$

5.6 - Propriedades da Transposta

Teorema: Sejam as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ e o escalar r.

1) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$.

3) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

4) $(r\mathbf{A})^T = r\mathbf{A}^T$.

5.6 - Propriedades da Transposta

Demonstração:

1) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

O elemento (i, j) da matriz $\mathbf{A}$ é o elemento a_{ij}. O elemento (i, j) da matriz $\mathbf{A}^T$ é o elemento $\alpha_{ij} = a_{ji}$. Portanto o elemento (i, j) de $(\mathbf{A}^T)^T$ é o elemento $\alpha_{ji} = a_{ij}$.

5.6 - Propriedades da Transposta

2) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

Seja $\mathbf{C} = \mathbf{A}+\mathbf{B}$ então $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Logo $c_{ji} \in \mathbf{C}^T = (\mathbf{A}+\mathbf{B})^T$. Por outro lado,

$$\left.\begin{array}{l} a_{ij} \in \mathbf{A} \Rightarrow a_{ji} \in \mathbf{A}^T \\ b_{ij} \in \mathbf{B} \Rightarrow b_{ji} \in \mathbf{B}^T \end{array}\right\} a_{ji} + b_{ji} \in \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

Logo $c_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$.

5.6 - Propriedades da Transposta

3) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz $m \times p$ e $\mathbf{B}$ uma matriz $p \times n$. O produto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ é uma matriz $m \times n$ e o seu elemento (i, j) é dado por $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$.

A matriz $(\mathbf{AB})^T$ é portanto uma matriz $n \times m$ e nela , o elemento c_{ij} ocupa a i-ésima coluna e a j-ésima linha.

Por outro lado, a matriz $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ também é de ordem $n \times m$. O elemento (i, j) de $\mathbf{A}^T$ é o elemento $\alpha_{ij} = a_{ji}$, assim como o elemento (i, j) de B^T é o elemento $\beta_{ij} = b_{ji}$. Logo o elemento de $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ que ocupa a i-ésima coluna e a j-ésima linha é dado por

$$\sum_{k=1}^{p} \beta_{jk}\alpha_{ki} = \sum_{k=1}^{p} b_{kj}a_{ik} = c_{ij}.$$

5.6 - Propriedades da Transposta

4) $(r\mathbf{A})^T = r\mathbf{A}^T$

Seja $\mathbf{C} = r\mathbf{A}$, logo o elemento (i, j) de $\mathbf{C}$ é dado por $c_{ij} = ra_{ij}$. Na matriz $(r\mathbf{A})^T$, o elemento $c_{ji} \in \mathbf{C}^T = (r\mathbf{A})^T$ ocupa a i-ésima coluna e a j-ésima linha.

Por outro lado, o elemento (i, j) de $\mathbf{A}^T$ é o elemento $\alpha_{ij} = a_{ji}$. Logo o elemento de $r\mathbf{A}^T$ que ocupa a a i-ésima coluna e a j-ésima linha é dado por $r\alpha_{ij} = ra_{ji} \in r\mathbf{A}^T$.

5.6 - Propriedades da Transposta

➡ Exemplo: Sejam $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Verifique que $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 9 & 4 \end{bmatrix},$$

logo $(\mathbf{AB})^T = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, e

$$\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

5.7 - Matriz Simétrica

Definição: Uma matriz $\mathbf{A}$ é dita **simétrica** se

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{A}^T.}$$

Ou seja, $\mathbf{A}$ é simétrica se ela é uma matriz quadrada $m \times m$, e $a_{ij} = a_{ji}$, para todo $i, j = 1, \ldots, m$.

5.7 - Matriz Simétrica

Exemplo: A matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

é uma matriz simétrica já que $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Exercícios

- Fazer os exercícios das páginas 37 a 39 do livro texto.

Álgebra Linear

Aula 8: Soluções de Sistemas de Equações Lineares

Mauro Rincon

Márcia Fampa

6.1 - Forma Escada reduzida por linhas

Considere a matriz aumentada:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right],$$

que representa o seguinte sistema linear:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & & & + & 5x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & & & - & x_4 & = & 3 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \end{array}\right.,$$

onde $x_4 = r$ e r é número real qualquer.

6.1 - Forma Escada reduzida por linhas

Em particular se excluimos a variável x_4 temos:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

onde a solução é $x = (x_1,\ x_2,\ x_3) = (0,\ 3,\ 2)$.

6.1 - Forma Escada reduzida por linhas

Definição Uma matriz $m \times n$ está na **forma escada reduzida por linhas** se ela satisfaz as seguinte propriedades:

1) Todas as linhas nulas (linhas que contém somente elementos nulos), se existirem, ocorrem abaixo de todas as outras linhas não-nulas.

2) O primeiro elemento não-nulo (da esquerda para a direita) de cada linha não nula é 1.

6.1 - Forma Escada reduzida por linhas

3) Sejam as linhas não nulas e sucessivas i e $i+1$. Então o primeiro elemento não-nulo da linha $i+1$ está a direita do primeiro elemento não-nulo da linha i.

4) Se uma coluna contém o primeiro elemento não-nulo de alguma linha, então todos os outros elementos desta coluna são iguais a zero.

6.1 - Forma Escada reduzida por linhas

Exemplo 1: As matrizes seguintes estão na forma escada reduzida por linhas,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Passo a passo Voltar

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.1 - Forma Escada reduzida por linhas

Exemplo 2: As matrizes seguintes **não** estão na forma escada reduzida por linhas,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Passo a passo

Voltar

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

6.1 - Forma Escada reduzida por linhas

Teorema: Toda matriz não-nula $m \times n$ é equivalente por linhas a uma única matriz em forma escada reduzida por linhas.

6.1 - Forma Escada reduzida por linhas

Transforme a matriz numa equivalente por linhas que está na **forma escada reduzida por linhas.**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Passo a passo Voltar

Exercícios

- Fazer os exercícios de 1 a 7 da página 54 do livro texto.

6.2 - Resolvendo Sistemas Lineares

Teorema: Sejam $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ e $\mathbf{Cx} = \mathbf{d}$ dois sistemas lineares com m equações e n incógnitas. Se as matrizes aumentadas $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ e $[\mathbf{C}|\mathbf{d}]$ desses sistemas são equivalentes por linha, então os dois sistemas têm exatamente as mesmas soluções.

6.3 - Método de Redução de Gauss-Jordan

Seja $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ um sistema linear. O método de Gauss-Jordan para resolução do sistema é dado pelas seguintes etapas:

- **Etapa 1** Obtenção da matriz aumentada $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ do sistema.
- **Etapa 2** Transformação da matriz aumentada à sua forma reduzida por linhas usando operações elementares.
- **Etapa 3** Resolva o sistema linear da Etapa 2.

6.3 - Método de Redução de Gauss-Jordan

Exemplo 3: Resolva o sistema linear pelo método de Gauss-Jordan,

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

- **Etapa 1** A matriz aumentada do sistema é:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rrr|r} 4 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

6.3 - Método de Redução de Gauss-Jordan

- **Etapa 2** Transformação da matriz aumentada $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ à sua forma reduzida por linhas. Para isto considere os seguintes passos:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rrr|r} 4 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

6.3 - Método de Redução de Gauss-Jordan

- **Etapa 3** O sistema linear representado pela matriz aumentada $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^7$ é dado por

$$\begin{cases} x_1 & & & = & 1 \\ & x_2 & & = & 2 \\ & & x_3 & = & -1 \end{cases}$$

O sistema linear tem como solução $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (1, 2, -1)$. Como os sistemas $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ e $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^7$ são equivalentes, então $\mathbf{x} = (1, 2, -1)$ é a solução procurada.

6.3 - Método de Redução de Gauss-Jordan

Exemplo 4: Resolva o sistema linear pelo método de Gauss-Jordan

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 6 \\ x_1 & & & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \end{array}\right.$$

- **Etapa 1** A matriz aumentada do sistema é:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 4 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

6.3 - Método de Redução de Gauss-Jordan

- **Etapa 2** Transformação da matriz aumentada $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ à sua **forma escada reduzida por linhas.**

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 4 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

Passo a passo Voltar

6.3 - Método de Redução de Gauss-Jordan

- **Etapa 3** A matriz aumentada $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^7$ representa o seguinte sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rrrrrr} x_1 & & & & = & 1 \\ & x_2 & & - \; x_4 & = & 0 \\ & & x_3 & - \; x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

Seja r um número real e $x_4 = r$. Então a solução é $\mathbf{x} = (1, r, 1 + r, r); r \in \mathbb{R}$.

Exercícios

- Fazer os exercícios de 8 a 18 das páginas 55 e 56 do livro texto.

6.4 - Sistemas Lineares Homogêneos

Um sistema linear da forma

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & \dots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

é chamado **sistema linear homogêneo**. Na forma matricial o sistema linear é representado por

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$$

6.4 - Sistemas Lineares Homogêneos

Se $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (0, 0, \cdots, 0)$ então $\mathbf{x}$ é uma solução do sistema linear homogêneo. Esta solução é chamada solução trivial.
Uma solução não trivial é uma solução, onde nem todos os elementos x_i são iguais a zero.

6.4 - Sistemas Lineares Homogêneos

Exemplo 5: Considere o sistema linear:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & 2x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

A matriz aumentada do sistema é dada por

$$[\mathbf{A}|\mathbf{0}] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

6.4 - Sistemas Lineares Homogêneos

Usando o método de redução de Gauss-Jordan, obtemos a seguinte matriz aumentada na forma escada reduzida por linhas

$$[\mathbf{A}|\mathbf{0}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

A única solução do sistema é $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$, ou seja o sistema tem somente a solução trivial.

6.4 - Sistemas Lineares Homogêneos

Exemplo 6: Considere o sistema linear homogêneo

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \end{array}\right.$$

A matriz aumentada é dada por

$$[\mathbf{A}|\mathbf{0}] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

6.4 - Sistemas Lineares Homogêneos

Usando o método de redução de Gauss-Jordan, obtemos a seguinte matriz aumentada na forma escada reduzida por linhas

$$[\mathbf{A}|\mathbf{0}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right],$$

que representa o seguinte sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & & & + & 8x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Se $x_4 = r \Rightarrow x_3 = -2r, x_2 = 0$ e $x_1 = 2r$. Então $x = (2r, 0, -2r, r)$ é uma solução não trivial se $r \neq 0$.

6.4 - Sistemas Lineares Homogêneos

- O Teorema abaixo mostra em que condições existe solução não trivial para um sistema linear homogêneo.

- Teorema: Um sistema linear homogêneo com m-equações e n-incógnitas tal que $m < n$ tem uma solução não trivial.

6.4 - Sistemas Lineares Homogêneos

Demonstração:

Seja $\mathbf{A}$ a matriz de ordem $m \times n$, com $m < n$ e a matriz aumentada $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$, e seja $[\mathbf{C}|\mathbf{0}]$ a sua forma escada reduzida por linhas. Temos que os dois sistemas são equivalentes. Seja r o número de linhas não nulas da matriz $\mathbf{C}$. Então $r \leq m < n$. Logo o sistema $\mathbf{Cx} = \mathbf{0}$ tem r-equações com n-incógnitas. Assim podemos resolver o sistema para r-incógnitas em termos das $n - r$ incógnitas restantes. As $(n - r)$ incógnitas podem assumir qualquer valor, logo podem assumir valores diferentes de zero e portanto temos uma solução não trivial. Como os dois sistemas $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{Cx} = \mathbf{0}$ são equivalentes, conclui-se o teorema.

6.4 - Sistemas Lineares Homogêneos

Corolário: Se um sistema linear homogêneo tem m- equações com n- incógnitas e admite somente a solução trivial $\mathbf{x} = (0, 0, \cdots 0)$, então $m \geq n$.

Exercícios

- Fazer os exercícios de 19 a 26, 31 e 32 da página 56 do livro texto, e os exercícios teóricos T_1 e T_{13} das páginas 56 e 57.

Álgebra Linear

Aula 9: Matriz Inversa

Mauro Rincon

Márcia Fampa

7.1 - Definição

$\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$
$\exists b \in \mathbb{R}, b \neq 0$
tal que:

$$a \cdot b = b \cdot a = 1$$

Assim $\boxed{b = \frac{1}{a}}$ é **inverso** de a.

7.1 - Definição

Definição 1: Uma matriz quadrada $n \times n$, $\mathbf{A} = (a_{ij})$ é invertível (ou não singular), se existe uma matriz quadrada $n \times n$, $\mathbf{B} = (b_{ij})$ tal que

$$\boxed{\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n,}$$

onde $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade e estamos denotando o produto de matrizes por $\mathbf{AB}$. A matriz $\mathbf{B}$ é chamada de **inversa de A** e é denotada por $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.
Se $\mathbf{A}$ não tem inversa, dizemos que $\mathbf{A}$ é singular ou não invertível.

7.1 - Definição

Exemplo 1: Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/8 \\ 1/4 & -1/8 \end{bmatrix}$$

Como $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_2$, conclui-se que a matriz quadrada $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ é a inversa de $\mathbf{A}$ e que $\mathbf{A}$ é invertível.

7.1 - Definição

Teorema 1: Se uma matriz $n \times n$, $\mathbf{A} = (a_{ij})$ possui inversa, então a inversa é única.

Demonstração: Suponhamos que as matrizes $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ sejam inversas de $\mathbf{A}$.

Então, $\begin{matrix} \mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n \\ \mathbf{AC} = \mathbf{CA} = \mathbf{I}_n \end{matrix}$.

Logo $\mathbf{BA} = \mathbf{AC}$.

Por outro lado,

$\mathbf{B} = \mathbf{BI}_n = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) = (\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{I}_n\mathbf{C} = \mathbf{C}$.

$\therefore \boxed{\mathbf{B} = \mathbf{C}}$, o que conclui o teorema.

7.1 - Definição

Exemplo 2: Determine a matriz inversa $\mathbf{A}^{-1}$ da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Como a matriz $\mathbf{A}$ é 2×2 então a $\mathbf{A}^{-1}$ também é 2×2. Suponha que $\mathbf{A}^{-1}$ seja dada por

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$

7.1 - Definição

Então usando a definição, queremos determinar os coeficientes $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ de tal forma que $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_2$, ou seja

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2$$

Fazendo o produto, obtemos que

$$\begin{bmatrix} x_{11} + 2x_{21} & x_{12} + 2x_{22} \\ -2x_{11} + 3x_{21} & -2x_{12} + 3x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7.1 - Definição

Assim,

$$\begin{aligned} x_{11} + 2x_{21} &= 1 \\ -2x_{11} + 3x_{21} &= 0 \end{aligned} \qquad e \qquad \begin{aligned} x_{12} + 2x_{22} &= 0 \\ -2x_{12} + 3x_{22} &= 1 \end{aligned}$$

Resolvendo os dois sistemas, obtemos a seguinte solução: $\boxed{x_{11} = \frac{3}{7},\ x_{21} = \frac{2}{7}\ ,\ x_{12} = -\frac{2}{7} \text{ e } x_{22} = \frac{1}{7}.}$
Logo A é invertível e sua inversa é dada por

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/7 & -2/7 \\ 2/7 & 1/7 \end{bmatrix}$$

7.2 - Propriedades da Inversa

Propriedades da Inversa:

1) Se uma matriz $\mathbf{A}$ é invertível então a inversa $\mathbf{A}^{-1}$ é invertível e $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.

Demonstração: Uma matriz $\mathbf{B}$ é a inversa de $\mathbf{A}^{-1}$ se

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n.$$

Como $\mathbf{A}^{-1}$ é a inversa de $\mathbf{A}$, então

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n.$$

Pelo Teorema, a inversa é única, então $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ é a inversa de $\mathbf{A}^{-1}$, ou seja, $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.

7.2 - Propriedades da Inversa

Propriedades da Inversa:

2) Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são invertíveis então $\mathbf{AB}$ é invertível e $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

Demonstração: Temos que mostrar que os produtos $(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})$ e $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{AB}$ são iguais a matriz identidade. De fato,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) &= \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AI}_n\mathbf{A}^{-1} \\
&= \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}_n \\
(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{AB} &= \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{I}_n\mathbf{B} \\
&= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}_n.
\end{aligned}$$

7.2 - Propriedades da Inversa

Propriedades da Inversa:

3) Se $\mathbf{A}$ é uma matriz invertível, então $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$.

Demonstração: Usando a segunda propriedade, temos que

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^T = \mathbf{I}_n^T = \mathbf{I}_n$$

$$(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{A}^T = (\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})^T = \mathbf{I}_n^T = \mathbf{I}_n.$$

7.2 - Propriedades da Inversa

Exemplo 3: Seja a matriz $\mathbf{A}$ dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então $\mathbf{A}^{-1}$ e $(\mathbf{A}^{-1})^T$ são dadas por

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \text{ e } (\mathbf{A}^{-1})^T = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

7.2 - Propriedades da Inversa

Por outro lado podemos verificar que

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad (\mathbf{A}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Verifique, usando a definição de matriz inversa, que

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$

7.2 - Propriedades da Inversa

Corolário 1: Se $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots \mathbf{A}_m$ são matrizes $n \times n$ invertíveis, então o produto $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_{m-1}\mathbf{A}_m$ é invertível e

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_{m-1}\mathbf{A}_m)^{-1} = \mathbf{A}_m^{-1}\mathbf{A}_{m-1}^{-1} \cdots \mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}$$

Demonstração: Denotemos por $\mathbf{B}_2 = \mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_{m-1}\mathbf{A}_m$. Então o produto $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_{m-1}\mathbf{A}_m = \mathbf{A}_1\mathbf{B}_2$. Aplicando a segunda propriedade temos que

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2)^{-1} = \mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1} = (\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_{m-1}\mathbf{A}_m)^{-1}\mathbf{A}_1^{-1} \quad 1$$

7.2 - Propriedades da Inversa

Agora queremos determinar a inversa de $(\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_{m-1}\mathbf{A}_m)$. Definimos $\mathbf{B}_3 = \mathbf{A}_3 \cdots \mathbf{A}_{m-1}\mathbf{A}_m$. Então $(\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_{m-1}\mathbf{A}_m) = \mathbf{A}_2\mathbf{B}_3$. Novamente da segunda propriedade temos

$$(\mathbf{A}_2\mathbf{B}_3)^{-1} = \mathbf{B}_3^{-1}\mathbf{A}_2^{-1} = (\mathbf{A}_3 \cdots \mathbf{A}_{m-1}\mathbf{A}_m)^{-1}\mathbf{A}_2^{-1}$$

Substituindo em 1 obtemos

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_{m-1}\mathbf{A}_m)^{-1} = (\mathbf{A}_3 \cdots \mathbf{A}_{m-1}\mathbf{A}_m)^{-1}\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}$$

Repetindo sucessivamente o processo para $\mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \cdots \mathbf{B}_{m-1}$ conclui-se o resultado.

7.2 - Propriedades da Inversa

- Definimos anteriormente uma matriz $\mathbf{B}$ sendo a inversa de uma matriz A se satisfaz as duas condições: $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$. O teorema seguinte, cuja demonstração será omitida, garante que basta verificarmos uma das duas igualdades para sabermos se uma matriz é invertível.

- Teorema 2: Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes $n \times n$. Então $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$ se e somente se $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$.

7.3 - Método Prático para Determinar a Matriz Inversa

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz $n \times n$ dada. Queremos determinar uma matriz $n \times n$, $\mathbf{B} = b_{ij}$ inversa de $\mathbf{A}$ tal que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \overbrace{\mathbf{x_1}} & \quad & \overbrace{\mathbf{x_j}} & \quad & \overbrace{\mathbf{x_n}} \end{array} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \overbrace{\mathbf{e_1}} & \quad & \overbrace{\mathbf{e_j}} & \quad & \overbrace{\mathbf{e_n}} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

7.3 - Método Prático para Determinar a Matriz Inversa

A j-ésima coluna de $\mathbf{AB}$ é a matriz $\mathbf{A}\mathbf{x}_j$ de ordem $n \times 1$. O problema de encontrar a matriz $n \times n$, $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ satisfazendo a definição de inversa $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$ é equivalente ao problema de encontrar n matrizes de ordem $n \times 1$, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$ de forma a satisfazer a condição,

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j \qquad (1 \leq j \leq n)$$

A matriz aumentada do sistema é dada por:

$$[A|\mathbf{e}_j], i \leq j \leq n \text{ ou } [\mathbf{A}|\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \cdots\ \mathbf{e}_n] = [\mathbf{A}|\mathbf{I}_n]$$

7.3 - Método Prático para Determinar a Matriz Inversa

ou seja, a matriz aumentada de ordem $n \times 2n$ é dada por

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}_n] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right]$$

7.3 - Método Prático para Determinar a Matriz Inversa

Usando o método de Gauss-Jordan, podemos transformar a matriz aumentada $[\mathbf{A}|\mathbf{I}_n]$ na forma escada reduzida por linhas, denotada por $[\mathbf{C}|\mathbf{D}]$. Assim a matriz na forma escada reduzida por linhas $\mathbf{C}$ de ordem $n \times n$ é equivalente por linhas a matriz $\mathbf{A}$. Denotando as colunas da matriz $\mathbf{D}$ por $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \cdots \mathbf{d}_n$, então a matriz aumentada $[\mathbf{C}|\mathbf{D}]$ representam n sistemas lineares dados por

$$\mathbf{C}\mathbf{x}_j = \mathbf{d}_j, \qquad (1 \leq j \leq n) \qquad ①$$

que correspondem na forma matricial ao sistema linear $\mathbf{CB} = \mathbf{D}$.

7.3 - Método Prático para Determinar a Matriz Inversa

No término do processo temos duas possibilidades a saber:

Caso 1- A matriz $\mathbf{C} = \mathbf{I}_n$. Então o sistema 1 pode ser escrito por

$$\mathbf{I}_n \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j = \mathbf{d}_j, \qquad (1 \leq j \leq n)$$

Neste caso, temos que $\mathbf{B} = \mathbf{D}$, pois as matrizes colunas $\mathbf{x}_j = \mathbf{d}_j$ são iguais, para todo $j = 1, 2 \cdots, n$ e portanto a matriz inversa é dada por $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{D}$

Caso 2- A matriz $\mathbf{C} \neq \mathbf{I}_n$. Neste caso a matriz $\mathbf{A}$ é singular e portanto não tem inversa.

7.3 - Método Prático para Determinar a Matriz Inversa

Procedimento para o cálculo da matriz inversa:

- **Passo 1.** Forme a matriz aumentada $[\mathbf{A}|\mathbf{I}_n]$.

- **Passo 2.** Usando o método de Gauss-Jordan, coloque a matriz aumentada $[\mathbf{A}|\mathbf{I}_n]$ em sua forma escada reduzida por linhas. Todas as operações elementares feitas em uma linha de $\mathbf{A}$ também devem ser feitas na linha correspondente da matriz $\mathbf{I}_n$ para não alterar a solução do sistema linear.

7.3 - Método Prático para Determinar a Matriz Inversa

Procedimento para o cálculo da matriz inversa:

- **Passo 3.** Após o **Passo 2** temos a matriz aumentada $[\mathbf{C}|\mathbf{D}]$ equivalente por linhas a matriz $[\mathbf{A}|\mathbf{I}_n]$.

1) Se $\mathbf{C} = \mathbf{I}_n$ então $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{-1}$.

2) Se $\mathbf{C} \neq \mathbf{I}_n$, então $\mathbf{A}$ é singular e $\mathbf{A}^{-1}$ não existe.

7.3 - Método Prático para Determinar a Matriz Inversa

Exemplo 4: Determine a matriz inversa da seguinte matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Passo a passo Voltar

7.3 - Método Prático para Determinar a Matriz Inversa

Não conhecemos ainda, nenhuma ferramenta para saber se uma matriz tem inversa ou não, mas sabemos que se uma matriz escada reduzida por linhas obtida de A tem uma linha nula então a matriz **A** é singular e portanto não tem inversa. Assim se em uma das etapas do processo de transformação da matriz **A** numa matriz equivalente na forma escada reduzida por linhas tiver uma matriz com pelo menos uma linha nula então pela equivalência das matrizes podemos concluir que a matriz **A** é singular.

7.3 - Método Prático para Determinar a Matriz Inversa

Exemplo 5 Determine, se existir, a matriz inversa da seguinte matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Passo a passo

Voltar

7.3 - Método Prático para Determinar a Matriz Inversa

Teorema 3:

Uma matriz $n \times n$, $\mathbf{A}$ é invertível se, e somente se, $\mathbf{A}$ é equivalente por linhas a matriz identidade $\mathbf{I}_n$.

7.4 - Sistemas Lineares Inversos

Teorema 4:
Seja $\mathbf{A}$ uma matriz $n \times n$. Então:

1) O sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tem solução única se, e somente se, $\mathbf{A}$ é invertível. Neste caso a solução é $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$;

Demonstração: Se a matriz $\mathbf{A}$ é invertível, então multiplicando $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ por $\mathbf{A}^{-1}$ à esquerda em ambos os membros obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Ax}) &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \\
(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \\
\mathbf{I}_n\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \\
\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}
\end{aligned}$$

7.4 - Sistemas Lineares Inversos

2) O sistema linear homogêneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ tem solução não trivial se, e somente se, $\mathbf{A}$ é singular.

Demonstração: $\mathbf{Ax} = 0$

$\Rightarrow$ (se $\mathbf{x}$ não é única) $\Rightarrow$ $\mathbf{A}$ é singular.

Se $\mathbf{A}$ é não singular então $\mathbf{A}$ é invertível. Logo:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ é a única solução!}$$

$\Leftarrow$ $\mathbf{A}$ singular $\Rightarrow$ $\mathbf{x}$ não é única. Suponha que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é única, então pelo item $\Rightarrow$ $\mathbf{A}$ é invertível.

7.4 - Sistemas Lineares Inversos

Exemplo 6 Considere o sistema linear não homogêneo: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, onde a matriz dos coeficientes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = (1, 0, 2)^T.$$

Determine a solução do sistema usando a inversa.

Como $\mathbf{A}$ é invertível então

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/4 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

7.4 - Sistemas Lineares Inversos

Exemplo 7: Considere o sistema linear homogêneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, cuja matriz dos coeficientes $\mathbf{A}$ é singular

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

A matriz $\mathbf{A}$ é equivalente por linhas a seguinte matriz

$$\mathbf{S} = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} \mathbf{Sx} = \mathbf{0} \\ \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Tomando $\boxed{x_3 = r \Rightarrow x_1 = x_2 = -r.}$

$$\mathbf{x} = (-r, -r, r), \forall r \in \mathbb{R}$$

Exercícios

- Fazer os exercícios das páginas 70 e 71 do livro texto(práticos e teóricos), e os exercícios suplementares de 1 a 26 das páginas 72 e 73.

Álgebra Linear

Aula 10: Determinantes

Mauro Rincon

Márcia Fampa

8.1 - Definições

Definição 1: Seja $S = \{1, 2, \cdots, n\}$ o conjunto de todos os inteiros de 1 a n, arrumados em ordem crescente. Uma outra ordem $\{j_1, j_2, \cdots j_n\}$ dos elementos do conjunto S é chamado de **permutação** de S.

8.1 - Definições

Exemplo 1: Considere $S = \{1, 3, 5, 6\}$. Então, 5361 é uma permutação de S, que corresponde à função $f : S \longrightarrow S$ definida por:

$$f(1) = 5; f(3) = 3; f(5) = 6; f(6) = 1.$$

De quantas maneiras diferentes podemos representar o conjunto S?

$$4.3.2.1 = 24$$

maneiras diferentes de representar o conjunto de permutações de S, ou temos 24 permutações de S.

8.1 - Definições

De uma forma geral para um conjunto S de n números temos

$$\boxed{n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1}$$

permutações. Denotemos por S_n as permutações de S. A expressão acima é representada por $n!$ e denominada **n fatorial** ou **fatorial de n**. Assim temos

$$1! = 1$$
$$2! = 2.1 = 2$$
$$3! = 3.2.1 = 6$$
$$4! = 4.3.2.1 = 24$$
$$5! = 5.4.3.2.1 = 120$$
$$6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$$
$$7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 5040$$

8.1 - Definições

Exemplo 2: Seja $S = \{1, 4, 9\}$. Então S_3 tem $3! = 3.2.1 = 6$ permutações do conjunto S, a saber: 149, 419, 941, 194, 491, 914.

Uma permutação $j_1, j_2, \cdots, j_n$ do conjunto $S = \{1, 2 \cdots, n\}$ tem uma **inversão** se um inteiro j_r precede um inteiro menor j_s. Um permutação é denominada **par**(**ímpar**) se o número total de inversões é **par**(**ímpar**).

Exemplo 3: Seja $S = \{1, 4, 9\}$. Então a permutação:

$$\begin{cases} \text{194 é ímpar pois o 9 está antes do 4(uma inversão)} \\ \text{914 é par pois o 9 está antes do 1 e do 4} \end{cases}$$

8.1 - Definições

Mostra-se que se $n \geq 2 \Rightarrow S_n$ tem $n!/2$ permutações pares e $n!/2$ ímpares. No exemplo anterior temos 6 permutações no total, sendo 3 pares e 3 ímpares.

$$\text{Pares}\begin{cases} 149 \longrightarrow 0 \\ 491 \longrightarrow 2 \\ 914 \longrightarrow 2 \end{cases} \qquad \text{Ímpares}\begin{cases} 194 \longrightarrow 1 \\ 419 \longrightarrow 1 \\ 941 \longrightarrow 3 \end{cases}$$

8.1 - Definições

Definição 2: Seja $\mathbf{A} = a_{ij}$ uma matriz quadrada de ordem $n \times n$. Definimos o **determinante** de $\mathbf{A}$, denotado por $det(\mathbf{A})$ ou $|\mathbf{A}|$ o número real dado por:

$$\boxed{det(\mathbf{A}) = \sum (\pm) a_{1j_1}\, a_{2j_2}\, \ldots a_{nj_n}}$$

onde j_1, j_2 e j_n são todas as permutações do conjunto $S = \{1,\ 2; \cdots n\}$. O sinal$(+)$ do determinante corresponde à permutação par de $j_1, j_2 \cdots j_n$ e o sinal (-) à permutação ímpar.

8.1 - Definições

Exemplo 4: Se $\mathbf{A} = a_{11}$ é uma matriz 1×1, então S_1 tem uma única permutação $1! = 1$. Como o número de inversões é zero o sinal do determinante é positivo. Logo $det(\mathbf{A}) = a_{11}$.

8.1 - Definições

Exemplo 5: Se $\mathbf{A}$ é uma matriz 2×2 dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

então para calcular o $det(\mathbf{A})$, escrevemos os termos da matriz na forma:

$$a_{1\_}a_{2\_} \qquad \text{e} \qquad a_{1\_}a_{2\_}$$

8.1 - Definições

Os espaços vazios serão preenchidos por todos os elementos de S_2, que são 12 e 21, dado que $S = \{1, 2\}$. Temos que 12 é uma permutação par (número de inversões é zero) e 21 é uma permutação ímpar (uma inversão). Assim o termo $a_{\mathbf{1}1}a_{2\mathbf{2}}$ tem sinal positivo e o termo $a_{1\mathbf{2}}a_{2\mathbf{1}}$ tem sinal negativo. Logo

$$\boxed{det(\mathbf{A}) = a_{1\mathbf{1}}a_{2\mathbf{2}} - a_{1\mathbf{2}}a_{2\mathbf{1}}}$$

Uma maneira prática de se calcular o determinante de uma matriz 2×2 é observar que o determinante é o resultado da subtração entre os produto das diagonais.

8.1 - Definições

Exemplo 6: Calcule o determinante da seguinte matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

Então

$$det(\mathbf{A}) = (2)(4) - (-1)(3) = 11$$

8.1 - Definições

Exemplo 7: Considere uma matriz de ordem 3×3, dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

Então para calcular $det(\mathbf{A})$, escrevemos os seis termos $3! = 6$ da matriz,

$$\begin{array}{ccc} a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}\,, & a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}\,, & a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_} \\ a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}\,, & a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}\,, & a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_} \end{array}$$

8.1 - Definições

Os espaços vazios serão preenchidos por todos os elementos de S_3 colocando os sinais de + ou - conforme a permutação. Assim

$$\begin{aligned} det(\mathbf{A}) = \ & \{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\} - \\ & \{a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}\} \end{aligned}$$

8.1 - Definições

Uma regra prática de se calcular o determinante de uma matriz $\mathbf{A}$ de ordem 3×3 é dado a seguir: Repita as duas primeiras colunas de $\mathbf{A}$, some os produtos de cada um dos três elementos no sentido da esquerda para a direita e subtraia os produtos dos elementos no sentido da direita para a esquerda.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

8.1 - Definições

Exemplo 8: Calcule o determinante da matriz abaixo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Passo a passo Voltar

$$\begin{aligned} det(\mathbf{A}) &= \{(-1)(1)(4) + (2)(5)(-3) + (3)(2)(1)\} \\ &\quad + \{-(-3)(1)(3) - (1)(5)(-1) - (2)(2)(4)\} \\ &= (-28) + (-2) = -30 \end{aligned}$$

8.2 - Propriedades de Determinantes

Teorema 1: Seja $\mathbf{A}$ uma matriz de ordem $n \times n$. Então o determinante de $\mathbf{A}$ e de sua transposta $\mathbf{A}^T$ são iguais, ou seja,

$$\boxed{det(\mathbf{A}) = det(\mathbf{A}^T)}$$

8.2 - Propriedades de Determinantes

Demonstração: Sejam as matrizes $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ e $\mathbf{A}^T = [b_{ij}]$, onde por definição de matriz transposta $b_{ij} = a_{ji} \quad (1 \leq i, j \leq n)$. O determinante é definido por,

$$\boxed{det(\mathbf{A}^T) = \sum (\pm) b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n} = \sum (\pm) a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}}$$

O segundo termo é um produto de números reais e podemos ordenar os índices das linhas em sua ordem natural, sem alterar o sinal, ou seja,

$$\boxed{a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} = a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}}$$

Pode-se mostrar usando propriedades de permutações que a permutação $k_1, k_2, \cdots k_n$ e a permutação $j_1, j_2, \cdots j_n$ tem o mesmo sinal, isto é, ou ambas são pares ou ímpares. Portanto $det(\mathbf{A}^T) = det(\mathbf{A})$.

8.2 - Propriedades de Determinantes

Podemos ilustrar a propriedade das permutações usada no último teorema com o seguinte exemplo: Seja o número

$$\boxed{b_{14}b_{32}b_{43}b_{21} = a_{41}a_{23}a_{34}a_{12} = a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}}$$

Observando o último termo temos que o número de inversões na permutação 2341 é 3 e para o primeiro termo o número de inversões na permutação 4231 é 5. Como o sinal é negativo para ambos os termos então temos $det(A) = det(A^T)$.

8.2 - Propriedades de Determinantes

Exemplo 9: Calcule o determinante da matriz transposta definida no **Exemplo 8**.

Solução: A matriz transposta é dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Usando a fórmula obtemos:

$$\begin{aligned} det(\mathbf{A}^T) &= \{(-1)(1)(4) + (2)(1)(3) + (-3)(2)(5)\} \\ &\quad - \{(-3)(1)(3) + (-1)(1)(5) + (2)(2)(4)\} \\ &= (-4 + 6 - 30) - (-9 - 5 + 16) = -30 = det(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

8.2 - Propriedades de Determinantes

Teorema 2: Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes de ordem $n \times n$, onde a matriz $\mathbf{B}$ é obtida de uma matriz $\mathbf{A}$ trocando-se duas linhas (ou colunas), então

$$\boxed{det(\mathbf{B}) = -det(\mathbf{A}).}$$

8.2 - Propriedades de Determinantes

Demonstração: Suponha que $\mathbf{B}$ é obtida de $\mathbf{A}$ trocando-se as linhas r e s de $\mathbf{A}$ e $r < s$. Assim temos que $b_{rj} = a_{sj}$ e $b_{sj} = a_{rj}$. Para o restante dos termos $b_{ij} = a_{ij}$, se $i \neq r$ e $i \neq s$. Logo

$$\begin{aligned} det(\mathbf{B}) &= \sum (\pm) b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{rj_r} \cdots b_{sj_s} \cdots b_{nj_n} \\ &= \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{sj_r} \cdots a_{rj_s} \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{rj_s} \cdots a_{sj_r} \cdots a_{nj_n} \end{aligned}$$

A permutação $j_1, j_2, \cdots, j_s \cdots j_r \cdots j_n$ é obtida da permutação $j_1, j_2, \cdots, j_r \cdots j_s \cdots j_n$ trocando-se apenas os dois números j_r por j_s. Isto significa que o número de inversões é ímpar e portanto o sinal do determinante da matriz $\mathbf{B}$ é ao contrário do sinal do determinante da matriz $\mathbf{A}$. Para as colunas a demonstração é análoga

8.2 - Propriedades de Determinantes

Exemplo 10: Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix},$$

onde a matriz **B** foi obtida trocando-se as linhas da matriz **A**. Temos que $det(\mathbf{A}) = 23$ e $det(\mathbf{B}) = -23$

8.2 - Propriedades de Determinantes

<u>Teorema 3</u>: Sejam **A** e **B** matrizes de ordem $n \times n$. Então

1) Se **A** tem uma linha (ou coluna) nula, então $det(\mathbf{A}) = 0$.

Demonstração:

Suponha que a r é a linha nula de **A**. Como cada termo na definição do determinante de A contém um fator da r-ésima linha de **A**, cada termo do $det(\mathbf{A})$ é nulo. Logo $det(\mathbf{A}) = 0$.

8.2 - Propriedades de Determinantes

2) Se $\mathbf{A}$ tem duas linhas (ou colunas) iguais, então $det(\mathbf{A}) = 0$.

Demonstração:
Suponha que as linhas r e s da matriz $\mathbf{A}$ sejam iguais. Seja $\mathbf{B}$ uma matriz obtida de $\mathbf{A}$ trocando-se as linhas r e s. Então pelo Teorema 2 temos que $det(\mathbf{A}) = -det(\mathbf{B})$. Por outro lado $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ e portanto $det(\mathbf{A}) = det(\mathbf{B})$. Das duas condições temos que $det(\mathbf{A}) = -det(\mathbf{A}) = 0$.

8.2 - Propriedades de Determinantes

3) Se **B** é obtida de **A** multiplicando-se uma linha (ou coluna) por um escalar α, então $det(\mathbf{B}) = \alpha\, det(\mathbf{A})$.

Demonstração:

Suponha que a r-ésima linha de **A** seja multiplicada por α. Denotemos esta nova matriz por **B**. Então $b_{ij} = a_{ij}$ se $i \neq r$ e $b_{rj} = \alpha\, a_{rj}$. Da definição de determinante temos:

$$\begin{aligned} det(\mathbf{B}) &= \sum (\pm) b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{rj_r} \cdots \cdots b_{nj_n} \\ &= \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots \alpha\, a_{rj_r} \cdots a_{nj_n} \\ &= \alpha \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{rj_r} \cdots a_{nj_n} = \alpha\, det(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

8.2 - Propriedades de Determinantes

4) Se **A** é uma matriz triangular superior (ou inferior) então $det(\mathbf{A}) = a_{11}\, a_{22}\, \cdots a_{nn}$, isto é, o determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

8.2 - Propriedades de Determinantes

5) O determinante do produto de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{B}$ é igual ao produto dos seus determinantes, ou seja, $det(\mathbf{AB}) = det(\mathbf{A})\, det(\mathbf{B})$

6) Se $\mathbf{B}$ é obtida de $\mathbf{A}$ substituindo a linha i por ela somada a um múltiplo escalar de uma linha j, $i \neq j$, então $det(\mathbf{B}) = det(\mathbf{A})$

8.2 - Propriedades de Determinantes

Exemplo 11: Calcule o determinante da matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Solução: A matriz **A** tem uma linha nula, logo do teorema 3 conclui-se que $det(\mathbf{A}) = 0$. De outro modo usando a fórmula temos:

$$\begin{aligned} det(A) = & \quad \{(-1.0.4) + (2.0.3) + (-3.5.0)\} \\ - & \quad \{(2.0.4) + (-1.0.5) + (-3.0.3)\} = 0 \end{aligned}$$

8.2 - Propriedades de Determinantes

Exemplo 12: Calcule o determinante da matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Solução: A matriz **A** tem duas linhas iguais. Do teorema 3 conclui-se que $det(\mathbf{A}) = 0$. De outro modo usando a fórmula temos:

$$\begin{aligned} det(\mathbf{A}) &= \{(1.2.-1) + (2.4.3) + (4.1.5)\} \\ &\quad - \{(2.1.-1) + (1.4.5) + (4.2.3)\} \\ &= 42 - 42 = 0 \end{aligned}$$

8.2 - Propriedades de Determinantes

- Exemplo 13: Calcule o determinante da matriz triangular superior $\mathbf{A}$, dada por $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

  Solução: Usando o teorema temos que, $det(\mathbf{A}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} = 1 \cdot (-1) \cdot (-2) = 2.$

- Esta propriedade de matrizes triangulares é muito útil no cálculo de determinantes. Usando propriedades elementares entre linhas de uma matriz quadrada qualquer podemos transformá-la numa matriz equivalente triangular. Usando a propriedade anterior podemos então calcular o determinante.

8.2 - Propriedades de Determinantes

Exemplo 14: Calcule os determinantes das matrizes **A** e **B** e **AB**, onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -18 \\ -2 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

Solução: Temos que

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -18 \\ -2 & 1 & -6 \end{bmatrix} = (-2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 9 \\ -2 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= (-2) \cdot (3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

8.2 - Propriedades de Determinantes

Logo $det(\mathbf{B}) = -6.det(\mathbf{A}) = -6.(-4) = 24$. Por outro lado o produto $\mathbf{AB}$ é dado por:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -15 \\ -3 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Usando a definição temos que $det(\mathbf{AB}) = -96$. Mas $det(\mathbf{AB}) = det(A) \cdot det(\mathbf{B}) = -4 \cdot 24 = -96$.

8.2 - Propriedades de Determinantes

Exemplo 15: Calcule o determinante da matriz $\mathbf{B}$, tal que a segunda linha de $\mathbf{B}$ é obtida somando-se a segunda linha da matriz $\mathbf{A}$ pelo produto de 3 vezes a primeira linha da matriz $\mathbf{A}$.

Solução: A matriz $\mathbf{A}$ e a matriz $\mathbf{B}$ são dadas por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Usando diretamente a definição de determinante, temos que $det(\mathbf{A}) = -4$ e $det(\mathbf{B}) = -4$.

Por outro lado, temos que $det(\mathbf{A}) = det(\mathbf{B}) = -4$.

8.2 - Propriedades de Determinantes

Corolário: Se uma matriz $\mathbf{A}$ é invertível , então $det(\mathbf{A}) \neq 0$ e

$$det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{det(\mathbf{A})}$$

Demonstração: Por definição, se $\mathbf{A}^{-1}$ é a matriz inversa de $\mathbf{A}$ então $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = I$. Pelo teorema anterior temos que
$det(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) = det(\mathbf{A})\, det(\mathbf{A}^{-1}) = det(\mathbf{I}) = 1$. Assim temos que $det(\mathbf{A}) \neq 0$ e $det(\mathbf{A}^{-1}) = \dfrac{1}{det(\mathbf{A})}$.

8.2 - Propriedades de Determinantes

Exemplo 16: Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Temos que $det(\mathbf{A}) = 4$ e $det(\mathbf{A}^{-1}) = \dfrac{1}{4}$, ou seja $det(\mathbf{A}^{-1}) = \dfrac{1}{det(\mathbf{A})} = \dfrac{1}{4}$.

Exercícios

- Fazer os exercícios de 10 a 21 e os exercícios teóricos de T.1 a T.16 das páginas 84 e 85 do livro texto.

Álgebra Linear

Aula 11: Expansão de Cofatores

Mauro Rincon

Márcia Fampa

9.1 - Definições

Definição 1:

Seja $\mathbf{A} = a_{ij}$ uma matriz quadrada de ordem $n \times n$ e denotemos por $\mathbf{M}_{ij}$ a submatriz quadrada de ordem $n-1$ de $\mathbf{A}$ obtida pela eliminação da i-ésima linha e da j-ésima coluna. O determinante $det(\mathbf{M}_{ij})$ é chamado **menor relativo ou determinante menor** ao elemento a_{ij} de $\mathbf{A}$; e o cofator de a_{ij}, denotado por A_{ij}, é o menor com o sinal correspondente:

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} det(\mathbf{M}_{ij})}$$

- Note que A_{ij} é um número real enquanto $\mathbf{M}_{ij}$ é uma matriz.

9.1 - Definições

Exemplo 1:

Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -2 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Considere a submatriz $\mathbf{M}_{23}$ obtida pela eliminação da segunda linha e terceira coluna de $\mathbf{A}$. Então a matriz de ordem 2, $\mathbf{M}_{23}$ é dada por:

$$\mathbf{M}_{23} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad det(\mathbf{M}_{23}) = 8$$

Logo $\mathbf{A}_{23} = (-1)^{2+3} det(\mathbf{M}_{23}) = (-1) \cdot 8 = -8$

9.1 - Definições

Teorema 1: (**Fórmula de Laplace**)
O determinante da matriz $\mathbf{A} = a_{ij}$ é igual à soma dos produtos obtidos pela multiplicação dos elementos de qualquer linha (coluna) por seus respectivos cofatores, ou seja:

$$|\mathbf{A}| = det(\mathbf{A}) = \quad a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad i = 1, 2 \cdots n$$

$$|\mathbf{A}| = det(\mathbf{A}) = \quad a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad j = 1, 2 \cdots n$$

9.1 - Definições

Demonstração:
Sem perda de generalidade, consideraremos uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ de ordem 3, dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Da definição de determinante, temos que:

$$\begin{aligned} det(\mathbf{A}) &= \{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\} \\ &- \{a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}\} \end{aligned}$$

9.1 - Definições

Fatorando os termos a_{11}, a_{12} e a_{13}, obtemos

$$\begin{aligned} det(\mathbf{A}) &= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) + a_{12}\left(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}\right) \\ &+ a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \end{aligned}$$

pois os cofatores A_{11}, A_{12} e A_{13} são dados por:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right)$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right)$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right)$$

9.1 - Definições

- Na demonstração o determinante foi desenvolvido fazendo a expansão do determinante em cofatores para a primeira linha, mas o mesmo resultado permanece válido fazendo a expansão do determinante em cofatores para a 2^a e 3^a linha e para 1^a, 2^a e 3^a coluna.

9.2 - Redução de Ordem

Exemplo 2: Calcule o determinante da matriz $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

9.3 - Cálculo do Determinante introduzindo zeros

Exemplo 3:

Calcule o determinante da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, que significa

$$3^a linha \leftarrow 3^a linha + 2^a linha$$

9.3 - Cálculo do Determinante introduzindo zeros

Após as operações obtemos a seguinte matriz A^1,

$$\mathbf{A}^1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Usando agora a expansão de cofatores na terceira coluna temos:

$$det(\mathbf{A}) = det(\mathbf{A}^1) = 1.(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

9.3 - Cálculo do Determinante introduzindo zeros

Na matriz $\mathbf{A}^1$, vamos introduzir zeros na primeira coluna, fazendo as operações:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2.L_1$$
$$L_3 \leftarrow L_3 - 3.L_1$$

Temos agora a seguinte matriz $\mathbf{A}^2$,

$$det(\mathbf{A}) = det(\mathbf{A}^1) = det(\mathbf{A}^2) = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & 7 & -13 \end{vmatrix}$$

$$= ((-1)^5)\,1.(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 9 & -9 \\ 7 & -13 \end{vmatrix} = -1.1.(-54) = 54$$

Exercícios

- Fazer os exercícios de 1 a 19 das páginas 95 e 96 do livro texto.

Álgebra Linear

Aula 12: A Inversa de uma Matriz e a Regra de Cramer

Mauro Rincon

Márcia Fampa

10.1 - Definições

Definição 1:

Seja $\mathbf{A} = a_{ij}$ uma matriz quadrada de ordem $n \times n$. A matriz **adjunta** de $\mathbf{A}$, denotada por $adj\ \mathbf{A}$, é a transposta da matriz dos cofatores de $\mathbf{A}$, ou seja,

$$adj\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

10.1 - Definições

Exemplo 1:

Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -2 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, calcule a matriz *adj* $\mathbf{A}$.

Solução: Os cofatores da matriz $\mathbf{A}$ são:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -12,\ A_{12} = - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = + \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -10, A_{21} = - \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{22} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3,\ A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8$$

10.1 - Definições

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -18, \; A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -8,$$

$$A_{33} = + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 4$$

onde o sinal $+, -$ é o correspondente do termo $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ Substituindo os termos correspondentes temos que,

$$adj\ A = \begin{bmatrix} -12 & -2 & -18 \\ 1 & -1 & -8 \\ -10 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

10.1 - Definições

Teorema 1:

Se **A** é uma matriz quadrada de ordem $n \times n$, então

$$\boxed{a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0, \ \text{para } i \neq k}$$

$$\boxed{a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0, \ \text{para } j \neq k}$$

Demonstração Seja $\hat{\mathbf{A}}$ uma matriz obtida pela substituição da i-ésima linha pela k-ésima linha de **A**. Desta forma a matriz $\hat{\mathbf{A}}$ tem duas linhas iguais e portanto $det(\hat{\mathbf{A}}) = |\hat{\mathbf{A}}| = 0$.

10.1 - Definições

Fazendo a expansão do $det(\hat{\mathbf{A}})$ em relação a k-ésima linha $(\hat{\mathbf{A}})$, cujos elementos são $a_{i1}, a_{i2}, \cdots a_{in}$ e os cofatores são $A_{k1}, A_{k2}, \cdots A_{kn}$. Usando a expansão de Laplace obtemos:

$$|\hat{\mathbf{A}}| = a_{i1}.A_{k1} + a_{i2}.A_{k2} + \cdots + a_{in}.A_{kn} = 0$$

A segunda propriedade segue diretamente da primeira, desde que $det(\mathbf{A}) = det(\mathbf{A}^T)$.

10.1 - Definições

Teorema 2:

Para qualquer matriz quadrada $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} \cdot (adj\ \mathbf{A}) = (adj\ \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{I}$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade e $|\mathbf{A}| = det(\mathbf{A})$.

10.1 - Definições

Demonstração: Temos que

$$\mathbf{A}.(adj\ \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{j1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{j2} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{jn} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Os elementos da matriz produto são da forma:

$$x_{ij} = a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + \cdots a_{in} \cdot A_{jn}$$

Assim fazendo $i = j$, os elementos da diagonal $x_{ii} = |\mathbf{A}|$ pelo Teorema e para $i \neq j$ os elementos $x_{ij} = 0$ pelo Teorema. Portanto $\mathbf{A} \cdot (adj\ \mathbf{A}) = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{I}$.

10.1 - Definições

De forma análoga, os elementos x_{ij} da matriz produto $(adj\ \mathbf{A}).\mathbf{A}$ são dados por:

$$x_{ij} = A_{1i} \cdot a_{1j} + A_{2i} \cdot a_{2j} + \cdots A_{ni} \cdot a_{nj},$$

que satisfaz a condição,

$$x_{ij} = \begin{cases} |\mathbf{A}| & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$$

Assim conclui-se que
$\mathbf{A} \cdot (adj\ \mathbf{A}) = (adj\ \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{I}$

10.1 - Definições

Exemplo 2:

Considere a matriz $\mathbf{A}$ e $adj\ \mathbf{A}$ do exemplo anterior. Então

$$\mathbf{A} \cdot adj\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -2 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 & -2 & -18 \\ 1 & -1 & -8 \\ -10 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= -38 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde $|\mathbf{A}| = -38$.

10.1 - Definições

Corolário 1:

Para qualquer matriz quadrada $\mathbf{A}$ tal que $det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| \neq 0$, a matriz inversa de $\mathbf{A}$ é dada por:

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot adj\ \mathbf{A}}$$

Demonstração Temos que

$$\mathbf{A} \cdot \left(\frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot adj\ \mathbf{A} \right) = \frac{1}{|\mathbf{A}|} (\mathbf{A} \cdot adj\ \mathbf{A}) = \frac{1}{|\mathbf{A}|} |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I}.$$

Logo da definição de inversa de uma matriz obtemos,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}.adj\ \mathbf{A}$$

10.1 - Definições

Exemplo 3:

Calcule a inversa $\mathbf{A}^{-1}$ da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Solução: Do exemplo anterior a matriz *adj* $\mathbf{A}$ e o determinante de $\mathbf{A}$ são conhecidos. Assim do Corolário 1 temos:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}.adj\ \mathbf{A} = \frac{1}{|-38|} \begin{bmatrix} -12 & -2 & -18 \\ 1 & -1 & -8 \\ -10 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6/19 & 1/19 & 9/19 \\ -1/38 & 1/38 & 4/19 \\ 5/19 & 4/19 & -2/19 \end{bmatrix}$$

10.1 - Definições

Teorema 3:
Uma matriz $\mathbf{A}$ é invertível se e somente se $det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Demonstração: Se $\mathbf{A}$ é invertível então por definição temos que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. Assim $det(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) = det(\mathbf{A}) \cdot det(\mathbf{A}^{-1}) = det(\mathbf{I}) = 1$. e portanto $det(\mathbf{A}) \neq 0$. Por outro lado se $det(\mathbf{A}) \neq 0$ então a inversa existe pelo Corolário 1.

10.1 - Definições

Corolário 2:

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada de ordem n. Então o sistema linear homogêneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ tem uma solução não trivial se e somente se $det(\mathbf{A}) = 0$.

10.1 - Definições

Demonstração: Se $det(\mathbf{A}) \neq 0$ então A é invertível e o sistema linear homogêneo tem apenas a solução trivial $\mathbf{x} = (0, 0, \cdots, 0)$. Reciprocamente se $det(\mathbf{A}) = 0$, então $\mathbf{A}$ é singular. Suponha que $\mathbf{A}$ seja equivalente por linhas a uma matriz $\mathbf{B}$, em forma escada reduzida por linhas. Como $det(\mathbf{A}) = det(\mathbf{B}) = 0$, necessariamente a matriz $\mathbf{B}$ tem pelo menos uma linha nula. Seja $\mathbf{C}$ uma submatriz de $\mathbf{B}$, excluindo-se todas as linhas nulas. Nestas condições os sistemas lineares homogêneos $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{Cx} = \mathbf{0}$ tem as mesmas soluções. Mas o sistema $\mathbf{Cx} = \mathbf{0}$ tem no máximo $(n-1)$ equações para as n incógnitas e conseqüentemente o sistema tem uma solução não trivial.

10.1 - Definições

Teorema 4:

As seguintes propriedades são equivalentes:

1) $\mathbf{A}$ é invertível

2) $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ tem apenas a solução trivial

3) $\mathbf{A}$ é equivalente por linhas a $\mathbf{I}$ (identidade)

4) O sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tem uma única solução para qualquer vetor $\mathbf{b}$

5) $det(\mathbf{A}) \neq 0$

10.2 - Regra de Cramer

Vamos utilizar os resultados obtidos anteriormente para obter um outro método para resolver sistemas lineares, conhecido como a **Regra de Cramer**.

10.2 - Regra de Cramer

<u>Teorema 5</u> Seja um sistema linear com n-equações e n-incógnitas,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

e $\mathbf{A} = a_{ij}$, a matriz dos coeficientes do sistema, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots b_n)^T$ o vetor dos termos independentes e $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots x_n)^T$ o vetor incógnita.

10.2 - Regra de Cramer

Se $det(\mathbf{A}) \neq 0$, então o sistema linear tem uma única solução dada por:

$$x_1 = \frac{det(\mathbf{A}_1)}{det(\mathbf{A})}, \quad x_2 = \frac{det(\mathbf{A}_2)}{det(\mathbf{A})}, \cdots, x_n = \frac{det(\mathbf{A}_n)}{det(\mathbf{A})},$$

onde $\mathbf{A}_i$ é a matriz obtida de $\mathbf{A}$ substituindo-se a i-ésima coluna pelo vetor $\mathbf{b}$.

10.2 - Regra de Cramer

Demonstração: Se $det(\mathbf{A}) \neq 0$ então a matriz $\mathbf{A}$ é invertível. Então do sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ obtemos que a solução é dada por $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Do Corolário 1 podemos escrever

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \left(\frac{1}{det(\mathbf{A})} \cdot adj\ \mathbf{A}\right) \cdot \mathbf{b}$$

Fazendo o produto, obtemos para cada linha i, $1 \leq i \leq n$, que

$$x_i = \frac{1}{det(\mathbf{A})}\left(\mathbf{A}_{1i}\mathbf{b}_1 + \mathbf{A}_{2i}\mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{A}_{ni}\mathbf{b}_n\right)$$

10.2 - Regra de Cramer

Seja a matriz $\mathbf{A}_i$ dada por

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,i-1} & b_2 & a_{2\,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Então:

$$det(\mathbf{A}_i) = \mathbf{A}_{1i}\mathbf{b}_1 + \mathbf{A}_{2i}\mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{A}_{ni}\mathbf{b}_n$$

10.2 - Regra de Cramer

Substituindo na igualdade, conclui-se que para todo i, $1 \leq i \leq n$

$$x_i = \frac{det(\mathbf{A}_i)}{det(\mathbf{A})}$$

10.2 - Regra de Cramer

Exemplo 4

Resolva o sistema linear pela Regra de Cramer:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Solução: As matrizes são dadas por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix} \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \begin{matrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix} \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \begin{matrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

10.2 - Regra de Cramer

Onde $\mathbf{A}$ é a matriz dos coeficientes e $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ foram obtidas da matriz $\mathbf{A}$ trocando-se a $1^a, 2^a$ e 3^a respectivamente pelos termos independentes $\mathbf{b} = (2, -3, 1)^T$. Os determinantes são dados por:

$$det(\mathbf{A}) = -12, det(\mathbf{A}_1) = 12, det(\mathbf{A}_2) = 0, det(\mathbf{A}_3) = -12.$$

Assim a solução do sistema é dada por:

$$x_1 = \frac{det(\mathbf{A}_1)}{det(\mathbf{A})} = -1, \;\; x_2 = \frac{det(\mathbf{A}_2)}{det(\mathbf{A})} = 0, \;\; x_3 = \frac{det(\mathbf{A}_3)}{det(\mathbf{A})} = 1$$

10.2 - Regra de Cramer

Observe que pelo Teorema a Regra de Cramer somente se aplica quando o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de zero. Desta forma quando $det(\mathbf{A}) = 0$ é melhor usar o método de Gauss- Jordan. Um outro aspecto importante em relação a Regra de Cramer é o alto número de operações para se determinar a solução de um sistema linear, ou seja, se temos uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ de ordem n, então fazendo a expansão em cofatores para o cálculo do determinante da matriz $\mathbf{A}$ temos $n!$ operações de multiplicação. Para p cálculo do determinante de cada matriz $\mathbf{A}_i \quad 1 \leq i \leq n$ temos também $n!$ operações. Portanto para a resolução do sistema linear pela Regra de Cramer temos $(n+1)!$ operações, que torna a Regra de Cramer inviável para grandes sistemas.

Exercícios

- Resolva os sistemas lineares de 20 a 23 da página 97 do livro texto, pela Regra de Cramer.

Álgebra Linear

Aula 13: Método de Eliminação de Gauss

Mauro Rincon

Márcia Fampa

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

Considere a matriz aumentada $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$, onde $\mathbf{A}$ é uma matriz triangular superior de ordem 3 dada por:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{bmatrix}$$

que representa o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad\quad\; + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad\;\; a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

Se $a_{ii} \neq 0$ então o sistema linear pode ser resolvido por retrosubstituição,

$$\begin{aligned} x_3 &= b_3/a_{33} \\ x_2 &= (b_2 - (a_{23}x_3))/a_{22} \\ x_1 &= (b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3))/a_{11} \end{aligned}$$

De um modo geral, se a matriz quadrada $\mathbf{A}$ é de ordem n então o algoritmo para a determinação da solução $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ é dado por:

Seja $a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$.
Então $x_n = b_n/a_{nn}$.
Para $j = n-1, n-2, \cdots, 2, 1$

$$x_j = \frac{b_j - \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk}x_k}{a_{jj}}$$

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

- Seja $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ um sistema linear. O Método de Eliminação de Gauss para resolução do sistema é dado pelas seguintes etapas:
  - **Etapa 1**: Obtenção da matriz aumentada $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ do sistema.
  - **Etapa 2**: Transformação da matriz aumentada $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ à uma matriz aumentada $[\overline{\mathbf{A}}|\overline{\mathbf{b}}]$ onde $\overline{\mathbf{A}}$ é uma matriz triangular superior.
  - **Etapa 3**: Resolver o sistema linear $[\overline{\mathbf{A}}|\overline{\mathbf{b}}]$ da Etapa 2 por retro substituição.

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

Etapa 1:

Considere o sistema linear de ordem 3 dado por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = & b_3 \end{cases}$$

A matriz aumentada do sistema é

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

Etapa 2:

- Fase 1: Zerar todos os elementos da primeira coluna abaixo da diagonal principal. Seja $a_{11} \neq 0$, definimos os seguintes multiplicadores: $m_{21} = a_{21}/a_{11}$ e $m_{31} = a_{31}/a_{11}$ e façamos a seguinte operação: $\begin{cases} L_2^{(1)} & \leftarrow & L_2 - m_{21} \cdot L_1 \\ L_3^{(1)} & \leftarrow & L_3 - m_{31} \cdot L_1 \end{cases}$

  Após as operações, obtemos:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & b_3^{(1)} \end{array}\right]$$

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

- Fase 2: Zerar todos os elementos da 2^a coluna abaixo da diagonal principal. Agora o pivô é o elemento $a_{22}^{(1)}$ e linha pivô é a linha 2 de $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(1)}$. Suponha $a_{22}^{(1)} \neq 0$, definimos o multiplicador $m_{32} = a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ e façamos a seguinte operação: $L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} - m_{32} \cdot L_2^{(1)}$

  Após as operações obtemos:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & \boxed{0} & a_{33}^{(2)} & b_3^{(2)} \end{array}\right]$$

- Note que $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(2)}$ é uma matriz aumentada cuja matriz é uma matriz triangular superior.

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

Etapa 3:
Resolução do sistema $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(2)}$ que na forma triangular superior, ou seja:

$$\begin{aligned} x_3 &= b_3^{(2)}/a_{33}^{(2)}, \quad a_{33}^{(2)} \neq 0 \\ x_2 &= (b_2^{(2)} - (a_{23}^{(2)} x_3))/a_{22}^{(2)} \\ x_1 &= (b_1^{(2)} - (a_{12}^{(2)} x_2 + a_{13}^{(2)} x_3))/a_{11}^{(2)} \end{aligned}$$

Assim a solução $\{x_1, x_2, x_3\}$ de $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(2)}$ é a mesma solução de $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$.

- Observação: Note que sendo a matriz triangular superior então

$$det(\mathbf{A}^{(2)}) = a_{11}^{(2)} \cdot a_{22}^{(2)} \cdot a_{33}^{(2)} = det(\mathbf{A})$$

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

Exemplo 1: Resolva o sistema linear pelo Método de Eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

Etapa 1:

A matriz aumentada do sistema é

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(0)} = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -5 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

Etapa 2:

- Fase 1: Zerar todos os elementos da primeira coluna abaixo da diagonal principal.
  Linha pivô = L_1 e $a_{11} = 1$ é o pivô.
  Multiplicadores: $m_{21} = 2$ e $m_{31} = -2$

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(1)} = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{lcl} L_2^{(1)} & \leftarrow & L_2^{(0)} - 2L_1^{(0)} \\ L_3^{(1)} & \leftarrow & L_3^{(0)} - (-2)L_1^{(0)} \end{array}$$

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

- Fase 2: Zerar todos os elementos da 2^a coluna abaixo da diagonal principal.

$a_{22}^{(1)} = 3 \neq 0$ é o elemento pivô e $L_2^{(1)}$ é a linha pivô.

Define o multiplicador: $m_{32} = \dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = -\dfrac{7}{3}$.

Então:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(2)} = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{14}{3} & 0 \end{array}\right] L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} - \left(\frac{-7}{3}\right) L_2^{(1)}$$

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

Etapa 3: Resolvendo o sistema por retrosubstituição.

$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(2)}$ representa o sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_2 - 5x_3 = -3 \\ -\dfrac{14}{3}x_3 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{x_3 = 0} \Rightarrow x_2 = \dfrac{-3-(-5x_3)}{3} = -1$

$$\boxed{\mathbf{x} = (1, -1, 0)}$$

$$x_1 = \frac{2-(-x_2+2x_3)}{1} = 1$$

<u>Observação</u>: $det(\mathbf{A}) = det(\mathbf{A}^{(2)}) = 1 \cdot 3 \cdot \left(\dfrac{-14}{3}\right) = -14$

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

Exemplo 2:

Considere o mesmo sistema do Exemplo 1, usando $a_{22} = 2$ como coeficiente de x_2 na segunda linha.

Então:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -5 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

Etapa 2:

- Fase 1: Zerar todos os elementos da primeira coluna abaixo da diagonal principal.

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2^{(1)} \leftarrow L_2^{(0)} - 2L_1^{(0)} \\ L_3^{(1)} \leftarrow L_3^{(0)} + 2L_1^{(0)} \end{array}$$

11.1 - Método de Eliminação de Gauss

- Fase 2: Zerar todos os elementos da 2^a coluna abaixo da diagonal principal. Mas nesse caso o pivô $a_{22}^{(1)} = 0$ e portanto não podemos calcular o multiplicador $m_{32} = \dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$.
Dessa forma o algoritmo falha e não podemos resolver o sistema, embora a solução do sistema seja $\mathbf{x} = (1, -1, 0)$.

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

O pivoteamento consiste em tomar como pivô o maior elemento em valor absoluto da coluna a ser zerada, ou seja, em cada fase o pivô será escolhido por:

$$\hat{a}_{jj} = \max |a_{jk}|, \qquad k = j, j+1, ..., n$$

Se o maior elemento em valor absoluto pertence a linha k então troca-se as linhas, ou seja:

$$L_j \leftarrow L_k \qquad \text{e} \qquad L_k \leftarrow L_j$$

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Exemplo 3: Considere a matriz aumentada do exemplo 2

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -5 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

Pivô:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{11} &= \max\{|a_{11}|; |a_{21}|; |a_{31}|\} \\ &= \max\{1, 2, 2\} = 2 \end{aligned}$$

Então podemos escolher como pivô $a_{21} = 2$ ou $a_{31} = -2$

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Escolhendo $a_{21} = 2$ como pivô então:

$$L_2 \leftarrow L_1 \qquad \text{e} \qquad L_1 \leftarrow L_2$$

Assim,

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(0)'} = \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & -5 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Aplica-se o MEG:

$$m_{21} = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad m_{31} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(1)} = \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 5/2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2^{(1)} \leftarrow L_2^{(0)} - \frac{1}{2} L_1^{(0)} \\ L_3^{(1)} \leftarrow L_3^{(0)} + L_1^{(0)} \end{array}$$

Escolha do pivô para a fase 2:

$$\begin{aligned} a_{22}^{(1)} &= \max\{|a_{22}|; |a_{32}|\} \\ &= \max\{2, 3\} = 3 \end{aligned}$$

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Mas $3 \in L_3$ de $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(2)}$. Então,

$$L_2 \leftarrow L_3 \qquad \text{e} \qquad L_3 \leftarrow L_2$$

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(1)'} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 5/2 & 2 \end{array}\right]$$

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

- Fase 2: Zerar os elementos da 2ª coluna abaixo da diagonal principal.

  Linha pivô $= L_2^{(1)}$ e o pivô $= -3$

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7/6 & 0 \end{array}\right] \quad L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} - \frac{2}{3} L_2^{(1)}$$

Logo, $\frac{7}{6} x_3 = 0 \Rightarrow \boxed{x_3 = 0}$

$$x_2 = \frac{3 - (2x_3)}{-3} = -1$$

$$x_1 = \frac{0 - (2x_2 - x_3)}{2} = 1$$

Solução: $\mathbf{x} = (1, -1, 0)$

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Observação 1: Foram trocadas duas linhas durante o processo: $L_1 \leftarrow L_2$ e $L_2 \leftarrow L_3$

Neste caso, o número de permutações é dois. Assim,

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^2) = 2.(-3).(7/6) = -7$$

Observação 2: Quando o número de permutações

$$\begin{cases} \text{é par} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = \det(\overline{\mathbf{A}}) \\ \text{é ímpar} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = -\det(\overline{\mathbf{A}}) \end{cases}$$

onde $\overline{\mathbf{A}}$ é a matriz triangular superior obtida pelo MEG com pivoteamento.

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Observação 3: Se durante o processo de aplicação do MEG com pivoteamento o pivô

$$a_{ii}^{(j)} = \max\{|a_{ik}|\} = 0 \text{ para } k = i, i+1, ..., n$$

então $\det(\mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \mathbf{A}$ é não invertível.

Neste caso, o sistema tem infinitas soluções ou não tem solução.

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Exemplo 4: Resolva o sistema linear pelo Método de Eliminação de Gauss com pivoteamento e calcule o determinante da matriz

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & = & -4 \\ & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 7 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & = & -10 \end{array}\right.$$

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Etapa 1: Matriz aumentada

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(0)} = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & -10 \end{array}\right]$$

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Etapa 2:

- Fase 1: Escolha do pivô na primeira coluna

$$
\begin{aligned}
a_{11}^{(1)} &= \max\{|a_{11}|; |a_{21}|; |a_{31}|; |a_{41}|; \} \\
&= \max\{|1|; |0|; |-2|; |4|; \} = 4
\end{aligned}
$$

Mas $4 \in L_4 \Rightarrow L_1 \leftarrow L_4$ e $L_4 \leftarrow L_1$.

Se $\hat{a}_{11} = 0 \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \mathbf{A}$ é singular.

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Logo,

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(0)'} = \left[\begin{array}{rrrr|r} 4 & 3 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

Zerar os elementos da 1ª coluna abaixo da diagonal principal.

Definimos os multiplicadores:

$$\begin{aligned} m_{21} &= \frac{a_{21}}{a_{11}} = 0 \\ m_{31} &= \frac{a_{31}}{a_{11}} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \\ m_{41} &= \frac{a_{41}}{a_{11}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Então,

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(1)} = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 4 & 5/2 & 2 \\ 0 & 5/4 & -1 & 1/4 & -3/2 \end{array}\right] \begin{array}{lcl} L_2^{(1)} & \leftarrow & L_2^{(0)} \\ L_3^{(1)} & \leftarrow & L_3^{(0)} + \frac{1}{2}L_1^{(0)} \\ L_4^{(1)} & \leftarrow & L_4^{(0)} - \frac{1}{4}L_1^{(0)} \end{array}$$

- Fase 2: Escolha do pivô $a_{22}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} a_{22}^{(1)} &= \max\{|a_{22}^1|; |a_{32}^1|; |a_{42}^1|\} \\ &= \max\{|-1|; |1/2|; |5/4|\} = 5/4 \in L_4 \end{aligned}$$

Logo, L_4 é a linha pivô e 5/4 é o pivô.

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Neste caso, $L_2 \leftarrow L_4$ e $L_4 \leftarrow L_2$

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(1)'} = \left[\begin{array}{rrrr|r} 4 & 3 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 5/4 & -1 & 1/4 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & 4 & 5/2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

<u>Próximo passo:</u> zerar os elementos que estão na 2ª coluna abaixo da diagonal principal.

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Definimos os multiplicadores:

$$
\begin{aligned}
m_{32} &= \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{1/2}{5/4} = \frac{2}{5} \\
m_{42} &= \frac{a_{42}}{a_{22}} = \frac{-1}{5/4} = \frac{-4}{5}
\end{aligned}
$$

$$
[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^{(2)} = \left[\begin{array}{cccc|c}
4 & 3 & 0 & 1 & -10 \\
0 & 5/4 & -1 & 1/4 & -3/2 \\
0 & 0 & 22/5 & 13/5 & 13/5 \\
0 & 0 & 1/5 & -6/5 & -6/5
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\ \\
L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} - \frac{2}{5} L_2^{(1)} \\
L_4^{(2)} \leftarrow L_4^{(1)} + \frac{4}{5} L_2^{(1)}
\end{array}
$$

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

- Fase 3: Escolha do pivô na 3^a coluna.

$\hat{a}_{33}^{(2)} = max\{|a_{33}^{(2)}|, |a_{43}^{(2)}|\} = max\left\{\left|\frac{22}{5}\right|, \left|\frac{1}{5}\right|\right\} = \frac{22}{5}$.
Mas $\frac{22}{5} \in L_3 \Rightarrow$ não precisa trocar linhas.
Próximo Passo: Zerar os elementos da 3^a coluna abaixo da diagonal principal.

Multiplicador: $m_{43} = \dfrac{a_{43}}{a_{33}} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{22}{5}} = \dfrac{1}{22}$

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^3 = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & \frac{5}{4} & -1 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{22}{5} & \frac{13}{5} & \frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{29}{22} & -\frac{29}{22} \end{array}\right] \quad L_4^{(2)} \leftarrow L_4^{(1)} - \frac{1}{22} L_3^{(2)}$$

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Etapa 3: Resolução do sistema linear $\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \overline{\mathbf{b}}$ onde $\overline{\mathbf{A}}$ é uma matriz triangular superior.
Aplicando o método de Retrosubstituição obtemos:

$$x_4 = \frac{-\frac{29}{22}}{\frac{-29}{22}} = 1 \qquad x_3 = \frac{\frac{13}{5} - \left(\frac{13}{5} \cdot x_4\right)}{\frac{22}{5}} = 0$$

$$x_2 = \frac{-\frac{3}{2} - \left(-x_3 - \frac{1}{4}x_4\right)}{\frac{5}{4}} = -1$$

$$x_1 = \frac{-10 - (3x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4)}{4} = -2$$

11.2 - Método de eliminação de Gauss com pivoteamento

Logo a solução é $\mathbf{x} = (-2, -1, 0, 1)$.

<u>Determinante:</u>

$$det(\mathbf{A}) = -det(\mathbf{A}') = -(-det(\mathbf{A}^{(1)'})) = det(\mathbf{A}^{(2)}) = det(\mathbf{A}^{(3)}) = 4 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{22}{5} \cdot \frac{-29}{22} = -29$$

11.3 - Algoritmo do Método Eliminação de Gauss com Pivoteamento

- Resolver o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ de ordem $n \times n$, onde $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$.

  - Entrada de dados: (a_{ij}), $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n+1$, onde estamos denotando $b_i = a_{i,n+1}$.

  - Saída de dados: solução $\mathbf{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ ou mensagem de que a matriz é singular.

11.3 - Algoritmo do Método Eliminação de Gauss com Pivoteamento

Para $k = 1, 2, \cdots, n-1$

Pivoteamento

$$a^1_{kk} = max|a_{jk}|; j = k, k+1, \cdots, n$$

$se \quad a^1_{kk} = 0 \longrightarrow$ sistema não tem solução única

$cc \quad$ Para $i = 1, 2, \cdots, n$

$$c_{ki} = a_{ki}$$
$$a_{ki} = a_{ji}$$
$$a_{ji} = c_{ki}$$

Para $\quad i = k+1, \cdots, n$

$$m = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$

Para $\quad j = k+1, \cdots, n, n+1$

$$a_{ij} = a_{ij} - m \cdot a_{kj}$$

11.3 - Algoritmo Retrosubstituição

$$x_n = \quad a_{n,n+1}/a_{n,n} \qquad (a_{n,n+1} = b_n)$$

$$\text{Para} \quad i = n-1, \cdots, 2, 1$$

$$x_i = \frac{(a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j)}{a_{ii}}$$

Exercícios

- Usando o Método de Eliminação de Gauss com Pivoteamento resolva os sistemas abaixo e calcule o determinante da matriz dos coeficientes:

  8a, 9b, 10a da página 55 do livro texto.
  12a, 12b, 12c da página 70 do livro texto.

Álgebra Linear

Aula 14: Transformações Lineares

Mauro Rincon

Márcia Fampa

12.1 - Definições

Sejam V e W dois espaços vetoriais. Para dizer que T é uma transformação do espaço vetorial V no espaço vetorial W, escreve-se:

$$\boxed{T : V \longrightarrow W}$$

Sendo T uma função, cada vetor $\mathbf{v} \in V$ tem um só vetor imagem $\mathbf{w} \in W$, que será indicado por $\mathbf{w} = T(\mathbf{v})$.

12.1 - Definições

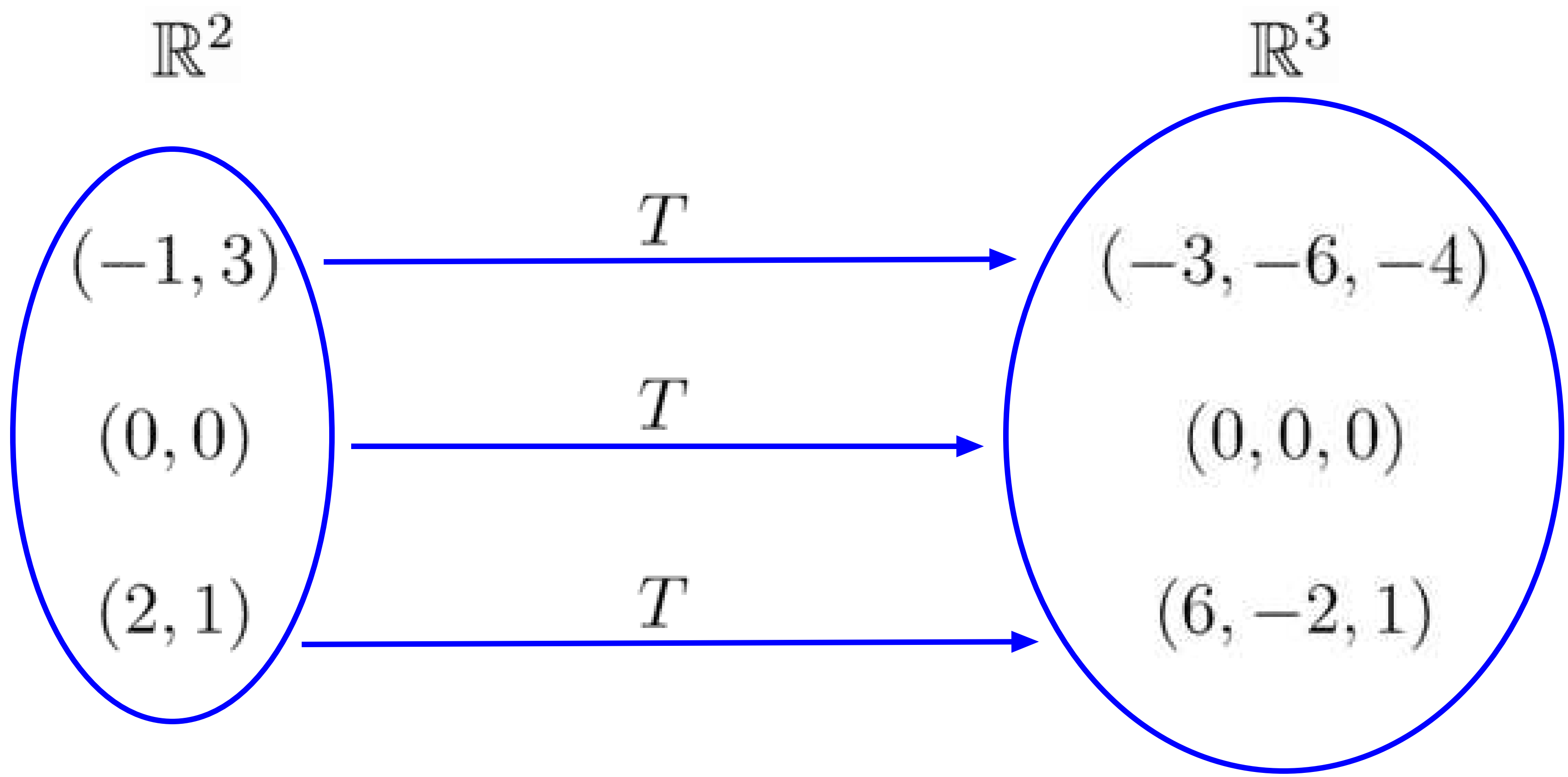
Por exemplo, seja $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R}^3$. Uma transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ associa vetores $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ com vetores $\mathbf{w} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Se a lei que define a transformação T for:

$$T(x, y) = (3x, -2y, x - y)$$

então, em particular temos:

$$\begin{aligned} T(-1, 3) &= (-3, -6, -4) \\ T(0, 0) &= (0, 0, 0) \\ T(2, 1) &= (6, -2, 1) \end{aligned}$$

12.1 - Definições



12.1 - Definições

<u>Definição:</u> Sejam V e W espaços vetoriais. Uma aplicação $T : V \longrightarrow W$ é chamada transformação linear se:

i) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$

ii) $T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall \mathbf{u} \in V$

12.1 - Definições

Exemplo 1: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por:
$T(x,y) = (3x, -2y, x-y)$ é uma transformação linear. De fato:

i) Sejam $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ em $\mathbb{R}^2$. Então:

$$
\begin{aligned}
T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T(\underbrace{x_1 + x_2}_{x}, \underbrace{y_1 + y_2}_{y}) \\
&= (3(x_1+x_2), -2(y_1+y_2), (x_1+x_2)-(y_1+y_2)) \\
&= (3x_1, -2y_1, x_1 - y_1) + (3x_2, -2y_2, x_2 - y_2) \\
&= T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) \\
&= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})
\end{aligned}
$$

Logo $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$.

12.1 - Definições

ii)

$$\begin{aligned}
T(\alpha\mathbf{u}) &= T(\alpha(x_1, y_1)) = T(\alpha x_1, \alpha y_1) \\
&= (3(\alpha x_1), -2(\alpha y_1), \alpha x_1 - \alpha y_1) \\
&= (\alpha(3x_1), \alpha(-2y_1), \alpha(x_1 - y_1)) \\
&= \alpha(3x_1, -2y_1, x_1 - y_1) \\
&= \alpha T(\mathbf{u})
\end{aligned}$$

$\therefore T$ é uma transformação linear.

12.1 - Definições

Exemplo 2:

$$T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 3x \quad ,$$

ou seja $T(x) = 3x$ é linear. Sejam $\mathbf{u} = x_1$ e $\mathbf{v} = x_2 \in \mathbb{R}$. Então:

i) $$\begin{aligned} T(x_1 + x_2) &= 3(x_1 + x_2) = 3x_1 + 3x_2 \\ &= T(x_1) + T(x_2) \end{aligned}$$

ii) $T(\alpha x_1) = 3(\alpha x_1) = \alpha(3x_1) = \alpha T(x_1)$.

$\therefore$ Logo $T(x) = 3x$ é uma transformação linear.

12.1 - Definições

Exemplo 3:

$$T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 3x + 1$$

$T(x) = 3x + 1$ é uma transformação linear?

i) $T(x_1 + x_2) = 3(x_1 + x_2) + 1 = 3x_1 + 3x_2 + 1$

$$\left.\begin{array}{l} T(x_1) = 3x_1 \\ T(x_2) = 3x_2 \end{array}\right\} T(x_1 + x_2) \neq T(x_1) + T(x_2)$$

Logo $T(x) = 3x + 1$ não é uma transformação linear.

12.1 - Definições

Teorema:
Sejam V e W espaços vetoriais e $T : V \to W$ uma transformação linear. Então $T(0) = 0$.

Demonstração: Se T é uma transformação linear então:

$$T(\alpha \mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{v}).$$

Seja $\alpha = 0 \Rightarrow T(0 \cdot \mathbf{v}) = 0 \cdot T(\mathbf{v}) = 0$. Logo $T(0) = 0$.

- Nos exemplos 1 e 2 temos: $T(0,0) = (0,0,0)$ e $T(0) = 0$.
- No exemplo 3: $T(0) = 1$.

12.1 - Definições

Exemplo 4:

Verifique se a transformação:

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z,w) & \longmapsto & (x+y+1, z-w-2) \end{array}$$

é linear.

Tem-se que:

$$T(0,0,0,0) = (1,-2) \neq (0,0) \Rightarrow \underline{T \text{ é não linear}}$$

12.1 - Definições

Exemplo 5: $T: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x^2, 3y) \end{array}$

Temos que $T(0,0) = (0,0)$, mas T não é uma transformação linear, pois: Dados dois vetores $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$. Então:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T(x_1+x_2, y_1+y_2) = ((x_1+x_2)^2, 3(y_1+y_2)) \\ &= (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2, 3y_1 + 3y_2) \\ &= (x_1^2, 3y_1) + (x_2^2, 3y_2) + 2x_1x_2 \\ &= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) + \underline{2x_1x_2} \end{aligned}$$

Logo $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \neq T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$.

12.1 - Definições

Exemplo 6:

A transformação identidade

$$\begin{array}{rccc} I: & V & \to & V \\ & \mathbf{v} & \mapsto & \mathbf{v}, \end{array} \text{ ou seja } \boxed{I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}} \quad \text{é linear.}$$

De fato:

i) $I(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{u}+\mathbf{v} = I\mathbf{u} + I\mathbf{v}$

ii) $I(\alpha\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{u} = \alpha I\mathbf{u}$

12.1 - Definições

Exemplo 7:

A transformação nula

$$\begin{array}{rrcl} T: & V & \longrightarrow & W \\ & \mathbf{v} & \longmapsto & 0, \end{array} \quad \boxed{T(\mathbf{v}) = 0} \text{ é linear.}$$

De fato:

i) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = 0 = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

ii) $T(\alpha \mathbf{u}) = 0 = \alpha \cdot 0 = \alpha T(\mathbf{u})$

12.1 - Definições

Exemplo 8:

A transformação simétrica

$$\begin{array}{rccc} T: & V & \longrightarrow & V \\ & \mathbf{v} & \longmapsto & \boxed{T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}} \end{array} \text{ é linear.}$$

i) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (-\mathbf{u}-\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

ii) $T(\alpha\mathbf{u}) = -\alpha\mathbf{u} = \alpha\cdot(-\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$

12.1 - Definições

Exemplo 9:

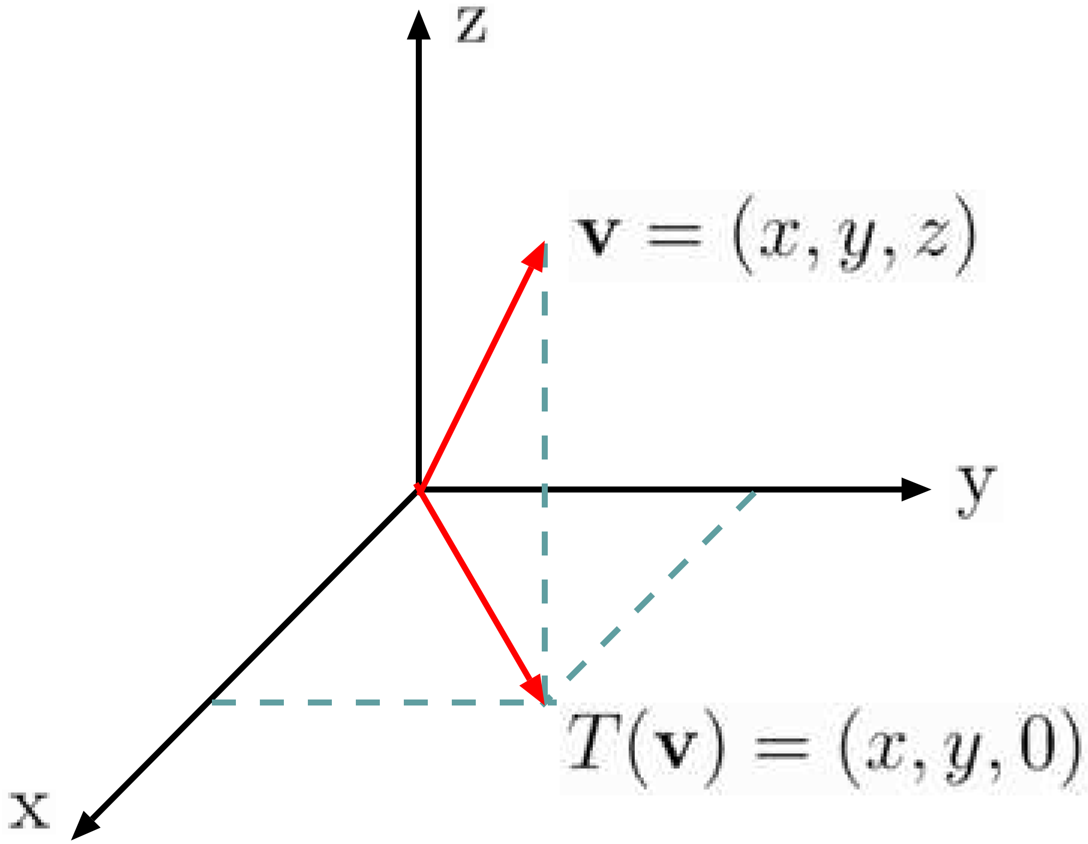
A projeção ortogonal do $\mathbb{R}^3$ sobre o $\mathbb{R}^2$, definido por:

$$\begin{array}{rrcl} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & T(x,y,z) = (x,y,0) \text{ é linear.} \end{array}$$

i) $$\begin{aligned} T((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) &= T((x_1+x_2),(y_1+y_2),(z_1+z_2)) \\ &= ((x_1+x_2),(y_1+y_2),0) \\ &= (x_1,y_1,0)+(x_2,y_2,0) \\ &= T(x_1,y_1,z_1)+T(x_2,y_2,z_2) \end{aligned}$$

ii) $T(\alpha(x_1,y_1,z_1)) = \alpha(x_1,y_1,0) = \alpha T(x_1,y_1,z_1)$

12.1 - Definições



12.1 - Definições

Exemplo 10:(Derivada)
Seja $V = P_n$ dos polinômios de grau $\leq n$. A aplicação da derivada:

$$\begin{array}{rccc} D: & P_n & \longrightarrow & P_n \\ & f & \longmapsto & D(f) = f' \end{array} \quad \text{é linear.}$$

Pelas regras de derivação, sabe-se que:

i) $D(f+g) = D(f) + D(g)$

ii) $D(\alpha f) = \alpha D(f)$

12.1 - Definições

Exemplo 11:(Integral)
Seja $V = P_n$ então:

$$\begin{array}{rccl} T: & P_n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & T(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx \quad \text{é linear.} \end{array}$$

Pois sabemos que:

i) $$\begin{aligned} T(f+g) &= \int_a^b (f(x)+g(x))dx \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = T(f) + T(g) \end{aligned}$$

ii) $$T(\alpha f) = \int_a^b (\alpha f(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx = \alpha T(f)$$

12.1 - Definições

Exemplo 12: Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Definimos a transformação:

$$\begin{array}{rccl} T_A: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \mathbf{v} & \longmapsto & \mathbf{A}\mathbf{v}, \text{ ou seja } T_A(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}. \end{array}$$

que é linear, pois:

i) $T_A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{A}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{u}+\mathbf{A}\mathbf{v} = T_A(\mathbf{u}) + T_A(\mathbf{v})$

ii) $T_A(\alpha\mathbf{u}) = A(\alpha\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{A}\mathbf{u} = \alpha T_A(\mathbf{u})$

12.1 - Definições

Seja $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ então:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x + 4y \\ x + 2y \end{bmatrix}$$

Logo:

$$T_A(\mathbf{v}) = T_A(x, y) = (y, -x + 4y, x + 2y)^T$$

12.1 - Definições

Observação: Uma matriz $\mathbf{A}_{m\times n}$ sempre determina uma transformação linear:

$$\begin{array}{rccl} T_A: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \mathbf{v} & \longmapsto & T_A(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

onde $\mathbf{v}$ é considerado uma matriz $n \times 1$.

12.1 - Definições

<u>Propriedade:</u> Se $T : V \rightarrow W$ é uma transformação linear então:

$$\boxed{T(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2) = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{v}_2), \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}}$$

De forma análoga temos:

$$\boxed{T(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n) = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{v}_2) + \ldots + \alpha_n T(\mathbf{v}_n)}$$

Isto significa que a imagem de uma combinação linear de vetores é uma combinação linear das imagens destes vetores com os mesmos coeficientes, ou seja, considere $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base do espaço vetorial V.

12.1 - Definições

Então, $\forall \mathbf{v} \in V$, podemos escrever:

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n$$

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear.
Então:

$$T(\mathbf{v}) = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{v}_2) + \ldots + \alpha_n T(\mathbf{v}_n)$$

Se $T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_n)$ são conhecidas então sempre é possível obter a imagem de $T(\mathbf{v})$.

12.1 - Definições

Exemplo 13: Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, uma transformação linear e $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, sendo:

$$\mathbf{v}_1 = (0,1,0); \quad \mathbf{v}_2 = (1,0,1) \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_3 = (1,1,0)$$

Determine $T(\mathbf{v})$, onde $\mathbf{v} = (5,3,-2)$ sabendo que $T(\mathbf{v}_1) = (1,-2)$; $T(\mathbf{v}_2) = (3,1)$ e $T(\mathbf{v}_3) = (0,2)$.

12.1 - Definições

- **Solução:**

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 \\
&= \alpha_1(0,1,0) + \alpha_2(1,0,1) + \alpha_3(1,1,0) \\
&= (\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2)
\end{aligned}
$$

Como $\mathbf{v} = (5, 3, -2)$ temos o seguinte sistema linear:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 5 \\
\alpha_1 & & & + & \alpha_3 & = & 3 \\
 & & \alpha_2 & & & = & -2
\end{array}
$$

12.1 - Definições

Logo
$\alpha_2 = -2 \Rightarrow \alpha_3 = 5 - \alpha_2 = 7; \alpha_1 = 3 - 7 = -4.$
Assim, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (-4, -2, 7)$. Portanto:

$$\boxed{\mathbf{v} = (5, 3, -2) = -4\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + 7\mathbf{v}_3}$$

Logo:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) &= -4T(\mathbf{v}_1) - 2T(\mathbf{v}_2) + 7T(\mathbf{v}_3) \\ &= -4(1, -2) - 2(3, 1) + 7(0, 2) \\ &= (-10, 20) \end{aligned}$$

$$\boxed{\therefore T(\mathbf{v}) = T(5, 3, -2) = (-10, 20)}$$

Exercícios

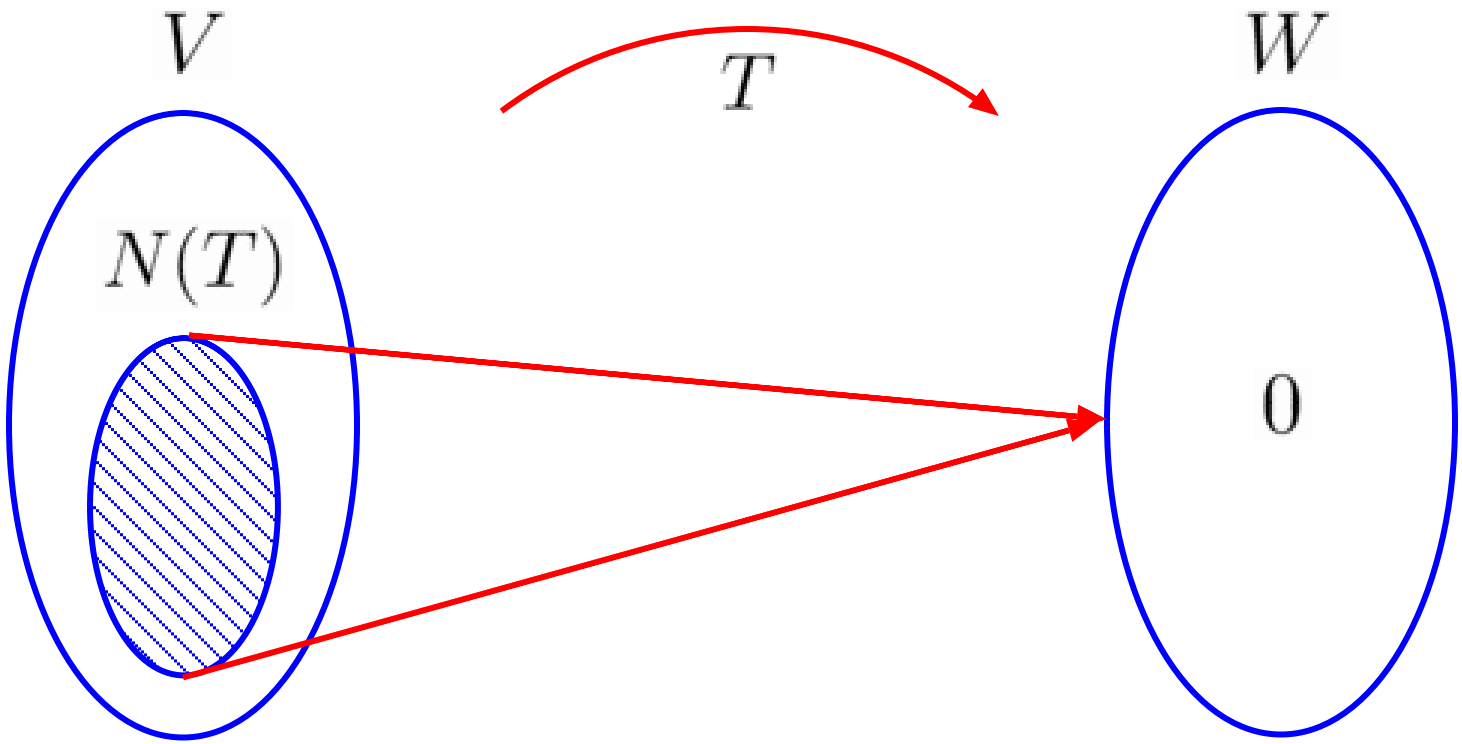
- Fazer os exercícios práticos e teóricos das páginas 269 e 270 do livro texto.

12.2 - Núcleo de uma Transformação Linear

Definição: Chama-se núcleo de uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$ ao conjunto de todos os vetores $\mathbf{v} \in V$ tal que $T(\mathbf{v}) = 0$. Indica-se esse conjunto por:

$$\boxed{N(T) = Ker(T) = \{\mathbf{v} \in V; T(\mathbf{v}) = 0\}}$$

12.2 - Núcleo de uma Transformação Linear



- Note que $N(T) \subset V$ e $N(T) \neq \emptyset$, pois $0 \in N(T)$, desde que:

$$T(0) = 0$$

12.2 - Núcleo de uma Transformação Linear

Exemplo 14: Determine o núcleo da seguinte transformação linear:

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (x+y, 2x-y) \end{array}$$

Por definição:

$$N(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; T(x,y) = (0,0)\}$$

Assim, $(x,y) \in N(T)$ se $(x+y, 2x-y) = (0,0)$. A solução do sistema $\boxed{x = y = 0}$. Logo $N(T) = \{(0,0)\}$.

12.2 - Núcleo de uma Transformação Linear

Exemplo 15: Determine o núcleo da transformação linear:

$$\begin{array}{llll} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & T(x,y,z) = (x-y+4z, 3x+y+8z) \end{array}$$

Solução:

$$N(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; T(x,y,z) = (0,0)\}$$

ou seja, $(x,y,z) \in N(T)$ se e somente se:

$$(x-y+4z, 3x+y+8z) = (0,0)$$

12.2 - Núcleo de uma Transformação Linear

Que gera o sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ 3x + y + 8z = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema para $z = a$ obtemos:

$$\boxed{x = -3a \quad \text{e} \quad y = a}$$

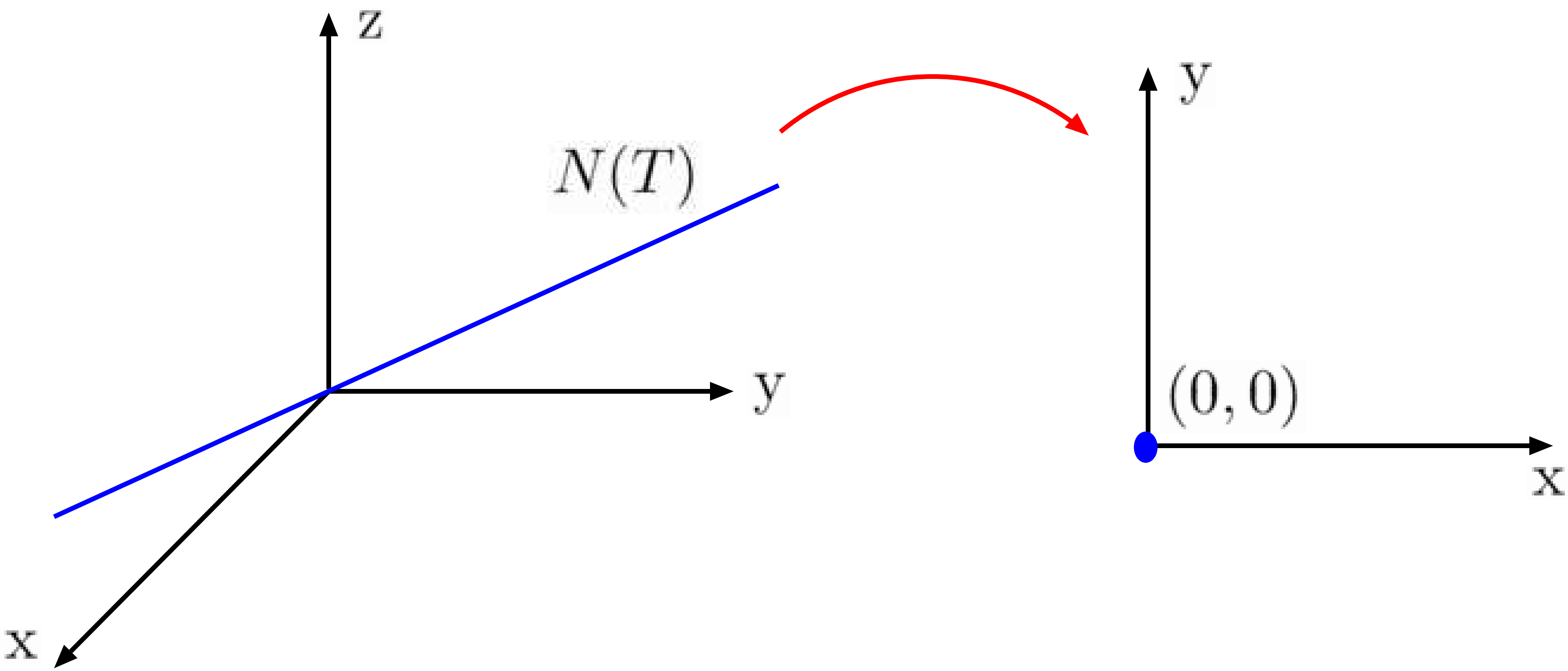
Assim:

$$N(T) = \{(-3a, a, a); a \in \mathbb{R}\} \Leftrightarrow$$
$$N(T) = \{a(-3, 1, 1); a \in \mathbb{R}\}$$

ou ainda, que o vetor $(-3, 1, 1)$ gera $N(T)$:

$$N(T) = [(-3, 1, 1)]$$

12.2 - Núcleo de uma Transformação Linear



12.2 - Núcleo de uma Transformação Linear

Propriedades do Núcleo:

1) Seja $T : V \to W$ uma transformação linear.
Então $N(T)$ é um subespaço vetorial de V.
De fato, sejam $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2 \in N(T)$, logo:

$$T(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_2) = 0$$

a) $T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) = 0 + 0 = 0$
Logo $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \in N(T)$.

b) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

$$T(\alpha\mathbf{v}_1) = \alpha T(\mathbf{v}_1) = \alpha \cdot 0 = 0$$

$\therefore \alpha\mathbf{v}_1 \in N(T)$.

12.2 - Núcleo de uma Transformação Linear

2) Uma transformação linear $T : V \to W$ é injetora se, e somente se, $N(T) = \{0\}$.

- Observação:
  Definição: $T : V \to W$ é injetora se
  $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V, T(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_2) \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ ou
  equivalentemente,
  $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ se $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2 \Rightarrow T(\mathbf{v}_1) \neq T(\mathbf{v}_2)$.

12.2 - Núcleo de uma Transformação Linear

A demonstração dessa propriedade tem duas partes:

a) T é injetora $\Rightarrow N(T) = \{0\}$.

De fato: Seja $\mathbf{v} \in N(T)$, ou seja, $T(\mathbf{v}) = 0$. Por outro lado, sabe-se que $T(0) = 0$. Logo $T(\mathbf{v}) = T(0)$. Como por hipótese T é injetora, então $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Portanto, o vetor zero é o único elemento do núcleo, isto é, $N(T) = \{0\}$.

b) $N(T) = \{0\} \Rightarrow T$ é injetora.

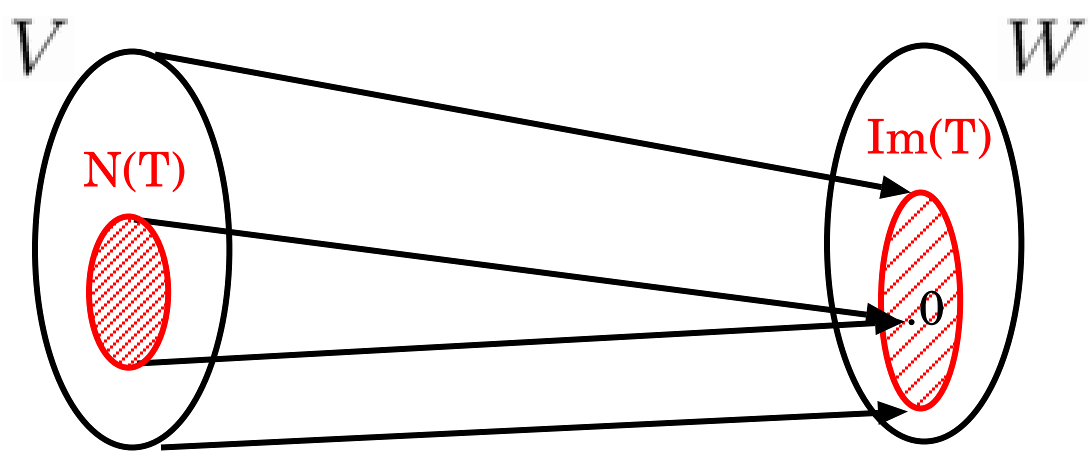
De fato: Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ tais que $T(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_2)$. Então $T(\mathbf{v}_1) - T(\mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = 0$. Logo, $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in N(T)$. Mas, por hipótese, o único elemento do núcleo é o vetor zero, assim

$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \Rightarrow T$ é injetora.

12.3 - Imagem

<u>Definição</u>: Chama-se imagem de uma transformação linear $T : V \to W$ ao conjunto dos vetores $\mathbf{w} \in W$ que são imagens de pelo menos um vetor $\mathbf{v} \in V$. Indica-se esse conjunto por $Im(T)$, ou seja

$$Im(T) = \{\mathbf{w} \in W; T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}, \text{para algum } \mathbf{v} \in V\}$$



12.3 - Imagem

- Observação:
  Note que $Im(T) \subset W$ e $Im(T) \neq \emptyset$, desde que $T(0) = 0 \in Im(T)$.
  Se $Im(T) = W \Rightarrow T$ é sobrejetora, ou seja, $\forall \mathbf{w} \in W$, existe pelo menos um $\mathbf{v} \in V$ tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.

12.3 - Imagem

Exemplo 16: Seja

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & T(x,y,z) = (x,y,0) \end{array}$$

a projeção ortogonal do $\mathbb{R}^3$ sobre o plano xy.
Então a $Im(T)$ é o próprio plano xy.

$$Im(T) = \{(x,y,0)\} \in \mathbb{R}^3; x,y \in \mathbb{R}\} \quad \text{(plano xy)}$$

Por outro lado, para o núcleo temos:

$$N(T) = \{0,0,z\} = (0,0,0), \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad \text{(eixo z)}$$

pois $T(0,0,z) = (0,0,0), \forall z \in \mathbb{R}$.

12.3 - Imagem

Exemplo 17: Seja

$$\begin{array}{rccc} I: & V & \longrightarrow & V \\ & \mathbf{v} & \longmapsto & I(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{array}$$

Neste caso, a imagem da transformação linear é o próprio V, ou seja, $Im(I) = V$ e o núcleo, neste caso, é $N(I) = \{0\}$.

12.3 - Imagem

Exemplo 18: Seja

$$\begin{array}{rccl} T: & V & \longrightarrow & W \\ & \mathbf{v} & \longrightarrow & T(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{array}$$

Isto é, T é a transformação nula. Neste caso, $Im(T) = \{0\}$ e $N(T) = V$ (todo o espaço).

12.4 - Propriedade da Imagem

<u>Teorema</u>: A imagem de uma transformação linear $T : V \to W$ é um subespaço vetorial de W.
De fato: Sejam $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2 \in Im(T)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.
Devemos mostrar que $(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) \in Im(T)$ e $\alpha \mathbf{w}_1 \in Im(T)$.

1) Se $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in Im(T)$ então existem $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2 \in V$ tais que $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$ e $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$. Fazendo $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{v}_1$ tem-se:

$$\begin{cases} T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \\ T(\mathbf{u}) = T(\alpha \mathbf{v}_1) = \alpha T(\mathbf{v}_1) = \alpha \mathbf{w}_1 \end{cases}$$

Logo, $Im(T)$ é um subespaço vetorial de W.

12.5 - Teorema do Núcleo e da Imagem

Teorema: Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear então

$$\boxed{\dim(N(T)) + \dim(Im(T)) = \dim(V)}$$

Demonstração: Omitimos a demonstração que poderá ser encontrada na página 276 do livro texto.

12.5 - Teorema do Núcleo e da Imagem

Exemplo 19: (Projeção Ortogonal)

$$\begin{array}{rrcl} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longrightarrow & T(x,y,z) = (x,y,0) \end{array}$$

$$Im(T) = \mathbb{R}^2 \Rightarrow \dim(Im(T)) = 2$$

$$N(T) = \mathbb{R} \Rightarrow \dim(N(T)) = 1$$

Logo,

$$\begin{array}{rcl} 3 = \dim(\mathbb{R}^3) & = & \dim(Im(T)) + \dim(N(T)) \\ & = & 2 + 1 = 3 \end{array}$$

12.5 - Teorema do Núcleo e da Imagem

Exemplo 20: (Transformação Identidade)

$$\begin{array}{rccc} I : & V & \longrightarrow & V \\ & \mathbf{v} & \longrightarrow & \mathbf{v} \end{array}$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} \dim(Im(I)) &= \dim(V) \\ \dim(N(T)) &= 0 \end{aligned}$$

12.5 - Teorema do Núcleo e da Imagem

Exemplo 21: (Transformação Nula)

$$\begin{array}{rcl} I : V & \longrightarrow & V \\ \mathbf{v} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Neste caso,

$$\begin{array}{rcl} \dim(Im(I)) & = & 0 \\ \dim(N(T)) & = & \dim(V) \end{array}$$

12.5 - Teorema do Núcleo e da Imagem

<u>Exercício</u>: Determine o núcleo e a imagem da transformação linear

$$\begin{array}{rrcl} T\ : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longrightarrow & T(x,y,z) = \\ & & & = (x+y-z, -2x+y+z, -x+2y) \end{array}$$

12.5 - Teorema do Núcleo e da Imagem

a) $N(T) = Ker(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; T(x,y,z) = (0,0,0)\} \Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ -2x & + & y & + & z & = & 0 \\ -x & + & 2y & & & = & 0 \end{array}\right.$$

Resolvendo o sistema e tomando $z = a$, temos

$$y = \frac{a}{3} \quad \text{e} \quad x = \frac{2a}{3}$$

Logo, a solução geral é

$$\left(\frac{2a}{3}, \frac{a}{3}, a\right) = a\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right), \quad a \in \mathbb{R}$$

Logo, $[2/3, 1/3, 1]$ é uma base de $N(T)$.

12.5 - Teorema do Núcleo e da Imagem

b) $Im(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3; T(x,y,z) = (a,b,c)\}$, ou seja, $(a,b,c) \in Im(T)$ se existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & a \\ -2x & + & y & + & z & = & b \\ -x & + & 2y & & & = & c \end{array}\right.$$

O sistema somente terá solução se

$$\boxed{a + b - c = 0}$$

Logo, $Im(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3; a + b - c = 0\}$.

12.5 - Teorema do Núcleo e da Imagem

Dimensão de $Im(T)$: $(a,b,c) \in Im(T) \Rightarrow c = a+b$.
Logo podemos escrever a terna:

$$\begin{aligned} (a,b,c) &= (a,b,a+b) &= (a,0,a)+(0,b,b) \\ &= a(1,0,1) &+ \; b(0,1,1) \end{aligned}$$

Portanto: $$Im(T) = [(1,0,1);(0,1,1)]$$

Como os vetores são L.I. então:

$$B = \{(1,0,1);(0,1,1)\}$$

é uma base de $Im(T)$ e assim $\dim(Im(T)) = 2$. Note que $3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(N(T)) + \dim(Im(T)) = 1+2$.

12.5 - Teorema do Núcleo e da Imagem

Corolário: Seja $T : V \to W$ uma transformação linear entre os espaços vetoriais V e W.

Se $\dim(V) = \dim(W)$ então T é injetora se e somente se T é sobrejetora.

Demonstração: Use o teorema do núcleo e da imagem.

Exercícios

- Fazer os exercícios práticos e teóricos das páginas 278 e 279 do livro texto.

Álgebra Linear

Aula 15: Autovalores e Autovetores

Mauro Rincon

Márcia Fampa

13.1 - Definições

Definição: Seja $T : V \to V$ um operador linear e V um espaço vetorial. Um vetor $\mathbf{v} \in V, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ é um autovetor (vetor próprio) do operador T se existe $\lambda \in \mathbb{R}$, denominado autovalor (valor próprio) tal que:

$$\boxed{T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}}$$

Observação: Quando numa transformação linear o contradomínio W é o mesmo espaço vetorial V, então a transformação linear é chamada **Operador Linear**.

13.1 - Definições

Observação: Se $V = \mathbb{R}^2$ ou $V = \mathbb{R}^3$ então $\mathbf{v}$ e $T(\mathbf{v})$ têm a mesma direção. Assim, dependendo do autovalor λ temos:

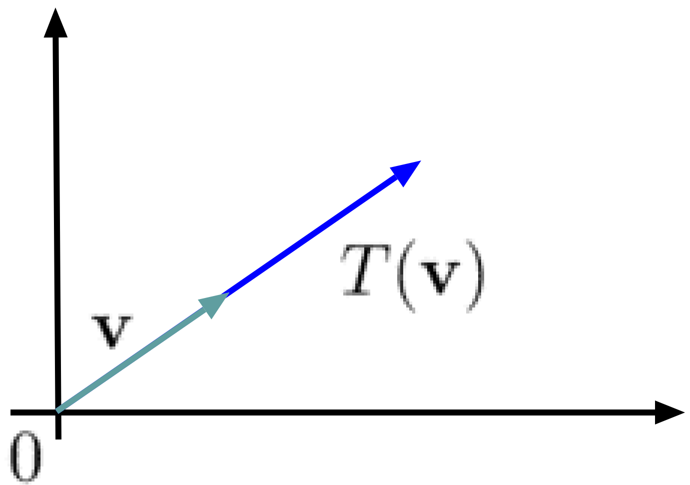
a) $|\lambda| > 1 \Rightarrow T$ dilata $\mathbf{v}$

b) $|\lambda| < 1 \Rightarrow T$ contrai $\mathbf{v}$

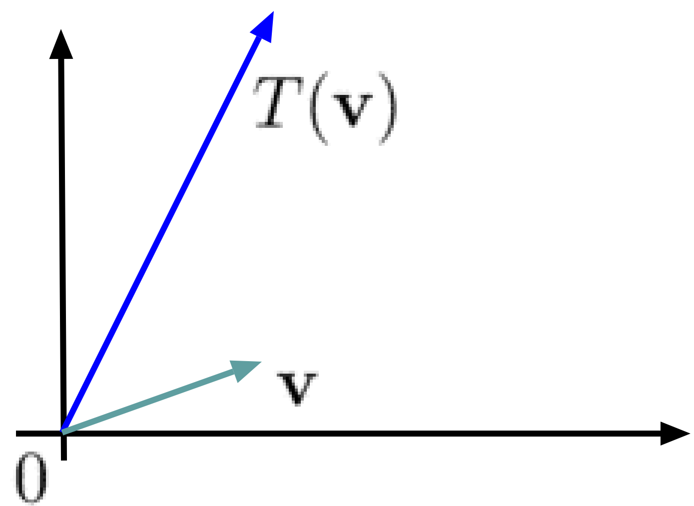
c) $\lambda = 0 \Rightarrow T$ anula $\mathbf{v}$

d) $\lambda < 0 \Rightarrow T$ inverte o sentido de $\mathbf{v}$

13.1 - Definições



$\mathbf{v}$ é um autovetor de T



$\mathbf{v}$ não é um autovetor de T

13.1 - Definições

Exemplo 1: Seja

$$\begin{array}{rcl} T: \quad \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (4x+5y, 2x+y) \end{array}$$

Verifique se $\mathbf{v} = (5,2)$ é um autovetor de T. Por definição,

$$T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow T(\mathbf{v}) = T(5,2) = (30,12) = 6(5,2) = 6\mathbf{v}$$

Logo, $\mathbf{v} = (5,2)$ é um autovetor de T e $\lambda = 6$ é o autovalor associado a $\mathbf{v}$.

13.1 - Definições

Considere agora $\mathbf{v} = (1,1)$. Verifique se $\mathbf{v}$ é um autovetor de T.

$$T\mathbf{v} = T(1,1) = (9,3) = 3(3,1)$$

Logo, $T\mathbf{v} \neq \lambda\mathbf{v}$.
$\therefore \mathbf{v} = (1,1)$ não é um autovetor de T.

13.1 - Definições

Exemplo 2:

$$\begin{array}{rrcl} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & T(x,y,z) = -(x,y,z) \end{array}$$

Logo, $\forall \mathbf{v} \neq 0 \in \mathbb{R}^3$ têm-se:

$$T\mathbf{v} = -1\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

onde $\boxed{\lambda = -1}$ é um autovalor associado ao autovetor $\mathbf{v}$.

13.1 - Definições

Consideraremos de agora em diante apenas os espaços vetoriais $V = \mathbb{R}^n$ e as operações lineares definidas por:

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \mathbf{v} & \longmapsto & T(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v} \end{array}$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada de ordem n.
Por definição, $\mathbf{v} \neq 0$ é um autovetor de T se:

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

13.1 - Definições

Equivalentemente,

$$\mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda\mathbf{I}\mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0} \qquad \text{(sistema linear homogêneo)}$$

Queremos determinar as soluções não nulas do sistema homogêneo, ou seja,

$$\boxed{\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0} \text{ ou}$$

$$\det\left\{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right\} = 0, \text{ ou}$$

13.1 - Definições

$$\det \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

A equação $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$ é denominada equação característica da matriz $\mathbf{A}$ e as raízes λ são os autovalores da matriz $\mathbf{A}$. O determinante $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$ é um polinômio na variável λ, denominado polinômio característico e denotado por $P_n(\lambda)=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$

13.1 - Definições

Autovetores de $\mathbf{A}$

Determinando as raízes λ do polinômio característico então os autovetores podem ser determinados pela equação:

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}}$$

13.1 - Definições

Exemplo 1: Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Determine os autovalores e autovetores de $\mathbf{A}$, ou seja, vetores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}}$$

- Equação característica:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

13.1 - Definições

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

As raízes são $\boxed{\lambda_1 = 5 \text{ e } \lambda_2 = -1}$, ou sejam, $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -1$ são os autovalores da matriz $\mathbf{A}$.

13.1 - Definições

- Cálculo dos autovetores $\mathbf{v}$ associados ao autovalor $\lambda_1 = 5$, tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} = 5\mathbf{v} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - 5\mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} -4x & + & 4y & = & 0 \\ 2x & - & 2y & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow x = y = r \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix}, r \in \mathbb{R}$$

13.1 - Definições

Assim, todos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 5$ são dados por $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix}$, onde r é um número real não nulo.

$$\lambda_1 = 5 \Leftrightarrow \mathbf{v} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ tal que: } \boxed{\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}}$$

13.1 - Definições

- Cálculos dos autovetores $\mathbf{v}$ associados ao autovalor $\lambda_2 = -1$. Têm-se:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = -\mathbf{v} \Leftrightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 2x & + & 4y & = & 0 \\ 2x & + & 4y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \boxed{x = -2y}$$

Para $y = r \Rightarrow x = -2r$. Logo,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2r \\ r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

13.1 - Definições

Exemplo 2: Determine os autovalores e autovetores da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

I) Cálculo dos autovalores

Polinômio característico

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

13.1 - Definições

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0$$

As soluções inteiras, caso existam, são divisoras do termo independente -36. Por inspeção $\lambda = 2$ é uma raiz. Assim, $P(\lambda)$ pode ser fatorado na forma:

$$P(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0$$

Assim, os autovalores da matriz $\mathbf{A}$ são:

$$\lambda_1 = 2; \qquad \lambda_2 = 3; \qquad \lambda_3 = 6.$$

13.1 - Definições

Cálculo dos autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$

Sistema linear homogêneo:

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

Resolvendo o sistema obtemos:

$$\begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}$$

Tomando $x = r \neq 0$ então
$\mathbf{v} = (r, 0, -r) = r(1, 0, -1)$ são os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$.

13.1 - Definições

II) Cálculo dos autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 3$

Temos que $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

Resolvendo o sistema obtemos $x = y = z = r$.
Logo, $\mathbf{v} = (r, r, r) = r(1, 1, 1), r \neq 0$ são os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 3$.

13.1 - Definições

Cálculo dos autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = 6$

Temos que $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{A} - 6\mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

A solução do sistema $x = z$ e $y = -2x$. Tomando $z = r$ então.

$$\mathbf{v} = (r, -2r, r) = r(1, -2, 1), \qquad r \neq 0$$

$\mathbf{v} = r(1, -2, 1)$ são os autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = 6$.

13.1 - Definições

Exemplo 3: Determinar os autovalores e os autovetores da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

Solução:

I) Polinômio característico

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \pm 2i}$$

ou seja, a matriz $\mathbf{A}$ não tem autovalores reais, somente complexos.

13.1 - Definições

Observação:

Definimos que λ é um autovalor da matriz $\mathbf{A}$, somente se $\lambda \in \mathbb{R}$. Dessa forma, para o exemplo anterior, dizemos que $\mathbf{A}$ não tem autovalor. Caso tivéssemos admitido λ qualquer número real ou complexo, então conseqüentemente teríamos autovetores com componentes complexas.

13.2 - Propriedades

<u>Proposição:</u> Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada não singular, sendo λ um autovalor de $\mathbf{A}$ associado ao autovetor $\mathbf{v}$. Então λ^{-1} é um autovalor de $\mathbf{A}^{-1}$ e todo autovetor de $\mathbf{A}$ é também um autovetor de $\mathbf{A}^{-1}$.

Demonstração:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\lambda}\mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} = \lambda^{-1}\mathbf{v}}$$

13.2 - Propriedades

Corolário: Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada. Se $\lambda = 0$ é uma autovalor de $\mathbf{A}$ então $\mathbf{A}$ é uma matriz singular.

Dem: Seja $\mathbf{v}$ um autovetor de $\mathbf{A}$ associado a $\lambda = 0$. Então,

$$\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{Av} = 0$$

Como $\mathbf{v} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{A}$ é singular.

13.2 - Propriedades

Proposição: Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada não singular. Então, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^t$ tem os mesmos autovalores.

Dem:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^t \\ &= \det(\mathbf{A}^t - \lambda\mathbf{I}^t) = \det(\mathbf{A}^t - \lambda\mathbf{I}) \end{aligned}$$

Logo as raízes (autovalores) λ de $P(\lambda)$ são as mesmas.

13.2 - Propriedades

<u>Teorema:</u> Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada e simétrica. Então todos os autovalores λ de $\mathbf{A}$ são números reais.

Demonstração: Seja $\mathbf{v}$ o autovetor associado a λ. Então,

$\mathbf{Av} = \lambda \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{v}^t\mathbf{Av} = \mathbf{v}^t\lambda\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}^t\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}^2$

Logo,

$$\boxed{\mathbf{v}^t\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}^2}$$

Por outro lado,

$$(\mathbf{v}^t\mathbf{Av})^t = \mathbf{v}^t\mathbf{A}^t\mathbf{v} = \mathbf{v}^t\mathbf{Av}$$

Assim, $(\mathbf{v}^t\mathbf{Av})$ é um número real e como $\mathbf{v}^t\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}^2 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

Exercícios

- Fazer os exercícios de 1 a 11 da página 253 do livro texto.