Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO DA AP2 - Segundo Semestre de 2013
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(3.0)1. Determine se as transformações de $I\!R^{n\times n}$ em $I\!R^{n\times n}$ abaixo são ou não lineares, justificando detalhadamente sua resposta.

(a) $T(A) = A - 2I$, onde I é a matriz identidade de ordem n.

(b) $T(A) = A + A^T$, onde A^T é a matriz transposta de A.

(c) $T(A) = A^{-1}$.

Solução:

T é uma transformação linear se

$$T(\alpha A_1 + \beta A_2) = \alpha T(A_1) + \beta T(A_2)$$

para todo A_1 e A_2 em $I\!R^{n\times n}$ e α e β escalares.

(a) $T(A) = A - 2I$.
Como $T(A_1 + A_2) = A_1 + A_2 - 2I \neq A_1 - 2I + A_2 - 2I = T(A_1) + T(A_2)$, então T não é uma transformação linear.

(b) $T(A) = A + A^T$.
Como $T(\alpha A_1+\beta A_2) = (\alpha A_1+\beta A_2)+(\alpha A_1+\beta A_2)^T = \alpha(A_1+A_1^T)+\beta(A_2 + A_2^T) = \alpha T(A_1) + \beta T(A_2)$, então T é uma transformação linear.

(c) $T(A) = A^{-1}$.

É fácil achar um exemplo onde $T(A_1 + A_2) \neq T(A_1) + T(A_2)$, ou seja, $(A_1 + A_2)^{-1} \neq A_1^{-1} + A_2^{-1}$. Por exemplo, considere $n = 1$, $A_1 = [3]$ e $A_2 = [2]$. Neste caso temos $(A_1 + A_2)^{-1} = \left[\frac{1}{5}\right] \neq A_1^{-1} + A_2^{-1} = \left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{1}{2}\right] = \left[\frac{5}{6}\right]$. Logo, T não é uma transformação linear.

(3.0)2. Ache o determinante de cada uma das seguintes matrizes:

$$(a)\, A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & -7 \\ 8 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad (b)\, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 6 \\ 1 & -3 & 5 & -3 \\ 4 & 9 & -3 & 9 \\ 2 & 7 & 8 & 7 \end{pmatrix},$$

$$(c)\, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solução:

(a) Como A tem uma linha de 0s, det(A)=0.

(b) Como a segunda e a quarta colunas de B são iguais, det(B)=0.

(c) Como C é triangular, det(C) é igual ao produto dos elementos da diagonal. Assim det(C)=-120.

(2.0)3. Resolva o sistema linear abaixo pelo método de eliminação de Gauss com pivoteamento.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -12 \end{cases}$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 3 & -12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & -14 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right].$$

$$x_3 = \frac{6}{2} = 3,\ x_2 = \frac{1}{4}(-14-2\times 3) = -5,\ x_1 = \frac{1}{4}(4-2\times(-5)-2\times 3) = 2.$$

(2.0)4. Ache a dimensão e uma base para a solução geral W do sistema linear homogêneo $Ax = 0$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & 3 \\ 3 & 6 & -7 & 4 \\ 5 & 10 & -11 & 6 \end{pmatrix}.$$

Solução:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & 3 \\ 3 & 6 & -7 & 4 \\ 5 & 10 & -11 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, temos, $x_4 = x_3$ e $2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0$. O sistema tem duas variáveis livres x_2 e x_3 , logo, dim(W)=2. Uma base $[v_1, v_2]$ para W pode ser obtida como segue:

(1) Faça $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, gerando $v_1 = (-2, 1, 0, 0)$.

(2) Faça $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, gerando $v_2 = (1, 0, 1, 1)$.