Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO DA AP1 - Segundo Semestre de 2013
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(3.5)1. Considere o conjunto de vetores:

$$\{(1,0,-1),(1,1,0),(k,1,-1)\}$$

(1.5)a. Determine a condição a ser satisfeita por k para que os vetores do conjunto sejam linearmente independentes.

Solução:

Os vetores serão LI se, e somente se, a equação

$$a(1,0,-1)+b(1,1,0)+c(k,1,-1)=(0,0,0)$$

admitir apenas a solução trivial $a=b=c=0$. Dessa equação, temos

$$\begin{cases} a + b + kc = 0 \\ \quad\;\; b + c = 0 \\ -a \quad\;\; - c = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação temos $b=-c$ e da terceira equação temos $a=-c$. Substituindo estes resultados na primeira equação temos $(-2+k)c=0$. Para que esse sistema admita apenas a solução trivial, deve-se ter, portanto, $k \neq 2$. Logo, os vetores serão L.I. se $k \neq 2$.

(1.0)b. Considerando agora $k=2$, calcule o módulo do vetor $(k,1,-1)$.

Solução:

$$||(2,1,-1)|| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

(1.0)c. Considerando ainda $k = 2$ calcule o ângulo entre os vetores $(1, 1, 0)$ e $(k, 1, -1)$.

Solução:

Considerando $v_1 = (1, 1, 0)$ e $v_2 = (2, 1, -1)$,

$$\cos(\theta) = \frac{v_1 \cdot v_2}{||v_1|| \cdot ||v_2||} = \frac{2+1+0}{\sqrt{1+1}\sqrt{4+1+1}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo $\theta = 30^o$.

(1.0)2. Determinar o valor de m para que os veores $u = (2, m, -3)$ e $v = (m - 1, 2, 4)$ sejam ortogonais.

Solução:

Os vetores são ortogonais se $u \cdot v = 0$. Então

$(2, m, -3) \cdot (m-1, 2, 4) = 2(m-1) + m(2) - 3(4) = 4m - 14 = 0$. Logo $m = \frac{7}{2}$.

(2.5)3. Considere o seguinte subspaço vetorial do $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}.$$

(1.5)a. Determinar a dimensão e uma base B de S.

Solução:

Isolando x na igualdade $x+y-z = 0$, temos $x = -y+z$. Tendo em vista serem duas variáveis livres (y e z), conclui-se que dim$S$=2. Logo, qualquer subconjunto de S com dois vetores LI formam uma base de S. Se fizermos (1) $y = 0$ e $z = 1$ e (2) $y = 1$ e $z = 0$ obtemos os vetores LI $v_1 = (1, 0, 1)$ e $v_2 = (-1, 1, 0)$, sendo $B = \{v_1, v_2\}$ uma base de S.

(1.0)b. Aplicando o processo de Gram-Schimidt à base B, determinar uma base ortonormal B', de S.

Solução:

Procuremos uma base $B' = \{u_1, u_2\}$ que seja ortonormal.

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{(1, 0, 1)}{\sqrt{2}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

$$w_2 = v_2 - (v_2 \cdot u_1)u_1 = (-1, 1, 0) - (-\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$w_2 = (-1, 1, 0)(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$$

$$u_2 = \frac{w_2}{|w_2|} = \frac{(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}).$$

(3.0)4. Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -7 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

Se possível, calcular as matrizer abaixo. Se não for possível, determinar a razão.

(1.0)a. A matriz $(A^2 - 3A)$.
Solução:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - 3 * \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 61 & 108 \\ 48 & 85 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 27 \\ 12 & 21 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 46 & 81 \\ 36 & 64 \end{bmatrix}.$$

(1.0)b. A matriz $(AB)^T$.
Solução:

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -7 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & -40 & -37 \\ -14 & -31 & -29 \end{bmatrix}.$$

$$AB^T = \begin{bmatrix} -17 & -14 \\ -40 & -31 \\ -37 & -29 \end{bmatrix}.$$

(1.0)c. A matriz $(BA)^T$.

Solução:

Não é possível calcular o produto BA pois o número de colunas de B é maior que o número de linhas de A.