Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
AD1 - Segundo Semestre de 2009
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

Nome -
Assinatura -

1.(3.0) Considere o conjunto $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, onde $v_1 = (2, 0, -1)$, $v_2 = (1, 0, 2)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$.

(a) Calcule o módulo (comprimento) de cada vetor de B.

(b) Calcule a distância $d(v_1, v_2) = |v_1 - v_2|$

(c) Verifique quais vetores de B, dois a dois, são ortogonais ou paralelos.

(d) Calcule o ângulo, dois a dois, formado pelos vetores de B.

(e) Determine o subespaço $[B] \subseteq \mathbb{R}^3$.

(f) Usando o processo de Gram-Schmidt, determine a partir da base B, uma base ortogonal do $\mathbb{R}^3$.

(g) Determine a partir de B uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$.

(h) Seja $\hat{B}$ o conjunto formado pelos vetores v_1 e v_2 de B substituindo-se o vetor v_3 pelo vetor $\hat{v}_3 = (3, 3, -4)$. Verifique se o conjunto $\hat{B}$ é LI ou LD.

2.(2.0) Seja $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^2 / x + w = 0 \text{ e } y - 2z = 0\}$. Verifique se S é uma subespaço vetorial do $\mathbb{R}^4$, relativamente às operações usuais de adição e multiplicação por escalar e em caso afirmativo determine uma base para S.

3.(3.0) Seja

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

calcule A^{-1} e use-a para:

(a) encontrar uma matriz $X_{3\times 2}$ tal que $AX = 5B$.

(b) encontrar uma matriz $Y_{2\times 3}$ tal que $YA = 5B^T$.

onde B^T é matriz transposta de B.

4.(2.0) Uma empresa fabrica três diferentes tipos de camisas: A, B e C. Faz-se uma estimativa do custo de produção de cada camisa. A camisa A custa R$ 10,00, a camisa B e a camisa C custam R$ 5,00 cada. Faz-se também, uma estimativa do número de horas de mão-de-obra necessárias para produzir uma camisa de cada tipo, sendo necessárias 1 hora para a camisa A, 3 horas para a camisa B e 2 horas para a camisa C. A empresa tem disponível para gastar em sua produção um total de R$ 25,00 e 10 horas de mão-de-obra. Sabendo-se que a empresa deverá produzir um total de 4 camisas dentre os três tipos, construa um sistema para determinar quanto de cada tipo de camisa a empresa deverá produzir e em seguida resolva o sistema linear pelo método de Gauss-Jordan.

Gabarito

Álgebra Linear: AD1 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2009.2

Tutores: Cristina Lopes e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

a) $|v_1| = \sqrt{2^2 + (0)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+0+1} = \sqrt{5}$

$|v_2| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{1+0+4} = \sqrt{5}$

$|v_3| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{0+0+1} = \sqrt{1} = 1$

b) $d(v_1, v_2) = \sqrt{(2-1)^2 + (0-0)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{1+0+9} = \sqrt{10}.$

c) Para que dois vetores sejam ortogonais, o produto interno entre eles tem que ser zero. E para serem paralelos suas componentes têm que ser proporcionais.

$< v_1, v_2 >= 2.1 + 0.0 + (-1).2 = 2 - 2 = 0 \Longrightarrow$ São ortogonais

$< v_1, v_3 >= 2.0 + 0.0 + (-1).1 = 0 + 0 - 1 = -1 \Longrightarrow$ Não são ortogonais

$\frac{0}{2} \neq \frac{0}{0} \neq \frac{1}{-1} \Longrightarrow v_1, v_3$ não são paralelos

$< v_2, v_3 >= 1.0 + 0.0 + 2.1 = 2 \Longrightarrow$ Não são ortogonais

$\frac{1}{0} \neq \frac{0}{0} \neq \frac{2}{1} \Longrightarrow v_2, v_3$ não são paralelos

d)

$cos(\theta) = \frac{v_1 v_2}{|v_1||v_2|}$

$cos(\theta) = \frac{0}{\sqrt{5}\sqrt{5}} \Longrightarrow \theta = arccos 0 = 90^0$

$cos(\beta) = \frac{v_1 v_3}{|v_1||v_3|}$

$cos(\beta) = \frac{-1}{\sqrt{5}.1} \Longrightarrow \beta = arccos\frac{-1}{\sqrt{5}} = arccos\frac{-\sqrt{5}}{5}$

$cos(\gamma) = \frac{v_2 v_3}{|v_2||v_3|}$

$cos(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{5}.1} \Longrightarrow \gamma = arccos\frac{2}{\sqrt{5}} = arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$

e) B para ser base tem que ser LI. Observe que os 3 vetores dados não são LI. Mas quaisquer dois vetores dos três serão LI. E qualquer desses dois vetores vão gerar o subespaço (plano) $P(x,z) = (x,0,z)$. Por exemplo, tomando os dois últimos vetores, teremos $x(1,0,2) + z(0,0,1) = (x,0,2x+z)$.

Logo, $[B] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y,z) = (x,0,z)\}$ e uma base para este subespaço é $\{(1,0,2),(0,0,1)\}$.

f) Vamos ortogonalizar esta base usando o método de Gram-Schmidt.

Seja $w_1 = (1,0,2)$.

Temos que

$$w_2 = (0,0,1) - \left(\frac{(0,0,1)(1,0,2)}{(1,0,2)(1,0,2)}\right)(1,0,2)$$

$$= (0,0,1) - \left(\frac{2}{5}\right)(1,0,2) =$$

$$= (0,0,1) - \left(\frac{2}{5},0,\frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{2}{5},0,\frac{1}{5}\right).$$

Logo uma base ortogonal para [B] é $\{(1,0,2),\left(-\frac{2}{5},0,\frac{1}{5}\right)\}$

g)

$||w_1|| = \sqrt{1^2 + (0)^2 + 2^2} = \sqrt{1+0+4} = \sqrt{5}$

$||w_2|| = \sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{25} + 0 + \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{5}{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Logo, basta dividirmos os vetores da base ortogonal pelas suas respectivas normas.

Assim temos a base ortonormal:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2), \sqrt{5}\left(-\frac{2}{5},0,\frac{1}{5}\right)\right\} =$$

$$\left\{\left(\frac{\sqrt{5}}{5},0,\frac{2\sqrt{5}}{5}\right),\left(\frac{-2\sqrt{5}}{5},0,\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right\}$$

h)

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$a(2,0,-1) + b(1,0,2) + c(3,3,-4) = (0,0,0)$$

Assim, temos:

$$\begin{cases} 2a + b + 3c = 0 \\ 3c = 0 \\ -a + 2b - 4c = 0 \end{cases}$$

Temos por L_2 que $c = 0$. Substituindo nas outras linhas, encontramos:

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ -a + 2b = 0 \end{cases}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1$ temos

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ 5b = 0 \end{cases}$$

Pela segunda linha deste sistema, temos que $b = 0$ e substituindo em L_1 temos que $a = 0$. Logo $\hat{B}$ é L.I.

2^a Questão) Solução:

a) Seja $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 / x + w = 0, y - 2z = 0\}, ie, (x, y, z, w) = (x, 2z, z, -x)$.
S é subespaço? (0, 0, 0) pertence à S, basta tomar $x = z = 0$.
E as duas condições abaixo são satisfeitas:

i) Temos que $(x_1, 2z_1, z_1, -x_1) + (x_2, 2z_2, z_2, -x_2) = (x_1 + x_2, 2(z_1 + z_2), z_1 + z_2, -x_1 - x_2) = (x_1 + x_2, 2(z_1 + z_2), z_1 + z_2, -(x_1 + x_2)) \in S$. Para isto, basta tomar $x = x_1 + x_2, z = z_1 + z_2$.

ii) Tomando $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que $\alpha(x_1, 2z_1, z_1, -x_1) = (\alpha x_1, 2\alpha z_1, \alpha z_1, -\alpha x_1) \in S$. Para isto basta tomar $x = \alpha x_1$ e $z = \alpha z_1$.

Logo S é subespaço vetorial do $\mathbb{R}^4$.

Temos também que $(x, y, z, w) = (x, 2z, z, -x) = x(1, 0, 0, -1) + z(0, 2, 1, 0)$.

Logo, os vetores $\{(1,0,0,-1),(0,2,1,0)\}$ formam uma base para S (claramente estes vetores são LI).

3^a Questão) Solução:

Cálculo da inversa:

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_1 \leftrightarrow L_3$, $L_3 \leftrightarrow L_1$, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_2 \leftrightarrow L_2 + 2L_1$, $L_3 \leftrightarrow L_3 - 3L_1$, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

Dividindo a segunda linha por 6 obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/6 & 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_3 \leftrightarrow L_3 + 5L_2$, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/6 & 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 0 & -5/6 & 1 & 5/6 & -4/3 \end{array}\right]$$

Multiplicando L_3 por $-6/5$, encontramos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/6 & 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -6/5 & -1 & 8/5 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_1 \leftrightarrow L_1 - 2L_2$, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/3 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/6 & 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -6/5 & -1 & 8/5 \end{array}\right]$$

Finalmente, fazendo $L_1 \leftrightarrow L_1 - L_3/3$, $L_2 \leftrightarrow L_2 + L_3/6$, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/5 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & -6/5 & -1 & 8/5 \end{array}\right] = [I|A^{-1}]$$

Logo, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & 0 & 3/5 \\ -6/5 & -1 & 8/5 \end{bmatrix}$.

a)

$$AX = 5B$$

Multiplicando A^{-1} pela esquerda em ambos os lados da igualdade, temos:

$$A^{-1}.(AX) = A^{-1}.(5B)$$

$$I.X = A^{-1}.(5B)$$

$$X = A^{-1}.(5B)$$

Como $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, então $5B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 20 \\ 15 & 10 \end{bmatrix}$.

Assim,

$$X = A^{-1}.(5B) = \begin{bmatrix} 2/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & 0 & 3/5 \\ -6/5 & -1 & 8/5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 20 \\ 15 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0-3 & 0+0-2 \\ -1+0+9 & 0+0+6 \\ -6-10+24 & 0-20+16 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}.(5B) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 8 & 6 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$$

b)

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$YA = 5B^T$$

Multiplicando A^{-1} pela direita em ambos os lados da igualdade, temos:

$$(YA).A^{-1} = (5B^T).A^{-1}$$

$$Y.(A.A^{-1}) = 5(B^T.A^{-1})$$

$$Y.I = 5(B^T.A^{-1})$$

$$Y = 5(B^T.A^{-1})$$

Assim,

$$Y = 5(B^T.A^{-1}) = 5.\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & 0 & 3/5 \\ -6/5 & -1 & 8/5 \end{bmatrix}$$

$$= 5.\begin{bmatrix} \frac{2}{5} - \frac{2}{5} - \frac{18}{5} & 0+0-3 & -\frac{1}{5} + \frac{6}{5} + \frac{24}{5} \\ 0 - \frac{4}{5} - \frac{12}{5} & 0+0-2 & 0 + \frac{12}{5} + \frac{16}{5} \end{bmatrix} = 5.\begin{bmatrix} -\frac{18}{5} & -3 & \frac{29}{5} \\ -\frac{16}{5} & -2 & \frac{28}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & -\frac{3}{5} & 29 \\ -16 & -10 & 28 \end{bmatrix}$$

4^a Questão) Solução:

Considere as incógnitas:

$$\begin{aligned} x &= \text{quantidade de camisas A} \\ y &= \text{quantidade de camisas B} \\ z &= \text{quantidade de camisas C} \end{aligned}$$

Para montar o sistema relativo ao problema, vamos somar as quantidades de camisas x, y, z e igualar ao total de camisas produzidas (linha L_1 do sistema). Faremos o mesmo procedimento para as horas de mão de obra para a produção das camisas (linha L_2 do sistema). Então multiplicaremos o custo de cada camisa pela sua respectiva camisa e igualaremos ao gasto total com as camisas (linha L_3 do sistema). Assim temos:

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+3y+2z=10 \\ 10x+5y+5z=25 \end{cases} \tag{1}$$

Utilizaremos o Método de Gauss-Jordan para resolver esse sistema.

O sistema linear acima pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 10 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 25 \end{bmatrix}$$

Considere a seguinte matriz aumentada que representa este sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 1 & 3 & 2 & | & 10 \\ 10 & 5 & 5 & | & 25 \end{bmatrix}$$

Transformaremos a matriz aumentada à sua forma escada reduzida por linhas, usando operações elementares em suas linhas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 1 & 3 & 2 & | & 10 \\ 10 & 5 & 5 & | & 25 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftrightarrow L_3 - 10L_1$, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 2 & 1 & | & 6 \\ 0 & -5 & -5 & | & -15 \end{array}\right]$$

Dividindo a segunda linha por 2 obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1/2 & | & 3 \\ 0 & -5 & -5 & | & -15 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_3 \leftrightarrow L_3 + 5L_2$, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1/2 & | & 3 \\ 0 & 0 & -5/2 & | & 0 \end{array}\right]$$

Multiplicando L_3 por $-2/5$, encontramos

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1/2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_1 \leftrightarrow L_1 - L_2$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftrightarrow L_2 - L_3/2$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

E finalmente, fazendo $L_1 \leftrightarrow L_1 - L_3/2$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Assim, temos:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Portanto (3) é a solução do sistema linear dado (1).

Logo, a empresa deverá produzir 1 camisa A, 3 camisas B e nenhuma camisa C.