Gabarito

Álgebra Linear: AD2 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2009.1

Tutores: Cristina Lopes e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

Considere o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + \alpha z = 6 \\ 2x - y + 2\alpha z = 3 \\ \alpha x + 3y + z = 5 \end{cases} \tag{1}$$

Vamos resolvê-lo pelo Método de Eliminação de Gauss.

O sistema linear acima pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & \alpha \\ 2 & -1 & 2\alpha \\ \alpha & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

A matriz aumentada é dada por:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & \alpha & | & 6 \\ 2 & -1 & 2\alpha & | & 3 \\ \alpha & 3 & 1 & | & 5 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1$ e $L_3 \leftrightarrow L_3 - \alpha L_1$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & \alpha & | & 6 \\ 0 & -9 & 0 & | & -9 \\ 0 & 3-4\alpha & 1-\alpha^2 & | & 5-6\alpha \end{bmatrix}$$

Multiplicando L_2 por $-1/9$, encontramos

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & \alpha & | & 6 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 3-4\alpha & 1-\alpha^2 & | & 5-6\alpha \end{bmatrix}$$

E finalmente, multiplicando L_3 por $4\alpha - 3$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & \alpha & | & 6 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1-\alpha^2 & | & 2-2\alpha \end{bmatrix}$$

a) Para que o sistema tenha solução única:

$1 - \alpha^2 \neq 0 \Longrightarrow \alpha \neq -1 \;\text{ e }\; \alpha \neq 1$

b) Para que o sistema tenha infinitas soluções:

$1 - \alpha^2 = 0 \Longrightarrow \alpha = -1 \;\text{ e }\; \alpha = 1$

Simultaneamente, tem que ocorrer :

$2 - 2\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = 1$

Logo, $\alpha = 1$.

c) Para que o sistema não tenha solução: $\alpha = -1$.

2^a Questão) Solução:

a) Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ $(x, y, z) \in S$.

Então: $(x, y, z) = a(1, -2, -3) + b(2, 3, -4) + c(3, 8, -5)$.

Assim, temos:

$$\begin{cases} \quad a & +2b & +3c = x \\ -2a & +3b & +8c = y \\ -3a & -4b & -5c = z \end{cases}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$ temos:

$$\begin{cases} a & +2b & +3c = x \\ & +7b & +14c = y + 2x \\ & +2b & +4c = z + 3x \end{cases}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow \frac{7}{2}L_3 - L_2$ temos:

$$\begin{cases} a & +2b & +3c = x \\ & +7b & +14c = y + 2x \\ & & 0 = \frac{7}{2}z + \frac{21}{2}x - y - 2x \end{cases}$$

Por L_3 temos que $y = \frac{17x+7z}{2}$. (Observe que calculamos y em função de x e z. Poderia ser também x em função de y e z e também z em função de x e y).

Logo, concluímos que $(x, y, z) \in S = (x, \frac{17x+7z}{2}, z) = x(1, \frac{17}{2}, 0) + z(0, \frac{7}{2}, 1)$.

Temos então que $\{(1, \frac{17}{2}, 0), (0, \frac{7}{2}, 1)\}$ é base para S, já que estes vetores são LI's.

Vamos usar Gram-Schmidt para ortogonalizar a base:

Seja $w_1 = u_1 = \left(1, \dfrac{17}{2}, 0\right)$.

Temos que $w_2 = u_2 - \left(\frac{u_2 w_1}{w_1 w_1}\right) w_1$

Logo

$$w_2 = \left(0, \frac{7}{2}, 1\right) - \left(\frac{(0, \frac{7}{2}, 1)(1, \frac{17}{2}, 0)}{(1, \frac{17}{2}, 0)(1, \frac{17}{2}, 0)}\right)\left(1, \frac{17}{2}, 0\right)$$

$$= \left(0, \frac{7}{2}, 1\right) - \left(\frac{119}{293}\right)\left(1, \frac{17}{2}, 0)\right) =$$

$$= \left(0, \frac{7}{2}, 1\right) - \left(\frac{119}{293}, \frac{2023}{586}, 0\right) = \left(\frac{-119}{293}, \frac{28}{586}, 1\right)$$

Portanto, a base ortogonal para S é $\left\{\left(1, \frac{17}{2}, 0\right), \left(\frac{-119}{293}, \frac{28}{586}, 1\right)\right\}$ ou

$S = \left\{(1;\ 8,5;\ 0), (-0,406143345;\ 0,04778157;\ 1)\right\}$, com dimensão 2.

b)

$||w_1|| = \sqrt{1^2 + (\frac{17}{2})^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{293}{4}} = \frac{\sqrt{293}}{2} = 8,558621384$

$||w_2|| = \sqrt{(\frac{-119}{293})^2 + (\frac{28}{586})^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{400824}{343396}} = \frac{\sqrt{400824}}{586} = 1,080386734$

Assim, dividindo a base S pela norma dos vetores, temos a seguinte base ortonormal:

$$\left\{\left(\frac{2\sqrt{293}}{293}, \frac{17\sqrt{293}}{293}, 0\right), \left(\frac{-119\sqrt{400824}}{200412}, \frac{28\sqrt{400824}}{400824}, \frac{586\sqrt{400824}}{400824}\right)\right\} \approx$$

$$\approx \left\{(0,11684;\ 0,99315;\ 0), (-0,37592;\ 0,04423;\ 0,92559)\right\}$$

Assim temos:

$projv_S = \Big((1,0,4)\,(0,11684;\ 0,99315;\ 0)\Big)(0,11684;\ 0,99315;\ 0) +$
$\Big((1,0,4)\,(-0,37592;\ 0,04423;\ 0,92559)\Big)(-0,37592;\ 0,04423;\ 0,92559)$
$= 0,116841248\Big(0,11684;\ 0,99315;\ 0\Big) + 3,326453891\Big(-0,3759240390, 0442263580, 925594483\Big)$
$= \Big(-1,236842105;\ 0,263157895;\ 3,078947368\Big)$

Note que $projv_S \in S$, pois

$y = (17x + 7z)/2 = (17(-1,236842105) + 7(3,078947368))/2 = 0,263157895$

3^a Questão) Solução:

a) Como T é transformação linear, temos que $(x,y) = x(1,0) + y(0,1) \Longrightarrow T(x,y) = xT(1,0) + yT(0,1)$. Assim temos:

$$T\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 5T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, temos:

$$T\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Temos também que:

$$T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = aT\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + bT\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 2a \\ -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3b \\ 0 \\ 4b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+3b \\ 2a \\ -a+4b \end{bmatrix}.$$

b) $N(T) = \{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ tal que $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0\}$

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = xT\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + yT\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, temos:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3y \\ 0 \\ 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3y \\ 2x \\ -x+4y \end{bmatrix}$$

Igualando a zero temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x & +3y & = 0 \\ 2x & & = 0 \\ -x & +4y & = 0 \end{cases}$$

Por L_2, $x = 0$. Substituindo em L_3, $y = 0$. Logo $N(T) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Assim temos que $Dim(N) = 0$.

Logo T é injetora.

c) Pelo Teorema de Núcleo-Imagem, $Dim(\mathbb{R}^2) = Dim(N) + Dim(Im) \Longrightarrow 2 = 0 + Dim(Im) \Longrightarrow Dim(Im) = 2$.

Temos que a imagem nao é igual ao contradomínio, pois $Im(T)$ tem dimensão menor que $\mathbb{R}^3$. Logo T não é sobrejetora.

4^a Questão) Solução:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

Utilizaremos a Fórmula de Laplace para calcular o determinante da matriz $(A - \lambda I)$. Expandindo, então, em relação à primeira linha, obtemos:

$$det(A - \lambda I) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} \tag{2}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$$

onde M_{ij} é o determinante menor de a_{ij}.

Assim, aplicando a Regra de Sarrus para calcular o determinante de ordem 3, temos:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} det(M_{11}) = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \tag{3}$$

$$= (3-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) - 4(3-\lambda) = (3-\lambda)[(1-\lambda)(2-\lambda) - 4] \tag{4}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} det(M_{12}) = (-1). \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \tag{5}$$

$$= -[(1-\lambda)(2-\lambda) - 4] \tag{6}$$

A_{13} e A_{14} não vamos calcular pois $a_{13} = 0$ e $a_{14} = 0$.

Logo o polinômio característico é dado por

$P_4(\lambda) = det(A - \lambda I) = (3-\lambda)\{(3-\lambda)[(1-\lambda)(2-\lambda)-4]\} + 1.\{-[(1-\lambda)(2-\lambda)-4]\}$

Para encontrar as raízes do polinômio característico, já fatorando o polinômio acima, teremos

$$(3-\lambda)^2[(1-\lambda)(2-\lambda) - 4] - [(1-\lambda)(2-\lambda) - 4] = 0$$

$$[(1-\lambda)(2-\lambda) - 4].[(3-\lambda)^2 - 1] = 0$$

$$[\lambda^2 - 3\lambda - 2].[\lambda^2 - 6\lambda + 8] = 0$$

As raízes de $P_2(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 2$ são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$.

As raízes de $P_2(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8$ são $\lambda_3 = \dfrac{3 - \sqrt{17}}{2}$ e $\lambda_4 = \dfrac{3 + \sqrt{17}}{2}$.

Logo os autovalores da matriz A, são:

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = \dfrac{3 - \sqrt{17}}{2}$ e $\lambda_4 = \dfrac{3 + \sqrt{17}}{2}$.

Cálculo dos autovetores v associados aos autovalores λ.

Para encontrarmos os autovetores de A associados a $\lambda_1 = 2$, formamos o sistema linear $Ax = 2x \equiv (A - 2I)x = 0$, ou

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isso nos dá

$$\begin{cases} x + y = 0 \Longrightarrow y = -x \\ x + y = 0 \\ -z + 2w = 0 \Longrightarrow w = 0 \\ 2z = 0 \Longrightarrow z = 0 \end{cases}$$

Assim, todos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$ são dados por $\begin{bmatrix} x \\ -x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Analogamente, para $\lambda_2 = 4$, obtemos

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isso nos dá

$$\begin{cases} -x + y = 0 \Longrightarrow x = y \\ x - y = 0 \\ -3z + 2w = 0 \\ 2z - 2w = 0 \end{cases}$$

Das duas últimas equações, temos que $z = w = 0$.

Assim, todos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 4$ são dados por $\begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Para o autovalor $\lambda_3 = \dfrac{3 - \sqrt{17}}{2}$, temos

$$\begin{bmatrix} \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \dfrac{1+\sqrt{17}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isso nos dá

$$\begin{cases} \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}x + y = 0 \\[2mm] x + \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}y = 0 \\[2mm] \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}z + 2w = 0 \\[2mm] 2z + \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}w = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $x = y = 0$, $z = r \neq 0$ e $w = \left(1 - \sqrt{17}\right)r/4$. Assim, o autovetor v_3, associado ao autovalor $\lambda_3 = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ é dado por

$$v_3 = r\Big(0;\ 0;\ 1;\ (1-\sqrt{17})/4\Big)^T$$

Para o autovalor $\lambda_4 = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$, temos

$$\begin{bmatrix} \dfrac{3-\sqrt{17}}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \dfrac{3-\sqrt{17}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \dfrac{1-\sqrt{17}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isso nos dá

$$\begin{cases} \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}x + y = 0 \\[2mm] x + \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}y = 0 \\[2mm] \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}z + 2w = 0 \\[2mm] 2z + \dfrac{1-\sqrt{17}}{2}w = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $x = y = 0$, $z = r \neq 0$ e $w = \left(1 + \sqrt{17}\right)r/4$. Assim,o autovetor v_4 associado ao autovalor $\lambda_4 = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ é dado por

$$v_4 = r\Big(0;\ 0;\ 1;\ (1+\sqrt{17})/4\Big)^T$$