Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
Gabarito da AP1 - Segundo Semestre de 2009
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(3.0)1. Seja $V = I\!R^3$. Verifique se W é ou não subspaço vetorial de V, onde:

(a) $W = \{(x, y, z) : x, y, z \in I\!R \text{ e } y = 0\}$.
Solução:
$0 \in W$ pois podemos tomar $x = y = z = 0$. E as seguintes condições são satisfeitas:

$(x_1, 0, z_1) + (x_2, 0, z_2) = (x_1 + x_2, 0, z_1 + z_2) = (x_3, 0, z_3) \in W$ onde $x_3 = x_1 + x_2$ e $z_3 = z_1 + z_2$.

$\alpha(x, 0, z) = (\alpha x, 0, \alpha z) = (x_4, 0, z_4) \in W$ onde $x_4 = \alpha x$ e $z_4 = \alpha z$.

Logo, W é subespaço vetorial de V.

(b) $W = \{(x, y, z) : y = x \text{ e } z = 3x\}$.
Solução:
$0 \in W$ pois podemos tomar $x = 0$. E as seguintes condições são satisfeitas:

$(x_1, x_1, 3x_1) + (x_2, x_2, 3x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, 3(x_1 + x_2)) = (x_3, x_3, 3x_3) \in W$ onde $x_3 = x_1 + x_2$.

$\alpha(x, x, 3x) = (\alpha x, \alpha x, 3\alpha x) = (x_1, x_1, 3x_1) \in W$ onde $x_1 = \alpha x$.

Logo, W é subespaço vetorial de V.

(c) $W = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$.

Solução:

$0 \in W$ pois podemos tomar $x = y = z = 0$. E as seguintes condições são satisfeitas:

Sejam (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2), tais que $x_1 + y_1 + z_1 = 0$ e $x_2 + y_2 + z_2 = 0$.
Logo, $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = 0$.
Ou seja, $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in W$.

Sejam $\alpha \in \Re$ e (x, y, z) tal que $x + y + z = 0$.
$\alpha(x + y + z) = \alpha x + \alpha y + \alpha z = 0$.
Logo $\alpha(x, y, z) \in W$.

Logo, W é subespaço vetorial de V.

(d) $W = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$.

Solução:

Considere $(x_1, y_1, z_1) = (0, 1, 1)$ e $(x_2, y_2, z_2) = (1, 0, 0)$. Como $(x_1, y_1, z_1) \in W$, $(x_2, y_2, z_2) \in W$ e $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \notin W$, W não é subespaço vetorial.

(2.0)2. No espaço vetorial $P_3(t)$ dos polinômios em t de grau máximo 3, consideremos a base $\{1, 1 - t, (1 - t)^2, (1 - t)^3\}$. Sejam os polinômios $p_1(t) = 2 - 3t + 3t^2 + 2t^3$, $p_2(t) = 1 + 6t - 5t^3$ e $p_3(t) = 5t - t^2 - 4t^3$.

(a) Determine as coordenadas do polinômio $p_2(t)$ em relação a esta base.

Solução:

Se $\{1, 1 - t, (1 - t)^2, (1 - t)^3\}$ é uma base de $P_3(t)$, então todo polinômio pode ser escrito como combinação linear dos vetores desta base.

Consideremos o polinômio $p_2(t) = 1 + 6t - 5t^3$

$1 + 6t - 5t^3 = a(1) + b(1 - t) + c(1 - t)^2 + d(1 - t)^3$
$1 + 6t - 5t^3 = a + b - bt + c(1 - 2t + t^2) + d(1 - 3t + 3t^2 - t^3)$
$1 + 6t - 5t^3 = a + b - bt + c - 2ct + ct^2 + d - 3dt + 3dt^2 - dt^3$
$1 + 6t - 5t^3 = (a + b + c + d) + (-b - 2c - 3d)t + (c + 3d)t^2 + (-d)t^3$

Pela igualdade de polinômios, temos:

$$\begin{cases} a+b+c+d=1 \\ -b-2c-3d=6 \\ c+3d=0 \\ -d=-5 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema por substituição de baixo para cima, temos $d=5$, $c=-3d=-15$, $b=-6-2c-3d=9$ e $a=1-b-c-d=2$
Assim, as coordenadas de $p_2(t)$ em relação à base acima são: $a=2$, $b=9$, $c=-15$ e $d=5$. Logo, $p_2(t)$ pode ser escrito como : $p_1(t)=2(1)+9(1-t)-15(1-t)^2+5(1-t)^3$.

(b) Verifique se $p_1(t)$, $p_2(t)$ e $p_3(t)$ são linearmente independentes.

Solução:

$a(p_1)+b(p_2)+c(p_3)=0$
$a(2-3t+3t^2+2t^3)+b(1+6t-5t^3)+c(5t-t^2-4t^3)=0$
$(2a-5b-4c)t^3+(3a-c)t^2+(-3a+6b+5c)t+(2a+b)=0t^3+0t^2+0t+0$

Pela igualdade de polinômios, temos:

$$\begin{cases} 2a-5b-4c=0 \\ 3a-c=0 \quad \Rightarrow \quad c=3a \\ -3a+6b+5c=0 \\ 2a+b=0 \quad \Rightarrow \quad b=-2a \end{cases}$$

A segunda e a terceira equações são satisfeitas para qualquer valor de a, já que:
$2a-5b-4c=0$
$2a-5(-2a)-4(3a)=0$
$2a+10a-12a=0$
$0=0$,
e
$-3a+6b+5c=0$
$-3a+6(-2a)+5(3a)=0$
$-3a-12a+15a=0$
$0=0$

Logo o sistema tem infinitas soluções, tais que $a \in I\!R$, $b = -2a$ e $c = 3a$. Consequentemente, os polinômios são linearmente dependentes.

(2.0)3. Seja P_2 o espaço vetorial dos polinômios de grau 2. Considere os polinômios $v_1 = -x^2 - 6x,\ v_2 = x^2 - 3x - 1$ e $v_3 = -3x^2 + 2$.
i) Mostre que v_1 pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $\{v_2,\ v_3\}$.

Solução:

Determinar a e b tais que $v_1 = av_2 + bv_3$, ou seja

$$-x^2 - 6x = ax^2 - 3ax - a - 3bx^2 + 2b.$$

Pela igualdade de polinômios, temos:

$$\begin{cases} a - 3b = -1 \\ -3a = -6 \quad \Rightarrow \quad a = 2 \\ -a + 2b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = a/2 = 1 \end{cases}$$

Substituindo os valores $a = 2$ e $b = 1$ obtidos com as duas últimas equações na primeira equação, temos $-1 = -1$, logo o sistema tem como única solução $a = 2$, $b = 1$, mostrandop que v_1 pode ser escrito como combinação linear de v_2 e v_3.

ii) Podemos afirmar, a partir do item anterior, que o conjunto de vetores $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ são linearmente dependentes? Porquê?

Solução:

Sim, pois a relação $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ é satisfeita para $\alpha_1 = -1$, $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_3 = 1$, ou seja para $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0, 0, 0)$.

(3.0)4. Seja W o subspaço de $I\!R^4$ gerado pelos vetores

$$u_1 = (1, -2, 5, -3), \quad u_2 = (2, 3, 1, -4), \quad u_3 = (3, 8, -3, -5).$$

(a) Determine uma base e a dimensão de W.

(b) Estenda a base de W obtida no item anterior a uma base de todo o espaço $I\!R^4$.

(c) Calcule o módulo do vetor u_2.

(d) Calcule o ângulo entre os vetores u_1 e u_3.

Solução:

(a) A base e a dimensão de W podem ser obtidas escalonando-se a matriz, cujas linhas são os vetores dados:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & 8 & -3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 14 & -18 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da matriz escalonada obtemos a base para W, dada por $\{(1,-2,5,-3),(0,7,-9,2)\}$. A dimensão de W é 2 pois temos 2 vetores na base.

(b) Sabemos que qualquer conjunto de vetores LI de um espaço vetorial de dimensão finita é parte de uma base, ou seja, pode ser estendido até completar uma base para o espaço. Para encontrarmos uma base para $I\!R^4$ é necessário acrescentarmos mais dois vetores à base de W, tais que os quatro vetores resultantes sejam linearmente independentes. Por exemplo, o conjunto de vetores $\{(1,-2,5,-3),(0,7,-9,2),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ forma uma base para $I\!R^4$, já que a matriz abaixo, cujas linhas são estes vetores, tem posto igual a 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) $|u_2| = \sqrt{2^2+3^2+1^2+(-4)^2} = \sqrt{4+9+1+16} = \sqrt{30}$.

(d) Seja θ o ângulo entre os vetores u_1 e u_3.

$|u_1| = \sqrt{1^2+(-2)^2+5^2+(-3)^2} = \sqrt{1+4+25+9} = \sqrt{39}$.

$$|u_3| = \sqrt{3^2 + 8^2 + (-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 64 + 9 + 25} = \sqrt{107}.$$

$$cos(\theta) = \frac{u_1.u_3}{|u_1|.|u_3|} = \frac{3 - 16 - 15 + 15}{\sqrt{39}\sqrt{107}} = \frac{-13}{\sqrt{4173}} \Longrightarrow \theta = arcos\frac{-13}{\sqrt{4173}}.$$