

Álgebra Linear

Aula 12: A Inversa de uma Matriz e a Regra de Cramer

Mauro Rincon

Márcia Fampa

10.1 - Definições



Definição 1:

Seja $\mathbf{A} = a_{ij}$ uma matriz quadrada de ordem $n \times n$. A matriz **adjunta** de \mathbf{A} , denotada por $\text{adj } \mathbf{A}$, é a transposta da matriz dos cofatores de \mathbf{A} , ou seja,

$$\text{adj } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

10.1 - Definições

➡ Exemplo 1:

Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -2 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, calcule a matriz $\text{adj } \mathbf{A}$.

Solução: Os cofatores da matriz \mathbf{A} são:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -12, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = + \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{22} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8$$

10.1 - Definições

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -18, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -8,$$

$$A_{33} = + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 4$$

onde o sinal $+$, $-$ é o correspondente do termo $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ Substituindo os termos correspondentes temos que,

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -12 & -2 & -18 \\ 1 & -1 & -8 \\ -10 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

10.1 - Definições



Teorema 1:

Se \mathbf{A} é uma matriz quadrada de ordem $n \times n$, então

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0, \text{ para } i \neq k$$

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0, \text{ para } j \neq k$$

Demonstração Seja $\hat{\mathbf{A}}$ uma matriz obtida pela substituição da i -ésima linha pela k -ésima linha de \mathbf{A} . Desta forma a matriz $\hat{\mathbf{A}}$ tem duas linhas iguais e portanto $\det(\hat{\mathbf{A}}) = |\hat{\mathbf{A}}| = 0$.

10.1 - Definições

Fazendo a expansão do $\det(\hat{\mathbf{A}})$ em relação a k-ésima linha ($\hat{\mathbf{A}}$), cujos elementos são $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ e os cofatores são $A_{k1}, A_{k2}, \dots, A_{kn}$. Usando a expansão de Laplace obtemos:

$$|\hat{\mathbf{A}}| = a_{i1} \cdot A_{k1} + a_{i2} \cdot A_{k2} + \dots + a_{in} \cdot A_{kn} = 0$$

A segunda propriedade segue diretamente da primeira, desde que $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$.

10.1 - Definições



Teorema 2:

Para qualquer matriz quadrada \mathbf{A} ,

$$\mathbf{A} \cdot (\text{adj } \mathbf{A}) = (\text{adj } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{I}$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade e $|\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A})$.

10.1 - Definições

Demonstração: Temos que

$$\mathbf{A} \cdot (\text{adj } \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{j1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{j2} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{jn} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Os elementos da matriz produto são da forma:

$$x_{ij} = a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + \dots + a_{in} \cdot A_{jn}$$

Assim fazendo $i = j$, os elementos da diagonal

$x_{ii} = |\mathbf{A}|$ pelo Teorema e para $i \neq j$ os elementos

$x_{ij} = 0$ pelo Teorema. Portanto $\mathbf{A} \cdot (\text{adj } \mathbf{A}) = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{I}$.

10.1 - Definições

De forma análoga, os elementos x_{ij} da matriz produto $(adj \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}$ são dados por:

$$x_{ij} = A_{1i} \cdot a_{1j} + A_{2i} \cdot a_{2j} + \cdots + A_{ni} \cdot a_{nj},$$

que satisfaz a condição,

$$x_{ij} = \begin{cases} |\mathbf{A}| & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Assim conclui-se que

$$\mathbf{A} \cdot (adj \mathbf{A}) = (adj \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{I}$$

10.1 - Definições



Exemplo 2:

Considere a matriz \mathbf{A} e $\text{adj } \mathbf{A}$ do exemplo anterior.
Então

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \text{adj } \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -2 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 & -2 & -18 \\ 1 & -1 & -8 \\ -10 & -8 & 4 \end{bmatrix} \\ &= -38 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

onde $|\mathbf{A}| = -38$.

10.1 - Definições

➡ Corolário 1:

Para qualquer matriz quadrada \mathbf{A} tal que $\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| \neq 0$, a matriz inversa de \mathbf{A} é dada por:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \text{adj } \mathbf{A}$$

Demonstração Temos que

$$\mathbf{A} \cdot \left(\frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \text{adj } \mathbf{A} \right) = \frac{1}{|\mathbf{A}|} (\mathbf{A} \cdot \text{adj } \mathbf{A}) = \frac{1}{|\mathbf{A}|} |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I}.$$

Logo da definição de inversa de uma matriz obtemos,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \text{adj } \mathbf{A}$$

10.1 - Definições

➡ Exemplo 3:

Calcule a inversa \mathbf{A}^{-1} da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Solução: Do exemplo anterior a matriz $\text{adj } \mathbf{A}$ e o determinante de \mathbf{A} são conhecidos. Assim do Corolário 1 temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \text{adj } \mathbf{A} = \frac{1}{|-38|} \begin{bmatrix} -12 & -2 & -18 \\ 1 & -1 & -8 \\ -10 & -8 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6/19 & 1/19 & 9/19 \\ -1/38 & 1/38 & 4/19 \\ 5/19 & 4/19 & -2/19 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

10.1 - Definições



Teorema 3:

Uma matriz \mathbf{A} é invertível se e somente se $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Demonstração: Se \mathbf{A} é invertível então por definição temos que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. Assim $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{I}) = 1$. e portanto $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Por outro lado se $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ então a inversa existe pelo Corolário 1.

10.1 - Definições



Corolário 2:

Seja \mathbf{A} uma matriz quadrada de ordem n . Então o sistema linear homogêneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ tem uma solução não trivial se e somente se $\det(\mathbf{A}) = 0$.

10.1 - Definições

Demonstração: Se $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ então \mathbf{A} é invertível e o sistema linear homogêneo tem apenas a solução trivial $\mathbf{x} = (0, 0, \dots, 0)$. Reciprocamente se $\det(\mathbf{A}) = 0$, então \mathbf{A} é singular. Suponha que \mathbf{A} seja equivalente por linhas a uma matriz \mathbf{B} , em forma escada reduzida por linhas. Como $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B}) = 0$, necessariamente a matriz \mathbf{B} tem pelo menos uma linha nula. Seja \mathbf{C} uma submatriz de \mathbf{B} , excluindo-se todas as linhas nulas. Nestas condições os sistemas lineares homogêneos $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{Cx} = \mathbf{0}$ tem as mesmas soluções. Mas o sistema $\mathbf{Cx} = \mathbf{0}$ tem no máximo $(n - 1)$ equações para as n incógnitas e conseqüentemente o sistema tem uma solução não trivial.

10.1 - Definições

- ⇒ Teorema 4:
As seguintes propriedades são equivalentes:
- 1) \mathbf{A} é invertível
 - 2) $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ tem apenas a solução trivial
 - 3) \mathbf{A} é equivalente por linhas a \mathbf{I} (identidade)
 - 4) O sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tem uma única solução para qualquer vetor \mathbf{b}
 - 5) $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

10.2 - Regra de Cramer

➡ Vamos utilizar os resultados obtidos anteriormente para obter um outro método para resolver sistemas lineares, conhecido como a **Regra de Cramer**.

10.2 - Regra de Cramer

→ Teorema 5 Seja um sistema linear com n-equações e n-incógnitas,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

e $\mathbf{A} = a_{ij}$, a matriz dos coeficientes do sistema,
 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ o vetor dos termos
independentes e $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ o vetor
incógnita.

10.2 - Regra de Cramer

Se $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, então o sistema linear tem uma única solução dada por:

$$x_1 = \frac{\det(\mathbf{A}_1)}{\det(\mathbf{A})}, \quad x_2 = \frac{\det(\mathbf{A}_2)}{\det(\mathbf{A})}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det(\mathbf{A}_n)}{\det(\mathbf{A})},$$

onde \mathbf{A}_i é a matriz obtida de \mathbf{A} substituindo-se a i -ésima coluna pelo vetor \mathbf{b} .

10.2 - Regra de Cramer

Demonstração: Se $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ então a matriz \mathbf{A} é invertível. Então do sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ obtemos que a solução é dada por $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Do Corolário 1 podemos escrever

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \left(\frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \text{adj } \mathbf{A} \right) \cdot \mathbf{b}$$

Fazendo o produto, obtemos para cada linha i , $1 \leq i \leq n$, que

$$x_i = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} (\mathbf{A}_{1i}\mathbf{b}_1 + \mathbf{A}_{2i}\mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{A}_{ni}\mathbf{b}_n)$$

10.2 - Regra de Cramer

Seja a matriz \mathbf{A}_i dada por

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\ i-1} & b_1 & a_{1\ i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\ i-1} & b_2 & a_{2\ i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\ i-1} & b_n & a_{n\ i+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Então:

$$\det(\mathbf{A}_i) = \mathbf{A}_{1i}\mathbf{b}_1 + \mathbf{A}_{2i}\mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{A}_{ni}\mathbf{b}_n$$

10.2 - Regra de Cramer

Substituindo na igualdade, conclui-se que para todo i ,
 $1 \leq i \leq n$

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{A}_i)}{\det(\mathbf{A})}$$

10.2 - Regra de Cramer



Exemplo 4

Resolva o sistema linear pela Regra de Cramer:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Solução: As matrizes são dadas por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

10.2 - Regra de Cramer

Onde \mathbf{A} é a matriz dos coeficientes e $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ foram obtidas da matriz \mathbf{A} trocando-se a 1ª, 2ª e 3ª respectivamente pelos termos independentes $\mathbf{b} = (2, -3, 1)^T$. Os determinantes são dados por:

$$\det(\mathbf{A}) = -12, \det(\mathbf{A}_1) = 12, \det(\mathbf{A}_2) = 0, \det(\mathbf{A}_3) = -12.$$

Assim a solução do sistema é dada por:

$$x_1 = \frac{\det(\mathbf{A}_1)}{\det(\mathbf{A})} = -1, \quad x_2 = \frac{\det(\mathbf{A}_2)}{\det(\mathbf{A})} = 0, \quad x_3 = \frac{\det(\mathbf{A}_3)}{\det(\mathbf{A})} = 1$$

10.2 - Regra de Cramer



Observe que pelo Teorema a Regra de Cramer somente se aplica quando o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de zero. Desta forma quando $\det(\mathbf{A}) = 0$ é melhor usar o método de Gauss- Jordan. Um outro aspecto importante em relação a Regra de Cramer é o alto número de operações para se determinar a solução de um sistema linear, ou seja, se temos uma matriz quadrada \mathbf{A} de ordem n , então fazendo a expansão em cofatores para o cálculo do determinante da matriz \mathbf{A} temos $n!$ operações de multiplicação. Para o cálculo do determinante de cada matriz \mathbf{A}_i $1 \leq i \leq n$ temos também $n!$ operações. Portanto para a resolução do sistema linear pela Regra de Cramer temos $(n + 1)!$ operações, que torna a Regra de Cramer inviável para grandes sistemas.

Exercícios

➡ Resolva os sistemas lineares de 20 a 23 da página 97 do livro texto, pela Regra de Cramer.