Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP2 - Segundo Semestre de 2017
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(3.0)1. Considere o espaço vetorial das matrizes reais, quadradas de ordem 2, $M_2(I\!R)$. Determine se cada uma das transformações abaixo é ou não linear. Justifique sua resposta.

(1.5)a. $T : M_2(I\!R) \rightarrow I\!R$, *tal que*

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right).$$

Solução: Temos que verificar se

$T(\alpha A_1+\beta A_2) = \alpha T(A_1)+\beta T(A_2),\ \forall A_1, A_2 \in M_2(I\!R), \forall \alpha, \beta \in I\!R.$

Façamos então

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \ \ e \ \ A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}.$$

$$
\begin{aligned}
T(\alpha A_1+\beta A_2) &= T\left(\alpha\begin{bmatrix} a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix} a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{bmatrix}\right)\\
&= \begin{vmatrix} \alpha a_1+\beta a_2 & \alpha b_1+\beta b_2\\ \alpha c_1+\beta c_2 & \alpha d_1+\beta d_2\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1+\beta b_2\\ \alpha c_1 & \alpha d_1+\beta d_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \beta a_2 & \alpha b_1+\beta b_2\\ \beta c_2 & \alpha d_1+\beta d_2\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1\\ \alpha c_1 & \alpha d_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \alpha a_1 & \beta b_2\\ \alpha c_1 & \beta d_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \beta a_2 & \alpha b_1\\ \beta c_2 & \alpha d_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \beta a_2 & \beta b_2\\ \beta c_2 & \beta d_2\end{vmatrix}\\
&= \alpha^2|A_1|+\alpha\beta\begin{vmatrix} a_1 & b_2\\ c_1 & d_2\end{vmatrix}+\alpha\beta\begin{vmatrix} a_2 & b_1\\ c_2 & d_1\end{vmatrix}+\beta^2|A_2|\\
&= \alpha^2|A_1|+\beta^2|A_2|+\alpha\beta\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_2\\ c_1 & d_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_2 & b_1\\ c_2 & d_1\end{vmatrix}\right)\\
&\neq \alpha T(A_1)+\beta T(A_2).
\end{aligned}
$$

Logo, T não é uma transformação linear.

(1.5)b. $T : M_2(I\!\!R) \to I\!\!R,\ \ tal\ \ que$

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\right)=2a+3b+c-d.$$

Solução: Temos que verificar se

$T(\alpha A_1+\beta A_2)=\alpha T(A_1)+\beta T(A_2),\ \forall A_1,A_2\in M_2(I\!\!R),\forall\alpha,\beta\in I\!\!R.$

Façamos então

$$A_1=\begin{bmatrix} a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{bmatrix}\ \ e\ \ A_2=\begin{bmatrix} a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{bmatrix}.$$

$$
\begin{aligned}
T(\alpha A_1 + \beta A_2) &= T\left(\alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= 2(\alpha a_1 + \beta a_2) + 3(\alpha b_1 + \beta b_2) + (\alpha c_1 + \beta c_2) - (\alpha d_1 + \beta d_2) \\
&= \alpha(2a_1 + 3b_1 + c_1 - d_1) + \beta(2a_2 + 3b_2 + c_2 - d_2) \\
&= \alpha T(A_1) + \beta T(A_2).
\end{aligned}
$$

Logo, T é uma transformação linear.

(5.0)2. Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(2.0)a. Calcule os autovalores e os correspondentes autovetores de A.

(1.0)b. Determine os autovalores e os correspondentes

autovetores de A^{-1}, sem calcular a matriz A^{-1}. Explique detalhadamente a solução.

(1.0)c. Calcule o determinante de A.

(1.0)d. Determine o determinante de A^{-1}, sem calcular a matriz A^{-1}. Explique detalhadamente a solução.

Solução:

a.

$$
\begin{aligned}
det(A - \lambda I) &= det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 2 \\
&= \lambda^2 - 5\lambda + 4 = P(\lambda).
\end{aligned}
$$

$P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \Rightarrow$ ou $\lambda = 1$ ou $\lambda = 4$. Então os autovalores de A são 1 e 4. Procuramos agora os autovetores associados:

(i)$\lambda = 1$. Temos

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\begin{bmatrix} 3x+2y \\ x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

Então temos que $x = -y$. Portanto os autovetores associados a $\lambda = 1$ são os vetores $v = (-x, x), x \neq 0$.

(ii)$\lambda = 4$. Temos

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\begin{bmatrix} 3x+2y \\ x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x \\ 4y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x+2y=0 \\ x-2y=0 \end{cases} \quad \text{ou } x = 2y.$$

Os autovetores associados a $\lambda = 4$ são os vetores da forma $v = (2y, y), y \neq 0$. (ou $v = (x, \frac{1}{2}x), x \neq 0$).

b. De acordo com a propriedade demonstrada em aula, se λ é um autovalor de A, então λ^{-1} é um autovalor de A^{-1} e todo autovetor de A é também um autovetor de A^{-1}. Logo os autovalores e respectivos autovetores de A^{-1} são:

(i) $\lambda = 1$, $v = (-x, x), x \neq 0$.

(ii) $\lambda = \frac{1}{4}$, $v = (x, \frac{1}{2}x), x \neq 0$.

c. $\text{Det}(A) = 3 \times 2 - 2 \times 1 = 4$.

d. $\text{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\text{Det}(A)} = \frac{1}{4}$.

(2.0)3. Considere a transformação linear de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ abaixo. Determine uma base para o núcleo e sua dimensão, uma base para sua imagem e sua dimensão, e diga se a transformação é injetora ou sobrejetora, justificando a resposta.

$L(x) = (x_1 - x_3, x_2, x_2)^T$.

Solução:

Núcleo, $N(L)$: Se x está no núcleo de L, então $L(x) = 0$, ou seja, $x_1 = x_3$ e $x_2 = 0$. Portanto, $N(L) = \{(1, 0, 1)^T\}$ (dimensão = 1).

Imagem, $I(L)$: Um vetor y pertence à imagem de L se e somente se y é a soma de um múltiplo de $v_1 = (1, 0, 0)^T$ com um múltiplo de

$v_2 = (0, 1, 1)^T$. Logo, $I(L)$ é o subspaço bidimensional (dimensão = 2) de $\mathbb{R}^3$ gerado por $[v_1, v_2]$.

Como $N(L) \neq \{(0, 0, 0)^T\}$, L não é injetora e como $I(L) \neq \mathbb{R}^3$, L não é sobrejetora.