Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
Gabarito da AP2 - Primeiro Semestre de 2009
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(1.5)1. Sendo A uma matriz real quadrada de ordem 4, cujo determinante é igual a 2, qual o valor de y na equação $\det(3AA^tA) = 4y$? Justifique sua resposta.

Solução:

$$\begin{aligned}
\det(3AA^TA) &= \det(3A) \cdot \det(A^T) \cdot \det(A) \\
&= 3^4\det(A) \cdot \det(A^T) \cdot \det(A) \\
&= 3^4\det(A) \cdot \det(A) \cdot \det(A) \\
&= 81 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 81 \cdot 4 \cdot 2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$4y = 81 \cdot 4 \cdot 2 \Rightarrow y = 162.$$

(2.5)2. Um fazendeiro estuda a elaboração de uma ração para porcos misturando 4 diferentes ingredientes. Pensando na necessidade de alimentar os porcos de forma saudável para fortalecer o sistema imunológico dos mesmos, o fazendeiro determinou que diariamente os porcos devem ingerir 46 unidades(u) de vitamina A, 40u de vitamina B, 55u de vitamina C. Sabe-se que 1 grama(g) do ingrediente 1 custa 1 unidade monetária (u.m.), 1g do ingrediente 2 custa 2 u.m., 1g do ingrdiente 3 custa 3 u.m. e do ingrediente 4 custa 2 u.m.. Sabe-se ainda que, fixada a mesma quantidade (1g) de cada ingrediente para a ração:

(a) o ingrediente I tem 1u de vitamina A, 0u de B e 1u de C.

(b) o ingrediente II tem 0u de vitamina A, 0u de B e 2u de C.

(c) o ingrediente III tem 1u de vitamina A, 2u de B e 0u de C.

(d) o ingrediente IV tem 1u de vitamina A, 1u de B e 0u de C.

Sabendo que o fazendeiro quer gastar 120u.m. diariamente com a alimentaçã da cada porco, determine quantos gramas de cada um dos ingredientes cada porco deve ingerir diariamente para que a determinação do fazendeiro seja cumprida, formulando a questão através de um sistema linear de equações e resolvendo-o pelo método de eliminação de Gauss.

Solução: Devemos encontrar a solução do sistema linear de equações

$$Ax = b,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 120 \\ 46 \\ 40 \\ 55 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss ao sistema $Ax = b$, temos:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 120 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 46 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 40 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 55 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 120 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & -74 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -65 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 120 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & -74 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -10 \end{array}\right]$$

Logo, $x_4 = 10$, $x_3 = \frac{1}{2}(40 - 10) = 15$, $x_2 = \frac{1}{2}(74 - 30 - 10) = 17$ e $x_1 = 120 - 34 - 45 - 20 = 120 - 99 = 21$. Assim as quantidades de ingredientes, em gramas, que cada porco deve ingerir diariamente devem ser: ingrediente I: 21; ingrediente II: 17; ingrediente III: 15; ingrediente IV: 10.

(3.0)3. Determine se cada uma das transformações abaixo é ou não linear. Justifique sua resposta.

(a)
$$T : I\!R^3 \to I\!R^3,\ T(x, y, z) = (x, y, 0)$$

Solução: Sejam $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ vetores em $I\!R^3$ e $\alpha \in I\!R$.Temos: $T(u_1) = (x_1, y_1, 0)$ e $T(u_2) = (x_2, y_2, 0)$. Logo

$$T(u_1+u_2) = T(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, 0) = T(u_1)+T(u_2).$$

$$T(\alpha u_1) = T(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, 0) = \alpha T(u_1).$$

Logo, a tranformação é linear.

(b)
$$T : I\!R^3 \to I\!R^2,\ T(x, y, z) = (3x + 2, 2y - z)$$

Solução: Neste caso, temos $T(0, 0, 0) = (2, 0) \neq (0, 0)$. Logo, a transformação não é linear.

(c)
$$T : I\!R^2 \to I\!R^2,\ T(x, y) = (x^2, 3y)$$

Solução: Sejam $u_1 = (x_1, y_1)$ e $u_2 = (x_2, y_2)$ vetores em $I\!R^2$. Temos: $T(u_1) = (x_1^2, 3y_1)$ e $T(u_2) = (x_2^2, 3y_2)$. Logo

$$T(u_1) + T(u_2) = (x_1^2 + x_1^2, 3y_1 + 3y_2).$$

No entanto,

$$\begin{array}{rcl} T(u_1 + u_2) & = & T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = ((x_1 + x_2)^2, 3(y_1 + y_2)) \\ & = & (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2, 3y_1 + 3y_2) \neq T(u_1) + T(u_2). \end{array}$$

Logo, a transformação não é linear.

(3.0)4. Seja $T : I\!R^3 \to I\!R^2$ a transformação linear tal que $T(1, 0, 0) = (1, 2)$, $T(0, 1, 0) = (0, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (-1, 3)$

(a) Determinar $N(T)$ e uma de suas bases. T é injetora? Justifique.

(b) Determinar $Im(T)$ e uma de suas bases. T é sobrejetora? Justifique.

Solução:

Temos:

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= xT(1,0,0) + yT(0,1,0) + zT(0,0,1) \\ &= x(1,2) + y(0,1) + z(-1,3) \\ &= (x-z, 2x+y+3z) \end{aligned}$$

(a)

$$N(T) = \{(x,y,z) \in I\!R^3 / (x-z, 2x+y+3z) = (0,0)\}$$

O sistema:

$$\begin{cases} x \quad\quad -z = 0 \\ 2x \quad +y+3z = 0 \end{cases}$$

admite solução geral $(z, -5z, z)$, $z \in I\!R$. Logo

$$N(T) = \{(z, -5z, z) / z \in I\!R\}$$

A única variável livre é z. Portanto, $\dim N(T) = 1$. Fazendo $z = 1$, obtem-se $(1,-5,1)$ e $\{(1,-5,1)\}$ é uma base de $N(T)$. Ainda T não é injetora, pois $N(T) \neq \{(0,0,0)\}$.

(b)

$$Im(T) = [T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1)] = [(1,2),(0,1),(-1,3)]$$

Considerando o Teorema da dimensão, temos:

$$dim\ Im(T) = dim\ I\!R^3 - dim\ N(T) = 3,1 = 2$$

Logo, $Im(T) = I\!R^2$ e qualquer base de $I\!R^2$ é base de $Im(T)$. Uma delas é $\{(1,2),(0,1)\}$. Ainda, T é sobrejetora, pois $Im(T) = I\!R^2$ que é o contradomínio.