Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP1 - Primeiro Semestre de 2013
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(3.0)1. Determine se cada conjunto a seguir é ou não subspaço de P_4, o conjunto de todos os polinômios de grau menor ou igual a 4. Justifique sua resposta.

(a) O conjunto de polinômios em P_4 de grau par.

Solução: Não, pois dados $p_1(x) = x^2 + x$ e $p_2(x) = -x^2 + x$, temos que p_1 e p_2 pertencem ao conjunto dado, mas $p_1 + p_2$ não pertence.

(b) O conjunto de polinômios $p(x)$ em P_4 tais que $p(0) = 0$.

Solução: Sim, pois: (i) O conjunto não é vazio, já que contém o polinômio nulo. (ii) Se $p(x)$ pertence ao conjunto e α é um escalar, então $\alpha p(0) = \alpha \cdot 0 = 0$, e, portanto αp pertence ao conjunto. (iii) Se $p(x)$ e $q(x)$ pertencem ao conjunto, então $(p+q)(0) = p(0) + q(0) = 0 + 0 = 0$, e, portanto $p + q$ pertence ao conjunto.

(c) O conjunto de polinômios em P_4 que têm pelo menos uma raiz real.

Solução: Não, pois dados $p_1(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ e $p_2(x) = x^2 - 2x$, temos que p_1 e p_2 pertencem ao conjunto dado, mas $p_1 + p_2$ não pertence.

(3.0)2. Considere os vetores $u = (0, 1, -1)$ e $w = (2, k, 0)$ de $I\!R^3$, onde $k \in I\!R$.

(a) Determine todos os possíveis valores de k de modo que os vetores u e $u + v$ sejam perpendiculares.

Solução:

Temos $u + v = (2, k + 1, -1)$. Para que u e $u + w$ sejam perpendiculares bsta fazer o produto escalar entre eles igaul a zero. Logo,

$$u \cdot (u + v) = (0, 1, -1) \cdot (2, k + 1, -1) = 0 + k + 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$k = -2.$$

(b) Determine todos os possíveis valores de k de modo que a projeção ortogonal do vetor w sobre o vetor u seja igual ao vetor $-5u$.

Solução:

$$\text{proj}_u w = \left(\frac{w \cdot u}{u \cdot u}\right) u = -5u \Leftrightarrow \frac{k}{2}(0, 1, -1) = (0, -5, 5) \Leftrightarrow \frac{k}{2} = -5,$$

$$k = -10.$$

(c) Determine todos os possíveis valores de k de modo que o ângulo entre os vetores u e w seja de 60^0.

Solução:

Temos

$$\cos(60) = \frac{1}{2} = \frac{u \cdot w}{|u||w|} = \frac{k}{\sqrt{2}\sqrt{4 + k^2}} \Leftrightarrow 2k = \sqrt{8 + 2k^2} \Leftrightarrow$$

$$4k^2 = 8 + 2k^2 \Leftrightarrow 2k^2 = 8 \Leftrightarrow k = \pm 2.$$

(2.0)3. Determine a dimensão e uma base do espaço vetorial

$$S = \{(x, y, z) \in I\!R^3 | x + 2y + z = 0\}$$

Solução:

Isolando z na equação de definição, tem-se: $z = -x - 2y$, onde x e y são variáveis livres. Qualquer vetor $(x, y, z) \in S$ tem a forma: $(x, y, -x - 2y)$ e, portanto, podemos escrever:

$$(x, y, z) = (x, y, -x - 2y)$$

ou

$$(x, y, z) = (x, 0, -x) + (0, y, -2y)$$

ou

$$(x, y, z) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -2)$$

isto é, todo vetor de S é combinação linear dos vetores $(1, 0, -1)$ e $(0, 1, -2)$. Como esses dois vetores geradores de S são L.I., o conjunto $\{(1, 0, -1), (0, 1, -2)\}$ é uma base de S e, consequentemente, dim$S$=2.

(2.0)4. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se possível, determine a matriz C em cada item abaixo. Se não for possível, determine o motivo da impossibilidade.

(a) $C = A^T - 2B$.

Solução:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 5 & 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -7 \\ 7 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) $C = B^2$.

Solução:

Não é possível pois B não é uma matriz quadrada.

(c) $C = BB^T$.

Solução:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

(d) $C = B^T B$.

Solução:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 10 \end{bmatrix}.$$