Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
AD2 - Segundo Semestre de 2007
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

Nome -
Assinatura -

1. Considere o sistema linear;

$$\begin{cases} 18x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = b_1 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = b_2 \\ 6x_1 - 12x_2 - 3x_3 + 3x_4 = b_3 \\ - x_3 + 10x_4 = b_4 \end{cases}$$

a.(1.0) Determine uma relação entre as componentes do vetor independente não nulo, $b = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, de tal forma que o sistema não tenha solução.

b.(2.0) Determine o subespaço vetorial gerado pelo conjunto dos termos independentes, para o qual o sistema linear admite solução.

c.(1.0) Calcule o determinante da matriz dos coeficientes, usando a expansão de Cofatores(Fórmula de Laplace).

2. Considere o operador linear $T : I\!R^3 \rightarrow I\!R^3$

$$T(x, y, z) \rightarrow (x + 2y - z,\ y + 2z,\ x + 3y + z)$$

a.(2.0) Determine o núcleo, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T é injetora? Justificar b.(2.0) Determine a imagem, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T é sobrejetora? Justificar

3.(2.0) : Uma matriz Q é denominada ortogonal, se seus vetores colunas (ou linhas) são **ortonormais**. Além disso, para toda matriz simétrica com autovalores distintos, vale a seguinte relação: $D = Q^t AQ$, onde D é uma matriz diagonal formada pelo autovalores distintos de A e as colunas (ou linhas) de Q são formadas pelos autovetores L.I. de A (Diz-se nesse caso que Q diagonaliza A).

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Determine as matrizes Q e D.

Gabarito

Álgebra Linear: AD2 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2007.2

Tutores: Rodrigo Olimpio e Cristina Lopes

1) a) Desenvolvendo o Método de Eliminação de Gauss, podemos notar que a segunda e terceira equações serão múltiplas uma da outra se $b_3 = -3b_2$. Dessa forma, o sistema terá infinitas soluções.

Se $b_3 \neq -3b_2$, o sistema não terá solução.

b) Se $b_3 = -3b_2$ então teremos as seguintes componentes do vetor independente:

$$b = (b_1, b_2, -3b_2, b_4) = b_1(1,0,0,0) + b_2(0,1,-3,0) + b_4(0,0,0,1)$$

Logo temos o seguinte subespaço $S = \{(a,b,c,d)/c = -3b\}$.

c) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 18 & -2 & 7 & 5 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \\ 6 & -12 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \end{bmatrix}$$

a matriz dos coeficientes.

Podemos expandir o determinante em relação à uma linha ou coluna. É claro que é melhor expandir em relação a uma linha ou coluna que tenha o maior número de zeros, já que, nesse caso, os cofatores A_{ij} dos a_{ij} que são nulos não precisam ser calculados, uma vez que $a_{ij}A_{ij} = (0)(A_{ij}) = 0$.

Expandindo, então, em relação à quarta linha, obtemos:

$$det(A) = a_{41}A_{41} + a_{42}A_{42} + a_{43}A_{43} + a_{44}A_{44} \tag{1}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$$

onde M_{ij} é o determinante menor de a_{ij}.

Assim, temos:

$$A_{43} = (-1)^{4+3} det(M_{43}) = (-1)^7 \begin{vmatrix} 18 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & -1 \\ 6 & -12 & 3 \end{vmatrix} \tag{2}$$

$$A_{44} = (-1)^{4+4} det(M_{44}) = (-1)^8 \begin{vmatrix} 18 & -2 & 7 \\ -2 & 4 & 1 \\ 6 & -12 & -3 \end{vmatrix} \tag{3}$$

A_{41} e A_{42} não vamos calcular pois $a_{41} = a_{42} = 0$.

Expandindo $det(M_{43}) = \begin{vmatrix} 18 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & -1 \\ 6 & -12 & 3 \end{vmatrix}$ em relação à primeira linha, por exemplo, temos:

$$det(M_{43}) = (18)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -12 & 3 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} + (5)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -12 \end{vmatrix}$$

$$= 18(0) - 2(0) + 5(0) = 0$$

De maneira análoga para $det(M_{44})$ temos

$$det(M_{44}) = \begin{vmatrix} 18 & -2 & 7 \\ -2 & 4 & 1 \\ 6 & -12 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (18)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -12 & -3 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} + 7(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -12 \end{vmatrix}$$
$$= 18(0) + (-2)(0) + 7(0) = 0$$

Logo, temos de (2) e (3) que

$$A_{43} = (-1)(0) = 0$$
$$A_{44} = (1)(0) = 0$$

Substituindo esses valores em (1) temos:

$$det(A) = 0(A_{41}) + 0(A_{42}) + (-1)(A_{43}) + 10(A_{44})$$
$$det(A) = 0 + 0 + (-1)(0) + 10(0)$$
$$det(A) = 0$$

2^a Questão) Solução:

a)

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z)$$

Por definição $N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / T(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$

Logo, de $(x+2y-z, y+2z, x+3y+z) = (0,0,0)$, temos que resolver o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x & +2y & -z = 0 \\ & +y & +2z = 0 \\ x & +3y & +z = 0 \end{cases}$$

Assim temos que $y = -2z$. Substituindo y por $-2z$ em L1 e L3 temos que $x = 5z$. Logo $N(T) = \{(5z, -2z, z); z \in \mathbb{R}\} = \{z(5,-2,1); z \in \mathbb{R}\}$ onde $\{(5,-2,1)\}$ é uma base para o núcleo e portanto $\dim N(T) = 1$.

Assim temos que $T(x)$ não é injetora, pois $N(T) \neq \{(0,0,0)\}$.

b) $Im(T) = \Big\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3; T(x,y,z) = (a,b,c)\Big\}$, isto é, $(a,b,c) \in Im(T)$ se existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$(x+2y-z, y+2z, x+3y+z) = (a,b,c)$$

Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} x & +2y & -z = a \\ & +y & +2z = b \\ x & +3y & +z = c \end{cases}$$

que terá solução se $a+b-c=0$.

Logo:

$$Im(T) = \Big\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / a+b-c=0\Big\}$$

Podemos observar que o vetor imagem $T(x,y,z)$ pode ser expresso como:

$$(x+2y-z, y+2z, x+3y+z) = (x,0,x) + (2y,y,3y) + (-z,2z,z)$$

ou

$$(x+2y-z, y+2z, x+3y+z) = x(1,0,1) + y(2,1,3) + z(-1,2,1)$$

Logo, qualquer vetor do conjunto imagem é combinação linear dos vetores $(1,0,1)$, $(2,1,3)$ e $(-1,2,1)$, e portanto:

$$Im(T) = [(1,0,1), (2,1,3), (-1,2,1)]$$

Podemos notar que: $T(1,0,0) = (1,0,1)$, $T(0,1,0) = (2,1,3)$ e $T(0,0,1) = (-1,2,1)$, donde concluímos que:

$$Im(T) = [T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1)]$$

isto é, a imagem dessa transformação é o subespaço gerado pelas imagens dos vetores da base canônica do domínio $\mathbb{R}^3$.

Pelo Teorema do Núcleo-Imagem, $\dim Im(T) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim N(T) = 3 - 1 = 2$. Logo, $Im(T) = \mathbb{R}^2$ e qualquer base de $\mathbb{R}^2$ é base de $Im(T)$. Uma delas é $\{(1,0,1), (2,1,3)\}$.

Além disso, T não é sobrejetora, pois $Im(T) \neq \mathbb{R}^3$, que é o contradomínio.

3^a Questão) Solução:

Vamos determinar uma matriz ortogonal Q que diagonaliza a matriz simétrica:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

A equação característica de A é:

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

isto é, desenvolvendo o determinante pela 1^a linha e observando a alternância dos sinais que precedem os produtos, obtemos:

$$(7-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -2 & 6-\lambda \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(7-\lambda)[(6-\lambda)(5-\lambda)-4] + 2[-2(5-\lambda)+0] + 0 = 0$$

$$(7-\lambda)(6-\lambda)(5-\lambda) - 28 + 4\lambda - 4(5-\lambda) = 0$$

$$(7-\lambda)(6-\lambda)(5-\lambda) - 28 + 4\lambda - 20 + 4\lambda = 0$$

$$(7-\lambda)(6-\lambda)(5-\lambda) - 48 + 8\lambda = 0$$

$$(7-\lambda)(6-\lambda)(5-\lambda) - 8(6-\lambda) = 0$$

$$(6-\lambda)[(7-\lambda)(5-\lambda)-8] = 0$$

$$(6-\lambda)(35-12\lambda+\lambda^2-8) = 0$$

$$(6-\lambda)(\lambda^2-12\lambda+27) = 0$$

$$(6-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-9) = 0$$

As raízes dessa equação são $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$ e $\lambda_3 = 9$, que são os autovalores da matriz A.

Cálculo dos autovetores v associados aos autovalores λ:

O sistema homogêneo de equações lineares que permite a determinação dos autovetores associados é: $(A - \lambda I)v = 0$.

Considerando

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

o sistema fica:

$$\begin{bmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

1. Substituindo λ_1 por 3 no sistema (4), obtemos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 3$.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

isto é,

$$\begin{cases} 4x & -2y & +0z = 0 \\ -2x & +3y & -2z = 0 \\ 0x & -2y & +2z = 0 \end{cases}$$

O sistema admite uma infinidade de soluções: $\begin{cases} y & = & 2x \\ z & = & 2x \end{cases}$

Assim, os vetores $v_1 = (x, 2x, 2x) = x(1, 2, 2)$ são os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 3$. Fazendo:

$$x = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{1}{3}$$

obtemos o autovetor unitário $u_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ associado a $\lambda_1 = 3$.

2. Substituindo λ_2 por 6 no sistema (4), obtemos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 6$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

isto é,

$$\begin{cases} 1x & -2y & +0z = 0 \\ -2x & +0y & -2z = 0 \\ 0x & -2y & -z = 0 \end{cases}$$

O sistema admite uma infinidade de soluções: $\begin{cases} y & = & \frac{1}{2}x \\ z & = & -x \end{cases}$

Assim, os vetores $v_2 = \left(x, \frac{1}{2}x, -x\right) = x\left(1, \frac{1}{2}, -1\right)$ são os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 6$. Fazendo:

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{2}{3}$$

obtemos o autovetor unitário $u_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ associado a $\lambda_2 = 6$.

3. Substituindo λ_3 por 9 no sistema (4), obtemos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = 9$.

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

isto é,

$$\begin{cases} -2x & -2y & +0z = 0 \\ -2x & -3y & -2z = 0 \\ 0x & -2y & -4z = 0 \end{cases}$$

O sistema admite uma infinidade de soluções: $\begin{cases} y & = & -x \\ z & = & \frac{1}{2}x \end{cases}$

Assim, os vetores $v_3 = \left(x, -x, \frac{1}{2}x\right) = x\left(1, -1, \frac{1}{2}\right)$ são os autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = 9$. Fazendo:

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{2}{3}$$

obtemos o autovetor unitário $u_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ associado a $\lambda_3 = 9$.

A matriz Q, cujas colunas são as componentes dos autovetores unitários u_1 , u_2 e u_3 associados aos autovalores λ_1 , λ_2 e λ_3 é ortogonal:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

De fato:

$$\begin{aligned}
u_1 \cdot u_1 &= \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = 1 \\
u_2 \cdot u_2 &= \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = 1 \\
u_3 \cdot u_3 &= \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = 1 \\
u_1 \cdot u_2 &= \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} - \frac{4}{9} = 0 \\
u_1 \cdot u_3 &= \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = 0 \\
u_2 \cdot u_3 &= \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = 0
\end{aligned}$$

A matriz Q é a matriz diagonalizadora. De fato:

$$D = Q^{-1}AQ = Q^t AQ$$

isto é,

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & -6 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$