Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP1 - Primeiro Semestre de 2012
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(2.0)1. Em cada item abaixo, determinar se os vetores dados geram $I\!R^3$, justificando a resposta.

(a) $v_1 = (1,1,1), v_2 = (2,2,1), v_3 = (3,0,0)$.

(b) $v_1 = (3,1,4), v_2 = (2,-3,5), v_3 = (7,-5,14)$, $v_4 = (4,5,3)$.

Solução:

(a) Sim, pois formando a matriz cujas colunas são os vetores dados e reduzindo-a a forma escalonada, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Como o posto da matriz é 3 e a dimensão de $I\!R^3$ também é, os vetores geram o $I\!R^3$.

(b) Não, pois formando a matriz cujas colunas são os vetores dados e reduzindo-a a forma escalonada, temos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 5 \\ 4 & 5 & 14 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 5 \\ 3 & 2 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 14 & 3 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 5 \\ 0 & 11 & 22 & -11 \\ 0 & 17 & 34 & -17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como o posto da matriz é 2 e a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3, os vetores não geram o $\mathbb{R}^3$.

(3.0)2. Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -7 & a \\ b & -5 \end{bmatrix}$$

(1.0)a. Calcular a e b para que a matriz (AB) seja igual a matriz identidade.

(1.0)b. Calcular a e b para que a matriz (B^2) seja igual a matriz

$$\begin{bmatrix} 61 & -36 \\ -48 & 37 \end{bmatrix}.$$

(1.0)c. Considerando agora $a = 2$ e $b = 4$ calcular $(AB)^T$.

Solução:

(a) Efetuando o produto AB, temos

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -7 & a \\ b & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35 + 9b & 5a - 45 \\ -28 + 7b & 4a - 35 \end{bmatrix}$$

Para termos $AB = I$, ou seja,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

devemos ter

$$\begin{aligned} -35 + 9b &= 1 \\ 5a - 45 &= 0 \\ -28 + 7b &= 0 \\ 4a - 35 &= 1 \end{aligned}$$

ou seja, $a = 9$ e $b = 4$.

(b)

$$B^2 = \begin{bmatrix} -7 & a \\ b & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -7 & a \\ b & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 + ab & -12a \\ -12b & ab + 25 \end{bmatrix}.$$

Portanto, devemos ter

$$\begin{bmatrix} 49+ab & -12a \\ -12b & ab+25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61 & -36 \\ -48 & 37 \end{bmatrix},$$

o que implica em $a = 3$ e $b = 4$.

(c) Neste caso, temos

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -35 \\ 0 & -27 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -35 & -27 \end{bmatrix}.$$

(3.0)3. Determine a dimensão e uma base para cada espaço vetorial abaixo:

(a)
$$S = \{(x, y, z, w) \in I\!R^4 | x + 2y - z + w = 0\}$$

(b)
$$S = \{(x, y, z) \in I\!R^3 | 2x + y + z = 0,\ x - y = 0\}$$

Solução:

(a) Isolando w na equação de definição, tem-se: $w = -x - 2y + z$, onde x, y e z são variáveis livres. Qualquer vetor $(x, y, z, w) \in S$ tem a forma: $(x, y, z, -x - 2y + z)$ e, portanto, podemos escrever:

$$(x, y, z, w) = (x, y, z, -x - 2y + z)$$

ou

$$(x, y, z, w) = (x, 0, 0, -x) + (0, y, 0, -2y) + (0, 0, z, z)$$

ou

$$(x, y, z, w) = x(1, 0, 0, -1) + y(0, 1, 0, -2) + z(0, 0, 1, 1)$$

isto é, todo vetor de S é combinação linear dos vetores $(1, 0, 0, -1)$, $(0, 1, 0, -2)$ e $(0, 0, 1, 1)$. Como esses três vetores geradores de S são L.I., o conjunto $\{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -2), (0, 0, 1, 1)\}$ é uma base de S e, consequentemente, dim$S$=3.

(b) Da segunda equação tem-se $x = y$. Isolando z na equação de definição, tem-se: $z = -2x - y$, ou seja $z = -3x$. onde x é variável livre. Qualquer vetor $(x, y, z) \in S$ tem a forma: $(x, x, -3x)$ e, portanto, podemos escrever:

$$(x, y, z) = (x, x, -3x) \text{ ou } (x, y, z) = x(1, 1, -3)$$

isto é, todo vetor de S é um múltiplo do vetor $(1, 1, -3)$. Como esse vetor gera S, o conjunto $\{(1, 1, -3)\}$ é uma base de S e, consequentemente, dim$S$=1.

(2.0)4. Encontre uma base ortonormal para o espaço coluna da matriz A abaixo, utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solução: As colunas de A são linearmente independentes e, portanto, formam uma base para um subespaço tridimensional de $\Re^4$. Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, pode-se construir uma base ortonormal da seguinte forma:
Defina:

$r_{11} = ||a_1|| = 2$
$q_1 = \frac{1}{r_{11}} a_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$
$r_{12} = < a_2, q_1 > = q_1^T a_2 = 3$
$p_1 = r_{12} q_1 = 3q_1$
$a_2 - p_1 = (-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2})^T$
$r_{22} = ||a_2 - p_1|| = 5$
$q_2 = \frac{1}{r_{22}}(a_2 - p_1) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$
$r_{13} = < a_3, q_1 > = q_1^T a_3 = \frac{3}{2}$, $r_{23} = < a_3, q_2 > = q_2^T a_3 = -\frac{3}{2}$
$p_2 = r_{13} q_1 + r_{23} q_2 = (\frac{3}{2}, 0, 0, \frac{3}{2})^T$
$a_3 - p_2 = (\frac{3}{2}, -2, 2, -\frac{3}{2})^T$
$r_{33} = ||a_3 - p_2|| = \frac{5}{\sqrt{2}}$
$q_3 = \frac{1}{r_{33}}(a_3 - p_2) = (\frac{3\sqrt{2}}{10}, -\frac{2\sqrt{2}}{5}, \frac{2\sqrt{2}}{5}, -\frac{3\sqrt{2}}{10})^T$

Os vetores q_1, q_2, q_3 formam uma base ortonormal para o espaço coluna de A.