Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP3 - Segundo Semestre de 2017
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(3.0)1. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 & - & x_2 & + & \alpha x_3 = & -2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & \alpha x_3 = & 3 \\ \alpha x_1 & + & x_2 & + & x_3 = & 2 \end{cases}$$

(2.0)a. Determine a sua solução (em função de α), considerando $|\alpha| \neq 1$.

(1.0)b. Determine para que valor de α este sistema não tem solução. Justifique.

Solução:

Apliquemos inicialmente operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada correspondente ao sistenma dado, como no método de eliminação de Gauss.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha & -2 \\ -1 & 2 & -\alpha & 3 \\ \alpha & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L2 \leftarrow L1 + L2$ e $L3 \leftarrow \alpha L1 - L3$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha - 1 & \alpha^2 - 1 & -2\alpha - 2 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L3 \leftarrow L3 - L2(-\alpha - 1)$ temos:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & \alpha & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - 1 & -\alpha - 1 \\ & & & \end{array}\right]$$

(a) Considerando $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -1$, temos pela linha 3, que $x_3 = \frac{-\alpha-1}{\alpha^2-1} = \frac{-1}{\alpha-1}$. Pela linha 2 temos que $x_2 = 1$. Substituindo x_2 e x_3 na linha 1 temos:

$x_1 - 1 - \frac{\alpha}{\alpha-1} = -2$

Resolvendo essa equação temos que $x_1 = \frac{1}{\alpha-1}$.

Neste caso, portanto, a solução do sistema é $(\frac{1}{\alpha-1}, 1, \frac{-1}{\alpha-1})$.

(b) O sistema original não terá solução única se o determinante das matrizes de coeficientes dos sistemas representados acima for igual a zero, isto é, se $\alpha^2 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1$ ou $\alpha = -1$.

Se $\alpha = 1$ a linha 3 do último sistema não pode ser satisfeita, indicando que o sistema não tem solução.

(3.0)2. Seja $S = \{(x, y, z) \in I\!R^3 / z = 2x - y\}$ e considere as operações usuais de adição e multiplicação por escalar.

(a) Prove que S é uma subespaço vetorial do $I\!R^3$.

Solução:

i. $0 = (0, 0, 0) \in S$, pois $0 = 2.(0) - 0 = 0$

ii. Sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ pertencentes a S. Logo $z_1 = 2x_1 - y_1$ e $z_2 = 2x_2 - y_2$.

Somando as igualdades tem-se que

$$z_1 + z_2 = (2x_1 - y_1) + (2x_2 - y_2) = 2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) \in S$$

Assim $(u + v) \in S$.

iii. Seja α um escalar e $u \in S$. Então $z_1 = 2x_1 - y_1$. Logo

$$\alpha z_1 = \alpha(2x_1 - y_1) = 2(\alpha x_1) - \alpha y_1,$$

ou seja $\alpha u \in S$.

Das condições anteriores, resulta que o conjunto S satisfaz todas as propriedades de um subespaço vetorial.

(b) Determine uma base para S e sua dimensão (dim S).
Solução: Temos que

$$\begin{aligned}(x, y, z) = (x, y, 2x - y) &= (x, 0, 2x) + (0, y, -y) \\ &= x(1, 0, 2) + y(0, 1, -1)\end{aligned}$$

Logo $B = \{(1, 0, 2); (0, 1, -1)\}$ gera o subespaço vetorial S.
Mostraremos que os vetores, além de gerar S também são LI.
De fato, seja α_1 e α_2 escalares. Considere a combinação linear:

$$\alpha_1(1, 0, 2) + \alpha_2(0, 1, -1) = (\alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_1 - \alpha_2) = (0, 0, 0)$$

Resolvendo o sistema, obtemos que a única solução possível é $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.
Portanto os vetores são LI e assim o conjunto B é uma das infinitas bases de S e dim(S)=2.

(c) Complemente a base de S, de tal forma a obter uma base para o espaço vetorial $I\!R^3$.

Solução: Devemos determinar um vetor (x, y, z) que não possa ser escrito como combinação linear dos vetores de B. Sejam os escalares α_1 e α_2 e tal que

$$(x, y, z) = \alpha_1(1, 0, 2) + \alpha_2(0, 1, -1) = (\alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_1 - \alpha_2)$$

Logo temos o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \alpha_1 & & & = & x \\ & & \alpha_2 & = & y \\ 2\alpha_1 & - & \alpha_2 & = & z \end{array}\right.$$

Assim o vetor (x, y, z) complementa S em relação ao espaço vetorial $I\!R^3$, se não satisfaz as três equações simultaneamente, como por exemplo: $v_3 = (x, y, z) = (0, 1, 2)$. Assim v_3 não pode ser escrito como combinação linear dos vetores de B, ou seja, v_3 é linearmente independente em relação aos dois vetores de B, e portanto $\widehat{B} = \{(1, 0, 2); (0, 1, -1); (0, 1, 2)\}$ é uma base do $I\!R^3$.

(2.0)3. Calcule o determinante da matriz A usando a expansão de cofatores (Fórmula de Laplace),

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: Podemos expandir o determinante em relação à uma linha ou coluna. É claro que é melhor expandir em relação a uma linha ou coluna que tenha o maior número de zeros, já que, nesse caso, os cofatores A_{ij} dos a_{ij} que são nulos não precisam ser calculados, uma vez que $a_{ij}A_{ij} = 0$. Expandindo, então, em relação à segunda linha, obtemos:

$$det(A) = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} = a_{23}A_{23},$$

pois $a_{21} = a_{22} = a_{24} = 0$. Mas sabemos que $A_{ij} = (-1)^{i+j}det(M_{ij})$, onde M_{ij} é o determinante menor de a_{ij}. Mas

$$A_{23} = (-1)^{2+3}det(M_{23}) = (-1)det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando a regra prática para calcular o determinante da matriz 3×3, obtemos que $(detM_{23}) = \{-2 + 0 - 15\} - \{6 + 12 + 0\} = -35$. Assim $A_{23} = (-1)det(M_{23}) = 35$. Logo

$$det(A) = a_{23}.A_{23} = -2.(35) = -70$$

(2.0)4. Em cada item abaixo, determinar se os vetores dados geram $\mathbb{R}^3$, justificando a resposta.

(a) $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (2, 2, 1), v_3 = (3, 0, 0)$.

(b) $v_1 = (3, 1, 4), v_2 = (2, -3, 5), v_3 = (7, -5, 14)$, $v_4 = (4, 5, 3)$.

Solução:

(a) Sim, pois formando a matriz cujas colunas são os vetores dados e reduzindo-a a forma escalonada, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Como o posto da matriz é 3 e a dimensão de $I\!R^3$ também é, os vetores geram o $I\!R^3$.

(b) Não, pois formando a matriz cujas colunas são os vetores dados e reduzindo-a a forma escalonada, temos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 5 \\ 4 & 5 & 14 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 5 \\ 3 & 2 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 14 & 3 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 5 \\ 0 & 11 & 22 & -11 \\ 0 & 17 & 34 & -17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como o posto da matriz é 2 e a dimensão de $I\!R^3$ é 3, os vetores não geram o $I\!R^3$.