Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP1 - Primeiro Semestre de 2014
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

1.(3.0) Considere o conjunto $B = \{v_1, v_2\}$, onde $v_1 = (1, 2, 3)$ e $v_2 = (-5, 1, 1)$.

(a) Calcule o módulo de v_1.
Solução:
$|v_1| = \sqrt{(1^2 + 2^2 + 3^2)} = \sqrt{(1 + 4 + 9)} = \sqrt{14}$.

(b) Calcule a distância $d(v_1, v_2) = |v_1 - v_2|$
Solução:
$d(v_1, v_2) = \sqrt{(-5 - 1)^2 + (1 - 2)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{36 + 1 + 4} = \sqrt{41}$.

(c) Calcule o ângulo formado por v_1 e v_2.
Solução:
Seja θ o ângulo entre os vetores v_1 e v_2.
$cos(\theta) = \frac{v_1.v_2}{|v_1|.|v_2|}$.
Do item (a), $|v_1| = \sqrt{14}$.
$|v_2| = \sqrt{(-5)^2 + 1^2 + 1^2)} = \sqrt{(25 + 1 + 1)} = \sqrt{27}$.
$v_1.v_2 = 1 \times (-5) + 2 \times 1 + 3 \times 1 = -5 + 2 + 3 = 0$.
$cos(\theta) = \frac{0}{\sqrt{14}.\sqrt{27}} = 0 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$.

2.(2.0) Seja $v_1 = (1, -3, 2)$ e $v_2 = (2, 4, -1)$, dois vetores em $I\!R^3$. Determinar o valor de k para que o vetor $u = (-1, k, -7)$ seja combinação linear de v_1 e v_2.

Solução:

Devemos ter $u = av_1 + bv_2$, para $a, b \in I\!R$, ou

$$(-1, k, -7) = a(1, -3, 2) + b(2, 4, -1)$$

De onde vem o sistema

$$\begin{cases} a & + & 2b & = & -1 \\ -3a & + & 4b & = & k \\ 2a & - & b & = & -7 \end{cases}$$

o qual tem solução apenas se $k = 13$, já que das linhas 1 e 3, obtemos $a = -3$ e $b = 1$.

3.(2.0) Determinar uma base que não seja ortogonal do seguinte subspaço vetorial do $I\!R^3$.

$$S = \{(x, y, z) \in I\!R^3 | x + y - z = 0\}$$

Em seguida, aplicar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt a base, para obter uma nova base ortonormal para S.

Solução:

Observemos que dim$S$=2 e, portanto, uma base de S tem dois vetores. Isolando x na igualdade $x + y - z = 0$, temos $x = -y + z$. Se fizermos (1) $y = 0$ e $z = 1$, (2) $y = 1$ e $z = 0$, obteremos os vetores $v_1 = (1, 0, 1)$ e $v_2 = (-1, 1, 0)$, sendo $B = \{v_1, v_2\}$ uma base de S, pois v_1 e v_2 são LI. Como $< v_1, v_2 >= -1$, B não é ortogonal. Procuremos uma base $B' = \{u_1, u_2\}$ que seja ortonormal aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{(1, 0, 1)}{\sqrt{2}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$w_2 = v_2 - < v_2, u_1 > u_1 = (-1, 1, 0) - (-\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$w_2 = (-1, 1, 0) - (-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$$

$$u_2 = \frac{w_2}{|w_2|} = \frac{(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$$

Logo, $B' = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})\}$ é uma base ortonormal de S.

4.(3.0) Sabe-se que uma alimentação saudável diária equilibrada em vitaminas deve constar de 170 unidades(u) de vitamina A, 180u de vitamina B, 140u de vitamina C e 180u de vitamina D. Com o objetivo de descobrir como deverá ser uma refeição equilibrada, foram estudados 4 alimentos. Fixada a mesma quantidade (1g) de cada alimento, determinou-se que:

(a) o alimento I tem 1u de vitamina A, 1u de B, 0u de C e 1u de D.

(b) o alimento II tem 9u de vitamina A, 1u de B, 0u de C e 1u de D.

(c) o alimento III tem 2u de vitamina A, 2u de B, 5u de C e 1u de D.

(d) o alimento IV tem 1u de vitamina A, 1u de B, 1u de C e 9u de D.

Determine quantos gramas de cada um dos alimentos I, II, III e IV devemos ingerir diariamente para que nossa alimentação seja equilibrada, formulando a questão através de um sistema linear de equações e resolvendo-o pelo método de redução de de Gauss-Jordan.

Solução: Devemos encontrar a solução do sistema linear de equações

$$Ax = b,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 170 \\ 180 \\ 140 \\ 180 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss ao sistema $Ax = b$, temos:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 9 & 2 & 1 & 170 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 180 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 140 \\ 1 & 1 & 1 & 9 & 180 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 9 & 2 & 1 & 170 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 140 \\ 0 & -8 & -1 & 8 & 10 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 9 & 2 & 1 & 170 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 140 \\ 0 & 0 & -1 & 8 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 9 & 2 & 1 & 170 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 140 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{41}{5} & 28 \end{array}\right]$$

Da segunda equação deste sistem linear, obtemos $x_2 = \frac{10}{-8} = -1,25$. Portanto concluímos que não é possível obter o equilíbrio desejado com a mistura dos alimentos referidos.