Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
AD1 - Primeiro Semestre de 2007
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

Nome -
Assinatura -

1.(5.0) *Cada item vale* 0.5 *ponto.*

Considere a matriz formada pelos vetores colunas:

$$A = [v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule o módulo (comprimento) de cada vetor da matriz A.

(b) A partir dos vetores $v_i \in A$, determine uma matriz U cujos vetores colunas $u_i,\ i = 1, 2, 3$ são unitários.

(c) Calcule a distância $d(v_1, v_2) = |v_1 - v_2|$

(d) Verifique se existem vetores de A, dois a dois, que são ortogonais ou paralelos.

(e) Calcule o ângulo formado pelos vetores $\{v_2, v_3\}$ de A.

(f) Mostre o que o vetor v_3 é uma combinação linear dos vetores $\{v_1, v_2, v_4\}$ de A.

(g) Calcule o determinante da submatriz B de A formada pelos vetores $\{v_1, v_2, v_4\}$ de A.

(h) Determine um subespaço S do $I\!R^3$ gerado pelos vetores $\{v_1, v_3, v_4\}$ de A e determine uma base B de S.

(i) Usando o processo de Gram-Schmidt, determine a partir da base B, uma base ortogonal de S.

(j) Determine a partir de B uma base ortonormal de S.

2.(2.0) Seja $S = \{(x, y, z) \in I\!R^3 / x - y + 2z = 0\}$. Verifique se S é uma subespaço vetorial do $I\!R^3$, relativamente às operações usuais de adição e multiplicação por escalar e em caso afirmativo determine uma base para S.

3.(1.0) Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Prove que A é não singular se e somente se as colunas (ou linhas) de A são linearmente independentes.

4.(2.0) Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

a.(1.0) Resolva-o, se possível, método de Gauss-Jordan.

b.(1.0) O que podemos afirmar, em relação a resolução do sistema, se substituirmos somente a terceira linha do sistema, pela linha

$$x_1 - 6x_2 - 9x_3 = 9$$

Gabarito

Álgebra Linear: AD1 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2007

Tutores: Rodrigo Olimpio e Cristina Lopes

1) Considere o conjunto $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, onde $v_1 = (0,1,4)$; $v_2 = (-1,2,0)$; $v_3 = (-2,1,0)$; $v_4 = (1,0,2)$.

a)

$|v_1| = \sqrt{(0^2+1^2+4^2)} = \sqrt{(0+1+16)} = \sqrt{17}.$

$|v_2| = \sqrt{((-1)^2+2^2+0^2)} = \sqrt{(1+4+0)} = \sqrt{5}.$

$|v_3| = \sqrt{((-2)^2+1^2+0^2)} = \sqrt{(4+1)} = \sqrt{5}.$

$|v_4| = \sqrt{(1^2+0^2+2^2)} = \sqrt{(1+4)} = \sqrt{5}.$

b) Basta dividir os vetores pelos respectivos módulos. Assim, temos:

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{-2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{17}}{17} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{4\sqrt{17}}{17} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

para v_i onde $i = 1,2,3$.

c) Por definição, para vetores $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$, temos que

$$d(v_1, v_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}.$$

Assim, $d(v_1, v_2) = \sqrt{(0-(-1))^2 + (1-2)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$

Logo $d(v_1, v_2) = |v_1 - v_2| = 3\sqrt{2}.$

d) i) v_1 e v_2

$v_1.v_2 = 0 \times (-1) + 1 \times 2 + 4 \times 0 = 0 + 2 + 0 = 2 \neq 0 \Longrightarrow v_1$ e v_2 não são ortogonais.

Verifiquemos se são paralelos:

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{0}{-1} = 0, \frac{y_1}{y_3} = \frac{1}{2}, \frac{z_1}{z_3} = \frac{4}{0},$$

isto é, as coordenadas de v_1 e v_2 não são proporcionais $\Longrightarrow v_1$ e v_2 não são paralelos.

ii) v_1 e v_3

$v_1.v_3 = 0 \times (-2) + 1 \times 1 + 4 \times 0 = 1 \neq 0 \Longrightarrow v_1$ e v_3 não são ortogonais.

Verifiquemos se são paralelos:

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{0}{-2} = 0, \frac{y_1}{y_3} = \frac{1}{1} = 1, \frac{z_1}{z_3} = \frac{4}{0},$$

isto é, as coordenadas de v_1 e v_3 não são proporcionais $\Longrightarrow v_1$ e v_3 não são paralelos.

iii) v_2 e v_3

$v_2.v_3 = (-1) \times (-2) + 2 \times 1 + 0 \times 0 = 4 \neq 0 \Longrightarrow v_2$ e v_3 não são ortogonais.

Verifiquemos se são paralelos :

$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{-1}{-2}, \frac{y_2}{y_3} = \frac{2}{1} = 2, \frac{z_2}{z_3} = \frac{0}{0}$$

$\Longrightarrow v_2$ e v_3 não são paralelos.

iv) v_1 e v_4

$v_1.v_4 = 0 \times 1 + 1 \times 0 + 4 \times 2 = 8 \neq 0 \Longrightarrow v_1$ e v_4 não são ortogonais.

Verifiquemos se são paralelos :

$$\frac{x_1}{x_4} = \frac{0}{1}, \frac{y_1}{y_4} = \frac{1}{0}, \frac{z_1}{z_4} = \frac{4}{2}$$

$\Longrightarrow v_1$ e v_4 não são paralelos.

v) v_2 e v_4

$v_2.v_4 = (-1) \times 1 + 2 \times 0 + 0 \times 2 = -1 \neq 0 \Longrightarrow v_2$ e v_4 não são ortogonais.

Verifiquemos se são paralelos :

$$\frac{x_2}{x_4} = \frac{-1}{1}, \frac{y_2}{y_4} = \frac{2}{0}, \frac{z_2}{z_4} = \frac{0}{2}$$

$\Longrightarrow v_2$ e v_4 não são paralelos.

vi) v_3 e v_4

$v_3.v_4 = (-2) \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 2 = -2 \neq 0 \Longrightarrow v_3$ e v_4 não são ortogonais.

Verifiquemos se são paralelos :

$$\frac{x_3}{x_4} = \frac{-2}{1}, \frac{y_3}{y_4} = \frac{1}{0}, \frac{z_3}{z_4} = \frac{0}{2}$$

$\Longrightarrow v_3$ e v_4 não são paralelos.

e) Seja θ o ângulo entre os vetores v_2 e v_3.
$cos(\theta) = \dfrac{v_2.v_3}{|v_2|.|v_3|} = \dfrac{4}{\sqrt{5}.\sqrt{5}} = \dfrac{4}{5} \Longrightarrow \theta = arcos\dfrac{4}{5}$.

f) Sejam Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$(-2, 1, 0) = \alpha_1(0, 1, 4) + \alpha_2(-1, 2, 0) + \alpha_3(1, 0, 2)$. Assim temos que resolver o seguinte sistema linear, que na forma de matriz aumentada pode ser escrita por

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & | & -2 \\ 4 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L3 \leftarrow L3 - 4 \times L1$ temos:

$$[A|b]^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & -2 & 1 & | & -2 \\ 0 & -8 & 2 & | & -4 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L3 \leftarrow L3 - 4 \times L2$ temos:

$$[A|b]^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & -2 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & -2 & | & 4 \end{bmatrix}$$

Da última equação, concluímos que $\alpha_3 = -2$. Usando esse valor na penúltima equação conclui-se que $\alpha_2 = 0$ e usando esses valores na primeira equação deduzimos que $\alpha_1 = 1$. Portanto a solução do sistema é dada por $\alpha = \{1, 0, -2\}$. Logo a combinação linear é dada por

$$(-2, 1, 0) = 1(0, 1, 4) + 0(-1, 2, 0) - 2(1, 0, 2).$$

g)

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

det(B)=$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}) = (0+0+0) - (8+0+(-2)) = -6$

h) Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que $(x, y, z) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_3 + \alpha_3 v_4$. Substituindo os vetores temos:

$(x, y, z) = (-2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, 4\alpha_1 + 2\alpha_3)$. Assim temos que resolver o seguinte sistema linear, que na forma de matriz aumentada pode ser escrita por

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & y \\ 0 & -2 & 1 & | & x \\ 4 & 0 & 2 & | & z \end{bmatrix}$$

Fazendo $L3 \leftarrow L3 - 4 \times L1$ temos:

$$[A|b]^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & y \\ 0 & -2 & 1 & | & x \\ 0 & -4 & 2 & | & z - 4y \end{bmatrix}$$

Fazendo $L3 \leftarrow L3 - 2 \times L2$ temos:

$$[A|b]^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & y \\ 0 & -2 & 1 & | & x \\ 0 & 0 & 0 & | & z - 4y - 2x \end{bmatrix}$$

Logo o sistema somente admite solução se $z - 4y - 2x = 0$, ou seja, para

$z = 2x + 4y$. Logo $S = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 2x + 4y\Big\}$, ou seja,

$S = \Big\{\Big(x, y, 2x + 4y\Big) \in \mathbb{R}^3\Big\}$.

Vamos determinar agora uma base para S.

Os vetores $v \in S$ são da forma $v = (x, y, 2x + 4y) = x(1, 0, 2) + y(0, 1, 4)$. Assim os vetores $[u_1, u_2] = [(1, 0, 2); (0, 1, 4)]$ geram o espaço vetorial S. Vamos verificar se são LI:

De fato

$$\alpha_1(1, 0, 2) + \alpha_2(0, 1, 4) = (\alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_1 + 4\alpha_2) = (0, 0, 0)$$

Logo se conclui que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ é a solução única do sistema. Portanto os vetores $\{u_1, u_2\}$ são LI e como são geradores de S, formam uma base para S.

i) Seja $w_1 = u_1 = (1, 0, 2)$.

Assim, temos:

$$\begin{aligned} w_2 = u_2 - \left(\frac{u_2.w_1}{w_1.w_1}\right).w_1 &= (0, 1, 4) - \left(\frac{(0, 1, 4).(1, 0, 2)}{(1, 0, 2)(1, 0, 2)}\right).(1, 0, 2) \\ &= (0, 1, 4) - \tfrac{8}{5}(1, 0, 2) = (-\tfrac{8}{5}, 1, \tfrac{4}{5}) \end{aligned}$$

Logo uma base ortogonal é $\{(w_1, w_2)\} = \left\{(1, 0, 2), (-\frac{8}{5}, 1, \frac{4}{5})\right\}$.

j) $|w_1| = \sqrt{(1)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$|w_2| = \sqrt{(\frac{-8}{5})^2 + 1^2 + (\frac{4}{5})^2} = \sqrt{\frac{105}{25}} = \frac{\sqrt{105}}{5}$.

Logo basta dividirmos os vetores da base ortogonal pela sua respectiva norma. Assim, temos a seguinte base ortonormal:

$$\left\{\frac{\sqrt{5}}{5}(1, 0, 2); \frac{\sqrt{105}}{21}(-\frac{8}{5}, 1, \frac{4}{5})\right\}.$$

2^a Questão) Solução:

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\}$

Se S é subespaço. S não é vazio: (0, 0, 0) pertence à S pois $0 - 0 + 2.0 = 0$.

E as duas condições abaixo são satisfeitas: Sejam u_1 e u_2 pertencentes a S. Então eles podem ser escritos na forma

$u_1 = (x_1, x_1 + 2z_1, z_1)$ e $u_2 = (x_2, x_2 + 2z_2, z_2)$

Então devemos mostrar que $u_1 + u_2 \in S$ e $\alpha_1 u_1 \in S$, para todo escalar α_1.

De fato

$$\text{(i)} \quad \begin{aligned} u_1 + u_2 &= (x_1, x_1 + 2z_1, z_1) + (x_2, x_2 + 2z_2, z_2) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2 + 2(z_1 + z_2), z_1 + z_2) \\ &= (x, x + 2z, z) \in S \end{aligned}$$

(ii) $\alpha_1 u_1 = \alpha_1(x_1, x_1 + 2z_1, z_1) = (\alpha_1 x_1, \alpha_1(x_1 + 2z_1), \alpha_1 z_1) = (x, x + 2z, z) \in S$

Mostraremos agora que S tem uma base:

Se $(x, y, z) \in S \Rightarrow (x, y, z) = \Big(x, y, \dfrac{y-x}{2}\Big) = x\Big(1, 0, \dfrac{-1}{2}\Big) + y\Big(0, 1, \dfrac{1}{2}\Big)$. Então, todo vetor de S é combinação linear dos vetores $\Big(1, 0, \dfrac{-1}{2}\Big)$ e $\Big(0, 1, \dfrac{1}{2}\Big)$. Vejamos que esses vetores são linearmente independentes:

$$\alpha\Big(1, 0, \frac{-1}{2}\Big) + \beta\Big(0, 1, \frac{1}{2}\Big) = 0$$

Então temos:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \frac{\alpha - \beta}{2} = 0$$

Logo o conjunto $\Big\{\Big(1, 0, \dfrac{-1}{2}), (0, 1, \dfrac{1}{2}\Big)\Big\}$ é uma base de S.

3^a Questão) Solução:

Seja A uma matriz quadrada de ordem n.

Como A é não singular então a solução trivial é a única solução para o sistema linear homogêneo $Ax = 0$. Temos que mostrar que as colunas (ou linhas) de A são linearmente independentes. Mas $Ax = 0$ pode ser escrito na forma coluna dada por

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} x_{11} + \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} x_{21} + ... + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} x_{n1} = 0$$

Mas $Ax = 0$. Como a matriz A não é identicamente nula temos que $x_{11}, ..., x_{n1} = 0$ (solução trivial). Logo as colunas de A sao LI's.

$(\Longleftarrow)$

Como as colunas de A são L. I.'s então $Ax = 0$ implica que $x_{11}, ..., x_{n1} = 0$. Logo esta é a única solução para esse sistema (solução trivial). Assim, temos pelo teorema da implicação anterior que A é não singular.

4^a Questão) Solução:

Considere o sistema

$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -3 \\
3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\
-x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3
\end{cases}
\tag{1}
$$

a) Método de Gauss-Jordan

O sistema linear acima pode ser representado por:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

1^a Etapa) Formaremos a matriz aumentada $[A|b]$. A matriz aumentada é dada por:

$$
[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & -3 \\ 3 & -2 & -4 & | & 0 \\ -1 & -2 & -3 & | & 3 \end{bmatrix}
$$

2^a Etapa) Transformaremos a matriz aumentada à sua forma escada reduzida por linhas, usando operações elementares em suas linhas.

Fazendo $L_2 \leftrightarrow L_2 - 3L_1$, $L_3 \leftrightarrow L_3 + L_1$, obtemos

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & -3 \\ 0 & -8 & -13 & | & 9 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}
$$

Multiplicando L_2 por $-1/8$, encontramos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & -3 \\ 0 & 1 & 13/8 & | & -9/8 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

E finalmente, fazendo $L_1 \leftrightarrow L_1 - 2L_2$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/4 & | & -3/4 \\ 0 & 1 & 13/8 & | & -9/8 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

O sistema linear correspondente à matriz (2) na forma escada reduzida por linhas é dado por:

$$\begin{cases} x_1 \qquad - \dfrac{x_3}{4} = \dfrac{-3}{4} \\ \qquad x_2 + \dfrac{13x_3}{8} = \dfrac{-9}{8} \end{cases} \tag{3}$$

e tem exatamente as mesmas soluções do sistema original (1).

3^a Etapa) Resolver o sistema linear obtido na Etapa 2.

Resolvendo cada equação para a incógnita correspondente ao primeiro elemento não-nulo de cada linha não-nula do sistema linear (3), temos:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-3 + r}{4} \\ x_2 = \dfrac{-9 - 13r}{8} \\ x_3 = r \end{cases} \tag{4}$$

onde r é um número real arbitrário.

Logo (4) é a solução do sistema linear dado (1). Como r pode assumir qualquer valor real, o sistema dado (1) e tem uma infinidade de soluções (o sistema é compatível e indeterminado).

b) Trocando a terceira linha do sistema (1) temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & -6 & -9 & 9 \end{bmatrix}$$

Agora se fizermos $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -8 & -13 & 9 \\ 0 & -8 & -12 & 12 \end{bmatrix}$$

Multiplicando L_2 por $-1/8$, fazendo $L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2$ e $L_1 \leftrightarrow L_1 - 2L_2$, encontramos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/4 & -3/4 \\ 0 & 1 & 13/8 & -9/8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

E finalmente, fazendo $L_1 \leftrightarrow L_1 + L_3/4$ e $L_2 \leftrightarrow L_2 - 13L_3/8$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Logo a solução do sistema é dada por $x = (x_1, x_2, x_3) = (0, -6, 3)$.