Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP2 - Segundo Semestre de 2014
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(3.0)1. Considere o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & \alpha x_3 & = & -2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & \alpha x_3 & = & 3 \\ \alpha x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

(2.0)a. Determine a sua solução (em função de α), considerando $|\alpha| \neq 1$.

(1.0)b. Determine para que valor de α este sistema não tem solução. Justifique.

Solução:

Apliquemos inicialmente operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada correspondente ao sistenma dado, como no método de eliminação de Gauss.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha & -2 \\ -1 & 2 & -\alpha & 3 \\ \alpha & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L2 \leftarrow L1 + L2$ e $L3 \leftarrow \alpha L1 - L3$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha - 1 & \alpha^2 - 1 & -2\alpha - 2 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L3 \leftarrow L3 - L2(-\alpha - 1)$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - 1 & -\alpha - 1 \\ \end{bmatrix}$$

(a) Considerando $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -1$, temos pela linha 3, que $x_3 = \frac{-\alpha-1}{\alpha^2-1} = \frac{-1}{\alpha-1}$. Pela linha 2 temos que $x_2 = 1$. Substituindo x_2 e x_3 na linha 1 temos:

$x_1 - 1 - \frac{\alpha}{\alpha-1} = -2$

Resolvendo essa equação temos que $x_1 = \frac{1}{\alpha-1}$.

Neste caso, portanto, a solução do sistema é $(\frac{1}{\alpha-1}, 1, \frac{-1}{\alpha-1})$.

(b) O sistema original não terá solução única se o determinante das matrizes de coeficientes dos sistemas representados acima for igual a zero, isto é, se $\alpha^2 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1$ ou $\alpha = -1$.

Se $\alpha = 1$ a linha 3 do último sistema não pode ser satisfeita, indicando que o sistema não tem solução.

(3.0)2. Considere o espaço vetorial das matrizes reais, quadradas de ordem 2, $M_2(I\!R)$. Determine se cada uma das transformações abaixo é ou não linear. Justifique sua resposta.

(1.5)a. $T : M_2(I\!R) \rightarrow I\!R, \;\; tal \;\; que$

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right).$$

Solução: Temos que verificar se

$T(\alpha A_1 + \beta A_2) = \alpha T(A_1) + \beta T(A_2), \; \forall A_1, A_2 \in M_2(I\!R), \forall \alpha, \beta \in I\!R.$

Façamos então

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \;\; e \;\; A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}.$$

$$
\begin{aligned}
T(\alpha A_1 + \beta A_2) &= T\left(\alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{vmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 & \alpha b_1 + \beta b_2 \\ \alpha c_1 + \beta c_2 & \alpha d_1 + \beta d_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 + \beta b_2 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 + \beta d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta a_2 & \alpha b_1 + \beta b_2 \\ \beta c_2 & \alpha d_1 + \beta d_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha a_1 & \beta b_2 \\ \alpha c_1 & \beta d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta a_2 & \alpha b_1 \\ \beta c_2 & \alpha d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta a_2 & \beta b_2 \\ \beta c_2 & \beta d_2 \end{vmatrix} \\
&= \alpha^2 |A_1| + \alpha\beta \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ c_1 & d_2 \end{vmatrix} + \alpha\beta \begin{vmatrix} a_2 & b_1 \\ c_2 & d_1 \end{vmatrix} + \beta^2 |A_2| \\
&= \alpha^2 |A_1| + \beta^2 |A_2| + \alpha\beta \left(\begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ c_1 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_1 \\ c_2 & d_1 \end{vmatrix} \right) \\
&\neq \alpha T(A_1) + \beta T(A_2).
\end{aligned}
$$

Logo, T não é uma transformação linear.

(1.5)b. $T : M_2(I\!R) \to I\!R, \;\; tal \;\; que$

$$
T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 2a + 3b + c - d.
$$

Solução: Temos que verificar se

$$
T(\alpha A_1 + \beta A_2) = \alpha T(A_1) + \beta T(A_2), \; \forall A_1, A_2 \in M_2(I\!R), \forall \alpha, \beta \in I\!R.
$$

Façamos então

$$
A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \;\; e \;\; A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}.
$$

$$
\begin{aligned}
T(\alpha A_1 + \beta A_2) &= T\left(\alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= 2(\alpha a_1 + \beta a_2) + 3(\alpha b_1 + \beta b_2) + (\alpha c_1 + \beta c_2) - (\alpha d_1 + \beta d_2) \\
&= \alpha(2a_1 + 3b_1 + c_1 - d_1) + \beta(2a_2 + 3b_2 + c_2 - d_2) \\
&= \alpha T(A_1) + \beta T(A_2).
\end{aligned}
$$

Logo, T é uma transformação linear.

(4.0)3. Para cada das transformações lineares de $I\!R^3 \to I\!R^3$ abaixo, determine uma base para o seu núcleo e sua dimensão, uma base para sua imagem e sua dimensão, e diga se a transformação é injetora ou sobrejetora, justificando a resposta.

(2.0)a. $L(x) = (x_1 - x_3, x_2, x_2)^T$.

Solução:

Núcleo, $N(L)$: Se x está no núcleo de L, então $L(x) = 0$, ou seja, $x_1 = x_3$ e $x_2 = 0$. Portanto, $N(L) = \{(1, 0, 1)^T\}$ (dimensão = 1).

Imagem, $I(L)$: Um vetor y pertence à imagem de L se e somente se y é a soma de um múltiplo de $v_1 = (1, 0, 0)^T$ com um múltiplo de $v_2 = (0, 1, 1)^T$. Logo, $I(L)$ é o subspaço bidimensional (dimensão = 2) de $I\!R^3$ gerado por $[v_1, v_2]$.

Como $N(L) \neq \{(0, 0, 0)^T\}$, L não é injetora e como $I(L) \neq I\!R^3$, L não é sobrejetora.

(2.0)b. $L(x) = (x_3, x_1, 0)^T$.

Solução:

Núcleo, $N(L)$: Se x está no núcleo de L, então $L(x) = 0$, ou seja, $x_1 = 0$ e $x_3 = 0$. Portanto, $N(L)$ é o subspaço unidimensional (dimensão = 1) de $I\!R^3$ gerado por $(0, 1, 0)^T$.

Imagem, $I(L)$: Um vetor y pertence à imagem de L se e somente se y é a soma de um múltiplo de $e_1 = (1, 0, 0)^T$ com um múltiplo de $e_2 = (0, 1, 0)^T$. Logo, $I(L)$ é o subspaço bidimensional (dimensão = 2) de $I\!R^3$ gerado por $[e_1, e_2]$.

Como $N(L) \neq \{(0,0,0)^T\}$, L não é injetora e como $I(L) \neq \mathbb{R}^3$, L também não é sobrejetora.