Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP2 - Primeiro Semestre de 2010
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(3.0)1. Dada a matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & y-1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & y-2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & y \end{bmatrix}$$

(1.0)a. Determine para que valores de y, A é invertível:

Solução:

Devemos ter $\det(A) \neq 0$.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & y-1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & y-2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & y-3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & y-3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & y-2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} y-3 & 2 & -2 \\ 0 & y-3 & 0 \\ 0 & 2 & y-2 \end{vmatrix} \\ &= (y-3) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} y-3 & 0 \\ 2 & y-2 \end{vmatrix} \\ &= (y-3)[(y-3)(y-2)] \end{aligned}$$

Temos $(y-3)^2(y-2) = 0 \Leftrightarrow y = 3$ ou $y = 2$. Logo, a matriz A é invertível se $y \neq 2$ e $y \neq 3$.

(1.0)b. Calcule a inversa de A considerando $y = 4$.

Solução:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & -1 & 0.5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & -1 & 0.5 \end{array}\right].$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 9 & -3 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

(1.0)c. Use a inversa de A, calculada no item (b), para resolver o sistema linaer $Ax = b$, onde $b = (2, 4, 5, 10)^T$

Solução:

$$x = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 9 & -3 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & -1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2.0)2. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \to (x - y, z, 0)$$

(1.0)a. Determine o núcleo, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T é injetora? Justifique.

(1.0)b. Determine a imagem, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T é sobrejetora? Justifique.

Solução:

a.

$$\begin{aligned} N(T) &= \{(x,y,z) : T(x,y,z) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) : (x-y,z,0) = (0,0,0)\} \\ &= \{(a,a,0) : a \in I\!R\} \\ &= \{a(1,1,0) : a \in I\!R\} \end{aligned}$$

Logo, $\{(1,1,0)\}$ é uma base para o núcleo de T e dim($N(T)$)=1. Uma vez que $N(T) \neq (0,0,0)$, T não é injetora.

b.

$$\begin{aligned} Im(T) &= \{(x-y,z,0) : x,y,z \in I\!R\} \\ &= \{(x-y)(1,0,0) + z(0,1,0) : x,y,z \in I\!R\} \end{aligned}$$

Como $x-y$ pode assumir qualquer valor em $I\!R$, $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ é uma base para a imagem de T e dim($Im(T)$)=2. Uma vez que dim($Im(T)$) $\neq$ dim($I\!R^3$) (dim($I\!R^3$) $= 3$), T não é sobrejetora.

(3.0)3. Indique, justificando, qual a dimensão dos seguintes subspaços lineares reais, e indique também uma base para cada um deles.

(1.0)a. O conjunto de vetores da forma (a,b,c), com $b = a + c$ e $c = 2a$, sendo a, b e c reais.

Solução:

Se o vetor v pertence ao conjunto, então $v = (a, 3a, 2a) = a(1,3,2)$, com a real. Logo $(1,3,2)$ é uma base para o subspaço e sua dimensão é igual a 1.

(1.0)b. $V = \{(x,y,z,w) \in I\!R^4 : 3x - 2y + 5z - w = 0\}$.

Solução:

Se o vetor v pertence ao conjunto, então $v = (x,y,z,3x-2y+5z) = x(1,0,0,3) + y(0,1,0,-2) + z(0,0,1,5)$, para x, y e z reais. Logo $(1,0,0,3),(0,1,0,-2),(0,0,1,5)$ é uma base para o subspaço e sua dimensão é igual a 3.

(1.0)c. $W = \{(x,y,z,w) \in I\!R^4 : x-y+z-w = 0, -4y+z = 0, x-w = 0\}$.

Solução:

De $x - w = 0$ temos $x = w$. De $-4y + z = 0$ temos $z = 4y$. Substituindo estas duas relações na primeira equação temos $w - y + 4y - w = 0 \Rightarrow 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = 0$. Logo, se o vetor v pertence ao subspaço $v = (w,0,0,w) = w(1,0,0,1)$ para w real. Logo $(1,0,0,1)$ é uma base para o subspaço e sua dimensão é igual a 1.

(2.0)4. Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule os autovalores e os correspondentes autovetores de A.

Solução:

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) &= det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)(-2-\lambda) + 6 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 4 = P(\lambda). \end{aligned}$$

$P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow$ ou $\lambda = 4$ ou $\lambda = -1$. Então os autovalores de A são 4 e -1. Procuramos agora os autovetores associados:

(i)$\lambda = 4$. Temos

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\begin{bmatrix} 5x - 6y \\ x - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x \\ 4y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 6y = 0 \\ x - 6y = 0 \end{cases}$$

Então temos que $x = 6y$. Portanto os autovetores associados a $\lambda = 4$ são os vetores $v = (6y, y), y \neq 0$.

(ii)$\lambda = -1$. Temos

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\begin{bmatrix} 5x - 6y \\ x - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 6y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \text{ou } x = y.$$

Os autovetores associados a $\lambda = -1$ são os vetores da forma $v = (x, x), x \neq 0$.