Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
Gabarito da AP1 - Primeiro Semestre de 2006
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

Cada questão valem (2.0) dois pontos.

---

1. Seja P_2 o espaço vetorial dos polinômios de grau 2. Considere os polinômios $v_1 = -x^2 - 6x$, $v_2 = x^2 - 3x - 1$ e $v_3 = -3x^2 + 2$.

   i) Mostre que v_1 pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $\{v_2,\ v_3\}$.

   Solução: Sejam os escalares α e β. Então

   $$-x^2-6x = \alpha(x^2-3x-1)+\beta(-3x^2+2) = (\alpha-3\beta)x^2-3\alpha x+(-\alpha+2\beta)$$

   Logo temos o sistema linear

   $$\begin{cases} \alpha - 3\beta = -1 \\ -3\alpha = -6 \\ -\alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$$

   Resolvendo o sistema obtemos $\alpha = 2$ e $\beta = 1$. Assim $v_1 = 2v_2 + v_3$.

   ii) Podemos afirmar, a partir do item anterior, que o conjunto de vetores $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ são linearmente dependentes? Porquê?

   Solução: O conjunto é LD, pois um dos vetores é combinação linear do restante, ou seja, depende linearmente (LD).

2. Seja S o conjunto das soluções do sistema linear homogêneo, $S = \{x \in I\!R^n; Ax = 0\}$, onde A é uma matriz de ordem $m \times n$.

   Mostre que S é um subespaço vetorial do $I\!R^n$.

   Solução:

   a) O vetor nulo $X = 0$ é solução trivial do sistema homogêneo, logo $0 \in S$.

   b) Sejam X_1 e X_2 soluções do sistema linear homogêneo. Então

   $AX_1 = 0$ e $AX_2 = 0$. Logo a soma $AX_1 + AX_2 = A(X_1 + X_2) = 0$. Portanto $X_1 + X_2 \in S$, pois é uma solução do sistema homogêneo.

   c) Seja $\alpha \in I\!R$ e $X_1 \in S$. Logo $\alpha AX_1 = A(\alpha X_1) = 0$, pois X_1 é solução do sistema homogêneo. Assim $\alpha X_1 \in S$.

   De a) ,b) e c) conclui-se que S é subespaço vetorial.

3. Seja $B = \{v_1, v_2\}$ uma base do subespaço vetorial $S \subset I\!R^3$, onde $v_1 = (1, 0, 1)$ e $v_2 = (-1, 1, 0)$. O processo de Gram-Schmidt definido por: $w_1 = v_1$; $\quad w_2 = v_2 - \Big(\dfrac{v_2.w_1}{w_1.w_1}\Big)w_1$, transforma a base B numa base ortogonal $\widehat{B} = \{w_1,\ w_2\}$.

   i) Determine a base ortogonal $\widehat{B}$.

   Solução: $w_1 = v_1 = (1, 0, 1)$. Para w_2 temos que

   $(v_2, w_1) = -1$ e $(w_1, w_1) = 2$. Assim temos que

   $w_2 = v_2 - \Big(\dfrac{v_2.w_1}{w_1.w_1}\Big)w_1 = (-1, 1, 0) + 1/2(1, 0, 1 = (-1/2, 1, 1/2)$.

   ii) Seja $v \in I\!R^3$ e a projeção ortogonal de v sobre S definido por: $u = Proj_s v = \Big(\dfrac{v.w_1}{w_1.w_1}\Big)w_1 + \Big(\dfrac{v.w_2}{w_2.w_2}\Big)w_2$, onde w_1 e $w_2 \in \widehat{B}$.
   Para $v = (1, 4, 2)$ determine:

   i)A projeção ortogonal $u = Proj_s v$

   Solução:

   $$u = \Big(\frac{v.w_1}{w_1.w_1}\Big)w_1 + \Big(\frac{v.w_2}{w_2.w_2}\Big)w_2 = 3/2(1, 0, 1) + 3(-1/2, 1, 1/2) = (0, 3, 3),$$

   pois $(v, w_1) = 3,\ (v, w_2) = 9/2,\ (w_1, w_1) = 2,\ (w_2, w_2) = 3/2$.

ii) Define-se por complemento ortogonal de S em $I\!R^3$ ao conjunto $S^{\perp} = \{v \in I\!R^3; (v,u) = 0, \quad \forall u \in S\}$.
Para $v = (1,4,2)$, determine o(s) vetor(es) de $S^{\perp}$.

Solução: Sabemos que $I\!R^3 = S \bigoplus S^{\perp}$, ou seja, para todo vetor $v \in I\!R^3$ tem-se que $v = u + w$, onde $u \in S$ e $w \in S^{\perp}$. Logo $w = v - u = (1,4,2) - (0,3,3) = (1,1,-1) \in S^{\perp}$.

4. Considere o sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Determine uma base e a dimensão do espaço de soluções.

Solução A matriz aumentada $[A \mid 0]$ do sistema é dada por

$$[A|0] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, obtemos

$$[A^1|0] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$, obtemos

$$[A^2|0] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dividindo a L_2 por 2 e depois fazendo $L_1 \leftarrow L_1 + 4L_2$, obtemos

$$[A^3|0] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Resolvendo o sistema obtemos que $x_4 = 2x_3$ e $x_1 = -2x_2 - 2x_3$ Assim o conjunto de solução do sistema é dado por:

$$S = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_4 = 2x_3 \quad \text{e} \quad x_1 = -2x_2 - 2x_3\right\}$$

Como as variáveis x_2 e x_3 são variáveis livres, conclui-se que $dimS = 2$. Logo, qualquer subconjunto de S com dois vetores LI forma uma base de S. Por exemplo $x_2 = 1$ e $x_3 = -1$ então $x_1 = 0$ e $x_4 = -2$. Assim um vetor $v_1 = (0, 1, -1, -2) \in S$. Um outro vetor da base, pode ser escolhendo $x_2 = 0$ e $x_3 = 1$. Então $x_1 = -2$ e $x_4 = 2$. Assim um vetor $v_2 = (-2, 0, 1, 2) \in S$. Note que v_1 e v_2 são LI e como são geradores de $S = [v_1, v_2]$ então é uma base de S.

5. Considere o sistema linear:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & a \\ 2x_1 & + & x_2 & = & b \\ -x_1 & & & = & c \\ -3x_1 & + & x_2 & = & d \end{array}\right.$$

Estabeleça uma relação entre os termos independentes $\{a, b, c, d\}$, usando o Método de Gauss-Jordan, de tal forma que o sistema tenha solução única, diferente da solução trivial $a = b = c = d = 0$.

Solução A matriz aumentada $[A \mid \mathbf{b}]$ do sistema é dada por

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rrcr} 1 & -1 & | & a \\ 2 & 1 & | & b \\ -1 & 0 & | & c \\ -3 & 1 & | & d \end{array}\right]$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ e $L_4 \leftarrow L_3 + 3L_1$ obtemos

$$[A^1|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rrcr} 1 & -1 & | & a \\ 0 & 3 & | & -2a + b \\ 0 & 0 & | & a + c \\ 0 & 2 & | & 3a + d \end{array}\right]$$

Dividindo por 3 a L_2, trocando as linhas L_3 e L_4 e fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, obtemos

$$[A^2|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rrcr} 1 & -1 & | & a \\ 0 & 1 & | & (-2a + b)/3 \\ 0 & 0 & | & (13a - 2b + 3d)/3 \\ 0 & 0 & | & a + c \end{array}\right]$$

Assim para que o sistema tenha solução única é necessário que:

$$\begin{cases} a + c = 0 \Leftrightarrow c = -a \\ (13a - 2b + 3d)/3 = 0 \Leftrightarrow d = (-13a + 2b)/3 \end{cases}$$

Podemos então escrever que o conjuntos do termos independentes tal que a solução do sistema é única é dado por:

b=$\Big\{(a, b, c, d) \in I\!R^4 ; (a, b, -a, (-13a + 2b)/3\Big\}$.