Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP3 - Prmeiro Semestre de 2016
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(2.0)1. Determine k para que

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ k & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

seja LD.
Solução: Sejam os escalares α_1 e α_2 números reais. Para que os vetores(matrizes) sejam linearmente dependentes, devemos mostrar que a matriz com o termo k pode ser escrita como combinação linear das demais, ou seja,

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ k & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo a multiplicação do escalar pela matriz e somando os termos respectivos, obtemos

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ k & 0 \end{bmatrix}$$

Resulta da igualdade entre matrizes o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ \qquad\ \ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_1 \qquad\ \ = k \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear, conclui-se que para $k = 3$ o conjunto é LD.

(3.0)2. Seja $S = \{(x, y, z) \in I\!R^3 / z = 2x - y\}$ e considere as operações usuais de adição e multiplicação por escalar.

(a) Prove que S é uma subespaço vetorial do $I\!R^3$.
Solução:

i. $0 = (0, 0, 0) \in S$, pois $0 = 2.(0) - 0 = 0$

ii. Sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ pertencentes a S. Logo $z_1 = 2x_1 - y_1$ e $z_2 = 2x_2 - y_2$.
Somando as igualdades tem-se que

$$z_1 + z_2 = (2x_1 - y_1) + (2x_2 - y_2) = 2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) \in S$$

Assim $(u + v) \in S$.

iii. Seja α um escalar e $u \in S$. Então $z_1 = 2x_1 - y_1$. Logo

$$\alpha z_1 = \alpha(2x_1 - y_1) = 2(\alpha x_1) - \alpha y_1,$$

ou seja $\alpha u \in S$.

Das condições anteriores, resulta que o conjunto S satisfaz todas as propriedades de um subespaço vetorial.

(b) Determine uma base para S e sua dimensão (dim S).
Solução: Temos que

$$\begin{aligned} (x, y, z) = (x, y, 2x - y) &= (x, 0, 2x) + (0, y, -y) \\ &= x(1, 0, 2) + y(0, 1, -1) \end{aligned}$$

Logo $B = \{(1, 0, 2); (0, 1, -1)\}$ gera o subespaço vetorial S.
Mostraremos que os vetores, além de gerar S também são LI.
De fato, seja α_1 e α_2 escalares. Considere a combinação linear:

$$\alpha_1(1, 0, 2) + \alpha_2(0, 1, -1) = (\alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_1 - \alpha_2) = (0, 0, 0)$$

Resolvendo o sistema, obtemos que a única solução possível é $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.
Portanto os vetores são LI e assim o conjunto B é uma das infinitas bases de S e dim(S)=2.

(c) Complemente a base de S, de tal forma a obter uma base para o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Solução: Devemos determinar um vetor (x, y, z) que não possa ser escrito como combinação linear dos vetores de B. Sejam os escalares α_1 e α_2 e tal que

$$(x, y, z) = \alpha_1(1, 0, 2) + \alpha_2(0, 1, -1) = (\alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_1 - \alpha_2)$$

Logo temos o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \alpha_1 & & & = & x \\ & & \alpha_2 & = & y \\ 2\alpha_1 & - & \alpha_2 & = & z \end{array}\right.$$

Assim o vetor (x, y, z) complementa S em relação ao espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, se não satisfaz as três equações simultaneamente, como por exemplo: $v_3 = (x, y, z) = (0, 1, 2)$. Assim v_3 não pode ser escrito como combinação linear dos vetores de B, ou seja, v_3 é linearmente independente em relação aos dois vetores de B, e portanto $\widehat{B} = \{(1, 0, 2); (0, 1, -1); (0, 1, 2)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$.

(3.0)3. Determinar para que valores de a e b, o sistema linear abaixo: (a) tem uma única solução, (b) não tem solução, (c) tem uma infinidade de soluções.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & = & b \end{array}\right.$$

Solução: Calculemos primeiro o determinante da matriz A de coeficientes do sistema linear:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = a - 6.$$

(a) O sistema tem uma única solução se $\det(A) \neq 0$, ou seja, se $a \neq 6$.

Se $a = 6$, fazemos o escalonamento da matriz de coeficientes do sistema linear estendida.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -15 & b-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-5 \end{pmatrix}$$

Neste caso, se $b \neq 5$, o sistema não tem solução e se $b = 5$, o sistema tem infinitas soluções.

Logo, (b) O sistema não tem solução se $a = 6$ e $b \neq 5$. (c) O sistema tem infinitas soluções se $a = 6$ e $b = 5$.

(2.0)4. Prove que $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, tal que $F(x, y, z) = 2x - 3y + 4z$, é uma aplicação linear.

Solução

Seja $v = (a, b, c)$ e $w = (a', b', c')$, logo $v + w = (a + a', b + b', c + c')$ e $kv = (ka, kb, kc)$, $k \in \mathbb{R}$.

Temos $F(v) = 2a - 3b + 4c$ e $F(w) = 2a' - 3b' + 4c'$. Assim

$$\begin{aligned} F(v+w) &= F(a+a', b+b', c+c') \\ &= 2(a+a') - 3(b+b') + 4(c+c') \\ &= (2a - 3b + 4c) + (2a' - 3b' + 4c') = F(v) + F(w). \end{aligned}$$

e

$$F(kv) = F(ka, kb, kc) = 2ka - 3kb + 4kc = k(2a - 3b + 4c) = kF(v).$$

Consequentemente, F é linear.