Álgebra Linear

Aula 7: Propriedades das Operações com Matrizes

Mauro Rincon

Márcia Fampa

cederj

5.1 - Soma de Matrizes

Teorema: Sejam $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, e $\mathbf{D}$ matrizes $m \times n$.

1) Comutativa: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

2) Associativa: $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$.

3) Elemento Neutro: Existe uma única matriz $\mathbf{0}$, tal que $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$ para toda matriz $\mathbf{A}$. A matriz $\mathbf{0}$ é chamada de **matriz nula** ou **elemento neutro**.

4) Matriz Negativa: Para cada matriz $\mathbf{A}$, existe uma única matriz $\mathbf{D}$, tal que $\mathbf{A} + \mathbf{D} = \mathbf{0}$. Denotaremos $\mathbf{D}$ por $-\mathbf{A}$. Esta matriz recebe o nome de **inversa aditiva** ou **negativa** de $\mathbf{A}$.

5.1 - Soma de Matrizes

Demonstração:

1) Comutativa: O elemento (i, j) da matriz $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ é $a_{ij}+b_{ij}$ e o elemento (i, j) da matriz $\mathbf{B}+\mathbf{A}$ é $b_{ij}+a_{ij}$. Como a_{ij} e b_{ij} são números reais, então $a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$.
Logo, $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$.

2) Associativa: Como

$$\begin{aligned} a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}) &= (a_{ij}+b_{ij})+c_{ij} \Rightarrow \\ \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= (\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} \end{aligned}$$

5.1 - Soma de Matrizes

3) Elemento Neutro: Seja $\mathbf{U} = (u_{ij})$. Então

$$\mathbf{A} + \mathbf{U} = \mathbf{A}$$

se e somente se $a_{ij} + u_{ij} = a_{ij}$,
o que se verifica se e somente se $u_{ij} = 0$.
Logo, $\mathbf{U} = \mathbf{0}$.

4) Matriz Negativa: Seja $\mathbf{D} = (d_{ij})$. Então

$$\mathbf{A} + \mathbf{D} = \mathbf{0}$$

se e somente se

$$a_{ij} + d_{ij} = 0 \Leftrightarrow d_{ij} = -a_{ij} \Leftrightarrow \mathbf{D} = -\mathbf{A}$$

5.2 - Multiplicação de Matrizes

Teorema: Considere as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$.

1) Associativa: Existindo o produto $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$, então

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}.$$

2) Distributiva (à esquerda): Existindo o produto $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})$, então

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}.$$

3) Distributiva (à direita): Existindo o produto $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}$, então

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}.$$

5.2 - Multiplicação de Matrizes

Demonstração:

1) Associativa: $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$. Seja $\mathbf{D} = \mathbf{BC}$.

- elemento (k,j) de $\mathbf{D}$: $d_{kj} = \sum_{l=1}^{q} b_{kl}c_{lj}$ ①
- elemento (i,j) de $\mathbf{AD}$: $(\mathbf{AD})_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}d_{kj}$ ②
- Substituindo ① em ②: $(\mathbf{AD})_{ij} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} a_{ik}b_{kl}c_{lj}$
- Seja $\mathbf{Z} = \mathbf{AB} \equiv$ elemento (i,j) de $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$:

$$
\begin{aligned}
((\mathbf{AB})\mathbf{C})_{ij} &= (\mathbf{ZC})_{ij} = \sum_{l=1}^{q} z_{il}c_{lj} = \sum_{l=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj} \\
&= \sum_{l=1}^{q}\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kl}c_{lj} = (\mathbf{A}(\mathbf{BC}))_{ij}
\end{aligned}
$$

5.2 - Multiplicação de Matrizes

2) Distributiva (à esquerda): $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$.

Seja $\mathbf{D} = \mathbf{B}+\mathbf{C}$.

- elemento (k, j) de $\mathbf{D}$: $d_{kj} = b_{kj} + c_{kj}$
- elemento (i, j) da matriz $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})$

$$(\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}))_{ij} = (\mathbf{AD})_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}d_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}+a_{ik}c_{kj}.$$

- elemento (i, j) da matriz $\mathbf{AB}+\mathbf{AC} \equiv$ soma dos elementos (i, j) das matrizes $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{AC}$

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB}+\mathbf{AC})_{ij} &= (\mathbf{AB})_{ij} + (\mathbf{AC})_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right) + \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj} = (A(B+C))_{ij}.\end{aligned}$$

5.2 - Multiplicação de Matrizes

3) Distributiva (à direita): $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$.

A demonstração da propriedade 3 é análoga a demonstração da propriedade 2.

5.2 - Multiplicação de Matrizes

Exemplo 1: Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Verifique que $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$.

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{BC}} = \begin{bmatrix} 9 & -14 \\ 17 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{AB}} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -14 \\ 17 & 1 \end{bmatrix}$$

5.2 - Multiplicação de Matrizes

Exemplo 2: Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verifique que $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$.

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B+C}} = \begin{bmatrix} 17 & -3 \\ 21 & 11 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} + \mathbf{AC} = \underbrace{\begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 8 & 11 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{AB}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 13 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{AC}} = \begin{bmatrix} 17 & -3 \\ 21 & 11 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

5.3 - Matriz Identidade

Definição: A **matriz identidade** de ordem n, denotada por $\mathbf{I}_n$, é a matriz diagonal que tem todos os elementos da diagonal iguais a um, ou seja

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja uma matriz $\mathbf{A}$, $m \times n$. Então

$$\boxed{\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}.}$$

5.3 - Matriz Identidade

Exemplo 3: Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Verifique que $\mathbf{I}_2\mathbf{A} = \mathbf{A}$ e $\mathbf{A}\mathbf{I}_3 = \mathbf{A}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_2\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1(2)+0(6) & 1(-3)+0(2) & 1(4)+0(1) \\ 0(2)+1(6) & 0(-3)+1(2) & 0(4)+1(1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}. \\
\mathbf{A}\mathbf{I}_3 &= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2(1)-3(0)+6(0) & 2(0)-3(1)+6(0) & 2(0)-3(0)+6(1) \\ 6(1)+2(0)+1(0) & 6(0)+2(1)+1(0) & 6(0)+2(0)+1(1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longleftarrow \mathbf{A}
\end{aligned}$$

5.4 - Propriedades da Potenciação

Definição: Sendo $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada de ordem m, define-se:

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_m, \quad \text{sendo} \quad \mathbf{A} \neq O;$$
$$\mathbf{A}^p = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \ldots \cdot \mathbf{A}}_{p\ fatores};$$

onde p é um inteiro positivo.

5.4 - Propriedades da Potenciação

➩ Exemplo 4: Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule $\mathbf{A}^2$.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1(1) - 1(1) & 1(-1) - 1(2) \\ 1(1) + 2(1) & 1(-1) + 2(2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

5.4 - Propriedades da Potenciação

Teorema: Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes quadradas e α e β inteiros não negativos.

1) $\mathbf{A}^{\alpha}\mathbf{A}^{\beta} = \mathbf{A}^{\alpha+\beta}$

2) $(\mathbf{A}^{\alpha})^{\beta} = \mathbf{A}^{\alpha\beta}$

3) Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ comutam, ou seja, se $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, então $(\mathbf{AB})^{\alpha} = \mathbf{A}^{\alpha}\mathbf{B}^{\alpha}$.
Demonstração: Para $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ é imediato. Por simplicidade, seja $\alpha = 2$.

$$(\mathbf{AB})^2 = (\mathbf{AB})(\mathbf{AB}) = \mathbf{ABAB} = \mathbf{AABB} = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2.$$

5.4 - Propriedades da Potenciação

Exemplo 5: Sejam $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1) Verifique que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ comutam.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(1)+4(0) & 4(-1)+4(1) \\ 0(1)+4(0) & 0(-1)+4(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(4)-1(0) & 1(4)-1(4) \\ 0(4)+1(0) & 0(4)+1(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$\boxed{\mathbf{AB} = \mathbf{BA}}$$

5.4 - Propriedades da Potenciação

2) Verifique que $(\mathbf{AB})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{AB})^2 &= (\mathbf{AB})(\mathbf{AB}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4(4)+0(0) & 4(0)+0(4) \\ 0(4)+4(0) & 0(0)+4(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2 &= (\mathbf{AA})(\mathbf{BB}) = \left(\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 4(4)+4(0) & 4(4)+4(4) \\ 0(4)+4(0) & 0(4)+4(4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1(1)-1(0) & 1(-1)-1(1) \\ 0(1)+1(0) & 0(-1)+1(1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 16 & 32 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 16(1)+32(0) & 16(-2)+32(1) \\ 0(1)+16(0) & 0(-2)+16(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

5.4 - Propriedades da Potenciação

Exemplo 6: Sejam $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1) Verifique que **A** e **B** não comutam.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(1)+4(0) & 4(-1)+4(1) \\ 0(1)+3(0) & 0(-1)+3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(4)-1(0) & 1(4)-1(3) \\ 0(4)+1(0) & 0(4)+1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\boxed{\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}}$$

5.4 - Propriedades da Potenciação

2) Verifique que $(\mathbf{AB})^2 \neq \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$.

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{AB})^2 &= (\mathbf{AB})(\mathbf{AB}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4(4)+0(0) & 4(0)+0(3) \\ 0(4)+3(0) & 0(0)+3(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2 &= (\mathbf{AA})(\mathbf{BB}) = \left(\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 4(4)+4(0) & 4(4)+4(3) \\ 0(4)+3(0) & 0(4)+3(3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1(1)-1(0) & 1(-1)-1(1) \\ 0(1)+1(0) & 0(-1)+1(1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 16 & 28 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 16(1)+28(0) & 16(-2)+28(1) \\ 0(1)+9(0) & 0(-2)+9(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

5.5 - Propriedades da Multiplicação por Escalar

Teorema Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes de mesmo tamanho e r e s escalares.

1) $r(s\mathbf{A}) = (rs)\mathbf{A}$.

2) $(r+s)\mathbf{A} = r\mathbf{A} + s\mathbf{A}$.

3) $r(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = r\mathbf{A} + r\mathbf{B}$.

4) $\mathbf{A}(r\mathbf{B}) = r(\mathbf{AB}) = (r\mathbf{A})\mathbf{B}$.

5.5 - Propriedades da Multiplicação por Escalar

Demonstração:

1) O elemento (i,j) da matriz $r(s\mathbf{A})$ é dado por
$$(r(s\mathbf{A}))_{ij} = r(sa_{ij}) = rsa_{ij} = ((rs)\mathbf{A})_{ij}.$$

2) $((r+s)\mathbf{A})_{ij} = (r+s)a_{ij} = ra_{ij}+sa_{ij} = (rA)_{ij}+(s\mathbf{A})_{ij}.$

3) $(r(\mathbf{A}+\mathbf{B}))_{ij} = r(a_{ij}+b_{ij}) = ra_{ij}+rb_{ij} = (r\mathbf{A})_{ij}+(r\mathbf{B})_{ij}.$

4) O elemento (i,j) da matriz $\mathbf{A}(r\mathbf{B})$ é dado por

$$(\mathbf{A}(r\mathbf{B}))_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(rb_{kj}) \quad = r\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = r(\mathbf{AB})_{ij}$$

$$= \sum_{k=1}^{p}(ra_{ik})b_{kj} = ((r\mathbf{A})\mathbf{B})_{ij}.$$

5.5 - Propriedades da Multiplicação por Escalar

Exemplo: Sejam

$$r = 3, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Verifique que $\mathbf{A}(r\mathbf{B}) = r(\mathbf{AB})$.

$$\mathbf{A}(r\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 9 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 3 \\ 27 & 12 \end{bmatrix},$$

$$r(\mathbf{AB}) = 3 \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 3 \\ 27 & 12 \end{bmatrix}.$$

5.6 - Propriedades da Transposta

Teorema: Sejam as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ e o escalar r.

1) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

2) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$.

3) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

4) $(r\mathbf{A})^T = r\mathbf{A}^T$.

5.6 - Propriedades da Transposta

Demonstração:

1) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
O elemento (i, j) da matriz $\mathbf{A}$ é o elemento a_{ij}.
O elemento (i, j) da matriz $\mathbf{A}^T$ é o elemento $\alpha_{ij} = a_{ji}$. Portanto o elemento (i, j) de $(\mathbf{A}^T)^T$ é o elemento $\alpha_{ji} = a_{ij}$.

5.6 - Propriedades da Transposta

2) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

Seja $\mathbf{C} = \mathbf{A}+\mathbf{B}$ então $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Logo $c_{ji} \in \mathbf{C}^T = (\mathbf{A}+\mathbf{B})^T$. Por outro lado,

$$\left.\begin{array}{l} a_{ij} \in \mathbf{A} \Rightarrow a_{ji} \in \mathbf{A}^T \\ b_{ij} \in \mathbf{B} \Rightarrow b_{ji} \in \mathbf{B}^T \end{array}\right\} a_{ji} + b_{ji} \in \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

Logo $c_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$.

5.6 - Propriedades da Transposta

3) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz $m \times p$ e $\mathbf{B}$ uma matriz $p \times n$. O produto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ é uma matriz $m \times n$ e o seu elemento (i,j) é dado por $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$.
A matriz $(\mathbf{AB})^T$ é portanto uma matriz $n \times m$ e nela , o elemento c_{ij} ocupa a i-ésima coluna e a j-ésima linha.
Por outro lado, a matriz $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ também é de ordem $n \times m$. O elemento (i,j) de $\mathbf{A}^T$ é o elemento $\alpha_{ij} = a_{ji}$, assim como o elemento (i,j) de B^T é o elemento $\beta_{ij} = b_{ji}$. Logo o elemento de $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ que ocupa a i-ésima coluna e a j-ésima linha é dado por

$$\sum_{k=1}^{p} \beta_{jk}\alpha_{ki} = \sum_{k=1}^{p} b_{kj}a_{ik} = c_{ij}.$$

5.6 - Propriedades da Transposta

4) $(r\mathbf{A})^T = r\mathbf{A}^T$

Seja $\mathbf{C} = r\mathbf{A}$, logo o elemento (i,j) de $\mathbf{C}$ é dado por $c_{ij} = ra_{ij}$. Na matriz $(r\mathbf{A})^T$, o elemento $c_{ji} \in \mathbf{C}^T = (r\mathbf{A})^T$ ocupa a i-ésima coluna e a j-ésima linha.

Por outro lado, o elemento (i,j) de $\mathbf{A}^T$ é o elemento $\alpha_{ij} = a_{ji}$. Logo o elemento de $r\mathbf{A}^T$ que ocupa a a i-ésima coluna e a j-ésima linha é dado por $r\alpha_{ij} = ra_{ji} \in r\mathbf{A}^T$.

5.6 - Propriedades da Transposta

⇨ Exemplo: Sejam $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Verifique que $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 9 & 4 \end{bmatrix},$$

logo $(\mathbf{AB})^T = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, e

$$\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

5.7 - Matriz Simétrica

Definição: Uma matriz $\mathbf{A}$ é dita **simétrica** se

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{A}^T.}$$

Ou seja, $\mathbf{A}$ é simétrica se ela é uma matriz quadrada $m \times m$, e $a_{ij} = a_{ji}$, para todo $i, j = 1, \ldots, m$.

5.7 - Matriz Simétrica

Exemplo: A matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

é uma matriz simétrica já que $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Exercícios

- Fazer os exercícios das páginas 37 a 39 do livro texto.