Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP1 - Primeiro Semestre de 2008
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

1.(2.5) Determine se cada conjunto a seguir é ou não subspaço de P_4, o conjunto de todos os polinômios de grau menor ou igual a 4. Justifique sua resposta.

(a) O conjunto de polinômios em P_4 de grau par.

Solução: Não, pois dados $p_1(x) = x^2 + x$ e $p_2(x) = -x^2 + x$, temos que p_1 e p_2 pertencem ao conjunto dado, mas $p_1 + p_2$ não pertence.

(b) O conjunto de polinômios de grau 3.

Solução: Não, pois dados $p_1(x) = x^3 + x$ e $p_2(x) = -x^3 + x$, temos que p_1 e p_2 pertencem ao conjunto dado, mas $p_1 + p_2$ não pertence.

(c) O conjunto de polinômios $p(x)$ em P_4 tais que $p(0) = 0$.

Solução: Sim, pois: (i) O conjunto não é vazio, já que contém o polinômio nulo. (ii) Se $p(x)$ pertence ao conjunto e α é um escalar, então $\alpha p(0) = \alpha \cdot 0 = 0$, e, portanto αp pertence ao conjunto. (iii) Se $p(x)$ e $q(x)$ pertencem ao conjunto, então $(p + q)(0) = p(0) + q(0) = 0 + 0 = 0$, e, portanto $p + q$ pertence ao conjunto.

(d) O conjunto de polinômios em P_4 que têm pelo menos uma raiz real.

Solução: Não, pois dados $p_1(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ e $p_2(x) = x^2 - 2x$, temos que p_1 e p_2 pertencem ao conjunto dado, mas $p_1 + p_2$ não pertence.

(e) O conjunto de polinômios de grau menor ou igual a 2.

Solução: Sim, pois: (i) O conjunto não é vazio, já que contém o polinômio nulo. (ii) Se $p(x)$ pertence ao conjunto, então $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, para a_2, a_1 e a_0 quaisquer. Sendo α um escalar, então $\alpha p(x) = (\alpha a_2)x^2 + (\alpha a_1)x + (\alpha a_0)$, e, portanto αp pertence ao conjunto. (iii) Se $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ pertencem ao conjunto, então $(p+q)(x) = (a_2+b_2)x^2 + (a_1+b_1)x + (a_0 + b_0)$, e, portanto $p + q$ pertence ao conjunto.

2.(2.5) Dado o conjunto de vetores $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(a) Mostre que B é uma base para $I\!R^3$.

(b) Aplique sobre B o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal para $I\!R^3$.

Solução:

(a) Como dim $I\!R^3 = 3$, basta mostrar que esses três vetores são linearmente independentes. Isso segue do fato que

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & - & 2\alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \\ 2\alpha_1 & + & \alpha_2 & & & = & 0 \\ 3\alpha_1 & & & + & \alpha_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Das duas últimas equações, obtemos $\alpha_2 = -2\alpha_1$ e $\alpha_3 = -3\alpha_1$. Utilizando estas equivalências na primeira equação encontramos $\alpha_1 = 0$, e das duas equações seguintes, temos $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = 0$. Portanto, os vetores são linearmente independentes.

(b) $x_1 = (1, 2, 3)^T$,

$v_1 = x_1$,

$||v_1|| = \sqrt{14}$,

$u_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = (\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}})^T$.

$x_2 = (-2, 1, 0)^T, \quad x_2 \cdot v_1 = -2 + 2 = 0,$
$v_2 = x_2 - \frac{x_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = x_2,$
$||v_2|| = \sqrt{5},$
$u_2 = \frac{v_2}{||v_2||} = (\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0)^T.$

$x_3 = (1, 0, 1)^T, \quad x_3 \cdot v_2 = -2, \quad v_2 \cdot v_2 = 5, \quad x_3 \cdot v_1 = 1 + 3 = 4,$
$v_1 \cdot v_1 = 14,$
$v_3 = x_3 - \frac{x_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 - \frac{x_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1,$
$v_3 = (1, 0, 1)^T - \frac{-2}{5}(-2, 1, 0)^T - \frac{4}{14}(1, 2, 3)^T = (\frac{-3}{35}, \frac{-6}{35}, \frac{5}{35})^T,$
$||v_3|| = \sqrt{\frac{9}{35^2} + \frac{36}{35^2} + \frac{25}{35^2}} = \sqrt{\frac{70}{35^2}} = \frac{\sqrt{70}}{35},$
$u_3 = \frac{v_3}{||v_3||} = (\frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{-6}{\sqrt{70}}, \frac{5}{\sqrt{70}})^T.$

A base ortonormal é composta pelos vetores u_1, u_2 e u_3.

3.(2.0) Existem três marcas de automóveis disponíveis no mercado: o mod1, o mod2 e o mod3. O termo a_{ij} da matriz A abaixo é a probabilidade de que o dono do carro da marca mod$i$ mude para o carro da marca mod$j$, quando comprar um carro novo.

$$A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Os termos da diagonal dão a probabilidade a_{ii} de comprar um carro novo da mesma marca. A^2 representa a probabilidade de se mudar de uma marca para a outra depois de duas compras. Calcule A^2 e determine qual a probabilidade de um dono de carro da marca mod1 mudar para a marca mod3 depois de duas compras.

Solução:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$$
$$= 10^{-2} \begin{pmatrix} 7\cdot 7+2\cdot 3+1\cdot 4 & 7\cdot 2+2\cdot 5+1\cdot 4 & 7\cdot 1+2\cdot 2+1\cdot 2 \\ 3\cdot 7+5\cdot 3+2\cdot 4 & 3\cdot 2+5\cdot 5+2\cdot 4 & 3\cdot 1+5\cdot 2+2\cdot 2 \\ 4\cdot 7+4\cdot 3+2\cdot 4 & 4\cdot 2+4\cdot 5+2\cdot 4 & 4\cdot 1+4\cdot 2+2\cdot 2 \end{pmatrix}$$
$$= 10^{-2} \begin{pmatrix} 59 & 28 & 13 \\ 44 & 39 & 17 \\ 48 & 36 & 16 \end{pmatrix}.$$

A probabilidade de um dono de carro da marca mod1 mudar para a marca mod3 depois de duas compras é de 13%.

4.(3.0) Necessita-se adubar um terreno acrescentando a cada $10m^2$ 260g de nitrato e 372g de fosfato. Dispõe-se de três qualidades de adubo com as seguintes características:

(a) Cada quilograma do adubo I custa 5 reais e contém 10g de nitrato e 15g de fosfato.

(b) Cada quilograma do adubo II custa 12 reais e contém 30g de nitrato e 48g de fosfato.

(c) Cada quilograma do adubo III custa 15 reais e contém 40g de nitrato e 50g de fosfato.

Quanto de cada adubo devemos misturar para conseguir o efeito desejado se estamos dispostos a gastar 103 reais a cada $10m^2$ de adubação?

Solução: Representando por a_i a quantidade, em quilogramas, do adubo i na mistura, o sistema linear que representa este problema é dados por:

$$\begin{cases} 5a_1 + 12a_2 + 15a_3 = 103 \\ 10a_1 + 30a_2 + 40a_3 = 260 \\ 15a_1 + 48a_2 + 50a_3 = 372 \end{cases}$$

Para resolvê-lo reduzimos a matriz de coeficientes do sistema linear a forma

$$\begin{pmatrix} 5 & 12 & 15 & 103 \\ 10 & 30 & 40 & 260 \\ 15 & 48 & 50 & 372 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 12 & 15 & 103 \\ 0 & 6 & 10 & 54 \\ 0 & 12 & 5 & 63 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 12 & 15 & 103 \\ 0 & 6 & 10 & 54 \\ 0 & 0 & -15 & -45 \end{pmatrix}$$

Obtemos do sistema escalonado: $a_3 = -45/-15 = 3$, $a_2 = (54 - 10 * 3)/6 = 4$; $a_1 = (103 - 12 * 4 - 15 * 3)/5 = 2$. Logo deve-se misturar 2 Kg do adubo I, 4 Kg do adubo II e 3 Kg do adubo III.