Gabarito
Álgebra Linear: AD1 - CEDERJ
Márcia Fampa & Mauro Rincon - 2019.2
Tutor: Dionisio Martins

1) Solução: Sejam $u = (1, 0, -1)$, $v = (2, 1, 0)$ e $w = (-3, -1, 1)$ vetores do $I\!R^3$.

(a) Para verificar se os vetores são LI ou LD, considere o sistema :

$$\alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w = (0, 0, 0)$$

, onde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha 3$ são números reais. Logo temos:

$$\begin{aligned}(\alpha_1, 0, -\alpha_1) + (2\alpha_2, \alpha_2, 0) + (-3\alpha_3, -\alpha_3, \alpha_3) &= (\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3, \alpha_2 - \alpha_3, -\alpha_1 + \alpha_3) \\ &= (0, 0, 0)\end{aligned}$$

Consequentemente, devemos resolver o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Note que pela segunda e terceira equação, temos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ e satisfaz a primeira equação do sistema linear. Como os $\alpha_i \in I\!R, \quad i = 1, 2, 3,$ então temos uma infinidade de soluções do sistema linear $\alpha = (s, s, s)$, $s \in I\!R$ e portanto os Vetores são Linearmente Dependentes. Lembrando que se o sistema tivesse solução única e fosse $\alpha = (0, 0, 0)$ então os vetores seriam L.I.

(b) $Proj_v u = \dfrac{(u, v)}{(v, v)} v = \dfrac{2}{5}(2, 1, 0) = (4/5, 2/5, 0)$

(c) Como u, v, w são Linearmente Dependente, basta encontrar o espaço gerado por dois dos três vetores. Vamos considerar o espaço gerado por $\{u, v\}$.

Com efeito: $\quad \alpha u + \beta v = (\alpha, 0, -\alpha) + (2\beta, \beta, 0) = (x, y, z)$. Daí temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ \beta = y \\ -\alpha = z \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $x = 2y - z$ e y e z são números quaisquer reais. Assim

$$S = \{(x, y, z) \in I\!R^3; x = 2y - z\}$$

(d) Base Ortognal para S. Vimos no item anterior que o espaço S fo gerado pelo vetores $\{u, v\}$. Vamos determinar uma base ortgonal usando o método de Gram-Schmidt:

$\hat{u} = u - \dfrac{(u,v)}{(v,v)}v = (1,0,-1) - (4/5, 2/5, 0) = (1/5, -2/5, -1)$

Note que $(\hat{u}, v) = 0$ ou seja, os vetores são ortgonais e portanto a base ortogonal de S é gerada por $\{\hat{u}, v\}$

2) Solução: $S = \{(x,y,z,t)/x + 2y - z = 0 \text{ e } t = 0\}$
i) Verificando se S contém o vetor nulo $O = (0,0,0,0)$
$x + 2y - z = 0, \quad t = 0$

Observe que o vetor nulo $O = (0,0,0,0)$ pertence ao conjunto S.

ii) Se $\mathbf{u} = (a,b,c,d)$ e $\mathbf{v} = (e,f,g,h)$ são elementos de S. Como $c = a + 2b$, com $d = 0$ e $g = e + 2f$ com $h = 0$ temos:
$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (a,b,a+2b,0) + (e,f,e+2f,0) = (a+e, b+f, a+e+2(b+f), 0)$

Logo $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é um elemento de S

iii) Se (a, b, c, d) é um elemento de S e α um escalar, sabendo que $c = a + 2b$ com $d = 0$ então:
$\alpha(a,b,c,d) = \alpha(a,b,a+2b,0) = (\alpha a, \alpha b, \alpha a + \alpha 2b, 0) \in S$
Então $(\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d)$ é um elemento de S.

b) Temos que $(x,y,z,t) = (x,y,x+2y,0)$
$(x,y,z,t) = x(1,0,1,0) + y(0,1,2,0)$

Logo os vetores $\{(1,0,1,0),(0,2,1,0)\}$ são geradores do subespaço S. Para mostrar que é uma base devemos mostrar que os vetores são LI. De fato:
$\alpha(1,0,1,0) + \beta(0,2,1,0) = (\alpha, 2\beta, \alpha+\beta, 0) = (0,0,0,0)$.

Verifica-se facilmente que a única solução do sistema é $\alpha = \beta = 0$. Logo os dois vetores são LI e portanto os vetores $(1,0,1,0)$, $(0,2,1,0)$ formam uma base para o espaço S. A dimensão de S ($\dim S = 2$)

3) Solução:

$$\begin{bmatrix} a-b & 2a \\ a+b & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Igualando os elementos da primeira coluna das duas matrizes temos:

$$\begin{cases} a - b = 5 \\ 2a = 6 \\ a + b = 1 \\ -b = 2 \end{cases}$$

Logo a solução do sistema é $a = 3$, $b = -2$ que satisfaz as 4 equações simultaneamente. e portanto a matriz pertence a S.

3) b)

$$\begin{bmatrix} a-b & 2a \\ a+b & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & k \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Igualando os elementos da primeira coluna das duas matrizes temos:

$$\begin{cases} a - b = -4 \\ 2a = k \\ a + b = 2 \\ -b = -3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos $a = -1$, $b = 3$ e consequentemente $k = -2$.

4) Solução:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4)a)

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} (1.1 + 9. - 3) & (1. - 4 + 9.4) & (1.2 + 9.1) \\ (-2.1 + 2. - 3) & (-2. - 4 + 2.4) & (-2.2 + 2.1) \\ (-2.1 + 3. - 3) & (-2. - 4 + 3.4) & (-2.2 + 3.1) \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} -26 & 32 & 11 \\ -8 & 16 & -2 \\ -11 & 20 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A.B).C = \begin{bmatrix} -26 & 32 & 11 \\ -8 & 16 & -2 \\ -11 & 20 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D1 = \begin{bmatrix} (-26.1+32.-3+11.0) & (-26.4+32.4+11.0) & (-26.2+32.1+11.0) \\ (-8.1+16.-3-2.0) & (-8.4+16.4-2.0) & (-8.2+16.1-2.0) \\ (-11.1+20.-3-1.0) & (-11.-4+20.4-1.0) & (-11.2+20.1-1.0) \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} -122 & 232 & -20 \\ -56 & 96 & 0 \\ -71 & 124 & -2 \end{bmatrix}$$

4)b)

$$D_2 = A^t.B^t$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 9 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B^t = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 9 & 2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -13 \\ 7 & -16 \end{bmatrix}$$

4) c) Não é possível calcular a matriz $D_3 = A.A$, pois o número de colunas da matriz A é diferente do número de linhas da matriz A, ou seja somente é possível calcular A^2, quando A for uma matriz quadrada.

4)d)

$$B.C = . \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_4 = \begin{bmatrix} (1.1-4.-3+2.0) & (1.-4-4.4+2.0) & (1.2-4.1+2.0) \\ (-3.1+4.-3+1.0) & (-3.-4+4.-4+1.0) & (-3.2+4.1+1.0) \end{bmatrix}$$

$$D_4 = \begin{bmatrix} 13 & -20 & -2 \\ -15 & 28 & -2 \end{bmatrix}$$

5) Solução:

$$A = \begin{bmatrix} 200 & 75 \\ 150 & 100 \\ 100 & 125 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 200 & 150 & 100 \\ 75 & 100 & 125 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1.50 & 1.75 \\ 1 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = A^t.B \begin{bmatrix} 200 & 150 & 100 \\ 75 & 100 & 125 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1.5 & 1.75 \\ 1 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 650 & 675 \\ 462.5 & 406.25 \end{bmatrix}$$

1. $c_{11} = 650$ é o custo de transportar os produtos por caminhão para o depósito1.
2. $c_{12} = 675$ é o custo de transportar os produtos por trem para o depósito1.
3. $c_{21} = 462.5$ é o custo de transportar os produtos por caminhão para o depósito2.
4. $c_{22} = 406.25$ é o custo de transportar os produtos por trem para o depósito2.