Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO DA AP3 - Primeiro Semestre de 2012
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(2.0)1. Verifique se os vetores abaixo são linearmente independentes. Se não forem escreva o vetor z como combinação linear dos outros três vetores.

$w = (1, 0, 1, -2)$, $x = (-1, 1, 0, 2)$, $y = (1, -2, -1, -1)$, $z = (1, 3, 4, 4)$.

Solução:

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in I\!R$.
$\alpha_1(1, 0, 1, -2) + \alpha_2(-1, 1, 0, 2) + \alpha_3(1, -2, -1, -1) = (1, 3, 4, 4)$.
Assim, temos o sistema linear abaixo:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 &= 1 \\ \alpha_2 - 2\alpha_3 &= 3 \\ \alpha_1 - \alpha_3 &= 4 \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 &= 4 \end{aligned}$$

Colocando o sistema na forma matricial, temos:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ e também $L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1$, obtemos:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

Deste sistema, temos por L_4 que $\alpha_3 = 6$. Substituindo em L_3 ou L_2 concluímos que $\alpha_2 = 15$. Substituindo em L_1 concluímos que $\alpha_1 = 10$. Logo, é possível escrever z como combinação linear dos outros três vetores da seguinte forma:

$$10(1,0,1,-2) + 15(-1,1,0,2) + 6(1,-2,-1,-1) = (1,3,4,4).$$

Portanto os vetores não são l.i.

(2.5)2. (a) Qual é a transformação linear $f : I\!R^2 \to I\!R^3$ tal que $f(1,1) = (3,2,1)$ e $f(0,-2) = (0,1,0)$?

(b) Encontre a matriz canônica de f, ou seja, a matriz que determina a transformação linear.

Solução:

(1.0)(a) Escrevendo o vetor (x,y) como combinação linear de $(1,1)$ e $(0,-2)$, temos:

$$(x,y) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(0,-2),$$

ou seja,

$$\begin{cases} \alpha_1 & & = x \\ \alpha_1 & - \quad 2\alpha_2 & = y \end{cases}$$

Logo $\alpha_1 = x$ e $\alpha_2 = \frac{x-y}{2}$ e, portanto:

$$(x,y) = x(1,1) + \frac{x-y}{2}(0,-2).$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xf(1,1) + \tfrac{x-y}{2}f(0,-2) \\ &= x(3,2,1) + \tfrac{x-y}{2}(0,1,0) \\ &= (3x, \tfrac{5x-y}{2}, x). \end{aligned}$$

(1.0)(b) Seja M a matriz canônina de f. Logo, devemos ter $f(x,y) = M \cdot (x,y)^T$. Portanto, temos:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2.5)3. Sabe-se que uma alimentação saudável diária equilibrada em vitaminas deve constar de 280 unidades(u) de vitamina A, 120u de vitamina B, 186u de vitamina C e 214u de vitamina D. Com o objetivo de descobrir como deverá ser uma refeição equilibrada, foram estudados 4 alimentos. Fixada a mesma quantidade (1g) de cada alimento, determinou-se que:

(a) o alimento I tem 1u de vitamina A, 1u de B, 0u de C e 1u de D.

(b) o alimento II tem 9u de vitamina A, 1u de B, 0u de C e 1u de D.

(c) o alimento III tem 2u de vitamina A, 2u de B, 5u de C e 1u de D.

(d) o alimento IV tem 1u de vitamina A, 1u de B, 1u de C e 9u de D.

Determine quantos gramas de cada um dos alimentos I, II, III e IV devemos ingerir diariamente para que nossa alimentação seja equilibrada, formulando a questão através de um sistema linear de equações e resolvendo-o pelo método de eliminação de Gauss.

Solução: Devemos encontrar a solução do sistema linear de equações

$$Ax = b,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 280 \\ 120 \\ 186 \\ 214 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss ao sistema $Ax = b$, temos:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 9 & 2 & 1 & 280 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 120 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 186 \\ 1 & 1 & 1 & 9 & 214 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 9 & 2 & 1 & 280 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & -160 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 186 \\ 0 & -8 & -1 & 8 & -66 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 9 & 2 & 1 & 280 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & -160 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 186 \\ 0 & 0 & -1 & 8 & 94 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 9 & 2 & 1 & 280 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & -160 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 186 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{41}{5} & \frac{656}{5} \end{array}\right]$$

Logo, $x_4 = \frac{656/5}{41/5} = 16$, $x_3 = \frac{1}{5}(186 - 16)) = 34$, $x_2 = \frac{-160}{-8} = 20$ e $x_1 = 280 - (9 \cdot 20) - (2 \cdot 34) - (1 \cdot 16) = 15$. Assim as quantidade de alimentos , em gramas, que devemos ingerir diariamente para que a nossa alimentação seja equilibrada, devem ser: alimento I: 15; alimento II: 20; alimento III: 34; alimento IV: 16.

(3.0)4. Determine os autovalores da matriz A abaixo e um autovetor x, associado ao maior autovalor de A, tal que $x \in I\!R^3$ e $|x| = 1$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 3 & 1-\lambda & -2 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) &= (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) \\ &= (1-\lambda)(1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1) = (1-\lambda)\lambda(\lambda - 2). \end{aligned}$$

Considere $det(A - \lambda I) = 0$. Então $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$ são raizes e também os autovalores de A.

Para calcular o autovetor associado a $\lambda_3 = 2$, devemos resolver: $Av = \lambda v \Longrightarrow (A - \lambda I)v = 0$, para $\lambda = 2$, como segue:

$$(A - \lambda I)v_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -x_1 - x_3 = 0 &\Longrightarrow x_3 = -x_1 \\ x_2 = 3x_1 - 2x_3 &\Longrightarrow x_2 = 3x_1 - 2x_3 = 5x_1 \\ -x_1 - x_3 = 0 &\Longrightarrow x_3 = -x_1 \end{aligned}$$

Tomando $x_1 = r \neq 0$, temos que $v_1 = r(1, 5, -1)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_3 = 2$.

Como $|v| = 1$ pelo dado inicial do problema, temos que fazer:

$|v_1| = \sqrt{r^2 + 25r^2 + r^2} = \sqrt{27r^2} = 1 \Longrightarrow {}^{+}_{-} \sqrt{27}\, r = 1 \Longrightarrow r = {}^{+}_{-} \frac{\sqrt{27}}{27}$

Assim o autovetor $\hat{x} = \frac{\sqrt{27}}{27}(1, 5, -1) = \frac{\sqrt{3}}{9}(1, 5, -1)$ associado ao autovalor $\lambda_3 = 2$ satisfaz a condição do problema. De forma análoga temos que $\widehat{x} = \frac{-\sqrt{27}}{27}(1, 5, -1) = \frac{-\sqrt{3}}{9}(1, 5, -1)$ também satisfaz.