Gabarito

Álgebra Linear: AD1 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2015.1

Tutores: Cristina Lopes e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

Se A, B, C, D são vértices consecutivos de um paralelogramo (lados opostos paralelos), então temos:

$AD = BC \Rightarrow D - A = BC \Rightarrow D = A + BC$

Como $BC = C - B = (4, 0, -1) - (-5, 2, -1) = (9, -2, 0)$, pela igualdade acima obtemos

$D = (1, -2, -3) + (9, -2, 0) = (10, -4, -3)$.

2^a Questão) Solução:

a) Considere $av + bw = u$, para a, b escalares reais. Temos:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3a - b & = & -2 \\ -4a + 7b & = & -3 \\ -2a + b & = & 1 \end{array}\right.$$

Considerando a matriz aumentada :

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -4 & 7 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow 3L_2 + 4L_1$ e $L_3 \leftarrow 3L_3 + 2L_1$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 17 & -17 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Por L_3, temos que $b = -1$. Substituindo em L_1, temos : $3a - (-1) = -2 \Rightarrow 3a + 1 = -2 \Rightarrow a = -1$.

Logo, u pode ser escrito como combinação linear de v e w.

b) $cos\theta = \dfrac{vw}{|v||w|} = \dfrac{(3,-4,-2)(-1,7,1)}{\sqrt{29}\sqrt{51}} = \dfrac{-33}{\sqrt{1479}} \tilde{=} -0,85 \Longrightarrow \theta = arcos(-0,85)$

c) Seja $v = v_1 + v_2$.

Como v_1 é paralelo a w, temos que calcular a projeção ortogonal de v sobre W:
$proj_w v = \dfrac{v.w}{||w||^2}.w = \dfrac{(3,-4,-2)(-1,7,1)}{51}.(-1,7,1) = \dfrac{-33}{51}.(-1,7,1) = \dfrac{-11}{17}.(-1,7,1) = \left(\dfrac{11}{17}, \dfrac{-77}{17}, \dfrac{-11}{17}\right)$.

Temos que $v_2 = v - v_1 = (3,4,-2) - \left(\dfrac{11}{17}, \dfrac{-77}{17}, \dfrac{-11}{17}\right) = \left(\dfrac{40}{17}, \dfrac{9}{17}, \dfrac{-23}{17}\right)$.

Assim temos que $v_1 = \left(\dfrac{11}{17}, \dfrac{-77}{17}, \dfrac{-11}{17}\right), v_2 = \left(\dfrac{40}{17}, \dfrac{9}{17}, \dfrac{-23}{17}\right)$.

d) Pelo item a), vimos que u pode ser escrito como combinação linear de v e w.

Temos que v e w são vetores LI's. Logo formam uma base para o subespaço gerado por $[u, v, w]$. Vamos encontrar este subespaço, fazendo $av + bw = (x, y, z)$, onde a, b são escalares reais. Temos:

$$\begin{cases} 3a - b &= x \\ -4a + 7b &= y \\ -2a + b &= z \end{cases}$$

Considerando a matriz aumentada :

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & x \\ -4 & 7 & y \\ -2 & 1 & z \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow 3L_2 + 4L_1$ e $L_3 \leftarrow 3L_3 + 2L_1$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & x \\ 0 & 17 & 3y+4x \\ 0 & 1 & 3z+2x \end{bmatrix}$$

Por L_3, temos que $b = 3z + 2x$. Por L_2, temos que $b = \frac{3y+4x}{17}$. Igualando os dois valores de b, temos : $3z + 2x = \dfrac{3y + 4x}{17} \Rightarrow x = \dfrac{y - 17z}{10}$. Assim, o subespaço gerado por u, v, w é da forma:

$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = \dfrac{y - 17z}{10}\}$.

Podemos encontrar outra base de $[u, v, w]$:

$[u, v, w] = (\dfrac{y - 17z}{10}, y, z) = y(\dfrac{1}{10}, 1, 0) + z(\dfrac{-17}{10}, 0, 1)$. Portanto,
$S = \left\{(\dfrac{1}{10}, 1, 0), (\dfrac{-17}{10}, 0, 1)\right\}$ é uma base para [u,v,w], com dimensão 2.

e) Usando o método de Gram Schmdit para ortogonalizar a base de S:
Seja $w_1 = \left(\dfrac{1}{10}, 1, 0\right)$.
Temos que

$$w_2 = \left(\frac{-17}{10}, 0, 1\right) - \left(\frac{(\frac{-17}{10}, 0, 1)(\frac{1}{10}, 1, 0)}{(\frac{1}{10}, 1, 0)(\frac{1}{10}, 1, 0)}\right)\left(\frac{1}{10}, 1, 0\right)$$

$$= \left(\frac{-17}{10}, 0, 1\right) - \left(\frac{-17}{101}\right)\left(\frac{1}{10}, 1, 0\right) =$$

$$= \left(\frac{-17}{10}, 0, 1\right) + \left(\frac{17}{1010}, \frac{17}{101}, 0\right) = \left(\frac{-170}{101}, \frac{17}{101}, 1\right).$$

Logo uma base ortogonal para W é $\{\left(\frac{1}{10}, 1, 0\right), \left(\frac{-170}{101}, \frac{17}{101}, 1\right)\}$.

3^a Questão) Solução:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} E = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a)

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & 1-0 \\ 0+6 & 2-15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -13 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+2 & 0+3 \\ 2-10 & 0-15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -8 & -15 \end{bmatrix}$$

$$AB-BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -8 & -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-2 & 1-3 \\ 6-(-8) & -13-(-15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 14 & 2 \end{bmatrix}$$

$2C - D = ?$

Só se pode somar ou subtrair matrizes de mesma ordem. Como a matriz $2C$ é do tipo 2×3 e a matriz D é do tipo 3×3, não é possível realizar essa operação.

b)

$$D^T = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2.D^T = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -6 \\ 10 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$E^T = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -5 \\ 4 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3.E^T = \begin{bmatrix} 18 & -3 & -15 \\ 12 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2.D^T - 3.E^T = \begin{bmatrix} -4-18 & -2-(-3) & -6-(-15) \\ 10-12 & -2-0 & 0-0 \\ 0-(-9) & 2-0 & 6-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22 & 1 & 9 \\ -2 & -2 & 0 \\ 9 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(2.D^T - 3.E^T)^T = \begin{bmatrix} -22 & -2 & 9 \\ 1 & -2 & 2 \\ 9 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D^2 = D.D = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-5-0 & -10-5+0 & 0+5+0 \\ 2+1-3 & -5+1+0 & 0-1+3 \\ 6-0-9 & -15-0+0 & 0+0+9 \end{bmatrix}$$

$$D^2 = \begin{bmatrix} -1 & -15 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \\ -3 & -15 & 9 \end{bmatrix}$$

$$D.E = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 6 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12-5-0 & -8+0+0 & 6+0+0 \\ -6+1-5 & -4-0+0 & 3-0+1 \\ -18-0-15 & -12+0+0 & 9+0+3 \end{bmatrix}$$

$$D.E = \begin{bmatrix} -17 & -8 & 6 \\ -10 & -4 & 4 \\ -33 & -12 & 12 \end{bmatrix}$$

$$D^2 - D.E = \begin{bmatrix} -1 & -15 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \\ -3 & -15 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -17 & -8 & 6 \\ -10 & -4 & 4 \\ -33 & -12 & 12 \end{bmatrix}$$

$$D^2 - D.E = \begin{bmatrix} -1-(-17) & -15-(-8) & 5-6 \\ 0-(-10) & -4-(-4) & 2-4 \\ -3-(-33) & -15-(-12) & 9-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -7 & -1 \\ 10 & 0 & -2 \\ 30 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

4^a Questão) Solução:

Considere as incógnitas:

$$\begin{aligned} x &= \text{quantidade de kg do produto X} \\ y &= \text{quantidade de kg do produto Y} \\ z &= \text{quantidade de kg do produto Z} \end{aligned}$$

Para montar o sistema relativo ao problema, vamos somar as quantidades de insumo A dos três produtos X, Y, Z e igualar a quantidade total (em gramas) de insumo A utilizada (linha L_1 do sistema). Faremos o mesmo procedimento para o insumo B (linha L_2 do sistema). Então multiplicaremos o preço de cada kg pelo seu respectivo produto e igualaremos ao valor total que a indústria arrecadou (linha L_3 do sistema). Assim temos:

$$
\begin{cases}
2x + y + 3z &= 1900 \\
x + 3y + 5z &= 2400 \\
3x + 2y + 4z &= 2900
\end{cases}
\tag{1}
$$

Utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss para resolvê-lo. Considere a seguinte matriz aumentada que representa este sistema :

$$
\begin{bmatrix}
2 & 1 & 3 & 1900 \\
1 & 3 & 5 & 2400 \\
3 & 2 & 4 & 2900
\end{bmatrix}
$$

Trocando L_1 por L_2 temos:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 3 & 5 & 2400 \\
2 & 1 & 3 & 1900 \\
3 & 2 & 4 & 2900
\end{bmatrix}
$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ temos

$$
\begin{bmatrix}
1 & 3 & 5 & 2400 \\
0 & -5 & -7 & -2900 \\
0 & -7 & -11 & -4300
\end{bmatrix}.
$$

Agora, fazendo $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$ temos

$$
\begin{bmatrix}
1 & 3 & 5 & 2400 \\
0 & -5 & -7 & -2900 \\
0 & 0 & -6 & -1200
\end{bmatrix}.
$$

Assim, temos o seguinte sistema após a eliminação de Gauss:

$$
\begin{cases}
x + 3y + 5z &= 2400 \\
-5y - 7z &= -2900 \\
-6z &= -1200
\end{cases}
\tag{2}
$$

Por L_3 neste sistema, temos que $z = 200$.

Substituindo z em L_2 temos que $-5y - 7 \times 200 = -2900 \Longrightarrow y = 300$.

Agora, substituindo y e z em L_1, temos que $x = 500$.

Logo, foram vendidos 500 kg do produto X, 300 kg do produto Y e 200 kg do produto Z.