Álgebra Linear

Aula 4: Espaços Vetoriais 3

Mauro Rincon

Márcia Fampa

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

2.9.1 - Conjunto Ortogonal de Vetores

- Definição: Seja V um espaço vetorial. Diz-se que um conjunto de vetores $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ é ortogonal se dois vetores quaisquer, distintos, são ortogonais, ou seja:

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0, \ \text{para } i \neq j$$

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

- Exemplo:
  $B = \{(1, 2, -3); (3, 0, 1); (1, -5, -3\} \subset \mathbb{R}^3$ é
  um conjunto ortogonal.
  De fato:

$$(1, 2, -3) \cdot (3, 0, 1) = (1 \cdot 3) + (2 \cdot 0) + (-3 \cdot 1) = 0$$
$$(1, 2, -3) \cdot (1, -5, -3) = (1 \cdot 1) + (2 \cdot -5) + (-3 \cdot -3) = 0$$
$$(3, 0, 1) \cdot (1, -5, -3) = (3 \cdot 1) + (0 \cdot -5) + (1 \cdot -3) = 0$$

$\therefore$ os vetores são ortogonais.

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

Teorema: Um conjunto ortogonal de vetores não-nulos $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é LI.
De fato:

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \quad (1)$$

Seja $\mathbf{v}_i \in A$ e façamos o produto escalar em (1)

$$(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n) \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \cdot \mathbf{v}_i = 0 \Leftrightarrow$$
$$\alpha_1(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_i) + \alpha_2(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_i) + \ldots + \alpha_n(\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_i) = 0$$

Como A é ortogonal $\Rightarrow (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j) = 0$ se $i \neq j$.
Logo $\alpha_i(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) = 0$. Como $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_i = 0$
$\therefore A$ é LI.

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

2.9.2 - Base Ortogonal

- Diz-se que uma base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de V é ortogonal se o conjunto de vetores é um conjunto ortogonal.

- Exemplo:
  $\{(1, 2, -3); (3, 0, 1); (1, -5, -3)\}$ é uma base ortogonal do $\mathbb{R}^3$.

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

2.9.3 - Base Ortonormal

- Definição: Uma base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de um espaço vetorial V é ortonormal se B é uma base ortogonal e todos os seus vetores são unitários $|\mathbf{v}_i| = 1$, ou seja:

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq j \\ 1 \text{ se } i = j \end{cases}$$

Note que $1 = |\mathbf{v}_i| = \sqrt{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i} \Rightarrow \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = 1.$

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

- Exemplos:

1) $B = \{(1,0);(0,1)\}$ é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^2$.

$(1,0)\cdot(0,1) = 0$(ortogonal)

$(1,0)\cdot(1,0) = 1$(unitário)

$(0,1)\cdot(0,1) = 1$(unitário)

2) $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, onde $\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ \mathbf{u}_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right) \\ \mathbf{u}_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{cases}$

Tem-se que:

$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = 0$ (são ortogonais)

$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = 1$ (unitários)

Logo B é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$.

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

- Base Ortogonal $\Rightarrow$ Base Ortonormal

  Vimos que se $\mathbf{v}$ é um vetor não nulo então $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ é unitário ($|\mathbf{u}| = 1$).
  Diz-se neste caso, que $\mathbf{v}$ está normalizado.
  Assim se $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ é umas base ortogonal, então:

$$\widehat{B} = \left\{ \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}, \frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|}, \ldots, \frac{\mathbf{v}_n}{|\mathbf{v}_n|} \right\}$$

é uma base ortonormal.

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

- Exemplo:
  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, sendo $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, 1, 1)$ e $\mathbf{v}_3 = (0, -1, 1)$.
  Temos que $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = 0$. ($B$ é ortogonal)
  Mas $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 3$, $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = 6$, $\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3 = 2$, ou seja $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ não são unitários.
  Mas $|\mathbf{v}_1| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{v}_2| = \sqrt{6}$, $|\mathbf{v}_3| = \sqrt{2}$.
  Então:
  $$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1) \right\}$$
  é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$.

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

2.9.4 - Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

- Teorema: Seja $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$: base de V. Então existe uma base ortogonal

$$\widehat{B} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\} \text{ para } V$$

Demonstração: Suponhamos que B não seja ortogonal. Considere:

$$\boxed{\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1} \quad ①$$

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

Queremos determinar α na igualdade:

$$\boxed{\mathbf{w_2} = \mathbf{v}_2 - \alpha\mathbf{w}_1} \quad ②$$

de forma que:

$$0 = \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_1 = (\mathbf{v}_2 - \alpha\mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1 - \alpha\mathbf{w}_1\mathbf{w}_1$$

Logo

$$\boxed{\alpha = \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}}$$

Substituindo α em ② :

$$\boxed{\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\right) \cdot \mathbf{w}_1} \quad ③$$

Assim $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ são ortogonais.

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

Considere agora o vetor:

$$\boxed{\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_2 \mathbf{w}_2 - \alpha_1 \mathbf{w}_1}$$

Queremos determinar α_1 e α_2 tal que:

$$\mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{w}_2 = 0, \text{ isto é:}$$

$$0 = (\mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{w}_1) = (\mathbf{v}_3 - \alpha_2 \mathbf{w}_2 - \alpha_1 \mathbf{w}_1) \cdot \mathbf{w}_1$$

$$0 = (\mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{w}_2) = (\mathbf{v}_3 - \alpha_2 \mathbf{w}_2 - \alpha_1 \mathbf{w}_1) \cdot \mathbf{w}_2$$

Logo:

$$(\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1) - \alpha_2 (\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_1) - \alpha_1 (\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1) = 0$$

$$(\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2) - \alpha_2 (\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2) - \alpha_1 (\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2) = 0$$

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

Mas $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ são ortogonais. Logo:

$$(\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1) - \alpha_1(\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1) = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}}$$

$$(\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2) - \alpha_2(\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2) = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2}}$$

Logo:

$$\boxed{\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \left(\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2}\right) \cdot \mathbf{w}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\right) \cdot \mathbf{w}_1} \quad (4)$$

Assim $\mathbf{w}_3$ é ortogonal a $\mathbf{w}_1$ e a $\mathbf{w}_2$.

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

Pode-se concluir o teorema por indução.
Suponha, por este processo, que tenham sido obtidos $(n-1)$ vetores:

$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_{n-1}$ e considera-se o vetor:

$$\boxed{\mathbf{w}_n = \mathbf{v}_n - \alpha_{n-1}\mathbf{w}_{n-1} - \ldots - \alpha_2\mathbf{w}_2 - \alpha_1\mathbf{w}_1} \quad (5)$$

Queremos determinar $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}\}$ tais que:

$$\mathbf{w}_n \cdot \mathbf{w}_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n-1$$

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

Fazendo o produto escalar de 5 com $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_{n-1}$, obtem-se:

$$\begin{cases} \mathbf{w}_n \cdot \mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{w}_1 - \alpha_1(\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1) = 0 \\ \mathbf{w}_n \cdot \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{w}_2 - \alpha_2(\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2) = 0 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_n \cdot \mathbf{w}_{n-1} = \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{w}_{n-1} - \alpha_{n-1}(\mathbf{w}_{n-1} \cdot \mathbf{w}_{n-1}) = 0 \end{cases}$$

Logo:

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}, \alpha_2 = \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2}, \ldots, \alpha_{n-1} = \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{w}_{n-1}}{\mathbf{w}_{n-1} \cdot \mathbf{w}_{n-1}}}$$

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

Substituindo em 5 tem-se que $\mathbf{w}_n$ é ortogonal $\mathbf{w}_{n-1}, \mathbf{w}_{n-2}, \ldots, \mathbf{w}_1$.

$$\widehat{B} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$$

é uma base ortogonal para V.

$$B' = \left\{ \frac{\mathbf{w}_1}{|\mathbf{w}_1|}, \frac{\mathbf{w}_2}{|\mathbf{w}_2|}, \ldots, \frac{\mathbf{w}_n}{|\mathbf{w}_n|} \right\}$$

é uma base ortonormal para V.

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

- Exemplo:
  $B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v}_2\}$, base do $\mathbb{R}^2$, onde $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$.
  Use o Processo de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal do $\mathbb{R}^2$.

  - Etapa 1: Base Ortogonal

    1) $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (1, 0)$

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

2)

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\right) \cdot \mathbf{w}_1$$

Mas

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1 = (1,1) \cdot (1,0) = 1$$
$$\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1 = (1,0) \cdot (1,0) = 1$$

Então:

$$\boxed{\mathbf{w}_2 = (1,1) - \left(\frac{1}{1}\right) \cdot (1,0) = (1,1) - (1,0) = (0,1)}$$

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

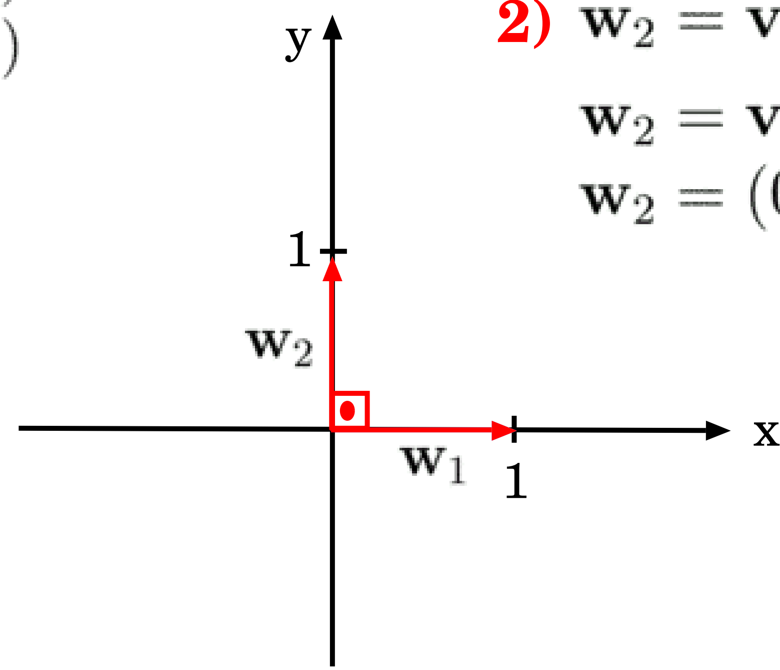
$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = (1,0) \\ \mathbf{v}_2 = (1,1) \end{cases}$$

1) $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (1,0)$

2) $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\right) \cdot \mathbf{w}_1$

$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{w}_1$

$\mathbf{w}_2 = (0,1)$



Animar Voltar

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

- Exemplo:
  $B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, base do $\mathbb{R}^3$, onde $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, -1)$ e $\mathbf{v}_3 = (-1, 2, 3)$.
  Use o Processo de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$.

  - Etapa 1: Base Ortogonal

    1) $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

2)

$$\mathbf{w}_{=}\mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\right) \cdot \mathbf{w}_1$$

Mas

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1 = (-1, 0, -1) \cdot (1, 1, 1) = -2$$
$$\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1 = (1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1) = 3$$

Então:

$$\boxed{\mathbf{w}_2 = (-1, 0, -1) - \left(\frac{-2}{3}\right) \cdot (1, 1, 1) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)}$$

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

3) $$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \left(\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2}\right) \cdot \mathbf{w}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\right) \cdot \mathbf{w}_1$$

Sabendo que:

$$\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2} = 1, \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1} = \frac{4}{3}$$

Então:

$$\boxed{\mathbf{w}_3 = (-1, 2, 3) - 1\left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right) - \frac{4}{3}(1, 1, 1) = (-2, 0, 2)}$$

Logo $\widehat{B} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ é ortogonal.

2.9 - Bases Ortonormais em $\mathbb{R}^n$

Mas:

$$|\mathbf{w}_1| = \sqrt{3}; |\mathbf{w}_2| = \frac{\sqrt{6}}{3}; |\mathbf{w}_3| = 2\sqrt{2}$$

Definindo:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{|\mathbf{w}_1|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{|\mathbf{w}_2|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{w}_3}{|\mathbf{w}_3|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-2, 0, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$$

$B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$: base ortonormal

2.10 - Complementos Ortogonais

Definição: Seja S um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Um vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ é dito ortogonal a S se ele for ortogonal a todos os vetores de S. O conjunto de todos os vetores em $\mathbb{R}^n$ que são ortogonais a S é chamado Complemento Ortogonal de S em $\mathbb{R}^n$ e é representado por $S^\perp$.

Logo:

$$S^\perp = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n ; \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0, \forall \mathbf{v} \in S\}$$

Observação: $S \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbf{0} \in S^\perp$.

2.10 - Complementos Ortogonais

- Exemplo:
Seja $V = \mathbb{R}^3$ com o produto interno usual.

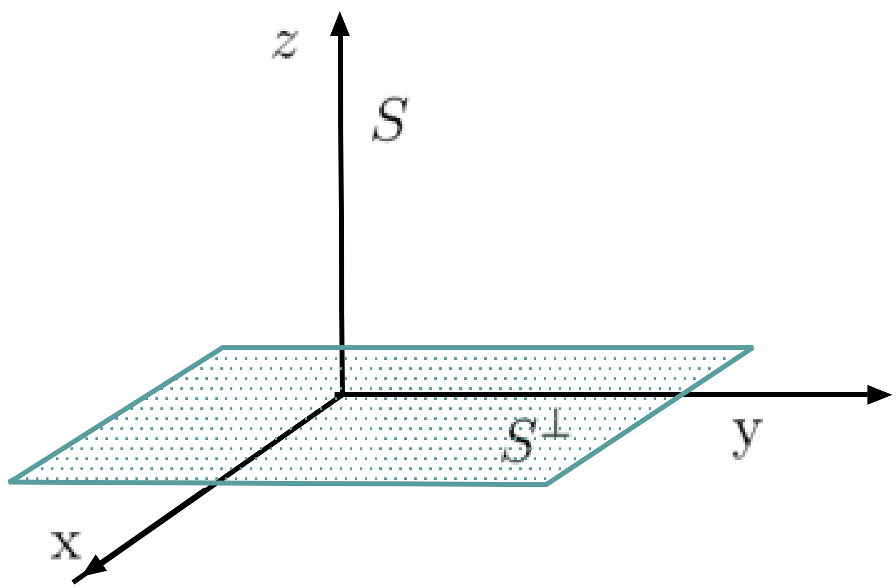
$$S = \{(0,0,c); c \in \mathbb{R}\}$$

Então

$$\mathbf{u} = (x,y,z) \in S^{\perp} \Leftrightarrow (x,y,z)\cdot(0,0,c) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x \cdot 0 + y \cdot 0 + z \cdot c \Rightarrow \boxed{z = 0} \Rightarrow$$

$$\boxed{S^{\perp} = \{(x,y,0); x, y \in \mathbb{R}\}}$$

2.10 - Complementos Ortogonais



2.10 - Complementos Ortogonais

Teorema:
Seja S um subespaço do $\mathbb{R}^n$. Então:

a) $S^\perp$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

b) $S \cap S^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

2.10 - Complementos Ortogonais

- Demonstração:

a) Sejam $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2 \in S^\perp \Rightarrow \begin{array}{l} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} = 0, \forall \mathbf{v} \in S \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v} = 0, \forall \mathbf{v} \in S \end{array}$

Logo $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v} = 0 + 0 = 0.$

$\therefore \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in S^\perp.$

Por outro lado temos:

$(\alpha \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}) = \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha \mathbf{u}_1 \in S^\perp$

$\therefore S^\perp$ é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^n$.

b) Seja $\mathbf{u} \in S \cap S^\perp \Rightarrow \mathbf{u} \in S$ e $\mathbf{u} \in S^\perp$.

Mas $\mathbf{u} \in S^\perp \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{u} = 0.}$

2.10 - Complementos Ortogonais

Teorema:
Seja S um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Então:

$$\mathbb{R}^n = S \oplus S^\perp$$

De fato: Se $S = \{\mathbf{0}\}$ então
$S^\perp = \mathbb{R}^n \Rightarrow S + S^\perp = \mathbb{R}^n$.
Seja $S \neq \{\mathbf{0}\}$ um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e considere
$B = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_p\}$ uma base ortonormal de S e
seja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.
Considere:

$$\boxed{\mathbf{v}_1 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \ldots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_p)\mathbf{w}_p \in S}$$

2.10 - Complementos Ortogonais

Definimos $\boxed{\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1.}$
Afirmo que: $\mathbf{v}_2 \in S^{\perp}$, ou seja, $\boxed{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_i = 0.}$
<u>De fato</u>:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1 &= (\mathbf{v} - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{w}_1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_1 = 0 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_3 = \ldots = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_p = 0 \end{aligned}$$

Assim, $\mathbf{v}_2 \in S^{\perp}$, pois é ortogonal a todos os vetores da base $B = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_p\}$ de S.
$\therefore$ Como $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.
Como $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n; \mathbf{v}_1 \in S$ e $\mathbf{v}_2 \in S^{\perp} \Rightarrow \mathbb{R}^n = S \oplus S^{\perp}$.
(Vimos que $S \cap S^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$)

cederj

2.11 - Projeção Ortogonal

Seja $\mathbb{R}^n = S \oplus S^\perp$, e considere $B = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_p\}$ uma base ortonormal de S.
Sabemos que:

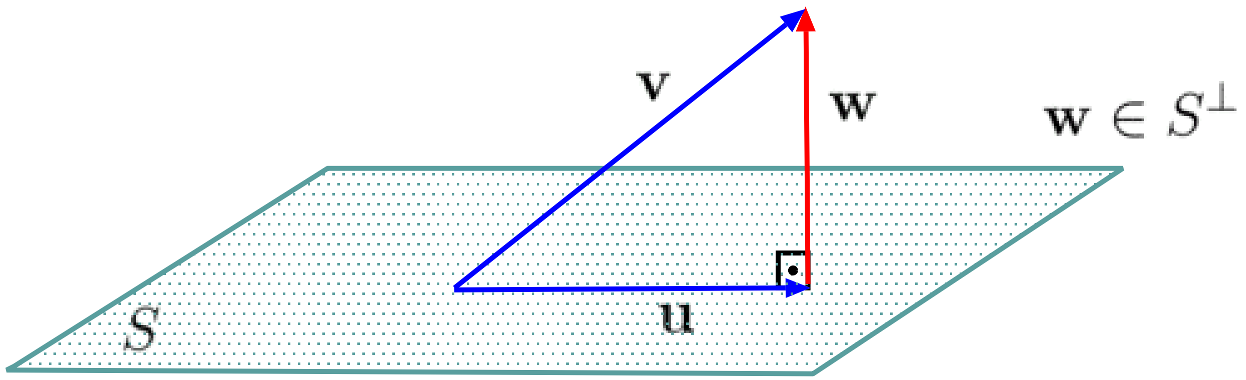
$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n; \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{u} \in S \text{ e } \mathbf{w} \in S^\perp$$

Então vimos que:

$$\boxed{\mathbf{u} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \ldots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_p)\mathbf{w}_p \in S}$$

O vetor $\mathbf{u}$ é chamado de projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre S e representa-se $\mathbf{u} = \text{proj}_s \mathbf{v}$.

2.11 - Projeção Ortogonal



2.11 - Projeção Ortogonal

Observação: Se $B = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_p\}$ é uma base ortogonal de S então:

$$\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1\cdot\mathbf{w}_1}\right)\mathbf{w}_1 + \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2\cdot\mathbf{w}_2}\right)\mathbf{w}_2 + \ldots + \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_p}{\mathbf{w}_p\cdot\mathbf{w}_p}\right)\mathbf{w}_p$$

$$\boxed{\mathbf{u} = \mathrm{proj}_S\mathbf{v}}$$

2.11 - Projeção Ortogonal

Exemplo: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ com base ortonormal $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, onde:

$$\mathbf{w}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}\right) \text{ e } \mathbf{w}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Seja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3; \mathbf{v} = (2,1,3)$. Determine a projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ em S e o vetor $\mathbf{w} \in S^{\perp}$.
Por definição:

$$\mathbf{u} = \text{proj}_S\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2$$

2.11 - Projeção Ortogonal

Mas

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_1) = (2,1,3)\cdot\left(\tfrac{2}{3},\tfrac{-1}{3},\tfrac{-2}{3}\right) = \tfrac{-1}{3}$$

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_2) = (2,1,3)\cdot\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{5}{\sqrt{2}}$$

Logo:

$$\mathbf{u} = \mathrm{proj}_S\mathbf{v} = \frac{-1}{3}\mathbf{w}_1 + \frac{5}{\sqrt{2}}\mathbf{w}_2 = \left(\frac{41}{18},\frac{-1}{9},\frac{49}{18}\right).$$

Por outro lado:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}+\mathbf{w} \Leftrightarrow \mathbf{w} = \mathbf{v}-\mathbf{u} = \left(\frac{-5}{18},\frac{10}{9},\frac{5}{18}\right)$$

2.11 - Projeção Ortogonal

Além disso a distância de $\mathbf{v}$ ao plano S:

$$||\mathbf{w}|| = ||\mathbf{v} - \mathbf{u}|| = ||\mathbf{v} - \mathrm{proj}_S\mathbf{v}|| = 1,38889$$

- Teorema: Seja S um subespaço de $\mathbb{R}^n$ então, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ o vetor em S mais próximo de $\mathbf{v}$ é $\mathrm{proj}_S\mathbf{v}$, ou seja,

$$\boxed{||\mathbf{v} - \mathrm{proj}_S\mathbf{v}|| \leq ||\mathbf{v} - \mathbf{u}||, \forall \mathbf{u} \in S}$$

Exercícios

- Fazer os exercícios das páginas 231 a 236 do livro texto.