Álgebra Linear

Aula 8: Soluções de Sistemas de Equações Lineares

Mauro Rincon

Márcia Fampa

6.1 - Forma Escada reduzida por linhas

Considere a matriz aumentada:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right],$$

que representa o seguinte sistema linear:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & + & 5x_4 & = & 0 \\ & x_2 & & - & x_4 & = & 3 \\ & & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \end{array}\right.,$$

onde $x_4 = r$ e r é número real qualquer.

6.1 - Forma Escada reduzida por linhas

Em particular se excluimos a variável x_4 temos:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

onde a solução é $x = (x_1,\ x_2,\ x_3) = (0,\ 3,\ 2)$.

6.1 - Forma Escada reduzida por linhas

Definição Uma matriz $m \times n$ está na **forma escada reduzida por linhas** se ela satisfaz as seguinte propriedades:

1) Todas as linhas nulas (linhas que contém somente elementos nulos), se existirem, ocorrem abaixo de todas as outras linhas não-nulas.

2) O primeiro elemento não-nulo (da esquerda para a direita) de cada linha não nula é 1.

6.1 - Forma Escada reduzida por linhas

3) Sejam as linhas não nulas e sucessivas i e $i+1$. Então o primeiro elemento não-nulo da linha $i+1$ está a direita do primeiro elemento não-nulo da linha i.

4) Se uma coluna contém o primeiro elemento não-nulo de alguma linha, então todos os outros elementos desta coluna são iguais a zero.

6.1 - Forma Escada reduzida por linhas

Exemplo 1: As matrizes seguintes estão na forma escada reduzida por linhas,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Passo a passo

Voltar

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.1 - Forma Escada reduzida por linhas

Exemplo 2: As matrizes seguintes **não** estão na forma escada reduzida por linhas,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Passo a passo | Voltar

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

6.1 - Forma Escada reduzida por linhas

Teorema: Toda matriz não-nula $m \times n$ é equivalente por linhas a uma única matriz em forma escada reduzida por linhas.

6.1 - Forma Escada reduzida por linhas

Transforme a matriz numa equivalente por linhas que está na **forma escada reduzida por linhas.**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Passo a passo Voltar

Exercícios

- Fazer os exercícios de 1 a 7 da página 54 do livro texto.

6.2 - Resolvendo Sistemas Lineares

<u>Teorema</u>: Sejam $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ e $\mathbf{Cx} = \mathbf{d}$ dois sistemas lineares com m equações e n incógnitas. Se as matrizes aumentadas $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ e $[\mathbf{C}|\mathbf{d}]$ desses sistemas são equivalentes por linha, então os dois sistemas têm exatamente as mesmas soluções.

6.3 - Método de Redução de Gauss-Jordan

Seja $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ um sistema linear. O método de Gauss-Jordan para resolução do sistema é dado pelas seguintes etapas:

- **Etapa 1** Obtenção da matriz aumentada $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ do sistema.
- **Etapa 2** Transformação da matriz aumentada à sua forma reduzida por linhas usando operações elementares.
- **Etapa 3** Resolva o sistema linear da Etapa 2.

6.3 - Método de Redução de Gauss-Jordan

Exemplo 3: Resolva o sistema linear pelo método de Gauss-Jordan,

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

- **Etapa 1** A matriz aumentada do sistema é:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

6.3 - Método de Redução de Gauss-Jordan

- **Etapa 2** Transformação da matriz aumentada $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ à sua forma reduzida por linhas. Para isto considere os seguintes passos:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

6.3 - Método de Redução de Gauss-Jordan

- **Etapa 3** O sistema linear representado pela matriz aumentada $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^7$ é dado por

$$\begin{cases} x_1 & & & = & 1 \\ & x_2 & & = & 2 \\ & & x_3 & = & -1 \end{cases}$$

O sistema linear tem como solução $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (1, 2, -1)$. Como os sistemas $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ e $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^7$ são equivalentes, então $\mathbf{x} = (1, 2, -1)$ é a solução procurada.

6.3 - Método de Redução de Gauss-Jordan

Exemplo 4: Resolva o sistema linear pelo método de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ -x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

- **Etapa 1** A matriz aumentada do sistema é:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 4 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

6.3 - Método de Redução de Gauss-Jordan

- **Etapa 2** Transformação da matriz aumentada $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ à sua **forma escada reduzida por linhas.**

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 4 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

6.3 - Método de Redução de Gauss-Jordan

- **Etapa 3** A matriz aumentada $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]^7$ representa o seguinte sistema linear

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & & & = & 1 \\ & x_2 & & - & x_4 & = & 0 \\ & & x_3 & - & x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

Seja r um número real e $x_4 = r$. Então a solução é $\mathbf{x} = (1, r, 1 + r, r); r \in \mathbb{R}$.

Exercícios

- Fazer os exercícios de 8 a 18 das páginas 55 e 56 do livro texto.

6.4 - Sistemas Lineares Homogêneos

Um sistema linear da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & \dots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

é chamado **sistema linear homogêneo**. Na forma matricial o sistema linear é representado por

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$$

6.4 - Sistemas Lineares Homogêneos

Se $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (0, 0, \cdots, 0)$ então $\mathbf{x}$ é uma solução do sistema linear homogêneo. Esta solução é chamada solução trivial.
Uma solução não trivial é uma solução, onde nem todos os elementos x_i são iguais a zero.

6.4 - Sistemas Lineares Homogêneos

Exemplo 5: Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 & & & + & 2x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{cases}$$

A matriz aumentada do sistema é dada por

$$[\mathbf{A}|\mathbf{0}] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

6.4 - Sistemas Lineares Homogêneos

Usando o método de redução de Gauss-Jordan, obtemos a seguinte matriz aumentada na forma escada reduzida por linhas

$$[\mathbf{A}|\mathbf{0}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

A única solução do sistema é $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$, ou seja o sistema tem somente a solução trivial.

6.4 - Sistemas Lineares Homogêneos

Exemplo 6: Considere o sistema linear homogêneo

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \end{array}\right.$$

A matriz aumentada é dada por

$$[\mathbf{A}|\mathbf{0}] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

6.4 - Sistemas Lineares Homogêneos

Usando o método de redução de Gauss-Jordan, obtemos a seguinte matriz aumentada na forma escada reduzida por linhas

$$[\mathbf{A}|\mathbf{0}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right],$$

que representa o seguinte sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & & & + & 8x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Se $x_4 = r \Rightarrow x_3 = -2r, x_2 = 0$ e $x_1 = 2r$. Então $x = (2r, 0, -2r, r)$ é uma solução não trivial se $r \neq 0$.

6.4 - Sistemas Lineares Homogêneos

- O Teorema abaixo mostra em que condições existe solução não trivial para um sistema linear homogêneo.

- Teorema: Um sistema linear homogêneo com m-equações e n-incógnitas tal que $m < n$ tem uma solução não trivial.

6.4 - Sistemas Lineares Homogêneos

Demonstração:

Seja $\mathbf{A}$ a matriz de ordem $m \times n$, com $m < n$ e a matriz aumentada $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$, e seja $[\mathbf{C}|\mathbf{0}]$ a sua forma escada reduzida por linhas. Temos que os dois sistemas são equivalentes. Seja r o número de linhas não nulas da matriz $\mathbf{C}$. Então $r \leq m < n$. Logo o sistema $\mathbf{Cx} = \mathbf{0}$ tem r-equações com n-incógnitas. Assim podemos resolver o sistema para r-incógnitas em termos das $n - r$ incógnitas restantes. As $(n - r)$ incógnitas podem assumir qualquer valor, logo podem assumir valores diferentes de zero e portanto temos uma solução não trivial. Como os dois sistemas $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{Cx} = \mathbf{0}$ são equivalentes, conclui-se o teorema.

6.4 - Sistemas Lineares Homogêneos

Corolário: Se um sistema linear homogêneo tem m- equações com n- incógnitas e admite somente a solução trivial $\mathbf{x} = (0, 0, \cdots 0)$, então $m \geq n$.

Exercícios

- Fazer os exercícios de 19 a 26, 31 e 32 da página 56 do livro texto, e os exercícios teóricos T_1 e T_{13} das páginas 56 e 57.