Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP3 - Segundo Semestre de 2012
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

1.(3.0) Seja $S = \{(x, y, z) \in I\!R^3 / z = 2x - y\}$ e considere as operações usuais de adição e multiplicação por escalar.

(a) Prove que S é uma subespaço vetorial do $I\!R^3$.
Solução:

i. $0 = (0, 0, 0) \in S$, pois $0 = 2.(0) - 0 = 0$

ii. Sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ pertencentes a S. Logo $z_1 = 2x_1 - y_1$ e $z_2 = 2x_2 - y_2$.
Somando as igualdades tem-se que

$$z_1 + z_2 = (2x_1 - y_1) + (2x_2 - y_2) = 2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) \in S$$

Assim $(u + v) \in S$.

iii. Seja α um escalar e $u \in S$. Então $z_1 = 2x_1 - y_1$. Logo

$$\alpha z_1 = \alpha(2x_1 - y_1) = 2(\alpha x_1) - \alpha y_1,$$

ou seja $\alpha u \in S$.

Das condições anteriores, resulta que o conjunto S satisfaz todas as propriedades de um subespaço vetorial.

(b) Determine uma base para S e sua dimensão (dim S).
Solução: Temos que

$$\begin{aligned}(x, y, z) = (x, y, 2x - y) &= (x, 0, 2x) + (0, y, -y) \\ &= x(1, 0, 2) + y(0, 1, -1)\end{aligned}$$

Logo $B = \{(1,0,2);(0,1,-1)\}$ gera o subespaço vetorial S.
Mostraremos que os vetores, além de gerar S também são LI.
De fato, seja α_1 e α_2 escalares. Considere a combinação linear:

$$\alpha_1(1,0,2) + \alpha_2(0,1,-1) = (\alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_1 - \alpha_2) = (0,0,0)$$

Resolvendo o sistema, obtemos que a única solução possível é $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.
Portanto os vetores são LI e assim o conjunto B é uma das infinitas bases de S e dim(S)=2.

(c) Complemente a base de S, de tal forma a obter uma base para o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Solução: Devemos determinar um vetor (x,y,z) que não possa ser escrito como combinação linear dos vetores de B. Sejam os escalares α_1 e α_2 e tal que

$$(x,y,z) = \alpha_1(1,0,2) + \alpha_2(0,1,-1) = (\alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_1 - \alpha_2)$$

Logo temos o sistema linear

$$\begin{cases} \alpha_1 & & = & x \\ & \alpha_2 & = & y \\ 2\alpha_1 & - \ \alpha_2 & = & z \end{cases}$$

Assim o vetor (x,y,z) complementa S em relação ao espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, se não satisfaz as três equações simultaneamente, como por exemplo: $v_3 = (x,y,z) = (0,1,2)$. Assim v_3 não pode ser escrito como combinação linear dos vetores de B, ou seja, v_3 é linearmente independente em relação aos dois vetores de B, e portanto $\widehat{B} = \{(1,0,2);(0,1,-1);(0,1,2)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$.

2.(2.0) Calcule o determinante da matriz A usando a expansão de cofatores (Fórmula de Laplace),

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: Podemos expandir o determinante em relação à uma linha ou coluna. É claro que é melhor expandir em relação a uma linha ou coluna que tenha o maior número de zeros, já que, nesse caso, os cofatores A_{ij} dos a_{ij} que são nulos não precisam ser calculados, uma vez que $a_{ij}A_{ij} = 0$. Expandindo, então, em relação à segunda linha, obtemos:

$$det(A) = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} = a_{23}A_{23},$$

pois $a_{21} = a_{22} = a_{24} = 0$. Mas sabemos que $A_{ij} = (-1)^{i+j}det(M_{ij})$, onde M_{ij} é o determinante menor de a_{ij}. Mas

$$A_{23} = (-1)^{2+3}det(M_{23}) = (-1)det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando a regra prática para calcular o determinante da matriz 3×3, obtemos que $(detM_{23}) = \{-2 + 0 - 15\} - \{6 + 12 + 0\} = -35$. Assim $A_{23} = (-1)det(M_{23}) = 35$. Logo

$$det(A) = a_{23}.A_{23} = -2.(35) = -70$$

3.(3.0) Determine o conjunto de soluções do sistema linear abaixo. Em seguida responda, justificando, se este conjunto é um subespaço vetorial do $I\!R^3$.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 = & -6 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 = & -38 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 = & -3 \end{array} \right.$$

Solução: A matriz aumentada do sistema linear é dado por

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & | & -6 \\ 3 & -2 & -4 & | & -38 \\ 1 & 2 & 3 & | & -3 \end{bmatrix}$$

1^a Etapa : Transformar a matriz aumentada à sua forma escada reduzida por linhas, usando operações elementares em suas linhas.

Divida todos os termos da primeira linha da matriz aumentada por 2 e em seguida considere as seguintes operações entre linhas:

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - L_1. \end{aligned}$$

Após essas operações obtemos a seguinte matriz aumentada:

$$[A|b]^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & -3 \\ 0 & -8 & -13 & | & -29 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Divida todos os termos da segunda linha por (-8) e em seguida considere a seguinte operação entre linhas:

$$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2,$$

obtendo-se a seguinte matriz aumentada

$$[A|b]^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/4 & | & -41/4 \\ 0 & 1 & 13/8 & | & 29/8 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Assim as soluções do sistema linear são dadas por

$$\begin{aligned} x &= \frac{-41 + z}{4} \\ y &= \frac{29 - 13z}{8} \end{aligned}$$

O conjunto de soluções é: $\{(\frac{-41+z}{4}, \frac{29-13z}{8}, z) : z \in I\!R\}$.

Como o vetor nulo não pertence ao conjunto de soluções, ele não é um subspaço vetorial.

4.(2.0) Seja $T : I\!R^2 \to I\!R^2$ uma transformação linear satisfazendo a seguinte condição $T(2,1) = (3,-2)$ e $T(0,-1) = (1,4)$. Determine $T(x,y)$.

Solução: Como $(2,1)$ e $(0,-1)$ formam uma base para o $I\!R^2$ então para todo par ordenado $(x,y) \in I\!R^2$, existem escalares α_1 e α_2 tal que

$$(x,y) = \alpha_1(2,1) + \alpha_2(0,-1) = (2\alpha_1, \alpha_1 - \alpha_2),$$

ou seja, $\alpha_1 = x/2$ e $\alpha_2 = x/2 - y$. Como T é uma transformação linear, então

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T((x/2)(2,1) + (x/2-y)(0,-1)) = (x/2)T(2,1) + (x/2-y)T(0,-1) \\ &= (x/2)(3,-2) + (x/2-y)(1,4) = (2x-y, x-4y) \end{aligned}$$

Logo, $T(x,y) = (2x - y, x - 4y)$.