Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABAROTO DA AP2 - Segundo Semestre de 2008
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(3.0)1. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine a matriz inversa de A, B e C.

(b) Utilizando as matrizes dadas e suas inversas, determine a matriz quadrada, de ordem 2, X, tal que:

i. $ABX = C$

ii. $AX^2C = AXBC$

Solução:

(a)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -5 & 12 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{3} \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) i. $ABX = C \Rightarrow A^{-1}ABX = A^{-1}C \Rightarrow BX = A^{-1}C \Rightarrow B^{-1}BX = B^{-1}A^{-1}C \Rightarrow X = B^{-1}A^{-1}C \Rightarrow$

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{3} \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -5 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{34}{3} & -27 \\ -13 & 31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 34 & -27 \\ -39 & 31 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ii. $AX^2C = AXBC \Rightarrow A^{-1}AX^2C = A^{-1}AXBC \Rightarrow X^2C = XBC \Rightarrow X^{-1}X^2C = X^{-1}XBC \Rightarrow XC = BC \Rightarrow XCC^{-1} = BCC^{-1} \Rightarrow X = B \Rightarrow$

$$X = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

(2.0)2. Usando a expansão de cofatores (Fórmula de Laplace), determine os valores de x, para os quais, o determinante da matriz A abaixo é igual a 12.

$$A = \begin{bmatrix} x & 3 & 2 \\ 5 & x & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução:

$$\det(A) = x \times \begin{vmatrix} x & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 5 & x \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$\det(A) = x(x-3)-3(5-1)+2(15-x) = x^2-3x-12+30-2x = x^2-5x+18.$

$$\begin{aligned} \det(A) = 12 \quad & \Rightarrow \quad x^2 - 5x + 18 = 12 \\ & \Rightarrow \quad x^2 - 5x + 6 = 0 \\ & \Rightarrow \quad x = \tfrac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1} \\ & \Rightarrow \quad x = \tfrac{5 \pm 1}{2} \\ & \Rightarrow \quad x = 2 \text{ ou } x = 3. \end{aligned}$$

(3.0)3. Para a transformação linear de $I\!R^3 \to I\!R^3$ abaixo, determine seu núcleo, sua imagem, a dimensão e uma base para cada um destes subespaços, e diga se ela é injetora ou sobrejetora, justificando a resposta.

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z).$$

Solução:

$$N(T) = \{(x, y, z) \in I\!R^3 / T(x, y, z) = (0, 0, 0)\}.$$

De:

$$(x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z) = (0, 0, 0),$$

vem o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

cuja solução geral é $(5z, -2z, z)$, $z \in I\!R$. Logo:

$$N(T) = \{(5z, -2z, z)/z \in I\!R\} = \{z(5, -2, 1)/z \in I\!R\} = [(5, -2, 1)].$$

Desta forma $\{(5, -2, 1)\}$ é uma base para o núcleo de T e sua dimensão é igual a 1. Como $N(T) \neq (0, 0, 0)$, a transformação não é injetora.

$$Im(T) = \{(a, b, c) \in I\!R^3/T(x, y, z) = (a, b, c)\}.$$

De:

$$(x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z) = (a, b, c),$$

vem o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ y + 2z = b \\ x + 3y + z = c \end{cases}$$

que somente terá solução se $a + b + c = 0$. Logo:

$$\begin{aligned} Im(T) &= \{(a, b, c)/a = -b - c\} = \{b(-1, 1, 0) + c(-1, 0, 1)/b, c \in I\!R\} \\ &= [(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)]. \end{aligned}$$

Desta forma $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ é uma base para a imagem de T e sua dimensão é igual a 2. Como $Im(T) \neq I\!R^3$, a transformação não é sobrejetora.

(2.0)4. Sabendo que $T : I\!R^2 \to I\!R^3$ é uma transformação linear e que

$$T(1, -1) = (3, 2, -2) \qquad \text{e} \qquad T(-1, 2) = (1, -1, 3),$$

determinar $T(x, y)$.

Solução:

Observando, inicialmente, que $\{(1, -1), (-1, 2)\}$ é uma base par $I\!R^2$, podemos expressar o vetor $(x, y) \in I\!R^2$ como combinação linear dos vetores dessa base:

$$(x, y) = a(1, -1) + b(-1, 2)$$

ou

$$\begin{cases} a - b = x \\ -a + 2b = y \end{cases}$$

sistema do qual, temos: $a = 2x + y$ e $b = x + y$. Portanto,

$$\begin{aligned}
&T(x,y) = aT(1,-1) + bT(-1,2),\\
&T(x,y) = (2x+y)(3,2,-2) + (x+y)(1,-1,3),\\
&T(x,y) = (6x+3y, 4x+2y, -4x-2y) + (x+y, -x-y, 3x+3y),\\
&T(x,y) = (7x+4y, 3x+y, -x+y).
\end{aligned}$$