Gabarito

Álgebra Linear: AD1 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2016.2

Tutores: Gabriel Thomaz e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

Para o cálculo das dimensões dos espaços linha e coluna, temos de ver quais dos vetores são linearmente independentes:

a)ESPAÇO COLUNA DA MATRIZ A.

Os vetores são $v_1 = [1 \;\; 1 \;\; 3]^t$, $v_2 = [1 \;\; 3 \;\; 1]^t$ e $v_3 = [0 \;\; 1 \;\; -1]^t$. Repare que $v_2 = v_1 + 2v_3$. Assim, sabemos que v_2 não pertence a base do espaço coluna de A.

Agora, vamos verificar se $v_1 e v_3$ são L.I.. Observe que,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_3 = (0,0,0) \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 - \alpha_2) = (0,0,0)$$

Daí, concluímos que

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$3\alpha_1 - \alpha_2 = 0$$

Assim, da segunda equação acima, $\alpha_2 = -\alpha_1 = 0$. Portanto, v_1 e v_3 são L.I.. Como temos dois vetores na base, a dimensão do espaço conluna A é igual a 2.

ESPAÇO COLUNA DA MATRIZ B.

Os vetores são $v_1 = [1 \;\; 0 \;\; 0]^t$, $v_2 = [1 \;\; 2 \;\; 0]^t$ e $v_3 = [0 \;\; 1 \;\; 0]^t$. Repare que $v_2 = v_1 + 2v_3$. Assim, sabemos que v_2 não pertence a base do espaço coluna de B.

Agora, vamos verificar se $v_1 e v_3$ são L.I.. Observe que,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_3 = (0,0,0) \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, 0) = (0,0,0)$$

Daí, concluímos que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

Portanto, v_1 e v_3 são L.I.. Como temos dois vetores na base, a dimensão do espaço conluna A é igual a 2.

b)ESPAÇO LINHA DA MATRIZ A.

Os vetores são $v_1 = [1 \;\; 1 \;\; 0]^t$, $v_2 = [1 \;\; 3 \;\; 1]^t$ e $v_3 = [3 \;\; 1 \;\; -1]^t$. Repare que $v_1 = \frac{1}{4}(v_2 + v_3)$. Assim, sabemos que v_1 não pertence a base do espaço linha de A.

Agora, vamos verificar se $v_2 e v_3$ são L.I.. Observe que,

$$\alpha_1 v_2 + \alpha_2 v_3 = (0,0,0) \Rightarrow (\alpha_1 + 3\alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) = (0,0,0)$$

Daí, concluímos que

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$$

$$3\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

Sabemos, então que $\alpha_1 = \alpha_2$ e multiplicando a segunda equação acima por 3 e somando esta com a terceira, temos que $\alpha_2 = 0$

Portanto, v_2 e v_3 são L.I.. Como temos dois vetores na base, a dimensão do espaço linha A é igual a 2.

ESPAÇO LINHA DA MATRIZ B.

Os vetores são $v_1 = [1 \;\; 1 \;\; 0]^t$, $v_2 = [0 \;\; 2 \;\; 1]^t$ e $v_3 = [0 \;\; 1 \;\; 0]^t$. Repare que $v_3 = 0v_1 + 0v_2$. Assim, sabemos que v_3 não pertence a base do espaço linha de B.

Agora, vamos verificar se $v_1 e v_2$ são L.I.. Observe que,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = (0,0,0) \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2) = (0,0,0)$$

Sabemos, então que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Portanto, v_1 e v_2 são L.I.. Como temos dois vetores na base, a dimensão do espaço linha B é igual a 2.

c)Calculando $A^t B^t$

Primeiro, vamos escrever separadamente as matrizes A^t e B^t, assim,

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, fazendo a conta com detalhes,

$$A^tB^t = \begin{bmatrix} (1*1+1*1+3*0) & (1*0+2*1+3*1) & (1*0+1*0+3*0) \\ (1*1+3*1+1*0) & (1*0+3*2+1*1) & (1*0+3*0+1*0) \\ (0*1+1*1-1*0) & (0*0+1*2-1*1) & (0*0+1*0-1*0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando $(AB)^t$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (AB)^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando B^tA^t. Como já foi mostrado anteriormente quem são A^t e B^t, temos que:

$$B^tA^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, como cada entrada de $(AB)^t$ e B^tA^t são iguais, segue que $(AB)^t = B^tA^t$.

d) Para determinar a solução vamos utilizar a matriz extendida e realizar as operações entre as linhas da matriz. Assim,

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & -2 \\ 4 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

fazendo $L_1 \Leftrightarrow L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

fazendo $L_2 \Leftarrow L_2 - 4L_1$ e $L_3 \Leftarrow L_3 - 2L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

fazendo $L_2 \Leftarrow L_2/3$ e $L_3 \Leftarrow L_3/3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

fazendo $L_3 \Leftarrow L_3 - L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Daí, fazendo $z = r$, temos, da segunda linha da matriz que $y = -2$ e da primeira linha que $x - 2 = 2 \rightarrow x = 4$. Portanto, a solução é $X = (4, -2, r), \forall r \in \mathbb{R}$.

e)Com o mesmo procedimento feito na letra anterior, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

fazendo $L_2 \Leftarrow L_2 - 3L_1$ e $L_3 \Leftarrow L_3 - 2L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -4 & 8 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

fazendo $L_2 \Leftarrow L_2/4$ e $L_3 \Leftarrow L_3/2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

fazendo $L_3 \Leftarrow L_3 - l_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Daí, fazendo $z = r$, temos, da segunda linha da matriz que $y - r = 2 \to y = 2 + r$ e da primeira linha que $x + 2 + r + 3r = -2 \to x = -4r - 4$. Portanto, a solução é $X = (-4r - 4, 2 + r, r), \forall r \in \mathbb{R}$.

2^a Questão) Solução:

a) Vamos verificar se o conjunto atende as propriedades de espaço vetorial:

$0 \in W$? Sim, basta tomar $(0, 0, 0)$ que satisfaz a condição dada.

É fechado para soma? $(x_1, 0, z_1) + (x_2, 0, z_2) = (x_1 + x_2, 0, z_1 + z_2) \in W$. É fechado para soma.

É fechado para produto por escalar? Seja $c \in \mathbb{R} \Longrightarrow c(x, 0, z) = (cx, 0, cz) \in W$. Logo é fechado para produto por escalar.

Assim, W é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Encontrando a base: $(x, 0, z) = x(1, 0, 0) + z(0, 0, 1)$, temos base $\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$, com dimensão 2.

b) $0 \in W$? Sim, basta tomar $(0, 0, 0)$ que satisfaz a condição dada.

É fechado para soma?

$(x_1, y_1, z_1) = (x_1, 3x_1, x_1)$

$(x_2.y_2, z_2) = (x_2, 3x_2, x_2)$

Assim, temos:

$(x_1, 3x_1, x_1) + (x_2, 3x_2, x_2) = (x_1 + x_2, 3(x_1 + x_2), x_1 + x_2) \in W$. É fechado para soma.

É fechado para produto por escalar?

Seja $c \in \mathbb{R} \Longrightarrow c(x, 3x, x) = (cx, 3cx, cx) \in W$. Logo é fechado para produto por escalar.

Assim, W é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Encontrando a base: $(x, 3x, x) = x(1, 3, 1)$, temos base $\{(1, 3, 1)\}$, com dimensão 1.

c) $0 \in W$? Sim, basta tomar $(0, 0, 0)$ que satisfaz a condição dada.

É fechado para soma?

$(x_1, y_1, z_1) = (-y_1 - z_1, y_1, z_1)$

$(x_2.y_2, z_2) = (-y_1 - z_1, y_1, z_1)$

Assim, temos:

$(-y_1 - z_1, y_1, z_1) + (-y_2 - z_2, y_2, z_2) = (-(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2), y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in W$. É fechado para soma.

É fechado para produto por escalar?

Seja $c \in \mathbb{R} \Longrightarrow c(-y - z, y, z) = (c(-y - z), cy, cz) = (-cy - cz, cy, cz) \in W$. Logo é fechado para produto por escalar.

Assim, W é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Encontrando a base: $(-y - z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$, temos base $= \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$, com dimensão 2.

d) $0 \in W$?

Sim, basta considerar $(0, 0, 0)$, pois $0^2 + 0^2 + 0^2 \leq 2$.

É fechado para soma? Não. Veja um contra exemplo:

$v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 1)$. Ambos satisfazem a condição dada, porém: $v_1 + v_2 = (1, 1, 0) + (0, 1, 1) = (1, 2, 1)$.

E $1^2 + 2^2 + 1^2 = 6$. Logo não satisfaz a condição dada e portanto não é fechado para soma. Assim, W não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

3^a Questão) Solução:

a) Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Considere:

$$V = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, b = c.$$

$0 \in V$?

Sim, basta tomar :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

É fechado para soma?

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \in V.$$

É fechado para produto por escalar?

Seja $c \in \mathbb{R} \Longrightarrow c \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca & cb \\ cb & cd \end{bmatrix} \in M_{2x2}$.

Logo V é subespaço de M_{2x2}.

b)

$$W = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, b = c + 1.$$

$0 \in W$? Se $c = 0 \Longrightarrow b = 0 + 1 = 1$.

Se $b = 0 \Longrightarrow c = -1$.

Portanto

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin W$$

Logo W não é subespaço de M_{2x2}.

4^a Questão) Solução:

O primeiro passo é encontrar a matriz na forma de escada reduzida. Assim, temos a matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 4 & 5 \\ 3 & -8 & -3 & 8 & 18 \\ 2 & -3 & 5 & -4 & 19 \end{bmatrix}$$

fazendo $L_2 \Leftarrow L_2 - 3L_1$ e $L_3 \Leftarrow L_3 - 2L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & -12 & 9 \end{bmatrix}$$

fazendo $L_3 \Leftarrow L_3 - 3L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

fazendo $L_1 \Leftarrow L_1 + 3L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -8 & 14 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De posse dessa matriz aumentada, fazendo $z = s$ e $t = r$, temos, da segunda linha da matriz que $y + 3s - 4r = 3 \rightarrow y = 3 - 3s + 4r$ e da primeira linha que $x + 7s - 8r = 14 \rightarrow x = 14 - 7s + 8r$. Portanto, a solução é $X = (14 - 7s + 8r, 3 - 3s + 4r, s, r), \forall r, s \in \mathbb{R}$.