Gabarito

Álgebra Linear: AD1 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2008

Tutores: Cristina Lopes e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

Considere as incógnitas:

$$
\begin{aligned}
X &= \text{quantidade de kg do produto X} \\
Y &= \text{quantidade de kg do produto Y} \\
Z &= \text{quantidade de kg do produto Z}
\end{aligned}
$$

Para montar o sistema relativo ao problema, vamos somar as quantidades de insumo A dos três produtos X, Y, Z e igualar a quantidade total (em gramas) de insumo A utilizada (linha L_1 do sistema). Faremos o mesmo procedimento para o insumo B (linha L_2 do sistema). Então multiplicaremos o preço de cada kg pelo seu respectivo produto e igualaremos ao valor total que a indústria arrecadou (linha L_3 do sistema). Assim temos:

$$
\left\{
\begin{aligned}
2X + Y + 3Z &= 1900 \\
X + 3Y + 5Z &= 2400 \\
3X + 2Y + 4Z &= 2900
\end{aligned}
\right. \tag{1}
$$

Utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss para resolvê-lo. Considere a seguinte matriz aumentada que representa este sistema :

$$
\begin{bmatrix}
2 & 1 & 3 & 1900 \\
1 & 3 & 5 & 2400 \\
3 & 2 & 4 & 2900
\end{bmatrix}
$$

Trocando L_1 por L_2 temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 2 & 1 & 3 & 1900 \\ 3 & 2 & 4 & 2900 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & -5 & -7 & -2900 \\ 0 & -7 & -11 & -4300 \end{bmatrix}.$$

Agora, fazendo $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2400 \\ 0 & -5 & -7 & -2900 \\ 0 & 0 & -6 & -1200 \end{bmatrix}.$$

Assim, temos o seguinte sistema após a eliminação de Gauss:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} X + 3Y + 5Z & = & 2400 \\ -5Y - 7Z & = & -2900 \\ -6Z & = & -1200 \end{array} \right. \tag{2}$$

Por L_3 neste sistema, temos que $Z = 200$.

Substituindo Z em L_2 temos que $-5Y - 7 \times 200 = -2900 \Longrightarrow Y = 300$.

Agora, substituindo Y e Z em L_1, temos que $X = 500$.

Logo, foram vendidos 500 kg do produto X, 300 kg do produto Y e 200 kg do produto Z.

2^a Questão) Solução:

a) $proj_v u = \dfrac{uv}{||v||^2} v = \dfrac{(1,-2,-1)(2,1,1)}{2^2+1^2+1^2}(2,1,1) = \dfrac{-1}{6}(2,1,1) = \left(\dfrac{-1}{3}, \dfrac{-1}{6}, \dfrac{-1}{6}\right)$.

b) $d(u,v) = \sqrt{(2-1)^2 + (1-(-2))^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$.

c) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Consideremos

$$a(1,-2,-1)+b(2,1,1)=(a+2b,-2a+b,-a+b)=(x,y,z)$$

Assim, temos:

$$\begin{cases} a+2b=x \\ -2a+b=y \\ -a+b=z \end{cases}$$

Considere a matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ -2 & 1 & y \\ -1 & 1 & z \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2+2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3+L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & 5 & y+2x \\ 0 & 3 & x+z \end{bmatrix}.$$

Por L_3 temos que $b=\dfrac{x+z}{3}$ e por L_2 temos que $b=\dfrac{y+2x}{5}$. Igualando estes dois valores de b temos que:

$$\frac{x+z}{3}=\frac{y+2x}{5} \Longrightarrow 3y+6x=5x+5z \Longrightarrow x=5z-3y$$

Logo $[u,v]=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x=5z-3y\Big\}$.

d) $[u,v]=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 |\,(-3y+5z,y,z)\Big\}$

Logo uma base para este subespaço é $B=\{(-3,1,0)\,,(5,0,1)\}$.

Tome $v_1=(-3,1,0)\,, v_2=(5,0,1)$.

Vamos ortogonalizar esta base usando o método de Gram-Schmidt.

Seja $w_1=v_1=(-3,1,0)$.

Temos que $w_2=v_2-\left(\dfrac{v_2w_1}{w_1w_1}\right)w_1$.

Logo

$$w_2 = (5,0,1) - \left(\frac{(5,0,1)(-3,1,0)}{(-3,1,0)(-3,1,0)}\right)(-3,1,0)$$

$$= (5,0,1) - \left(\frac{-15}{10}(-3,1,0)\right) =$$

$$= (5,0,1) - \left(\frac{45}{10}, \frac{-15}{10}, 0\right) = \left(\frac{5}{10}, \frac{15}{10}, 1\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$$

Assim, temos que a base ortogonal é $\left\{(-3,1,0), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)\right\}$.

e)

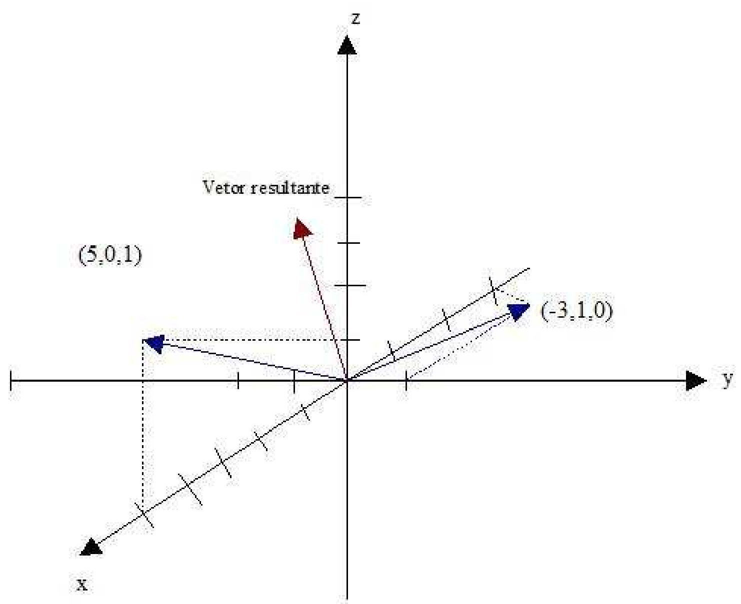

Figura 1: Esboco

3^a Questão) Solução:

a) Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Assim, considere a igualdade abaixo:

$$\alpha_1(t^2 - 2t + 1) + \alpha_2(t + 2) + \alpha_3(t^2 - 3t - 1) = at^2 + bt + c$$

Somando os coeficientes dos termos semelhantes, temos:

$$(\alpha_1 + \alpha_3)t^2 + (-2\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3)t + (\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3) = at^2 + bt + c$$

Igualando os termos semelhantes dos dois lados da igualdade obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 & = & a \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 & = & b \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 & = & c \end{cases} \tag{3}$$

Utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss para resolvê-lo. Considere a seguinte matriz aumentada que representa este sistema :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ -2 & 1 & -3 & b \\ 1 & 2 & -1 & c \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & b + 2a \\ 0 & 2 & -2 & c - a \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & b + 2a \\ 0 & 0 & 0 & c - 5a - 2b \end{bmatrix}$$

Logo, temos por L_3 que $c = 5a + 2b$. Assim , substituindo c por $5a + 2b$, temos o subespaço de P_2

$$S = [v_1, v_2, v_3] = \Big\{at^2 + bt + 5a + 2b\Big\}.$$

Assim , colocando a e b em evidência, temos que $S = \{a(t^2 + 5) + b(t + 2)\}$. E os vetores $t^2 + 5$ e $t + 2$ claramente são LI's.

Assim, temos que $B = \{t^2 + 5, t + 2\}$ é base para S, com dimensão 2.

b) Considere a igualdade:

$$\alpha_1(t^2 - 2t + 1) + \alpha_2(t + 2) = at^2 + bt + c$$

Temos o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 & = & a \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 & = & b \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 & = & c \end{cases} \tag{4}$$

Utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss para resolvê-lo. Considere a seguinte matriz aumentada que representa este sistema :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & 1 & b \\ 1 & 2 & c \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2a + b \\ 0 & 2 & c - a \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2a + b \\ 0 & 0 & c - 5a - 2b \end{bmatrix}$$

Desse modo, por L_3, temos que $c = 5a + 2b$. Assim, tomando $\alpha_1 = a$ e $\alpha_2 = 2a + b$ (por L_1 e L_2), P_2 pode ser escrito como combinção linear de $\{v_1, v_2\}$. Como estes vetores são LI's, $B = \{v_1, v_2\} = \{t^2 - 2t + 1, t + 2\}$ é base para P_2.

c)O vetor $p_1(t) = -2t + 3$ não pode ser gerado pelos vetores $[v_1, v_2]$, ou seja, não existem escalares α_1 e α_2 tal que

$$p_1(t) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$$

Em razão da formulação da pergunta, esse item deve ser anulado e cada um dos ítens a) e b) passarão a valer $(1, 0)$ ponto.

4^a Questão) Solução:

Sejam $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Para o conjunto ser L.D , o sistema abaixo não pode ter somente $(0, 0, 0)$ como solução. Consideremos a igualdade abaixo:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$$

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ k & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou de modo equivalente:

$$\begin{bmatrix} a_1 + a_2 + 2a_3 & a_2 - a_3 \\ a_1 + ka_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e portanto temos o sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 & \\ a_2 - a_3 = 0 & \Rightarrow \quad a_2 = a_3 \\ a_1 + ka_3 = 0 & \Rightarrow \quad a_1 = -ka_3 \end{cases}$$

Substituindo a_1 e a_2 na primeira linha do sistema, encontramos:

$-ka_3 + a_3 + 2a_3 = 0$

$-ka_3 + 3a_3 = 0$

$(-k+3)a_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (-k+3) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = +3$

Logo, a solução do sistema é $S = \{-3a_3, a_3, a_3\}$, ou seja, tem infinitas soluções. Assim, para $k = +3$, o conjunto é L.D..

5^a Questão) Solução:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss para resolvê-lo. Considere a seguinte matriz aumentada que representa este sistema :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$ e $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \longleftarrow L_3 - L_2$, encontramos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então, temos o sistema: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 & = & 0 \\ 5x_3 + x_4 & = & 0 \end{cases}$

Assim, tomando $x_4 = \alpha \in \mathbb{R}$, temos

$5x_3 + 3x_4 = 0$

$5x_3 = -3\alpha$

$x_3 = -\dfrac{3\alpha}{5}$

Fazendo agora $x_2 = \beta \in \mathbb{R}$, e substituindo na primeira equação do sistema, encontramos

$x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$

$x_1 + 2\beta - 2\left(-\dfrac{3\alpha}{5}\right) - \alpha = 0$

$x_1 = \alpha + \left(\dfrac{-6\alpha}{5}\right) - 2\beta$

O sistema é possível e indeterminado e o conjunto solução do sistema é dado por: $S = \left\{\left(\alpha + \left(\dfrac{-6\alpha}{5}\right) - 2\beta, \beta, -\dfrac{3\alpha}{5}, \alpha\right) \in \mathbb{R}^4 \ / \ \alpha \ , \ \beta \in \mathbb{R}\right\}$.

Como

$$\left(\alpha + \left(\frac{-6\alpha}{5}\right) - 2\beta, \beta, -\frac{3\alpha}{5}, \alpha\right) = \alpha\left(1 - \frac{6}{5}, 0, -\frac{3}{5}, 1\right) + \beta(-2, 1, 0, 0)$$

$$\left(\alpha + \left(\frac{-6\alpha}{5}\right) - 2\beta, \beta, -\frac{3\alpha}{5}, \alpha\right) = \alpha\left(-\frac{1}{5}, 0, -\frac{3}{5}, 1\right) + \beta(-2, 1, 0, 0)$$

então uma base para o espaço solução do sistema é $\left(-\dfrac{1}{5}, 0, -\dfrac{3}{5}, 1\right)$ e $(-2, 1, 0, 0)$, já que esses vetores são linearmente independentes.

De fato:

Sejam a e b reais tais que

$$a\left(-\frac{1}{5}, 0, -\frac{3}{5}, 1\right) + b(-2, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

Então $\begin{cases} -\dfrac{1a}{5} - 2b &= 0 \\ b &= 0 \\ -\dfrac{3a}{5} &= 0 \\ a &= 0 \end{cases}$

Portanto os vetores são L. I..

Como temos dois elementos na base do espaço solução, então $dimS = 2$.