# Gabarito Álgebra Linear: AD1 - CEDERJ

## Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2014.2

## Tutores: Cristina Lopes e Rodrigo Olimpio

$1^a$ Questão) Solução:

a) Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = z^2\}$.

S é espaço vetorial? (0, 0, 0) pertence à S, basta tomar $y = z = 0$.

E as duas condições abaixo são satisfeitas:

i) Se $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ são elementos de S $\Rightarrow x_1 = z_1^2$, e além disso, $x_2 = z_2^2 \Rightarrow$ $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (z_1^2 + z_2^2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \neq ((z_1 + z_2)^2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \Rightarrow$ não é um elemento de S (pois $(z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + 2z_1.z_2 + z_2^2$).

Logo, se não é fechado para a soma, $S$ não é espaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

b) Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - z = z - y\}$, isto é, $x = 2z - y$.

S é espaço vetorial? (0, 0, 0) pertence à S, basta tomar $y = z = 0$.

E as duas condições abaixo são satisfeitas:

i) Se $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ são elementos de S $\Rightarrow x_1 = 2z_1 - y_1$, e além disso, $x_2 = 2z_2 - y_2 \Rightarrow (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (2z_1 - y_1 + 2z_2 - y_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) =$ $(2(z_1 + z_2) - (y_1 + y_2), y_1 + y_2, z_1 + z_2) \Rightarrow$ é um elemento de S.

ii) Se $(x_1, y_1, z_1)$ é um elemento de S e $\alpha$ um escalar, $x_1 = 2z_1 - y_1 \Rightarrow \alpha(x_1, y_1, z_1) =$ $\alpha(2z_1 - y_1, y_1, z_1) \Rightarrow (\alpha(2z_1 - y_1), \alpha y_1, \alpha z_1) \Rightarrow (2(\alpha z_1) - \alpha y_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$ é um elemento de S.

Logo $S$ é espaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

$2^a$ Questão) Solução:

a) Isolando x, temos que $x = 2y - z$. Assim $(x, y, z) = (2y - z, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$.

Desse modo , $\{(2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ formam uma base. Vamos ortogonalizar usando Gram Schmidt:

Seja $w_1 = (2, 1, 0)$.

Temos que

$$w_2 = (-1, 0, 1) - \left(\frac{(-1, 0, 1)(2, 1, 0)}{(2, 1, 0)(2, 1, 0)}\right)(2, 1, 0)$$

$$= (-1, 0, 1) - \left(\frac{-2}{5}\right)(2, 1, 0) =$$

$$= (-1, 0, 1) - \left(\frac{-4}{5}, \frac{-2}{5}, 0\right) = \left(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5}, 1\right).$$

Logo uma base ortogonal para W é $\{(2, 1, 0), \left(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)\}$.

b)

$$proj_W u = \left(\frac{(1, 1, 2)(2, 1, 0)}{(2, 1, 0)(2, 1, 0)}\right)(2, 1, 0) + \left(\frac{(1, 1, 2)(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5}, 1)}{(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5}, 1)(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5}, 1)}\right)\left(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5}, 1\right) =$$

$$\frac{3}{5}(2, 1, 0) + \frac{11}{6}\left(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5}, 1\right) = \left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$$

$$+ \left(\frac{-11}{30}, \frac{22}{30}, \frac{11}{6}\right) = \left(\frac{5}{6}, \frac{4}{3}, \frac{11}{6}\right).$$

c) Seja $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. O produto escalar do vetor $(a, b, c) \in W^\perp$ pelos vetores da base de $W$ deve ser igual ao vetor nulo.

Assim temos:

$$(a, b, c).(2, 1, 0) = (0, 0, 0)$$

$$(a, b, c).(-1, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

Chegamos então ao sistema:

$$\begin{cases} 2a+b &= 0 \\ -a+c &= 0 \end{cases}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1$ :

$$\begin{cases} 2a+b &= 0 \\ 2c+b &= 0 \end{cases}$$

Por $L_1$ e $L_2$, temos que $b = -2a$ e $b = -2c$, ou seja, $b = -2a = -2c \Rightarrow a = c$.

Assim, temos que $W^{\perp} = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3/(a,b,c) = (a,-2a,a)\}$.

d) Temos que $(a,b,c) = (a,-2a,a) = a(1,-2,1)$

Uma base para $W^{\perp}$ é $\{(1,-2,1)\}$.

$3^a$ Questão) Solução:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

i) $X - 2A + 3B = 0 \Rightarrow X = 2A - 3B$.

$$X = 2A - 3B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ii) $2X = A - B$.

$$2X = A - B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

iii) $2(A + 2B) = 3X$.

$$3X = 2\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

$$3X = 2\left(\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}\right)$$

$$3X = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 8 & 14 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 8 & 14 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -\dfrac{4}{3} \\ \dfrac{8}{3} & \dfrac{14}{3} \end{bmatrix}$$

iv) $2(A - B + X) = 3(X - A) \Rightarrow 2A - 2B + 2X = 3X - 3A \Rightarrow X = 5A - 2B.$

$$X = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 3 & -10 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}$$

$4^a$ Questão) Solução:

a) Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Vamos verificar se as matrizes C e D podem ser escritas como combinação linear de A e B:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} a + b &= 2 \\ -2a &= 1 \\ 2a + b &= 0 \\ 3a + 2b &= 2 \end{cases}$$

Por $L_2$, $a = \frac{-1}{2}$.

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ e $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$ :

$$\begin{cases} a+b &= 2 \\ -2a &= 1 \\ -b &= -4 \\ -b &= -4 \end{cases}$$

Por $L_3, L_4$, $b = 4$. Mas por $L_1$, se $b = 4$, $a = -2$, o que contraria $L_2$. Logo, o sistema não tem solução, então C não pode ser escrito como combinação linear de A e B.

Vamos fazer o mesmo para a matriz D:

$$D = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} a+b &= -1 \\ -2a &= -2 \\ 2a+b &= -1 \\ 3a+2b &= 0 \end{cases}$$

Por $L_2$, $a = 1$.

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ e $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$ :

$$\begin{cases} a+b &= -1 \\ -2a &= -2 \\ -b &= 1 \\ -b &= 3 \end{cases}$$

Por $L_3, L_4$, $b$ tem dois valores diferentes, o que é uma contradição. Logo, o sistema não tem solução, então D não pode ser escrito como combinação linear de A e B.

b) Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Vamos encontrar a matriz que represente a combinação linear de $A, B, C$. Temos:

$$a\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

Assim temos o sistema:

$$\begin{cases} a+b+2c &= x \\ -2a+c &= y \\ 2a+b &= z \\ 3a+2b+2c &= w \end{cases}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ e $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$ :

$$\begin{cases} a+b+2c &= x \\ 5c+2b &= 2x+y \\ -b-4c &= z-2x \\ -b-4c &= w-3x \end{cases}$$

Por $L_3$, $L_4$, temos que $z - 2x = w - 3x \Rightarrow x = w - z$.

Logo, o espaço gerado por $A, B, C =$

$$\left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in M_{2x2} | x = w - z \right\}.$$

$5^a$ Questão) Solução:

Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= -1 \end{cases} \tag{1}$$

Método de Gauss-Jordan

O sistema linear acima pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$1^a$ Etapa) Formaremos a matriz aumentada $[A|b]$. A matriz aumentada é dada por:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & -4 & | & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -2 & 0 & | & 0 \\ 2 & 3 & -6 & 3 & -4 & | & -1 \end{bmatrix}$$

$2^a$ Etapa) Transformaremos a matriz aumentada à sua forma escada reduzida por linhas, usando operações elementares em suas linhas.

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & -4 & | & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -2 & 0 & | & 0 \\ 2 & 3 & -6 & 3 & -4 & | & -1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1$ , $L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_1$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & -4 & | & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 4 & | & -4 \\ 0 & -1 & -10 & -3 & 4 & | & -9 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftrightarrow L_3 + L_2$, obtemos

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & -4 & & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 4 & & -4 \\ 0 & 0 & -8 & -8 & 8 & & -13 \end{array}\right]$$

Multiplicando $L_3$ por $-1/8$, encontramos

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 13/8 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_1 \leftrightarrow L_1 - 2L_2$, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 13 & -12 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 13/8 \end{array}\right]$$

E finalmente, fazendo $L_1 \leftrightarrow L_1 + 2L_3$ , $L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_3$, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 15 & -14 & 61/4 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 6 & -29/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 13/8 \end{array}\right] \tag{2}$$

O sistema linear correspondente à matriz (2) na forma escada reduzida por linhas é dado por:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 15x_4 - 14x_5 & = & 61/4 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 - 7x_4 + 6x_5 & = & -29/4 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 + x_4 - x_5 & = & 13/8 \end{array}\right. \qquad (3)$$

e tem exatamente as mesmas soluções do sistema original (1).

$3^a$ Etapa) Resolver o sistema linear obtido na Etapa 2.

Tomemos $x_4 = r$ e $x_5 = s$, onde $r, s \in \mathbb{R}$.

Assim, $x_1 = \dfrac{61}{4} - 15r + 14s$, $x_2 = -\dfrac{29}{4} + 7r - 6s$ e $x_3 = \dfrac{13}{8} - r + s$.

Portanto, o sistema tem infinitas soluções (S. P. I.) e sua solução geral é $S = \left\{\left(\dfrac{61}{4} - 15r + 14s, -\dfrac{29}{4} + 7r - 6s, \dfrac{13}{8} - r + s, r, s\right), r, s \in \mathbb{R}\right\}$.