Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
Gabarito da AP1 - Segundo Semestre de 2010
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

(2.0)1. Seja $V = I\!R^2$. Verifique se W é ou não subspaço vetorial de V, onde:

(a) $W = \{(x, y) : x + y = 0\}$.
Solução:
$0 \in W$ pois podemos tomar $x = y = 0$. E as seguintes condições são satisfeitas:

Sejam (x_1, y_1) e (x_2, y_2), tais que $x_1 + y_1 = 0$ e $x_2 + y_2 = 0$.
Logo, $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0$.
Ou seja, $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in W$.

Sejam $\alpha \in \Re$ e (x, y) tal que $x + y = 0$.
$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y = 0$.
Logo $\alpha(x, y) \in W$.

Logo, W é subespaço vetorial de V.

(b) $W = \{(x, y, z) : x + y = 1\}$.
Solução:
Considere $(x_1, y_1) = (0, 1)$ e $(x_2, y_2) = (1, 0)$. Como $(x_1, y_1) \in W$, $(x_2, y_2) \in W$ e $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \notin W$, W não é subespaço vetorial.

(2.0)2. Considere as matrizes abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & x \\ y & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Quando for possível, determinar valores para x e y de forma que as sentenças abaixo sejam verdadeiras. Quando não for possível, justificar o motivo.

(a) A é simétrica.

Solução:

Devemos ter $x = y$. Por exemplo, $x = y = 1$.

(b) $A^2 = \begin{bmatrix} 15 & 15 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$.

Solução:

$A^2 = \begin{bmatrix} 9+xy & 5x \\ 5y & xy+4 \end{bmatrix}$. Logo, temos $x = 3$ e $y = 2$.

(c) $AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Solução:

Não é possível calcular AB pois o número de colunas de A é diferente do número de linhas de B.

(d) $(BA)^t = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solução:

$$(BA)^t = \begin{bmatrix} 3+2y & x+4 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 3+2y \\ x+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Logo, temos $x = -1$ e $y = 1$.

(4.0)3. Seja W o subspaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores

$$u_1 = (1, -3, 2), \quad u_2 = (1, 3, -4), \quad u_3 = (2, 3, -5).$$

(a) Determine uma base e a dimensão de W.

(b) Estenda a base de W obtida no item anterior a uma base de todo o espaço $\mathbb{R}^3$.

(c) Calcule o ângulo entre os vetores u_1 e u_3.

(d) Encontre a projeção de u_1 sobre u_3, $proj_{u_3}(u_1)$.

Solução:

(a) A base e a dimensão de W podem ser obtidas escalonando-se a matriz, cujas linhas são os vetores dados:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 9 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da matriz escalonada obtemos a base para W, dada por

$$\{(1,-3,-2),(0,6,-6)\}.$$

A dimensão de W é 2 pois temos 2 vetores na base.

(b) Sabemos que qualquer conjunto de vetores LI de um espaço vetorial de dimensão finita é parte de uma base, ou seja, pode ser estendido até completar uma base para o espaço. Para encontrarmos uma base para $\mathbb{R}^3$ é necessário acrescentarmos mais um vetor à base de W, tais que os três vetores resultantes sejam linearmente independentes. Por exemplo, o conjunto de vetores $\{(1,-3,-2),(0,6,-6),(0,0,1)\}$ forma uma base para $\mathbb{R}^3$, já que a matriz abaixo, cujas linhas são estes vetores, tem posto igual a 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Seja θ o ângulo entre os vetores u_1 e u_3.

$|u_1| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}.$

$|u_3| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{4+9+25} = \sqrt{38}.$

$$cos(\theta) = \frac{u_1.u_3}{|u_1|.|u_3|} = \frac{2-9-10}{\sqrt{14}\sqrt{38}} = \frac{-17}{\sqrt{532}} \Longrightarrow \theta = arcos\frac{-17}{\sqrt{532}}.$$

(d) $proj_{u_3}(u_1) = \frac{u_1.u_3}{|u_3|^2}u_3 = \frac{-17}{38}(2,3,-5) = (-\frac{34}{38}, -\frac{51}{38}, \frac{85}{38}).$

(2.0)4. Necessita-se adubar um terreno acrescentando a cada m^2 11g de nitrato e 21g de fosfato. Dispõe-se de três qualidades de adubo com as seguintes características:

(a) Cada quilograma do adubo I custa 2 reais e contém 3g de nitrato e 3g de fosfato.

(b) Cada quilograma do adubo II custa 1 real e contém 2g de nitrato e 5g de fosfato.

(c) Cada quilograma do adubo III custa 3 reais e contém 2g de nitrato e 1g de fosfato.

Quanto de cada adubo devemos misturar para conseguir o efeito desejado se estamos dispostos a gastar 7 reais a cada m^2 de adubação? Formule o problema com um sistema de equações lineares e resolva-o aplicando o método de Gauss-Jordan.

Solução: Representando por a_i a quantidade, em quilogramas, do adubo i na mistura, o sistema linear que representa este problema é dados por:

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 + 3a_3 = 7 \\ 3a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 11 \\ 3a_1 + 5a_2 + a_3 = 21 \end{cases}$$

Para resolvê-lo reduzimos a matriz de coeficientes do sistema linear a forma

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 2 & 11 \\ 3 & 5 & 1 & 21 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & 21 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & 14 \end{pmatrix}$$

Obtemos do sistema escalonado: $a_3 = 14/28 = 0,5$, $a_2 = 1 + 5 * 0,5 = 3,5$; $a_1 = (7 - 3,5 - 1,5)/2 = 1$. Logo deve-se misturar 1 Kg do adubo I, 3,5 Kg do adubo II e 0,5 Kg do adubo III.