Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear Computacional
AD1 - Primeiro Semestre de 2010
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

Nome -
Assinatura -

1.(2.5) Um biólogo colocou três espécies de bactéria(denotadas por 1,2 e 3) em tubo de ensaio, onde elas serão alimentadas por três fontes diferentes de alimentos (A,B e C). A cada dia serão colocados no tubo de ensaio 1.500 unidades de A, 3.000 unidades de B e 4.500 unidades de C. Cada bactéria consome um certo número de unidades de cada alimento por dia, como mostra a Tabela. Quantas bactérias de cada espécie podem coexistir no tubo de ensaio de modo a consumir todo o alimento? PS: O sistema linear pode ser resolvido pelo método da Substituição ou pelo Método de Gauss-Jordan.

Bactérias	$Especie$ 1	$Especie$ 2	$Especie$ 3
Alimento A	1	1	1
Alimento B	1	2	3
Alimento C	1	3	5

2.(2.5) Sejam $u = (1, -2, 0, -1)$ e $v = (2, -2, 4, -3)$.

(a) Determine a projeção ortogonal do vetor u sobre v ($Proj_v u$)

(b) Calcule a distância entre os vetores u e v.

(c) Determine o subespaço vetorial do $S \subset \mathbb{R}^4$ gerado por u e v.

(d) Verifique se o vetor $w = (-1, 0, -4, 2) \in S$

(e) Determine uma base ortogonal para S.

3.(2.5) Calcule, se possível, a matriz indicada:

$$\left\{ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix} \right\}$$

1. $AB - 2C^T$, 2. $(AB)^T$, 3. $B^T C^T$, 4. $B - 5C^T$, 5. $(B^T A^T)^2$

4.(2.5) Considere os seguintes vetores (matrizes)

$$\left\{ A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

(a) Descreva o conjunto gerado pelas matrizes A_1, A_2 e A_3.

(b) Verifique se o conjunto gerado S é um subespaço vetorial de $[A]_{2\times 3}$.

(c) Verifique se as matrizes A_1, A_2 e A_3 são LI ou LD.

(d) Determine uma base e a dimensão para $S \subset [A]_{2\times 3}$.

Novo Gabarito

Álgebra Linear: AD1 - CEDERJ

Mauro Rincon & Márcia Fampa - 2010.1

Tutores: Cristina Lopes e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução:

Considere as incógnitas:

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{quantidade de bactérias da espécie 1} \\ x_2 &= \text{quantidade de bactérias da espécie 2} \\ x_3 &= \text{quantidade de bactérias da espécie 3} \end{aligned}$$

Para montar o sistema relativo ao problema, vamos somar as quantidades de bactérias de cada espécie x_1, x_2, x_3 que consomem o alimento A e igualar à quantidade total do alimento A consumida por dia (linha L_1 do sistema). Então, multiplicaremos o número de unidades de cada alimento consumido por dia pela quantidade de cada espécie de bactéria e igualaremos ao valor total de unidades de cada alimento consumido por dia (linhas L_2 e L_3 do sistema). Assim temos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 1500 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3000 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4500 \end{cases}$$

Resolveremos o sistema pelo Método da Substituição.

Assim, isolando x_1 na primeira linha, temos: $x_1 = 1500 - x_2 - x_3$. Substituindo na segunda e terceira linhas, encontramos:

$$\begin{cases} 1500 - x_2 - x_3 + 2x_2 + 3x_3 &= 3000 \\ 1500 - x_2 - x_3 + 3x_2 + 5x_3 &= 4500 \end{cases}$$

Agrupando os termos semelhantes:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 & = & 1500 \\ 2x_2 + 4x_3 & = & 3000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 1500 - 2x_3 \\ 2x_2 + 4x_3 = 3000 \end{cases}$$

Como a segunda linha é múltipla da primeira ($L_2 = 2.L_1$), o sistema é possível e indeterminado, com $x_3 = x_1$ (basta substituir $x_2 = 1500 - 2x_3$ na primeira linha do sistema).

Fazendo $x_3 = t$, com t real, a solução do sistema é dada por $(x, y, z) = (t, 1500 - 2t, t)$.

Como t representa o numero de bactérias, então $t \geq 0$ e $1500 - 2t \geq 0$, o que implica que a solução procurada é $0 \leq t \leq 750$. Entretanto, o número de bactérias é um inteiro, então temos somente 751 soluções possíveis.

2^a Questão) Solução:

a) $proj_v u = \dfrac{uv}{||v||^2} v = \dfrac{(1, -2, 0, -1)(2, -2, 4, -3)}{2^2 + (-2)^2 + 4^2 + (-3)^2}(2, -2, 4, -3) =$

$= \dfrac{9}{33}(2, -2, 4, -3) = \dfrac{3}{11}(2, -2, 4, -3) = \left(\dfrac{6}{11}, \dfrac{-6}{11}, \dfrac{12}{1}, \dfrac{-9}{11}\right).$

b) $d(u, v) = \sqrt{(2-1)^2 + (-2+2)^2 + (4-0)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{1 + 0 + 16 + 4} = \sqrt{21}.$

c) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Consideremos

$$a(1, -2, 0, -1) + b(2, -2, 4, -3) = (a + 2b, -2a - 2b, 4b, -a - 3b) = (x, y, z, w)$$

Assim, temos:

$$\begin{cases} a + 2b = x \\ -2a - 2b = y \\ 4b = z \\ -a - 3b = w \end{cases}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ e $L_4 \leftarrow L_4 + L_1$ temos

$$\begin{cases} a + 2b = x \\ 2b = 2x + y \\ 4b = z \\ -b = w + x \end{cases}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, temos

$$\begin{cases} a + 2b = x \\ 2b = 2x + y \\ z = 4x + 2y \\ -b = w + x \end{cases}$$

Por L_4 temos que $b = -w - x$ e sabemos do sistema anterior que $b = \dfrac{z}{4}$. Igualando estes dois valores de b temos que:

$$\frac{z}{4} = -w - x \Longrightarrow z = -4w - 4x.$$

Agora, usando que $z = 4x + 2y$, por L_3, temos que $4x + 2y = -4w - 4x \Longrightarrow 2x + y = -2w - 2x \Longrightarrow w = -2x - \dfrac{y}{2}$.

Logo, o subespaço é $S = \left\{(x, y, z, w)/z = 4x + 2y, w = -2x - \dfrac{y}{2}\right\}$.

d) $S = \left(x, y, 4x + 2y, -2x - \dfrac{y}{2}\right)$. Substituindo $x = -1$ e $y = 0$ em S, teremos

$\left(-1, 0, 4.(-1) + 2.0, (-2).(-1) - \dfrac{0}{2}\right) = (-1, 0, -4, 2) \in S.$

e) $S = \left\{(x, y, z, w)/z = 4x + 2y, w = -2x - \dfrac{y}{2}\right\} = \left(x, y, 4x + 2y, -2x - \dfrac{y}{2}\right) = x\,(1, 0, 4, -2) + y\left(0, 1, 2, -\dfrac{1}{2}\right)$.

Logo uma base para este subespaço é $B = \left\{(1,0,4,-2)\,,\left(0,1,2,-\frac{1}{2}\right)\right\}$.
Tome $v_1 = (1,0,4,-2)\,, v_2 = \left(0,1,2,-\frac{1}{2}\right)$.
Vamos ortogonalizar esta base usando o método de Gram-Schmidt.
Seja $w_1 = v_1 = (1,0,4,-2)$.
Logo

$$w_2 = \left(0,1,2,-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{(0,1,2,-\frac{1}{2})\,(1,0,4,-2)}{(1,0,4,-2)\,(1,0,4,-2)}\right)(1,0,4,-2)$$

$$= \left(0,1,2,-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{9}{21}\,(1,0,4,-2)\right) =$$

$$= \left(0,1,2,-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{3}{7}\,(1,0,4,-2)\right) =$$

$$= \left(0,1,2,-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{3}{7},0,\frac{12}{7},\frac{-6}{7}\right) = \left(\frac{-3}{7},1,\frac{2}{7},\frac{5}{14}\right)$$

Assim, temos que a base ortogonal é $\left\{(1,0,4,-2)\,,\left(\frac{-3}{7},1,\frac{2}{7},\frac{5}{14}\right)\right\}$.

3^a Questão) Solução:

1) Não é possível calcular $AB - 2C^T$ pois a matriz produto AB é do tipo 2×2 e não podemos subtrair uma matriz do tipo 2×1 de uma matriz do tipo 2×2. Só se pode adicionar ou subtrair matrizes do mesmo tipo.

2)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4+1.3+1.5 & 0.2+1.4+1.6 \\ -1.4+0.3+0.5 & -1.2+0.4+0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}$$

3)

$$B^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Como a matriz B^T é do tipo 2×3 e a matriz C^T é do tipo 2×1, o produto $B^T C^T$ não pode ser calculado (já que o número de colunas da matriz B^T é diferente do número de linhas da matriz C^T).

4)

$$B - 5C^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Não é possível calcular pois a matriz B é do tipo 3×2 e a matriz $5.C^T$ é do tipo 2×1.

5)

$$B^T.A^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0+3.1+5.1 & 4.(-1)+3.0+5.0 \\ 2.0+4.1+6.1 & 2.(-1)+4.0+6.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(B^T.A^T)^2 = (B^T.A^T).(B^T.A^T) = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 10 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 10 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 8.8-4.10 & 8.(-4)-4.(-2) \\ 10.8-2.10 & 10.(-4)-2.(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64-40 & -32+8 \\ 80-20 & -40+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & -24 \\ 60 & -36 \end{bmatrix}$$

4^a **Questão) Solução:**

a) Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Temos que

$$[A_1, A_2, A_3] = aA_1 + bA_2 + cA_3 = \begin{bmatrix} x & y & z \\ w & s & t \end{bmatrix}$$

Assim, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} b+c = x \\ a+c = y \\ a-b = z \\ -a+c = w \\ b+c = s \\ 3b+2c = t \end{cases}$$

Por L_1 e L_5, temos que $x = s$.

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_6 \leftarrow L_6 - 3L_1$ e $L_4 \leftarrow L_4 + L_2$ temos

$$\begin{cases} b+c=x \\ a-b=y-x \\ a-b=z \\ c=(w+y)/2 \\ b+c=s \\ c=3x-t \end{cases}$$

Agora, de L_2 e L_3, temos que $z=y-x$ e de L_6 e L_4 tem-se $t=3x+(y+w)/2$.

Assim obtemos a seguinte matriz :

$$[A_1,A_2,A_3]=S=\begin{bmatrix} x & y & z \\ w & s & t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & y & y-x \\ w & x & 3x+(y+w)/2 \end{bmatrix}$$

b)

$$[A_1,A_2,A_3]=S=\begin{bmatrix} x & y & y-x \\ w & x & 3x+(y+w)/2 \end{bmatrix}$$

Desse modo, temos que:

* $S \neq \{\}$, pois basta tomarmos qualquer valor real para x, y, w, t.

* Seja

$$A_1=\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & y_1-x_1 \\ w_1 & x_1 & 3x_1+(y_1+w_1)/2 \end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix} x_2 & y_2 & y_2-x_2 \\ w_2 & x_2 & 3x_2+(y_2+w_2)/2 \end{bmatrix}$$

.

Temos que

$$A_1+A_2=\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & y_1-x_1 \\ w_1 & x_1 & 3x_1+(y_1+w_1)/2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_2 & y_2 & y_2-x_2 \\ w_2 & x_2 & 3x_2+(y_2+w_2)/2 \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 & (y_1+y_2)-(x_1+x_2) \\ w_1+w_2 & x_1+x_2 & 3(x_1+x_2)+((y_1+y_2)+(w_1+w_2))/2 \end{bmatrix} \in S$$

* Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos que

$$\alpha A_1 = \begin{bmatrix} \alpha x_1 & \alpha y_1 & \alpha(y_1 - x_1) \\ \alpha w_1 & \alpha x_1 & \alpha(3x_1 + (y_1 + w_1)/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 & \alpha y_1 & \alpha y_1 - \alpha x_1 \\ \alpha w_1 & \alpha x_1 & \alpha(3x_1 + (y_1 + w_1)/2) \end{bmatrix} \in S.$$

Para isto, basta tomarmos $x = \alpha x_1,\ y = \alpha y_1,\ w = \alpha w_1$ e

$3x + (y + w)/2 = \alpha(3x_1 + (y_1 + w_1)/2)$

c) Para verificarmos que as matrizes A_1, A_2 e A_3 são linearmente independentes, suponhamos que

$$aA_1 + bA_2 + cA_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Desse modo, chegamos ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ a + c = 0 \\ a - b = 0 \\ -a + c = 0 \\ b + c = 0 \\ 3b + 2c = 0 \end{cases}$$

Por L_2 temos que $a = -c$ e por L_4 temos que $a = c$. Concluímos então que $c = -c$, ou seja, $c = 0$. Portanto, como $a = c$, temos que $a = 0$. E consequentemente $b = 0$. Portanto $a = b = c = 0$ é a única solução do sistema, o que prova que as matrizes são LI's. Consequentemente o conjunto $[A_1, A_2, A_3]$ é uma base do subespaço vetorial $S \subset [A]_{2\times 3}$.

d)

$$S = \begin{bmatrix} x & y & y - x \\ w & x & 3x + (y + w)/2 \end{bmatrix} =$$

$$x \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Estas matrizes acima são claramente LI's.

Logo, elas formam uma base para S, com **dimensão 3.**