Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina : Álgebra Linear
GABARITO da AP1 - Primeiro Semestre de 2017
Professores: Márcia Fampa & Mauro Rincon

---

(1.5)1. Em cada item abaixo, calcular o ângulo $\theta$ no intervalo $[0^o, 90^o]$, entre os vetores $v$ e $w$, e afirmar, justificando a afirmação, se os vetores são ortogonais, paralelos, ou nenhuma das duas opções.

(0.5)a. $v = (1, -1, 3), w = (5, 2, -1)$.

(0.5)b. $v = (1, 0, 1), w = (1, 1, 0)$.

(0.5)c. $v = (1, 1, 2), w = (3, 3, 6)$.

**Solução:**

(a) $\cos\theta = \frac{v \cdot w}{|v| \cdot |w|}$
$v \cdot w = 5 - 2 - 3 = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = 90^o$.
Os vetores são ortogonais. Justificativa: $v \cdot w = 0$ ou $\theta = 90^o$.

(b) $\cos\theta = \frac{v \cdot w}{|v| \cdot |w|}$.
$|v| = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$.
$|w| = \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2}$.
$v \cdot w = 1 + 0 + 0 = 1$.
$\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \arccos(\frac{1}{2}) = 60^o$.
Os vetores não são nem ortogonais nem paralelos. Justificativa $\theta = 60^o$ ou $v \cdot w \neq 0$ e $\frac{v_1}{w_1} \neq \frac{v_2}{w_2}$.

(c) $\cos\theta = \frac{v\cdot w}{|v|\cdot|w|}$.
$|v| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$.
$|w| = \sqrt{9+9+36} = \sqrt{54} = 3\cdot\sqrt{6}$.
$v\cdot w = 3+3+12 = 18$
$\cos\theta = \frac{18}{18} = 1 \Rightarrow \theta = 0^o$.
Os vetores são paralelos. Justificativa: $\theta = 0^o$ ou $\frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2} = \frac{v_3}{w_3} = \frac{1}{3}$.

(1.5)2. Considere os vetores $u = (0,1,-1)$ e $w = (2,k,3k-2)$ de $I\!R^3$, onde $k \in I\!R$. Determine todos os possíveis valores de $k$ de modo que a projeção ortogonal do vetor $w$ sobre o vetor $u$ seja igual ao vetor $-2u$.

**Solução:**

$$\text{proj}_u w = \left(\frac{w\cdot u}{u\cdot u}\right) u = -2u \Leftrightarrow$$
$$\frac{-2k+2}{2}(0,1,-1) = (-2)(0,1,-1) \Leftrightarrow -k+1 = -2,$$
$$k = 3.$$

(2.0)3. Considere sistema $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \text{ e } b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Seja $S = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, x_1, x_2 \in I\!R \right\}$ o conjunto de todas as soluções do sistema. Prove que $S$ é um subspaço vetorial do $I\!R^2$.

**Solução:**

(a) $S \neq \emptyset$, pois $A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = b$.

(b) Sejam $\bar{x}$ e $\tilde{x} \in S$. Então $A(\bar{x}+\tilde{x}) = A\bar{x} + A\tilde{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Logo $\bar{x}+\tilde{x} \in S$.

(c) Sejam $\bar{x} \in S$ e $\alpha \in I\!R$. $A(\alpha\bar{x}) = \alpha A\bar{x} = \alpha 0 = 0$. Logo $\alpha\bar{x} \in S$. Logo, $S$ é um subspaço vetorial do $I\!R^2$.

(2.0)4. Considere o seguinte subspaço vetorial do $I\!R^3$:

$$S = \{(x, y, z) \in I\!R^3 | x + y - z = 0\}.$$

Considere a base $B = \{v_1, v_2\}$ que gera $S$, onde $v_1 = (1, 0, 1)$ e $v_2 = (-1, 1, 0)$. Aplicar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt a base $B$, para obter uma nova base ortonormal para $S$.

**Solução:** Como $< v_1, v_2 >= -1$, $B$ não é ortogonal. Procuremos uma base $B' = \{u_1, u_2\}$ que seja ortonormal aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{(1, 0, 1)}{\sqrt{2}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$w_2 = v_2 - < v_2, u_1 > u_1 = (-1, 1, 0) - (-\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$w_2 = (-1, 1, 0) - (-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$$

$$u_2 = \frac{w_2}{|w_2|} = \frac{(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$$

Logo, $B' = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})\}$ é uma base ortonormal de $S$.

(3.0)5. Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 2 & -5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Se possível, calcular as matrizes abaixo. Se não for possível, determinar a razão.

(a) A matriz $(A - A^2)$.
Solução:

$$A - A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A - A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 61 & 108 \\ 48 & 85 \end{bmatrix}$$

$$A - A^2 = \begin{bmatrix} -56 & -99 \\ -44 & -78 \end{bmatrix}.$$

(b) A matriz $(AB)^T$.

Solução:

Não é possível calcular o produto $AB$ pois o número de colunas de $A$ é diferente do número de linhas de $B$.

(c) A matriz $(BA)^T$.

Solução:

$$BA = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 2 & -5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -31 & -56 \\ -10 & -17 \\ -22 & -99 \end{bmatrix}.$$

$$(BA)^T = \begin{bmatrix} -31 & -10 & -22 \\ -56 & -17 & -39 \end{bmatrix}.$$