Gabarito

Álgebra Linear: AD2 - CEDERJ

Márcia Fampa & Mauro Rincon - 2018.2

Tutores: Dionisio Martins, Gabriel Thomaz e Rodrigo Olimpio

1^a Questão) Solução: Resolvendo o sistema através do método de Eliminação de Gauss Considere a matriz aumentada $[A|b]$ dada por:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & | & a \\ -2 & -1 & | & b \\ -1 & 2 & | & c \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{2}{3}L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{3}L_1$, obtemos

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & | & a \\ 0 & \frac{-1}{3} & | & \frac{2a}{3} + b \\ 0 & \frac{7}{3} & | & \frac{1a}{3} + c \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + 7L_2$, obtemos

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & | & a \\ 0 & \frac{-1}{3} & | & \frac{2a}{3} + b \\ 0 & 0 & | & 5a + 7b + c \end{bmatrix}$$

Para que o sistema tenha solução é necessário que:

$$5a + 7b + c = 0$$

2^a Questão) a) Solução:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & k+1 & 1 \\ k & -k & 3 \\ k & -8 & k-1 \end{bmatrix}$$

Aplicando a fórmula de Laplace para calcular o determinante da matriz

$$|A_{11}| = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -k & 3 \\ -8 & k-1 \end{vmatrix} = -k\,(k-1) - (3.-8) = -k^2 + k + 24$$

$$|A_{12}| = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} k & 3 \\ k & k-1 \end{vmatrix} = -1\,[k\,(k-1) - (3k)] = -1\left[k^2 - k - 3k\right] = -k^2 + 4k$$

$$|A_{13}| = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} k & -k \\ k & -8 \end{vmatrix} = -8k - (-k.k) = -8k + k^2 = k^2 - 8k$$

Calculando o determinante da matriz A:

$$det(A) = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + a_{13}.A_{13}$$

$$det(A) = 0.\left(-k^2 + k + 24\right) + (k+1)\,.\left(-k^2 + 4k\right) + (1)\,.\left(k^2 - 8k\right)$$

$$det(A) = 0 - k^3 + 4k^2 - k^2 + 4k + k^2 - 8k$$

$$det(A) = -k^3 + 4k^2 - 4k$$

2^a Questão) b)

Uma matriz é invertível quando $det(A) \neq 0$

$$-k^3+4k^2-4k\neq 0$$

$$k\left(-k^2+4k-4\right)\neq 0$$

$$k\neq 0$$

$$ou$$

$$-k^2+4k-4\neq 0$$

$$k^2-4k+4\neq 0$$

$$\Delta=b^2-4.a.c$$

$$\Delta=(-4)^2-4.1.4$$

$$\Delta=16-16$$

$$\Delta=0$$

$$k=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$k=\frac{-(-4)\pm\sqrt{0}}{2.1}$$

$$k=\frac{4}{2}$$

$$k=2$$

$$S=\{k\neq 0 \text{ ou } k\neq 2\}$$

2^a Questão) c) Substituindo $k=1$ e o termo independente b na matriz ampliada temos:

$$[A|b]=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1| & 1 \\ 1 & -1 & 3| & 0 \\ 1 & -8 & 0| & -1 \end{bmatrix}$$

Encontrando o pivô $\hat{a}_{11}$

$$\hat{a}_{11} = max\left\{|a_{11}|\,;|a_{21}|\,;|a_{31}|\right\}$$

$$\hat{a}_{11} = max\left\{0;1;1\right\}$$

$$\hat{a}_{11} = 1$$

Escolhendo $a_{21} = 1$ como pivô e posteriormente fazendo $L_1 \leftrightarrow L_2$ obtemos:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3| & 0 \\ 0 & 2 & 1| & 1 \\ 1 & -8 & 0| & -1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3| & 0 \\ 0 & 2 & 1| & 1 \\ 0 & -7 & -3| & -1 \end{bmatrix}$$

Escolhendo o pivô para a fase 2:

$$\hat{a}_{22} = \max\left\{|a_{21}|\,;|a_{23}|\right\}$$

$$\hat{a}_{22} = \max\left\{2;7\right\}$$

$$\hat{a}_{22} = 7$$

O pivô escolhido foi o elemento a_{23}, pois tem o maior módulo, e realizando a seguinte troca de linhas $L_2 \leftrightarrow L_3$ temos:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3| & 0 \\ 0 & -7 & -3| & -1 \\ 0 & 2 & 1| & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{2}{7}L_2$

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3| & 0 \\ 0 & -7 & -3| & -1 \\ 0 & 2 & \frac{1}{7}| & \frac{5}{7} \end{bmatrix}$$

Da equação 3 descobrimos a variável x_3

$$\frac{1}{7}x_3 = \frac{5}{7}$$
$$x_3 = 5$$

Substituindo o valor de x_3 na equação 2 descobrimos a variável x_2

$$-7x_2 - 3x_3 = -1$$
$$-7x_2 - 3.5 = -1$$
$$-7x_2 - 15 = -1$$
$$-7x_2 = -1 + 15$$
$$-7x_2 = 14$$
$$x_2 = -2$$

Substituindo os valores de x_2 e x_3 na equação 1 descobrimos a variável x_1

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$$
$$x_1 - (-2) + 3.5 = 0$$
$$x_1 + 2 + 15 = 0$$
$$x_1 = -17$$

A solução do sistema é:

$$[X] = \begin{bmatrix} -17 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

3^a Questão) Solução:

a) $T(x, y, z) = (-x + 4y - 3z, -y - 2z, x + 2y + 2z) = x(-1, 0, 1) + y(4, -1, 2) + z(-3, -2, 2)$.

Temos que $N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | T(x, y, z) = 0\}$. Logo, para o sistema obtido por $(-x+4y-3z, -y-2z, x+2y+2z) = (0, 0, 0)$, temos a seguinte matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -3| & 0 \\ 0 & -1 & -2| & 0 \\ 1 & 2 & 2| & 0 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -3| & 0 \\ 0 & -1 & -2| & 0 \\ 0 & 6 & -1| & 0 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2$, temos:

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -3| & 0 \\ 0 & -1 & -2| & 0 \\ 0 & 0 & -13| & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo de baixo pra cima, por L_3 temos que $-13z = 0$, logo $z = 0$. Substituindo nas linhas anteriores, temos que $x = y = 0$. Portanto, $N(T) = (0, 0, 0)$. Como os vetores são LI, então $Im(T) = \{T(x, y, z)/(-x + 4y - 3z, -y - 2z, x + 2y + 2z) = x(-1, 0, 1) + y(4, -1, 2) + z(-3, -2, 2)\}$.

b) $N(T) = (0, 0, 0).$, com dimensão zero.

Base para imagem $= \{(-1, 0, 1), (4, -1, 2), (-3, -2, 2)\}$, com dimensão 3.

4^a Questão) Solução: Seja $M = A + A^T$. Uma matriz é simétrica é ela for igual a sua transposta. Assim, temos que provar que $M = M^T$.

Antes de demonstrar, vale lembrar que a matriz transposta de uma soma de matrizes é igual a soma das matrizes transpostas. Outra propriedade importante é que diz que a transposta da transposta é igual a própria matriz.

Assim, usando a primeira propriedade citada acima e depois usando a segunda, temos que: $M^T = (A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T = M$.

Logo, $M = M^T$.

5^a Questão) Solução:

$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$. E esta expressão nem sempre é igual a $A^2 + 2AB + B^2$, pois não vale de modo geral que produto de matriz é comutativo.

Contra exemplo(pode ser qualquer um que contrarie a igualdade em questão): Sejam A e B dados por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$(A+B).(A+B) = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 36+80 & 48+96 \\ 60+120 & 80+144 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 116 & 144 \\ 180 & 224 \end{bmatrix}.$$

Agora faremos $A^2 + 2AB + B^2$ e veremos que terá matriz final diferente:

$$A.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}.$$

$$2.A.B = 2. \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 44 \\ 86 & 100 \end{bmatrix}.$$

$$B.B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67 & 78 \\ 91 & 106 \end{bmatrix}.$$

Logo, $A^2 + 2AB + B^2 =$

$$\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 38 & 44 \\ 86 & 100 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 67 & 78 \\ 91 & 106 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 112 & 132 \\ 192 & 228 \end{bmatrix}$$

Portanto, não vale que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, para matrizes quadradas de mesma ordem.

6^a Questão) Solução: Considere que: $T(x,y,z) = (x-y, y+z, z) = x(1,0,0) + y(-1,1,0) + z(0,1,1)$. A matriz associada a essa transformação linear é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}.$$

Logo, o polinômio característico é dado por:

$$P_3(\lambda) = det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) = (1-\lambda)^3.$$

As raízes de $P_3(\lambda)$ são $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, que são os autovalores da T.L..

Para o cálculo dos autovalores, no caso os 3 são iguaus pois os 3 autovalores são iguais, temos que resolver o sistema $(A - \lambda I)x = 0$, como $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Segue que, $z = 0, y = 0, x = x$. Tomando $x = r \neq 0 \in \mathbb{R}$, obtemos, então, que todos os autovetores associados a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são dados por

$$v = (r, 0, 0)^T = r(1, 0, 0)^T.$$

7^a Questão) Solução:

a) Considerando a base canônica do $\mathbb{R}^3$, temos que $T(x, y, z) = xT(1, 0, 0) + yT(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$. Usando as transformações dadas no enunciado da questão e colocando cada vetor como combinação dos vetores da base canônica, concluímos que:

$$T(1,0,0) + T(0,1,0) + T(0,0,1) = (1,0,0) \qquad (L_1)$$

$$-2T(1,0,0) + T(0,1,0) = (0,-1,0) \qquad (L_2)$$

$$-T(1,0,0) - 3T(0,1,0) - 2T(0,0,1) = (0,1,-1) \qquad (L_3)$$

Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ temos:

$$T(1,0,0) + T(0,1,0) + T(0,0,1) = (1,0,0)$$

$$+3T(0,1,0) + 2T(0,0,1) = (2,-1,0)$$

$$-2T(0,1,0) - T(0,0,1) = (1,1,-1)$$

Fazendo $L_3 \leftarrow 3L_3 + 2L_2$, temos :

$$T(1,0,0) + T(0,1,0) + T(0,0,1) = (1,0,0)$$

$$+3T(0,1,0) + 2T(0,0,1) = (2,-1,0)$$

$$T(0,0,1) = (7,1,-3)$$

Substituindo o valor encontrado de $T(0,0,1)$ em L_2, encontramos $T(0,1,0) = (-4-1,-2)$.

E substituindo $T(0,1,0)$ e $T(0,0,1)$ em L_1, encontramos $T(1,0,0) = (-2,0,1)$.

Assim, temos a seguinte matriz transformação, onde em cada coluna colocamos os vetores correspondentes a transformação de cada vetor da base canônica:

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Vamos calcular a inversa desta matriz transformação. Sabemos que $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$. Portanto, colocaremos ao lado direito dela a matriz identidade e escalonaremos esta matriz aumentada, de modo a encontrar ao lado esquerdo a matriz identidade novamente. Desse modo, a matriz inversa aparecerá do lado direito :

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 & 7| & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1| & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3| & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trocando L_3 com L_1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3| & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1| & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 7| & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3| & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1| & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1| & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1| & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1| & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1| & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0| & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1| & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1| & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \leftarrow -L_2 + L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0| & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0| & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1| & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Logo, a matriz inversa de T é:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$