Aula 8

Professores:

Anselmo Montenegro
Esteban Clua

Conteúdo:

- Curvas interativas em OpenGL e Transformações geométricas no plano

Construção interativa de curvas

Curvas e OpenGL

- Como determinar as equações para B-splines não uniformes?
- Funções dependem dos intervalos entre os nós.
- Equações de ***recorrência*** pra B-splines cúbicas.

$$B_{i,1}(u) = \begin{cases} 1, u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$B_{i,2}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} B_{i,1}(u) + \frac{u_{i+2} - u}{u_{i+2} - u_{i+1}} B_{i+1,1}(u)$$

$$B_{i,3}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+2} - u_i} B_{i,2}(u) + \frac{u_{i+3} - u}{u_{i+3} - u_{i+1}} B_{i+1,2}(u)$$

$$B_{i,4}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+3} - u_i} B_{i,3}(u) + \frac{u_{i+4} - u}{u_{i+4} - u_{i+1}} B_{i+1,3}(u)$$

Construção interativa de curvas

Curvas e OpenGL

- OpenGL suporta curvas e superfícies através de mecanismos denominados ***evaluators*** (avaliadores).
- Os evaluators ***calculam valores intermediários para os polinômios*** que descrevem curvas e superfícies, dada uma seqüência de pontos de controle.
- Os evaluators da OpenGL são ***avaliadores de Bézier.***
- Evaluators criam splines e superfícies baseadas em bases de (Bernstein-Bézier).

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Construção interativa de curvas

Curvas e OpenGL

- Para utilizar um avaliador Bézier emprega-se a seguinte função:

```
void glMap1f(GLenum target, GLfloat u1,
  GLfloat u2, Glint stride, Glint order,
  const GLfloat * points);
```

Parâmetro	Significado
Target	Significado dos pontos de controle
u_1 e u_2	Intervalo para a variável de controle *u*
Stride	Quantos valores *float* existem entre cada elemento do vetor
Order	Quantidade de elementos no vetor de pontos de controle
Points	Apontador para primeira coordenada do primeiro ponto de controle

Construção interativa de curvas

Curvas e OpenGL

- Os avaliadores servem não somente para gerar curvas de coordenadas, mas também de cores, vetores normais, coordenadas de textura(assunto a ser visto futuramente), etc.

Constante	Significado
GL_MAP1_VERTEX_3	Coordenadas x,y e z
GL_MAP1_VERTEX_4	Coordenadas x,y,z e w (homogêneas)
GL_MAP1_INDEX	Índice de cor
GL_MAP1_COLOR_4	Cor com RGBA
GL_MAP1_NORMAL	Vetor normal
GL_MAP1_TEXTURE_COORD_1	Coordenadas de textura s.
GL_MAP1_TEXTURE_COORD_2	Coordenadas de textura s e t.
GL_MAP1_TEXTURE_COORD_3	Coordenadas de textura s,t e r.
GL_MAP1_TEXTURE_COORD_4	Coordenadas de textura s,t,r e q.

- Uma vez definido um avaliador, deve-se habilitá-lo através da função *glEnable* sobre alguma das constantes da tabela acima.

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Construção interativa de curvas

Curvas e OpenGL

- A utilização da constante GL_MAP1_VERTEX indica que queremos apenas a ***posição*** de cada ponto intermediário.
- O procedimento de desenho é simples: basta percorrer os pontos intermediários desejados e ***solicitar a avaliação da curva Bézier*** por meio da seguinte função:

```
glEvalCoord1f(GLfloat u)
```

- O valor *u* indica o valor a ser passado para a Bézier normalmente 0(início) da curva e 1(final).

Construção interativa de curvas

Curvas e OpenGL

- Exemplo

```
#ifdef WIN32
#include <windows.h>   /* Inclui header padrão do Windows   */
#endif

#include <GL/gl.h>     /* Inclui header da biblioteca gl */
#include <GL/glut.h>   /* Inclui header da biblioteca glut  */

#define TOTAL 5

int prec = 10;  /*  Total de pontos intermediários */

float pontos[5][3] = {{0.0,0.0,0.0},{0.3,0.8,0.0},{0.7,0.8,0.0},{1.0,0.0,0.0},{0.5,0.2,0.0}}; /* Pontos de controle */

/* Configura estados e parâmetros da OpenGL */
void Init(void)
{
 glClearColor(0.0, 0.0, 0.0, 0.0);   /* Seleciona a cor negra como cor de fundo                */

glMap1f(GL_MAP1_VERTEX_3,0.0,1.0,3,TOTAL,&pontos[0][0]); /* Define significado dos pontos de controle */

glEnable(GL_MAP1_VERTEX_3); /* Ativa geração de coordenadas */
}
```

Construção interativa de curvas

Curvas e OpenGL

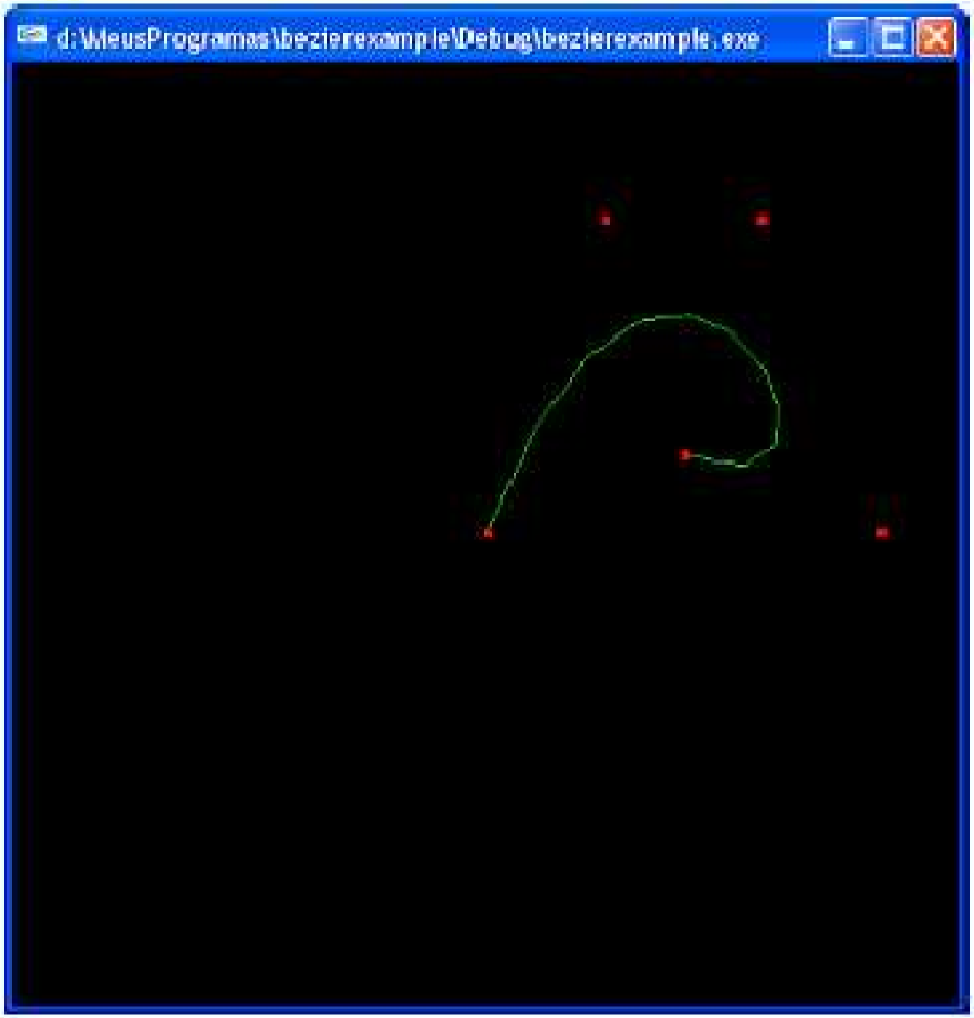
- Exemplo (continuação)

```
/* Função de desenho */
void Display (void)
{
 float delta =1.0/(float)prec;

 glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT | GL_DEPTH_BUFFER_BIT); /* Limpa a tela e o buffer de profundidades */
 glColor3f(0,1,0); /* Especifica a cor vermelha */

 glBegin(GL_LINE_STRIP);  /* Desenha a curva */
  for (float u=0;u<=1.01 ;u+=delta)
              glEvalCoord1f(u); /* invoca o avaliador para o parâmetro f */
 glEnd();

 glColor3f(1,0,0);  /* Especifica a cor vermelha */
 glPointSize(5); /* Especifica o tamanho do ponto */

 /* Desenha os pontos de controle */
 glBegin(GL_POINTS);
  for (int i=0;i<TOTAL;i++)
    glVertex3fv(pontos[i]);
 glEnd();

 glutSwapBuffers ();/* Troca os buffers */}
```

Construção interativa de curvas

Curvas e OpenGL

- Resultados: poucos pontos intermediários



Construção interativa de curvas

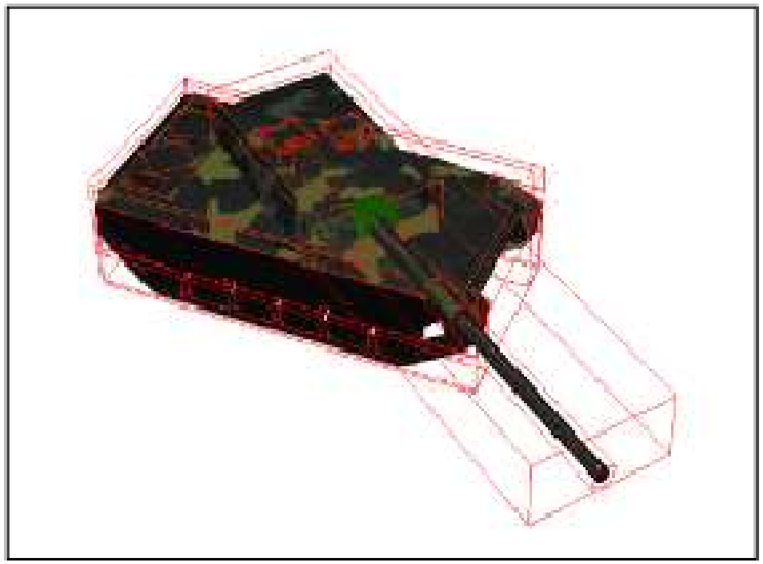
Curvas e OpenGL

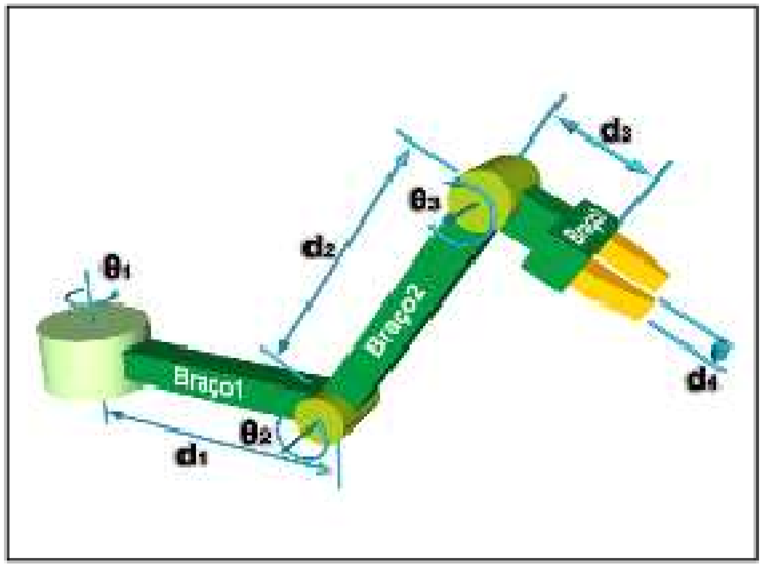
- Resultados: mais pontos intermediários

Transformações geométricas

Introdução

- Na Computação Gráfica é essencial poder ***movimentar*** e ***deformar*** objetos.
- Casos particulares: ***transformações geométricas***.

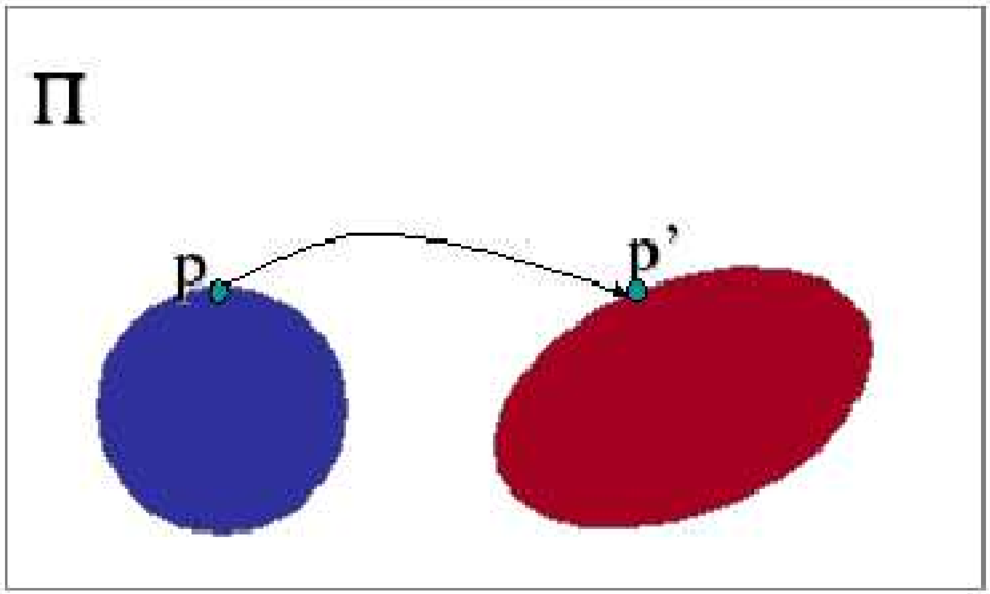




Transformações geométricas

Introdução

- Uma transformação *T* no plano é uma função que associa a cada ponto p do plano euclidiano Π um ponto *p'* em Π .

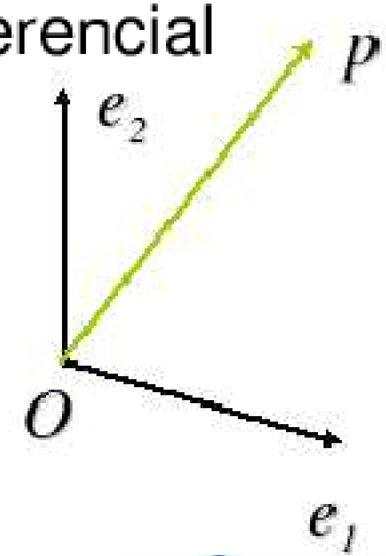


- Conveniente introduzir um ***sistema de coordenadas***.

Transformações geométricas

Transformações no plano (2D)

- Referencial no plano
  - (O, e_1, e_2), onde O é um ponto escolhido como ***origem*** e (e_1, e_2) forma uma ***base*** do R^2.
  - $OP = xe_1 + ye_2$
  - x e y são as coordenadas de p no referencial (O, e_1, e_2).
  - Coordenadas da origem $O: (0,0)$.



Transformações geométricas

Transformações no plano (2D)

- Um referencial estabelece uma ***correspondência entre o plano euclidiano*** Π ***e*** $R^2 = \{(x,y) \mid x, y \in R\}$.

- Permite estudar transformações do plano a partir de transformações em R^2.

- Ponto de partida: ***estrutura de espaço vetorial do*** R^2 (logo, do plano).

Fundação CECIERJ Consórcio cederj

Transformações geométricas

Transformações lineares

- Uma transformação $L:R^2 \longrightarrow R^2$ é dita linear quando

$$L(\alpha p_1+\beta p_2)=\alpha L(p_1)+\beta L(p_2),$$

onde p_1, $p_2 \in R^2$ e $a,b \in R$.

- Obs: $L(0, 0) = (0, 0)$ (ou seja, a ***origem O do referencial é mantida fixa por uma transformação linear***).

Transformações geométricas

Transformações lineares

- Uma transformação linear $L: R^2 \to R^2$ fica completamente determinada quando se conhecem $L(e_1)$ e $L(e_2)$, onde (e_1, e_2) formam uma base do R^2.

$$L(e_1) = ae_1 + be_2,\ L(e_2) = ce_1 + de_2$$

$$p = xe_1 + ye_2 \Rightarrow L(p) = xL(e_1) + yL(e_2) =$$

$$= x(ae_1 + be_2) + y(ce_1 + de_2) = (ax + cy)e_1 + (bx + dy)e_2$$

Matriz da transformação

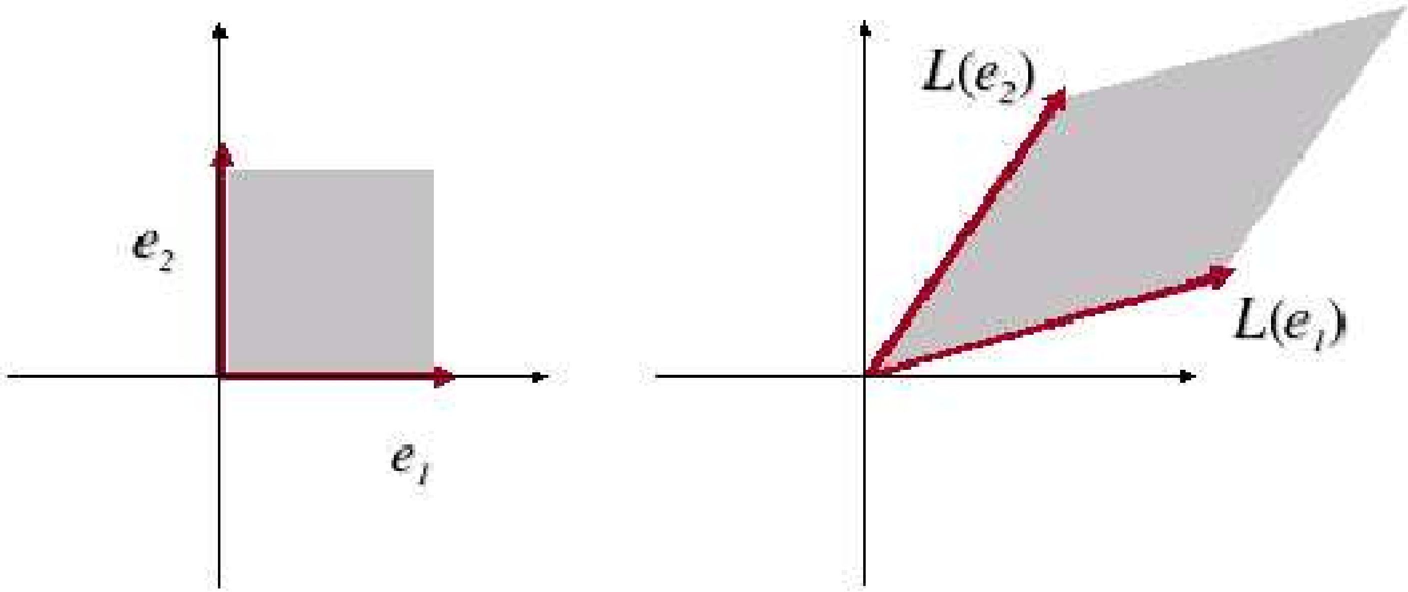
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} c \\ d \end{matrix}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ L(e_1) & L(e_2) \end{matrix}$$

Transformações geométricas

Transformações lineares

- O mais comum é representar uma transformação linear com respeito à base canônica do R^2: $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0,1)$.



- Transformações lineares ***preservam elementos lineares*** (retas, planos, etc)

Transformações geométricas

Transformações lineares

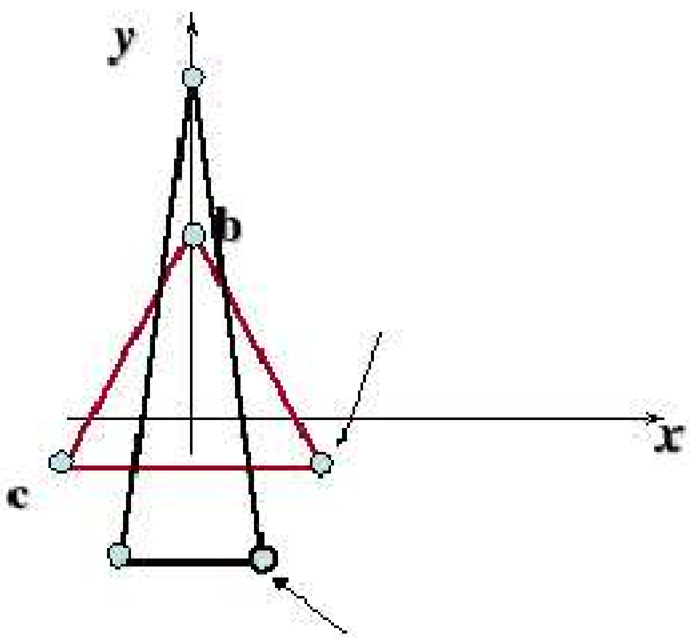
- Algumas transformações lineares correspondem a ***transformações geométricas*** importantes.

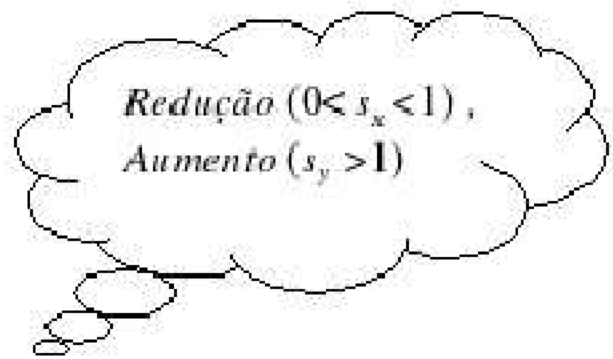
  - Escalas.
  - Reflexões.
  - Rotações.
  - Cisalhamento.

Transformações geométricas

Transformações lineares

- Escala

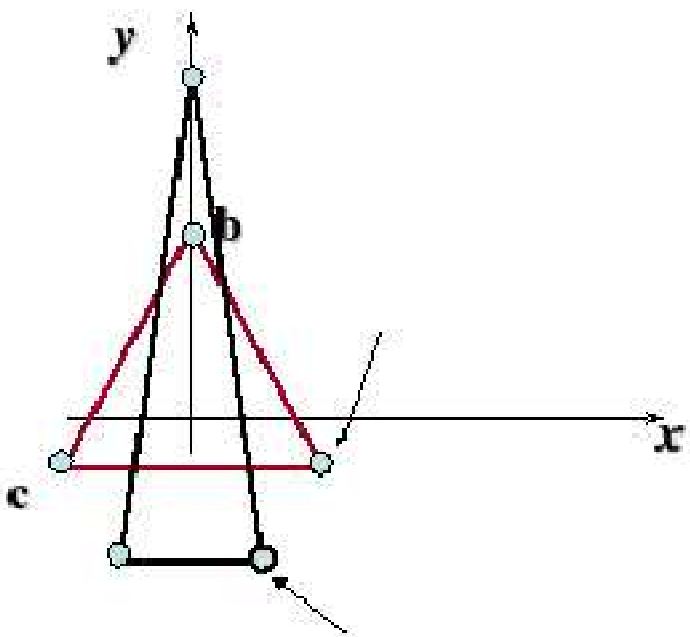




Transformações geométricas

Transformações lineares

- Escala



Redução $(0< s_x <1)$,
Aumento $(s_y >1)$

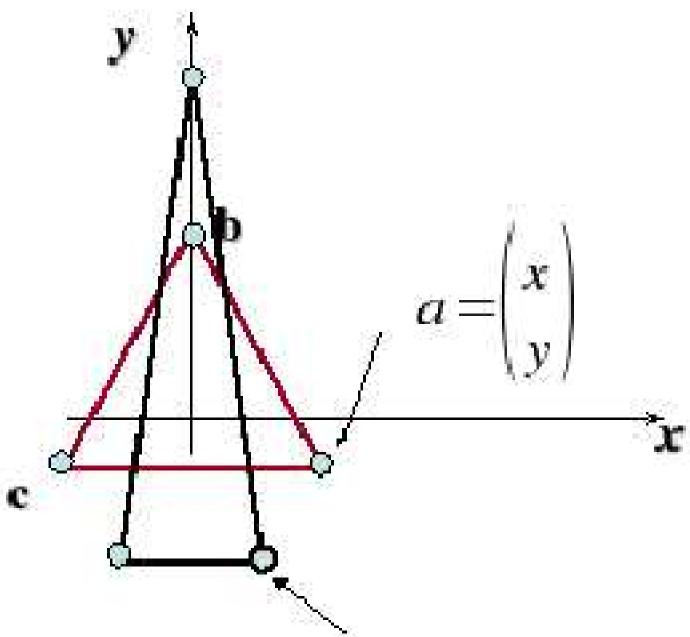
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x \cdot x \\ s_y \cdot y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Fundação CECIERJ Consórcio cederj

Transformações geométricas

Transformações lineares

- Escala



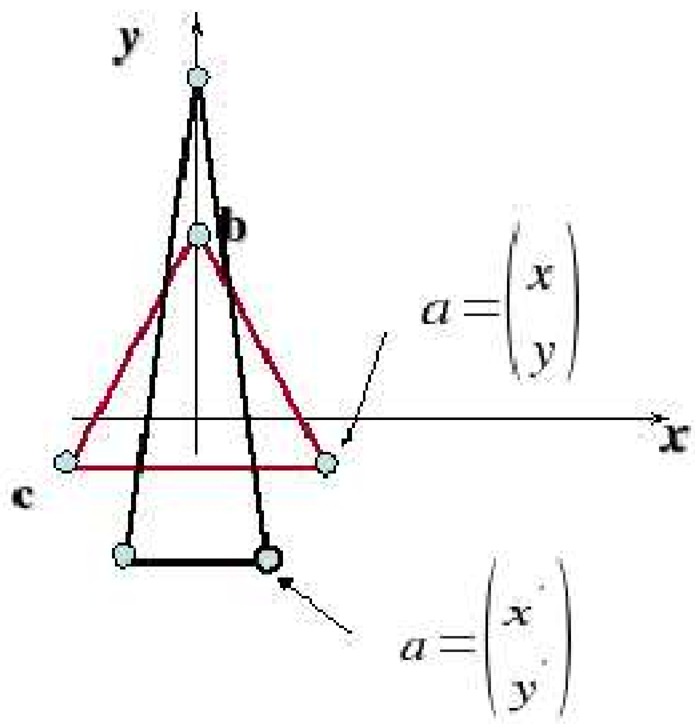
Redução $(0< s_x <1)$,
Aumento $(s_y >1)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x \cdot x \\ s_y \cdot y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Transformações geométricas

Transformações lineares

- Escala



Redução $(0 < s_x < 1)$,
Aumento $(s_y > 1)$

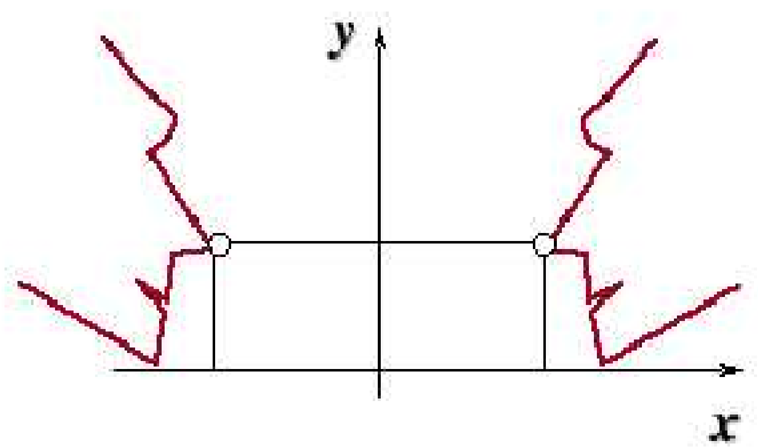
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x \cdot x \\ s_y \cdot y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Transformações geométricas

Transformações lineares

- Reflexões

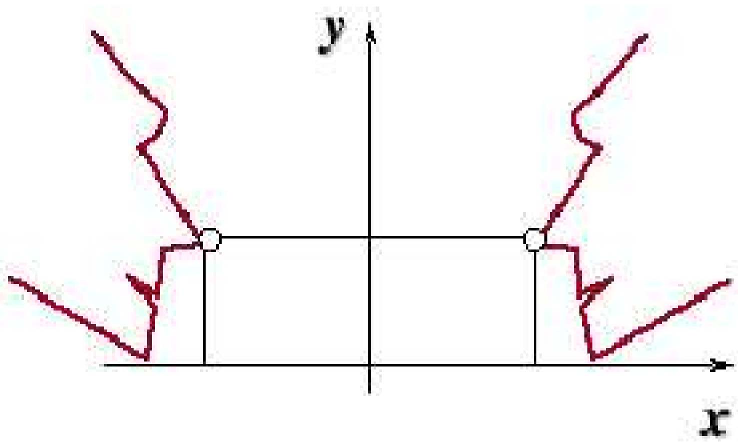


Espelhamento em relação ao eixo y

Transformações geométricas

Transformações lineares

- Reflexões



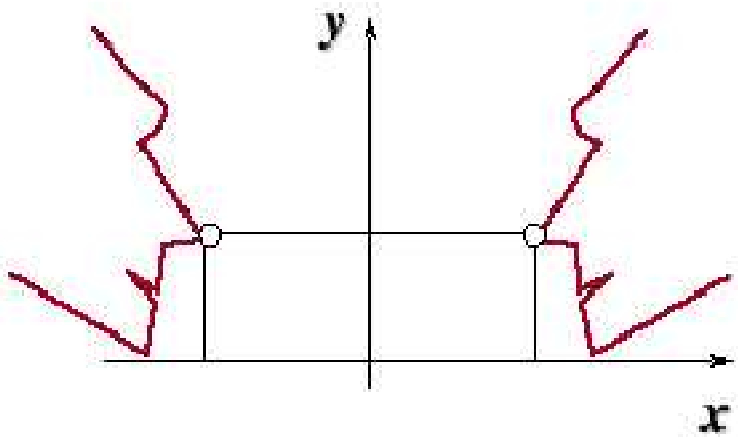
$$x' = -1.x$$
$$y' = y$$

Espelhamento em relação ao eixo y

Transformações geométricas

Transformações lineares

- Reflexões



$$x' = -1.x$$
$$y' = \ \ y$$

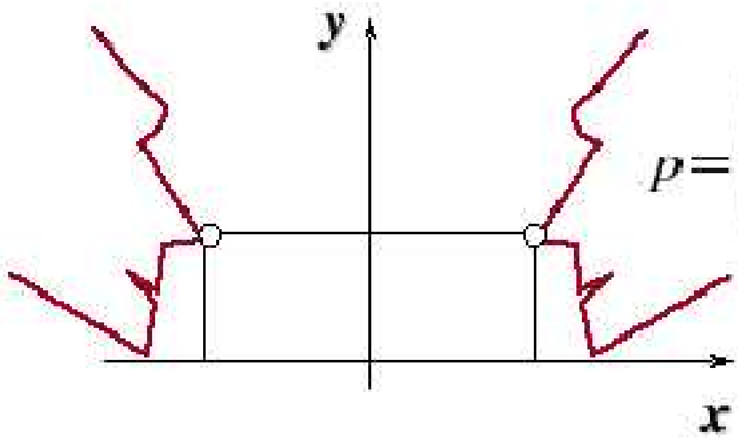
Espelhamento em relação ao eixo y

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Transformações geométricas

Transformações lineares

- Reflexões



$$p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Espelhamento em relação ao eixo y

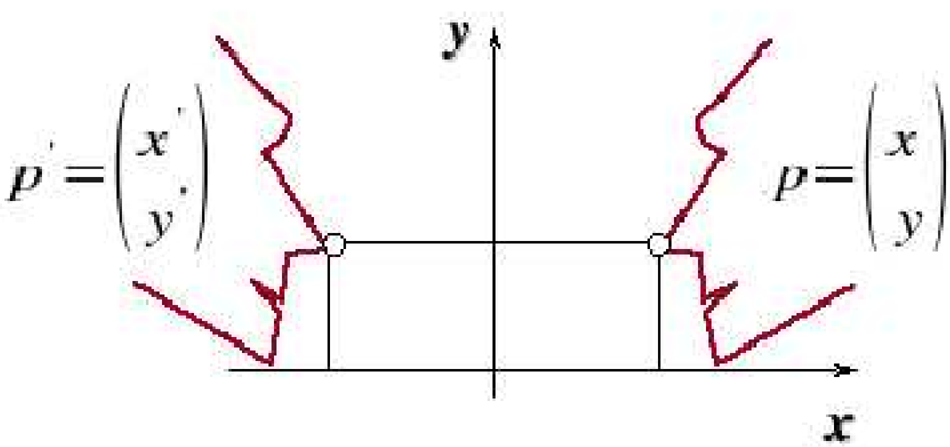
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x' = -1.x$$
$$y' = \ \ y$$

Transformações geométricas

Transformações lineares

- Reflexões



Espelhamento em relação ao eixo y

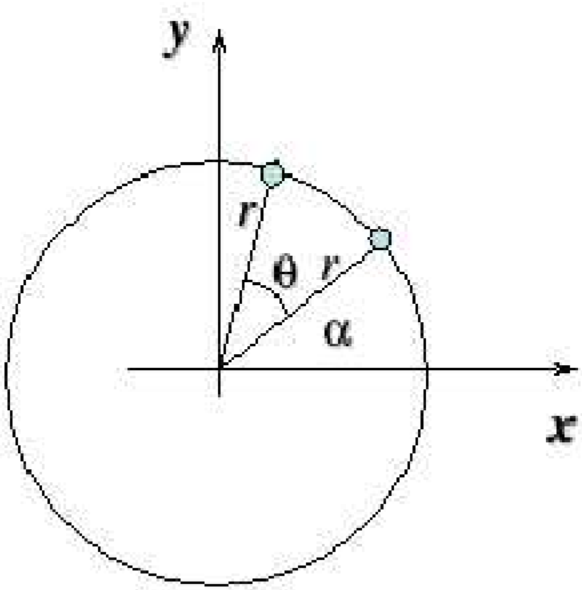
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x' = -1.x$$
$$y' = \quad y$$

Transformações geométricas

Transformações lineares

- Rotações



$$x = r\cos\alpha$$
$$y = r\sin\alpha$$

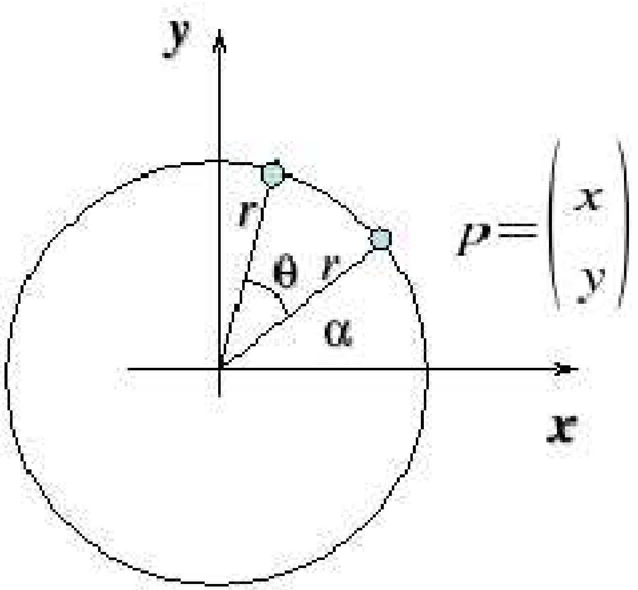
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\alpha\cdot\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta \\ r\sin\alpha\cdot\cos\theta + r\cos\alpha\cdot\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Transformações geométricas

Transformações lineares

- Rotações



$$x = r\cos\alpha$$
$$y = r\sin\alpha$$

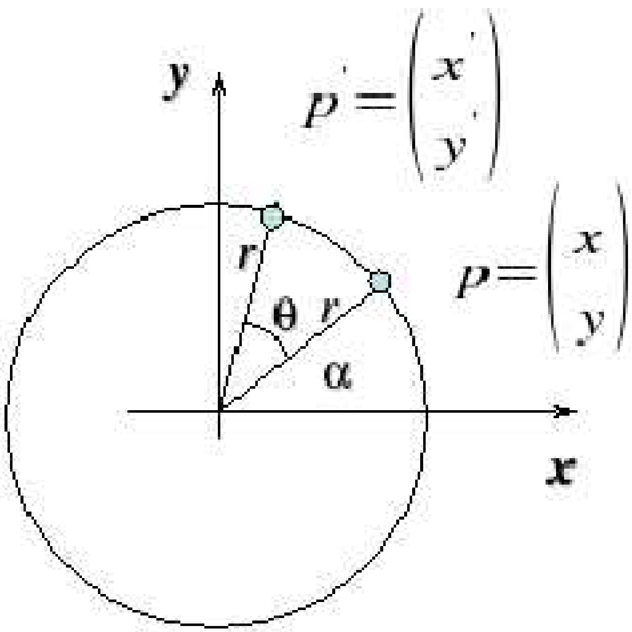
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\alpha\cdot\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta \\ r\sin\alpha\cdot\cos\theta + r\cos\alpha\cdot\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Transformações geométricas

Transformações lineares

- Rotações



$$x = r\cos\alpha$$

$$y = r\sin\alpha$$

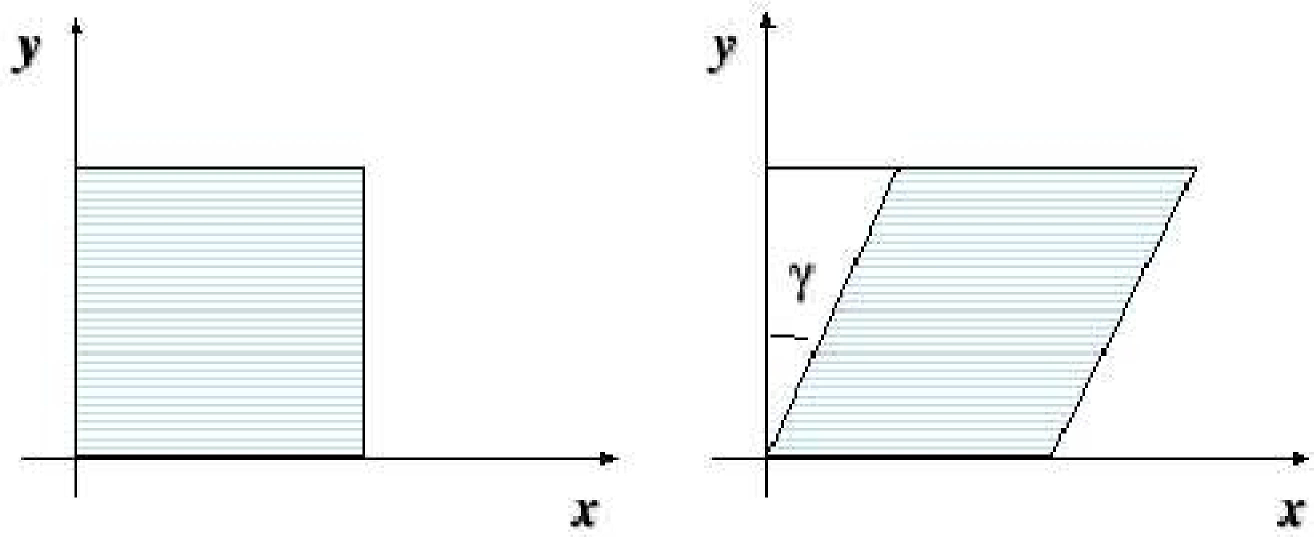
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\alpha\cdot\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta \\ r\sin\alpha\cdot\cos\theta + r\cos\alpha\cdot\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Transformações geométricas

Transformações lineares

- Cisalhamento

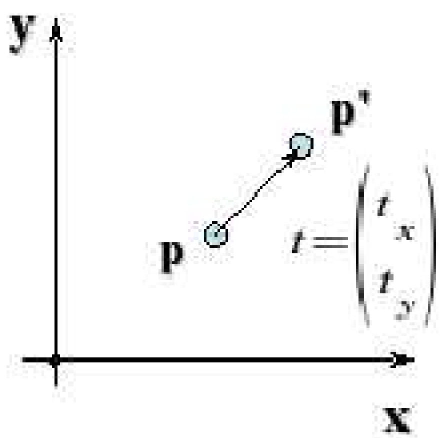


$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y\tan\gamma \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan\gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Transformações geométricas

Transformações lineares

- Não: mantêm a origem invariante. Logo, não podem representar translações.



$$p' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

- Considerar uma classe mais ampla: transformações afins.

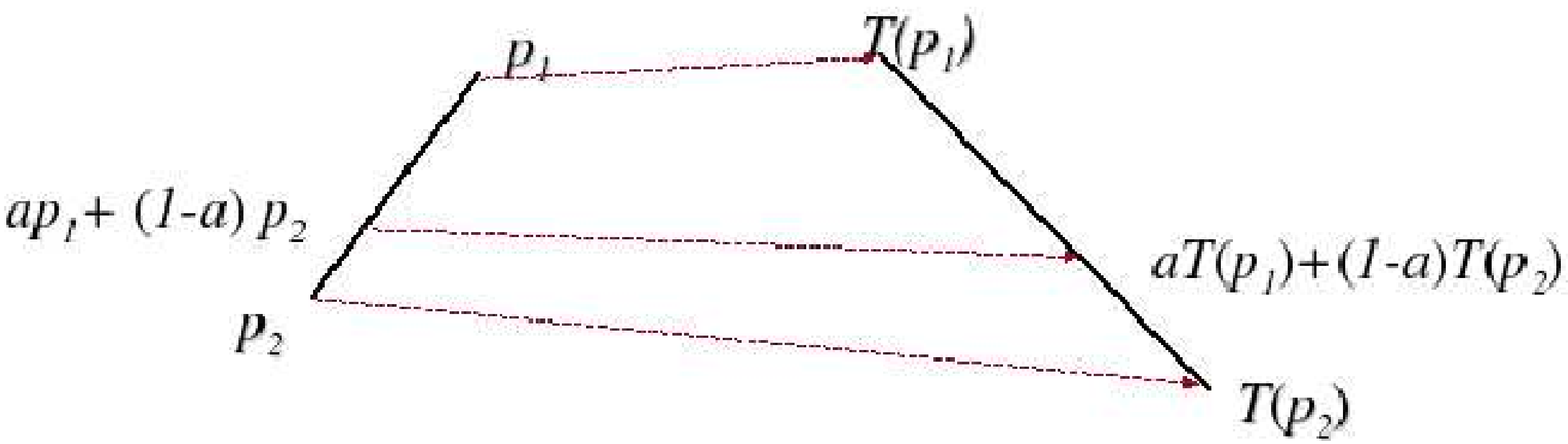
Transformações geométricas

Transformações afins

- Uma transformação $T:R^2 \longrightarrow R^2$ é dita afim quando

$$T(ap_1 + (1\text{-}a)\,p_2) = aT(p_1) + (1\text{-}a)T(p_2),$$

onde $p_1, p_2 \in R^2$ e $a \in R$.



Transformações geométricas

Transformações afins

- Uma transformação *T* é afim se e somente se é da forma *T(p) = L(p) + t*, onde *L* é linear.

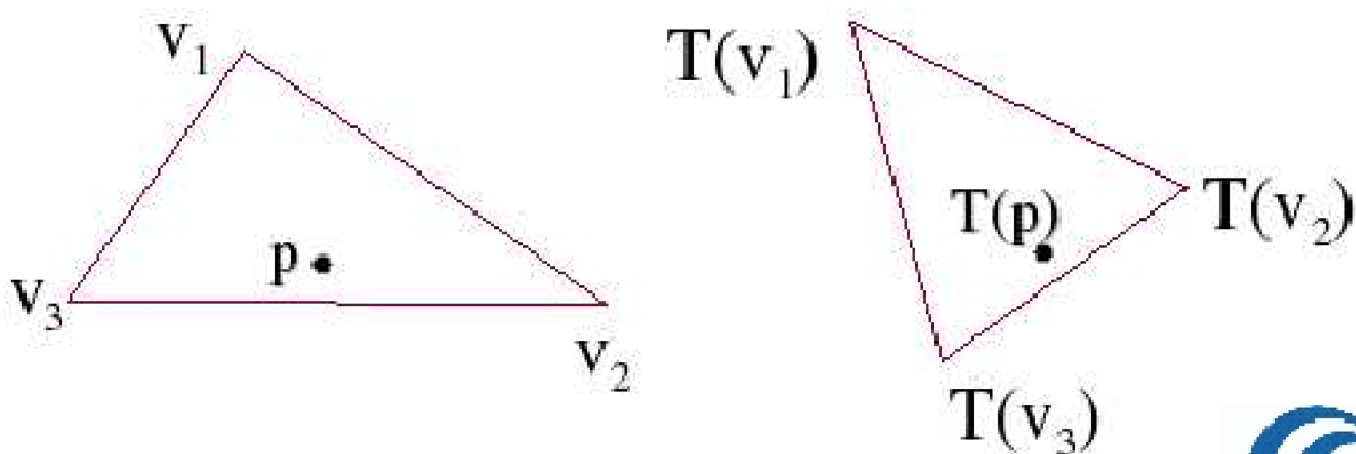
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Transformações geométricas

Transformações afins

- Preservam retas, razão de seção e coordenadas baricêntricas.

Se $p = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$, co $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$,
então $T(p) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) + \lambda_3 T(v_3)$.

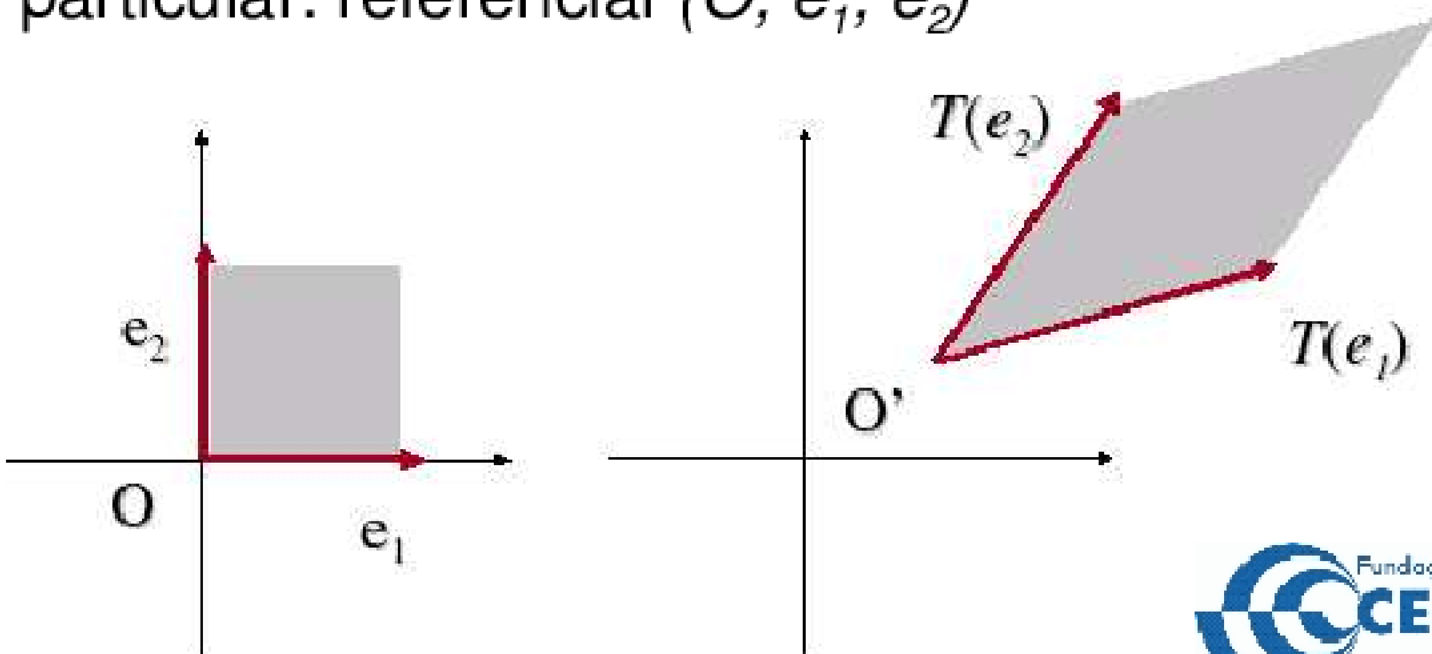


Transformações geométricas

Transformações afins

- Uma transformação afim fica determinada quando se conhece $T(v_1)$, $T(v_2)$ e $T(v_3)$, onde v_1, v_2, v_3 formam um triângulo.

- Caso particular: referencial (O, e_1, e_2)



Transformações geométricas

Coordenadas Homogêneas

- Podemos tratar todas as transformações de forma unificada se representarmos os pontos do espaço em ***coordenadas homogêneas***.

- Em coordenadas homogêneas, um ponto do plano é representado por uma tripla *[x,y,w]* ao invés de um par *(x,y)*.

- Duas coordenadas homogêneas *[x,y,w]* e *[x',y',w']* representam o mesmo ponto se uma é um ***múltiplo da outra***.

Transformações geométricas

Coordenadas Homogêneas

- Se $w \neq 0$ podemos ***dividir as coordenadas homogêneas por w.***
  (x,y,w) representa o mesmo ponto que *(x/w,y/w,1)*.

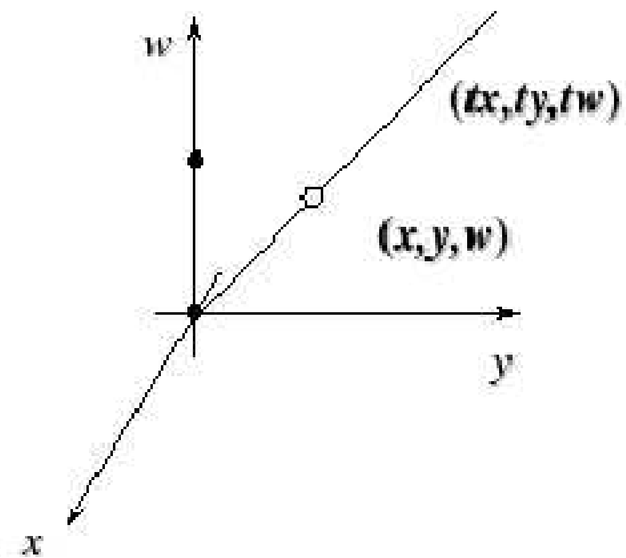
- Se w=0, então (x,y,w) é um ponto no infinito e representa uma direção do plano (mais sobre isto depois...)

Transformações geométricas

Coordenadas Homogêneas

- O uso de coordenadas homogêneas consiste em ***representar um espaço 2D imerso em um espaço 3D.***

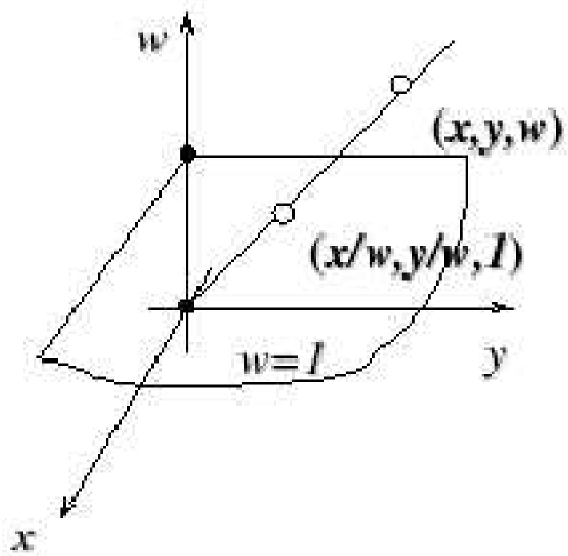
- Se tomarmos todas as triplas (tx, ty, tw), $w \neq 0$, que representam um mesmo ponto, temos uma reta no espaço 3D.



Transformações geométricas

Coordenadas Homogêneas

- Os pontos da forma *[x, y, 1]* formam um plano com coordenadas *w=1* no espaço *(x,y,w)*.



Transformações geométricas

Coordenadas Homogêneas

- Pontos são representados em coordenadas homogêneas por vetores de 3 componentes.

- Logo, as matrizes de transformação devem ser representadas por matrizes 3x3.

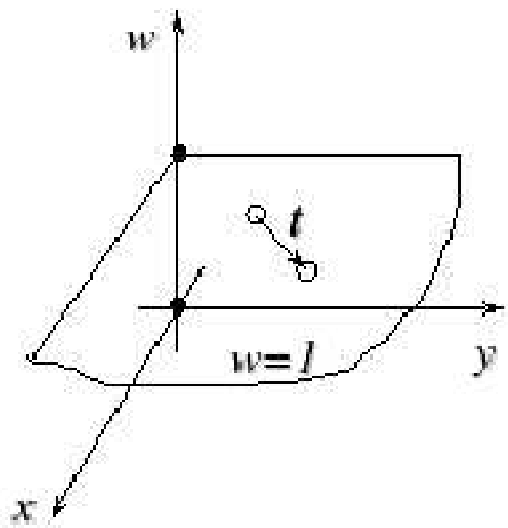
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformações geométricas

Translações em coordenadas homogêneas



$$p = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformações geométricas

Matrizes de transformação em coordenadas homogêneas

Escala

$$S\,.\,x=\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rotação

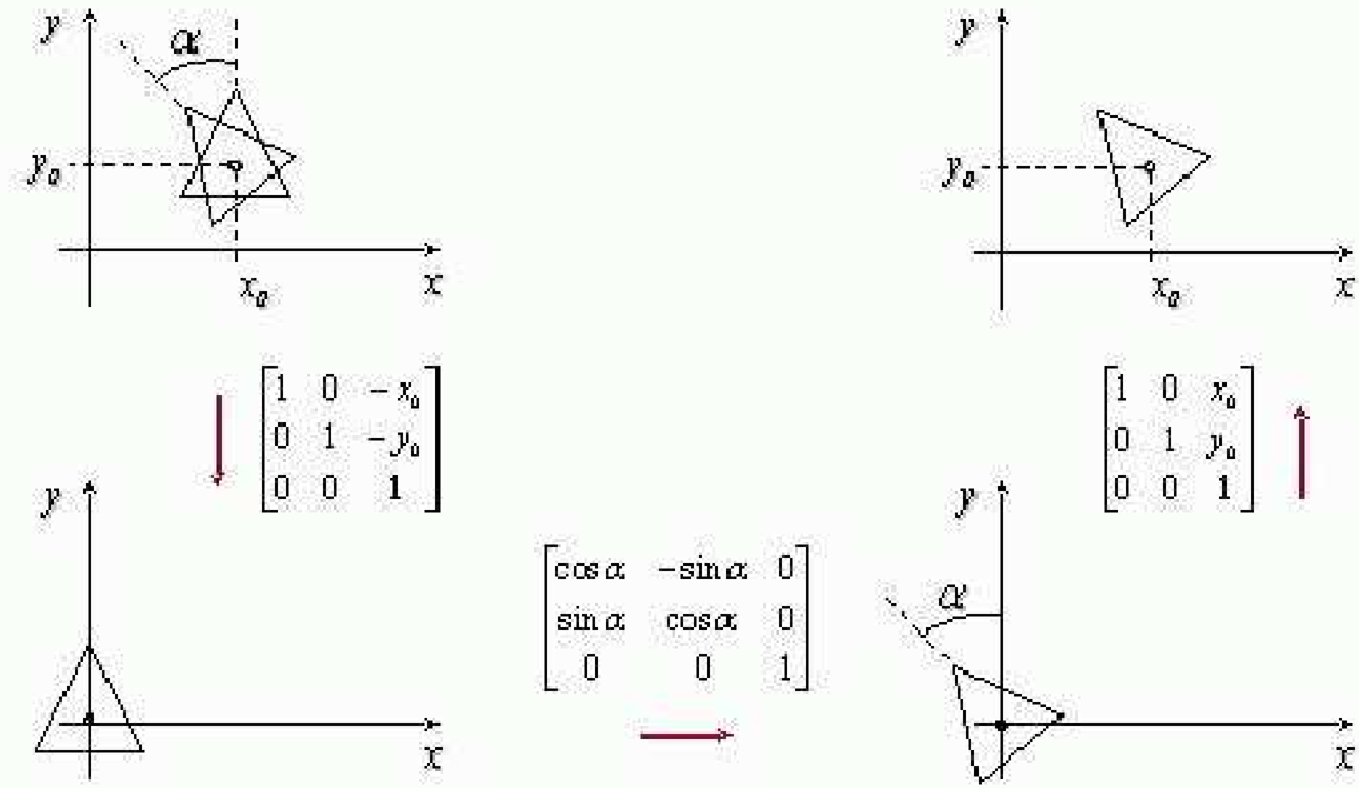
$$R_\theta\,.\,x=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cisalhamento

$$C\,x=\begin{pmatrix} 1 & \tan\gamma & 0 \\ \tan\psi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformações geométricas

Composição de transformações 2D



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Transformações geométricas

OpenGL

- A OpenGL ***trata objetos planares como sendo objetos tridimensionais com uma das coordenadas constante.***
- Logo, todas as transformações são realizadas no R^3 (de fato no espaço homogêneo 3d).
- Translação

```
glTranslate{fd}(TYPE x, TYPE y, TYPE z);
```

- Rotação de ***angle*** graus em torno de um eixo *(x,y,z)*.

```
glRotate{fd}(TYPE angle,TYPE x, TYPE y, TYPE z);
```

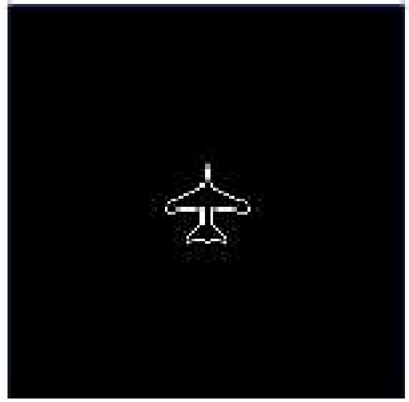
- Escala

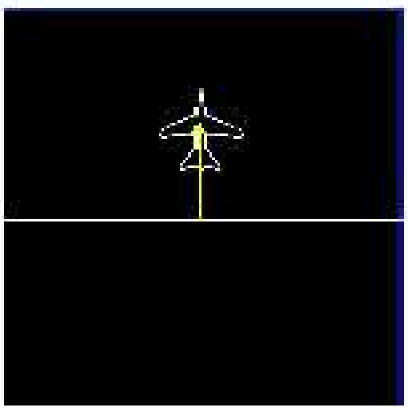
```
glScale{fd}(TYPE sx, TYPE sy, TYPE sz);
```

Transformações geométricas

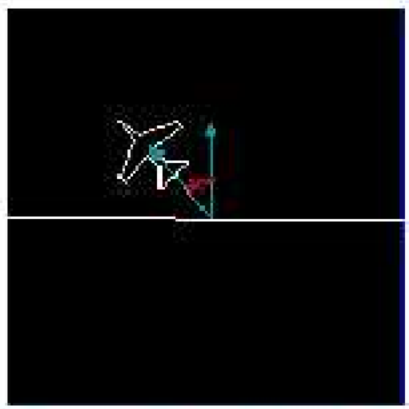
OpenGL

- Exemplos:

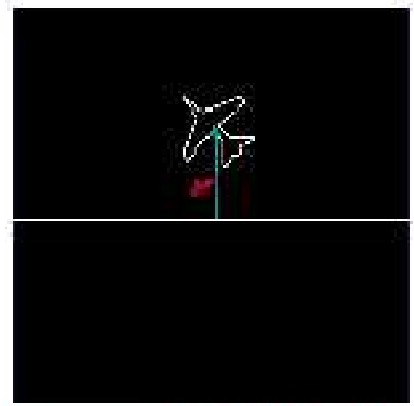




glTranslatef(0.0,30.0,0.0)



glTranslatef(0.0,30.0,0.0)
glRotatef(45.0,0.0,0.0,1.0)



glRotatef(45.0,0.0,0.0,1.0)
glTranslatef(0.0,30.0,0.0)

Aula 8

Professores:

Anselmo Montenegro
Esteban Clua

Conteúdo:

- Curvas interativas em OpenGL e transformações geométricas no plano