Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Computação Gráfica
AD1 - 2° semestre de 2011.

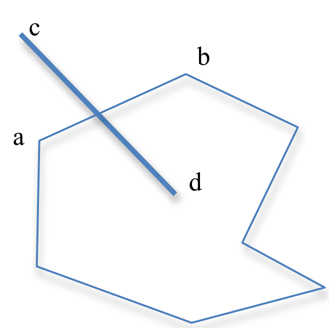
1) Faça uma pesquisa sobre o método de triangulação Ear Clipping (1.0 ponto).

O algoritmo Ear Clipping é uma técnica para triangularizar uma região planar que se baseia na remoção sucessiva de "orelhas" de um polígono. Uma orelha é triângulo T formado por três vértices sucessivos V_0, V_1 e V_2 para os quais não existe nenhum outro vértice do polígono que seja interior a T. O vértice V_1 é considerado a ponta da orelha e a linha passando por V_0 e V_2 é a diagonal do polígono. Existe um teorema que afirma que um polígono com quatro ou mais lados sempre tem pelo menos duas orelhas, o que sugere um algoritmo recursivo para triangulação (ver detalhes na referência abaixo). Basta então localizar uma orelha em um polígono com $n \geq 4$ vértices e removê-la resultando em um polígono com n-1 vértices, sobre o qual se repete o mecanismo até que não reste nenhum triângulo.

Referência:
http://www.geometrictools.com/Documentation/TriangulationByEarClipping.pdf
(acessado em 22/08/11).

2) Descreva um método para determinar se um segmento intersecta ou é interior a um polígono (1.0 ponto).

Primeiramente, para determinamos se um segmento intersecta um polígono procedemos da seguinte forma: verificamos se o segmento intersecta alguma das arestas do polígono. Para isto, utilizamos um teste simples. Seja cd o segmento e ab uma aresta do polígono, conforme a figura abaixo:



O segmento ab está a esquerda do segmento ad quando o produto vetorial (adxab)>0. Logo, queremos que (abxad) e (abxac) tenham sinais opostos. Além disso, (cdxca) e (cdxcb) também devem ser sinais opostos. Logo os segmentos se intersectam se e somente se (abxac)(abxad)<0 e (cdxca)(cdxcb)<0.

Caso o segmento não intersecte nenhuma aresta, temos duas possibilidades: o segmento é exterior ou interior ao polígono. Para verificar se o segmento é interior basta verificarmos a pertinência de um dos vértices ao interior da região determinada pelo polígono.

Isto pode ser feito utilizando um algoritmo baseado no Teorema de Jordan, que consiste em determinar o número de interseções de uma semirreta, que parte de um dos vértices, com as arestas do polígono. Se o número de interseções for ímpar dizemos que o vértice é interior, caso contrário dizemos que é exterior.

Se um dos vértices for interior, o outro também será e todos os demais pontos do segmento consequentemente serão interiores, caso contrário haveria interseção.

3) Explique o que são Octrees (1.0 ponto).

Uma octree é uma estrutura hierárquica que representa uma subdivisão adaptativa do espaço, em termos da ocupação de regiões cúbicas. A estrutura é criada começando pela representação da região cúbica que contém a cena como o nó raiz de uma árvore.

Se a região inicial for completamente ocupada pelos objetos da cena, então o nó correspondente na árvore é suficiente para representar a ocupação da região. Caso contrário, a região é subdividida em oito novas regiões cúbica, representadas por oito nós filhos do nó raiz da árvore.

O mesmo processo de classificação, seguido de potencial subdivisão, caso a ocupação de um nó seja apenas parcial, é aplicado recursivamente para cada um dos oito nós filhos criados. O processo termina quando a região cúbica associada a um nó representa ocupação total, ou então um nível máximo de profundidade da árvore seja alcançado.

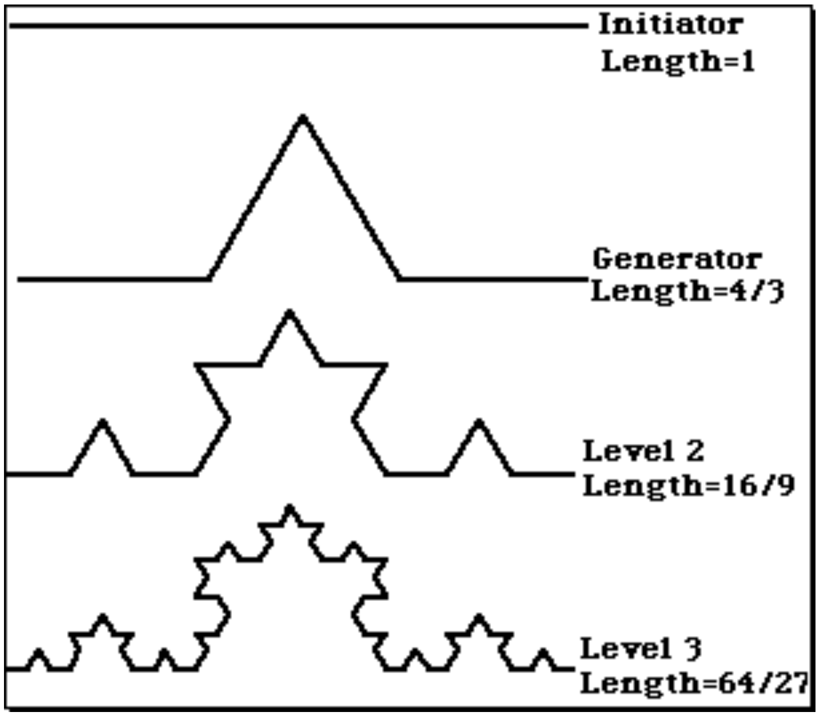
4) Faça uma pesquisa sobre Fractais. Descreva um algoritmo para construção de um fractal de sua escolha (1.0 ponto).

A geometria fractal é um termo criado por Benoit Mandelbrot que descreve certos fenômenos que ocorrem na natureza, sendo um exemplo bastante típico a forma geométrica das linhas da costa de uma região geográfica. Um objeto é considerado fractal ou com dimensão fracionária quando, visto em diferentes escalas, tende a apresentar as mesmas características, isto é quando sua estrutura apresenta um alto grau de auto-similaridade estatística em todas as possíveis escalas.

O algoritmo simples apresentado abaixo constrói a chamada curva de Koch que é uma curva fractal com auto-similaridade, isto é, pode ser subdivida em partes, onde cada parte é uma réplica da parte maior devidamente escalada.

1) Iniciar a curva com um segmento de reta.

2) Subdividir o segmento em 3 partes iguais.
3) Desenhar um triângulo equilátero de lado igual ao tamanho de cada subdivisão do segmento anterior, tendo como base o segmento do meio.
4) Remover o segmento do meio.
5) Repetir o processo recursivamente para cada um dos novos segmentos criados.



Fonte da figura:
http://www.vanderbilt.edu/AnS/psychology/cogsci/chaos/workshop/Fig4.7.GIF
(Acessado em 22/08/2011).

5) Descreva a estrutura de dados Winged-edge. Dica: consulte o livro Introdução à Geometria Computacional indicado no Guia da Disciplina (1.0 ponto).

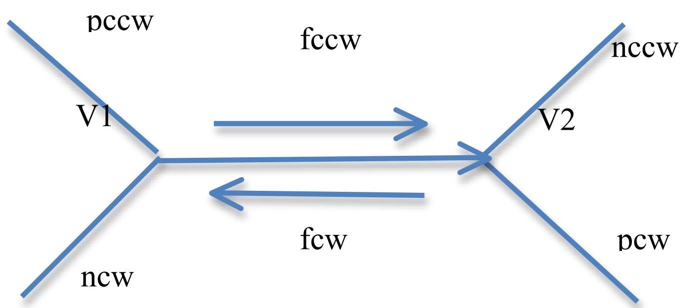
A estrutura de dados Winged-edge, proposta por Baugart, mantém um lista de vértices, uma lista de arestas e uma lista de faces.

Para cada vértice são armazenadas as coordenadas (x,y,z) e uma referência para uma das arestas (**e**) que lhe são incidentes.

Para cada face é armazenada uma aresta que lhe é incidente.

A lista de aresta concentra a maior parte da informação na estrutura. Cada aresta guarda duas referencias para os vértices que a definem na lista de vértices. A ordem dos vértices determina a orientação da aresta.

De acordo com a orientação da aresta, fccw (conter clock wise face) é considerada a face à esquerda da aresta, enquanto fcw (clock wise face) é considerada a face à direita. Para representar os ciclos de arestas, a Winged-edge mantém, para cada aresta **e**, referências para as arestas que a antecedem e a precedem nas faces à esquerda e à direita, denominadas por pccw,nccw,pcw e ncw respectivamente.



6) Como é possível concatenar duas curvas de Bézier sem introduzir descontinuidades na primeira derivada (1.0 ponto)?

   Para concatenar duas curvas de Bézier, mantendo a continuidade da primeira derivada, é necessário que no ponto de contato os vetores tangentes tenham mesma direção e mesma magnitude.

7) Descreva a diferença entre uma Nurbs e uma B-Spline (1.0 ponto).

   As B-Splines e as Nurbs são curvas compostas por segmentos de curva definidos com base em pontos de controle e vetores de nós. Assim como em uma B-Spline não-uniforme, nas Nurbs (Non Uniform Rational B-Spline), o espaço entre os valores dos nós não é uniforme, podendo ter multiplicidade diferente de um.

   O que de fato torna as Nurbs diferentes é a existência de um peso w_i, associado a cada ponto de controle P_i, que afeta a curva apenas localmente, assim como os pontos de controle, e que funciona como um fator de acoplamento. Quanto maior o valor de w_i, mais a curva se aproxima do ponto de controle P_i. A curva P(t) de grau k é obtida através de uma equação envolvendo uma divisão pelo somatório das bases de B-Splines ponderadas pelos pesos, o que explica o porque da curva ser considerada uma curva racional:

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} P_i w_i B_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_{i,k}(u)}$$

8) Mostre uma interpretação geométrica para o algoritmo de De Casteljau para avaliação de uma Curva de Bézier (1.0 ponto).

   O algoritmo de deCastlejau é um algoritmo utilizado para calcular um ponto sobre uma curva de Bérzier correspondente a um valor de parâmetro t = t0, 0≤t0≤1, baseado em aplicações repetidas de interpolações lineares. Considere, por exemplo, uma curva de

Bézier de grau n=3 contendo os pontos P0,P1,P2 e P3. A parametrização do segmento P0P1 é dada por

$$(1 - t)P0 + tP1,$$

Para um dado valor de t=t0 podemos calcular um novo ponto de controle sobre P0P1 da seguinte forma:

$$Q0 = (1 - t0)P0 + t0P1.$$

Podemos aplicar o mesmo processo calculando para os segmentos P1P2 e P2P3 os pontos :

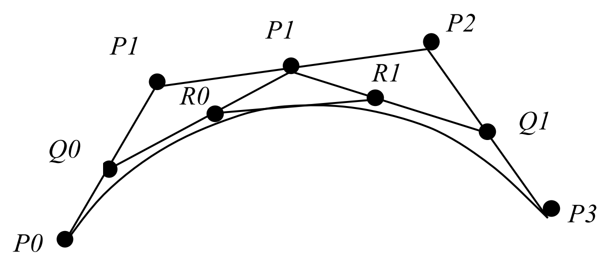
$$Q1 = (1 - t0)P1 + t0P2 \text{ e } Q2 = (1 - t0)P2 + t0P3.$$

Em seguida, obtemos os pontos R0 e R1, interpolando para t=t0, respectivamente, os extremos dos segmentos Q0Q1 e Q1Q, conforme abaixo:

$$R0 = (1 - t0)Q0 + t0Q1 \text{ e } R1 = (1 - t0)Q1 + t0Q2.$$

Finalmente, o ponto B(t0) na curva é obtido interpolando-se R0 e R1

$$B(t0) = (1 - t0)R0 + t0R1$$



A interpretação geométrica é a de que o algoritmo de deCasteljau funciona através de um processo de subdivisão sucessiva. Começamos com o polígono de controle com n pontos e criamos pontos na subdivisão de cada segmento em função do valor do parâmetro t. Como isso geramos um novo polígono com n-1 pontos e no final do processo, quando o polígono de controle tiver somente um ponto, encontramos o ponto que recai sobre a curva.

9) Faça uma pesquisa sobre Splines Naturais Cúbicas (Interpolating Cubic Splines). Obs.: não confundir com B-Splines. Dica.: consulte alguma referência ou livro sobre métodos numéricos (1.0 ponto).

As Splines Naturais Cubicas são um caso particular das Splines Interpolantes Cúbicas, isto é um conjunto de segmentos de curvas cúbicos que interpola um conjunto de pontos $(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)$.

Existem inúmeras formas de se interpolar um conjunto de pontos. As Splines Interpolantes se inspiram na teoria linear das vigas, a qual afirma que para pequenos deslocamentos, a quarta derivada do deslocamento da viga é nula. Se consideramos que nossa curva interpolante é dada por y=S(x), com $x_1 \leq x \leq x_n$ e $x_2-x_1=x_3-x_2=...=x_n-x_{n-1}=h$, isto é os pontos são igualmente espaçados em x, então $S(x)^{iv}=0$.

Integrando esta restrição (de que a quarta derivada é nula) chegamos a conclusão de que os segmentos interpolantes são polinômios de grau 3 (um polinômio de grau 3 derivado quatro vezes se anula). Log S(x) é da forma:

$$S(x)=\begin{cases} a_1(x-x_1)^3+b_1(x-x_1)^2+c_1(x-x_1)+d, x_1 \leq x \leq x_2 \\ a_2(x-x_2)^3+b_2(x-x_2)^2+c_2(x-x_2)+d, x_2 \leq x \leq x_3 \\ \vdots \\ a_1(x-x_n)^3+b_n(x-x_n)^2+c_n(x-x_n)+d, x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

Para determinar os coeficientes (a_i,b_i e c_i) dos polinômios de grau 3, que interpolam os pontos dados, é necessário impor algumas restrições.

Primeiramente impomos a restrição de que $S(x_i) = y_i$, isto é, a curva interpola os pontos dados. Além disso, adicionamos mais três restrições determinada pela teoria das vigas: para uma viga que sofre apenas forças externas, a derivada dos deslocamentos é contínua, logo S(x)'' deve ser contínua. Consequentemente S(x), S(x)' e S(x)'' devem ser contínuas.

Com estas quatro restrições é possível determinar uma sistema linear de n-2 equações a n incógnitas. Para solucionar tal sistema, é necessário introduzir mais restrições de forma a gerar um sistema de n equações por n icógnitas. As Splines Naturais são obtidas quando forçamos as derivadas segundas nos pontos extremos da curva se anularem, isto é S(x1)''=S(x2)''=0.

Referência: Algebra Linear com Aplicações – Anton Rorres. Bookman - Oitava edição. Páginas 384-386.

10) Faça uma pesquisa sobre as curvas Catmull-Rom. Explique como elas são construídas com base em um conjunto de pontos de controle (1.0 pontos).

Um Catmull-Rom é uma curva que pode funcionar tanto como uma spline aproximante como uma spline interpolante. Consideremos aqui uma Catmull-Rom formada por seguimentos cúbicos. Se usada como uma spline interpolante, que é um caso bastante comum, os segmentos de curva passam pelos pontos de controle excetuando-se o primeiro e o último (p_0 e p_m). O segmentos são construídos da seguinte forma. Para um dado ponto de controle pi, determinamos a direção tangente Li paralela a corda que liga pi-1 e pi+1. Uma vez tendo determinado a tangente nos pontos de controle adicionamos pontos interiores de Bézier e reconstruímos cada um dos seguimentos conforme a expressão dada pelas curvas de Bézier (Lembre-se que de posse das tangentes de dois pontos consecutivos é possível determinar mais dois formando um total de quatro, o que é um número de pontos de controle suficiente para determinar uma curva de Bézier cúbica).