Aula 18: Propriedades de Árvores Binárias

- Número de subárvores vazias
- Alturas mínima e máxima de árvores binárias
- Modelo de armazenamento em árvores binárias

Propriedades de Árvores Binárias

- Provas Matemáticas:
- Algumas técnicas:
  - provas construtivas
  - provas por absurdo
  - indução matemática
- O conceito de indução:
  - idéia
  - prova por indução:
    - base de indução
    - hipótese de indução
    - passo de indução

Exemplo de Prova por Indução

- Mostrar que a soma dos n primeiros números naturais, $n \geq 1$, é igual a $n.(n+1)/2$
  - Prova: por indução. S_n = soma dos n primeiros números naturais.
  - Base da indução: $n = 1 \Rightarrow S_1 = 1$. Vale.
  - Hipótese de indução: supor o resultado verdadeiro para $n - 1$.

    Então $S_{n-1} = (n-1)(n-1+1)/2 = (n-1)\,n/2$
  - Passo da indução: $S_n = S_{n-1} + n$

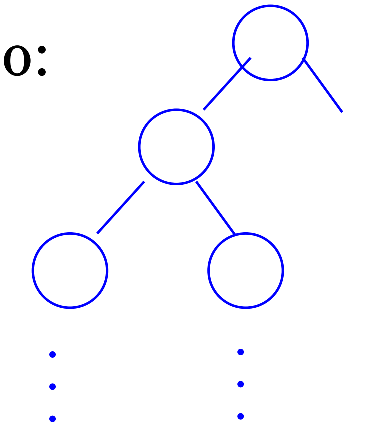
    Aplicar a hipótese de indução:

    $S_n = (n-1)\,n/2 + n = (n^2 - n + 2n)/2 = n\,(n+1)/2$

Árvores Binárias

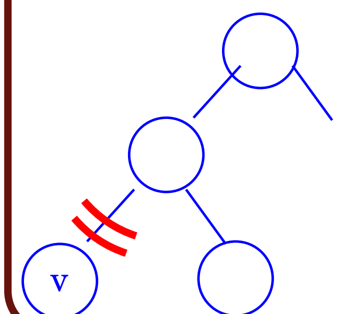
- Lema: uma árvore binária com $n > 0$ nós possui exatamente $n + 1$ subárvores vazias.

Exemplo:



$n = 4$
5 subárvores vazias

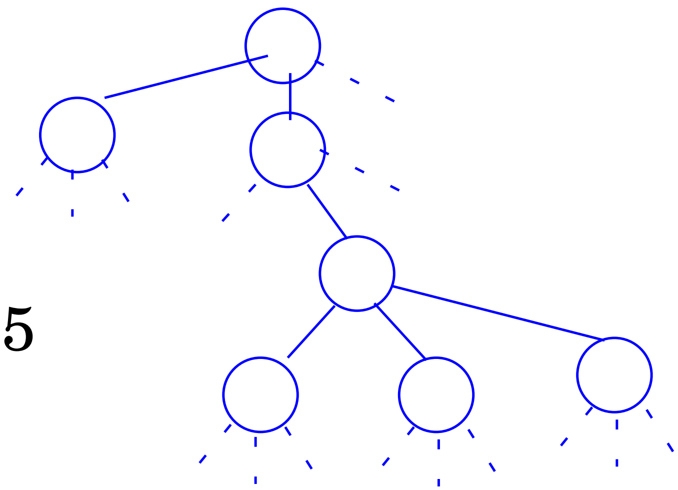
- Prova:
  - base da indução: n = 1 (trivial)
  - hipótese de indução
  - passo de indução:
    1. Escolher uma folha v (existe) de T e removê-la;
    2. Aplicar hipótese de indução a $T - v$ => $T - v$ possui n subárvores vazias;
    3. Logo, T possui $n - 1 + 2 = n + 1$ subárvores vazias.



Exercício

- Mostrar que o número de subárvores vazias de uma árvore m-ária com n nós é igual a (m - 1) n + 1

- Exemplo: m=3, n=7



(3 - 1) 7 + 1 =15

- Tempo: 15 minutos

Solução

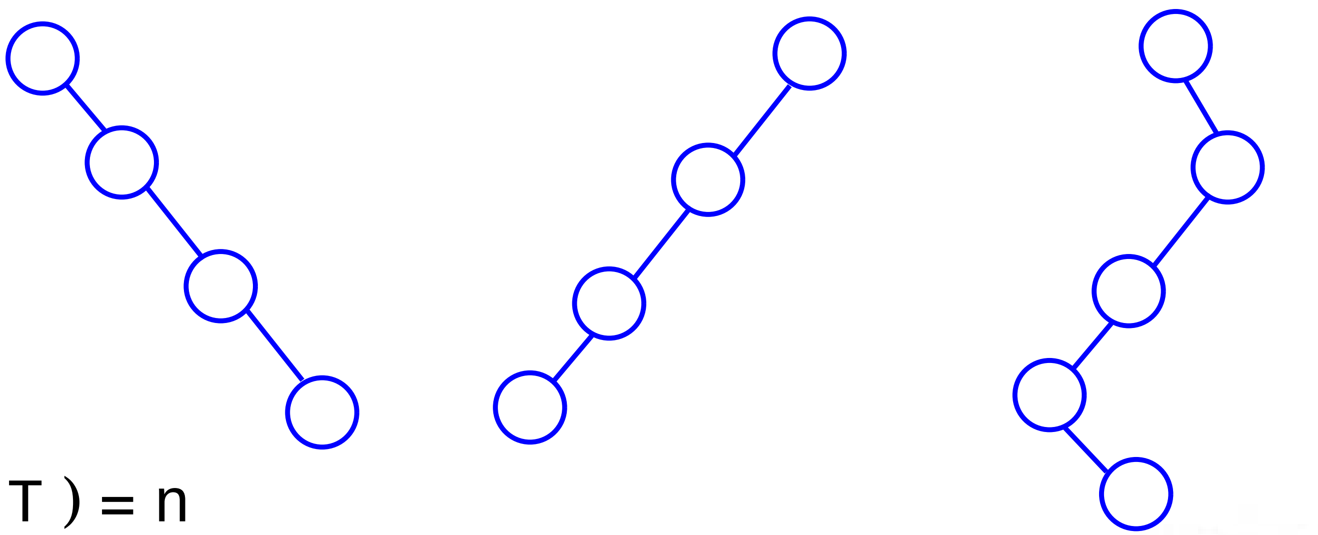
- $S_{n,m}$ = número de subárvores vazias em uma árvore m-ária T com n nós, $n > 0$ e $m \geq 2$.
  Provar que $S_{n,m} = (m - 1)n + 1$
- Indução em n:

- Base da indução: $n = 1$, $S_{1,m} = (m - 1).1 + 1 = m$, vale
- Hipótese de indução: o resultado vale para árvores m-árias com $n - 1$ nós.
  Então: $S_{n-1,m} = (m - 1)(n - 1) + 1$
- Passo da indução:
  * escolher uma folha v de T e removê-la;
  * T-v possui n-1 nós, logo $(m-1)(n-1) + 1$ subárvores vazias
  * por outro lado, $S_{n,m} = S_{n-1,m} + m - 1$
  * Logo, $S_{n,m} = (m - 1).(n - 1) + 1 + m - 1 = (m - 1).n + 1$

Numero de Nós x Altura

- Questão de interesse: Descrever árvores binárias com n nós que possuem:
  - altura máxima;
  - altura mínima.

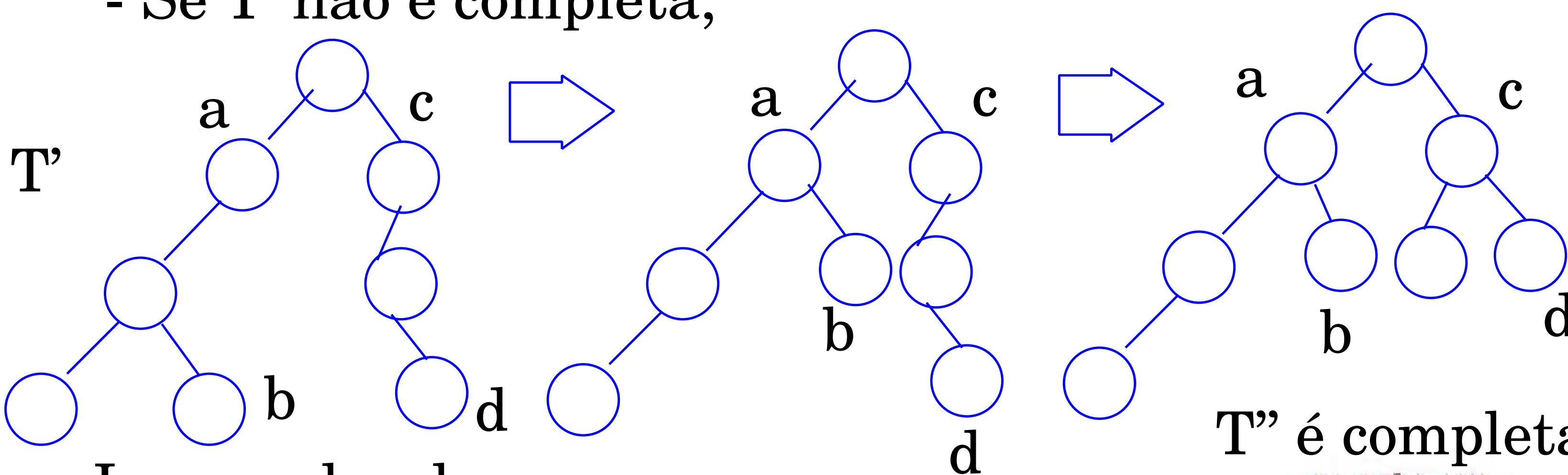
- Resposta para altura máxima: árvores ziguezague



$h(T) = n$

Numero de Nós x Altura

- Resposta para altura mínima:
  - Lema: Seja T uma árvore binária completa com n > 0 nós. Então T possui altura h mínima. Além disso, $h = 1 + \lfloor \log n \rfloor$
  - Idéia da prova do lema:
    - Seja T' uma árvore binária de altura mínima, com n nós.
      - Se T' é também completa, vale o lema.
      - Se T' não é completa,

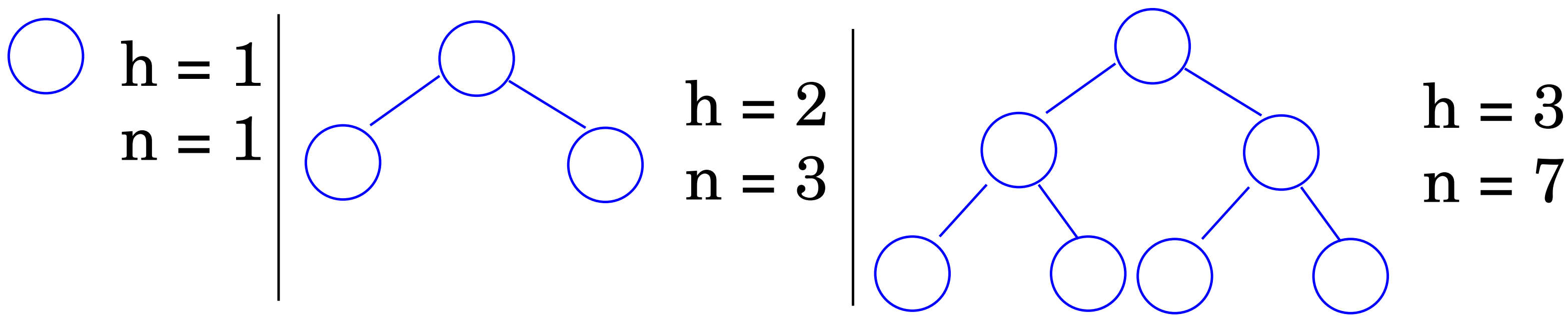


T'' é completa

Logo, vale o lema.

Numero de Nós x Altura

- Resposta para altura mínima (cont.)
  Cálculo da altura h de T
- Se $h = 1 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow$ vale $h = 1 + \lfloor \log n \rfloor$
- Seja $h > 1$.
  - Se T é cheia então $n = 2^h - 1 \Rightarrow h = 1 + \lfloor \log n \rfloor$



  - Se T não é cheia, seja T” a árvore cheia de altura $h” = h - 1$. T” possui n” nós, sendo $h” = 1 + \lfloor \log n” \rfloor$.
    Como $\lfloor \log n \rfloor = 1 + \lfloor \log n” \rfloor$ e
    $h = 1 + h”$,
    vale $h = 1 + \lfloor \log n \rfloor$

Exercícios

- Provar ou dar contra-exemplo:

- Uma árvore binária é completa se e somente se ela possuir altura mínima.

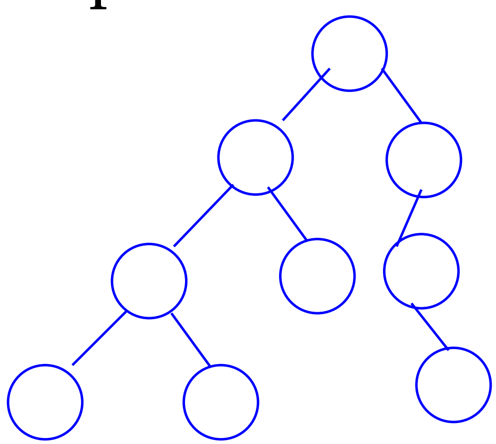
- Tempo: 2 minutos.

Solução

árvore binária completa $\xRightarrow{\text{pelo lema}}$ altura mínima

altura mínima $\not\Rightarrow$ árvore binária completa

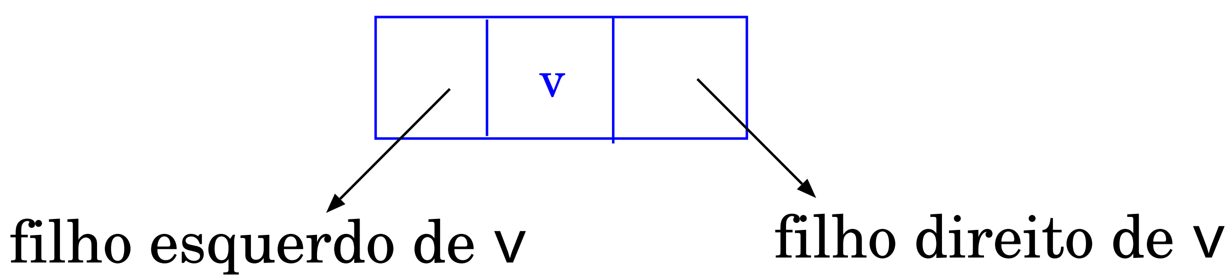
Contra-exemplo:



Armazenamento de Árvores

- Em alocação - seqüencial
  - encadeada

- Idéia da estrutura:
  - cada nó da árvore dá origem a um nó na estrutura
  - em cada nó da estrutura, existem 2 ponteiros
    - ponteiro para o filho esquerdo de v
    - ponteiro para o filho direito de v



Observações sobre a Estrutura

- É necessário guardar a localização da raiz da árvore.
ponteiro `raiz`

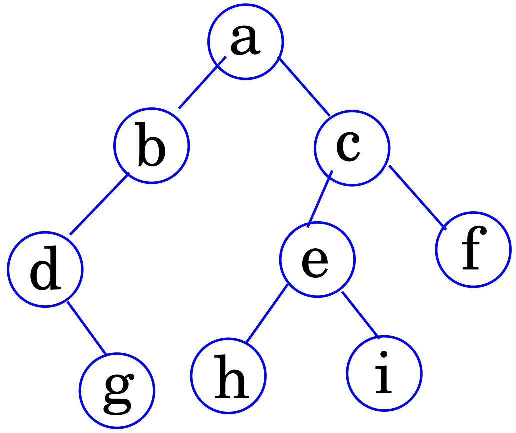
- Cada nó possui dois ponteiros, `esq` e `dir`,
que apontam para as raízes de suas subárvores,
esquerda e direita, respectivamente.

- Além disso, um campo `info` contém informações
sobre o nó (rótulo, etc.)

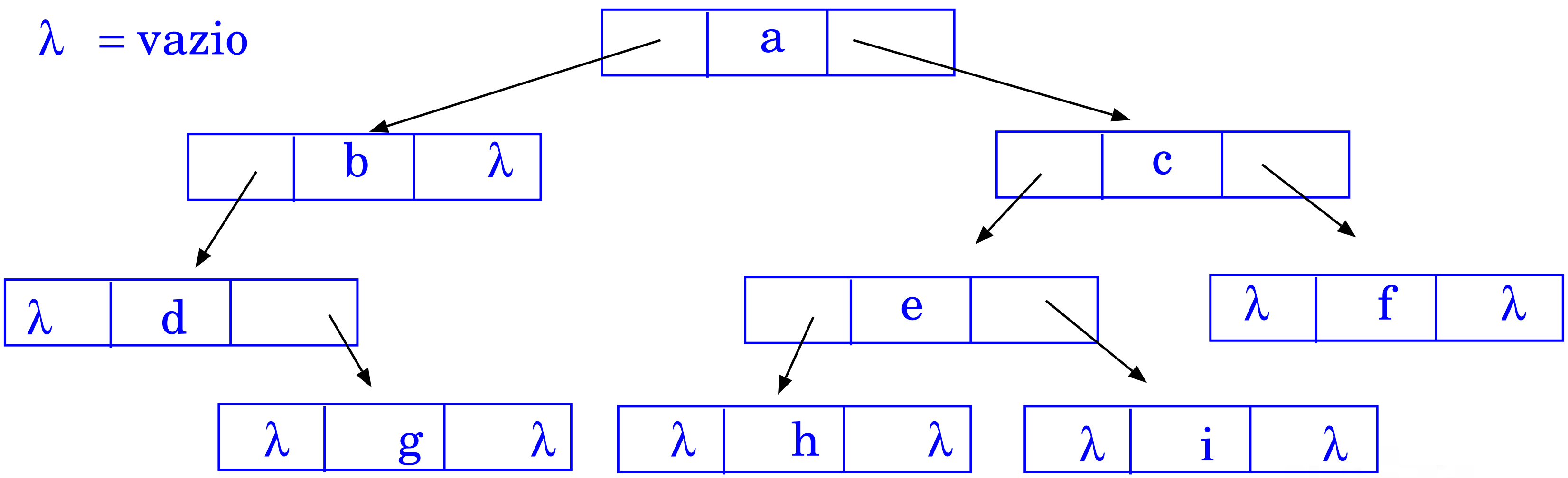
- Excetuando-se o campo `info`, são necessárias 2n+1
posições de memória para o armazenamento da árvore.

Estrutura de Árvores

Exemplo:

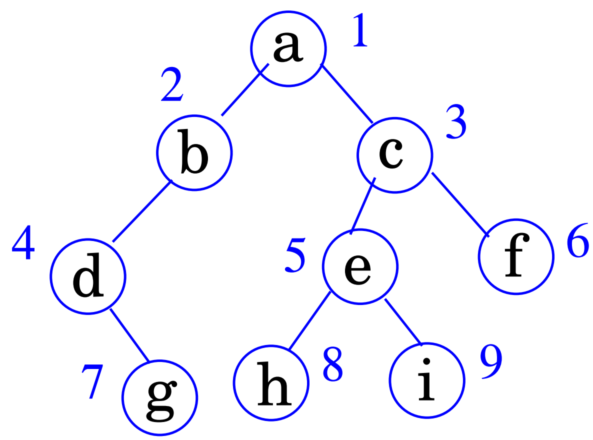


λ = vazio



Árvores Estáticas

- Se não houverem inclusões, nem remoções: `esq` e `dir` podem ser implementados como vetores, cada qual com n posições. Exemplo:



esq:

2	4	5	λ	8	λ	λ	λ	λ

dir:

3	λ	6	7	9	λ	λ	λ	λ

raiz: 1

Exercício

- Determinar as quantidades máxima e mínima de ponteiros vazios (λ) existentes:

  1. no campo `esq` (ou `dir`)

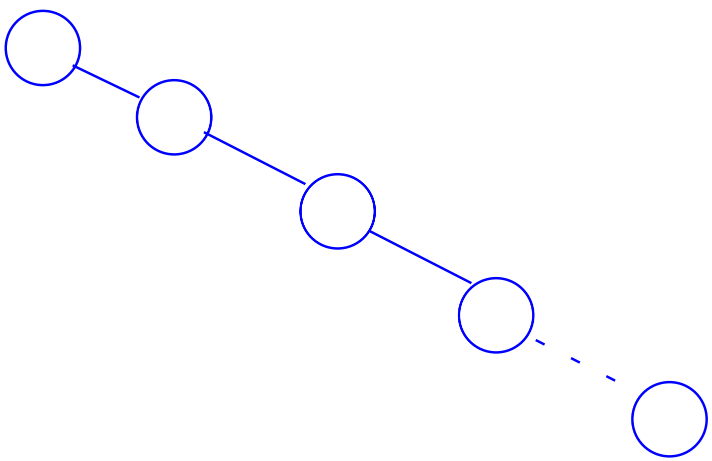
  2. no total dos campos `esq` e `dir`

  Dado: número de vértices = `n`

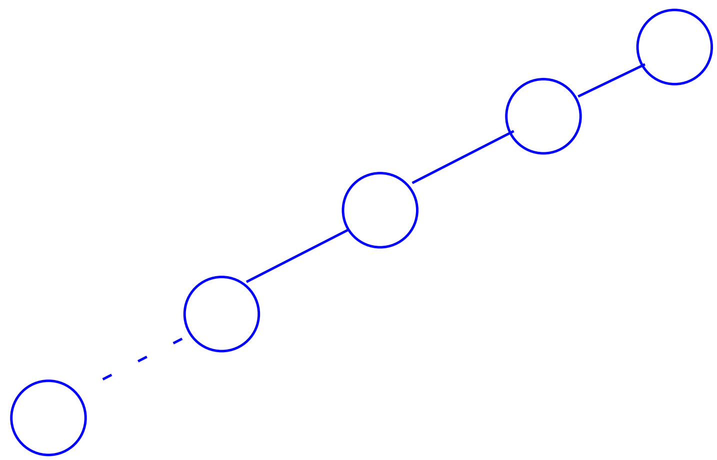
- Tempo: 5 minutos

Solução

1. `esq`



máximo = n



mínimo = 1 (a folha)

2. `esq + dir`

Há um total de `n + 1` campos λ presentes em `esq` e `dir`, independente da árvore com `n` nós.