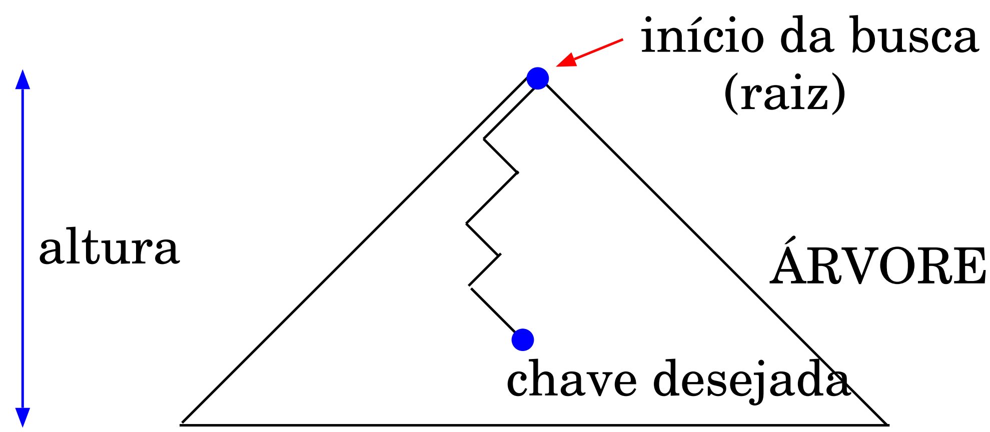
Aula 23: Árvores Balanceadas

- Conceito de balanceamento
- Introdução às árvores AVL
- Balanceamento de árvores AVL

Conceito de Balanceamento

Aspecto Fundamental no estudo de árvores de busca: o custo de acesso a uma chave depende do valor da altura da árvore.



Conceito de Balanceamento

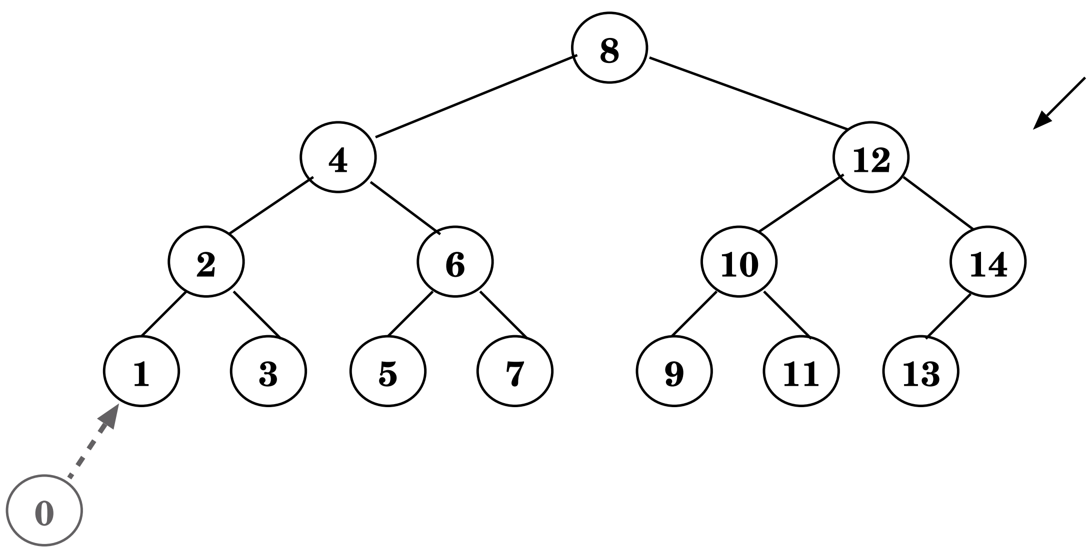
- Idéia: manter o custo de acesso (e portanto a altura) na mesma ordem de grandeza de uma árvore ótima, isto é, O(log n).

- Árvore Balanceada: o custo das operações de busca, inserção, remoção e arrumação da estrutura da árvore mantém-se em O(log n) .

Uma Tentativa para Manter Balanceamento: Uso de Árvores Completas

- Embora uma árvore completa possua altura O(log n), uma operação de inserção com a conseqüente arrumação da estrutura pode consumir tempo $\Omega(n)$ no pior caso. Veja o exemplo:

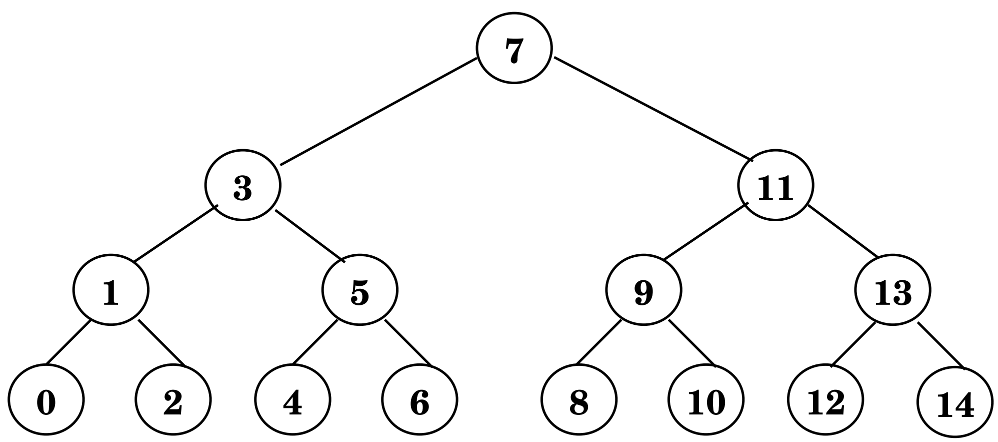
ANTES: Inserção do nó "0"



Árvore deixa de ser completa!

Uma Tentativa para Manter Balanceamento: Uso de Árvores Completas

DEPOIS: Arrumação da Estrutura



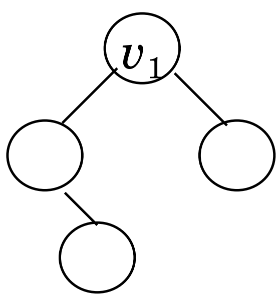
Todos os nós foram movidos!

Árvores AVL

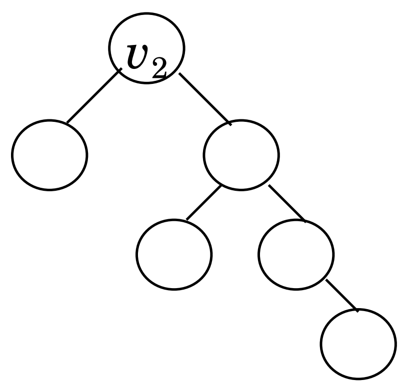
- Idéia: exigir que a altura seja O(log n), e que esta propriedade se estenda a todas as subárvores: cada subárvore com m nós deve possuir altura O(log m).

- Definição (nó regulado)

Um nó v de uma árvore binária T é dito regulado se as alturas de suas subárvores esquerda e direita diferem de até uma unidade.



v_1 está regulado

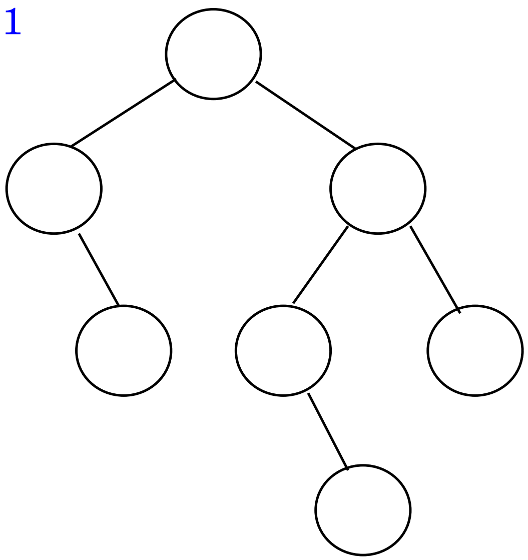


v_2 está desregulado

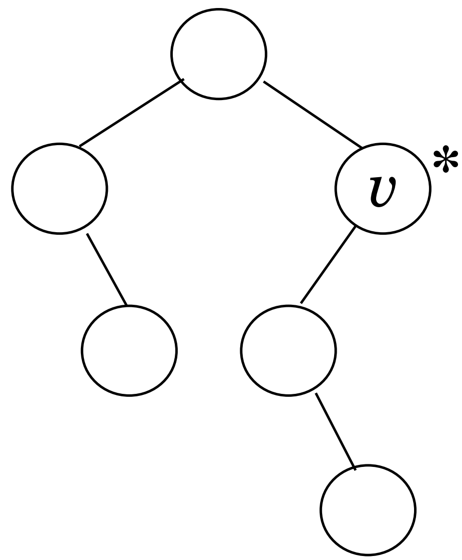
Definição (Árvores AVL)

Uma árvore binária T é uma <u>árvore AVL</u> quando <u>todos</u> os seus nós estão regulados.

T_1



T_2



T_1 é AVL

T_2 não é AVL
(possui nó v que está desregulado)

Árvores AVL

- As árvores AVL são balanceadas?

  A resposta é SIM.

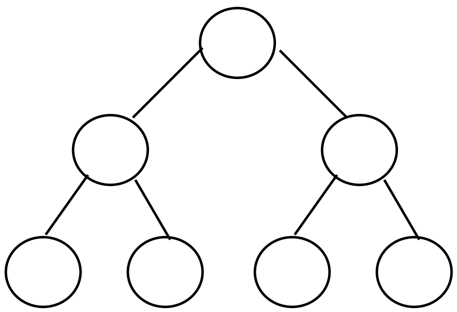
  Inicialmente, temos que mostrar que uma árvore AVL de altura h com n nós satisfaz

$$h = O(\log n)$$

- Idéia: fixada a altura h, considerar as árvores AVL com o menor número possível de nós e concluir que, mesmo neste caso, h continua satisfazendo $h = O(\log n)$.

Árvores AVL

Observe: fixada a altura h, árvores com "poucos" nós (n pequeno) tendem a ficar desbalanceadas.

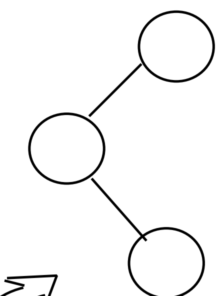


$h = 3$

$n = 7$

$h = \log(n + 1)$

$\boxed{h = O(\log n)}$



$h = 3$

$n = 3$

$h = n$

$h = O(n)$

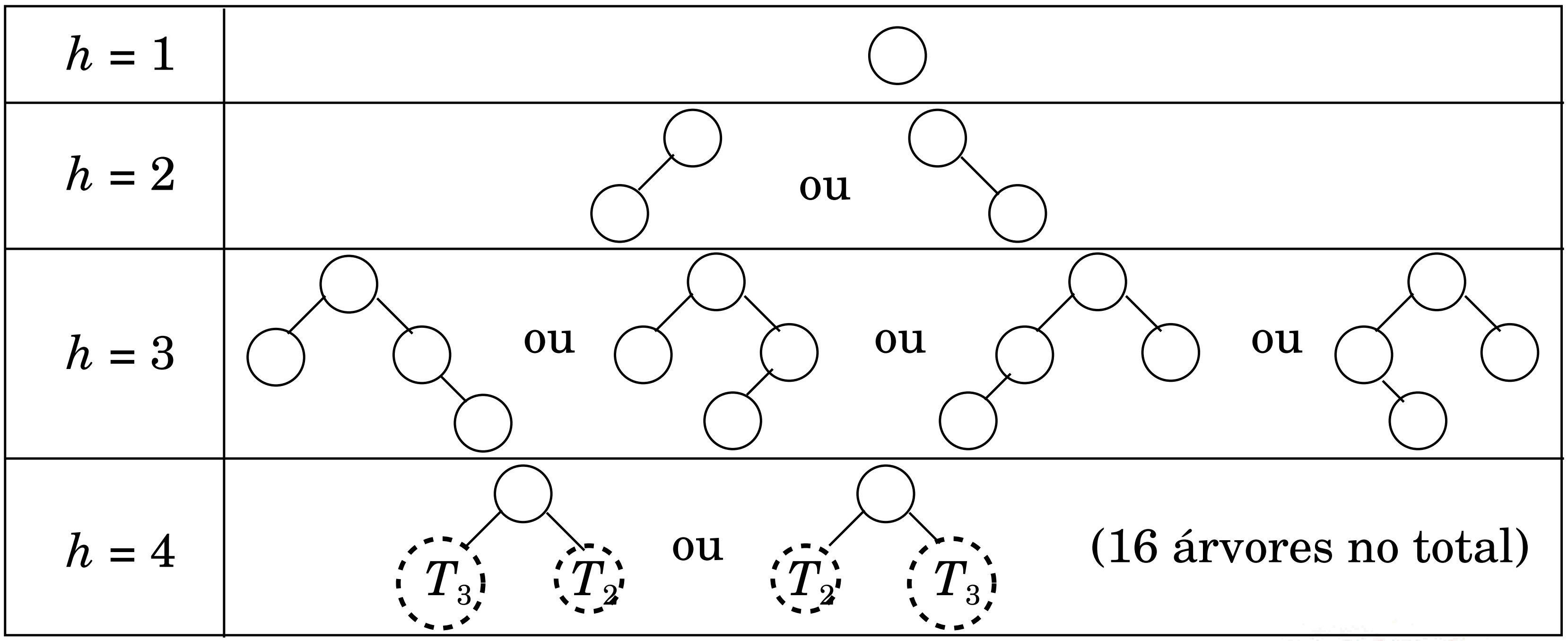
Isto não ocorrerá para árvores AVL !

Árvores AVL

Teorema: seja $\underline{T}$ uma árvore AVL de altura $\underline{h}$ com número mínimo de nós $\underline{n}$. Então $h = O(\log n)$.

Demonstração

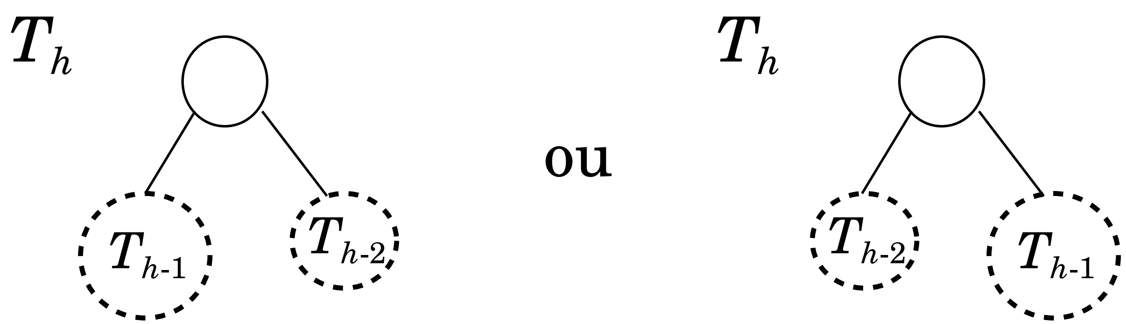
Para cada valor de h, vamos desenhar as árvores AVL com número mínimo de nós.



Árvores AVL

Continuação da Demonstração do Teorema

De modo geral, se T_h é uma árvore com altura $\underline{h}$ e número mínimo de nós $\underline{n}$, então a estrutura de T_h é



Árvores AVL

Continuação da Demonstração do Teorema

E o número de nós n de T_h é dado pela tabela:

h	$n = \lvert T_h \rvert$
1	1
2	2
3	4
4	7
5	12
$\vdots$	$\vdots$
h	$\lvert T_{h-1} \rvert + \lvert T_{h-2} \rvert + 1$

Árvores AVL

Continuação da Demonstração do Teorema

A tabela na tela anterior nos fornece uma recorrência:

$$\begin{cases} |T_1| = 1 \\ |T_2| = 2 \\ |T_h| = |T_{h\text{-}1}| + |T_{h\text{-}2}| + 1, \; h \geq 3 \end{cases}$$

Árvores AVL

Continuação da Demonstração do Teorema

Vamos comparar os valores da tabela com os valores fornecidos pela seqüência de Fibonacci.

h	$\lvert T_h \rvert$	F_h
1	1	1
2	2	2
3	4	3
4	7	5
5	12	8
6	20	13
7	33	21
8	54	34

Conclusão:

$$\lvert T_h \rvert \geq F_h$$

Árvores AVL

Continuação da Demonstração do Teorema

Mas sabe-se que

$$F_h = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^h - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^h\right]$$

Logo: $$|T_h| > \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^h - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^h\right]$$

Como $h > 0$, temos $$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^h < 1$$

Portanto: $$|T_h| > \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^h - 1$$

Árvores AVL

Continuação da Demonstração do Teorema

Fazendo $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, temos

$$|T_h| > \frac{1}{\sqrt{5}} * a^h - 1$$

$$\frac{|T_h| + 1}{\frac{1}{\sqrt{5}}} > a^h$$

$$a^h < \frac{|T_h| + 1}{\frac{1}{\sqrt{5}}} < \sqrt{5}(|T_h| + 1)$$

$$h < log_a[\sqrt{5}(|T_h| + 1)]$$

Árvores AVL

Continuação da Demonstração do Teorema

Passando para logaritmo na base 2:

$$h < \frac{log[\sqrt{5}(|T_h| + 1)]}{loga}$$

$$h < \frac{log[\sqrt{5} * 2 * |T_h|]}{loga}$$

Árvores AVL

Continuação da Demonstração do Teorema

Usando propriedades de logaritmos:

$$h < \frac{1}{loga} * log|T_h| + \frac{log2\sqrt{5}}{loga}$$

Mas $|T_h| = n$

Fazendo $\frac{1}{loga} = a_1$ e $\frac{log2\sqrt{5}}{loga} = a_2$:

$$h < a_1 logn + a_2$$

Finalmente, portanto:

$$\boxed{h = O(logn)}$$

Exercício

Determine a quantidade total Q_h de árvores AVL de altura h com número mínimo de nós n.

$$\begin{array}{c|c}
h & Q_h \\
\hline
1 & 1 \\
2 & 2 \\
3 & 4 \\
4 & 16 \\
5 & 128 \\
\vdots & \vdots \\
h & \longrightarrow Q_h = ?
\end{array}$$

Você seria capaz de obter uma fórmula para Q_h ?