Aula 17: Conceitos de Árvores e Árvores Binárias

- Raiz, filho, pai, irmão, ancestral, descendente, folha.
- Nível, altura, subárvore, subárvore parcial.
- Árvores binárias completas, binárias cheias, estritamente binárias, m-árias.

Aula 17: Conceitos de Árvores e Árvores Binárias

Motivação:

- Em diversas situações são necessárias estruturas mais complexas do que as puramente seqüenciais.
- Árvores: admitem tratamento computacional eficiente de um modo geral.
- As árvores são largamente empregadas nas mais diversas áreas da computação, como banco de dados, sistemas operacionais, compiladores, redes de computadores, etc.

Definição

Uma <u>árvore enraizada</u> T, ou simplesmente <u>árvore</u>, é um conjunto finito de elementos, denominados nós, tais que:

- T = $\emptyset$, e a árvore é dita vazia, ou

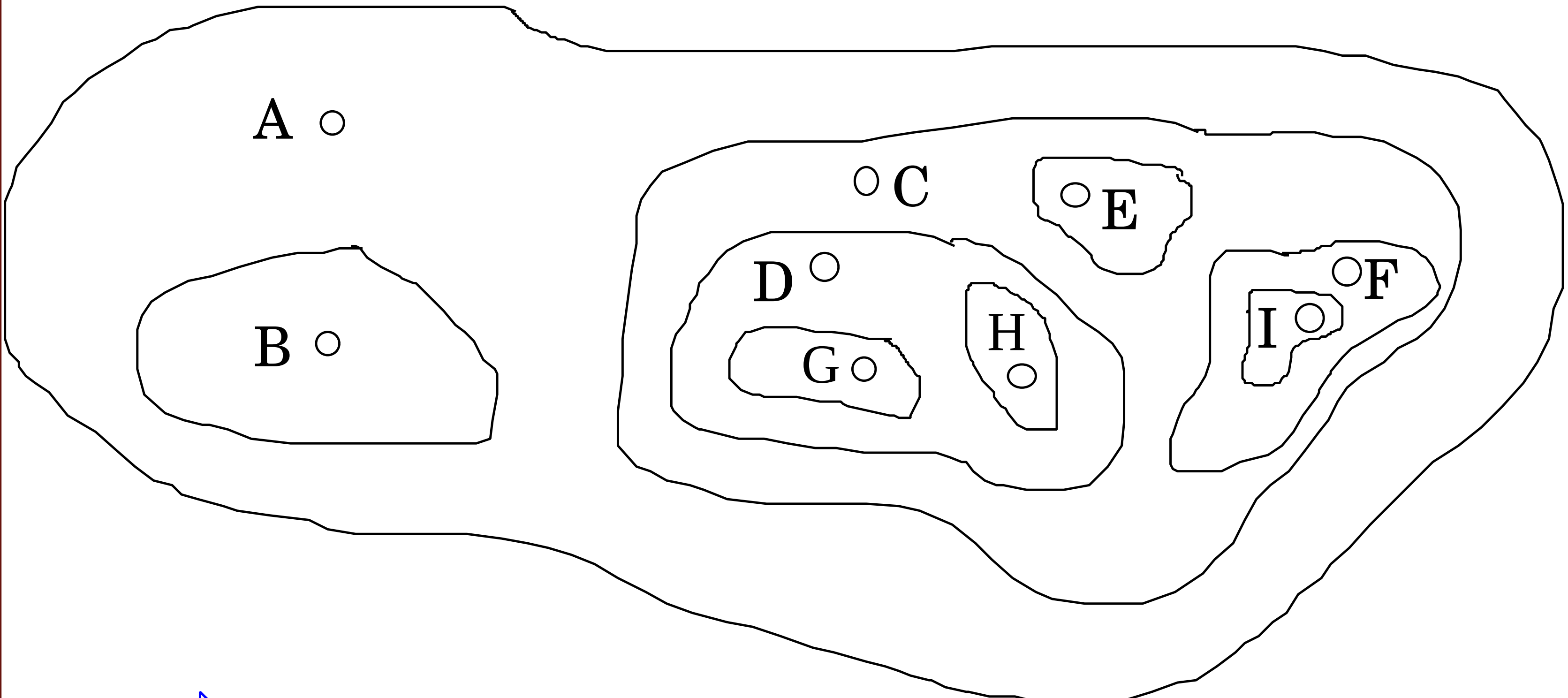
- existe um nó especial r, chamado raiz de T; os nós restantes constituem um único conjunto vazio ou dividem em $n \geq 1$ conjuntos disjuntos não vazios, as subárvores de r, cada qual por sua vez uma árvore.

Definição

- Uma floresta é um conjunto de árvores.
- Se v é um nó de T, a notação T_v indica a subárvore de T, com raiz v.
- A cada nó v de T, pode estar associado a um identificador denominado rótulo de v.

Representação de uma Árvore

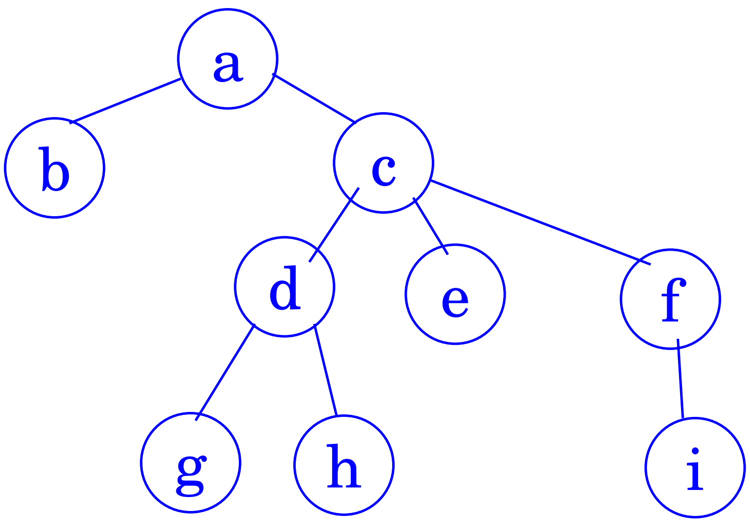
- Diagrama de inclusão



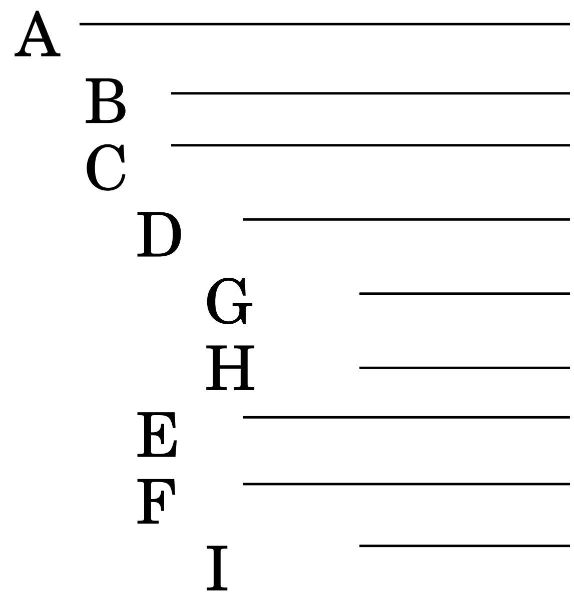
- Quais são as subárvores?

Representação de uma Árvore

- Mais empregada: representação hierárquica.



- Diagrama de barras:



- Notação de parênteses:

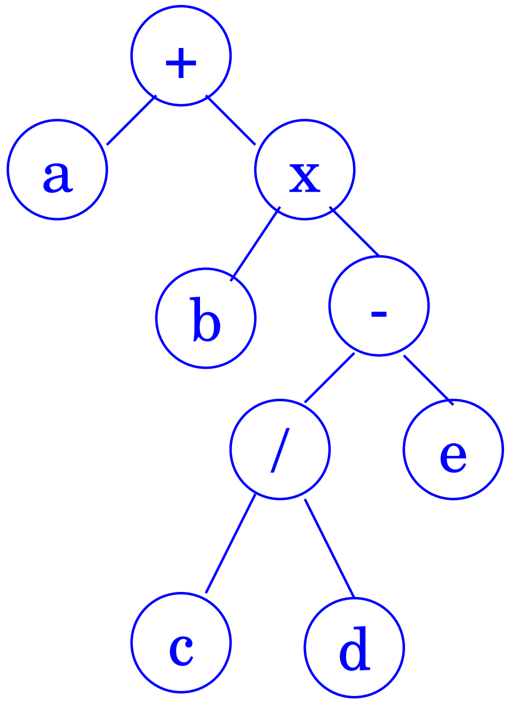
(A (B) (C (D (G) (H)) (E) (F (I))))

Árvores e Expressões Aritméticas

- Toda expressão aritmética pode ser colocada sob a forma de uma sequência de parêntesis aninhados.
- Toda seqüência de parêntesis corresponde a uma árvore.
- Essa árvore corresponde à ordem como a expressão aritmética seria computada.

Árvores e Expressões Aritméticas

- Exemplo: a + b x (c / d - e) => (a + (b x ((c / d) - e)))



Exercício

- Escrever a expressão a + b x (c / d - e) em notação polonesa reversa. Qual a sua relação com a árvore correspondente?

- Tempo: 2 minutos.

Solução

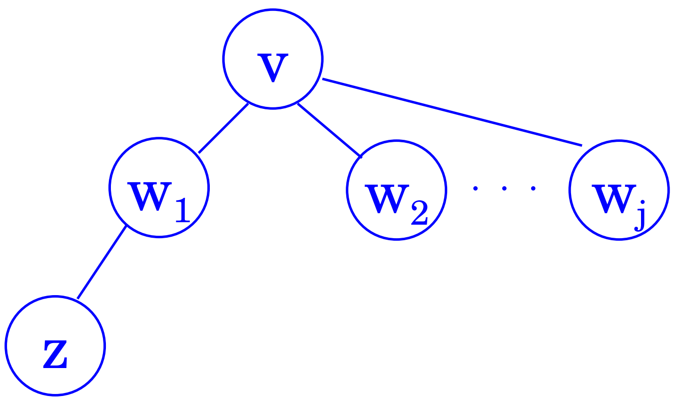
- a + b x (c / d - e) => (a + (b x ((c / d) - e))) =>

  => a b c d / e - x +

- Tanto a árvore quanto a notação polonesa indicam uma ordem válida para a computação da expressão.

Conceitos Básicos de Árvores

- Seja v o nó raiz da subárvore T_v de T.
- Os nós raizes w_1 , ..., w_j das subárvores de T_v são os filhos de v ; v é o pai de w_1 , ..., w_j ;
w_1 , ..., w_j são irmãos ; se z é filho de w_1 então
w_2 , ..., w_j são tios de z ; v é avô de z.



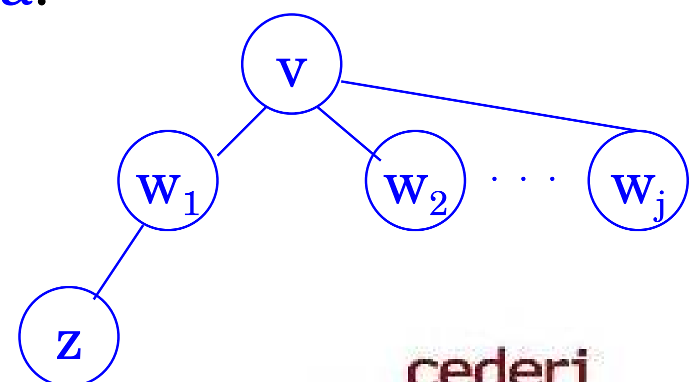
Conceitos Básicos de Árvores

- grau de saída de v = j.

- x pertence a T_v => x é descendente de v,
  v é ancestral de x ;
  x ≠ v => x é descendente próprio de v,
  v é ancestral próprio de x.

- v não possui filhos => v é folha.

- v não é folha => v é interior.



Conceitos Básicos de Árvores

- Uma sequência de nós distintos $v_1,\ldots,v_k$ é um caminho quando quaisquer dois nós consecutivos v_i, v_{i+1} são tais que v_i é filho ou pai de v_{i+1}. Nesse caso, v_1 alcança v_k. O valor $k - 1$ é o comprimento do caminho.

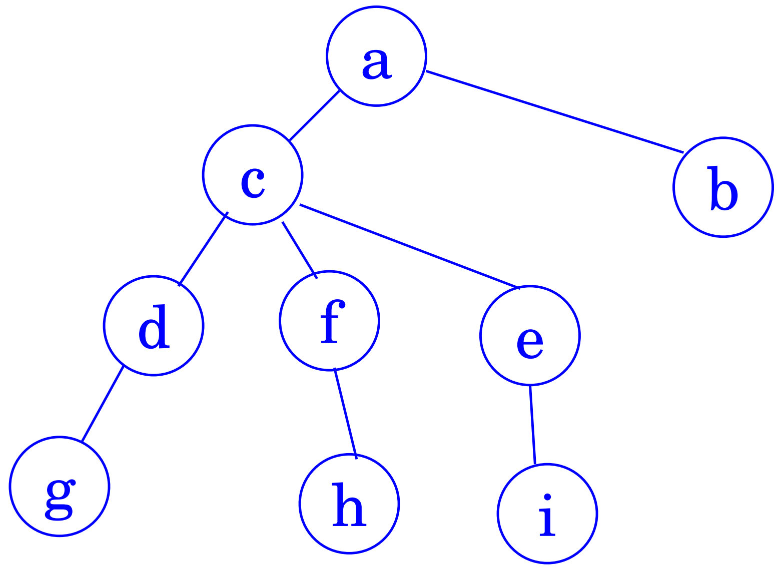
- O nível de um nó v é o número de nós no caminho da raiz até v. Qual o nível da raiz?

- A altura de v é o número de nós no maior caminho de v até um de seus descendentes.
  Qual é a altura de uma folha?

- A altura da árvore T é a altura da sua raiz.
  h (T) = altura de T
  h (v) = altura do nó v

Conceitos Básicos de Árvores

- Exemplo:

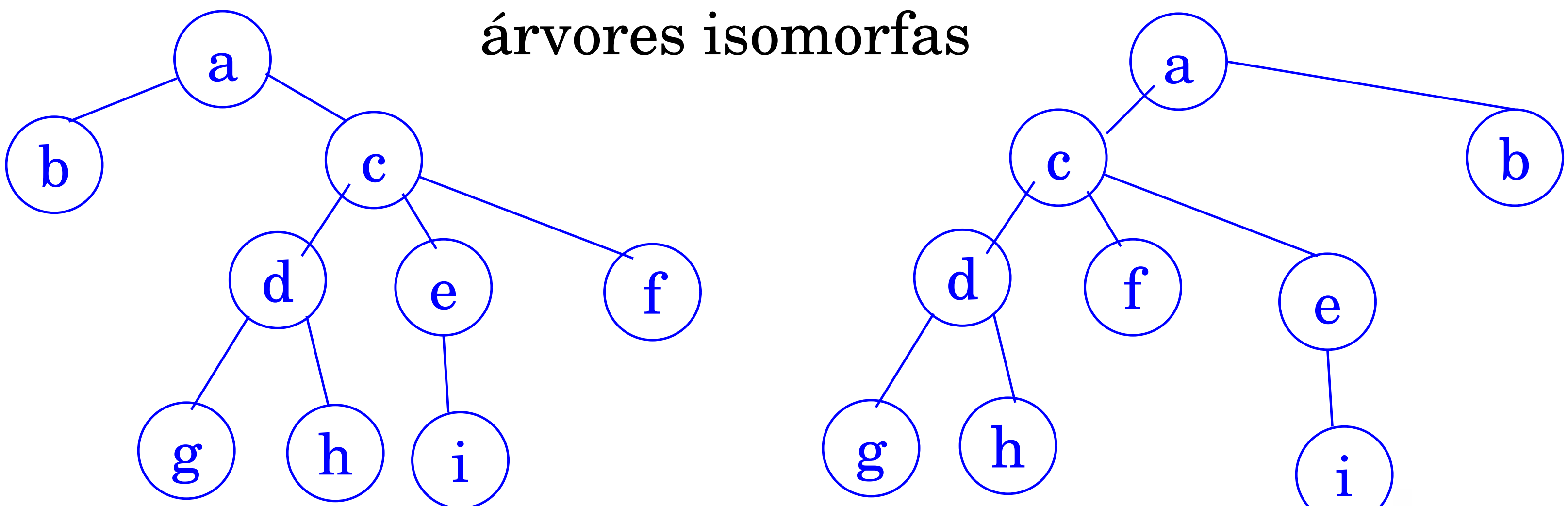


- `b, a, c, f` = caminho
  nível de `f` = 3
  altura de `c` = 3
  altura da árvore = 4

Conceitos Básicos de Árvores

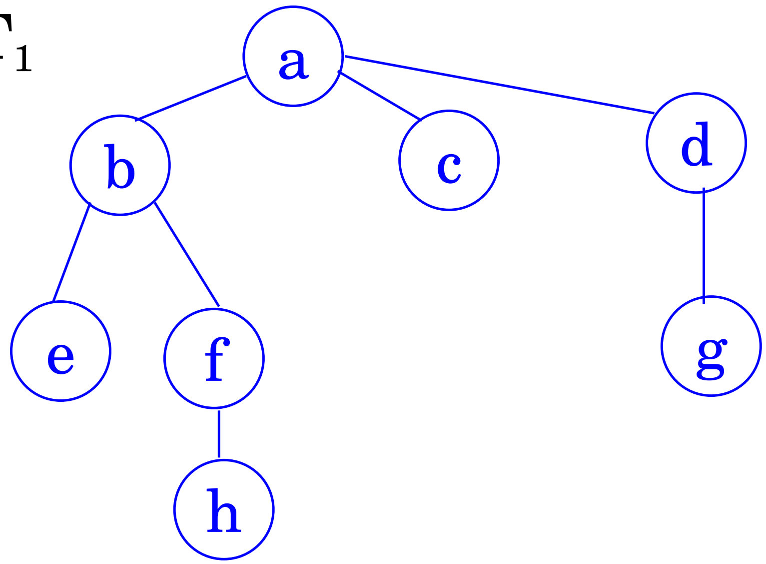
- árvore ordenada: os filhos de cada nó estão ordenados. Convenção: ordenação da esquerda para a direita.
- Duas árvores não ordenadas são isomorfas quando puderem se tornar coincidentes através de uma permutação na ordem das subárvores de seus nós.

árvores isomorfas

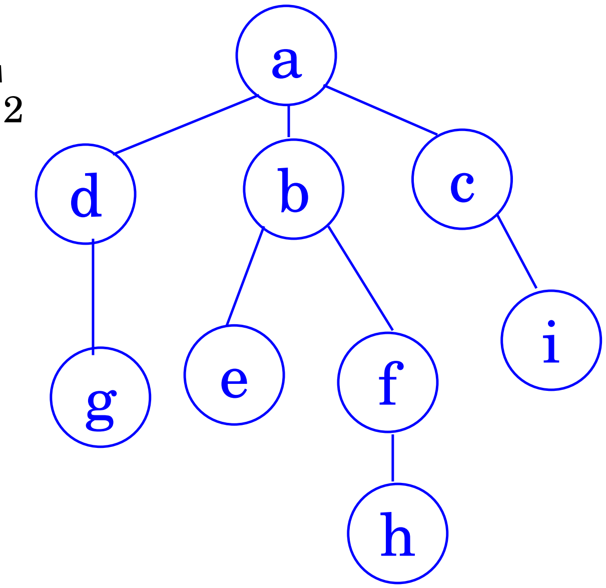


Exercício

T_1



T_2



1) Na árvore T_1, determinar:

1.1) nível de f

1.2) nível de b

1.3) altura de b

1.4) altura de T_1

2) T_1 e T_2 são isomorfas ?

3) Quais são os números mínimo e máximo de folhas que uma árvore com n nós pode conter?

Tempo: 4 minutos

Solução

1.1) 3

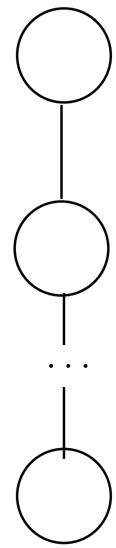
1.2) 2

1.3) 3

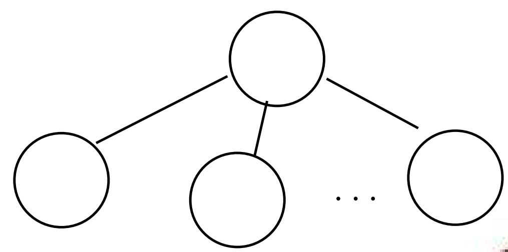
1.4) 4

2) Não.

3) número mínimo de folhas = 1



número máximo de folhas = n - 1



Exercício

- Mostrar que toda subárvore com n nós pode ser representada por uma seqüência binária. Quantos 0's e 1's a seqüência possuirá?

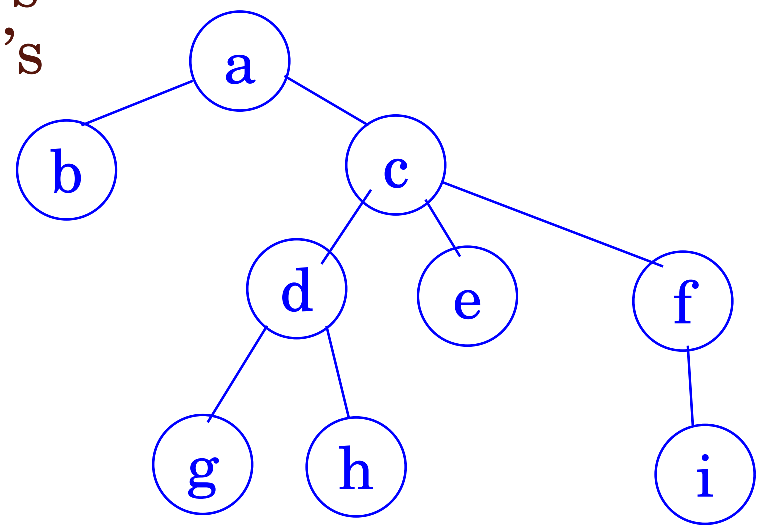
- Tempo: 6 minutos

Solução

- Usar a representação por parêntesis aninhados.

Associar um "0" a cada "(".
Associar um "1" a cada ")".

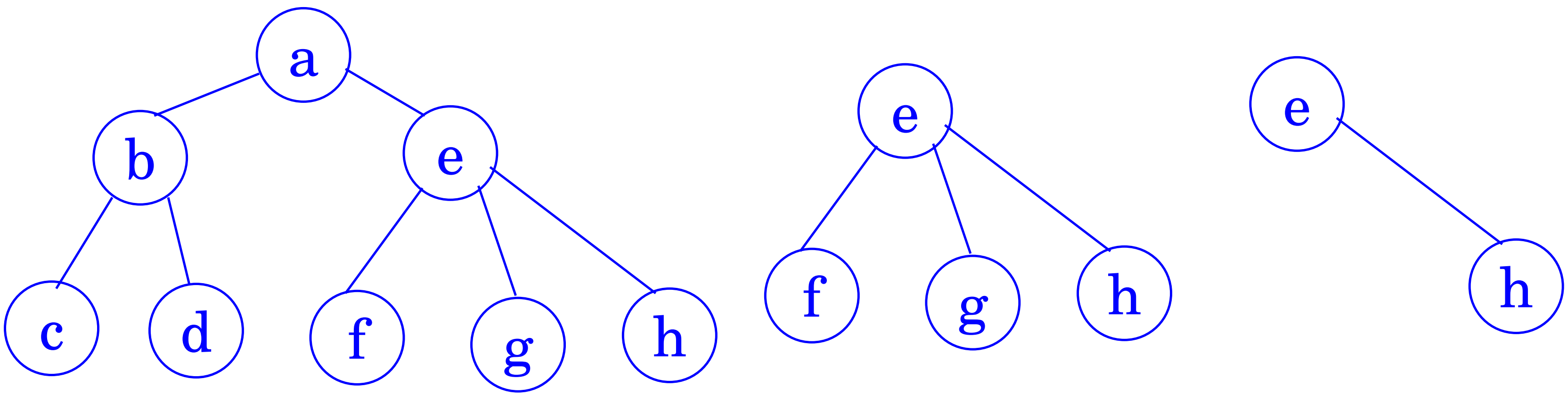
Total: n 0's
n 1's



- (A(B)(C(D(G)(H))(E)(F(I))))
001000101101001111

Subárvores Parciais

- Seja T uma árvore, v um nó de T, T_v a subárvore de T, de raiz v, S um subconjunto de T_v tal que T_v - S é uma árvore.



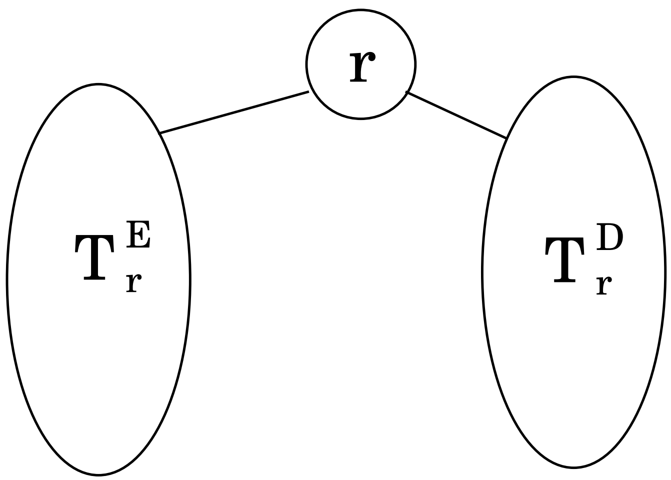
(a) (b) (c)

(b) é subárvore de (a)
(c) é subárvore parcial de (a), porém não é subárvore de (a)

Árvores Binárias

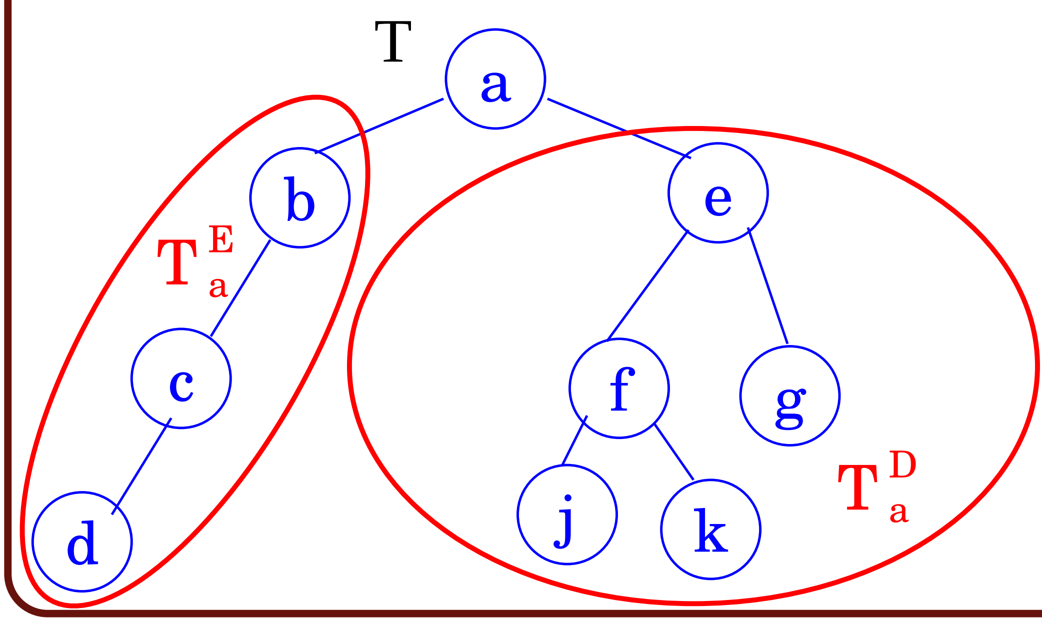
Uma árvore binária `T`, é um conjunto finito de elementos, denominados nós, tais que:

- $T = \emptyset$, e a árvore é dita vazia, ou
- existe um nó especial `r`, chamado raiz de T; os nós restantes podem ser agrupados em dois subconjuntos disjuntos, T_r^E e T_r^D, a subárvore esquerda e a direita de `r`, as quais também são árvores binárias.



Conceitos Básicos de Árvores Binárias

- A raiz da subárvore esquerda (direita) de v é o filho esquerdo (direito) de v.
- Se r é a raiz de T, então T_r^E e T_r^D são as subárvores esquerda e direita de T.
- T_v indica a árvore binária cuja raiz é $v \in T$ e cujas subárvores esquerda e direita são T_v^E e T_v^D.

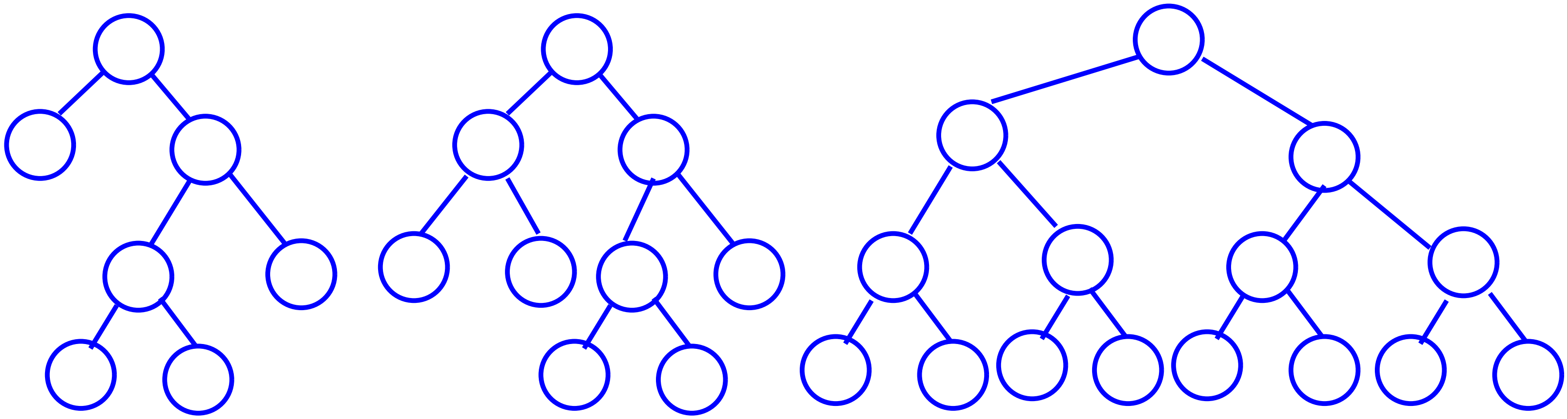


a = raiz de T
b = filho esquerdo de a
e = filho direito de a
c = filho esquerdo de b
b não possui filho direito

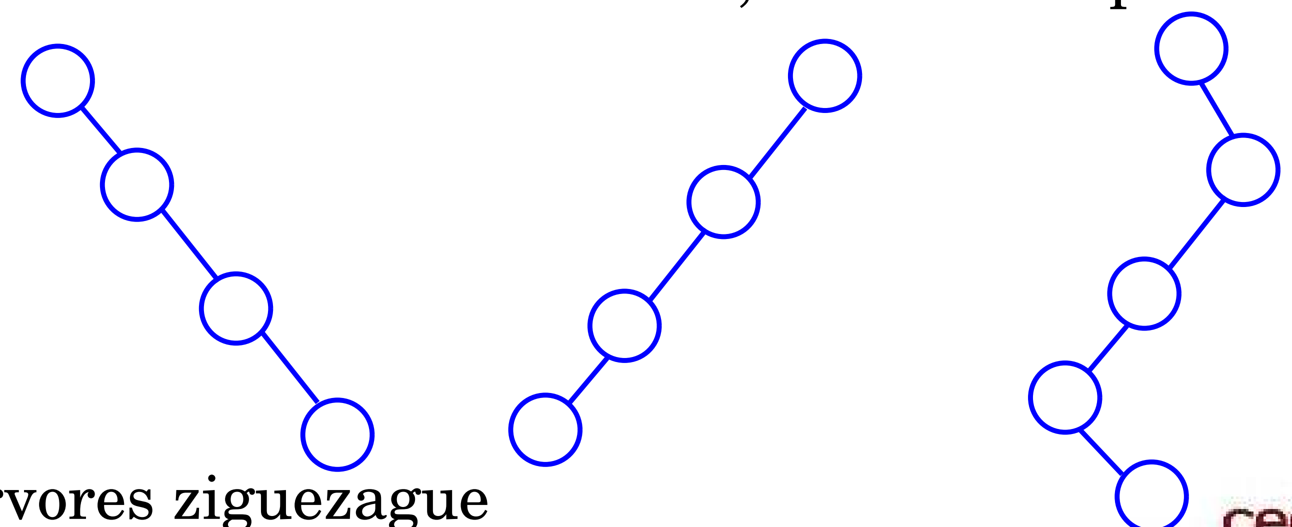
Tipos Especiais de Árvores Binárias

- Árvore estritamente binária: cada nó possui 0 ou 2 filhos
- Árvore binária cheia: todas as subárvores vazias se localizam no último nível
- Árvore binária completa: cheia até o penúltimo nível
- Árvore binária ziguezague: cada nó interior possui exatamente um filho (esquerdo ou direito)

Tipos Especiais de Árvores Binárias



Árvore estritamente binária, binária completa e cheia

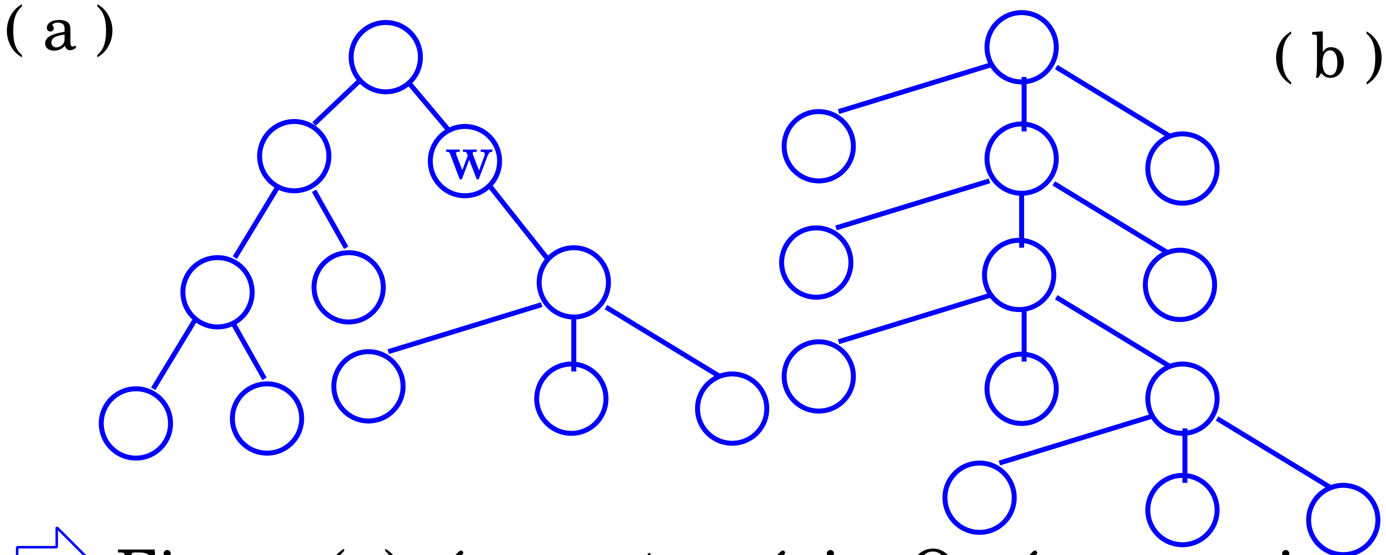


Árvores ziguezague

Extensões de Árvores Binárias

- Uma árvore m-ária T, $m \geq 2$, é um conjunto finito de elementos, denominados nós ou vértices, tais que:
  - $T = \emptyset$ e a árvore é dita vazia,
  - T contém um nó especial, chamado raiz, e os restantes podem ser divididos em m subconjuntos disjuntos, as i-ésimas subárvores de r, $1 \leq i \leq m$, as quais são também árvores m-árias.
- A raiz da i-ésima subárvore de um nó v de T, se existir, é denominada i-ésimo filho de v.
- A árvore m-ária possui uma ordenação implícita nas subárvores de cada nó, mesmo que algumas ou todas essas subárvores sejam vazias.

Árvores m-árias



- Figura (a): árvore ternária. O nó w possui um único filho, mas é possível referenciar as três subárvores de w, duas das quais vazias (primeira e terceira).
- De maneira similar, definem-se:
  - árvore estritamente m-ária;
  - árvore m-ária cheia;
  - árvore m-ária completa.
- Figura (b): árvore estritamente ternária.

Exercício Final

- Provar ou dar contra-exemplo:

Se v é o pai de um nó w de uma árvore T, então

1) nível (v) = nível (w) + 1

2) altura (v) = altura (w) + 1

3) $\max_{v \in T}$ { altura (v) } = $\max_{v \in T}$ { nível (v) }