

Aula 26: Árvores B

- ⇒ Definição e conceitos básicos
- ⇒ Propriedades dos nós de uma árvore B
- ⇒ Capacidade de armazenamento de uma árvore B

Motivações para a definição de árvores B

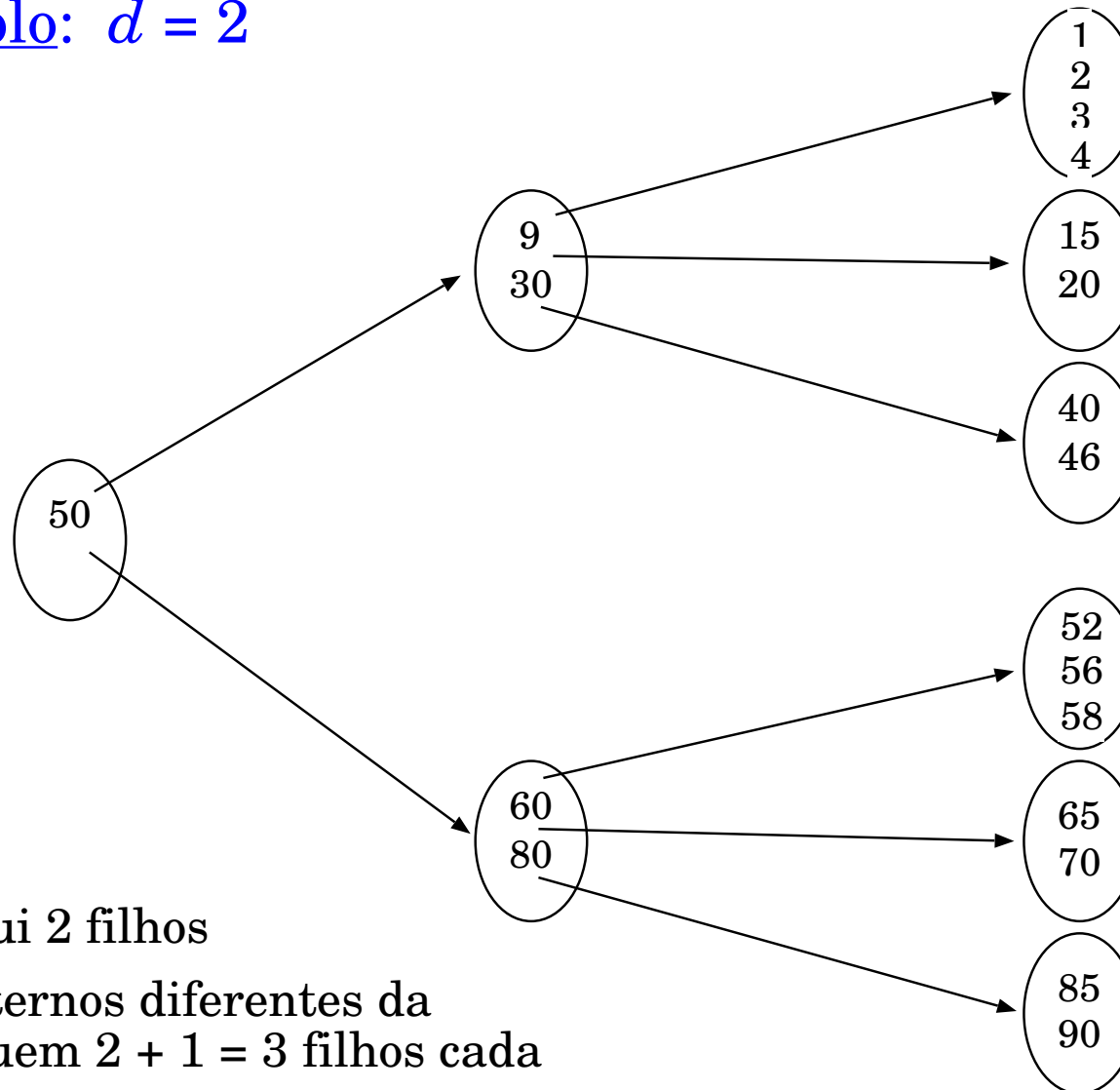
- ⇒ Manter mais de uma chave em cada nó
- ⇒ Manter todas as folhas no mesmo nível

Definição de árvore B

⇒ Seja d um número natural.

Uma árvore B de ordem d é uma árvore ordenada que satisfaz as seguintes propriedades:

- 1) se a raiz não é uma folha, possui no mínimo 2 filhos.
- 2) cada nó interno diferente da raiz possui no mínimo $d+1$ filhos
- 3) cada nó possui no máximo $2d+1$ filhos
- 4) todas as folhas estão no mesmo nível

Exemplo: $d = 2$ Observe:

- 1) raiz possui 2 filhos
- 2) os nós internos diferentes da raiz possuem $2 + 1 = 3$ filhos cada
- 3) cada nó possui no máximo $2 \times 2 + 1 = 5$ filhos
- 4) todas as folhas estão no nível 3

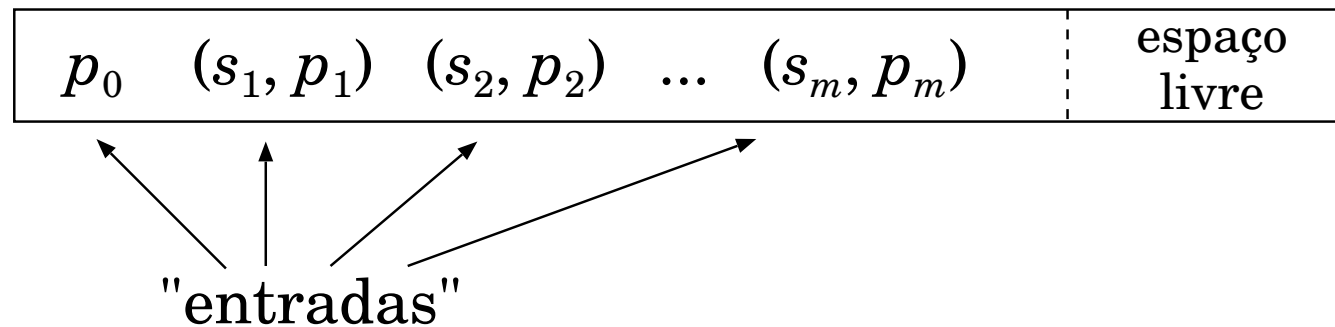
Nomenclatura

- ⇒ Os nós de uma árvore B são chamados de páginas.
- ⇒ Cada página armazena diversas chaves.

Outras propriedades de uma árvore B

- a) se uma página P não folha possui m chaves, então P possui $m + 1$ filhos
- b) a raiz possui entre 1 e $2d$ chaves
- c) cada página diferente da raiz possui entre d e $2d$ chaves
- d) em cada página P com m chaves, as chaves estão ordenadas: $s_1 < s_2 < \dots < s_m$
- e) P contém $m + 1$ ponteiros p_0, p_1, \dots, p_m apontando para seus filhos
(nas folhas, estes ponteiros indicam " λ ")

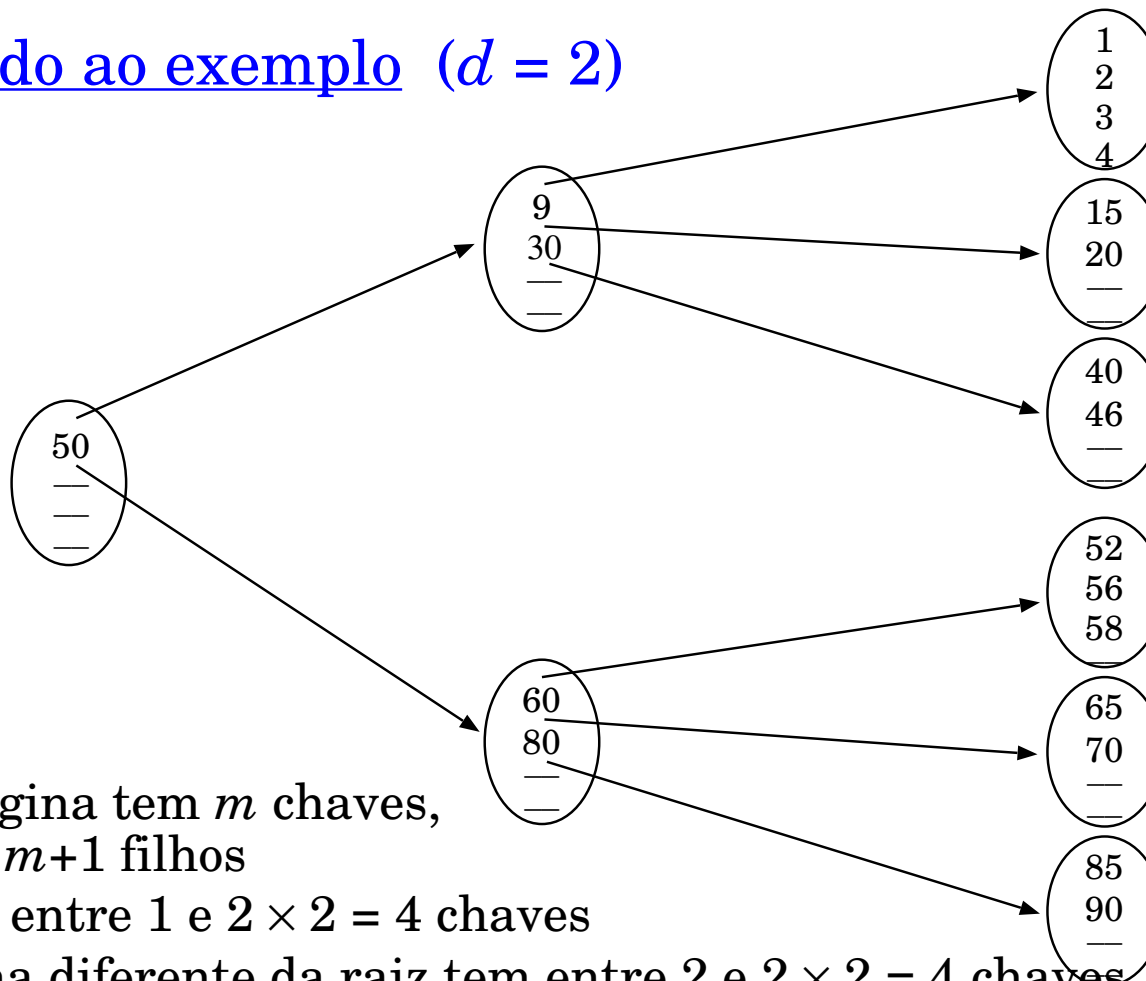
Estrutura de uma página em uma árvore B



- ➡ Toda chave s pertencente à página filha apontada por p_0 satisfaz $s < s_1$
- ➡ Toda chave s pertencente à página filha apontada por p_k ($1 \leq k \leq m-1$) satisfaz $s_k < s < s_{k+1}$
- ➡ Toda chave s pertencente à página filha apontada por p_m satisfaz $s > s_m$

Voltando ao exemplo ($d = 2$)

26.8



Observe:

- a) se uma página tem m chaves, então tem $m+1$ filhos
- b) a raiz tem entre 1 e $2 \times 2 = 4$ chaves
- c) cada página diferente da raiz tem entre 2 e $2 \times 2 = 4$ chaves
- d) em cada página as chaves estão ordenadas
- e) de cada página com m chaves partem $m+1$ ponteiros (as folhas têm ponteiros nulos)

Observe a estrutura das entradas, de acordo com a tela anterior.

cederj

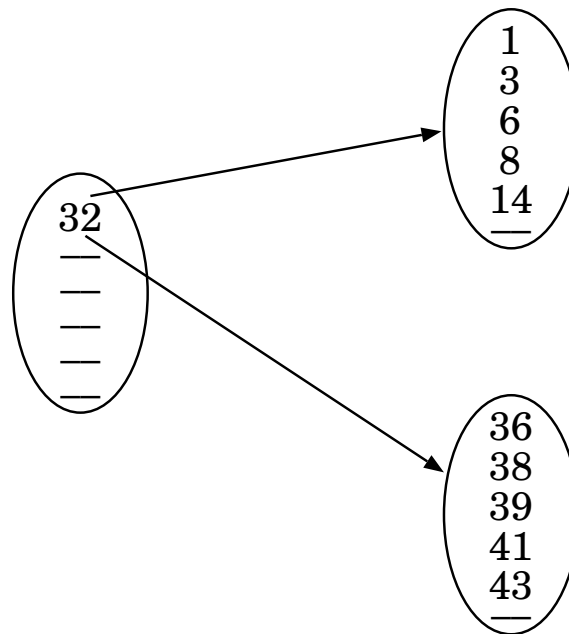
Exercício

➡ Desenhe uma árvore B de ordem 3 que contenha as seguintes chaves:

1, 3, 6, 8, 14, 32, 36, 38, 39, 41, 43

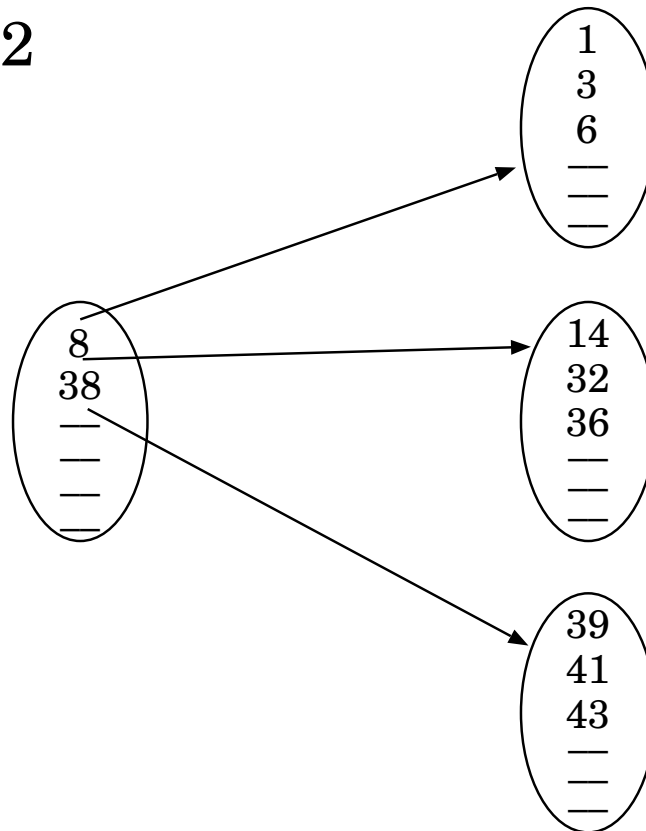
Resolução do Exercício

⇒ Solução 1



Resolução do Exercício

⇒ Solução 2



Exercício

- ➡ Qual o número máximo de páginas que uma árvore B de ordem d e altura h pode conter?
- ➡ Qual o número máximo de chaves que uma árvore B de ordem d e altura h pode conter?

Resolução do Exercício

$$P_{\max} = 1 + (2d + 1) + (2d + 1)^2 + \dots + (2d + 1)^{h-1} =$$

$$= (2d + 1)^0 + (2d + 1)^1 + \dots + (2d + 1)^{h-1} =$$

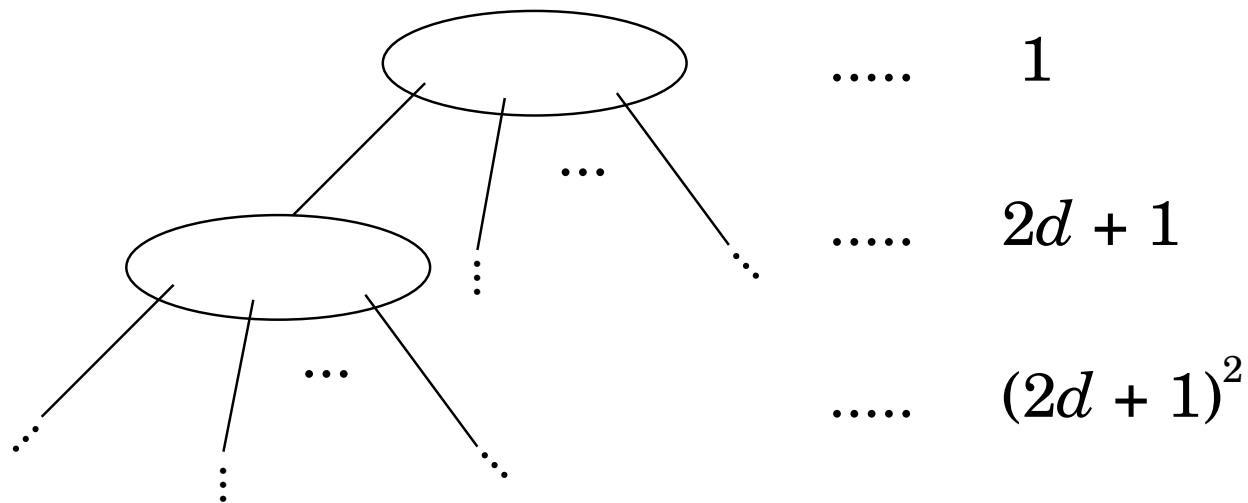
$$= 1 \times \frac{(2d + 1)^h - 1}{(2d + 1) - 1} = \boxed{\frac{(2d + 1)^h - 1}{2d}}$$

↑
fórmula para soma dos
termos de uma P.G

Resolução (continuação)

Exemplo: $\left. \begin{array}{l} d = 4 \\ h = 3 \end{array} \right\} \boxed{P_{\max} = 91}$

Visualmente



Resolução (continuação)

$$n_{\max} = \left(\frac{(2d + 1)^h - 1}{2d} \right) \cdot 2d$$

P_{\max} → $2d$ (denominator)
 número máximo de nós por página → $2d$ (multiplier)

$$n_{\max} = (2d + 1)^h - 1$$

Exemplo: $\left. \begin{array}{l} d = 4 \\ h = 3 \end{array} \right\}$

$$n_{\max} = 728$$

Exercício

⇒ Qual o número mínimo de páginas e chaves que uma árvore B de ordem d e altura h pode conter?