Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Estrutura de Dados e Algoritmos
AP2 - Primeiro Semestre de 2006

Nome -
Assinatura -

Observações:

1. Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular.
2. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.
3. Você pode usar lápis para responder as questões.
4. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.
5. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

---

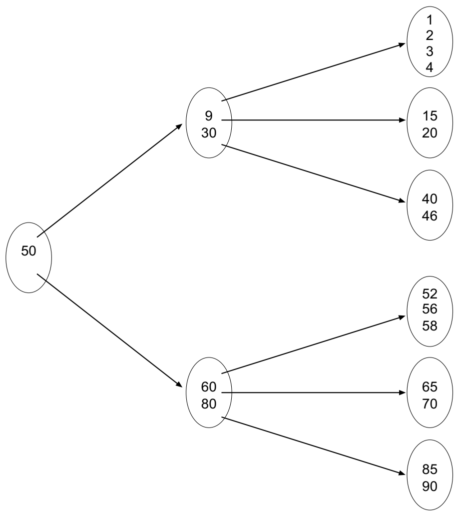
1. (2,5) Dê a definição de árvore B de ordem d. Desenhe uma árvore B de ordem 2 com altura 3.

   Resposta:

   Seja d um número natural. Uma árvore B de ordem d é uma árvore ordenada que satisfaz as seguintes propriedades:

   1) se a raiz não é uma folha, possui no mínimo 2 filhos;
   2) cada nó interno diferente da raiz possui no mínimo $d + 1$ filhos;
   3) cada nó possui no máximo $2d + 1$ filhos;
   4) todas as folhas estão no mesmo nível.

   Exemplo:



2. (2,5) Construa a árvore binária de busca ótima para o seguinte conjunto de frequências:

j	f_j	f'_j
0	-	1
1	2	6
2	4	3
3	1	2
4	2	1

Resposta:

As matrizes do algoritmo de cálculo da árvore ótima são:

Matriz dos valores $F[i,j]$:

1	9	16	19	22
-	6	13	16	19
-	-	3	6	9
-	-	-	2	5
-	-	-	-	1

Matriz dos custos $c[i,j]$:

0	9	25	34	45
-	0	13	22	33
-	-	0	6	14
-	-	-	0	5
-	-	-	-	0

Matriz dos valores minimizantes k:

-	1	2	2	2
-	-	2	2	2
-	-	-	3	3
-	-	-	-	4
-	-	-	-	-

Da última matriz acima, segue que a árvore binária de custo ótimo tem raiz s_2. Os filhos de s_2 são: s_1 (esquerdo) e s_3 (direito). Os filhos de s_1 são os nós externos R_0 (esquerdo) e R_1 (direito). Os filhos de s_3 são: o nó externo R_2 (esquerdo) e s_4 (direito). Finalmente, os filhos de s_4 são os nós externos R_3 (esquerdo) e R_4 (direito).

3. (2,5) Explique como efetuar a inclusão de um nó numa árvore rubro-negra.

   Resposta:

   Seja q o nó a ser incluído na árvore T. Supondo que o valor da chave de q ainda não pertença a T, um dos nós externos de T será substituído por q, e colorido com rubro.

Sejam v e w o pai e o avô de q, e seja t o irmão de v (se existirem). Se v é rubro, é necessário reequilibrar q. Se v é raiz, basta recolorirmos v de negro. Se v não é raiz, temos 2 casos:

Caso 1: t é rubro.
Altera-se a cor de v e t para negro e de w para rubro e repete-se o processo de reequilíbrio para w, se necessário.

Caso 2: t é negro. Temos 4 subcasos.
2.1) q é filho esquerdo de v e v é filho esquerdo de w.
Aplica-se rotação direita de raiz w. Em seguida, altera-se a cor de v para negra e a de w para rubra.

2.2) q é filho esquerdo de v e v é filho direito de w.
Aplica-se rotação dupla esquerda de raiz w, e altera-se a cor de q para negra e a de w para rubra.

2.3) q é filho direito de v e v é filho direito de w.
Rotação esquerda de raiz w. Altera-se v para negro e w para rubro.

2.4) q é filho direito de v e v é filho esquerdo de w.
Rotação dupla direita de raiz w. Altera-se q para negro e w para rubro.

4. (2,5) Sejam $f_1, f_2, \cdots, f_7$ frequências dadas. Determine uma condição suficiente sobre estas frequências de modo que a árvore de Huffman resultante tenha altura máxima.

   Resposta:

   Considerando que as frequências dadas estão ordenadas de forma que $f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_7$, a inequação $f_i > f_{i-1} + f_{i-2}$, $3 \leq i \leq 7$ é uma condição suficiente para que a árvore de Huffman tenha a altura máxima, que é 7.