Aula 31: Encadeamento exterior

- Conceito de encadeamento
- Modelo de encadeamento exterior
- Complexidade do encadeamento exterior

Introdução

- Recordando: uma colisão ocorre quando duas chaves diferentes x e y possuem endereços-base iguais, isto é:

$$\boxed{h(x) = h(y)}$$

- Para estudar a quantidade de colisões, define-se o fator de carga de uma tabela de dispersão T

- O fator de carga é denotado por α e é calculado pela expressão

$$\boxed{\alpha = \frac{\text{número de chaves}}{\text{número de compartimentos de T}} = \frac{n}{m}}$$

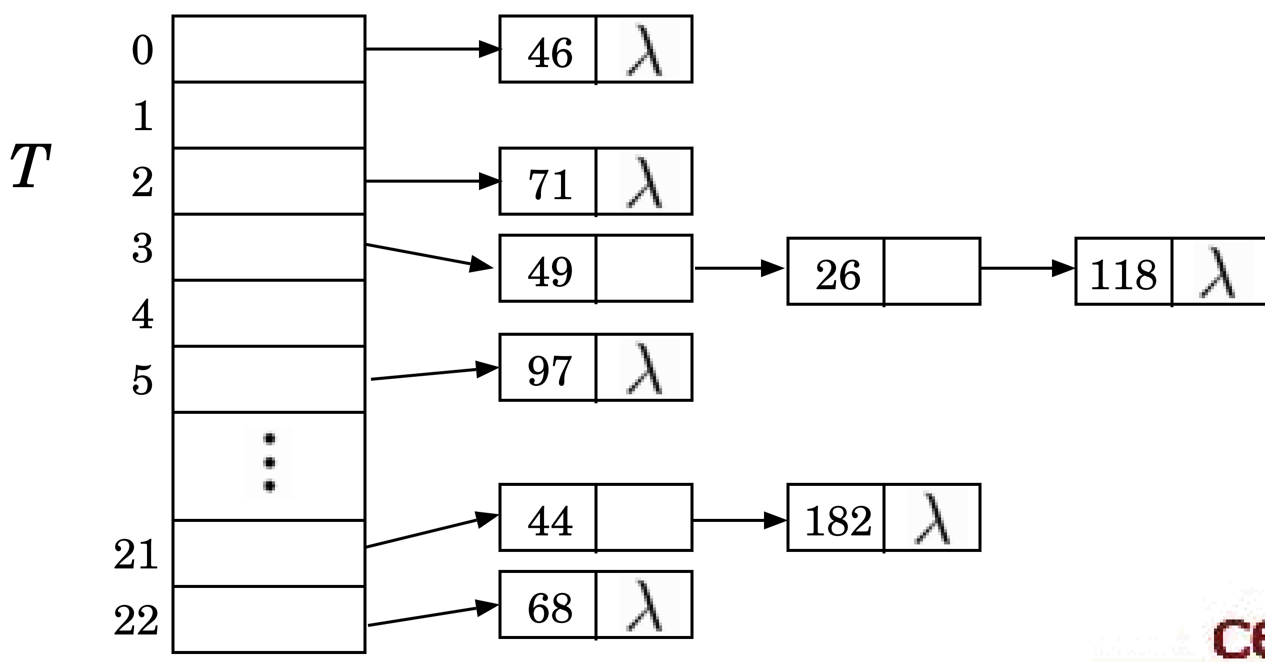
- Observe que quanto maior o valor de α, mais colisões ocorrerão

Encadeamento

- O encadeamento é um método simples de tratamento de colisões
- Este método consiste em armazenar chaves sinônimas (que têm o mesmo endereço-base) em uma lista encadeada
- Estas listas encadeadas podem estar implementadas de duas formas
  - listas que estão armazenadas no exterior da tabela T (método do encadeamento exterior)
  - listas que compartilham o mesmo espaço da tabela T (método do encadeamento interior)

Encadeamento exterior

- Consiste em manter $\underline{m}$ listas encadeadas, uma para cada compartimento (endereço-base) de T
- A tabela T converte-se então em uma tabela de nós-cabeça para as listas encadeadas
- Observe o exemplo com $h(x) = x \bmod 23$ e as chaves 46, 71, 49, 26, 118, 97, 44, 182, 68:



Algoritmo para encadeamento exterior

- Busca de uma chave x em T
  - Calcula-se $h(x) = x \bmod m$ e procura-se x na lista encadeada correspondente ao endereço-base $h(x)$
  - Pior caso: $O(n)$

Buscar Voltar

Algoritmo para encadeamento exterior

- Inserção de uma chave x em T
  - Faz-se a busca de x (como no item anterior)
  - Se x não foi encontrada, o algoritmo de busca parou no <u>último nó</u> da lista encadeada correspondente ao endereço-base $h(x)$
  - Insere-se então a chave x no <u>final</u> desta lista encadeada
  - Pior caso: $O(n)$ (como no caso da busca)

Exercício

- Deduza o funcionamento do algoritmo de <u>remoção</u> de uma chave x numa tabela T implementada com encadeamento exterior. Conclua que o pior caso é $O(n)$, como na busca

Complexidade média da busca no método de encadeamento exterior

- Teorema 1: Numa tabela de dispersão T que utiliza função de dispersão uniforme e na qual as colisões são tratadas por encadeamento exterior, o número médio de comparações efetuadas numa busca sem sucesso é igual a α.

- Demonstração: Seja CM1(T) o número médio de comparações procurado.

  Seja L_i a lista encadeada correspondente ao endereço-base i de T.

  Então:

número total de chaves

$$\mathrm{CM1}(T) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} |L_i| = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} |L_i| = \frac{n}{m} = \alpha$$

probabilidade de acessar L_i

comprimento de L_i

Complexidade média da busca no método de encadeamento exterior

- Teorema 2: Numa tabela de dispersão T que utiliza função de dispersão uniforme e na qual as colisões são tratadas por encadeamento exterior, o número médio de comparações efetuadas numa busca com sucesso é igual a

$$1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2m}$$

- Demonstração: Seja CM2(T) o número médio de comparações procurado.
  Observe: o número médio de comparações para localizar uma chave x com sucesso na lista L_i à qual ela pertence é igual ao comprimento médio de L_i no momento em que x foi incluída

Complexidade média da busca no método de encadeamento exterior

<u>Continuação da demonstração</u>:
Portanto, se foram incluídas j chaves antes de x, o comprimento médio de L_i quando x foi incluída é $\frac{j}{m}$

Assim,

$$\mathrm{CM2}(T) = \sum_{j=0}^{n-1} \overbrace{\frac{1}{n}}^{\text{probabilidade de busca de } x} \overbrace{\left(1 + \frac{j}{m}\right)}^{\text{posição média de } x \text{ na lista } L_i}$$

Isto é,

$$\begin{aligned}
\mathrm{CM2}(T) &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(1+\frac{j}{m}\right) = \frac{1}{n}\left(n + \sum_{j=0}^{n-1}\frac{j}{m}\right) = \frac{1}{n}\left(n + \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{n-1} j\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(n + \frac{1}{m}\frac{(n-1)n}{2}\right) = 1 + \frac{(n-1)}{2m} = 1 + \frac{n}{2m} - \frac{1}{2m} \\
&= 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2m}
\end{aligned}$$

Interpretando os resultados dos Teoremas 1 e 2

Se o número de chaves n for proporcional ao tamanho m da tabela T, temos $n = O(m)$

Logo: $\alpha = \frac{n}{m} = \frac{O(m)}{m} = O(1)$

Portanto,

$$\boxed{\mathrm{CM1} = \alpha} \qquad \boxed{\mathrm{CM2} = 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2m}}$$

são neste caso <u>constantes</u>!

Exercício final

- Construir uma tabela de dispersão T usando encadeamento exterior tal que $m = 5$, $h(x) = x \bmod 5$ e as chaves são os quinze primeiros múltiplos de 7