Física para Computação

Professor:

Mauricio Kischinhevsky

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Aula 2

Professor:

Mauricio Kischinhevsky

Matéria, Força e Energia (Parte 2)

Conteúdo:

Movimento de uma partícula em uma ou mais dimensões

Fundação CECIERJ Consórcio cederj

Movimento unidimensional de uma partícula

Início do estudo do universo físico: movimento, ou cinemática. Sob certas condições qualquer objeto pode ser considerado uma partícula (molécula, carro, planeta, etc.). As noções iniciais, no caso dimensional, correspondem aos familiares: Deslocamento, tempo de percurso, Velocidade média:

$$v_m = \frac{dist}{tempo} = \frac{(x_f - x_i)}{(t_f - t_i)}$$

Observe que, tratando-se de percursos em uma dimensão, pode-se definir "para a direita" como velocidades positivas (analogamente para o outro sentido). Ou seja, pode-se ter velocidade negativa ou positiva, o que é necessário para contemplar movimento de um objeto relativamente a outro.

Exemplo:

(a) O tempo que um maratonista demora para percorrer os cerca de 42km é de 2h e 15min. Qual sua velocidade média (em km/h)? Um espectador da maratona cronometra o tempo que o corredor demora para percorrer 20m e encontra 3,8s. Qual a velocidade média neste caso?

(b) No trecho inicial de uma corrida de 100m, em que o corredor percorreu a distância em 10s, qual a velocidade média (em km/h)? Um espectador cronometra o tempo que o corredor demorou para percorrer 2m perto dele, no início da prova, e mediu 0,8s. Discuta os resultados obtidos para as velocidades.

Respostas:

(a) O resultado é obtido como 42km/2, 25h ou, simplesmente, 18,7km/h. No caso do espectador ao longo do percurso, ele mediu o tempo e a distância, obtendo a velocidade

$$v = \frac{(0,020km)}{(3,8s)}\frac{3.600s}{1h} = 18,9km/h.$$

(b) Na corrida de 100m em questão, a velocidade média é de 100m/10s, ou seja, (0,1km)x(3.600s/h)/10s, ou, simplesmente, 36km/h. No caso da medição no início da corrida de 100m calcula-se a velocidade

$$v = \frac{(0,002km)}{(0,8s)}\frac{3.600s}{1h} = 9km/h.$$

Observe que na corrida longa a velocidade em um trecho do percurso é, usualmente, próxima da média; na corrida curta a velocidade varia muito em relação à média. Ademais observe que quanto menor o trecho da medição, mais próximo o valor da velocidade instantânea.

Fundação CECIERJ Consórcio cederj

Definição: Velocidade instantânea é o limite da relação (distância percorrida) / (tempo de observação) quando o tempo de observação se aproxima de zero (e também a distância, claro, se aproxima de zero). Ou seja, a velocidade instantânea é a derivada da função posição em relação ao tempo, ou seja,

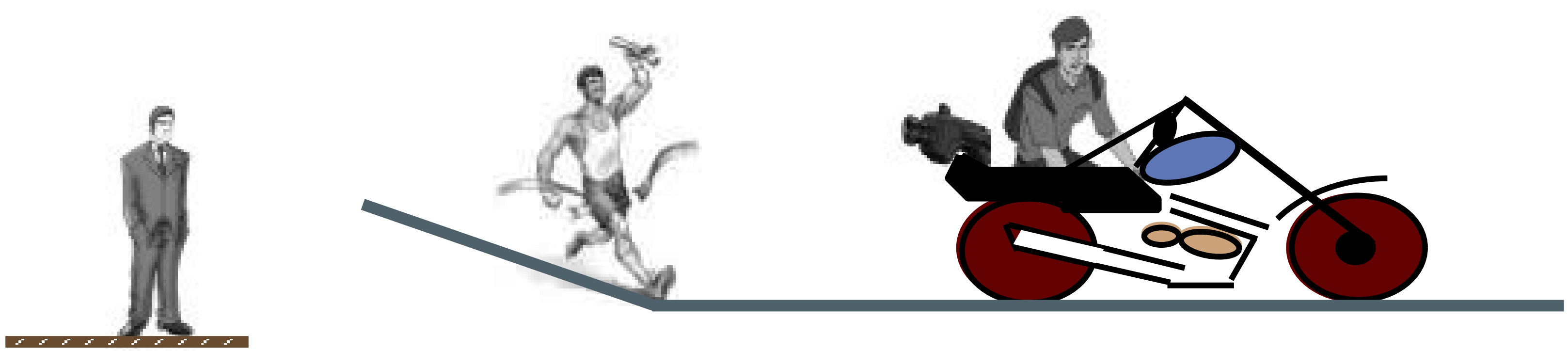
$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

A velocidade se refere a um sistema de referência. Assim, se o corredor de maratona se desloca em relação aos pontos de observação do público, o mesmo não ocorre do mesmo modo em relação à motocicleta que porta a câmera que exibe ao público telespectador todo o desenrolar da prova sempre a cerca de 3m adiante do corredor, durante as mais de duas horas da prova. Tem-se o referencial do atleta, o referencial do espectador, podem-se definir outros.

Denominando v_{ae} a velocidade do atleta em relação ao sistema do espectador presencial, e v_{ao} a velocidade do atleta em relação a outro referencial, que se desloca com velocidade v_o em relação ao espectador presencial, a velocidade do atleta em relação a este outro referencial será a composição das velocidades, na forma

$$v_{ae} = v_o + v_{ao}.$$

Efetivamente, se o segundo referencial for o da câmera que acompanha o maratonista, tem-se $v_o = v_{ae}$ e $v_{ao} = 0$.



Definição: a **aceleração** é o limite da relação (variação da velocidade) / (tempo de observação) quando o tempo de observação se aproxima de zero (e também a variação da velocidade, claro, se aproxima de zero). Ou seja, a aceleração é a derivada da função velocidade em relação ao tempo, ou seja,

$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

Em alguns casos a aceleração é constante (ou aproximadamente). Por exemplo, para uma faixa apreciável de alturas pode-se considerar a aceleração da gravidade como constante.

Exemplo:

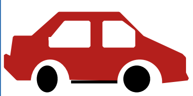
Um carro partindo do repouso ganha velocidade com aceleração constante de $8 m/s^2$.

(a) Qual a velocidade após 10s?;

(b) Qual a distância percorrida após 10s?;

(c) Qual a velocidade média entre o instante inicial e t=10s?

x = 0 m
v = 0 m/s



Animar

Voltar

Exemplo:

Respostas:

(a) sabendo que $8 m/s^2 = (v_f - 0) / 10s$, resulta $v_f = 80m/s$;

(b) como $d = v_o \times t + (1/2).a \times t^2 = 0 + 400m = 400m.$;

(c) de acordo com a definição, $v_m = d / t = 400m / 10s = 40m/s$.

Exemplo:

Um carro passa a 25m/s por um local com limite de velocidade bem menor. Como nos filmes, um automóvel da polícia sai do repouso no mesmo instante da passagem, com aceleração constante de $5 m/s^2$.

(a) Quanto tempo demora até que os veículos estejam lado a lado?

(b) Qual a distância percorrida pela viatura policial ao interceptar o veículo infrator?

Supondo que a posição inicial tem o valor x=0, pode-se escrever $x_m = v_m \times t$ para o veículo infrator e $x_p = (1/2) \times a_P \times t^2$.

(a) Quando $x_m = x_p$ os veículos estão lado a lado. Assim, v_m x t = (1/2) x a_P x t^2 Evidentemente, como seria de esperar, há a solução t=0. Como não é esta a solução procurada, x ≠ 0 e podem-se dividir ambos os lados por t, encontrando v_m = (1/2) x a_P x t, ou simplesmente

$$t = \frac{v_m}{[(1/2) \times a_P]} = \frac{(2 \times 25(m/s))}{(5(m/s^2))} = 10s$$

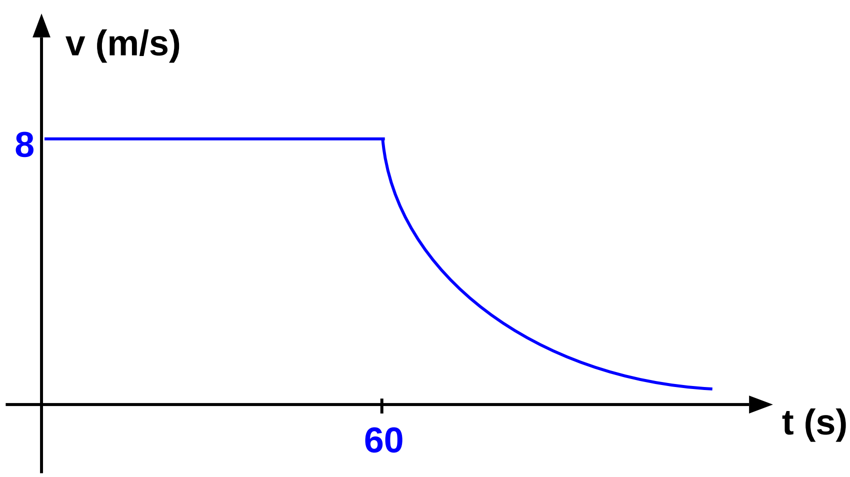
(b) A viatura policial terá atingido, após 10s, a velocidade de v = a x t = 5(m/s^2) x (10s) = 50m/s. Assim, ambos os veículos terão percorrido a mesma distância, (25m/s) x (10s) = ((50.m/s + 0.m/s) / 2) x (10s) com a mesma velocidade média, 25m/s.

Deslocamento espacial como integral da velocidade

Exemplo:

Uma balsa utilizada na travessia de veículos e pessoas para uma ilha se move desde a origem (t=0) com velocidade v_o = 8m/s durante t_1 = 60s. Em seguida seus motores são desligados e ela começa a manobra de atracação. A velocidade durante o processo de atracação pode ser expressa como $v = v_o \times t_1^2 / t^2$. Qual o deslocamento da balsa em todo o período da travessia ($0 < t < \infty$) ?

$$\int_0^{\infty} v(t)dt = \int_0^{t_1} v(t)dt + \int_{t_1}^{\infty} v(t)dt = \int_0^{t_1} v_0 dt + \int_{t_1}^{\infty} \left(v_0 \times \left(\frac{t_1^2}{t^2} \right) \right) dt$$



Deslocamento espacial como integral da velocidade (continuação)

Sendo a velocidade a derivada da função posição, v(t) = dx / dt, a variação na posição consiste da anti-derivada, ou integral, da velocidade. Assim, desde o instante inicial até o fim do processo (sem limitação temporal), tem-se o deslocamento como

$$(8m/s) \times (60s - 0s) + (v_o \times t_1^2) \int_{t_1}^{\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right) dt = 480m - (v_o) \times (t_1^2) \times \left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{t_1} \right] =$$

$$= 480m + 8 \times 60m = 960m.$$

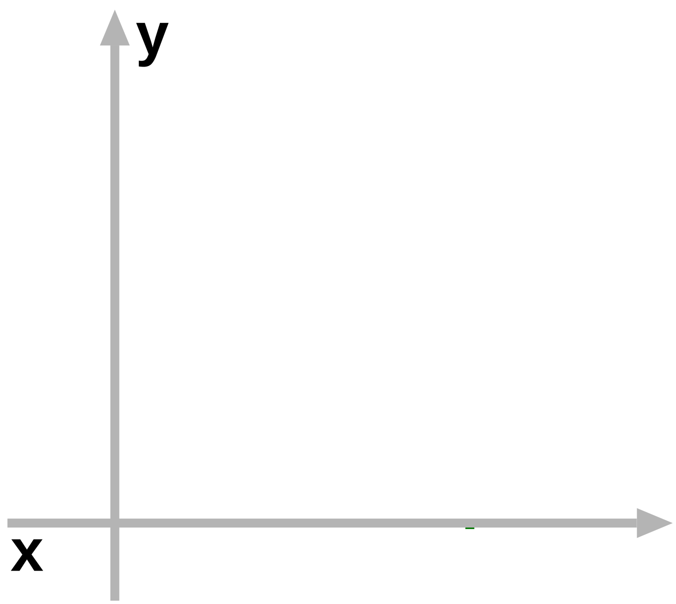
Observe como, apesar de v(t) não se anular em tempo finito, a distância percorrida é finita. Foi usada a primitiva de 1 / (t^2), -1/t.

1.2 Movimento multidimensional de uma partícula

Deslocamento composto

Exemplo:

Se uma partícula realiza, a partir da origem do plano x-y um deslocamento para valores de x crescentes, movendo-se por 3 m e, a seguir, realiza um deslocamento para valores de y crescentes de y de 4 m, seu deslocamento total realizado foi de 5 m para o primeiro quadrante. Efetivamente, denominando $\hat{\imath}$ o vetor unitário da direção x e $\hat{\jmath}$ o da direção y, o deslocamento total pode ser escrito como $3m.\hat{\imath} + 4m.\hat{\jmath}$, cujo comprimento d = 5m vem pelo *Teorema de Pitágoras* a partir de $d^2 = 3^2 + 4^2$.



Animar

Voltar

Fundação CECIERJ Consórcio cederj

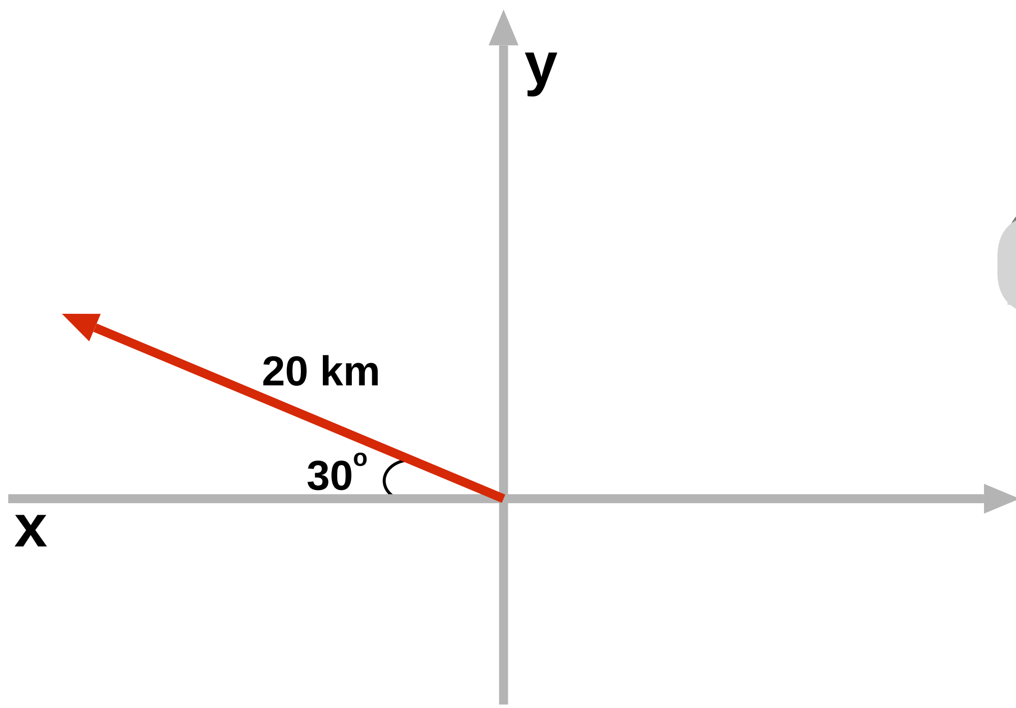
Vetores e grandezas físicas vetoriais

Vetores são grandezas com módulo, direção e sentido que se somam da mesma forma que os deslocamentos. Muitas grandezas físicas, como velocidades, acelerações, forças, quantidades de movimento requerem módulo, direção e sentido. Outras, que ficam bem especificadas com um valor, o módulo, são chamadas escalares.

Projeções dos vetores

Exemplo:

Um veículo percorre 20km em direção ao quadrante noroeste, que faz ângulo de 30^o com o eixo leste-oeste. Determine as componentes x (leste-oeste) e y (sul-norte) do vetor deslocamento final do veículo.



Animar

Voltar

Projeções dos vetores (continuação)

Resposta:

O vetor deslocamento do veículo faz uma "sombra" correspondente a seu comprimento ponderado pelo cosseno do ângulo formado com o eixo x. Analogamente, a projeção na direção y corresponde ao comprimento do vetor deslocamento ponderado pelo seno do ângulo com o eixo x.

Ou seja,

- componente x: $-20km.\cos(30^o)$, onde o sinal " - " decorre de a componente ser no sentido contrário ao de î;
- componente y: $20km.\mathrm{sen}(30^o)$, ao longo de $\hat{j}$.

Portanto, como $\mathrm{sen}(30^o) = 1/2$ e, para qualquer ângulo b, $\mathrm{sen}^2(b)+\cos^2(b)=1$, o vetor deslocamento se escreve por suas componentes como $-17,3km.\hat{\imath} + 10km.\hat{j}$.

Vetores posição, velocidade e aceleração

O vetor posição de uma partícula em um sistema de coordenadas é um vetor que se inicia na origem deste sistema e tem como extremidade as coordenadas da localização da partícula. Ou seja,

$$\vec{r} = x.\widehat{i} + y.\widehat{j}$$

Evidentemente, se a partícula estiver em uma posição e se deslocar uma segunda, o deslocamento da primeira para a segunda pode ser escrito como

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

e a velocidade pode ser escrita como

$$\vec{v}_i = \lim_{t_f \to t_i} \left[\frac{(\vec{r}_f - \vec{r}_i)}{(t_f - t_i)} \right]$$

Como conseqüência, pode-se escrever

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\widehat{i} + \frac{dy}{dt}\widehat{j}.$$

Fundação CECIERJ Consórcio cederj

Exemplo (vetor velocidade):

Um barco a vela tem as coordenadas $(x_1,y_1) = (110m, 218m)$ em $t_1 = 60s$. Dois minutos mais tarde, no tempo t_2, ele apresenta as coordenadas $(x_2,y_2) = (130m, 205m)$.

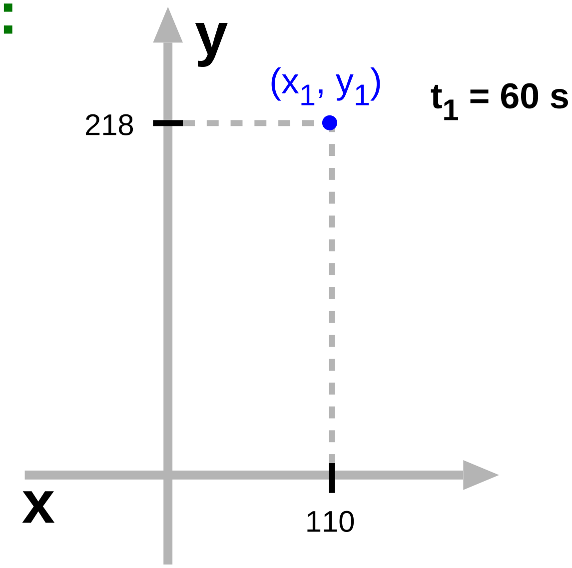
(a) determine a velocidade média para esse intervalo de 2 minutos, expressando-a em função de suas componentes retangulares;

(b) determine o módulo, a direção e o sentido da velocidade média;

(c) para t > 20s, a posição do barco em função do tempo pode ser expressa por $x(t) = b_1 + b_2.t$ e $y(t) = c_1 + c_2/t$, onde $b_1=100m$, $b_2 = (1/6)m/s$, $c_1 = 200m$ e $c_2 = 1.080m.s$. Obtenha a velocidade instantânea para um tempo qualquer t > 20s.

Exemplo (vetor velocidade):

Situação inicial



Animar

Voltar

Exemplo **(vetor velocidade-continuação):**

Resposta: Imediatamente, tem-se a velocidade média na forma a seguir:

$$\vec{v} = v_{xm}.\widehat{i} + v_{ym}.\widehat{j} = \frac{(130m - 110m)}{(180s - 60s)}.\widehat{i} + \frac{(205m - 218m)}{180s - 60s}.\widehat{j} =$$
$$= (0,167m/s).\widehat{i} - (0,108m/s).\widehat{j}$$

Como conseqüência, o módulo da velocidade é $\sqrt{(0,167)^2 + (0,108)^2} = 0,199$

Observando que a componente x é positiva e que a componente y é negativa resta saber apenas o ângulo que o vetor velocidade média faz com o eixo x. Isto pode ser determinado por meio da tangente do ângulo, já sabendo que o ângulo, medido a partir do eixo x no sentido antihorário é negativo. O ângulo resulta, então, como sendo aquele cuja tangente corresponde à razão entre as componentes:

$$tan^{-1}\left(\frac{v_{ym}}{v_{xm}}\right) = tan^{-1}\left(\frac{-0,108}{0,167}\right) = tan^{-1}(-0,647) = -33,0^o$$

A velocidade instantânea se obtém como

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}.\widehat{i} + \frac{dy}{dt}.\widehat{j} = b_2.\widehat{i} - c_2.t.\widehat{j} = \left(\frac{1}{6}\right) m/s.\widehat{i} - \frac{(1.080m/s)}{t^2}\widehat{j}$$

Fundação CECIERJ Consórcio cederj

O Vetor Aceleração:

A aceleração se define como a taxa de variação da velocidade, ou seja, em 3 dimensões,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}.\widehat{i} + \frac{dv_y}{dt}.\widehat{j} + \frac{dv_z}{dt}.\widehat{k}$$

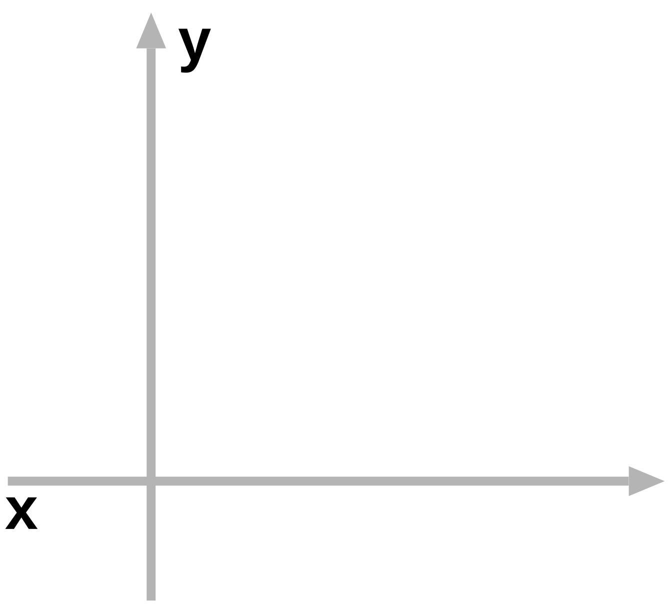
Substituindo-se a velocidade instantânea obtém-se a expressão:

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}.\widehat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}.\widehat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}.\widehat{k} = a_x.\widehat{i} + a_y.\widehat{j} + a_z.\widehat{k}$$

O Vetor Aceleração (continuação):

Exemplo:

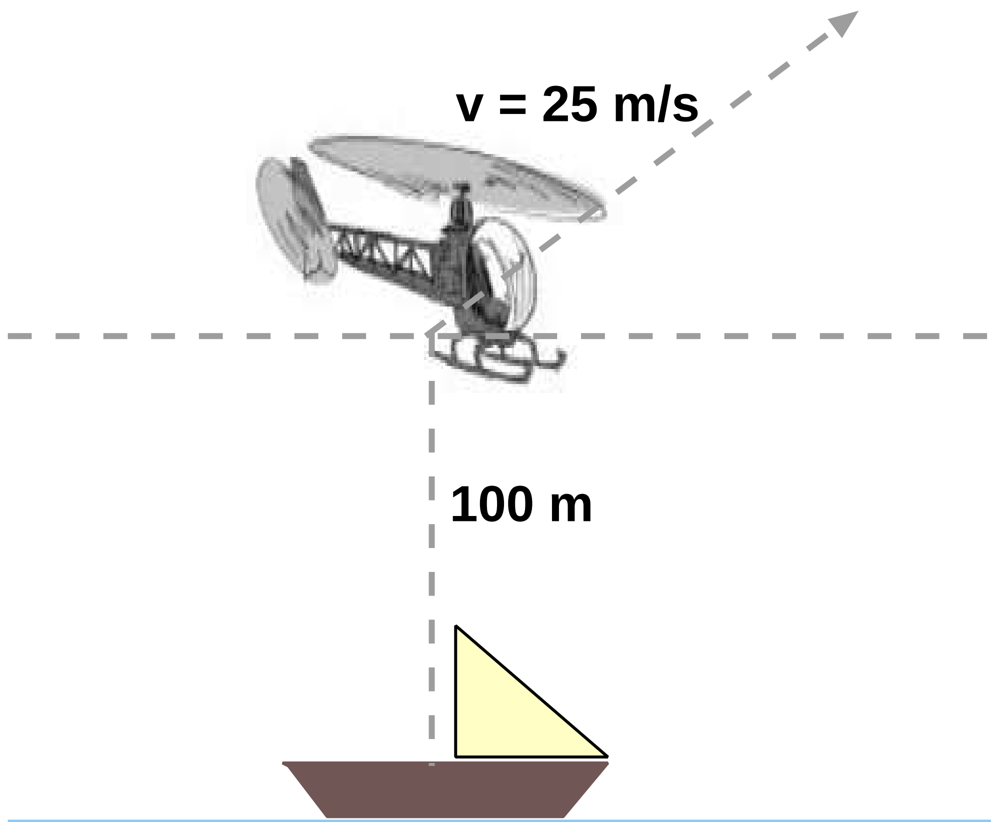
Um carro está trafegando para leste a 60km/h e faz uma curva durante 5s e, após a curva, passa a estar trafegando para norte, também a 60km/h. A aceleração média observada foi (observe que houve aceleração mesmo sem mudança no módulo da velocidade):



Animar Voltar

Exemplo **(grandezas vetoriais e o lançamento de projéteis):**

Um helicóptero descarrega um pacote de suprimentos para as vítimas de uma inundação que estão em uma balsa em uma área alagada. Quando o pacote é lançado o helicóptero está 100m acima da balsa e voando a 25m/s com ângulo de 36,9 graus em relação à horizontal.



Animar

Voltar

<u>Exemplo</u> (grandezas vetoriais e o lançamento de projéteis-continuação):

(a) Durante quanto tempo o pacote permanece no ar?

(b) A que distância da balsa o pacote cai?

(c) Se o helicóptero voa com velocidade constante, onde ele estará quando o pacote atingir a água?

Resposta:

Podem-se escrever as coordenadas x e y como

$$x(t) = v_{ox} \,.\, t \quad \text{e} \quad y(t) = y_o + v_{oy}.t - (1/2).g.t^2.$$

A partir do ângulo de lançamento do pacote, tem-se

$x(t) = (25\text{m/s}).\cos(36{,}9^o).t = (20\text{m/s}).t$. Isto permitirá descobrir o quanto o pacote caiu distante da balsa, desde que se saiba o tempo que demorou para atingir a água.

<u>Exemplo</u> (grandezas vetoriais e o lançamento de projéteis-continuação):

O tempo de queda pode ser obtido por meio de y(t), fazendo

$y(t_f) = y_o + v_{oy}.t_f – (1/2).g.t_f^2$, ou seja,

$0 = 100m + (25m/s).sen(36,9^o).t_f – 0,5.9,8m/s2.\ t_f^2$.

Obtendo a raiz da equação do segundo grau, encontram-se as soluções –3,24s e 6,30s.

Sendo o instante zero aquele em que o pacote é lançado, a solução negativa deve ser descartada. Assim, a distância do pacote ao cair tem o valor 20m/s . 6,3s =126m.

Para concluir, se o helicóptero prossegue na mesma velocidade, quando o pacote atingir a água ele estará nas coordenadas:

$x(t_f)$ = 20m/s . 6,3s = 126m e $y(t_f)$ = 100m+15m/s . 6,3s = 194,5m.