Aula 17

Professor:

Mauricio Kischinhevsky

Eletricidade e magnetismo (Parte 7)

Conteúdo:

Circuitos com corrente alternada, as equações de Maxwell e ondas eletromagnéticas.

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Circuitos com corrente alternada

Geradores de corrente alternada

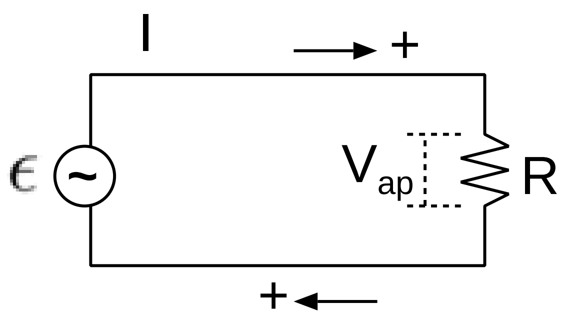
São fontes de tensão que produzem FEM senoidal, por exemplo via rotação, com velocidade angular w constante, de um enrolamento condutor com N voltas de área individual A em um campo uniforme B em um campo magnético uniforme. A expressão típica para a FEM assim gerada é da forma

$$\epsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = N.B.A.w.sen(w.t+\delta) = \epsilon_{pico}.sen(w.t+\delta).$$

Deve-se analisar de que forma a presença de uma FEM senoidal em um circuito influencia a corrente produzida em presença de cada um dos componentes usuais dos circuitos.

Corrente alternada em um resistor

Considere um circuito que contenha apenas um gerador de FEM senoidal (gerador **ca**) e um resistor, conforme ilustrado abaixo.



Sendo a tensão produzida da forma

$$V_R = \epsilon = \epsilon_{pico}.sen(w.t + \delta) = V_{pico}.sen(w.t + \delta) = V_{pico}.cos(w.t),$$
$$\delta = \frac{\pi}{2}\ (arbitrado).$$

Pela Lei de Ohm, tem-se que a corrente produzida no resistor é da forma

$$I = \frac{V_R}{R} cos(w.t) = I_{pico}.cos(w.t).$$

Note que **I** está em fase com $\mathbf{V_R}$.

A potência dissipada no resistor varia com o tempo, e seu valor instantâneo será

$$P = I^2.R = [I_{pico}.cos(w.t)]^2.R = I_{pico}^2.R.cos^2(w.t).$$

Como a média da função senoidal após ciclos completos é 1/2,

$$P_{med} = (I^2.R)_{med} = \frac{1}{2} I_{pico}^2.R.$$

Escrevendo de forma semelhante ao que se faz para circuitos de corrente contínua,

$$P_{med} = I_{rms}^2.R = \frac{I_{pico}^2}{2}.R = (\frac{I_{pico}}{\sqrt{2}})^2.R \rightarrow I_{rms} = \sqrt{(I^2)_{med}}.$$

Tipicamente, os amperímetros e voltímetros **ca** medem valores eficazes, do tipo **rms**.

Exemplo:

A queda de potencial senoidal através de um resistor de **12 Ohm** possui um valor de pico de **48 V**. Determine a corrente **rms**, a potência média e a potência máxima dissipada.

Resposta:

Basta observar que a corrente quadrática média terá o valor da corrente de pico dividida por raiz de 2, sendo a potência média obtida a partir da expressão tradicional para a potência, desde que adotada a corrente quadrática média. A potência máxima se referiria à corrente de pico.

Ou seja,

$$I_{rms} = \frac{I_{pico}}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{V_{pico}}{R}}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{48V}{12\Omega}}{\sqrt{2}} = 2,83A,$$

$$P_{med} = I_{rms}^2.R = (\frac{I_{pico}}{\sqrt{2}})^2.R = 96W,$$

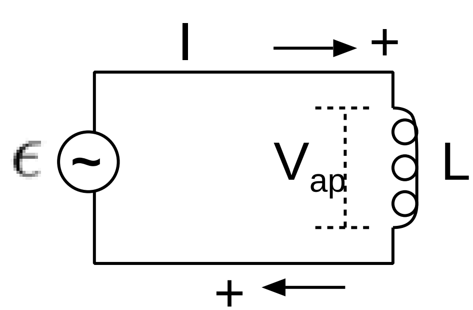
$$P_{max} = I_{pico}^2.R = (4A)^2.R = 192W.$$

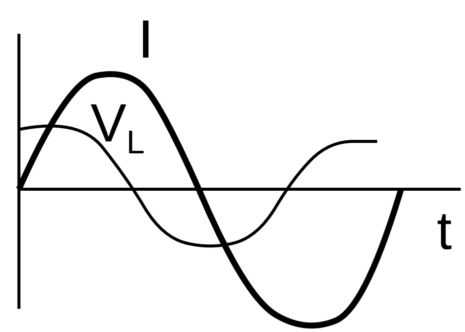
Circuitos com corrente alternada: indutores

Considere um circuito que contenha um gerador **ca** e um indutor. Quando a corrente varia no indutor, uma contra-FEM é gerada devido à variação de fluxo (com módulo L.dI/dt). A queda de potencial (aquela devida ao resistor sendo muito menor) através do indutor é igual à FEM do gerador,

$$V_L = \epsilon = V_{L,pico}.cos(w.t) \rightarrow I_{rms} = V_{L,pico}.cos(w.t) = L\frac{dI}{dt} \rightarrow I = \frac{V_{L,pico}}{L}\int cos(w.t)dt,$$

$$ou,\ finalmente,\ I = I_{pico}.cos(w.t - \frac{\pi}{2}),\ \ com\ I_{pico} = \frac{V_{L,pico}}{w.L} = \frac{V_{L,pico}}{X_L}.$$





Observe que a corrente e a queda de potencial através do indutor não estão em fase, ou seja, neste caso a queda máxima de potencial ocorre em um quarto do período antes da corrente máxima. Trata-se de defasagem (avançada) de 90°. Observe também que XL, a reatância indutiva, possui unidades de resistência (Ohm) e que é tanto maior quanto maior a freqüência. A potência instantânea liberada para o indutor é da forma

$$P = V_L.I = V_{L,pico}.I_{pico}cos(w.t).sen(w.t) =$$
$$= \frac{1}{2}V_{L,pico}.I_{pico}.sen(2.w.t)$$ (média nula, se R desprezível).

Exemplo:

A queda de potencial através de um indutor de 40 mH é senoidal, com um pico de queda de potencial de 120V. Encontre a reatância indutiva e o pico de corrente quando a freqüência é **(a)** 60Hz; **(b)** 2000Hz.

Resposta:

$$Como\ I_{pico} = \frac{V_{L,pico}}{w.L} = \frac{V_{L,pico}}{X_L}\ e\ tem\!-\!se\ X_{L,a} = w_a.L = 2\pi.f_a.L = (2\pi).(60Hz).(40\times10^{-3}H) = 15,1\Omega,$$

$$resulta\ I_{pico} = \frac{V_{L,pico}}{X_L} = \frac{120V}{15,1\Omega} = 7,95A.$$

Ademais, no segundo caso, tem-se

$$X_{L,b} = w_b.L = 2\pi.f_b.L = (2\pi).(2000Hz).(40\times10^{-3}H) = 503\Omega \rightarrow I_{pico,b} = \frac{V_{L,pico}}{X_{L,b}} = \frac{120V}{503\Omega} = 0,239A.$$

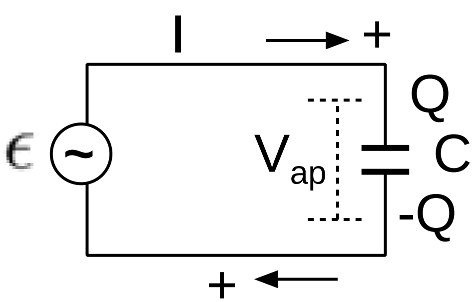
Circuitos com corrente alternada: capacitores

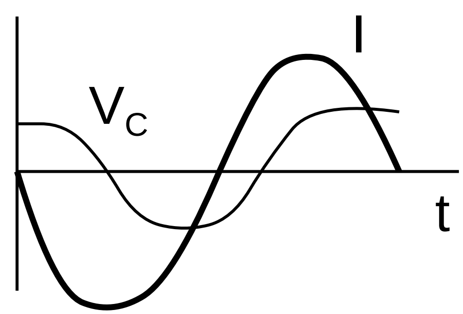
Considere um circuito composto por uma fonte **ca** e um capacitor. A queda de tensão através do capacitor é $V_c = Q/C$, onde Q é a carga (na placa superior) do capacitor. A queda de potencial através do capacitor tem que ser igual à FEM do gerador, ou seja,

$$V_C = V_{C,pico}.cos(w.t) \rightarrow Q = V_{C,pico}.C.cos(w.t).$$

$$Assim,\ I = \frac{dQ}{dt} = -w.V_{C,pico}.C.sen(w.t) = -I_{pico}.sen(w.t) =$$

$$= I_{pico}.cos(w.t + \frac{\pi}{2}), I_{pico} = w.V_{pico}.C.$$





Observe que a carga é proporcional à queda de potencial. O valor máximo da variação de carga (corrente) ocorre quando a carga é zero e, portanto, a queda de potencial se anula. À medida que a carga nas placas do capacitor aumenta, a corrente diminui até a carga estar em um máximo e, então a corrente se anula.

Pode-se definir a reatância capacitiva X_C (unidades de resistência) conforme se segue:

$$I_{pico} = w.C.V_{C,pico} = \frac{V_{C,pico}}{\frac{1}{w.C}} = \frac{V_{C,pico}}{X_C} \ e, \ analogamente, \ I_{rms} = \frac{V_{C,rms}}{X_C}.$$

Note que, quanto maior a freqüência, menos o capacitor consegue dificultar o fluxo de carga.

Exemplo:

Um capacitor de 20 μF é conectado a um gerador ca que aplica uma queda de potencial com valor de pico de 100V. Encontre a reatância capacitiva e a amplitude da corrente quando a freqüência é de (a) 60Hz e quando é de (b) 6000Hz.

Resposta:

Calcula-se a reatância nos dois casos pedidos como

$$X_{C,a} = \frac{1}{w_a.C} = \frac{1}{2\pi f_a.C} = \frac{1}{2\pi(60Hz).(20\times10^{-6}F)} = 133\Omega;$$

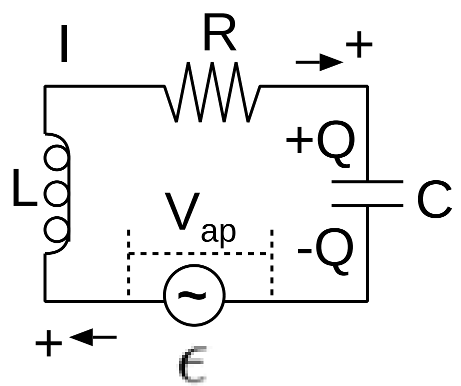
$$X_{C,b} = \frac{1}{w_b.C} = \frac{1}{2\pi f_b.C} = \frac{1}{2\pi(6000Hz).(20\times10^{-6}F)} = 1,33\Omega$$

e os picos de corrente como:

$$I_{pico,a} = \frac{V_{C,pico}}{X_{C,a}} = \frac{100V}{133\Omega} = 0,752A \ e \ I_{pico,b} = \frac{V_{C,pico}}{X_{C,b}} = \frac{100V}{1,33\Omega} = 75,2A.$$

Circuitos RLC com fonte oscilante: ressonância

A partir dos componentes estudados, podem-se formar circuitos com combinações deles. Uma combinação possível é denominada circuito **RLC série**, que pode estar presente com uma fonte **ca**, conforme:



A partir da Lei das malhas de Kirchhoff tem-se

$$V_{ap,pico}.cos(w.t) - L.\frac{dI}{dt} - R \cdot I - \frac{Q}{C} = 0 \ e \ fazendo \ I = \frac{dQ}{dt},$$

$$L.\frac{d^2Q}{dt^2} + R.\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}.Q = V_{ap,pico}.cos(w.t).$$

Circuitos RLC com fonte oscilante: ressonância

A equação acima é semelhante à de um oscilador harmônico forçado. Atentando para a solução permanente, a corrente pode ser escrita como

$$I = I_{pico}.cos(w.t - \delta),\ onde\ tg\delta = \frac{X_L - X_C}{R}\ (constante\ de\ fase)$$

$$e\ o\ pico\ de\ corrente\ \ I_{pico} = \frac{V_{ap,pico}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{V_{ap,pico}}{Z},\ onde$$

$X_L - X_C$ é a reatância total e Z é a impedância do circuito.

Circuitos RLC com fonte oscilante: ressonância

Quando os valores das reatâncias indutiva e capacitiva se igualam, a reatância total se anula a a impedância (Z) tem seu menor valor, significando que o ângulo de fase é nulo e que a corrente está em fase com a queda de potencial aplicada. A freqüência angular para a qual isto ocorre é

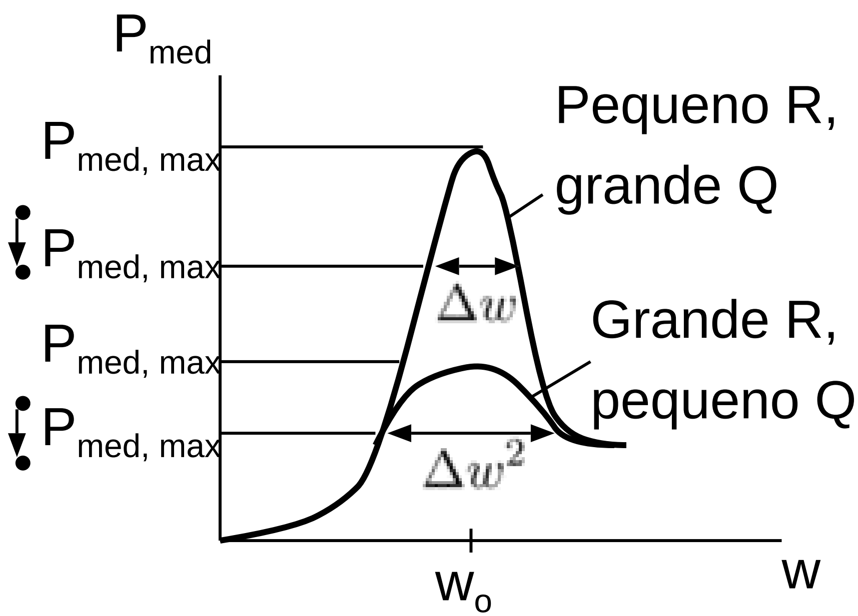
$$w_{res} = w_o = \frac{1}{\sqrt{L.C}}\ (freq.\ natural)\ pois\ X_L = X_C \rightarrow w.L = \frac{1}{w.C}.$$

Observe que a potência média pode ser escrita como (detalhes no livro)

$$P_{med} = \frac{1}{2} I^2_{pico}.R = I^2_{rms}.R = \frac{V^2_{ap,rms}.R.w^2}{L^2(w^2 - w_o^2)^2 + w^2.R^2}.$$

Circuitos RLC com fonte oscilante: ressonância

Observe que a expressão anterior terá seu valor máximo quando a freqüência suprida pela fonte senoidal igualar a natural (da combinação das reatâncias). Neste caso haverá ressonância. Note que grandes valores de R vão deixar menos pronunciado este fenômeno, enquanto pequenos valores de R determinarão um pico pronunciado na vizinhança da freqüência natural.



Por essa razão circuitos ressonantes são usados em receptores de rádio em que a freqüência natural do circuito pode ser igualada a cada uma das freqüências captadas na antena. Em uma configuração específica(sintonia), as correntes devidas às outras estações serão desprezíveis quando comparadas com as devidas à estação sintonizada.

Exemplo:

Uma combinação RLC com L=2 H, C=2 μF e R=20 é alimentada com gerador com pico de FEM de 100V e freqüência que pode ser variada. Encontre a freqüência de ressonância, o valor $(w_o.L)/R$ (**fator Q** do circuito), a largura de ressonância e a amplitude de corrente na ressonância.

Calcula-se, conforme segue,

$$f_o = \frac{w_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L.C}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(2H).(2\times 10^{-6}F)}} = 79,6Hz;$$

$$\rightarrow Q = \frac{w_o.L}{R} = \frac{2\pi(79,6Hz).(2H)}{20\Omega} = 50\ (fator\ Q,\ adimensional);$$

$$portanto,\ \Delta f = \frac{f_o}{Q} = \frac{79,6Hz}{50\Omega} = 1,59Hz$$ (largura de ressonância);

finalmente, na ressonância, a impedância é R:

$$I_{max} = \frac{V_{ap,pico}}{R} = \frac{100V}{20\Omega} = 5A.$$

Observe que a largura de 1,59Hz é menos que 2% da freqüência de ressonância, o que determina um pico de ressonância muito pronunciado.

O **transformador** é um dispositivo utilizado para aumentar ou diminuir a tensão em um circuito, sem muita perda de potência. Baseia-se no princípio de que uma corrente alternada em um circuito induz uma FEM no circuito vizinho devido à indutância mútua entre os circuitos. Havendo núcleo de ferro que interliga dois enrolamentos, vizinhos, um primário e o outro, secundário, o núcleo de ferro aumenta o campo magnético para uma dada corrente e guia-o de modo que quase todo o fluxo magnético através de um enrolamento vá para o outro enrolamento. Se não houver perda, o produto da diferença de potencial pela corrente ao longo do enrolamento primário deve ser igual ao produto daquele ao longo do enrolamento secundário. Assim, podem-se baixar ou elevar tensões senoidais. Transformadores reais têm eficiência de até 95%, sendo as perdas por efeito Joule.

Exemplo:

Uma linha de transmissão tem uma resistência de 0,02 Ω/km. Calcule a perda de potência (I^2R) se 200kW de potência são transmitidos a partir de um gerador de potência para uma cidade 10km afastada em 240V e 4,4 kV.

Resposta:

Inicialmente note que a resistência total dos 10km de fio é R=0,2 Ω. Em seguida, determina-se a corrente necessária para transmitir 200kW usando P=I.V e, logo após, a perda de potência por meio de I^2R :

$$I = \frac{P}{V} = \frac{200kW}{240V} = 833A \rightarrow I^2.R = (833A)^2(0,2\Omega) = 139.000W;$$

$$I = \frac{P}{V} = \frac{200kW}{4,4kV} = 45,5A \rightarrow I^2.R = (45,5A)^2(0,2\Omega) = 414W.$$

Observação: a 240V(4,4kV), perdem-se 70%(0,2%) da potência por efeito Joule e a tensão cai (I.R) 167V(9V), e a potência é liberada com 73V(quase 240V). Usa-se, portanto alta tensão para a distribuição.