Aula 12

Professor:

Mauricio Kischinhevsky

Eletricidade e magnetismo (Parte 2)

Conteúdo:

Campo elétrico, distribuições discretas e contínuas de cargas

Fundação CECIERJ Consórcio cederj

Cálculo do Campo Elétrico a partir da Lei de Coulomb

Introdução

A carga elétrica é quantizada em nível microscópico, mas em escala macroscópica se fala em distribuições contínuas de carga e correntes elétricas com valores contínuos.

Dentro dessas aproximações, conceitua-se o "i**nfinitésimo físico**" (grande o suficiente para conter grande número de cargas e pequeno o suficiente em relação à escala de dimensões físicas do domínio).

Assim definem-se densidade volumétrica de carga, densidade superficial de carga e mesmo a densidade linear de carga, respectivamente, na forma:

$$\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V}, \ \sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A}, \ \lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta L}.$$

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Campo elétrico sobre o eixo de um segmento de reta finito carregado

Se uma carga dq distribuída sobre um elemento de volume dV produz um campo elétrico, de acordo com a Lei de Coulomb,

$$d\vec{E} = \frac{k.dq}{r^2}\hat{r}.$$

Assim, o campo total no ponto em questão é obtido por meio da soma das parcelas individuais oriundas de todas as regiões da distribuição de carga, ou seja,

$$\vec{E} = \int_v \frac{k.dq}{r^2}\hat{r}.$$

Evidentemente, se a distribuição de carga for linear (superficial) a integral será sobre uma linha (superfície).

Campo elétrico sobre o eixo de um segmento de reta finito carregado

A partir de uma distribuição de carga linear λ=Q/L sobre um segmento de reta situado entre -L/2 e L/2, pode-se obter o campo ao longo do eixo x por meio de (x>L/2):

$$\vec{E}_x = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{k.dq}{(x_p - x)^2}\hat{x} = k.\lambda \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{(x_p - x)^2}\hat{x} =$$

$$-\lambda.k \int_{x_p - L/2}^{x_p + L/2} \frac{du}{u^2}\hat{x},$$

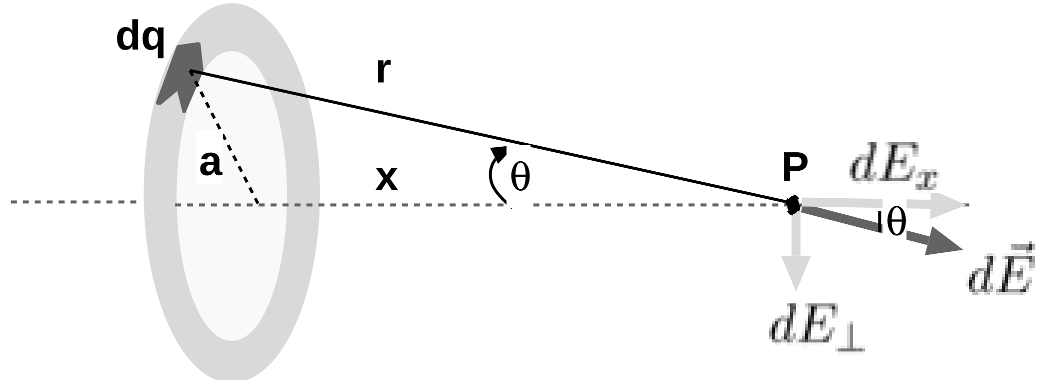
$$sendo\ u = x_p - x,\ ou\ seja,$$

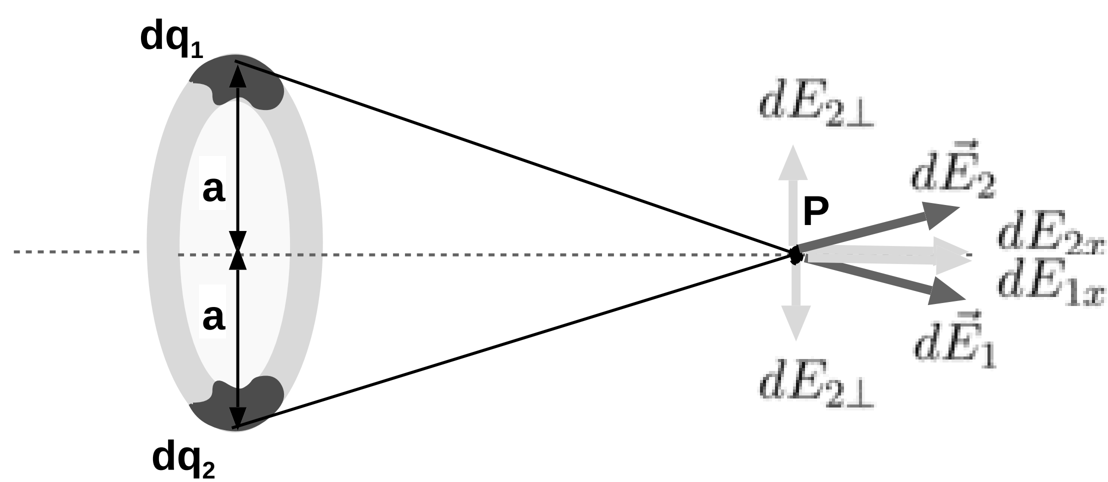
$$\vec{E}_x = \lambda.k.[\frac{1}{u}]_{x_p + L/2}^{x_p - L/2}\hat{x} = \frac{k.\lambda.L}{x_p^2 - (L/2)^2}\hat{x}.$$

Note o comportamento para x_p >> L. e para x=0.

Campo elétrico sobre o eixo de um anel carregado

Se o anel estiver carregado uniformemente, com carga total Q, somente a componente ao longo do eixo que passa pelo centro do anel e lhe é perpendicular pode estar presente, porque a simetria assegura o cancelamento da componente perpendicular ao eixo.





Campo elétrico sobre o eixo de um anel carregado

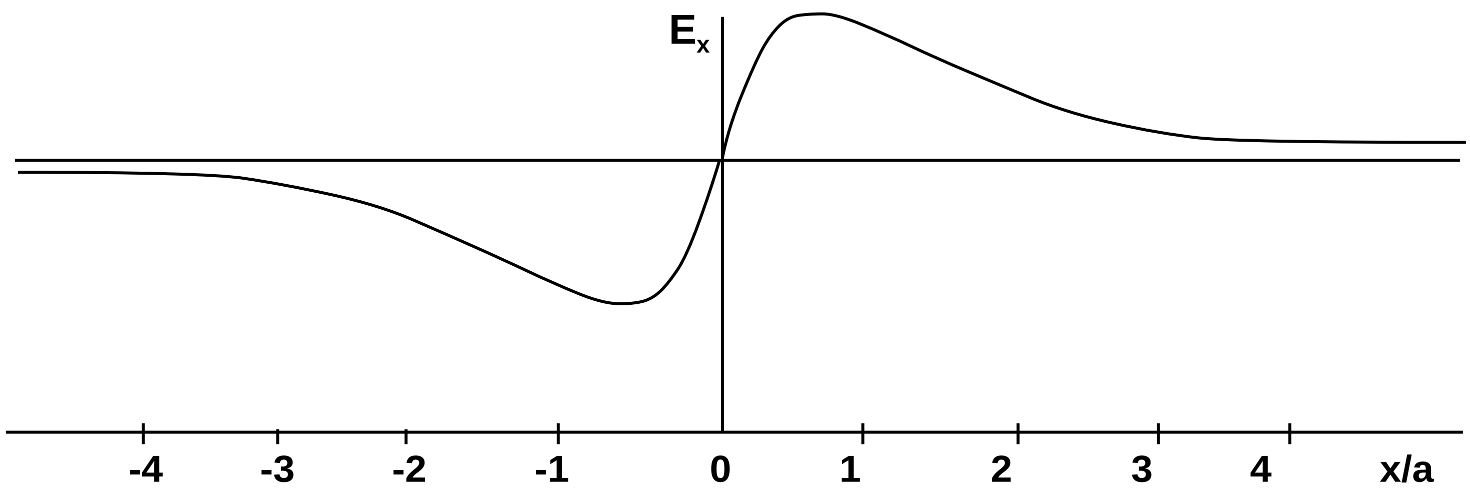
Para um elemento de carga dq sobre o anel,

$$dE_x = \frac{k.dq}{r^2} cos\Theta = \frac{k.dq}{r^2}\frac{x}{r} = \frac{k.dq}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$onde\ r^2 = x^2 + a^2\ e\ cos\Theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{(x^2+a^2)}}.$$

$$Assim,\ E_x = [\frac{k.x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}]\int dq\ ou,\ simplesmente,\ E_x = [\frac{k.Q.x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}].$$

O gráfico da função em relação a x tem a forma abaixo.



Campo elétrico sobre o eixo de um disco carregado

Basta observar que um disco pode ser entendido como anéis concêntricos e, portanto, o campo elétrico pode ser obtido superpondo as contribuições dos anéis desde o raio igual a zero até o limite do tamanho do disco (R). Para cada anel o campo corresponde à expressão anterior, substituindo-se

$$Q \ por \ dq = 2\pi.\sigma.a.da, \ ou \ seja, \ dE_x = [\frac{k.x.2\pi.\sigma.a.da}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}].$$

Após a integração, tem-se

$$E_x = -2.k.x.\pi.\sigma(\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2}}) = 2.k.\pi.\sigma(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{x^2}}}), \ x > 0.$$

Observe que o limite $R \rightarrow \infty$ determina que E_x não depende de x (campo de um plano infinito carregado).

Lei de Gauss

Introdução

O **Fluxo Elétrico** é uma grandeza matemática que corresponde à quantidade de linhas de campo que atravessam uma superfície. No caso de um campo constante com uma superfície cuja normal é ao longo de x,

$$\vec{E} = E_x\hat{x}, \;\; \phi = E_x.A.$$

Naturalmente, se a superfície tiver mudanças de direção da normal, e os elementos de área forem infinitésimos a serem contemplados individualmente, resultará

$$\phi = \int_S \vec{E}.\hat{n}dA.$$

No caso de superfícies fechadas, a normal é considerada "para fora" da região delimitada pela superfície. O fluxo total pode ser positivo ou negativo dependendo da predominância de saída ou entrada das linhas de campo:

$$\phi_{res} = \oint_S \vec{E}.\hat{n}dA.$$

Enunciado quantitativo da Lei de Gauss

O fluxo resultante que atravessa uma superfície esférica centrada na origem com uma carga pontual positiva +q em seu centro é decorrente de o campo ter a forma $$\vec{E} = \frac{k.q}{R^2}\hat{r}.$$

Ou seja, o fluxo tem a forma

$$\phi_{res} = \int_S \vec{E}.\hat{n}dA = \frac{k.q}{R^2}4.\pi.R^2\hat{r}.\hat{r} = 4.\pi.k.q.$$

Observe que o fluxo é proporcional à carga e que independe da curva envoltória que se escolha, desde que esta contenha toda a carga.

Assim, vale a Lei de Gauss:

"O fluxo resultante que atravessa uma superfície fechada é igual a 4.π.k vezes a carga resultante no interior da superfície."

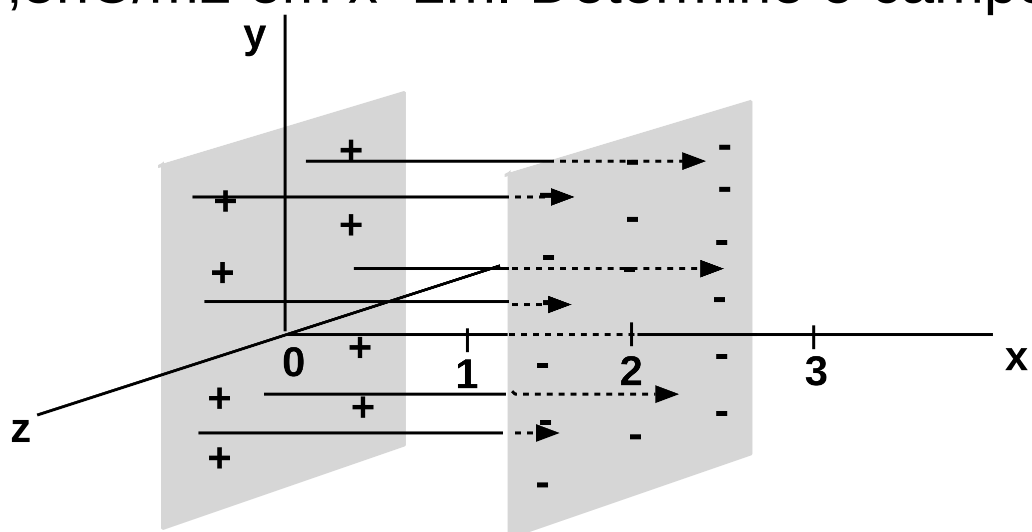
Cálculo do Campo Elétrico a partir da Lei de Gauss

Simetria plana

Uma distribuição de carga é dita ter simetria plana se, ao ser observada de todos os pontos situados sobre uma superfície plana infinita ela apresentar a mesma aparência.

Exemplo:

Considere que há dois planos carregados perpendiculares ao eixo x, um com densidade superficial de carga σ=+4,5nC/m2 em x=0 e outro com densidade -4,5nC/m2 em x=2m. Determine o campo elétrico em x=1,8m e 5m.



Resposta:

Cada plano produz um campo uniforme de módulo $E=2.\pi.k.\sigma=\sigma/(2.\varepsilon_o)$, sendo $\varepsilon_o=8{,}85\times10^{-12}\ C^2/(N.m^2)$ denominado permissividade do vácuo. O plano negativamente carregado produz campo atrativo e o positivamente carregado, repulsivo. Assim, no ponto x=1,8m, entre os planos, ambos os campos são no sentido dos x crescentes, perfazendo

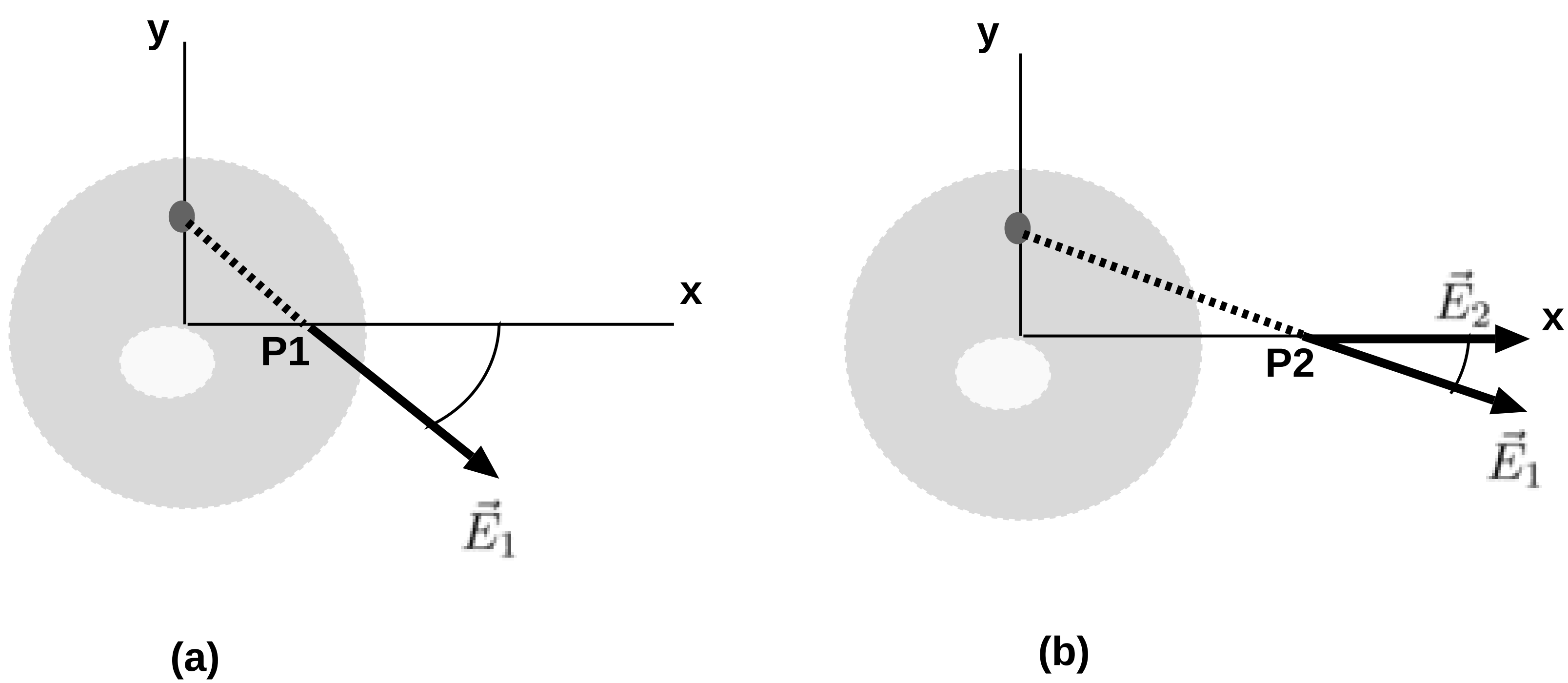
$$E=\sigma/(\epsilon_o)=2\times 254N/C=508N/C.$$

Em x=5m, o campo devido ao plano carregado em x=0 é no sentido positivo de x, e o do outro plano induz um campo no sentido contrário, produzindo cancelamento.

<u>Observe</u> que há descontinuidade do campo ao passar pela superfície, pois para qualquer ponto entre os planos o valor é o mesmo de x=1,8m e fora dessa região, o campo é nulo.

Exemplo:

Úma casca esférica de raio R=3m tem seu centro na origem e uma densidade de carga superficial σ=3nC/m^2. Uma carga puntiforme q=250nC é posicionada sobre o eixo y em y=2m. Determine o campo elétrico sobre o eixo x em **(a)** 2m (P1); **(b)** 4m (P2).



Resposta:

Em ambos os casos devem ser superpostos os campos elétricos resultantes das distribuições de carga. No entanto, uma casca carregada tem campo elétrico nulo em sua parte interna; basta construir uma superfície gaussiana também esférica e constatar a nulidade do campo através da ausência de cargas internas.

(a) Neste caso o ponto no qual se busca obter o campo está interno à casca esférica carregada; portanto o campo é

$$\vec{E}_1 = \frac{k.q}{r_1^2}\hat{r}_1 = \frac{(8,99 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2}).(250 \times 10^{-9}C)}{8m^2}[\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}] =$$

$$= 281(N/C)[\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}] = 199(N/C)[\vec{i} - \vec{j}].$$

Resposta (continuação):

(b) O tratamento dispensado à casca esférica carregada quando vista por fora, construindo-se uma superfície gaussiana que a contém, mostra que o campo elétrico por ela gerado equivale ao de uma carga puntiforme localizada em seu centro que concentra toda a sua carga, ou seja, $Q=\sigma.4.\pi.R2=(3nC/m^2).4.\pi.(3m)^2=339nC$.

Assim, o campo devido à casca no ponto x=4m, será

$$\vec{E}_c = \frac{k.Q}{r_2^2}\hat{r}_2 = \frac{(8,99 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2}).(399 \times 10^{-9}C)}{(4m)^2}.\vec{i} = 190\frac{N}{C}.\vec{i}.$$

Em seguida há que se calcular o campo devido à carga puntiforme.

Resposta (continuação):

Para a carga puntiforme, situada em y=2, o campo em x=4m será:

$$\vec{E}_p = \frac{k.q}{(2m)^2 + (4m)^2}\hat{r}_1,$$

ou seja,

$$\vec{E}_p = \frac{(8,99 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2}).(250 \times 10^{-9}C)}{20m^2}.[cos(\Theta).\vec{i} - sen(\Theta).\vec{j}] =$$

$$= 100\frac{N}{C}.\vec{i} - 50\frac{N}{C}.\vec{j}.$$

onde

$$\Theta = arctan(\frac{2m}{4m}) = arctan(1/2) = 26,6^o.$$

Portanto, o campo total é:

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_p + \vec{E}_c = (100\frac{N}{C} + 190\frac{N}{C}).\vec{i} - 50\frac{N}{C}.\vec{j} = (290.\vec{i} - 50.\vec{j})\frac{N}{C}.$$