Fundação CECIERJ – Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação

Gabarito da AP1 – 2006.2

1ª Questão

(2,5) Considere um veículo experimental cuja frenagem é feita de modo diferente do sistema tradicional (freio dissipa a energia de movimento sob a forma de calor): o mecanismo de frenagem transforma a energia cinética do veículo em energia rotacional da massa de um volante extra (roda livre, a *flywheel*). Quando se solta o freio, esta roda extra, de momento de inércia 11,1kg.m^2, girante, transmite a sua energia rotacional para mover novamente o carro. A roda livre deste exemplo tem 100kg e atinge velocidade angular máxima de 20.000 rpm. Em certa ocasião, o veículo, que tem massa total 2000kg, se desloca a partir de sua garagem (na região serrana) até um local a 30km dela, 1,0km abaixo com declividade constante, com a roda livre passando a girar com sua velocidade máxima. Será que existe energia suficiente para fazer o veículo voltar ao ponto de origem com velocidade de 64km/h, supondo que, com o atrito do ar e o de rolagem uma energia de 20kW é dissipada?

SOLUÇÃO:

A energia cinética gerada pela *flywheel* é dada por:

$$
\begin{aligned}
E_{cinética} &= \frac{1}{2} I\ w^2 \\
&= \frac{1}{2} * 11,1 * (20000 \frac{rot}{\min} * \frac{2\pi rad}{rot} * \frac{1\min}{60s}) \\
&= \frac{1}{2} * 11,1 kgm^2 * (2094 \frac{rad}{s})^2 \\
&= 24,3MJ
\end{aligned}
$$

A energia dissipada é de 20kW para a velocidade de 64km/h. Então para sabermos a energia total dissipada num percurso de 30km é necessário conhecermos o tempo gasto nesse percurso, isto é,

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Então $\Delta t = 1687,5s$

E podemos concluir que a energia total dissipada é de: 1687,5s * 20000J/s = 33,7MJ

Portanto não existe energia suficiente na *flywheel* para que o carro retorne à origem.

2ª Questão

(2,0) Dois alto-falantes separados por uma determinada distância emitem ondas sonoras de mesma freqüência e amplitude e estão em fase. Seja r_1 =10m a distância a partir de um ponto de observação para o alto-faltante 1 e r_2 = 10,34 m a distância do mesmo ponto para o alto-falante 2. Determine para quais frequências do som emitido a amplitude do som percebida pelo observador será nula, sabendo que a velocidade do som é 340m/s.

SOLUÇÃO:

Como as ondas são de mesma amplitude (p_0) e freqüência (pela superposição de ondas), a amplitude da onda resultante é:

$$A = 2p_0\cos(\frac{1}{2}\delta)$$

onde $\delta = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}$.

Logo,

$$0 = 2p_0\cos(\frac{1}{2}\delta) \Leftrightarrow \cos(\frac{1}{2}\delta) = 0$$

Mas sabemos que

$$\begin{aligned}
&\cos(\frac{1}{2}\delta) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\delta = (2n+1)\frac{\pi}{2} \\
&\delta = (2n+1)\pi \\
&2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} = (2n+1)\pi \\
&\lambda = \frac{2\,\Delta x}{2n+1} \\
&\lambda = \frac{2\,(10{,}34 - 10{,}00)m}{2n+1} = \frac{2*0{,}34m}{2n+1} \\
&\lambda = \frac{0{,}68m}{2n+1}
\end{aligned}$$

E a freqüência é dada por:

$$\begin{aligned}
&f = \frac{v}{\lambda} \\
&f = \frac{340m/s}{\frac{0{,}68m}{2n+1}} = (2n+1)*500 \\
&f = 500Hz, \quad 1500Hz, \quad 2500Hz, \quad 3500Hz, ...
\end{aligned}$$

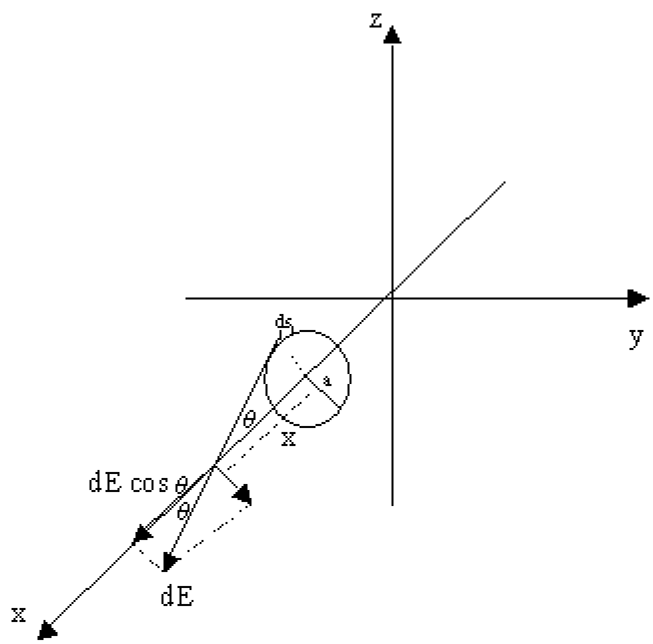
3ª Questão

(i)(1,5) Calcule o campo elétrico produzido por um anel de raio ***a*** carregado com carga ***Q*** uniformemente distribuída sobre ele, ao longo do eixo (coincidente com o eixo x) que passa por seu centro e é perpendicular ao plano definido por ele.

(ii)(1,0) Quando $x<<a$, pode-se considerar que o campo é proporcional a x. Explicite esta aproximação e, neste contexto, considere a colocação de uma partícula de massa m e carga $-q$ próximo ao centro do anel, na posição x. Determine a força sobre a partícula de carga $-q$, o equivalente à constante da "mola", a velocidade e o período da oscilação.

SOLUÇÃO:

(i)



O Campo elétrico é dado por

$$E = \int dE$$

$$\text{onde } dE = k\frac{dq}{r^2}$$

onde $dq = \frac{Q}{L}ds$, pois a carga Q está uniformemente distribuída por todo o anel de comprimento L $(L = 2\pi a)$.

Pela figura podemos ver que r é a hipotenusa do triângulo de catetos a e x, assim temos:

$$dE = k\frac{\frac{Q}{L}ds}{(a^2 + x^2)}$$

Podemos observar que não existem componentes de $\vec{E}$ nos eixos y e z. Para isso basta considerarmos dois elementos de carga do anel (dq_1 e dq_2) e diametralmente opostos. O campo resultante devido a tais elementos é paralelo ao eixo x, pois os componentes perpendiculares a tal eixo se cancelam, ou seja, o componente em z gerado por dq_1 é cancelado pelo componente em z gerado por dq_2, da mesma forma para o eixo y. Essa idéia pode ser usada para quaisquer dois elementos do anel e assim o campo resultante será paralelo ao eixo x.

O componente em x do campo é dado por:

$$dE_x = dE\cos\theta$$

E pela figura acima temos:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Assim,

$$dE_x = dE\cos\theta = k\frac{\frac{Q}{L}ds}{(a^2 + x^2)}\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$dE_x = \frac{k\ Q\ ds\ x}{L(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_x = \frac{k\ Q\ x}{L(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\int ds$$

Onde $\int ds = 2\pi a = L$ (comprimento do anel).

$$E_x = \frac{k\ Q\ x}{L(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}L$$

$$E_x = \frac{k\ Q\ x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(ii)

$$E_x = \frac{k\ Q\ x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{k\ Q\ x}{a^3}$$

Nesse caso o campo aponta para cima na parte superior do anel e para baixo na parte inferior. Tomamos como a direção para cima sendo positiva e com isso a força que atua na carga –q é dada por:

$$F = -qE = -\frac{kqQx}{a^3} = -Kx$$

Com isso podemos notar que essa força é restauradora. Além disso, essa força tenta puxar a partícula para o ponto de equilíbrio(x = 0). Note que parece que a carga –q está conectada a uma mola como se a carga se move-se de acordo com um movimento harmônico simples ao longo do eixo x.

A freqüência angular é dada por:

$$w = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{kqQ}{a^3 m}}$$

Portanto o período de oscilação é:

$$T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{kqQ}{a^3 m}}} = 2\pi\left(\frac{kqQ}{a^3 m}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

E a velocidade:

$$\frac{dv}{dt} = -w^2 x$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{kqQ}{a^3 m} x$$

$$v = \frac{kqQ}{a^3 m} x\ t$$

4ª Questão

(i)(1,5) Uma partícula puntiforme de massa m e carga $q = +5,0\mu C$ está na origem do plano xy, presa apenas na extremidade de uma haste rígida isolante de massa desprezível fixada no eixo y, em $y=4cm$. Outra partícula com carga q é aproximada lentamente de q e posicionada no eixo x em $x=-0,5cm$. Determine o ângulo de inclinação do pêndulo que equilibra a força elétrica com a de origem gravitacional.

(ii)(1,5) Uma casca esférica de raio $R=3m$ tem seu centro na origem e uma densidade de carga superficial $\sigma=3nC/m^2$. Uma carga puntiforme $q=250nC$ é posicionada sobre o eixo y em $y=2m$. Determine o campo elétrico, com auxílio da Lei de Gauss, sobre o eixo x em (a) $2m$; (b) $4m$.

SOLUÇÃO:

(i) ITEM ANULADO!

(ii)

(a) O campo elétrico nesse caso é apenas o devido a carga puntiforme q, visto que o campo elétrico no interior de uma casca esférica é nulo. Além disso, a lei de Gauss para uma partícula puntiforme nos dá:

$$E = E_q = k\frac{q}{d^2}$$

onde d é a hipotenusa do triângulo de catetos que vão da origem até q(carga situada em y=2) e da origem até um ponto P situado em x = 2.

Portanto,

$$E = 8{,}99 * 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\frac{250nC}{(4+4)m^2} = 8{,}99 * 10^9 * 31{,}25 * 10^{-9}\frac{N}{C} = 280{,}94\frac{N}{C}$$

(b) Nesse caso a lei de Gauss nos diz que podemos considerar a carga da casca esférica toda concentrada no seu centro. E assim o campo elétrico em x = 4 é dado pela superposição dos campos gerados pela casca esférica e pela carga puntiforme:

$$E = E_q + E_{casca} = k\frac{q}{d^2} + k\frac{Q}{D^2}$$

$$E = k\left(\frac{q}{d^2} + \frac{Q}{D^2}\right)$$

$$E = k\left(\frac{250nC}{20m^2} + \frac{4\pi R^2 \sigma}{D^2}\right)$$

$$E = k\left(\frac{250nC}{20m^2} + \frac{4\pi * 3^2 * 3nC}{4^2\, m^2}\right)$$

$$E = k\left(\frac{250nC}{20m^2} + \frac{\pi * 9 * 3nC}{4m^2}\right)$$

$$E = 8{,}99 * 10^9\ \frac{Nm^2}{C^2} * (12{,}5 + 21{,}2)\,\frac{nC}{m^2}$$

$$E = 8{,}99 * 10^9\ \frac{Nm^2}{C^2} * 33{,}7 * 10^{-9}\ \frac{C}{m^2}$$

$$E = 302{,}9\,\frac{N}{C}$$