Aula 6

Professor:

Mauricio Kischinhevsky

Matéria, Força e Energia (Parte 6)

Conteúdo:

6.1 Leis de Newton

6.2 Trabalho e energia

6.3 Leis de conservação

Fundação CECIERJ Consórcio cederj

Energia Cinética Rotacional

A energia cinética de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo é a soma das energias cinéticas das partículas que, juntas, constituem o corpo. Explicitamente,

$$K = \frac{1}{2}\sum_i (m_i r_i^2 w^2) = \frac{1}{2}\sum_i (m_i r_i^2) w^2 = \frac{1}{2} I w^2$$

Na expressão acima, ***I*** é denominado ***momento de inércia*** do objeto em torno do eixo de rotação.

Exemplo:

Considere um objeto constituído de 2 partículas de massas m_1 e m_2, localizadas a distâncias r_1 e r_2, respectivamente, de um eixo de rotação e que giram à velocidade angular ω. Qual o momento de inércia do objeto? Qual sua energia cinética?

O momento de inércia (*I*) e, a seguir a energia cinética (*K*), se obtêm como

$$I = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \qquad K = \frac{1}{2} I w^2$$

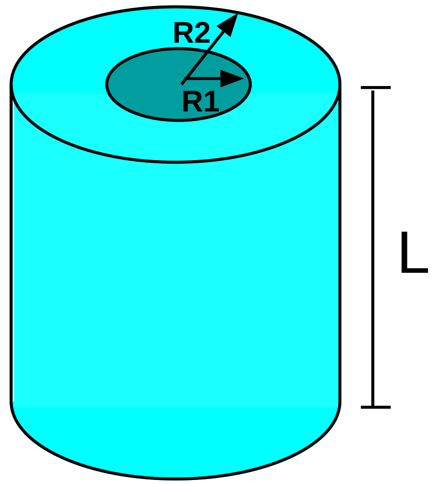
Note que a conservação de energia, mediante redução das distâncias r_1 e r_2, imporia aumento de ω. Ademais, se o corpo for um contínuo, tem-se

$$I = \int r^2 dm$$

Fundação CECIERJ Consórcio cederj

Uma Aplicação do conceito de Energia Rotacional: carro com volante motriz.

Considere um veículo experimental cuja frenagem é feita de modo diferente do sistema tradicional (freio dissipa a energia de movimento sob a forma de calor): o mecanismo de frenagem transforma a energia cinética do veículo em energia rotacional da massa de um volante extra (roda livre, a *flywheel*). Quando se solta o freio, esta roda extra, girante, transmite a sua energia rotacional para mover novamente o carro. A roda livre deste exemplo tem 100 kg e é composta por um cilindro vazado com um diâmetro interno de 25cm (0,25m) e um diâmetro externo de 40cm (0,40m), com velocidade angular máxima de 30.000 rpm. Em certa ocasião, o veículo se desloca a partir de sua garagem até um local a 24 km dela, com a roda livre girando com sua velocidade máxima. Será que existe energia suficiente para fazer o veículo voltar ao ponto de origem, supondo que, com velocidade de 64 km/h o atrito do ar e o de rolagem dissipam uma energia de 10 kW?

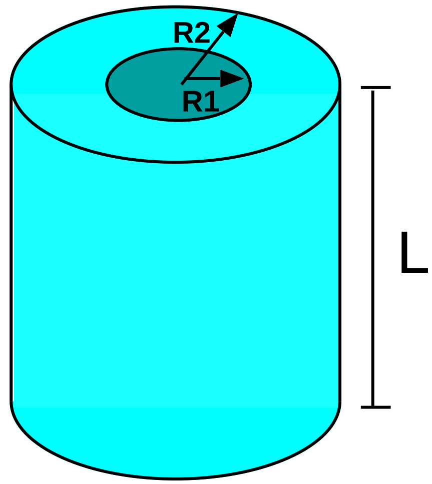


Resposta:

Para construir a solução, deve-se inicialmente descobrir quanta energia há disponível no mecanismo da roda livre. A energia cinética de rotação da roda livre pode ser calculada a partir do momento de inércia.

$$I = \int r^2 dm = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2) = 11,1 kg \cdot m^2$$

$$K = \frac{1}{2} I \cdot w^2$$



Resposta (continuação):

A velocidade angular, 30.000 rpm, corresponde a 3140 rad/s. Portanto, $K = (1/2).I.w^2 = 54{,}8$ MJ. Como a energia dissipada a 64 km/h é 10 kW, e o percurso vai requerer $\Delta t = \Delta x/v = (24km) / (64\ km/h) = 0{,}375h = 1.350s$, a energia total dissipada será $E_d = (1.350s).10\ kW = 13{,}5$ MJ.

$\Rightarrow$ Ou seja, há 54,8 MJ, energia mais do que suficiente para o percurso.

Segunda Lei de Newton para a Rotação

Quando uma força é aplicada a uma partícula obrigada a girar em torno de um eixo, pode-se definir o torque associado à força como

$$T = F_t \cdot r = m \cdot r \cdot a_t = m \cdot r \cdot \frac{(dv_t)}{(dt)} = m \cdot r^2 \cdot \frac{(dw)}{(dt)}$$

Como qualquer objeto se compõe de partículas, a Lei de Newton que se ajusta às características da rotação fornece

$$T_{res} = \sum_i T_{ext} = I \cdot a$$

Segunda Lei de Newton para a Rotação (continuação)

Exemplo:

Com a intenção de fazer exercícios em casa, você fixa uma bicicleta em uma base, de forma que a roda traseira possa girar livremente. Quando a bicicleta é pedalada, ela aplica uma força, por meio da corrente, de 18N para a catraca a uma distância de 7cm fora do eixo da roda. Considere que a roda é um arco ($I = M.R^2$) de raio R = 35cm e massa 2,4 kg. Qual será a velocidade angular da roda após 5s?

Segunda Lei de Newton para a Rotação (continuação)

Resposta:

A velocidade angular resulta da aceleração angular, que deve ser encontrada por meio da Segunda Lei de Newton para a Rotação. Como as forças são constantes, os torques também são constantes, e a equação para a aceleração angular se aplica.
Supõe-se aqui que a força é aplicada na direção da corrente, sendo perpendicular ao raio da catraca. Assim, tem-se:

$$w(t) = w_o + \alpha \cdot t = \alpha \cdot t;$$

O único torque em ação é o da força sobre a catraca, ou seja,
T = 18N.0,07m = 1,26 N.m.

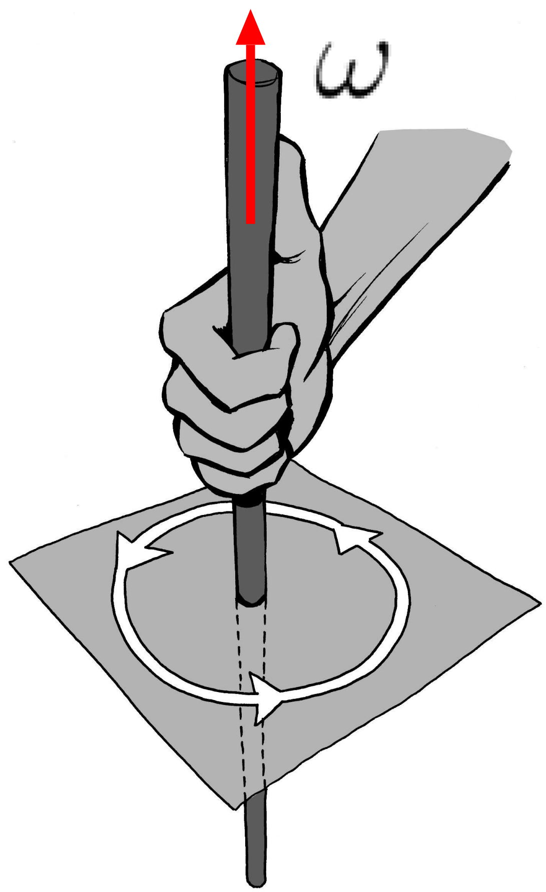
Sabendo que $T = I \cdot \alpha$, e usando que I = M.R^2, tem-se imediatamente

$$w = \frac{(126N.m)}{((2,4kg) \cdot (0,35m)^2)} \cdot 5s = 21,4rad/s$$

Conservação da Quantidade de Movimento Angular

A natureza vetorial da rotação

Ao descrever o sentido de rotação, a noção de velocidade angular positiva ou negativa tem que ser estendida: convenciona-se o uso da ***regra da mão direita*** como um mecanismo para determinar o **vetor velocidade angular**.



Conservação da Quantidade de Movimento Angular

A natureza vetorial da rotação (continuação)

O produto vetorial entre dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ é um vetor com módulo A.B.senθ, com o sentido obtido pela regra da mão direita, ou seja, posicionando a mão direita com os dedos ao longo de $\vec{A}$ girando os dedos para que se alinhem ao vetor $\vec{B}$ o sentido do produto vetorial é o indicado pelo polegar.

O produto vetorial

O torque é expresso matematicamente pelo produto vetorial (produto cruzado) entre os vetores $\vec{r}$ e $\vec{F}$ ou seja, $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$

Para descrever propriedades do produto vetorial, observe que a relação entre os vetores unitários nas direções x, y e z, respectivamente $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ e é tal que

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}\ ,\quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \ \text{ e } \ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

Algumas propriedades associadas ao produto vetorial são de que a mudança da ordem dos fatores troca o sinal do resultado, vale a distributividade na adição, vale a regra do produto para a derivada. Ou seja,

$$\vec{A} \times \vec{A} = 0 \ ,\quad \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C})$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \left(\vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}\right) + \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B}\right).$$

Torque e Quantidade de Movimento Angular

A quantidade de movimento angular é sempre definida em relação a um eixo. Assim, para o caso de uma partícula de massa m em movimento, tem-se

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Torque e Quantidade de Movimento Angular (continuação)

Exemplo:

Determine a quantidade de movimento angular em relação à origem para as seguintes situações:

(a) Um carro de 1.000 kg que se move em trajetória circular com raio de 20m e uma velocidade de 15 m/s. Neste caso, considere que o círculo está no plano xy, com centro na origem e que é observado de um ponto no trecho positivo do eixo x. Assim, o carro se desloca no sentido anti-horário.

(b) O mesmo carro se move no plano xy com velocidade -15m/s na direção x , sobre uma linha y = 20m, paralela ao eixo x.

(c) Um disco com 20m de raio no plano xy e massa 1.200 kg gira a 0,75 rad/s em relação a seu eixo, que coincide com o eixo z. Quando visto de um ponto sobre o trecho positivo do eixo z o disco gira no sentido anti-horário.

Torque e Quantidade de Movimento Angular (continuação)

Resposta:

(a) Os vetores $\vec{r}$ e $\vec{p}$ são perpendiculares e $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ será paralelo ao eixo z:

$$\vec{L} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v} = m \cdot |\vec{r}| \cdot |\vec{v}| \operatorname{sen}(90^o)\vec{k} =$$

$$= (1.200kg) \cdot (20m) \cdot (15m/s)\vec{k} =$$

$$= 3,6 \times 10^5 kg \cdot m^2/s \ \vec{k}$$

Resposta (continuação):

(b) Tem-se que expressar os vetores em termos dos unitários para proceder aos cálculos, na forma:

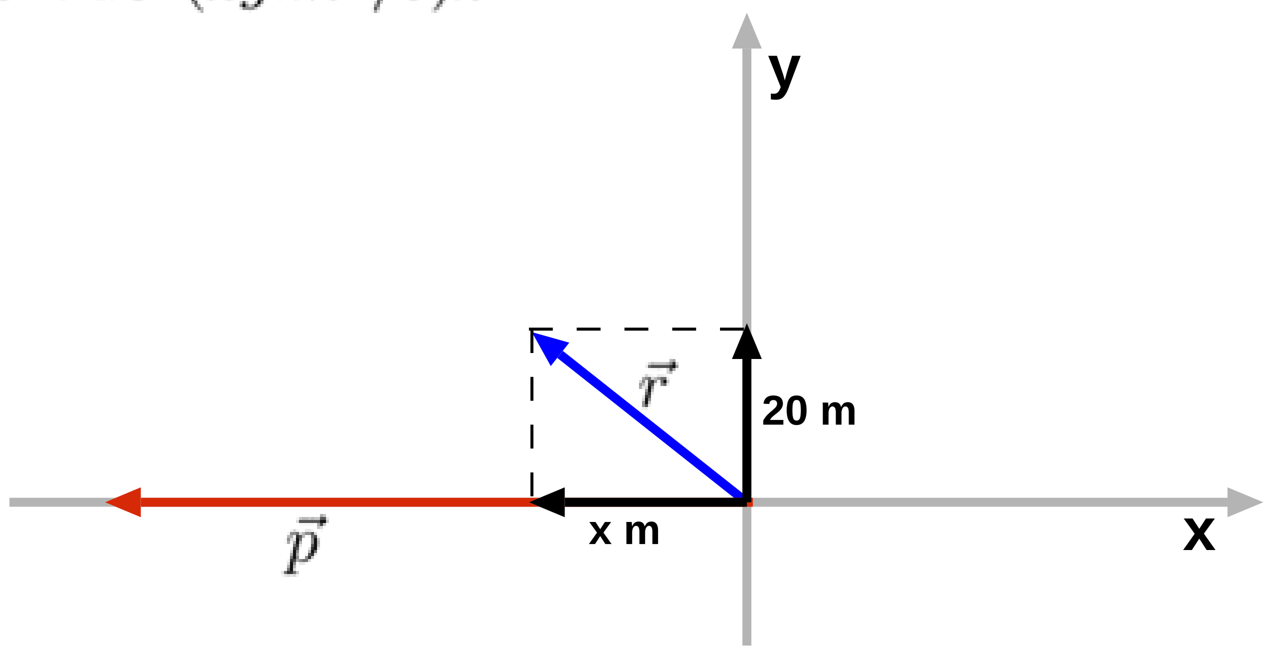
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = x\vec{i} + (20m)\vec{j}$$

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = -(1.200kg) \cdot (15m/s)\vec{i}$$

$$\vec{L} = \vec{r}\ x\ \vec{p} = (x\vec{i} + (20m)\vec{j})\ x\ (1.200kg)(-15m/s)\vec{i} =$$

$$= x \cdot (1.200kg)(-15m/s)\vec{i}\ x\ \vec{i} + (20m) \cdot (1.200kg)(15m/s)\vec{j}\ x\ (-\vec{i}) =$$

$$= 3,6 \times 10^5 (kg.m^2/s)\vec{k}$$



Resposta (continuação):

(c) Utilize, neste caso, a expressão que relaciona o momento angular ao momento de inércia e à velocidade angular, obtendo:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{w} = I \cdot w \cdot \vec{k} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^{2w}\vec{k} = \frac{1}{2} \cdot (1.200kg) \cdot (20m)^2 \cdot (0,75rad/s) \cdot \vec{k} =$$

$$= 1,8 \times 10^5 (kg.m^2/s)\vec{k}$$

Observações: A quantidade de movimento angular do carro que se move pela trajetória circular do item (a) é a mesma do carro seguindo em linha reta conforme o item (b). No item (c), a velocidade de um ponto na borda do disco é a mesma do carro em (a) e (b) (15 m/s).

Conservação da Quantidade de Movimento Angular

Se o torque externo atuante sobre um sistema é nulo, a quantidade de movimento angular total do sistema é constante. Ou seja,

$$\frac{(d\vec{L}_{sis})}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{L}_{sis} = constante$$

Exemplo:

Um disco está girando com velocidade angular inicial w_i em torno de um eixo sem atrito que passa por seu eixo de simetria. Seu momento de inércia em relação a este eixo é I_1 . Ele cai sobre um outro disco, inicialmente em repouso sobre o mesmo eixo, e cujo momento de inércia é I_2 . Devido ao atrito das superfícies em contato, os dois discos atingem uma velocidade angular w_i . Qual o valor de w_i ?

Exemplo (continuação)

Resposta:

Sem torques externos, a quantidade de momento angular se conserva. A velocidade angular do disco superior vai se reduzir, enquanto a do disco inferior aumenta, pelas forças de atrito dinâmico. Assim,

$$L_f = L_i \ , \ (I_1 + I_2) \cdot w_f = I_1 \cdot w_i \ \rightarrow \ w_f = \frac{I_1}{(I_1 + I_2)} \cdot w_i$$

Conservação da Quantidade de Movimento Angular

Exercício (conceitual):

Suponha que uma roda de bicicleta é montada sobre um eixo, em relação ao qual pode girar. Suponha que você segura a roda pelo eixo, sentado sobre uma cadeira giratória em repouso. Considere que a roda é mantida girando no sentido anti-horário (se vista de cima) e com o eixo na vertical. Se você inclinar a parte de cima do eixo da roda para a frente, qual o efeito esperado, devido à conservação de momento angular ?

Exercício (continuação):

Resposta:

O vetor quantidade de momento angular está apontando para cima. Quando visto em conjunto, o sistema que você compõe com a roda tem um momento angular que não pode se alterar se não houver torque externo. Portanto, se você forçar o eixo superior para a frente, a tentativa de reduzir a componente vertical do momento angular produzirá um giro da cadeira giratória no sentido de preservar o momento angular, ou seja, a cadeira gira para a sua esquerda (sentido anti-horário se olhado de cima).