Aula 7

Professor:

Mauricio Kischinhevsky

Oscilações, movimento ondulatório (Parte 1)

Conteúdo:

7.1 Movimentos oscilatórios

7.2 Ondas longitudinais e transversais

4.1 Movimentos oscilatórios

Oscilações: Movimento Harmônico Simples

Oscilações ocorrem quando um sistema é perturbado a partir de uma posição de equilíbrio estável. Como exemplos, relógios de pêndulo, cordas musicais, barcos oscilando por influência das ondas, oscilações das moléculas de ar em uma onda sonora, oscilações de correntes elétricas em dispositivos eletro-eletrônicos. As ondas, por sua vez, transportam energia e momento sem transportar matéria. Assim, por exemplo, as moléculas da água de um lago se movem para cima e para baixo, sem percorrerem o lago com as ondas que lá ocorrem.

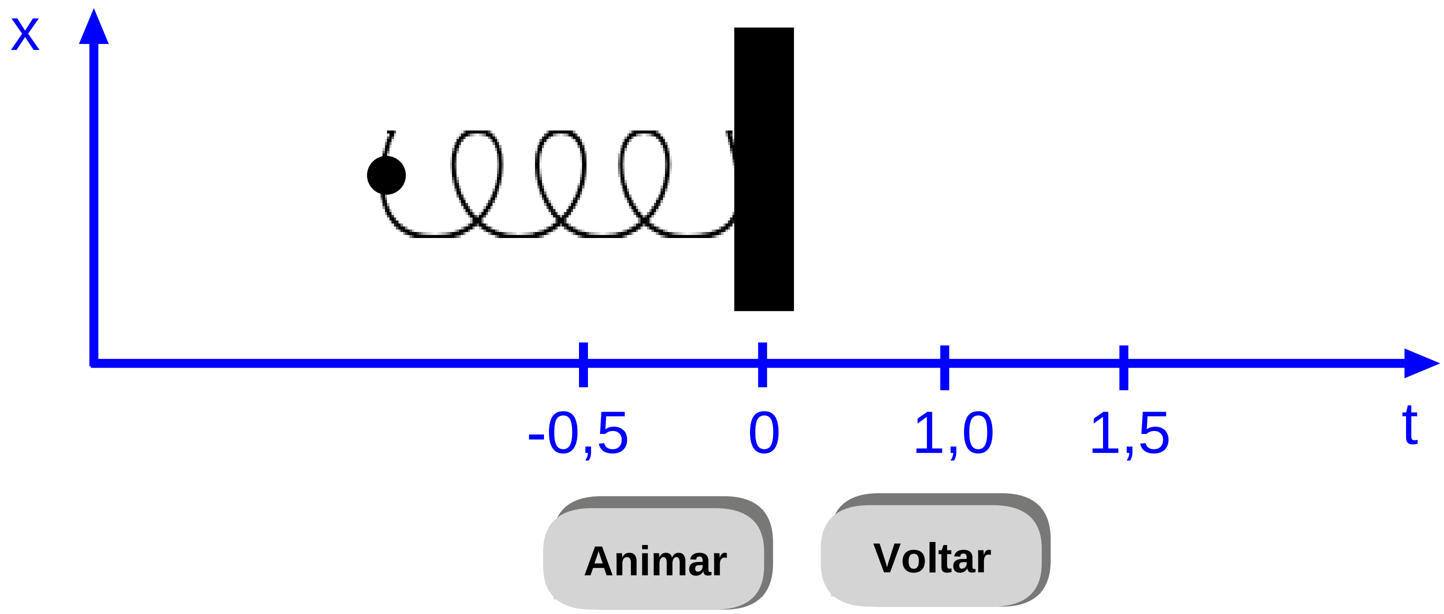
Um tipo de movimento oscilatório comum, básico e importante é aquele produzido por uma força restauradora, proporcional ao deslocamento em relação à posição de equilíbrio, aplicada a um sistema retirado da situação de equilíbrio. É o caso do sistema massa-mola simples, onde a força restauradora é dada pela Lei de Hooke (*k* é chamada rigidez da mola):

$$F_x = -k \cdot x \quad \rightarrow \quad -k \cdot x = m \cdot a_x$$

$$a_x = \frac{-k}{m} \cdot x, \quad \text{ou} \quad \frac{(d^2x)}{(dt^2)} = \frac{-k}{m} \cdot x$$

O sistema vai produzir a mesma configuração, ou seja, voltar ao ponto original, quando houver passado um certo tempo, denominado **período** (que tem unidade de tempo). O inverso do período é a freqüência, que representa o número de *ciclos por segundo* (a unidade tem o nome **hertz**, **hz**).

A posição da massa como função do tempo, no caso do sistema massa-mola, é de natureza oscilatória, correspondendo à solução da equação diferencial de segunda ordem.



$$x(t) = A \cdot \cos(w \cdot t + b), \quad \frac{d}{dt}x(t) = -w \cdot A \cdot \mathrm{sen}(w \cdot t + b)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -w^2 \cdot A \cdot \cos(w \cdot t + b) = -w^2 \cdot x$$

Os valores de *A*, denominada amplitude máxima, *w* é chamado freqüência angular (*2.π.f*), além de *b*, denominado fase, são constantes. Seus valores podem ser obtidos no contexto de um problema específico, vinculados às condições iniciais e de constituição dos materiais envolvidos. Assim, se você desloca a massa para o lado convencionado como positivo e inicia o movimento liberando o sistema a partir de então, isto define o instante inicial como zero, a amplitude máxima e a fase, que será nula.

Exemplo:

Considere um problema massa-mola cujas oscilações se iniciam a partir de uma colisão elástica de um objeto com a massa, que determina que a massa ganha, a partir da origem, velocidade $v_o > 0$. Determine os valores de *A* e *b*.

Exemplo (continuação):

Resposta:

Como *v(t)* é a derivada de *x(t)*,

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = -w \cdot A \cdot \mathrm{sen}(w \cdot t + b)$$

Como *w* é intrinsecamente positivo, isto determina que a maior velocidade que vai ser observada para o sistema é $v_o = -A.w > 0$. Ou seja, $A = -v_o / w$. Ademais a fase fica determinada como a que, no instante inicial (*t =0*), fornece *sen b =1*, ou seja, $b = \pi / 2$.

Exemplo:

Considere que você está em um barco que oscila para cima e para baixo. O deslocamento vertical do barco é dado por
$y(t) = (1{,}2m) \cdot \cos(t/(2s) + \pi/6)$.

(a) Calcule a amplitude, a frequência angular, a constante de fase, a freqüência e o período do movimento.

(b) Onde está o barco quando $t = 1s$?

(c) Calcule a velocidade e a aceleração como funções do tempo *t*.

(d) Calcule o valor inicial da posição, da velocidade e da aceleração do barco.

Resposta:

(a) Por inspeção da equação acima, e comparando com a equação do movimento harmônico simples, a amplitude *A = 1,2m*, a fase é *π / 6* , a freqüência angular é *1 / (2s)*, a freqüência, *f = w / (2.π) = 0,0796 Hz* e o período é de *T = 1 / f = 12,6s*.

(b) Basta fazer *t =1s* e obter *y(1) = (1,2m) . cos(0,5 + π / 6) = 0,624m*.

(c) Como *v(t)* é a derivada do deslocamento, *y(t)*, e *a(t)* é a derivada da velocidade (e, portanto, a derivada segunda da posição), temos (substituindo a seguir por *t = 0*):

$$v(t) = \frac{d}{dt}y(t) = -w \cdot A \cdot sen(w \cdot t + b) \qquad a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = -w^2 \cdot A \cdot \cos(w \cdot t + b)$$

$$\rightarrow \quad y(0) = (1,2m) \cdot \cos(0,5236) = 1,04m,$$

$$v(0) = -(0,6m/s) \cdot \mathrm{sen}(0,5236),$$

$$a(0) = -(0,3m/s^2) \cdot \cos(0,5236)$$

Energia no Movimento Harmônico Simples

Quando um objeto preso a uma mola descreve um movimento harmônico simples, a energia potencial e a energia cinética variam com o tempo. É facil verificar que, quando o deslocamento é máximo, a velocidade se anula. Por outro lado, quando o sistema passa pela situação de neutralidade da mola, a velocidade é máxima. Portanto, a energia total, que é a soma das energias cinética (K) e potencial (U), tem a forma

$$K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (A \cdot w)^2 \cdot \mathrm{sen}^2(w \cdot t + b) \quad \mathrm{e}$$

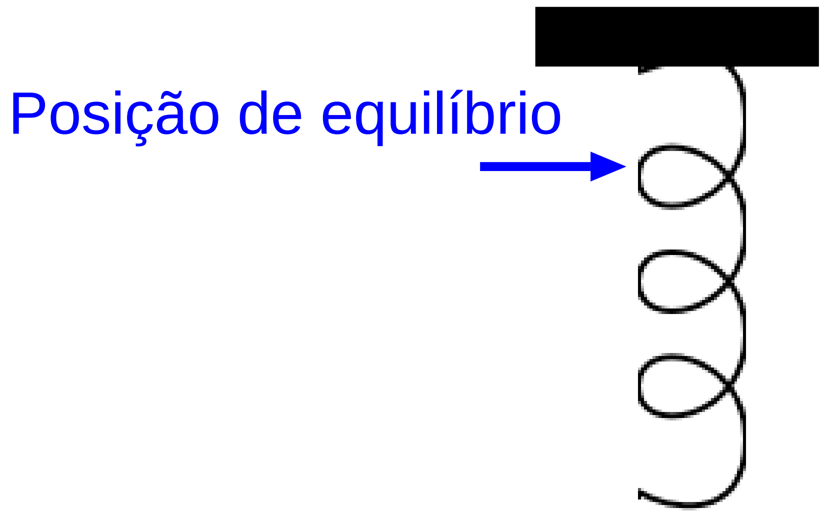
$$U = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \cdot \cos^2(w \cdot t + b)$$

$$\rightarrow \quad E_{total} = K + U = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \;, \;\; \mathrm{pois} \;\; w^2 = \frac{k}{m}.$$

Ou seja, a energia total do sistema massa-mala é proporcional à constante da mola e depende quadraticamente do deslocamento máximo em relação à posição de equilíbrio.

Exemplo (um corpo apoiado em um sistema massa-mola vertical):

Um bloco está em repouso sobre uma mola e oscila verticalmente com freqüência 4Hz e amplitude de 7cm. Uma pequena bolinha é posicionada sobre o bloco oscilante quando ele atinge o ponto mais baixo. Admita que a massa da bolinha é muito pequena e não interfere o movimento. A que distância d da posição de equilíbrio do bloco a bolinha perde contato com ele?



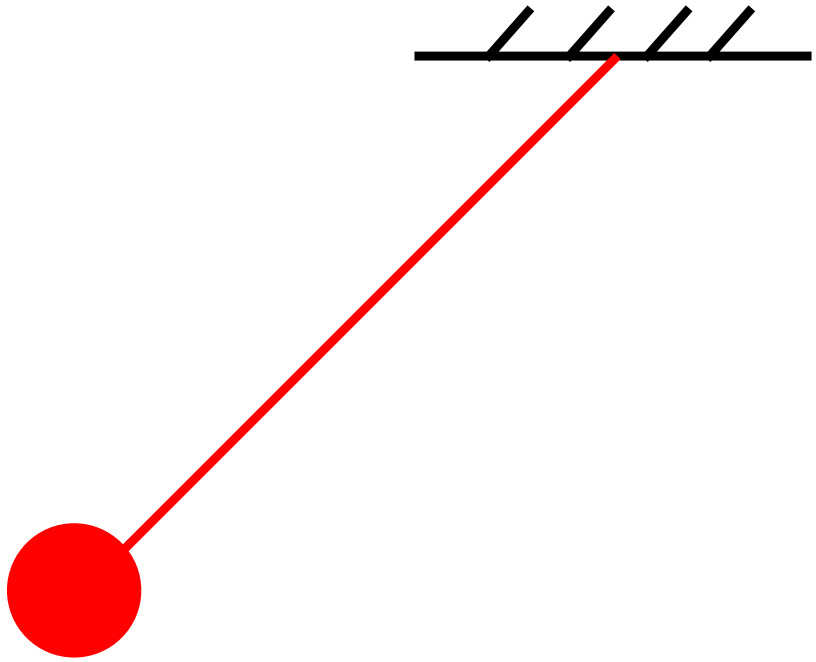
Animar Voltar

Exemplo (continuação):

Resposta:

As forças na bolinha são seu peso *m.g* e a força normal exercida pelo bloco para cima. O módulo da força normal varia com a posição do bloco e sua conseqüente aceleração. Como o bloco se move para cima, quando ele ultrapassar a posição de equilíbrio, a aceleração sobre o bloco é para baixo, assim como a aceleração da bolinha. Quando o bloco estiver acelerado com valor igual ao da gravidade, a normal sobre a bolinha se anula. A partir de então, se houver incremento no deslocamento do bloco para cima, a força restauradora o acelerará mais do que *g*, para baixo, e a bolinha perderá contato com o bloco. Algebricamente, como a aceleração do movimento harmônico simples é $a = -w^2.y$ (acima do ponto de equilíbrio a força é para baixo), igualando $a = g$, ambos direcionados para baixo, tem-se $g = (2.\pi.f)^2.y$, ou seja, $y = (9,8m/s2)/_{[2.\pi.(4Hz)]^2}$ ou, finalmente, ***y = 1,55cm***.

O pêndulo simples



Animar

Voltar

O pêndulo simples

O pêndulo simples consiste de uma haste de comprimento *L* e uma massa *m* fixada em sua extremidade. As forças que atuam, se o pêndulo é deslocado da posição de repouso vertical, são o peso da massa e a normal exercida pela haste, contrária à componente radial do peso. A componente tangencial do peso tende a restaurar a posição de equilíbrio. Usando as componentes tangenciais, a segunda Lei de Newton fornece (*s* é o comprimento do arco)

$$-m \cdot g \cdot \operatorname{sen}(a) = m \cdot \frac{(d^2 s)}{dt^2}, \text{ onde } \; s = L \cdot a, \; \rightarrow \; \frac{(d^2 s)}{dt^2} = L \cdot \frac{(d^2 a)}{dt^2}$$

$$\rightarrow \; \frac{(d^2 a)}{dt^2} = -\frac{g}{L}\operatorname{sen}(a).$$

O pêndulo simples (continuação)

Como *sen(a)* ~ *a*, para pequenos ângulos *a~0*, tem-se aproximadamente um movimento harmônico simples com período *T* e freqüência angular *w*:

$$\frac{(d^2a)}{dt^2} = -\frac{g}{L} \cdot a = -w^2 \cdot a, \;\; w^2 = \frac{g}{L} \;\; \text{e} \;\; T = \frac{1}{f}$$

O pêndulo simples

Exemplo:

Calcule o período de um pêndulo simples, de comprimento 2m.

Exemplo (continuação):

Resposta:

Para pequenas oscilações esta situação se assemelha ao uso de um balanço para uma criança pequena: como $w^2 = g / L$ e $T = 2.\pi / w$, $T = 2 . \pi . (L / g)^{1/2}$.

Portanto, $T = 2{,}8s$. Observe que, como o período não depende da massa, desprezado o atrito, a criança e o adulto podem ficar oscilando lado a lado em dois balanços de mesmo comprimento.

O pêndulo simples

Exercício (conceitual):

Quando a amplitude do movimento do pêndulo aumenta, seu movimento continua a ser periódico, mas não mais harmônico simples. O período tem a forma (T_o é o período para pequenas oscilações)

$$T = T_o \cdot \left[1 + \frac{1}{2^2}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{a_o}{2}\right) + \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \mathrm{sen}^4\left(\frac{a_o}{2}\right) + \dots\right]$$

Portanto, se um relógio de parede de pêndulo simples é calibrado para fornecer a hora corretamente com amplitude máxima de $a_o=10^o$, se a amplitude diminuir, o relógio atrasará ou adiantará?

Exercício (continuação):

Resposta:

Basta observar que o período para oscilações maiores é maior do que o de pequenas oscilações. Assim, ao se reduzirem as amplitudes, o relógio vai completar seus ciclos mais rápido, e vai fornecer horas adiantadas.

O pêndulo amortecido

Quando livre, um sistema massa-mola, ou um pêndulo simples, pára de oscilar porque a energia mecânica é dissipada por forças de atrito. Este é um movimento amortecido. Se o amortecimento é tal que, a partir da amplitude inicial, o sistema retorna à posição de equilíbrio imediatamente sem oscilar em torno desta, é denominado criticamente amortecido. Com amortecimentos menores (maiores) que esse, o sistema é subamortecido (superamortecido).

O pêndulo amortecido (continuação)

Exemplo:

O balanço de criança é, tipicamente, subamortecido. Um pêndulo imerso em um fluido viscoso é superamortecido.
Um modelo para a força de atrito é o de amortecimento linear, ou seja, proporcional à velocidade, o que permite escrever, a partir da segunda Lei de Newton para um sistema massa-mola amortecido com F_d ,

$$F = m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\, x = -k \cdot x + F_d = -k \cdot x - b \cdot \frac{d}{dt}\, x$$

A solução dessa equação pode ser obtida e, para um sistema subamortecido, escreve-se

$$x(t) = A_o \cdot e^{\frac{-b}{2 \cdot m} \cdot t} \cos(w' \cdot t + z),$$

$$w' = w_o \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2mw_o}\right)^2} \;\rightarrow\; b_c = 2mw_o$$

Oscilações forçadas e ressonância.

Quando livre para oscilar, sem amortecimento, um sistema oscila na sua frequência natural, w. Quando amortecido, o sistema precisa de acréscimos de energia para manter suas oscilações. A isto se chama sistema forçado. Exemplo: balanço, cadeira de balanço, rede de balanço.

Quando a freqüência dos impulsos coincide com a do sistema, o aproveitamento da energia pelo sistema é máximo. Em projetos de Engenharia Civil, quer-se, por exemplo, que a entrada de energia proveniente dos ventos nos sistemas (pontes ou edifícios) não seja muito bem incorporada ao sistema, porque isso aumentaria as oscilações das estruturas.

Clique no botão abaixo para ver o vídeo da Ponte de Tacoma.