Gabarito da 1a Avaliação à Distância 2/2012

21/08/2012

Questão 1

(a) (1,0 ponto) Considere uma viagem a ser feita com a velocidade média de $80Km/h$. Inicialmente, devido ao tráfego, o primeiro trecho, de $20Km$, foi percorrido a $60km/h$.
(i) Com qual velocidade deve ser percorrido o segundo trecho, de $40Km$, para que a velocidade média seja de $80Km/h$?
(ii) Diferentemente da situação do item (i), considere que o condutor consegue manter a velocidade de $80Km/h$, após percorrer o primeiro trecho a $60Km/h$. Neste caso, determine a velocidade média da viagem toda.

(b) (0,5 ponto) Qual o trabalho realizado por uma força dada em Newtons por $\vec{F} = (3x\,\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})$, x onde está em metros, que é exercida sobre uma partícula enquanto ela se move da posição, em metros, $\vec{r}_i = 1\,\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$, para a posição (em metros) $\vec{r}_f = -5\,\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$. Nas expresões anteriores, $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ são os vetores unitários nas direções x e y, respectivamente.

(c) (0,5 ponto) Um bloco de $3Kg$ repousa sobre uma estante horizontal. Ele é fixado a um bloco de $2Kg$ através de um cabo leve, conforme a figura. (i) Qual é o menor coeficiente de atrito estático de modo que os blocos permaneçam em repouso? (ii) Se o coeficiente de atrito estático for menor do que o obtido no item (i) e se o coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco e a estante é de 0,35, determine o tempo gasto para o bloco de $2Kg$ cair por 2m até o piso se o sistema parte do repouso.

Gabarito

Item a

Dados

- Velocidade média do percurso: $V_m = 80\,Km/h$
- Distância percorrida no primeiro trecho $\Delta S_1 = 20\,Km$

- Distância percorrida no segundo trecho $\Delta S_2 = 40\,Km$
- Velocidade média do primeiro trecho $V_{m1} = 60\,Km/h$

(i)

O percurso total percorrido é de

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 60\,Km. \tag{1}$$

Como também conhecemos a velocidade média do percurso todo, podemos determinar o tempo total transcorrido no percurso,

$$\Delta t = \frac{\Delta S}{V_m} = \frac{3}{4}\,h, \tag{2}$$

e o tempo da primeira parte do percurso,

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta S_1}{V_{m1}} = \frac{1}{3}\,h. \tag{3}$$

Logo, a segunda parte do percurso foi percorrida em

$$\Delta t_2 = \Delta t - \Delta t_1 = \frac{5}{12}\,h. \tag{4}$$

Agora é possível determinar a velocidade média do segundo trecho,

$$V_{m2} = \frac{\Delta S_2}{\Delta t_2} = 96\,Km/h. \tag{5}$$

(ii)

Dado: $V_{m2} = 80\,Km/h$
O tempo do primeiro trecho continua o mesmo. Porém o tempo do segundo trecho é maior, pois a velocidade média no segundo trecho é menor. Assim,

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta S_2}{V_{m2}} = \frac{1}{2}\,h. \tag{6}$$

Então o tempo total do percurso passa a ser

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{5}{6}\,h. \tag{7}$$

Podemos agora calcular a nova velocidade média do percurso

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = 72\,Km/h \tag{8}$$

Item b

Temos uma força que depende da posição $\vec{F} = (3x\,\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})$N e o vetor deslocamento infinitesimal é $d\vec{r} = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath}$. Como temos as posições inicial, $\vec{r}_i = 1\,\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$, e final, $\vec{r}_f = -5\,\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$, basta aplicarmos a definição de trabalho,

$$\begin{aligned} W &= \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^{-5} 3x\,dx + \int_4^{-2} 2dy = 3\,\frac{x^2}{2}\bigg|_1^{-5} + 2\,y|_4^{-2} \\ &= 24\,N.m \end{aligned} \tag{9}$$

Item c

Dados:

- Aceleração da gravidade $g = 10\,m/s^2$.
- $m_1 = 3\,Kg$ e $m_2 = 2\,Kg$

Caso estático
Na vertical:
Forças que agem no bloco 1:

$$\begin{aligned} N_1 - P_1 &= 0 \\ N_1 = P_1 &= m_1\,.\,g = 30\,N. \end{aligned} \tag{10}$$

Forças que agem no bloco 2:

$$\begin{aligned} T - P_2 &= 0 \\ T &= m_2\,.\,g = 20\,N \end{aligned} \tag{11}$$

Na horizontal:
Forças que agem no bloco 1:

$$\begin{aligned} T - F_{at} &= 0 \\ F_{at} &= N_1\mu_e = T = 20 \\ \mu_e &= 2/3 \end{aligned} \tag{12}$$

Caso dinâmico
Como o sitema se move junto, ambos os corpos adquirem a mesma aceleração. Assim temos que resolver:

$$\begin{aligned} T - F_{at} &= m_1\,.\,a \\ P_2 - T &= m_2\,.\,a \end{aligned} \tag{13}$$

para a. O que nos dá,

$$a = \frac{P_2 - F_{at}}{m_1 + m_2}. \tag{14}$$

Agora, utilizamos a equação horária do movimento acelerado,

$$\Delta S = v_0 t + a\frac{t^2}{2}, \tag{15}$$

para determinar o tempo. Utilizando a aceleração obtida na Eq.(14) (e lembrando que o sistema parte do repouso, $v_0 = 0$) podemos obter o tempo de queda do bloco 2:

$$\begin{aligned} \Delta S &= a\frac{t^2}{2} \\ t &= \sqrt{\frac{4(m_1+m_2)}{P_2 - N_1\mu_c}} \\ t &= 1,4\,s \end{aligned} \tag{16}$$

Questão 2

(a) (0,5 ponto) Duas bolas de boliche se movem com a mesma velocidade; porém, uma desliza sobre uma pista, enquanto a outra rola pela pista. Qual das bolas possui maior energia cinética? Explique.
(b) (1,5 pontos) Duas bolas de boliche aproximam-se, ambas em movimento sobre um trilho. A primeira, de massa m_1, se desloca com velocidade v_1 e a segunda, de massa m_2, com v_2. Qual a velocidade do centro de massa? Qual a velocidade do centro de massa do sistema após as bolas colidirem elasticamente? Qual é a quantidade de movimento do sistema antes e qual passa a ser após a colisão? Por quê?

Gabarito

Item a

Ambas possuem a mesma energia cinética translacional. Contudo, a que rola possue maior energia cinética rotacional. Portanto, a que rola possuí maior energia cinética.

Item b

Adotando o referencial do laboraório como referência, a velocidade do centro de massa é dada por

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1\vec{v}_1 \; + \; m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}. \tag{17}$$

Como não há a ação de forças externas, tanto a velocidade quanto o momento (quantidade de movimento) do centro de massa se conservam. Logo, o momento antes e depois da colisão é:

$$\vec{P}_{antes} = \vec{P}_{depois} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \tag{18}$$

Questão 3

(2.0 pontos) Uma arma de ar comprimido atira dez chumbinhos de 2g por segundo com uma velocidade de 500m/s, que são detidos por uma parede rígida. (a) Qual é o momento linear de cada chumbinho?(b) Qual é a energia cinética de cada um? (c) Qual é a força média exercida pelo fluxo de chumbinho sobre a parede? (d) Se cada chumbinho permanecer em contato com a parede por 0,6ms, qual será a força média exercida sobre a parede por cada um deles enquanto estiver em contato? (e) Por que esta força é ta˜o diferente da força em (c)?

Gabarito

Antes de começarmos a resolver a questão vamos separar os dados que nos foram fornecidos no enunciado:

Taxa de disparo da arma: $\tau = 10\,\text{balas}/s$

Massa do chumbinho: $m_c = 2g = 2\,\times\,10^{-3}\,Kg$

Velocidade da bala: $v_c = 500\,m/s$

Item a

Basta aplicarmos a definição de momento linear:

$$p_c = m_c\,.\,v_c = 2\,.\,10^{-3}\,.\,5\,.\,10^2 = 1\,\text{Kgm/s} \tag{19}$$

Item b

Basta aplicarmos a definição de energia cinética:

$$E_c = \frac{1}{2} m\,v^2 = 250\,J \tag{20}$$

Item c

Como cada chumbinho tranfere para parede um momento $p_c = 1\,\text{Kgm/s}$, a força média será dada pela quantidade de momento transferido para parede por unidade de tempo. Como temos um fluxo $\tau = 10\,\text{balas}/s$, a força média será dada pelo produto entre o fluxo de balas de chumbinho pela quantidade de momento transferido por cada chumbinho,

$$\overline{F} = p_c\,.\,\tau = 10\,N \tag{21}$$

Item d

Como a parede para totalmente o chumbinho em um intervalo de tempo de $0,6\text{ms} = 6\,.10^{-4}\,s$, a força média pode ser obtida através da aplicação do teorema do impulso e momento linear:

$$
\begin{aligned}
I &= F\,.\Delta t = \Delta p \\
F &= \frac{p_c}{\Delta t} = \frac{1}{6\,.\,10^{-4}} = 1666,6\,N
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Item e

A diferença se deve ao fato de a força média no item c ser referente a um conjunto de chumbinhos em um intervalo de tempo de 1s já a força do item d refere-se ao momento que cada chumbinho transfere para o alvo num intervalo de tempo de 0,6 ms.

Questão 4

(2.0 pontos) Você está em seu carro, cuja massa é de 1200 kg, movendo-se para leste em direção a um cruzamento quando um caminhão de 3000 kg, movendo- se para o norte em direção ao mesmo cruzamento, colide com seu carro, conforme mostrado na figura abaixo. Seu carro e o caminhão mantêm-se juntos após o impacto. O caminhoneiro reclama, argumentando que você foi o culpado por estar dirigindo a alta velocidade. Você procura por evidências para derrubar o argumento do caminhoneiro. Primeiro, na pista não haviam marcas de derrapagem, indicando que nem você nem o caminhoneiro perceberam a iminência do acidente freando bruscamente; segundo, havia na pista em que voceˆ dirigia uma placa sinalizadora indicando "Velocidade Limite de 60 km/h"; terceiro, o velocímetro do caminhão foi danificado, com o ponteiro indicando uma velocidade de 50 km/h; e quarto, os veículos amassados derraparam, apo´s o impacto, e pararam a um ângulo não menor do que 59º na direção nordeste. Essas evidências sustentam ou derrubam o argumento de que você estava se movendo a alta velocidade?

Gabarito

As evidências sustentam a versão do caminhoneiro (nunca é bom discutir com um caminhoneiro). Vamos ver o porquê:

Dados:

I - Massa do carro: $m_c = 1200$ Kg.

II - Massa do caminhão: $m_t = 3000$ Kg.

III - Velocidade do caminhão antes da colisão: $\vec{v}_{0t} = 50\,\text{Km/h}\ \hat{\text{y}}$.

IV - Ângulo após a colisão: $\theta = 60^{\text{o}}$ (vamos considerar este valor por simplicidade).

Para resolver este problema (assim como qualquer outro problema de colisões) vamos utilizar a conservação do momento linear (ou quantidade de movimento).

$$\vec{p}_{0c} + \vec{p}_{0t} = \vec{p}_{fct} \tag{23}$$

Agora vamos decompor as componentes do momento nos eixos y (Norte) e x (Leste).

Em y:

$$\begin{aligned} p^y_{0c} + p^y_{0t} &= p^y_{fct} \\ m_t \, . \, v_{0t} &= (m_t + m_c) v_{fct} \, . \, \sin(60^{\text{o}}), \quad \text{pois} \;\; p^y_{0c} = 0 \\ v_{fct} &= \frac{m_t}{m_t + m_c} . \frac{v_{0t}}{\sqrt{3}/2} = \frac{3000}{4200} . \frac{50}{\sqrt{3}/2} \approx 41,2 \, \text{Km/h} \end{aligned} \tag{24}$$

Agora que temos a velocidade do sistema carro+caminhão após a colisão (v_{fct}), podemos determinar qual a velocidade do carro antes da colisão.

Em x:

$$\begin{aligned} p^x_{0c} + p^x_{0t} &= p^x_{fct} \\ m_c \, . \, v_{0c} &= (m_t + m_c) v_{fct} \, . \, \cos(60^{\text{o}}), \quad \text{pois} \;\; p^x_{0t} = 0 \\ v_{0c} &= \frac{m_c + m_t}{m_c} v_{fct} \cos(60^{\text{o}}) \\ v_{0c} &= \frac{4200}{1200} \, . \, 41,2 \, . \, 1/2 \approx 72,2 \, \text{Km/h} \end{aligned} \tag{25}$$

Ou seja, o motorista do carro estava acima do limite de velocidade da via que é de 60 Km/h.

Questão 5

(a) (1.0 ponto) Quando uma massa m1 é suspensa de uma determinada mola A e a massa m2 é suspensa da mola B, as molas são distendidas da mesma distância. Se os sistemas forem colocados em movimento harmônico simples vertical com a mesma amplitude, qual deles terá mais energia?
(b) (1.0 ponto) Que alterações você pode fazer em um oscilador harmônico para dobrar a velocidade máxima da massa oscilante?

Gabarito

Item a:

A posição como função do tempo no M.H.S. (movimento harmônico simples) é dada por:

$$x(t) = x_0 \, . \, \cos(\omega . t + \phi) \tag{26}$$

onde x_0 é a amplitude do movimento, ω é a frequência ângular e ϕ uma fase. Como a fase não afeta as características de amplitude e frequência, servindo para estipular condições iniciais esta será, por simplicidade, considerada nula daqui por diante.

A frequência angular depende da massa do objeto oscilante e da constante elástica da mola,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{27}$$

Assim, a posição como função do tempo de cada um dos corpos pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 \,.\, \cos(\omega_1.t) && (28) \\ x_2(t) &= x_0 \,.\, \cos(\omega_2.t) && (29) \end{aligned}$$

Para determinarmos a energia de cada um, precisaremos saber também como a velocidade de cada um varia com o tempo. Para tal, usaremos a definição de velocidade:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \frac{dx_1(t)}{dt} = -x_0 \,.\, \omega_1 \,.\, \sin(\omega_1.t) && (30) \\ v_2(t) &= \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_0 \,.\, \omega_2 \,.\, \sin(\omega_2.t) && (31) \end{aligned}$$

Agora, vamos utilizar as definições de energia potencial elástica e energia cinética para determinar a energia mecânica total de cada um:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2}k_1 x_1^2(t) = \frac{1}{2}k_1 \,.\, x_0^2 \,.\, \cos^2(\omega_1.t) && (32) \\ E_{c1} &= \frac{1}{2}m_1 \,.\, v_1^2(t) = \frac{1}{2}m_1.x_0^2 \,.\, \omega_1^2 \,.\, \sin^2(\omega_1.t) \\ E_{c1} &= \frac{1}{2}k_1 \,.\, x_0^2 \,.\, \sin^2(\omega_1.t) && (33) \\ & && (34) \end{aligned}$$

A energia mecânica total é obtida pela soma da energia cinética e potencial:

$$E = E_{c1} + U_1 = \frac{1}{2}k_1 \,.\, x_0^2 \,.\, \cos^2(\omega_1.t) + \frac{1}{2}k_1 \,.\, x_0^2 \,.\, \sin^2(\omega_1.t) \tag{35}$$

$$E_1 = \frac{1}{2}k_1 \,.\, x_0^2. \tag{36}$$

O mesmo vale para o bloco 2.

$$E_2 = \frac{1}{2}k_2 \,.\, x_0^2. \tag{37}$$

Pois ambos possuem a mesma amplitude. Assim, terá mais energia o corpo que estiver oscilando com a mola de maior coeficiente elástico k.

Item b:

Para responder esta pergunta, devemos analisar a função que descreve a velocidade no M.H.S.,

$$v(t) = -x_0 \, . \, \omega \, . \, \sin(\omega_1 . t), \tag{38}$$

que possui seu valor máximo sempre que $\sin(\omega_1 . t) = \pm 1$. Então, se quisermos dobrar a velocidade máxima,

$$v_{\text{máx}} = x_0 \, . \, \omega = x_0 \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{39}$$

podemos dobrar a distensão da mola ou trocar a mola por outra que possua um coeficiente elástico quatro vezes maior ou substituir a massa por uma massa que pese um quarto da primeira.