Aula 9

Professor:

Mauricio Kischinhevsky

Oscilações, movimento ondulatório (Parte 3)

Conteúdo:

Ondas longitudinais e transversais

Ondas transversais e longitudinais.

Superposição de ondas

Quando duas ou mais ondas se superpõem no espaço, suas perturbações individuais (representadas matematicamente pelas suas respectivas equações) são superpostas e se somam algebricamente, criando uma onda resultante. Este é o **Princípio da Superposição**. A superposição de ondas harmônicas de mesma frequência produz ondas que se sustentam no espaço. Este fenômeno é denominado **interferência**. Interferência e difração são fenômenos que distinguem o que chamamos natureza ondulatória da natureza corpuscular. No início do século XIX (experimento de Young) a natureza ondulatória da luz foi evidenciada. No início do século XX evidenciou-se, por meio de experimentos de interferência, o comportamento ondulatório também de elétrons e outros materiais, com repercussão no entendimento da Física Quântica.

Ondas transversais e longitudinais.

Superposição de ondas

Fisicamente, quando existem dois pulsos de onda em uma corda, a perturbação resultante na corda é a soma das perturbações individuais.

Exemplo:

Duas ondas sobre uma corda, caminhando em sentidos diferentes, interagem na forma a seguir

Observe que a superposição ocorre em cada ponto da corda, que pode, então, se encontrar na altura nula, 1 (altura do pulso que migra da esquerda para a direita), 2 (altura do pulso que migra da direita para a esquerda) ou 3 (altura do pulso que migra da esquerda para a direita superposto com o pulso que migra da direita para a esquerda).

Superposição de ondas

Matematicamente, quando existem duas ondas em uma corda, uma expressa por $y_1(x,t)$ e outra po $y_2(x,t)$ a linearidade da equação da onda, para pequenos deslocamentos transversais, garante que a combinação das equações, ou seja,

$$y_3(x,t) = C_1 \cdot y_1(x,t) + C_2 \cdot y_2(x,t)$$

também é solução, sendo C_1 e C_2 constantes quaiquer.

Efetivamente, como a equação da onda tem a forma abaixo,

$$\frac{\partial^2}{(\partial\ x^2)} y(x,t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{(\partial\ t^2)} y(x,t)$$

Superposição de ondas

A aplicação da equação da onda a $y_3(x,t)$, supondo qu $y_1(x,t)$ e $y_2(x,t)$ são soluções da equação da onda, fornece

$$\frac{\partial^2}{(\partial\ x^2)} y_3(x,t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{(\partial\ t^2)} y_3(x,t)$$

$$\frac{\partial^2}{(\partial\ x^2)} (C_1.y_1(x,t) + C_2.y_2(x,t)) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{(\partial\ t^2)} (C_1.y_1(x,t) + C_2.y_2(x,t))$$

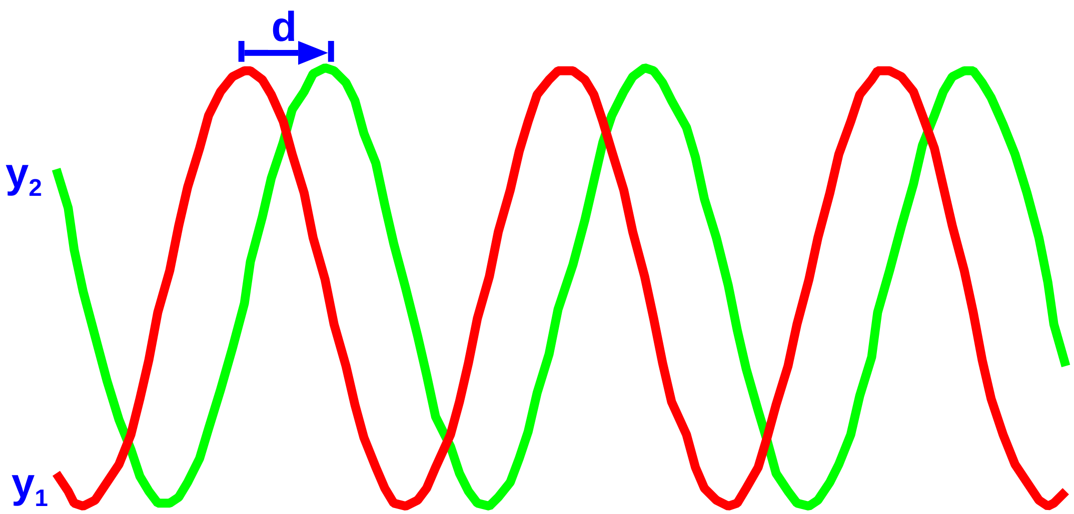
$$C_1 \frac{\partial^2}{(\partial\ x^2)} y_1(x,t) + C_2 \frac{\partial^2}{(\partial\ x^2)} y_2(x,t) = C_1 \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{(\partial\ t^2)} y_1(x,t) + C_2 \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{(\partial\ t^2)} y_2(x,t)$$

Isto se evidencia como verdadeiro porque, por hipótese,

$$\frac{\partial^2}{(\partial\ x^2)} y_1(x,t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{(\partial\ t^2)} y_1(x,t)$$ e $$\frac{\partial^2}{(\partial\ x^2)} y_2(x,t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{(\partial\ t^2)} y_2(x,t)$$

Interferência de ondas harmônicas

O resultado da superposição de duas ondas harmônicas de mesma freqüência depende da diferença de fase entre as ondas.



Na figura acima, as duas ondas de mesmo comprimento de onda, y_1 e y_2 , se deslocam para a direita com a mesma velocidade. Sendo as respectivas equações de onda expressas por

$$y_1(x,t) = A \cdot sen(k \cdot x - w \cdot t) \qquad y_2(x,t) = A \cdot sen(k \cdot x - w \cdot t - b)$$

Interferência de ondas harmônicas

A equação da superposição das ondas, ou seja, somadas, é

$$y_1(x,t) + y_2(x,t) = A \cdot sen(k \cdot x - w \cdot t) + A \cdot sen(k \cdot x - w \cdot t - b),$$

Com auxílio da identidade trigonométrica

$$sen(\theta_1) + sen(\theta_2) = 2 \cdot cos\left[\frac{(\theta_1 - \theta_2)}{2}\right] \cdot sen\left[\frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2}\right],$$

com $\theta_1 = k \cdot x - w \cdot t$ e $\theta_2 = \theta_1 + b$, obtém-se

$$y_1(x,t) + y_2(x,t) = \left[2 \cdot A \cdot cos\left(\frac{b}{2}\right)\right] \cdot sen\left(\frac{k \cdot x - w \cdot t - b}{2}\right),$$

Evidentemente, se a defasagem for $b = \pi = 180^o$, ocorre uma <u>interferência destrutiva</u>, correspondendo à anulação da amplitude da onda resultante; quando *b*=0, ou $2\pi = 360^o$, ocorrerá <u>interferência construtiva</u>, com a onda resultante exibindo amplitude **2.A**, maior que a inicial de cada onda (diz-se que estão <u>em fase</u>).

Exercício:

Considere que duas ondas com freqüências, comprimentos de onda e amplitudes iguais estão se deslocando no mesmo sentido.

(a) Se elas estiverem defasadas de $\pi/2$ e cada uma tiver amplitude de 4cm, qual a amplitude da onda resultante? **(b)** Para qual diferença de fase b a amplitude resultante será igual a 4cm?

Exercício (continuação):

Resposta:

Conforme a equação da onda resultante da superposição, a amplitude A_c tem a forma

$$A_c = \left[2 \cdot A \cdot cos\left(\frac{b}{2}\right)\right]$$

(a) Assim, para $b = \pi/2 = 90^o$, a amplitude resultante será

$A_c = 2 \times 4cm \times cos(\pi/4).$

Ou seja, 5,66cm.

(b) Sabendo que $A_c = 4cm$ $cos(b/2) = A_c/(2 \cdot A) = 1/2$ e, portanto, $b = 120^o$.

Diferença de fase devida à diferença de percurso

Se houver duas fontes de onda oscilando em fase nos pontos S_1 e S_2 , e um observador estiver em P_1, a localização do observador pode determinar que as ondas cheguem a ele em fase ou for a de fase, com produção de interferência que pode também ser destrutiva.

Exemplo:

Duas fontes sonoras oscilam em fase. Para um ponto que dista 5m de uma das fontes e 5,17m da outra, a amplitude do som de cada fonte, separadamente, é p_o. Calcule a amplitude da onda resultante se a freqüência da onda sonora for de (a)1.000Hz; (b) 2.000Hz; (c) 500Hz (considere V_{som} = 340m/s).

Exemplo (continuação):

Resposta:

A amplitude da onda resultante da superposição é da forma

$$A_c = [2 \cdot p_0 \cdot cos(b/2)]$$

Como existe uma diferença de distânci Δx do observador em relação às fontes, a fase será nula s Δx for nulo ou contiver exatamente um comprimento de onda em questão, com todos os casos intermediários a partir disto.

Exemplo (continuação):

Assim, pode-se escrever que a fase se obtém co $b = k \cdot \Delta x = 2 \cdot \pi \cdot \Delta x/\lambda$.
Portanto, tem-se que determinar o comprimento de cada onda.

(a) *f* =1.000Hz determina que o comprimento de onda é
$\lambda = V_{som}/f = (340/1000)m = 0,34m$ e, as $b = 2 \cdot \pi \cdot \Delta x/\lambda = \pi$;
Daí, $A_c = 2 \cdot p_0 \cdot cos(\pi/2) = 0$.

(b) Analogamente, *f* = 2.000Hz determina
$\lambda = V_{som}/f = (340/2000)m = 0,17$; Ou s $A_c = 2 \cdot p_0 \cdot cos(\pi) = -2 \cdot p_0$
(Obs.: Isto equivale a uma fase d 180^o ou inverter a maneira como a onda é sentida-multiplicar por -1).

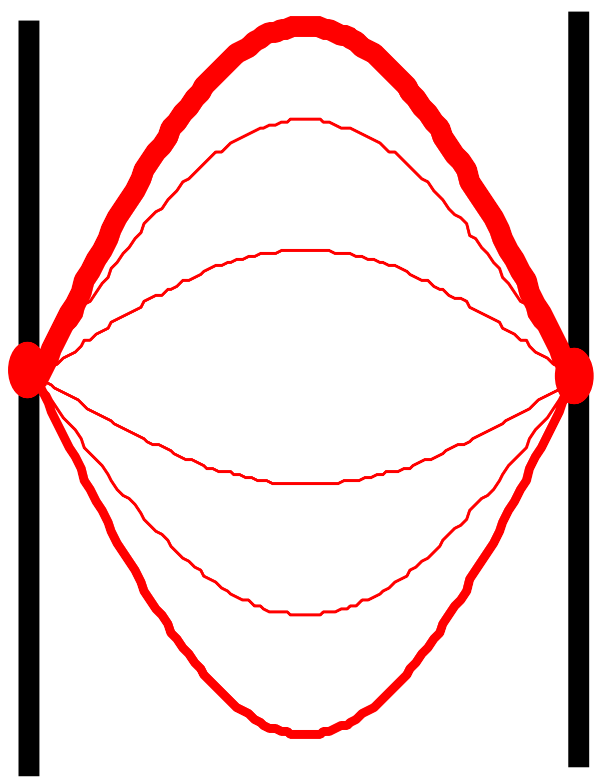
(c) De forma similar, *f* = 500Hz determi $\lambda = V_{som}/f = (340/500)m = 0,68m$
Ou seja, $A_c = 2 \cdot p_0 \cdot cos(\pi/4) = \sqrt{2} \cdot p_0$.

Ondas estacionárias

Se o meio físico no qual as ondas se propagam está confinado no espaço, como um tubo de um órgão ou cordas de piano ou, ainda, as ondas de um laser, essas ondas são refletidas nas extremidades e se deslocam em sentidos opostos. Essas ondas se superpõem e, em certas frequências, produzem estados estacionários, ou ondas estacionárias, em que as oscilações persistem no meio físico.

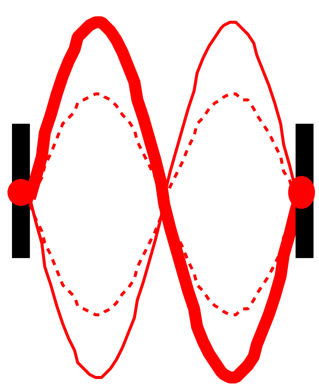
Exemplo:

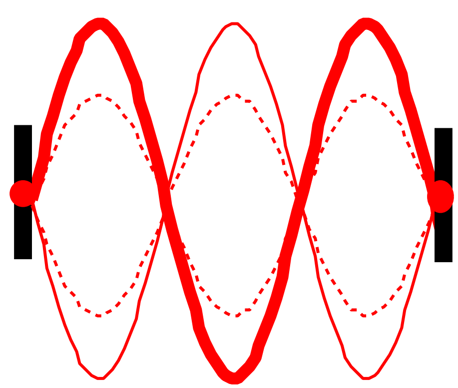
Considere uma corda de comprimento L fixada em suas duas extremidades (figura a seguir). Se ela for forçada a oscilar, alguns comprimentos de onda produzem estados estacionários. O de maior comprimento de onda com este efeito tem $\lambda = 2.L$, denominado **primeiro harmônico** (ou **modo fundamental**) .

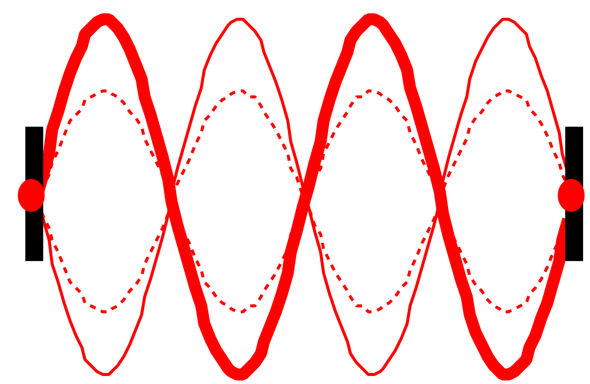


Exemplo (continuação):

A seguir, um estado correspondente a $\lambda = L$ (igual a 2.L/2) também conseguiria se manter estacionariamente (**segundo harmônico**); o próximo comprimento de onda que se "encaixa" no domínio é correspondente a $\lambda = 3.L/2$ (**terceiro harmônico**), e assim por diante. Os pontos da corda cuja amplitude permanece nula são os **nós**, os correspondentes a pontos que atingem amplitude máxima são os **antinós**.







Ondas Estacionárias

Como a **condição de onda estacionária** é da forma $L = n \cdot \lambda_n / 2$, $n=1,2,3,...$, têm-se as **freqüências de ressonância**, f_n, correspondentes ao problema da corda com as duas extremidades fixas a partir da velocidade na corda como $f_n = n \cdot v / (2.L) = n \cdot f_1$, para $n = 1, 2, 3, ...$

($f_1 = v / (2.L)$ é a **freqüência fundamental**). Essas são as chamadas **freqüências naturais** da corda, cuja seqüência de valores se denomina **série harmônica**.

Exemplo:

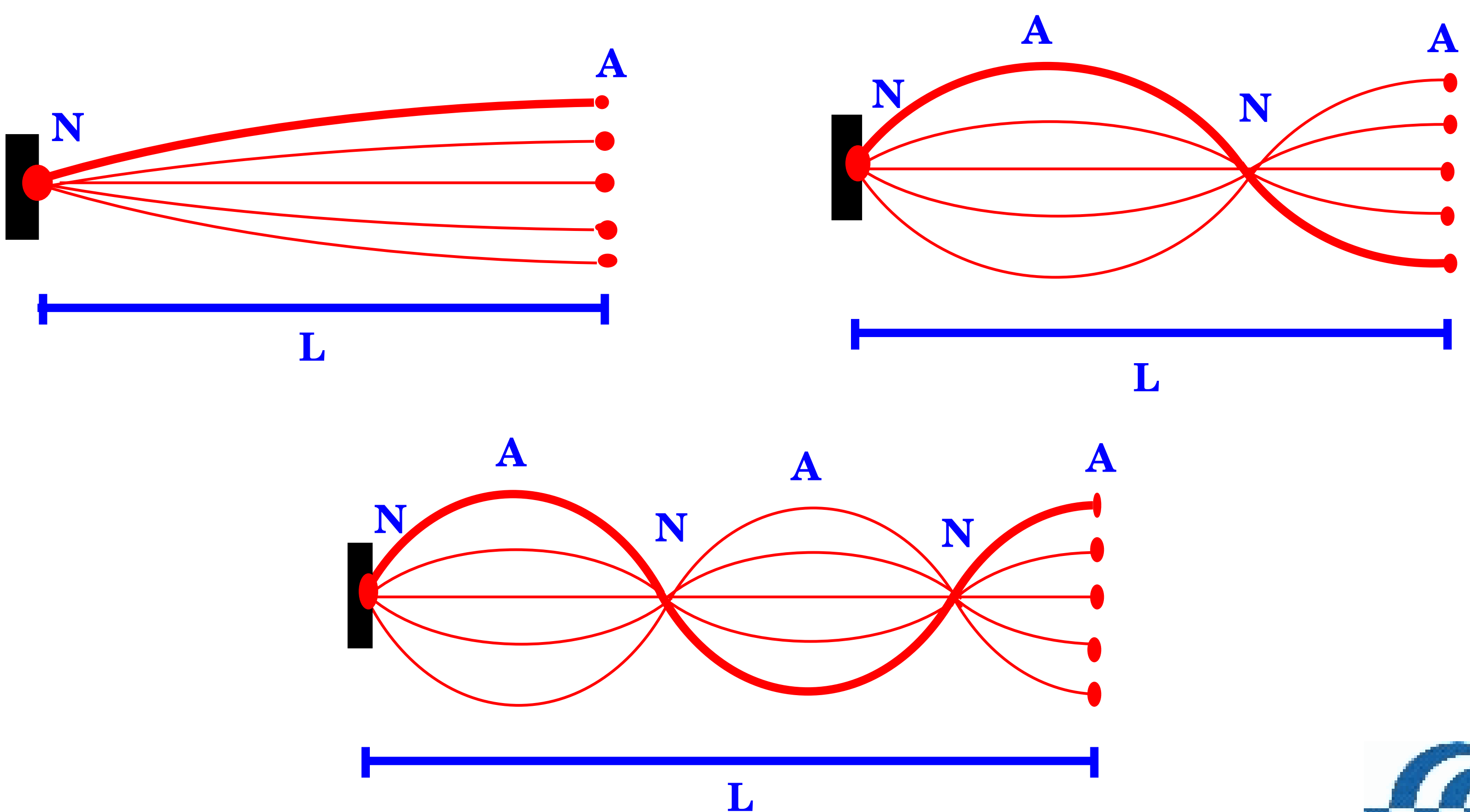
Uma corda é esticada entre dois suportes fixos, separados de 0,7m. A força de tração é ajustada até a **freqüência fundamental** correspondente à da nota lá de afinação, **440Hz**. Qual a velocidade das ondas transversais na corda?

Resposta:

Sabemos que a velocidade está relacionada às freqüências naturais da corda. Efetivamente, $f_1 = v / \lambda_1 = v / (2.L) = (440Hz) . 2 . (0,7m) = 616m/s$.

Ondas Estacionárias

Se ocorrer de uma extremidade da corda ficar liberada, ondas estacionárias ainda podem ocorrer: a extremidade fixa abriga nó e a extremidade livre abriga antinó.



Ondas Estacionárias

Desta forma a freqüência fundamental corresponde à onda com maior comprimento de onda e que se enquadra na condição de que o ponto fixado é um nó e a outra extremidade é um antinó, ou seja, $\lambda_1 = 4.L$.
A **onda estacionária** possível seguinte abriga um nó adicional e, portanto, como tem que manter as condições de nó e antinó para as extremidades, $\lambda_2 = (4/3).L$. Assim, a condição de onda estacionária deste caso se escreve como:

$L = n \, . \, \lambda_n / 4$, n=1,3, 5,..., e as **freqüências de ressonância**, f_n , correspondentes ao problema da corda com uma extremidades fixa e outra livre, a partir da velocidade na corda como $f_n = v / \lambda_n = n \, . \, f_1$, para n = 1, 3, 5, ... ($f_1 = v / (4.L)$ é a **freqüência fundamental**).

Observação: neste sistema, faltam os harmônicos pares.

Ondas Estacionárias

A situação de **ondas estacionárias sonoras** difere daquela descrita para a corda. Trata-se de perturbação que se processa na mesma direção em que trafega (onda longitudinal). Um exemplo do cotidiano é introduzir uma flutuação do ar, por exemplo com um diapasão, na entrada de um tubo cuja outra extremidade está fechada. Como não há flutuação de pressão no fundo fechado do tubo, diz-se que lá é um nó de pressão. Na extremidade em que a flutuação está sendo produzida, ocorre um antinó da pressão. Se ondas estacionárias persistirem no tubo, as expressões para localizar os nós e os antinós serão semelhantes às da corda com uma extremidade fixa e outra livre.

Superposição de Ondas Estacionárias

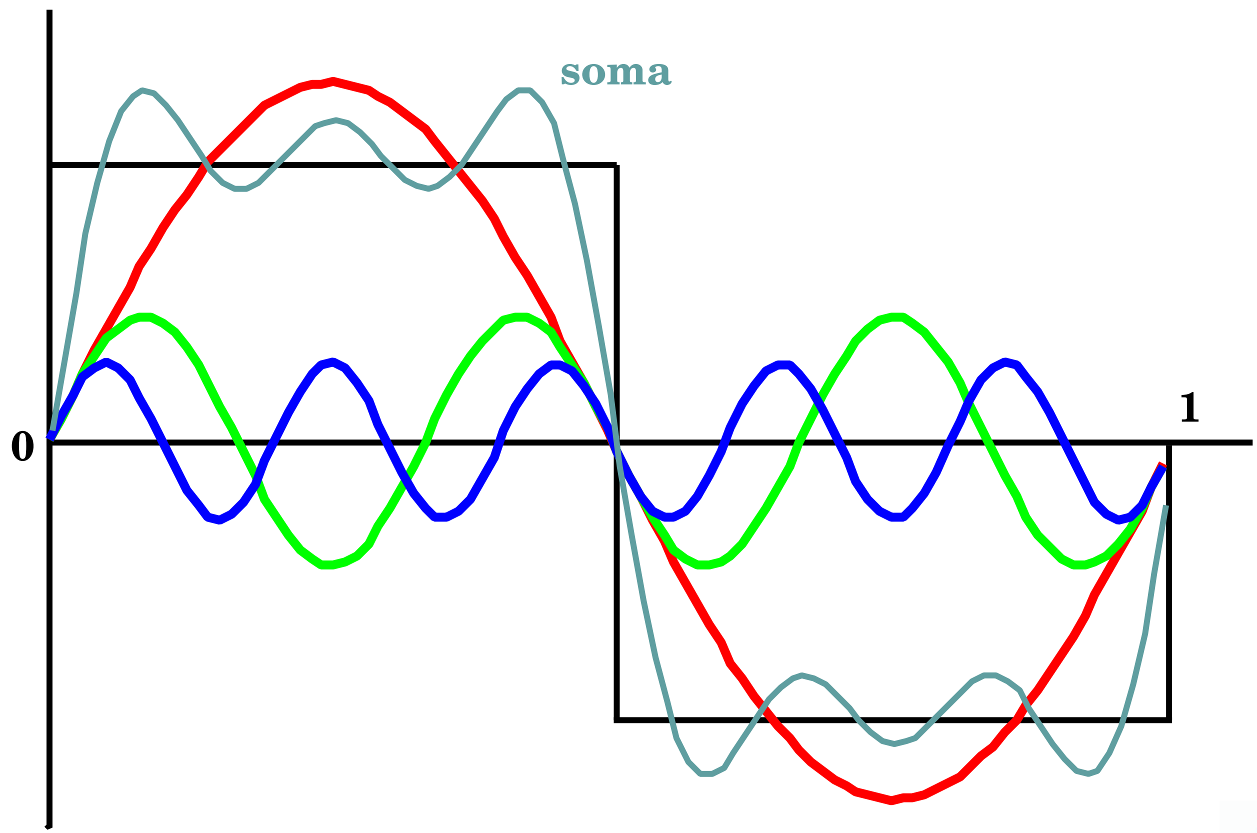
Em geral um sistema não oscila em apenas uma freqüência, o mais das vezes há a coexistência de vários harmônicos combinados (superpostos), sendo a função de onda, então, da forma (cada ponto da corda vibra em movimento harmônico simples com amplitude dependente da posição):

$$y(x,t) = \sum_{n} A_n \cdot sen(k_n \cdot x) \cdot cos(w_n \cdot t + b)$$

A **análise de Fourier** permite estudar as formas de onda em termos dos harmônicos que as compõem. Trata-se da **análise harmônica**.

Análise harmônica (Exemplo):

Para sintetizar ondas quadradas são empregados harmônicos combinados. Na figura abaixo são combinados os três primeiros harmônicos. Quanto mais harmônicos se utilizarem, mais precisa será a aproximação.



Pacotes de Onda

As formas estudadas até agora são **periódicas no tempo**. Pulsos, que não são periódicos, também podem ser representados por um grupo de ondas harmônicas de diferentes freqüências. Neste caso, porém, uma distribuição contínua de feqüências é requerida, enquanto para funções periódicas bastava um conjunto discreto de harmônicos.

É importante enfatizar que um pulso de onda tem início e fim, enquanto uma onda harmônica se repete continuamente. Se a duração do pulso for Δt , por exemplo, a faixa de freqüências necessárias para descrevê-lo é de $\Delta w \cdot \Delta t \sim 1$;

Na Física Moderna, na qual a natureza ondulatória da matéria ficou evidenciada, é comum necessitar-se de **tratamento ondulatório para as partículas**, tipicamente na forma de **pacotes de onda**. Neste caso, espalhamento por um potencial, por exemplo, é escrito para pacotes de onda.