RETIFICAÇÃO do Gabarito da 2a Avaliação à distância - 2/2012

26/10/2012

Questão 1

(a) (1,0 ponto) Se uma carga negativa passa de certo potencial para outro mais alto, ela ganha ou perde energia? E se for positiva?
(b) (1,0 ponto) Explique a diferença entre um campo magnético B e o fluxo de um campo magnético ϕ_B. Eles são vetores ou escalares? Em que unidades cada um pode ser expresso? Como essas unidades se relacionam? Algum deles é propriedade de um dado ponto no espaço?

Gabarito

(a) Para responder esta questão basta lembrarmos da definição de potencial:

$$V(r) = -\int_O^r \vec{E}.d\vec{l}. \tag{1}$$

Onde O é uma origem arbitrária. A diferença de potencial entre dois pontos é dada por:

$$V(a) - V(b) = -\int_O^a \vec{E}.d\vec{l} + \int_O^b \vec{E}.d\vec{l} = -\int_O^a \vec{E}.d\vec{l} - \int_b^O \vec{E}.d\vec{l} \tag{2}$$

$$V(a) - V(b) = -\int_b^a \vec{E}.d\vec{l}. \tag{3}$$

Para relacionar o potencial eletrostático com energia, vamos lembrar da definição do trabalho de uma força eletrostática:

$$W_{a\rightarrow b} = \int_a^b \vec{F}.d\vec{l} = \int_a^b q.\vec{E}.d\vec{l} = q.\int_a^b \vec{E}.d\vec{l} = q.\left(V(a) - V(b)\right) \tag{4}$$

Assim,

$$\Delta V = \frac{W}{q}. \tag{5}$$

Assim, se uma carga negativa passa de um potencial para outro mais alto, ela terá uma variação positiva no potencial. Mas, como carga é negativa, o trabalho é negativo, pois, como vimos,

$$W = q.\Delta V. \tag{6}$$

Sendo assim, a partícula perde energia. Caso contrário, se a partícula possuir uma carga positiva, o trabalho será positivo e a partícula ganha energia.

Uma descrição puramente textual, ou seja, sem recursos ao formalismo matemático, que complementa a explicação anterior, pode se apresentar conforme a seguir:
A noção de potencial eletrostático está intuitivamente associada com a energia que uma partícula carregada tem, associada a ela, pela sua distância em relação a outras cargas. Supondo que há uma carga positiva Q em um lugar, a energia eletrostática de uma carga de prova q, também positiva, decresce à medida que essa se afasta daquela. Portanto, no caminho contrário, a energia eletrostática aumenta à medida que q se aproxima de Q. Considerando estritamente a presença da carga Q, perto dela o potencial é alto e distante dela o potencial é baixo. Diz-se, então, que a carga positiva ganha energia ao passar para um ponto de potencial maior do que o do ponto anterior. Claro que, se se aproxima ou afasta uma partícula sem carga de Q, nenhuma mudança na energia eletrostática ocorreria (quer dizer, a energia potencial desta partícula descarregada é indiferente em relação ao potencial gerado pela carga Q). De outra forma, assim como partículas com cargas de mesmo sinal se repelem, cargas de sinais contrários se atraem. E a Natureza se movimenta para configurações de energia mais baixa, porque prefere minimizar a energia. No caso do potencial gerado pela carga Q mencionada, uma carga -q se dirigiria para próximo de Q para buscar energia mais baixa. Mas, como mencionado acima, quanto mais perto de Q, maior o potencial. Quer dizer, a carga negativa perde energia à medida que passa de um potencial para outro mais alto.

(b) O campo magnético é um vetor que representa a influência magnética de uma corrente elétrica ou um material magnético. Já o fluxo do campo magnético mede o quanto de campo atravessa uma superfície orientada e é um escalar. Uma analogia útil para diferenciar os dois é associar o campo magnético à força e o fluxo do campo à pressão.

A unidade de campo magnético é o Tesla (T) e a unidade de fluxo magnético é o Weber (Wb). Para relacionar as duas unidades basta utilizarmos a definição de fluxo magnético:

$$\phi_B = \vec{B}.\vec{S} \Rightarrow [\phi_B] = \left[\vec{B}\right].\left[\vec{S}\right] = T.m^2 = W_b. \tag{7}$$

Então, 1 Tesla é equivalente a 1 Weber por metro quadrado.

O campo magnético é um campo vetorial e como tal, ele representa o módulo, direção e sentido de uma grandeza em determinado ponto do espaço.

Questão 2

Em nossa vida cotidiana uma das formas mais importantes de obtenção de energia elétrica é por meio da transformação de movimento em energia. Tal processo baseia-se nos estudos de Faraday. Observe a figura.
(a) (1,0 ponto) Baseado nas figuras, explique o experimento de Faraday.
(b) (1,0 ponto) Caso o ímã seja aproximado com o pólo negativo, o que é modificado no experimento? Se o ímã estiver perto da bobina, em repouso, e começar a ser afastado, o que ocorre?

Gabarito

(a) Primeiro, vamos descrever o que está acontecendo em cada uma das situções:

1. Ímã parado em relação a bobina: lâmpada acende;
2. Ímã com movimento relativo em relação à bobina: lâmpada acende;
3. Bobina com movimento relativo em relação à bobina ligada ao circuito: nada acontece;
4. Eletroimã com movimento relativo em relação à bobina: lâmpada acende.

O fato de uma lâmpada acender, está relacionado à passagem de corrente elétrica no circuito em que a lâmpada está ligada. E isto ocorreu sempre que uma fonte de campo magnético estava em movimento em relação á bobina do circuito. O que ocorre quando a fonte de campo magnético se desloca é uma variação (positiva quando aproximando-se) no fluxo do campo magnético. Então, a variação no tempo do fluxo magnético gera corrente.

(b) Caso o ímã seja aproximado com o pólo negativo, também ocorre uma variação no fluxo do campo. Quando o ímã, com seu polo positivo apontado para a bobina, é afastado, ocorre uma variação negativa no fluxo do campo, fazendo aparecer uma corrente em sentido oposto à que aparecia quando aproximávamos. Se a corrente é usada para acender uma lâmpada incandescente, a lâmpada acenderá para ambos os sentidos de corrente.

Questão 3

Alguns anos atrás, as instalações elétricas nas residências eram feitas de maneira que todos os aparelhos eletrônicos estivessem ligados a um único circuito elétrico, que era montado geralmente com fios de ligação finos. A figura abaixo representa tal modelo, onde a resistência dos fios é dada por R. Explique o que acontece com as lâmpadas que estavam ligadas nesse tipo de circuito quando outros eletrodomésticos com resistência baixa são ligados, por exemplo um chuveiro elétrico.

Gabarito

O que temos na figura em questão é uma associação em paralelo de resistores. neste caso, sabemos que a resistência equivalente do circuito é dada por:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_{L1}} + \frac{1}{R_{L2}} + \frac{1}{R_{chuv}} = \frac{i}{V}. \tag{8}$$

Logo, a corrente que circula no circuito será dada por:

$$i = \frac{V}{R_{L1}} + \frac{V}{R_{L2}} + \frac{V}{R_{chuv}}. \tag{9}$$

Podemos interpretar cada termo do lado direito da Eq. acima como sendo a corrente em cada componente da instalação. Quando o chuveiro é ligado a corrente que vai para as outras duas lâmpadas cai,

$$\frac{V}{R_{L1}} + \frac{V}{R_{L2}} = i - \frac{V}{R_{chuv}}. \tag{10}$$

E, no caso de um componente com resistência baixa como o chuveiro, a corrente que segue para as lâmpadas sofre uma queda considerável. Como a potência dissipada nas lâmpadas (e em qualquer outro material ohmico) é proporcional ao quadrado da corrente há perda ainda mais considerável na potência, fazendo as lâmpadas brilhar menos.

Questão 4

(a) (1,0 ponto) Quatro resistores iguais são ligados em série. Quando se aplica uma certa ddp a esta combinação, a potência total consumida é de 10 W. Que potência seria consumida se os quatro resistores fossem ligados em paralelo á mesma ddp?
(b) (1,0 ponto) Determine as fem ε_1 e ε_2 no circuito mostrado na figura e a ddp entre "a" e "b".
(c) (2,0 pontos) Considere, na figura abaixo, $\varepsilon = 100V$, R=10 MΩ, C=2 μF. O capacitor está inicialmente descarregado. A chave é ligada na posição

"a" durante 20s e depois rapidamente é ligada na posição "b". (i) Construa gráficos para i(t), q(t), ddp no resistor e ddp no capacitor para um intervalo de tempo de 60 s depois da chave ter sido ligada pela primeira vez. (ii) Quanta energia é dissipada no resistor?

Gabarito

(a) O cáculo da resistência equivalente em um associação de resistores em série e em paralelo é feito, respectivamente, como:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \tag{11}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \tag{12}$$

e a potência é dada por:

$$P = U.i = R.i^2 = \frac{U^2}{R_{eq}}. \tag{13}$$

No nosso caso, os 4 resistores são idênticos e modificamos apenas o arranjo entre eles. No caso da associação em série temos:

$$R_{eq} = 4R \tag{14}$$

$$P = \frac{U^2}{R_{eq}} = 10W \Rightarrow \frac{U^2}{4R} = 10W \Rightarrow \frac{U^2}{R} = 40W. \tag{15}$$

No caso da associação em paralelo:

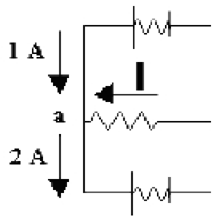
$$R_{eq} = \frac{R}{4}. \tag{16}$$

Assim,

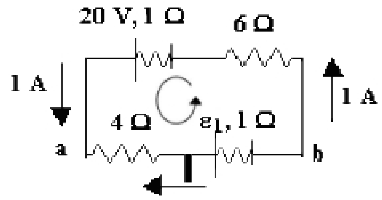
$$P = \tfrac{U^2}{R_{eq}} = \tfrac{4U^2}{R} = 4 \times 40W = 160W$$

$$P = 160W \tag{17}$$

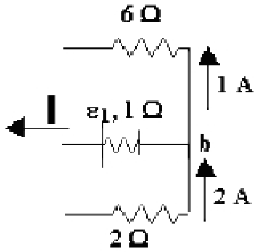
(b)Para este caso vamos aplicar a lei das Malhas e a lei dos Nós. O circuito foi subdividido para facilitar a compreensão da solução. Observe as figuras abaixo:



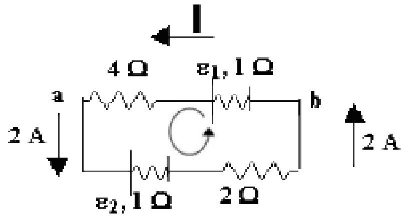
(a)



(c)



(b)



(d)

A análise das figuras (a) e (b) nos permite encontrar pela lei dos Nós: $I = 2A - 1A = 1A$.

Agora analisando a figura (c) e aplicando a lei das Malhas do nó b até o nó a obtemos:

$$6\Omega * (+1A) - 20V + 1\Omega * (+1A) + 4\Omega * (-1A) + \varepsilon_1 + 1\Omega * (-1A) = 0 \quad (18)$$
$$6 - 20 + 1 - 4 + \varepsilon_1 - 1 = 0 \quad (19)$$
$$\varepsilon_1 = 18V \quad (20)$$

Analisando a figura (d) e aplicando a lei das Malhas do nó a até o nó b obtemos:

$$1\Omega * (+2A) + \varepsilon_2 + 2\Omega * (+2A) + 1\Omega * (+1A) - \varepsilon_1 + 4\Omega * (+1A) = 0 \quad (21)$$
$$2 + \varepsilon_2 + 2 * 2 + 1 - 18 + 4 = 0 \quad (22)$$
$$\varepsilon_2 = 7V \quad (23)$$

Por fim, o cálculo da ddp entre o nó a até o nó b, nos dá:

$$V_{ab} = \varepsilon_1 - R * i = 18 - (4 + 1)\Omega * 1A = 13V \quad (24)$$

(c) Dados:
$\varepsilon = 100\,V$, $R = 1,0.10^7\,\Omega$ e $C = 2,0.10^{-6}\,F$

(i) Nos primeiros 20s o capacitor é carregado em um circuito RC. Vamos escrever a equação de balanço energético (1a. Lei de Kirchoff):

$$\varepsilon - R.i - \frac{Q}{C} = 0. \tag{25}$$

A bateria fornece uma f.e.m. ε, que é "absorvida" pelo resistor ($R.i$) e pelo capacitor (Q/C). Lembrando que a corrente $i = \frac{dQ}{dt}$, podemos reescrever a equação acima e resolvê-la:

$$\varepsilon - R\frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} = 0 \tag{26}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\varepsilon.C - Q}{R.C} \tag{27}$$

$$\int_{Q_0=0}^{Q(t)} \frac{dQ}{\varepsilon.C - Q} = \int_0^t \frac{dt}{RC} \tag{28}$$

$$\ln\left(\frac{\varepsilon.C - Q(t)}{\varepsilon.C}\right) = -\frac{t}{RC} \tag{29}$$

$$Q(t) = \varepsilon.C\,[1 - \exp(-t/RC)] = 2.10^{-4}\,[1 - \exp(-t/20)] \tag{30}$$

e a corrente é obtida derivando a última equação em relação ao tempo:

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R}.\exp(-t/RC) = 10^{-5}.\exp(-t/20) \tag{31}$$

A ddp no resistor e no capacitor são dadas, respectivamente, por:

$$V_{resistor}(t) = R.i(t) = \varepsilon.\exp(-t/RC) = 100.\exp(-t/20) \tag{32}$$

$$V_{capacitor} = \frac{Q(t)}{C} = \varepsilon.[1 - \exp(-t/RC)] = 100.[1 - \exp(-t/20)] \tag{33}$$

Após os 20s iniciais, a chave é virada para a posição "b" e a fonte de f.e.m (a bateria) não faz mais parte da malha. Logo:

$$-R\frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} = 0 \tag{34}$$

$$\int_{Q_{20s}}^{Q(t)} \frac{dQ}{Q} = -\int_{t=20s}^{t} \frac{dt}{RC} \tag{35}$$

$$\ln\left(\frac{Q}{Q_{20s}}\right) = -\frac{(t-20)}{RC} \tag{36}$$

$$Q(t) = Q_{20s}.\exp[-(t-20)/RC] = Q_{20s}.\exp[-(t-20)/20] \tag{37}$$

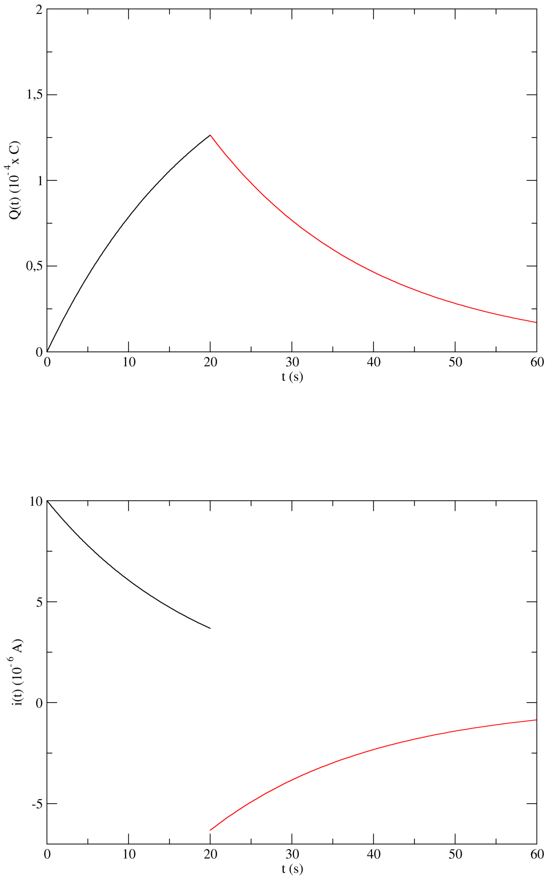
e a corrente e ddps no resistor e no capacitor são dadas, respectivamente por:

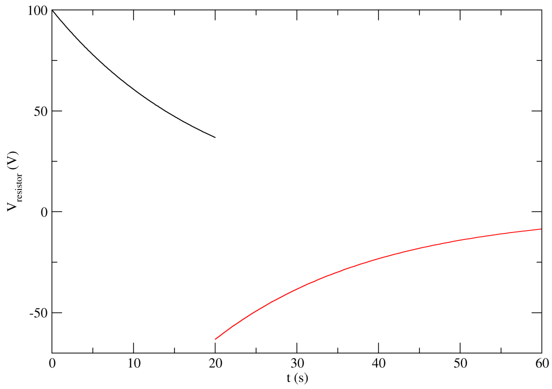
$$i(t) = -\frac{Q_{20}}{RC}.\exp[-(t-20)/RC] = -\frac{Q_{20}}{20}.\exp[-(t-20)/20] \tag{38}$$

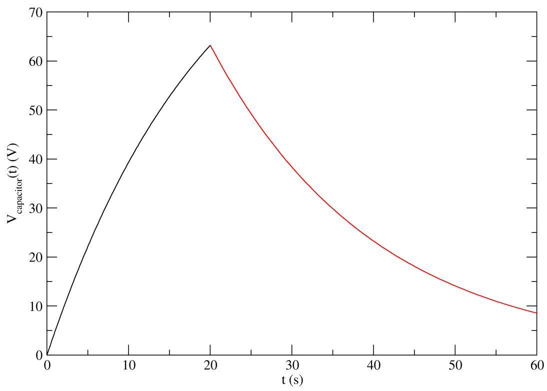
$$V_{resistor} = -\frac{Q_{20}}{C}.\exp[-(t-20)/RC] = -\frac{Q_{20}}{2.10^{-6}}.\exp[-(t-20)/20] \quad (39)$$

$$V_{capacitor} = \frac{Q_{20}}{C}.\exp[-(t-20)/RC] = \frac{Q_{20}}{2.10^{-6}}.\exp[-(t-20)/20] \quad (40)$$

Os gráficos vêm a seguir:







(ii) Para obter a energia dissipada pelo resistor, basta integrarmos no tempo a potência no resistor. Como a corrente apresenta 2 comportamentos no intervalo de tempo considerado, temos que dividir a integração em duas partes, de 0 a 20s e de 20 a 60s.

$$E = \int_0^{60} P.dt = \int_0^{60} R.i^2(t).dt \tag{41}$$

$$E = \int_0^{20} R.\left[\frac{\varepsilon}{R}.\exp(-t/RC)\right]^2.dt + \int_{20}^{60} R.\left[\frac{-Q_{20s}}{RC}\exp[-(t-20)/RC]\right]^2.dt \tag{42}$$

$$E = -\frac{\varepsilon^2.C}{2}.\left[\exp(-40/RC)-1\right] - \frac{Q_{20}^2}{2C}\left[\exp(-40/RC)-1\right] \approx 12,1\,.\,10^{-3}J \tag{43}$$