Aula 18

Professor:

Mauricio Kischinhevsky

Eletricidade e magnetismo (Parte 8)

Conteúdo:

Circuitos com corrente alternada, as equações de Maxwell e ondas eletromagnéticas.

Equações de Maxwell e ondas eletromagnéticas

Introdução

As leis de Maxwell relacionam os campos elétrico e magnético e suas fontes, que são cargas elétricas e as correntes. Sistematizam as leis experimentais de Coulomb, Gauss, Biot-Savart, Ampère e Faraday.

Em princípio, todos os problemas do eletromagnetismo podem ser resolvidos usando as equações de Maxwell. A combinação das equações produz uma equação de onda para os vetores campo elétrico e campo magnético. As ondas eletromagnéticas são produzidas por cargas aceleradas (como as cargas na corrente alternada de uma antena), foram produzidas primeiramente por Hertz(1887). Maxwell considerou que a luz é onda eletromagnética e sua dedução foi capaz de prever a velocidade da onda eletromagnética como

Continuação

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

Onde ε_0 é a permissividade do espaço livre (cf. Leis de Coulomb, Gauss) e
e μ_0 é a permeabilidade do espaço livre (cf. Lei de Biot-Savart).

Corrente de Deslocamento de Maxwell

A Lei de Ampère relaciona a integral de linha de um campo magnético em torno de alguma curva fechada C com a corrente que passa através de qualquer superfície limitada por essa curva:

$$\oint_c \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{l} = \mu_0 \cdot I_s, \forall \text{ curva fechada } C.$$

Maxwell identificou uma dificuldade nesta lei, quando a corrente não é contínua, como, por exemplo, quando a corrente flui até uma placa de um capacitor. A partir da inclusão de um termo da forma

$$I_d = c_0 \frac{d\Phi_e}{dt}$$

onde Φ_e é o fluxo de campo elétrico através da mesma superfície limitada pela curva C, e denominando I+Id como corrente generalizada, escreve-se a forma generalizada da Lei de Ampère como:

$$\oint_c \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{l} = \mu_0(I + I_d) = \mu_0 I - \mu_0 c_0 \frac{d\Phi_e}{dt}.$$

Equações de Maxwell

A primeira é a Lei de Gauss, ou seja

$$\oint_S E_n \cdot dA = \frac{1}{c_0} Q_{\text{interna}},$$

estabelecendo que o fluxo do campo elétrico através de qualquer curva fechada é proporcional à carga líquida dentro da superfície. Ademais, necessariamente o campo elétrico varia inversamente com o quadrado da distância de uma carga pontual. Descreve, ainda, como as linhas de campo divergem das cargas positivas e convergem para as cargas negativas.

Equações de Maxwell

A segunda é a Lei de Gauss para o magnetismo, ou seja

$$\oint_S B_n \cdot dA = 0,$$

estabelecendo que o fluxo do vetor campo magnético através de qualquer superfície fechada é nulo. Quer dizer, as linhas de campo não divergem nem convergem para um ponto, significando que pólos magnéticos isolados não existem.

Equações de Maxwell

A terceira é a Lei de Faraday, ou seja,

$$\oint_c \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{l} = \frac{d}{dt}\int_S B_n dA = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dA,$$

estabelecendo que a integral do campo elétrico em torno de qualquer curva fechada C, que é a FEM, é igual à taxa (negativa) de variação do fluxo magnético através de qualquer superfície S limitada pela curva. Observe que S não é superfície fechada, então o fluxo magnético não é necessariamente nulo. A Lei de Faraday descreve como as linhas de campo elétrico circulam qualquer área através da qual o fluxo magnético está variando, e relaciona o vetor campo elétrico à taxa de variação do vetor campo magnético.

Equações de Maxwell

A quarta, que é a Lei de Ampère aperfeiçoada se exprime como,

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(I - I_d)$$

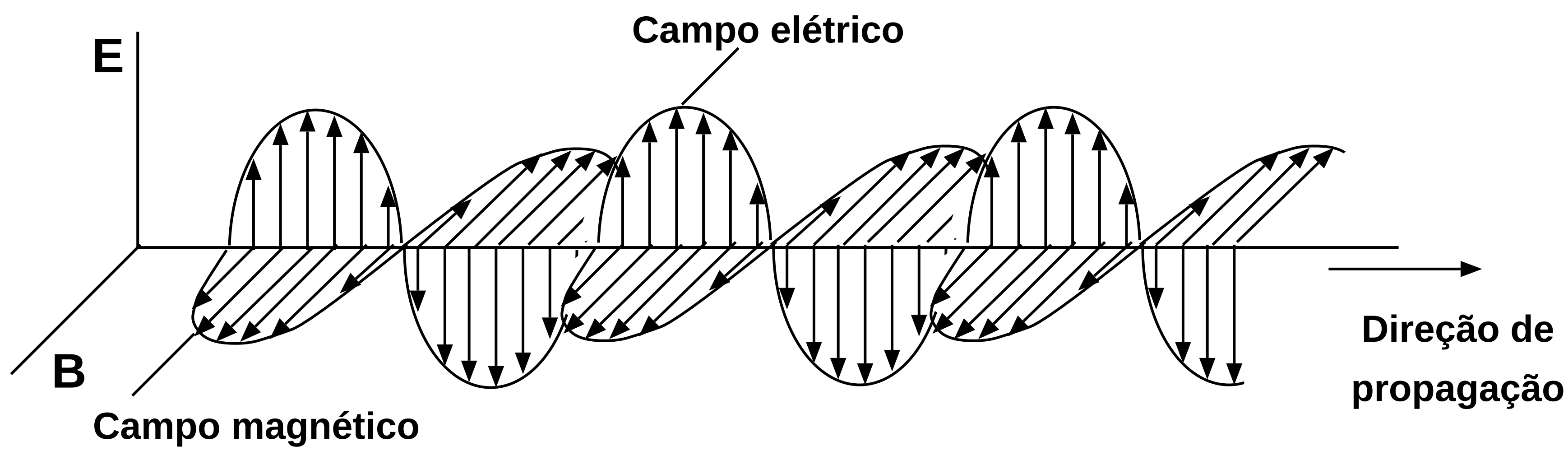
$$\mu_0 I + \mu_0 c_0 \frac{d}{dt} \int_S E_n dA$$

$$\mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial E_n}{\partial t} dA,$$

estabelecendo que a integral de linha do campo magnético em torno de qualquer curva fechada C é proporcional à taxa de variação do fluxo elétrico através da mesma superfície. Esta lei descreve como as linhas de campo magnético circulam uma área através da qual uma corrente está passando ou através da qual o fluxo elétrico está variando.

Ondas Eletromagnéticas

Conforme indicado na figura, os vetores elétrico e magnético de uma onda eletromagnética são perpendiculares um ao outro e perpendiculares à direção de propagação da onda. Os campos estão em fase e, em cada ponto do espaço os módulos se relacionam por $E=c.B$, onde c é a velocidade da onda. Ademais, o sentido da onda é dado pelo produto vetorial entre os campos elétrico e magnético.



Espectro Eletromagnético

Os vários tipos de radiação eletromagnética diferem apenas no comprimento de onda e freqüência, pois sua velocidade é a mesma.

Freqüência, Hz	Tipo de onda	Comprimento de onda, m
10^{23}		
10^{22}		10^{-14}
10^{21}	Raios gama	10^{-13}
10^{20}		10^{-12}
10^{19}	Raios X	10^{-11}
10^{18}		10^{-10}
10^{17}		10^{-9} (1nm)
10^{16}	Ultravioleta	10^{-8}
10^{15}	Luz visível	10^{-7}
10^{14}		10^{-6} (1μm)
10^{13}	Infravermelho	10^{-5}
10^{12}		10^{-4}
10^{11}	Microondas	10^{-3}
10^{10}	Ondas curtas de rádio	10^{-2} (1cm)
10^{9}		10^{-1}
10^{8}	Televisão e rádio FM	1 (1m)
10^{7}		10^{1}
10^{6}	Rádio AM	10^{2}
10^{5}		10^{3} (1km)
10^{4}	Ondas longas de rádio	10^{4}
10^{3}		10^{5}

Espectro Eletromagnético

O comprimento de onda e a freqüência são fundamentais em relação ao comportamento da radiação em sua interação com os materiais. Por exemplo, microondas possuem comprimentos de onda de poucos centímetros e freqüências semelhantes às das freqüências de ressonância das moléculas de água, presentes nos sólidos e nos líquidos, daí o aquecimento resultante dos alimentos.

Ondas eletromagnéticas podem ser produzidas por meio de vários mecanismos, dentre os quais a aceleração de cargas livres ou quando elétrons ligados a átomos e moléculas transicionam para estados de menor energia. No caso de ondas de rádio (550-1600kHz em AM e 88-108MHz em FM), são produzidas por correntes elétricas macroscópicas oscilando em antenas de transmissão de rádio, sendo a freqüência das ondas emitidas igual à de oscilação das cargas. O calor é radiado por cargas termicamente excitadas. O espectro da radiação térmica é o da radiação de corpo negro".

Energia e quantidade de movimento de ondas Eletromagnéticas

A densidade de energia é obtida a partir da soma das parcelas devidas à densidade de energia elétrica e à densidade de energia magnética, ou seja:

$$\begin{aligned} u = u_e + u_m &= \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{(E/c)^2}{2\mu_0} \\ = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} &= \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \epsilon_0 E^2. \end{aligned}$$

O vetor de Poynting é definido como produto vetorial entre os campos elétrico e magnético da onda, e seu módulo médio é denominado intensidade da onda:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \text{ e } I = u_{med} \cdot c = \frac{E_{rms} B_{rms}}{\mu_0} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{E_0 \times B_0}{\mu_0} = |\vec{S}|_{med}.$$

Energia e quantidade de movimento de ondas Eletromagnéticas

Uma onda eletromagnética transporta quantidade de movimento. Como ilustração, considere o exemplo a seguir.

Exemplo

Uma lâmpada de bulbo emite ondas eletromagnéticas esféricas uniformemente em todas as direções. Encontre a intensidade e a pressão de radiação a uma distância de 3m da lâmpada, admitindo que 50W de radiação eletromagnética são emitidos.

Resposta:

A uma distância r da lâmpada, a energia está distribuída uniformemente sobre $4\pi r^2$. A intensidade é a potência pela área, sendo a pressão de radiação calculada como P_r=I/c. . Assim, I=(50W)/$4\pi r^2$ = 0,442 W/m^2. A pressão é, então,

P_r=I/c = (0,442 W/m^2)/(3.10^8 m/s) = 1,47x10^{-9} Pa (Note que P_{atm}=10^5 Pa e, portanto esta pressão é imperceptível).

A equação de onda para ondas eletromagnéticas

As equações de Maxwell impõem que os campos elétrico e magnético obedecem às equações da onda, na forma a seguir:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \text{ e } \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \text{ onde } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}}.$$

Exemplo

O campo elétrico de uma onda eletromagnética é dado por

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cdot \cos(k \cdot x - w \cdot t)\hat{k}.$$

(a)Qual a direção de propagação da onda?
(b) Qual o campo magnético desta onda?
(c)Calcule $\vec{E} \times \vec{B}$.

Resposta:

(a) O argumento da função seno(cosseno) informa a direção de propagação: a do aumento de x, ou seja, î.

(b) Como o campo magnético está em fase com o elétrico e é perpendicular a este e à direção de propagação, tem-se

$$\overrightarrow{B}(x,t) = B_0 \cos(k \cdot x - w \cdot t)(-\hat{j}), \text{ com } B_0 = E_0/c.$$

(c) Obtém-se

$$\mu_0 \cdot \overrightarrow{S} = \overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B} = (E_0 \cos(\theta)\hat{k}) \times (B_0 \cos(\theta)\hat{j}) = -E_0 B_0 \cos^2(\theta)(\hat{k} \times \hat{j}) = E_0 B_0 \cos^2(\theta)\hat{\imath},$$

onde $\theta = k \cdot x - w \cdot t.$