Aula 13

Professor:

Mauricio Kischinhevsky

Eletricidade e magnetismo (Parte 3)

Conteúdo:

Potencial elétrico, energia eletrostática e capacitância,

corrente elétrica e circuitos de corrente contínua

Fundação CECIERJ Consórcio cederj

Potencial Elétrico

Diferença de Potencial

Analogamente à interação gravitacional, a força elétrica é conservativa, de modo que se tem uma energia potencial a ela associada.
A variação de energia potencial dU, quando uma partícula sofre um deslocamento sob uma força conservativa $dU = -\vec{F}.\vec{dl}.$

Como a variação de energia potencial é proporcional à carga, pois a força elétrica é o produto da carga pelo campo elétrico, resulta que a variação de energia potencial por unidade de carga $dV = \frac{dU}{q_o} = -\vec{E}.\vec{dl}.$

Assim, para um deslocamento de a até b, a variação no potencial vale

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{\Delta U}{q_o} = -\int_a^b \vec{E}.\vec{dl}.$$

Como se pode escolher o ponto onde o potencial é nulo, escolhe-se o mesmo ponto para a energia potencial e o potencial elétrico se anularem e, portanto, tem-se $U = q_o.V.$

Exercício:

Um campo elétrico é orientado no sentido do eixo x e tem um módulo constante E = 10 N/C = 10 V/m. Determine o potencial em função de x, supondo que V=0 em x=0.

Resposta:

A variação no potencial dV está relacionada ao deslocamento e ao campo elétrico:

$$dV = -\vec{E}.\vec{dl} = -E.dx.$$

Integrando , obtém-se (observe que diminui de 10V a cada 1m)

$$V(x) = \int dV = -\int E.dx = -E.x + C;\ com\ C = 0,\ V(x) = -(10V/m).x.$$

Unidades

Observe que, no S.I., o potencial tem unidades de joule (J) por coulomb (C), sob o nome volt (V). Assim, 1 V = 1 J/C.

Exemplo:

A diferença de potencial entre dois pontos é denominada tensão. Em uma bateria de automóvel (12V) o terminal positivo tem um potencial 12V maior que o terminal negativo. Transferindo-se uma carga de 1 C desde o terminal positivo até o terminal negativo, a **energia potencial da carga diminui** de Ç∆   V=(1C)(12V) =12 J. Assim, as unidades do campo elétrico são volt por metro. Uma forma de expressar energia, em especial no contexto da física microscópica, é o elétron-volt (eV). Um eV se relaciona com 1J por

$$1eV = 1,60 \times 10^{-19} C.V = 1,60 \times 10 - 19J.$$

Ilustrando, um elétron movendo-se do terminal negativo para o terminal positivo da bateria de 12 V perde 12 eV de energia potencial.

Potencial elétrico devido a um sistema de cargas pontuais

Exemplo:

Duas cargas pontuais de +5nC estão situadas sobre o eixo x, uma em x=0 e outra em x=8cm. Qual o potencial em **(a)** ponto médio entre as cargas; **(b)** no ponto x=0, y=6cm.

Resposta:

(a) Como o potencial devido a várias cargas é a soma dos potenciais devidos a cada carga, resulta (no ponto médio entre as cargas o campo elétrico é zero)

$$V = \frac{k.q_1}{r_1} + \frac{k.q_1}{r_1}, \ ou \ seja,$$

$$V = 2.\frac{(8,99 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2}).(5 \times 10^{-9}C)}{0,04m} = 2250V = 2,25kV.$$

(b) Analogamente ao caso anterior, observadas as distâncias,

$$V = \frac{k.q_1}{r_1} + \frac{k.q_2}{r_2} = (8,99 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2}).(5 \times 10^{-9}C)x[\frac{1}{0,06m} + \frac{1}{0,10m}] = 749V + 450V \approx 1,20kV.$$

Cálculo do Campo Elétrico a partir do Potencial

Conhecendo-se o potencial, pode-se calcular o campo através da relação entre deslocamentos ao longo do campo elétrico e variação do potencial:

$$dV(x) = -\vec{E}.\vec{dl} = -E.cos\Theta dl.$$

Note que se o deslocamento for perpendicular ao campo elétrico o potencial não muda.

Exemplo:

Determine o campo elétrico para a função potencial dada por V(x)=100V-(25V/m).x. Em que ponto V(x) se anula?

Resposta:

Resulta

$$dV(x) = \frac{-dV}{dx}\hat{i} = 25V/m\vec{i}.$$

Observe que esse campo é uniforme e atua apenas na direção x. Note também que não faz diferença a presença de uma constante (a escolha do zero de potencial é arbitrária). Note que em x=4m o potencial se anula.

O Potencial para Distribuições contínuas de carga

O potencial pode ser obtido como o potencial superposto de todos os elementos de carga presentes, ou seja,

$$V = \int dV = \int \frac{k.dq}{r}.$$

Exemplo:

Um anel com 4cm de raio está apoiado no plano yz, com seu centro na origem. A carga total do anel, distribuída uniformemente, é de 8nC.

Uma pequena partícula de massa m=6mg e carga q_o=5nC é colocada em x=3cm e liberada. Determine a velocidade da partícula quando ela estiver a uma grande distância do anel. Admita que os efeitos gravitacionais sejam desprezíveis.

Resposta:

A partícula será repelida pelo anel. A energia potencial é $U=q_o.V$. O valor de V(x) para o anel carregado pode ser obtido como

$$V = \int \frac{k.dq}{r} = \frac{k}{r}.\int_0^Q dq = \frac{k.Q}{r}.$$

Assim, como a velocidade se relaciona com a energia cinética e, no limite x>>a, toda a energia potencial do momento inicial estará sob a forma de energia de movimento, tem-se:

$$U = q_o.V = \frac{k.q_o.Q}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Portanto a conservação de energia, que imporia

$$\frac{k.q_o.Q}{\sqrt{x_i^2+a^2}} + \frac{1}{2}.m.v_i^2 = \frac{k.q_o.Q}{\sqrt{x_f^2+a^2}} + \frac{1}{2}.m.v_f^2,$$

determinará (xi=3cm, a=4cm)

$$v_f = \sqrt{\frac{2}{m}.\frac{k.q_o.Q}{\sqrt{x_i^2+a^2}}} = 1,55m/s.$$

Superfícies equipotenciais

Um exemplo de situação em que o campo elétrico é nulo é o interior de um material condutor em equilíbrio eletrostático. O potencial elétrico não varia, ou seja o condutor ocupa uma região equipotencial.
Na presença de um campo elétrico, as superfícies de potencial constante são perpendiculares a ele.

Exemplo:

Uma casca esférica condutora oca, descarregada, tem raio interno a e raio externo b. Uma carga pontual positiva +q é colocada na cavidade, no centro da esfera.

(a) Determine a carga em cada superfície do condutor;

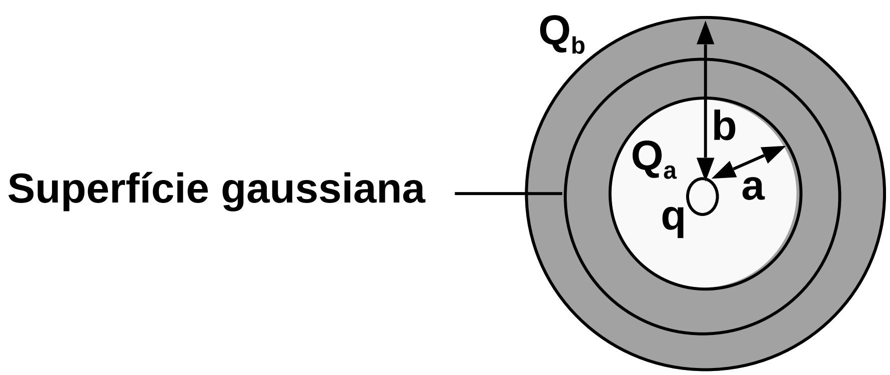
(b) determine o potencial V(r) em qualquer posição, considerando V=0 em $r=\infty$.

Resposta:

(a) a carga no interior de uma superfície fechada é proporcional ao fluxo do campo que atravessa a superfície (Lei de Gauss). Ou seja,

$$\phi_{resultante} = 4.\pi.k.Q_{interna}, \; onde \; \phi_{resultante} = \oint E_n.dA.$$

Tratando-se de casca condutora, as cargas vão se mover e concentrar para a superfície próxima à carga interna, gerando polarização do meio. Escolhendo uma superfície gaussiana concêntrica com a casca, com raio intermediário, na forma da figura abaixo,



Resposta (continuação):

Imediatamente decorre que

$$\phi_{resultante} = 4.\pi.k.Q_{interna}, \ onde \ \phi_{resultante} = \oint E_n.dA.$$

Determina-se, então, a carga na superfície interna da casca, pois o fluxo de campo elétrico é nulo através da superfície gaussiana:

$$Q_{interna} = q + Q_a \rightarrow Q_a = -q.$$

A neutralidade da casca condutora determina que

$$Q_a + Q_b = 0 \rightarrow Q_b = +q.$$

(b) Como o potencial é a soma das contribuições devidas às várias cargas, tem-se:

$$V = \frac{k.q}{r} + \frac{k.Q_a}{r} + \frac{k.Q_b}{r} =$$

$$V = \frac{k.q}{r} - \frac{k.q}{r} + \frac{k.q}{r} = \frac{k.q}{r}, \ para \ r > b$$

Resposta (continuação):

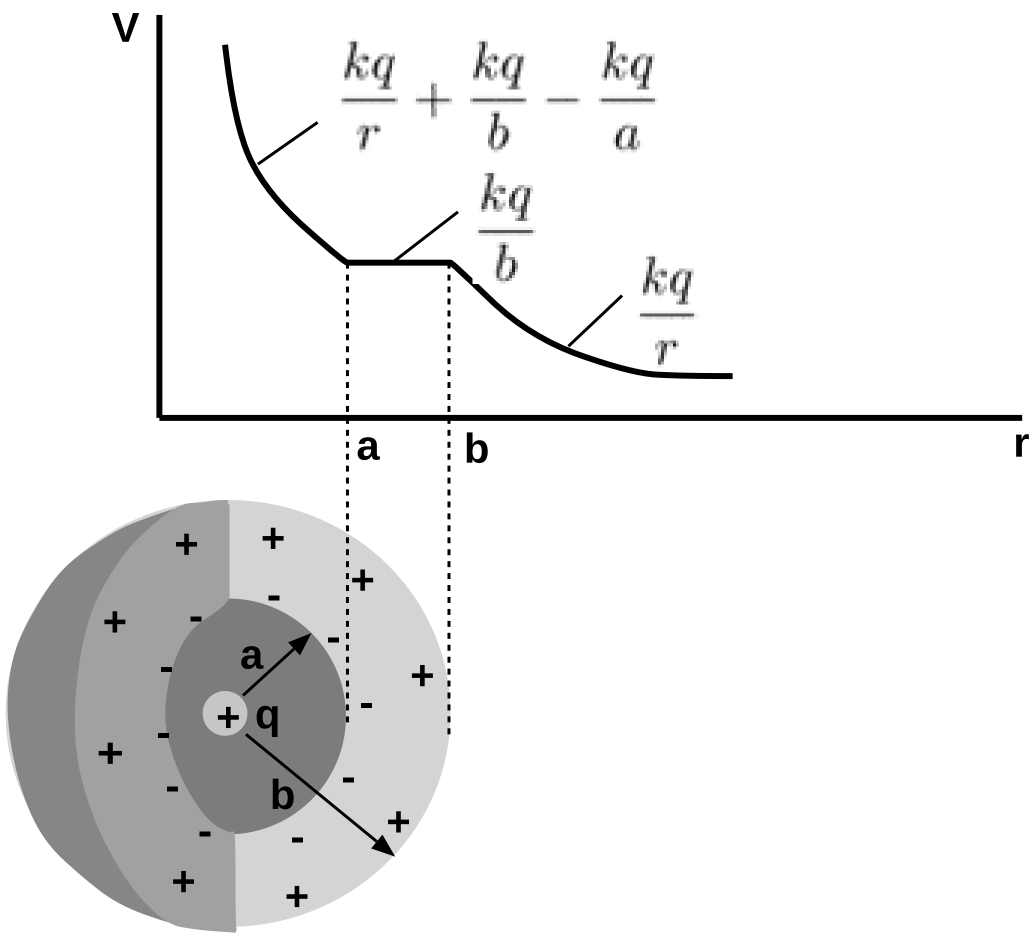
$$V = \frac{k.q}{r} + \frac{k.Q_a}{r} + \frac{k.Q_b}{r} =$$

$$V = \frac{k.q}{r} - \frac{k.q}{r} + \frac{k.q}{b} = \frac{k.q}{b}, \; para \; a < r < b \; e, \; finalmente,$$

$$V = \frac{k.q}{r} + \frac{k.Q_a}{r} + \frac{k.Q_b}{r} =$$

$$V = \frac{k.q}{r} - \frac{k.q}{a} + \frac{k.q}{b}, \; para \; 0 < r < a.$$

Observe que cada uma das funções que definem o potencial tem seu ponto de referência com potencial nulo em ∞. . Resulta um perfil como o ilustrado abaixo:



Energia Eletrostática e Capacitância

Energia Potencial Eletrostática

Quando uma carga positiva é colocada em um condutor isolado o potencial do condutor aumenta. A relação entre a carga e o potencial é chamada **capacitância** do condutor. Um dispositivo conveniente utilizado para armazenar a carga e a energia é o capacitor, que consiste de dois condutores espaçados, porém próximos e isolados um do outro. Quando ligado a uma fonte, bateria por exemplo, os condutores adquirem cargas iguais e opostas. A relação entre a intensidade da carga em qualquer dos condutores e a diferença de potencial entre eles é a capacitância do capacitor. Um exemplo de aplicação é o *flash* de câmera fotográfica, que utiliza um capacitor para produzir a iluminação repentina.

Definição: "A energia potencial eletrostática de um sistema de cargas puntiformes é igual ao trabalho necessário para trazer as cargas do infinito até suas posições finais."

Energia Potencial Eletrostática

Exemplo:

Uma distribuição de cargas é obtida colocando-se 3 partículas, de cargas q_1, q_2 e q_3 em posições r_1, r_2 e r_3, respectivamente. Qual a energia potencial eletrostática do sistema?

Resposta:

Estando a partícula 1 na sua posição (r_1), para trazer a segunda partícula, em repouso no infinito, até r_2, tem-se que realizar um trabalho $W_2=q_2.V_2$, onde V_2 é o potencial em r_2 devido à partícula 1. A seguir, o trabalho a realizar para trazer a partícula 3 para a presença das outras é $W_3=q_3.V_3$, onde V_3 é o potencial em r_3 devido às partículas 1 e 2. Ou seja,

$$V_2 = \frac{k.q_1}{r_{1,2}} \rightarrow W_2 = q_2.V_2 = \frac{k.q_1.q_2}{r_{1,2}},$$

$$V_3 = \frac{k.q_1}{r_{1,3}} + \frac{k.q_2}{r_{2,3}} \rightarrow W_3 = q_3.V_3 = \frac{k.q_1.q_3}{r_{1,3}} + \frac{k.q_2.q_3}{r_{2,3}},$$

$$\rightarrow U = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{k.q_1.q_2}{r_{1,2}} + \frac{k.q_1.q_3}{r_{1,3}} + \frac{k.q_2.q_3}{r_{2,3}}.$$

Capacitância

O potencial V devido à carga Q de um único condutor isolado é proporcional a Q e depende das dimensões e da forma do condutor. Por exemplo, o potencial de um condutor esférico de raio R com carga Q é V=(k.Q)/R.

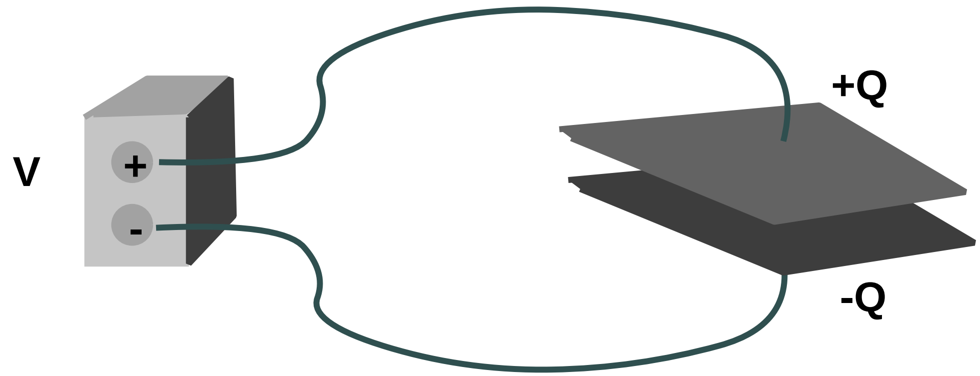
A relação entre a carga Q e o potencial V de um condutor isolado é chamada capacitância, C=Q/V.

A capacitância é a medida da capacidade de armazenar carga para uma dada diferença de potencial. Como o potencial é proporcional à carga, essa relação não depende nem de Q nem de V, mas apenas das dimensões e da forma do condutor. Assim, a capacitância de um condutor esférico é C=Q/V=Q/(k.Q/R), ou seja, C=R/k. A unidade correspondente é o farad, sendo 1 F = 1 C/V.

Exemplo:

As placas de um capacitor de placas paralelas são quadradas, com 10cm de lado e separadas de 1mm. **(a)** Calcule a capacitância desse dispositivo elétrico. **(b)** Se esse capacitor for carregado com 12V, qual a carga transferida de uma das placas para a outra?

Fundação CECIERJ Consórcio cederj



Resposta:

A capacitância C é determinada pela área e pela distância de separação entre as placas. A carga para uma dada tensão V é obtida a partir da definição de capacitância, ou seja,

$$C = \frac{\epsilon_o . A}{d} = \frac{(8,85pF/m)(0,1m)^2}{0,001m} = 88,5pF.$$

A carga transferida é obtida a partir da definição de capacitância:

$$Q = C.V = (8,85pF)(12V) = 1,06 \times 10^{-9}C = 1,06nC.$$

A energia armazenada em um capacitor $U = \frac{1}{2}.\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}.Q.V = \frac{1}{2}.C.V^2.$

Exemplo:

Carga de um capacitor de placas paralelas com uma bateria.
Um capacitor de placas paralelas quadradas com 14cm de ladoe separadas por 2,0mm é conectado a uma bateria e carregado em um potencial de 12V. **(a)** Qual é a carga no capacitor? **(b)** Qual é a energia armazenada no capacitor? **(c)** Depois de carregado o capacitor, a bateria é desconectada e a distância de separação das placas é aumentada para 3,5mm. De quanto se altera essa energia quando a distância de separação entre as placas é modificada?

Resposta:

A carga no capacitor pode ser calculada a partir da capacitância e, em seguida, utilizada para determinar a energia armazenada; quando o capacitor for desconectado da bateria, a carga permanece constante quando as placas são separadas. O aumento na energia é obtido utilizando a carga e o novo potencial para calcular a nova energia, da qual a energia original deve ser subtraída. Ou seja,

Resposta (continuação):

Carga Q no capacitor (capacitância C_o):

$$Q = C_o.V_o \quad C_o = \frac{\epsilon_o.A}{d_o} \rightarrow Q = \frac{\epsilon_o.A}{d_o}V_o =$$
$$= \frac{(8,85pF/m).(0,14m)^2}{0,002m}(12V) = 1,04nC;$$

A energia U_o armazenada é $U_o = \frac{1}{2}.Q.V_o = \frac{1}{2}.(1,04nC).(12V) = 6,24nJ.$

Após a bateria ser desconectada. a diferença de potencial V entre as placas se obtém como $V = E.d = \frac{\sigma}{\epsilon}.d = \frac{Q}{A.\epsilon}.d$

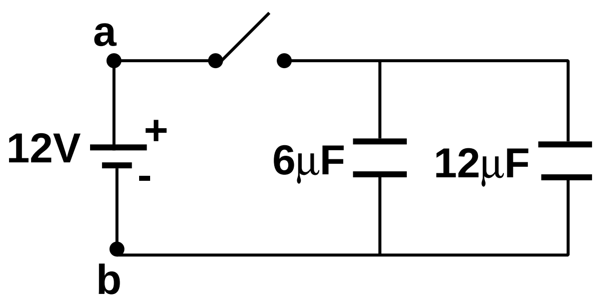
Igualando o campo, válido para pequenas distâncias $\frac{V}{d} = \frac{V_o}{d_o}, \; ou \; V = \frac{d}{d_o}.V_o.$

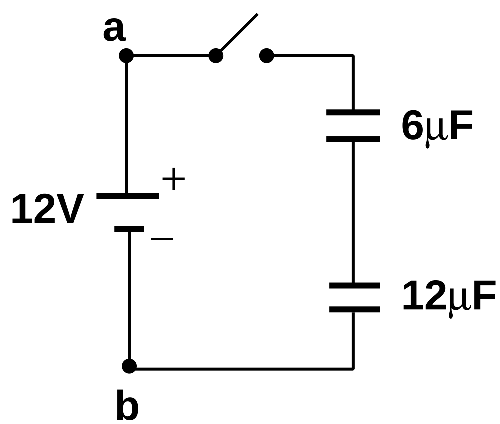
Logo,

$$\Delta U = U - U_o = \frac{d}{d_o}.U_o - U_o = (\frac{d}{d_o} - 1).U_o = (\frac{3,5mm}{2,0mm} - 1).(6,24nJ) = 4,68nJ.$$

Capacitores, baterias e circuitos

Quando um capacitor inicialmente descarregado é conectado aos terminais de uma bateria, cuja diferença de potencial entre terminais é chamada **tensão**, as cargas se movem e se acumulam nas placas do capacitor. De uma certa forma a bateria pode ser considerada uma *bomba* de cargas elétricas. Vários capacitores podem ser combinados e conectados à bateria. Para dois capacitores, a ligação pode ser com duas placas de cada capacitor conectadas entre si e, em seguida, a um terminal da bateria(paralelo), assim como com cada capacitor tendo uma placa ligada à bateria e uma conectada apenas à outra placa não ligada à bateria do outro capacitor(série).





Exemplo (capacitores em série):

Um circuito consiste de um capacitor de 6μF, um capacitor de 12 μF e uma chave, conectados em série. Inicialmente, a chave está aberta e os capacitores, descarregados. A chave é, a seguir, fechada e os capacitores, carregados.

(a) Qual o potencial de cada condutor no circuito?(considere que a referência de potencial nulo é o terminal negativo da bateria).

(b) Qual é a carga em cada placa dos capacitores? Qual é a carga total que passa pela bateria?

Resposta:

(a) Considere a região 1 como aquela formada pelo terminal positivo da bateria e todos os condutores a ele conectados (vai até o capacitor de 6μF). Nesta região, o potencial é V_a=12V. Considere a região 2 como aquela formada pelo terminal negativo da bateria e todos os condutores a ele conectados. Nesta, V_b=0. Considere a região 3 como aquela formada por todos os condutores mutuamente conectados. Nesta, o potencial é V_m.

Como Q=C.V, e as cargas nas regiões 1 e 2 são iguais, V_m=4V, pois da região 2 para a 3 o potencial sobe por um capacitor de capacitância 12 μF e, da região 3 para a 1 por um de 6μF.

Resposta (continuação):

(b) Portanto, $V_1 = V_a - V_m$ e $V_2 = V_m - V_b$. Usando Q=C.V, escreve-se

$$Q_1 = C_1.V_1 = C_1.(V_a - V_m) \ e \ Q_2 = C_2.V_2 = C_2.(V_m - V_b),$$

Eliminando V_m, resulta $V_a - V_b = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}.$

Como não há transferência de carga para a região 3, $Q_1=Q_2=Q$. Ou seja,

$$Q = Q_1 = Q_2 = \frac{V_a - V_b}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{12V - 0}{\frac{1}{6\mu F} + \frac{1}{12\mu F}} = 48\mu C.$$

A capacitância equivalente à da combinação em série é Q/V, no caso em questão: $C_{eq}=(48\mu C)/(12V)=4\mu F$. Em geral $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$