Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP2 - Segundo Semestre de 2018

Questões:

1. (1.5) Aplicando a fórmula do Binômio de Newton, calcule o coeficiente de x^{10} no desenvolvimento de

$$(\frac{3}{x^6} - 5x^4)^{50}$$

Justifique a resposta.

Resposta: Como $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b^k a^{n-k}$ temos que o termo geral desta soma corresponde a

$$T_{k+1} = C_n^k b^k a^{n-k}$$

O objetivo da questão é determinar o coeficiente de x^{10}, portanto devemos encontrar o termo que contém tal coeficiente. Para isso, precisamos determinar k.

Neste caso temos $n = 50$, $a = \frac{3}{x^6}$ e $b = -5x^4$. Assim, resulta:

$$\begin{aligned}
T_{k+1} &= C_{50}^k (-5x^4)^k \, (\tfrac{3}{x^6})^{50-k} &= \\
&= C_{50}^k \, (-5)^k \, x^{4k} \, \tfrac{3^{50-k}}{x^{300-6k}} &= \\
&= C_{50}^k \, (-1)^k \cdot 5^k \cdot 3^{50-k} \, x^{4k} \, x^{-300+6k} &= \\
&= C_{50}^k \, (-1)^k \cdot 5^k \cdot 3^{50-k} \, x^{4k-300+6k} &= \\
&= C_{50}^k \, (-1)^k \cdot 5^k \cdot 3^{50-k} \, x^{10k-300} &=
\end{aligned}$$

Como queremos encontrar o coeficiente de x^{10}, deve ser $10k-300=10$. Então $k=\frac{300+10}{10}=\frac{310}{10}=31$. Logo o coeficiente de x^{10} é dado por:

$$C_{50}^{31}\,(-1)^{31}\cdot 5^{31}\cdot 3^{50-31}=-C_{50}^{31}\cdot 5^{31}\cdot 3^{19}=-\frac{50!}{19!31!}\cdot 5^{31}\cdot 3^{19}$$

2. (1.0) Pede-se:

   (a) Escrever o enunciado do Teorema das Linhas.

   Resposta: O Teorema das Linhas nos diz que:

$$C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=2^n.$$

   (b) Calcular a seguinte soma usando o Teorema das Linhas:

$$S=C_{10}^2+C_{10}^3+C_{10}^4+\ldots+C_{10}^{10}$$

   Resposta: Temos que $n=10$ e pelo Teorema das Linhas, concluímos: $C_{10}^0+C_{10}^1+C_{10}^2+\cdots+C_{10}^9+C_{10}^{10}=2^{10}$.

   Assim, $C_{10}^2+C_{10}^3+\cdots+C_{10}^{10}=2^{10}-C_{10}^0-C_{10}^1$

   Como $C_{10}^0=\frac{10!}{0!10!}=1$ e $C_{10}^1=\frac{10!}{1!9!}=10$ temos que:

$$C_{10}^2+C_{10}^3+\cdots+C_{10}^{10}=2^{10}-1-10=2^{10}-11$$

3. (1.5) Encontre a fórmula fechada da relação de recorrência:
   $a_n=a_{n-1}+3n$ para todo número natural n, $n\geq 1$
   $a_0=2$
   Justifique.

   Resposta: Vamos utilizar substituição regressiva para determinar a fórmula fechada da relação de recorrência.

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + 3n &=\\
&= \underbrace{a_{n-2} + 3(n-1)}_{a_{n-1}} + 3n &=\\
&= \underbrace{a_{n-3} + 3(n-2)}_{a_{n-2}} + 3(n-1) + 3n &=\\
&\vdots\\
&= a_{n-i} + 3(n-i+1) + 3(n-i+2)) + \ldots + 3n &=\\
&= a_{n-i} + 3[(n-i+1) + (n-i+2) + \ldots + n] &=
\end{aligned}
$$

Quando $n - i = 0$, temos $i = n$. Daí,

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_0 + 3[(n-n+1)) + (n-n+2) + \ldots + n] &=\\
&= 2 + 3 \times [1 + 2 + \ldots + n] &=\\
&= 2 + 3 \times \underbrace{[1 + 2 + \ldots + n]}_{\text{soma dos } n \text{ primeiros termos de uma P.A de razão 1}} &=\\
&= 2 + 3 \times \left(\tfrac{n(n+1)}{2}\right)
\end{aligned}
$$

4. (1.5) Seja G um grafo planar conexo **planar**, 3-regular, com 20 vértices. Determine o número de arestas e o número de faces de G. Justifique.

Resposta: Pelo Teorema do Aperto de Mãos, temos:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

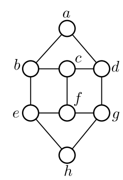
Como G é um grafo planar conexo 3-regular, então todos os vértives do grafo possuem grau 3. O grafo G possui 20 vértices, então:

$$3 \times 20 = 2m \Rightarrow 60 = 2m \Rightarrow \boxed{\mathrm{m = 30}}$$

Pelo teorema de Euler para grafos planares temos que em um grafo planar, $f = m - n + 2$, onde f, m, n denotam respectivamente os números de faces, arestas e vértices do grafo. Assim, G possui:

$$f = m - n + 2 \Rightarrow f = 30 - 20 + 2 \Rightarrow \boxed{\mathrm{f = 12}}$$

5. (4.5) As seguintes perguntas devem ser respondidas considerando o grafo $G = (V, E)$, dado abaixo:



(a) G é bipartido? Justifique.

Resposta: Sim, pois podemos exibir a seguinte bipartição: $V = V_1 \cup V_2$, onde $V_1 = \{a, c, e, g\}$ e $V_2 = \{b, d, f, h\}$ (Figura 1).

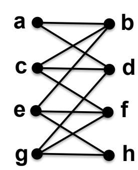


Figura 1: Grafo bipartido G

(b) Desenhe $\overline{G}$ (grafo complemento de G). O grafo $\overline{G}$ é bipartido? Justifique.

Resposta: O complemento do grafo G está representado abaixo na Figura 2:

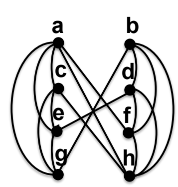


Figura 2: Grafo complementar de G

Sabemos que um grafo G é bipartido se e somente G não possui ciclo ímpar, e neste caso o grafo $\overline{G}$ possui ciclo ímpar, como por exemplo, a, c, e, a. Logo, $\overline{G}$ não é bipartido.

(c) Escreva a sequência de graus de vértices de G.

Resposta: A sequência de graus é $(2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$.

(d) G é euleriano? Justifique.

Resposta: NÃO, pois por teorema temos que um grafo G é euleriano se e somente se todo vértice de G possui grau par.

Os graus dos vértices b, c, d, e, f e g do grafo G possuem grau ímpar, isto é, $d_G(b) = d_G(c) = d_G(d) = d_G(e) = d_G(f) = d_G(g) = 3$.

Logo, G não é euleriano.

(e) G é hamiltoniano? Justifique.

Resposta: SIM, pois podemos exibir o seguinte ciclo hamiltoniano: $abcfehgda$.

(f) Qual o diâmetro de G e qual o centro de G? Justifique.

Resposta: Sabemos que:

- A distância entre vértices v, w, denotada por $d(v, w)$ é o tamanho do menor caminho entre v e w, caso exista algum.
- A excentricidade de um vértice v, denotada por $e(v)$, é a maior distância de v a qualquer outro vértice do grafo.
- O diâmetro de um grafo G, denotado por $\text{diam}(G)$, é o valor da maior excentricidade de G.
- O centro de um grafo G, denotado por $C(G)$, é o conjunto de vértices com a menor excentricidade de G.

Assim, como $e(a) = e(b) = e(c) = e(d) = e(e) = e(f) = e(g) = e(h) = 3$, temos que $\text{diam}(G) = 3$ e $C(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\} = V(G)$.