Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD2 - Segundo Semestre de 2012

Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (1.5) Usando o Teorema das Linhas calcule a seguinte soma:

$$S = \sum_{k=2}^{n} kC_n^k$$

Resposta: O Teorema das linhas nos diz que: $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$. Observe que não podemos aplicar diretamente este teorema a este somatório, visto que a cada termo C_n^k está multiplicado por k.

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=2}^{n} kC_n^k \\
&= \sum_{k=2}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=2}^{n} n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= n\sum_{k=2}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1)-(k-1)!} \\
&= n\sum_{k=2}^{n} C_{n-1}^{k-1} \\
&= n(C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3 + \cdots + C_{n-1}^{n-1})
\end{aligned}$$

Observe que a linha $(n-1)$ do triângulo de Pascal não está completa: falta no somatório o termo C^0_{n-1}. Assim, aplicando o teorema das linhas, temos:

$$\begin{aligned} S &= n(C^1_{n-1} + C^2_{n-1} + C^3_{n-1} + \cdots + C^{n-1}_{n-1}) - nC^0_{n-1} \\ &= n(2^{n-1} - C^0_{n-1}) \end{aligned}$$

Como C^0_{n-1}, temos que:

$$S = n(2^{n-1} - 1)$$

2. (1.5) Determine para que valores de n o desenvolvimento do binômio de Newton de:

$$\left(\frac{2}{7}x^3 - \frac{1}{6x^2}\right)^n$$

possui um termo independente de x. Justifique.

Resposta: A fórmula para o termo geral do desenvolvimento do Binômio de Newton de $(a+b)^n$ é dada por: $T_{k+1} = C^k_n \ a^k \ b^{n-k}$, para $k = 0, 1, \cdots, n$. Neste caso, temos que determinar o valor de n para que este desenvolvimento apresente termo independente. Note que $a = \frac{2}{7}x^3$ e $b = -\frac{1}{6x^2}$. Assim:

$$T_{k+1} = C^k_n \left(\frac{2x^3}{7}\right)^k \left(\frac{-1}{6x^2}\right)^{n-k}$$

$$T_{k+1} = C^k_n \left(\frac{2}{7}\right)^k x^{3k} \left(\frac{-1}{6}\right)^{n-k} x^{-2(n-k)}$$

$$T_{k+1} = C^k_n \left(\frac{2}{7}\right)^k \left(\frac{-1}{6}\right)^{n-k} x^{3k} \ x^{-2(n-k)}$$

$$T_{k+1} = C_n^k \left(\frac{2}{7}\right)^k \left(\frac{-1}{6}\right)^{n-k} x^{5k-2n}$$

Como queremos que o desenvolvimento apresente termo independente temos que:

$$5k - 2n = 0$$

Portanto,

$$k = \frac{2n}{5}.$$

Note que, como k deve ser um número inteiro, n deve ser um múltiplo de 5. Desta forma, $n = 5m$, para todo m natural.

3. (1.5) Encontre a fórmula fechada da seguinte relação de recorrência, usando substitução regressiva.

$$a_n = \frac{1}{3}a_{n-2} \text{ para } a_0 = 1,\ a_1 = 0.$$

Justifique.

Resposta:

Utilizando o método da Substituição regressiva temos:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{3}a_{n-2} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}a_{n-4}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^2 a_{n-4} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^2 a_{n-(2\times 2)} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\, a_{n-6}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^3 a_{n-6} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^3 a_{n-(2\times 3)} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\, a_{n-8}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^4 a_{n-8} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^4 a_{n-(2\times 4)} \\
&\vdots \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^i a_{n-2i}
\end{aligned}
$$

Fazendo $n - 2i = 0$ temos que $n = 2i$. Daí,

$$a_{2i} = \left(\frac{1}{3}\right)^i a_0$$

$$a_{2i} = \left(\frac{1}{3}\right)^i$$

Por outro lado, fazendo $n - 2i = 1$ temos que $n = 2i + 1$, donde:

$$a_{2i+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^i a_1$$

$$a_{2i+1} = 0$$

Assim,

$$a_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^i, & \text{se n é par } (n = 2i) \\ 0, & \text{se n é ímpar } (n = 2i + 1) \end{cases}$$

4. (1.5) Responda as seguintes perguntas, **justificando** a resposta de cada uma delas.

   (a) Existe algum grafo com sequência dos graus de vértices $(2, 3, 3, 3, 3, 3)$?

   Resposta: Não. O Teorema do Aperto de Mãos nos diz que:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m,$$

   ou seja, um número par.

   Note que $2 + 5 \times 3 = 17$, portanto, pelo Teorema do Aperto de Mãos, não existe grafo com esta sequência de graus.

   (b) Existe algum grafo com sequência dos graus de vértices $(0, 1, 2, 3, 4)$?

   Resposta:

   Se o grafo considerado for um grafo simples, então a resposta é não, pois em um grafo simples com n vértices não existe um vértice isolado (ou seja, de grau zero) e um vértice universal (ou seja, de grau $n - 1$).

   OBS.: Sempre consideramos grafos simples, a menos que seja dito o contrário. Mas se o grafo considerado for um multigrafo, então a resposta é sim. Observe o seguinte multigrafo com sequência de graus de vértices $(0, 1, 2, 3, 4)$.

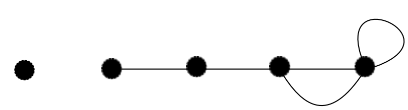


Figura 1: Multigrafo com sequência de graus de vértices $(0, 1, 2, 3, 4)$.

   (c) Existe algum grafo com sequência dos graus de vértices $(2, 2, 3, 3, 3, 3)$?

   Resposta: Sim. Observe o grafo da Figura 2:

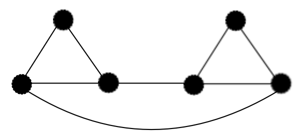


Figura 2: Grafo com sequência de graus de vértices $(2, 2, 3, 3, 3, 3)$.

5. (1.0) Desenhe um grafo cujos vértices estão associados aos números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, e tal que, dois vértices são conectados por uma aresta se e somente se os números correspondentes não possuem divisor comum maior do que 1.

   Resposta:

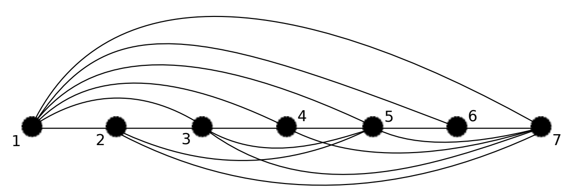
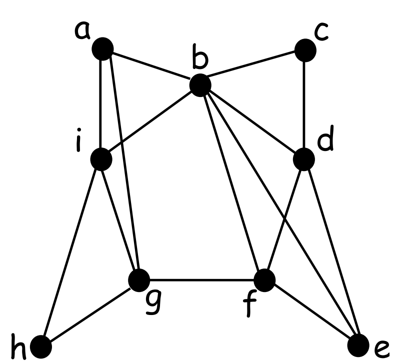


Figura 3: Grafo com vértices $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ tais que dois vértices i e j são adjacentes se e somente se $MDC(i, j) = 1$.

6. (3.0) Considere o grafo G dado abaixo. Responda aos seguintes itens, **justificando** a resposta de cada uma deles.



(a) G é bipartido?

Resposta: Não. Um grafo G é bipartido se e somente se G não possui ciclos ímpares.

Como G possui diversos ciclos ímpares, tais como a, b, i, a, G não é bipartido.

(b) Qual o centro de G?

Resposta: O centro de G é formado pelos vértices de menor excentricidade. Como $e(a) = e(b) = e(f) = e(i) = 2$ e $e(c) = e(d) = e(e) = e(g) = e(h) = 3$ temos que $C(G) = \{a, b, f, i\}$

(c) G é um grafo hamiltoniano?

Resposta: Sim, pois podemos exibir o seguinte ciclo Hamiltoniano (ciclo que passa por todos os vértices do grafo sem repetição):

$$a, b, c, d, e, f, g, h, i, a.$$

(d) G é um grafo euleriano?

Resposta: Não. Um grafo G é Euleriano se e somente se todos os vértices de G possuem grau par.

Como $d(a) = d(e) = 3$, temos que G não é Euleriano.

(e) Desenhe uma árvore geradora de G.

Resposta: Uma árvore geradora é um subgrafo gerador H de G isto é, $V(H) = V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$ tal que H é acíclico e conexo, ou seja, uma árvore.

Considere a seguinte árvore geradora de G.

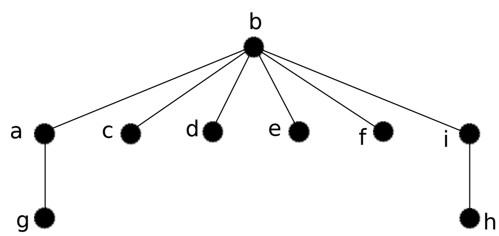


Figura 4: Árvore Geradora de G.