Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP2 - Primeiro Semestre de 2017

Questões:

1. (1.0) Usando o Teorema das Diagonais calcule:

$$C_5^2 + C_6^3 + C_7^4 + \cdots + C_{15}^{12}$$

Resposta: Temos que $C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \ldots + C_{n+r}^r = C_{n+r+1}^r$ (Teorema das Diagonais). Logo:

$$\begin{array}{rcr} & C_5^2 + C_6^3 + C_7^4 + \cdots + C_{15}^{12} & = \\ = & C_3^0 - C_3^0 + C_4^1 - C_4^1 + C_5^2 + C_6^3 + C_7^4 + \cdots + C_{15}^{12} & = \\ = & \underbrace{C_3^0 + C_4^1 + C_5^2 + C_6^3 + C_7^4 + \cdots + C_{15}^{12}}_{Teorema\ das\ diagonais,\ quando\ n=3\ e\ r=12} - C_3^0 - C_4^1 & = \\ = & C_{3+12+1}^{12} - C_3^0 - C_4^1 & = \\ = & C_{16}^{12} - C_3^0 - C_4^1 & = \\ = & \frac{16!}{12!4!} - \frac{3!}{0!3!} - \frac{4!}{1!3!} & = \\ = & 1820 - 1 - 4 & = \\ = & 1815 & \end{array}$$

2. (1.5) Aplicando a fórmula do Binômio de Newton, calcule o coeficiente de x^9 no desenvolvimento de $(1-2x^3)^{20}$. Justifique a resposta.

Resposta: A fórmula para o termo geral do desenvolvimento do Binômio de Newton de $(a+b)^n$ é dada por: $T_{k+1} = C_n^k\ a^{n-k}\ b^k$, para $k = 0, 1, \cdots, n$. Neste caso temos $n = 20$, $a = 1$ e $b = -2x^3$.

$$\begin{array}{rcl} T_{k+1} & = & C_{20}^k\ (1)^{20-k}\ (-2x^3)^k \\ & = & C_{20}^k\ (1)^{20-k}\ (-1)^k\ 2^k\ x^{3k} \end{array}$$

Como queremos o coeficiente de x^9, temos:

$$3k = 9$$
$$\boxed{\text{k} = 3}$$

Portanto, $T_4 = C_{20}^{3}\ (1)^{20-3}\ (-1)^3\ 2^3\ x^9 = \frac{20!}{17!3!}\ (1)^{17}\ (-1)^3\ 2^3\ x^9 = -\ 8\ \frac{20!}{17!3!}\ x^9$. O coeficiente de x^9 no desenvolvimento de $(1-2x^3)^{20}$ é $-\ 8\ \frac{20!}{17!3!}$.

3. (1.5) Encontre a fórmula fechada da relação de recorrência:
   $a_n = a_{n-1} + 3^n \qquad n$ natural, $n \geq 1$
   $a_0 = 1$
   Descreva o processo utilizado para chegar é fórmula.

   Resposta: Utilizando o método da Substituição regressiva temos:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 3^n \\ &= a_{n-2} + 3^{n-1} + 3^n \\ &= a_{n-3} + 3^{n-2} + 3^{n-1} + 3^n \\ &\vdots \\ &= a_{n-i} + (3^{n-i+1} + 3^{n-i+2} + 3^{n-i+3} + \cdots + 3^n) \end{aligned}$$

Fazendo $n - i = 0$ temos que $i = n$ e sabendo que $a_0 = 1$, temos:

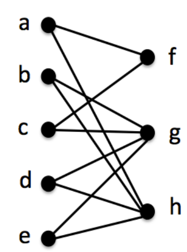
$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + (3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n) \\ &= 1 + (3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n) \\ &= \underbrace{3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n}_{\text{soma dos } n+1 \text{ primeiros termos de uma P.G de razão 3.}} \\ &= \frac{3^{n+1}-1}{2} \end{aligned}$$

Portanto, a fórmula fechada para a relação de recorrência é $a_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}, n \geq 0, a_0 = 1$.

4. (4.5) Seja $G = (V, E)$ um grafo bipartido com bipartição $V = (V_1, V_2)$ dado por: $V_1 = \{a, b, c, d, e\}$ e $V_2 = \{f, g, h\}$,
$E(G) = \{(a, f), (a, h), (b, g), (b, h), (c, f), (c, g), (d, g), (d, h), (e, g), (e, h)\}$

   (a) Desenhe o grafo G.

   Resposta: A representação gráfica do grafo G é:



   (b) G tem algum vértice universal? Justifique.

   Resposta: A resposta é não, pois um vértice é universal quando ele é adjacente a todos os vértices do grafo. Como o grafo é bipartido, temos que vértices da mesma bipartição não são adjacentes.

   (c) Qual a vizinhança do vértice h? Justifique.

   Resposta: Os vizinhos do vértice h são a, b, d e e, pois estes vértices são adjacentes ao vértice h.

   (d) G é hamiltoniano? Justifique.

   Resposta: Não. Observe que todo ciclo de G tem tamanho 4. Logo, não existe ciclo que inclua todos os vértices de G sem repetição de vértices.

   (e) G é euleriano? Justifique.

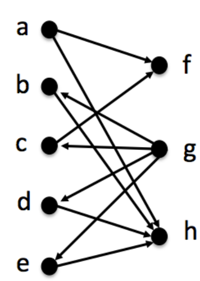
   Resposta: A afirmação é verdadeira. Sabemos que um grafo G é euleriano se ele admite um circuito euleriano, isto é, um circuito que passe por todas as arestas exatamente uma vez. O trajeto euleriano é $afcgdhegbha$.

E além disso, temos a seguinte caracterização para os grafos eulerianos: Um grafo é euleriano se e somente se o grau de todos os seus vértices é par.

Temos que no grafo G, $d(a) = d(b) = d(c) = d(d) = d(e) = d(f) = 2$ e $d(g) = d(h) = 4$, isto é, todos os vértices possuem grau par, satisfazendo a caracterização de grafos eulerianos.

(f) Dê uma orientação para cada aresta de G, de modo que o digrafo D_G obtido tenha fonte e sumidouro. Desenhe o digrafo D_G e aponte, justificando, uma fonte e um sumidouro.

Resposta: Seja D_G o digrafo que possui a fonte g $((d^-(g) = 0))$ e o sumidouro h $((d^+(h) = 0))$.



5. (1.5) Seja G um grafo planar conexo e com sequência de graus de vértices dada por $(2, 2, 3, 3, 3, 4, 5)$. Determine o número de faces de G. Justifique formalmente.

Resposta: Sejam $d(a) = d(b) = 2$, $d(c) = d(d) = d(e) = 3$, $d(f) = 4$ e $d(g) = 5$, e $n = 7$, temos que $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2m \Rightarrow 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 4 + 5 = 2m \Rightarrow 22 = 2m \Rightarrow \boxed{\text{m=11}}$.

Seja f o número de faces do grafo G. Como G é conexo e planar, a fórmula de Euler nos diz que $n - m + f = 2$. Como $n = 7$ e $m = 11$, então $f = m - n + 2 \Rightarrow f = 11 - 7 + 2 \Rightarrow \boxed{\text{f = 6}}$.