Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AP2 - Segundo Semestre de 2015

Nome -
Assinatura -

Observações:

1. Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular. Deixe o resultado indicado, como um produto ou quociente ou potência de números inteiros ou fatoriais.

2. Resultado sem indicação de como foi obtido, não será considerado.

3. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.

4. Você pode usar lápis para responder as questões.

5. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.

6. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

Questões:

1. (1.5) Usando o Teorema das Colunas calcule a seguinte soma:

$$C_{12}^{10} + C_{13}^{10} + C_{14}^{10} + \cdots + C_{25}^{10}$$

Resposta: O Teorema das Colunas afirma que:

$$C_{p}^{p} + C_{p+1}^{p} + \ldots + C_{n+p}^{p} = C_{n+p+1}^{p+1}$$

Assim, temos

$$C_{10}^{10} + C_{11}^{10} + C_{12}^{10} + C_{13}^{10} + \ldots + C_{25}^{10} = C_{26}^{11}$$

Daí,

$$C_{12}^{10} + C_{13}^{10} + \ldots + C_{25}^{10} = C_{26}^{11} - C_{10}^{10} - C_{11}^{10}$$

$$C_{12}^{10} + C_{13}^{10} + \ldots + C_{25}^{10} = \frac{26!}{15!11!} - 1 - 11$$

$$C_{12}^{10} + C_{13}^{10} + \ldots + C_{25}^{10} = \frac{26!}{15!11!} - 12$$

2. (1.5) Aplicando a fórmula do Binômio de Newton, calcule o coeficiente de x^{21} no desenvolvimento de $(5x^3 - \frac{4}{x^2})^{52}$. Justifique a resposta.

Resposta: O termo geral do Binômio de Newton é dado por: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

Considerando $a = 5x^3$, $b = -\frac{4}{x^2} = -4x^{-2}$ e $n = 52$, temos:

$$T_{k+1} = C_{52}^{k} (5x^3)^{52-k} (-4x^{-2})^k$$

$$T_{k+1} = C_{52}^{k} 5^{52-k} x^{156-3k} (-1)^k 4^k x^{-2k}$$

$$T_{k+1} = C_{52}^{k} 5^{52-k} (-1)^k 4^k x^{156-3k} x^{-2k}$$

$$T_{k+1} = C_{52}^{k} 5^{52-k} (-1)^k 4^k x^{156-5k}$$

Como queremos o coeficiente de x^{21} temos:

$$156 - 5k = 21$$

Logo, $k = 27$. Daí, o coeficiente de x^{21} é dado por:

$$C_{52}^{27} 5^{25} (-1)^{27} 4^{27} = -\frac{52!}{25!27!} 5^{25} 4^{27}$$

3. (1.5) Encontre a fórmula fechada da relação de recorrência:
   $a_n = a_{n-1} + 4n \qquad n$ natural, $n \geq 1$
   $a_0 = -1$
   Descreva o processo utilizado para chegar à fórmula.

   Resposta: Vamos utilizar o método de Substituições Regressivas.

$$\begin{array}{rcc} a_n & = & a_{n-1} + 4n \\ & = & a_{n-2} + 4(n-1) + 4n \\ & = & a_{n-3} + 4(n-2) + 4(n-1) + 4n \\ \vdots & & \vdots \\ & = & a_{n-i} + 4[(n-(i-1)) + (n-(i-2)) + \ldots + (n-(i-i))] \\ & = & a_{n-i} + 4[(n-i+1) + (n-i+2) + \ldots + (n-i+i)] \end{array}$$

   Quando $n = i$ temos $n - i = 0$. Daí,

$$a_n = a_0 + 4 \underbrace{[1 + 2 + \ldots + n]}_{\text{Soma da PA de } n \text{ termos}}$$

$$a_n = -1 + 4\left[\frac{(1+n)n}{2}\right]$$

$$a_n = 2n^2 + 2n - 1$$

   Logo, a fórmula fechada da relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 4n$, n natural, $n \geq 1$, $a_0 = -1$ é dada por $a_n = 2n^2 + 2n - 1$.

4. (3.0) Responda as seguintes perguntas, **justificando** a resposta de cada uma delas.

   (a) Dado um grafo G com exatamente dois componentes conexos G_1 e G_2, calcule quantas arestas tem o grafo G, sabendo que G_1 é uma árvore com 20 vértices e G_2 é o grafo bipartido completo $K_{5,7}$.

   Resposta: Uma árvore tem $m_T = n_T - 1$ arestas, onde m_T e n_T indicam o número de arestas e vértices da árvore, respectivamente. Assim, em G_1 temos $n_1 = 20$ e, consequentemente, $m_1 = 20 - 1 = 19$ arestas.

   Um grafo bipartido completo com 5 vértices em uma partição e 7 vértices na outra, tem todas as arestas possíveis entre as partições. Logo, G_2 tem $m_2 = 7 \times 5 = 35$ arestas.

   Como G_1 e G_2 são os únicos componentes conexos de G, $m = m_1 + m_2 = 19 + 35 = 54$ arestas.

   (b) O que representa a soma das entradas de uma **linha** de uma matriz de adjacência de:

   (i) um grafo (simples)?

   Resposta: Em um grafo simples, as entradas da matriz de adjacência são 0 e 1 que representam *não adjacência* ou *adjacência*, respectivamente. Sendo assim, ao somarmos uma linha da matriz de adjacência, temos, justamente, o grau do vértice correspondente àquela linha.

   (ii) um digrafo (simples) ?

   Resposta: Em um digrafo as entradas da matriz de adjacência também são 0 e 1. Contudo, o zero indica que nenhuma aresta *diverge* do vértice correspondente à linha para o vértice da coluna correspondente e o 1 indica que uma aresta *diverge* de tal vértice para o vértice da respectiva coluna. Assim, a soma de uma linha de uma matriz de adjacência de um digrafo representa o número de arestas que divergem do vértice correspondente àquela linha, isto é, indica o grau de saída daquele vértice.

(c) Seja G um grafo conexo, planar, k-regular (isto é, regular de grau k). Se G tem 10 vértices e 17 faces, determine o valor de k, e quantas arestas G possui.

Resposta: O Teorema do Aperto de Mãos garante que

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

Como o grafo é k-regular e possui 10 vértices, temos

$$\sum_{v \in V} d(v) = 10k$$

Portanto, $10k = 2m$ e $m = 5k$.

Como o grafo é planar, o Teorema de Euler diz que $f - m + n = 2$, onde f, m e n indicam o número de faces, arestas e vértices, respectivamente. Assim, como $f = 17$ e descobrimos que $m = 5k$, temos

$$17 - 5k + 10 = 2$$

$$k = 5$$

Daí, $m = 25$.

Logo, o grafo G é 5-regular e possui 25 arestas.

5. (2.5) As seguintes perguntas devem ser respondidas considerando o grafo G dado por:
$V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ e
$E(G) = \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (b, e), (c, e), (c, f), (d, e), (e, f)\}$

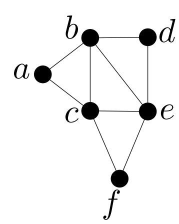

Figura 1: Grafo G.

(a) G é bipartido? Justifique o SIM ou o NÃO.

Resposta: Não. Um grafo é bipartido se e somente se não possui ciclo ímpar. O grafo G possui, por exemplo, o ciclo $abca$, que é um ciclo ímpar de tamanho 3.

(b) G é euleriano? Justifique.

Resposta: Sim. Um grafo é euleriano se e somente se todos os seus vértices possuem grau par. A sequência dos graus dos vértices de G é dada por $(2, 2, 2, 4, 4, 4)$.

(c) G é hamiltoniano? Justifique.

Resposta: Sim, pois podemos apresentar um ciclo hamiltoniano, i.e, um ciclo que inclui todos os vértices do grafo: $abdefca$.

(e) Determine o centro de G. Justifique.

Resposta: A distância entre dois vértices é o tamanho do menor caminho entre esses vértices.

A excentricidade de um vértice v, indicada por $e(v)$, é a maior distância entre v e qualquer outro vértice do grafo.

O centro de um grafo, indicado por $c(G)$, é o conjunto dos vértices de menor excentricidade do grafo.

Assim, para o cáculo do centro, vamos calcular as excentricidades dos vértices. Note que, em G, partindo de um vértice qualquer, em no máximo dois passos chegamos em qualquer outro vértice. Além disso, não temos vértice universal em G. Logo, $e(a) = e(b) = e(c) = e(d) = e(e) = e(f) = 2$. Portanto, $c(G) = V(G)$.