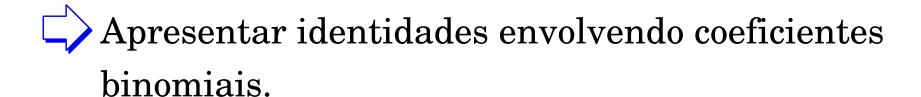
Módulo: Coeficientes binomiais e aplicações





Objetivo:



Importância:

Na análise de algoritmos aparece a necessidade de manipular relações envolvendo coeficientes binomiais.

Aula 13: Coeficientes binomiais

- Definição
- Argumentos combinatório e algébrico
- Identidades
- Triângulo de Pascal
- Teoremas das linhas, das colunas e das diagonais

Definição:



$$\frac{C(n, r)}{r! (n - r)!} \qquad (0 \le r \le n)$$

número de possibilidades de escolher r objetos diferentes entre n objetos diferentes

expressão algébrica do coeficiente binomial envolvendo fatoriais





Argumentos combinatório e algébrico:

- Dois tipos de argumentos podem ser usados na dedução de teoremas e identidades envolvendo fatoriais ou coeficientes binomiais:
 - combinatórios
 - algébricos
 - O raciocínio combinatório está baseado na decomposição de um conjunto em subconjuntos adequados e na contagem de seus elementos aparecem as combinações simples.
 - O raciocínio algébrico está baseado na manipulação dos fatoriais.







Observações:

Na <u>resolução</u> de problemas combinatórios tem-se que:

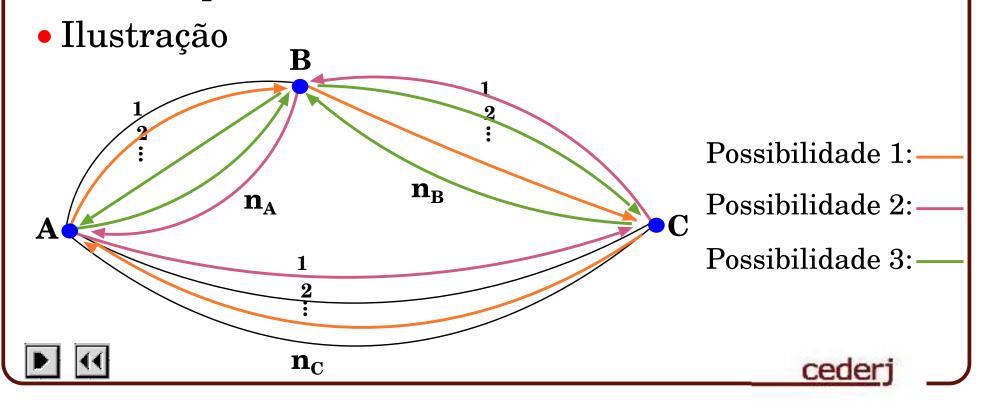
- um raciocínio combinatório determina a
 forma de uma expressão algébrica
 e vice-versa
 uma forma da expressão algébrica sugere um
 raciocínio combinatório.
- raciocínios combinatórios equivalentes geram identidades algébricas e vice-versa.





Exemplo 1:

Considere três cidades A, B, C. Sejam n_A , n_B e n_C os números de caminhos unindo diretamente A e B, B e C, e A e C respectivamente. Quantos caminhos originados em A, chegam a C e regressam a A passando pelo menos uma vez por B?



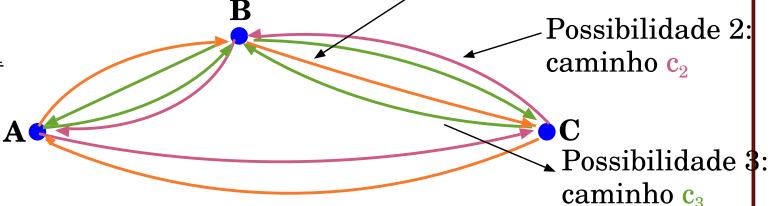
13.8

Exemplo 1 (continuação):

Possibilidade 1: caminho c₁

Resolução:

Raciocínio 1



<u>Sejam</u>

W:= conjunto de caminhos que partem de A, chegam a C e voltam a A passando pelo menos uma vez por B.

 U_1 := conjunto dos caminhos que partem de A, chegam a C <u>passando</u> por B e retornam <u>diretamente</u> a A ($c_1 \in U$)

 U_2 := conjunto dos caminhos que saem de A, chegam a C <u>diretamente</u> e voltam a A <u>passando</u> por B ($c_2 \in U_2$)

V:= conjunto dos caminhos que se originam em A, chegam a C e retornam a A passando as duas vezes por B ($c_3 \in V$)

$$\mathbf{W} = \mathbf{U}_1 \cup \mathbf{U}_2 \cup \mathbf{V}, \ |\mathbf{W}| \overset{\mathrm{P.A.}}{=} |\mathbf{U}_1| + |\mathbf{U}_2| + |\mathbf{V}| \quad (\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2 = \varnothing, \, \mathbf{U}_1 \cup \mathbf{V} = \varnothing, \, \mathbf{U}_2 \cap \mathbf{V} = \varnothing)$$

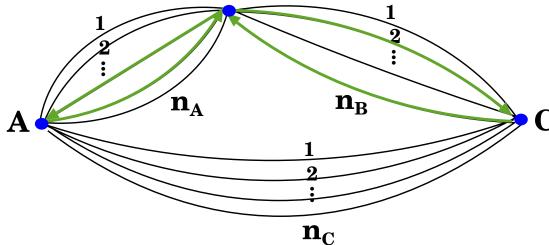




13.9

Exemplo 1 (raciocínio 1):





Calculamos

$$|U_1| = C(n_A, 1) C(n_B, 1) C(n_C, 1) = n_A n_B n_C$$

$$|U_2| = C(n_C, 1) C(n_B, 1) C(n_A, 1) = n_C n_B n_A$$

$$|V| = C(n_A, 1) C(n_B, 1) C(n_B, 1) C(n_A, 1) = (n_A n_B)^2$$
possibilidades entre possibilidades entre

A e C passando por B C e A passando por B

Resposta 1:

$$|\mathbf{W}| = \mathbf{n}_{\mathbf{A}} \mathbf{n}_{\mathbf{B}} \mathbf{n}_{\mathbf{C}} + \mathbf{n}_{\mathbf{C}} \mathbf{n}_{\mathbf{B}} \mathbf{n}_{\mathbf{A}} + (\mathbf{n}_{\mathbf{A}} \mathbf{n}_{\mathbf{B}})^2$$

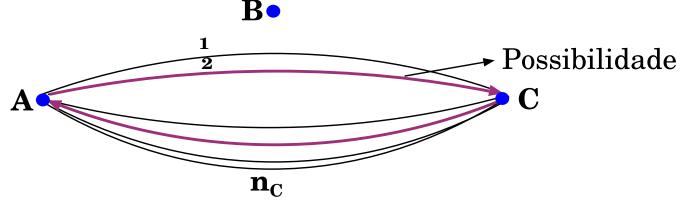




13.10

Exemplo 1 (continuação):

Raciocínio 2 (baseado em complemento de um conjunto)



W:= conjunto de caminhos que partem de A, chegam a C e voltam a A passando pelo menos uma vez por B.

U:= conjunto universo:= conjunto de <u>todos</u> os caminhos que partem de A, chegam a C e retornam a A.

Y:= conjunto dos caminhos que partem de A, chegam a C e retornam a A sem passar por B.

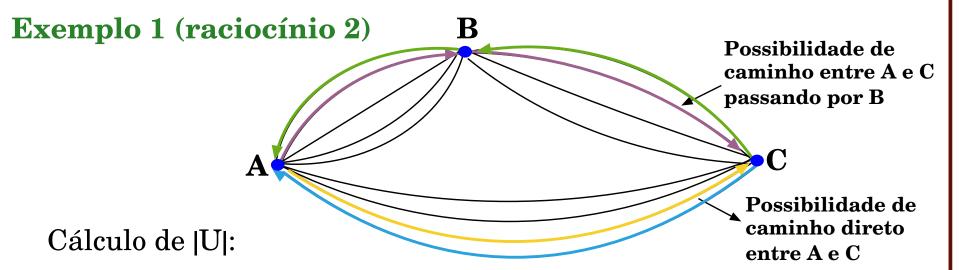
$$W = \overline{Y} = U - Y , \quad |W| \stackrel{P.A.}{=} |U| - |Y|$$

$$|Y| = C(n_C, 1) C(n_C, 1) = n_C^2$$
caminhos que unem
diretamente A e C
$$C = A$$





13.11



• N:= número de caminhos que unem A e C = número de caminhos que unem A e C passando por B + número de caminhos que unem A e C diretamente

$$N = C(n_A, 1)C(n_B, 1) + C(n_C, 1) = n_A n_B + n_C$$
caminhos que caminhos que unem diretamente A e C

• Número de caminhos que unem $C e A = N = n_A n_B + n_C$

•
$$|\mathbf{U}| = N \times N = (\mathbf{n_A n_B} + \mathbf{n_C})^2$$

caminhos caminhos

que unem que unem

 $A \in C \quad C \in A$





Exemplo 1 (continuação raciocínio 2)

Resumindo:

$$|W| = |U| - |Y|$$
, $|Y| = n_C^2$, $|U| = (n_A n_B + n_C)^2$

Resposta 2:

$$|W| = (n_A n_B + n_C)^2 - n_C^2 = (n_A n_B)^2 + 2n_A n_B n_C$$

Resposta do problema:

O número de caminhos que partem de A, chegam a C e retornam a A passando pelo menos uma vez por B é

$$(n_A n_B + n_C)^2 - n_C^2 = n_A n_B n_C + n_C n_B n_A + (n_A n_B)^2.$$







Observação

$$2n_{A}n_{B}n_{C} + (n_{A}n_{B})^{2} = (n_{A}n_{B} + n_{C})^{2} - n_{C}^{2} =$$

$$= (n_{A}n_{B} + n_{C}) (n_{A}n_{B} + n_{C}) - n_{C}^{2} =$$

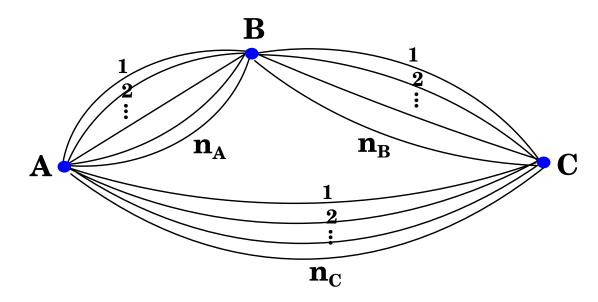
$$= n_{A}n_{B}(n_{A}n_{B} + n_{C}) + n_{C}(n_{A}n_{B} + n_{C}) - n_{C}^{2} =$$

$$= n_{A}n_{B}(n_{C} + n_{B}n_{A}) + n_{C}n_{A}n_{B}$$

Exemplo 2:

Determine o raciocínio combinatório no exemplo 1 motivado pela expressão $n_A n_B (n_C + n_B n_A) + n_C n_A n_B$?

Resolução:



$$\mathbf{M} := \mathbf{n}_{\mathbf{A}} \mathbf{n}_{\mathbf{B}} (\mathbf{n}_{\mathbf{C}} + \mathbf{n}_{\mathbf{B}} \mathbf{n}_{\mathbf{A}}) + \mathbf{n}_{\mathbf{C}} \mathbf{n}_{\mathbf{A}} \mathbf{n}_{\mathbf{B}}$$

caminhos que unem A e C passando por B caminhos que unem C e A caminhos que unem A e C e retornam a A passando 1 vez por B





M:= número de caminhos que unem A e C <u>passando por B</u> e retornam a A por qualquer caminho + número de caminhos que unem A e C <u>sem</u> <u>passar</u> por B e retornam a A passando por B.

S:= conjunto de caminhos que unem A e C <u>passando por</u> B e retornam a A.

T:= conjunto de caminhos que unem <u>diretamente</u> A e C e retornam a A passando por B.

$$\begin{split} \textbf{Resposta:} & \text{ O raciocínio combinatório motivado por} \\ & n_A n_B (n_C + n_B n_A) + n_C n_A n_B \text{ corresponde a considerar} \\ & W = S \cup T \;\;,\; |S| = n_A n_B (n_C + n_B n_A) \;\;,\; |T| = n_C n_A n_B \;, \\ & |W| \stackrel{P.A.}{=} |S| + |T| = M \qquad \qquad (S \cap T = \varnothing) \end{split}$$





Identidades:

(1) Combinação complementar (ou de simetria)

$$C(n, r) = C(n, n - r)$$

Prova: Argumento algébrico

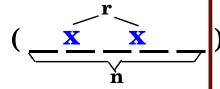
$$C(n, r) = \frac{n!}{r! (n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)! (n-(n-r))!} = C(n, n-r)$$

Argumento combinatório (desafio)

Desafio

Voltar

Fixada uma combinação de r elementos entre n



↓ automaticamente está

definida uma combinação de (n-r) elementos entre n $(\frac{\mathbf{X}}{\mathbf{X}}, \frac{\mathbf{X}}{\mathbf{n}-\mathbf{r}}, \frac{\mathbf{X}}{\mathbf{n}})$

Tem-se o mesmo número de combinações de r elementos escolhidos entre n e de combinações de (n-r) elementos escolhidos entre n, ou seja, C(n, r) = C(n, n-r).





(2) Relação de Stifel (1486 - 1567) ou Fórmula de Pascal (1623 - 1662) C(n, r) + C(n, r + 1) = C(n + 1, r + 1)

Prova: Argumento algébrico (desafio!) Desafio Voltar

$$C(n, r) + C(n, r + 1) = \frac{n!}{r! (n - r)!} + \frac{n!}{(r + 1)! (n - (r + 1))!}$$

$$= \frac{n!}{(r+1)! (n-r)!} [(r+1) + (n-r)] = \frac{n! (n+1)}{(r+1)! (n-r)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(r+1)! ((n+1)-(r+1))!} = C(n+1, r+1)$$



Prova (continuação):

Argumento combinatório

- Seja um grupo (conjunto) formado por n + 1 elementos, onde n são do mesmo tipo e 1 é de outro tipo (por exemplo, n homens, 1 mulher).
- As diferentes maneiras de selecionar nesse grupo um subgrupo de r + 1 elementos (por exemplo, r + 1 pessoas entre os n homens e 1 mulher) podem ser decompostos em 2 classes disjuntas:
 - os que têm r do mesmo tipo e 1 do outro tipo (por exemplo, r homens e 1 mulher)
 - os que têm r + 1 do mesmo tipo
 (por exemplo, r + 1 homens)

Prova (continuação argumento combinatório):

Logo, pelo princípio da adição, resulta:

O número de modos de selecionar nesse grupo r + 1 elementos entre n + 1 é igual a

$$C(n+1, r+1)$$

O número de modos de selecionar **r** elementos entre <mark>n</mark>

O número de modos de selecionar **r + 1** elementos entre **n**

$$C(n, r + 1)$$

Ou seja,

$$C(n + 1, r + 1) = C(n, r) + C(n, r + 1)$$



Observação

Relação de Stifel

$$C(n + 1, r + 1) = C(n, r) + C(n, r + 1)$$
 $n = 1, 2, ...$ $r = 0, 1, ..., n-1$

é equivalente a:

$$C(n, r) = C(n - 1, r - 1) + C(n - 1, r)$$
 $n = 2, ...$ $r = 1, 2, ..., n-1$





(3) Condições de fronteira

$$C(n, 0) = C(n, n) = 1$$
 , $n = 0, 1, ...$

(é a condição de simetria para r = 0)

(4) Condições secundárias

$$C(n, 1) = C(n, n - 1) = n$$
, $n = 1, 2, ...$

(é a condição de simetria para r = 1)

Triângulo de Pascal:

Gráfico 1

• Ilustração:

linhas

ightharpoonup Relação C(n, r) = C(n-1, r-1) + C(n-1, r)

$$C(4, 2) = C(3, 1) + C(3, 2) = 3 + 3 = 6$$
 (n = 4, r = 2)

Observação: C(n, r) está na linha n e na diagonal r



Gráfico 2

Notação:
$$C(n, r) = C_n^r$$

• Ilustração: C₀

- → Observação: C^r_n está na <u>linha</u> n e na <u>coluna</u> r
- Propriedades consideradas:
 - $C_n^0 = C_n^n = 1$ (condições de fronteira) n = 0, 1, 2, ...
 - $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$ (condições secundárias) n = 2, 3, ...
 - $C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r$ (relação de Stifel) n = 2, 3, ..., r = 1, 2, ...



Exemplo 3:

Dada a linha 6 do triângulo de Pascal:

1 6 15 20 15 6 1

Calcule a linha 7 usando as condições de fronteira e as relações de Stifel (fórmula de Pascal).

Resolução: (desafio)

Desafio

Voltar

condições de fronteira

Resposta: A linha 7 do triângulo de Pascal está dada por:

1 7 21 35 35 21 7 cederj

Teorema das linhas, das colunas e das diagonais:

- Motivação do teorema das linhas
 - Ilustração:

n	Gráfico 1	Gráfico 2
0	1	1
1	1 1	1 1
2	1 2 1	1 2 1
3	1 3 3 1	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1	$1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1$
5	1 5 10 10 5 1	$1 \ 5 \ 10 \ 10 \ 5 \ 1$
6	1 6 15 20 15 6 1	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1	$1 7 21 \ 35 \ 35 \ 21 \ 7 1$

→ Observações:nSoma da linha n

3
$$1+3+3+1=8$$
 = 2^{3}
4 $1+4+6+4+1=16$ = 2^{4}
7 $1+7+21+35+35+21+7+1=128=2^{7}$







Teorema das linhas

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$$
 $n = 0, 1, 2, ...$

$$n = 0, 1, 2, ...$$

Observação:

Pelo teorema das linhas, podemos calcular a soma dos elementos de uma linha n sem necessidade de conhecer seus elementos.

Ilustração:

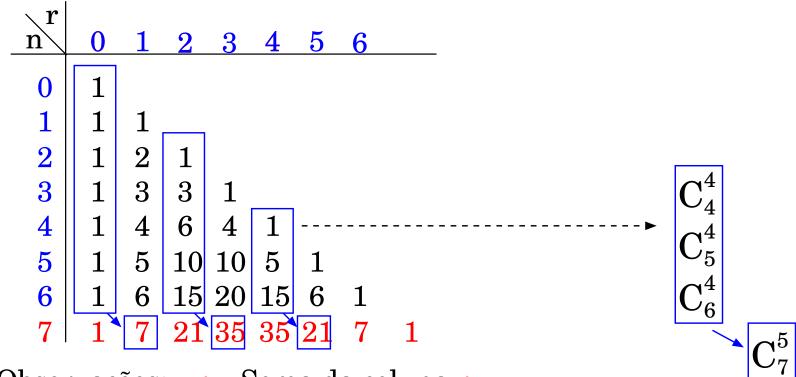
A soma dos elementos da linha 8 do triângulo de Pascal é igual a $2^8 = 256$.





13.27

- Motivação do teorema das colunas
 - Ilustração:



→ Observações: r Soma da coluna r

$$0 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7 = C(7, 1) = C(6 + 1, 0 + 1)$$

2
$$1+3+6+10+15=35$$
 = $C(7,3)=C(6+1,2+1)$

4
$$1+5+15=21$$
 = $C(7,5)=C(6+1,4+1)$







Teorema das colunas

$$C_r^r + C_{r+1}^r + C_{r+2}^r + \dots + C_n^r = C_{n+1}^{r+1}$$

$$0 \le r \le n$$

 $n = 0, 1, 2, ...$

• Ilustração:

A soma da coluna associada a r=1 do triângulo de Pascal com o número de linhas n=6 é $C_{6+1}^{1+1}=C_7^2=21$.





Exemplo 4:

Determine o valor da soma

$$S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ... + 50.51.52$$

Resolução:

$$S = \sum_{k=1}^{50} k(k+1)(k+2) =$$

$$= \sum_{k=1}^{50} \frac{1.2 \dots (k-1) k(k+1)(k+2)}{1.2 \dots (k-1)} = \sum_{k=1}^{50} \frac{(k+2)!}{(k-1)!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{50} \frac{3! (k+2)!}{3! (k-1)!} = 3! \sum_{k=1}^{50} \frac{(k+2)!}{3! ((k+2)-3)!} =$$

$$= 3! \sum_{k=1}^{50} C_{k+2}^3 = 3! (C_3^3 + C_4^3 + \dots + C_{52}^3)^{T.C.} = 6 \cdot C_{53}^4 = 1.756.950$$



coluna do triângulo de

Exemplo 5:

Usando as condições secundárias e o teorema das colunas obtenha a identidade

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
 $n = 1, 2, \dots$

Resolução: (desafio)

Desafio

Voltar

$$1 + 2 + 3 + \dots + n \stackrel{C.S.}{=} C_1^1 + C_2^1 + C_3^1 + \dots C_n^1 =$$

$$\stackrel{T.C.}{=} C_{n+1}^2 = \frac{(n+1)!}{2! (n+1-2)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{2! (n-1)!} = \frac{(n+1) n(n-1)!}{2! (n-1)!} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$
cederj

Coeficientes binomiais: Teorema das diagonais

13.31

- Motivação do teorema das diagonais
 - Ilustração:

n	Gráfico 1	Gráfico 2
0	1	1
1	1 1	1 1
2	1 2 1	1 2 1
3	1 3 3 1	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1	1 7 21 35 35 21 7 1

Observações:

$$C_{2}^{0} + C_{3}^{1} + C_{4}^{2} + C_{5}^{3} + C_{6}^{4} = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35 = C_{7}^{4}$$

$$C_{4}^{0} + C_{5}^{1} + C_{6}^{2} = 1 + 5 + 15 = 21 = C_{7}^{2}$$

Coeficientes binomiais: Teorema das diagonais

13.32



Teorema das diagonais

$$C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \dots + C_{n+r}^r = C_{n+r+1}^r$$
 $n = 0, 1, 2, \dots$ $r = 0, 1, 2, \dots$

$$n = 0, 1, 2, ...$$

• Ilustração:

$$n = 2$$
, $r = 4$, $n + r = 6$

$$C_2^0 + C_3^1 + C_4^2 + C_5^3 + C_6^4 = C_7^4 = 35$$



Resumo:

<u>Definição</u>:

Coeficiente binomial:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r! (n-r)!}$$

 $(0 \le r \le n)$

Argumentos:

Na dedução de propriedades envolvendo coeficientes binomiais

combinatórios

algébricos

Observação:

Raciocínios combinatórios equivalentes geram identidades algébricas e vice-versa.

Identidades:

- (1) Combinação complementar : C(n, r) = C(n, n r)
- (2) Relação de Stifel:

$$C(n, r) = C(n - 1, r - 1) + C(n - 1, r)$$
 $n = 2, ...$ $r = 0, 1, ..., n-1$

- (3) Condições de fronteira : C(n, 0) = C(n, n) = 1
- (4) Condições secundárias : C(n, 1) = C(n, n 1) = n

Coeficientes binomiais: Resumo

13.35

Triângulo de Pascal:

<u>Teoremas</u>:

• das linhas: $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$ (linha n)

• das colunas: $C_r^r + C_{r+1}^r + ... + C_n^r = C_{n+1}^{r+1}$ (coluna r)

• das diagonais: $C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + ... + C_{n+r}^r = C_{n+r+1}^r$ (diagonal n)