

## Aula 5: Indução forte

### Conteúdo:

- ⇒ Série de Fibonacci
- ⇒ Indução forte
- ⇒ Indução forte generalizada

## Sequência de Fibonacci:

➡ É uma sequência de números naturais  $\{F_1, F_2, F_3, \dots\}$ , denotada por  $\{F_n\}$  definida da seguinte forma:

$$F_1 = 1$$

$$F_2 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ para } n \geq 3$$

⇒ Ou seja, os termos  $F_n$   $n \geq 3$  são calculados recursivamente:

$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$F_7$	$F_8$	...
1	1	2	3	5	8	13	21	...

[Voltar](#)

**$\{ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots \}$**



Observe a seguinte propriedade:

Somando os termos da sequência de Fibonacci elevada ao quadrado:

$$F_1^2 = 1^2 = 1$$

[Voltar](#)

$$F_1^2 + F_2^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 = 1 \cdot 2 = F_2 \cdot F_3$$

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = 2 \cdot 3 = F_3 \cdot F_4$$

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15 = 3 \cdot 5 = F_4 \cdot F_5$$

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 40 = 5 \cdot 8 = F_5 \cdot F_6$$

**Conjectura:**  $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$

## Exemplo 1:

➡ Mostre que  $F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Prova:

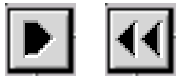
Seja  $P(n) : F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$

(1) Base da indução:

$$P(1) : F_1^2 = 1 = F_1 \cdot F_2 = 1 \cdot 1 = 1 \quad \text{verdadeira}$$

(2) Hipótese de indução (HI):

$$P(k) : F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_k^2 = F_k \cdot F_{k+1} \quad \text{verdadeira}$$



(3) Passo indutivo:

$$P(k) \text{ verdadeira} \Rightarrow \underbrace{P(k+1) \text{ verdadeira}}_{F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_k^2 + F_{k+1}^2 = F_{k+1} \cdot F_{k+2}}$$

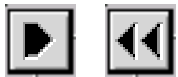
Desenvolvendo:

$$\underbrace{F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_k^2}_{\parallel \text{(HI)}} + \underbrace{F_{k+1}^2}_{\parallel} = F_k \cdot F_{k+1} + F_{k+1}^2 = F_{k+1} \underbrace{(F_k + F_{k+1})}_{\parallel} = F_{k+1} \cdot F_{k+2}$$

Logo  $P(k+1)$  verdadeira

Então pelo PIM

$$P(n) : F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1} \text{ verdadeira } \forall n \in \mathbb{N}$$



## Indução forte (IF):

⇒ Seja  $P(n)$  uma afirmação, para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Se:

(i)  $P(1)$  verdadeira e

(ii)  $P(1), P(2), \dots, P(k)$  verdadeira  $\Rightarrow P(k+1)$  verdadeira

Então  $P(n)$  verdadeira  $\forall n \in \mathbb{N}$

⇒ Observação: O PIM e a IF são equivalentes.

[IF](#)[Voltar](#)

➡ Para aplicarmos a indução forte precisamos executar os três passos a seguir:

(1) Base da indução:

Mostrar que  $P(n)$  verdadeira para  $n = 1$

(2) Hipótese de indução forte:

Assumir que  $P(1), P(2), \dots, P(k)$  são verdadeiras

(3) Passo indutivo:

Mostrar que  $P(k + 1)$  verdadeira, assumindo (2)



## Exemplo 2:

⇒ Considerando a sequência de Fibonacci  $\{F_n\}$ ,  
mostre que  $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$

Prova:

Seja  $P(n) : F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$

(1) Base da indução:

$P_1 : F_1 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^1$  verdadeira



(2) Hipótese da indução forte (HIF):

Assuma que  $P_1, P_2, \dots, P_k$  são verdadeiras

$$F_i < \left(\frac{7}{4}\right)^i \quad \forall i, 1 \leq i \leq k$$

(3) Passo indutivo:

$$P_1, P_2, \dots, P_k \text{ verdadeiras} \Rightarrow \underbrace{P(k+1)}_{F_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}} \text{ verdadeira}$$



Desenvolvendo:

$$F_{k+1} = \underbrace{F_k}_{\text{IH}} + \underbrace{F_{k-1}}_{\text{IH}} < \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \left(\frac{7}{4} + 1\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \left(\frac{11}{4}\right)$$

$$F_k < \left(\frac{7}{4}\right)^k \quad F_{k-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}$$

Observe que  $\frac{11}{4} < 3 < \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2$

$$F_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \frac{11}{4} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}$$

Logo  $P(k+1)$  verdadeira

Então pelo IF  $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$



# Indução forte generalizada:

⇒ Seja  $P(n)$  uma afirmação, para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Se:

(i)  $P(n_0)$  verdadeira

(ii)  $P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(k)$  verdadeira  $\Rightarrow P(k+1)$  verdadeira

( $k = n_0 + k'$ )

Então  $P(n)$  é verdadeira  $\forall n \geq n_0 \quad n \in \mathbb{N}$

➡ Para aplicarmos a IF generalizada precisamos executar os três passos a seguir:

(1) Base da indução:

Mostrar que  $P(n)$  verdadeira para  $n = n_0$

(2) Hipótese de indução:

Assumir que  $P(n_0), P(n_0 + 1), \dots, P(k)$  são verdadeiras ( $\forall k \geq n_0$ )

(3) Passo indutivo:

Mostrar que  $P(k + 1)$  verdadeira, assumindo a hipótese de indução (2)

**Exemplo 3:**

- ⇒ Mostre que todo inteiro maior do que 1 é primo ou produto de primos.

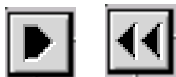
(Obs: primo é um inteiro maior do que 1, que só é divisível por 1 e por ele mesmo. Exemplos: 2, 3, 5, 7 são primos )

**Prova:**

Seja  $P(n)$  :  $n$  é primo ou produto de primos.

(1) Base da indução:

$P(2)$  : 2 é primo    verdadeira



(2) Hipótese de indução forte:

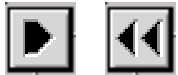
$P(i)$  é verdadeira para  $2 \leq i \leq k$

Assuma que:

$i$  é primo ou produto de primos,  $2 \leq i \leq k$

(3) Passo indutivo:

$P(i)$  verdadeira  $2 \leq i \leq k \Rightarrow \underbrace{P(k+1)}_{\text{II}} \text{ verdadeira}$   
 $k+1$  é primo ou produto de primos



Desenvolvendo:

Temos duas possibilidades mutuamente exclusivas

(i)  $k + 1$  é primo

(ii)  $k + 1$  não é primo

Se (i) acontece então  $P(k + 1)$  é verdadeira

Caso contrário (ii) acontece, então  $k + 1$  não é primo



$k + 1$  não é primo

Então  $k + 1$  pode ser escrito como:

$$k + 1 = a \cdot b \text{ onde } 1 < a < k + 1 \\ 1 < b < k + 1$$

Usando agora a hipótese de indução forte temos que:

$$P(a) \text{ e } P(b) \text{ são verdadeiras} \quad 1 < a \leq k \\ 1 < b \leq k$$



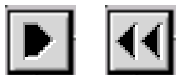
ou seja,  $a$  é primo ou produto de primos e  
 $b$  é primo ou produto de primos

Logo  $k + 1 = a \cdot b$  é produto de primos

Logo  $P(k + 1)$  é verdadeira

**Então** pelo princípio da indução forte generalizada

$P(n) : n$  é primo ou produto de primos  $\forall n \in \mathbb{N} \quad n > 1$



# Resumo:

## Conceitos:

- ⇒ Sequência de Fibonacci
- ⇒ Indução forte generalizada
- ⇒ Estrutura
  - Base de indução:  $P(n)$  verdadeira  $n = n_0$
  - Hipótese de indução:  
 $P(n_0), (n_0+1), \dots, P(k)$  verdadeira  $\Rightarrow P(k + 1)$  verdadeira
- ⇒ Em particular  
 $n_0 = 1$  : Indução forte

## Exercícios:

(1) Seja  $\{a_n\}$  a sequência definida por:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 5$$

$$a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1} \quad n \geq 3$$

Mostre que usando a indução forte  $a_n = 2^n + (-1)^n \forall n \geq 2$

(2) Seja  $\{F_n\}$  a sequência de Fibonacci.

Mostre usando a indução forte que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$