Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
GABARITO AP3 - Segundo Semestre de 2019

**Questões:**

1. (1,5) Mostre usando indução matemática que:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

para todo número natural $n \geq 1$.

*Resposta:*

Seja $P(n) : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo número natural $n$.

**Base da indução:**

Para $n = 1$, tem-se

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{1.2}{2} = \frac{1(1+1)}{2}$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira.

**Hipótese de indução**

Suponha verdadeiro para $k \geq 1$, isto é, $P(k)$ é verdadeira:

$$P(k) : 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

**Passo de indução**

Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeiro então $P(k+1)$ é verdadeiro, isto é, temos que provar que:

$$P(k+1) : 1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

é verdadeira.

De fato, primeiro observemos que:

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{k^2+3k+2}{2} \qquad (\mathbf{1})$$

Por outro lado,

$$\underbrace{1+2+3+\cdots+k}_{HI}+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

Desenvolvendo o segundo lado da igualdade, temos:

$$\begin{aligned} & \tfrac{k(k+1)}{2}+(k+1) && = \\ = \ & \tfrac{k^2+k}{2}+(k+1) && = \\ = \ & \tfrac{k^2+k+2(k+1)}{2} && = \\ = \ & \tfrac{k^2+k+2k+2}{2} && = \\ = \ & \tfrac{k^2+3k+2}{2} && \qquad (\mathbf{2}) \end{aligned}$$

Logo, de **(1)** e **(2)** temos que $P(k+1)$ é verdadeira, o que mostra que a afirmação $P(n): 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ é verdadeira para todo número natural $n \geq 1$.

2. (1,5) Quantos números distintos de 4 algarismos podem ser formados com os algarismos $1, 2, 3, 5, 7, 8$ e $9$ incluindo sempre o algarismo 5 se

   **(a)** os algarismos não podem ser repetidos? **Justifique**.

   *Resposta:* Resolveremos este item utilizando a noção de complemento. Como queremos que o algarismo 5 SEMPRE figure, vamos calcular o total de números com 4 algarismos distintos e subtrair deste valor o total de números com 4 algarismos distintos onde o algarismo 5 NÃO figura. Observe que o raciocínio desta questão corresponde a arranjos sem repetição.

   CÁLCULO DA QUANTIDADE TOTAL DE NÚMEROS COM 4 ALGARISMOS DISTINTOS:
   Como os algarismos não podem se repetir, temos então 7 algarismos para escolhermos 4 algarismos distintos. Logo, pelo PM temos que a quantidade de números com 4 algarismos distintos é $7 \times 6 \times 5 \times 4$.

   CÁLCULO DA QUANTIDADE TOTAL DE NÚMEROS COM 4 ALGARISMOS DISTINTOS EM QUE O ALGARISMO 5 NÃO FIGURA:

   Como neste item o algarismo 5 NÃO deve figurar, temos que excluir o 5 dos algarismos possíveis para compor o número. Sendo assim, temos 6 algarismos possíveis para cada uma das 4 posições. Pelo PM, temos $6 \times 5 \times 4 \times 3$ números com 4 algarismos distintos nos quais o algarismo 5 não figura.

   Assim, temos: $(7 \times 6 \times 5 \times 4) - (6 \times 5 \times 4 \times 3)$ números com 4 algarismos distintos nos quais o 5 sempre figura.

   **(b)** os algarismos podem ser repetidos? **Justifique**.

*Resposta:* Assim como o item (a), resolveremos este item utilizando a noção de complemento. Como queremos que o algarismo 5 necessariamente figure, vamos calcular o total de números com 4 algarismos e subtrair deste valor o total de números com 4 algarismos onde o algarismo 5 NÃO figura. Observe que o raciocínio desta questão corresponde a arranjos com repetição.

CÁLCULO DA QUANTIDADE TOTAL DE NÚMEROS COM 4 ALGARISMOS:
Como os algarismos podem se repetir, temos então 7 algarismos para escolhermos 4 algarismos. Logo, pelo PM temos que a quantidade de números com 4 algarismos é $7^4$.

CÁLCULO DA QUANTIDADE TOTAL DE NÚMEROS COM 4 ALGARISMOS EM QUE O ALGARISMO 5 NÃO FIGURA:

Como neste item o algarismo 5 NÃO deve figurar, temos que excluir o 5 dos algarismos possíveis para compor o número. Sendo assim, temos 6 algarismos possíveis para cada uma das 4 posições. Pelo PM, temos $6^4$ números com 4 algarismos nos quais o algarismo 5 não figura.

Assim, temos: $(7^4) - (6^4)$ números com 4 algarismos nos quais o 5 figura.

3. (1,5) De quantas maneiras podemos escolher uma comissão de 6 pessoas em uma turma de 31 alunos se:

**(a)** não existe nenhuma restrição? **Justifique**.

*Resposta:* Neste caso, não importa a ordem das escolhas. Portanto, a comissão pode ser escolhida de $C_{31}^{6} = \frac{31!}{6!25!}$ maneiras.

**(b)** os alunos Ana e Luis não podem estar na mesma comissão? **Justifique**.

*Resposta:* Vamos resolver este problema usando o complemento, ou seja, vamos calcular o número de comissões sem restrição e subtrair deste valor o total de comissões em que os alunos Ana e Luis estão na comissão.

- NENHUMA RESTRIÇÃO: este caso é equivalente ao item (a), ou seja, $C_{31}^{6} = \frac{31!}{6!25!}$.

- COMISSÕES EM QUE OS ALUNOS ANA E LUIS ESTÃO NA COMISSÃO: como Ana e Luis estão na comissão de 6 pessoas, então basta escolher os 4 alunos restantes para a comissão dentre os 29 restantes. Logo, temos $C_{29}^{4} = \frac{29!}{4!25!}$ maneiras de formar essa comissão.

Assim, temos: $C_{31}^{6} - C_{29}^{4} = \frac{31!}{6!25!} - \frac{29!}{4!25!}$ maneiras de formar as comissões de modo que os alunos Ana e Luis não estarão na mesma comissão.

4. (1,0) Pede-se:

(a) Escrever o enunciado do Teorema das Diagonais.

*Resposta:* O teorema das diagonais diz que:

$$C_{n}^{0} + C_{n+1}^{1} + C_{n+2}^{2} + \ldots + C_{n+r}^{r} = C_{n+r+1}^{r}$$

(b) Calcular a seguinte soma, usando o Teorema das Diagonais:

$$C_{5}^{2} + C_{6}^{3} + C_{7}^{4} + \cdots + C_{14}^{11}$$

*Resposta:* Sabemos pelo teorema das Diagonais que :

$$C_{3}^{0} + C_{4}^{1} + C_{5}^{2} + C_{6}^{3} + \cdots + C_{14}^{11} = C_{15}^{11}$$

Logo:

$$C_5^2+C_6^3+\cdots+C_{14}^{11} = C_{15}^{11}-C_3^0-C_4^1 = \frac{15!}{11!4!}-\frac{3!}{0!3!}-\frac{4!}{1!3!} = 1365-1-4 = 1360$$

5. (4,5) As perguntas seguintes são sobre grafos.

   **(a)** Seja $F$ uma floresta com 25 vértices e 5 componentes conexos. Determine o número de arestas de $F$. **Justifique**.

   *Resposta:* Se $F$ é uma floresta então $F$ é acíclico, e cada componente conexo é uma árvore.

   Sejam $F_1, F_2, \ldots, F_5$ os componentes conexos da floresta $F$.

   Se cada $F_i$, $i = 1, \ldots, 5$, é uma árvore então, por teorema, $m_i = n_i - 1$, onde $m_i$ é o número de arestas de $F_i$ e $n_i$ é o número de vértices de $F_i$.

   Como $|E(F)| = \sum_{i=1}^{5} |E(F_i)| = \sum_{i=1}^{5} m_i$ e $|V(F)| = \sum_{i=1}^{5} |V(F_i)| = n_i$, temos que:

$$\begin{array}{rcl}
|E(F)| & = & m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 \\
|E(F)| & = & n_1 - 1 + n_2 - 1 + n_3 - 1 + n_4 - 1 + n_5 - 1 \\
|E(F)| & = & \underbrace{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5}_{|V(F)|} - 5 \\
|E(F)| & = & |V(F)| - 5 \\
|E(F)| & = & 25 - 5 \\
|E(F)| & = & 20
\end{array}$$

   **(b)** Se $G$ é um grafo bipartido com bipartição $(V_1, V_2)$ então $V_1$ e $V_2$ são ambos conjuntos independentes. A afirmativa é verdadeira ou falsa? **Justifique**.

   *Resposta:* VERDADEIRO. Pela definição de grafo bipartido temos que todas as arestas de $G$ possuem um extremo em $V_1$ e o outro extremo em $V_2$, ou seja, não há arestas no conjunto $V_1$ e não há arestas no conjunto $V_2$, logo os conjuntos $V_1$ e $V_2$ são conjuntos independentes.

**(c)** Enuncie uma condição suficiente (mas não necessária) para um grafo conexo G, com pelo menos três vértices, ser hamiltoniano. Dê exemplo de um grafo hamiltoniano que não satistaz essa condição.

*Resposta:* Uma condição suficiente para um grafo $G$, com pelo menos três vértices, é: "Se $d(v) \geq \frac{1}{2}n$, $\forall v \in V(G)$ então $G$ é hamiltoniano".

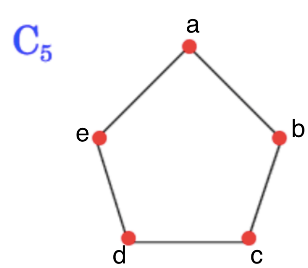


Figura 1: Grafo hamiltoniano.

O grafo $G = C_5$ é hamiltoniano, pois possui o ciclo hamiltoniano $abcdea$ (vide a Figura 1) e $d_G(v) = 2 < \frac{5}{2}$, $\forall v \in V(G)$. Portanto, esta condição é suficiente, porém não é necessária.

**(d)** O grafo completo $K_7$ é um grafo euleriano e é também um grafo hamiltoniano. A afirmativa é verdadeira ou falsa? **Justifique**.

*Resposta:* VERDADEIRO. O Teorema de Euler garante que um grafo é Euleriano se, e somente se, todos os seus vértices têm grau par. Um $K_7$ é um grafo completo com 7 vértices. Consequentemente, é um grafo 6-regular, logo, pelo Teorema de Euler, o $K_7$ é Euleriano. Além disso, podemos exibir um ciclo hamiltoniano para o $K_7$: $a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ a$ (vide a Figura 2).

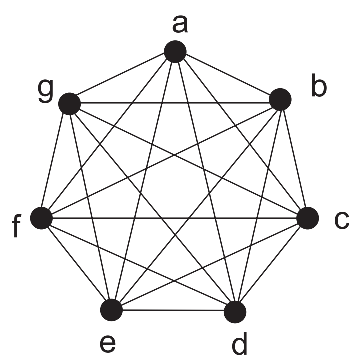


Figura 2: O grafo $K_7$.

**(e)** Seja $G$ um grafo conexo planar com sequência de graus de vértices $(1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4)$. Determine o número de faces de $G$. **Justifique**.

*Resposta:* Pelo Teorema do Aperto de Mãos, $G$ possui 13 arestas, pois:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m \Rightarrow 2m = 1{+}2{+}2{+}2{+}3{+}4{+}4{+}4{+}4 \Rightarrow 2m = 26 \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{m} = 13}$$

Pelo Teorema de Euler para grafos planares, temos $f = m - n + 2$, onde $f$ é o número de faces, $m$ é o número de arestas e $n$ é o número de vértices de $G$. Dado que $n = 9$ e $m = 13$, temos:

$$f = 13 - 9 + 2 \Rightarrow \boxed{\text{f} = 6}$$

Logo, $G$ possui 6 faces.