Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD1 - Primeiro Semestre de 2013

Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (1.5) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

   (i) $\{\{\emptyset\}\} \in D$, onde $D = \{\{\emptyset\}, \emptyset, X\}$

   Resposta: Falsa, pois $\{\{\emptyset\}\}$ não é elemento do conjunto D. Seria correto afirmar que $\{\emptyset\} \in D$ ou $\{\{\emptyset\}\} \subseteq D$.

   (ii) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq P(D)$, onde D está definido no item (i).

   Resposta: Verdadeira, pois $\{\emptyset\}$ é elemento de $P(D)$.
   $P(D) = \{\emptyset; \{\{\emptyset\}\}; \{\emptyset\}; \{X\}; \{\{\emptyset\}, \emptyset\}; \{\{\emptyset\}, X\}; \{\emptyset, X\}, \{\{\emptyset\}, \emptyset, X\}\}$.

   (iii) $(A-B)-C \subseteq A-(B-C)$, sendo A, B e C conjuntos arbitrários.

   Resposta: Verdadeira.
   Se $(A-B)-C = \emptyset$, a continência é trivialmente válida. Considere agora o caso $(A-B)-C \neq \emptyset$, isto é, existe $x \in (A-B)-C$. Neste caso, sabemos que $x \in A$ mas $x \notin B$ e $x \notin C$. Logo, $x \notin (B-C)$ (pois, se $x \in (B-C)$, deve ser $x \in B$ que é falso) . E, portanto, $x \in A-(B-C)$. Como x é arbitrário, mostramos que todo elemento de $(A-B)-C$ é também elemento de $A-(B-C)$, o que conclui a prova.
   Observe o seguinte diagrama de Venn que ilustra a prova:

2. (1.5) Usando o Princípio de Inclusão e Exclusão, determine o número de permutações de $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ nas quais nem o 3 ocupa o 3º lugar nem o 5 ocupa o 5° lugar.

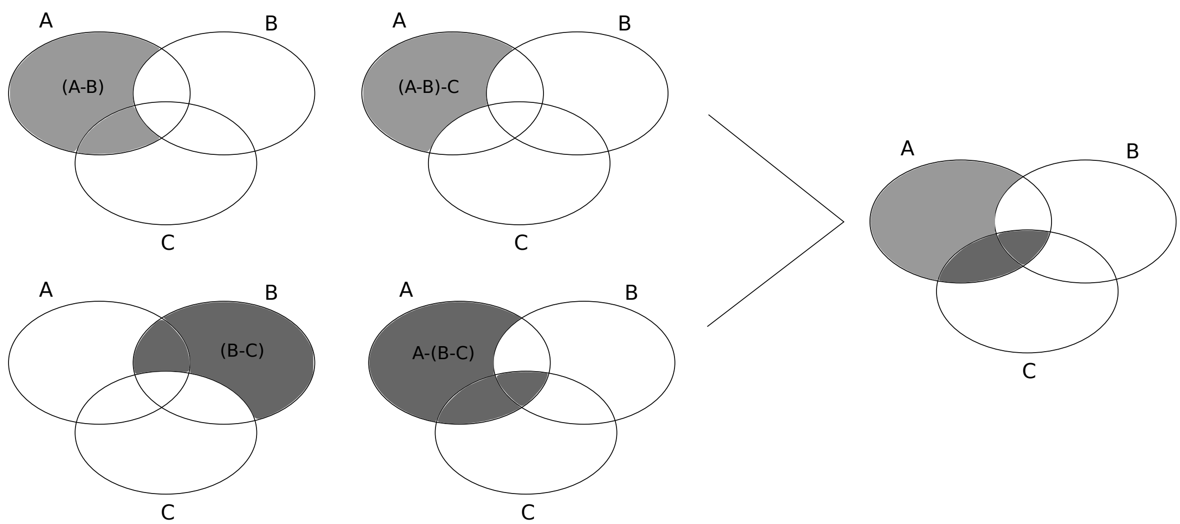

Figura 1: Diagrama de Venn que ilustra a prova de $(A-B)-C \subseteq A-(B-C)$, sendo A, B e C conjuntos arbitrários. Note que o conjunto cinza claro está contido no conjunto cinza escuro, como gostaríamos.

Resposta:

Considere os conjuntos:

$U =$ conjunto das permutações de $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$;

$A =$ conjunto das permutações de $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ onde o número 3 ocupa o 3º lugar, e

$B =$ conjunto das permutações de $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ onde o número 5 ocupa o 5º lugar.

Vamos solucionar a questão utilizando a noção de complemento e o Princípio da Inclusão e Exclusão. Como queremos determinar o número de permutações de $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ onde nem o número 3 ocupa o 3º lugar nem o número 5 ocupa o 5º lugar, queremos o número de elementos de

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} = U - (A \cup B).$$

Assim, temos que calcular

$$n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B).$$

- $n(U) = P_7 = 7!$
- $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
  - Para o cálculo de $n(A)$, vamos posicionar o número 3 no 3º lugar e permutar os demais números nas outras posições. Podemos fazer isso de $P_6 = 6!$ formas. Logo, $n(A) = 6!$.
  - Para o cálculo de $n(B)$, vamos posicionar o número 5 no 5º lugar e permutar os demais números nas outras posições. Podemos fazer isso de $P_6 = 6!$ formas. Logo, $n(B) = 6!$.
  - Para o cálculo de $n(A \cap B)$, vamos posicionar o número 3 no 3º lugar e o número 5 no 5º lugar e permutar os demais números nas outras posições. Podemos fazer isso de $P_5 = 5!$ formas. Logo, $n(A \cap B) = 5!$.

  Portanto, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 6! + 6! - 5! = 2 \times 6! - 5!$.

Assim, $n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B) = 7! - (2 \times 6! - 5!) = 3720$.

3. (2,0) Mostre pelo Princípio da Indução Matemática que:

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{(i-1)i} = 1 - \frac{1}{n}$$

para todo $n \in \mathrm{N},\ n \geq 2$.

Resposta:

Seja $P(n) : \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{(i-1)i} = 1 - \frac{1}{n}$ ou de maneira análoga,

$$P(n) : \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n},$$

para $n \geq 2$.

BASE DA INDUÇÃO: Para $n = 2$, o lado esquerdo da equação resulta em: $\frac{1}{(2-1)2} = \frac{1}{2}$.

O lado direito é: $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Como ambos os lados são iguais, a Base da Indução está verificada.

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Suponha que $P(k) : \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{(k-1)k} = 1 - \frac{1}{k}$ seja verdadeira para $k \geq 2$.

PASSO DA INDUÇÃO: Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeira para $k \geq 2$, então $P(k+1) : \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{(k-1)k} + \frac{1}{((k+1)-1)(k+1)} = 1 - \frac{1}{(k+1)}$ também é verdadeira. De fato,

$$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{(k-1)k}}_{\text{Hipótese de Indução}} + \frac{1}{k(k+1)} =$$

$$1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k(k+1)} =$$

$$1 + \frac{-(k+1)+1}{k(k+1)} =$$

$$1 + \frac{-k-1+1}{k(k+1)} =$$

$$1 - \frac{k}{k(k+1)} =$$

$$1 - \frac{1}{k+1}$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeira.

Portanto, pelo Princípio de Indução Matemática , temos que $P(n) : \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{(i-1)i} = 1 - \frac{1}{n}$ é verdadeira pelo Princípio de indução matemática, para todo $n \geq 2$.

OUTRA FORMA:

Trabalhamos com o primeiro lado da proposição $P(k+1)$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{(k-1)k} + \frac{1}{((k+1)-1)(k+1)} =$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{(k-1)k}}_{\text{Hipótese de Indução}}+\frac{1}{k(k+1)}$$

$$1-\frac{1}{k}+\frac{1}{k(k+1)}=$$

$$\frac{k(k+1)-(k+1)+1}{k(k+1)}=$$

$$\frac{k^2+k-k-1+1}{k(k+1)}=$$

$$\frac{k^2}{k(k+1)}=$$

$$\frac{k}{k+1} \qquad \mathbf{(1)}$$

Trabalhando com o segundo lado da proposição $P(k+1)$:

$$1-\frac{1}{k+1}=\frac{k+1-1}{k+1}=\frac{k}{k+1} \qquad \mathbf{(2)}$$

Logo, de **(1)** e de **(2)**, temos que ambos os lados da proposição $P(k+1)$ são iguais, isto é, $P(k+1)$ é verdadeira.

Assim, $P(n) : \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{(i-1)i} = 1-\frac{1}{n}$ é verdadeira pelo Princípio de Indução Matemática para todo $n \geq 2$.

4. (1,5) Com 12 atletas de um time de Volley, de quantas maneiras distintas podemos colocar na quadra 6 jogadores, desconsiderando as posições geradas por rodízio? Por exemplo, fixemos os jogadores: J_1, J_2, J_3, J_4, J_5 e J_6, e consideremos os seguintes ordenamentos:

$$\begin{array}{ccc} J_1 & J_2 & J_3 \\ J_4 & J_5 & J_6 \\ & (a) & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} J_3 & J_6 & J_5 \\ J_2 & J_1 & J_4 \\ & (b) & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} J_1 & J_3 & J_2 \\ J_4 & J_5 & J_6 \\ & (c) & \end{array}$$

Observemos que os ordenamentos (a) e (b) correspondem à mesma maneira de colocar os jogadores (posições geradas por rodízio), enquanto o (c) corresponde a outro modo.

Resposta:

Primeiramente precisamos escolher 6 atletas entre os 12 disponíveis para posicionar na quadra. Temos $C_{12}^{6} = \frac{12!}{6!6!}$, visto que a ordem das escolhas não é importante neste caso. Em seguida vamos posicioná-los em quadra, tomando cuidado com os rodízios. Sendo assim, fixados os 6 jogadores, temos $PC(6) = 5!$ permutações circulares, ou seja 5! formas diferentes de posicionar os 6 atletas em quadra. Logo, pelo PM, temos que o número de maneiras distintas de posicionar 6 jogadores em quadra de um time com 12 jogadores, desconsiderando as posições de rodízio, é: $C_{12}^{6} \times PC(6) = \frac{12!}{6!6!} \times 5! = \frac{12!}{6 \times 6!}$.

5. (2,0) Quantos números ímpares menores do que 10.000 podem ser formados com os algarismos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ quando os algarismos:.

   (a) não estão repetidos? Justifique;

   Resposta: Começamos pela restrição de paridade. Temos que a última posição pode ser ocupada por um dos cinco algarismos ímpares. Agora, vamos analisar a questão de acordo com o número de algarismos que o número poderá ter:

   - 1 algarismo
     Logo, temos 5 números ímpares neste caso.
   - 2 algarismos
     A segunda posição será ocupada por um dos 5 algarismos ímpares, e a primeira posição não pode ser ocupada pelo 0 nem pelo algarismo escolhido para a segunda posição. Assim, pelo PM temos $8 \times 5 = 40$ números ímpares com 2 algarismos.
   - 3 algarismos
     A terceira posição será ocupada por um dos 5 algarismos ímpares, a primeira posição não pode ser ocupada pelo 0 nem pelo algarismo escolhido para a terceira posição e a segunda posição pode ser ocupada por qualquer um dos 8 algarismos restantes. Assim, pelo PM, temos $8 \times 8 \times 5 = 320$ números ímpares com 3 algarismos.

- 4 algarismos
  A quarta posição será ocupada por um dos 5 algarismos ímpares, a primeira posição não pode ser ocupada pelo 0 nem pelo algarismo escolhido para a quarta posição, a segunda posição pode ser ocupada por qualquer um dos 8 algarismos restantes e a terceira posição por um dos 7 algarismos restantes. Assim, pelo PM, temos $8 \times 8 \times 7 \times 5 = 2240$ números ímpares com 3 algarismos.

Como o acontecimento de cada item supracitado impede o acontecimento do outro, pelo PA temos que podemos formar $5 + 40 + 320 + 2240 = 2605$ números ímpares com algarismos distintos menores do que 10000.

(b) podem estar repetidos? Justifique.

Resposta: Neste caso, basta observarmos que a quarta posição pode ser ocupada apenas por um dos 5 números ímpares e as demais podem ser ocupadas por qualquer um dos 10 algarismos. Assim, pelo PM temos $10 \times 10 \times 10 \times 5 = 5000$.

Notemos que este caso poderia ser resolvido usando um raciocínio semelhante ao considerado em (a): para 1 algarismo, temos 5 possibilidades, para 2 algarismos, temos 9.5 possibilidades, para 3 algarismos temos 9.10.5 possibilidades e para 4 algarismos temos 9.10.10.5 possibilidades. Logo, pelo princípio aditivo podemos formar $5 + 9.5 + 9.10.5 + 9.10.10.5 = 5000$ números.

6. (1,5) Considere os anagramas da palavra **INCONSTITUCIONAL**. Em quantos desses anagramas não existem vogais consecutivas? Justifique.

   Resposta:

   A palavra INCONSTITUCIONAL possui 3 I's, 3 N's, 2 C's, 2 O's, 1 S, 2 T's, 1 U, 1 A e 1 L, totalizando 16 letras, sendo 9 consoantes e 7 vogais. Como não queremos vogais consecutivas, vamos inicialmente posicionar as consoantes da palavra e em seguida, posicionar entre elas, as vogais.

   - Posicionando as consoantes:

Temos $P_9^{3,2,1,2,1} = \frac{9!}{3!2!2!}$.

- Escolha dos lugares para posicionar as vogais

  Temos a seguinte configuração com as consoantes posicionadas (_ reprensenta consoante e . representa um lugar possível para posicionar uma vogal):

  ._._._._._._._._._.

  Isto é, temos 10 lugares possíveis onde podemos posicionaras 7 vogais, mas apenas 7 vogais. Então vamos escolher 7 dentre os 10 lugares possíveis: $C_{10}^7 = \frac{10!}{7!3!}$.

- Posicionando as vogais

  Fixado 7 lugares, cada permutação das variáveis gera um anagrama diferente. Logo, considerando as repetições, temos $P_7^{3,2,1,1} = \frac{7!}{3!2!}$ anagramas.

Logo, pelo PM temos $P_9^{3,2,1,2,1} \times C_{10}^7 \times P_7^{3,2,1,1} = \frac{9!}{3!2!2!} \times \frac{10!}{7!3!} \times \frac{7!}{3!2!} = \frac{9!10!}{6^3.8}$ anagramas da palavra INCONSTITUCIONAL nos quais não existem vogais consecutivas.