

## LISTA DE EXERCÍCIOS

### AULA 15: Relação de recorrência

1. Uma torre de Hanoi dupla contém  $2n$  discos de  $n$  tamanhos diferentes, dois de cada tamanho. As regras de movimentação dos discos são as mesmas: um disco de cada vez e nunca colocar um disco sobre outro menor.

Para determinar o número de movimentos que são necessários para transferir a torre dupla de um eixo para outro, supondo que os discos do mesmo tamanho sejam idênticos, siga os seguintes passos:

- (a) Monte a relação de recorrência.
- (b) Resolva a relação de recorrência pelo método de substituição.

2. Seja  $a_n$  o número de regiões ilimitadas em que um plano é dividido por  $n$  retas tais que a interseção de qualquer subconjunto de  $k$  retas ( $k \geq 2$ ) só é diferente de vazio se  $k = 2$ . A relação de recorrência correspondente é

$$a_n = a_{n-1} + 2 \quad \text{com} \quad a_0 = 1, a_1 = 2.$$

- (a) Ilustre o problema para  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ .
- (b) Resolva a relação de recorrência para  $a_n$ .

3. Considere a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad \text{para } n \geq 3 \\ a_1 &= 1, \quad a_2 = 3 \end{aligned}$$

Verifique, usando indução, que a correspondente fórmula fechada é:

$$a_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}2^n.$$

4. Suponha que existe um tipo de planta que vive eternamente, mas que se reproduz apenas uma vez logo após o primeiro ano de vida. Qual é a rapidez de crescimento dessa “população” se o processo começa com uma planta?

Observe que este é o problema reverso daquele do crescimento dos coelhos que se reproduzem todo ano exceto o primeiro ano.