Gabarito da AD 2

29 de novembro de 2005

1. Tem-se n comprimidos de substâncias distintas, solúveis em água e incapazes de reagir entre si. Quantas soluções distintas podem ser obtidas dissolvendo-se um ou mais desses comprimidos em um copo com água?
(Sugestão: Use um dos teoremas de soma de números binomiais)

Resposta: Para dissolvermos apenas um comprimido temos C_n^1 possibilidades, para dissolvermos dois comprimidos temos C_n^2 possibilidades, para dissolvermos três comprimidos temos C_n^3 possibilidades, e assim por diante.

Daí, para dissolver um ou mais comprimidos em um copo d'água, usando o príncipio aditivo, temos $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n$. E pelo teorema das linhas temos que $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$, isto é, $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n - C_n^0 = 2^n - 1$.

2. Calcule o coeficiente de x^6 do desenvolvimento de:
$(2x - 1/x^2)^{24}(2x + 1/x^2)^{24}$

Resposta:

$(2x - \frac{1}{x^2})^{24}(2x + \frac{1}{x^2})^{24} =$

$= [(2x - \frac{1}{x^2})(2x + \frac{1}{x^2})]^{24} =$

$= [(2x)^2 - (\frac{1}{x^2})^2]^{24} =$

$= [4x^2 - \frac{1}{x^4}]^{24}$

Temos então que:

$n = 24$, $a = 4x^2$, $b = -\frac{1}{x^4}$

Daí, para $0 \leq k \leq 24$ temos $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k = C_{24}^k (4x^2)^{24-k} (-\frac{1}{x^4})^k = C_{24}^k (-1)^k \frac{(4x^2)^{24-k}}{(x^4)^k} = C_{24}^k (-1)^k \frac{(4)^{24-k}(x^2)^{24-k}}{x^{4k}} = C_{24}^k (-1)^k (4)^{24-k} (x^2)^{24-k} x^{-4k} = C_{24}^k (-1)^k (4)^{24-k} x^{48-6k}$.

Logo, devemos determinar k tal que $T_{k+1} = C_{24}^{k}(-1)^k(4)^{24-k}x^6$.

Portanto, deve ser $48 - 6k = 6 \Rightarrow k = 7$.

Daí, o coeficiente x^6 de $(2x - \frac{1}{x^2})^{24}(2x + \frac{1}{x^2})^{24}$ é $C_{24}^{7}(-1)^7(4)^{24-7} = -C_{24}^{7}(4)^{17}$.

3. Seja a_n o número de permutações dos n primeiros números naturais tais que cada elemento difere de uma unidade de algum elemento à sua esquerda na permutação. Construa e resolva uma relação de recorrência para a_n. Justifique.
(Para $n = 3$, por exemplo, tem-se as possibilidades 123, 213, 231 e 321)

Resposta: Relação de Recorrência:

Ao analisarmos o problema podemos concluir que o último elemento é 1 ou n. Se o último fosse i, então ou 1 ou n ocuparia uma posição j, para $j > 1$. Se o 1 ocupa a posição j, então o 2 deve estar à esquerda do 1, o 3 à esquerda do 2 (e, portanto, do 1) e assim por diante, o que implica que i deve estar à esquerda do 1, o que contradiz a hipótese de que i ocupava a última posição. O caso n na posição j é análogo. Se n ocupa a última posição, então os primeiros $n-1$ elementos constituem uma permutação dos $n-1$ primeiros naturais que satisfaz à condição do problema. Se 1 ocupa a última, então subtraindo 1 de cada um dos elementos nas primeiras $n-1$ posições obtemos novamente uma permutação dos $n-1$ primeiros naturais satisfazendo à condição. Portanto, a relação de recorrência é:

$a_n = 1$, se $n = 1$
$a_n = 2a_{n-1}$, se $n \geq 2$

Resolução da relação de recorrência:

A resolução será feita usando o método de substituição.

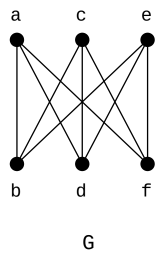
$a_n = 2a_{n-1} = 2(2a_{n-2}) = 2^2(2a_{n-3}) = 2^3a_{n-3} = \ldots = 2^ia_{n-i}$

Se $n - i = 1$ então $i = n - 1$.

Logo, $a_n = 2^{n-1}a_1 = 2^{n-1}$, isto é, $a_n = 2^{n-1}$.

4. Dê um exemplo de um grafo conexo 3-regular, que não seja o grafo completo K_4. Justifique.

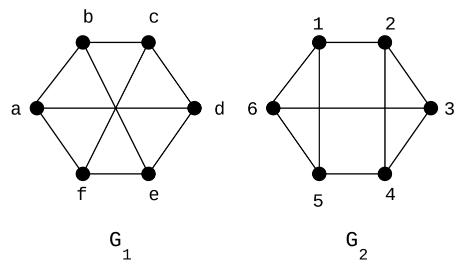
Resposta: Uma possibilidade é:



G é um grafo 3-regular, pois todos os seus vértices têm o mesmo grau, isto é, $d(a) = d(b) = d(c) = d(d) = d(e) = d(f) = 3$.

G é conexo, pois para cada par de vértices distintos existe um caminho entre eles ($G = K_{3,3}$, bipartido completo).

5. Considere os grafos abaixo:

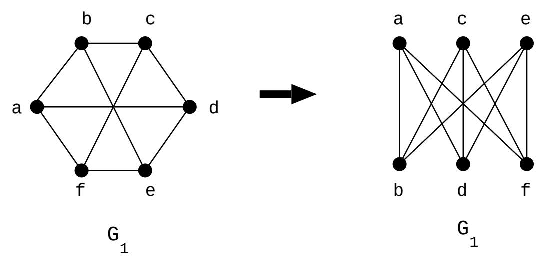


(a) Eles são isomorfos? Justifique.

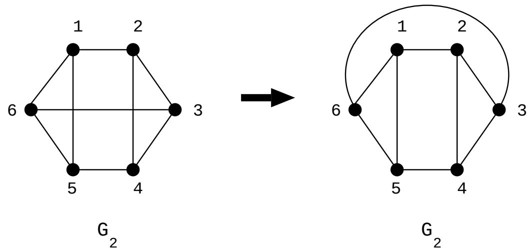
Resposta: G_1 e G_2 não são isomorfos, pois G_2 possui dois triângulos e G_1 não possui nenhum.

(b) Eles são planares? Justifique.

Resposta: G_1 não é planar, pois G_1 é isomorfo ao $K_{3,3}$, que sabemos que não é planar.



G_2 é planar, pois podemos ter a seguinte representação plana:



(c) Eles são eulerianos? Justifique.

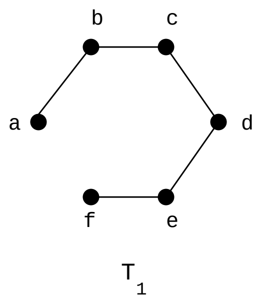
Resposta: G_1 e G_2 não são eulerianos, pois todos os vértices de G_1 e G_2 possuem grau ímpar, e pela caracterização de grafos eulerianos temos que para um grafo ser euleriano todos os seus vértices tem que ter grau par.

(d) Eles são hamiltonianos? Justifique.

Resposta: G_1 é hamiltoniano, pois existe o ciclo $abcdefa$ que passa pr todos os vértices dos grafo G_1. E o mesmo ocorre com o grafo G_2, pois existe o ciclo 1234561 passa por todos os vértices de G_2.

(e) Desenhe uma árvore geradora para G_1.

Resposta:



T_1 é uma árvore geradora de G_1, pois $V(T_1) = V(G_1)$, $E(T_1) \subset E(G_1)$ então T_1 é um subgrafo gerador.

Além disso, T_1 é conexo e acíclico, logo é uma árvore.