Gabarito da AD1 - Fundamentos de Algoritmos para Computação - 2007/02

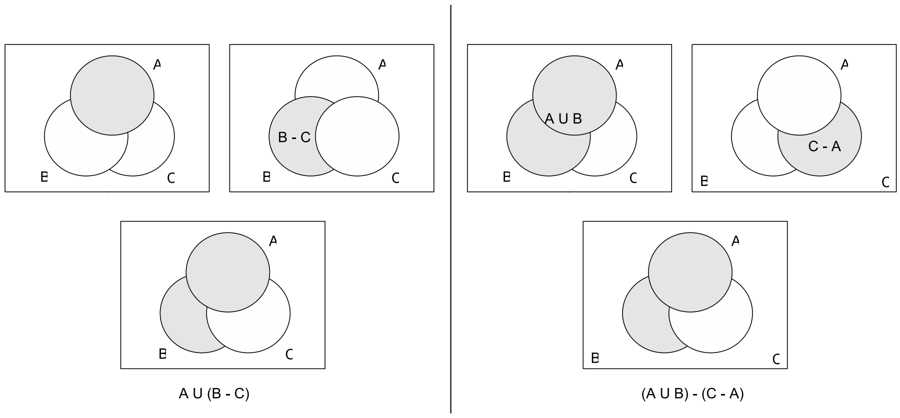
1. (2.0)

   (a) Represente por meio de um Diagrama de Venn a seguinte igualdade:

   $$A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$$

   (Observação: Faça um diagrama para cada membro da igualdade e explicite no mesmo, cada operação realizada.)

   Resposta:



   (b) Mostre a igualdade do Item (a) usando as propriedades distributiva, de complemento e da diferença.
   Resposta:

$$\begin{array}{lcll}
 & & A \cup (B - C) & = \\
\text{(propriedade da diferença)} & = & A \cup (B \cap \overline{C}) & = \\
\text{(propriedade distributiva)} & = & (A \cup B) \cap (A \cup \overline{C}) & = \\
\text{(Lei de Morgan)} & = & (A \cup B) \cap \overline{(\overline{A} \cap C)} & = \\
\text{propriedade da diferença} & = & (A \cup B) \cap \overline{(C - A)} & = \\
\text{(propriedade da diferença)} & = & (A \cup B) - (C - A) & =
\end{array}$$

   Poderíamos adotar outro raciocínio sem usar as leis de Morgan. Seria necessário demonstrar que $A \cup \overline{C} = \overline{(\overline{A} \cap C)}$. De fato, seja $\mathbb{U}$ o universo temos:

$$\begin{array}{rcl}
x \in \overline{(\overline{A} \cap C)} & \Leftrightarrow & x \in \mathbb{U} \text{ e } x \notin (\overline{A} \cap C) \\
 & \Leftrightarrow & x \in \mathbb{U} \text{ e } (x \notin \overline{A} \text{ ou } x \notin C) \\
 & \Leftrightarrow & x \in \mathbb{U} \text{ e } (x \in A \text{ ou } x \in \overline{C}) \\
 & \Leftrightarrow & (x \in \mathbb{U} \text{ e } x \in A) \text{ ou } (x \in \mathbb{U} \text{ e } x \in \overline{C}) \\
 & \Leftrightarrow & x \in A \text{ ou } x \in \overline{C} \\
 & \Leftrightarrow & x \in A \cup \overline{C}
\end{array}$$

2. (1.5) Usando os Princípio de Inclusão e Exclusão, determine o número de naturais x, tais que $10 < x \leq 100$, que não são divisíveis nem por 5 e nem por 11. Justifique.

Resposta: Sejam $A = \{x \in \mathbb{N} |\ x$ é múltiplo de 5 e $10 < x \leq 100\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} |\ x$ é múltiplo de 11 e $10 < x \leq 100\}$. $A \cap B$ é o conjunto dos números entre 11 e 100 que são múltiplos de 5 e 11 simultaneamente, isto é, múltiplos de 55. Logo, $A \cap B = \{x :\ x$ é múltiplo de 55 e $10 < x \leq 100\}$. Desejamos obter $n(C)$, onde $C = \mathbb{U} \setminus (A \cup B)$.

$A = \{x \in \mathbb{N} |\ x = 5k, k \in \mathbb{N}, 10 < 5k \leq 100\} = \{x \in \mathbb{N} |\ x = 5k, k \in \mathbb{N}, \frac{10}{5} < k \leq \frac{100}{5}\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} |\ x = 11k, k \in \mathbb{N}, 10 < 11k \leq 100\} = \{x \in \mathbb{N} |\ x = 11k, k \in \mathbb{N}, \frac{10}{11} < k \leq \frac{100}{11}\}$ e $C = \{x \in \mathbb{N} |\ x = 55k, k \in \mathbb{N}, 10 < 55k \leq 100\} = \{x \in \mathbb{N} |\ x = 55k, k \in \mathbb{N}, \frac{10}{55} < k \leq \frac{100}{55}\}$. Portanto $n(A) = 18$, $n(B) = 9$ e $n(A \cap B) = 1$. Pelo princípio da inclusão e exclusão:

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) = \\ &= 18 + 9 - 1 = \\ &= 26 \end{aligned}$$

Logo $n(C) = n(\mathbb{U})$ - $n(A \cup B) = 90$ - $26 = 64$.

3. (1.5) Mostre pelo Princípio da Indução Matemática que:

$$9 + 9.10 + 9.10^2 + ... + 9.10^{n-1} = 10^n - 1 \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

Resposta: Seja $P(n)$: $9 + 9.10 + 9.10^2 + ... + 9.10^{n-1} = 10^n - 1$

Base da indução:

Para $n = 1$, $9 = 10 - 1 = 10^1 - 1 > 2$, logo $P(1)$ é verdadeira.

Hipótese de Indução:

Suponha verdadeiro para $k \geq 1$, isto é, $P(k)$ é verdadeira, para $k \geq 1$:

$$P(k)\text{: } 9 + 9.10 + 9.10^2 + ... + 9.10^{k-1} = 10^k - 1$$

Passo da Indução:

Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeiro então $P(k+1)$ é verdadeiro, isto é, temos que provar que:

$$P(k+1) : 9 + 9.10 + 9.10^2 + ... + 9.10^k = 10^{k+1} - 1 \text{ é verdadeira.}$$

Desenvolvendo:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{9 + 9.10 + 9.10^2 + ... + 9.10^{k-1}}_{H.I.} + 9.10^k &=\\
= \; &10^k - 1 + 9.10^k &=\\
= \; &10^k(1+9) - 1 &=\\
= \; &10^k.10 - 1 &=\\
= \; &10^{k+1} - 1
\end{aligned}$$

Logo pelo princípio da indução matemática $P(n)$ é verdadeiro para todo n natural.

4. (2.0)

(a) De quantos modos podemos distribuir 23 balões idênticos entre 8 crianças? Justifique.

Resposta: Numerando as crianças de 1 a 8 e denotando por x_i a quantidade de balões recebida pela criança i, temos que cada criança pode receber no máximo 23 balões, podendo não receber nenhum, isto é, $0 \leq x_i \leq 23$. Como o total de balões distribuídos é 23 temos

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_8 = 23$$

Portanto o total de distribuições diferentes é $CR_8^{23} = CR_{8+23-1}^{23} = C_{30}^{23} = \frac{30!}{23!7!}$.

(b) De quantos modos podemos distribuir os mesmos 23 balões respeitando a condição de que cada criança deve receber pelo menos 2 balões. Justifique.

Resposta: Se cada criança deve receber pelo menos 2 balões adicionamos à equação do item anterior as restrições $x_i \geq 2$, para todo $i \geq 2$. Logo,

$$\begin{gathered}
x_1 + x_2 + \ldots + x_8 = 23\\
x_i \geq 2, \forall i = 1, \ldots, 8
\end{gathered}$$

Para cada variável x_i faremos a seguinte transformação: $x_i^* = x_i - 2$, portanto obtemos agora o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
&(x_1^* + 2) + (x_2^* + 2) + \ldots + (x_8^* + 2) &= \;& 23\\
&x_1^* + x_2^* + \ldots + x_8^* &= \;& 23 - 16\\
&x_1^* + x_2^* + \ldots + x_8^* &= \;& 7\\
&\text{onde,} & & x_i^* \geq 0 \ \forall i = 1, \ldots, 8
\end{aligned}$$

Para esta equação temos $CR_8^7 = C_{8+7-1}^7 = C_{14}^7 = \frac{14!}{7!7!}$ soluções inteiras.

5. (1.5) Determine o número de permutações dos números $1, 2, 3, \ldots, 29, 30$ de modo que os números 3 e 4 fiquem juntos e que os números 10 e 11 fiquem separados. Justifique sua solução.

Resposta: Inicialmente excluímos os números 10 e 11 da lista de números e tratamos os números 3 e 4 como se fosse um número só. Temos portanto P_{27} permutações diferentes de 27 números. Os números 3 e 4 podem trocar de posições entre si de 2 formas distintas. Devemos agora inserir os números 10 e 11 nos espaços entre os números da fila (considerando os espaços inicial e final da fila), desta forma estes números nunca estarão juntos. Como a fila tem 27 números temos 28 posições possíveis para inserir o número 10 e 27 para o número 11. Pelo princípio multiplicativo, temos $P_{27}.2.28.27 = 27!.2.28.27$ permutações destes números.

6. (1.5) No sistema decimal de numeração, quantos números existem com 4 algarismos repetidos ou não? Justifique.

   Resposta: O primeiro algarismo não pode ser 0, logo existem 9 possibilidades para este algarismo, os demais algarismos podem ter qualquer valor entre 0 e 9, portanto 10 possibilidades cada um. Pelo princípio multiplicativo temos um total $9.AR(10,3)$ $= 9.10^3$ números de 4 algarismos.