Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP1 - Primeiro Semestre de 2018

Questões:

1. (1.8) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

   (a) $\emptyset = \{\emptyset\}$

   Resposta: A afirmação é falsa. Dois conjuntos são iguais se todo elemento de um conjunto é elemento do outro conjunto e vice-versa.

   O conjunto $\emptyset$ não tem elementos enquanto $\{\emptyset\}$ tem um elemento, $\emptyset \in \{\emptyset\}$. Logo, $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

   (b) $(A \cup C) - B = (A - B) \cup (C - B)$,

   Resposta: A afirmação é verdadeira.

$$\begin{array}{rcll} & & (A \cup C) - B & = \\ \text{(propriedade da diferença)} & = & (A \cup C) \cap \overline{B} & = \\ \text{(propriedade distributiva)} & = & (A \cap \overline{B}) \cup (C \cap \overline{B}) & = \\ \text{(propriedade da diferença)} & = & (A - B) \cup (C - B) & \end{array}$$

   (c) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C)$,

   onde A, B e C são conjuntos arbitrários.

   Resposta: A afirmação é falsa. Podemos apresentar o seguinte contra-exemplo:

   Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3, 5\}, B = \{1, 2, 4, 6\}, C = \{1, 3, 4, 7\}$$

   Neste caso, $n(A) = n(B) = n(C) = 4, A \cap B = \{1, 2\}$, e consequentemente $n(A \cap B) = 2$, $B \cap C = \{1, 4\}$ e, portanto, $n(B \cap C) = 2$ e $A \cap C =$

$\{1,3\}$ e, tendo $n(A \cap C) = 2$. Note que $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ e, portanto, $n(A \cup B \cup C) = 7$. Por outro lado,

$$n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) =$$
$$4 + 4 + 4 - 2 - 2 - 2 = 6,$$

valor diferente de $n(A \cup B \cup C)$. Portanto, a fórmula está incorreta e pode ser reescrita da seguinte maneira, utilizando o Princípio da Inclusão e Exclusão:

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

2. (1.7) Mostre por Indução Matemática que:

$$2.3 + 2.3^2 + 2.3^3 + \cdots + 2.3^n = 3^{n+1} - 3$$

para todo número natural ≥ 1.

Resposta: Seja $P(n)$: $2.3 + 2.3^2 + 2.3^3 + ... + 2.3^n = 3^{n+1} - 3$

Base da indução:

Para $n = 1$, $2.3 = 6 = 9 - 3 = 3^2 - 3 = 3^{1+1} - 3$, logo $P(1)$ é verdadeira.

Hipótese de Indução:

Suponha verdadeiro para $k \geq 1$, isto é, $P(k)$ é verdadeira, para $k \geq 1$:

$$P(k)\text{: } 2.3 + 2.3^2 + 2.3^3 + ... + 2.3^k = 3^{k+1} - 3$$

Passo da Indução:

Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeiro então $P(k+1)$ é verdadeiro, isto é, temos que provar que:

$$P(k+1) : 2.3 + 2.3^2 + 2.3^3 + ... + 2.3^{k+1} = 3^{k+2} - 3 \text{ é verdadeira.}$$

Desenvolvendo:

$$\begin{array}{rll} & 2.3 + 2.3^2 + 2.3^3 + ... + 2.3^{k+1} & = \\ = & \underbrace{2.3 + 2.3^2 + 2.3^3 + ... + 2.3^k}_{H.I.} + 2.3^{k+1} & = \\ = & 3^{k+1} - 3 + 2.3^{k+1} & = \\ = & 3^{k+1}(1+2) - 3 & = \\ = & 3^{k+1}(3) - 3 & = \\ = & 3^{k+2} - 3 & \end{array}$$

Logo pelo princípio da indução matemática $P(n)$ é verdadeiro para todo n natural.

3. (2.0) Uma classe tem 10 meninos e 9 meninas. Determine o número de comissões diferentes que podemos formar com 4 meninos e 3 meninas:

   Seja A o melhor aluno dentre os meninos da classe e seja B a melhor aluna dentre as meninas.

   (a) incluindo obrigatoriamente o melhor aluno dentre os meninos **e** a melhor aluna dentre as meninas.

   Resposta: Como precisamos escolher o número de comissões com 4 meninos e 3 meninas dentre uma classe com 10 meninos e 9 meninas sendo que A e B estejam sempre presentes na comissão, então podemos entender este problema como sendo o de encontrar o número de comissões com 3 meninos e 2 meninas dentre a classe com 9 meninos (retirado o melhor aluno) e 8 meninas (retirado a melhor aluna).

   Escolher 3 meninos dentre 9 meninos pode ser feito $C_9^3 = \frac{9!}{6!3!}$.

   Escolher 2 meninas dentre 8 meninas pode ser feito $C_8^2 = \frac{8!}{6!2!}$.

   Assim, pelo princípio multiplicativo, podemos concluir que o número de comissões que 4 meninos e 3 meninas dentre uma classe com 10 meninos e 9 meninas sendo que obrigatoriamente o melhor aluno dentre os meninos **e** a melhor aluna dentre as meninas estejam é $C_9^3.C_8^2 = \frac{9!}{6!3!}.\frac{8!}{6!2!}$

   (b) incluindo obrigatoriamente o melhor aluno dentre os meninos **ou** a melhor aluna dentre as meninas.

Resposta: Sejam A o melhor aluno menino da turma e B a melhor aluna menina da turma.
Como precisamos escolher o número de comissões com 4 meninos e 3 meninas dentre uma classe com 10 meninos e 9 meninas sendo que A **OU** B estejam presentes na comissão, então devemos dividir este problema em 3 casos:

(i) comissões com 4 meninos e 3 meninas de maneira que A está na comissão e B não está na comissão.
Neste caso temos que escolher 4 meninos e 3 meninas dentre uma classe com 10 meninos e 9 meninas sendo que A esteja na comissão e B não esteja na comissão, então podemos entender este problema como sendo o de encontrar o número de comissões com 3 meninos e 3 meninas dentre a classe com 9 meninos (retirado o melhor aluno) e 8 meninas (retirado a melhor aluna).
Escolher 3 meninos dentre 9 meninos pode ser feito $C_9^3 = \frac{9!}{6!3!}$.
Escolher 3 meninas dentre 8 meninas pode ser feito $C_8^3 = \frac{8!}{5!3!}$.
Pelo princípio multiplicativo, temos $C_9^3.C_8^3 = \frac{9!}{6!3!} \cdot \frac{8!}{5!3!}$

(ii) comissões com 4 meninos e 3 meninas de maneira que B está na comissão e A não está na comissão.
Neste caso temos que escolher 4 meninos e 3 meninas dentre uma classe com 10 meninos e 9 meninas sendo que A não esteja na comissão e B esteja na comissão, então podemos entender este problema como sendo o de encontrar o número de comissões com 4 meninos e 2 meninas dentre a classe com 9 meninos (retirado o melhor aluno) e 8 meninas (retirado a melhor aluna).
Escolher 4 meninos dentre 9 meninos pode ser feito $C_9^4 = \frac{9!}{5!4!}$.
Escolher 2 meninas dentre 8 meninas pode ser feito $C_8^2 = \frac{8!}{6!2!}$.
Pelo princípio multiplicativo, temos $C_9^4.C_8^2 = \frac{9!}{5!4!} \cdot \frac{8!}{6!2!}$

Vale ressaltar que este item pode ser feito pelo complemento.
(iii) comissões com 4 meninos e 3 meninas de maneira que A e B pertencem a comissão.
Este caso é semelhante ao item (a) da questão 3, e portanto, temos $C_9^3.C_8^2 = \frac{9!}{6!3!} \cdot \frac{8!}{6!2!}$ comissões.

Assim, pelo princípio aditivo, podemos concluir que o número de comissões que 4 meninos e 3 meninas dentre uma classe com 10 meninos e 9 meninas sendo que obrigatoriamente o melhor aluno dentre os meninos **OU** a melhor aluna dentre as meninas estejam é $C_9^3.C_8^3 + C_9^4.C_8^2 + C_9^3.C_8^2 = \frac{9!}{6!3!} \cdot \frac{8!}{6!2!} + \frac{9!}{5!4!} \cdot \frac{8!}{6!2!} + \frac{9!}{6!3!} \cdot \frac{8!}{6!2!}$

4. (1.5) Um grupo de pessoas é formado por sete homens e três mulheres. Deseja-se formar filas com 5 dessas pessoas de modo que as três mulheres ocupem sempre as três primeiras posições. Assim, de todas as filas possíveis, quantas obedecem essa restrição?

   Resposta: Como devemos formar filas de modo a colocar as três mulheres do grupo sempre nas três primeiras posições da fila, então isto pode ser feito de $P_3 = 3!$ maneiras. Para completar a fila, faltam 2 pessoas que devem ser selecionadas dentre os 7 homens. Como importa a ordem na fila, devemos utilizar o conceito de arranjo, ou seja, o número de selecionar 2 homens dentre 7 é $A_7^2 = \frac{7!}{5!}$. Pelo princípio multiplicativo, o número de filas que obedecem essa restrição é $P_3.A_7^2 = 3!\frac{7!}{5!}$.

5. (1.5) Quantos números de dígitos, maiores que 600000000, e terminando em 1 podem ser formados usando apenas os algarismos $1, 1, 1, 1, 3, 3, 6, 6, 6$? Justifique.

   Resposta: Queremos formar números de 9 dígitos maiores que 600.000.000 terminando em 1 usando os algarismos $1, 1, 1, 1, 3, 3, 6, 6, 6$, ou seja queremos arrumar esses algarismos em 9 posições.

   A restrição do número ser maior que 6.000.000 nos dá que a primeira posição só pode ser ocupada pelo algarismo 6 e a restrição do número terminar em 1 nos dá que a última posição só pode ser ocupada pelo algarismo 1.

   Temos que o algarismo 6 deve ocupar a primeira posição e 1 ocupar a última posição, desta forma, vamos arrumar os algarismos $1, 1, 1, 3, 3, 6, 6$ nas 7 posições restantes:

$$P_7^{2,2,3} = \frac{7!}{2!2!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{2!2!3!} = 210$$

6. (1.5) Quantos números naturais de 4 algarismos (repetidos ou não), podem ser formados com os algarismos $1, 2, 3, 6, 8,$ e 9. Justifique.

Resposta: Cada número de 4 algarismos (que podem ser repetidos) formados com os dígitos $1, 2, 3, 6, 8$, e 9 corresponde a um arranjo com repetição de 6 elementos tomados 4 a 4. Portanto, o número total destes números é $AR_6^4 = 6^4 = 1296$