Aula 3: Número de elementos de um conjunto

Conteúdo:

- Conceitos iniciais
- Introdução ao princípio aditivo
- Introdução ao princípio da inclusão e exclusão

Conceitos iniciais:

Faz sentido saber quantos elementos tem um conjunto?

É sempre possível contar os elementos de um conjunto?

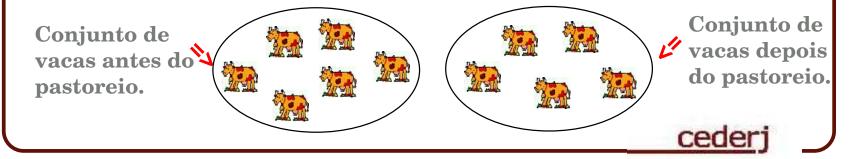
Tem uma fórmula para calcular o número de elementos de $A \cup B$?



Faz sentido saber quantos elementos tem um conjunto?

Exemplo 1:

O vaqueiro João cuida das vacas da fazenda "Três Irmãos". Ele leva as vacas para pastar nos campos fora da fazenda. Ele <u>não</u> pode perder nenhuma vaca. Então o que ele faz ? <u>Conta</u> as vacas que formam o gado antes e depois do pastoreio.





Questão 1:

Faz sentido saber quantos elementos tem um conjunto?

Exemplo 2:

Você deu dez notas de R\$ 1,00 para um amigo fazer compras. No retorno, você contou o dinheiro que sobrou (3 notas de R\$ 1,00).

Resposta: SIM







Notação:

n(A): é o número de elementos do conjunto A (ou cardinalidade de A).

Exemplo 1:

$$\mathbf{A} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid |x| \le 3 \} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid -3 \le x \le 3 \}$$
$$= \{ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \}$$

$$n(\mathbf{A}) = 7$$







Questão 2:

É sempre possível contar os elementos de um conjunto?

Exemplo 1:

$$A = \{ x \in \mathbb{Z} \mid |x| \le 3 \} = \{ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \}$$

- Como contamos os elementos de A?

=> Enumerando seus elementos:

1 é o número -3

2 é o número -2

7 é o número 3

=> Acabamos a enumeração em 7







Questão 2:

É sempre possível contar os elementos de um conjunto?

Exemplo 2:

$$\mathbf{B} = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ \'e par } \}$$
$$= \{ 2, 4, 6, \dots \}$$

 Podemos ir enumerando seus elementos mas <u>nunca</u> <u>acabaremos</u> a enumeração.

Resposta: NEM sempre







Definição:

- Um conjunto é finito se <u>é</u> possível contar o número de seus elementos.
- Um conjunto é infinito se não é possível contar o número de seus elementos.

Exemplo 1:

A =
$$\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \le 3\}$$
 é finito
B = $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par }\}$ é infinito

 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$ são conjuntos infinitos.





É sempre possível contar os elementos de um conjunto finito. Mas, será que sempre conseguimos contar?

Exemplo:

 $C = \{x \mid x \text{ \'e uma pessoa que nasceu antes de } 2000 \}$ então:

- C está bem definido
- C é finito
- n(C) é um número que não conhecemos

Conclusão: Embora tenhamos um conjunto finito, pode ser impraticável contá-lo.





Assumimos, <u>nesta</u> aula:

- → A é um conjunto finito;
- É possível determinar o número de elementos de A, n(A).

\square Questão 3:

Tem uma fórmula para calcular o número de elementos de $A \cup B$?





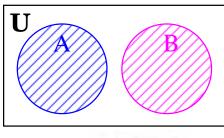
Introdução ao princípio aditivo:

Problema inicial:

 $\begin{cases}
\underline{\text{Dados}} \text{ os conjuntos A e B,} \\
\underline{\text{calcular}} \quad n(A \cup B)
\end{cases}$

- Objetivo:
 - Encontrar uma fórmula para calcular $n(A \cup B)$.
- Princípio aditivo (para dois conjuntos)

Se A e B são disjuntos, A \cap B = \emptyset , então $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$









Exemplo 1:

 $U = \{x \mid x \in aluno do Instituto de Línguas IL \}$

 $A = \{ x \in U \mid x \text{ está no } 4^{\circ} \text{ ano do curso de inglês } \}$

 $B = \{ x \in U \mid x \text{ está no } 1^{\circ} \text{ ano do curso de inglês } \}$



Problema:

<u>Dados</u> n(U) = 300, n(A) = 150, n(B) = 40

<u>Determinar</u> o número de alunos do IL que está no 1º <u>ou</u> no 4º ano do curso de inglês.

$$A \cap B = \emptyset \implies n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 190$$

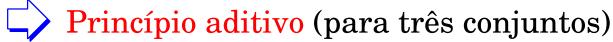




Conjuntos: Número de elementos / Introdução ao princípio aditivo

Problema:

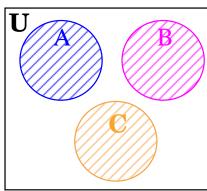
T<u>Dados</u> os conjuntos A, B e C, $\underline{\operatorname{calcular}} \ n(A \cup B \cup C)$



Se A, B e C são disjuntos dois a dois:

$$A \cap B = \emptyset$$
, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$

então $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$



3.13



$$(A \cup B) \cap C = \emptyset$$

$$n(A \cup B \cup C) = n((A \cup B) \cup C) = n(A \cup B) + n(C)$$

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$$









Conjuntos: Número de elementos / Introdução ao princípio aditivo

3.14

Princípio aditivo (para quatro conjuntos)

Se A, B, C e D são conjuntos disjuntos dois a dois

$$(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{A} \cap \mathbf{C} = \mathbf{A} \cap \mathbf{D} = \mathbf{B} \cap \mathbf{C} = \mathbf{B} \cap \mathbf{D} = \mathbf{C} \cap \mathbf{D} = \emptyset$$

então
$$n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D)$$

Tente fazer a prova aplicando o raciocínio anterior.





3.15

Introdução ao princípio aditivo

Prova: $n(A \cup B \cup C \cup D) = n((A \cup B) \cup C \cup D)$

 $\underline{como} \quad A \cap B = A \cap C = A \cap D = B \cap C = B \cap D = C \cap D = \emptyset$

Prova

resulta $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset$

Voltar

 $(A \cup B) \cap D = (A \cap D) \cup (B \cap D) = \emptyset$

 $\mathbf{C} \cap \mathbf{D} = \emptyset$

isto \acute{e} , (A \cup B), C e D são disjuntosdois a dois.

Logo estamos nas condiçõesdo problemaanterior, portanto temos:

 $n((A \cup B) \cup C \cup D) = n(A \cup B) + n(C) + n(D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D)$

 $\underline{\mathbf{pois}}, \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$

Quer dizer, provamos que

 $n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D)$

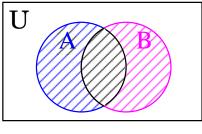
Introdução ao princípio da inclusão e exclusão:

Problema inicial:

 $\begin{cases} \underline{\text{Dados}} \text{ os conjuntos A e B,} \\ \underline{\text{calcular}} & n(A \cup B) \end{cases}$

- A e B podem não ser disjuntos

$$A \cap B \neq \emptyset$$



$$n(A \cup B) = ?$$



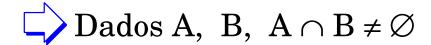
Objetivo:

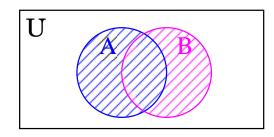
- \blacksquare Encontrar uma fórmula para $n(A \cup B)$.
- Estratégia:
 - ightharpoonup Reescrever A \cup B como conjuntos disjuntos.



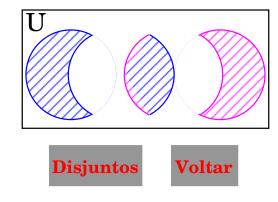


Conjuntos: Número de elementos / 3.17 Introdução ao princípio da inclusão e exclusão



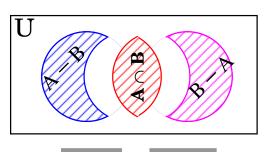


Como reescrever $A \cup B$ como união de conjuntos disjuntos?



3.18

Introdução ao princípio da inclusão e exclusão

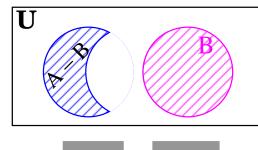


 $A - B = A \cap \overline{B}$

 $\mathbf{B} - \mathbf{A} = \mathbf{B} \cap \overline{\mathbf{A}}$

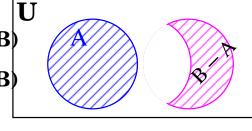


Voltar



 $\mathbf{B} = (\mathbf{B} - \mathbf{A}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$

$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$



União Voltar

União

Voltar

ightharpoonup Conclusão: $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$

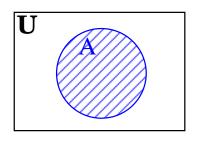
$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$

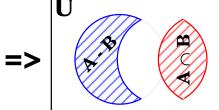
3.19

Introdução ao princípio da inclusão e exclusão

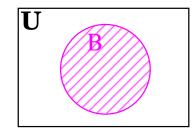


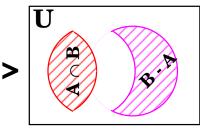
$$n(A \cup B) = n((A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A))$$
$$= n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$





$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$





$$B = (A \cap B) \cup (B - A)$$

$$n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$$

$$n(B) = n(B - A) + n(A \cap B)$$





3.20

Introdução ao princípio da inclusão e exclusão

Resumindo:

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$

$$n(A) = n(A - B) + n(A \cap B) = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$n(B)$$
 = $n(B-A)$ + $n(A \cap B)$ => $n(B-A)$ = $n(B)$ - $n(A \cap B)$





3.21

Introdução ao princípio da inclusão e exclusão

Princípio da inclusão e exclusão (para dois conjuntos)

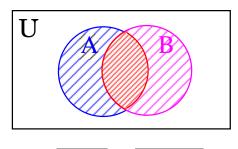
Dados A e B,

<u>então</u>

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



Interpretação visual



 \cap

$$n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Observação: estamos contando 2 vezes os elementos da interseção, então devemos subtrair um deles.

3.22

Introdução ao princípio da inclusão e exclusão

Exemplo 2:

 $U = \{x \mid x \in aluno do Instituto de Línguas IL \}$

 $A = \{ x \in U \mid x \text{ está no } 4^{\circ} \text{ ano do curso de inglês } \}$

 $B = \{ x \in U \mid x \text{ está no } 2^{\circ} \text{ ano do curso de francês } \}$

<u>dados</u>: n(U) = 300 n(A) = 40

n(B) = 20 $n(A \cap B) = 2$

então o número de alunos do IL que cursam o 4º ano de inglês ou o 2º ano de francês é:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 40 + 20 - 2 = 58$$





Introdução ao princípio da inclusão e exclusão



Questão:

Como calcular $n(A \cup B \cup C)$ usando o Princípio da inclusão e exclusão para dois conjuntos ?

$$n(A \cup B \cup C) = n((A \cup B) \cup C)$$

$$= n(A \cup B) + n(C) - n((A \cup B) \cap C)$$

$$= [n(A) + n(B) - n(A \cap B)] + n(C) - n((A \cap C) \cup (B \cap C))$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B)$$

-
$$[n(A \cap C) + n(B \cap C)) - n((A \cap C) \cap B \cap C)]$$

$$= n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$





3.24

Introdução ao princípio da inclusão e exclusão

Princípio da inclusão e exclusão (para três conjuntos)

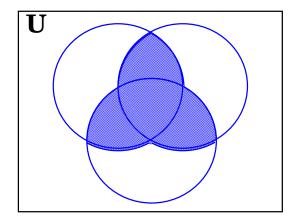
Dados A, B e C,

então
$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$$

-
$$n(A \cap B)$$
 - $n(A \cap C)$ - $n(B \cap C)$

+
$$n(A \cap B \cap C)$$

Interpretação gráfica:



3.25

Introdução ao princípio da inclusão e exclusão



Exemplo 3:

 $U = \{x \mid x \in aluno do Instituto de Línguas IL \}$

 $A = \{ x \in U \mid x \text{ está no } 4^{\circ} \text{ ano do curso de inglês } \}$

B = { $x \in U \mid x \text{ está no } 2^{\circ} \text{ ano do curso de francês } }$

 $C = \{x \in U \mid x \text{ está no } 1^{\circ} \text{ ano do curso de italiano } \}$

3.26

Introdução ao princípio da inclusão e exclusão



Exemplo 3 (continuação):

<u>Dados</u>: n(U) = 300, n(A) = 40, n(B) = 20, n(C) = 30

 $n(A \cap B) = 2$ $n(A \cap C) = 5$

 $n(B \cap C) = 3$ $n(A \cap B \cap C) = 1$

o número de alunos do IL que estão cursando <u>então</u> o 4° ano de inglês <u>ou</u> o 2° ano de francês <u>ou</u> o 1° ano de italiano é:

 $n(A \cup B \cup C) =$

 $= \mathbf{n}(\mathbf{A}) + \mathbf{n}(\mathbf{B}) + \mathbf{n}(\mathbf{C}) - \mathbf{n}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) - \mathbf{n}(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) - \mathbf{n}(\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) + \mathbf{n}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C})$

 $n(A \cup B \cup C) = 40 + 20 + 30 - 2 - 5 - 3 + 1 = 81$





3.27

Introdução ao princípio da inclusão e exclusão

Prove o princípio da inclusão e exclusão no seguinte caso:

Dados
$$A_1, A_2, A_3 \in A_4,$$

então $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) =$

$$\begin{array}{c} n(A_{\!{}^{1}}) + n(A_{\!{}^{2}}) + n(A_{\!{}^{3}}) + n(A_{\!{}^{4}}) - \\ - n(A_{\!{}^{1}} \cap A_{\!{}^{2}}) - n(A_{\!{}^{1}} \cap A_{\!{}^{3}}) - n(A_{\!{}^{1}} \cap A_{\!{}^{4}}) - n(A_{\!{}^{2}} \cap A_{\!{}^{3}}) - n(A_{\!{}^{2}} \cap A_{\!{}^{4}}) - \\ - n(A_{\!{}^{3}} \cap A_{\!{}^{4}}) + n(A_{\!{}^{1}} \cap A_{\!{}^{2}} \cap A_{\!{}^{3}}) + n(A_{\!{}^{1}} \cap A_{\!{}^{2}} \cap A_{\!{}^{4}}) + n(A_{\!{}^{2}} \cap A_{\!{}^{3}} \cap A_{\!{}^{4}}) - \\ - n(A_{\!{}^{1}} \cap A_{\!{}^{2}} \cap A_{\!{}^{3}} \cap A_{\!{}^{4}}) \end{array}$$

 $= \sum_{i=1}^{4} \mathbf{n}(\mathbf{A_i}) - \sum_{\substack{i,j=1\\i < j}}^{4} \mathbf{n}(\mathbf{A_i} \cap \mathbf{A_j}) + \sum_{\substack{i,j,l=1\\i < j}}^{4} \mathbf{n}(\mathbf{A_i} \cap \mathbf{A_j} \cap \mathbf{A_l}) - \mathbf{n}(\mathbf{A_i} \cap \mathbf{A_2} \cap \mathbf{A_3} \cap \mathbf{A_4})$

i< j< l

ceder

Voltar

Fórmula

```
Conjuntos: Número de elementos /
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         3.28
                                                                    Introdução ao princípio da inclusão e exclusão
                  Prova: n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = n((A_1 \cup A_2) \cup A_3 \cup A_4)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                              Voltar
n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = n((A_1 \cup A_2) \cup A_3 \cup A_4)) = n(A_1 \cup A_2) + n(A_3) + n(A_4) - n(A_4) = n(A_1 \cup A_2) + n(A_3 \cup A_3) = n(A_1 \cup A_3) + n(A_2 \cup A_3) + n(A_2 \cup A_3) = n(A_1 \cup A_3) + n(A_2 \cup A_3) + n(A_2 \cup A_3) = n(A_1 \cup A_3) + n(A_2 \cup A_3) + n(A_2 \cup A_3) = n(A_1 \cup A_3) + n(A_2 \cup A_3) + n(A_3 \cup A_3) = n(A_1 \cup A_3) + n(A_2 \cup A_3) + n(A_3 \cup A_3) = n(A_1 \cup A_3) + n(A_2 \cup A_3) + n(A_3 \cup A_3) = n(A_1 \cup A_3) + n(A_2 \cup A_3) + n(A_3 \cup A_
      -n((A_1 \cup A_2) \cap A_3) - n((A_1 \cup A_2) \cap A_4) - n(A_3 \cup A_4) + n((A_1 \cup A_2) \cap A_3 \cap A_4)
 n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2)
 n((A_1 \cup A_2) \cap A_3) = n((A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)) =
                                                                             = n((A_1 \cap A_3) + (A_2 \cap A_3) - n((A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3))
                                                                                                                                                                                                                            A_1 \cap A_2 \cap A_3
 n((A_1 \cup A_2) \cap A_4) = n((A_1 \cap A_4) \cup (A_2 \cap A_4)) =
                                                                             = n(A_1 \cap A_2) + n(A_2 \cap A_4) - n((A_1 \cap A_4) \cap (A_2 \cap A_4))
                                                                                                                                                                                                                              A_1 \cap A_2 \cap A_4
 n((A_1 \cup A_2) \cap A_3 \cap A_4) = n([(A_1 \cup A_2) \cap A_3] \cap A_4) =
         = n([(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)] \cap A_4) = n[(A_1 \cap A_3 \cap A_4) \cup (A_2 \cap A_3 \cap A_4)] =
         = n(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + n(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - n((A_1 \cap A_3 \cap A_4) \cap (A_2 \cap A_3 \cap A_4))
```

 $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$

3.29

Introdução ao princípio da inclusão e exclusão



Observação:

A partir de $n(A \cup B)$ podemos obter outras relações.

Exemplo:

Determine a quantidade de números naturais que existe entre 1 e 100 e não são divisíveis por 2 nem por 5.

$$C = \{ x \in \mathbb{N} \mid 1 \le x \le 100 \}$$

$$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbb{C}, x = 2k, k \in \mathbb{N} \} = \{2, 4, 6, ..., 100\}$$

B = {
$$x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbb{C}, x = 5k, k \in \mathbb{N}$$
 }= {5, 10, 15, ..., 100}

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbb{C}, x \notin A \in x \notin B\}$$





3.30

Introdução ao princípio da inclusão e exclusão

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbb{C} \text{ e } x \notin A \text{ e } x \notin B\}$$

$$= \{ x \in \mathbb{N} \mid x \in C \in (x \in \overline{A} \in x \in \overline{B}) \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbb{C} \in (x \in \overline{A} \cap \overline{B}) \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{N} \mid x \in C \in x \in (\overline{A \cup B}) \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{N} \mid x \in C \in x \notin (A \cup B) \}$$

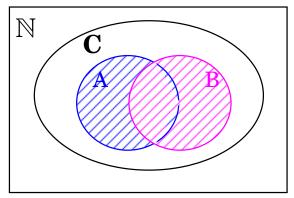
$$= C - (A \cup B)$$

3.31

Introdução ao princípio da inclusão e exclusão

Lembremos o enunciado do exemplo:

Determine a quantidade de números naturais que existe entre 1 e 100 e não são divisíveis por 2 nem por 5.



Conclusão:

Pede-se $n(C - (A \cup B))$

3.32

Introdução ao princípio da inclusão e exclusão

Observe que:

$$(C - (A \cup B)) \cup (A \cup B) = C$$

e (C-(A
$$\cup$$
 B)) \cap (A \cup B) = \emptyset

princípio

aditivo

$$=>n((C - (A \cup B)) \cup (A \cup B)) = n(C - (A \cup B)) + n(A \cup B)$$

$$n(\mathbf{C})$$

$$\rightarrow n(C - (A \cup B)) = n(C) - n(A \cup B)$$





3.33

Introdução ao princípio de inclusão e exclusão



Resumindo:

<u>Devemos</u> calcular $n(C - (A \cup B)) = n(C) - n(A \cup B)$

$$C = \{ x \in \mathbb{N} \mid 1 \le x \le 100 \}$$

A = {
$$x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbb{C}$$
, $x = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ }= {2, 4, 6, ..., 100}

B = {
$$x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbb{C}$$
 , $x = 5k$, $k \in \mathbb{N}$ }= {5, 10, 15, ..., 100}

$$n(C) = 100$$
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
inclusão e exclusão

$$=50 + 20 - 10 = 60$$

logo,
$$n(C - (A \cup B)) = 100 - 60 = 40$$

Resposta: A quantidade de números naturais que existe entre 1 e 100 e não são divisíveis por 2 nem por 5 é 40.



Resumo:

Conceitos:

- Número de elementos de um conjunto, n(A) (cardinalidade)
- Conjunto finito
- Conjunto infinito
- Introdução ao princípio aditivo:

(Número de elementos da união de conjuntos disjuntos dois a dois)

- $A_1 \in A_2 \text{ disjuntos} \implies n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) = \sum_{i=1}^{2} n(A_i)$
- $A_1, A_2 \in A_3 \text{ disjuntos} \Longrightarrow n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$

=
$$n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) = \sum_{i=1}^{3} n(A_i)$$

• A_i disjuntos dois a dois \Rightarrow $n(\bigcup_{i=1}^4 A_i) = \sum_{i=1}^4 n(A_i)$

Resumo:

Conceitos:

- Introdução ao princípio da inclusão e exclusão:

(Número de elementos da união de conjuntos não necessariamente disjuntos)

•
$$n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2) = \sum_{i=1}^{2} n(A_i) - n(A_1 \cap A_2)$$

•
$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_1 \cap A_3)$$

$$-n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \sum_{i=1}^{3} n(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1\\i < i}}^{3} n(A_i \cap A_2) + n(\bigcap_{i=1}^{3} A_i)$$

•
$$n(\bigcup_{i=1}^{4} A_i) = \sum_{i=1}^{4} n(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1\\i < j}}^{4} n(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i,j,l=1\\i < j}}^{4} n(A_i \cap A_j \cap A_l) - n(\bigcap_{i=1}^{4} A_i)$$

i< j<1 ceder

Exercícios

- 1. Sejam A e B dois subconjuntos de um conjunto universo U tais que B \subseteq A. Usando o princípio aditivo prove que n(A B) = n(A) n(B).
- 2. Quantos números inteiros entre 1 e 100 são divisíveis por 3 ou por 7.

Dica: Considere

 $A = \{ x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 100 \text{ e } x = 3k \text{ para algum } k \in \mathbb{N} \}$

B = { $x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 100 \text{ e } x = 7k \text{ para algum } k \in \mathbb{N}$ }

e use o princípio de inclusão e exclusão.

- 3. Use os princípios aditivo ou de inclusão e exclusão para determinar, em cada caso, a quantidade de números naturais entre 1 e 60 que verificam:
 - (i) são divisíveis por 2 e por 3
 - (ii) são divisíveis por 2 ou por 3
 - (iii) não são divisíveis nem por 2 nem por 3
 - (iv) são ímpares divisíveis por 3 ou são divisíveis por 2
 - (v) são divisíveis por 2 ou por 3 ou por 5

- 4. Foram consultadas 200 pessoas que estavam pesquisando preços de televisores em lojas de eletrodomésticos. As respostas foram as seguintes:
 - 40% perguntaram pela marca A;
 - 35% pela marca B;
 - 10% pelas marcas A e B;
 - 25% somente perguntaram por outras marcas.

Use o princípio de adição ou o princípio da inclusão e exclusão para determinar:

4. (continuação)

(i) quantidade de pessoas que perguntaram pelos preços das televisões de marcas A ou B.

(ii) número de pessoas que perguntaram pela marca A e não pela marca B (lembre-se do exercício 1).