Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP2 - Primeiro Semestre de 2018

Questões:

1. (1.2) Determine quantas são as soluções inteiras, não negativas da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 25$$

tais que $x_2 > 1$? Justifique.

Resposta: Como a variável x_2 é maior que 1, ou seja, x_2 é maior ou igual a 2, precisamos reescrever a inequação em função de uma variável não negativa. Seja $x_2 = x'_2 + 2$. Note que, como $x_2 \geq 2$, $x'_2 \geq 0$. Fazendo a substituição na inequação de x_2 por $x'_2 + 2$ temos:

$$x_1 + x'_2 + 2 + x_3 + x_4 \leq 25$$

$$x_1 + x'_2 + x_3 + x_4 \leq 23$$

Para transformar esta inequação em uma equação, vamos acrescentar uma variável f de folga. Esta variável tem o papel de completar o valor que a expressão à esquerda assume de modo a igualá-lo ao resultado da direita da inequação. Então, se, por exemplo, $x_1 + x'_2 + x_3 + x_4 = 23$, f assume o valor 0. Se $x_1 + x'_2 + x_3 + x_4 = 22$, então f assume o valor 1 e assim sucessivamente. Note que o maior valor que f pode assumir é 23. Assim, estamos acrescentando à inequação a variável $f \geq 0$ de modo a obter a seguinte equação com variáveis inteiras e não-negativas:

$$x_1 + x_2' + x_3 + x_4 + f = 23$$

Logo, o número de soluções inteiras não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 25$ com $x_2 > 1$ corresponde ao número de soluções inteiras não negativas da equação acima, que podemos obter utilizando o conceito de *Combinações com repetição.* Portanto, temos $CR_5^{23} = C_{23+5-1}^{23} = C_{27}^{23} = \dfrac{27!}{23!4!} = 17550$ soluções inteiras e não-negativas para a inequação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 25$, sendo $x_2 > 1$.

2. (1.3) Determine o termo independente no desenvolvimento de

$$\left(5x^3 - \frac{4}{x^2}\right)^{55}$$

Justifique a resposta.

Resposta: A fórmula para o termo geral do desenvolvimento do Binômio de Newton de $(a+b)^n$ é dada por: $T_{k+1} = C_n^k \; a^{n-k} \; b^k$, para $k = 0, 1, \cdots, n$. Neste caso temos $n = 55$, $a = 5x^3$ e $b = -\frac{4}{x^2}$).

$$\begin{array}{rcc} T_{k+1} & = & C_{55}^k \; (5x^3)^{55-k} \; (-\frac{4}{x^2})^k \\ & = & C_{55}^k \; (5)^{55-k} \; x^{165-3k} \; (-1)^k \; \frac{4^k}{x^{2k}} \\ & = & C_{55}^k \; (5)^{55-k} \; (-1)^k \; x^{165-3k} \; \frac{4^k}{x^{2k}} \\ & = & C_{55}^k \; (5)^{55-k} \; (-1)^k \; 4^k \; \frac{x^{165-3k}}{x^{2k}} \\ & = & C_{55}^k \; (5)^{55-k} \; (-1)^k \; 4^k \; x^{165-3k-2k} \\ & = & C_{55}^k \; (5)^{55-k} \; (-1)^k \; 4^k \; x^{165-5k} \end{array}$$

Como queremos o termo independente, queremos o coeficiente de x^0, logo temos:

$$165 - 5k = 0$$

$$5k = 165$$

$$\boxed{\text{k} = 33}$$

Portanto, $T_{34} = C_{55}^{33} \; (5)^{55-33} \; (-1)^{33} \; 4^{33} = \frac{55!}{33!22!} \; 5^{22} \; (-1) \; 4^{33} = -\frac{55!}{33!22!} \; 5^{22} \; 4^{33}$.

3. (1.0) Use o Teorema das diagonais para calcular a seguinte soma:

$$C_{50}^{1} \; + \; C_{51}^{2} \; + \; C_{52}^{3} \; + \; \cdots + C_{60}^{11}$$

Resposta: O teorema das diagonais nos diz que $C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \ldots + C_{n+r}^r = C_{n+r+1}^r$

$$\begin{aligned}
& C_{50}^{1} \; + \; C_{51}^{2} \; + \; C_{52}^{3} \; + \; \cdots + C_{60}^{11} && = \\
= \; & C_{50}^{1} \; + \; C_{51}^{2} \; + \; C_{52}^{3} \; + \; \cdots + C_{60}^{11} + C_{49}^{0} - C_{49}^{0} && = \\
= \; & \underbrace{C_{49}^{0} \; + \; C_{50}^{1} \; + \; C_{51}^{2} \; + \; C_{52}^{3} \; + \; \cdots + C_{60}^{11}}_{Pelo\ teorema\ das\ diagonais,\ quando\ n=49\ e\ r=11} - C_{49}^{0} && = \\
= \; & C_{49+11+1}^{11} - C_{49}^{0} && = \\
= \; & C_{61}^{11} - C_{49}^{0} && = \\
= \; & \tfrac{61!}{11!50!} - \tfrac{49!}{0!49!} && = \\
= \; & \tfrac{61!}{11!50!} - 1
\end{aligned}$$

4. (1.0) Encontre a fórmula fechada da relação de recorrência:
$a_n = 2a_{n-1} - 1$ para todo número natural n,
$a_0 = -1$
Justifique.

Resposta: Utilizando o método da Substituição regressiva temos:

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2\,a_{n-1} - 1 \\
&= 2\,(2\,a_{n-2} - 1) - 1 \\
&= 2^2\,a_{n-2} - 2 - 1 \\
&= 2^2\,(2\,a_{n-3} - 1) - 2 - 1 \\
&= 2^3\,a_{n-3} - 2^2 - 2^1 - 2^0 \\
&\;\;\vdots \\
&= 2^i\,a_{n-i} - 2^{i-1} - 2^{i-2} - \ldots - 2^2 - 2^1 - 2^0
\end{aligned}
$$

Fazendo $n - i = 0$ temos que $i = n$ e sabendo que $a_0 = -1$, temos:

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2^n\,a_0 - 2^{n-1} - 2^{n-2} - \ldots - 2^2 - 2^1 - 2^0 \\
&= -2^n - 2^{n-1} - 2^{n-2} - \ldots - 2^2 - 2^1 - 2^0 \\
&= -\underbrace{(2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-2} + 2^{n-1} + 2^n)}_{\text{soma dos } n+1 \text{ primeiros termos de uma P.G de razão 2.}} \\
&= -\left(\tfrac{2^{n+1} - 2^0}{2 - 1}\right)
\end{aligned}
$$

Portanto, a fórmula fechada para a relação de recorrência é $a_n = 1 - 2^{n+1}, n \geq 0, a_0 = -1$.

5. (1.3) Seja G um grafo planar conexo com sequência de grau de vértices $(1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5)$. Determine o número de arestas e o número de faces de G. Justifique.

   Resposta: Pelo Teorema do Aperto de Mãos, temos:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

Como G possui a sequência de grau de vértices $(1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5)$, então:

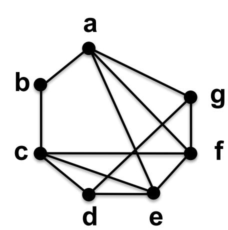
$1{+}2{+}2{+}2{+}2{+}2{+}3{+}3{+}3{+}4{+}4{+}5{+}5 = 2m \Rightarrow 38 = 2m \Rightarrow \boxed{\text{m} = 19}$

Pelo teorema de Euler para grafos planares temos que em um grafo planar, $f = m - n + 2$, onde f, m, n denotam respectivamente os números de faces, arestas e vértices do grafo. Assim, G possui:

$$f = m - n + 2 \Rightarrow f = 19 - 13 + 2 \Rightarrow \boxed{\text{f} = 8}$$

6. (4.2) As seguintes perguntas devem ser respondidas considerando o grafo $G = (V, E)$, sendo: $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e $E = \{(a, b), (a, e), (a, f), (a, g), (b, c), (c, d), (c, e), (c, f), (d, e), (d, g), (e, f), (f, g)\}$

   Considere a seguinte representação gráfica:



   (a) G é bipartido? Justifique.

   Resposta: NÃO, pois um grafo G é bipartido se e somente G não possui ciclo ímpar, e neste caso o grafo G possui ciclo ímpar, como por exemplo, a, e, f, a.

   (b) O conjunto de vértices $\{a, e, f, g\}$ é uma clique de G?

   Resposta: NÃO, pois um subconjunto de vértices de um grafo G é clique, se para quaisquer dois pares de vértices deste subconjunto, estes são adjacentes. No conjunto de vértices $\{a, e, f, g\}$ isto não acontece, já que os vértices e e g não são adjacentes.

(c) G é euleriano? Justifique.

Resposta: NÃO, pois por teorema temos que um grafo G é euleriano se e somente se todo vértice de G possui grau par.

Os graus dos vértices d e g do grafo G possuem grau ímpar, isto é, $d_G(d) = d_G(g) = 3$.

Logo, G não é euleriano.

(d) G é hamiltoniano? Caso seja, dê o ciclo hamiltoniano de G.

Resposta: SIM, pois podemos exibir o seguinte ciclo Hamiltoniano: $abcdefga$.

(e) Qual o diâmetro de G e qual o centro de G? Justifique.

Resposta: Sabemos que:

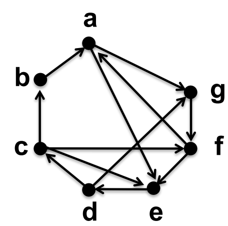
- A distância entre vértices v, w, denotada por $d(v, w)$ é o tamanho do menor caminho entre v e w, caso exista algum.
- A excentricidade de um vértice v, denotada por $e(v)$, é a maior distância de v a qualquer outro vértice do grafo.
- O diâmetro de um grafo G, denotado por $\text{diam}(G)$, é o valor da maior excentricidade de G.
- O centro de um grafo G, denotado por $C(G)$, é o conjunto de vértices com a menor excentricidade de G.

Assim, como $e(a) = e(b) = e(c) = e(d) = e(e) = e(f) = e(g) = 2$, temos que $\text{diam}(G) = 2$ e $C(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\} = V(G)$.

(f) Dê uma orientação às arestas de G (desenhe no grafo), de maneira que o digrafo gerado por essa orientação seja fortemente conexo. Justifique.

Resposta: Seja D o digrafo formado com uma orientação dada pelas arestas de G:

- Um digrafo D é fortemente conexo quando para todo par de vértices v, $w \in V(G)$ existir um caminho em D de v para w e também de w para v.



Podemos observar que o digrafo D apresentado possui um ciclo direcionado $abcdefga$ e podemos partir de um vértice escolhido e chegar a qualquer outro, basta percorrer o ciclo no sentido dado. Logo, o digrafo D dado é fortemente conexo.