Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
AD1 - Primeiro Semestre de 2015

Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (1.0) Considere o seguinte conjunto:

$$A = \{\emptyset, 1, \{-2\}\}$$

(i) Determine o conjunto de partes de A, $P(A)$.

Resposta: Dado um conjunto A, o conjunto das partes, $P(A)$, de A é aquele formado por todos os subconjuntos de A. Assim, temos que:

$$P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{\{-2\}\}, \{\emptyset, 1\}, \{\emptyset, \{-2\}\}, \{1, \{-2\}\}, \{\emptyset, 1, \{-2\}\}\}$$

(ii) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

(a) $\{\emptyset\} \in A$;

Resposta: Falso. Podemos ver que $\{\emptyset\}$ não é um elemento de A, ao contrário de $\emptyset$. Portanto podemos dizer que $\{\emptyset\}$ está contido em A.

(b) $\{\emptyset\} \in P(A)$;

Resposta: Verdadeiro. Como $\emptyset \in A$, o subconjunto formado apenas pelo elemento $\emptyset$ deve ser um elemento de $P(A)$.

(c) $\{\emptyset, \{A\}\} \subseteq P(A)$.

Resposta: Falso. Como vimos, os elementos $\emptyset$ e $A = \{\emptyset, 1, \{-2\}\}$ são elementos de $P(A)$. Logo o subconjunto $\{\emptyset, A\}$ está contido em $P(A)$. Porém, o elemento $\{A\} \notin P(A)$ e portanto $\{\emptyset, \{A\}\}$ não é subconjunto de A.

2. (1.0) Num grupo de 70 pessoas, 55 fazem natação, 7 fazem iôga, 8 fazem natação e musculação, 3 fazem iôga e musculação, 5 fazem natação e iôga e 2 fazem todas as modalidades. Determine o número de pessoas desse grupo que fazem musculação usando o Princípio de Inclusão e Exclusão. Justifique.

Resposta: Sejam I, N e M os conjuntos das pessoas que fazem iôga, natação e musculação, respectivamente. Pelo Princípio de Inclusão e Exclusão aplicado aos três conjuntos, o número total de pessoas $T = |I \cup N \cup M|$ é dado por:

$$T = |I \cup N \cup M| = |M| + |N| + |I| - |N \cap I| - |N \cap M| - |I \cap M| + |I \cap N \cap M|$$

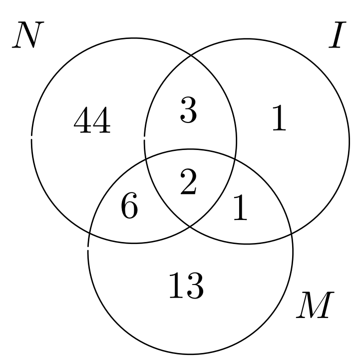
E assim:

$$|M| = T - |N| - |I| + |N \cap I| + |N \cap M| + |I \cap M| - |N \cap N \cap M|$$

Portanto, pelos dados do enunciado temos que:

$$|M| = 70 - 55 - 7 + 5 + 8 + 3 - 2 = 22$$

A figura abaixo mostra uma representação por Diagrama de Venn da situação descrita:



3. (1.5) Mostre usando o Princípio da Indução que: $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1}n(n+1)/2$,
para todo inteiro n, $n \geq 1$.

Resposta:

Seja $P(k) = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{k+1}k^2 = (-1)^{k+1}k(k+1)/2$.

Base da Indução: Fazendo $k = 1$ temos que $1^2 = 1$ e $(-1)^{1+1}1(1+1)/2 = (-1)^2(2)/2 = 1$, logo $P(1)$ é verdadeira.

Hipótese de Indução (H.I.): Suponha que $P(k)$ é verdadeiro.

Passo Indutivo: Vamos provar que se $P(k)$ é verdadeiro então $P(k+1)$ é verdadeiro:

$$\underbrace{1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{k+1}(k)^2}_{\text{Aplicando a H.I. :}} + (-1)^{k+2}(k+1)^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{k+1}(k)(k+1)/2 + (-1)^{k+2}(k+1)^2 \\
&= (-1)^{k+1}(k+1)[k/2 + (-1)(k+1)] \\
&= (-1)^{k+1}(k+1)[(k - 2(k+1))/2] \\
&= (-1)^{k+1}(k+1)(-k-2)/2 \\
&= (-1)^{k+2}(k+1)(k+2)/2
\end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, temos que $P(k) = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{k+1}k^2 = (-1)^{k+1}k(k+1)/2$ é verdadeiro para todo $k \in \mathbb{N}$.

4. (1.5) Calcule, justificando, a quantidade de números de 3 algarismos que podem ser formados com os algarismos 1,2,3,4,5,6 e 7, incluindo sempre o algarismo 5, se:

(a) os algarismos são todos diferentes;

Resposta: Como o algarismo 5 deve obrigatoriamente figurar nos números de três algarismos, que devem ser todos distintos, então o número de possibilidades pode ser dado da seguinte forma: primeiro escolhemos a posição, dentre as três possíveis, do algarismo 5, que são 3, e em seguida contamos de quantas formas podemos completar outras duas posições com elementos diferentes de 5 e distintos entre si. Temos 3 possibilidades para a escolha da posição do algarismo 5. Podemos ver que as duas posições restantes devem ser preenchidas com elementos de 1 a 7, a menos do algarismo 5, ou seja, temos 6 elementos que devem ocupar duas posições e aqueles escolhidos devem ser distintos.

Isto é, temos $A(6,2)$ possibilidades, como vimos nas aulas. Logo, a quantidade de números de 3 algarismos que podem ser formados com os algarismos 1,2,3,4,5,6 e 7, incluindo sempre o algarismo 5, pode ser dado por:

$$3 \times A(6,2) = 3 \times \frac{6!}{(6-2)!} = 3 \times \frac{6!}{4!} = 3 \times 6 \times 5 = 90$$

(b) os algarismos podem estar repetidos.

Resposta: Neste caso, um raciocínio possível é excluir, de todas as possíveis formas de construir o número com os algarismos de 1 a 7, o total de números de três algarismos que não possuem o algarismo 5. Utilizando esse raciocínio, calculamos primeiro o número total de formas de construir o número com os algarismos de 1 a 7. Podemos ver que existem $AR(7,3) = 7^3$ possíveis números, já que para cada uma das três posições temos 7 possibilidades de escolha de algarismos para ocupá-las. Da mesma forma, o total de números de três algarismos que não possuem o algarismo 5 é dado por $AR(6,3) = 6^3$. Logo, temos um total de $7^3 - 6^3 = 343 - 256 = 127$ possibilidades.

Note que também podemos resolver o problema dividindo nos casos em que o número é formado por exatamente um, exatamente dois e exatamente três algarismos iguais a 5, em que é permitida a repetição dos demais elementos. Dessa forma, teríamos como resposta

$$3 \times AR(6,2) + 6 \times C(3,2) + 1 = (3 \times 6^2) + (6 \times 3) + 1 = 127$$

5. (1.0) De quantas maneiras podemos sentar 15 pares de casais em torno de uma mesa redonda, de modo que cada casal permaneça junto na mesa? Justifique.

Resposta: Como cada casal deve permanecer junto na mesa, podemos considerar cada casal como um elemento único, onde devemos contar o número de possibilidades de permutar esses 15 casais em torno da mesa. Como a posição de cada casal na mesa é relativa apenas as posições dos demais casais, devemos contar o número de Permutações Circulares $(PC)_{15}$. Lembrando que $(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n-1!)$, temos que $(PC)_{15} = 14!$. Além disso, para cada casal, devemos considerar a permutação das duas pessoas, ou seja, devemos multiplicar por 2 possibilidades para cada casal. Logo, o total de formas de sentar os 15 casais na mesa de forma que casais fiquem juntos é dado por $14! \times 2^{15}$.

6. (1.5) Quantos são os números naturais de 8 dígitos, nos quais o dígito 6 figura exatamente 4 vezes e o dígito 9 exatamente 2 vezes? Justifique.

   Resposta: Consideremos as seguintes etapas na construção de uma solução para o problema: escolhemos 4 posições (casas decimais), das 8 existentes, que serão ocupadas pelos dígitos de valor 6; escolhemos 2 posições, das 4 restantes, a serem preenchidas pelo valor 9; preenchemos cada uma das duas posições restantes com elementos do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$; como contamos também números que começam com 0, devemos descontar tais escolhas. Logo, a quantidade de números formados pelas três primeiras etapas resulta em:

$$C_8^4 \times C_4^2 \times AR(8,2) = \frac{8!}{4!4!} \times \frac{4!}{2!2!} \times 8^2 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{2 \times 2} \times 64 = 840 \times 32$$

   Já na última etapa, devemos escolher 4 posições das 7 possíveis para os dígitos de valor 6, em seguida escolhemos 2 posições das 3 restantes e por último teremos 8 possibilidades para preenchermos a posição restante. Logo temos um total de:

$$C_7^4 \times C_3^2 \times 8 = \frac{7!}{4!3!} \times \frac{3!}{2!1!} \times 8 = \frac{7 \times 6 \times 5}{2} \times 8 = 840$$

   Logo, a quantidade de números naturais de 8 dígitos, nos quais o dígito 6 figura exatamente 4 vezes e o dígito 9 exatamente 2 vezes é igual a:

$$840 \times 32 - 840 = 840 \times 31 = 26040$$

7. (1.0) Quantos anagramas, terminando com a letra **A**, podem ser formados com a palavra **ABRACADABRA**? Justifique.

   Resposta: Como queremos o número de anagramas que terminam com a letra A, podemos considerar o problema equivalente de determinar o número de anagramas da palavra ABRACADABR. Como temos 4 letras A's, 2 letras B's, 2 letras R's, 1 letra C e uma letra D, o número de anagramas pode ser dado pelo número de Permutações com Repetições, que já sabemos calcular como visto na questão 6. Assim, temos que o número de anagramas terminando com a letra **A** é igual a:

$$P_{10}^{4,2,2,1,1} = \frac{10!}{4!2!2!1!1!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{2 \times 2} = 37800$$

8. (1,5) Uma loja de conveniência tem um estoque de 100 laranjas, 50 maçãs e 30 mangas. Considerando que as frutas da mesma espécie são idênticas, de quantas maneiras podemos selecionar 25 frutas, de modo que pelo menos 3 delas sejam maçãs? Justifique.

   Resposta: Sejam x, y e z os números de laranjas, mangas e maçãs, respectivamente, que pertencem ao conjunto de 25 frutas escolhidas. Portanto, temos que $x + y + z = 25$. Além disso sabemos que $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 3$, já que precisamos escolher ao menos 3 maçãs e, assim, podemos reescrever a equação anterior como $x+y+z'+3 = 25$, onde z' é um inteiro e $z' \geq 0$. Dessa forma, o número de maneiras que podemos selecionar 25 frutas, de modo que pelo 3 delas sejam maçãs, pode ser dado pelo número de soluções inteiras não negativas da equação $x + y + z' = 22$, que podemos obter utilizando o conceito de Combinações com Repetição. Portanto temos:

$$CR_3^{22} = C_{24}^{22} = \frac{24!}{22!2!} = \frac{24 \times 23}{2} = 276$$