Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD1 - Primeiro Semestre de 2017

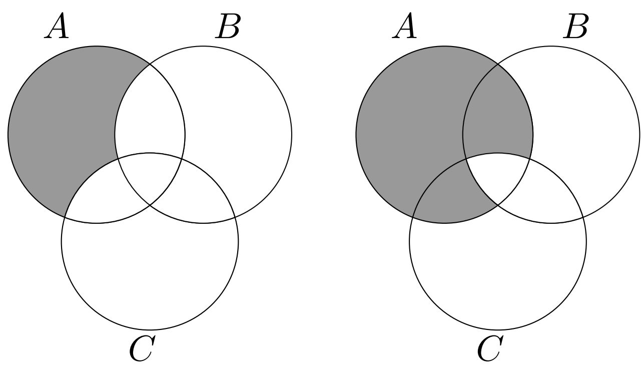
Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (1.0) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

   (a) $(A - B) - C = A - (B \cap C)$;

   Resposta: Falsa! Observe os Diagramas de Venn da Figura 1.



$(A - B) - C$ $\quad\quad$ $A - (B \cap C)$

(b) $\{\emptyset\} \subseteq P(D)$ se $D = \{\{\emptyset\}, 0\}$ e $P(D)$ é o conjunto de partes de D.

Resposta: Verdadeira! $P(D) = \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{0\}, \{\{\emptyset, 0\}\}\}$. Como $\emptyset \in P(D)$, $\{\emptyset\}$ é subconjunto de $P(D)$.

OBS.: Esta afirmação é verdadeira para qualquer conjunto D, uma vez que $\emptyset \in P(D), \forall D$.

2. (1.5) Considere os seguintes conjuntos:
A: conjunto dos números ímpares compreendidos entre 2 e 39 inclusive,
B: conjunto dos números inteiros, n, que verificam a desigualdade $|10n - 37| \leq 57$,
C: conjunto de números naturais divisíveis por 3 e compreendidos entre 6 e 25 inclusive.

(a) Descreva os conjuntos através de expressões matemáticas e também exiba seus elementos explicitamente. Justifique.

Resposta:
$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k + 1 \text{ e } 2 \leq x \leq 39, k \in \mathbb{N}\} =$
$= \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k + 1 \text{ e } 2 \leq 2k + 1 \leq 39, k \in \mathbb{N}\} =$
$= \{2 \times 1 + 1, 2 \times 2 + 1, \ldots, 2 \times 19 + 1\} =$
$= \{3, 5, 7, 9, \ldots, 2k + 1, \cdots 37, 39\}$, pois

$$2 \leq 2k + 1 \leq 39 \quad k \in \mathbb{N}, \quad \text{equivale a}$$
$$\frac{1}{2} \leq k \leq 19 \quad k \in \mathbb{N}, \text{ ou seja}$$
$$1 \leq k \leq 19, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$B = \{n \in \mathbb{Z} \mid |10n - 37| \leq 57\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, \ldots, 9\}$, pois

$$|10n - 37| \leq 57$$
$$-57 \leq 10n - 37 \leq 57$$
$$-57 + 37 \leq 10n \leq 57 + 37$$
$$-20 \leq 10n \leq 94$$
$$\frac{-20}{10} \leq n \leq \frac{94}{10}$$

$$-2 \leq n \leq 9.4$$

Como o maior inteiro pertencente ao intervalo $[-2, 9.4]$ é 9, e $n \in \mathbb{Z}$, $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq n \leq 9\}$.

$C = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 3j \text{ e } 6 \leq y \leq 25, j \in \mathbb{N}\} =$
$\{y \in \mathbb{N} \mid y = 3j \text{ e } 6 \leq 3j \leq 25, j \in \mathbb{N}\} =$
$= \{y \in \mathbb{N} \mid y = 3j \text{ e } 2 \leq j \leq 8, j \in \mathbb{N}\} =$
$= \{3 \times 2, 3 \times 3, \ldots, 3 \times 8\} =$
$= \{6, 9, \ldots, 3j, \cdots, 24\}$.

(b) Encontre o número de elementos de $A \cup B \cup C$ usando o Princípio de Inclusão e Exclusão. Justifique.

Resposta: Pelo Princípio da Inclusão e Exclusão temos:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Cálculo das cardinalidades dos conjuntos:
$n(A) = 19$
$n(B) = 12$
$n(C) = 7$
$(A \cap B) = \{3, 5, 7, 9\} \Rightarrow n(A \cap B) = 4$
$(A \cap C) = \{9, 15, 21\} \Rightarrow n(A \cap C) = 3$
$(B \cap C) = \{6, 9\} \Rightarrow n(B \cap C) = 2$
$(A \cap B \cap C) = \{9\} = 1$
Assim,

$$n(A \cup B \cup C) = 19 + 12 + 7 - 4 - 3 - 2 + 1 = 30$$

3. (1.5) Mostre usando o Princípio da Indução Matemática que:

$$\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.13} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

para todo inteiro n, $n \geq 1$.

Resposta: Seja

$$P(n): \frac{1}{1.5}+\frac{1}{5.9}+\frac{1}{9.13}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}, \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 1$$

.

BASE DA INDUÇÃO: Como $\frac{1}{1\times 5}=\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{4\times 1+1}=\frac{1}{5}$, temos que $P(1)$ é verdadeira.

HIPÓTESE DA INDUÇÃO: Suponha

$$P(k): \frac{1}{1.5}+\frac{1}{5.9}+\frac{1}{9.13}+\ldots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{k}{4k+1}$$

verdadeira para $k \geq 1$.

PASSO INDUTIVO: Vamos provar que, se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1): \frac{1}{1.5}+\frac{1}{5.9}+\frac{1}{9.13}+\ldots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}+\frac{1}{[4(k+1)-3][4(k+1)+1]}=\frac{k+1}{4(k+1)+1}$ é verdadeira, isto é $P(k+1): \frac{1}{1.5}+\frac{1}{5.9}+\frac{1}{9.13}+\ldots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}+\frac{1}{[4(k+1)-3][4(k+1)+1]}=\frac{k+1}{4k+5}$ é verdadeira.

$$\frac{1}{1.5}+\frac{1}{5.9}+\frac{1}{9.13}+\ldots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}+\frac{1}{[4(k+1)-3][4(k+1)+1]}=$$

$$\underbrace{\frac{1}{1.5}+\frac{1}{5.9}+\frac{1}{9.13}+\ldots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}}_{\text{H.I.}}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=$$

$$\frac{k}{4k+1}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=$$

$$\frac{k(4k+5)+1}{(4k+1)(4k+5)}=$$

$$\frac{4k^2+5k+1}{(4k+1)(4k+5)}=$$

$$\frac{(4k+1)(k+1)}{(4k+1)(4k+5)} =$$

$$\frac{k+1}{4k+5}$$

Logo, $P(k)$ é verdadeira para todo inteiro n, $n \geq 1$.

4. (2.0) Ana tem 11 amigos mais próximos. De quantas maneiras diferentes ela pode convidar 5 desses amigos para um jantar se:

(a) dois desses amigos são casados entre si e devem ser convidados juntos.

Resposta: Suponha que A e B são casados. Vamos considerar dois casos: no primeiro, calculamos quantas configurações são possíveis incluindo A e B; no segundo, quantas não incluem nem A e nem B.

CASO1: A e B são convidados.

Neste caso, restam 9 amigos dos quais serão escolhidos 3. Podemos fazer isto de $C_9^3 = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9\times8\times7}{3\times2} = 84$ formas.

CASO 2: A e B não são convidados.

Neste caso, temos que excluir ambos, A e B, pois não podemos convidar A e não convidar B e vice-versa. Assim temos $C_9^5 = \frac{9!}{4!5!} = 126$ maneiras de convidar 5 amigos que não incluem A e B. Logo, pelo P.A., existem $84 + 126 = 210$ formas de convidar 5 amigos dentre os 11 respeitando as restrições do problema.

(b) todos os amigos são solteiros, mas dois deles estão brigados e não podem ser convidados juntos.

Resposta: Suponha que C e D estejam brigados. Para solucionar este item, vamos utilizar a noção de complemento, ou seja, vamos calcular o total de formas de convidar 5 dentre os 11 amigos e, deste valor, subtrair a quantidade de formas de combinar 5 amigos que incluem C e D ao mesmo tempo.

Assim, temos $C_{11}^5 = \frac{11!}{6!5!} = 462$ formas de convidar 5 dentre os 11 amigos. Como visto no item (a), temos $C_9^3 = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9\times8\times7}{3\times2} = 84$

formas de convidarmos 5 amigos, sendo que 2 desses amigos são fixos. Então, utilizando a noção de complemento, temos $462-84 = 378$ maneiras de convidar 5 amigos dentre os 11 de modo que C e D nunca são convidados juntos.

5. (2.0) Considere a palavra **INCONSTITUCIONALMENTE**.
Determine justificando:

(a) o número de anagramas que começam por **INC**, nesta ordem,

Resposta: A palavra **INCONSTITUCIONALMENTE** possui 3 I's, 4 N's, 2 C's, 2 O's, 1 S, 3T's, 1 U, 1 A, 1 L, 1 M, 2 E's, totalizando 21 letras. Vamos fixar as letras INC no início dos anagramas. Sendo assim, temos $P_{18}^{2,3,1,2,1,3,1,1,1,1,2} = \frac{18!}{2!2!2!3!3!}$ anagramas que começam por INC, nesta ordem.

(b) o número de anagramas cujas primeiras três letras são **I, N, C**, numa ordem qualquer.

Resposta: Observe que basta permutarmos as 3 primeiras letras, seguindo o mesmo raciocínio do item (a). Portanto, temos $3!\frac{18!}{2!2!2!3!3!} = \frac{18!}{2!2!2!3!}$ anagramas que começam por INC, em qualquer ordem.

6. (2.0) Uma loja de antiguidades colocou a venda oito móveis antigos idênticos. Surgiram 3 possíveis compradores (A, B e C).
Observemos que não necessariamente todos os móveis serão comprados.

(i) De quantas maneiras diferentes esses móveis podem ser comprados? Justifique.

Resposta: Seja x_i o número de móveis comprados por i, onde $i \in \{A, B, C\}$, $x_i \geq 0$.
Neste caso, a seguinte inequação expressa o problema.

$$x_A + x_B + x_C \leq 8 \quad (I)$$

Para solucionar este problema, vamos introduzir a variável de folga $f \geq 0$, com o intuito de obter a equação (II), equivalente à inequação (I).

$$x_A + x_B + x_C + f = 8 \quad (II)$$

Sabemos que o número de soluções inteiras e não negativas da equação (II) nos dá o número de formas distintas que os móveis podem ser comprados. Logo, temos $CR_4^8 = C_{8+4-1}^8 = C_{11}^8 = \frac{11!}{3!8!} =$ 165 maneiras distintas.

(ii) De quantas maneiras diferentes podem ser comprados se A vai adquirir mais de um móvel? Justifique.

Resposta: Seja x_i o número de móveis comprados por i, onde $i \in \{A, B, C\}$.
Novamente, a inequação (I) expressa o problema.

$$x_A + x_B + x_C \leq 8 \quad (I)$$

Como A deve comprar pelo menos 2 móveis, temos $x_A \geq 2, x_B \geq 0, x_C \geq 0$. Vamos escrever x_A em função de uma variável não negativa, $y \geq 0$.
$x_A = y + 2, y \geq 0 \Longleftrightarrow x_A \geq 2$.
Assim, podemos reescrever a inequação (I), substituindo x_A por $(y + 2)$ e adicionando a variável de folga $f \geq 0$, obtendo assim a equação (II) em função apenas de variáveis não negativas.

$$(y + 2) + x_B + x_C + f = 8$$

$$y + x_B + x_C + f = 8 - 2$$

$$y + x_B + x_C + f = 6$$

Sabemos que o número de soluções inteiras e não negativas da equação (II) dá o número de formas distintas que os móveis podem ser comprados. Logo, temos $CR_4^6 = C_9^6 = \frac{9!}{3!6!} = 84$ maneiras distintas.