Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD1 - Primeiro Semestre de 2014

Nome -
Assinatura -

Atenção! Embora o tópico **Combinação com Repetição** não seja abordado na AD1, **ele faz parte do conteúdo da AP1.**

Questões:

1. (1.5) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

(i) $A - (B - C) = (A - B) \cup (B \cap C)$, sendo A, B e C conjuntos arbitrários.

Resposta: Falsa. Observe os diagramas de Venn da Figura 1.

(ii) Seja $A = \{\emptyset, 1\}$ e $P(A)$ o conjunto das partes de A. Então $\{\emptyset\} \in P(A)$.

Resposta: Verdadeiro, pois $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{\emptyset, 1\}\}$. Logo,$\{\emptyset\}$ é elemento de $P(A)$.

(iii) $\{\sqrt{2}, 3\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} : \ |3x - 7| \leq 15\}$.

Resposta: Falso. Observe que

$$|3x - 7| \leq 15$$

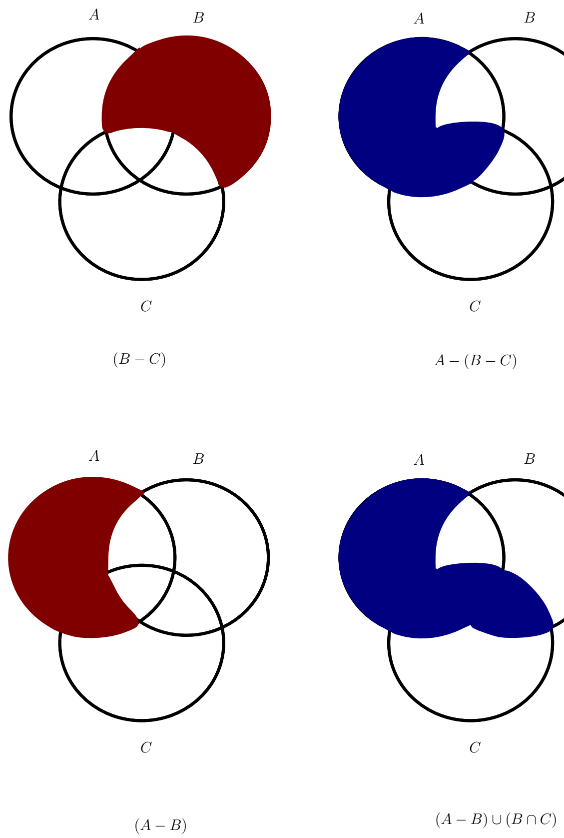

Figura 1: Diagramas de Venn para $A - (B - C)$ e $(A - B) \cup (B \cap C)$. Note que o resultado das operações não é o mesmo.

significa
$$-15 \leq 3x - 7 \leq 15,$$
isto é
$$-15 + 7 \leq 3x \leq 15 + 7,$$
ou seja
$$\frac{-8}{3} \leq x \leq \frac{22}{3}.$$
Note ainda que $\frac{-8}{3} < \sqrt{2} < \frac{22}{3}$, mas $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$. Uma vez que para um conjunto A estar contido em outro B, todo elemento de A deve ser elemento de B, temos que $\sqrt{2}$ teria que ser um número

inteiro para pertencer a $\{x \in \mathbb{Z} : |3x - 7| \leq 15\}$, o que caracteriza um absurdo.

2. (1.0) Todos os convidados em um jantar bebem café ou chá; 13 convidados bebem café, 10 bebem chá e 4 bebem tanto café quanto chá. Quantas pessoas há nesse grupo?

   Resposta: Considere os seguintes conjuntos:

   A =conjunto das pessoas que bebem chá

   B = conjunto das pessoas que bebem café

   Como todos os convidados bebem chá ou café, nosso objetivo é determinar qual o valor de $n(A \cup B)$. Utilizando o Princípio da inclusão e exclusão para dois conjuntos temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

   Substituindo os valores fornecidos na fórmula temos: $n(A \cup B) = 10 + 13 - 4 = 19$. Portanto, existem 19 pessoas neste grupo.

3. (2.5)

   (a) Mostre pelo Princípio da Indução Matemática que:
   $3^n - 2$ é ímpar para todo inteiro $n \geq 1$.

   Resposta: Um número par é um múltiplo de 2. Todo número ímpar sucede um número par. Sendo assim, podemos representá-lo pela soma de um número par e 1. (Exemplo: 3 é ímpar e podemos representá-lo como $2 + 1$). Portanto, considere

$$P(n) : 3^n - 2 = 2j + 1$$

   para algum $j \in \mathbb{Z}, j \geq 0$.
   BASE DA INDUÇÃO: $n = 1$. Como $3^1 - 2 = 1$ é um número ímpar ($j = 0$), temos que $P(1)$ é verdadeira.

   HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Suponha que $P(k) : 3^k - 2 = 2j' + 1$ para algum $j' \in \mathbb{Z}, j' \geq 0$ seja verdadeira.

PASSO INDUTIVO: Vamos provar que se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1) : 3^{k+1} - 2 = 2j'' + 1$ também é verdadeira para algum $j'' \in \mathbb{Z}, j' \geq 0$:

$$3^{k+1} - 2 =$$

$$3 \times \underbrace{3^k}_{\text{H.I.}} - 2 =$$

$$3(2j' + 3) - 2 =$$

$$6j' + 7 =$$

$$2\underbrace{(3j' + 3)}_{j''} + 1 =$$

$$2j'' + 1$$

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, $3^n - 2$ é ímpar para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Considere a sequência a_n tal que:
$a_o = 12$, $a_1 = 29$ e $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$ para todo inteiro $k \geq 2$.
Mostre por Indução Forte que:
$a_n = 5.3^n + 7.2^n$ para todos inteiros $n \geq 0$.

Resposta: Dada a sequência a_n tal que: $a_0 = 12$, $a_1 = 29$ e $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$ para todo inteiro $k \geq 2$, vamos mostrar por indução forte que $P(n) : a_n = 5.3^n + 7.2^n$, é verdadeira para todo $n \geq 0$.

BASE DA INDUÇÃO: Vamos mostrar que $P(0)$ e $P(1)$ são verdadeiras.

$n = 0$

Como $a_0 = 12$ e $5.3^0 + 7.2^0 = 12$ temos que $P(0)$ é válida.

Além disso, como $a_1 = 29$ e $5.3^1 + 7.2^1 = 29$ também temos a validade de $P(1)$.

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Suponha que $P(i) : a_i = 5.3^i + 7.2^i$ seja verdadeira para todo $i \leq k$.

PASSO INDUTIVO: Vamos mostrar que

$$P(k+1) : a_{k+1} = 5.3^{k+1} + 7.2^{k+1}$$

é verdadeira.

$$\begin{array}{rcl}
a_{k+1} & = & 5\underbrace{a_k}_{\text{H.I.}} - 6\underbrace{a_{k-1}}_{\text{H.I.}} \\
& = & 5(5.3^k + 7.2^k) - 6(5.3^{k-1} + 7.2^{k-1}) \\
& = & 5^2.3^k + 5.7.2^k - [6.5.3^{k-1} + 6.7.2^{k-1}] \\
& = & 5^2.3^k + 5.7.2^k - 6.5.3^{k-1} - 6.7.2^{k-1}] \\
& = & 5.3^{k-1}(5.3 - 6) + 7.2^{k-1}(5.2 - 6) \\
& = & 5.3^{k-1}.3^2 + 7.2^{k-1}.2^2 \\
& = & 5.3^{k+1} + 7.2^{k+1}
\end{array}$$

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática Forte, temos que a sequência a_n descrita corresponde a $a_n = 5.3^n + 7.2^n$ para todos inteiros $n \geq 0$.

4. (1.2) Em quantos dos números naturais menores do que 10.000 não ocorrem números idênticos pareados (isto é, não aparecem os bocos 11, 22, etc)?

Resposta: Vamos analisar a quantidade de números onde não ocorre o pareamento de algarismos idênticos de acordo com a quantidade de dígitos de cada número.

CASO 1: 1 dígito

Neste caso, nenhum número apresenta algarismos idênticos pareados. Logo temos 9 números não pareados.

CASO 2: 2 dígitos

Note que para o primeiro dígito podemos escolher qualquer algarismo exceto o 0. Para o segundo, podemos escolher qualquer algarismo menos o escolhido para a primeira posição. Sendo assim, pelo PM, temos $9 \times 9 = 9^2$ números não pareados.

CASO 3: 3 dígitos

Repete-se o raciocínio do caso 2 para os dois primeiros dígitos. Para o terceiro, não podemos escolher apenas o algarismo escolhido para a segunda posição. Logo, pelo PM, temos $9 \times 9 \times 9 = 9^3$ números não pareados.

CASO 4: 4 dígitos

Repete-se o raciocínio do caso 3 para os três primeiros dígitos. Para o quarto, não podemos utilizar o algarismo que utilizamos na terceira posição, restando, portanto, 9 possibilidades de escolha. Assim, pelo PM, temos $9^3 \times 9 = 9^4$.

Como os casos de 1 a 4 excluem-se mutuamente, pelo PA, temos $9 + 9^2 + 9^3 + 9^4$ números menores que 10000 que não possuem algarismos idênticos pareados.

5. (1,2) Há 12 cadeiras em fila. De quantos modos 6 casais podem se sentar nas cadeiras, se nenhum marido senta separado de sua esposa?

   Resposta: Existem 2 maneiras de um marido sentar-se ao lado de sua esposa: pela direita ou pela esquerda. Vamos considerar cada casal como um único elemento e permutá-los. Assim, pelo PM, temos:

$$2^6 \times P_6 = 2^6 \times 6!$$

   maneiras dos casais se disporem nesta fila.

6. (1,3) De quantas maneiras 10 livros distintos podem ser colocados em 5 caixas idênticas, contendo 2 livros cada uma?

   Resposta: Vamos escolher os livros que ocuparão cada caixa. Vamos considerar dois casos de interpretação.

   - CASO 1: A ordem com que os livros estão dispostos na caixa é considerada.

     Neste caso, para escolhermos e arrumarmos os 2 livros em cada caixa utilizamos um Arranjo simples. Logo, para a primeira caixa temos A_{10}^2. Para a segunda, A_8^2. Para a terceira, quarta e quinta temos respectivamente A_6^2, A_4^2 e A_2^2. Pelo PM temos $A_{10}^2 \times A_8^2 \times A_6^2 \times A_4^2 \times A_2^2 = \frac{10!}{8!} \times \frac{8!}{6!} \times \frac{6!}{4!} \times \frac{4!}{2!} \times \frac{2!}{0!} = 10!$

- CASO 2: A ordem com que os livros estão dispostos na caixa não é considerada.

  Neste caso, utilizamos Combinação simples para escolher os livros que comporão cada caixa. Teremos respectivamente para as caixas 1, 2, 3, 4 e 5 as seguintes formas distintas de escolha: $C_{10}^2, C_8^2, C_6^2, C_4^2, C_2^2$. Pelo PM, temos $C_{10}^2 \times C_8^2 \times C_6^2 \times C_4^2 \times C_2^2 = \frac{10!}{8!2!} \times \frac{8!}{6!2!} \times \frac{6!}{4!2!} \times \frac{4!}{2!2!} = \frac{10!}{32}$.

Note que, em ambos os casos, como as 5 caixas são IDÊNTICAS, ao aplicarmos qualquer um desses raciocínios estamos considerando por exemplo que termos uma caixa com livros 1 e 2 e outra com livros 3 e 4 é diferente de termos a primeira com livros 3 e 4 e a segunda com livros 1 e 2. Desta forma, para finalizarmos a questão, precisamos remover os casos de repetição como estes. Portanto, devemos dividir o resultado por $P_5 = 5!$.

Então para o CASO 1 temos $\frac{10!}{5!}$ maneiras distintas de arrumar os livros nas caixas e para o CASO 2 temos $\frac{10!}{32.5!}$ maneiras distintas de arrumar os 10 livros nas 5 caixas.

7. (1,3) Uma palavra tem 7 letras, sendo que uma delas aparece k vezes, e as outras letras restantes aparecem sem repetição. Sabendo que o número de anagramas que se obtém permutando as letras desta palavra é 210, calcule k.

   Resposta: A palavra possui 7 letras das quais apenas uma se repete k vezes. Para calcularmos o número de anagramas dessa palavra usamos Permutação com repetição: $P_7^{k,1,1,1,1,1,1} = \frac{7!}{k!}$. Sabendo que a palavra tem 210 anagramas, temos

$$\frac{7!}{k!} = 210.$$

   Donde $k! = 24$ e consequentemente $k = 4$.