Gabarito da AP2 - Fundamentos de Algoritmos para Computação - 2007/02

1. (1.0) Dada a linha 7 do triângulo de Pascal:

   1 7 21 35 21 7 1

   calcule a linha 9 usando as condições de fronteira e as relações de Stifel convenientemente. Justifique.

   Resposta:

   Para calcular a linha 9 do triângulo de Pascal devemos previamente calcular a linha 8. Em ambos os casos usamos as condições de fronteira e as relações de Stifel dadas por:

   - Condições de fronteira: $C_n^0 = C_n^n = 1, \; n = 0, 1, \cdots$
   - Relação de Stifel $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$

   A partir da linha 7 obtemos a 8 ($C_8^0 = C_8^8 = 1$, $C_7^0 + C_7^1 = 1 + 7 = 8 = C_8^1$, $C_7^1 + C_7^2 = 7 + 21 = 28 = C_8^2 \cdots, C_7^6 + C_7^7 = 7 + 1 = 8 = C_8^7$):

   Linha 7   1   7   21   35   21   7   1

   Logo,

   Linha 8   1   8   28   56   56   28   8   1

   E desta linha obtemos a linha 9 ($C_9^0 = C_9^9 = 1$, $C_8^0 + C_8^1 = 1 + 8 = 9 = C_9^1$, $C_8^1 + C_8^2 = 8 + 28 = 36 = C_9^2, \cdots, C_8^7 + C_8^8 = 8 + 1 = 9 = C_9^8$):

   Linha 9   1   9   36   84   126   84   36   9   1

2. (1.5) Use o binômio de Newton para mostrar que:

   $$C_n^0 + C_n^1 + C_n + \cdot + C_n^n = 2^n$$

   Resposta: O binômio de Newton nos dá:

   $$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

   Então fazendo $a = 1$ e $b = 1$, temos:

   $$2^n = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots C_n^{n-1} + C_n^n$$

3. (1.5) Encontre a fórmula fechada da relação de recorrência:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + n^2 \ n \text{ natural}, n > 1 \\ a_0 &= 0 \end{aligned}$$

Resposta:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + n^2 \\ &= a_{n-2} + (n-1)^2 + n^2 \\ &= a_{n-3} + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 \\ &\vdots \\ &= a_{n-k} + (n-k+1)^2 + (n-k+2)^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 \\ &\vdots \\ \text{(Tomando k = n)} &= a_0 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 \\ &= 0 + \textstyle\sum_1^n i^2 \\ &= \textstyle\sum_1^n i^2 \end{aligned}$$

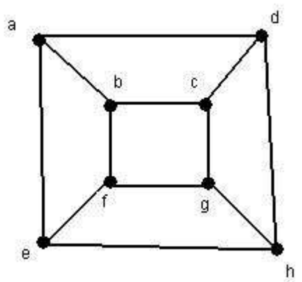
4. (1.0) Existe grafo (simples) com 7 vértices e cuja sequência de vértices seja $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$? Justifique.

   Solução: Não.

   O grafo é simples, ou seja, não possui arestas múltiplas nem laços. Portanto, para que ele tenha a sequência de vértices $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$, ele precisa de um vértice de grau igual a 7, neste caso existirão 7 arestas incidindo neste vértice, impossível, já que o grafo possui somente 7 vértices.

5. (3.5) As seguintes perguntas devem ser respondidas considerando o grafo $G = (V, E)$, sendo:
   $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
   $E = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a), (e, f), (f, g), (g, h), (h, e), (a, e), (b, f), (d, h), (c, g)\}$

   (a) Desenhe uma representação plana de G.



   (b) G é euleriano? Por que?

   Resposta: Não, porque os vértices têm grau impar, e sabemos pelo teorema que, um grafo é euleriano se, e somente se, seus vértices têm grau par.

(c) G é hamiltoniano? Por que?

Resposta: Sim. Porque existe ciclo hamiltoniano. Por exemplo a, b, c, d, h, g, f, e, a.

(d) G é bipartido? Por que? Caso a resposta seja positiva, dê a sua bipartição.

Resposta: Sim, porque todo ciclo de G é par.
Tome a bipartção: $U = \{a, c, f, h\}$ e $W = \{b, d, e, g\}$.
$U \cup W = V$ e não existem arestas entre os vértices de U,não existem arestas entre os vértices de W. Só existem arestas entre os vértices de U para W.

(e) Qual é o centro de G? Por que?

Resposta: O centro de G, $c(G)$ é o conjuntos dos vértices de G que possuem excentricidade mínima. A excentricidade de um vértice é a sua maior distância a todos os outros vértices. Em G todos os vértices têm a mesma excentricidade, no caso 3. Logo $c(G) = V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

6. (1.5) Seja G um grafo 5-regular e tal que $|V(G)| = 10$. Prove que G não é planar.

Resposta: Como o grafo G é 5-regular, sabemos que todo vértice v de G tem grau 5, $d(v) = 5$.

Sabemos que

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$$

Como $|V(G)| = 10$,

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 10 \cdot 5 = 50 = 2|E(G)|$$

Portanto, $|E(G)| = 25$.

Se um grafo é planar, então $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$. No entanto,

$$|E(G)| = 25 > 24 = (3 \cdot 10) - 6 = 3|V(G)| - 6$$

Temos então, uma contradição e G não é um grafo planar.