Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da EP da Aula 13

Observações:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.

2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo antes de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.

3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

---

1. Prove, usando um argumento combinatório semelhante ao usado na aula 13 para provar a relação de Stifel, que:

$$C_{n+2}^{p+2} = C_n^p + 2C_n^{p+1} + C_n^{p+2}$$

Resposta: Consideremos $n+2$ pessoas, entre as quais Pedro e João. O número de comissões com $p+2$ dessas pessoas é igual a C_{n+2}^{p+2}. Essas comissões dividem-se em três categorias:

i) comissões das quais Pedro e João participam; essas são em número de C_n^p, pois para formá-las basta escolher p companheiros para Pedro e João dentre as demais n pessoas;

ii) comissões das quais participa um só dentre Pedro e João; essas são em número de $2C_n^{p+1}$, pois para formá-las basta escolher um dentre Pedro e João (2 possibilidades) e $p+1$ companheiros para o escolhido, dentre as demais n pessoas (C_n^{p+1} possibilidades).

iii) comissões das quais nem Pedro nem João participam; essas são em número de C_n^{p+2}, pois para formá-las basta escolher $p+2$ pessoas dentre as demais n pessoas.

Portanto, $C_{n+2}^{p+2} = C_n^p + 2C_n^{p+1} + C_n^{p+2}$.

2. Usando a relação de Stifel, escreva a oitava linha do triângulo de Pascal a partir da sétima linha dada na aula 13.

Resposta:

Temos pela sétima linha dada na aula 13, pela relação de Stifel ($C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r$) e pela condição de Fronteira ($C_n^0 = C_n^n = 1$) que:

$$\begin{array}{lccccccccc} n=7 & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & \\ n=8 & 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 \end{array}$$

3. Se o conjunto A possui 512 subconjuntos, qual é o número de elementos de A?

Resposta: Pelo teorema das linhas, temos que:

$$\underbrace{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n}_{512} = 2^n$$
$$512 = 2^n$$
$$2^9 = 2^n$$
$$\boxed{n = 9}$$

4. Quantos coquetéis (misturas de duas ou mais bebidas) podem ser feitos a partir de 7 ingredientes distintos?

   Resposta: Pelo teorema das linhas, temos:

   $$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

   Se $n = 7$ e misturas de 2 ou mais bebidas, então:

   $$C_7^0 + C_7^1 + \underbrace{C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7}_{x} = 2^7$$

   $$\begin{array}{rcl} x & = & 2^7 - C_7^0 - C_7^1 \\ x & = & 128 - 1 - 7 \\ x & = & 120 \end{array}$$

5. Prove que:

   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1)$$

   .

   Resposta:

$$
\begin{array}{rcll}
\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} & = & \sum_{k=0}^{n} \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{(k+1)} & = \\
& = & \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)k!(n-k)!} & = \\
& = & \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} & = \\
& = & \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \cdot \frac{(n+1)}{(n+1)} & = \\
& = & \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \cdot \frac{(n+1)}{(n+1)} & = \\
& = & \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} & = \\
& = & \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1} & = \\
& = & \frac{1}{n+1} \left[C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+1}^{n+1}\right] & = \\
& = & \frac{1}{n+1} \left[C_{n+1}^0 - C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + \ldots + C_{n+1}^{n+1}\right] & = \\
& = & \frac{1}{n+1} \left[C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + \ldots + C_{n+1}^{n+1} - C_{n+1}^0\right] & = \\
& = & \frac{1}{n+1} \left[2^{n+1} - 1\right] &
\end{array}
$$

6. Calcule:

$$CR_n^0 + CR_n^1 + CR_n^2 + \ldots + CR_n^p.$$

Resposta: Temos que $CR_n^r = C_{n+r-1}^r$. Logo:

$$
\begin{array}{rcl}
& CR_n^0 + CR_n^1 + \ldots + CR_n^p & = \\
= & \underbrace{C_{n-1}^0 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+p-1}^p}_{\textit{Teorema das diagonais, quando } r=p} & = \\
= & C_{n-1+p+1}^p & = \\
= & C_{n+p}^p &
\end{array}
$$

7. Prove que:

$$\sum_{k=0}^{m} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} n-k \\ m-k \end{array} \right) = 2^m \left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right), (m < n)$$

Resposta:

$$
\begin{array}{lcr}
 & \sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} & = \\
= & \sum_{k=0}^{m}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-k-m+k)!} & = \\
= & \sum_{k=0}^{m}\frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!} & = \\
= & \frac{m!}{m!}\sum_{k=0}^{m}\frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!} & = \\
= & \sum_{k=0}^{m}\frac{m!n!}{k!(m-k)!m!(n-m)!} & = \\
= & \frac{n!}{m!(n-m)!}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!} & = \\
= & \binom{n}{m}\left[\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\ldots+\binom{m}{m}\right] & =
\end{array}
$$

Pelo teorema das linhas, temos:

$$\binom{n}{m}2^m, n > m$$

8. Usando o teorema das colunas prove que:

   (a)
   $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

   Resposta:

$$
\begin{array}{rccr}
\sum_{k=1}^{n} k & = & \sum_{k=1}^{n} k\frac{(k-1)!}{(k-1)!} & = \\
 & = & \sum_{k=1}^{n}\frac{k!}{1!(k-1)!} & = \\
 & = & \sum_{k=1}^{n} C_k^1 & = \\
 & = & \underbrace{C_1^1 + C_2^1 + \ldots + C_n^1}_{\textit{Pelo teorema das colunas, quando } r=1} & = \\
 & = & C_{n+1}^2 & = \\
 & = & \frac{(n+1)!}{2!(n+1-2)!} & = \\
 & = & \frac{(n+1)!}{2(n-1)!} & = \\
 & = & \frac{n(n+1)(n-1)!}{2(n-1)!} & = \\
 & = & \frac{n(n+1)}{2} &
\end{array}
$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Resposta:

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{k=1}^{n} k(k+1) & = & \sum_{k=1}^{n}(k+1)k\frac{(k-1)!}{(k-1)!} & = \\
& = & \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)!}{(k-1)!} & = \\
& = & \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)!}{(k-1)!}\frac{2!}{2!} & = \\
& = & 2!\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)!}{2!(k-1)!} & = \\
& = & 2!\sum_{k=1}^{n} C_{k+1}^{2} & = \\
& = & 2!(\underbrace{C_2^2 + C_3^2 + \ldots + C_{n+1}^2}_{\textit{Pelo teorema das colunas, quando } r=2}) & = \\
& = & 2!\left(C_{n+1}^3 + C_{n+1}^2\right) & = \\
& = & 2!\left(\frac{(n+1)!}{3!(n+1-3)!} + \frac{(n+1)!}{2!(n+1-2)!}\right) & = \\
& = & 2!\left(\frac{(n+1)!}{3!(n-2)!} + \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}\right) & = \\
& = & 2!\frac{[(n-1)(n+1)!+3(n+1)!]}{3!(n-1)!} & = \\
& = & \frac{2!(n-1)![(n-1)(n+1)n+3(n+1)n]}{3!(n-1)!} & = \\
& = & \frac{[(n-1)(n+1)n+3(n+1)n]}{3} & = \\
& = & \frac{n(n+1)[n-1+3]}{3} & = \\
& = & \frac{n(n+1)(n+2)}{3}
\end{array}$$

9. Prove que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Resposta: Temos que:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

Observe que:

$$
\begin{aligned}
k^3 &= ak(k+1)(k+2) + bk(k+1) + ck \\
&= a(k^2+k)(k+2) + b(k^2+k) + ck \\
&= a(k^3+3k^2+2k) + b(k^2+k) + ck \\
&= ak^3 + 3ak^2 + 2ak + bk^2 + bk + ck \\
&= ak^3 + (3a+b)k^2 + (2a+b+c)k
\end{aligned}
$$

Logo, temos que:

$$\boxed{a = 1}$$

$$
\begin{gathered}
3a + b = 0 \\
3.1 + b = 0 \\
\boxed{b = -3}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
2a + b + c = 0 \\
2.1 + (-3) + c = 0 \\
-1 + c = 0 \\
\boxed{c = 1}
\end{gathered}
$$

Temos então que:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) - 3k(k+1) + k$$

Fazendo à parte temos:

$$
\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\frac{(k-1)!}{(k-1)!} \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+2)!}{(k-1)!} \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+2)!}{(k-1)!}.\frac{3!}{3!} \\
&= 3!\textstyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+2)!}{(k-1)!3!} \\
&= 3!\textstyle\sum_{k=1}^{n} C_{k+2}^{3} \quad = \\
&= 3!\left[C_3^3 + \ldots + C_{n+2}^3\right] \quad = \\
&= 3!C_{n+3}^{4} \quad = \\
&= 3!\frac{(n+3)!}{4!(n-1)!} \quad = \\
&= \frac{3!(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)!}{4.3!(n-1)!} \quad = \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}
\end{aligned}
$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Temos então que:

$$\begin{array}{rcl}
1^3+2^3+\ldots+n^3 & = & \sum_{k=1}^{n} k^3 & = \\
& = & \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)-3k(k+1)+k & = \\
& = & \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)+\sum_{k=1}^{n}(-3)k(k+1)+\sum_{k=1}^{n} k & = \\
& = & \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)-3\sum_{k=1}^{n} k(k+1)+\sum_{k=1}^{n} k & = \\
& = & \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}-3\frac{n(n+1)(n+2)}{3}+\frac{n(n+1)}{2} & = \\
& = & \frac{3n(n+1)(n+2)(n+3)-12n(n+1)(n+2)+6n(n+1)}{12} & = \\
& = & \frac{n(n+1)[3(n+2)(n+3)-12(n+2)+6]}{12} & = \\
& = & \frac{n(n+1)\left[3(n^2+5n+6)-12n-24+6\right]}{12} & = \\
& = & \frac{n(n+1)\left[3n^2+15n+18-12n-18\right]}{12} & = \\
& = & \frac{n(n+1)\left[3n^2+3n\right]}{12} & = \\
& = & \frac{n(n+1)3(n^2+n)}{12} & = \\
& = & \frac{n(n+1)n(n+1)}{4} & = \\
& = & \frac{n^2(n+1)^2}{4}
\end{array}$$