Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AD2 - Segundo Semestre de 2009

Questões:

1. (1.5) Usando o Teorema das Diagonais calcule a seguinte soma:

$$CR^2_{170} + CR^3_{170} + CR^4_{170} + \cdots + CR^8_{170}$$

Resposta: Temos que $CR^r_n = C^r_{n+r-1}$ e $C^0_n + C^1_{n+1} + C^2_{n+2} + \ldots + C^r_{n+r} = C^r_{n+r+1}$ (Teorema das Diagonais). Logo:

$$\begin{array}{lcr}
 & CR^2_{170} + CR^3_{170} + CR^4_{170} + \ldots + CR^8_{170} & = \\
= & C^2_{171} + C^3_{172} + C^4_{173} + \ldots + C^8_{177} & = \\
= & C^2_{171} + C^3_{172} + C^4_{173} + \ldots + C^8_{177} + C^0_{169} - C^0_{169} + C^1_{170} - C^1_{170} & = \\
= & \underbrace{C^0_{169} + C^1_{170} + C^2_{171} + C^3_{172} + C^4_{173} + \ldots + C^8_{177}}_{Teorema\ das\ diagonais,\ quando\ n=169\ e\ r=8} - C^0_{169} - C^1_{170} & = \\
= & C^8_{169+8+1} - C^0_{169} - C^1_{170} & = \\
= & C^8_{178} - C^0_{169} - C^1_{170} & = \\
= & \frac{178!}{170!8!} - \frac{169!}{169!0!} - \frac{170!}{169!1!} & = \\
= & \frac{178!}{170!8!} - 1 - 170 & = \\
= & \frac{178!}{170!8!} - 171 &
\end{array}$$

2. (1.5) Usando o teorema do binômio de Newton mostre a seguinte identidade:

$$9^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C(n,i) 10^{n-i}$$

Resposta: Pelo teorema do binômio de Newton, temos que $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C^i_n a^{n-i} b^i$, com a e b reais e n natural.

Podemos escrever $9^n = (10-1)^n$. Aplicando o teorema binomial, com $a = 10$ e $b = -1$, temos:

$$9^n = (10-1)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i 10^{n-i}(-1)^i$$

3. (1.5) Considere uma sequência de números inteiros $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ onde $a_1 = 3$ e cada um dos termos seguintes é obtido pela soma do termo anterior multiplicado por 3 e o número 4.

(a) Defina esta sequência recursivamente. Justifique.

Resposta: Observe que cada termo da sequência é obtido pela soma do termo anterior multiplicado por 3 e o número 4. Podemos formar a sequência da seguinte maneira:

$a_1 = 3;$
$a_2 = 3a_1 + 4;$
$a_3 = 3a_2 + 4;$
$a_4 = 3a_3 + 4;$
$\vdots$
$a_n = 3a_{n-1} + 4$

Logo, a sequência é:

$$\begin{cases} a_n &= 3a_{n-1} + 4 \text{ , para } n \geq 2. \\ a_1 &= 3 \end{cases}$$

(b) Encontre a fórmula fechada para cada termo da sequência pelo método de substitução. Justifique.

Resposta:

$$\begin{aligned}
a_n &= 3a_{n-1} + 4 \\
&= 3(3a_{n-2} + 4) + 4 \\
&= 3^2 a_{n-2} + 3.4 + 4 \\
&= 3^2(3a_{n-3} + 4) + 3.4 + 4 \\
&= 3^3 a_{n-3} + 3^2.4 + 3.4 + 4 \\
&= 3^3 a_{n-3} + 4(3^2 + 3 + 1) \\
&= 3^3(3a_{n-4} + 4) + 4(3^2 + 3 + 1) \\
&= 3^4 a_{n-4} + 3^3.4 + 4(3^2 + 3 + 1) \\
&= 3^4 a_{n-4} + 4(3^3 + 3^2 + 3 + 1) \\
&\vdots \\
&= 3^i a_{n-i} + 4(3^{i-1} + 3^{i-2} + \ldots + 3^2 + 3^1 + 3^0) \\
&= 3^i a_{n-i} + 4\textstyle\sum_{j=0}^{i-1} 3^j
\end{aligned}$$

Logo, para $n - i = 1$, ou seja, $i = n - 1$, temos

$$a_n = 3^{n-1}a_1 + 4\sum_{j=0}^{n-2} 3^j$$

Como $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-2} \overset{\text{PG}}{=} \frac{1(3^{n-2+1}-1)}{3-1} = \frac{3^{n-1}-1}{2}$, temos que:

$$a_n = 3^{n-1}a_1 + 4 \cdot \frac{3^{n-1} - 1}{2}$$

Como $a_1 = 3$, concluímos:

$$a_n = 3^n + 2(3^{n-1} - 1)$$

4. (1.0) Mostre que o número de vértices em um grafo regular de grau k é par se k é ímpar.

Resposta: Seja G um grafo regular de grau k, $n = |V(G)|$ e $m = |E(G)|$. Sabemos que $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$, e como todo vértice de G tem grau k temos $\sum_{v \in V(G)} d(v) = n.k$. Logo, $2m = nk$ $(*)$.

Como $2m$ é um número par então, se k é ímpar, para satisfazer a igualdade $(*)$, necessariamente n deve ser par.

Portanto, segue o resultado.

5. (4.5) Prove ou mostre um contra-exemplo para cada uma das afirmativas abaixo:

(a) Todo caminho é uma trilha (ou trajeto).

Resposta: VERDADEIRO.
Uma trilha (ou trajeto) é um passeio que todas as arestas são distintas.
Um caminho é um passeio que todos os vértices são distintos.
Seja $v_1 v_2 v_3 \dots v_k$ um caminho qualquer.
Como todos os vértices são distintos, isto é, $v_i \neq v_j$, para $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq k$, então as arestas do caminho (v_i, v_{i+1}), $1 \leq i \leq k-1$ são todas distintas, logo essse caminho é também uma trilha.

(b) Se dois grafos G_1 e G_2 são isomorfos então eles possuem o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas.

Resposta: VERDADEIRO.
Se G_1 e G_2 são isomorfos então:

(1) existe uma função $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ injetora e sobrejetora, e além disso:

(2) $(v, w) \in E(G_1) \Leftrightarrow (f(v), f(w)) \in E(G_2)$.
De (1) temos que como f é injetora(1 a 1) e sobrejetora isso significa que cada $v \in V(G_1)$ é correspondente a um único $u \in V(G_2)$ e vice-versa, isto é, a cada $u \in V(G_1)$ corresponde um único $v = f^{-1}(u) \in V(G_2)$. Logo, $|V(G_1)| = |V(G_2)|$.

De (1) e (2) temos que a cada aresta $(v, w) \in E(G_1)$ corresponde a uma única aresta $(f(v), f(w)) \in E(G_2)$ e vice-versa. Logo, $|E(G_1)| = |E(G_2)|$.

(c) Se G é um grafo hamiltoniano então G é conexo.

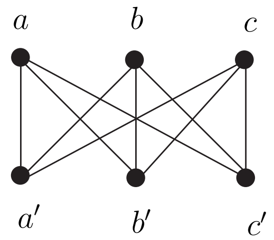
Resposta: VERDADEIRO.

Suponhamos que G é um grafo hamiltoniano. Logo, existe um ciclo C que passa por todos os vértices do grafo uma única vez, implicando em existir caminho para quaisquer dois vértices do grafo. Logo, G é conexo.

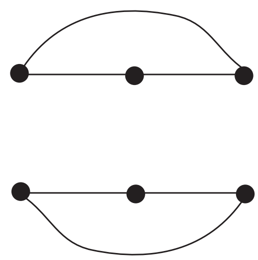
(d) O complemento de um grafo bipartido é bipartido.

Resposta: FALSO. Contra-exemplo: Consideremos o grafo bipartido ($K_{3,3}$), com bipartição (V_1, V_2), onde $V_1 = \{a, b, c\}$ e $V_2 = \{a', b', c'\}$. Seu complemento não é bipartido ($K_3 \cup K_3$), pois possui ciclo ímpar.

$K_{3,3}$



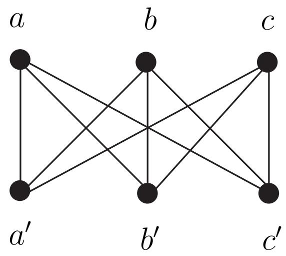
$\overline{K_{3,3}}$



(e) Se G é um grafo não planar então qualquer subgrafo próprio induzido de G é não planar.

Resposta: FALSO. Contra-exemplo: O grafo $K_{3,3}$ é não planar (provado em aula) e temos um subgrafo próprio induzido C_4 (mostrado no desenho a seguir) que é planar.

$G = K_{3,3}$



$\rightarrow$

$G[b, c, b', c'] = C_4$