Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da EP da Aula 11

Observações:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.

2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo <u>antes</u> de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.

3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

---

1. Considere os números de 3 algarismos formados com os dígitos $2, 3, 5, 8$ e 9.

   (a) Quantos são estes números?

   Resposta: Cada número de 3 algarismos (que podem ser repetidos) formados com os dígitos $2, 3, 5, 8$ e 9 corresponde a um arranjo com repetição de 5 elementos tomados 3 a 3. Portanto, o número total destes números é $AR_5^3 = 5^3 = 125$.

   (b) Quantos são menores do que 800?

   Resposta: Como os números devem ser menores do que 800, significa que o primeiro algarismo (centena) não pode começar nem com 8 nem com 9. Portanto, para esta posição, temos 3 possibilidades.

   Dada uma possibilidade para a primeira posição, para as 2 posições restantes (dezena e unidade) podemos colocar os algarismos $2, 3, 5, 8$ e 9 tomados 2 a 2. Como os algarismos podem estar repetidos, para estas duas posições temos $AR_5^2 = 5^2$ possibilidades.

   Então, pelo princípio multiplicativo, temos que a quantidade de números de 3 algarismos menores de 800 que podem ser formados com os números $2, 3, 5, 8$ e 9 é $3A_5^2 = 75$.

   (c) Quantos são múltiplos de 5?

   Resposta: Com os dígitos dados, os únicos números múltiplos de 5 são os que finalizam em 5. Portanto, restam duas posições (centenas e dezenas) para colocar os algarismos $2, 3, 5, 8$ e 9 tomados 2 a 2 que podem ser repetidos. Logo, os múltipos de 5 são $AR_5^2 = 5^2 = 25$.

   (d) Quantos são pares?

   Resposta: Os números pares são aqueles finalizados em 2 ou 8, ou seja temos 2 possibilidades para as unidades.

Seguindo o mesmo raciocínio do ítem anterior temos para as primeiras duas posições AR_5^2 possibilidades.

Então, pelo princípio multiplicativo, a quantidade de números pares é $2AR_5^2 = 50$.

(e) Quantos são ímpares?

Resposta: Os números ímpares são $3AR_5^2 = 75$.

2. Quantas são as palavras de 5 letras de um alfabeto de 26 letras nas quais a letra **A** figura mas não é a letra inicial da palavra?

Resposta: Definimos os seguintes conjuntos:

U é o conjunto dos anagramas de 5 letras de um alfabeto de 26 que não começam com a letra **A**;

B é o conjunto dos anagramas de 5 letras de um alfabeto de 26 que não contêm a letra **A**;

A é o conjunto dos anagramas de 5 letras de um alfabeto de 26 letras nas quais a letra **A** figura mas não é a letra inicial da palavra (a letra **A** pode aparacer em várias posições).

Devemos calcular $n(A)$. Observemos que $B \subseteq U$, $A \subseteq U$ e $A = U - B$, portanto $n(A) = n(U) - n(B)$.

Começamos calculando $n(U)$: como a letra inicial não pode ser **A**, para a primeira posição dos anagramas de U temos 25 modos. Para as restantes posições temos AR_{26}^4. Portanto, pelo princípio multiplicativo, resulta $n(U) = 25AR_{26}^4 = 25.26^4$.

Calculamos agora $n(B)$, como **A** não figura em nenhuma posição dos anagramas de B, resulta $n(B) = AR_{25}^5 = 25^5$.

Logo, $n(A) = 25.26^4 - 25^5$.

3. Quantos números de 3 e 4 algarismos maiores do que 300 podem ser formados com os algarismos $0, 1, 3, 5$ e 7?

   Resposta:

   3.1. Quantidade de números de 3 algarismos maiores do que 300 formados com $0, 1, 3, 5$ e 7:

   Observemos que para o primeiro dígito (centena) as possibilidades são $3, 5$ ou 7.

   Primeiro, consideramos os números que começam com 3. Temos 2 situações diferentes:

   (i) O segundo algarismo do número é 0. Então, as unidades podem ser $1, 3, 5$ ou 7, ou seja, temos 4 possibilidades.

   (ii) O segundo algarismo do número é diferente de 0. Neste caso o segundo algarismo pode ser $1, 3, 5$ ou 7 o que dá 4 possibilidades. Fixado o segundo algarismo para as unidades podemos selecionar dentre $0, 1, 3, 5$ e 7, ou seja, para as unidades temos 5 possibilidades. Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos $4.5 = 20$ números que começam com 3 e o segundo algarismo é diferente de 0.

   Portanto, pelo princípio aditivo, a quantidade de números que começam com 3 é $4 + 20 = 24$.

   Agora estudamos a quantidade de números de 3 algarismos maiores do que 300 que não começam com 3. Para a primeira posição temos 2 possibilidades (5 ou 7). Para as duas posições restantes temos $AR_5^2 = 5^2$ possibilidades. Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos $2AR_5^2 = 50$ modos diferentes para este caso.

   Logo, pelo princípio aditivo, concluimos que a quantidade de números de 3 algarismos maiores do que 300 é $24 + 50 = 74$.

   3.2. Quantidade de números de 4 algarismos formados com $0, 1, 3, 5$ e 7:

   Para a primeira posição temos 4 maneiras $(1, 3, 5$ ou $7)$. Fixado um número na primeira posição, temos $AR_5^3 = 5^3$ possibilidades, pois também devemos considerar o 0 e os números podem estar repetidos. Logo, neste caso, usando o princípio multiplicativo temos $4AR_5^3 = 500$ possibilidades.

Finalmente, pelo princípio aditivo, temos que a quantidade de números de 3 e 4 algarismos distintos e maiores do que 300 que podem ser formados com os algarismos $0, 1, 3, 5$ e 7 é $74 + 500 = 574$.

4. Quantos são os números de 5 algarismos na base 10:

   (a) nos quais o algarismo 2 figura?

   Resposta: O raciocínio é semelhante ao usado na questão 2, definimos os seguintes conjuntos:

   U é o conjunto dos números de 5 algarismos na base 10;

   B é o conjunto dos números de 5 algarismos na base 10 que não contêm o algarismo 2;

   A é o conjunto dos números de 5 algarismos na base 10 nos quais o algarismo 2 figura.

   Nesta parte vamos calcular $n(A)$ sabendo que $n(A) = n(U) - n(B)$. Temos que $n(U) = 9AR^4_{10} = 9.10^4 = 90000$ e $n(B) = 8AR^4_9 = 8.9^4 = 52488$. Portanto, $n(A) = 37512$.

   (b) nos quais o algarismo 2 não figura?

   Resposta: Corresponde a $n(B) = 52488$ calculado no ítem anterior.

5. Com os algarismos de 1 a 9 quantos números constituídos de 3 algarismos pares e 4 algarismos ímpares podem ser formados se é permitida a repetição dos algarismos pares?

   Resposta:

   (i) Começamos selecionando 4 lugares dentre 7 para colocar os algarismos ímpares. O total de possibilidades é $C(7, 4)$.

   (ii) Para cada escolha de 4 posições, estudamos o número de possibilidades de colocar nesses lugares 4 algarismos ímpares sem repetição. Como os ímpares são $1, 3, 5, 7$, e 9, temos $A(5, 4)$ formas diferentes.

(iii) Observemos que, fixado os lugares para os algarismos ímpares, ficam automaticamente definidas as 3 posições dos algarismos pares $(2, 4, 6, 8)$. Portanto, para cada colocação dos ímpares temos $AR(3, 4)$ maneiras de colocar os pares nas posições que restam pois é permitida a repetição.

De (i), (ii) e (iii) e do princípio multiplicativo, concluímos que a quantidade de números constituídos de 3 algarismos pares e de 4 algarismos ímpares que podem ser formados se é permitida a repetição dos algarismos pares é $C(7, 4)A(5, 4)AR(4, 3) = 268800$.

Notemos que podemos começar analisando os lugares e posibilidades para os algarismos pares.

6. Com as 5 letras a, b, c, d, e, quantos anagramas de 3 letras podem ser formados se:

   (a) as 3 letras são distintas?

   Resposta: Como temos de escolher anagramas de 3 letras distintas dentre 5, o número total corresponde a $A(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$.

   (b) pelo menos duas letras são idênticas?

   Resposta: Definamos os seguintes conjuntos:

   U é o conjunto dos anagramas de 3 letras formados com a, b, c, d, e;

   B é o conjunto dos anagramas de 3 letras diferentes formados com a, b, c, d, e;

   A é o conjunto dos anagramas de 3 letras que têm pleo menos 2 repetidas, formados com a, b, c, d, e.

   Queremos calcular $n(A)$. Como $A \subseteq U$, $B \subseteq U$ e $A = U - B$, resulta $n(A) = n(U) - n(B)$.

   Temos $n(U) = AR_5^3 = 5^3 = 125$ e $n(B) = A(5, 3) = 60$, logo, $n(A) = 125 - 60 = 65$.

7. Quantos números ímpares existem entre 100 e 999?

   (*Observação:* Lembre que estão excluídos os números 100 e 999)

   Resposta:

   Raciocínio usando arranjos com repetição:

   Consideramos os seguintes conjuntos:

   U é o conjunto dos números entre 100 e 999 incluídos 100 e 999;

   B é o conjunto dos números pares (divisíveis por 2) entre 100 e 999 incluído 100;

   A é o conjunto dos números ímpares entre 100 e 999 incluído 999.

   O nosso problema consiste em calcular $n(A) - 1$ pois não podemos contar o número ímpar 999 que está incluído em $n(A)$.

   Novamente temos que $n(A) = n(U) - n(B)$. Temos que $n(U) = 9AR_{10}^2 = 900$ pois na posição das centenas temos 9 possibilidades e 10 para as dezenas e unidades.

   Os números pares entre 100 e 999 incluído 100 é $9.10.5 = 450$ pois temos 9 possibilidades para o primeiro dígito (centenas), 10 para o segundo e 5 para o terceiro $(0, 2, 4, 6, 8)$.

   Logo, a quantidade de números ímpares que existem entre 100 e 999 exluído o 999 é $n(A) - 1 = n(U) - n(B) - 1 = 900 - 450 - 1 = 449$.

   Raciocínio sem usar arranjos com repetição:

   Os números ímpares finalizam em $1, 3, 5, 7$ ou 9. Os números podem começar de 9 maneiras $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ e para as dezenas temos 10 possibilidades pois incluímos o 0. Portanto, pelo princípio multiplicativo, a quantidade de números ímpares entre 100 e 999 incluído 999 é $9.10.5 = 450$. Como devemos excluir o 999, temos que os números ímpares existem entre 100 e 999 são $450 - 1 = 449$.

8. Considere uma máquina *decimal* cuja palavra tem 16 posições, 12 para armazenar a mantissa normalizada de um número ($t = 12$), 2 para a característica ($r = 2$) e os restantes são para os sinais do número e da

potência.

(a) Quantos números são armazenados exatamente nesta máquina?

Resposta: O número de possibilidades para escolher o sinal do número e da característica é $AR(2,2) = 2^2$ pois temos 2 binários, que podem estar reptidos, para colocar em 2 posições (sinal do número e sinal da característica).

O total de seleções possíveis para a característica (2 posições e 10 dígitos para colocar em cada uma) corresponde a $AR(10,2) = 10^2$.

Para calcular as possibilidades para a mantissa normalizada, lembremos que ela deve começar com um dígito diferente de 0, logo para a primeira posição temos 9 possibilidades. Para as restantes 11 posições temos $AR(10,11) = 10^{11}$ possibilidades. Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos $9AR(10,11) = 9.10^{11}$ maneiras diferentes de armazenar as mantissas.

Logo, pelo princípio multiplicativo, resulta que o total de números armazenados exatamente nesta máquina é $4.9.10^2 10^{11} = 36.10^{13}$.

(b) Considere um computador *binário* que tem 6 bits para armazenar a característica de um número binário normalizado. Determine o tamanho mínimo que deve ter a mantissa da palavra de maneira tal que a quantidade de números armazenados exatamente nesta máquina seja maior ou igual ao obtido no ítem (a).

Resposta: Seja t o tamanho da mantissa normalizada. Como o primeiro bit da mantissa normalizada é 1, temos $t-1$ (tamanho da mantissa restante) $+2$ (sinal do número e sinal da característica) $+6$ (número de bits da característica) $= t+7$ posições para colocar 0 ou 1. Portanto, a quantidade de números armazenados exatamente nesta máquina *binária* é $AR(2, t+7) = 2^{t+7}$. Queremos calcular o mínimo $t \in$ N tal que $2^{t+7} \geqq 36.10^{13}$. Portanto deve ser $n \in \mathbb{N}$ e

$$(t+7)log2 \geqq log36 + 13log10,$$

ou seja,

$$t \geqq \frac{log36 + 13}{log2} - 7$$

quer dizer, $t \geqq 41,3549$...... Como temos a restrição $n \in \mathbb{N}$ e procuramos o mínimo t que verifica a desigualdade acima, deve ser $t = 42$.