Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
AD2 - Segundo Semestre de 2014

Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (1.0) Usando o Teorema das Diagonais, calcule a seguinte soma:

$$CR_{91}^{10} + CR_{91}^{11} + \cdots + CR_{91}^{30}$$

Justifique.

Resposta: Temos que $CR_n^r = C_{n+r-1}^r$ e $C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \ldots + C_{n+r}^r = C_{n+r+1}^r$ (Teorema das Diagonais). Logo:

$$\begin{aligned}
& CR_{91}^{10} + CR_{91}^{11} + CR_{91}^{12} + \ldots + CR_{91}^{30} = \\
= \; & C_{100}^{10} + C_{101}^{11} + C_{102}^{12} + \ldots + C_{120}^{30} = \\
= \; & (C_{100}^{10} + C_{101}^{11} + \ldots + C_{119}^{29} + C_{120}^{30}) + C_{90}^{0} - C_{90}^{0} + C_{91}^{1} - C_{91}^{1} + C_{101}^{2} \\
& -C_{91}^{2} + C_{92}^{3} - C_{92}^{3} + \ldots + C_{97}^{7} - C_{97}^{7} + C_{98}^{8} - C_{98}^{8} + C_{99}^{9} - C_{99}^{9} = \\
= \; & \underbrace{C_{90}^{0} + C_{91}^{1} + C_{92}^{2} + \ldots + C_{119}^{29} + C_{120}^{30}}_{\textit{Teorema das diagonais, quando } n=90 \textit{ e } r=30} - \underbrace{[C_{90}^{0} + C_{91}^{1} + \ldots + C_{98}^{8} + C_{99}^{9}]}_{\textit{Teorema das diagonais, quando } n=90 \textit{ e } r=9} = \\
= \; & C_{90+30+1}^{30} - C_{90+9+1}^{9} = \\
= \; & C_{121}^{30} - C_{100}^{9} = \\
= \; & \frac{121!}{91!30!} - \frac{100!}{91!9!} = \\
= \; & \frac{1}{91!}\left(\frac{121!}{30!} - \frac{100!}{9!}\right)
\end{aligned}$$

2. (1.5) Aplicando a fórmula do Binômio de Newton, calcule os valores de n, (onde n é um número natural), para os quais existe termo independente de x no desenvolvimento de:

$$(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x})^n$$

Justifique.

Resposta: A fórmula para o termo geral do desenvolvimento do Binômio de Newton de $(a+b)^n$ é dada por: $T_{k+1} = C_n^k\ a^k\ b^{n-k}$, para $k = 0, 1, \cdots, n$. Neste caso, temos que determinar os valores de n para que este desenvolvimento apresente termo independente. Note que $a = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ e $b = -\frac{1}{x}$. Assim:

$$T_{k+1} = C_n^k \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^k \left(\frac{-1}{x}\right)^{n-k}$$

$$T_{k+1} = C_n^k\ x^{\frac{k}{3}}\ \frac{(-1)^{n-k}}{x^{n-k}}$$

$$T_{k+1} = C_n^k\ (-1)^{n-k} x^{\frac{k}{3}}\ x^{k-n}$$

$$T_{k+1} = C_n^k\ (-1)^{n-k} x^{\frac{k}{3}+k-n}$$

$$T_{k+1} = C_n^k\ (-1)^{n-k} x^{\frac{4k}{3}-n}$$

Como queremos que o desenvolvimento apresente termo independente, temos que:

$$\frac{4k}{3} - n = 0$$

Portanto,

$$k = \frac{3n}{4}.$$

Note que, como k deve ser um número inteiro, n deve ser um múltiplo de 4. Desta forma, $n = 4m$, para todo m natural.

3. (1.5) Determine a fórmula fechada da seguinte relação de recorrência:
$a_n = 3a_{n-1} - n3^{n-1}, \quad n \geq 2$, n natural
$a_1 = -1$
Justifique.

Resposta: Utilizando o Método da Substituição Regressiva, temos:

$$\begin{aligned}
a_n &= 3a_{n-1} - n3^{n-1} \\
&= 3(\underbrace{3a_{n-2} - (n-1)3^{n-2}}_{a_{n-1}}) - n3^{n-1} \\
&= 3^2a_{n-2} - (n-1)3^{n-1} - n3^{n-1} \\
&= 3^2a_{n-2} - [(n-1) + n]\ 3^{n-1} \\
&= 3^2\,\underbrace{(3a_{n-3} - (n-2)3^{n-3})}_{a_{n-2}} - [(n-1) + n]\ 3^{n-1} \\
&= 3^3a_{n-3} - (n-2)3^{n-1} - [(n-1) + n]\ 3^{n-1} \\
&= 3^3a_{n-3} - [(n-2) + (n-1) + n]\ 3^{n-1} \\
&\ \ \vdots \\
&= 3^ia_{n-i} - [(n-i+1) + \cdots + (n-1) + n]\ 3^{n-1}
\end{aligned}$$

Fazendo $n - i = 1$ e sabendo que $a_1 = -1$, temos que $i = n - 1$ e:

$$
\begin{aligned}
a_n &= 3^{n-1}a_1 - [2+\cdots+(n-1)+n]\ 3^{n-1} \\
&= 3^{n-1}(-1) - [2+\cdots+(n-1)+n]3^{n-1} \\
&= -3^{n-1} \underbrace{[1+2+\cdots+n]}_{\text{soma dos } n \text{ primeiros termos de uma P.A.}} \\
&= -\left(\tfrac{n(n+1)}{2}\right)3^{n-1}
\end{aligned}
$$

Portanto, a fórmula fechada para a relação de recorrência é $a_n = -\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)3^{n-1}, n \geq 2, a_1 = -1$.

4. (1.5) Justifique a existência ou a não existência de grafos (simples) com as seguintes sequências de graus de vértices:

(a) $(2,3,3,4,4,5)$

Resposta: Temos, pelo Teorema do Aperto de Mãos, que em qualquer grafo G, a soma dos graus de todos os vértices é igual a duas vezes o número de arestas, isto é,

$$\sum_{v\in V(G)} d(v) = 2|E(G)|,$$

Assim, a soma dos graus de todos os vértices é necessariamente par. Suponha que existe um grafo G com sequência de graus $2,3,3,4,4,5$. Temos então que:

$$\sum_{v\in V(G)} d(v) = 2|E(G)| = 2+2\times 3+2\times 4+5 = 21$$

que é um número ímpar. Absurdo!

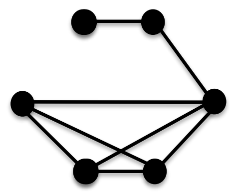
(b) $(1,2,4,4,4,6)$

Resposta: Da mesma forma que no item a, suponha que existe um grafo G com sequência de graus $1,2,4,4,4,6$. Temos então que:

$$\sum_{v\in V(G)} d(v) = 2|E(G)| = 1+2+(3\times 4)+6 = 21$$

que é um número ímpar. Absurdo!

(c) $(1, 2, 3, 3, 3, 4)$
Resposta: Sim, satisfaz o Teorema do Aperto de Mãos, pois $\sum d(v) = 1+2+3+3+3+4 = 16$ é par e, na figura abaixo, podemos exibir um grafo com esta sequência de graus.



Observação: O Teorema do Aperto de Mãos é necessário mas não suficiente para que uma sequência de graus induza um grafo.

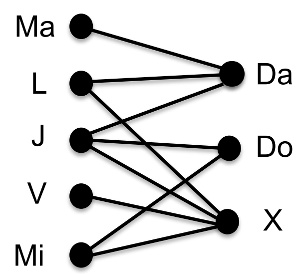
5. (3.0) Os amigos Maria, Laura, João, Vitor e Miguel sempre se encontram para jogar Damas, Xadrez ou Dominó. As preferências de cada um são as seguintes:
Maria só joga Damas; Laura só não joga Dominó; João joga tudo; Vitor só joga Xadrez e Miguel joga Xadrez e Dominó. Modele essa situação através de um grafo $G = (V, E)$ onde os vértices estão associados ao 5 amigos e aos 3 jogos e a relação entre cada um dos amigos e cada um dos jogos é dada pela possibilidade do amigo X jogar o jogo Y.

(a) Descreva o conjunto de vértices V e o conjunto de arestas E de G. Desenhe G.

Antes de desenhar o grafo, precisamos definir o conjunto de vértices e o conjunto de arestas. Para o problema em questão, cada amigo (Maria (Ma), Laura (L), João (J),Vitor (V) e Miguel (Mi)) pode ser associado a um vértice do grafo de mesmo nome e os tipos de jogos (Damas (Da), Dominó (Do) e Xadrez (X)) também podem ser associados aos vértices do grafo de mesmo nome. Já o conjunto de arestas é composto pela possibilidade do amigo X jogar o jogo Y, por exemplo, Maria joga Damas, isto é, existe a aresta (M,Da). Desta forma, o conjunto de vértices é $V(G) = \{Ma, L, J, V, Mi, Da, Do, X\}$ e o conjunto de arestas é $E(G) = \{(Ma, Da), (L, Da), (L, X), (J, Da), (J, Do), (J, X), (V, X), (Mi, X),$

$(Mi, Do)\}$.

O grafo G correspondente está representado na figura abaixo:



(b) Explique através do grafo G quais pares de amigos podem jogar Xadrez.

Resposta: Os amigos que jogam xadrez são Laura, João, Vitor e Miguel. Assim, os pares de amigos podem jogar xadrez são:

- Laura e João
- Laura e Vitor
- Laura e Miguel
- João e Vitor
- João e Miguel
- Vitor e Miguel

(c) G é bipartido? Caso seja, qual a sua bipartição?

Resposta: Sim, pois G não possui ciclos ímpares (G é bipartido se e somente se G não possui ciclos ímpares). Além disso, podemos exibir a seguinte bipartição (V_1, V_2) dos vértices de G:

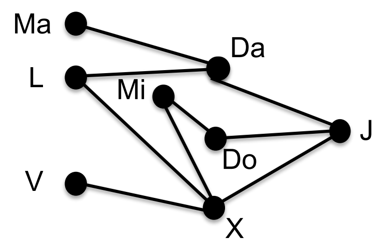
$V_1 = \{Ma, L, J, V, Mi\}$ e $V_2 = \{Da, Do, X\}$.

(d) G é conexo? Justifique.

Resposta: Sim, pois um grafo G é conexo se para todo par de vértices distintos de G existe um caminho entre eles, e isto ocorre com o grafo da questão.

(e) G é planar? Justifique.

Resposta: Sim, pois G admite a seguinte representação plana:



(f) Calcule o o diâmetro de G? Qual o centro de G? Justifique.

Resposta: A excentricidade de um vértice v, denotada por $e(v)$, é a maior distância (menor caminho) que pode ser percorrida a partir de v para alcançar qualquer outro vértice do grafo, isto é, $e(v) = max_{w \in V(G)}\{d(v,w)\}$.

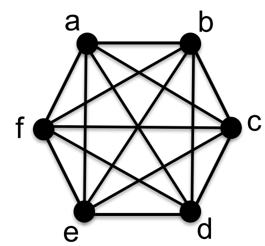
O diâmetro de um grafo G, denotado por $diam(G)$, é o valor da maior excentricidade em G.

O centro de um grafo G, denotado por $c(G)$, é o conjunto de vértices de G com menor excentricidade.

Como no grafo G $e(Ma) = 4$, $e(L) = 3$, $e(J) = 2$, $e(V) = 4$, $e(Mi) = 4$, $e(Da) = 3$, $e(Do) = 3$, $e(X) = 3$, temos que $diam(G) = 4$ e $C(G) = \{J\}$.

6. (1.5) Dê exemplo de um grafo não planar, que seja hamiltoniano, e não seja euleriano. Seu exemplo deve ter pelo menos 5 vértices e no máximo 10 vértices, e deve ser justificado.

   Resposta: O grafo abaixo (grafo completo com 6 vértices, K_6) não é planar, pois possui o K_5 como sugrafo induzido, que não é planar, é hamiltoniano, pois possui o ciclo hamiltoniano (ciclo que passa por todos os vértices do grafo): $a\ b\ c\ d\ e\ f\ a$, e não é euleriano, pois pelo Teorema de Euler, um grafo é euleriano se e somente se os seus vértices têm grau par e, neste caso, temos $d(a) = d(b) = d(c) = d(d) = d(e) = d(f) = 5$.


a
b
c
d
e
f