

Gabarito da EP da Aula 06

Observações:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.
2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo antes de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.
3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

-
1. Suponha que para fazer uma viagem Rio-Belo Horizonte-Rio, eu posso usar como transporte o trem, o ônibus ou o avião. De quantas maneiras posso escolher os transportes se não desejo usar na volta o mesmo meio de transporte usado na ida?

Resposta: Pelo princípio multiplicativo, temos $3 \cdot 2 = 6$ maneiras de escolher os transportes, pois na ida tenho 3 possibilidades: trem, ônibus ou avião. E na volta, como não desejo voltar no mesmo meio de transporte, tenho 2 possibilidades.

2. Quantas palavras com 4 letras diferentes podem ser formadas com um alfabeto de 26 letras?

Resposta: A primeira letra da palavra pode ser escolhida de 26 maneiras, a segunda de 25 maneiras; a terceira, de 24 maneiras e a quarta, de 23 maneiras. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23$ palavras com 4 letras distintas.

3. Quantos inteiros há entre 100 e 999, inclusive, cujos algarismos são distintos?

Resposta: Pelo princípio multiplicativo, temos $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ algarismos distintos, pois o primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 maneiras, o segundo, de 9 maneiras (pois para este caso temos 10 algarismos menos 1 para escolher, pois um já foi escolhido para ocupar o primeiro algarismo) e o terceiro, de 8 maneiras.

4. Quantos números de 3 dígitos são maiores que 390 e:

a- têm todos os dígitos diferentes;

Resposta: Vamos contar separadamente. Se o número não começar pelo algarismo 3, há 6 modos de selecionar o primeiro algarismo, 9 de selecionar o segundo, 8, o terceiro. Daí, pelo princípio multiplicativo, há $6 \cdot 9 \cdot 8 = 432$ números que não começam por 3.

Se o número começar por 3, há 1 modo de escolher o primeiro dígito, 1 de escolher o segundo (deve ser igual a 9) e 7 de escolher o terceiro (estão excluídos os algarismos 3, 9 e 0). Logo, há $1 \cdot 1 \cdot 7 = 7$ números que começam por 3.

Então, pelo princípio aditivo, temos $432 + 7 = 439$ números de 3 dígitos que são maiores que 390 e que têm todos os dígitos diferentes.

b- não têm dígitos iguais a 1, 3 ou 5

Resposta: Se não possui dígitos 1, 3 ou 5, então teremos somente os dígitos 0, 2, 4, 6, 7, 8 e 9.

Como não possui dígito 3, temos que os números serão maiores ou iguais que 400, logo há 5 modos de selecionar o primeiro algarismo (4, 6, 7, 8, 9), 7 de selecionar o segundo, e 7, o terceiro. Daí, pelo princípio multiplicativo, há $5 \cdot 7 \cdot 7 = 245$ números maiores que 390 com 3 dígitos e que não possuem dígitos 1, 3 ou 5.

c- têm as propriedades a e b simultaneamente

Resposta: Os números não possuem dígitos 1, 3 ou 5, isto é, possuem dígitos 0, 2, 4, 6, 7, 8, 9, porém os dígitos são distintos.

Como não possui dígito 3, começaremos então pelos números maiores ou iguais a 400, logo há 5 modos de selecionar o primeiro algarismo (4, 6, 7, 8, 9), 6 modos de selecionar o segundo e 5 modos de selecionar o terceiro. Daí, há $5 \cdot 6 \cdot 5 = 150$ números maiores que 390 com 3 dígitos e que não possuem dígitos 1, 3 ou 5 e são distintos.

5. Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 20 questões de múltipla escolha com 5 alternativas por questão?

Resposta: Cada questão tem 5 possibilidades de resposta, logo:

$$\text{Pelo princípio multiplicativo, temos } 5 \times 5 \times 5 \times \dots \times 5 = 5^{20} \left\{ \begin{array}{l} \text{Questão 1 : 5 possibilidades} \\ \text{Questão 2 : 5 possibilidades} \\ \vdots \\ \text{Questão 20 : 5 possibilidades} \end{array} \right.$$

6. Quantos divisores tem o número $N = 2^3 \times 3^2 \times 5^4$?

Resposta: Seja o número $N = 2^3 \times 3^2 \times 5^4$.

Os divisores de N são da forma $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$, com $\alpha = \{0, 1, 2, 3\}$, $\beta = \{0, 1, 2\}$ e $\gamma = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Daí, pelo princípio multiplicativo temos $4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ divisores de N .

No geral, temos: Seja o número $M = a^m \times b^n \times c^p$

Os divisores de M são da forma $a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma$, com $\alpha = \{0, 1, 2, \dots, m\}$, $\beta = \{0, 1, \dots, n\}$ e $\gamma = \{0, 1, \dots, p\}$. Há $(m + 1)$ modos de escolher o valor de α , $(n + 1)$, o de β e $(p + 1)$, o de γ . Daí, a resposta é $(m + 1) \cdot (n + 1) \cdot (p + 1)$.

7. Quantos são os números de 4 dígitos que possuem pelo menos dois dígitos iguais?

Resposta: Há $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ números naturais de 4 dígitos e $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ naturais de 4 dígitos diferentes.

Daí, pelo princípio aditivo e multiplicativo, temos $9000 - 4536 = 4464$ números de 4 dígitos que possuem pelo menos dois dígitos iguais.