Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP2 - Segundo Semestre de 2009

**Questões:**

1. (1.0) Use o teorema das diagonais para calcular a seguinte soma:

$$C_{100}^{3}+C_{101}^{4}+\cdots+C_{146}^{49}+C_{147}^{50}$$

*Resposta:* Temos que $C_n^0+C_{n+1}^1+C_{n+2}^2+\ldots+C_{n+r}^r=C_{n+r+1}^r$ (Teorema das Diagonais). Logo:

$$\begin{array}{lcr}
= & C_{100}^{3}+C_{101}^{4}+\ldots+C_{146}^{49}+C_{147}^{50} & = \\
= & C_{100}^{3}+C_{101}^{4}+\ldots+C_{146}^{49}+C_{147}^{50}+C_{97}^{0}-C_{97}^{0}+C_{98}^{1}-C_{98}^{1}+C_{99}^{2}-C_{99}^{2} & = \\
= & \underbrace{C_{97}^{0}+C_{98}^{1}+C_{99}^{2}+C_{100}^{3}+C_{101}^{4}+\ldots+C_{146}^{49}+C_{147}^{50}}_{Teorema\ das\ diagonais,\ quando\ n=97\ e\ r=50}-C_{97}^{0}-C_{98}^{1}-C_{99}^{2} & = \\
= & C_{97+50+1}^{50}-C_{97}^{0}-C_{98}^{1}-C_{99}^{2} & = \\
= & C_{148}^{50}-C_{97}^{0}-C_{98}^{1}-C_{99}^{2} & = \\
= & \frac{148!}{98!50!}-\frac{97!}{97!0!}-\frac{98!}{97!1!}-\frac{99!}{97!2!} & = \\
= & \frac{148!}{98!50!}-1-98-4851 & = \\
= & \frac{148!}{98!50!}-4950 &
\end{array}$$

2. (1.0) Use o binômio de Newton para mostrar que para todo número natural, $n$, vale que:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k\ (-1)^k\ 2^{n-k}=1$$

*Resposta:* Pelo teorema do binômio de Newton, temos que

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

com $a$ e $b$ reais e $n$ natural.

Aplicando o teorema binomial, com $a = 2$ e $b = -1$, temos

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \ (-1)^k \ 2^{n-k} = (2-1)^n = 1^n = 1.$$

3. (1.5) Encontre a fórmula fechada da relação de recorrência:
   $a_n = 2a_{n-1} - 1 \qquad n$ natural, $n \geq 1$
   $a_0 = 1$
   Descreva o processo utilizado para chegar à fórmula.

   *Resposta:*

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & 2a_{n-1} - 1 \\ & = & 2(2a_{n-2} - 1) - 1 \\ & = & 2^2 a_{n-2} - 2 - 1 \\ & = & 2^2(2a_{n-3} - 1) - 2 - 1 \\ & = & 2^3 a_{n-3} - 2^2 - 2 - 1 \\ & = & 2^3 a_{n-3} - (2^2 + 2 + 1) \\ & = & 2^3(2a_{n-4} - 1) - (2^2 + 2 + 1) \\ & = & 2^4 a_{n-4} - 2^3 - (2^2 + 2 + 1) \\ & = & 2^4 a_{n-4} - (2^3 + 2^2 + 2 + 1) \\ & & \vdots \\ & = & 2^i a_{n-i} - (2^{i-1} + 2^{i-2} + \ldots + 2^2 + 2^1 + 2^0) \\ & = & 2^i a_{n-i} - \sum_{j=0}^{i-1} 2^j \end{array}$$

   Logo, para $n - i = 0$, ou seja, $i = n$, temos

$$a_n = 2^n a_0 - \sum_{j=0}^{n-1} 2^j$$

   Como $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} \overset{\text{PG}}{=} \frac{1(2^{n-1+1} - 1)}{2-1} = 2^n - 1$, temos que:

$$a_n = 2^n a_0 - (2^n - 1)$$

   Como $a_0 = 1$, concluímos:

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & 2^n - 2^n + 1 \\ & = & 1 \end{array}$$

4. (1.5) Seja $G$ uma floresta com 50 vértices e 12 componentes conexos. Quantas arestas $G$ possui? Justifique.

   *Resposta:* Como $G$ é uma floresta então cada componente conexo $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2, \ldots, 12$ é acíclico e conexo, isto é, $G_i$ é uma árvore. Temos (por teorema) que $m_i = n_i - 1$, onde $n_i$ é o número de vértices de $G_i$ e $m_i$ é o número arestas de $G_i$, logo:

$$
\begin{gathered}
m = |E(G)| = m_1 + m_2 + \ldots + m_{12} \\
\Downarrow \\
|E(G)| = n_1 - 1 + n_2 - 1 + \ldots + n_{12} - 1 \\
|E(G)| = n_1 + n_2 + \ldots + n_{12} - \underbrace{1 - 1 - \ldots - 1}_{12\ vezes} \\
|E(G)| = n_1 + n_2 + \ldots + n_{12} - 12 \\
|E(G)| = |V(G)| - 12
\end{gathered}
$$

   Logo, se $G$ possui 50 vértices e 12 componentes conexos então $G$ possui 38 arestas.

5. (5.0) Prove ou mostre um contra-exemplo para cada uma das afirmativas abaixo

   **(a)** Não existe grafo regular de grau 5 com 15 vértices.

   *Resposta:*
   Verdadeiro.
   Suponha que exista um grafo regular $G = (V, E)$ de grau 5 com 15 vértices. Temos pelo "Teorema do Aperto de Mãos" que

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

   onde $m$ é o número de arestas de $G$. Logo o somatório dos graus dos vértices de $G$ úm número par.
   Como há 15 vértices de grau 5, temos:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 5 \cdot 15 = 75$$

   que não é um número par.
   Logo, a sentença é verdadeira.

**(b)** Toda árvore é um grafo bipartido.

*Resposta:* VERDADEIRO.

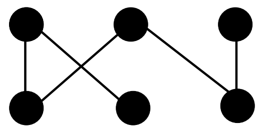
Sabemos que um grafo é bipartido se, e somente se não possui ciclo ímpar.

Uma árvore não possui ciclos, logo uma árvore é um grafo bipartido.

**(c)** Um grafo bipartido conexo com número par de vértices é euleriano.

*Resposta:* FALSO.

Sabemos que um grafo é euleriano se, e somente se o grau de cada um de seus vértices é um número par.
Contra-exemplo: o grafo a seguir é bipartido, conexo e tem 6 vértices mas não é euleriano, pois há um vértice de grau 1.



**(d)** Um grafo planar com 20 vértices e 23 arestas possui 5 faces.

*Resposta:* VERDADEIRO.

Um grafo planar satisfaz a condição de Euler: $n + f = m + 2$. Temos que $n = 20$ e $m = 23$. Portanto

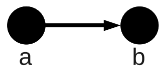
$$20 + f = 23 + 2 \Rightarrow \boxed{f = 5}.$$

Logo, a sentença é verdadeira.

**(e)** A matriz de adjacência de um digrafo é uma matriz simétrica (em relação a diagonal principal).

*Resposta:* FALSO.

Contra-exemplo:




A matriz de adjacência deste grafo é:

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $a$ | 0 | 1 |
| $b$ | 0 | 0 |