Gabarito da AD1 - Fundamentos de Algoritmos para Computação

2007-1

1. (1.5) Mostre, sem usar diagramas de Venn e justificando cada passo, que

$$A - (\overline{A} \cap \overline{B}) = A$$

Resposta:

$$\begin{array}{lcll}
 & & A - (\overline{A} \cap \overline{B}) & = \\
\text{(propriedade da diferença)} & = & A \cap \overline{(\overline{A} \cap \overline{B})} & = \\
\text{(lei de Morgan)} & = & A \cap (\overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}}) & = \\
\text{(propriedade } \overline{\overline{C}} = C\text{)} & = & A \cap (A \cup B) & = \\
\text{(como } A \subseteq A \cup B\text{)} & = & A &
\end{array}$$

2. (1.0) Verifique se a seguinte afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira prove, se for falsa justifique:

$$n(A \cup B) - n(A) \leq n(B)$$

Resposta: A afirmação é verdadeira. De fato, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ - $n(A \cap B)$.

Portanto,

$$\begin{array}{ll}
 & n(A \cup B) - n(A) \\
= & n(B) - n(A \cap B) \\
\leq & n(B)
\end{array}$$

3. (2.0) Encontre o menor número natural n_0 para o qual $n_0! > 2$. Depois, mostre usando o princípio de indução matemática generalizado que $n! > 2$ é verdadeiro para todo número natural n tal que $n \geq n_0$.

Resposta:

Como $1! = 1$, $2! = 2$ e $3! = 6 > 2$, então $n_0 = 3$.

Seja $P(n)$: $n! > 2$, para todo $n \geq n_0$

Base da indução:

Para $n = 3$, $3! = 6 > 2$, logo $P(3)$ é verdadeira.

Hipótese de Indução:

Suponha verdadeiro para $k \geq 3$, isto é, $P(k)$ é verdadeira, para $k \geq 3$:

$$P(k)\colon\ k! > 2$$

Passo da Indução:

Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeiro então $P(k+1)$ é verdadeiro, isto é, temos que provar que:

$$P(k+1) : (k+1)! > 2 \text{ é verdadeira.}$$

De fato, $(k+1)! = (k+1)k!$

Pela hipótese de indução $k! > 2$, além disso $k+1 > 1$. Logo, $(k+1)k! > 2$ e conseqüentemente $P(k+1)$ é verdadeira. Pelo princípio da indução matemática generalizado temos que $P(n) : n! > 2$ é verdadeiro para todo $n \geq 3$.

4. (1.5) Uma sala tem 6 lâmpadas com interruptores independentes. De quantos modos pode-se ilumina-la se pelo menos uma das lâmpadas deve ficar acesa? Justifique.

   Resposta: Seja $\mathbb{U}$ o conjunto universo formado por todas as possibilidades de algumas das 6 lâmpadas estarem acesas e as outras apagadas (incluindo o caso todas acesas e todas apagadas). Seja A o conjunto de todos os modos possíveis de pelo menos 1 das 6 lâmpadas estar acesa. Finalmente, seja B o conjunto de 1 único elemento constituído por todas as lâmpadas apagadas. Portanto $A = \mathbb{U} - B$.

   Cada uma das 6 lâmpadas pode estar ou acesa ou apagada, existem portanto $2^6 = 64$ formas distintas de determinar quais ficarão acesas e quais ficarão apagadas, ou seja, $n(\mathbb{U}) = 64$. Deve-se ainda desconsiderar o caso em que todas as lâmpadas estão apagadas, $n(B) = 1$, portanto a sala pode ser iluminada de $64 - 1 = 63$ formas.

5. (1.5) Oito pessoas, $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_8$, ficam em pé uma ao lado da outra para uma fotografia. Se P_1 e P_2 se recusam a ficar lado a lado e P_3 e P_4 insistem em aparecer uma ao lado da outra, determine o número de possibilidades distintas para as oito pessoas se colocarem. Justifique.

   Resposta: P_3 e P_4 devem ser consideradas como uma pessoa só. Colocam-se alinhadas as pessoas P_3 até P_8, para este alinhamento tem-se $\mathbb{P}_5 = 5!$ possibilidades, dado que P_3 e P_4 podem mudar de posição entre si tem-se $2!$ possibilidades para esta permutação. P_1 e P_2 devem ser colocados na fila nos espaços vagos entre 2 pessoas ou a esquerda ou a direita dela, dessa forma os dois ficarão separados, portanto há 6 lugares para alocar P_1 e 5 para alocar P_2. Logo, pelo princípio multiplicativo, existem $5!.2!.6.5 = 7200$ formas de distribuir as pessoas para a foto.

   Observamos que o raciocínio utilizado para determinar de quantas formas podemos alocar P_1 e P_2 nos espaços vagos entre 2 pessoas corresponde a arranjos simples de 6 elementos (lugares) tomados 2 (para P_1 e P_2) a 2.

6. (1.0) De quantas maneiras podemos arrumar 10 bandeiras em um mastro vertical, uma embaixo da outra, sendo que 2 são brancas, 3 são vermelhas e 5 são azuis? Justifique.

Resposta:

Raciocínio 1: Devido as repetições de cores de bandeiras, arrumar as bandeiras ao longo do mastro corresponde a uma permutação com repetição de 10 elementos onde são repetidos 2 brancos, 3 vermelhos e 5 azuis. Logo, o total de permutações é $P_{10}^{2,3,5} = 2520$.

Raciocínio 2: Como bandeiras de uma mesma cor são indistinguíveis entre si, temos C_{10}^{2} formas de escolher as posições das bandeiras brancas, feito isso podemos escolher as posições das vermelhas de C_8^3 e então C_5^5 formas de distribuir as azuis. Pelo princípio multiplicativo, temos $C_{10}^2 C_8^3 C_5^5 = 2520$ maneiras de arrumar as 10 bandeiras em um mastro vertical.

7. (1.5) Quantas são as soluções inteiras não negativas de $x + y + z < 10$ com $x \geq 4$? Justifique.

   Resposta: Observe que $x + y + z < 10$ é equivalente a $x + y + z \leq 9$.

   Adicionaremos à expressão uma variável inteira não negativa w, dessa forma a quantidade de soluções inteiras não negativas da inequação original é igual ao número de soluções inteiras não negativas da equação $x + y + z + w = 9$, $x \geq 4$, y, z,$w \geq 0$. Substituiremos a variável x, pela variável $x' = x$ - 4, transformamos portanto o problema original no problema de determinar o número de soluções inteiras não negativas da equação $x' + 4 + y + z + w = 9$, com x', y, z, $w \geq 0$.

   Esta equação é equivalente a $x' + y + z + w = 5$. O número de soluções inteiras não negativas desta equação é $CR_4^5 = C_8^5 = 56$.