Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD2 - Segundo Semestre de 2017

Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (1.0) Usando o Teorema das Linhas, calcule a seguinte soma:

$$S = 4C_{15}^{4} + 5C_{15}^{5} + 6C_{15}^{6} \cdots + 15C_{15}^{15}$$

Justifique.

Resposta: O Teorema das Linhas garante que: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$. Observe que não é possível aplicar tal Teorema diretamente a essa questão. Para podermos aplicá-lo, vamos, inicialmente, desenvolver as combinações.

$$S = 4C_{15}^{4} + 5C_{15}^{5} + 6C_{15}^{6} + \cdots + 15C_{15}^{15}$$

$$S = 4\frac{15!}{11!4!} + 5\frac{15!}{10!5!} + 6\frac{15!}{9!6!} + \ldots + 15\frac{15!}{0!15!}$$

Simplificando, obtemos:

$$S = \frac{15!}{11!3!} + \frac{15!}{10!4!} + \frac{15!}{9!5!} + \ldots + \frac{15!}{0!14!}$$

$$S = 15\frac{14!}{11!3!} + 15\frac{14!}{10!4!} + 15\frac{14!}{9!5!} + \ldots + 15\frac{14!}{0!14!}$$

$$S = 15\left(C_{14}^{3} + C_{14}^{4} + C_{14}^{5} + \ldots + C_{14}^{14}\right)$$

Pelo Teorema das Linhas, quando $n = 14$, temos:

$$C_{14}^{0} + C_{14}^{1} + C_{14}^{2} + \ldots + C_{14}^{14} = 2^{14}$$

Daí, $C_{14}^{3} + C_{14}^{4} + C_{14}^{5} + \ldots + C_{14}^{14} = 2^{14} - (C_{14}^{0} + C_{14}^{1} + C_{14}^{2}) = 2^{14} - (1 + 14 + 91) = 2^{14} - 106$.

Portanto, $S = 15(2^{14} - 106)$.

2. (1.5) Calcule o coeficiente de x^{10} no desenvolvimento do binômio de Newton:

$$\left(\sqrt{\frac{x}{3}} - \frac{5}{x^2}\right)^{100}$$

Justifique.

Resposta: A fórmula do termo geral do desenvolvimento de $(a+b)^n$ nos diz que:

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$$

Consideremos $a = \sqrt{\frac{x}{3}} = \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}3^{-\frac{1}{2}}, b = -\frac{5}{x^2} = -5x^{-2}, n = 100$.

Assim,

$$T_{k+1} = C_{100}^k (x^{\frac{1}{2}}3^{-\frac{1}{2}})^{100-k}(-5x^{-2})^k$$

$$T_{k+1} = C_{100}^k (x^{50-\frac{k}{2}}3^{-50+\frac{k}{2}})(-1)^k 5^k x^{-2k}$$

$$T_{k+1} = C_{100}^k (-1)^k 3^{-50+\frac{k}{2}} 5^k x^{50-\frac{k}{2}-2k}$$

$$T_{k+1} = C_{100}^{k}(-1)^k 3^{-50+\frac{k}{2}} 5^k x^{50-\frac{5k}{2}}$$

Como queremos o coeficiente de x^{10} no desenvolvimento do Binômio de Newton, temos:

$$50 - \frac{5k}{2} = 10$$

$$k = 16$$

Portanto, $T_{17} = C_{100}^{16} 3^{-42} 5^{16} x^{10}$ e o coeficiente de x^{10} é $C_{100}^{16} 3^{-42} 5^{16}$.

3. (1.5) Um banco está cobrando 8% de juros ao mês. João tomou emprestado R\$5.000,00 e deve pagar prestações mensais de R\$500,00. A primeira prestação será paga ao final do primeiro mês do empréstimo.

   (a) Encontre a relação de recorrência para a dívida do João. Justifique.

   Resposta: Seja a_n a dívida do João no n-ésimo mês. Observe que, assim que João toma o empréstimo, a dívida dele é de R\$5000,00. Portanto, $a_0 = 5000$. No primeiro mês, João pagará a primeira prestação de R\$500,00, mas, sobre o montante da dívida, incidirão juros de 8%. Assim, a dívida no primeiro mês é $a_1 = 5000 + 8\%(5000) - 500$. Reescrevendo esta expressão em temos de a_0, temos: $a_1 = a_0 + 0.08a_0 - 500$. Logo, $a_1 = 1.08a_0 - 500$. No segundo mês, a dívida é expressa por $a_2 = 1.08a_1 - 500$. Assim, no n-ésimo mês, $a_n = 1.08a_{n-1} - 500$. Logo, a relação de recorrência que expressa a dívida do João é:
   $a_n = 1.08a_{n-1} - 500$, onde $a_0 = 5000$.

   (b) Determine a fórmula fechada da relação de recorrência. Justifique.

   Resposta: Vamos resolver a relação de recorrência utilizando o método das substituições regressivas.

$$
\begin{aligned}
a_n &= 1.08a_{n-1} - 500 \\
&= 1.08(1.08a_{n-2} - 500) - 500 \\
&= (1.08)^2 a_{n-2} - (1.08)500 - 500 \\
&= (1.08)^2(1.08a_{n-3} - 500) - (1.08)500 - 500 \\
&= (1.08)^3 a_{n-3} - (1.08)^2 500 - (1.08)500 - 500 \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
&= (1.08)^i a_{n-i} - (1.08)^{i-1}500 - \ldots - (1.08)500 - 500
\end{aligned}
$$

Quando $n - i = 0$, temos $i = n$ e

$$a_n = (1.08)^n a_0 - (1.08)^{n-1}500 - \ldots - (1.08)500 - 500$$

Como $a_0 = 5000$, temos:

$$a_n = (1.08)^n 5000 - \sum_{i=0}^{n-1} (1.08)^i 500$$

$$a_n = (1.08)^n 5000 - 500 \sum_{i=0}^{n-1} (1.08)^i$$

A soma de uma PG de n termos e razão $q \neq 1$ é dada por :
$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$.

Portanto, $\sum_{i=0}^{n-1}(1.08)^i = \frac{1(1.08^n-1)}{1.08-1} = \frac{1.08^n-1}{0.08}$ e
$a_n = (1.08)^n 5000 - 500\left(\frac{1.08^n-1}{0.08}\right)$

(c) Usando a fórmula fechada, encontre a dívida do João ao final do oitavo mês. Justifique.

Observe que a dívida inicial é $a_0 = 5.000,00$.

Resposta: Basta fazermos $n = 8$ na fórmula fechada do item (b).
$a_8 = (1.08)^8 5000 - 500\left(\frac{1.08^8-1}{0.08}\right) \approx 3936,34$. Observe que já foram pagos R\$4000,00.

4. (1.2) Mostre que em um grupo com 15 pessoas não é possível que cada pessoa do grupo conheça exatamente outras cinco pessoas deste grupo. Modele o problema como um grafo e mostre o resultado usando propriedades de grafos.

   Resposta: Vamos modelar o problema da seguinte forma: cada pessoa é um vértice e, se duas pessoas se conhecem, existe uma aresta entre os vértices do grafo correspondentes. Se cada pessoa conhece exatamente outras 5, então todo vértice do grafo tem grau 5. O Teorema do Aperto de Mãos diz que: $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$, onde m é o número de arestas de do grafo. Observe que o somatório dos graus dos vértices é um número par $(2m)$ em qualquer grafo. Note que, neste grafo, $\sum_{v \in V} d(v) = 5 \times 15 = 75$, um número ímpar. Absurdo. Logo, não é possível que cada pessoa do grupo conheça exatamente outras 5 pessoas deste mesmo grupo.

5. (1.3) Seja F uma floresta com 35 vértices e 10 componentes conexos. Calcule o número de arestas de F. Justifique.

   Resposta: Uma floresta é um grafo cujos componentes conexos são árvores. Sabemos que uma árvore T com n vértices tem $n-1$ arestas. O grafo F possui 10 componentes e, portanto, 10 árvores $T_1, T_2, \ldots, T_{10}$. Considere o grafo T' obtido a partir de T pela adição de arestas (u_i, u_{i+1}), onde $u_i \in V(T_i)$ e $u_{i+1} \in V(T_{i+1}), i = 1, 2, \ldots, 10$. T' é uma árvore com 35 vértices e $35 - 1 = 34$ arestas e foi obtida a partir de T pela adição de 9 arestas. Logo, $|E(T)| = |E(T')| - 9 = 34 - 9 = 25$ arestas.

6. (3.5) Responda as seguintes perguntas considerando o grafo G dado por:
   $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,
   $E(G) = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, f), (a, f), (g, h), (h, a), (h, e), (f, g)\}$.
   (Justifique suas respostas. Respostas sem justificativas não serão consideradas.)

   (a) Desenhe G e desenhe também seu grafo complementar $\overline{G}$.

   Resposta: Observe o grafo G e seu grafo complementar $\overline{G}$ na Figura 1

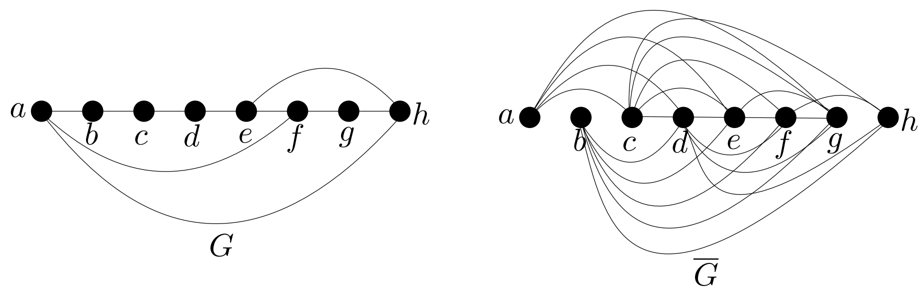

Figura 1: Grafo G e seu complementar $\overline{G}$.

(b) G é bipartido? Caso seja, dê sua bipartição. E o grafo $\overline{G}$ é bipartido?

Resposta: Um grafo é bipartido se, e somente se, não possui ciclo ímpar. Podemos observar na Figura 1 que todos os ciclos de G são pares. Além disso, a Figura 2 mostra uma bipartição (V_1, V_2) de G. Em contrapartida, observe na Figura 1, que o grafo $\overline{G}$ não é bipartido, pois $\overline{G}$ possui ciclos ímpares tais como o ciclo *acea*.

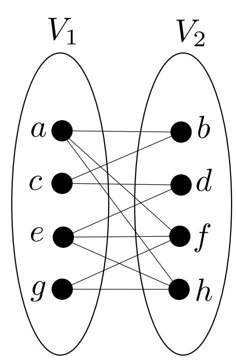

Figura 2: Bipartição de G em (V_1, V_2): V_1 e V_2 são conjuntos independentes tais que $V_1 \cup V_2 = V$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ e toda aresta de G possui um extremo em V_1 e outro extremo em V_2.

(c) G é um grafo euleriano? E $\overline{G}$?

Resposta: Pelo Teorema de Euler, sabemos que um grafo é Euleriano se, e somente se, o grau de cada um de seus vértices é par.

No grafo G, os vértices a, e, f, h possuem grau 3. Portanto, G não é Euleriano. Da mesma forma, o grafo $\overline{G}$ não é Euleriano, pois os vértices b, c, d, g possuem grau 5.

(d) G é hamiltoniano?

Resposta: Sim. Observe que $abcdefgha$ é um ciclo Hamiltoniano, i.e., ciclo que percorre todos os vértices do grafo sem repetições.

(e) G é planar?

Resposta: Sim. A Figura 1 apresenta uma representação plana de G.