Gabarito da AD2 - Fundamentos de Algoritmos para Computação

1) (1.5) Mostre usando o Teorema das Linhas que:
$\sum_{k=0}^{n}(k+1).C(n,k) = (n+2).2^{n-1}$

$$
\begin{array}{rll}
 & \sum_{k=0}^{n}(k+1).C(n,k) & = \\
= & \sum_{k=1}^{n} k.C(n,k) + \sum_{k=0}^{n} .C(n,k) & = \\
= & \sum_{k=1}^{n} k.\frac{n!}{k!(n-k)!} + \sum_{k=0}^{n} C(n,k) & = \\
= & \sum_{k=1}^{n} k.\frac{n!}{k.(k-1)!(n-k)!} + \sum_{k=0}^{n} C(n,k) & = \\
= & \sum_{k=1}^{n} \frac{n.(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \sum_{k=0}^{n} C(n,k) & = \\
= & n.\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \sum_{k=0}^{n} C(n,k) & = \\
= & n.\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} + \sum_{k=0}^{n} C(n,k) & = \\
= & n\sum_{k=1}^{n} C(n-1,k-1) + \sum_{k=0}^{n} C(n,k) & = \\
= & n.2^{n-1} + 2^{n} & = \\
= & n.2^{n-1} + 2.2^{n-1} & = \\
= & (n+2).2^{n-1} &
\end{array}
$$

2) (2.0) Uma quantia depositada numa poupança no dia primeiro do mês i é corrigida mensalmente por uma taxa $t = 1,5\%$ e tem custo de manutenção por mês de $c = R\$5,00$. Supondo que o primeiro e único depósito de $R\$10.000,00$ é feito no primeiro dia de julho (mês 1) determine e resolva a relação de recorrência correspondente. Qual a quantia disponível em dezembro do mesmo ano?

Seja M_i a quantia existente na poupança no i-ésimo mês, para $i > 1$. A cada mês a poupança é corrigida de $t = 1,5\%$ e subtraída do custo de manutenção $c = 5,00$. Portanto:

$M_1 = 10000$
$M_i = M_{i-1} + tM_{i-1} - c$, para $i > 1$.

Temos portanto a seguinte relação de recorrência para M_i, $i > 1$:

$$
\begin{array}{rcll}
M_i & = & (1+t)M_{i-1} - c & = \\
 & = & (1+t)[(1+t)M_{i-2} - c] - c & = \\
 & = & (1+t)^2M_{i-2} - c(1+t) - c = (1+t)^2M_{i-2} - c[(1+t)+1] & = \\
 & = & (1+t)^2[(1+t)M_{i-3} - c] - c[(1+t)+1] & = \\
 & = & (1+t)^3M_{i-3} - c[(1+t)^2 + (1+t) + 1] & = \\
 & = & (1+t)^3[(1+t)M_{i-4} - c] - c[(1+t)^2 + (1+t) + 1] & = \\
 & = & (1+t)^4M_{i-4} - c[(1+t)^3 + (1+t)^2 + (1+t) + 1] & =
\end{array}
$$

$$\vdots$$

$$
\begin{array}{cll}
= & (1+t)^k M_{i-k} - c[(1+t)^{k-1} + (1+t)^{k-2} + \ldots + (1+t) + 1] & = \\
= & (1+t)^k M_{i-k} - c\sum_{j=0}^{k-1}(1+t)^j & = \\
= & (1+t)^k M_{i-k} - c\frac{(1+t)^k-1}{(1+t)-1} & = \\
= & (1+t)^k M_{i-k} - c\frac{(1+t)^k-1}{t} & =
\end{array}
$$

Como conhecemos somente o valor de $M_1 = 10000$, então devemos tomar $i - k = 1$, isto é, $k = i - 1$. Desta maneira obtemos a fórmula fechada para M_i:

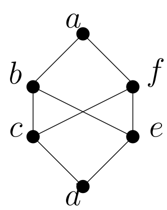
$$M_i = (1+t)^{i-1}M_1 - c\frac{(1+t)^{i-1}-1}{t}$$

Sabemos que $M_1 = 10000$, $t = 1,5\% = 0,015$ e $c = 5$, sendo Julho o mês 1. Então para calcularmos o valor da poupança em dezembro (mês 6) devemos obter o valor de M_6, isto é, $i = 6$. Substituindo estes dados na fórmula anterior temos que:

$$
\begin{array}{rcll}
M_6 & = & 10000(1,015)^{6-1} - 5\frac{(1,015)^{6-1}-1}{0,015} & = \\
 & = & 10000(1,015)^5 - 5\frac{(1,015)^5-1}{0,015} & = \\
 & \approx & 10747,10 &
\end{array}
$$

3) (2.5) Seja G o grafo dado por: $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$, $E(G) = \{(a, b), (b, c), (b, e), (c, d), (c, f), (d, e), (e, f), (f, a)\}$.

a- Dê uma representação geométrica de G (isto é, desenhe G).



b- Dê uma matriz de adjacência de G.

A matriz de adjacência $A = (a_{ij})$ é uma matriz $n \times n$ tal que:
$a_{ij} = 1$, se $(v_i, v_j) \in E(G)$
$a_{ij} = 0$, caso contrário.

	a	b	c	d	e	f
a	0	1	0	0	0	1
b	1	0	1	0	1	0
c	0	1	0	1	0	1
d	0	0	1	0	1	0
e	0	1	0	1	0	1
f	1	0	1	0	1	0

c- Qual é o centro de G? Justifique.

O centro de um grafo G, denotado por $c(G)$, é o conjunto dos vértices de G que têm a menor excentricidade, isto é:

$$c(G) = \{v \in V(G) \backslash e(v) \text{ é mínima } \}.$$

A excentricidade de um vértice v de G é dada por $e(v) = max\{d(v, w) : w \in V(G)\}$.

$e(a) = 3$
$e(b) = 2$
$e(c) = 2$
$e(d) = 3$
$e(e) = 2$
$e(f) = 2$

Portanto, $c(G) = \{b, c, e, f\}$.

d- G é bipartido? Justifique.

Sim, pois como G não possui ciclos ímpares então, pelo teorema de caracterização dos grafos bipartidos, G é bipartido.

G pode ser particionado em 2 conjuntos independentes A e B tal que $A = \{a, c, e\}$ e $B = \{b, d, f\}$.

e- G é euleriano? Justifique.

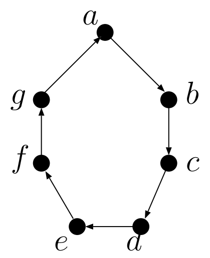
Não, pois por teorema, G é euleriano se e somente se todo vértice de G tem grau par, e $d(b) = d(c) = d(e) = d(f) = 3$ têm grau ímpar.

4) (1.5) Existe um grafo regular de grau 5 com 9 vértices? Justifique.

Um grafo regular de grau 5 é um grafo tal que todos os seus vértices têm grau 5. Se um grafo regular de grau 5 tiver 9 vértices a soma de todos os graus dos seus vértices seria $9 \times 5 = 45$, que é ímpar. Mas temos um Teorema que nos garante que para qualquer grafo a soma de todos os graus dos seus vértices é um número par. Logo não é possível existir tal grafo.

5) (1.0) Dê um exemplo de um digrafo fortemente conexo com exatamente 7 vértices. Justifique o seu exemplo.

Um digrafo D é fortemente conexo quando para todo par de vértices v, $w \in V(G)$ existir um caminho em D de v para w e também de w para v.



Podemos observar que como o digrafo apresentado é um ciclo direcionado podemos partir de um vértice escolhido e chegar a qualquer outro, basta percorrer o ciclo no sentido dado. Logo o digrafo dado é fortemente conexo.

6) (1.5) Seja G um grafo planar conexo com sequência de graus $(3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5)$. Em quantas regiões (faces) qualquer representação plana de G divide o plano? Justifique.

Temos que o número de arestas do grafo G é:

$$\begin{gathered} \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m \\ 3+3+3+3+4+4+5+5 = 2m \\ 3 \times 4 + 4 \times 2 + 5 \times 2 = 2m \\ 12 + 8 + 10 = 2m \\ m = 15 \end{gathered}$$

Temos também que o número de vértices é $n = 8$.

Como o grafo G é planar temos, pelo teorema de Euler:

$$\begin{gathered} n + f - m = 2 \\ 8 + f - 15 = 2 \\ f - 7 = 2 \\ f = 9 \end{gathered}$$