Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AP3 - Segundo Semestre de 2013

Nome -
Assinatura -

Observações:

1. Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular. Se necessário deixe o resultado indicado, como um produto ou quociente ou potência de números inteiros ou fatoriais.

2. Resultado sem indicação de como foi obtido, não será considerado.

3. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.

4. Você pode usar lápis para responder as questões.

5. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.

6. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

Questões:

1. (1,5) Mostre usando indução matemática que:

$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ para todo número natural $n\geq 1$.

Resposta: Seja $P(n): 1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 1$.

BASE DA INDUÇÃO: Devemos provar que $P(1): 1^3=\frac{1^2(1+1)^2}{4}$. De fato, como $1^3=1$ e $\frac{1^2(1+1)^2}{4}=1$, temos que $P(1)$ é verdadeira.

HIPÓTESE DA INDUÇÃO: Suponha que $P(k): 1^3+2^3+\cdots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$ seja verdadeira para $k\in\mathbb{N},\ k\geq 1$.

PASSO INDUTIVO: Vamos provar que se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1): 1^3+2^3+\cdots+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$ também é verdadeira. Desenvolvendo o primeiro membro de $P(k+1)$, temos

$$\begin{gathered}
\underbrace{1^3+2^3+\cdots+k^3}_{\text{H.I.}}+(k+1)^3=\\
\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\\
\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}=\\
\frac{(k+1)^2[k^2+4(k+1)]}{4}=\\
\frac{(k+1)^2[k^2+4k+4)]}{4}=\\
\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}
\end{gathered}$$

Portanto $P(k+1)$ é verdadeira.
Logo, pelo Princípio de Indução Matemática temos que $P(n): 1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ é verdadeira para todo número natural $n\geq 1$.

2. (1,5) Dos 35 alunos de uma turma, 6 (seis) devem ser escolhidos para formar uma comissão. De quantas maneiras distintas pode ser formada essa comissão se os alunos Analice e Mário se recusam a participar juntos. Justifique.

   Resposta: Vamos dividir em 2 casos:

   CASO 1: Analice participará.

   Se Analice participar, temos que escolher outros 5 alunos para formarem a comissão dentre os 33 restantes (lembrando que estamos excluindo desta lista a própria Analice e o Mário). Como a ordem de nossas escolhas não importa, temos $C_{33}^{5} = \frac{33!}{28!5!}$ formas de escolher a comissão se a Analice participar.

   O caso em que Mário participa é análogo a este.

   CASO 2: Analice e Mário não participarão.

   Neste caso vamos escolher os 6 participantes num total de 33 alunos. Como a ordem de nossas escolhas não importa, temos $C_{33}^{6} = \frac{33!}{27!6!}$ formas de escolher a comissão se ambos não participarem.

   Assim, pelo Princípio Aditivo, temos que o número de maneiras distintas que pode ser formada essa comissão se os alunos Analice e Mário se recusam a participar juntos é de: $\frac{33!}{28!5!} + \frac{33!}{28!5!} + \frac{33!}{27!6!} = 2 \times \frac{33!}{28!5!} + \frac{33!}{27!6!}$.

3. (1,5) Dada a palavra **T R I T R I A C O N T A E D R O** (poliedro de 33 faces), quantos são os anagramas que não começam por **T** ? Justifique.

   Resposta: A palavra **T R I T R I A C O N T A E D R O** possui 3 T's, 3 R's, 2I's, 2A's, 1C, 1N, 2O's, 1E e 1D, totalizando 16 letras. Para solucionar esta questão vamos utilizar a noção de complemento: subtrairemos do total de anagramas que esta palavra possui o número de anagramas que COMEÇAM por T.

   TOTAL DE ANAGRAMAS: $P_{16}^{3,3,2,2,2,1,1,1,1} = \frac{16!}{3!3!2!2!2!}$

   ANAGRAMAS QUE COMEÇAM POR T: Fixando uma letra T na primeira posição restam 2 T's, 3 R's, 2I's, 2A's, 1C, 1N, 2O's, 1E e 1D, totalizando 15 letras a serem permutadas nas posições restantes. Temos $P_{15}^{2,3,2,2,2,1,1,1,1} = \frac{15!}{2!3!2!2!2!}$ maneiras de fazermos isso.

Assim, utilizando a noção de complemento temos: $\frac{16!}{3!3!2!2!2!} - \frac{15!}{2!3!2!2!2!}$ anagramas da palavra **T R I T R I A C O N T A E D R O** que não começam por T.

4. (1,0) Pede-se:

(a) Escrever o enunciado do teorema das colunas.

Resposta: O Teorema das Colunas garante que:

$$C_r^r + C_{r+1}^r + \cdots + C_n^r = C_{n+1}^{r+1}$$

$0 \leq r \leq n,\ n = 0, 1, 2 \ldots$

(b) Calcular a seguinte soma, usando o teorema das colunas

$$C_{12}^{10} + C_{13}^{10} + C_{14}^{10} + \cdots + C_{25}^{10}$$

Resposta: Pelo Teorema das Colunas sabemos:

$$C_{10}^{10} + C_{11}^{10} + C_{12}^{10} + C_{13}^{10} + C_{14}^{10} + \cdots + C_{25}^{10} = C_{26}^{11}$$

Daí,

$$C_{12}^{10} + C_{13}^{10} + C_{14}^{10} + \cdots + C_{25}^{10} = C_{26}^{11} - C_{10}^{10} + C_{11}^{10}$$

$$C_{12}^{10} + C_{13}^{10} + C_{14}^{10} + \cdots + C_{25}^{10} = \frac{26!}{11!15!} - 1 - 11$$

$$C_{12}^{10} + C_{13}^{10} + C_{14}^{10} + \cdots + C_{25}^{10} = \frac{26!}{11!15!} - 12$$

5. (4.5) As questões seguintes são sobre grafos.

(a) Seja T uma árvore. Dê a definição de **folha** de T.
Se a e b são duas folhas distintas de T, existe caminho entre a e b? Justifique.

Resposta: Uma folha de T é um vértice de grau 1.

Sim, pois como T é árvore, T é um grafo conexo. Portanto, existe caminho entre qualquer par de vértices de T, em particular, existe caminho entre duas folhas distintas a e b de T.

(a) Seja G um grafo 5-regular com 20 vértices. Quantas arestas G possui? Justifique.

Resposta: O Teorema do Aperto de Mãos garante que:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

Como o grafo é 5-regular, todos os seus 20 vértices têm grau 5. Assim:

$$20 \times 5 = 2m$$

$$m = 50$$

Portanto, G tem 50 arestas.

(c) Dê a definição de **grafo euleriano**.
Se G é um grafo com sequência de graus de vértices $\{2, 2, 2, 4, 4, 4, 4\}$ é possível afirmar que G é euleriano? Justifique.

Resposta: Um grafo é Euleriano se possuir um circuito Euleriano, i.e, um trajeto fechado que inclua todas as suas arestas.

Além disso, o Teorema de Euler caracteriza esta classe de grafos da seguinte forma: Um grafo é Euleriano se e somente se todos os seus vértices têm grau par.

Portanto, como todos os graus da sequência dada são pares, podemos garantir que G é Euleriano.

(d) Dê a definição de **grafo hamiltoniano**.
Se G é um grafo bipartido e tem 15 vértices é possível afirmar que G **não é** hamiltoniano? Justifique.

Resposta: Um grafo é Hamiltoniano se possui um ciclo Hamiltoniano, i.e., um ciclo que inclui todos os seus vértices.

Um grafo é bipartido se e somente se não possui ciclo ímpar. Se um grafo com 15 vértices é Hamiltoniano, sabemos que ele possui um ciclo de tamanho 15, ou seja um ciclo ímpar. Portanto este grafo não pode ser bipartido, um absurdo. Logo podemos afirmar que G bipartido com 15 vértices não é Hamiltoniano.

(e) Calcule o número de faces de um grafo planar com 12 vértices e 25 arestas. Justifique.

Resposta: O Teorema de Euler para grafos planares nos diz que:

$$f = m - n + 2,$$

onde f é o número de faces, m o número de arestas, que neste caso é 25 e n o número de vértices, que neste caso é 12. Assim,

$$f = 25 - 12 + 2$$

$$f = 15$$

Logo G tem 15 faces.