Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
AD1 - Segundo Semestre de 2015

Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (1.5) Sejam A, B e C conjuntos arbitrários e $P(A)$ o conjunto de partes do conjunto A. Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

   (a) $\{A\} \in P(A)$

   Resposta: A afirmação é falsa, já que A é um elemento de $P(A)$, logo $\{A\}$ é um subconjunto de $P(A)$, e não um elemento de $P(A)$. As afirmações corretas são:

$$\{A\} \subseteq P(A)$$

   ou

$$A \in P(A)$$

   .

   (b) $\{\emptyset\} \subseteq P(A)$

   Resposta: A afirmação é verdadeira, pois o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto e, como o conjunto de partes de A está formado por todos os subconjuntos de A, então temos que o conjunto vazio é um elemento de $P(A)$. Portanto, o único elemento do primeiro conjunto é elemento do segundo e vale a inclusão.

(c) $A \, \Delta \, (B \cap C) = (A \, \Delta \, B) \cup (A \, \Delta \, C)$

(Lembre-se que $A \, \Delta \, B$ é a diferença simétrica entre os conjuntos A e B, isto é, $A \, \Delta \, B \; = \; (A - B) \cup (B - A)$.)

Resposta: Falsa. Inicialmente vamos reescrever a afirmação sabendo que $X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$.

$A \, \Delta \, (B \cap C) = (A - (B \cap C)) \cup ((B \cap C) - A)$

$(A \, \Delta \, B) \cup (A \, \Delta \, C) = ((A - B) \cup (B - A)) \cup ((A - C) \cup (C - A))$.

Sejam A, B e C conjuntos distintos não vazios tais que $A \cap B \cap C \neq \emptyset$, $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$ e $B \cap C \neq \emptyset$.

Observem os diagramas de Venn da Figura 1, elas ilustram a situação e provam que $A \, \Delta \, (B \cap C) \neq (A \, \Delta \, B) \cup (A \, \Delta \, C)$.

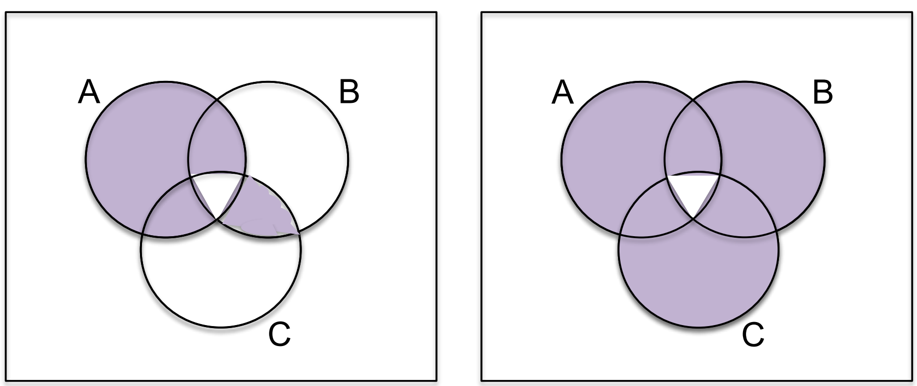

Figura 1: O diagrama de Venn da esquerda ilustra a expressão $A \, \Delta \, (B \cap C)$, enquanto o diagrama da direita ilustra a expressão $(A \, \Delta \, B) \cup (A \, \Delta \, C)$.

2. (1.5) Mostre pelo Princípio da Indução Matemática que:

$$1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

para todo $n \in \mathrm{N},\ n \geq 1$.

Resposta: Seja $P(k): 1+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$.

Base da Indução: Fazendo $k=1$ temos que $1 = \frac{1(2.1-1)}{2.1+1}$, logo $P(1)$ é verdadeira.

Hipótese de Indução (H.I.): Suponha que $P(k)$ é verdadeiro.

Passo Indutivo: Vamos provar que se $P(k)$ é verdadeiro então $P(k+1)$ é verdadeiro, isto é, $P(k+1): 1+3^2+5^2+\cdots+(2k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$:

$$\underbrace{1+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2}_{\text{Aplicando a H.I. :}} + (2(k+1)-1)^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \tfrac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2(k+1)-1)^2 \\
&= \tfrac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+2-1)^2 \\
&= \tfrac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2 \\
&= \tfrac{k(2k-1)(2k+1)+3(2k+1)^2}{3} \\
&= \tfrac{(2k^2-k)(2k+1)+3(4k^2+4k+1)}{3} \\
&= \tfrac{(4k^3+2k^2-2k^2-k)+(12k^2+12k+3)}{3} \\
&= \tfrac{4k^3+12k^2-2k^2+11k+3)}{3}
\end{aligned}$$

Agora, vamos analisar o segundo membro da igualdade que queremos provar:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3} \\
&= \tfrac{(2k^2+k+2k+1)(2k+3)}{3} \\
&= \tfrac{(2k^2+3k+1)(2k+3)}{3} \\
&= \tfrac{(4k^3+6k^2+6k^2+9k+2k+3)}{3} \\
&= \tfrac{(4k^3+12k^2+11k+3)}{3}
\end{aligned}$$

Pelo primeiro e segundo membros da igualdade, podemos concluir que $P(k+1)$ é verdadeira.

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, temos que $P(k): 1+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$ é verdadeiro para todo k natural.

3. (1,5) Um estacionamento dispõe de 20 vagas numeradas de 1 a 20. Deseja-se colocar 20 carros em suas vagas, sendo 7 carros vermelhos, 5 carros brancos e 8 carros pretos.

   (a) De quantas maneiras os carros podem ser colocados nas 20 vagas se considerarmos que todos os carros são diferentes e desejamos que aqueles da mesma cor fiquem em vagas consecutivas. Justifique.

   Resposta: Sejam G_1 o grupo com os 7 carros vermelhos, G_2 o grupo com os 5 carros brancos e G_3 o grupo com os 8 carros pretos. Inicialmente, vamos escolher a ordem dos grupos, o que pode ser feito de $P_3 = 3!$ maneiras. Agora, devemos, em cada grupo, escolher a ordem em que os carros serão posicionados nas vagas. O grupo G_1 possui $P_7 = 7!$ modos, o grupo G_2 possui $P_5 = 5!$ modos e o grupo G_3 possui $P_8 = 8!$ modos. Pelo princípio multiplicativo, temos $P_3.P_7.P_5.P_8 = 3!7!5!8!$ maneiras de colocarmos 20 carros em vagas do estacionamento de modo que os grupos com os carros de mesma cor fiquem juntos.

   (b) De quantas maneiras os carros podem ser colocados nas 20 vagas se considerarmos que carros da mesma cor são indistinguíveis? Justifique.

   Resposta:
   Raciocínio 1: Devido as repetições de cores dos carros que são indistinguíveis os de mesma cor, colocar os carros nas 20 vagas corresponde a uma permutação com repetição de 20 elementos onde são repetidos 5 carros na cor branca, 7 carros na cor vermelha e 8 carros na cor preta. Logo, o total de permutações é $P_{20}^{5,7,8} = \frac{20!}{5!7!8!}$.

   Raciocínio 2: Como carros de uma mesma cor são indistinguíveis entre si, temos C_{20}^{5} formas de escolher as posições das vagas dos carros brancos, feito isso podemos escolher as posições das vagas dos carros vermelhos de C_{15}^{7} e então C_{8}^{8} formas de distribuir os carros pretos nas vagas restantes. Pelo princípio multiplicativo, temos $C_{20}^{5}C_{15}^{7}C_{8}^{8} = \frac{20!}{5!15!}\frac{15!}{7!8!}\frac{8!}{8!} = \frac{20!}{5!7!8!}$ maneiras de colocar em 20 vagas os 20 carros.

4. (1,5) Listando os números inteiros de 1 a 10.000, quantas vezes o dígito 5 aparece se:

   (a) os dígitos dos números são todos diferentes? Justifique.

   Como os algarismos de um número são todos diferentes, neste caso contar o número de vezes que aparece o dígito 5 é o mesmo que determinar a quantidade de números que tem o dígito 5 como um dos seus algarismos.
   Vamos calcular separadamente a quantidade de números de 1 algarismo onde o dígito 5 aparece, a quantidade de números de 2 algarismos onde o dígito 5 aparece 1 vez, a quantidade de números de 3 algarismos onde o dígito 5 aparece 1 vez e a quantidade de números de 4 algarismos onde o dígito 5 aparece 1 vez:

   - Quantidade de números de 1 dígito onde o 5 aparece: **1 possibilidade**, o número 5.
   - Quantidade de números de 2 algarismos onde o dígito 5 aparece 1 vez: o 5 pode aparecer nas dezenas ($\underline{5}$ $\underline{x}$) ou pode aparecer nas unidades do número ($\underline{x}$ $\underline{5}$).
     (i) Quando os números são da forma $\underline{5}$ $\underline{x}$, as unidades podem variar de 0 a 9 sem contar o 5, por tanto temos **9 possibilidades**;
     (ii) Quando os números são da forma $\underline{x}$ $\underline{5}$, na casa das dezenas não pode ter o 0 nem o 5. Portanto, neste caso, temos **8 possibilidades**. Então, pelo princípio aditivo,
     a quantidade de números de 2 algarismos onde o dígito 5 aparece 1 vez é dada por: $9 + 8 = \mathbf{17}$.
   - Quantidade de números de 3 algarismos onde o dígito 5 aparece 1 vez: os números são do tipo $\underline{5}$ $\underline{x}$ $\underline{x}$, $\underline{x}$ $\underline{5}$ $\underline{x}$ ou $\underline{x}$ $\underline{x}$ $\underline{5}$:
     (i) para os números do tipo $\underline{5}$ $\underline{x}$ $\underline{x}$ temos 9 possibilidades para as dezenas e 8 para as unidades, ou seja, A(9,2)=9.8= **72 possibilidades**;
     (ii) para os números do tipo $\underline{x}$ $\underline{5}$ $\underline{x}$ temos 8 possibilidades para as centenas (não pode ser 0 nem 5) e 8 possibilidades para as unidades (pode ser 0, mas não pode ser o dígito escolhido nas centenas nem 5), logo, pelo princípio multiplicativo temos

8.8 =64 **possibilidades**;
(iii) para os números do tipo $\underline{x}\ \underline{x}\ \underline{5}$ aplicamos um raciocínio análogo ao anterior, portanto, também teremos **64 possibilidades**.
Logo, pelo princípio aditivo, temos $72 + 64 + 64 =$ **200**.

- Quantidade de números de 4 algarismos onde o dígito 5 aparece 1 vez: podem ser da forma:
(i) $\underline{5}\ \underline{x}\ \underline{x}\ \underline{x}$, neste caso temos $A(9,3) = 9.8.7 = 504$ **possibilidades** ou,
(ii) $\underline{x}\ \underline{5}\ \underline{x}\ \underline{x}$ ou $\underline{x}\ \underline{x}\ \underline{5}\ \underline{x}$ ou $\underline{x}\ \underline{x}\ \underline{x}\ \underline{5}$. Para cada um desses casos, teremos $8.A(8,2) = 8.8.7$ =448 **possibilidades**. Logo, pelo princípio aditivo, temos:
$504 + 3.448 =$ **1848 possibilidades.**

  Finalmente, como os 4 casos são exclusivos, pelo princípio aditivo, temos ao todo $1+17+200+1848 = 2066$ ocorrências do número 5, entre 1 e 10000, quando os dígitos são todos diferentes.

(b) os dígitos dos números podem ser repetidos? Justifique.

Observem que neste caso como podemos ter repetição, além de contar os números em que aparece o 5 devemos também contar as vezes em que ele aparece em cada número, por exemplo, temos um único número em que o dígito 5 aparece 4 vezes (5555), mas como aparece 4 vezes contaremos como 1.4.

Neste item vamos usar um raciocínio diferente do anterior.

Podemos representar os números de 1 a 10.000 por cinco posições da seguinte maneira:

$$\overline{1}\ \overline{2}\ \overline{3}\ \overline{4}\ \overline{5}$$

onde cada posição pode ser ocupada por $0, 1, 2, .., 9$. Por exemplo, o número 5 pode ser representado por : 0 0 0 0 5.

Como os números só vão até 10.000, a primeira posição só pode ser ocupada por 0 ou 1. Como o número 10.000 não contém o dígito

5, o problema se reduz a contar o número de 5 que aparecem nos números compreendidos entre 1 e 9.999.

Vamos considerar 4 casos:

(i) números em que o digito 5 aparece uma única vez:
Há 4 posições que podem ser preenchidas com 5 (da segunda posição a quinta) . Uma vez preenchida uma posição, as restantes podem ser preenchidas de $9 \times 9 \times 9$ maneiras (estamos excluindo o 5). Logo, temos 4×9^3 números nos quais o dígito 5 aparece apenas uma vez.

(ii) números em que o dígito 5 aparece exatamente duas vezes.
São duas posições que devem ser preenchidas com o dígito 5. Como temos 4 opções, temos C_4^2 possibilidades para preencher essas posições com o dígito 5. Para as 2 posições restantes temos 9×9 possibilidades. Logo, temos $C_4^2 \times 9^2$ números nos quais o dígito 5 aparece exatamente duas vezes.

(iii) números em que o dígito 5 aparece exatamente três vezes.
Como temos 4 opções, temos C_4^3 possibilidades para preencher essas posições com o dígito 5. Para a posição restante temos 9 possibilidades. Logo, temos $C_4^3 \times 9$ números nos quais o dígito 5 aparece exatamente três vezes.

(iv) números em que o dígito 5 aparece 4 vezes
Como só há 4 posições todas devem ser preenchidas com o dígito 5, o que nos dá somente 1 possibilidade.

Agora usando o Princípio Aditivo e considerandos os 4 casos exclusivos temos:
$(4 \times 9^3) \times 1 \ + \ (C_4^2 \times 9^2) \times 2 + (C_4^3 \times 9) \times 3 \ + \ (1) \times 4 =$
$(4 \times 9^3) \times 1 \ + \ (\frac{4!}{2!.2!} \times 9^2) \times 2 \ + \ (\frac{4!}{3!} \times 9)(1) \times 4$ ocorrências do número 5, entre 1 e 10000, quando os dígitos podem se repetir.

5. (1,0) Um coro possui 10 membros. De quantas maneiras se pode selecionar 3 grupos distintos de 6 membros cada, por ocasião de 3 eventos distintos? Justifique.

Resposta: Para o primeiro evento devemos selecionar 6 membros entre 10. Portanto, temos um total de $C_{10}^6 = \frac{10!}{6!4!}$ maneiras diferentes de formar o grupo. Agora, para cada grupo selecionado no primeiro evento, podemos escolher todos os grupos de 6 membros que podem ser formados entre 10 excluindo aquele grupo escolhido no primeiro evento. Logo, temos $C_{10}^{6} - 1$ maneiras diferentes de escolher o grupo para o segundo evento. Para cada escolha do primeiro e do segundo evento, teremos todas as escolhas possíveis menos aquelas duas selecionadas para o primeiro evento e para o segundo. Isto é, para o terceiro evento ficam $C_{10}^{6} - 2$ possibilidades de escolher 6 membros entre 10 diferentes aos grupos considerados no primeiro evento e no segundo. Finalmente, pelo princípio multiplicativo temos $C_{10}^{6}(C_{10}^{6} - 1)(C_{10}^{6} - 2) = \frac{10!}{6!4!}(\frac{10!}{6!4!} - 1)(\frac{10!}{6!4!} - 2)$ maneiras de selecionar 3 grupos distintos de 6 membros cada, por ocasião de 3 eventos distintos.

6. (1,5) Quantos são os anagramas da palavra **C A R A C O L** que não contém duas letras iguais juntas? Justifique.
(Sugestão: considere o conjunto que tem as duas letras A juntas e o conjunto que tem as duas letras C juntas.)

Resposta: Consideramos os seguintes conjuntos:

U: conjunto de todos os anagramas da palavra CARACOL (é o conjunto universo).
V: conjunto de elementos de U que possuem duas letras A juntas.
X: conjunto de elementos de U que possuem duas letras C juntas.
Y: conjunto de elementos de U que possuem duas letras A juntas e possuem duas letras C juntas.
W: conjunto de elementos de U que não possuem duas letras iguais juntas.

Observemos que devemos calcular $n(W) = n(U) - n(V) - n(X) + n(Y)$.

Primeiro calcularemos $n(U)$ que corresponde a todas as permutaçõeses de 7 elementos (número de letras de CARACOL) onde temos a letra C repetida 2 vezes, a letra A repetida 2 vezes, a letra R repetida 1 vez, a letra O repetida 1 vez e a letra L repetida 1 vez:

$$n(U) = P_7^{2,2,1,1,1} = \frac{7!}{2!2!1!1!1!} = 1260$$

Agora, calcularemos $n(V)$. Como 2 letras A devem estar juntas, as consideraremos como sendo um único elemento, então, repetindo o raciocínio anterior para 6 elementos e considerando 1 repetição da letra AA temos:

$$n(V) = P_6^{2,1,1,1,1} = \frac{6!}{2!1!1!1!1!} = 360$$

Para calcular $n(X)$, temos que juntar as 2 letras C e as considerar como sendo um único elemento, então, repetindo o raciocínio anterior para 6 elementos e considerando 1 repetição da letra CC temos:

$$n(W) = P_6^{2,1,1,1,1} = \frac{6!}{2!1!1!1!1!} = 360$$

Agora, calcularemos $n(Y)$. Como 2 letras A devem estar juntas e duas letras C devem estar juntas, vamos considerar AA e CC como sendo letras distintas, então, repetindo o raciocínio anterior para 5 elementos e considerando 1 repetição da letra AA e 1 repetição da letra CC temos:

$$n(W) = P_5^{1,1,1,1,1} = \frac{5!}{1!1!1!1!1!} = 120$$

Portanto, $n(W) = P_7^{2,2,1,1,1} - P_6^{2,1,1,1,1} - P_6^{2,1,1,1,1} + P_5^{1,1,1,1,1} = 1260 - 360 - 360 + 120 = 660$.

7. (1,5) Um pedido para uma loja de ferragens contém 6 itens, onde cada item é um galão de tinta, um martelo ou uma furadeira.

   (a) Quantos pedidos diferentes podem ser feitos? Justifique.
   Resposta: Consideremos as seguintes variáveis:
   x_1: quantidade de GALÃO DE TINTA;
   x_2: quantidade de MARTELO;
   x_3: quantidade de FURADEIRA.
   Queremos encontrar o número de pedidos diferentes de uma loja de ferragens de modo a selecionar 6 itens de 3 tipos diferentes. Este problema é equivalente a resolver a equação:

   $$x_1 + x_2 + x_3 = 6, \quad onde \ \ x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

   Logo, temos $CR_3^6 = C_{6+3-1}^6 = C_8^6 = \frac{8!}{6!2!} = 28$ pedidos diferentes podem ser feitos com 6 itens, onde cada item pode ser um galão de tinta, um martelo ou uma furadeira.

(b) Quantos pedidos diferentes podem ser feitos se não há pedido de tinta? Justifique.

Resposta: Se não há pedido de tinta podemos descartar a variável que possui quantidade de tinta. Vamos considerar as seguintes variáveis:

x_1: quantidade de MARTELO;

x_2: quantidade de FURADEIRA.

Queremos encontrar o número de pedidos diferentes de uma loja de ferragens de modo a selecionar 6 itens de 2 tipos diferentes. Este problema é equivalente a resolver a equação:

$$x_1 + x_2 = 6, \quad onde \;\; x_1, x_2 \geq 0$$

Logo, temos $CR_2^6 = C_{6+2-1}^6 = C_7^6 = \frac{7!}{6!1!} = 7$ pedidos diferentes podem ser feitos com 6 itens, onde cada item pode ser um martelo ou uma furadeira.

(c) Quantos pedidos diferentes podem ser feitos se cada pedido tem que conter pelo menos um galão de tinta, um martelo e uma furadeira? Justifique.

Resposta: Considere as seguintes variáveis:

x_1: quantidade de GALÃO DE TINTA;

x_2: quantidade de MARTELO;

x_3: quantidade de FURADEIRA.

Queremos encontrar o número de pedidos diferentes de uma loja de ferragens de modo a selecionar 6 itens de 3 tipos diferentes, onde cada pedido tem que conter pelo menos um galão de tinta, um martelo e uma furadeira. Este problema é equivalente a resolver a equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6, \quad onde \;\; x_1, x_2, x_3 \geq 1$$

Iremos fazer este problema recair em um outro problema em que sabemos resolver, pois $x_i \geq 1$ significa que $x_i - 1 \geq 0$. Definindo $y_i = x_i - 1$, temos $y_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$:

Observe que $x_i = y_i + 1$, para $i = 1, 2, 3$.

Portanto, a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ transforma-se em:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 3$$

com $y_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$.
Logo, temos que o número de modos diferentes de montar um pedido com 6 itens sabendo que cada pedido tem que conter pelo menos um galão de tinta, um martelo e uma furadeira corresponde ao número de soluções não negativas da última equação que é:

$$CR_3^3 = C_5^3 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5.4}{2.1} = 10$$