Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP3 - Primeiro Semestre de 2016

Questões:

1. (1,5) Mostre usando indução matemática que:

   $$(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{4})\cdots(1+\frac{1}{n}) = \frac{n+1}{2} \quad \text{para todo número natural } n \geq 2.$$

   Resposta: Seja $P(n) : \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{2}$.

   Base da indução:
   Para $n = 2$, $\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} = \frac{2+1}{2}$, portanto $P(2)$ é verdadeira.

   Hipótese de Indução:
   Suponha verdadeiro para k, isto é, $P(k)$ é verdadeiro:

   $$P(k) : \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{k+1}{2}$$

   Devemos provar que $P(k+1)$ é verdadeiro, isto é:

   $$P(k+1) : \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right) = \frac{k+2}{2}$$

Desenvolvendo para $k+1$ e usando a hipótese de indução, temos que:

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\dots\left(1+\frac{1}{k}\right)}_{(Por\ hipótese\ indutiva)}\left(\tfrac{1}{k+1}\right) &=\\
= &\left(\tfrac{k+1}{2}\right)\left(1+\tfrac{1}{k+1}\right) &=\\
= &\left(\tfrac{k+1}{2}\right)\left(\tfrac{k+1+1}{k+1}\right) &=\\
= &\left(\tfrac{k+1}{2}\right)\left(\tfrac{k+2}{k+1}\right) &=\\
= &\tfrac{k+2}{2}
\end{aligned}
$$

Logo, pelo princípio da indução, a expressão é verdadeira, $\forall n \geq 2$.

2. (1,5) De quantas maneiras podemos selecionar uma comissão de 5 homens e 7 mulheres em um conjunto de 20 homens e 24 mulheres se:

(a) não tem outras restrições? Justifique.

Resposta: Para compor o grupo devemos escolher 5 homens em um conjunto de 20 homens, o que nos dá um total de $C(20,5) = \frac{20!}{5!15!}$ maneiras. Analogamente para as mulheres, temos $C(24,7) = \frac{24!}{7!17!}$ maneiras. Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos $C(20,5).C(24,7) = \frac{20!}{5!15!} \cdot \frac{24!}{7!17!}$ grupos distintos.

(b) se uma das mulheres, Ana, deve sempre participar da comissão? Justifique.

Resposta: Se uma das mulheres, Ana, deve sempre participar da comissão, então o problema passa a ser: determinar de quantas maneiras podemos selecionar uma comissão de 5 homens e 6 mulheres em um conjunto de 20 homens e 23 mulheres.

Para compor este grupo devemos escolher 5 homens em um conjunto de 20 homens, o que nos dá um total de $C(20,5) = \frac{20!}{5!15!}$ maneiras. Analogamente para as mulheres, temos $C(23,6) = \frac{23!}{6!17!}$ maneiras. Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos $C(20,5).C(23,6) = \frac{20!}{5!15!} \cdot \frac{23!}{6!17!}$ grupos distintos em que a Ana faz parte da comissão.

3. (1,5) Quantos números de 3 algarismos podemos formar com os algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6$ e 7, incluindo sempre o algarismo 4, se:

   (a) os algarismos não podem ser repetidos? Justifique.

   Resposta: Como o algarismo 4 deve estar sempre presente no número de 3 algarismos, temos 3 possibilidades para colocá-lo: ou na primeira, ou na segunda, ou na terceira casa decimal. Após escolhido onde o algarismo 4 vai ficar, vamos alocar os algarismos restantes, que são ao todo 6, e os números não devem possuir algarismos repetidos. Logo, temos 6 algarismos para serem escolhidos 2 a 2, o que corresponde a um arranjo de 6 tomados 2 a 2. Portanto, temos $A(6,2) = \frac{6!}{(6-2)!} = 6.5 = 30$ possibilidades. Finalmente, pelo princípio multiplicativo, temos $3.6.5 = 90$ maneiras de formarmos números de 3 algarismos, que não podem possuir algarismos repetidos, incluindo sempre o algarismo 4.

   (b) os algarismos podem ser repetidos? Justifique.

   Resposta: Observemos que o total de números de 3 algarismos que podem ser formados com todos os algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6$ e 7, que podem estar repetidos, correspondem a arranjos com repetição de 7 tomados 3 a 3, $AR(7,3) = 7^3$.
   Por outro lado, a quantidade de números de 3 algarismos que podemos formar com os algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6$ e 7, que podem estar repetidos, onde o 4 não pode aparecer, corresponde a $AR(6,3) = 6^3$. Então, a quantidade de números de 3 algarismos que podemos formar com os algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6$ e 7, que podem estar repetidos, incluindo sempre o algarismo 4 corresponde a $AR(7,3) - AR(6,3) = 7^3 - 6^3$.

4. (1,5) Dada a linha 8 do triângulo de Pascal:

$$1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1$$

   Calcule a linha 9 usando as condições de fronteira e a relação de Stifel. Justifique os cálculos.

   Resposta: Temos pela oitava linha do triângulo de Pascal dada acima, pela relação de Stifel ($C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r$) e pela condição de Fronteira ($C_n^0 = C_n^n = 1$) que:

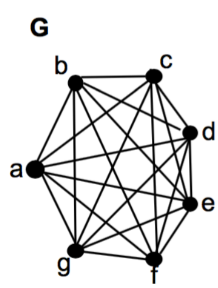
$n = 8$	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
$n = 9$	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

5. (4,5) As perguntas seguintes são sobre grafos. Justifique cada uma das suas respostas.

(a) Seja G um grafo completo com 7 vértices.

(i) Quantas arestas G possui?
Resposta: Um grafo completo com n vértices é um grafo que possui arestas entre qualquer par de vértices distintos. Logo, G possui C_n^2 arestas, então um grafo completo G com 7 vértices possui $C_7^2 = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7.6.5!}{2.5!} = 7.3 = 21$ arestas.

(ii) G é euleriano?
Resposta: Sim, pois o Teorema de Euler diz que um grafo é euleriano se e somente se todos os seus vértices têm grau par. Observe o grafo completo com 7 vértices abaixo. Os graus de todos os vértices são $d(a) = d(b) = d(c) = d(d) = d(e) = d(f) = d(g) = 6$. Logo, temos que o grafo em questão é euleriano, isto é, todos os vértices possuem grau par, satisfazendo a caracterização de grafos eulerianos.



(b) Seja F uma floresta, e T_1, T_2 e T_3 os seus componentes conexos. Sabendo que T_1 tem 8 vértices, T_2 tem 19 vértices e T_3 tem 14 vértices, calcule o número de vértices e o e o número de arestas de G.

Resposta: Consideremos o grafo T, que é uma floresta, e os seus 3 componentes conexos T_i, $i = 1, 2, 3$.

Temos então que:

$|V(T)| = |V(T_1)| + |V(T_2)| + |V(T_3)|$
e
$|E(T)| = |E(T_1)| + |E(T_2)| + |E(T_3)|$.

Temos que $|V(T_1)| = 8$, $|V(T_2)| = 19$ e $|V(T_3)| = 14$ então:

$$\begin{array}{rcl} |V(T)| & = & |V(T_1)| + |V(T_2)| + |V(G_3)| \\ |V(T)| & = & 8 + 19 + 14 \\ |V(T)| & = & 41 \end{array}$$

Como T é uma floresta, então cada componente conexo de T é uma árvore, isto é, cada T_i possui exatamente $|E(T_i)| = |V(T_i)| - 1$ arestas, $i = 1, 2, 3$. Desta forma, temos que $|E(T_1)| = |V(G_1)| - 1 = 8 - 1 = 7$, $|E(T_2)| = |V(G_2)| - 1 = 19 - 1 = 18$ e $|E(T_3)| = |V(G_3)| - 1 = 14 - 1 = 13$. Logo:

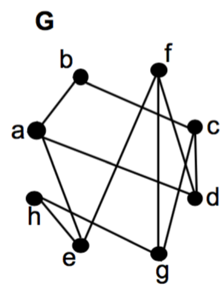
$$\begin{array}{rcl} |E(T)| & = & |E(T_1)| + |E(T_2)| + |E(G_3)| \\ |E(T)| & = & 7 + 18 + 13 \\ |E(T)| & = & 38 \end{array}$$

Logo, os números de arestas e vértices de uma floresta T que possui 3 componentes conexos são 38 e 41, respectivamente.

(c) Seja G o grafo dado por:
$V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ e
$E(G) = \{(a, b), (a, d), (a, e), (b, c), (c, d), (c, g), (d, f), (e, f), (e, h), (f, g), (g, h)\}$

Antes de respondermos as perguntas, vamos ilustrar o grafo:

(i) G é bipartido? Caso seja, determine sua bipartição.
Resposta: Sim, pois como G não possui um ciclo induzido ímpar e pela caracterização dos grafos bipartidos (um grafo



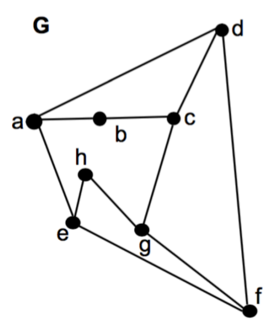
é bipartido se e somente se não possui ciclos ímpares), temos que G é bipartido. Mais espcificamente, G possui a seguinte bipartição (V_1, V_2), onde $V_1 = \{a, c, f, h\}$ e $V_2 = \{b, d, e, g\}$.

(ii) G é hamiltoniano? Caso seja, dê um ciclo hamiltoniano de G.

Resposta: Sim, pois o ciclo induzido $C = a, b, c, g, h, e, f, d, a$ passa por todos os vértices de G exatamente uma vez, logo G possui um ciclo hamiltoniano.

(iii) G é planar? Caso seja, determine o número de faces de G usando a fórmula de Euler.

Resposta: Sim, já que a Figura abaixo apresenta uma representação plana de G, ou seja, uma representação em que não há cruzamento de arestas, logo G é um grafo planar.



Como G é planar, queremos determinar o número de faces de qualquer representação plana de G, temos que pelo teorema de Euler para grafos planares, um grafo planar possui o número de faces $f = m - n + 2$, onde f, m, n denotam respectivamente os números de faces, arestas e vértices do grafo. Assim, G possui $f = 11 - 8 + 2 = 5$ faces.