Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD1 - Primeiro Semestre de 2011

Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (1.2) Verifique se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira prove, se for falsa justifique.

   (a) $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$.

   Resposta: Falso.

   Para esta afirmação ser verdadeira, $\emptyset$ deveria ser elemento do conjunto $\{\{\emptyset\}\}$, cujo único elemento é $\{\emptyset\}$. Desta forma, as seguintes afirmações são válidas:

   - $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$;
   - $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$,
   - $\emptyset \subset \{\{\emptyset\}\}$, pois o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

   (b) Para $A = \{x \in \mathbb{N} : |2x - 7| \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} : 2 \leq x \leq 5\}$, resulta $A = B$ e $\bar{A} = \bar{B}$.

   Resposta: Falsa.

   Vamos identificar os elementos dos dois conjuntos, começando pelo conjunto A.

$$
\begin{array}{rlcccccl}
A & = \{x \in \mathbb{N} : & 0 & \leq & |2x-7| & \leq & 3 & \} \\
& = \{x \in \mathbb{N} : & -3 & \leq & 2x-7 & \leq & 3 & \} \\
& = \{x \in \mathbb{N} : & -3+7 & \leq & 2x-7+7 & \leq & 3+7 & \} \\
& = \{x \in \mathbb{N} : & 4 & \leq & 2x & \leq & 10 & \} \\
& = \{x \in \mathbb{N} : & \frac{4}{2} & \leq & \frac{2x}{2} & \leq & \frac{10}{2} & \} \\
& = \{x \in \mathbb{N} : & 2 & \leq & x & \leq & 5 & \}
\end{array}
$$

Assim, podemos reescrever o conjunto A da seguinte forma:

$$A = \{x \in \mathbb{N} : 2 \leq x \leq 5\} = \{2, 3, 4, 5\}.$$

Por outro lado, $B = \{x \in \mathbb{Z} : 2 \leq x \leq 5\} = \{2, 3, 4, 5\}$. Daí podemos concluir que $A = B$.

Agora, precisamos identificar os conjuntos $\bar{A}$ e $\bar{B}$. Para isto é necessário observar que o conjunto $\mathbb{N}$ é o conjunto universo de A e que $\mathbb{Z}$ é o conjunto universo de B. Assim, os elementos de $\bar{A}$ são números naturais menores do que 2 ou maiores do que 5, ou em outras palavras $\bar{A} = \{x \in \mathbb{N} : x < 2 \text{ ou } x > 5\}$. Já os elementos de $\bar{B}$ são números inteiros menores do que 2 ou maiores do que 5, ou $\bar{B} = \{x \in \mathbb{Z} : x < 2 \text{ ou } x > 5\}$. Consequentemente, $\bar{B}$ tem números negativos que não estão presentes em $\bar{A}$, por exemplo: $-3 \in \bar{B}$ mas $-3 \notin \bar{A}$. Portanto, a afirmação $\bar{A} = \bar{B}$ é falsa.

2. (1.8) Numa turma de 70 alunos, 22 estudam francês, 7 espanhol, 55 inglês, 5 estudam espanhol e inglês, 8 estudam francês e inglês e somente 2 estudam francês, espanhol e inglês. Usando o princípio de inclusão e exclusão determine o número de alunos da turma que estudam francês e espanhol. Justifique.

   Resposta: Sejam F, E, I os conjuntos de alunos que estudam francês, espanhol e inglês, respectivamente. Sabemos, pelo princípio da inclusão e exclusão, que, dados 3 conjuntos temos:

   $$n(F \cup E \cup I) = n(F) + n(E) + n(I) - n(F \cap E) - n(F \cap I) - n(E \cap I) + n(F \cap E \cap I).$$

   Logo, o número de alunos que estudam francês e espanhol, $n(F \cap E)$, é dado por:

$$n(F\cap E) = n(F)+n(E)+n(I)-n(F\cap I)-n(E\cap I)+n(F\cap E\cap I)-n(F\cup E\cup I).$$

Observemos que $n(F\cup E\cup I)$ é o número de alunos da turma, porque estes falam francês, espanhol ou inglês. Portanto, $n(F\cup E\cup I) = 70$. O problema também nos fornece: $n(F) = 22$, $n(E) = 7$, $n(I) = 55$, $n(E\cap I) = 5$, $n(F\cap I) = 8$ e $n(F\cap E\cap I) = 2$.

Substituindo as incógnitas pelos valores mencionados acima, temos:

$$n(F\cap E) = 22 + 7 + 55 - 8 - 5 + 2 - 70 = 3.$$

Logo, 3 alunos da turma falam francês e espanhol.

3. (1.8) Mostre pelo Princípio da Indução Matemática que:

$$2\sum_{i=1}^{n}(3i-1) = n(1+3n)$$

para todo n natural.
Lembre que $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Resposta: Seja $P(n) : 2\sum_{i=1}^{n}(3i-1) = n(1+3n)$. Vamos provar que $P(n)$ é verdadeira para todo n natural.

Base da Indução: Para $n = 1$ temos:

$2\sum_{i=1}^{1}(3i-1) = 2\times(3-1) = 2\times 2 = 4$.

Por outro lado, $n(1+3n) = 4$ quando $n = 1$.

Logo, $P(1)$ é verdadeira.

Hipótese Indutiva: Suponha que $P(k) : 2\sum_{i=1}^{k}(3i-1) = k(1+3k)$ é verdadeira, $k\in\mathbb{N}$.

Passo Indutivo: Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeira então $P(k+1) : 2\sum_{i=1}^{k+1}(3i-1) = (k+1)[1+3(k+1)]$ também é verdadeira.

Desenvolvendo o primeiro membro de $P(k+1)$, temos:

$$
\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{k+1}(3i-1) &= 2[2+5+8+\cdots+(3k-1)+(3(k+1)-1)] \\
&= 2[2+5+8+\cdots+(3k-1)+(3k+2)] \\
&= 2[2+5+8+\cdots+(3k-1)]+2[(3k+2)] \\
&= \underbrace{k(1+3k)}_{\text{Pela hipótese de indução}} +2[(3k+2)] \\
&= 3k^2+7k+4
\end{aligned}
$$

Por outro lado, $(k+1)[3(k+1)+1] = (k+1)(3k+4) = 3k^2+7k+4$. Logo, $P(k+1)$ é verdadeira.

Portanto, pelo princípio de indução matemática,

$$P(n) : 2\sum_{i=1}^{n}(3i-1) = n(1+3n)$$

é verdadeira para todo n natural.

4. (2.6) Joana convidou 23 amigos para sua festa de aniversário sendo que 4 desses amigos devem compartilhar uma mesa circular junto à aniversariante. De quantas maneiras diferentes podem 4 dos 23 amigos sentarem à mesa circular quando:

(a) não importa o lugar em que as pessoas sentam à mesa. Justifique.

Resposta: Como a forma das 5 pessoas sentarem-se à mesa não importa neste caso, basta escolhermos entre as 23 pessoas, 4 para sentarem-se com a aniversariante. Temos C_{23}^4 formas de escolher 4 dentre 23 pessoas, já que a ordem das escolhas não influencia neste caso. Afinal, escolher Maria, Pedro, João e Ana é o mesmo que escolher João, Maria, Ana e Pedro, por exemplo. Portanto, há $C_{23}^4 = \frac{23!}{4!19!}$ formas de 4 convidados sentarem-se à mesa com a aniversariante.

(b) importa a posição em que as pessoas sentam à mesa. Justifique.

Resposta: Neste caso, além de escolher as 4 pessoas, temos formas diferentes para sentá-las as redor da mesa circular junto com

Joana. Por exemplo, se Pedro senta à esquerda de Joana e Ana senta à direita da aniversariante, não é o mesmo que se Ana senta à esquerda de Joana e Pedro à sua direita. Logo, vamos utilizar o conceito de permutação circular.

Primeiramente, precisamos escolher 4 dentre os 23 convidados. Temos C_{23}^4 formas para fazer essa escolha **e** depois junto com a aniversariante, permutar o total de 5 pessoas em uma mesa circular, que corresponde a $PC(5) = (5-1)!$ maneiras distintas .

Utilizando o princípio multiplicativo temos

$$C_{23}^4 \times PC(5) = \frac{23!}{4!19!} \times 4! = \frac{23!}{19!}$$

formas distintas de Joana sentar-se ao redor de uma mesa circular com 4 dos seus 23 amigos.

5. (2.6) Quantos são os anagramas da palavra **G A R R A F A**

(a) sem restrições? Justifique.

Resposta: A palavra GARRAFA tem 1 letra G, 3 letras A, 2 letras R e 1 letra F, totalizando 7 letras. Para enumerarmos seu anagramas sem restrições, basta permutarmos as letras levando em conta as repetições. Portanto, temos $P_7^{1,3,2,1} = \frac{7!}{1!3!2!1!} = 420$. Logo, a palavra GARRAFA tem 420 anagramas diferentes.

(b) que começam com **A** ou **F**? Justifique.

Resposta: Primeiramente, vamos analisar os anagramas que começam por A.

Fixando uma letra A na primeira posição, restam duas letras A, duas letras R, uma letra G e uma letra F para ocuparem as 6 posições restantes. Então temos:

$$P_6^{2,2,1,1} = \frac{6!}{2!2!1!1!} = 180$$

anagramas que começam com a letra A.

Agora, vamos observar os anagramas que começam com a letra F.

Fixando o único F na primeira posição, restam 6 letras a serem permutadas, a saber: 3 letras A, 2 letras R e 1 letra G. Assim, temos:

$$P_6^{3,2,1} = \frac{6!}{3!2!1!} = 60$$

Logo, pelo pricípio aditivo, temos $P_6^{2,2,1,1} + P_6^{3,2,1} = 240$ anagramas da palavra GARRAFA que começam com A ou com F.

(c) que começam por consoante? Justifique.

Resposta:

Observemos que a única letra que não é consoante é a letra A . Então, calcular o número de anagramas que começam por consoante é o mesmo que calcular o número de anagramas que não começam com A. Portanto, vamos solucionar essa questão utilizando complementariedade, ou seja, vamos subtrair do total de anagramas da palavra GARRAFA, aqueles que começam por A (que é o caso que não pode acontecer). Aproveitando os cálculos dos itens anteriores, temos que o número de anagramas que começam por consoante é $P_7 1, 3, 2, 1 - P_6^{2,2,1,1} = 420 - 180 = 240$.

Outro Raciocínio: Vamos observar o número de anagramas que começam por G, R ou F.

Cálculo do número de anagramas distintos que começam por G.

Fixando a letra G na primeira posição temos 6 letras para permutar entre as quais temos 3 letras A, 2 letras R e 1 letra F. Então, temos $P_6^{3,2,1} = \frac{6!}{3!2!1!} = 60$ anagramas distintos da palavra GARRAFA que começam por G.

Cálculo do número de anagramas distintos que começam por G.

Fixando a letra R na primeira posição temos 6 letras para permutar entre as quais temos 1 letra G, 3 letras A, 1 letra R e 1 letra F. Então, temos $P_6^{1,3,1,1} = \frac{6!}{1!3!1!1!} = 120$ anagramas distintos da palavra GARRAFA que começam por R.

Cálculo do número de anagramas distintos que começam por G.

Fixando a letra F na primeira posição temos 6 letras para permutar entre as quais temos 1 letra G, 3 letras A e 2 letras R.

Então, temos $P_6^{1,3,2} = \frac{6!}{1!3!2!} = 60$ anagramas distintos da palavra GARRAFA que começam por R.

Utilizando o princípio aditivo, temos que o número de anagramas distintos da palavra garrafa que começam por consoante é $60 + 120 + 60 = 240$.

(d) que não começam com **R**? Justifique.

Resposta:

Para resolver esta questão, utilizaremos um raciocínio análogo ao utilizado na questão anterior. Como queremos o número de anagramas que não começam com R, vamos subtrair do total de anagramas da palavra GARRAFA o número de anagramas que começam com R.

Cálculo do número de anagramas que começam com R:

Fixando uma letra R na primeira posição, restam 1 letra R, 3 letras A, 1 letra G e 1 letra F, totalizando 6 letras para serem posicionadas nas posições restantes. Então, temos

$$P_6^{1,3,1,1} = \frac{6!}{1!3!1!1!} = 120$$

anagramas que começam com a letra R.

Agora, basta subtrair do total de anagramas aqueles que começam por R. Fazendo isso obtemos que $P_7^{1,3,2,1} - P_6^{1,3,1,1} = 420 - 120 = 300$ anagramas da palavra GARRAFA não começam com R.

6. Determine:

(a) O número de soluções inteiras e não negativas (≥ 0) da equação

$$x + y + z + w = 30$$

tal que $x \geq 2$ e $w > 2$. Justifique.

Resposta: Queremos as soluções inteiras e não negativas da equação $x + y + z + w = 30$ tal que $x \geq 2$ e $w > 2$. Notemos que $w > 2$

e, portanto, $w \geq 3$. Fazendo $a = x - 2$ e $b = w - 3$, obtemos $x = 2 + a$ e $w = 3 + b$ e a equação se transforma em

$$(2 + a) + y + z + (3 + b) = 30,$$

onde a, b, y, z são variáveis não negativas.
Daí, devemos resolver a seguinte equação:

$$a + y + z + b = 25,$$

com $a, b, y, z \geq 0$.
O número de soluções inteiras e não negativas de tal equação corresponde a Combinação com Repetição. Assim, a resposta é

$$CR_4^{25} = C_{4+25-1}^{25} = C_{28}^{25} = \frac{28!}{25!\ \ 3!} = 14 \times 9 \times 26 = 3276.$$

(b) O número de soluções inteiras positivas (> 0) da desigualdade

$$x + y + z \leq 21$$

Justifique.

Resposta: Neste caso, queremos que $x, y, z > 0$, ou seja, $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$. Portanto, precisamos fazer a seguinte mudança de variáveis, isto é,

$$a = x - 1; \qquad b = y - 1, \qquad c = z - 1,$$

isto é

$$x = 1 + a; \qquad y = 1 + b, \qquad z = 1 + c.$$

Fazendo as devidas substituições obtemos:

$$(1 + a) + (1 + b) + (1 + c) \leq 21,$$

onde a, b, c são variáveis inteiras e não negativas.
Então,

$$a + b + c \leq 18,$$

com $a, b, c \geq 0$.

Para encontrarmos a solução desta inequação, vamos introduzir a variável de folga $f = 18 - a - b - c$. Assim, a inequação se transforma na seguinte equação:

$$a + b + c + f = 18,$$

onde $a, b, c, f \geq 0$.
Agora, utilizando o conceito de Combinação com repetição, obtemos que o número de soluções inteiras positivas da desigualdade $x + y + z \leq 21$ é dado por:

$$CR_4^{18} = C_{4+18-1}^{18} = C_{21}^{18} = \frac{21!}{18!\ 3!} = 70 \times 19 = 1330.$$

(c) O número de soluções inteiras e não negativas (≥ 0) da desigualdade

$$x + y + z < 7$$

com $y > 1$. Justifique.

Resposta: O problema equivale a encontrar o número de soluções inteiras e não negativas de

$$x + y + z \leq 6$$

com $y \geq 2$.
Fazendo $a = y - 2$, obtemos $y = 2 + a$ e a inequação supracitada se tranforma em:

$$x + (2 + a) + z \leq 6,$$

onde x, a, z são variáveis inteiras e não negativas.
Daí temos,

$$x + a + z \leq 4,$$

com $x, a, z \geq 0$.
Novamente precisamos introduzir uma variável de folga $f = 4 - x - a - z$ a fim de obtermos a equação:

$$x + a + z + f = 4,$$

onde $x, a, z, f \geq 0$.

Logo, o número de soluções inteiras da inequação $x + y + z < 7$, com $y > 1, x, z \geq 0$ é o número de soluções inteiras da equação acima e que é dado por:

$$CR_4^4 = C_{4+4-1}^4 = C_7^4 = \frac{7!}{4!\ \ 3!} = 35.$$