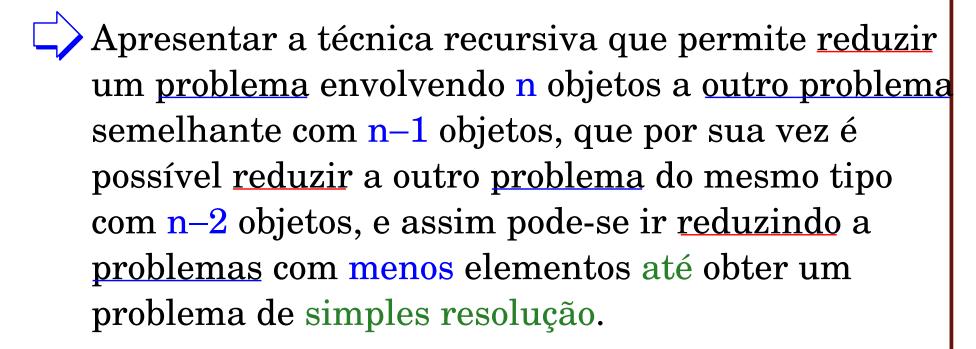
**15.1** 

Módulo: Relação de Recorrência

# **Objetivo:**



# Importância:

Muitos problemas de contagem são modelados e resolvidos usando relações de recorrência.





### Aula 15

### Conteúdo:

- **Introdução**
- **Definição**
- Relação de Fibonacci
- Torre de Hanoi
- Método de substituição

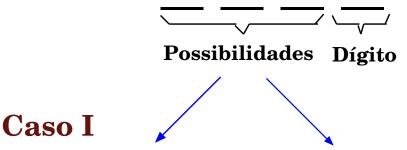
# Introdução:

# Exemplo 1:

Considere expressões de 4 elementos formadas por dígitos ou por símbolos das operações aritméticas. Neste problema uma <u>expressão</u> é <u>válida</u> se verifica:

- (a) O primeiro e o último termo da expressão é um dígito (0, 1, 2, ..., 9)
- (b) Não podem estar juntos símbolos aritméticos (+,-,×,÷) Determine o número de expressões válidas.
  - Ilustração: 0187 1+99 expressões válidas  $5\times 3 6\div +2$  expressões não válidas

Resolução:



ou

expressão válida de comprimento 3 (total N<sub>3</sub>)

expressão válida de comprimento 2 (total N<sub>2</sub>)

Caso II

Símbolo aritmético

N<sub>4</sub>: número de expressões válidas de comprimento 4

N<sub>3</sub>: número de expressões válidas de comprimento 3

 $N_2$ : número de expressões válidas de comprimento 2

N<sub>1</sub>: número de expressões válidas de comprimento 1





dígito

# Resolução (continuação):

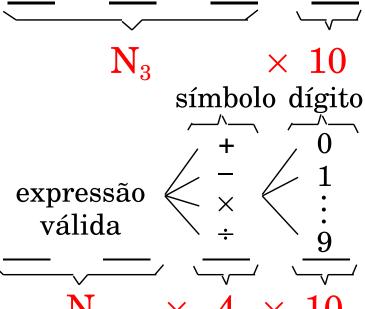
Cálculo de N<sub>4</sub> a partir de N<sub>3</sub> e N<sub>2</sub>

Caso I



## Número de possibilidades:

Caso II



# Número de possibilidades:

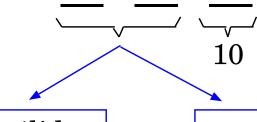
Logo, 
$$N_4 = 10N_3 + 40N_2$$





Portanto, pode-se calcular  $N_4$  a partir da relação encontrada  $N_4$  =  $10N_3$  +  $40N_2$ 

Cálculo de N<sub>3</sub>:



011

expressão válida de extensão 2 (total  $N_2$ )

expressão válida de extensão 1 + (total  $N_1$ )

símbolo aritmético

Logo,

$$N_3 = 10N_2 + 40N_1$$





Cálculo de N<sub>2</sub>:

$$10$$
expressão válida de extensão 1 (total  $N_1$ )

Portanto,

$$N_2 = 10N_1$$

Como  $N_0$ : número de expressões válidas de cumprimento 0 = 0

podemos escrever

$$N_2 = 10N_1 + 40N_0$$

Observe que  $N_1 = 10$ 





#### Resumo:

- N<sub>k</sub>: número de expressões válidas de extensão k, k = 0, 1, 2, 3, 4
- Objetivo do problema: Cálculo de N<sub>4</sub>.
- Relações obtidas:  $N_4 = 10N_3 + 40N_2$

$$N_3 = 10N_2 + 40N_1$$

$$N_2 = 10N_1 + 40N_0$$

(relação: 
$$N_k = 10N_{k-1} + 40N_{k-2}$$
,  $k = 4, 3, 2$ )

$$N_0 = 0$$
,  $N_1 = 10 \implies N_2 = 10 \times 10 = 100$ 

$$\rightarrow$$
 N<sub>3</sub> = 10 × 100 + 40 × 10 = 1400

Resposta: O número de expressões válidas é

$$N_4 = 10 \times 1400 + 40 \times 100 = 18000_{\text{cederj}}$$

# Definição:

Uma relação de recorrência é uma fórmula que relaciona um número  $a_n$  a alguns dos seus predecessores  $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_k, \dots, a_0$ 

• Ilustração:





## Exemplo 2:

Seja S<sub>n</sub> a soma dos primeiros n números naturais.

Determine a <u>relação de recorrência</u> em termos de S<sub>n-1</sub>.

# Resolução:

$$S_n = \underbrace{1 + 2 + ... + (n - 1)}_{S_{n-1}} + n$$

### Resposta:

A <u>relação de recorrência</u> é  $S_n = S_{n-1} + n$ 

Observação:

A relação de recorrência é também denominada equação de diferenças.

# Relação de Fibonacci:

O problema proposto por Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, em um livro publicado em 1202 é o seguinte:

Determine o número de pares de coelhos ao final de 12 meses sob as seguintes condições:

- (a) <u>Inicialmente</u> tem-se um <u>único</u> par de coelhos, um macho e uma fêmea recém nascidos.
- (b) <u>Todo</u> mês cada par de coelhos com pelo menos <u>2</u> meses <u>produz</u> um novo par de coelhos de <u>sexo oposto</u>
- (c) Nenhum coelho morre durante este processo.

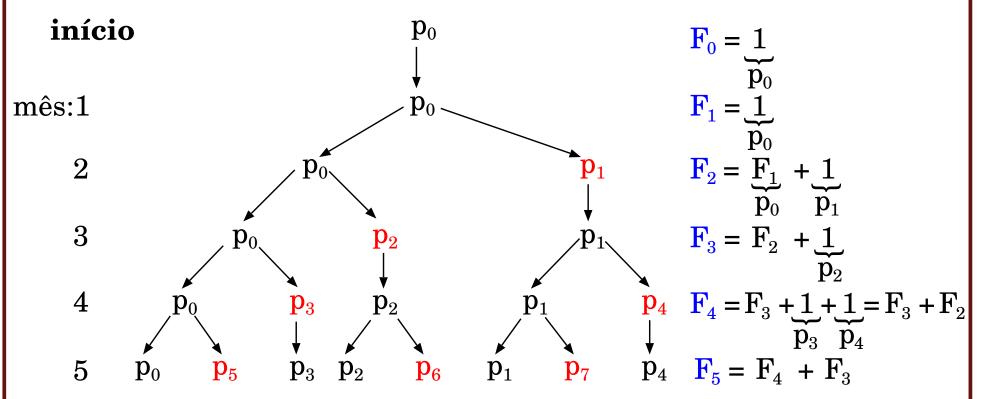




# Resolução:

 $F_n$ : número de pares de coelhos no final do mês n (n  $\in \mathbb{N}$ )

F<sub>0</sub>: número de pares no início do processo



Logo, a relação de recorrência é  $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$  (k = 2, 3, 4, ...) e as condições iniciais são  $F_0 = 1$  e  $F_1 = 1$ 

Cálculo de F<sub>12</sub>:

Usamos  $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$  para k = 2, 3, ..., 12:

$$F_1 = 1$$

$$F_2 = F_1 + F_0 = 2$$
  $F_3 = F_2 + F_1 = 3$ 

$$F_3 = F_2 + F_1 = 3$$

$$F_4 = F_3 + F_2 = 5$$

$$F_5 = F_4 + F_3 = 8$$

$$F_4 = F_3 + F_2 = 5$$
  $F_5 = F_4 + F_3 = 8$   $F_6 = F_5 + F_4 = 13$ 

$$F_7 = F_6 + F_5 = 21$$

$$F_8 = F_7 + F_6 = 34$$

$$F_7 = F_6 + F_5 = 21$$
  $F_8 = F_7 + F_6 = 34$   $F_9 = F_8 + F_7 = 55$ 

$$\mathbf{F}_{10} = \mathbf{F}_9 + \mathbf{F}_8 = 89 \ \mathbf{F}_{11} = \mathbf{F}_{10} + \mathbf{F}_9 = 144 \ \mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}_{11} + \mathbf{F}_{10} = 233$$

**Resposta:** O número de pares de coelhos ao final de 12 meses é 233.

→ Observação: Os números de Fibonacci, F<sub>n</sub>, aparecem frequentemente em problemas combinatórios.



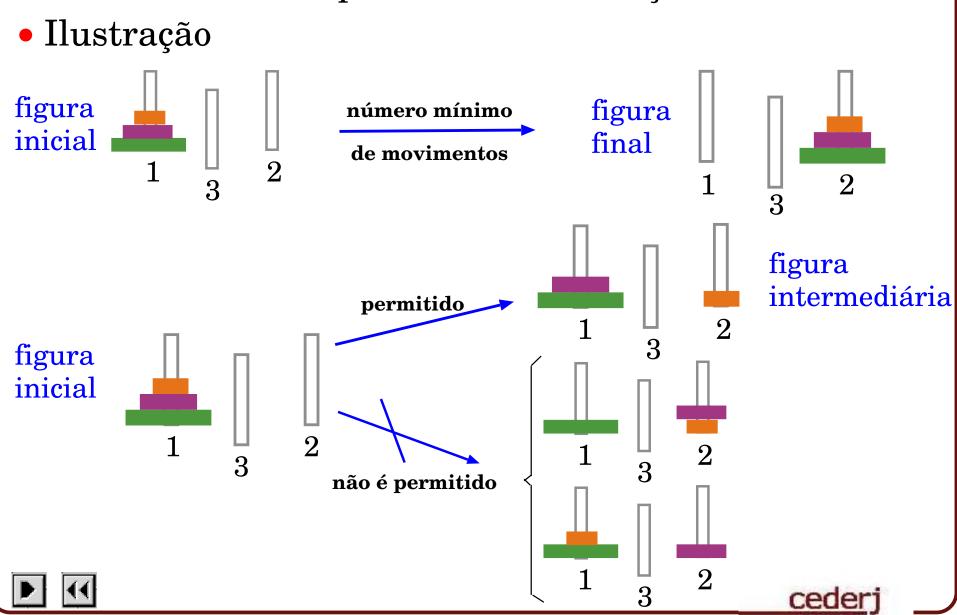
#### Torre de Hanoi:

# 1. Torre de Hanoi simplificada

Determine o menor número de movimentos que são necessários para passar 3 discos colocados em um eixo, em ordem crescente de tamanho (de cima para baixo), para um outro eixo. Pode ser usado de forma auxiliar um terceiro eixo. Devem ser respeitadas as seguintes regras:

- (a) Só é permitido <u>mover um</u> disco do <u>topo</u> para um <u>outro</u> eixo.
- (b) Não é permitido colocar um disco maior em cima de um menor.

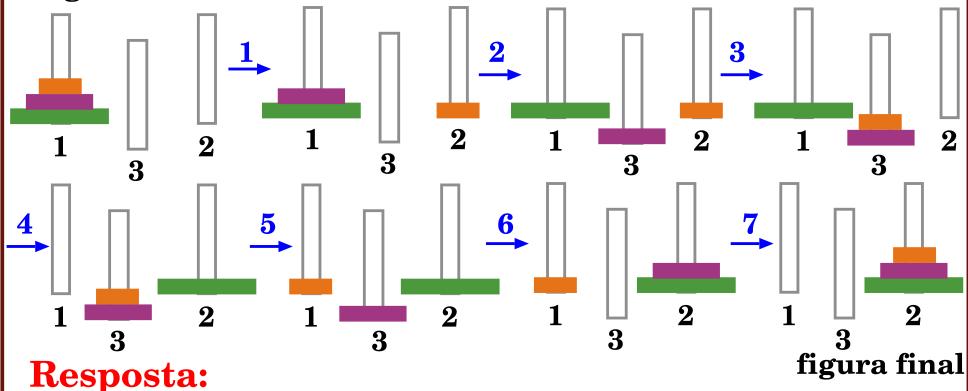
Torre de Hanoi simplificada (continuação)



Torre de Hanoi simplificada (continuação):

# Resolução:

figura inicial



O menor número de movimentos para passar 3 discos de um eixo a um outro seguindo as regras é 7.

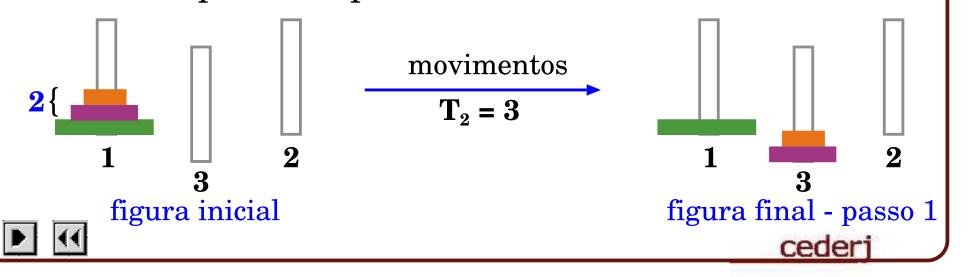
cederi

### Releitura do raciocínio:

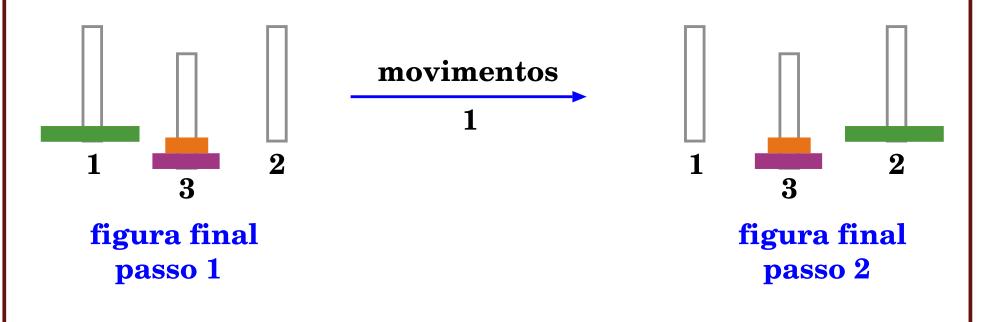
 $T_k$ : número mínimo de movimentos necessários para passar k discos de um eixo a outro nas condições do problema (k=2,3)

Cálculo de T<sub>3</sub> (Algoritmo)

Passo 1 - Mover os 2 primeiros discos (de cima para baixo) do primeiro para o terceiro eixo (k = 3 2 = k-1)



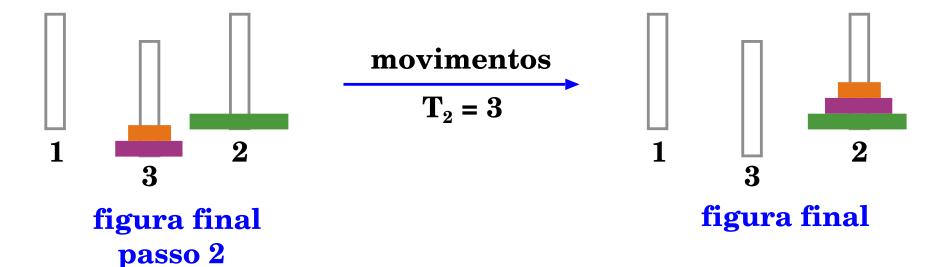
Passo 2 - Mover o disco maior do primeiro para o segundo eixo







Passo 3 - Mover os 2 discos do terceiro eixo para o segundo eixo



Logo,

$$T_3 = T_2 + 1 + T_2 = 2T_2 + 1 = 7$$





### 2. Caso geral

Determine o menor número de movimentos que são necessários para passar n discos colocados em um eixo, em ordem crescente de tamanho (de cima para baixo), para um outro eixo. Pode ser usado de forma auxiliar um terceiro eixo. Devem ser respeitadas as seguintes regras:

- (a) Só é permitido mover um disco do topo para um outro eixo.
- (b) Não é permitido colocar um disco maior em cima de um menor.
- $T_k$ : número mínimo de movimentos necessários para passar k discos de um eixo a outro nas condições do problema (k = 1, 2, ..., n)





## Resolução (algoritmo recursivo):

- Passo 1 Mover os primeiros n-1 discos do topo do primeiro eixo para o terceiro eixo (é feito recursivamente em  $T_{n-1}$  movimentos)
- Passo 2 Mover o disco maior do primeiro eixo para o segundo eixo (precisa-se de 1 movimento)
- Passo 3 Mover os n-1 discos do <u>terceiro</u> eixo para o <u>segundo</u> eixo

(como no passo 1, é feito em  $T_{n-1}$  movimentos)

**Resposta:** A partir do algoritmo obtemos que o número de movimentos necessários para resolver a torre de Hanoi está dado pela relação de recorrência  $T_n = 2T_{n-1} + 1$  com condição inicial  $T_1 = 1$ .

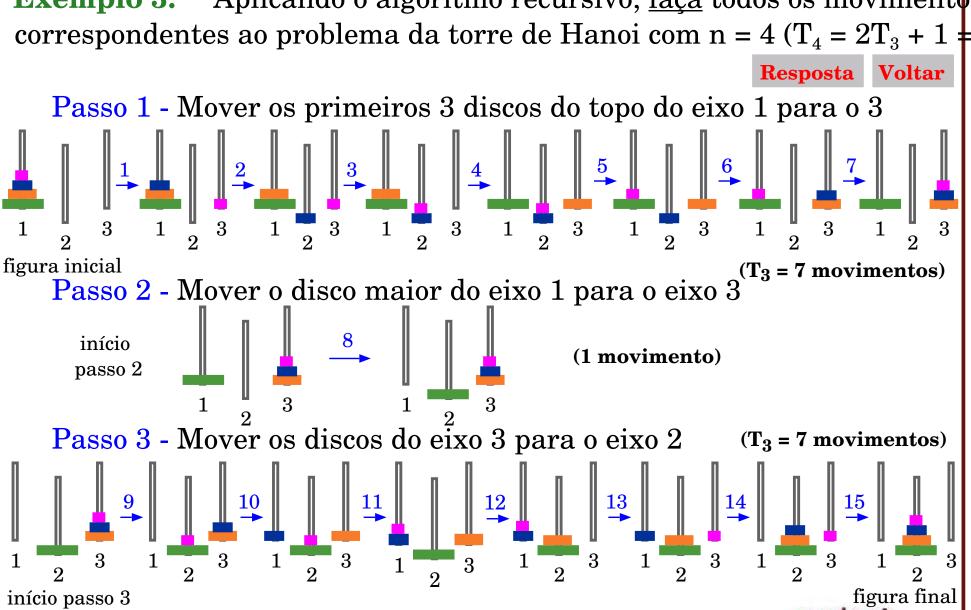




#### Relação de Recorrência: Torre de Hanoi

**15.23** 

Aplicando o algoritmo recursivo, <u>faça</u> todos os movimentos Exemplo 3: correspondentes ao problema da torre de Hanoi com n = 4 ( $T_4 = 2T_3 + 1 \neq 15$ ).



Dado histórico:

Este problema foi inventado em 1883 pelo matemático francês Edouard Lucas. O número de discos era 64.

Observação:

Podemos calcular  $T_{64}$  usando a relação de recorrência  $T_k = 2T_{k-1} + 1$  e a condição inicial  $T_1 = 1$ .

Precisamos calcular  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$ , ... até  $T_{64}$ , o que é <u>bem</u> demorado.





### Pergunta:

É possível encontrar uma fórmula fechada para  $T_n$  que nos permita calcular rapidamente o número de movimentos que são necessários para resolver o problema da Torre de Hanoi para um dado número de discos n?

## Resposta:

Sim. A fórmula é obtida considerando a relação de recorrência  $T_n = 2T_{n-1} + 1$  e um método de substituição.





# Método de Substituição:



Propriedade 
$$T_n = 2^n - 1$$
 para todo  $n \in \mathbb{N}$ 

Prova (princípio de indução matemática):

$$P(n): T_n = 2^n - 1$$

Prova

Voltar

- (1) Base de indução: P(1) é verdadeira pois  $T_1 = 1 = 2^1 1$
- (2) Hipótese de indução (HI): P(k):  $T_k = 2^k 1$  é verdadeira
- (3) P(k) verdadeira  $\Rightarrow$  P(k + 1):  $T_{k+1} = 2^{k+1} 1$  é verdadeira

#### <u>Desenvolvendo</u>

Pela relação de recorrência resulta

$$T_{k+1} = 2T_k + 1$$

$$\stackrel{\text{HI}}{=} 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 2 + 1 = 2^{k+1} - 1$$

Logo, P(k + 1) é verdadeira

Portanto, pelo princípio de indução matemática temos que P(n) é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$  .

• Ilustração:

$$T_{64} = 2^{64} - 1 > 18 \times 10^{12}$$





Observação:

O método de substituição usado para resolver <u>algumas</u> relações de recorrência também é denominado de suposição e verificação.

De fato:

Pela substituição obtém-se uma expressão fechada que é a suposição ou conjectura  $(T_n = 2^n - 1)$ A verificação consiste em provar que a conjectura é verdadeira (a prova por indução completa de  $T_n = 2^n - 1$ ).





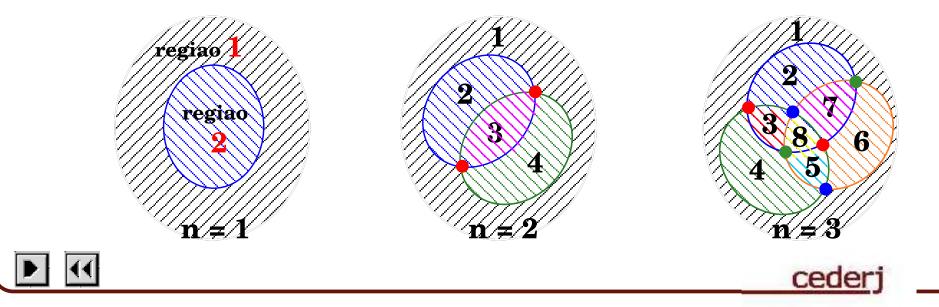
# Exemplo 4:

São desenhados no plano n ovais verificando as condições:

- (a) dois ovais se interceptam em exatamente 2 pontos
- (b) <u>três</u> ovais <u>não</u> se interceptam no <u>mesmo</u> ponto

Em quantas regiões esses ovais dividem o plano?

• Ilustração:



# Resolução:

 $a_k$ : número de regiões em que o plano é dividido por k ovais (k = 1, 2, ..., n)

Relação de recorrência

$$a_k = a_{k-1} + 2(k-1)$$

$$k = n, n-1, ..., 2$$

Condição inicial

$$a_1 = 2$$





Obtenção de uma fórmula fechada

(método de substituição)

$$a_{n} = a_{n-1} + 2(n-1)$$

$$= a_{n-2} + 2(n-2) + 2(n-1)$$

$$= a_{n-3} + 2(n-3) + 2(n-2) + 2(n-1)$$

$$\vdots$$

$$= a_{n-k} + 2[(n-k) + (n-k+1) + ... + (n-1)]$$

$$\vdots$$

$$= a_{n-k} + 2[(n-k) + (n-k+1) + ... + (n-1)]$$

$$= 2 + 2(n-1)n = 2 + (n-1)n$$

Conjectura

$$a_n = 2 + (n - 1)n$$
 para todo  $n \in \mathbb{N}$ 

Verificação: indução em n (desafio)

Desafio

Voltar

Base de indução P(1):  $a_1 = 2 + (1 - 1).1$  é verdadeira pois  $a_1 = 2$ 

Passo da indução: Devemos provar que

$$P(k)$$
:  $a_k = 2 + (k-1)k$  é verdadeira  $\Rightarrow P(k+1)$ :  $a_{k+1} = 2 + k(k+1)$  é verdadeira

De fato, assuma que P(k) é verdadeira (hipótese indutiva, HI), então pela relação de recorrência temos que

$$a_{k+1} = a_k + 2(k + 1 - 1)$$

$$= 2 + (k - 1)k + 2k = 2 + (k - 1) + 2 k$$

$$= 2 + (k + 1)k$$

$$= 2 + (k + 1)k$$

Logo, P(k + 1) é verdadeira

Pelo princípio de indução matemática resulta que

$$P(n)$$
:  $a_n = 2 + (n-1)n$  é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ 

# Resposta:

O número de regiões em que n ovais dividem o plano é  $a_n = 2 + (n-1)n$ 

Ilustração

Se n = 4 então o plano fica dividido em  $a_4 = 2 + 3.4 = 14$  regiões.

### **Desafio:**

Faça o desenho das 14 regiões determinadas pelos 4 ovais.





### Resumo:

Definição de relação de recorrência (ou equação de diferenças)

É uma fórmula que relaciona um número  $a_n$  a alguns de seus predecessores  $a_{n-1}$ ,  $a_{n-2}$ ,  $a_k$ , ...

# Relação de Fibonacci (1202)

 $\mathbf{F}_n$ : número de pares de coelhos no final do mês n sob as condições do problema

Relação de recorrência

$$\mathbf{F}_{\mathbf{n}} = \mathbf{F}_{\mathbf{n}-1} + \mathbf{F}_{\mathbf{n}-2}$$

Condições iniciais

$$F_0 = 1$$
,  $F_1 = 1$ 

Torre de Hanoi (E. Lucas, 1883)

T<sub>n</sub>: número mínimo de movimentos necessários para passar n discos ordenados de um eixo a um outro eixo segundo as condições do problema.

Relação de recorrência

$$T_n = 2T_{n-1} + 1$$

Condições iniciais

$$T_1 = 1$$

Fórmula fechada (resolução da relação de recorrência)

$$T_n = 2^n - 1$$

Método de substituição (ou de suposição e verificação)

- Permite resolver <u>algumas</u> relações de recorrência a partir da relação e de suas condições iniciais.
- Através de substituições sucessivas chega-se a uma conjectura (ou suposição) que precisa ser verificada.