Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
GABARITO DA AD1 - Segundo Semestre de 2009

Questões:

1. (2.0) Verifique se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira prove, se for falsa justifique.

   (a) $\{\emptyset\} \subseteq \{\{\emptyset\}, 0\}$.

   Resposta: A afirmativa é falsa. De fato, lembrando que um conjunto A está contido em um conjunto B se todo elemento de A é elemento de B ($A \subseteq B$), temos que $\emptyset$ é um elemento de $A = \{\emptyset\}$ mas não é um elemento de $B = \{\{\emptyset\}, 0\}$.

   As afirmações corretas são:

   $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}, 0\}$

   ou

   $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\{\emptyset\}, 0\}$

   (b) $1 \in \{\{1\}, 0, -2\}$.

   Resposta: A afirmativa é falsa, pois 1 não é um elemento do conjunto $\{\{1\}, 0, -2\}$. A afirmação correta é $\{1\} \in \{\{1\}, 0, -2\}$.

   (c) $A \subseteq P(A)$.

   Resposta: A afirmativa é falsa, pois o conjunto A é um elemento do conjunto $P(A)$. A afirmação correta é $A \in P(A)$.

2. (1.5) Usando o Princípio de Inclusão e Exclusão, determine o número de naturais x, tais que $10 < x \leq 100$, que não são divisíveis nem por 4 e nem por 9. Justifique.

Resposta: Consideremos os seguintes conjuntos:
$U = \{x \in \mathbb{N} | 10 < x \leq 100\}$,
$A = \{x \in \mathbb{N} | 10 < x \leq 100 \text{ e } x = 4k \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\}$,
$B = \{x \in \mathbb{N} | 10 < x \leq 100 \text{ e } x = 9k \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\}$ e
$C = \{x \in \mathbb{N} | 10 < x \leq 100, x \neq 4k, x \neq 9j, \forall k \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}\}$.
Queremos calcular a cardinalidade de C, que é o complemento de $A \cup B$ relativo ao conjunto universal U,

$$C = U - (A \cup B).$$

Logo,

$$n(C) = n(U) - n(A \cup B).$$

Observemos que $n(U) = 100 - 10 = 90$.
Calculamos $n(A \cup B)$ usando o Princípio de Inclusão e Exclusão:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Como $A = \{x \in \mathbb{N} | x = 4k, 10 < 4k \leq 100, \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{N} | \ x = 4k, \frac{10}{4} < k \leq \frac{100}{4}, \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{N} | \ x = 4k, 3 \leq k \leq 25, \text{ para } k \in \mathbb{N}\} = \{4 \times 3, 4 \times 4, \ldots, 4 \times 24, 4 \times 25\}$, resulta $n(A) = 25 - 3 + 1 = 23$.
Analogamente temos que $B = \{x \in \mathbb{N} | \ x = 9k, 10 < 9k \leq 100, \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{N} | \ x = 9k, \frac{10}{9} < k \leq \frac{100}{9}, \text{ com } k \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{N} | \ x = 9k, 2 \leq k \leq 11, \text{ para } k \in \mathbb{N}\} = \{9 \times 2, 9 \times 3, \ldots, 9 \times 10, 9 \times 11\}$.
Portanto, $n(B) = 11 - 2 + 1 = 10$.
Finalmente, $A \cap B = \{x \in \mathbb{N} | \ x = 36k, 10 < 36k \leq 100, \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{N} | \ x = 36k, \frac{10}{36} < k \leq \frac{100}{36}, \text{ com } k \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{N} | \ x = 36k, 1 \leq k \leq 2, \text{ para } k \in \mathbb{N}\} = \{36, 72\}$. Consequentemente, $n(A \cap B) = 2$.
Logo, a quantidade dos números naturais x, tais que $10 < x \leq 100$, que não são divisíveis nem por 4 nem por 9 é dado por $n(C) = n(U) - [n(A) + n(B) - n(A \cap B)] = 90 - (23 + 10 - 2) = 59$.

3. (1.5) Mostre pelo Princípio da Indução Matemática que:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1} n^2 = \frac{(-1)^{n-1} n(n+1)}{2}$$

para todo n natural.

Resposta: Seja $P(n) : 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1} n^2 = \frac{(-1)^{n-1} n(n+1)}{2}$, para $n \in \mathbb{N}$.

Base da indução: Para $n=1$, $\frac{(-1)^{1-1}1(1+1)}{2} = \frac{(-1)^0 \times 2}{2} = 1 = 1^2$.

Logo, $P(1)$ é verdadeira.

Hipótese de indução:

Suponha verdadeiro para k, isto é, $P(k)$ é verdadeiro:

$$P(k): 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{k-1}k^2 = \frac{(-1)^{k-1}k(k+1)}{2}$$

Devemos provar que $P(k+1)$ é verdadeiro, isto é:

$$P(k+1): 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{k}(k+1)^2 = \frac{(-1)^{k}(k+1)(k+2)}{2}$$

Desenvolvendo para $k+1$ e usando a hipótese de indução, temos que:

$$\begin{aligned}
& 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{k-1}k^2 + (-1)^k(k+1)^2 & = \\
= & \underbrace{1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{k-1}k^2}_{(Por\ hipótese\ indutiva)} + (-1)^k(k+1)^2 & = \\
= & \frac{(-1)^{k-1}k(k+1)}{2} + (-1)^k(k+1)^2 & = \\
= & \frac{(-1)^k(-1)^{-1}k(k+1) + 2(-1)^k(k+1)^2}{2} & = \\
= & \frac{(-1)^k(-1)k(k+1) + 2(-1)^k(k+1)^2}{2} & = \\
= & \frac{[(-1)^k(k+1)][(-1)k + 2(k+1)]}{2} & = \\
= & \frac{[(-1)^k(k+1)][-k + 2k + 2]}{2} & = \\
= & \frac{(-1)^k(k+1)(k+2)}{2} &
\end{aligned}$$

Logo, pelo princípio da indução, a expressão é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

4. (2.0) De quantas maneiras é possível arranjar as letras da palavra **INCONSTITUCIONAL** de forma que:

   (a) as vogais fiquem consecutivas e as consoantes também,

   Resposta: A palavra INCONSTITUCIONAL, possui 3 I, 3 N, 2 C, 2 O, 1 S, 2 T, 1 U, 1 A, 1 L. São 7 vogais e 9 consoantes, com as devidas repetições.

   O número de arranjos possíveis de forma que as 7 vogais fiquem consecutivas pode ser feito de $P_7^{3,2,1,1} = \frac{7!}{3!2!}$.

O número de arranjos possíveis de forma que as 9 consoantes fiquem consecutivas pode ser feito de $P_9^{3,2,2,1,1} = \frac{9!}{3!2!2!}$.
Considere as vogais consecutivas como um bloco e as consoantes consecutivas como outro bloco, logo pelo princípio multiplicativo temos $2 \cdot P_7^{3,2,1,1} \cdot P_9^{3,2,2,1,1} = 2 \cdot \frac{7!}{3!2!} \cdot \frac{9!}{3!2!2!}$ maneiras de arranjar as letras da palavra INCONSTITUCIONAL de forma que as vogais fiquem consecutivas e as consoantes também.

(b) não fiquem **I**'s consecutivos e não fiquem **N**'s consecutivos.

Resposta:

Primeiro, contamos o número de maneiras de arranjar os 2 C, 2 O, 1 S, 2 T, 1 U, 1 A, 1 L. Como são 10 letras, podemos fazê-lo de $P_{10}^{2,2,2,1,1,1,1} == \frac{10!}{2!2!2!}$ maneiras.
Depois disso, precisamos arranjar os I's e os N's, garantindo que não fiquem consecutivos. As três alternativas seguintes cobrem todos os casos:

(i) colocar os 3 I's e depois os 3 N's.
Temos 11 espaços para colocarmos os 3 I's, temos $C_{11}^3 = \frac{11!}{3!8!}$ maneiras de fazer isso. Agora vamos colocar os 3 N's, neste caso temos 13 letras e 14 espaços para colocarmos os 3 N's, temos $C_{14}^3 = \frac{14!}{3!11!}$ maneiras de fazer isso. Logo pelo Princípio multiplicativo, temos $C_{11}^3 \cdot C_{14}^3 = \frac{11!}{3!8!} \cdot \frac{14!}{3!11!}$ maneiras.

(ii) colocar INI (como um bloco), I e depois N,N.
Temos 11 espaços para colocar INI e I, onde a ordem importa. Isso pode ser feito de $A(11,2) = 11 \cdot 10$ maneiras. Depois temos 13 espaços para colocar 2 N's, o que pode ser feito de $C_{13}^2 = \frac{13!}{2!11!}$ maneiras. Logo pelo Princípio multiplicativo, temos $11 \cdot 10 \cdot \frac{13!}{2!11!}$ maneiras.

(iii) colocar ININI e depois N.
Temos 11 espaços para colocarmos ININI, logo temos $C_{11}^1 = 11$ maneiras de fazer isso. Depois temos 12 espaços para colocar N. Isso pode ser feito de $C_{12}^1 = 12$ maneiras. Pelo Princípio multiplicativo temos 11.12 maneiras.

Finalizando, usando o Princípio multiplicativo e o Princípio aditivo temos $\frac{10!}{2!2!2!} \cdot (\frac{11!}{3!8!} \cdot \frac{14!}{3!11!} + 11 \cdot 10 \cdot \frac{13!}{2!11!} + 11.12)$ maneiras de arranjar as letras da palavra INCONSTITUCIONAL de forma que não fiquem I's consecutivos e não fiquem N's consecutivos.

5. (1.5.) Determine o número de maneiras de selecionar 15 brinquedos

de 4 tipos diferentes, sendo que devem ser selecionados pelo menos 1 brinquedo de cada tipo. Justifique.

Observação: estamos supondo que cada tipo de brinquedo tem um estoque suficiente para que o problema tenha solução.

Resposta: Consideremos as variáveis:

x_1: quantidade de brinquedos do tipo 1

x_2: quantidade de brinquedos do tipo 2

x_3: quantidade de brinquedos do tipo 3

x_4: quantidade de brinquedos do tipo 4

Encontrar o número de maneiras de selecionar 15 brinquedos de 4 tipos diferentes, sendo que devem ser selecionados pelo menos 1 brinquedo de cada tipo é equivalente a resolver a equação:
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$, onde $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 1$

Fazendo as mudanças de variáveis $x_1' = x_1 - 1$, $x_2' = x_2 - 1$, $x_3' = x_3 - 1$, $x_4' = x_4 - 1$, onde $x_1' \geq 0, x_2' \geq 0, x_3' \geq 0$ e $x_4' \geq 0$. Portanto, podemos resolver:

$$x_1' + 1 + x_2' + 1 + x_3' + 1 + x_4' + 1 = 15$$

$$x_1' + x_2' + x_3' + x_4' = 15 - 4 = 11$$

onde $x_1', x_2', x_3', x_4' \geq 0$.

Logo, a resposta é $CR_4^{11} = C_{11+4-1}^{11} = C_{14}^{11} = \frac{14!}{3!11!}$ maneiras de selecionar 15 brinquedos de 4 tipos diferentes, sendo que devem ser selecionados pelo menos 1 brinquedo de cada tipo.

6. (1.5) Quantos números menores do que 10000 podem ser formados com os algarismos $1, 2, 3, 4$ e 5? Justifique.

Resposta: Os números menores que 10000 compreendem os números com 1 algarismo, os números com 2 algarismos, os números com 3 algarismos e os números com 4 algarismos.
Os números com 1 algarismo podem ser formados de $AR(5,1) = 5$ maneiras.
Os números com 2 algarismo podem ser formados de $AR(5,2) = 5^2$ maneiras.
Os números com 3 algarismo podem ser formados de $AR(5,3) = 5^3$ maneiras.
Os números com 4 algarismo podem ser formados de $AR(5,4) = 5^4$ maneiras.

Logo pelo Princípio aditivo temos $5 + 5^2 + 5^3 + 5^4$ números menores do que 10000 que podem ser formados com os algarismos $1, 2, 3, 4$ e 5.