Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD1-2 Segundo semestre de 2019

Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (1.5) Considere todos os números naturais menores do que 1000000.

   (a) Quantos desses números, finalizados em 2, podem ser expressos utilizando os dígitos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9 sem repetição? **Justifique**.

   Resposta: Como a questão considera números naturais menores que 1000000, temos números com até 6 algarismos, ou seja, naturais entre 1 e 999999. Além disso, os números terminam em 2 e possuem algarismos distintos. Para solucioná-la, vamos fixar o algarismo 2 na última posição e vamos considerar, caso a caso, os possíveis números de acordo com a quantidade de algarismos.

   - 1 algarismo: temos 1 único número, apenas o número 2
   - 2 algarismos: para a primeira posição, vamos excluir os algarismos 0 e 2, restando 8 possibilidades. Como o algarismo 2 está fixo na segunda posição, pelo P.M. temos 8 números.
   - 3 algarismos: Novamente, vamos excluir os algarismos 0 e 2, restando 8 possibilidades para a primeira posição. Para a segunda posição, vamos excluir o algarismo utilizado na primeira posição e o 2, restando 8 possibilidades. Pelo P.M., temos $8 \times 8 \times 1 = 8^2 = 64$ números.
   - 4 algarismos: Assim como nos casos anteriores, para a primeira posição temos 8 possibilidades e para a última, apenas uma. Para preencher as posições 2 e 3, temos $A_8^2 = \frac{8!}{6!}$ formas. Pelo P.M., temos $8 \times A_8^2 \times 1 = 8^2 \times 7$ números.
     Seguindo este raciocínio, temos:

- 5 algarismos: Pelo P.M., temos $8 \times A_8^3 \times 1 = 8^2 \times 7 \times 6$ números
- 6 algarismos: Pelo P.M., temos $8 \times A_8^4 \times 1 = 8^2 \times 7 \times 6 \times 5$ números

Como os casos excluem-se mutuamente, pelo P.A., temos: $1 + 8 + 8^2 + (8^2 \times 7) + (8^2 \times 7 \times 6) + (8^2 \times 7 \times 6 \times 5)$ números naturais menores que 1000000 terminados em 2.

(b) Quantos desses números podem ser expressos supondo que só podem ser utilizados os dígitos $0, 5$ e 9, admitindo-se repetições? **Justifique**.

Resposta: Novamente, vamos tratar caso a caso de acordo com a quantidade de dígitos.

- 1 algarismo: temos 2 números, uma vez que o número 0 não pertence ao conjunto dos números naturais.
- 2 algarismos: para a primeira posição, vamos excluir o algarismo 0, restando 2 possibilidades. Para a última posição, não temos restrições, e, portanto, temos 3 possibilidades. Pelo P.M., temos $2 \times 3 = 6$ números.
- 3 algarismos: Novamente, vamos excluir o algarismo 0, restando 2 possibilidades para a primeira posição. Para a segunda e terceira posições, não temos restrições. Assim, temos $AR_3^2 = 3^2$ formas distintas. Logo, pelo P.M., temos $2 \times AR_3^2 = 2 \times 3^2 = 18$ números.
  Seguindo este raciocínio temos:
- 4 algarismos: Pelo P.M. temos $2 \times AR_3^3 = 2 \times 3^3$ números.
- 5 algarismos: Pelo P.M. temos $2 \times AR_3^4 = 2 \times 3^4$ números
- 6 algarismos: Pelo P.M. temos $2 \times AR_3^5 = 2 \times 3^5$ números

Como os casos excluem-se mutuamente, pelo P.A., temos: $2 + (2 \times 3) + (2\times 3^2) + (2 \times 3^3) + (2 \times 3^4) + (2 \times 3^5)$ números naturais menores que 1000000 utilizando os dígitos 0, 5 e 9.

2. (2.0) De quantas formas é possível arrumar as letras da palavra **INCONSTITUCIONAL**, de forma que:

(a) as vogais fiquem consecutivas e as consoantes também. **Justifique**.

Resposta: A palavra **INCONSTITUCIONAL** possui 3 Is,3 Ns, 2Cs, 2 Os, 1S, 2 Ts, 1 U, 1 A e 1L, totalizando 16 letras, das quais 7 são vogais e 9 são consoantes. Para garantirmos que as vogais estarão sempre juntas e as consoantes estarão sempre juntas, vamos permutar vogais e consoantes separadamente e, posteriormente, vamos considerar que todas as vogais são uma única letra e todas as consoantes são uma única letra, permutando-as.

- Permutação das vogais: Temos 7 vogais, das quais 3 Is, 2 Os, 1 U e 1 A. Assim, temos $P_7^{3,2,1,1} = \frac{7!}{3!2!}$ formas distintas de permutá-las.
- Permutação das consoantes: Temos 9 consoantes, das quais 3 Ns, 2 Cs, 1 S, 2 Ts e 1 L. Assim, temos $P_9^{3,2,1,2,1} = \frac{9!}{3!2!2!}$ formas distintas de permutá-las.

Por fim, considerando cada conjunto (de vogais e consoantes) como uma única letra, vamos permutá-las. Para tal, temos 2! formas. Pelo P.M., temos $P_7^{3,2,1,1} \times P_9^{3,2,1,2,1} \times 2! = \frac{7!}{3!2!} \times \frac{9!}{3!2!2!} \times 2$ anagramas distintos de acordo com as especificações da questão.

(b) duas letras **I** nunca fiquem juntas. **Justifique**.

Resposta: Vamos assegurar que as letras I vão sempre estar separadas posicionando as demais letras e, em seguida, posicionando cada I nos espaços entre outras letras já posicionadas. Assim, temos $P_{13}^{3,2,2,1,2,1,1,1} = \frac{13!}{3!2!2!2!}$ formas distintas de posicionar as letras menos os Is. Observem que temos 14 espaços para posicionar 3 letras I. Vamos, portanto, escolher 3 dos 14 espaços. Temos $C_{14}^3 = \frac{14!}{9!3!}$. Portanto, pelo P.M., temos $P_{13}^{3,2,2,1,2,1,1,1} \times C_{14}^3 = \frac{13!}{3!2!2!2!} \times \frac{14!}{9!3!}$ anagramas onde duas letras I nunca fiquem juntas.

3. (1.5) Calcule de quantas maneiras diferentes podemos dispor 49 livros distintos em 7 prateleiras de uma biblioteca, supondo que cada prateleira suporte até 49 livros e nenhuma fique vazia. **Justifique**.

Resposta: Inicialmente, vamos considerar que os livros são iguais e posicioná-los nas prateleiras satisfazendo as restrições. Em seguida, vamos permutá-los, pois a questão versa de livros DISTINTOS. Seja x_i a quantidade de livros na prateleira i, $x_i \geq 1$. Queremos determinar o número de soluções inteiras e positivas da seguinte equação: $\sum_{i=1}^{7} x_i = 49$. Vamos, portanto, reescrever as variáveis x_i em função de variáveis não-negativas, para então podermos utilizar o conceito de combinação com repetição para solucionar a questão. Considerem que $x_i = y_i + 1, i = 1, 2, \ldots, 7$. Note que $y_i \geq 0, \forall i \in \{1, \ldots 7\}$. Assim,

$$\sum_{i=1}^{7} x_i = 49$$

$$\sum_{i=1}^{7} (y_i + 1) = 49$$

$$\sum_{i=1}^{7} y_i = 42$$

Daí, temos $CR_7^{42} = C_{48}^{42} = \frac{48!}{6!42!}$ maneiras de posicionar 49 livros idênticos em 7 prateleiras de modo que cada prateleira tenha pelo menos 1 livro. Entretanto, os livros são distintos. Assim, vamos permutá-los para obter a solução final. Logo, pelo P.M., temos $CR_7^{42} \times 49! = C_{48}^{42} \times 49! = \frac{48!}{6!42!} \times 49!$ formas de posicionar 49 livros distintos em 7 prateleiras com pelo menos um livro em cada prateleira.