Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP3 - Segundo Semestre de 2016

1. (1,3) Mostre usando indução matemática que:

$$2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \cdots + n.2^n = (n-1)2^{n+1}$$

para todo número natural n, $n \geq 2$.

Resposta: Seja $P(n) : 2.2^2 + 3.2^3 + \cdots + n.2^n = (n-1).2^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

BASE DA INDUÇÃO: Devemos provar que $P(2) : 2.2^2 = (2-1).2^{2+1}$ é verdadeira. De fato, como $2.2^2 = 8$ e $(2-1).2^{2+1} = 1.2^3 = 8$, temos que $P(2)$ é verdadeira.

HIPÓTESE DA INDUÇÃO: Suponha que $P(k) : 2.2^2 + 3.2^3 + \cdots + k.2^k = (k-1).2^{k+1}$ seja verdadeira para $k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$.

PASSO INDUTIVO: Vamos provar que se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1) : 2.2^2 + 3.2^3 + \cdots + (k+1).2^{k+1} = k.2^{k+2}$ também é verdadeira: Desenvolvendo o primeiro membro de $P(k+1)$, temos

$$\underbrace{2.2^2 + 3.2^3 + \cdots + k.2^k}_{\text{H.I.}} + (k+1).2^{k+1} =$$

$$(k-1).2^{k+1} + (k+1).2^{k+1} =$$

$$2^{k+1}.(k-1+k+1) =$$
$$2^{k+1}.2k =$$
$$2^{k+2}.k$$

Portanto $P(k+1)$ é verdadeira.
Logo, pelo Princípio de Indução Matemática temos que $P(n) : 2.2^2 + 3.2^3 + \cdots + n.2^n = (n-1).2^{n+1}$ é verdadeira para todo número natural $n \geq 2$.

2. (1,2) Em uma sala de aula com 30 pessoas há 17 homens e 13 mulheres. Quantas comissões de 6 pessoas tem pelo menos 2 mulheres? Justifique.

Resposta: Queremos escolher 6 pessoas, incluindo pelo menos 2 mulheres, em um grupo de 17 homens e 13 mulheres. Vamos resolver este problema subtraindo do número total de escolhas possíveis de 6 pessoas sem restrições, aquelas nas quais NÃO temos pelo menos 2 mulheres, ou seja, aquelas em que temos zero ou uma mulher.

Total de escolhas de 6 pessoas (sem restrições):

Como estamos falando em escolher pessoas, não devemos considerar a ordem de tais escolhas, já que, escolher primeiro Márcio e depois João é o mesmo que escolher João e depois Márcio, por exemplo. Então, denotando por E o número de escolhas de 6 pessoas que é possível fazer a partir de um grupo com 30 pessoas, temos:

$$E = C_{30}^{6} = \frac{30!}{24!6!}$$

Escolhas de 6 pessoas que NÃO incluem mulheres:

Nesse caso, como não podemos escolher mulheres, nossas escolhas serão restritas ao grupo de 17 homens. Assim, denotando por E_h o número de escolhas de 6 homens que é possível fazer, temos:

$$E_h = C_{17}^{6} = \frac{17!}{11!6!}$$

Escolhas de 6 pessoas dentre as quais apenas 1 é mulher:

Primeiramente, temos que escolher uma dentre as 13 mulheres. Para tal, temos $C_{13}^{1} = \frac{13!}{12!1!}$ escolhas possíveis. Em seguida, temos que escolher 17 homens para ocupar as 5 posições restantes. Podemos fazer isto de $C_{17}^{5} = \frac{17!}{12!5!}$ formas. Então, denotando por E_{1m} o número de escolhas possíveis de 6 pessoas sendo que uma delas é necessariamente mulher, temos, pelo princípio multiplicativo que:

$$E_{1m} = \frac{13!}{12!1!} \times \frac{17!}{12!5!}$$

Denotando por E' número de formas de escolher 6 pessoas incluindo pelo menos 2 mulheres, em um grupo de 17 homens e 13 mulheres e utilizando o princípio aditivo temos:

$$E' = E - (E_h + E_{1m}) = \frac{30!}{24!6!} - \frac{17!}{11!6!} - \frac{13!}{12!1!} \times \frac{17!}{12!5!}$$

Portanto, podemos escolher 6 pessoas, incluindo duas mulheres, dentre 17 homens e 13 mulheres de $\frac{30!}{24!6!} - \frac{17!}{11!6!} - \frac{13!}{12!1!} \times \frac{17!}{12!5!}$ formas.

3. (1,5) De quantas formas é possível arranjar as letras da palavra

I R R E D U T I B I L I D A D E

de forma que as vogais fiquem consecutivas e as consonantes também? Justifique.

Resposta: Inicialmente vamos determinar o número de vogais e consoantes da palavra a fim de facilitar nossos cálculos. A palavra **I R R E D U T I B I L I D A D E** tem 8 vogais, a saber: 1A, 2 E, 4 I e 1 U, e as seguintes 8 consoantes: 3D, 2R, 1L, 1T e 1B, totalizando 16 letras.

Neste caso, vamos utilizar o seguinte raciocínio:

Uniremos todas as vogais em um único bloco e o consideraremos uma única letra. Neste bloco, as 8 vogais podem ser arrumadas de $P_8^{4,2,1,1}$ formas.

Agora, vamos permutar as 8 consoantes em um único bloco também. Neste bloco, as 8 consoantes podem ser arrumadas de $P_8^{3,2,1,1,1}$ formas de posicionar estas 8 letras.

Como podemos ter o bloco de consoantes no início do anagrama e depois o bloco de vogais, e vice-versa, temos $P_2 = 2!$ maneiras.

Portanto, o número de anagramas da palavra **I R R E D U T I B I L I D A D E** de forma que as vogais fiquem consecutivas e as consonantes também é:

$$P_8^{4,2,1,1} \times P_8^{3,2,1,1,1} \times P_2 = \frac{8!}{4!2!1!1!} \times \frac{8!}{3!2!1!1!1!} \times 2! = \frac{8!8!}{4!2!3!}$$

4. (1,0) Quantas são as soluções inteiras *não negativas* (≥ 0) de:

$$x + y + z + w < 15?$$

Justifique.

Resposta: Utilizando o conceito de combinação com repetições, solucionamos qualquer **equação** de variáveis inteiras não negativas. Neste caso, temos uma **inequação** de variáveis inteiras e não negativas, o que não nos possibilita solução imediata. A inequação original é equivalente a encontrar as soluções inteiras não negativas da desigualdade $x + y + z + w \leq 14$. Desta forma, para solucionarmos tal inequação original vamos reescrevê-la como uma equação equivalente. Assim, considere uma nova variável, $f \geq 0$, denominada variável de folga e a equação (II) abaixo:

$$x + y + z + w + f = 14 \qquad (II)$$

Note que, se $f = 0$, temos a equação $x+y+z+w = 14$. Se $f = 1$, temos a equação $x + y + z + w = 13$ e assim sucessivamente. Então podemos afirmar que a equação (II) é equivalente à inequação em questão. Portanto, o número de soluções inteiras não negativas para (II) é, justamente, o número de soluções inteiras e não negativas da inequação. Logo, temos: $CR_5^{14} = C_{14+5-1}^{14} = C_{18}^{14} = \frac{18!}{14!4!} = 3060$ soluções inteiras não negativas para a inequação.

5. (1,0) Calcule o termo independente no desenvolvimento do binômio de Newton de:

$$(3x^2 - \frac{7}{x})^{105}$$

Justifique sua resposta.

Resposta: Como $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b^k a^{n-k}$ temos que o termo geral desta soma corresponde a

$$T_{k+1} = C_n^k b^k a^{n-k}$$

O objetivo da questão é determinar o termo independente, isto é, o coeficiente de x^0, portanto devemos encontrar o termo que contém tal coeficiente. Para isso, precisamos determinar k.

Neste caso temos $n = 105$, $a = 3x^2$ e $b = -\frac{7}{x}$. Assim, resulta:

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= C_{105}^k \left(-\tfrac{7}{x}\right)^k (3x^2)^{105-k} \\ &= C_{105}^k (-1)^k \tfrac{7^k}{x^k}\, 3^{105-k} x^{210-2k} \\ &= C_{105}^k (-1)^k\, 7^k\, x^{-k}\, 3^{105-k}\, x^{210-2k} \\ &= C_{105}^k\, (-1)^k\, 7^k\, 3^{105-k}\, x^{-k+210-2k} \\ &= C_{105}^k\, (-1)^k\, 7^k\, 3^{105-k}\, x^{210-3k} \end{aligned}$$

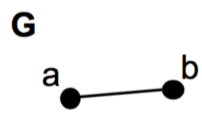
Como queremos encontrar o coeficiente de x^0, deve ser $210 - 3k = 0$. Então $k = \frac{210}{3} = 70$. Logo o coeficiente de x^0 é dado por:

$$C_{105}^{70}\, (-1)^{70}\, 7^{70}\, 3^{105-70} = C_{105}^{70}\, (-1)^{70}\, 7^{70}\, 3^{35} = \frac{105!}{70!35!}\, 7^{70}\, 3^{35}.$$

6. (4,0) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for falsa, dê um contra-exemplo e a sua justificativa. Se for verdadeira, prove.

   (a) Se T é uma árvore então os seus vértices que são folhas não pertencem ao seu centro.

   Resposta: FALSO. O grafo abaixo é uma árvore e possui o centro do grafo $C = \{a, b\}$, e que são folhas.



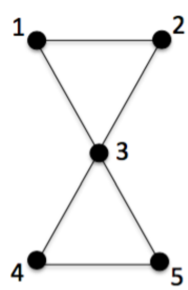
Observação: Vale a pena mencionar que a afirmação é válida caso $|V(T)| \geq 3$.

(b) Cada coluna de uma matriz de incidência de um grafo G (simples) tem exatamente dois 1's.

Resposta: VERDADEIRO. Cada coluna j na matriz de incidência $B = B(i,j)$ corresponde a uma aresta $e_j = (v_i, v_k)$ e logo possui exatamente dois 1's correspondentes as entradas $B(i,j)$ e $B(k,j)$.

(c) Todo grafo euleriano é hamiltoniano.

Resposta: FALSO. Considere o grafo a seguir:



Sabemos que um grafo G é euleriano se ele admite um circuito euleriano, isto é, um circuito que passe por todas as arestas exatamente uma vez. E além disso, temos a seguinte caracterização para os grafos eulerianos: Um grafo é euleriano se e somente se o grau de todos os seus vértices é par.

Temos no grafo G que $d(1) = d(2) = d(4) = d(5) = 2$ e $d(3) = 4$, isto é, todos os vértices possuem grau par, satisfazendo a caracterização de grafos eulerianos. Podemos verificar, também, que G admite o seguinte circuito euleriano: 1234531.

O grafo G não possui ciclo hamiltoniano, pois caso existisse, esse ciclo deveria conter todos os vértices de G uma única vez. Para formarmos um ciclo que contemple todos os vértices, teremos de passar mais de uma vez pelo vértice 3, logo, G não admite ciclo hamiltoniano, e por consequência G não é hamiltoniano.

Desta forma, o grafo G é euleiriano e não é hamiltoniano.

(d) Se G é um grafo conexo planar, regular de grau 3 e possui 12 vértices então G tem exatamente 8 faces.

Resposta: VERDADEIRO. Como $d_G(v) = 3$, $\forall v \in V(G)$ e $n = 12$, temos que $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2m \Rightarrow 3 \times 12 = 2m \Rightarrow \boxed{\text{m=18}}$.

Seja f o número de faces de G. Como G é conexo, planar e regular de grau 3, a fórmula de Euler nos diz que $n - m + f = 2$. Como $n = 12$ e $m = 18$, então $f = m - n + 2 \Rightarrow f = 18 - 12 + 2 \Rightarrow \boxed{\text{f = 8}}$.

(e) Se D é um digrafo fracamente conexo e possui um vértice v que é fonte, então esse vértice v alcança todos os outros vértices de D.

Resposta: FALSO, pois a figura abaixo ilustra um digrafo fracamente conexo (seu grafo subjacente é conexo) e possui o vértice a que é fonte ($d^-(a) = 0$) e tal vértice não alcança o vértice c.