Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP2 - Primeiro Semestre de 2010

Questões:

1. (1.5) Determine o coeficiente de x^{10} no desenvolvimento de $(2x^3 - \frac{5}{x^7})^{50}$. Justifique a resposta.

   Resposta: Temos $a = 2x^3$ e $b = -\frac{5}{x^7}$.

   Logo, para $0 \leq k \leq 50$ temos:

$$\begin{array}{rcll} T_{k+1} & = & C_{50}^k a^{n-k} b^k & = \\ & = & C_{50}^k \left(2x^3\right)^{50-k} \left(-\frac{5}{x^7}\right)^k & = \\ & = & C_{50}^k \; 2^{50-k} x^{150-3k} \frac{(-1)^k 5^k}{x^{7k}} & = \\ & = & C_{50}^k \; 2^{50-k} (-1)^k 5^k x^{150-3k-7k} & = \\ & = & C_{50}^k \; 2^{50-k} (-1)^k 5^k x^{150-10k} & \end{array}$$

   Devemos determinar o coeficiente de x^{10}.
   Portanto, deve ser $150 - 10k = 10 \Rightarrow 10k = 140 \Rightarrow \boxed{\text{k = 14}}$.

   Logo, o coeficiente de x^{10} no desenvolvimento de $(2x^3 - \frac{5}{x^7})^{50}$ é: $C_{50}^{14} \; 2^{50-14}(-1)^{14} 5^{14} = 2^{36} 5^{14} \frac{50!}{14!36!}$.

2. (1.5) Usando o Teorema das Colunas mostre que:

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$$

   Resposta:

$$\begin{array}{rcll} \sum_{k=1}^{n} 2k & = & \sum_{k=1}^{n} 2k \frac{(k-1)!}{(k-1)!} & = \\ & = & 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{1!(k-1)!} & = \end{array}$$

$$
\begin{array}{ccc}
= & 2\sum_{k=1}^{n} C_k^1 & = \\
= & 2\underbrace{\left(C_1^1 + C_2^1 + \ldots + C_n^1\right)}_{\textit{Pelo teorema das colunas, quando } r=1} & = \\
= & 2C_{n+1}^2 & = \\
= & 2\frac{(n+1)!}{2!(n+1-2)!} & = \\
= & 2\frac{(n+1)!}{2(n-1)!} & = \\
= & \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} & = \\
= & n(n+1) &
\end{array}
$$

3. (1.5) Encontre a fórmula fechada da relação de recorrência:
   $a_n = a_{n-1} + 4n$ para todo $n \geq 1$, n natural.
   $a_0 = 1$
   Justifique.

   Resposta:

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + 4n \\
&= [a_{n-2} + 4(n-1)] + 4n \\
&= a_{n-2} + 4[(n-1) + n] \\
&= [a_{n-3} + 4(n-2)] + 4[(n-1) + n] \\
&= a_{n-3} + 4[(n-2) + (n-1) + n] \\
&\vdots \\
&= a_{n-i} + 4[(n-(i-1)) + (n-(i-2)) + \ldots + n]
\end{aligned}
$$

   Logo, tomando $i = n$,

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_0 + 4[1 + 2 + \ldots + n] \\
&= a_0 + 4\frac{n(n+1)}{2} \\
&= 1 + 2n(n+1)
\end{aligned}
$$

   Portanto $a_n = 1 + 2n(n+1)$.

4. (1.5) Mostre que não existe grafo com 9 vértices que seja regular de grau 3.

   Resposta: Temos que em qualquer grafo G, a soma dos graus de todos os vértices é igual a duas vezes o número de arestas, isto é,

$$
\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|,
$$

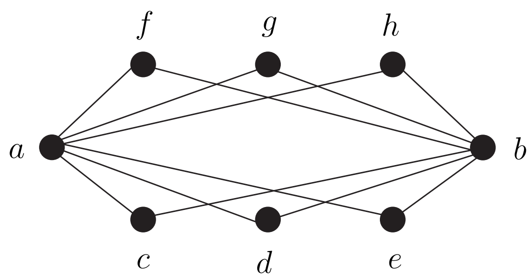
ou seja, a soma dos graus de todos os vértices é necessariamente um número par.

Suponha que existe um grafo regular de grau 3 com 9 vértices. Temos então que $d(v) = 3$, $\forall v \in V(G)$. Logo:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)| = 3 \times 9 = 27 \ \textit{que é um número ímpar. Absurdo!}$$

Logo este grafo regular não existe.

5. (4.0) Responda as seguintes perguntas considerando o grafo G abaixo. Justifique cada resposta.



(a) G é bipartido? Caso seja, dê a sua bipartição.

Resposta: Sim, pois G não possui ciclos ímpares (caracterização dos grafos bipartidos).

G pode ser particionado em 2 conjuntos independentes A e B tal que $A = \{a, b\}$ e $B = \{c, d, e, f, g, h\}$.

(b) Determine o diâmetro de G e o centro de G.

Resposta: A excentricidade de um vértice v de G, $e(v)$, é o valor da maior distância de v aos outros vértices de G, isto é, $e(v) = max_{w \in V(G)}\{d(v, w)\}$. O diâmetro de um grafo G é o valor da maior excentricidade, isto é, $diam(G) = max_{v \in (G)}\{e(G)\}$.

Temos então que $e(a) = e(b) = e(c) = e(d) = e(e) = e(f) = e(g) = e(h) = 2$.

Logo, $diam(G) = 2$.

E, o centro de um grafo G é o conjunto dos vértices de G que tem a menor excentricidade, isto é, $c(G) = \{v \in V(G) \backslash e(v)$ é mínima$\}$.

Então, $c(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\} = V(G)$.

(c) G é euleriano?

Resposta: Sim. Sabemos que um grafo G é euleriano se ele admite um circuito euleriano, isto é, um circuito que passe por todas as arestas exatamente uma vez. E além disso, temos a seguinte caracterização para os grafos eulerianos: Um grafo é euleriano se e somente se o grau de todos os seus vértices é par.

Temos no grafo G que $d(a) = d(b) = 6$ e $d(c) = d(d) = d(e) = d(f) = d(g) = d(h) = 2$, isto é, todos os vértices possuem grau par, satisfazendo a caracterização de grafos eulerianos. Podemos verificar, também, que G admite o seguinte circuito euleriano: $a, c, b, f, a, d, b, g, a, e, b, h, a$.

(d) G é planar?

Resposta: Sim, pois G possui a seguinte representação plana:

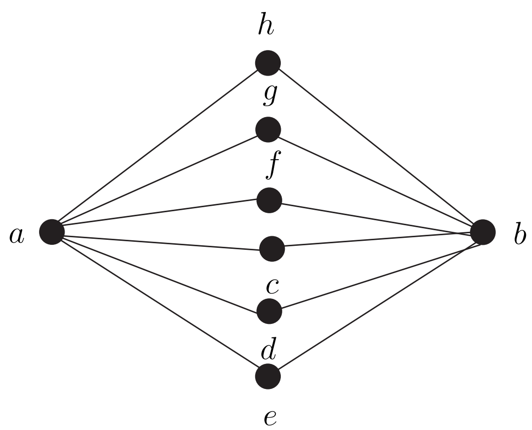


Figura 1: Representação plana de G