Gabarito da AD1 - Fundamentos de Algoritmos para Computação - 2009/01

1. (1.0) Dado o conjunto A e o conjunto $P(A)$ das partes de A, verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

   (a) $\{\emptyset\} \subset P(A)$
   Resposta: Verdadeiro. O conjunto vazio é um elemento do conjunto $P(A)$, portanto o conjunto unitário que contém o conjunto vazio como elemento, está contido em $P(A)$.

   (b) $\emptyset \subset P(A)$
   Resposta: Verdadeiro. O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.

2. (1.5) Considere os conjuntos:

$$A = \{n |\text{ existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } -3 < k < 4, n = 2k\}$$
$$B = \{x | x \geq 0, x = 2k + 1 \text{ para algum } k \in A\}$$
$$C = \{1, 2, 3, 4\}$$

   (a) Determine explicitamente os conjuntos A e B. Justifique.
   Resposta:

   - Determinando o conjunto A:
     Como $-3 < k < 4$ e $k \in \mathbb{Z}$, temos que $k = -2, -1, 0, 1, 2, 3$.
     Logo calculando cada elemento do conjunto
     $A = \{2(-2), 2(-1), 2 \cdot 0, 2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3\}$, temos
     $$A = \{-4, -2, 0, 2, 4, 6\}$$
   - Determinando o conjunto B:
     Estamos procurando os números do tipo $x = 2k + 1$, onde $k \in A$. São elementos de $A = \{-4, -2, 0, 2, 4, 6\}$.
     Logo, os números são: $x = 2(-4) + 1 = -7$, $x = 2(-2) + 1 = -3$, $x = 2 \cdot 0 + 1 = 1$, $x = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, $x = 2 \cdot 4 + 1 = 9$ e $x = 2 \cdot 6 + 1 = 13$.
     Mas o conjunto B exige que $x \geq 0$.
     Portanto, $B = \{1, 5, 9, 13\}$.

   (b) Calcule o número de elementos de $A \cup B \cup C$, usando o Princípio da Inclusão e Exclusão. Justifique.
   Resposta: Princípio da inclusão e exclusão:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

   Sendo assim, $n(A) = 6$, $n(B) = 4$, $n(C) = 4$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \{2, 4\}$, $B \cap C = \{1\}$ e $A \cap B \cap C = \emptyset$. Logo, $n(A \cap B) = 0$, $n(A \cap C) = 2$, $n(B \cap C) = 1$ e $n(A \cap B \cap C) = 0$.
   Portanto,
$$n(A \cup B \cup C) = 6 + 4 + 4 - 0 - 2 - 1 + 0 = 11$$

3. (1.5) Mostre pelo Princípio da Indução Matemática que:

$$2^{2n} - 1 \text{ é múltiplo de } 3, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Resposta:

Seja $P(n) : 2^{2n} - 1,\ n \in \mathbb{N}$ é múltiplo de 3, ou seja, $2^{2n} - 1 = 3m,\ m \in \mathbb{N}$

Base da indução:

Para $n = 1$, tem-se

$$2^{2\cdot 1} - 1 = 4 - 1 = 3 = 3 \cdot 1$$

Logo $P(1)$ é verdadeira.

Hipótese de Indução:

Suponha verdadeiro para $k \geq 0$, isto é, $P(k)$ é verdadeira:

$$P(k) : 2^{2k} - 1 = 3m$$

para algum $m \in \mathbb{N}$.

Passo da Indução:

Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeiro então $P(k+1)$ é verdadeiro, isto é, temos que provar que: $P(k+1) : 2^{2\cdot(k+1)} - 1$ é múltiplo de 3.

Da hipótese de indução, temos que $2^{2k} - 1 = 3m$ ou, equivalentemente, $2^{2k} = 3m + 1$ para algum $m \in \mathbb{N}$

Portanto, $2^{2\cdot(k+1)} - 1 = 2^{2k+2} - 1 = 2^{2k} \cdot 2^2 - 1 = 4 \cdot \underbrace{2^{2k}}_{HI} - 1 = 4(3m+1) - 1 = 12m + 4 - 1 = 12m + 3 = 3\underbrace{(4m+1)}$ que é múltiplo de 3.

O que mostra que a afirmação

$$2^{2n} - 1 \text{ é múltiplo de } 3$$

é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. (1.5) Quantos são os anagramas da palavra CASTELO, em que as vogais aparecem em ordem alfabética. Justifique.

Resposta: Olhamos somente as consoantes. Temos 7 lugares para colocar em qualquer posição, as 4 consoantes. Isso pode ser feito de

$$A(7,4) = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!}.$$

Para cada arranjo, nos 3 lugares que sobraram temos uma única maneira de colocar as vogais na ordem alfabética, A E O. Logo, pelo princípio multiplicativo temos que o número de anagramas da palavra CASTELO onde as vogais aparecem em ordem alfabética é

$$A(7,4) \cdot 1 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840.$$

5. (1.5) De quantas maneiras podemos distribuir 18 objetos distintos, em três grupos de 6 objetos? Justifique.

   Resposta: Para distribuir 18 objetos distintos em 3 grupos de 6 objetos, primeiro escolhemos 6 objetos entre os 18. Isso pode ser feito de C_{18}^6 maneiras diferentes. Nos restam 12 objetos distintos para formar o segundo grupo, logo temos C_{12}^6. Para formar o último grupo, temos 6 objetos, logo C_6^6. Pelo princípio multiplicativo, temos: $C_{18}^6 \cdot C_{12}^6 \cdot C_6^6$.

   Mas, como os grupos têm a mesma quantidade de elementos, temos que descontar as permutações entre os 3 grupos que produzam formações iguais.

   Portanto, temos
$$\frac{C_{18}^6 \cdot C_{12}^6 \cdot C_6^6}{P_3} = \frac{18!12!6!}{6!12!6!6!6!3!} = \frac{18!}{6!6!6!3!}$$

6. (1.5) Quantos números de 7 dígitos maiores do que 3000000 podem ser formados usando apenas os algarismos 1, 3, 5, 5, 7, 7, 7. Justifique.

   Resposta: Para que os números sejam maiores que 3000000, basta que na primeira posição tenhamos os digitos: 3, 5 ou 7.

   Números começados por 3:
$$P_6^{1,1,2,3} = \frac{6!}{2!3!} = 60$$
   Números começados por 5:
$$P_6^{1,1,1,3} = \frac{6!}{3!} = 120$$
   Números começados por 7:
$$P_6^{1,1,2,2} = \frac{6!}{2!2!} = 180$$

   Portanto, pelo princípio aditivo, existem $60 + 120 + 180 = 360$ números maiores que 3000000, formados com os algarismos 1, 3, 5, 5, 7, 7, 7.

7. (1,5) Sejam 10 caixas de madeira, exatamente iguais. Queremos pintar cada uma delas com uma cor, dentre quatro cores disponíveis: azul, amarelo, verde e vermelho. De quantos modos podemos pintar as caixas, sabendo que pelo menos uma das caixas deve ser pintada de azul? Justifique.

   Resposta:

   Podemos pintar
   x_1 quantidades de caixa na cor azul
   x_2 quantidades de caixa na cor amarelo
   x_3 quantidades de caixa na cor verde
   x_4 quantidades de caixa na cor vermelho

   Este problema é equivalente a encontrar as soluções inteiras não negativas da equação:
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$
   onde $x_2, x_3, x_4 \geq 0$ e $x_1 \geq 1$.

Fazendo a mudança de variável $x_1' = x_1 - 1$, temos que se $x_1 \geq 1$, $x_1' \geq 0$. Portanto, podemos resolver:

$$x_1' + 1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

$$x_1' + x_2 + x_3 + x_4 = 9$$

onde $x_1', x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

Logo, a resposta é $CR_4^9 = C_{9+4-1}^9 = C_{12}^9 = \frac{12!}{3!9!} = 220$

Isto é, podemos pintar as 10 caixas nas cores azul, amarelo, verde e vermelho, de forma que uma caixas seja pintada de azul de 220 maneiras.