Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP2 - Segundo Semestre de 2011

Questões:

1. (1.0) Usando o Teorema das Colunas calcule a seguinte soma:

$$C_{32}^{30} + C_{33}^{30} + C_{33}^{30} + \cdots + C_{40}^{30}$$

Resposta:

$$\begin{array}{lcr}
 & C_{32}^{30} + C_{33}^{30} + C_{33}^{30} + \cdots + C_{40}^{30} & = \\
= & [C_{32}^{30} + C_{33}^{30} + C_{34}^{30} + \cdots + C_{40}^{30}] + [C_{30}^{30} - C_{30}^{30}] + [C_{31}^{30} - C_{31}^{30}] & \\
= & \underbrace{C_{30}^{30} + C_{31}^{30} + C_{32}^{30} + \cdots + C_{40}^{30}}_{Teorema\ das\ colunas,\ quando\ r=30} - C_{30}^{30} - C_{31}^{30} & = \\
= & C_{41}^{31} - C_{30}^{30} - C_{31}^{30} & = \\
= & \frac{41!}{31!10!} - \frac{30!}{30!0!} - \frac{31!}{30!1!} & = \\
= & \frac{41!}{31!10!} - 1 - 31 & = \\
= & \frac{41!}{31!10!} - 32 &
\end{array}$$

2. (1.5) Determine o coeficiente de x^{11} no desenvolvimento de $(\frac{3}{x^2} - 2x^3)^{52}$. Justifique a resposta.

Resposta: Como $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b^k a^{n-k}$ temos que o termo geral desta soma corresponde a

$$T_{k+1} = C_n^k b^k a^{n-k}$$

O objetivo da questão é determinar o coeficiente de x^{11}, portanto devemos encontrar o termo que contém tal coeficiente. Para isso, precisamos determinar k.

Neste caso temos $n = 52$, $a = \frac{3}{x^2}$ e $b = -2x^3$. Assim, resulta:

$$\begin{aligned}
T_{k+1} &= C_{52}^{k}(-2x^3)^k \left(\tfrac{3}{x^2}\right)^{52-k} \\
&= C_{52}^{k}(-1)^k\, 2^k\, x^{3k}\, (3x^{-2})^{52-k} \\
&= C_{52}^{k}(-1)^k\, 2^k\, x^{3k}\, 3^{52-k} x^{-104+2k} \\
&= C_{52}^{k}(-1)^k\, 2^k\, 3^{52-k}\, x^{3k}\, x^{-104+2k} \\
&= C_{52}^{k}(-1)^k\, 2^k\, 3^{52-k}\, (x)^{3k-104+2k} \\
&= C_{52}^{k}(-1)^k\, 2^k\, 3^{52-k}\, (x)^{5k-104}
\end{aligned}$$

Como queremos encontrar o coeficiente de x^{11}, deve ser $5k - 104 = 11$. Então $k = \frac{104+11}{5} = \frac{115}{5} = 23$. Logo o coeficiente de x^{11} é dado por:

$$C_{52}^{23}\,(-1)^{23}\;2^{23}\;3^{52-23} = -C_{52}^{23}\;2^{23}\;3^{29} = -2^{23}\;3^{29}\frac{52!}{23!29!}.$$

3. (1.5) Encontre a fórmula fechada da relação de recorrência:
$a_n = a_{n-1} + 2^n \qquad n$ natural, $n \geq 1$
$a_0 = 2$
Descreva o processo utilizado para chegar à fórmula.

Resposta:

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + 2^n \\
&= a_{n-2} + 2^{n-1} + 2^n \\
&= a_{n-3} + 2^{n-2} + 2^{n-1} + 2^n \\
&\vdots \\
&= a_{n-i} + 2^{n-i} + \ldots + 2^{n-1} + 2^n \\
&= a_{n-i} + \textstyle\sum_{k=0}^{i} 2^{n-k}
\end{aligned}$$

Quando $n - i = 0$ temos $n = i$ e

$$a_n = a_0 + \textstyle\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}$$

Mas $\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} = 2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2^2 + 2^0$ é a soma finita de uma progressão geométrica de razão 2. Então, aplicando a fórmula da soma de uma progressão geométrica, temos:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} = \frac{1(2^{n+1} - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$$

Como $a_0 = 2$, resulta

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + 2^{n+1} - 1 \\ &= 1 + 2^{n+1} \end{aligned}$$

Logo, a fórmula fechada para a relação de recorrência é $a_n = 1 + 2^{n+1}$.

4. (1.5) Seja G um grafo 6-regular e tal que $|V(G)| = 12$. Mostre que G não é planar.

Resposta: Sejam G um grafo 6-regular e $|V(G)| = 12$.

Temos que em qualquer grafo G, a soma dos graus de todos os vértices é igual a duas vezes o número de arestas, isto é,

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|.$$

Como $d(v) = 6$ para todo vértice v de G e G tem 12 vértices então:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 6 \times 12 = 2|E(G)|.$$

Logo $|E(G)| = 36$.

Suponhamos, por contradição, que G é um grafo planar.

Pelo corolário 1 da aula 22, temos que se G é um grafo planar, com $|V(G)| \geq 3$ então $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$.

Temos:

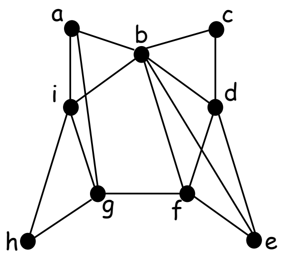
$$|E(G)| = 36 > 3|V(G)| - 6 = 36 - 6 = 30. \textit{ Contradicão}!!!$$

Logo, o grafo G não é planar.

5. (1.0) Seja T uma árvore com 30 arestas. Quantos vértices tem T? Justifique.

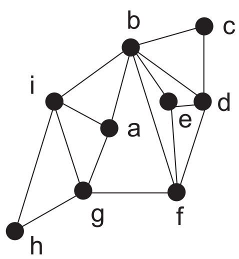
   Resposta: Seja T uma árvore com 30 arestas. Como uma T é árvore, sabemos (por teorema) que $|E(T)| = |V(T)| - 1$, ou seja $|V(T)| = |E(T)| + 1 = 30 + 1 = 31$. Logo G tem 31 vértices.

6. (3.5)) As seguintes perguntas devem ser respondidas considerando o grafo G abaixo:



   (a) G é planar? Justifique.

   Resposta: Sim, pois G possui a seguinte representação plana:



   (b) G é euleriano? Justifique?

   Resposta: Não, pois um grafo G é euleriano se ele admite um circuito euleriano, isto é, um passeio fechado que passe por todas as arestas exatamente uma vez. E além disso, temos a seguinte caracterização para os grafos eulerianos: Um grafo é euleriano se e somente se o grau de todos os seus vértices é par.

Temos no grafo G que $d(c) = d(h) = 2$, $d(a) = d(e) = 3$, $d(f) = d(g) = d(i) = 4$ e $d(b) = 6$. Os vértices a e e possuem grau ímpar, não satisfazendo a caracterização de grafos eulerianos.

(c) G é hamiltoniano? Justifique?

Resposta: Sim, pois um grafo é hamiltoniano se ele possui um ciclo hamiltoniano, isto é, um ciclo que contém todos os vértices do grafo. O grafo G possui o seguinte ciclo hamiltoniano: a, b, c, d, e, f, g, h, i, a.

(d) Calcule o diâmetro de G. Justifique.

Resposta: A excentricidade $e(v)$ de um vértice v de G é o valor da maior distância de v aos outros vértices de G, isto é, $e(v) = max_{w \in V(G)}\{d(v, w)\}$.

O diâmetro de um grafo, denotado por $diam(G)$, é o valor da sua maior excentricidade.

Calculando as excentricidades de todos os vértices de G, obtemos: $e(a) = e(b) = e(f) = e(i) = 2$ e $e(c) = e(d) = e(e) = e(g) = e(h) = 3$.

Logo, $diam(G) = 3$.

(e) Qual o centro de G. Justifique?

Resposta: O centro $c(G)$ de um grafo G é o conjunto dos vértices de G que têm excentridade mínima.

Pelo item (d) temos: $e(a) = e(b) = e(f) = e(i) = 2$ e $e(c) = e(d) = e(e) = e(g) = e(h) = 3$.

Logo, $c(G) = \{a, b, f, i\}$.