Aula 17: Definições Básicas e Notações

Conteúdo:



Definições, notações e exemplos:

- Grafos
- Representação geométrica
- Vizinhança
- Complemento
- Subgrafos
- Grafo completo
- Grafo nulo

Objetivos:

Introduzir as definições básicas da Teoria de Grafos e suas Notações para que possamos estabelecer uma linguagem própria e desenvolver gradualmente a teoria.

Exemplificar os conceitos, sempre que possível, para um melhor entendimento.



Grafos:



Um grafo simples ou grafo G é um par (V, E), denotado G = (V, E), onde V é um conjunto finito não vazio de elementos denominados vértices e E é um conjunto de pares não ordenados de elementos distintos de V, chamados arestas.

Exemplo 1:





Grafos: Grafos

17.4



Observações:

- Grafos = grafos simples
- Vértices = nós = pontos
- Número de vértices de G: |V(G)| = n
- Número de arestas de G : |E(G)| = m
- Quando temos vários grafos: G_1 , G_2 , ..., G_k , para não haver confusão denotamos seus conjuntos de vértices e arestas respectivamente por: $(V(G_1), E(G_1)), (V(G_2), E(G_2)), ..., (V(G_k), E(G_k))$







Dado um grafo G = (V, E)

Cada aresta $e \in E$ será denotado pelo par de vértices e = (v, w) que a forma, $v, w \in V$. Nesse caso, os vértices v, w são os extremos da aresta e.

A aresta e é dita incidente aos vértices v e w.

Representação geométrica:



Representação geométrica (no plano)

Cada vértice — ponto do plano

Cada aresta (v, w) — linha unindo os pontos correspondentes aos vértices v e w.

 $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \longrightarrow \mathbf{v} \longrightarrow \mathbf{w}$



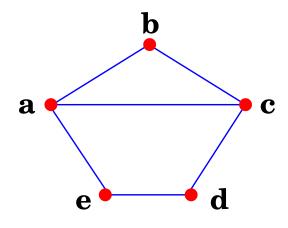


Exemplo 2:

$$G = (V, E)$$
 (grafo do exemplo 1)

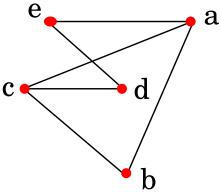
$$V = \{ a, b, c, d, e \}$$

$$E = \{ (a, b), (b, c), (a, c), (a, e), (c, d), (e, d) \}$$













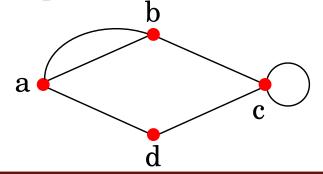


Observação:

Se relaxarmos a definição de grafo (simples), de maneira que admitamos a existência de pares não ordenados iguais de elementos distintos de V, chamadas arestas paralelas e de pares não ordenados de elementos iguais, chamados laços, temos então um multigrafo.

Exemplo 3: G = (V, E) $V = \{a, b, c, d\}$ $E = \{(a, b), (a, b), (b, c), (c, d), (d, a), (c, c)\}$

 $E = \{ (a, b), (a, b), (b, c), (c, d), (d, a), (c, c) \}$ arestas paralelas







Grafos

Vizinhança:



Seja G = (V, E) um grafo

Os vértices $v \in V$ são ditos adjacentes ou vizinhos se $(v, w) \in E$.

Chamamos de adjacência ou vizinhança de v em G o conjunto:

$$N(v) = \{ w \in V \mid (v, w) \in E \}$$

 $N(v) = N_G(v)$, se houver mais grafos.

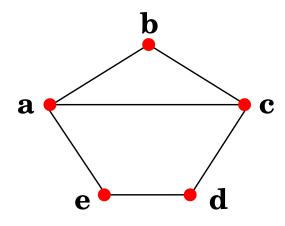




Exemplo 4:

Seja G o grafo do exemplo 1

$$N(v) = \{ w \in V \mid (v, w) \in E \}$$



$$N(a) = {b, c, e}$$

$$N(b) = \{ a, c \}$$

$$N(c) = \{ b, a, d \}$$

$$N(d) = \{ c, e \}$$

$$N(e) = \{ a, d \}$$



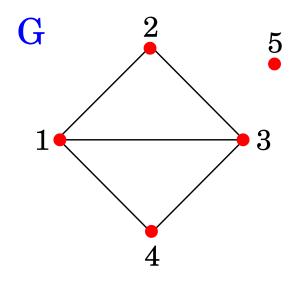
Seja G = (V, E) um grafo

Um vértice v de G é dito isolado quando $N(v) = \emptyset$.

Exemplo 5: G = (V, E)

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 4), (3, 4) \}$$



$$N(5) = \emptyset$$

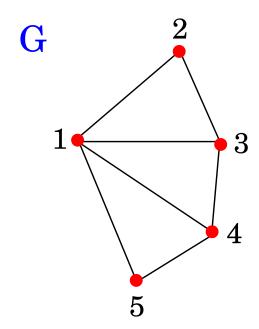
Logo 5 é isolado

Um vértice v de G é dito universal quando $N(v) = V - \{v\}$

Exemplo 6:
$$G = (V, E)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{ (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (3, 4), (4, 5) \}$$



$$N(1) = \{ 2, 3, 4, 5 \} = V - \{1\}$$

Logo 1 é universal

• Observação: Em um mesmo grafo não podemos ter ao mesmo tempo um vértice isolado e um vértice universal.





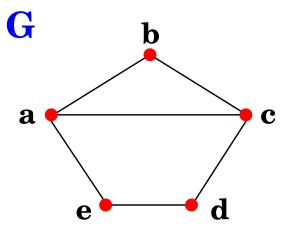
Complemento:

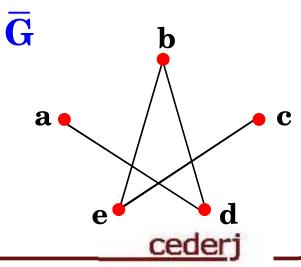


O Complemento de um grafo G, denotado por G é o grafo que tem o mesmo conjunto de vértices de G e tal que dois vértices distintos são adjacentes em \overline{G} se e somente se não são adjacentes em G.

$$\begin{split} &V(\overline{G}) = V(G) \\ &E(\overline{G}) = \{ \ (v, \, w) \ \big| \ v, \, w \in V(G) \ \ e \ \ (v, \, w) \not\in \ E(G) \ \} \end{split}$$

Exemplo 7:









Grafos

Subgrafos:

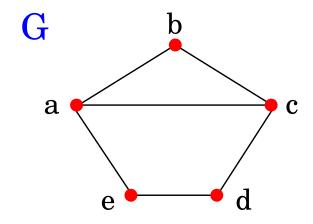


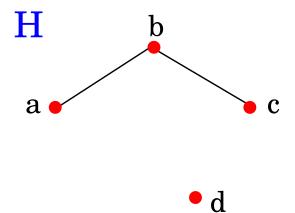
Sejam os grafos G e H.

H é dito um subgrafo de G se

- $V(H) \subseteq V(G)$ e
- $E(H) \subseteq E(G)$

Exemplo 8: Sejam G e H os seguintes grafos





 $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G) \Rightarrow H \text{ \'e um subgrafo de } G$





Subgrafo induzido

Seja G um grafo e A um subconjunto dos vértices de G, isto é, $A \subseteq V(G)$.

O subgrafo H de G induzido por A é denotado por G[A] e definido por:

$$V(H) = V(G[A]) = A$$
 e

$$E(H) = E(G[A]) = \{ (x, y) \in E(G) \mid x \in A \in y \in A \}$$

H é dito um subgrafo induzido de G.

Exemplo 9:

Considerando o grafo G do exemplo anterior, seja:

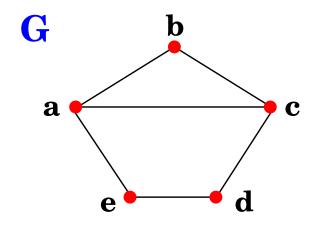
$$A = \{ a, b, c, d \}$$
 $A \subset V(G)$

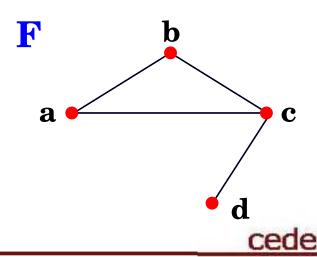
$$A \subset V(G)$$

então o subgrafo F de G induzido por A é F = G[A]

$$V(F) = \{ a, b, c, d \}$$

$$E(F) = \{ (a, b), (b, c), (a, c), (c, d) \}$$





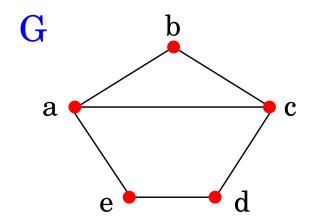


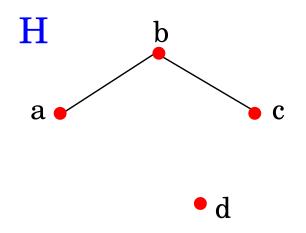


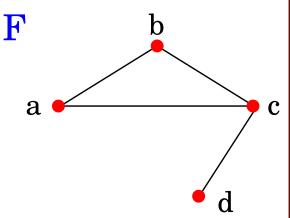


Observe que o subgrafo H de G do exemplo 8 <u>não</u> é um subgrafo induzido de G.

$$V(H) = V(F) = \{ a, b, c, d \} \subset \{ a, b, c, d, e \} = V(G)$$







Mas F é subgrafo

induzido de G (como

vimos no exemplo 9

$$E(H) = \{ (a, b), (b, c) \} \subset E(G)$$

 $E(F) = \{ (a, b), (b, c), (a, c), (c, d) \} \subset E(G)$







Subgrafo gerador

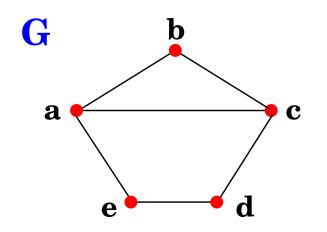
Sejam os grafos G e H.

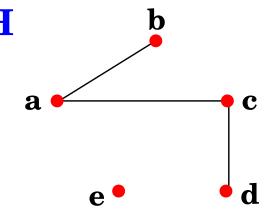
H é dito um subgrafo gerador de G se H é um subgrafo de G e V(H) = V(G)

Exemplo 10:

Consideremos o grafo G dos exemplos anteriores (8 e 9) e seja H dado por:

$$V(H) = V(G) = \{ a, b, c, d, e \}$$
 $E(H) = \{ (a, b), (a, c), (c, d) \}$







H é um subgrafo gerador de G.

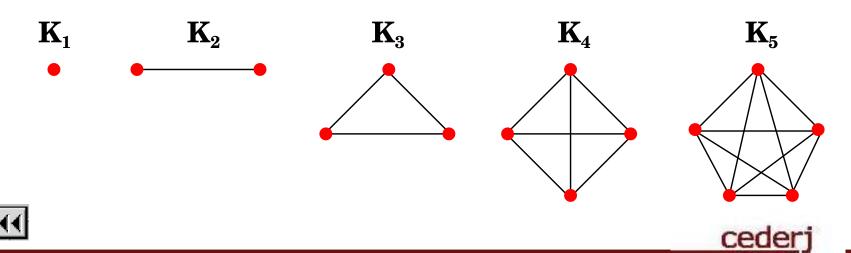
Grafo completo:



Um grafo G é dito completo se todos os seus pares de vértices distintos são adjacentes. Em outras palavras, todos os seus vértices são universais.

Um grafo completo com n vértices é representado por K_n

Exemplo 11:



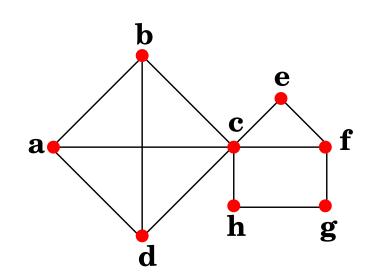


<u>Clique</u>

Seja G um grafo e A um subconjunto de vértices de G $(A \subset V(G))$

A é uma clique de G se G[A] é um grafo completo

Exemplo 12:



$$A_1 = \{ a, b, c, d \}$$

$$A_2 = \{ a, b, c \}$$

$$A_3 = \{ c, e, f \}$$

$$\mathbf{A_4} = \{ \mathbf{g}, \mathbf{h} \}$$

•

A₁, A₂, A₃ e A₄ são cliques de G.





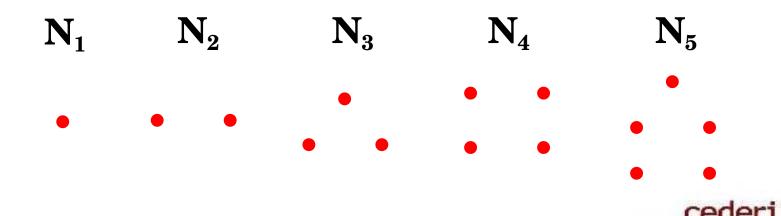
Grafo nulo:



Um grafo G é dito nulo (ou completamente independente) se todos os seus pares de vértices distintos não são adjacentes. Em outras palavras, todos os seus vértices são isolados.

Um grafo nulo com n vértices é denotado por N_n

Exemplo 13:





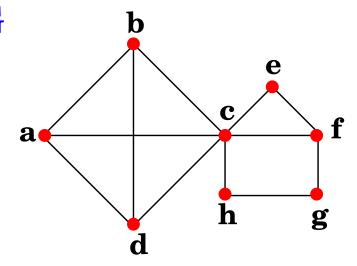
Conjunto independente

Seja G um grafo e S um subconjunto de vértices de G $(S \subseteq V(G))$

S é um conjunto independente de G se G[S] é um grafo nulo

Exemplo 14:

G



$$S_1 = \{ a, e, g \}$$

$$S_2 = \{ e, h \}$$

$$S_3 = \{ d, h, f \}$$

•





 S_1 , S_2 , S_3 são conjuntos independentes de G.

Resumo:

Um grafo G é uma estrutura formada por 2 tipos de objetos: vértices e arestas.

Notação: G = (V, E), V conjunto de vértices, E conjunto de arestas

 Cada aresta e é um par não ordenado de 2 vértices distintos do grafo

Notação: $e = (v, w) \quad v, w \in V$

 Um vértice x é adjacente a um vértice y se (x, y) é uma aresta do grafo

→ Vizinhança de v : conjunto de vértices adjacentes a v.

- Um subgrafo é um grafo "contido" em outro grafo
- Tipos especiais de subgrafo:

<u>Subgrafo induzido</u> (mantém a estrutura do grafo original)

<u>Subgrafo gerador</u> (tem o mesmo conjunto de vértices do grafo original)