

Gabarito da AP1 - Fundamentos de Algoritmos para Computação

1. (2.0) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

(a) $\{\emptyset\} \subseteq \{\{\emptyset\}\}$

Resposta: Falso.

$\{\emptyset\}$ é um elemento do conjunto $\{\{\emptyset\}\}$, portanto $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$.

(b) Se $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$ então $A \cap B \subseteq C$

Resposta: Verdadeiro.

Como $A \subseteq C$, temos que:

$$x \in A \Rightarrow x \in C$$

e como $B \subseteq C$, temos que:

$$x \in B \Rightarrow x \in C$$

O que nos dá que $x \in A \cap B \Rightarrow x \in C$.

Logo, segue o resultado $A \cap B \subseteq C$.

(c) $n(A \cap B) \leq n(A \cup B) - n(A)$

Resposta: Falso.

Tome $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$.

$n(A \cap B) = 2$, $n(A \cup B) = 3$ e $n(A) = 2$. Daí temos $2 \leq 3 - 2 = 1$. Absurdo!

2. (2.0) Mostre por Indução Matemática que:

$$n(n+1) > 4n$$

para todo natural $n \geq 4$.

Resposta:

Seja $P(n) : n(n+1) > 4n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$

Base da indução:

Para $n = 4$, $4(4+1) = 20 > 16 = 4 \cdot 4$, logo $P(4)$ é verdadeira.

Hipótese de Indução:

Suponha verdadeiro para $k \geq 4$, isto é, $P(k)$ é verdadeira, para $k \geq 4$:

$$P(k) : k(k+1) > 4k$$

Passo da Indução:

Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeiro então $P(k+1)$ é verdadeiro, isto é, temos que provar que:

$$P(k+1) : k+1((k+1)+1) > 4(k+1) \text{ é verdadeira.}$$

De fato,

$$(k+1)((k+1)+1) = (k+1)(k+2) = k(k+1) + 2(k+1)$$

Temos que $2(k+1) = 2k+2$ e como $k \geq 4$ então $2k+2 > 4$.

Daí,

$$\underbrace{k(k+1)}_{HI} + 2(k+1) > 4k + \underbrace{2(k+1)}_{>4} > 4k+4 = 4(k+1).$$

O que mostra a afirmação $n(n+1) > 4n$ é verdadeira para todo natural $n \geq 4$.

3. (2.0) Um comitê de 10 estudantes deve ser selecionado de uma turma de 25 calouros e 35 veteranos.

- (a) De quantas maneiras podemos selecionar comitês com 4 calouros e 6 veteranos? Justifique.

Resposta: Temos C_{25}^4 maneiras de selecionar 4 calouros dentre os 25 e C_{35}^6 maneiras de selecionar 6 veteranos dentre os 35.

Logo, pelo Princípio Multiplicativo temos:

$$C_{25}^4 \cdot C_{35}^6 = \frac{25!}{4!21!} \cdot \frac{35!}{6!29!}$$

maneiras de selecionar comitês com 4 calouros e 6 veteranos.

- (b) De quantas maneiras podemos selecionar comitês com pelo menos um calouro? Justifique.

Resposta: Para selecionarmos comitês com pelo menos 1 calouro, temos que obter todas as comissões com apenas 1 calouro e 9 veteranos, depois as comissões com 2 calouros e 8 veteranos, 3 calouros e 7 veteranos, e assim por diante... O que nos dá pelos Princípios Multiplicativo e Aditivo:

$$C_{25}^1 \cdot C_{35}^9 + C_{25}^2 \cdot C_{35}^8 + \cdots + C_{25}^9 \cdot C_{35}^1 + C_{25}^{10}$$

Ou ainda, podemos resolver esta questão através do complemento do conjunto de todos os comitês possíveis, ou seja, de 10 estudantes selecionados de uma turma de 25 calouros e 35 veteranos, com relação aos comitês formados apenas por veteranos:

$$C_{25+35}^{10} - C_{35}^{10} = C_{60}^{10} - C_{35}^{10}$$

4. (2.0) Quantos números de 7 dígitos maiores que 6.000.000 podem ser formados usando os algarismos 1, 3, 6, 6, 6, 8, 8? Justifique.

Resposta: Queremos formar números de 7 dígitos maiores que 6.000.000 usando os algarismos 1, 3, 6, 6, 6, 8, 8, ou seja queremos arrumar esses algarismos em 7 posições.

A restrição do número ser maior que 6.000.000 nos dá que a primeira posição só pode ser ocupada pelos algarismos 8 e 6.

No caso do 6 ocupar a primeira posição, vamos arrumar 1, 3, 6, 6, 8, 8 nas 6 posições seguintes:

$$P_6^{1122} = \frac{6!}{2!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!2!} = 180$$

No caso do 8 ocupar a primeira posição, vamos arrumar 1, 3, 6, 6, 6, 8 nas 6 posições seguintes:

$$P_6^{1131} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 120$$

Logo, pelo Princípio Aditivo, a solução é:

$$P_6^{1122} + P_6^{1131} = 180 + 120 = 300$$

5. (1.5) Um caminhão deve transportar 500 kg de alimentos entre açúcar, arroz, feijão e sal. Sabendo que cada alimento está armazenado em sacos de 1 kg, quantas são as possibilidades de completar os 500 kg? Justifique.

Resposta: Para completar os 500 kg, devemos escolher as quantidades de mantimentos de cada um dos quatro tipos, x_1 kg de açúcar, x_2 kg de arroz, x_3 kg de feijão e x_4 kg de sal. Mas essas quantidades x_1, x_2, x_3, x_4 são inteiros não-negativos. Portanto, queremos encontrar soluções inteiras não-negativas para a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 500$.

A resposta é

$$CR_4^{500} = C_{503}^{500} = \frac{503!}{500!3!} = \frac{503 \cdot 502 \cdot 501}{6}$$