Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Gabarito AP1 - Primeiro Semestre de 2012

Nome -
Assinatura -

Observações:

1. Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular. Se necessário deixe o resultado indicado, como um produto ou quociente ou potência de números inteiros ou fatoriais.
2. Resultado sem indicação de como foi obtido, não será considerado.
3. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.
4. Você pode usar lápis para responder as questões.
5. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.
6. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

Questões:

1. (2.0) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

   (a) $\emptyset \in P(A)$, onde $A = \{1, 2, 3\}$ e $P(A)$ é o conjunto das partes de A.

   Resposta:
   Verdadeiro, pois o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto, sendo, portanto, elemento de qualquer conjunto das partes. Logo, $\emptyset \in P(A)$.

(b) $\overline{(A \cup \overline{B})} \subseteq B$

Resposta: Verdadeiro. De fato, pela lei de De Morgan temos que: $\overline{(A \cup \overline{B})} = \overline{A} \cap \overline{\overline{B}} = \overline{A} \cap B \subseteq B$.

Note que, como todos os elementos da interseção de $\overline{A}$ com B estão simultaneamente em $\overline{A}$ e em B, temos que a afirmação $\overline{(A \cup \overline{B})} \subseteq B$ é verdadeira.

(c) $n(A \cup B) < n(A) + n(B)$

Resposta: Falso. Como contra-exemplo, podemos tomar quaisquer dois conjuntos A e B disjuntos, como por exemplo, $A = \{0\}, B = \{1\}$. Note que $A \cup B = \{0, 1\}$. Sendo assim, $n(A) = n(B) = 1$ e $n(A \cup B) = 2 = n(A) + n(B)$, contradizendo a afirmação.

Notemos que $n(A \cup B) < n(A) \cup n(B)$ quando $A \cap B \neq \emptyset$

2. (2.0) Mostre por Indução Matemática que:

$$9 + 9.10 + 9.10^2 + \cdots 9.10^{n-1} = 10^n - 1, \text{ para todo natural } n \geq 1.$$

Resposta: Seja $P(n) : 9 + 9.10 + 9.10^2 + \cdots + 9.10^{n-1} = 10^n - 1$ para todo natural $n \geq 1$.

BASE DA INDUÇÃO: Considerando $n = 1$ temos $9.10^0 = 9$.

Como $10^1 - 1 = 9$, temos que $P(1)$ é verdadeira.

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Suponha que

$$P(k) : 9 + 9.10 + 9.10^2 + \cdots + 9.10^{k-1} = 10^k - 1$$

seja verdadeira, para $k \geq 1$.

PASSO INDUTIVO: Vamos mostrar que

$$P(k+1) : 9 + 9.10 + 9.10^2 + \cdots + 9.10^k = 10^{k+1} - 1$$

é verdadeira.

$$
\begin{aligned}
9+9.10+9.10^2+\cdots+9.10^k &= \underbrace{9+9.10+9.10^2+\cdots+9.10^{k-1}}_{\text{H.I.}}+9.10^k \\
&= 10^k-1+9.10^k \\
&= 10^k(1+9)-1 \\
&= 10^k.10-1 \\
&= 10^{k+1}-1
\end{aligned}
$$

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática,

$$P(n) : 9+9.10+9.10^2+\cdots+9.10^{n-1}=10^n-1$$

é verdadeira para todo n natural, $n \geq 1$.

3. (2.0) Quantos números naturais de 4 algarismos, sem repetições, podem ser formados com os algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,$ e 9, com a restrição que o algarismo 2 esteja sempre incluído? Justifique.

   Resposta: Para solucionarmos este problema, vamos inicialmente posicionar o algarismo 2 em uma das 4 posições. Isso pode ser feito de 4 maneiras. Em seguida, vamos escolher e posicionar os outros números que ocuparão as outras 3 posições restantes. Temos $A_8^3 = \dfrac{8!}{5!} = 8.7.6 = 336$ maneiras de escolher 3 dentre os 8 algarismos restantes e posicioná-los. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, temos $4 \times A_8^3 = 4 \times 336 = 1344$ números de 4 algarismos distintos nos quais o algarismo 2 sempre está incluído.

4. (2.0) De quantas maneiras podemos sentar 21 pessoas, de modo que 11 delas fiquem em uma mesa redonda e as restantes fiquem em um banco? Justifique.

   Resposta: Primeiramente, vamos escolher e posicionar as 10 pessoas no banco. Podemos fazer isso de $A_{21}^{10} = \dfrac{21!}{11!}$ formas. Em seguida, vamos posicionar as outras 11 pessoas na mesa redonda. Vamos utilizar *Permutação Circular* para arrumar as 11 pessoas ao redor da mesa. Assim, temos $PC_{11} = (11-1)! = 10!$ maneiras de posicionar as demais pessoas em torno da mesa. Utilizando o Princípio Multiplicativo, temos $A_{21}^{10} \times PC_{11} = \dfrac{21!}{11!} \times 10! = \dfrac{21!}{11}$ maneiras de posicionar as 21 pessoas seguindo as restrições impostas.

5. (2.0) Calcule o número de soluções inteiras e não negativas (≥ 0) da inequação:
$x + y + z + w \leq 6$,
tal que a variável x é sempre positiva ($x > 0$). Justifique.

Resposta: Como a variável x é estritamente maior do que 0, temos que $x \geq 1$. Seja $x = x' + 1$, onde $x' \geq 0$. Fazendo a substituição na inequação de x por $x' + 1$ temos:

$$x' + 1 + y + z + w \leq 6$$

$$x' + y + z + w \leq 6 - 1$$

$$x' + y + z + w \leq 5$$

Para transformar esta inequação em uma equação, vamos acrescentar uma variável f de folga. Esta variável tem o papel de completar o valor que a expressão à esquerda assume de modo a igualá-lo ao resultado da direita da inequação. Então, se, por exemplo, $x' + y + z + w = 5$, f assume o valor 0. Se $x' + y + z + w = 4$, então f assume o valor 1 e assim sucessivamente. Note que o maior valor que f pode assumir é 5. Assim, estamos acrescentando à inequação a variável $f \geq 0$ de modo a obter a seguinte equação com variáveis inteiras e não-negativas:

$$x' + y + z + w + f = 5$$

Logo, o número de soluções inteiras não negativas de $x+y+z+w \leq 6$ com $x > 0$ corresponde ao número de soluções inteiras não negativas da equação acima, que podemos obter utilizando o conceito de *Combinações com repetição.* Portanto, temos $CR_5^5 = C_9^5 = \dfrac{9!}{4!5!} = 9.7.2 =$ 126 soluções inteiras e não-negativas para a inequação $x+y+z+w \leq 6$.