Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP2 - Primeiro Semestre de 2016

Questões:

1. (1.0) Usando o Teorema das Colunas prove que:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Resposta: O Teorema das Colunas, nos diz que: $C_r^r + C_{r+1}^r + \ldots + C_n^r = C_{n+1}^{r+1}$. Logo:

$$\begin{aligned}
1 + 2 + 3 + \ldots + n &= \sum_{k=1}^{n} k &= \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\frac{(k-1)!}{(k-1)!} &= \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{1!(k-1)!} &= \\
&= \sum_{k=1}^{n} C_k^1 &= \\
&= \underbrace{C_1^1 + C_2^1 + \ldots + C_n^1}_{\textit{Pelo teorema das colunas, quando } r=1} &= \\
&= C_{n+1}^2 &= \\
&= \frac{(n+1)!}{2!(n+1-2)!} &= \\
&= \frac{(n+1)!}{2(n-1)!} &= \\
&= \frac{(n+1)n(n-1)!}{2(n-1)!} &= \\
&= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

2. (1.5) Aplicando a fórmula do Binômio de Newton, calcule o termo independente de x no desenvolvimento de $(2x^3 - \frac{5}{x^2})^{50}$. Justifique a resposta.

Resposta: A fórmula para o termo geral do desenvolvimento do Binômio de Newton de $(a+b)^n$ é dada por: $T_{k+1} = C_n^k \; a^{n-k} \; b^k$, para $k = 0, 1, \cdots, n$. Neste caso temos $n = 50$, $a = 2x^3$ e $b = -\frac{5}{x^2}$).

$$\begin{aligned}
T_{k+1} &= C_{50}^k \; (2x^3)^{50-k} \; (-\tfrac{5}{x^2})^k \\
&= C_{50}^k \; (2)^{50-k} \; x^{150-3k} \; (-1)^k \; \tfrac{5^k}{x^{2k}} \\
&= C_{50}^k \; (2)^{50-k} \; (-1)^k \; x^{150-3k} \; \tfrac{5^k}{x^{2k}} \\
&= C_{50}^k \; (2)^{50-k} \; (-1)^k \; 5^k \; \tfrac{x^{150-3k}}{x^{2k}} \\
&= C_{50}^k \; (2)^{50-k} \; (-1)^k \; 5^k \; x^{150-3k-2k} \\
&= C_{50}^k \; (2)^{50-k} \; (-1)^k \; 5^k \; x^{150-5k}
\end{aligned}$$

Como queremos o coeficiente de x^0, temos:

$$150 - 5k = 0$$

$$5k = 150$$

$$\boxed{\text{k} = 30}$$

Portanto, $T_{31} = C_{50}^{30} \; (2)^{50-30} \; (-1)^{30} \; 5^{30} \; x^0 = \frac{50!}{20!30!} \; (2)^{20} \; (-1)^{30} \; 5^{30} = \frac{50!}{20!30!} \; (2)^{20} \; 5^{30}$.

3. (1.5) Encontre a fórmula fechada da relação de recorrência:
$a_{n+1} = a_n + 2^n \qquad n$ natural, $n \geq 1$
$a_1 = 1$
Descreva o processo utilizado para chegar à fórmula.

Resposta: Utilizando o método da Substituição regressiva temos:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n + 2^n \\
&= a_{n-1} + 2^{n-1} + 2^n \\
&= a_{n-2} + 2^{n-2} + 2^{n-1} + 2^n \\
&\vdots \\
&= a_{n-i} + (2^{n-i} + 2^{n-i+1} + 2^{n-i+2} + \cdots + 2^n)
\end{aligned}$$

Fazendo $n - i = 1$ temos que $i = n - 1$ e sabendo que $a_1 = 1$, temos:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_1 + (2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) \\
&= 1 + (2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) \\
&= \underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n}_{\text{soma dos } n \text{ primeiros termos de uma P.G.}} \\
&= 2^{n+1} - 1
\end{aligned}$$

Portanto, a fórmula fechada para a relação de recorrência é $a_{n+1} = 2^{n+1} - 1, n \geq 1, a_1 = 1$.

4. (1.5) Seja G um grafo, com 2 componentes conexos G_1 e G_2, tal que G_1 é uma árvore e tem 10 arestas e G_2 tem a seguinte sequência de graus de vértices $(4, 4, 3, 2, 2, 1)$. Determine o número de vértices e o número de arestas de G. Justifique.

   Resposta: Vamos calcular o número de arestas e o número de vértices em cada componente conexo e em seguida somar os resultados para obter o número de arestas e o número de vértices do grafo. Denotaremos por n_i e m_i os números de vértices e arestas, respectivamente, no componente conexo $G_i,\ i = 1, 2$.

Sabemos que em uma árvore T temos $m = n - 1$, onde m é o número de arestas e n o número de vértices de T.

Como G_1 é árvore, $m_1 = n_1 - 1 \Rightarrow n_1 = m_1 + 1$. Como G_1 possui $m_1 = 10$ arestas, temos então que G_1 possui $n_1 = 10 + 1 = 11$ vértices.

Logo, G_1 possui 11 vértices e 10 arestas

Como G_2 possui a seguinte sequência de graus de vértices $(4, 4, 3, 2, 2, 1)$, temos que $n_2 = 6$ e pelo Teorema do Aperto de Mãos, temos:

$$\sum_{v \in V(G_2)} d(v) = 2m_2$$

$$4 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 = 2m_2$$

$$2m_2 = 16$$

$$m_2 = 8$$

Logo, G_2 tem 6 vértices e 8 arestas.

Note que entre os componentes conexos, por definição, não temos arestas. Assim, o número total de arestas de G, que denotaremos por m é:

$$m = m_1 + m_2$$

$$m = 10 + 8$$

$$m = 18$$

O número total de vértices de G, que denotaremos por n é:

$$n = n_1 + n_2$$

$$n = 11 + 6$$

$$n = 17$$

Concluímos que o grafo G possui 17 vértices e 18 arestas.

5. (1.5) Seja G um grafo planar conexo e 5 regular (isto é, regular de grau 5), e com 11 faces. Determine o número de vértices e o número de arestas de G. Justifique.

Resposta: Pelo Teorema do Aperto de Mãos, temos:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

Como G é 5-regular, isto é, todo vértice de G tem grau 5, temos:

$$5 \times n = 2m \Rightarrow n = \frac{2m}{5} \qquad (1)$$

Pelo teorema de Euler para grafos planares temos que em um grafo planar $f = m-n+2$, onde f, m, n denotam respectivamente os números de faces, arestas e vértices do grafo. Assim, G possui:

$$11 = m - n + 2 \Rightarrow m = 9 + n \qquad (2)$$

Por (1) e (2), temos:

$$n = \frac{2m}{5}$$

$$n = \frac{2(9+n)}{5}$$

$$5n = 18 + 2n$$

$$3n = 18$$

$$\boxed{\text{n} = 6}$$

Por sua vez, temos:

$$m = 9 + n$$

$$m = 9 + 6$$

$$\boxed{\text{m} = 15}$$

Logo, o grafo G possui 6 vértices e 15 arestas.

6. (3.0) Considere o grafo G dado por:
$V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e
$E(G) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (d, g), (e, g), (b, f), (c, f)\}$.
Responda as seguintes perguntas:

Antes de respondermos as perguntas a seguir, temos, abaixo, a seguinte representação geométrica do grafo G:

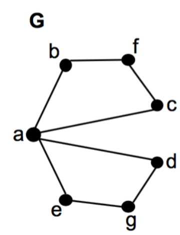

Figura 1: Grafo G

(a) G é bipartido? Justifique.

Resposta: Sim, pois G não possui ciclos ímpares (G é bipartido se e somente se G não possui ciclos ímpares). Além disso, podemos exibir a seguinte bipartição (V_1, V_2) dos vértices de G: $V_1 = \{a, f, g\}$ e $V_2 = \{b, c, d, e\}$.

A figura abaixo ilustra o grafo G com as duas bipartções V_1 e V_2.

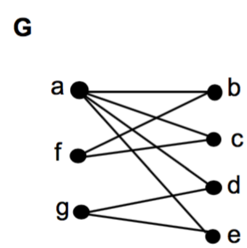

Figura 2: Grafo bipartido G

(b) G é euleriano? Justifique.

Resposta: Sim, pois o Teorema de Euler diz que um grafo é euleriano se e somente se todos os seus vértices têm grau par. Como neste caso, $d(a) = 4$, $d(b) = d(c) = d(d) = d(e) = d(f) = d(g) = 2$, temos que o grafo em questão é euleriano, isto é, todos os vértices possuem grau par, satisfazendo a caracterização de grafos eulerianos. Podemos verificar, também, que G admite o seguinte circuito euleriano: $a, b, f, c, a, d, g, e, a$.

(c) G é hamiltoniano? Justifique.

Resposta: Não, pois o grafo G possui um vértice a (vide Figura 1) tal que todo caminho de b a e passa pelo vértice a, logo quando percorremos um passeio fechado que passe por todos os vértices de G, vamos passar mais de uma vez por a, logo não teremos um ciclo hamiltoniano.

(d) Determine o diâmetro e o centro de G. Justifique.

Resposta: O diâmetro de G é a maior excentricidade do grafo. Em outras palavras, o diâmetro é dado por: $\{\max_{v \in V(G)} e(v)\}$.

O centro de um grafo G é dado pelo conjunto de vértices do grafo que tem a menor excentricidade, ou seja, $c(G) = \{v \in V(G) \mid e(v) \text{ é mínima}\}$.

A excentricidade de um vértice v é a maior distância de v a todos os outros vértices w do grafo. Em outras palavras temos $e(v) = \max_{w \in V(G) \text{ e } w \neq v} d(v, w)$, onde $d(v, w)$ indica a distância de v a w.

Logo, para calcular o diâmetro e o centro de G, precisamos calcular a excentricidade de cada vértice de G.

Calculando as excentricidades, temos que $e(a) = 2$ e $e(b) = e(c) = e(d) = e(e) = 3$ e $e(f) = e(g) = 4$. Dessa forma, temos que $c(G) = \{a\}$ e $diam(G) = 4$.