Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AP3 - Segundo Semestre de 2015

Nome -
Assinatura -

Observações:

1. Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular. Se necessário deixe o resultado indicado, como um produto ou quociente ou potência de números inteiros ou fatoriais.
2. Resultado sem indicação de como foi obtido, não será considerado.
3. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.
4. Você pode usar lápis para responder as questões.
5. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.
6. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

Questões:

1. (1,5) Mostre usando indução matemática que:

$$(1-\frac{1}{2}) \times (1-\frac{1}{3}) \times (1-\frac{1}{4}) \times \cdots \times (1-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$$

para todo número natural n, $n \geq 2$.

Resposta: Seja $P(n) : (1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{3}) \times (1 - \frac{1}{4}) \times \cdots \times (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

BASE DA INDUÇÃO: Considerando $n = 2$ temos $\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Logo, $P(2)$ é verdadeira.

HIPÓTESE INDUTIVA: Considere $P(k) : (1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{3}) \times (1 - \frac{1}{4}) \times \cdots \times (1 - \frac{1}{k}) = \frac{1}{k}$, $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ verdadeira.

PASSO INDUTIVO: Vamos provar que se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1) : (1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{3}) \times (1 - \frac{1}{4}) \times \cdots \times (1 - \frac{1}{(k+1)}) = \frac{1}{(k+1)}$ é também verdadeira.

$$\underbrace{(1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{3}) \times (1 - \frac{1}{4}) \times \cdots \times (1 - \frac{1}{k})}_{\text{H.I.}} \times (1 - \frac{1}{(k+1)}) =$$

$$\frac{1}{k} \times (1 - \frac{1}{(k+1)}) =$$

$$\frac{1}{k} \times \frac{k+1-1}{(k+1)} =$$

$$\frac{1}{k} \times \frac{k}{(k+1)} =$$

$$\frac{k}{k(k+1)} =$$

$$\frac{1}{(k+1)}$$

Logo, pelo PIM, temos que $P(n) : (1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{3}) \times (1 - \frac{1}{4}) \times \cdots \times (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

2. (1,0) Em uma sala de aula com 32 pessoas há 18 homens e 14 mulheres. Quantas comissões de 8 pessoas podem ser formadas nesta sala contendo pelo menos 1 mulher? Justifique.

   Resposta: Para solucionar esta questão, vamos utilizar o raciocínio do complemento. Note que, existir pelo menos uma mulher é justamente o contrário de não existir mulher na comissão. Sendo assim, vamos calcular o total de comissões possíveis e subtrair deste valor o número de comissões formadas apenas por homens.

   TOTAL DE COMISSÕES:

$$C_{32}^{8} = \frac{32!}{8!24!}$$

   COMISSÕES FORMADAS APENAS POR HOMENS:

$$C_{18}^{8} = \frac{18!}{8!10!}$$

   Daí, pelo raciocínio complementar, temos que o total de comissões de 8 pessoas com pelo menos uma mulher é dado por: $\frac{32!}{8!24!} - \frac{18!}{8!10!}$.

3. (1,0) Quantos são os anagramas da palavra

   I N T E R D E P E N D E N T E

   que começam com a letra **D** e terminam em **E**? Justifique.

   Resposta: A palavra **I N T E R D E P E N D E N T E** possui 1I, 3N's,2T's, 5E's, 1R, 2D's e 1P totalizando 15 letras. Vamos fixar uma letra D na primeira posição e uma letra E na última posição e vamos permutar as demais letras que serão posicionadas entre o D e o E com atenção às repetições. Observe que restam 1I, 3N´s, 2T´s, 4E´s, 1R, 1D e 1P para ocupar as 13 posições restantes. Assim, temos: $P_{13}^{1,3,2,4,1,1,1} = \frac{13!}{3!2!4!}$ possíveis anagramas para a palavra **I N T E R D E P E N D E N T E** que começam por D e terminam por E.

4. (1,0) Quantas são as soluções inteiras *não negativas* de:

$$x + y + z + w < 15?$$

Justifique.

Resposta: Utilizando o conceito de combinação com repetições, solucionamos qualquer **equação** de variáveis inteiras não negativas. Neste caso, temos uma **inequação estrita** de variáveis inteiras e não negativas, o que não nos possibilita solução imediata. Comecemos reescrevendo tal inequação estrita da seguinte forma:

$$x + y + z + w \leq 14 \quad (II)$$

Note que a inequação estrita é equivalente a inequação (II). Agora, para solucionar a questão, vamos reescrever a inequação (II) como uma **equação** equivalente. Assim, considere uma nova variável, $f \geq 0$, denominada variável de folga e a equação (III) abaixo:

$$x + y + z + w + f = 14 \quad (III)$$

Note que, se $f = 0$, temos a equação $x+y+z+w = 14$. Se $f = 1$, temos a equção $x + y + z + w = 13$ e assim sucessivamente. Então podemos afirmar que a equação (III) é equivalente à inequação (II) que, por sua vez, é equivalente a inequação estrita em questão. Portanto, o número de soluções inteiras não negativas para (III) é, justamente, o número de soluções inteiras e não negativas da inequação estrita. Logo, temos: $CR_5^{14} = C_{18}^{14} = \frac{18!}{14!4!}$ soluções inteiras não negativas para a inequação.

5. (1,0) Dada a linha 8 do triângulo de Pascal:
1 8 28 56 70 56 28 8 1
calcule a linha 9 usando as condições de fronteira e a Relação de Stifel. Justifique sua resposta.

Resposta: A Relação de Stifel garante que $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$. Através desta relação, podemos calcular os elementos $C_9^2, C_9^3, C_9^4, \ldots, C_9^8$. Assim, utilizando as condições de fronteira (C.F.) e a Relação de Stifel, podemos obter a linha 9 do triângulo de Pascal:

$$\underbrace{1}_{\text{C.F.}} \quad \underbrace{9}_{C_8^1+C_8^2} \quad \underbrace{36}_{C_8^2+C_8^3} \quad \underbrace{84}_{C_8^3+C_8^4} \quad \underbrace{126}_{C_8^4+C_8^5} \quad \underbrace{126}_{C_8^5+C_8^6} \quad \underbrace{84}_{C_8^6+C_8^7} \quad \underbrace{36}_{C_8^6+C_8^7} \quad \underbrace{9}_{C_8^7+C_8^8} \quad \underbrace{1}_{\text{C.F.}}$$

6. (4,5) As perguntas seguintes são sobre grafos.

   (a) Seja G um grafo 5-regular (isto é regular de grau 5) com 25 arestas. Quantos vértices G possui? Justifique.

   Resposta: Pelo Teorema do Aperto de Mãos temos: $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$, onde m é o número de arestas de G. Como G é 5-regular,i.e.,$d(v) = 5$ para todo vértice v de G, temos $\sum_{v \in V} d(v) = 5n$, onde n é o número de vértices de G. Daí,

   $$5n = 2 \times 25$$

   $$n = 10$$

   Portanto, G tem 10 vértices.

   (b) Seja T uma árvore. Dê a definição de **folha** de T. Se v e w são duas folhas distintas de T, existe caminho entre v e w? Justifique.

   Resposta: Uma folha f em uma árvore é um vértice de grau 1.

   Uma árvore é um grafo conexo e acíclico. Sabemos, por teorema, que em uma árvore, entre qualquer par de vértices existe um único caminho. Em particular, entre duas folhas existe um único caminho.

   (c) Seja $G = K_9$ o grafo completo com 9 vértices. G é euleriano? Justifique.

   Resposta: Um grafo é euleriano se e somente se seus vértices possuem grau par. Em um K_9, todo vértice tem grau 8, sendo assim, um K_9 é um grafo euleriano.

(d) Seja $G = K_{4,4}$ o grafo bipartido completo, com bipartição (V_1, V_2), onde V_1 tem 4 vértices e V_2 tem 4 vértices. G é hamiltoniano? Justifique.

Resposta: Sim. Considere o grafo $K_{4,4}$ da figura 1. O ciclo $a, b, c, d, e, f, g, h, a$ é um ciclo hamiltoniano.

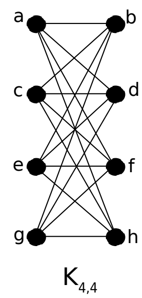

Figura 1: $K_{4,4}$

(e) Defina o que é um grafo planar. Se G é um grafo planar com 35 arestas, e 17 faces, determine o número de vértices de G. Justifique.

Resposta: Um grafo G é *planar* se e somente se existe uma representação para G na qual não há cruzamento de arestas.

O teorema de Euler para grafos planares diz que: $f = m - n + 2$, onde f é o número de faces, m é o número de arestas e n o número de vértices do grafo. Assim, como $f = 17$ e $m = 35$, temos que $n = 20$. Logo, G tem 20 vértices.