Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AD1 - Segundo Semestre de 2011

Questões:

1. (1.5) Seja $A = \{\emptyset, 1, C\}$.

   (a) Determine o conjunto de partes de A, $P(A)$.

   Resposta: O conjunto de partes de A é:

   $$P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{C\}, \{\emptyset, 1\}, \{\emptyset, C\}, \{1, C\}, \{\emptyset, 1, C\}\}.$$

   (b) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

   (b$_1$) $\{\emptyset, C\} \subseteq P(A)$;

   Resposta: A afirmação é falsa, já que $\{\emptyset, C\}$ é um elemento de $P(A)$, e não um subconjunto de $P(A)$. As afirmações corretas são:

   $$\{\{\emptyset, C\}\} \subseteq P(A)$$

   ou

   $$\{\emptyset, C\} \in P(A).$$

(b$_2$) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq P(A)$;

Resposta: A afirmação é verdadeira, já que $\{\emptyset\}$ é um elemento de $P(A)$, e portanto, $\{\{\emptyset\}\}$ é um subconjunto de $P(A)$.

(b$_3$) $n(\emptyset) = n(\{\emptyset\})$.

Resposta: A afirmação é falsa, pois o conjunto vazio, $\emptyset$, é um conjunto que não tem nenhum elemento, portanto $n(\emptyset) = 0$. Já $\{\emptyset\}$ é um conjunto unitário, cujo elemento é o conjunto vazio, logo $n(\{\emptyset\}) = 1$. Portanto, a afirmação correta é:

$$n(\emptyset) \neq n(\{\emptyset\})$$

2. (1.0) Numa cidade foi feita uma pesquisa relativa à leitura de 3 jornais $J1$, $J2$ e $J3$. Obteve-se que 20% da população lê o jornal $J1$, 16% o jornal $J2$, 14% o jornal $J3$, 8% lê $J1$ e $J2$, 4% $J2$ e $J3$, 5% $J1$ e $J3$, e 2% lê os 3 jornais. Determine, usando o Princípio de Inclusão e Exclusão, a porcentagem da população que não lê nenhum desses 3 jornais.

   Resposta: Para simplificar, consideremos inicialmente que a pesquisa foi feita em 100 pessoas. Considere $n(J_i)$ o número de pessoas que leem o jornal J_i, dentre as 100 pessoas, $i = 1, 2, 3$.

   Pelo enunciado, temos que:

   - $n(J_1) = 20$;
   - $n(J_2) = 16$;
   - $n(J_3) = 14$;
   - $n(J_1 \cap J_2) = 8$;
   - $n(J_1 \cap J_3) = 5$;
   - $n(J_2 \cap J_3) = 4$;
   - $n(J_1 \cap J_2 \cap J_3) = 2$;

   Consideremos U um conjunto de 100 pessoas, e seja P o conjunto das pessoas de U que não leem nenhum jornal. Observemos que este conjunto P é o complemento daquelas que leem pelo menos um jornal, isto é, $P = U - (J_1 \cup J_2 \cup J_3)$.

Logo, queremos encontrar $n(P) = n(U) - n(J_1 \cup J_2 \cup J_3)$.

Temos que

$n(J_1 \cup J_2 \cup J_3) = n(J_1) + n(J_2) + n(J_3) - n(J_1 \cap J_2) - n(J_1 \cap J_3) - n(J_2 \cap J_3) + n(J_1 \cap J_2 \cap J_3)$

Portanto,

$$n(J_1 \cup J_2 \cup J_3) = 20 + 16 + 14 - 8 - 5 - 4 + 2$$

$$n(J_1 \cup J_2 \cup J_3) = 35$$

Como $n(U) = 100$, resulta:

$$n(J_1, J_2, J_3) = 100 - n(J_1 \cup J_2 \cup J_3)$$
$$n(J_1, J_2, J_3) = 100 - 35$$
$$n(J_1, J_2, J_3) = 65$$

Portanto, para uma população qualquer, a porcentagem da população que não lê nenhum desses 3 jornais é 65%.

3. (2.0) Mostre pelo Princípio da Indução Matemática que:

$$\frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)!}$$

para todo $n \in \mathrm{N},\ n \geq 2$.

Resposta: Seja $P(n) : \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)!}$

Base da indução:

Para $n = 2$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{(2+1)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} = \frac{3-1}{3!} = \frac{2}{3!}$, logo $P(2)$ é verdadeira.

Hipótese de Indução:

Suponha verdadeiro para $k \geq 2$, isto é, $P(k)$ é verdadeira, para $k \geq 2$:

$$P(k) : \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} + \cdots + \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(k+1)!}$$

Passo da Indução:

Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeiro então $P(k+1)$ é verdadeiro, isto é, temos que provar que:

$$P(k+1) : \tfrac{2}{3!} + \tfrac{3}{4!} + \tfrac{4}{5!} + \cdots + \tfrac{k+1}{(k+2)!} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{(k+2)!} \text{ é verdadeira.}$$

Desenvolvendo:

$$\begin{aligned}
& \tfrac{2}{3!} + \tfrac{3}{4!} + \tfrac{4}{5!} + \cdots + \tfrac{k+1}{(k+2)!} && = \\
= & \underbrace{\frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} + \cdots + \frac{k}{(k+1)!}}_{H.I.} + \tfrac{k+1}{(k+2)!} && = \\
= & \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{(k+1)!} + \tfrac{k+1}{(k+2)!} && = \\
= & \tfrac{1}{2} + \tfrac{-(k+2)+k+1}{(k+2)!} && = \\
= & \tfrac{1}{2} + \tfrac{-k-2+k+1}{(k+2)!} && = \\
= & \tfrac{1}{2} + \tfrac{-1}{(k+2)!} && = \\
= & \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{(k+2)!}
\end{aligned}$$

Logo, pelo princípio da indução matemática, $P(n)$ é verdadeiro para todo $n \geq 2$ natural.

4. (2.0) Considere os números inteiros de 4 algarismos distintos formados com os dígitos 0, 1, 2, 4, 7, 8 e 9.

   (a) Quantos são esses números? Justifique;

   Resposta: Os números de 4 algarismos distintos formados com os dígitos 0, 1, 2, 4, 7, 8 e 9 são $6A(6,3) = 6.6.5.4 = 720$, já que o primeiro dígito dos números não pode ser 0.

   Outro raciocíno seria usando a idéia de complemento, isto é, $A(7,4) - A(6,3) = \frac{7!}{3!} - \frac{6!}{3!} = 7.6.5.4 - 6.5.4 = 6.6.5.4 = 720$.

(b) Quantos são ímpares? Justifique;

Resposta: Para que os números sejam ímpares, temos que estes devem terminar com algarismo ímpar, logo temos três possibilidades: 1, 7 e 9. Se fixarmos o algarismo 1 para ser o algarismo final do número temos $5A(5,2)$ para os três algarismos restantes. Se fixarmos os outros dois algarismos ímpares da mesma forma que o algarismo 1, também teremos $5A(5,2)$ para os outros três algarismos restantes. Portanto, pelo princípio aditivo, temos $3.5A(5,2) = 15.5.4 = 300$ números ímpares.

(c) Quantos são maiores do que 5000? Justifique.

Resposta: Queremos encontrar a quantidade de números de 4 algarismos distintos e maiores do que 5000 formados com 0, 1, 2, 4, 7, 8 e 9. Observemos que para o primeiro dígito temos 3 possibilidades (7, 8 ou 9). Para as três posições restantes temos $A(6,3)$ possibilidades (incluimos 0, 1, 2 e 4). Portanto, pelo princípio aditivo, neste caso temos $3A(6,3) = 3.6.5.4 = 360$ números distintos de 4 algarismos e maiores que 5000.

5. (1.5) De quantos modos é possível dividir 24 pessoas:

(a) Em três grupos de 8 pessoas? Justifique;

Resposta: Para escolhermos o primeiro grupo de 8 pessoas temos 24 possibilidades, isto é, $C(24,8)$, para escolhermos o segundo grupo de 8 pessoas temos 16 possibilidades, isto é, $C(16,8)$ e para escolhermos o terceiro grupo de 8 pessoas, estes estão automaticamente definidos, isto é, $C(8,8)$. Deve-se dividir por $P_3 = 3!$ para que não haja repetições de conjuntos. Pelo princípio multiplicativo, temos $\frac{C(24,8)\times C(16,8)\times C(8,8)}{P_3} = \frac{\frac{24!}{16!8!}\times\frac{16!}{8!8!}\times\frac{8!}{8!0!}}{3!} = \frac{\frac{24!}{8!8!8!}}{3!} = \frac{24!}{8!8!8!3!}$.

(b) Em um grupo de 18 e outro de 6 pessoas? Justifique;

Resposta: Para escolhermos o primeiro grupo de 18 pessoas temos 24 possibilidades, isto é, $C(24,18)$ e para escolhermos o segundo grupo de 6 pessoas, estes estão automaticamente definidos, isto é, $C(6,6)$. Pelo princípio multiplicativo, temos $C(24,18) \times C(6,6) = \frac{24!}{18!6!} \times \frac{6!}{6!0!} = \frac{24!}{18!6!} = 134596$.

6. (2.0) Considere as letras da palavra **M A T E R I A L M E N T E**.

   (a) Quantos são os anagramas que finalizam em vogal? Justifique.

   Resposta: Classificaremos os anagramas de **M A T E R I A L M E N T E** em 3 grupos disjuntos:

   Temos $2A's$, $3E's$, $1I$, $2M's$, $2T's$, $1L$, $1N$, $1R$, logo:
   (i) Anagramas terminados em A, temos $P_{12}^{3,2,2,1,1,1,1,1} = \frac{12!}{3!2!2!}$
   (ii) Anagramas terminados em E, temos $P_{12}^{2,2,2,2,1,1,1,1} = \frac{12!}{2!2!2!2!}$
   (iii) Anagramas terminados em I, temos $P_{12}^{3,2,2,2,1,1,1} = \frac{12!}{3!2!2!2!}$

   Pelo princípio aditivo, o total de anagramas é:

$$P_{12}^{3,2,2,1,1,1,1,1} + P_{12}^{2,2,2,2,1,1,1,1} + P_{12}^{3,2,2,2,1,1,1} =$$
$$= \frac{12!}{3!2!2!} + \frac{12!}{2!2!2!2!} + \frac{12!}{3!2!2!2!} =$$
$$= \frac{12!}{2!2!}\left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2.3!}\right) =$$
$$= \frac{12!}{2!2!}\left(\frac{1}{2}\right)$$

   (b) Em quantos anagramas as vogais estão em ordem alfabética? Justifique;

   Resposta: Escolha 6 lugares para colocar as vogais. Temos $C_{13}^{6} = \frac{13!}{6!7!}$ maneiras. Definido um lugar para as vogais, temos uma única possibilidade de colocá-las em ordem alfabética: $AAEEEI$. Agora, para cada uma dessas escolhas, podemos permutar as consoantes, isto é, temos $P_7^{2,2,1,1,1}$ modos. Pelo princípio multiplicativo, obtemos $C_{13}^{6} P_7^{2,2,1,1,1} = \frac{13!}{6!2!2!}$.

(c) Em quantos anagramas não existem vogais consecutivas? Justifique;

Resposta: Vamos primeiramente arrumar as consoantes e, depois vamos entremear as vogais. O número de modos de arrumar em fila as consoantes M (2 vezes), T (2 vezes), R (1 vez), L (1 vez), N (1 vez) é $P_7^{2,2,1,1,1} = \frac{7!}{2!2!1!1!1!} = \frac{7.6.5.4.3}{2} = 1260$. Para cada arrumação das consoantes, por exemplo, $MTRLMNT$, podemos colocar as 6 vogais nos 8 espaços vazios da figura:

_____ M _____ T _____ R _____ L _____ M _____ N _____ T _____

Temos, então, $C_8^6 = \frac{8!}{6!2!} = \frac{8.7}{2} = 28$ modos de escolher os seis espaços que serão ocupados. Como a combinação é dada para posicionar onde irá ficar as vogais, falta ainda permutar estas vogais, dando $P_6^{3,2,1} = \frac{6!}{3!2!} = \frac{6.5.4}{2} = 60$ maneiras de permutar as vogais para cada posição dada na combinação.

Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $P_7^{2,2,1,1,1} \times C_8^6 \times P_6^{3,2,1} = 1260 \times 28 \times 60 = 2.116.800$ anagramas sem vogais consecutivas.