Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Gabarito da AP1 - Segundo Semestre de 2010

Questões:

1. (1.5) Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\} \quad , \quad B = \{a\} \quad , \quad C = \{\emptyset, \{a, \{a\}\}\}$$

Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

(a) $B \subseteq A$

Resposta: A afirmação é verdadeira, já que o único elemento de B também pertence ao conjunto de A.

(b) $B \subseteq C$

Resposta: A afirmação é falsa, já que $B = \{a\}$ não é subconjunto do conjunto C, isto é, o elemento a não é um elemento do conjunto $C = \{\emptyset, \{a, \{a\}\}\}$. A afirmação correta é:

$$B \not\subseteq C$$

(c) $\{a, \{a\}\} \in A$

Resposta: A afirmação é falsa, já que $\{a, \{a\}\}$ não é um elemento do conjunto $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$. As afirmações corretas são:

$$a \in A, \{a\} \in A$$

OU

$$\{a, \{a\}\} \subseteq A$$

OU

$$\{a, \{a\}\} \in C$$

2. (1.0) Em um grupo de 42 turistas, todos falam espanhol ou inglês; 35 falam espanhol e 18 falam inglês. Quantos falam espanhol e inglês? Justifique usando o Princípio de Inclusão e Exclusão.

   Resposta: Sejam A o conjunto de turistas que falam espanhol e B o conjunto de turistas que falam inglês. Pelas informações apresentadas no enunciado da questão, temos: $n(A) = 35$, $n(B) = 18$ e $n(A \cup B) = 42$. Precisamos encontrar $n(A \cap B)$, e pelo princípio de Inclusão e Exclusão, temos:

$$\begin{array}{ccc} n(A \cup B) & = & n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ 42 & = & 35 + 18 - n(A \cap B) \\ n(A \cap B) & = & 35 + 18 - 42 \\ n(A \cap B) & = & 53 - 42 \\ n(A \cap B) & = & 11 \end{array}$$

   Podemos concluir que 11 turistas falam espanhol e inglês.

3. (2.0) Mostre por indução matemática que:

$$4 + 10 + 16 + \cdots + (6n - 2) = n(3n + 1), \text{ para todo natural } n \geq 1.$$

   Resposta: Seja

   $P(n) : 4+10+16+\cdots+(6n-2) = n(3n+1)$, para todo natural $n \geq 1$.

   Base da indução:

Para $n = 1$, $1(3.1 + 1) = 4$, logo $P(1)$ é verdadeira.

Hipótese de Indução:

Suponha verdadeiro para $k \geq 1$, isto é, $P(k)$ é verdadeira:

$$P(k) : 4 + 10 + 16 + \cdots + (6k - 2) = k(3k + 1)$$

Passo da Indução:

Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeiro então $P(k + 1)$ é verdadeiro, isto é, temos que provar que:

$$P(k + 1) : 4 + 10 + 16 + \cdots + (6(k + 1) - 2) = (k + 1)(3(k + 1) + 1)$$

Desenvolvendo:

$$\begin{array}{rll} & \underbrace{4 + 10 + 16 + \cdots + (6k - 2)}_{H.I.} + (6(k + 1) - 2) & = \\ = & k(3k + 1) + 6(k + 1) - 2 & = \\ = & 3k^2 + k + 6k + 6 - 2 & = \\ = & 3k^2 + 7k + 4 & = \end{array}$$

Por outro lado, desenvolvendo $((k + 1)(3(k + 1) + 1))$, temos:

$$\begin{array}{rll} & (k + 1)(3(k + 1) + 1) & = \\ = & (k + 1)(3k + 4) & = \\ = & 3k^2 + 3k + 4k + 4 & = \\ = & 3k^2 + 7k + 4 & = \end{array}$$

Portanto, $P(k + 1)$ é verdadeiro. Logo, pelo princípio da indução matemática, $P(n)$ é verdadeiro para todo n natural, $n \geq 1$.

4. (1.5) De quantos modos 30 crianças podem formar uma roda de ciranda de modo que 5 dessas crianças sempre permaneçam juntas? Justifique.

   Resposta: Raciocínio 1: Consideremos as 5 crianças contando como 1. Então, podemos formar uma roda de 26 crianças de $(PC)_{26} = 25!$

maneiras diferentes. Por outro lado, a quantidade de formas como as 5 crianças poder estar juntas correspondem a Permutações de 5, ou seja, $P_5 = 5!$. Logo, o número total de modos de colocar 30 crianças formando uma roda de ciranda de modo que 5 dessas crianças sempre permaneçam juntas é $25!5!$.
Raciocínio 2: Separamos as 5 crianças que devem estar juntas. Podemos formar uma roda com as 25 crianças restantes de $(PC)_{25} = 24!$ modos. Depois, devemos escolher um dos 25 espaços entre essas crianças (o que pode ser feito de 25 modos) para aí colocarmos as outras crianças. Finalmente, devemos decidir em que ordem as 5 crianças se colocarão nesse espaço (5! modos). A resposta é $24!25.5! = 25!5!$.

5. (2.0) De quantos modos podemos dividir 20 pessoas em:

(a) um grupo de 12 pessoas e um grupo de 8 pessoas? Justifique.

Resposta: Há $C(20, 12)$ modos de selecionar o grupo de 12 e, depois disso, 1 modo de selecionar o grupo de 8.
A resposta é $C(20, 12).1 = C(20, 12) = \frac{20!}{12!8!} = 125.970$.

(b) 4 grupos de 5 pessoas cada? Justifique.

Resposta: Escolha 5 das 20 pessoas para formar um grupo, o que pode ser feito de $C(20, 5)$ modos. Restando 15 pessoas, temos que escolher 5 das 15 pessoas para formar o outro grupo, o que pode ser feito de $C(15, 5)$ modos. Agora, restam 10 pessoas para formar um outro grupo de 5 pessoas, o que pode ser feito de $C(10, 5)$, e, por último, sobram 5 pessoas para formar o outro grupo de 5 pessoas, o que pode ser feito de $C(5, 5)$ modos. Observemos que, se fizermos $C(20, 5).C(15, 5).C(10, 5).C(5, 5)$ estamos repetindo subdivisões.

Por exemplo, uma subdivisão é:
GRUPO 1: formado por pessoas 1,2,3,4,5
GRUPO 2: formado por pessoas 6,7,8,9,10
GRUPO 3: formado por pessoas 11,12,13,14,15

GRUPO 4: formado por pessoas 16,17,18,19,20.

Uma outra subdivisão seria:
GRUPO 1: formado por pessoas 6,7,8,9,10
GRUPO 2: formado por pessoas 1,2,3,4,5
GRUPO 3: formado por pessoas 11,12,13,14,15
GRUPO 4: formado por pessoas 16,17,18,19,20.

Vemos que ambas as subdivisões são as mesmas. Vamos ter 4! subdivisões iguais. Logo, podemos dividir 20 pessoas em 4 grupos de 5 pessoas:

$$\frac{C(20,5).C(15,5).C(10,5).C(5,5)}{4!} =$$
$$\frac{\frac{20!}{5!15!}\cdot\frac{15!}{5!10!}\cdot\frac{10!}{5!5!}\cdot\frac{5!}{5!0!}}{4!} =$$
$$\frac{20!}{5!5!5!5!4!} = 488.864.376$$

6. (2.0) Em um jantar para 7 pessoas prepara-se uma bandeja com 7 pratos contendo as entradas. As entradas podem ser bolinhos de bacalhau, mariscos, pastéis de queijo ou bolinhos de aipim (havendo pelo menos 7 unidades disponíveis de cada tipo de entrada). Quantas bandejas diferentes podem ser produzidas? Justifique.

   Resposta: Consideremos as seguintes variáveis:

   x_1: quantidade de BOLINHOS DE BACALHAU;

   x_2: quantidade de MARISCOS;

   x_3: quantidade de PASTÉIS DE QUEIJO;

   x_4: quantidade de BOLINHOS DE AIPIM.

   Queremos encontrar o número de maneiras de selecionar 7 pratos contendo as entradas de 4 tipos diferentes. Este problema é equivalente a resolver a equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \ \ \textit{onde} \ \ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Logo, temos $CR_4^7 = C_{7+4-1}^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!3!} = 120$ maneiras de preparar uma bandeja com 7 pratos contendo as entradas de 4 tipos diferentes.