Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD1 - Segundo Semestre de 2013

Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (1.5) Sejam A, B e C conjuntos arbitrários. Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

   (i) $\{A\} \subseteq P(A)$.

   Resposta: Verdadeiro, pois $A \in P(A)$. Consequentemente, $\{A\} \subseteq P(A)$.

   (ii) $\{\emptyset\} \in P(A)$.

   Resposta: Falso, pois $\{\emptyset\} \in P(A)$ se e somente se $\emptyset \in A$. Observe o seguinte contra exemplo:

   $$A = \{1\} \quad P(A) = \{\emptyset, \{1\}\}.$$

   Note que $\{\emptyset\}$ não é elemento de $P(A)$. Seria correto afirmar que $\emptyset \in P(A)$.

   (iii) $B \cap \overline{(\bar{C} \cap B)} \subseteq C$.

   Resposta: Verdadeiro.

$$
\begin{aligned}
B \cap \overline{(\bar{C} \cap B)} &= B \cap (\overline{\overline{C}} \cup \overline{B}) \\
&= B \cap (C \cup \overline{B}) \\
&= (B \cap C) \cup \underbrace{(B \cap \overline{B})}_{\emptyset} \\
&= (B \cap C)
\end{aligned}
$$

Como $(B \cap C) \subseteq C$ temos que a afirmação é verdadeira.

2. (1.5) Usando o Princípio de Inclusão e Exclusão para 3 conjuntos, determine a quantidade de números naturais x, tais que $100 \leq x \leq 1000$ e não são divisíveis nem por 2, nem por 3 e nem por 5. Justifique

   Resposta: Considere os seguintes conjuntos:

   $U = \{u \in \mathbb{N} | 100 \leq u \leq 1000\}$.

   $A = \{x \in \mathbb{N} | 100 \leq x = 2a \leq 1000, a \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{N} | x = 2a, 50 \leq a \leq 100, a \in \mathbb{N}\} = \{2 \times 50,\ \ 2 \times 51,\ \ 2 \times 52,\ \ \cdots,\ \ 2 \times 500\}$.

   $B = \{y \in \mathbb{N} | 100 \leq y = 3b \leq 1000, b \in \mathbb{N}\} = \{y \in \mathbb{N} | y = 3b, 34 \leq b \leq 333, b \in \mathbb{N}\} = \{3 \times 34,\ \ 3 \times 35,\ \ 3 \times 36,\ \ \cdots,\ \ 3 \times 333\}$.

   $C = \{z \in \mathbb{N} | 100 \leq z = 5c \leq 1000, c \in \mathbb{N}\} = \{z \in \mathbb{N} | z = 5c, 20 \leq c \leq 200, c \in \mathbb{N}\} = \{5 \times 20,\ \ 5 \times 21,\ \ 5 \times 22,\ \ \cdots,\ \ 5 \times 200\}$.

   Queremos determinar $n(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = n\overline{(A \cup B \cup C)} = n(U) - n(A \cup B \cup C)$.

   Para calcular $n(A \cup B \cup C)$, utilizaremos o Princípio da Inclusão e Exculsão para três conjuntos:

   $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

   Cálculo das cardinalidades dos conjuntos:

   $n(U) = 1000 - 99 = 901$

   $n(A) = 500 - 49 = 451$

   $n(B) = 333 - 33 = 300$

   $n(C) = 200 - 19 = 181$

$n(A \cap B) = \{k \in \mathbb{N} | 100 \leq k = 6d \leq 1000, d \in \mathbb{N}\} = \{k \in \mathbb{N} | k = 6d, 17 \leq d \leq 166, d \in \mathbb{N}\} = \{6 \times 17, \;\; 6 \times 18, \;\; 6 \times 19, \cdots, \;\; 6 \times 166\}$.

$n(A \cap B) = 166 - 16 = 150$

$n(A \cap C) = \{j \in \mathbb{N} | 100 \leq j = 10e \leq 1000, e \in \mathbb{N}\} = \{j \in \mathbb{N} | j = 10e, 10 \leq e \leq 100, e \in \mathbb{N}\} = \{10 \times 10, \;\; 10 \times 11, \;\; 10 \times 12, \;\; \cdots, \;\; 10 \times 100\}$.

$n(A \cap C) = 100 - 9 = 91$

$n(B \cap C) = \{l \in \mathbb{N} | 100 \leq l = 15f \leq 1000, f \in \mathbb{N}\} = \{l \in \mathbb{N} | l = 15f, 7 \leq f \leq 66, f \in \mathbb{N}\} = \{15 \times 7, \;\; 15 \times 8, \;\; 15 \times 9, \;\; \cdots, \;\; 15 \times 66\}$

$n(B \cap C) = 66 - 6 = 60$

$n(A \cap B \cap C) = \{m \in \mathbb{N} | 100 \leq m = 30g \leq 1000, g \in \mathbb{N}\} = \{m \in \mathbb{N} | m = 30g, 4 \leq g \leq 33, g \in \mathbb{N}\} = \{30 \times 4, \;\; 30 \times 5, \;\; 30 \times 6, \;\; \cdots, \;\; 30 \times 33\}$

$n(A \cap B \cap C) = 33 - 3 = 30$

Logo,

$n(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = n(U) - [n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)] = 901 - [451 + 300 + 181 - 150 - 91 - 60 + 30] = 240$.

3. (2,0) Mostre pelo Princípio da Indução Matemática que:

$$\sum_{i=2}^{n} (-1)^i i^2 = 1 + \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}$$

para todo $n \in \mathrm{N}, \; n \geq 2$.

(Lembre que $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.)

Resposta: Seja $P(n) : 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + \cdots + (-1)^n n^2 = 1 + \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}$ para todo $n \in \mathrm{N}, \; n \geq 2$.

BASE DA INDUÇÃO: $n = 2$.

Como $2^2 = 4$ e $\frac{1 + (-1)^2 2 \times 3}{2} = 1 + 3 = 4$, temos que $P(2)$ é verdadeira.

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Suponha que

$$P(k): 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + \cdots + (-1)^k k^2 = 1 + \frac{(-1)^k k(k+1)}{2}$$

é verdadeira para todo $k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$.

PASSO INDUTIVO: Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeira, então

$$P(k+1): 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + \cdots + (-1)^{k+1}(k+1)^2 = 1 + \frac{(-1)^{k+1}(k+1)(k+2)}{2}$$

também é verdadeira:

$$\underbrace{2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + \cdots + (-1)^k k^2}_{\text{H.I.}} + (-1)^{k+1}(k+1)^2 =$$

$$1 + \frac{(-1)^k k(k+1)}{2} + (-1)^{k+1}(k+1)^2 =$$

$$1 + (-1)^k (k+1)\left(\frac{k}{2} + (-1)(k+1)\right) =$$

$$1 + (-1)^k (k+1)\left(\frac{k - 2(k+1)}{2}\right) =$$

$$1 + (-1)^k (k+1)\left(\frac{-k-2}{2}\right) =$$

$$1 + (-1)^k (k+1)(-1)\ \frac{k+2}{2} =$$

$$1 + (-1)^{k+1}\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, temos que $P(n): 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + \cdots + (-1)^n n^2 = 1 + \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

4. (1,5) Quantos números naturais de 5 dígitos diferentes podem ser formados usando os algarismos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9 se:

   (a) não tem restrição? Justifique.

   Resposta: Neste caso, como queremos números com 5 algarismos distintos, temos 9 escolhas para o primeiro dígito (excluímos o zero) e em seguida temos que escolher 4 algarismos distintos entre os 9 restantes (um algarismo já foi utilizado) para ocupar as outras posições. Para isso temos, $A_9^4 = \frac{9!}{5!}$ maneiras. Pelo Princípio Multiplicativo temos: $9 \times \frac{9!}{5!} = 27216$ números naturais de 5 algarismos distintos.

   (b) o número deve ser par e maior que 20000? Justifique.

   Resposta: Vamos dividir a resolução em dois casos:

   CASO 1: Primeiro dígito ímpar

   Como queremos que os números sejam maiores que 20000, temos 4 possíveis algarismos para a primeira posição. Além disso, como os números têm que ser pares, para a quinta posição, temos 5 opções. Em seguida, temos que escolher 3 outros algarismos para as posições restantes. Para isso temos $A_8^3 = \frac{8!}{5!}$ formas. Então, pelo Princípio Multiplicativo temos $4 \times A_8^3 \times 5 = 6720$ números pares com 5 algarismos distintos maiores que 30000.

   CASO 2: Primeiro dígito par

   Neste caso, o primeiro dígito tem que ser par maior ou igual a 2. Então temos 4 candidatos possíveis. Além disso, como o último dígito também é par, também temos 4 opções de escolha. Em seguida, basta escolhermos e posicionarmos 3 algarismos nas 3 posições restantes. Temos $A_8^3 = \frac{8!}{5!}$ formas de fazê-lo. Pelo Princípio Multiplicativo, temos $4 \times A_8^3 \times 4 = 5376$ números pares com 5 algarismos distintos maiores que 20000 e que começam por número par.

   Assim, pelo Princípio Aditivo temos: $6720 + 5376 = 12096$ números pares com 5 algarismos distintos maiores que 20000.

5. (1,5) De um total de 70 políticos, 14 devem ser escolhidos para participar de um debate, sentados em uma mesa redonda. Os políticos P1,

P2, P3, P4 e P5 só irão se forem participar juntos. Neste caso, P1, P2 e P3 vão sentar lado a lado, enquanto que P4 nunca sentará do lado de P5. De quantas maneiras distintas os políticos podem sentar à mesa? Justifique.

Resposta: Para solucionar esta questão, vamos separar em dois casos:

CASO 1: Os políticos P1, P2, P3, P4 e P5 não participarão.

Então temos 65 políticos restantes para escolher 14 e em seguida, posicioná-los à mesa. Assim, temos $C_{65}^{14} \times PC_{14} = \frac{65!}{51!14!} \times (14-1)! = \frac{65!}{51!14!} \times 13! = \frac{65!}{51!14}$.

CASO 2: Os políticos P1, P2, P3, P4 e P5 participarão.

Primeiramente, vamos ecolher os outros 9 que participarão do debate. Temos $C_{65}^{9} = \frac{65!}{56!9!}$ maneiras de fazer isto. Em seguida, vamos posicioná-los à mesa. Temos $PC(9) = (9-1)! = 8!$ formas de sentá-los à mesa.

Como P1, P2 e P3 precisam sentar lado a lado, vamos permutá-los entre si, e posicioná-los à mesa como se fossem uma única pessoa em algum dos lugares disponíveis entre os políticos já posicionados. Temos 9 espaços vazios. Logo, pelo Princípio Multiplicativo temos $9 \times 3!$ formas de posicionar P1, P2, P3.

Após sentá-los, temos 10 possíveis lugares para P4 e 9 possíveis lugares para P5, tendo em vista que eles não sentam juntos à mesa.

Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, temos $\frac{65!}{56!9!} \times 8! \times 9 \times 3! \times 10 \times 9$ configurações de mesa possíveis repeitando as restrições de P1, P2, P3, P4 e P5.

Assim, pelo Princípio Aditivo temos: $\frac{65!}{51!14} + \frac{65!}{56!9!} \times 8! \times 9 \times 3! \times 10 \times 9$ formas distintas de configurar a mesa deste debate.

6. (2,0) Considere 30 pessoas que asistem a um espetáculo numa sala de cadeiras enumeradas, distribuídas em 5 filas com 6 em cada uma delas. De quantas maneiras podem sentar os espectadores se:

   (a) não tem nenhuma restrição? Justifique;

   Resposta: Neste caso, como as cadeiras são numeradas, basta permutarmos os espectadores: $P_{30} = 30!$.

(b) O espectador mais alto de cada fila senta na cadeira com menor numeração dessa fila? Justifique.

Resposta: Consideraremos as alturas dos espectadores distintas.

Vamos escolher os espectadores para cada uma das fileiras e em seguida posicioná-los sempre colocando o mais alto de cada fila na cadeira de numeração mais baixa.

Para escolhermos os ocupantes da fila 1 temos $C_{30}^{6} = \frac{30!}{24!6!}$ maneiras e para posicioná-los temos $P_5 = 5!$ (a posição 1 será ocupada pelo mais alto escolhido).

Para escolhermos os ocupantes da fila 2 temos $C_{24}^{6} = \frac{24!}{18!6!}$ maneiras e para posicioná-los temos $P_5 = 5!$ (a posição 7 será ocupada pelo mais alto escolhido).

Para escolhermos os ocupantes da fila 3 temos $C_{18}^{6} = \frac{18!}{12!6!}$ maneiras e para posicioná-los temos $P_5 = 5!$ (a posição 13 será ocupada pelo mais alto escolhido).

Para escolhermos os ocupantes da fila 4 temos $C_{12}^{6} = \frac{12!}{6!6!}$ maneiras e para posicioná-los temos $P_5 = 5!$ (a posição 19 será ocupada pelo mais alto escolhido).

Para escolhermos os ocupantes da fila 5 temos $C_{6}^{6} = \frac{6!}{0!6!} = 1$ maneiras e para posicioná-los temos $P_5 = 5!$ (a posição 24 será ocupada pelo mais alto escolhido).

Logo, pelo Princípio Multiplicativo temos $\frac{30!}{24!6!} \times 5! \times \frac{24!}{18!6!} \times 5! \times \frac{18!}{12!6!} \times 5! \times \frac{12!}{6!6!} \times 5! \times 5! = \frac{30!}{6^5}$ maneiras de posicionar os espectadores seguindos as restrições.

(c) Os 6 espectadores mais altos sentam na última fila? Justifique

Resposta: Consideraremos as alturas dos espectadores distintas.

Vamos permutar os 6 espectadores mais altos e em seguida os demais espectadores para ocuparem as outras posições: $P_6 \times P_{24} = 6! \times 24!$.