Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da EP da Aula 04

Observação:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.

2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo antes de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.

3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

Prove usando indução matemática

$(i) \quad 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \qquad \forall \; n \in \mathbb{N}.$

***P*rova:**

Consideremos a seguinte proposição:

$$P(n): \quad 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Devemos mostrar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

1. *Base da Indução*:

   Para $n = 1$ temos que

   $$P(1) \quad : \quad 1 = 2^1 - 1 \text{ é verdadeira pois}$$

   $$1 = 2 - 1 = 2^1 - 1.$$

2. *Hipótese de Indução*:

   Assumimos que a proposição é válida para $n = k$:

   $$(HI) \qquad P(k): \quad 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1.$$

   Então, devemos provar que:

   $$P(k+1): \quad 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{(k+1)-1} = 2^{k+1} - 1$$

   é verdadeira.

   De fato,

$$
\begin{aligned}
1+2+4+\cdots+2^{(k+1)-1} &= \underbrace{(1+2+4+\cdots+2^{k-1})}_{(HI)}+2^k \\
&= (2^k-1)+2^k \\
&= 2.2^k-1 \\
&= 2^{k+1}-1.
\end{aligned}
$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeira.

Dos passos 1 e 2, pelo princípio de indução, concluimos que $P(n)$ é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é:

$$1+2+4+\cdots+2^{n-1}=2^n-1 \quad , \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

(ii) $\quad \sum_{i=1}^{n} i(i+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \quad \forall \ n \in \mathtt{N}.$

***P*rova:**

Considere a proposição:

$$P(n) \ : \ \sum_{i=1}^{n} i(i+1)=\tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2) \ , \ n \in \mathbb{N}.$$

Devemos provar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

1. *Base da indução*:

   Vamos mostrar que a proposição $P(n)$ é verdadeira para $n=1$:

$$P(1) \ : \quad \sum_{i=1}^{1} i(i+1)=\frac{1}{3}.1(1+1)(1+2)$$

   De fato,

$$\sum_{i=1}^{1} i(i+1)=1(1+1)=2$$

e

$$\frac{1}{3}.1(1+1)(1+2) = \frac{1}{3}.2.3 = 2$$

Das duas igualdades acima concluimos que

$$\sum_{i=1}^{1} i(i+1) = 2 = \frac{1}{3}.1(1+1)(1+2).$$

Isto é, $P(1)$ é verdadeira.

2. *Hipótese de indução*:

   Assumimos que $P(k)$ é verdadeira para $k \geq 1$, (HI),

$$P(k) \ : \quad \sum_{i=1}^{k} i(i+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$$

3. *Passo indutivo*:

   Devemos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, devemos mostrar que:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1) = \frac{1}{3}(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2)$$

   supondo que $P(k)$ é válida.

   Desenvolvemos o primeiro termo de $P(k+1)$e aplicamos a hipótese indutiva,

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1) &= \underbrace{\sum_{i=1}^{k} i(i+1)}_{(HI)} + (k+1)((k+1)+1) \\
&= \tfrac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) \\
&= (k+1)(k+2)(\tfrac{k}{3}+1) \\
&= \tfrac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3).
\end{aligned}$$

Por outro lado, desenvolvemos o segundo membro de $P(k+1)$:

$$\frac{1}{3}(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3).$$

Portanto, das últimas duas igualdades concluimos que

$$\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{1}{3}(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2),$$

ou seja, $P(k+1)$ é verdadeira.

Logo, pelo princípio de indução matemática temos que

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

é verdadeira para todo $\in \mathbb{N}$.

(iii) $\quad 2+5+8+\cdots+(3n-1) = \frac{1}{2}n(1+3n) \quad \forall \ n \in \mathbb{N}.$

***P*rova:**

1. *Base da indução*:

Devemos provar que a igualdade se verifica para $n=1$,

$$3.1 - 1 = \frac{1}{2}(1+3.1)$$

o que é verdade pois:

$$3.1 - 1 = 2 = \frac{1}{2}(1+3.1)$$

2. *Hipótese de indução*:

Vamos provar que a seguinte implicação é válida:

$$\sum_{i=1}^{k}(3i-1)=\frac{1}{2}k(1+3k)\Rightarrow\sum_{i=1}^{k+1}(3i-1)=\frac{1}{2}(k+1)(1+3(k+1)),$$

assumindo que a hipótese de indução é verificada,

$$(HI)\ :\quad \sum_{i=1}^{k}(3i-1)=\frac{1}{2}k(1+3k).$$

Para mostrar que a igualdade também é válida para $k+1$, começamos desenvolvendo

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^{k+1}(3i-1) &= \underbrace{[2+5+8+\cdots+(3k-1)]}_{(HI)}+(3(k+1)-1)\\
&= \tfrac{1}{2}k(1+3k)+(3k+2)\\
&= \tfrac{1}{2}[k(1+3k)+2(3k+2)]\\
&= \tfrac{1}{2}(k+3k^2+6k+4)\\
&= \tfrac{1}{2}(3k^2+7k+4).
\end{aligned}$$

Agora, desenvolvemos o segundo membro da igualdade que queremos provar:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(k+1)(1+3(k+1)) &= \tfrac{1}{2}(k+1)(1+3k+3)\\
&= \tfrac{1}{2}(k+1)(3k+4)\\
&= \tfrac{1}{2}(3k^2+3k+4k+4)\\
&= \tfrac{1}{2}(3k^2+7k+4).
\end{aligned}$$

Logo, resulta

$$\sum_{i=1}^{k+1}(3i-1)=\frac{1}{2}(3k^2+7k+4)=\frac{1}{2}(k+1)(1+3(k+1)).$$

Portanto

$$\sum_{i=1}^{k+1}(3i-1) = \frac{1}{2}(k+1)(1+3(k+1))$$

que é a igualdade que queriamos provar. Então, pelo princípio de indução matemática, concluimos que

$$2+5+8+\cdots+(3n-1) = \tfrac{1}{2}n(1+3n) \qquad \forall \;\; n \in \mathbb{N}.$$

(iv) $(1+1)(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdots(1+\frac{1}{n}) = n+1 \qquad \forall \;\; n \in \mathbb{N}.$

***P*rova:**

1. *Base da indução*:

   Observemos que, para $n=1$, a igualdade se reduz a

   $$1+1 = 1+1 \qquad ,$$

   o que é verdade.

2. *Hipótese de indução*:

   Vamos mostrar que se a igualdade é válida para $n=k$:

   $$(HI) \;\; : \quad (1+1)(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdots(1+\frac{1}{k}) = k+1$$

   então, também se verifica para $k+1$. Isto é, usando a igualdade acima devemos ver que

   $$(1+1)(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdots(1+\frac{1}{k+1})) = (k+1)+1.$$

De fato, desenvolvendo

$$
\begin{aligned}
(1+1)(1+\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{3})\cdots(1+\tfrac{1}{k+1}) &= \underbrace{[(1+1)(1+\frac{1}{2})\cdots(1+\frac{1}{k})]}_{(HI)}(1+\tfrac{1}{k+1}) \\
&= (k+1)(1+\tfrac{1}{k+1}) \\
&= (k+1)(\tfrac{k+1+1}{k+1}) \\
&= k+2.
\end{aligned}
$$

Logo, provamos que a igualdade é válida para $n = k+1$.

Portanto, pelo princípio de indução matemática concluimos que

$$(1+1)(1+\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{3})\cdots(1+\tfrac{1}{n}) = n+1 \quad \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

(v) 2 divide $n^2+n \quad \forall \ n \in \mathbb{N}$.

Seja

$$P(n) \ : \ 2 \text{ divide } n^2+n \quad , \ n \in \mathbb{N}.$$

1. *Base da indução*:

   Para $n = 1$ temos que 2 divide $1^1 + 1$, portanto $P(1)$ é verdadeira.

2. *Hipótese de indução*:

   Suponhamos que a proposição se verifica para k, isto é, $P(k)$ é verdadeira:

$$P(k) \ : \quad 2 \text{ divide } k^2 + k,$$

ou seja, para algum $q \in \mathbb{N}$ temos que $k^2 + k = 2q$.

Devemos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, isto é:

$$P(k+1) \ : \quad 2 \text{ divide } (k+1)^2 + (k+1).$$

De fato, desenvolvendo $(k+1)^2+(k+1)$ e usando a hipótese de indução, resulta:

$$\begin{aligned}
(k+1)^2 + (k+1) &= (k^2 + 2k + 1) + (k+1) \\
&= \underbrace{(k^2 + k)}_{HI} + (2k + 2) \\
&= 2q + 2(k+1) \\
&= 2(q + k + 1).
\end{aligned}$$

Definindo $r = q + k + 1$, temos que $r \in \mathbb{N}$ e das igualdades acima concluimos que

$$(k+1)^2 + (k+1) = 2r,$$

o que significa que 2 divide $(k+1)^2+(k+1)$, isto é, $P(k+1)$ é verdadeira.

Logo, pelo princípio de indução matemática, resulta que $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$2 \text{ divide } n^2 + n \qquad \forall \ n \in \mathbb{N}$$

que é o queriamos mostrar.