Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AD1 - Primeiro Semestre de 2010

Questões:

1. (2.0) Considere os seguintes conjuntos:
   $A=$ conjunto dos números naturais menores ou igual a 200 tais que são múltiplos de 5
   $B=$ conjunto dos números naturais menores ou igual a 200 tais que são múltiplos de 9
   $C=\{x \in \Re : |2x-1| \leq 251\}$
   Observação: Consideramos os números naturais começando com 1.

   (a) Descreva A e B usando notação matemática (como C).

   Resposta: Os conjuntos A e B estão descritos abaixo, usando a notação matemática:
   $A = \{x \in \mathbb{N} : x = 5q, q \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 200\}$ e,
   $B = \{y \in \mathbb{N} : y = 9k, k \in \mathbb{N}, 1 \leq y \leq 200\}$.

   (b) Use a propriedade distributiva da interseção de conjuntos em relação à união e também o Princípio da Inclusão e Exclusão para encontrar o número de elementos de $(A \cup B) \cap C$. Justifique.

   Resposta: Pela propriedade distributiva de conjuntos em relação à união, temos que

   $$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

   Portanto,

   $$n((A \cup B) \cap C) = n((A \cap C) \cup (B \cap C)).$$

   Aplicando o Princípio da Inclusão e Exclusão ao segundo membro desta igualdade, resulta

   $$\begin{aligned} n((A \cup B) \cap C) &= n((A \cap C) + n(B \cap C) - n((A \cap C) \cap (B \cap C)) \\ &= n((A \cap C) + n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C) \end{aligned} \quad (1)$$

Cálculo de $n(A \cap C)$:

O conjunto $C = \{x \in \Re : |2x - 1| \leq 251\}$, isto é, $C = \{x \in \Re : -251 \leq 2x - 1 \leq 251\} = \{x \in \Re : -250 \leq 2x \leq 252\} = \{x \in \Re : -125 \leq x \leq 126\}$.

O conjunto $A \cap C = \{x \in \mathbb{N} : \ x = 5k, k \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 126\} = \{x \in \mathbb{N} : \ x = 5k, k \in \mathbb{N}, 1 \leq 5k \leq 126\} = \{x \in \mathbb{N} : \ x = 5k, k \in \mathbb{N}, \frac{1}{5} \leq k \leq \frac{126}{5}\} = \{k \in \mathbb{N} : \ 1 \leq k \leq 25\}$. Logo,

$$n(A \cap C) = 25. \tag{2}$$

Cálculo de $n(B \cap C)$:

O conjunto $B \cap C = \{x \in \mathbb{N} : \ x = 9q, q \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 125\} = \{x \in \mathbb{N} : \ x = 9q, q \in \mathbb{N}, 1 \leq 9q \leq 126\} = \{x \in \mathbb{N} : \ x = 9q, q \in \mathbb{N}, \frac{1}{9} \leq q \leq \frac{126}{9}\} = \{q \in \mathbb{N} : \ 1 \leq q \leq 14\}$. Logo,

$$n(B \cap C) = 14. \tag{3}$$

Cálculo de $n((A \cap B \cap C)$:

O conjunto $A \cap B \cap C = \{x \in \mathbb{N} : \ x = 45r, r \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 126\} = \{x \in \mathbb{N} : \ x = 45r, r \in \mathbb{N}, 1 \leq 45r \leq 126\} = \{x \in \mathbb{N} : \ x = 45r, r \in \mathbb{N}, \frac{1}{45} \leq r \leq \frac{126}{45}\} = \{r \in \mathbb{N} : \ 1 \leq r \leq 2\}$. Logo,

$$n(A \cap B \cap C) = 2. \tag{4}$$

Então, substituindo em (1), obtemos:

$$\begin{array}{rcl} n((A \cup B) \cap C) & = & n((A \cap C) \cup (B \cap C)) = \\ & = & 25 + 14 - 2 = 37 \end{array}$$

2. (2.0) Mostre pelo Princípio da Indução Matemática que:

$$(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{8}) \cdots (1 - \frac{1}{2^n}) \ \geq \ \frac{1}{2} \ + \ \frac{1}{2^n}$$

para todo n natural e $n > 1$.

Resposta: Seja $P(n)$: $(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{8})\cdots(1-\frac{1}{2^n}) \ \geq \ \frac{1}{2} \ + \ \frac{1}{2^n}$

Base da indução:

Para $n = 2$, $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$, logo $P(2)$ é verdadeira.

Hipótese de Indução:

Suponha verdadeiro para $k > 1$, isto é, $P(k)$ é verdadeira, para $k > 1$:

$$P(k) : (1-\tfrac{1}{4})(1-\tfrac{1}{8})\cdots(1-\tfrac{1}{2^k}) \ \geq \ \tfrac{1}{2} \ + \ \tfrac{1}{2^k}$$

Passo da Indução:

Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeiro então $P(k+1)$ é verdadeiro, isto é, temos que provar que:

$$P(k+1) : (1-\tfrac{1}{4})(1-\tfrac{1}{8})\cdots(1-\tfrac{1}{2^{k+1}}) \ \geq \ \tfrac{1}{2} \ + \ \tfrac{1}{2^{k+1}} \text{ é verdadeira.}$$

Desenvolvendo:

$$\begin{array}{rlr} & (1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{8})\cdots(1-\frac{1}{2^{k+1}}) & = \\ = & \underbrace{(1-\dfrac{1}{4})(1-\dfrac{1}{8})\cdots(1-\dfrac{1}{2^k})}_{H.I.}(1-\frac{1}{2^{k+1}}) & \geq \\ \geq & (\frac{1}{2}+\frac{1}{2^k})(1-\frac{1}{2^{k+1}}) & = \\ = & \frac{1}{2}+\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k+2}}-\frac{1}{2^{2k+1}} & = \\ = & \frac{1}{2}+\frac{1}{2^k}[1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^{k+1}}] & \end{array} \tag{5}$$

Vamos mostrar que $1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2}$.
De fato, como $k \geq 1$ temos que $k+1 \geq 2$, logo $2^{k+1} \geq 2^2$. Portanto, $\frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2^2}$. Então $-\frac{1}{2^{k+1}} \geq -\frac{1}{2^2}$. Em consequência,

$$1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{k+1}} \geq 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Agora, multiplicamos ambos membros da desigualdade acima por $\frac{1}{2^k} > 0$, obtemos

$$\frac{1}{2^k}[1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^{k+1}}] \geq \frac{1}{2^k}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2^{k+1}}. \tag{6}$$

Finalmente, de (5) e (6) resulta

$$(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{8})\cdots(1-\frac{1}{2^{k+1}}) \geq \frac{1}{2}+\frac{1}{2^{k+1}}.$$

Logo, pelo princípio da indução matemática, $P(n)$ é verdadeiro para todo $n > 1$ natural.

3. (2.0) 5 rapazes e 5 moças devem posar para uma fotografia, ocupando 5 degraus de uma escadaria. Supondo que cada degrau deva conter exatamente 2 pessoas, responda:

(a) De quantas maneiras isso pode ser feito? Justifique.

Resposta: Suponhamos que $(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5)$ são as 5 moças e os 5 rapazes, respectivamente. Como não há restrição entre os rapazes e as moças, vamos escolher os lugares para colocar essas 10 pessoas.

A primeira moça M_1 - 10 modos
A segunda moça M_2 - 9 modos
A terceira moça M_3 - 8 modos
A quarta moça M_4 - 7 modos
A quinta moça M_5 - 6 modos
O primeiro rapaz R_1 - 5 modos
O segundo rapaz R_2 - 4 modos
O terceiro rapaz R_3 - 3 modos
O quarto rapaz R_4 - 2 modos
O quinto rapaz R_5 - 1 modo

Pelo princípio da multiplicação, temos:

$10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 3628800$ maneiras.

Observem que o problema pode ser resolvido diretamente usando permutações simples de 10 elementos (neste caso: pessoas).

(b) De quantas maneiras isso pode ser feito de modo que em cada degrau fique um rapaz e uma moça? Justifique.

Resposta:

Raciocínio 1: Suponhamos que $(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5)$ são as 5 moças e os 5 rapazes, respectivamente. Vamos escolher os lugares para colocar essas 10 pessoas.

Vamos colocar primeiro as moças.

A primeira moça M_1 - 10 modos
A segunda moça M_2 - 8 modos
A terceira moça M_3 - 6 modos
A quarta moça M_4 - 4 modos
A quinta moça M_5 - 2 modos
O primeiro rapaz R_1 - 5 modos
O segundo rapaz R_2 - 4 modos
O terceiro rapaz R_3 - 3 modos
O quarto rapaz R_4 - 2 modos
O quinto rapaz R_5 - 1 modo

Pelo princípio da multiplicação, temos:

$10.8.6.4.2.5.4.3.2.1 = 460800$ maneiras.

Raciocínio 2: Podemos permutar os rapazes, um em cada degrau, de $P_5 = 5!$ maneiras. Da mesma forma podemos permutar as moças, uma em cada degrau, de $P_5 = 5!$ maneiras. Além disso, precisamos também considerar a ordem dos casais em casa degrau : $(P_2)^5 = 2^5$. Pelo princípio da multiplicação, temos então: $5!5!2^5 = 460800$ maneiras

4. (2.0) 10 bandeiras devem ser arrumadas verticalmente (uma embaixo da outra, em sequência), sendo que 2 são brancas, 3 são vermelhas e 5 são azuis.

(a) De quantas maneiras podemos arrumá-las? Justifique.

Resposta:

Raciocínio 1: Devido as repetições das cores das bandeiras, então arrumar as bandeiras verticalmente corresponde a uma permutação com repetição de 10 elementos (bandeiras) onde são repetidas 2 bandeiras brancas, 3 bandeiras vermelhas e 5 bandeiras azuis. Logo, o total de permutações é $P_{10}^{2,3,5} = \frac{10!}{2!3!5!} = 2520$.

Raciocínio 2: Como bandeiras de uma mesma cor são indistinguíveis entre si, temos C_{10}^2 formas de escolher as posições das bandeiras brancas, feito isso podemos escolher as posições das vermelhas de C_8^3 e então C_5^5 formas de distribuir as azuis. Pelo princípio multiplicativo, temos $C_{10}^2 C_8^3 C_5^5 = 2520$ maneiras de arrumar as 10 bandeiras verticalmente.

(b) E se houver a exigência de que a primeira e a última bandeira dessa sequência de 10 sejam azuis? Justifique.

Resposta: Como a primeira e a última bandeira da sequência são azuis, basta fixarmos duas bandeiras azuis nestas posições, e teremos que arrumar as 8 bandeiras restantes verticalmente, o que corresponde a uma permutação das 8 bandeiras onde são repetidas 2 brancas, 3 vermelhas e 3 azuis. Logo, o total de permutações é $P_8^{2,3,3} = \frac{8!}{2!3!3!} = 560$.

5. (2.0) De quantas maneiras podemos dispor 30 livros distintos em 6 prateleiras de uma livraria, se cada prateleira suporta até 30 livros? Justifique.

Resposta: Associamos a cada prateleira uma variável x_i, $1 \leq x_i \leq 6$ onde x_i é a quantidade de livros que a prateleira i possui. Observe que podemos ter prateleiras vazias, logo $x_i \geq 0$.

Como o total de livros distribuídos é 30, temos que o número de maneiras de dispormos os livros em cada prateleira corresponde ao número de soluções inteiras e não negativas da equação:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 30$$

Esse número é dado por $CR_6^{30} = CR_{6+30-1}^{30} = C_{35}^{30} = \frac{35!}{30!5!}$.

Além disso, para cada uma dessas divisões podemos permutar os livros de $P_{30} = 30!$ maneiras diferentes. Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos $\frac{35!}{30!5!}.30!$ distribuições diferentes.