Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD2 - Segundo Semestre de 2013

Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (1.5) Usando o Teorema das linhas mostre que:

$$1 \cdot 2C_n^2 + 2 \cdot 3C_n^3 + 3 \cdot 4C_n^4 + \cdots + (n-1)nC_n^n = n(n-1)2^{n-2}$$

Sugestão: Mostre primeiro que $\sum_{k=2}^{n}(k-1)kC_n^k = 1 \cdot 2C_n^2 + 2 \cdot 3C_n^3 + 3 \cdot 4C_n^4 + \cdots + (n-1)nC_n^n = n\sum_{k=1}^{n-1} kC_{n-1}^k$.

Resposta: O Teorema das Linhas nos diz que:

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

Observe que podemos reescrever a expressão

$$1 \cdot 2C_n^2 + 2 \cdot 3C_n^3 + 3 \cdot 4C_n^4 + \cdots + (n-1)nC_n^n$$

da seguinte forma:

$$\sum_{k=2}^{n}(k-1)kC_n^k \quad (I)$$

Vamos desenvolver a expressão (I) para podermos aplicar o Teorema das Linhas e obter o resultado desejado.

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=2}^{n}(k-1)kC_n^k &= \textstyle\sum_{k=2}^{n}(k-1)k\frac{n!}{(n-k)!k!}\\
&= \textstyle\sum_{k=2}^{n}(k-1)kn\frac{(n-1)!}{(n-k)!k!}\\
&= n\textstyle\sum_{k=2}^{n}(k-1)k\frac{(n-1)!}{(n-k)!k!}\\
&= n\textstyle\sum_{k=2}^{n}(k-1)\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}
\end{aligned}$$

Fazendo $j = k - 1$ temos que para $k = 2$, $j = 1$ e para $k = n$ temos $j = n - 1$.

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=2}^{n}(k-1)kC_n^k &= n\textstyle\sum_{j=1}^{n-1} j\frac{(n-1)!}{(n-(j+1))!j!}\\
&= n\textstyle\sum_{j=1}^{n-1} j\frac{(n-1)!}{((n-1)-j)!j!}\\
&= n\textstyle\sum_{j=1}^{n-1} jC_{n-1}^j
\end{aligned}$$

Observe que no lugar de j podemos colocar qualquer outra letra, por exemplo, k. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=2}^{n}(k-1)kC_n^k &= n\textstyle\sum_{k=1}^{n-1} kC_{n-1}^k\\
&= n\textstyle\sum_{k=1}^{n-1} k\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!}\\
&= n\textstyle\sum_{k=1}^{n-1} k(n-1)\frac{(n-2)!}{(n-k-1)!k!}\\
&= n\textstyle\sum_{k=1}^{n-1}(n-1)\frac{(n-2)!}{(n-k-1)!(k-1)!}\\
&= n(n-1)\textstyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-2)!}{((n-2)-(k-1))!(k-1)!}\\
&= n(n-1)\textstyle\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-2}^{k-1}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k=2}^{n}(k-1)kC_n^k &= n(n-1)\underbrace{\left[C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + \cdots + C_{n-2}^{n-2}\right]}_{\text{Teorema das Linhas}} \\ &= n(n-1)2^{n-2}\end{aligned}$$

2. (1.5) Obtenha o termo que tem o mesmo grau em x e em y no desenvolvimento do binômio de Newton correspondente a:

$$\left(\frac{y^2}{\sqrt{x}} - \frac{x^6}{y}\right)^{95} \quad \text{com } \ x > 0, \ \ y \neq 0.$$

Justifique.

Resposta: A fórmula para o termo geral do desenvolvimento do Binômio de Newton de $(a+b)^n$ é dada por: $T_{k+1} = C_n^k \ a^{n-k} \ b^k$, para $k = 0, 1, \cdots, n$. Neste caso, temos que determinar o valor de k de modo que o $(k+1)$-ésimo termo deste desenvolvimento apresente x e y com expoentes iguais. Note que $a = \frac{y^2}{\sqrt{x}} = \frac{y^2}{x^{\frac{1}{2}}} = y^2 x^{-\frac{1}{2}}$ e $b = -\frac{x^6}{y} = -x^6 y^{-1}$ e $n = 95$. Assim:

$$T_{k+1} = C_{95}^k \ (y^2 x^{-\frac{1}{2}})^{95-k} \ (-x^6 y^{-1})^k$$

$$T_{k+1} = (-1)^k C_{95}^k \ y^{190-2k} x^{-\frac{95}{2}+\frac{k}{2}} \ x^{6k} y^{-k}$$

$$T_{k+1} = (-1)^k C_{95}^k \ y^{190-3k} x^{-\frac{95}{2}+6k+\frac{k}{2}}$$

$$T_{k+1} = (-1)^k C_{95}^k \ y^{190-3k} x^{\frac{-95+13k}{2}}$$

Como queremos que x e y tenham os mesmos expoentes temos:

$$190 - 3k = \frac{-95+13k}{2}$$

$$380 - 6k = -95 + 13k$$

$$19k = 475$$

$$k = 25$$

Logo, o termo procurado é:

$$T_{26} = (-1)^{25} C_{95}^{25} y^{190-75} x^{\frac{-95+325}{2}}$$

$$T_{26} = -\frac{95!}{70!25!} y^{115} x^{115}$$

3. (1.5) Encontre a fórmula fechada da seguinte relação de recorrência, usando substitução regressiva.

$$a_n = 2a_{n-1} + n2^n \text{ para } n \geq 2 \text{ sendo } a_1 = 2.$$

Justifique.

Resposta: Utilizando o método da Substituição regressiva temos:

$$\begin{aligned}
a_n &= 2a_{n-1} + n2^n \\
&= 2\underbrace{\left(2a_{n-2} + (n-1)2^{n-1}\right)}_{a_{n-1}} + n2^n \\
&= 2^2 a_{n-2} + (n-1)2^n + n2^n \\
&= 2^2 \underbrace{\left(2a_{n-3} + (n-2)2^{n-2}\right)}_{a_{n-2}} + (n-1)2^n + n2^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= 2^3 a_{n-3} + (n-2)2^n + (n-1)2^n + n2^n \\
&\vdots \\
&= 2^i a_{n-i} + (n-(i-1))2^n + (n-(i-2))2^n + \cdots + n2^n \\
&= 2^i a_{n-i} + 2^n[(n-i+1) + (n-i+2) + \cdots + n]
\end{aligned}$$

Fazendo $n - i = 1$ temos que $i = n - 1$ e sabendo que $a_1 = 2$, temos:

$$\begin{aligned}
a_n &= 2^{n-1}a_1 + 2^n[(n-n+1+1) + (n-n+1+2) + \cdots + n] \\
&= 2^{n-1}2 + 2^n[2 + 3 + \cdots + n] \\
&= 2^n \underbrace{[1 + 2 + 3 + \cdots + n]}_{\text{soma dos } n \text{ primeiros termos de uma P.A.}} \\
&= 2^n \tfrac{n(n+1)}{2} \\
&= 2^{n-1}n(n+1)
\end{aligned}$$

Portanto, a fórmula fechada para a relação de recorrência é $a_n = 2^{n-1}n(n+1), n \geq 2, a_1 = 2$.

4. (4.0) Seja $G = (V, E)$ um grafo dado por:
$V = \{a, b, c, d, e, f\}$,
$E = \{(a,b), (a,c), (a,d), (a,e), (a,f), (b,c), (b,e), (b,f), (c,d), (c,e), (c,f), (d,e), (e,f)\}$

(a) Desenhe o grafo G e o seu grafo complemento $\overline{G}$.

Resposta: Observe a Figura 1.

(b) G possui vértice universal? E $\overline{G}$? Justifique.

Resposta: Sim, em G os vértices a, e, c são universais (i.e, são adjacentes a todos os outros vértices do grafo, logo possuem grau 5 = grau máximo de G). Claramente, em $\overline{G}$ não temos vértice de grau 5 e, portanto, não temos vértice universal.

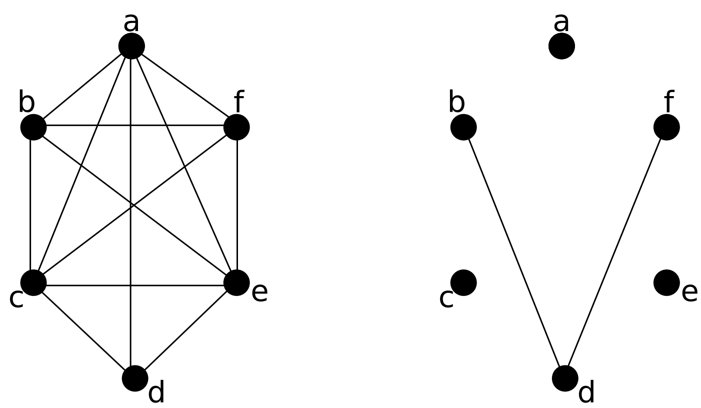

Figura 1: Grafo G e seu complemento $\overline{G}$, da esquerda para a direita.

(c) G possui vértice isolado? E $\overline{G}$? Justifique.

Resposta: Como dito no item (b), G possui vértices universais, não podendo ter vértice isolado (grau zero). Entretanto, em $\overline{G}$ temos vértices isolados, a saber: a, c, e, os mesmos vértices que eram universais em G.

(d) Desenhe o subgrafo induzido pelo conjunto $A = \{a, c, d, e\}$. Justifique.

Resposta: Seja $V_1 = \{a, c, d, e\}$. $G[V_1] = (V_1, E_1)$ onde $E_1 = \{(x, y) \in E(G) | x, y \in V_1\}$. Sendo assim, na Figura 2 temos o subgrafo induzido desejado.

(e) Qual a maior clique de G? Justifique.

Resposta: A maior clique de G é o conjunto formado por 5 vértices, a saber: $\{a, b, c, e, f\}$. Observe que o grafo $G[\{a, b, c, d, f\}] \simeq K_5$. Não existe clique maior, pois se existisse ela teria que ter no mínimo 6 vértices e o grafo teria que ser completo.

(f) Qual o maior conjunto independente de $\overline{G}$? Justifique.

Resposta: O maior conjunto independente de $\overline{G}$ possui 5 vértices, a saber: $\{a, b, c, e, f\}$. Como o vértice d é adjacente a b e a f

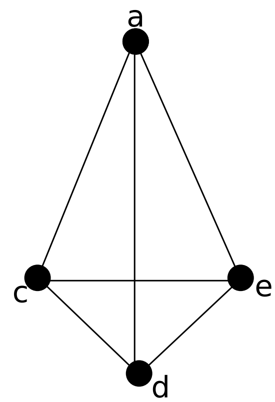

Figura 2: Subgrafo de G induzido pelos vértices a, c, d, e.

ele não pode ser inserido neste conjunto. Além disso, se ao invés de b, f inseríssemos o vértice d, claramente a cardinalidade deste novo conjunto seria menor do que a do conjunto anterior.

(g) Dê a matriz de adjacência de G.

Resposta: Seja $A_{n\times n} = [a_{ij}]$ a matriz de adjacência do grafo G, onde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad \text{se}(v_i, v_j) \in E(G); \\ 0 & , \quad \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$A = \left[\begin{array}{c|cccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ d & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ e & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ f & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(h) Dê a matriz de incidência de $\overline{G}$.

Resposta: Seja $B_{n\times m} = [b_{ij}]$ a matriz de incidência do grafo G, onde

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad \text{se } e_j \text{ é incidente ao vértice } v_i \\ 0 & , \quad \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$B = \left[\begin{array}{c|cc} & (b,d) & (d,f) \\ \hline a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ d & 1 & 1 \\ e & 0 & 0 \\ f & 0 & 1 \end{array} \right]$$

5. (1.5) Seja G um grafo com sequência de graus dos vértices dada por: $(1, 1, 2, 3, 3, 4, 4\}$.

(a) Quantos vértices e quantas arestas o grafo G possui? Justifique.

Resposta: Pelo Teorema do Aperto de Mãos temos:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m,$$

onde m é o número de arestas de G.
Da sequência de graus fornecida temos que $n = 7$, onde n é o número de vértices de G e que

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 18,$$

donde

$$18 = 2m$$

$$m = 9.$$

Portanto, G tem 7 vértices e 9 arestas.

(b) G é um grafo regular? Justifique.

Resposta: Um grafo é regular se todos os seus vértices tem o mesmo grau. Como os vértices deste grafo têm graus distintos, G não é regular.