Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP1 - Segundo Semestre de 2019

Questões:

1. (1.8) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

   (a) $\emptyset = \{\emptyset\}$;

   Resposta: A afirmação é falsa. O símbolo $\emptyset$ representa o conjunto que não possui elementos e o conjunto $\{\emptyset\}$ é um conjunto unitário que possui como elemento o símbolo $\emptyset$. Logo, as afirmações corretas são:

   $$\emptyset \neq \{\emptyset\}$$

   OU

   $$\emptyset \in \{\emptyset\}$$

   OU

   $$\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$$

   (b) Se $A = B \cup C$ então $B = A - C$;

   Resposta: A afirmação é falsa. Consideremos os conjuntos:

   $$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4\} \quad e \quad C = \{3, 4\}.$$

   Observe que $A = B = B \cup C = \{1, 2, 3, 4\}$ e $A - C = \{1, 2\}$ e , podemos concluir que $B = \{1, 2, 3, 4\} \neq \{1, 2\} = A - C$.

   (c) $n(A - B) = n(A) - n(B)$.

Resposta: A afirmação é falsa. Vamos considerar os seguintes conjuntos

$$A = \{3, 4\} \quad e \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Observe que $n(A) = 2$ e $n(B) = 6$ e, podemos concluir que $n(A) - n(B) = 2 - 6 = -\ 4$.

Temos que $A - B = \emptyset$ e, portanto, $n(A - B) = 0 \neq -\ 4 \ = n(A) \ - \ n(B)$.

2. (1.6) Mostre por Indução Matemática que:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

para todo número natural $n \geq 1$.

Resposta: Seja $P(n) : 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ para $n \in \mathbb{N}$.

BASE DA INDUÇÃO: $n = 1$.

Como $2^{1-1} = 2^0 = 1$ e $2^1 - 1 = 1$ temos que $P(1)$ é verdadeira.

PASSO INDUTIVO: Vamos supor que $P(k) : 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1$ seja verdadeira, para $k \in \mathbb{N}$.

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Vamos provar que se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1) : 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{k-1} + 2^k = 2^{k+1} - 1$ também é verdadeira:

$$\underbrace{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{k-1}}_{\text{H.I.}} + 2^k =$$

$$= 2^k - 1 + 2^k =$$

$$= (1 + 1) \times 2^k - 1 =$$

$$= 2 \times 2^k - 1 =$$
$$= 2^{k+1} - 1$$

Pelo Princípio da Indução Matemática (PIM), podemos concluir que:

$$P(n): \ 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. (2.2) Para usar um aplicativo, deve ser escolhida uma senha de 8 caracteres formada por algumas das 26 letras do alfabeto e/ou por alguns dos 10 dígitos $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$. De quantas maneiras podem ser escolhidas se:

   (a) as letras e os números **não podem estar repetidos** e cada senha deve conter pelo menos uma letra? **Justifique**.

   Resposta: Seja $\mathbb{U}$ o conjunto universo formado por todas as senhas consistindo de 8 caracteres distintos, sendo que as mesmas podem conter letras do alfabeto (26 letras) ou dígitos (10 dígitos) quaisquer. Seja A o conjunto de todas as senhas que contêm pelo menos uma letra e as letras e os números **não se repetem**. Finalmente, seja B o conjunto de todas as senhas consistindo de 8 caracteres distintos, sendo que as mesmas contêm apenas dígitos distintos (10 dígitos). Portanto $A = \mathbb{U} - B$, implicando que $n(A) = n(\mathbb{U}) - n(B)$.

   Vamos encontrar o número de elementos do conjunto $\mathbb{U}$, isto é, $n(\mathbb{U})$. Devemos formar uma senha consistindo de 8 caracteres distintos, sendo que a mesma pode conter letras do alfabeto (26 letras) ou dígitos (10 dígitos) quaisquer. Como importa a ordem e os caracteres não podem se repetir, então temos $n(\mathbb{U}) = A_{36}^{8} = \frac{36!}{(36-8)!} = \frac{36!}{28!}$ maneiras distintas de formar a senha com 8 caracteres com letras e dígitos distintos.

   Agora, vamos encontrar o número de elementos do conjunto B, ou seja, $n(B)$, que é o número de elementos do conjunto que devemos

formar uma senha consistindo de 8 caracteres distintos, sendo que a mesma contém apenas dígitos distintos (10 dígitos), logo temos $n(B) = A_{10}^{8} = \frac{10!}{(10-8)!} = \frac{10!}{2!}$.
Assim, temos $n(A) = n(\mathbb{U}) - n(B) = A_{36}^{8} - A_{10}^{8} = \frac{36!}{28!} - \frac{10!}{2!}$ senhas diferentes contendo letras e números distintos contendo pelo menos uma letra.

(b) as letras e os números **podem estar repetidos** e devem conter necessariamente a letra **Y**? **Justifique**.

Resposta: Assim como o item anterior, esta questão será feita pelo complemento. Seja $n(\mathbb{U})$ o número de elementos do conjunto universo, que é o conjunto formado por todas as senhas consistindo de 8 caracteres, sendo que as mesmas podem conter letras do alfabeto (26 letras) ou dígitos (10 dígitos) quaisquer. Seja $n(A)$ o número de elementos do conjunto que possui todas as senhas que contêm as letras e os números que podem se repetir e contém obrigatoriamente a letra Y. Finalmente, seja $n(B)$ o número de elementos que possui todas as senhas de 8 caracteres, sendo que as mesmas podem conter letras do alfabeto exceto a letra Y (25 letras) ou dígitos (10 dígitos). Portanto $n(A) = n(\mathbb{U}) - n(B)$.

Vamos encontrar $n(\mathbb{U})$. Para encontrar o número de elementos deste conjunto, devemos formar todas as senhas de 8 caracteres, sendo que as mesmas podem conter letras do alfabeto (26 letras) ou dígitos (10 dígitos) quaisquer. Como importa a ordem e os caracteres podem se repetir, então temos $n(\mathbb{U}) = AR_{36}^{8} = 36^{8}$ maneiras distintas de formar a senha com 8 caracteres com letras e dígitos quaisquer.

Agora, vamos encontrar o número de elementos do conjunto B ($n(B)$), conjunto este composto por todas as senhas de 8 caracteres, sendo que as mesmas podem conter letras do alfabeto exceto a letra Y (25 letras) ou dígitos (10 dígitos), logo temos $n(B) = AR_{35}^{8} = 35^{8}$.

Assim, temos $n(A) = n(\mathbb{U}) - n(B) = AR_{36}^{8} - AR_{35}^{8} =$

$36^8 - 35^8$ senhas diferentes que contêm letras e números que **podem estar repetidos** e que contenham necessariamente a letra **Y**.

4. (1.2) Uma empresa dispõe de 8 economistas e 5 engenheiros. De quantos modos podemos formar uma comissão com 6 membros se cada comissão deve ter no mínimo 4 engenheiros? **Justifique**.

   Respostas:

   PRIMEIRO RACIOCÍNIO: As alternativas exclusivas são:

   2 economistas e 4 engenheiros;

   OU

   1 economista e 5 engenheiros

   Para a primeira alternativa temos que o número de escolhas de 4 engenheiros dentre 5 corresponde a C_5^4. Por outro lado, fixado 4 engenheiros, os 2 economistas devem ser escolhidos entre 8, dando lugar a C_8^2 possibilidades. Logo, pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades de formar uma comissão formado por 2 economistas e 4 engenheiross é $C_5^4.C_8^2 = \frac{5!}{4!1!} \cdot \frac{8!}{2!6!} = 140$.

   Para a segunda alternativa, temos de considerar os modos de escolher 5 engenheiros dentre 5, ou seja, C_5^5. Fixado os 5 engenheiros, um economista deve ser escolhido entre 8, dando lugar a C_8^1 possibilidades. Logo, pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades de formar uma comissão com 1 economista e 5 engenheiross é $C_5^5.C_8^1 = \frac{5!}{5!0!} \cdot \frac{8!}{1!7!} = 1 \times 8 = 8$.

   Logo, pelo princípio aditivo, temos $C_5^4.C_8^2 + C_5^5.C_8^1 = 140 + 8 = 148$.

   Vale mencionar que esta questão pode ser resolvida pelo complemento.

   SEGUNDO RACIOCÍNIO: Poderíamos também contar todas as escolhas dos 6 membros da comissão (C_{13}^6) e retirar as escolhas sem engenheiros (C_8^6), com apenas um engenheiro ($C_5^1.C_8^5$), com exatamente dois engenheiros ($C_5^2.C_8^4$), com três engenheiros ($C_5^3.C_8^3$):

$$
\begin{gathered}
C_{13}^6 - (C_8^6 + C_5^1.C_8^5 + C_5^2.C_8^4 + C_5^3.C_8^3) = \\
\tfrac{13!}{7!6!} - \tfrac{8!}{6!2!} - \tfrac{5!}{1!4!}.\tfrac{8!}{5!3!} - \tfrac{5!}{2!3!}.\tfrac{8!}{4!4!} - \tfrac{5!}{3!2!}.\tfrac{8!}{3!5!} = \\
1716 - 28 - 280 - 700 - 560 = 148.
\end{gathered}
$$

Portanto, podemos formar uma comissão com 6 membros para um comissão se cada comissão tem no mínimo 4 engenheiros, dentre 8 economistas e 5 engenheiros de uma empresa de 148 maneiras.

5. (1.6) Considere a palavra **ANACRONISMO**. Quantos anagramas podem ser formados com as letras dessa palavra começando por **S** e terminando por vogal? **Justifique**.

   Resposta: A palavra **ANACRONISMO** possui 1 S, 1 I, 1 R, 1 M, 1 C, 2 A's, 2 O's e 2 N's, totalizando 11 letras. Vamos fixar a letra S na primeira posição e permutar as demais letras sendo que os anagramas terminam por vogal, ou seja, temos que analisar os casos em que terminam com as vogais A, I e O:

   Começam com S e terminam com A:

   Temos 1 I, 1 R, 1 M, 1 C, 1 A, 2 O's e 2 N's, totalizando 9 letras.

   Vamos permutar essas letras, ou seja, temos $P_9^{2,2,1,1,1,1,1} = \frac{9!}{2!2!}$.

   Começam com S e terminam com I:

   Temos 1 R, 1 M, 1 C, 2 A's, 2 O's e 2 N's, totalizando 9 letras.

   Vamos permutar essas letras, ou seja, temos $P_9^{2,2,2,1,1,1} = \frac{9!}{2!2!2!}$.

   Começam com S e terminam com O:

   Temos 1 I, 1 R, 1 M, 1 C, 2 A's, 1 O e 2 N's, totalizando 9 letras.

   Vamos permutar essas letras, ou seja, temos $P_9^{2,2,1,1,1,1,1} = \frac{9!}{2!2!}$.

Pelo princípio aditivo, temos que o número de anagramas que podem ser formados com as letras da palavra **ANACRONISMO** começando por **S** e terminando por vogal é:

$$
\begin{aligned}
P_9^{2,2,1,1,1,1,1} + P_9^{2,2,2,1,1,1} + P_9^{2,2,1,1,1,1,1} &= \\
= \frac{9!}{2!2!} + \frac{9!}{2!2!2!} + \frac{9!}{2!2!} &= \\
= (1 \ + \ 1) \times \frac{9!}{2!2!} + \frac{9!}{2!2!2!} &= \\
= 2 \times \frac{9!}{2!2!} + \frac{9!}{2!2!2!} &= \\
= \frac{9!}{2!} + \frac{9!}{2!2!2!}
\end{aligned}
$$

6. (1.6) De quantas maneiras diferentes podemos distribuir 42 brinquedos **distintos** para 6 crianças, de maneira que todas as crianças recebam pelo menos 3 brinquedos? **Justifique**.

   Resposta: Inicialmente, vamos considerar que os brinquedos são iguais e distribuí-los as crianças satisfazendo as restrições. Em seguida, vamos permutá-los, pois a questão versa de brinquedos DISTINTOS. Considere as seguintes variáveis x_i, como sendo a quantidade de brinquedos que a criança i receberá, para $i = 1, \ldots, 6$.

   Queremos encontrar o número de maneiras de distribuir 42 brinquedos **distintos** para 6 crianças, de forma que todas as crianças recebam pelo menos 3 brinquedos. Este problema é equivalente a resolver a equação:

   $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 42, \ \ \textit{onde} \ \ x_i \ \geq \ 3, \text{ para } i = 1, \ldots, 6.$$

   Iremos fazer este problema recair em um outro problema em que sabemos resolver, pois $x_i \geq 3$ significa que $x_i - 3 \geq 0$. Definindo $y_i = x_i - 3$, temos $y_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, 6$.

   Observe que $x_i = y_i + 3$, para $i = 1, \ldots, 6$.

Portanto, a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 42$ transforma-se em:

$y_1 + 3 + y_2 + 3 + y_3 + 3 + y_4 + 3 + y_5 + 3 + y_6 + 3 = 42$ com $y_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, 6$, ou seja:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 42 - 18 = 24$$

Logo, temos que o número de modos de distribuir 42 brinquedos para 6 crianças, de forma que todas as crianças recebam pelo menos 3 brinquedos corresponde ao número de soluções não negativas da última equação que é:

$$CR_6^{24} = C_{6+24-1}^{24} = C_{29}^{24} = \frac{29!}{24!5!}$$

Temos então $CR_6^{24} = C_{29}^{24}$ maneiras de distribuir 42 brinquedos para 6 crianças, de forma que todas as crianças recebam pelo menos 3 brinquedos. Entretanto, os brinquedos são DISTINTOS. Assim, vamos permutá-los para obter a solução final. Logo, pelo P.M., temos $CR_6^{24} \times 42! = C_{29}^{24} \times 42! = \frac{29!}{24!5!} \times 42!$ formas de distribuir 42 brinquedos **distintos** para 6 crianças, de forma que todas as crianças recebam pelo menos 3 brinquedos.