Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD1 - Segundo Semestre de 2016

Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (1.5) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

(a) $\{\emptyset\} \subseteq \{\{\emptyset\}, -1\}$. Justifique.

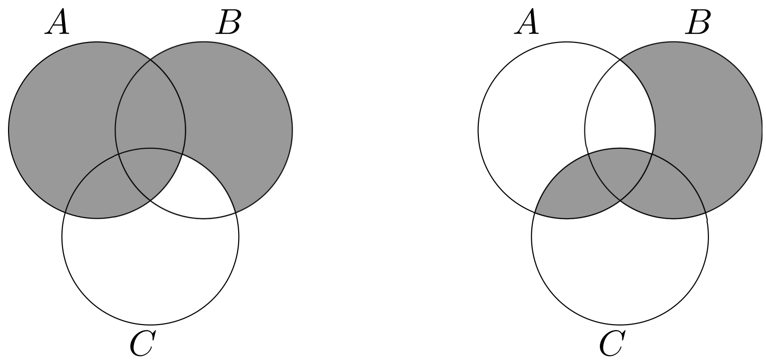
Resposta: Falso. Pois $\{\emptyset\}$ é um elemento do conjunto. Assim, $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}, -1\}$, ou então $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\{\emptyset\}, -1\}$.

(b) $\{\emptyset\} \subseteq P(A)$,
onde $P(A)$ é o conjunto das partes de A, sendo A um conjunto qualquer. Justifique.

Resposta: Verdadeiro. O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto, assim $\emptyset \subseteq A$, então $\emptyset \in P(A)$. Com isso, o conjunto que tem por elemento o $\emptyset$ é um subconjunto de $P(A)$.

(c) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A - C)$, sendo A, B e C conjuntos quaisquer. Justifique.

Resposta: Falso. Pelo Diagrama de Venn na Figura 1 temos os seguintes conjuntos.



$A \cup (B - C)$ $\qquad$ $(A \cup B) - (A - C)$

Figura 1: Questão 1c.

2. (1.5) Usando o Princípio da Inclusão e Exclusão, determine a quantidade de números naturais entre 10 e 200 (incluindo os extremos) que não são divisíveis nem por 5 e nem por 7.

Reposta: Sejam:

$A = \{x \in \mathbb{N} | 10 \leq x \leq 200$ e $x = 5k$ para algum $k \in \mathbb{N}\}$,
$B = \{x \in \mathbb{N} | 10 \leq x \leq 200$ e $x = 7k$ para algum $k \in \mathbb{N}\}$, e
$\mathbb{U} = \{x \in \mathbb{N} | 10 \leq x \leq 200\}$ é o conjunto Universo.

Como desejamos obter a cardinalidade do conjunto dos elementos que não são múltiplos de 5 e não são múltiplos de 7, desejamos obter $n(\overline{A} \cap \overline{B})$. Pela Lei de De Morgan temos que $n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(\overline{A \cup B})$, e assim:

$n(\overline{A \cup B}) = n(\mathbb{U}) - n(A \cup B)$,
$n(\mathbb{U}) - n(A \cup B) = 191 - (n(A) + n(B) - n(A \cap B))$.

Calculemos agora $n(A), n(B)$ e $n(A \cap B)$.

Para o conjunto A, temos que:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 10 \leq x \leq 200$ e $x = 5k$ para algum $k \in \mathbb{N}\} =$
$\{x \in \mathbb{N} \mid 10 \leq 5k \leq 200$ para algum $k \in \mathbb{N}\} =$
$\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{10}{5} \leq k \leq \frac{200}{5}$ para algum $k \in \mathbb{N}\} =$
$\{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq k \leq 40$ para algum $k \in \mathbb{N}\}$, ou seja, $k = 2, 3, \cdots, 40$.

Com isso, $n(A) = 39$.

Para o conjunto B, temos que:

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 10 \leq x \leq 200 \text{ e } x = 7k \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\} =$
$\{x \in \mathbb{N} \mid 10 \leq 7k \leq 200 \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\} =$
$\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{10}{7} \leq k \leq \frac{200}{7} \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\} =$
$\{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq k \leq 28 \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\}$, ou seja, $k = 2, 3, \cdots, 28$.

Com isso, $n(B) = 27$.

Já para o conjunto $A \cap B$, temos que:

$A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid 10 \leq x \leq 200 \text{ e } x = 5.7k \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\} =$
$\{x \in \mathbb{N} \mid 10 \leq 35k \leq 200 \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\} =$
$\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{10}{35} \leq k \leq \frac{200}{35} \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\} =$
$\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq 5 \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\}$, ou seja, $k = 1, 2, \cdots, 5$.

Com isso, $n(A \cap B) = 5$.

Desta forma, temos que $n(\overline{A} \cap \overline{B}) = 191 - (n(A) + n(B) - n(A \cap B)) = 191 - 39 - 27 + 5 = 130$.

3. (1.5) Mostre usando o Princípio da Indução que $2^n + (-1)^{n+1}$ é divisível por 3 para todo inteiro n, $n \geq 1$.

   Resposta: Seja $P(n) : 2^n + (-1)^{n+1} = 3m$, para algum $m \in \mathbb{N}$ e $m \geq 1$.

   BASE DA INDUÇÃO: Vamos mostrar que $P(1)$ é verdadeira.

   De fato, $2^1 + (-1)^2 = 3.1$, com isso $m = 1$. Temos assim que $P(1)$ é verdadeira.

   HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Suponha que $P(k) : 2^k + (-1)^{k+1} = 3m, m \in \mathbb{Z}$ seja verdadeira para algum $k \geq 1$.

   PASSO INDUTIVO: Vamos mostrar que $P(k+1) : 2^{k+1} + (-1)^{k+2} = 3t$, para algum $t \in \mathbb{Z}$ e $t \geq 1$ é verdadeira.

$$\begin{aligned}
2^k + (-1)^{k+1} &= 3m\ (H.I.),\\
2[2^k + (-1)^{k+1}] &= 2.3m,\\
2^{k+1} + 2(-1)^{k+1} &= 3m',\ \text{onde}\ m' = 2m,\\
2^{k+1} + [3 + (-1)](-1)^{k+1} &= 3m',\\
2^{k+1} + 3(-1)^{k+1} + (-1)^1(-1)^{k+1} &= 3m',\\
2^{k+1} + (-1)^{k+2} &= 3m' - 3(-1)^{k+1},\\
2^{k+1} + (-1)^{k+2} &= 3[m' - (-1)^{k+1}],\\
2^{k+1} + (-1)^{k+2} &= 3t,\ \text{onde}\ t = m' - (-1)^{k+1}.
\end{aligned}$$

4. (2.0) Desejamos formar uma comissão de 7 parlamentares que devem ser selecionados entre 20 membros do partido A e 30 do partido B.

   (a) De quantas maneiras podemos selecionar comissões com pelo menos 1 membro do partido A? Justifique.

   Resposta: Um raciocínio possível é usar a noção de complemento. Do total das possíveis comissões temos que remover aquelas comissões que não possuem membros do partido A. Há no total 50 membros nos partidos, temos assim $C(50,7) = \frac{50!}{7!43!}$ possíveis comissões. As comissões que não possuem membros do partido A são aquelas formadas somente por pessoas do partido B, ou seja, temos $C(30,7) = \frac{30!}{7!23!}$. Portanto há $C(50,7) - C(30,7) = \frac{50!}{7!43!} - \frac{30!}{7!23!}$ comissões com pelo menos um membro de A.

   Outra possível estratégia: Pelo Princípio Multiplicativo e Aditivo consideremos todas as possíveis formações de comissões, com 1 membro de A e 6 membros de B, ou com 2 membros de A e 5 membros de B, e assim por diante.
   $C(20,1).C(30,6) + C(20,2).C(30,5) + C(20,3).C(30,4) +$
   $C(20,4).C(30,3) + C(20,5).C(30,2) + C(20,6).C(30,1) +$
   $C(20,7).C(30,0) = \frac{20!}{19!}\cdot\frac{30!}{6!24!} + \frac{20!}{2!18!}\cdot\frac{30!}{5!25!} + \frac{20!}{3!27!}\cdot\frac{30!}{4!26!} + \frac{20!}{4!26!}\cdot\frac{30!}{3!27!} + \frac{20!}{5!25!}\cdot\frac{30!}{2!28!} + \frac{20!}{6!14!}\cdot\frac{30!}{29!} + \frac{20!}{7!13!}\cdot\frac{30!}{30!}$.

   (b) De quantas maneiras podemos selecionar comissões em que um determinado membro A_1 do partido A não pode estar na mesma comissão que o membro B_1 do partido B. Justifique.

   Resposta: De todas as possíveis comissões, vamos remover as comissões em que os dois membros A_1 e B_1 estão presentes. $C(50,7) =$

$\frac{50!}{7!43!}$ é o total das possíveis comissões e quando A_1 e B_1 estão juntos, há 48 membros restantes para 5 serem escolhidos, ou seja, $C(48,5) = \frac{48!}{5!43!}$ comissões em que A_1 e B_1 estão juntos. Assim, $C(50,7) - C(48,5) = \frac{50!}{7!43!} - \frac{48!}{5!43!}$ é o número das comissões em que A_1 e B_1 não estão juntos.

5. (1.5) Considere todos os números naturais menores do que 1000000.

   (a) Quantos desses números podem ser expressos utilizando-se os dígitos $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$, sem repetição? Justifique.

   Resposta: Devemos listar os números de 1 dígito até 6 dígitos, e em cada um desses números não deve haver dígito repetido. Observe também que cada um dos números não começa com 0, com isso, para a primeira posição de cada um dos números há 9 algarismos possíveis. Temos portanto, pelo Princípio Multiplicativo:

   - números com 1 dígito: 9 possibilidades (Considerando 0 não pertencendo aos Naturais);
   - números com 2 dígitos: $9.A(9,1)$ possibilidades;
   - números com 3 dígitos: $9.A(9,2)$ possibilidades;
   - números com 4 dígitos: $9.A(9,3)$ possibilidades;
   - números com 5 dígitos: $9.A(9,4)$ possibilidades;
   - números com 6 dígitos: $9.A(9,5)$ possibilidades.

   Pelo Princípio Aditivo: $9\sum_{i=0}^{5} A(9,i) = 9+9.A(9,1)+9.A(9,2)+9.A(9,3)+9.A(9,4)+9.A(9,5) = 9+9.9+9.9.8+9.9.8.7+9.9.8.7.6+9.9.8.7.6.5$.

   (b) Quantos desses números podem ser expressos supondo que só possam ser utilizados os dígitos $0,8,9$ (admitindo-se repetições). Justifique.

   Resposta: Façamos de maneira similar ao item anterior, pelo Princípio Multiplicativo temos:

   - números com 1 dígito: 2 possibilidades;
   - números com 2 dígitos: $2.AR_3^1$ possibilidades;
   - números com 3 dígitos: $2.AR_3^2$ possibilidades;
   - números com 4 dígitos: $2.AR_3^3$ possibilidades;
   - números com 5 dígitos: $2.AR_3^4$ possibilidades;

- números com 6 dígitos: $2.AR_3^5$ possibilidades.

Pelo Princípio Aditivo: $2\sum_{i=0}^{5} AR_3^i = 2+2.3+2.3^2+2.3^3+2.3^4+2.3^5$.

6. (2.0) Considere a palavra **CARRAPATO**.

(a) Quantos anagramas podem ser formados a partir de suas letras? Justifique.

Resposta: A palavra **CARRAPATO** possui 9 letras, a saber: 1 C, 3 A's, 2 R's, 1 P, 1 T e 1 O. Logo, temos $P_9^{3,2,1,1,1,1} = \frac{9!}{3!2!1!1!1!1!}$.

(b) De quantas maneiras podemos permutar suas letras mantendo-se as vogais em sua ordem natural e não permitindo que as duas letras R's fiquem juntas? Justifique.

Resposta: Vamos primeiramente permutar as letras com exceção dos R's, há portanto 7 letras. Vamos posicionar as vogais na ordem A, A, A, O, há 7 posições onde devemos escolher 4 delas, temos portanto $C(7,4) = \frac{7!}{4!3!}$ possibilidades. Temos agora as letras C, P, T podendo aparecer em qualquer ordem, ou seja, há $P_3 = 3!$ possibilidades.

Vamos agora posicionar as letras R's separadas. Com as 7 demais letras já dispostas, temos 8 espaços onde devemos escolher 2. Observe o esquema a seguir, onde os pontos representam os espaços vazios.

$$\cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot$$

Temos assim, $C(8,2) = \frac{8!}{2!6!}$ possíveis posições para as letras R's separadas. Pelo Princípio Multiplicativo, temos $C(7,4).P_3.C(8,2) = \frac{7!}{4!3!}.3!\frac{8!}{2!6!} = 5880$ anagramas da palavra **CARRAPATO** em que as vogais aparecem em ordem natural e as letras R's não fiquem juntas.