Gabarito da AD1 - Fundamentos de Algoritmos para Computação - 2007/02

1. (1.0) Usando o Teorema das Colunas calcule o valor da soma:

$$S = 11.12 + 12.13 + 13.14 + \ldots + 50.51$$

Justifique.

Resposta:

$$\begin{array}{lcll}
S & = & 11.12 + 12.13 + 13.14 + \ldots + 50.51 & = \\
 & = & 2C_{12}^2 + 2C_{13}^2 + 2C_{14}^2 + \ldots + 2C_{51}^2 & = \\
 & = & 2(C_{12}^2 + C_{13}^2 + C_{14}^2 + \ldots + C_{51}^2) & = \\
 & = & 2\sum_{i=12}^{51} C_i^2 & = \\
 & = & 2(\sum_{i=12}^{51} C_i^2 + \sum_{i=2}^{11} C_i^2 - \sum_{i=2}^{11} C_i^2) & = \\
 & = & 2(\sum_{i=2}^{51} C_i^2 - \sum_{i=2}^{11} C_i^2) & = \\
\text{(Teor. das Colunas)} & = & 2(C_{52}^3 - C_{12}^3) = \frac{1}{3}(\frac{52!}{49!} - \frac{12!}{9!}) &
\end{array}$$

2. (1.5) Usando o Teorema Binomial (binômio de Newton) calcule o valor da soma:

$$S = -\frac{C_{20}^1}{2} + \frac{C_{20}^2}{2^2} - \frac{C_{20}^3}{2^3} + \ldots + \frac{C_{20}^{20}}{2^{20}}$$

Justifique.

Resposta:

$$\begin{array}{rcll}
S & = & -\frac{C_{20}^1}{2} + \frac{C_{20}^2}{2^2} - \frac{C_{20}^3}{2^3} + \ldots + \frac{C_{20}^{20}}{2^{20}} & = \\
 & = & [-\frac{C_{20}^0}{2^0} + \frac{C_{20}^0}{2^0}] - \frac{C_{20}^1}{2} + \frac{C_{20}^2}{2^2} - \frac{C_{20}^3}{2^3} + \ldots + \frac{C_{20}^{20}}{2^{20}} & = \\
 & = & C_{20}^0(-1)^{20}(\frac{1}{2})^0 + C_{20}^1(-1)^{19}(\frac{1}{2})^1 + \ldots + C_{20}^{20}(-1)^0(\frac{1}{2})^{20} - \frac{C_{20}^0}{2^0} & = \\
\text{(Teor. binomial)} & = & (-1 + \frac{1}{2})^{20} - 1 & = \\
 & = & (\frac{-1}{2})^{20} - 1 & = \\
 & = & \frac{1}{2^{20}} - 1 &
\end{array}$$

3. (1.5) Um círculo e n retas são desenhados em um plano. Cada uma destas retas intercepta todas as outras no interior do círculo, de tal forma que três retas nunca se encontram num mesmo ponto.

(a) Determine uma relação de recorrência e condições de contorno que forneçam o número de regiões em que estas n retas dividem o círculo. Justifique.

Resposta: Seja a_n o número de regiões em que n retas dividem um círculo.
Fazendo as figuras de um círculo interceptado por 1 reta, depois por 2 retas, por 3 e por 4 retas segundo o enunciado, poderemos encontrar a fórmula de recorrência. De fato, 1 reta ($n = 1$) divide o círculo em 2 regiões ($a_1 = 2$). Já 2 retas ($n = 2$)

dividem o círculo em 4 regiões ($a_2 = 4$), enquanto que 3 retas ($n = 3$) dividem o círculo em $7 = 4 + 3$ regiões ($a_3 = 7$) e 4 retas ($n = 4$) dividem o círculo em $11 = 7 + 4 = a_3 + 4$ regiões ($a_4 = 11$). Podem fazer mais uma ilustração, para $n = 5$ e encontrarão que o círculo é dividido em $a_5 = a_4 + 5 = 11 + 5 = 16$ regiões. Se a_{n-1} é o número de regiões em que $n - 1$ retas dividem o círculo temos que $a_n = a_{n-1} + n$.
Consequentemente obtemos a seguinte relação de recorrência:

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} + n & , \quad n > 1 \\ 2 & , \quad n = 1 \end{cases}$$

Veja com mais detalhes no livro *Introdução à Análise Combinatória* de J.P.O. Santos, M.P. Mello e I.T.C. Murari, da editora da UNICAMP.

(b) Resolva esta relação. Justifique

Resposta:

$$\begin{array}{rcll}
a_n & = & a_{n-1} + n & = \\
& = & a_{n-2} + (n-1) + n & = \\
& = & a_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n & = \\
\vdots & & & \\
& = & a_{n-k} + (n-k+1) + \ldots + (n-2) + (n-1) + n & = \\
\vdots & & & \\
(\text{Tomando } k = n-1) & = & a_1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n & = \\
& = & 2 + [2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n] & = \\
& = & 1 + [1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n] & = \\
& = & 1 + \frac{(1+n)n}{2} & = \\
& = & \frac{n^2+n+2}{2} &
\end{array}$$

Portanto $a_n = \frac{n^2+n+2}{2}$ para todo número natural $n \geq 1$.

4. (1.5)

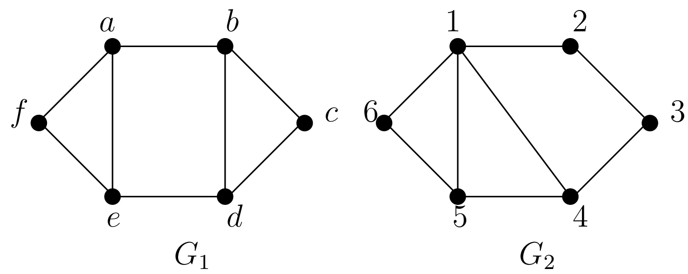
(a) Mostre que se os grafos G_1 e G_2 são isomorfos então $|V(G_1)| = |V(G_2)|$ e $|E(G_1)| = |E(G_2)|$.

Resposta: Como G_1 e G_2 são isomorfos existe uma bijeção f de $V(G_1)$ em $V(G_2)$, uma bijeção é uma função injetora e sobrejetora. Como a função é injetora, cada vértice de $V(G_1)$ está associado a exatamente um vértice de $V(G_2)$. E como a função é sobrejetora todo vértice de $V(G_2)$ tem um vértice em $V(G_1)$ do qual ele é imagem. Consequentemente, $|V(G_1)| = |V(G_2)|$.

Sejam a, b vértices de G_1. Se os dois grafos são isomorfos, então $(a, b) \in E(G_1)$ se e somente se $(f(a), f(b)) \in V(G_2)$. Portanto cada aresta pertencente a $E(G_1)$ possui uma aresta correspondente em $E(G_2)$ e vice-versa. Logo $|E(G_1)| = |E(G_2)|$.

(b) Dê exemplo de dois grafos com o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas que não sejam isomorfos. Justifique seu exemplo.

A figura abaixo apresenta dois grafos com 6 vértices e 8 arestas não isomorfos, basta verificar que o vértice a de G_1 tem grau 4 e nenhum vértice de G_2 possui grau maior que 3.



5. (1.5) Seja G uma floresta com n vértices e w componentes conexos. Determine o número de arestas de G em função de n e w.

   Solução: Sabemos que cada componente conexo de $G = (V, E)$ é uma árvore, porque é acíclico.

   Seja T_i, $i = 1, \cdots w$, as árvores que compõem G. Para cada T_i temos que $|E_i| = |V_i| - 1$.

   O número de arestas de G, $|E|$ é igual ao somatório das arestas de todas as w árvores e $|V| = |V_1| + |V_2| + \cdots + |V_w|$. Portanto,

   $$|E| = |E_1| + |E_2| + \cdots + |E_w| = |V_1| - 1 + |V_2| - 1 + \cdots + |V_w| - 1$$

   Daí,

   $$|E| = |V| \underbrace{-1 - \cdots - 1}_{w \text{ vezes}} = |V| - w$$

6. (3.0) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for falsa, dê um exemplo. Se for verdadeira, prove.

   (a) Todo grafo hamiltoniano é euleriano

   Resposta: Falso.

   O K_4, grafo completo com 4 vértices a, b, c, d, é hamiltoniano pois possui ciclo hamiltoniano $abcda$; e não é euleriano pois todos os seus vértices possuem grau 3, ímpar.

   (b) A árvore é um grafo bipartido.

   Resposta: Verdadeiro.

   Sabemos que um grafo é bipartido se, e somente se, não possui ciclo ímpar. como a árvore não possui nenhum ciclo, ela é um grafo bipartido.

   (c) Todo subgrafo induzido de um grafo não planar é não planar.

   Resposta: Falso. O K_5 não é planar, o subgrafo induzido por qualquer subconjunto de 3 vértices deste grafo forma um K_3 que é planar.

   (d) Todo subgrafo induzido de um grafo planar é planar.

   Resposta: Verdadeiro.

   Seja $G = (V, E)$ um grafo planar e $G' = (V', E')$ um subgrafo induzido de G. Suponha que G' é não planar. Como $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$, não existe representação plana para G pois, em particular, não existe representação plana para seu subgrafo G'. Isto é uma contradição pois G é planar, logo G' também é planar.

(e) Um digrafo acíclico possui pelo menos uma fonte e um sumidouro.

Resposta: Verdadeiro.

Seja $D = (V, E)$ um digrafo acíclico. Suponha por absurdo que D não possui sumidouro.

Então partindo de um vértice qualquer do digrafo, digamos v_0, como ele não é um sumidouro:

- Existe uma aresta que sai deste vértice para outro vértice v_1;
- v_1 não é um sumidouro. Portanto, existe uma aresta que sai de v_1 para um vértice $v_2 \neq v_0$, senão teremos um ciclo;
- v_2 por hipótese, também não é sumidouro, então existe uma aresta que sai de v_2 para um outro vértice $v_3 \neq v_1$ e $v_3 \neq v_0$. Novamente, teríamos um ciclo.
- Como o digrafo é finito, não podemos repetir esse processo indefinidamente, ou seja chegaremos a um vértice v_i que como não é sumidouro terá que ser convergente a algum vértice anterior a v_j, $j < i$, o que formaria um ciclo, absurdo porque supomos o digrafo acíclico.

Portanto, existe pelo menos um sumidouro. E a demonstração que existe ao menos uma fonte é análoga a esta.