Gabarito da AP3 - Fundamentos de Algoritmos para Computação

1. (1.5) Mostre usando Indução Matemática que: 2 divide $n^2 + n$ para todo n inteiro natural.

   Resposta: Seja $P(n)$: 2 divide $n^2 + n$.

   Base da indução:

   Para $n = 1$, 2 divide $2 = 1^2 + 1$, portanto $P(1)$ é verdadeira.

   Hipótese de Indução:

   Suponha verdadeiro para k, isto é, $P(k)$ é verdadeiro:

   $$P(k) : 2 \text{ divide } k^2 + k$$

   Ou seja, para algum $q \in \mathbb{N}$ tem-se que: $k^2 + k = 2q$.

   Devemos provar que $P(k+1)$ é verdadeiro, isto é:

   $$P(k+1) : 2 \text{ divide } (k+1)^2 + k + 1$$

   Desenvolvendo para $k + 1$ e usando a hipótese de indução, temos que:

   $$\begin{aligned} & (k+1)^2 + (k+1) & = \\ = \; & k^2 + 2k + 1 + k + 1 & = \\ = \; & \underbrace{(k^2 + k)}_{(Por\ hipótese\ indutiva)} + 2k + 1 + 1 & = \\ = \; & 2q + 2(k+1) & = \\ = \; & 2(q + k + 1) & \end{aligned}$$

   Definindo $r = q + k + 1$, resulta que $(k+1)^2 + (k+1) = 2r$, sendo $r \in \mathbb{N}$. Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

   Logo, pelo princípio da indução, a expressão é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$

2. (1.5) Existem 12 pontos: $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$, em um plano, não havendo 3 deles alinhados. Responda justificando.

(a) Quantas retas são determinadas por esses pontos?

Resposta: Para determinar uma reta, devemos selecionar dois pontos, o que pode ser feito de C_{12}^2 modos. Portanto, o número de retas é dado por $C_{12}^2 = \frac{12!}{10!2!} = \frac{12\times 11}{2} = 6 \times 11 = 66$.

(b) Quantas dessas retas passam por A_1 ?

Resposta: Como já dito anteriormente, para determinarmos uma reta, devemos selecionar dois pontos, mas como queremos as retas que passam por A_1, já temos um ponto selecionado, então temos $C_{11}^1 = 11$ retas que passam por A_1.

(c) Quantos triângulos são determinados por esses pontos?

Resposta: Como não há 3 pontos alinhados, basta escolhermos 3 pontos dentre os 12 para traçarmos um triângulo. Desta forma, o número de triângulos é dado por $C_{12}^3 = \frac{12!}{9!3!} = \frac{12\times 11\times 10}{3\times 2} = 2 \times 11 \times 10 = 220$.

3. (1.5) Calcule, justificando.

(i) De quantos modos diferentes podemos distribuir 30 bombons idênticos em 5 caixas distintas ? (Obs: cada caixa pode conter zero ou mais bombons.)
Resposta:
Resposta: Este poblema é equivalente a encontrar o número de soluções inteiras não-negativas ($x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5$) da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30,$$

onde x_i denota o número de bombons na caixa i, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, o que é equivalente a encontrar o número de sequências de $(30+5)$ binários com exatamente cinco 1's (as caixas), trinta 0's (os bombons), onde o último elemento de sequência é 1.

Isto é, o número corresponde a:

$$CR_5^{30} = C_{34}^{30} = \frac{34.33.32.31.30!}{30!4!} = \frac{34.33.32.31}{4.3.2.1} = 46376$$

(i) E se tivermos a restrição de que nenhuma caixa pode ficar vazia?

Resposta: Este número é o número de soluções inteiras positivas da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30,$$

onde x_i denota o número de bombons na caixa, $x_i > 0$ i,e $x_i \geq 1$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Iremos fazer este problema recair em um outro problema em que sabemos resolver, pois $x_i \geq 1$ significa que $x_i - 1 \geq 0$, definindo $y_i = x_i - 1$, logo $y_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$:

Temos que $x_i = y_i + 1$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Daí, a equação $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 30$ transforma-se em $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5 = 25$ com $y_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
Logo, temos que o número de modos diferentes de distribuir 30 bombons idênticos em 5 caixas diferentes tal que nenhuma delas fique vazia corresponde ao número de soluções não negativas da última equação que é:

$$CR_5^{25} = C_{29}^{25} = \frac{29.28.27.26.25!}{25!4!} = \frac{29.28.27.26}{4.3.2.1} = 23751$$

4. (1.5) Determine o termo independente de x no desenvolvimento de $(-5x - \frac{1}{2x^3})^8$. Justifique sua resposta.

   Resposta: Temos $n = 8$, $a = -5x$ e $b = -\frac{1}{2x^3}$.

   Daí, para $0 \leq k \leq 8$ temos:

$$\begin{aligned}
T_{k+1} &= C_n^k a^{n-k} b^k &= \\
&= C_8^k (-5x)^{8-k} (-\tfrac{1}{2x^3})^k &= \\
&= C_8^k \frac{(-5x)^{8-k}(-1)^k}{(2x^3)^k} &= \\
&= C_8^k \frac{(-1)^k(-5)^{8-k}x^{8-k}}{2^k x^{3k}} &= \\
&= C_8^k \frac{(-1)^k(-1)^{8-k}5^{8-k}x^{8-k}}{2^k x^{3k}} &= \\
&= C_8^k \frac{(-1)^{k+8-k}5^{8-k}x^{8-k-3k}}{2^k} &= \\
&= C_8^k \frac{(-1)^8 5^{8-k}x^{8-4k}}{2^k} &= \\
&= C_8^k \frac{5^{8-k}x^{8-4k}}{2^k}
\end{aligned}$$

   Devemos determinar k tal que $T_{k+1} = C_8^k \frac{5^{8-k}x^0}{2^k}$.

   Portanto, deve ser $8 - 4k = 0 \Rightarrow k = 2$.

   Logo, o coeficiente de x^2 em $(-5x - \frac{1}{2x^3})^8$ é $C_8^2 \times \frac{5^{8-2}}{2^2} = C_8^2 \times \frac{5^6}{4} = \frac{8!}{6!2!} \times \frac{5^6}{4} = \frac{8\times7}{2} \times \frac{5^6}{4} = \frac{4\times7\times5^6}{4} = 7 \times 5^6$.

5. (4.0) Considere o grafo G dado por:

   $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$,
   $E(G) = \{(a, c), (b, d), (a, d), (b, c), (b, e), (a, e)\}$

(i) Desenhe o grafo G.

Resposta:

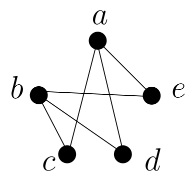

Figura 1: Grafo G

(ii) Desenhe uma árvore geradora de G? Justifique.

Resposta: A árvore T é geradora pois é um sugrafo gerador e é uma árvore, isto é, $V(T) = V(G)$ e $E(T) \subseteq E(G)$ e T é conexo e acíclico.

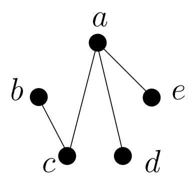

Figura 2: Árvore Geradora T de G

(iii) G é um grafo bipartido? Justifique.

Resposta: Sim, pois como G não possui ciclos ímpares então, pelo teorema de caracterização dos grafos bipartidos, G é bipartido.

G pode ser particionado em 2 conjuntos independentes A e B tal que $A = \{a, b\}$ e $B = \{c, d, e\}$.

(iv) G é um grafo hamiltoniano? Justifique.

Resposta: Não, pois para G ser hamiltoniano, G deve possuir um ciclo que passe por todos os vértices uma única vez, então tal ciclo teria tamanho 5, isto é, um ciclo ímpar, mas mostramos no item anterior que G é bipartido, e pela caracterização dos grafos bipartidos, G não possui ciclos ímpares.

(v) G é um grafo euleriano? Justifique.

Resposta: Não, pois por teorema, G é euleriano se e somente se todo vértice de G tem grau par, e $d(a) = d(b) = 3$ têm grau ímpar.

(vi) G é um grafo planar ? Justifique.

Resposta: Sim, pois G possui a seguinte representação plana:

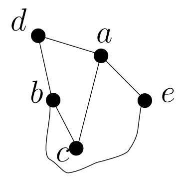

Figura 3: Representação plana de G