Exercícios resolvidos:

(i) Mostre usando o princípio de indução matemática que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Prova:

Queremos mostrar que a proposição $P(n)$: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ é verdadeira $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

I. Base da indução: $P(1)$: $1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)$ é verdadeira

pois $1^2 = 1 = \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot 3) = \frac{1}{6} \cdot 1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)$

II. Assumimos que $P(k)$ é verdadeira, hipótese de indução (HI). Então devemos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja:

$$P(k): \sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) \Rightarrow P(k+1): \sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{1}{6} (k+1)((k+1)+1) \cdot (2(k+1)+1)$$

Uma maneira de mostrar uma igualdade é partir de um dos membros (onde podemos usar (HI)) e chegar por igualdades ao segundo membro da proposição ou a uma expressão equivalente.

• Observemos que:

$$\frac{1}{6}(k+1)((k+1)+1)\,(2(k+1)+1) = \frac{1}{6}(k+1)\,(k+2)\,(2k+2+1) = \frac{1}{6}(k+1)\,(k+2)\,(2k+3) = \frac{1}{6}(k+1)\,(2k^2+7k+6)$$

- Para provar que P(k + 1) é verdadeira, começamos desenvolvendo:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 =$$

(propriedade associativa da soma) $= (1^2 + 2^2 + \ldots + k^2) + (k+1)^2$

(usando (HI) no $1^{\underline{o}}$ parêntese) $= \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2$

(colocando em evidência (k + 1)) $= (k+1)\left[\frac{1}{6} k(2k+1) + (k+1)\right] = \frac{1}{6}(k+1)\,[\,k(2k+1) + 6(k+1)\,]$

$$= \frac{1}{6}(k+1)\,[\,2k^2 + k + 6k + 6\,] = \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6)$$

Deste desenvolvimento e da observação obtemos que

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6) = \frac{1}{6}(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1).$$

Portanto, concluimos que P(k + 1) é verdadeira.

Sendo verificadas as partes I e II, pelo princípio de indução matemática concluímos que a proposição P(n): $\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)$ é válida $\forall\ n \in \mathbb{N}$

(ii) Mostre pelo princípio de indução matemática que, dado um número real negativo, $a < 0$, então as potências ímpares de a são números negativos.

Observemos que os números ímpares podem ser escritos com (2n + 1), para n = 0, 1, 2, ...

Logo, o enunciado equivale a:

Dado $a < 0$, P(n): $a^{2n+1} < 0$ é verdadeira $\forall$ n = 0, 1, 2, ...

Prova:

I. Base da indução: P(0): $a^{2\cdot 0+1} < 0$ é verdadeira pois $a^{2\cdot 0+1} = a < 0$

II. P(k) verdadeira $\Rightarrow$ P(k + 1) verdadeira

Devemos provar que P(k + 1): $a^{2(k+1)+1} < 0$ assumindo que a hipótese indutiva (HI),

P(k): $a^{2k+1} < 0$ é verdadeira.

De fato, $a^{2(k+1)+1} = a^{2k+2+1} = a^{(2k+1)+2} = a^{2k+1} \cdot a^2$ (1)

pela hipótese indutiva (HI) sabemos que $a^{2k+1} < 0$ e $a^2 > 0$

Em consequência, pela regra dos sinais tem-se que

$a^{2k+1} . a^2 < 0$, (2)

de (1) e (2) e, pela transitividade das desigualdades resulta que $a^{2(k+1)+1} < 0$,

Portanto, a proposição P(k + 1) é verdadeira.
Logo, pelo princípio de indução matemática concluimos que P(n) é verdadeira para todo n = 0, 1, 2, ...,
isto é, as potências ímpares de um número negativo a < 0 são negativas.

Nota: Todo número ímpar também pode ser representado por (2n - 1), para n = 1, 2, ...
Neste caso o enunciado do problema é equivalente a: Dado a < 0

P(k): $a^{2n-1} < 0$ é válida $\forall\ n \in \mathbb{N} = \{ 1, 2, \dots \}$

e neste caso a base da indução está dada por P(1) $a^{2\cdot 1-1} < 0$ é verdadeira.

A parte II não muda.

cederj

Exercícios:

Prove usando indução matemática

(i) $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = 2^{n} - 1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$

(ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\,(i + 1) = \frac{n(n + 1)\,(n + 2)}{3} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$

(iii) $2 + 5 + 8 + \ldots + (3n - 1) = \dfrac{n(1 + 3n)}{2} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$

(iv) $(1 + 1)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + 1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$

(v) 2 divide $n^{2} + n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$