Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP3 - Primeiro Semestre de 2017

Questões:

1. (1,5) Mostre usando indução matemática que:

   $2^0 + 2^1 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ para todo número natural, $n \geq 1$.

   Resposta: Seja $P(n) : 2^0+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1$ para todo número natural, $n \geq 1$.

   BASE DA INDUÇÃO: $n = 1$.

   Como $2^0 + 2^1 = 3$ e $2^{1+1} - 1 = 4 - 1 = 3$ temos que $P(1)$ é verdadeira.

   HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Vamos supor que:

   $P(k) : 2^0+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^k = 2^{k+1}-1$ seja verdadeira, para todo número natural, $n \geq 1$.

   PASSO INDUTIVO: Vamos provar que se $P(k)$ é verdadeira, então:

   $P(k+1) : 2^0+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{k+1} = 2^{k+2}-1$ também é verdadeira.

$$\underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k}_{\text{H.I.}} + 2^{k+1} =$$
$$2^{k+1} - 1 + 2^{k+1}$$
$$2 \times 2^{k+1} - 1$$
$$2^{k+2} - 1$$

   Assim, acabamos de mostrar, pelo PIM, que

$$P(n) : 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

   é verdadeira, para todo número natural,, $n \geq 1$.

2. (1,5) Um comitê de 10 pessoas deve ser formado a partir de 12 homens e 10 mulheres. O comitê deve ter pelo menos 1 homem e pelo menos 1 mulher. De quantas maneiras esse comitê pode ser formado? Justifique.

   Resposta: Queremos escolher 10 pessoas, incluindo pelo menos 1 mulher e pelo menos 1 homem, em um grupo de 12 homens e 10 mulheres. Vamos resolver este problema usando complementaridade, isto é, subtraindo do número total de escolhas possíveis de 10 pessoas sem restrições, aquelas nas quais NÃO temos nenhuma mulher ou nenhum homem, ou seja, aquelas em que temos zero mulheres ou zero homens.

   Total de escolhas de 10 pessoas (sem restrições):

   Como estamos falando em escolher pessoas, não devemos considerar a ordem de tais escolhas, já que, escolher primeiro Márcio e depois João é o mesmo que escolher João e depois Márcio, por exemplo. Então, denotando por n_t o número de todas as escolhas de 10 pessoas que é possível fazer a partir de um grupo com 22 pessoas, temos:

$$n_t = C_{22}^{10} = \frac{22!}{10!12!} = 646646.$$

   Escolhas de 10 pessoas que NÃO incluem mulheres:

   Nesse caso, como não podemos escolher mulheres, nossas escolhas serão restritas ao grupo de 12 homens. Assim, denotando por n_h o número de escolhas de 10 homens que é possível fazer, temos:

$$n_h = C_{12}^{10} = \frac{12!}{10!2!} = 66.$$

   Escolhas de 10 pessoas que NÃO incluem homens:

   Nesse caso, como não podemos escolher homens, nossas escolhas serão restritas ao grupo de 10 mulheres. Assim, denotando por n_m o número de escolhas de 10 mulheres que é possível fazer, temos:

$$n_m = C_{10}^{10} = \frac{10!}{10!0!} = 1.$$

   Denotando por n número de formas de escolher 10 pessoas incluindo pelo menos 1 mulher e pelo menos 1 homem, em um grupo de 12 homens e 10 mulheres e utilizando o princípio aditivo temos:

$$n = n_t - (n_h + n_m) = 646646 - (66 + 1) = 646579.$$

Portanto, podemos escolher 10 pessoas, incluindo pelo menos 1 mulher e pelo menos 1 homem, dentre 12 homens e 10 mulheres de 646579 formas.

3. (1,5) Quantos números pares de 5 algarismos podemos formar com os algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 7$ e 9, se:

(i) os algarismos não podem ser repetidos? Justifique.

Resposta: Neste caso, como o número deve ser par, o mesmo deve terminar em 2 ou 4. Assim, temos 2 possibilidades para o último dígito do número. Além disso, como os algarismos devem ser distintos, temos $A_6^4 \times 2 = \frac{6!}{2!} \times 2 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$ números pares distintos de 5 algarismos formados pelos algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 7$ ou 9.

(ii) os algarismos podem ser repetidos? Justifique.

Resposta: Para este caso, o número deve terminar em 2 ou 4 e os mesmo não possui restrição de ser distinto. Logo, temos 2 possibilidades para o último dígito do número. E, como os algarismos devem ser distintos, temos $AR_7^4 \times 2 = 7^4 \times 2$ números pares de 5 algarismos formados pelos algarismos $1, 2, , 3, 4, 5, 7$ ou 9.

4. (1,0) Pede-se:

(i) Escreva o enunciado do Teorema das Linhas.

Resposta: O Teorema das Linhas nos diz que:

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

(ii) Calcule a seguinte soma usando o Teorema das Linhas. Justifique.

$$C_9^1 + C_9^2 + C_9^3 + \cdots + C_9^8$$

Resposta: Temos que $n = 9$ e pelo Teorema das Linhas, concluímos: $C_9^0 + C_9^1 + C_9^2 + \cdots + C_9^8 + C_9^9 = 2^9$.

Assim, $C_9^1 + C_9^2 + \cdots + C_9^8 = 2^9 - C_9^0 - C_9^9$

Como $C_9^0 = C_9^9 = \frac{9!}{0!9!} = 1$ temos que:

$$C_9^1 + C_9^2 + \cdots + C_9^8 = 2^9 - 1 - 1 = 2^9 - 2.$$

5. (4,5) As perguntas seguintes são sobre grafos. **Justifique** cada uma das suas respostas.

(a) Existe grafo 3-regular (regular de grau 3) com 21 vértices?

Resposta: A afirmação é falsa. Suponha, por absurdo, que existe um grafo 3-regular com 21 vértices.
Pelo Teorema do Aperto de Mãos, temos:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

e isto implica em dizer que a soma dos graus de um grafo é um número par.

Como G é 3-regular temos:

$$3 \times 21 = 2m \Rightarrow 63 = 2m$$

Absurdo, pois não é número par. Logo, não existe grafo 3-regular com 21 vértices.

(b) Considere o grafo bipartido completo $G = K_{4,4}$.

(i) Quantas arestas G possui?

Resposta: Seja a representação gráfica do grafo bipartido $K_{4,4}$ abaixo:
O grafo bipartido $K_{4,4}$ possui $|E(K_{4,4})| = 4 \times 4 = 16$ arestas.

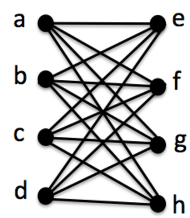

Figura 1: Grafo $K_{4,4}$.

(ii) G é euleriano?

Resposta: Sim. O grafo $K_{4,4}$ é um grafo bipartido completo, ou seja, seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos (V_1, V_2) de modo que toda aresta do $K_{4,4}$ tem um extremo em V_1 e o outro em V_2. Além disso, como o grafo é completo, todo vértice de V_1 é adjacente a todo vértice de V_2. Assim, $d(v) = 4,\ \forall v \in V(K_{4,4})$. Observe a Figura 1.

O Teorema de Euler garante que um grafo é Euleriano se e somente se seus vértices têm grau par. Desta forma, podemos garantir que o $K_{4,4}$ é euleriano.

(iii) G é hamiltoniano?

Resposta: Um grafo é Hamiltoniano se possui um ciclo Hamiltoniano, i.e., um ciclo que inclui todos os seus vértices. O grafo $K_{4,4}$ é Hamiltoniano, pois podemos exibir o seguinte ciclo Hamiltoniano: $aebfcgdha$.
Portanto o grafo $K_{4,4}$ é Hamiltoniano.

(iv) G é planar?

Resposta: Falso. Observe que o conjunto de vértices a, b, c, e, f, g induz um $K_{3,3}$. O teorema de Kuratowski garante que um grafo é planar se e somente se não possui subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$. Sendo assim, o grafo em questão não é planar.

(v) O grafo complemento de G é conexo?

Resposta: Não. O grafo complemento do grafo grafo bipartido $K_{4,4}$ é a união disjunta de dois grafos completos de tamanho 4 $(K_4 \cup K_4)$, ou seja, o grafo é desconexo.

(c) Seja F uma floresta com 11 componentes conexos e 60 arestas. Calcule o número de vértices de F.

Resposta: Se F é floresta, então todos os seus componentes conexos são árvores. Uma árvore com n vértices tem $m = n - 1$ arestas. Assim, cada componente conexo da floresta F possui

$$m_i = n_i - 1$$

arestas, $i = 1, 2, \ldots, 11$.

Sejam $|E(F)|$, o número de arestas da floresta F e $|V(F)|$, o número de vértices da floresta F. Logo, temos:

$$|E(G)| = m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+m_6+m_7+m_8+m_9+m_{10}+m_{11}$$

$$|E(G)| = n_1-1+n_2-1+n_3-1+n_4-1+n_5-1+n_6-1+n_7-1+n_8-1+$$
$$+n_9 - 1 + n_{10} - 1 + n_{11} - 1$$

$$|E(G)| = \underbrace{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + n_9 + n_{10} + n_{11}}_{|V(F)|} - 11$$

$$|E(G)| = |V(F)| - 11$$

$$60 = |V(F)| - 11$$

$$|V(F)| = 60 - 11$$

$$|V(F)| = 49$$

Portanto, o número de vértices da floresta F é 49.