Gabarito da AP 2 de Fundamentos de Algoritmos para Computação

Questões:

1. (1.5) Calcule o termo independente de x no desenvolvimento de

$$(x^2 - \frac{1}{x^2})^{12}.$$

Justifique a resposta.

Resposta:

$$(x^2 - \frac{1}{x^2})^{12}$$

Temos que:

$n = 12$, $a = x^2$, $b = -\frac{1}{x^2}$

Daí, para $0 \leq k \leq 12$ temos:

$$\begin{array}{rcll} T_{k+1} & = & C_n^k a^{n-k} b^k & = \\ & = & C_{12}^k (x^2)^{12-k} (-\frac{1}{x^2})^k & = \\ & = & C_{12}^k (-1)^k \frac{(x^2)^{12-k}}{(x^2)^k} & = \\ & = & C_{12}^k (-1)^k \frac{x^{24-2k}}{x^{2k}} & = \\ & = & C_{12}^k (-1)^k x^{24-2k} x^{-2k} & = \\ & = & C_{12}^k (-1)^k x^{24-2k-2k} & = \\ & = & C_{12}^k (-1)^k x^{24-4k} & \end{array}$$

Logo, devemos determinar k tal que:

$$T_{k+1} = C_{12}^k (-1)^k x^0$$

Portanto, devemos ter $24 - 4k = 0 \Rightarrow k = 6$.

Daí, o termo independente de $(x^2 - \frac{1}{x^2})^{12}$ é $C_{12}^6(-1)^6 = C_{12}^6$.

2. (1.0) Usando o teorema da colunas mostre que:

$$2\sum_{k=1}^n k = n(n+1) \quad \text{para } n \in N.$$

Resposta:

Queremos mostrar que:

$2\sum_{k=1}^n k = n(n+1)$, isto é, $\sum_{k=1}^n = \frac{n(n+1)}{2}$

Então, temos:

$$\begin{array}{rcll}
\sum_{k=1}^n k & = & \sum_{k=1}^n k\frac{(k-1)!}{(k-1)!} & = \\
& = & \sum_{k=1}^n \frac{k!}{(k-1)!} & = \\
& = & \sum_{k=1}^n \frac{k!}{(k-1)!}\frac{1!}{1!} & = \\
& = & \sum_{k=1}^n \frac{k!}{1!(k-1)!} & = \\
& = & \sum_{k=1}^n C_k^1 & = \\
& = & C_1^1 + C_2^1 + \ldots + C_{n-1}^1 + C_n^1 &
\end{array}$$

Pelo teorema das colunas, temos que:

$$\begin{array}{rcll}
C_1^1 + C_2^1 + \ldots + C_{n-1}^1 + C_n^1 & = & C_{n+1}^2 & \\
& = & \frac{(n+1)!}{2!(n+1-2)!} & = \\
& = & \frac{(n+1)!}{2(n-1)!} & = \\
& = & \frac{(n+1)(n)(n-1)!}{2(n-1)!} & = \\
& = & \frac{n(n+1)}{2} &
\end{array}$$

Logo, $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 2\sum_{k=1}^n k = n(n+1)$.

3. (1.0) Encontre a fórmula fechada da relação de recorrência:

$$a_n = 3a_{n-1} \quad \text{com} \quad a_0 = 1.$$

Justifique a resposta.

Resposta:

$$\begin{array}{rcll} a_n & = & 3a_{n-1} & = \\ & = & 3(3a_{n-2}) & = \\ & = & 3^2 a_{n-2} & = \\ & = & 3^2(3a_{n-3}) & = \\ & = & 3^3 a_{n-3} & = \\ & & \vdots & \\ & = & 3^i a_{n-i} & \end{array}$$

Para que $n - i = 0$ então $n = i$.

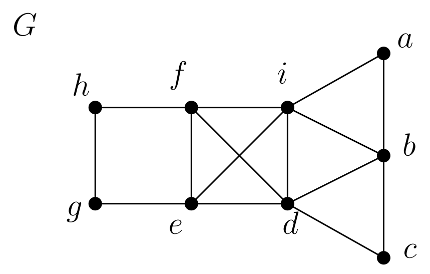
Tomemos $n = i$, logo $a_n = 3^n a_0 = 3^n.1 = 3^n$.

4. (1.5) Mostre que em uma árvore $T = (V, E)$ temos $\sum_{v \in V} d(v) = 2n - 2$ onde $|V| = n$.

Resposta: Temos que em uma árvore o número de arestas é igual ao número de vértices menos um, isto é, $|E| = |V| - 1 \Rightarrow m = n - 1$ (1).

Em qualquer grafo G, temos $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)| = 2m$ (teorema do aperto de mãos), logo em particular para uma árvore T o $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$ (2) e substituindo (1) em (2) temos: $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2(n - 1) = 2n - 2$.

Portanto, $\sum_{v \in V} d(v) = 2(n - 1) = 2n - 2$.



5. (5.0) As seguintes perguntas devem ser respondidas, considerando o grafo G abaixo:

(a) Qual a distância entre os vértices a e g? Justifique.

Resposta: A distância entre dois vértices v e w de um grafo G é o comprimento do menor caminho entre eles.

Daí, $d(a, g) = 3$ ($aieg$, por exemplo, é um dos menores caminhos entre a e g).

(b) Qual o diâmetro de G? Justifique.

Resposta: A excentricidade de um vértice v de G, $e(v)$, é o valor da maior distância de v aos outros vértices de G, isto é, $e(v) = max_{w \in V(G)}\{d(v, w)\}$. O diâmetro de um grafo G é o valor da maior excentricidade, isto é, $diam(G) = max_{v \in (G)}\{e(G)\}$.

Daí, $e(a) = e(b) = e(c) = e(g) = e(h) = 3$ e $e(d) = e(e) = e(f) = e(i) = 2$.

Logo, $diam(G) = 3$.

(c) Determine o centro de G. Justifique.

Resposta: O centro de um grafo G é o conjunto dos vértices de G que tem a menor excentricidade, isto é, $c(G) = \{v \in V(G) \backslash e(v)$

é mínima }.

Então, $c(G) = \{d, e, f, i\}$. Veja o item (b)

(d) G possui um trajeto (fechado) euleriano? Justifique.

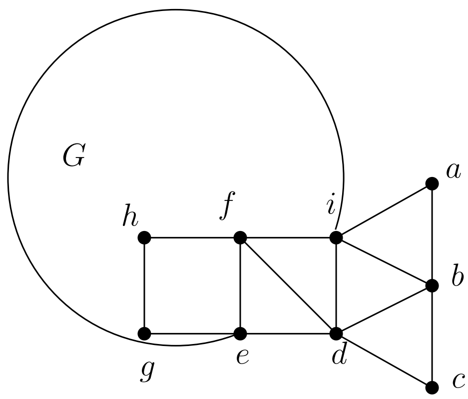
Resposta: Por teorema temos que um grafo G possui trajeto euleriano se e somente se todo vértice de G tem grau par.

Os vértices d e i do grafo G posuem grau ímpar, isto é, $d(d) = 5$ e $d(i) = 5$.

Logo, G não possui trajeto euleriano.

(e) G é planar? Justifique.

Resposta: G é planar, pois podemos ter a seguinte representação plana:



(f) G é conexo? Justifique.

Resposta: Um grafo G é conexo se para todo par de vértices de G existe um caminho entre eles, e no grafo G dado isso acontece. Logo, G é conexo.