Exercícios:

1. Determine quais dos seguintes conjuntos são iguais:

   A = { a, b, -1 } B = { b, a, -1 } C = { b, a, b, -1 } D = { a, -1 }

2. Escreva os seguintes conjuntos explicitando seus elementos:

   (i) $A = \{ x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 4 \}$

   (ii) $B = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \leq \sqrt{10} \text{ ou } x > -2 \}$

   (iii) $C = \{ x \in \mathbb{R} \mid 2x + 1 = 5 \}$

   (iv) $D = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0 \}$

3. Determine quais das seguintes relações de pertinência são verdadeiras:

   (i) $\sqrt{2} \in \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2 \}$

   (ii) $3 \in \{ x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 4 \}$ onde $|a| = a$ se $a \geq 0$ ou $|a| = -a$ se $a < 0$

   (Observação: $|x| \leq 4$ é equivalente a $-4 \leq x \leq 4$)

   (iii) $\varnothing \notin P(A)$ onde $A = \{ 1, 2 \}$

   (iv) $\{1\} \in \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1 \}$

   (v) $\varnothing \in \{ \varnothing , \{1\} \}$

4. Determine quais das seguintes relações de inclusão são verdadeiras:

   (i) $\{ -2, 0 \} \subseteq \{ x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2 \}$

   (ii) $\{\pi\} \subset \{ 1, \{\pi\}, a \}$

   (iii) $\{ \{\pi\} \} \subset \{ 1, \{\pi\}, a \}$

   (iv) $\varnothing \not\subseteq \{ 3, 1, -7 \}$

   (iv) $\varnothing \subseteq \{ \varnothing, \{1\} \}$

5. Dado o conjunto $A = \{ x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 1 \} = \{ -1, 0, 1 \}$, determine o conjunto P(A).

cederj

Exercícios

1. Sejam $U = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$, $A = \{ 0, 4 \}$, $B = \{ 0, 1, 2, 3 \}$, $C = \{ 1, 4 \}$, $D = \{ 0, 1 \}$. Determine os seguintes conjuntos:

a. $A \cup B$ c. $A \cap \bar{B}$ e. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ g. $A \cup \bar{B}$ i. $B - \bar{A}$

b. $B \cap C$ d. $A \cup (B \cap C)$ f. $(\overline{A \cap B}) \cup (\overline{A \cap C})$ h. $A - B$ j. $A \cup (B \cap C \cap D)$

2. Represente por meio de um diagrama de Venn a diferença simétrica entre dois conjuntos, $A \Delta B$, definida por

$$A \Delta B := (A - B) \cup (B - A)$$

3. Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto universo U. Represente por meio de diagramas de Venn as seguintes situações.

(i) $A \subset B \subset C$ (iii) $A \subseteq B \cup C$ (v) $A \subseteq B - C$

(ii) $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$ (iv) $A \subseteq \bar{B}$

4. Verifique, usando os diagramas de Venn as seguintes igualdades:

(i) $(A - B) \cup B = A \cup B$ (iv) $A - B = A \cap \bar{B}$ (vii) $(A \cap D) \cup \bar{D} = A \cup \bar{D}$

(ii) $(A - B) \cap B = \varnothing$ (v) $(\bar{\bar{A}}) = A$

(iii) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$ (vi) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

5. Mostre que $A \subseteq B$ e $A \subseteq C$ => $A \subseteq B \cap C$

Dica: Lembre-se da definição de inclusão de conjuntos ("$D \subseteq E$" significa que "se $x \in D$ então $x \in E$").

Para mostrar que $A \subseteq B \cap C$ considere um elemento de A e deve chegar à conclusão de que $x \in B \cap C$ usando para isso as hipóteses da questão.

6. Mostre que $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \varnothing$

Dica: Mostre primeiro: $A \subseteq B$ => $A - B = \varnothing$. Depois mostre a implicação inversa:

$A - B = \varnothing$ => $A \subseteq B$

7. Mostre que $A - B \subseteq A$

8. Mostre que $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$

9. Dados os conjuntos $C = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de } 2 \}$, $D = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de } 3 \}$,
$E = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de } 6 \}$, verifique que $C \cap D = E$.

10. Considere $A = \{ x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x^2 \leq 300 \}$, $B = \{ x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq 3x - 2 \leq 30 \}$. Calcule:

(i) $A \cup B$ (iii) $A - B$ (v) $\overline{A} \cap \overline{B}$

(ii) $A \cap B$ (iv) $B - A$ (vi) $\overline{A} \cup \overline{B}$

11. Dado $C = \{ 2, -1, 5 \}$, considere o conjunto universo sendo o conjunto de partes de C, $U = P(C)$. Calcule:

(i) $\overline{A}$ (ii) $A \cap B$

para $A = \{ \{2, -1\}, \{2\} \}$, $B = \{ \{5\}, \{2, -1, 5\}, \{-1, 2\} \}$.

12. Use a propriedade distributiva da interseção em relação a união de conjuntos para provar que
$(A \cap D) \cup \overline{D} = A \cup \overline{D}$.

13. Prove que $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.

Dica: Use a igualdade $A - B = A \cap \overline{B}$ vista no exercício 4(iv), uma das propriedades distributivas, uma das leis de Morgan e a identidade vista em 4(v).

14. Mostre as seguintes igualdades:

(i) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$ (isto é, $A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cap B)$)

(ii) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

15. Dados os seguintes conjuntos: $A = \{ x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq 7 \}$, $B = \{ x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 7 \}$ Verifique que:

(i) $A = B$ (ii) $\overline{A} \neq \overline{B}$

16. Exercício comentado: Mostre a seguinte igualdade

$$[\,(A - B) \cup (B - A)\,] \cap C = [\,(A \cap C) - B\,] \cup [\,(B \cap C) - A)$$

Prova: Raciocínio correto:

$$[\,(A - B) \cup (B - A)\,] \cap C =$$

(propriedade da diferença $A - B = A \cap \bar{B}$) $= [(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})] \cap C =$

(propriedade distributiva) $= [(A \cap \bar{B}) \cap C] \cup [(B \cap \bar{A}) \cap C] =$

(prop. comutativa e associativa da interseção) $= [(A \cap C) \cap \bar{B}] \cup [(B \cap C) \cap \bar{A}] =$

(propriedade da diferença) $= [(A \cap C) - B] \cup [(B \cap C) - A]$

Raciocínio incorreto: $[(A - B) \cup (B - A)] \cap C = [(A \cap C) - B] \cup [(B \cap C) - A]$

$$[(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})] \cap C = [(A \cap C) \cap \bar{B}] \cup [(B \cap C) \cap \bar{A}]$$

$$[(A \cap \bar{B}) \cap C] \cup [(B \cap \bar{A}) \cap C] = [(A \cap C) \cap \bar{B}] \cup [(B \cap C) \cap \bar{A}]$$

$$[(A \cap C) \cap \bar{B}] \cup [(B \cap C) \cap \bar{A}] = [(A \cap C) \cap \bar{B}] \cup [(B \cap C) \cap \bar{A}]$$

Portanto, a igualdade é verdadeira.

Ainda que cada passagem esteja bem justificada, o raciocínio continua incorreto.

Porquê? Tente você mesmo responder à pergunta. Pense ... e depois veja a resposta.

O erro deste raciocínio está em que para provar a igualdade está se partindo justamente dela e através de raciocínios corretos chega-se a uma identidade, de um lado exatamente igual ao outro. Você poderia ter partido de uma falsidade e ter chegado a uma verdade, mas com este raciocínio está se supondo que chegou-se a provar o que queria, ou seja, a igualdade inicial.

Não está convencido? Vejamos o seguinte exemplo.

Prove que -1 = 1

Prova: Usamos o raciocínio incorreto:

$-1 = 1$ $\qquad (-1)^2 = 1^2$ $\qquad 1 = 1$

Chegamos a uma identidade então, por este raciocínio incorreto temos que -1 = 1. Partimos de uma proposição falsa e chegamos a uma verdadeira.

Atenção: Partir do que está tentando-se provar não pode ser feito da maneira mecânica como no raciocínio incorreto.

Modificação do raciocínio incorreto

Provar que $[(A - B) \cup (B - A)] \cap C = [(A \cap C) - B] \cup [(B \cap C) - A]$ é equivalente a provar que

$[(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})] \cap C = [(A \cap C) \cap \bar{B}) \cup [(B \cap C) \cap \bar{A}]$ devido a propriedade da diferença.

Pela propriedade distributiva, mostrar esta última igualdade é equivalente a provar que

$[(A \cap \bar{B}) \cap C] \cup [(B \cap \bar{A}) \cap C] = [(A \cap C) \cap \bar{B}] \cup [(B \cap C) \cap \bar{A}]$

Pelas propriedades associativa e comutativa, mostrar esta última igualdade é equivalente a provar que

$[(A \cap C) \cap \bar{B}] \cup [(B \cap C) \cap \bar{A}] = [(A \cap C) \cap \bar{B}] \cup [(B \cap C) \cap \bar{A}]$ que é verdadeira.

Logo, pelas igualdades equivalentes provamos que $[(A - B) \cup (B - A)] \cap C = [(A \cap C) - B] \cup [(B \cap C) - A]$ é verdadeira.

(Observe que, $-1 = 1$ não é equivalente a $(-1)^2 = 1^2$)

Outra modificação: $[\ (A - B) \cup (B - A)\ ] \cap C =$

(propriedade $A - B = A \cap \bar{B}$) $= [(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})] \cap C =$

(propriedade distributiva) $= [(A \cap \bar{B}) \cap C] \cup [(B \cap \bar{A}) \cap C] =$

(prop. comutativa e associativa da interseção) $= [(A \cap C) \cap \bar{B}] \cup [(B \cap C) \cap \bar{A}]$ (1)

Por outro lado temos que: $[\ (A \cap C) - B\ ] \cup [\ (B \cap C) - A\ ] =$

(propriedade $A - B = A \cap \bar{B}$) $= [(A \cap C) \cap \bar{B}] \cup [(B \cap C) \cap \bar{A}]$ (2)

De (1) e (2) resulta que $[(A - B) \cup (B - A)] \cap C = [(A \cap C) - B] \cup [(B \cap C) - A]$

Exercícios

1. Sejam A e B dois subconjuntos de um conjunto universo U tais que $B \subseteq A$. Usando o princípio aditivo prove que $n(A - B) = n(A) - n(B)$.

2. Quantos números inteiros entre 1 e 100 são divisíveis por 3 ou por 7.

   Dica: Considere $A = \{ x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 100 \text{ e } x = 3k \text{ para algum } k \in \mathbb{N} \}$

   $B = \{ x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 100 \text{ e } x = 7k \text{ para algum } k \in \mathbb{N} \}$

   e use o princípio de inclusão e exclusão.

3. Use os princípios aditivo ou de inclusão e exclusão para determinar, em cada caso, a quantidade de números naturais entre 1 e 60 que verificam:

   (i) são divisíveis por 2 e por 3

   (ii) são divisíveis por 2 ou por 3

   (iii) não são divisíveis nem por 2 nem por 3

   (iv) são ímpares divisíveis por 3 ou são divisíveis por 2

   (v) são divisíveis por 2 ou por 3 ou por 5

4. Foram consultadas 200 pessoas que estavam pesquisando preços de televisores em lojas de eletrodomésticos. As respostas foram as seguintes:

   - 40% perguntaram pela marca A;
   - 35% pela marca B;
   - 10% pelas marcas A e B;
   - 25% somente perguntaram por outras marcas.

   Use o princípio de adição ou o princípio da inclusão e exclusão para determinar:

   (i) quantidade de pessoas que perguntaram pelos preços das televisões de marcas A ou B.

   (ii) número de pessoas que perguntaram pela marca A e não pela marca B (lembre-se do exercício 1).

Exercícios resolvidos:

(i) Mostre usando o princípio de indução matemática que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Prova:

Queremos mostrar que a proposição $P(n)$: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ é verdadeira $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

I. Base da indução: $P(1)$: $1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)$ é verdadeira

pois $1^2 = 1 = \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot 3) = \frac{1}{6} \cdot 1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)$

II. Assumimos que $P(k)$ é verdadeira, hipótese de indução (HI). Então devemos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja:

$$P(k):\ \sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) \ \Rightarrow\ P(k+1):\ \sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{1}{6} (k+1)((k+1)+1) \cdot (2(k+1)+1)$$

Uma maneira de mostrar uma igualdade é partir de um dos membros (onde podemos usar (HI)) e chegar por igualdades ao segundo membro da proposição ou a uma expressão equivalente.

• Observemos que:

$$\frac{1}{6}(k+1)((k+1)+1)\,(2(k+1)+1) = \frac{1}{6}(k+1)\,(k+2)\,(2k+2+1) = \frac{1}{6}(k+1)\,(k+2)\,(2k+3) = \frac{1}{6}(k+1)\,(2k^2+7k+6)$$

- Para provar que P(k + 1) é verdadeira, começamos desenvolvendo:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 =$$

(propriedade associativa da soma) $= (1^2 + 2^2 + \ldots + k^2) + (k+1)^2$

(usando (HI) no $1^{\underline{o}}$ parêntese) $= \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2$

(colocando em evidência (k + 1)) $= (k+1)\left[\frac{1}{6} k(2k+1) + (k+1)\right] = \frac{1}{6}(k+1)\,[\,k(2k+1) + 6(k+1)\,]$

$$= \frac{1}{6}(k+1)\,[\,2k^2 + k + 6k + 6\,] = \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6)$$

Deste desenvolvimento e da observação obtemos que

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6) = \frac{1}{6}(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1).$$

Portanto, concluimos que P(k + 1) é verdadeira.

Sendo verificadas as partes I e II, pelo princípio de indução matemática concluímos

que a proposição P(n): $\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)$ é válida $\forall\ n \in \mathbb{N}$

(ii) Mostre pelo princípio de indução matemática que, dado um número real negativo, $a < 0$, então as potências ímpares de a são números negativos.

Observemos que os números ímpares podem ser escritos com (2n + 1), para n = 0, 1, 2, ...

Logo, o enunciado equivale a:

Dado $a < 0$, P(n): $a^{2n+1} < 0$ é verdadeira $\forall$ n = 0, 1, 2, ...

cederj

Prova:

I. Base da indução: $P(0)$: $a^{2\cdot 0+1} < 0$ é verdadeira pois $a^{2\cdot 0+1} = a < 0$

II. $P(k)$ verdadeira $\Rightarrow$ $P(k+1)$ verdadeira

Devemos provar que $P(k+1)$: $a^{2(k+1)+1} < 0$ assumindo que a hipótese indutiva (HI),

$P(k)$: $a^{2k+1} < 0$ é verdadeira.

De fato, $a^{2(k+1)+1} = a^{2k+2+1} = a^{(2k+1)+2} = a^{2k+1} \cdot a^2$ (1)

pela hipótese indutiva (HI) sabemos que $a^{2k+1} < 0$ e $a^2 > 0$

Em consequência, pela regra dos sinais tem-se que

$a^{2k+1} . a^2 < 0$, (2)

de (1) e (2) e, pela transitividade das desigualdades resulta que $a^{2(k+1)+1} < 0$,

Portanto, a proposição $P(k+1)$ é verdadeira.

Logo, pelo princípio de indução matemática concluimos que $P(n)$ é verdadeira para todo $n = 0, 1, 2, ...$,
isto é, as potências ímpares de um número negativo $a < 0$ são negativas.

Nota: Todo número ímpar também pode ser representado por $(2n - 1)$, para $n = 1, 2, ...$
Neste caso o enunciado do problema é equivalente a: Dado $a < 0$

$P(k)$: $a^{2n-1} < 0$ é válida $\forall$ $n \in \mathbb{N} = \{ 1, 2, ... \}$

e neste caso a base da indução está dada por $P(1)$ $a^{2\cdot 1-1} < 0$ é verdadeira.

A parte II não muda.

Exercícios:

Prove usando indução matemática

(i) $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

(ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\,(i + 1) = \frac{n(n + 1)\,(n + 2)}{3} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

(iii) $2 + 5 + 8 + \ldots + (3n - 1) = \dfrac{n(1 + 3n)}{2} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

(iv) $(1 + 1)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

(v) 2 divide $n^2 + n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

Exercícios:

(1) Seja $\{a_n\}$ a seqüência definida por:

$$a_1 = 1\,, \quad a_2 = 5$$

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad n \geq 3$$

Mostre usando a indução forte que $a_n = 2^n + (-1)^n \ \forall \ n \geq 1$

(2) Seja $\{F_n\}$ a seqüência de Fibonacci.

Mostre usando a indução forte que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \forall \ n \in \mathbb{N}$$

LISTA DE EXERCÍCIOS

Aula 6: Princípios Aditivo e Multiplicativo

1. Suponha que para fazer uma viagem Rio-Belo Horizonte-Rio, eu posso usar como transporte o trem, o ônibus ou o avião. De quantas maneiras posso escolher os transportes se não desejo usar na volta o mesmo meio de transporte usado na ida?

2. Quantas palavras contendo 4 letras diferentes podem ser formadas com um alfabeto de 26 letras?

3. Quantos inteiros há entre 100 e 999 cujos algoritmos são distintos?

4. Quantos números de 3 dígitos são maiores que 390 e:
   a) têm todos os dígitos diferentes
   b) não têm dígitos iguais a 1, 3 ou 5
   c) têm as propriedades a) e b) simultaneamente

5. Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 20 questões de múltipla-escolha com 5 alternativas por questões?

6. Quantos divisores tem o número $N = 2^3 \times 3^2 \times 5^4$?
   E o número $M = a^m \times b^n \times c^p$?

7. Quantos são os números naturais de 4 dígitos que possuem pelo menos dois dígitos iguais?

LISTA DE EXERCÍCIOS

AULA 7: Permutações simples e circulares

1. Simplifique as seguintes expressões:

(a) $\frac{(n+1)!}{n!}$ (b) $\frac{n!}{(n+2)!}$ (c) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

2. De quantas maneiras as letras da palavra **CURSO** podem ser permutadas?

3. Um cubo de madeira tem as faces pintadas de cores diferentes. De quantos modos podem ser gravados números de 1 ao 6 sobre cada uma das faces?

4. Considere 4 cidades **A, B, C** e **D.** Ana e João pensam fazer um passeio pelas 4 cidades, passando por cada uma delas apenas uma vez.

(a) Se eles podem começar por qualquer cidade e terminar em qualquer cidade, quantos trajetos são possíveis?

(b) Se eles devem começar pela cidade **A**, quantos caminhos são possíveis?

5. De quantos modos é possível colocar em uma prateleira 5 livros distintos de matemática, 3 diferentes de física e 2 diferentes de inglês?

6. Quantos são os anagramas da palavra **ÂNGULO** que :

(a) começam com vogal?

(b) começam e terminam por vogal?

(c) não têm juntas as letras **A** e **N**?

7. De quantos modos 5 meninas e 5 meninos podem formar uma roda de ciranda de modo que pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas?

8. De quantos modos 4 casais podem formar uma roda de ciranda de modo que cada homem permaneça ao lado da sua mulher e que pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas?

9. De quantos modos 5 mulheres e 6 homens podem formar uma roda de ciranda de modo que as mulheres permaneçam juntas?

LISTA DE EXERCÍCIOS

AULA **8**: **Arranjos simples**

1. Em uma comissão de 10 professores devem ser escolhidos um coordenador e um subcoordenador. De quantas maneiras eles podem ser escolhidos?

2. Determine, quando for possível, o valor de n se:

(a) $A(n, 2) = 72$ (b) $4A(n, 2) = A(2n, 3)$

3. De quantas maneiras 4 amigos entre 10 podem se colocar em uma foto?

4. Quantos tipos de bilhetes especificando a origem e o destino têm uma compania aérea que une 7 cidades?

5. Considere os números de 3 algarismos distintos formados com os dígitos 2, 3, 5, 8 e 9.

(a) Quantos são estes números?
(b) Quantos são menores do que 800?
(c) Quantos são múltiplos de 5?
(d) Quantos são pares?
(e) Quantos são ímpares?
(f) Quantos são múltiplos de 2?

6. Quantas são as palavras de 5 letras distintas de um alfabeto de 26 letras nas quais a letra **A** figura mas não é a letra inicial da palavra?

7. Quantos números de 3 e 4 algarismos distintos e maiores do que 300 podem ser formados com os algarismos 0, 1, 3, 5 e 7?

8. Quantos são os números de 5 algarismos distintos na base 10 :

(a) nos quais o algarismo 2 figura?
(b) nos quais o algarismo 2 não figura?

LISTA DE EXERCÍCIOS

AULA **9**: **Combinações simples**

1. Prove que:

$$C(n, n) = C(n, 0) = 1$$

2. Determine o valor de n que satisfaz:

$$P_n = 12C(n, 2)$$

3. Um estudante recebe uma prova contendo 6 questões. Ele deve escolher 4 para resolver. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer essa escolha?

4. Uma turma de calouros tem 15 rapazes e 10 moças. Devem escolher 2 representantes. De quantas maneiras eles podem ser escolhidos?

5. De quantos modos 5 meninas e 3 meninos podem ser divididos em 2 grupos de 4 crianças de forma tal que cada grupo inclua pelo menos 1 menino?

6. Uma comissão formada por 3 homens e 3 mulheres deve ser escolhida em um grupo de 8 homens e 5 mulheres.

(a) Quantas comissões podem ser formadas?

(b) Qual seria a resposta se um dos homens não aceitasse participar da comissão se nela estivesse determinada mulher?

7. Para a seleção brasileira foram convocados 2 goleiros, 6 zagueiros, 7 meios de campo e 4 atacantes. De quantos modos é possível escalar a seleção com 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meios de campo e 2 atacantes?

8. Em um torneio no qual cada participante enfrenta todos os demais uma única vez são jogadas 780 partidas. Quantos são os participantes?

9. Considere 3 vogais diferentes(incluindo o **A**) e 7 consoantes diferente (incluindo o **B**).

(a) Quantas anagramas de 5 letras diferentes podem ser formados com 3 consoantes e 2 vogais?

(b) Quantas começam com **A**?

Observação: Na resolução usam-se arranjos e combinações simples.

10. De quantas maneiras podemos arrumar em fila 5 sinais $(-)$ e 7 sinais $(+)$?

Observação: O problema é equivalente a encontrar o número de 12 lugares diferentes a serem preenchidos por 5 sinais $(-)$ e 7 sinais $(+)$.

Aula 10: Permutações com repetição

Exercícios

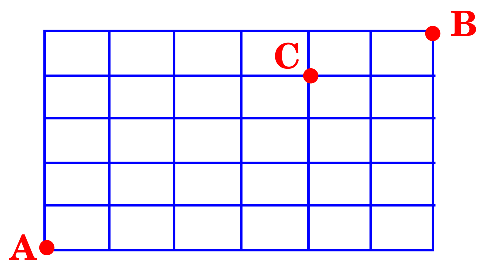
1 - Quantos números de 7 dígitos podem ser formados usando apenas os algarismos 1, 3, 6, 6, 6, 8, 8 supondo que:

(a) não se têm restrições,

(b) devem ser maiores que 6.000.000.

2 - Quantos números de 5 algarismos podem ser formados usando apenas os algarismos 1, 1, 1, 1, 2 e 3.

3 - A seguinte figura representa o mapa de uma cidade na qual há 7 avenidas na direção norte-sul e 6 avenidas na direção leste-oeste.



(a) Quantos são os trajetos de cumprimento mínimo ligando o ponto A ao ponto B?

(b) Quantos desses trajetos passam por C?

4 - Quantos são os anagramas de PARAGUAI que começam por vogais?

5 - Quantos são os anagramas da palavra PIRACICABA que não possuem duas letras A juntas?

6 - Quantos são os anagramas da palavra MATEMATICA supondo que:

(a) não têm restrições,

(b) começam por vogal,

(c) começam por consoante e terminam por vogal,

(d) não tem 2 vogais juntas.

7 - Considere seqüências onde o 0 está repetido duas vezes e o 1 aparece repetido quatro vezes. Pede-se determinar o número de seqüências supondo que:

(a) não têm restrições,

(b) o primeiro termo da seqüência deve ser 1,

(c) a seqüência não pode ter os 2 zeros juntos.

LISTA DE EXERCÍCIOS

AULA 11: Arranjos com repetição

1. Considere os números de 3 algarismos formados com 2, 3, 5, 8 e 9, supondo permitida a repetição dos dígitos.

(a) Quantos são estes números?

(b) Quantos são menores do que 800?

(c) Quantos são múltiplos de 5?

(d) Quantos são pares?

(e) Quantos são ímpares?

2. Quantas são as palavras de 5 letras de um alfabeto de 26 letras nas quais a letra **A** figura mas não é a letra inicial da palavra?

3. Quantos números de 3 e 4 algarismos maiores do que 300 podem ser formados com os algarismos 0, 1, 3, 5 e 7?

4. Quantos são os números de 5 algarismos na base 10 :

(a) nos quais o algarismo 2 figura?

(b) nos quais o algarismo 2 não figura?

Nota: Compare os resultados obtidos nos exercícios anteriores com aqueles obtidos em $5, 6, 7$ e 8 da Lista 8 correspondente a arranjos simples.

5. Com os algarismos de 1 a 9 quantos números constituídos de 3 algarismos pares e 4 algarismos ímpares podem ser formados se é permitida a repetição dos algarismos pares.

6. Com as 5 letras *a, b, c, d, e* quantos anagramas de 3 letras podem ser formados se:

(a) as 3 letras são distintas?

(b) pelo menos 2 letras são idênticas?

7. Quantos números ímpares existem entre 100 e 999?

Observação: Lembre que estão exluídos os números 100 e 999.

8. Considere uma máquina *decimal* cuja palavra tem 16 posições, 12 para armazenar a mantissa normalizada de um número ($t = 12$), 2 para a característica ($r = 2$) e as restantes são para os sinais do número e da potência.

(a) Quantos números são armazenados exatamente nesta máquina?

(b) Considere um computador *binário* que tem 6 bits para armazenar a característica de um número binário normalizado. Determine o tamanho mínimo que deve ter a mantissa da palavra de maneira tal que a quantidade de números armazenados exatamente nesta máquina seja maior ou igual ao obtido no ítem (a).

Lista de Exercícios

AULA **12:** **Combinações com repetição**

Exercício comentado:

Quantas são as soluções inteiras não negativas de $x + y + z + w \leq 5$?

Resolução:

- *Raciocínio 1*
  Sejam:
  q o número de soluções inteiras não negativas de $x + y + z + w \leq 5$, e
  $q(i)$ o número de soluções inteiras não negativas de $x + y + z + w = i$,
  para $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
  Então, pelo princípio aditivo temos que $q = \sum_{i=0}^{5} q(i)$.
  Como $q(i) = CR(4, i) = C(4 + i - 1, i) = C(3 + i, i) = \frac{(3+i)(2+i)(1+i)}{6}$,
  resulta:
  $q(0) = 1$, $q(1) = 4$, $q(2) = 10$, $q(3) = 20$, $q(4) = 35$ e $q(5) = 56$.
  Portanto, o número de soluções inteiras não negativas de $x+y+z+w \leq 5$ é $q = 1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 = 126$.

- *Raciocínio 2*
  Definimos uma variável f inteira e não negativa dada por:

  $f = 5 - (x + y + z + w)$, ou seja, $x + y + z + w + f = 5$.

  Notemos que:

  para $f = 0$, a equação se reduz a $x + y + z + w = 5$,

  para $f = 1$, a equação se reduz a $x + y + z + w = 4$,

  para $f = 2$, a equação se reduz a $x + y + z + w = 3$,

  para $f = 3$, a equação se reduz a $x + y + z + w = 2$,

  para $f = 4$, a equação se reduz a $x + y + z + w = 1$,

  para $f = 5$, a equação se reduz a $x + y + z + w = 0$.

  Portanto, o problema original equivale a encontrar as soluções inteiras não negativas de $x + y + z + w + f = 5$ que corresponde a $CR(5, 5) = C(9, 5) = 126$.

A variável f, se denomina *váriável de folga.*

Exercícios propostos:

1. De quantas maneiras podemos distribuir 6 laranjas entre 2 pessoas?

2. Queremos comprar 12 docinhos. De quantas maneiras os podemos escolher se têm 8 variedades diferentes de docinhos?

3. De quantas maneiras podemos colocar 20 bolas da mesma cor em 5 caixas de modo que nenhuma caixa fique vazia?

4. Quantas são as soluções inteiras não negativas de $x + y + z < 10$?

5. Quantas são as soluções inteiras *positivas* de $x + y + z < 10$?

6. Quantos números inteiros entre 1 e 100000 inclusive têm soma dos algarismos igual a 6?

Observação: Ao número 1 associe a seqüência 00001.

7. Quantos números inteiros entre 1 e 1000 inclusive têm a soma dos dígitos menor que 7?

8. Quantas soluções inteiras existem para a equação $x_1+x_2+x_3+x_4 = 20$ sendo:

(i) $1 \leq x_1 \leq 6, \quad x_i \geq 0, \; i = 2, 3, 4,$

(ii) $1 \leq x_1 \leq 6, \quad 1 \leq x_2 \leq 7, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0,$

(iii) $1 \leq x_1 \leq 6, \quad 1 \leq x_2 \leq 7, \quad 1 \leq x_3 \leq 8, \quad 1 \leq x_4 \leq 9.$

LISTA DE EXERCÍCIOS

MÓDULO : Coeficientes binomiais e aplicações

AULA **13**: **Coeficientes binomiais**

1. Prove, usando um argumento combinatório semelhante ao usado na aula 13 para provar a relação de Stifel, que

$$C_{n+2}^{p+2} = C_n^p + 2C_n^{p+1} + C_n^{p+2}$$

2. Usando a relação de Stifel, escreva a oitava linha do triângulo de Pascal a partir da sétima linha dada na aula 13.

3. Se o conjunto A possui 512 subconjuntos, qual é o número de elementos de A?

4. Quantos coquetéis (misturas de duas ou mais bebidas) podem ser feitos a partir de 7 ingredientes distintos?

5. Prove que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1).$$

6. Calcule

$$CR_n^0 + CR_n^1 + CR_n^2 + \cdots + CR_n^p.$$

7. Prove que

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = 2^m \binom{n}{m} \quad (m < n).$$

8. Usando o teorema das colunas prove que

$$(a) \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(b) \qquad \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

9. Prove que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Ajuda: Primeiro, determine os valores de a, b e c que verificam a igualdade

$$k^3 = ak(k+1)(k+2) + bk(k+1) + ck.$$

Depois, use o exercício anterior e o exemplo 4 da aula 13 (substituindo 50 por n) para chegar ao resultado.

LISTA DE EXERCÍCIOS

MÓDULO : Coeficientes binomiais e aplicações

AULA **14**: **Binômio de Newton**

1. Desenvolver as potências seguintes:

$$(a) \quad (\tfrac{x^3}{2}+1)^5 \quad ; \qquad (b) \quad (2y+3x)^4;$$

$$(c) \quad (2a-3b)^3 \quad ; \qquad (d) \quad (\tfrac{1}{y}-y)^6 \quad .$$

2. Considerando

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k,$$

calcule o sexto termo de cada uma das potências abaixo:

$$(a) \quad (\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{a^2})^{17} \quad ; \quad (b) \qquad (1-\tfrac{1}{b})^7 \quad ;$$

$$(c) \quad (3x^2y-\tfrac{1}{3})^9 \quad ; \quad (d) \quad (2x^3-\tfrac{3}{x^2})^{12} \quad .$$

3. Calcular a soma dos coeficientes de todos os termos do desenvolvimento de $(x^3-\frac{1}{2x})^{11}$.

4. Calcular o termo independente de x nas potências seguintes:

$$(a) \quad (x^2+\tfrac{1}{x^2})^6 \quad ; \qquad (b) \quad (x^2+\tfrac{1}{x})^9 \quad ; \qquad (c) \quad (x^2+\tfrac{1}{x^2})^8(x^2-\tfrac{1}{x^2})^8 \quad .$$

5. Prove, a partir do binômio de Newton, que para $n \geq 2$

$$(1+\frac{1}{n})^n > 2$$

6. Explicar porque não existe termo independente de x no desenvolvimento $(x+\frac{1}{x})^{2n+1}$.

7. Calcule 11^{14} usando o Teorema Binomial.

8. Mostre que

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

:

LISTA DE EXERCÍCIOS

AULA ***15:*** ***Relação de recorrência***

1. Uma torre de Hanoi dupla contém $2n$ discos de n tamanhos diferentes, dois de cada tamanho. As regras de movimentação dos discos são as mesmas: um disco de cada vez e nunca colocar um disco sobre outro menor.

Para determinar o número de movimentos que são necessários para transferir a torre dupla de um eixo para outro, supondo que os discos do mesmo tamanho sejam idênticos, siga os seguintes passos:

(a) Monte a relação de recorrência.

(b) Resolva a relação de recorrência pelo método de substituição.

2. Seja a_n o número de regiões ilimitadas em que um plano é dividido por n retas tais que a interseção de qualquer subconjunto de k retas ($k \geq 2$) só é diferente de vazio se $k = 2$. A relação de recorrência correspondente é

$$a_n = a_{n-1} + 2 \qquad \textit{com} \qquad a_0 = 1, a_1 = 2.$$

(a) Ilustre o problema para $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

(b) Resolva a relação de recorrência para a_n.

3. Considere a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{array}{l} a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \qquad \textit{para } n \geq 3 \\ a_1 = 1 \;, \quad a_2 = 3 \end{array}$$

Verifique, usando indução, que a correspondente fórmula fechada é:

$$a_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}2^n \qquad .$$

4. Suponha que existe um tipo de planta que vive eternamente, mas que se reproduz apenas uma vez logo após o primeiro ano de vida. Qual é a rapidez de crescimento dessa "população" se o processo começa com uma planta?

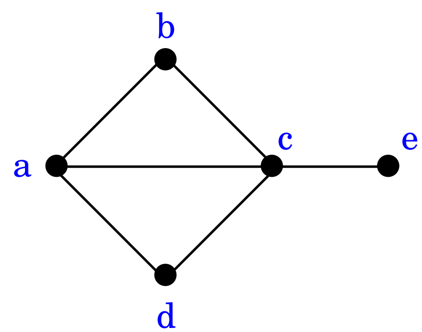
Observe que este é o problema reverso daquele do crescimento dos coelhos que se reproduzem todo ano exceto o primeiro ano.

Aula 17 - Definições Básicas e Notações

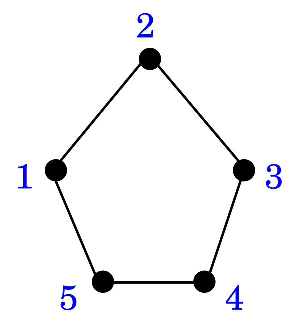
Exercícios:

1. Escreva o conjunto de vértices e o conjunto de arestas dos grafos abaixo dados por suas representações geométricas.

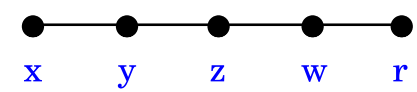
a) G_1



b) G_2



c) G_3



2. Desenhe os grafos dados por:

   a) grafo G: V(G) = { a, b, c, d } , E(G) = {(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)}

   b) grafo H: V(H) = { 1, 2, 3, 4 } E(G) = ∅

3. Considere o grafo de G de 2)

   a) G tem algum vértice universal? Justifique.

   b) G tem algum vértice isolado? Justifique.

   c) Qual a vizinhança do vértice c ?

4. Desenhe os complementos dos grafos G_1 , G_2 e G_3 de 1) .

5. Considere o grafo G_1 de 1)

   O grafo H tal que V(H) = { a, b, c, d } e E(H) = { (a, b), (b, c), (c, d), (a, d) } é um subgrafo induzido de G_1? Justifique.

Aula 18 - Grau de um vértice

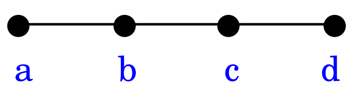
Exercícios:

1. Para cada um dos grafos (não necessariamente simples) abaixo, escreva:

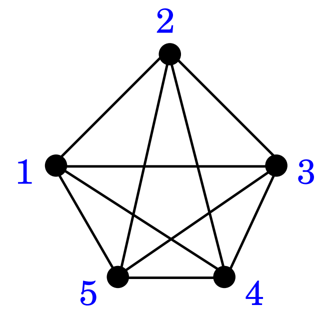
   a) o grau de cada um de seus vértices

   b) a seqüência de graus

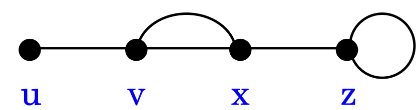
G_1



G_2



G_3



2. Desenhe um grafo (simples) com 8 vértices e seqüência de graus (1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 6).

3. Existe grafo simples com 4 vértices e seqüência de graus (1, 2, 3, 4) ? Caso exista, desenhe esse grafo, caso contrário, justifique.

4. Mostre que não existe grafo regular de grau 3 com 7 vértices.

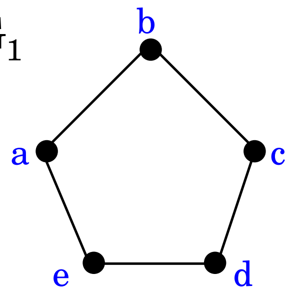
5. Mostre que em um grupo de pelo menos duas pessoas sempre existem duas com exatamente o mesmo número de amigos dentro do grupo.

Aula 19 - Grafos isomorfos e Representação de Grafos por Matrizes

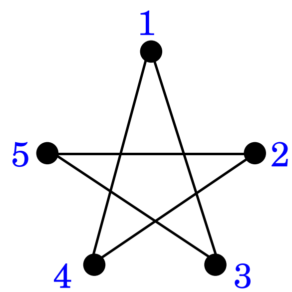
Exercícios:

1. Considere cada par de grafos abaixo e verifique se são isomorfos. Justifique sua resposta.

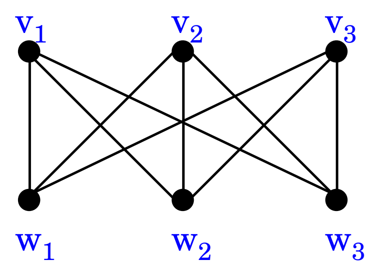
a) G_1



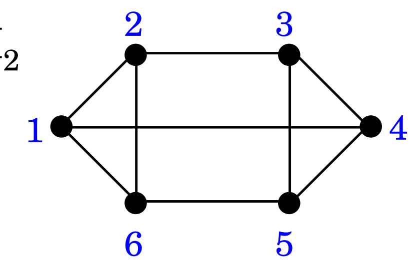
G_2



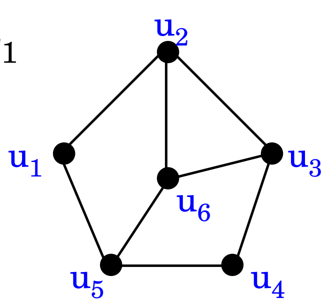
b) H_1



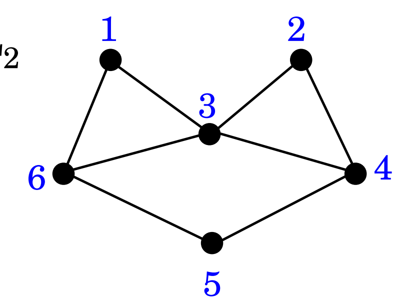
H_2



c) L_1



L_2



2. Verifique se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, prove, se for falsa dê um contra-exemplo.

a) Se G e H são grafos isomorfos então eles têm o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas.

b) Se G e H têm o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas então eles são isomorfos.

2. (Continuação)

   c) Se G e H são grafos isomorfos então eles têm a mesma seqüência de graus.

   d) Se G e H têm a mesma seqüência de graus então eles são isomorfos.

3. Determine a matriz de adjacência e a matriz de incidência do grafo L_1 de 1. c)

4. Desenhe o grafo cuja matriz de adjacência é dada por:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Desenhe o grafo cuja matriz de incidência é dada por:

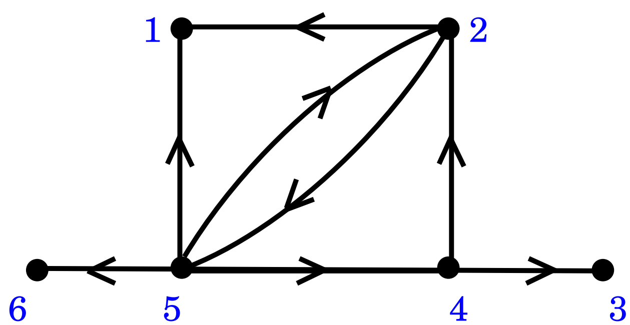
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aula 24 - Grafos Direcionados

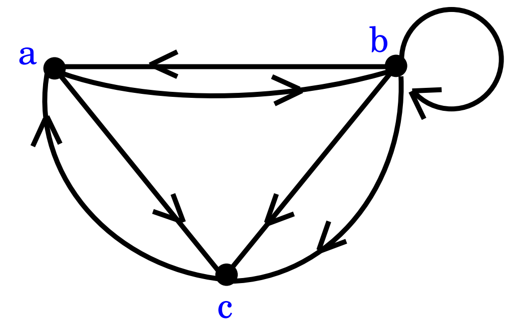
Exercícios:

1. Escreva o conjunto de vértices e o conjunto de arcos dos seguintes digrafos (e multidigrafos).

D_1

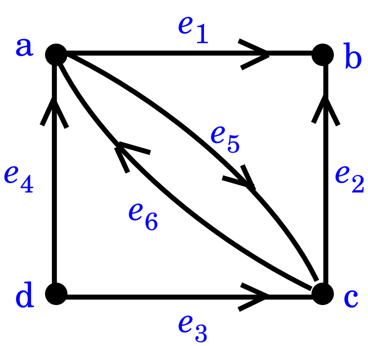


D_2



2. Considerando o digrafo D abaixo, verifique se cada um dos itens abaixo é verdadeiro ou falso. Justifique.

D



a) e_1 é divergente de a e convergente a b.

b) e_5 é convergente a a .

c) d é fonte de D.

d) b é sumidouro de D.

e) a alcança todos os vértices de D.

f) d alcança todos os vértices de D.

g) D é fortemente conexo.

3. Escreva a matriz de adjacência e a matriz de incidência do digrafo D da questão 2.

4. Dê um exemplo com pelo menos 6 vértices para cada item.

   a) Digrafo fracamente conexo que não seja unilateralmente conexo.
   b) Digrafo unilateralmente conexo que não seja fortemente conexo.
   c) Digrafo fortemente conexo

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da EP da Aula 01

Observações:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.
2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo antes de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.
3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

---

1. Determine quais dos seguintes conjuntos são iguais:

$A = \{a, b, -1\} \qquad B = \{b, a, -1\} \qquad C = \{b, a, b, -1\} \qquad D = \{a, -1\}$

***R*esposta:** $A = B = C$. Todos os elementos dos conjuntos A, B e C são iguais, as repetições não são consideradas como elementos diferentes.

2. Escreva os seguintes conjuntos explicitando seus elementos:

(i) $A = \{x \in \mathbb{Z} | -1 \leq x \leq 4\}$

***R*esposta:** $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

(ii) $B = \{x \in \mathbb{N} | x \leq \sqrt{10} \text{ ou } x > -2\}$

***R*esposta:** Como queremos números naturais, devemos obter os números naturais que que são maiores que -2 e uni-los ao conjunto de números menores ou iguais a $\sqrt{10}$. Assim, os números naturais maiores que -2 são $\{1, 2, 3 \cdots\}$ e os números naturais menores os iguais a $\sqrt{10}$ são $\{1, 2, 3\}$. Note que $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3 \cdots\}$ e, portanto, a união desses dois conjuntos é o próprio conjunto $\{1, 2, 3 \cdots\}$. Logo, $B = \{1, 2, 3 \cdots\}$.

(iii) $C = \{x \in \mathbb{R} | 2x + 1 = 5\}$

***R*esposta:** Temos que $2x + 1 = 5$ é equivalente a dizer que $x = 2 \in \mathbb{R}$. Portanto, $C = \{2\}$.

(iv) $D = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 1 = 0\}$

***R*esposta:** Temos que $x^2 + 1 = 0$ é equivalente a dizer que $x^2 = -1$, que não tem solução no conjunto dos reais. Portanto, $D = \emptyset$.

(EXTRA) $J = \{x \in \mathbb{R} | 3x + 1 = 5\}$

***R*esposta:** Temos que $3x+1=5$ é equivalente a dizer que $x=\frac{4}{3}\in\mathbb{R}$. Portanto, $C=\{\frac{4}{3}\}$.

(EXTRA) $K=\{x\in\mathbb{N}|3x+1=5\}$

***R*esposta:** $K=\emptyset$, pois a solução de $3x+1=5$ é $x=\frac{4}{3}\notin\mathbb{N}$.

3. Determine quais das seguintes relações de pertinência são verdadeiras:

(i) $\sqrt{2}\in\{x\in\mathbb{R}|x\geq 2\}$

***R*esposta:** FALSA, pois $\sqrt{2}=1,4\ldots$, isto é, $1<\sqrt{2}<2$, e o conjunto $B=\{x\in\mathbb{R}|x\geq 2\}$ é formado pelos números maiores ou iguais que 2. Logo, $\sqrt{2}$ não é um elemento de B.

(ii) $3\in\{x\in\mathbb{R}\mid |x|\leq 4\}$, onde $|a|=a$ se $a\geq 0$ ou $|a|=-a$ se $a<0$

***R*esposta:** VERDADEIRA, pois $x=3\in\mathbb{R}$ e $|3|=3<4$. Observamos que $|x|\leq 4$ equivale a $-4\leq x\leq 4$.

(iii) $\emptyset\notin P(A)$, onde $A=\{1,2\}$

***R*esposta:** FALSA, pois $P(A)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$ e $\emptyset$ é um elemento do conjunto $P(A)$, logo $\emptyset\in P(A)$.

(iv) $\{1\}\in\{x\in\mathbb{R}|x^2=1\}$

***R*esposta:** FALSA, pois $\{1\}$ não é um elemento do conjunto $\{x\in\mathbb{R}|x^2=1\}$, já que este conjunto é formado apenas pelos elementos 1 e -1, temos $1\in\{x\in\mathbb{R}|x^2=1\}$ e $\{1\}\subseteq\{x\in\mathbb{R}|x^2=1\}$.

(v) $\emptyset\in\{\emptyset,\{1\}\}$

***R*esposta:** VERDADEIRA, pois o elemento $\emptyset$ pertence ao conjunto $\{\emptyset, \{1\}\}$.

4. Determine quais das seguintes relações de inclusão são verdadeiras:

   (i) $\{-2, 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\}$

   ***R*esposta:** VERDADEIRA, pois temos que $|x| \leq 2$, significa que $-2 \leq x \leq 2$. Logo, $\{x \in \mathbb{Z} || x| \leq 2\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Portanto, os elementos do primeiro conjunto, -2 e 0, são também elementos do segundo conjunto.

   (ii) $\{\pi\} \subset \{1, \{\pi\}, a\}$

   ***R*esposta:** FALSA. De fato, π não é um elemento de $\{1, \{\pi\}, a\}$. Portanto, a definição de inclusão estrita não é verificada.

   (iii) $\{\{\pi\}\} \subset \{1, \{\pi\}, a\}$

   ***R*esposta:** VERDADEIRA.

   (iv) $\emptyset \nsubseteq \{3, 1, -7\}$

   ***R*esposta:** FALSA, pois $\emptyset \subseteq C$, para todo conjunto C.

   (v) $\emptyset \subseteq \{\emptyset, \{1\}\}$

   ***R*esposta:** VERDADEIRA.

5. Dado o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 1\} = \{-1, 0, 1\}$, determine o conjunto $P(A)$.

Resposta: O conjunto das partes de A está formado por todos os subconjuntos de A, logo $P(A) = \{\emptyset, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{-1, 0\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}, \{-1, 0, 1\}\}$.

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da EP da Aula 02

Observações:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.

2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo antes de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.

3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

---

1. Sejam $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $A = \{0, 4\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$, $C = \{1, 4\}$, $D = \{0, 1\}$. Determine os seguintes conjuntos:

   (a) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

(b) $B \cap C = \{1\}$

(c) $A \cap \overline{B} = \{4\}$

(d) $A \cup (B \cap C) = \{0, 1, 4\}$, pois

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= \{0, 4\} \cup \{1\} \\ &= \{0, 1, 4\}. \end{aligned}$$

(e) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{0, 1, 4\}$, dado que

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (A \cup C) &= \{0, 1, 2, 3, 4\} \cap \{0, 1, 4\} \\ &= \{0, 1, 4\} \end{aligned}$$

***O*bservação:** Note que os ítens (d) e (e) devem ser iguais pela propriedade distributiva da união em relação a interseção, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(f) $(\overline{A \cap B}) \cup (\overline{A \cap C})$

$$\begin{aligned} (\overline{A \cap B}) \cup (\overline{A \cap C}) &= (U - (A \cap B)) \cup (U - (A \cap C)) \\ &= (\{0, 1, 2, 3, 4\} - \{0\}) \cup (\{0, 1, 2, 3, 4\} - \{4\}) \\ &= \{1, 2, 3, 4\} \cup \{0, 1, 2, 3\} \\ &= \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{aligned}$$

(g) $A \cup \overline{B} = \{0, 4\}$, pois $A = \{0, 4\}$ e $\overline{B} = \{4\}$

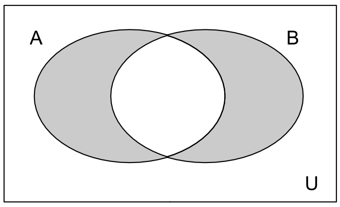
(h) $A - B = \{4\}$

(i) $B - \overline{A} = \{0\}$

(j) $A \cup (B \cap C \cap D) = \{0, 1, 4\}$

2. Represente por meio de um diagrama de Venn a diferença simétrica entre dois conjuntos, $A \Delta B$, definida por $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

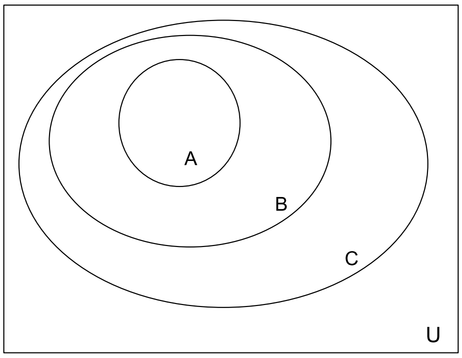
   ***R*esposta:**



3. Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto universo U. Represente por meio de diagramas de Venn as seguintes situações:

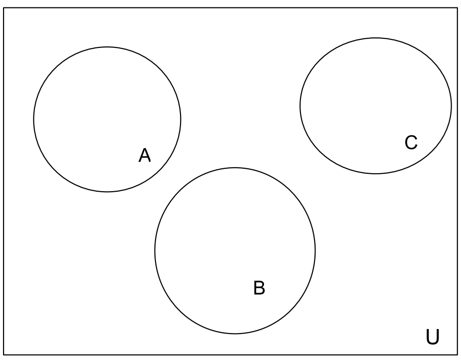
   (i) $A \subset B \subset C$

   ***R*esposta:**



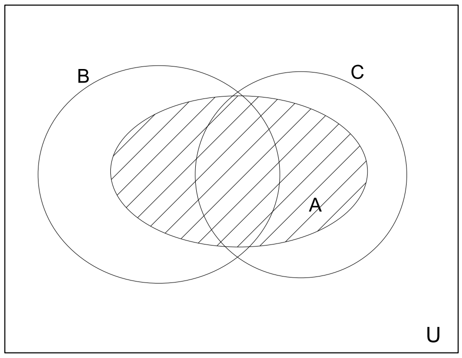
   (ii) $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$

   ***R*esposta:**



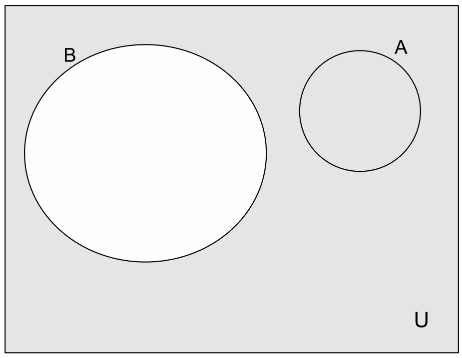
$(iii)\ A \subseteq B \cup C$

***R*esposta:**



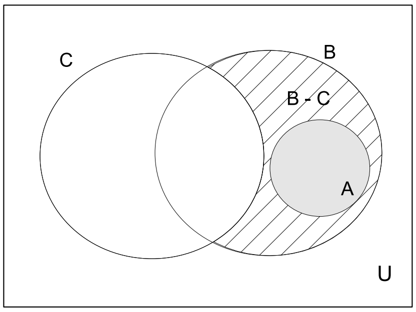
$(iv)\ A \subseteq \overline{B}$

***R*esposta:**



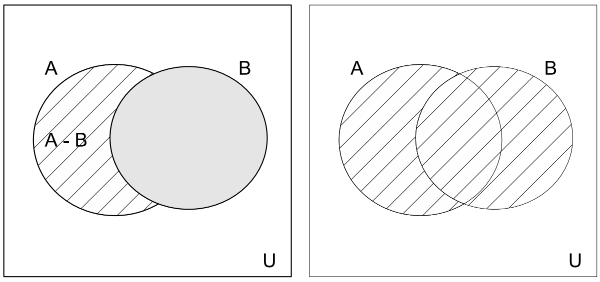
$(v)\ A \subseteq B - C$

***R*esposta:**



4. Verifique, usando os diagramas de Venn as seguintes igualdades:
   (i) $(A - B) \cup B = A \cup B$

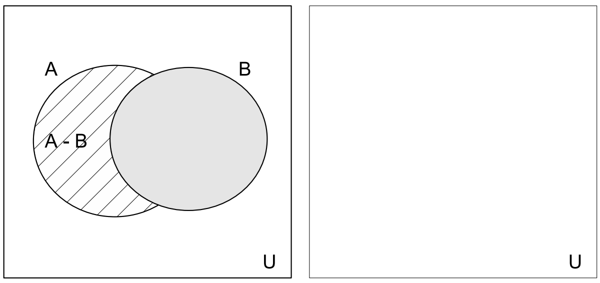
   ***R*esposta:**



$(A - B) \cup B$ $\qquad$ $A \cup B$

   (ii) $(A - B) \cap B = \emptyset$

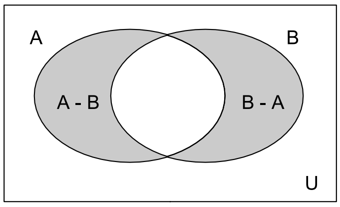
   ***R*esposta:**



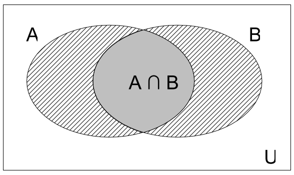
$(A - B) \cup B$ $\qquad$ $\emptyset$

(iii) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

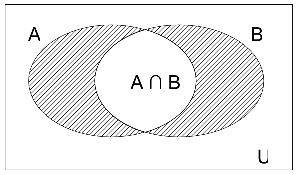
***R*esposta:**



$(A - B) \cup (B - A)$



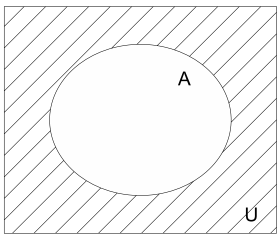
$A \cup B$



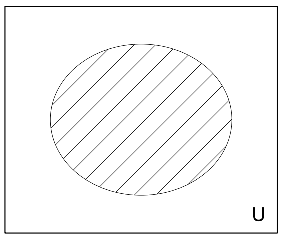
$(A \cup B) - (A \cap B)$

(v) $(\overline{\overline{A}}) = A$

***R*esposta:**



$\overline{A}$



$\overline{\overline{A}}$

5. Mostre que $A \subseteq B$ e $A \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B \cap C$.

   ***R*esposta:** Seja $x \in A$. Como$A \subseteq B$ e $A \subseteq C$, então $x \in B$ e $x \in C$. Logo, $x \in B \cap C$ e conseqüentemente $A \subseteq B \cap C$.

6. Mostre que $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$

   ***R*esposta:** Primeiro provaremos que $A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset$.

Se $x \in A - B$, então $x \in A$ e $x \notin B$. No entanto, sabemos por hipótese que todo elemento de A é também elemento de B, isto implica que $x \in B$ o que é uma contradição. Logo, $A - B = \emptyset$.

Provaremos agora que $A - B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$.

Notemos que provar $A - B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$ é equivalente a provar a contrapositiva da implicação, isto é, $A \nsubseteq B \Rightarrow A - B \neq \emptyset$.

Usaremos esta estratégia.

Se $A \nsubseteq B$ significa que existe $x \in A$ tal que $x \notin B$, então $x \in A - B$, portanto $A - B \neq \emptyset$ que é o que queríamos provar. Logo, $A - B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$.

Portanto, provamos que $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$.

7. Mostre que $A - B \subseteq A$

   ***R*esposta:** Provaremos a inclusão acima. $A - B = \{x | x \in A \text{ e } x \notin B\}$. Portanto, se $x \in A - B$, então $x \in A$, logo pela definição de inclusão tem - se $A - B \subseteq A$.

8. Mostre que $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$

   ***R*esposta:** $(\Rightarrow)$ Inicialmente provaremos que $A \subseteq B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$.

   Seja $x \in \overline{B}$, então $x \notin B$. Logo, por hipótese $x \notin A$, portanto $x \in \overline{A}$ o que implica que $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

   $(\Leftarrow)$ Provaremos agora que $\overline{B} \subseteq \overline{A} \Rightarrow A \subseteq B$.

   Assumimos que $\overline{B} \subseteq \overline{A}$, devemos provar que $A \subseteq B$.

   Se $x \in A$, então $x \notin \overline{A}$. Por hipótese $\overline{B} \subseteq \overline{A}$, isto significa que $x \notin \overline{B}$, conseqüentemente, $x \in B$. Concluímos portanto que $A \subseteq B$.

9. Dados os conjuntos $C = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ é múltiplo de } 2\}$, $D = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ é múltiplo de } 3\}$, $E = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ é múltiplo de } 6\}$, verifique que $C \cap D = E$.

   ***R*esposta:** Decompondo 6 em fatores primos obtemos que $6 = 2.3$, portanto se um número n é múltiplo de 6, então n é múltiplo de 2 e 3, isto significa que $E \subseteq C \cap D$. Analogamente, se n é múltiplo de 2 e 3 então n é múltiplo de 6, isto é $D \cap C \subseteq E$. Concluímos portanto que $C \cap D = E$.

10. Considere $A = \{x \in \mathbb{N} | 5 \leq x^2 \leq 300\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq 3x - 2 \leq 30\}$. Calcule:

    ***R*esposta:** A e B representam os conjuntos: $A = \{3, 4, 5, ..., 17\}$ e $B = \{1, 2, 3, ..., 10\}$.

    (i) $A \cup B = \{1, 2, 3, ..., 16, 17\}$

    (ii) $A \cap B = \{3, 4, ..., 10\}$

    (iii) $A - B = \{11, 12, ..., 17\}$

    (iv) $B - A = \{1, 2\}$

    (v) $\overline{A} \cap \overline{B} = \{x \in \mathbb{N} | x \geq 18\}$, pois $\overline{A} = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 2 \text{ ou } x \geq 18\}$ e $\overline{B} = \{x \in \mathbb{N} | x \geq 11\}$.

    (vi) $\overline{A} \cup \overline{B} = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 2 \text{ ou } x \geq 11\}$

11. Dado $C = \{2, -1, 5\}$, considere o conjunto universo sendo o conjunto de partes de C, $U = P(C)$. Calcule:

    (i) $\overline{A}$ (ii) $A \cap B$

    para $A = \{\{2, -1\}, \{2\}\}$, $B = \{\{5\}, \{2, -1, 5\}, \{-1, 2\}\}$.

    ***R*esposta:** $U = P(C) = \{\emptyset, \{2\}, \{-1\}, \{5\}, \{2, -1\}, \{2, 5\}, \{-1, 5\}, \{2, -1, 5\}\}$.

    (i) $\overline{A} = \{\emptyset, \{-1\}, \{5\}, \{2, 5\}, \{-1, 5\}, \{2, -1, 5\}\}$.

    (ii) $A \cap B = \{\{2, \text{-}1\}\}$.

12. Use a propriedade distributiva da interseção em relação a união de conjuntos para provar que $(A \cap D) \cup \overline{D} = A \cup \overline{D}$

***R*esposta:** Para provar a igualdade, consideremos U o conjunto universo onde estão os conjuntos A e D.

$$\begin{array}{lcl} (A \cap D) \cup \overline{D} & = & \\ \text{(propriedade distributiva)} & = & (A \cup \overline{D}) \cap (D \cup \overline{D}) \\ & = & (A \cup \overline{D}) \cap U \\ & = & A \cup \overline{D} \end{array}$$

13. Prove que $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.

***R*esposta:** Para provar a igualdade utilizaremos as propriedades conhecidas e obteremos o segundo termo a partir do primeiro.

$$\begin{array}{lcl} A - (B - C) & = & \\ \text{(prop. da diferença)} & = & A \cap \overline{(B \cap \overline{C})} \\ \text{(Lei de Morgan)} & = & A \cap (\overline{B} \cup \overline{\overline{C}}) \\ & = & A \cap (\overline{B} \cup C) \\ \text{(prop. distributiva)} & = & (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C) \\ \text{(prop. da diferença)} & = & (A - B) \cup (A \cap C) \end{array}$$

14. Mostre as seguintes igualdades:

(i) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

***R*esposta:** Para provar a igualdade, consideremos U o conjunto universo onde estão os conjuntos A e D.

$$\begin{array}{lcl} (A - B) \cup (B - A) & = & \\ \text{(prop. da diferença)} & = & (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \\ \text{(prop. distributiva)} & = & [A \cup (B \cap \overline{A})] \cap [\overline{B} \cup (B \cap \overline{A})] \\ \text{(prop. distributiva)} & = & [(A \cup B) \cap (A \cup \overline{A})] \cap [(\overline{B} \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})] \\ \text{(Lei de Morgan)} & = & [(A \cup B) \cap U] \cap [U \cap \overline{(A \cap B)}] \\ & = & (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} \\ \text{(prop. da diferença)} & = & (A \cup B) - (A \cap B) \end{array}$$

(ii) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

***R*esposta:** Para provar a igualdade, consideremos U o conjunto universo onde estão os conjuntos A e D.

$$\begin{array}{lcl}
(A \cap B) - (A \cap C) & = & \\
\text{(prop. da diferença)} & = & (A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)} \\
\text{(Lei de Morgan)} & = & (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \\
\text{(prop. distributiva)} & = & [(A \cap B) \cap \overline{A}] \cup [(A \cap B) \cap \overline{C}] \\
\text{(prop. comutativa e associativa)} & = & [(A \cap \overline{A}) \cap B] \cup [A \cap (B \cap \overline{C})] \\
\text{(prop. da diferença)} & = & (\emptyset \cap B) \cup [A \cap (B - C)] \\
 & = & \emptyset \cup [A \cap (B - C)] \\
 & = & A \cap (B - C)
\end{array}$$

15. *O*bservação: Nesta questão estamos considerando $0 \in \mathbb{N}$.

Dados os seguintes conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{Z} | 0 \leq x \leq 7\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | 0 \leq x \leq 7\}$. Verifique que:

(i) $A = B$

***R*esposta:** Os elementos de A e B são os mesmos, $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

(ii) $\overline{A} \neq \overline{B}$

***R*esposta:** $A \subseteq \mathbb{Z}$ logo o conjunto universo onde está A é $\mathbb{Z}$, portanto, $\overline{A} = \{x \in \mathbb{Z} | x \geq 8 \text{ ou } x \leq -1\} = \{..., -3, -2, -1, 8, 9, ...\}$.

Por definição $B \subseteq \mathbb{N}$, portanto o conjunto universo é $\mathbb{N}$, então $\overline{B} = \{x \in \mathbb{N} | x \geq 8\} = \{8, 9, 10, ...\}$.

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da EP da Aula 03

Observações:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.

2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo <u>antes</u> de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.

3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

---

1. Sejam A e B dois subconjuntos de um conjunto universo U, tais que $B \subseteq A$. Usando o princípio aditivo prove que $n(A-B) = n(A) - n(B)$.

Resposta: Lembremos (Exercício 4 da aula 2) que $A \cup B = (A - B) \cup B$, sendo $(A - B) \cap B = \emptyset$.

Como $B \subseteq A$ temos que $A \cup B = A$. Logo, resulta $A = A \cup B = (A - B) \cup B$, implicando em $n(A) = n(A \cup B) = n((A - B) \cup B)$. Como $(A - B) \cap B = \emptyset$, usando o princípio aditivo, obtemos:

$$\begin{aligned} n(A) &= \underbrace{n((A - B) \cup B)}_{Princpio \quad aditivo} \\ &= n(A - B) + n(B) \end{aligned}$$

Portanto, $n(A - B) = n(A) - n(B)$.

2. Quantos números inteiros entre 1 e 100 inclusive são divisíveis por 3 ou por 7.

   DICA: Considere

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{Z} | 1 \leq x \leq 100 \text{ e } x = 3k \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\} \\ B &= \{x \in \mathbb{Z} | 1 \leq x \leq 100 \text{ e } x = 7k \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

   e use o princípio de inclusão e exclusão.

   Resposta: Temos que $A = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq 100 \text{ e } x = 3k \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\} = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots, 93, 96, 99\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq 100 \text{ e } x = 7k \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\} = \{7, 14, 21, 28, \ldots, 91, 98\}$.

   Como queremos os números que são divisíveis por 3 ou por 7 então precisamos encontrar: $\{x \in \mathbb{N} | x \in A \text{ ou } x \in B\} = A \cup B$. Portanto, devemos calcular $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

   Calculemos $n(A)$, $n(B)$ e $n(A \cap B)$.

   Dado que os elementos de A são da forma $1 \leq x = 3k \leq 100$, $k \in \mathbb{N}$ então deve ser $\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{100}{3}$ e $k \in \mathbb{N}$, logo tem-se que $1 \leq k \leq 33$. Isto é,

$A = \{3.1, 3.2, \ldots, 3.33\}$ donde resulta que $n(A) = 33$. Analogamente para B, temos que o máximo $k \in \mathbb{N}$ tal que $7k \leq 100$ é $k = 14$, implicando que $n(B) = 14$. Como $A \cap B = \{x \in \mathbb{N} | x = 3 \times 7 \times k, k \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{N} | x = 21k, k \in \mathbb{N}\}$, tem-se que $n(A \cap B) = 4$.

Logo, a quantidade de números naturais que são divisíveis por 3 ou por 7 é $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 33 + 14 - 4 = 43$.

3. Use os princípios aditivo ou de inclusão e exclusão para determinar, em cada caso, a quantidade de números naturais entre 1 e 60 que verificam (i)-(v).

Sejam $A = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x < 60 \text{ e } x = 2k \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, \ldots, 56, 58\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x < 60 \text{ e } x = 3k \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\} = \{3, 6, 9, \ldots, 54, 57\}$.

(i) são divisíveis por 2 e por 3.

***R*esposta:** Como queremos os números que são divisíveis por 2 e por 3 então temos que encontrar: $\{x \in \mathbb{N} | x \in A \text{ e } x \in B\} = A \cap B = \{x \in \mathbb{N}\} | x \text{ é divisível por } 6\} = \{6, 12, 18, \ldots, 48, 54\}$. Observemos que o último elemento deste conjunto é $54 = 6.9$, portanto, $n(A \cap B) = 9$.

Logo, os números inteiros entre 1 e 60 que são divisíveis por 2 e por 3 tem no total 9 números.

(ii) são divisíveis por 2 ou por 3.

***R*esposta:** Observe que $n(A) = 29$ e $n(B) = 19$, pois o último elemento de A é $58 = 2.21$ e de B é $57 = 3.19$.

O conjunto de números que são divisíveis por 2 ou por 3 é $A \cup B$, portanto devemos calcular $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 29 + 19 - 9 = 39$.

Portanto, os números inteiros entre 1 e 60 que são divisíveis por 2 ou por 3 tem no total 39 números.

(iii) não são divisíveis nem por 2 nem por 3.

Resposta: Sejam $A \cup B = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x < 60,\ x = 2k$ ou $x = 3k$ para algum $k \in \mathbb{N}\} = \{2, 3, 4, 6, \ldots, 54, 56, 57, 58\}$ e $C = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x < 60\} = \{2, 3, 4, \ldots, 57, 58, 59\}$.

Vimos que $n(A \cup B) = 39$. Por outro lado, observe que $n(C) = 58$.

Queremos encontrar todos os números que não são divisíveis nem por 2 nem por 3, logo queremos os números que estão no conjunto C, mas que não está no conjunto $A \cup B$. Como $A \cup B \subseteq C$ então, pelo exercício 1 desta lista, temos que $n(C - (A \cup B)) = n(C) - n(A \cup B)$, isto é, $n(C - (A \cup B)) = 58 - 39 = 19$.

Logo, os números inteiros entre 1 e 60 que não são divisíveis nem por 2 nem por 3, tem no total 19 números.

(iv) são ímpares divisíveis por 3 ou são divisíveis por 2.

Resposta: Seja $D = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x < 60,\ x = 3k$ e ímpar para algum $k \in \mathbb{N}\} = \{3, 9, \ldots, 51, 57\}$. Observe que $D = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x < 60, x = 3(2m - 1)\ , m \in \mathbb{N}\}$. Portanto, o primeiro elemento corresponde a $m = 1$, o segundo a $m = 2$ e assim seguimos até que o último elemento corresponde a $m = 10$. Logo, $n(D) = 10$.

Como queremos os números que são divisíveis por 2 ou, por 3 que são ímpares, então temos que encontrar: $n(A \cup D)$. Como $A \cap D = \emptyset$, pelo princípio aditivo resulta $n(A \cup D) = n(A) + n(D) = 29 + 10 = 39$.

Logo, os números inteiros entre 1 e 60 que são divisíveis por 2 ou, por 3 que são ímpares, tem no total 39 números.

(v) são divisíveis por 2 ou por 3 ou por 5.

Resposta: Seja $E = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x < 60$ e $x = 5k$ para algum $k \in \mathbb{N}\} = \{5, 10, \ldots, 50, 55\}$.

Queremos os números que são divisíveis por 2 ou por 3 ou por 5, então temos que encontrar: $n(A \cup B \cup E)$. Pelo princípio de inclusão e exclusão sabemos que $n(A \cup B \cup E) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cup B \cup C)$.

Lembre que $n(A) = 29$, $n(B) = 19$. Observe também que $n(E) = 11$, $n(A \cap E) = 5$, $n(B \cap E) = 3$ e $n(A \cap B \cap E) = 1$.

Portanto, $n(A \cup B \cup E) = 29 + 19 + 11 - 9 - 5 - 3 + 1 = 43$.

Logo, os números inteiros entre 1 e 60 que são divisíveis por 2 ou por 3 ou por 5 tem no total 43 números.

4. Foram consultadas 200 pessoas que estavam pesquisando preços de televisores em lojas de eletrodomésticos. As respostas foram as seguintes:

   - 40% perguntaram pela marca A;
   - 35% pela marca B;
   - 10% pelas marcas A e B;
   - 35% somente perguntaram por outras marcas.

   Use o princípio de adição ou o princípio da inclusão e exclusão para determinar:

   (i) quantidade de pessoas que perguntaram pelos preços das televisões de marcas A ou B.

   Temos que:

- 40% perguntaram pela marca A, isto é, $\frac{40}{100} \times 200 = 80$ pessoas;
- 35% pela marca B, isto é, $\frac{35}{100} \times 200 = 70$ pessoas;
- 10% pelas marcas A e B, isto é, $\frac{10}{100} \times 200 = 20$ pessoas;
- 25% somente perguntaram por outras marcas, isto é, $\frac{25}{100} \times 200 = 50$ pessoas.

***R*esposta:** Como queremos o número de pessoas que perguntaram pelos preços das televisões A ou B, então temos que encontrar o número de pessoas que estão no conjunto A ou no conjunto B, isto é, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 80 + 70 - 20 = 130$ pessoas.

(ii) número de pessoas que perguntaram pela marca A e não pela marca B (lembre-se que $(A - B) \cup B = A \cup B$ e $(A - B) \cap B = \emptyset$).

***R*esposta:**

O conjunto das pessoas que perguntaram pela marca A e não pela marca B é $A - B$, então devemos calcular $n(A - B)$. Vimos que

$$n(A \cup B) = n((A - B) \cup B)) = n(A - B) + n(B)$$

Daí temos que:

$$n(A - B) = n(A \cup B) - n(B) = 130 - 70 = 60.$$

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da EP da Aula 04

Observação:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.
2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo antes de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.
3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

Prove usando indução matemática

(i) $\quad 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \qquad \forall \;\; n \in \mathbb{N}.$

***P*rova:**

Consideremos a seguinte proposição:

$$P(n): \quad 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Devemos mostrar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

1. *Base da Indução*:

   Para $n = 1$ temos que

   $$P(1) \quad : \quad 1 = 2^1 - 1 \text{ é verdadeira pois}$$

   $$1 = 2 - 1 = 2^1 - 1.$$

2. *Hipótese de Indução*:

   Assumimos que a proposição é válida para $n = k$:

   $$(HI) \qquad P(k): \quad 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1.$$

   Então, devemos provar que:

   $$P(k+1): \quad 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{(k+1)-1} = 2^{k+1} - 1$$

   é verdadeira.

   De fato,

$$\begin{aligned} 1+2+4+\cdots+2^{(k+1)-1} &= \underbrace{(1+2+4+\cdots+2^{k-1})}_{(HI)}+2^k \\ &= (2^k-1)+2^k \\ &= 2.2^k-1 \\ &= 2^{k+1}-1. \end{aligned}$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeira.

Dos passos 1 e 2, pelo princípio de indução, concluimos que $P(n)$ é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é:

$$1+2+4+\cdots+2^{n-1} = 2^n - 1 \quad , \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

(ii) $\quad \sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \quad \forall \;\; n \in \mathtt{N}.$

***P*rova:**

Considere a proposição:

$$P(n) \;\; : \;\; \sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2) \;\; , \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Devemos provar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

1. *Base da indução*:

   Vamos mostrar que a proposição $P(n)$ é verdadeira para $n = 1$:

$$P(1) \;\; : \quad \sum_{i=1}^{1} i(i+1) = \frac{1}{3}.1(1+1)(1+2)$$

   De fato,

$$\sum_{i=1}^{1} i(i+1) = 1(1+1) = 2$$

e

$$\frac{1}{3}.1(1+1)(1+2) = \frac{1}{3}.2.3 = 2$$

Das duas igualdades acima concluimos que

$$\sum_{i=1}^{1} i(i+1) = 2 = \frac{1}{3}.1(1+1)(1+2).$$

Isto é, $P(1)$ é verdadeira.

2. *Hipótese de indução*:

   Assumimos que $P(k)$ é verdadeira para $k \geq 1$, (HI),

$$P(k) \;:\quad \sum_{i=1}^{k} i(i+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$$

3. *Passo indutivo*:

   Devemos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, devemos mostrar que:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1) = \frac{1}{3}(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2)$$

   supondo que $P(k)$ é válida.

   Desenvolvemos o primeiro termo de $P(k+1)$e aplicamos a hipótese indutiva,

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1) &= \underbrace{\sum_{i=1}^{k} i(i+1)}_{(HI)} + (k+1)((k+1)+1) \\
&= \tfrac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) \\
&= (k+1)(k+2)(\tfrac{k}{3}+1) \\
&= \tfrac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3).
\end{aligned}$$

Por outro lado, desenvolvemos o segundo membro de $P(k+1)$:

$$\frac{1}{3}(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3).$$

Portanto, das últimas duas igualdades concluimos que

$$\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{1}{3}(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2),$$

ou seja, $P(k+1)$ é verdadeira.

Logo, pelo princípio de indução matemática temos que

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

é verdadeira para todo $\in \mathbb{N}$.

(iii) $\quad 2+5+8+\cdots+(3n-1) = \frac{1}{2}n(1+3n) \quad \forall \; n \in \mathbb{N}.$

***P*rova:**

1. *Base da indução*:

Devemos provar que a igualdade se verifica para $n=1$,

$$3.1-1 = \frac{1}{2}(1+3.1)$$

o que é verdade pois:

$$3.1-1 = 2 = \frac{1}{2}(1+3.1)$$

2. *Hipótese de indução*:

Vamos provar que a seguinte implicação é válida:

$$\sum_{i=1}^{k}(3i-1) = \frac{1}{2}k(1+3k) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k+1}(3i-1) = \frac{1}{2}(k+1)(1+3(k+1)),$$

assumindo que a hipótese de indução é verificada,

$$(HI)\ :\quad \sum_{i=1}^{k}(3i-1) = \frac{1}{2}k(1+3k).$$

Para mostrar que a igualdade também é válida para $k+1$, começamos desenvolvendo

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^{k+1}(3i-1) &= \underbrace{[2+5+8+\cdots+(3k-1)]}_{(HI)}+(3(k+1)-1) \\
&= \tfrac{1}{2}k(1+3k)+(3k+2) \\
&= \tfrac{1}{2}[k(1+3k)+2(3k+2)] \\
&= \tfrac{1}{2}(k+3k^2+6k+4) \\
&= \tfrac{1}{2}(3k^2+7k+4).
\end{aligned}$$

Agora, desenvolvemos o segundo membro da igualdade que queremos provar:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(k+1)(1+3(k+1)) &= \tfrac{1}{2}(k+1)(1+3k+3) \\
&= \tfrac{1}{2}(k+1)(3k+4) \\
&= \tfrac{1}{2}(3k^2+3k+4k+4) \\
&= \tfrac{1}{2}(3k^2+7k+4).
\end{aligned}$$

Logo, resulta

$$\sum_{i=1}^{k+1}(3i-1) = \frac{1}{2}(3k^2+7k+4) = \frac{1}{2}(k+1)(1+3(k+1)).$$

Portanto

$$\sum_{i=1}^{k+1}(3i-1) = \frac{1}{2}(k+1)(1+3(k+1))$$

que é a igualdade que queriamos provar. Então, pelo princípio de indução matemática, concluimos que

$$2+5+8+\cdots+(3n-1) = \tfrac{1}{2}n(1+3n) \quad \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

(iv) $(1+1)(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdots(1+\frac{1}{n}) = n+1 \quad \forall \ n \in \mathbb{N}.$

***P*rova:**

1. *Base da indução*:

   Observemos que, para $n = 1$, a igualdade se reduz a

   $$1+1 = 1+1 \qquad ,$$

   o que é verdade.

2. *Hipótese de indução*:

   Vamos mostrar que se a igualdade é válida para $n = k$:

   $$(HI) \ : \quad (1+1)(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdots(1+\frac{1}{k}) = k+1$$

   então, também se verifica para $k+1$. Isto é, usando a igualdade acima devemos ver que

   $$(1+1)(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdots(1+\frac{1}{k+1})) = (k+1)+1.$$

De fato, desenvolvendo

$$\begin{aligned}(1+1)(1+\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{3})\cdots(1+\tfrac{1}{k+1}) &= \underbrace{[(1+1)(1+\frac{1}{2})\cdots(1+\frac{1}{k})]}_{(HI)}(1+\tfrac{1}{k+1}) \\ &= (k+1)(1+\tfrac{1}{k+1}) \\ &= (k+1)(\tfrac{k+1+1}{k+1}) \\ &= k+2.\end{aligned}$$

Logo, provamos que a igualdade é válida para $n = k+1$.

Portanto, pelo princípio de indução matemática concluimos que

$$(1+1)(1+\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{3})\cdots(1+\tfrac{1}{n}) = n+1 \quad \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

(v) 2 divide $n^2 + n \quad \forall \ n \in \mathbb{N}$.

Seja

$$P(n) \ : \ 2 \text{ divide } n^2 + n \quad , \ n \in \mathbb{N}.$$

1. *Base da indução*:

   Para $n = 1$ temos que 2 divide $1^1 + 1$, portanto $P(1)$ é verdadeira.

2. *Hipótese de indução*:

   Suponhamos que a proposição se verifica para k, isto é, $P(k)$ é verdadeira:

$$P(k) \ : \ \ 2 \text{ divide } k^2 + k,$$

ou seja, para algum $q \in \mathbb{N}$ temos que $k^2 + k = 2q$.

Devemos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, isto é:

$$P(k+1) \ : \ \ 2 \text{ divide } (k+1)^2 + (k+1).$$

De fato, desenvolvendo $(k+1)^2 + (k+1)$ e usando a hipótese de indução, resulta:

$$\begin{aligned}
(k+1)^2 + (k+1) &= (k^2 + 2k + 1) + (k+1) \\
&= \underbrace{(k^2 + k)}_{HI} + (2k + 2) \\
&= 2q + 2(k+1) \\
&= 2(q + k + 1).
\end{aligned}$$

Definindo $r = q + k + 1$, temos que $r \in \mathbb{N}$ e das igualdades acima concluimos que

$$(k+1)^2 + (k+1) = 2r,$$

o que significa que 2 divide $(k+1)^2 + (k+1)$, isto é, $P(k+1)$ é verdadeira.

Logo, pelo princípio de indução matemática, resulta que $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$2 \text{ divide } n^2 + n \qquad \forall \ \ n \in \mathbb{N}$$

que é o queriamos mostrar.

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da EP da Aula 05

Observação:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.

2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo antes de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.

3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

---

(1) Seja $\{a_n\}$ a seqüência definida por:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 5$$
$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad , \quad n \geq 3$$

Mostre usando a indução forte que:

$$a_n = 2^n + (-1)^n \quad , \ \forall \ n \geq \ 1$$

***P*rova:**

Considere a proposição:

$$P(n): \quad a_n = 2^n + (-1)^n$$

Devemos provar que P(n) é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

1. *Base da indução*:

   Para $n = 1$, a proposição

   $$P(1): \quad a_1 = 2^1 + (-1)^1$$

   é verdadeira pois:

   $$2^1 + (-1)^1 = 2 - 1 = 1 = a_1$$

2. *Hipótese de indução forte*:

   Assumimos que $P(1)$, $P(2)$, $\cdots$, $P(k)$ são verdadeiras para $k \geq 1$:

   $$(HI) \ : \quad a_i = 2^i + (-1)^i \quad , \ \forall \ \ i = \ 1, 2, \cdots, k$$

3. *Passo indutivo*:

   Supondo que (HI) é válida devemos provar que P(k+1) é verdadeira, ou seja, devemos mostrar que:

   $$a_{k+1} = 2^{k+1} + (-1)^{k+1}.$$

De fato, usando a definição de a_{k+1} e aplicando a hipótese indutiva, temos que:

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_{(k+1)-1} + 2a_{(k+1)-2} \\
&= \underbrace{a_k}_{(HI)} + 2\underbrace{a_{k-1}}_{(HI)} \\
&= [2^k + (-1)^k] + 2[2^{k-1} + (-1)^{k-1}] \\
&= 2^k + (-1)^k + 2.2^{k-1} + 2.(-1)^{k-1} \\
&= 2^k + 2^k + (-1)^{k-1}[(-1) + 2] \\
&= 2^{k+1} + (-1)^{k-1} \\
&= 2^{k+1} + (-1)^{k-1}(-1)^{-2} \\
&= 2^{k+1} + (-1)^{k+1},
\end{aligned}
$$

ou seja, $P(k+1)$ é verdadeira.

Logo, pelo princípio de indução indução forte temos que a igualdade

$$a_n = 2^n + (-1)^n$$

se verifica para todo $n \in \mathbb{N}$, que é o que queriamos provar.

(2) Seja $\{F_n\}$ a seqüência de Fibonacci. Mostre usando a indução forte que:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \quad \forall \ n \in \mathbb{N}$$

***P*rova:**

Lembremos que a seqüência de Fibonacci está definida por:

$$F_1 = 1, \qquad F_2 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad , \quad n \geq 3 \quad .$$

Seja

$$P(n) : \quad F_n = \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n \qquad , \quad n \in \mathbb{N}$$

1. *Base da indução*:

   A proposição

   $$P(1) \ : \quad F_1 = \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^1 - \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^1,$$

   é verdade pois:

   $$\begin{aligned} \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^1 - \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^1 &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}) - \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}[\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}] \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1+\sqrt{5}-(1-\sqrt{5})}{2} \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}(2\tfrac{\sqrt{5}}{2}) \quad = \quad 1. \end{aligned}$$

2. *Hipótese de indução forte*:

   Assumimos que $P(1)$, $P(2)$, $\cdots$, $P(k)$ se verificam para $k \geq 1$:

   $$(HI) \ : \quad F_i = \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^i - \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^i \quad \forall \ \ i = \ 1, 2, \cdots, k$$

3. *Passo indutivo*:

$$P(1),\ P(2),\ \cdots,\ P(k) \text{ verdadeiras} \Rightarrow P(k+1) \text{ verdadeira}$$

Desenvolvendo:

$$\begin{aligned}
F_{k+1} &= \underbrace{F_k}_{(HI)} + \underbrace{F_{k-1}}_{(HI)} \\
&= [\tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^k - \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^k] + [\tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{k-1} - \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{k-1}] \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{k-1}(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}+1) - \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{k-1}(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}+1) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{k-1}(\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}) - \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{k-1}(\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}).
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que:

$$(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = \tfrac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \tfrac{6+2\sqrt{5}}{4} = \tfrac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e}$$

$$(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^2 = \tfrac{1+5-2\sqrt{5}}{4} = \tfrac{6-2\sqrt{5}}{4} = \tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\ .$$

Portanto, das igualdades acima resulta:

$$\begin{aligned}
F_{k+1} &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{k-1}(\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}) - \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{k-1}(\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{k-1}(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{k-1}(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^2 \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{k+1} - \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{k+1}.
\end{aligned}$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeira.

Então, pelo princípio de indução forte, concluimos que:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \quad \forall \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da EP da Aula 06

Observações:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.
2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo antes de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.
3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

---

1. Suponha que para fazer uma viagem Rio-Belo Horizonte-Rio, eu posso usar como transporte o trem, o ônibus ou o avião. De quantas maneiras posso escolher os transportes se não desejo usar na volta o mesmo meio de transporte usado na ida?

   Resposta: Pelo princípio multiplicativo, temos $3.2 = 6$ maneiras de escolher os transportes, pois na ida tenho 3 possibilidades: trem, ônibus ou avião. E na volta, como não desejo voltar no mesmo meio de transporte, tenho 2 possibilidades.

2. Quantas palavras com 4 letras diferentes podem ser formadas com um alfabeto de 26 letras?

   Resposta: A primeira letra da palavra pode ser escolhida de 26 maneiras, a segunda de 25 maneiras; a terceira, de 24 maneiras e a quarta, de 23 maneiras. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos 26.25.24.23 palavras com 4 letras distintas.

3. Quantos inteiros há entre 100 e 999, inclusive, cujos algarismos são distintos?

   Resposta: Pelo princípio multiplicativo, temos $9.9.8 = 648$ algarismos distintos, pois o primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 maneiras, o segundo, de 9 maneiras (pois para este caso temos 10 algarismos menos 1 para escolher, pois um já foi escolhido para ocupar o primeiro algarismo) e o terceiro, de 8 maneiras.

4. Quantos números de 3 dígitos são maiores que 390 e:

   a- têm todos os dígitos diferentes;

   Resposta: Vamos contar separadamente. Se o número não começar pelo algarismo 3, há 6 modos de selecionar o primeiro algarismo, 9 de selecionar o segundo, 8, o terceiro. Daí, pelo princípio multiplicativo, há $6.9.8 = 432$ números que não começam por 3.

   Se o número começar por 3, há 1 modo de escolher o primeiro dígito, 1 de escolher o segundo (deve ser igual a 9) e 7 de escolher o terceiro (estão excluídos os algarismos $3, 9$ e 0). Logo, há $1.1.7 = 7$ números que começam por 3.

   Então, pelo princípio aditivo, temos $432 + 7 = 439$ números de 3 dígitos que são maiores que 390 e que têm todos os dígitos diferentes.

b- não têm dígitos iguais a 1, 3 ou 5

Resposta: Se não possui dígitos 1, 3 ou 5, então teremos somente os dígitos $0, 2, 4, 6, 7, 8$ e 9.

Como não possui dígito 3, temos que os números serão maiores ou iguais que 400, logo há 5 modos de selecionar o primeiro algarismo $(4, 6, 7, 8, 9)$, 7 de selecionar o segundo, e 7, o terceiro. Daí, pelo princípio multiplicativo, há $5.7.7 = 245$ números maiores que 390 com 3 dígitos e que não possuem dígitos 1, 3 ou 5.

c- têm as propriedades a e b simulatneamente

Resposta: Os números não possuem dígitos 1, 3 ou 5, isto é, possuem dígitos $0, 2, 4, 6, 7, 8, 9$, porém os dígitos são distintos.

Como não possui dígito 3, começaremos então pelos números maiores ou iguais a 400, logo há 5 modos de selecionar o primeiro algarismo $(4, 6, 7, 8, 9)$, 6 modos de selecionar o segundo e 5 modos de selecionar o terceiro. Daí, há $5.6.5 = 150$ números maiores que 390 com 3 dígitos e que não possuem dígitos 1, 3 ou 5 e são distintos.

5. Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 20 questões de múltipla escolha com 5 alternativas por questão?

Resposta: Cada questão tem 5 possibilidades de resposta, logo:

$$\begin{array}{l} Pelo\ princ\acute{i}pio\ multiplicativo, \\ temos\ \ 5 \times 5 \times 5 \times \ldots 5 \times = 5^{20} \end{array} \left\{ \begin{array}{c} Quest\tilde{a}o\ \ 1 : 5\ \ possibilidades \\ Quest\tilde{a}o\ \ 2 : 5\ \ possibilidades \\ \vdots \\ Quest\tilde{a}o\ \ 20 : 5\ \ possibilidades \end{array} \right.$$

6. Quantos divisores tem o número $N = 2^3 \times 3^2 \times 5^4$?

   Resposta: Seja o número $N = 2^3 \times 3^2 \times 5^4$.

   Os divisores de N são da forma $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$, com $\alpha = \{0,1,2,3\}$, $\beta = \{0,1,2\}$ e $\gamma = \{0,1,2,3,4\}$. Daí, pelo princípio multiplicativo temos $4.3.5 = 60$ divisores de N.

   No geral, temos: Seja o número $M = a^m \times b^n \times c^p$

   Os divisores de M são da forma $a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma$, com $\alpha = \{0,1,2,\ldots,m\}$, $\beta = \{0,1,\ldots,n\}$ e $\gamma = \{0,1,\ldots,p\}$. Há $(m+1)$ modos de escolher o valor de α, $(n+1)$, o de β e $(p+1)$, o de γ. Daí, a resposta é $(m+1).(n+1).(p+1)$.

7. Quantos são os números de 4 dígitos que possuem pelo menos dois dígitos iguais?

   Resposta: Há $9.10.10.10 = 9000$ números naturais de 4 dígitos e $9.9.8.7 = 4536$ naturais de 4 dígitos diferentes.

   Daí, pelo princípio aditivo e multiplicativo, temos $9000 - 4536 = 4464$ números de 4 dígitos que possuem pelo menos dois dígitos iguais.

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da EP da Aula 07

Observações:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.
2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo <u>antes</u> de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.
3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

---

1. Simplifique as seguintes expressões:

   (a) $\frac{(n+1)!}{n!}$

   Resposta: $\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1)n!}{n!} = (n+1)$

   (b) $\frac{n!}{(n+2)!}$

   Resposta: $\frac{n!}{(n+2)!} = \frac{n!}{(n+2)(n+1)n!} = \frac{1}{(n+2).(n+1)}$

   (c) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

   Resposta: $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} = (n+1)n$

2. De quantas maneiras as letras da palavra **CURSO** podem ser permutadas?

   Resposta: Cada anagrama de **CURSO** nada mais é que uma ordenação das letras **C, U, R, S, O**. Assim, o número de anagramas de **CURSO** é $P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$.

3. Um cubo de madeira tem as faces pintadas de cores diferentes. De quantos modos podem ser gravados números de 1 a 6 sobre cada uma das faces?

   Resposta: Devemos colocar seis cores em seis lugares. Logo, a resposta é $P_6 = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$.

4. Considere 4 cidades **A, B, C** e **D**. Ana e João pensam fazer um passeio pelas 4 cidades, passando por cada uma delas apenas uma vez.

(a) Se eles podem começar por qualquer cidade e terminar em qualquer cidade, quantos trajetos são possíveis?

Resposta: $4! = 4.3.2.1 = 24$ trajetos possíveis, pois cada passeio corresponde a uma forma diferente de visitar a cidade.

(b) Se eles devem começar pela cidade **A**, quantos caminhos são possíveis?

Resposta: $3! = 3.2.1 = 6$, pois a cidade **A** é fixa.

5. De quantos modos é possível colocar em uma prateleira 5 livros distintos de matemática, 3 diferentes de física e 2 diferentes de inglês?

   Resposta: Como não existe restrição, podemos ordenar os livros de qualquer maneira.Como temos ao todo 10 livros, daí a resposta é $P_{10} = 10! = 3628800$.

6. Quantos são os anagramas da palavra **ÂNGULO** que:

   (a) começam com vogal?

   Resposta: A vogal inicial pode ser escolhida de 3 maneiras, e as letras restantes podem ser arrumadas de $P_5 = 5!$ maneiras. Logo, pelo princípio multiplicativo, a resposta é $3.5! = 360$.

   (b) começam e terminam por vogal?

   Resposta: A vogal inicial pode ser escolhida de 3 maneiras, a vogal final de 2 maneiras e as 4 letras restantes podem ser arrumadas entre essas duas vogais de $P_4 = 4!$ modos. Logo, a resposta é $3.2.4! = 3.2.4.3.2.1 = 144$.

Observemos que obtemos o mesmo resultado se começamos com a possibilidade da última letra, depois continuamos coma as possibilidades da primeira letra e finalmente as quatro letras restantes.

(c) não têm juntas as letras **A** e **N**?

Resposta: O número de anagramas com 6 letras é $P_6 = 6! = 720$. O número de maneiras de ordenar 6 letras de modo que 2 letras, A e N, fiquem juntas é $2.5!$, pois para formar um anagrama, devemos inicialmente decidir em que ordem se colocarão A e N (AN ou NA), e, em seguida, formar o anagrama com 5 letras. Portanto a resposta é $6! - 2.5! = 720 - 240 = 480$.

7. De quantos modos 5 meninas e 5 meninos podem formar uma roda de ciranda de modo que pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas?

   Resposta: Existe uma permutação circular com as 5 meninas, isto é, $(PC)_5 = 4!$ modos de formar uma roda com as meninas. Depois disso, os 5 meninos devem ser postos nos lugares entre as meninas, o que pode ser feito de $5!$ modos. A resposta é $4!5! = 2880$.

8. De quantos modos 4 casais podem formar uma roda de ciranda de modo que cada homem permaneça ao lado da sua mulher e que pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas?

   Resposta: Existe uma permutação circular com os 4 homens, isto é, $(PC)_4 = 3!$ modos de formar uma roda como os 4 homens. Depois disso, há dois modos de pôr as esposas na roda: à direita ou à esquerda de seus maridos. A resposta é $2.3! = 12$.

9. De quantos modos 5 mulheres e 6 homens podem formar uma roda de ciranda de modo que as mulheres permaneçam juntas?

   Resposta: Podemos formar uma roda com os homens de $(PC)_6 = 5!$ modos. Depois, devemos escolher um dos 6 espaços entre os homens (o que pode ser feito de 6 modos) para aí colocarmos todas as mulheres. Finalmente, devemos decidir em que ordem as 5 mulheres se colocarão nesse espaço (5! modos). A resposta é $5!6.5! = 5!6! == 86400$.

Tente fazer com outro raciocínio.

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da EP da Aula 08

Observações:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.

2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo antes de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.

3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

---

1. Em uma comissão de 10 professores devem ser escolhidos um coordenador e um subcoordenador. De quantas maneiras eles podes ser escolhidos?

   Resposta: Observemos que temos 10 professores e devemos fazer 2 escolhas, coordenador e subcoordenador (importa a ordem em que são considerados). Portanto, esta questão tem as características dos arranjos simples, onde o número total de elementos diferentes considerados são 10 e cada escolha de 2 professores corresponde a uma possibilidade. Então, o número de maneiras em que eles podem ser escolhidos é $A(10,2) = \frac{10!}{(10-2)!} = 10.9 = 900$.

2. Determine, quando for possível, o valor de n se:

   (a) $A(n,2) = 72$

   Resposta: Como $A(n,2) = \frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1)$ deve estar bem definida, temos que n deve verificar: $n \in \mathbb{N}$ e $n-2 \geq 0$. Portanto, queremos encontrar aqueles $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$ que verificam a igualdade:
   $$n(n-1) = 72,$$
   ou seja,
   $$n^2 - n - 72 = 0.$$
   As raizes de esta equação são -8 e 9. Como temos as restrições $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$, o valor que verifica $A(n,2) = 72$ é $n = 9$.

   (b) $4A(n,2) = A(2n,3)$

   Resposta: Como $A(n,2) = \frac{n!}{(n-2)!}$ e $A(2n,3) = \frac{(2n)!}{(2n-3)!}$ devem estar bem definidas, temos que n deve verificar: $n \in \mathbb{N}$, $n-2 \geq 0$ e $2n-3 \geq 0$, isto é, $n \geq 2$ e $n \geq 3/2$. Portanto, queremos encontrar aqueles $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$ que verificam:
   $$4A(n,2) = A(2n,3)$$

quer dizer, devemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$ satisfazendo:

$$4n(n-1) = 2n(2n-1)(2n-2),$$

ou

$$4n(n-1) = 2n(2n-1)2(n-1).$$

Como $n \neq 0$ e $n \neq 1$, a igualdade acima se reduz a encontrar $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$ tal que:

$$2n - 1 = 1,$$

que tem como solução $n = 1$. Por outro lado vimos que temos a restrição $n \geq 2$. Portanto, a equação $4A(n,2) = A(2n,3)$ não tem solução.

3. De quantas maneiras 4 amigos entre 10 podem se colocar em uma foto?

   Resposta: Observemos que, escolhidos 4 amigos dentre 10, a ordem como eles podem aparecer na foto dá lugar a possibilidades diferentes. Portanto, o número de maneiras como 4 amigos dentre 10 podem se colocar em uma foto corresponde a arranjos simples, $A(10,4) = \frac{10!}{6!}$.

4. Quantos tipos de bilhetes especificando a origem e o destino têm uma companía aérea que une 7 cidades?

   Resposta: 42.

5. Considere os números de 3 algarismos distintos formados com os dígitos $2, 3, 5, 8,$ e 9.

   (a) Quantos são estes números?

   Resposta: O número de 3 algarismos distintos formados com os dígitos $2, 3, 5, 8,$ e 9 é $A(5,3) = 60$.

(b) Quantos são menores do que 800?

Resposta: Como os números devem ser menores do que 800, significa que o primeiro algarismo (centena) não pode começar nem com 8 nem com 9. Portanto, para esta posição, temos 3 possibilidades.

Escolhida uma possibilidade para a primeira posição, sobram 4 números para as outras 2 posições (dezena e unidade), isto é, temos $A(4,2)$ possibilidades.

Então, pelo princípio multiplicativo, temos que a quantidade de números de 3 algarismos menores de 800 que podem ser formados com os números $2, 3, 5, 8,$ e 9 é $3A(4,2) = 36$.

(c) Quantos são múltiplos de 5?

Resposta: Com os dígitos dados, os únicos números múltiplos de 5 são os que finalizam em 5. Portanto, restam para as outras duas posições (centenas e dezenas) os números $2, 3, 8$ e 9 tomados 2 a 2. Logo, os múltipos de 5 são $A(4,2) = 12$.

(d) Quantos são pares?

Resposta: Os números pares são $2A(4,2) = 24$.

(e) Quantos são ímpares?

Resposta: Os números ímpares são $3A(4,2) = 36$.

(f) Quantos são múltiplos de 2?

Resposta: Os múltipos de 2 são $2A(4,2) = 24$.

6. Quantas são as palavras de 5 letras distintas de um alfabeto de 26 letras nas quais a letra **A** figura mas não é a letra inicial da palavra?

Resposta: Para a letra inicial das palavras de 5 letras distintas temos 25 possibilidades pois não pode ser a letra **A**.

Fixada a primeira letra, a letra **A** pode ocupar na palavra 4 posições diferentes.

Fixada a primeira letra e a posição de **A** na palavra de 5 letras, restam 3 posições que podem ser preenchidos com 24 letras diferentes do alfabeto. Então, dadas 24 letras, o número de possibilidades de formar anagramas de 3 letras distintas é $A(24,3) = \frac{24!}{21!}$.

Portanto, considerando as possibilidades para a letra inicial, para a posição de **A** e para as 3 letras restantes e usando o princípio multiplicativo, concluimos que o número de palavras de 5 letras distintas de um alfabeto de 26 letras nas quais a letra **A** figura mas não é a letra inicial da palavra é $25.4.\frac{24!}{21!} = 4\frac{25!}{21!}$.

7. Quantos números de 3 e 4 algarismos distintos e maiores do que 300 podem ser formados com os algarismos $0, 1, 3, 5$ e 7?

   Resposta: Começamos calculando a quantidade de números de 3 algarismos distintos e maiores do que 300 formados com $0, 1, 3, 5$ e 7. Observemos que para o primeiro dígito (centena) temos 3 possibilidades $(3, 5$ ou $7)$. Para as duas posições restantes temos $A(4, 2)$ possibilidades (incluimos 0 e 1). Portanto, devido ao princípio multiplicativo, neste caso temos $3A(4, 2) = 36$ modos diferentes.

   Agora calculamos a quantidade de números com 4 algarismos distintos formados com $0, 1, 3, 5$ e 7. Para a primeira posição temos 4 maneiras $(1, 3, 5$ ou $7)$. Fixado um número na primeira posição, temos $A(4, 3)$ possibilidades, pois também devemos considerar o 0 . Logo, neste caso, usando o princípio multiplicativo temos $4A(4, 3) = 96$ possibilidades.

   Finalmente, usando o princípio aditivo, obtemos que a quantidade de números de 3 e 4 algarismos distintos e maiores do que 300 que podem ser formados com os algarismos $0, 1, 3, 5$ e 7 é $36 + 96 = 132$.

8. Quantos são os números de 5 algarismos distintos na base 10:

(a) nos quais o algarismo 2 figura?

Resposta: Separamos o raciocínio em duas partes. Na primeira consideramos que 2 está na primeira posição e na segunta etapa consideramos que o 2 não aparece na primeira posição.

Na primeira situação,temos de escolher 4 algarismos distintos dentre 9 dígitos. Portanto, os números de 5 algarismos distintos na base 10 que começam com 2 são $A(9,4) = 3024$.

Na segunda parte, os números podem começar de 8 formas diferentes (estão excluídos 0 e 2). Logo, uma das 4 posições restantes deve ser ocupada por 2. Fixados o primeiro dígito do número e a posição do 2, restam 3 lugares a serem preenchidos com 8 dígitos diferentes que pode ser feito de $A(8,3)$ modos diferentes. Portanto, neste caso, pelo princípio multiplicativo temos $8.4.A(8,3) = 10752$ possibilidades.

Os números de 5 algarismos distintos na base 10 nos quais o algarismo 2 figura é a união do conjunto de números de 5 algarismos distintos na base 10 que começam com 2 e do conjunto de números de 5 algarismos distintos na base 10 que não começam com 2, que são disjuntos. Logo, pelo princípio aditivo, temos que a quantidade dos números de 5 algarismos distintos na base 10 nos quais o algarismo 2 figura é $\frac{9!}{5!} + 32\frac{8!}{5!} = 13776$.

(b) nos quais o algarismo 2 não figura?

Resposta: O problema é equivalente a encontrar a quantidade de números de 5 algarismos distintos formados com os algarismos $0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, que corresponde a $8A(8,4) = 8\frac{8!}{4!}$.

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da EP da Aula 09

Observações:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.
2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo antes de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.
3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

---

1. Prove que:

$$C(n,n) = C(n,0) = 1$$

***R*esposta:** Aplicando a fórmula de combinação:

$$C(n,n) = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = \frac{n!}{0!n!} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = C(n,0).$$

Temos também,

$$\frac{n!}{n!0!} = \frac{n!}{n!1} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

Portanto, $C(n,n) = C(n,0) = 1$.

2. Determine o valor de n que satisfaz:

$$P_n = 12C(n,2)$$

***R*esposta:**

$$\begin{array}{rcl} 12C(n,2) & = & 12\frac{n!}{2!(n-2)!} \\ & = & n!\frac{12}{2!(n-2)!} \\ & = & P_n\frac{12}{2!(n-2)!} \end{array}$$

Portanto, se $12C(n,2) = P_n$, então:

$$\begin{array}{lcl} \frac{12}{2!(n-2)!} & = & 1 \\ 12 & = & 2!(n-2)! \\ \frac{12}{2!} & = & (n-2)! \\ 6 & = & (n-2)! \\ 3! & = & (n-2)! \\ 3 & = & n-2 \\ n & = & 5 \end{array}$$

3. Um estudante recebe uma prova contendo 6 questões. Ele deve escolher 4 para resolver. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer essa escolha?

   ***R*esposta:** O estudante deve selecionar um grupo de 4 num total de 6 questões.

   Note que a ordem da resolução das questões não é importante: Resolvendo em ordem 1, 2, 3 e 4 ou, resolvendo 4, 3, 2 e 1 nesta ordem, de qualquer forma o aluno terá resolvido as mesmas questões.

   Portanto, o aluno pode fazer esta escolha de $C(6,4) = 15$ maneiras.

4. Uma turma de calouros tem 15 rapazes e 10 moças. Devem escolher 2 representantes. De quantas maneiras eles podem ser escolhidos?

   ***R*esposta:** A turma tem 25 alunos, dentre estes podemos escolher 2 alunos de $C(25,2) = 300$ maneiras.

5. De quantos modos 5 meninas e 3 meninos podem ser divididos em 2 grupos de 4 crianças de forma tal que cada grupo inclua pelo menos 1 menino?

   ***R*esposta:** Nessa questão adotaremos o seguinte raciocínio: Ao invés de contar o que é pedido no problema, contaremos seu complementar, subtrairemos este resultado do total e assim obteremos o número desejado.

   O conjunto complementar é calculado em relação ao conjunto formado pelas possíveis divisões de 8 crianças em 2 grupos de 4 (conjunto universo).

   Note que o único jeito de partirmos as crianças em 2 grupos de 4, de tal forma que algum desse grupos não tenha pelo menos um menino, é distribuir as crianças em um grupo com 4 meninas e outro com 3 meninos e uma menina.

   Podemos dividir 8 crianças em 2 grupos de 4 crianças da seguinte forma: Escolhemos 4 crianças para ficar num grupo, para isso temos $C(8,4)$ maneiras e as restantes colocamos no outro grupo. Note que uma distribuição fixa é contada mais de uma vez, pois se enumerarmos as crianças de 1 a 8, o agrupamento $\{1,2,3,4\}$, $\{5,6,7,8\}$, onde o primeiro grupo representa o grupo formado pela escolha de 4 entre 8 crianças e o segundo pelas crianças restantes é equivalente a $\{5,6,7,8\}$, $\{1,2,3,4\}$. Precisamos portanto dividir o total pelo número de permutações entre os 2 grupos que é $P_2 = 2$. Logo, podemos distribuir 8 crianças em 2 grupos de 4 de $\frac{C(8,4)}{P_2} = \frac{70}{2} = 35$ maneiras.

Para dividir as crianças em grupos onde um dos grupos não tenha nenhum menino, devemos colocar os 3 meninos num único grupo, depois temos $C(5,1)$ maneiras para determinar qual das meninas fará parte do grupo onde estão os 3 meninos. As meninas restantes irão compor o outro grupo.

O total de grupos com pelo menos 1 menino é $\frac{C(8,4)}{P_2}$ - $C(5,1) = 35 - 5 = 30$.

6. Uma comissão formada por 3 homens e 3 mulheres deve ser escolhida em um grupo de 8 homens e 5 mulheres.

   (a) Quantas comissões podem ser formadas?

   ***R*esposta:** Para compor a comissão devemos escolher 3 em um grupo de 8 homens, o que nos dá um total de $C(8,3) = 56$ maneiras. Analogamente para as mulheres temos $C(5,3) = 10$ maneiras. Portanto, pelo princípio multiplicativo temos $C(8,3).C(5,3) = 56.10 = 560$ comissões distintas.

   (b) Qual seria a resposta se um dos homens não aceitasse participar da comissão se nela estivesse determinada mulher?

   ***R*esposta:** Dividiremos as comissões em dois grupos: Comissões onde se encontra a determinada mulher e comissões onde a mesma não se encontra.

   Contando o número de comissões onde a mulher se encontra, temos $C(4,2) = 6$ maneiras de preencher as outras vagas destinadas a mulheres, e como não poderemos contar com um dos homens, temos $C(7,3) = 35$ maneiras de selecionar os homens que vão compor a comissão. Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos $C(4,2).C(7,3) = 210$ comissões distintas.

   Sabendo que a determinada mulher não se encontra na comissão, temos $C(4,3) = 4$ formas de escolher as 3 mulheres e $C(8,3) =$

56 maneiras de escolher os 3 homens. Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos $C(4,3).C(8,3) = 224$ comissões distintas.

Logo, pelo princípio aditivo, podemos montar um total de $210 + 224 = 434$ comissões distintas.

7. Para a seleção brasileira foram convocados 2 goleiros, 6 zagueiros, 7 meios de campo e 4 atacantes. De quantos modos é possível escalar a seleção com 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meios de campo e 2 atacantes?

   ***R*esposta:** Podemos escalar o goleiro de $C(2,1) = 2$ maneiras, os zagueiros de $C(6,4) = 15$ formas, os meio de campo de $C(7,4) = 35$ maneiras e os atacantes de $C(4,2) = 6$ maneiras. Pelo princípio multiplicativo, podemos montar o time de $C(2,1).C(6,4).C(7,4).C(4,2) = 2.15.35.6 = 6300$ maneiras.

8. Em um torneio no qual cada participante enfrenta todos os demais uma única vez são jogadas 780 partidas. Quantos são os participantes?

   ***R*esposta:** Seja n o número de jogadores no torneio. Se todos jogaram contra todos uma única vez o total de partidas é $C(n,2)$, e portanto:

$$\begin{aligned} C(n,2) &= 780 \\ \frac{n!}{2!(n-2)!} &= 780 \\ \frac{n(n-1)}{2} &= 780 \\ n(n-1) &= 1560 \end{aligned}$$

   Falta agora resolver a equação do 2º grau $n^2 - n - 1560 = 0$. Esta equação só possui uma única raíz inteira positiva que é 40, portanto $n = 40$ e conseqüentemente concluímos que o número de jogadores no torneio é 40.

9. Considere 3 vogais diferentes(incluindo o A) e 7 consoantes diferentes (incluindo o B).

   (a) Quantas anagramas de 5 letras diferentes podem ser formados com 3 consoantes e 2 vogais?

***R*esposta:** Inicialmente devemos selecionar quais vogais irão ser utilizadas nos anagramas, podemos fazer isso de $C(3,2) = 3$ formas. Agora determinamos as posições destas vogais no anagrama, podemos fazer isto de $A(5,2) = 20$ maneiras. Pelo princípio multiplicativo, temos $C(3,2)A(5,2) = 60$ formas de selecionar e alocar as vogais.

Em relação às consoantes, devemos inicialmente selecionar 3, podemos fazer isto de $C(7,3) = 35$ maneiras. Depois temos que distribuir as consoantes escolhidas nas 3 posições restantes, isto pode ser feito de $P_3 = 6$ maneiras. Pelo princípio multiplicativo, temos $C(7,3)P_3 = 210$ formas de selecionar e alocar as vogais.

Logo, pelo princípio multiplicativo, o número total de anagramas é $60.210 = 12600$.

(b) Quantas começam com A?

***R*esposta:** Fixemos a vogal A no início da palavra, devemos agora preencher o anagrama das letras a direita do A, isto é, um anagrama de 4 letras onde devemos usar uma vogal e 3 consoantes. O procedimento adotado será análogo ao do ítem anterior.

Primeiro selecionamos qual é a outra vogal a ser utilizada no anagrama (observe que não podemos mais usar a vogal A), podemos fazer isso de $C(2,1) = 2$ formas. Agora determinamos a posição desta vogal no anagrama, podemos fazer isto de $A(4,1) = 4$ maneiras. Pelo princípio multiplicativo, temos $C(2,1)A(4,1) = 8$ formas de selecionar e alocar as vogais.

Para as consoantes, devemos inicialmente selecionar 3, podemos fazer isto de $C(7,3) = 35$ maneiras. Depois temos que distribuir as consoantes escolhidas nas 3 posições restantes, isto pode ser feito de $P_3 = 6$ maneiras. Pelo princípio multiplicativo, temos $C(7,3)P_3 = 210$ formas de selecionar e alocar as vogais.

Logo, pelo princípio multiplicativo, o número total de anagramas é $8.210 = 1680$.

10. De quantas maneiras podemos arrumar em fila 5 sinais $(-)$ e 7 sinais $(+)$?

Observação: O problema é equivalente a encontrar o número de 12 lugares diferentes a serem preenchidos por 5 sinais (-) e 7 sinais (+).

***R*esposta:** Dada uma fila com 12 lugares, escolheremos os lugares dos sinais $+$. Eles podem ser alocados em $C(12, 7)$ lugares diferentes. Os sinais $-$ ocupam os lugares restantes.

Logo, existem $C(12, 7) = 792$ maneiras de arrumar em fila 5 sinais $(-)$ e 7 sinais $(+)$.

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da EP da Aula 10

Observações:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.

2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo antes de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.

3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

---

1. Quantos números de 7 dígitos podem ser formados usando apenas os algarismos 1, 3, 6, 6, 6, 8, 8 supondo que:

   (a) não se têm restrições.

***R*esposta:** $P_7^{3,2,1,1} = \frac{7!}{3!2!1!1!} = 420$

(b) devem ser maiores que 6000000

***R*esposta:** Se o número é maior que 6000000, ele deverá começar por 6 ou por 8.

Se o primeiro dígito for 6, então teremos 6 casas vazias para os demais dígitos, o que dá um total de $P_6^{2,2,1,1} = \frac{6!}{2!2!1!1!} = 180$.

Se o primeiro dígito for 8, então teremos 6 casas vazias para os demais dígitos, o que dá um total de $P_6^{3,1,1,1} = \frac{6!}{3!1!1!1!} = 120$.

Logo, pelo princípio aditivo, o total de números maiores que 6000 é 120 + 180 = 300.

2. Quantos números de 5 algarismos podem ser formados usando apenas os algarismos 1, 1, 1, 1, 2 e 3.

   ***R*esposta:** Dividiremos este número em 3 grupos disjuntos:

   (i) Os algarismos são 1,1,1,1,2. Com estes algarismos podemos formar $P_5^{4,1} = \frac{5!}{4!1!} = 5$ números distintos.

   (ii) Os algarismos são 1,1,1,1,3. Com estes algarismos podemos formar $P_5^{4,1} = \frac{5!}{4!1!} = 5$ números distintos.

   (iii) Os algarismos são 1,1,1,2,3. Com estes algarismos podemos formar $P_5^{3,1,1} = \frac{5!}{3!1!1!} = 20$ números distintos.

   Logo, pelo princípio aditivo, temos $5 + 5 + 20 = 30$ números distintos.

3. A seguinte figura representa o mapa de uma cidade na qual há 7 avenidas na direção norte-sul e 6 avenidas na direção leste-oeste.

   (a) Quantos são os trajetos de cumprimento mínimo ligando o ponto A ao ponto B?

   ***R*esposta:** Para ir de A até B deve - se andar 11 vezes (para a direita 6 vezes e para cima 5 vezes) o número de formas que isto pode ser feito é $P_{11}^{6,5} = \frac{11!}{6!5!} = 462$.

(b) Quantos desses trajetos passam por C?

***R*esposta:** Para ir de A até C deve - se andar 8 vezes (4 vezes para a direita e para cima 4 vezes), o número de formas que isto pode ser feito é $P_8^{4,4} = \frac{8!}{4!4!} = 70$. Analogamente, pode - se ir de C a B de $P_3^{2,1}$ $= 3$ formas distintas. Pelo princípio multiplicativo, podemos ir de A a B passando por C de $70.3 = 210$ formas.

4. Quantos são os anagramas de PARAGUAI que começam por vogais?

   ***R*esposta:** Classificaremos os anagramas de PARAGUAI em 3 grupos disjuntos:

   (i) Anagramas começados em A: $P_7^{2,1,1,1,1,1} = \frac{7!}{2!} = 2520$.

   (ii) Anagramas começados em U: $P_7^{3,1,1,1,1} = 840$.

   (iii) Anagramas começados em I: $P_7^{3,1,1,1,1} = 840$.

   Pelo princípio aditivo, o total de anagramas é $2520 + 840 + 840 = 4200$.

5. Quantos são os anagramas da palavra PIRACICABA que não possuem duas letras A juntas?

   ***R*esposta:** O número de modos de arrumar as letras diferentes de A é $P_7^{2,2,1,1,1}$. Para 2 A's não ficarem juntos, temos que colocar os A's entre as outras letras (o que nos dá 8 espaços possíveis onde os A's podem ser colocados). Isso pode ser feito de C_8^3 maneiras. Logo pelo princípio multiplicativo temos $P_7^{2,2,1,1,1}.C_8^3 = 1260.56 = 70560$ anagramas.

6. Quantos são os anagramas da palavra MATEMATICA supondo que:

   (a) não têm restrições,

   ***R*esposta:** $P_{10}^{3,2,2,1,1,1} = \frac{10!}{3!2!2!} = 151200$

   (b) começam por vogal,

   ***R*esposta:** Temos $P_9^{2,2,2,1,1,1} = \frac{9!}{2!2!2!} = 45360$, começados em A. Temos $P_9^{3,2,2,1,1} = \frac{9!}{3!2!2!} = 15120$, começados por E ou por I. Logo, temos

$P_9^{2,2,2,1,1,1} + 2.P_9^{3,2,2,1,1} = 75600$ anagramas que começam por vogal.

(c) começam por consoante e terminam por vogal,

***R*esposta:** Dividiremos estes anagramas em 3 grupos disjuntos:

1) Começam com a letra M.

Partiremos este grupo em outros 2 subgrupos disjuntos:

$(1.i)$ Terminam com a letra A: $P_8^{2,2,1,1,1,1} = \frac{8!}{2!2!} = 10080$

$(1.ii)$ Terminam com a letra E ou I: $P_8^{3,2,1,1,1}.2 = \frac{8!}{3!2!}.2 = 6720$

Portanto, pelo princípio aditivo, temos $P_8^{2,2,1,1,1,1} + P_8^{3,2,1,1,1}.2 = 16800$ anagramas que começam com M.

2) Começam com a letra T:

$(2.i)$ Terminam com a letra A: $P_8^{2,2,1,1,1,1} = \frac{8!}{2!2!} = 10080$

$(2.ii)$ Terminam com a letra E ou I: $P_8^{3,2,1,1,1}.2 = \frac{8!}{3!2!}.2 = 6720$

Portanto, pelo princípio aditivo, temos $P_8^{2,2,1,1,1,1} + P_8^{3,2,1,1,1}.2 = 16800$ anagramas que começam com T.

3) Começam com a letra C

$(3.i)$ Terminam com a letra A: $P_8^{2,2,2,1,1} = \frac{8!}{2!2!2!} = 5040$

$(3.ii)$ Terminam com a letra E ou I: $P_8^{3,2,2,1}.2 = \frac{8!}{3!2!2!}.2 = 3360$

Portanto, pelo princípio aditivo, temos $P_8^{2,2,2,1,1} + P_8^{3,2,2,1}.2 = 8400$ anagramas que começam com C.

Para finalizar, pelo princípio aditivo, temos $16800 + 16800 + 8400 = 42000$ anagramas.

(d) não tem 2 vogais juntas.

Inicialmente escolhemos as posições das consoantes, temos $P_5^{2,2,1} = 30$. Fixada uma posição para as consoantes, temos 6 lugares para intercalar 5 vogais. Logo, o total de posições possíveis para as vogais é $C(6,5) = 6$. Fixados os lugares para as vogais temos $P_5^{3,1,1} = 20$ maneiras de ordenar as vogais. Portanto, pelo princípio multiplicativo, resultam $P_5^{2,2,1}C(6,5)P_5^{3,1,1} = 3600$ anagramas sem vogais juntas.

7. Considere seqüências onde o 0 está repetido duas vezes e o 1 aparece repetido quatro vezes. Pede-se determinar o número de seqüências supondo que:

   (a) não têm restrições,

   ***R*esposta:** $P_6^{2,4} = 15$

   (b) o primeiro termo da seqüência deve ser 1,

   ***R*esposta:** Fixado um 1 na primeira posição temos $P_5^{2,3} = 10$ seqüências.

   (c) a seqüência não pode ter os 2 zeros juntos.

   ***R*esposta:** Devemos posicionar os 0´s entre os 1´s, Como são quatro 1´s temos 5 posições a escolha para alocar os dois 0´s, podemos fazer isso de $C(5,2) = 10$ formas.

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da EP da Aula 11

Observações:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.
2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo antes de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.
3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

---

1. Considere os números de 3 algarismos formados com os dígitos $2, 3, 5, 8$ e 9.

   (a) Quantos são estes números?

   Resposta: Cada número de 3 algarismos (que podem ser repetidos) formados com os dígitos $2, 3, 5, 8$ e 9 corresponde a um arranjo com repetição de 5 elementos tomados 3 a 3. Portanto, o número total destes números é $AR_5^3 = 5^3 = 125$.

   (b) Quantos são menores do que 800?

   Resposta: Como os números devem ser menores do que 800, significa que o primeiro algarismo (centena) não pode começar nem com 8 nem com 9. Portanto, para esta posição, temos 3 possibilidades.

   Dada uma possibilidade para a primeira posição, para as 2 posições restantes (dezena e unidade) podemos colocar os algarismos $2, 3, 5, 8$ e 9 tomados 2 a 2. Como os algarismos podem estar repetidos, para estas duas posições temos $AR_5^2 = 5^2$ possibilidades.

   Então, pelo princípio multiplicativo, temos que a quantidade de números de 3 algarismos menores de 800 que podem ser formados com os números $2, 3, 5, 8$ e 9 é $3A_5^2 = 75$.

   (c) Quantos são múltiplos de 5?

   Resposta: Com os dígitos dados, os únicos números múltiplos de 5 são os que finalizam em 5. Portanto, restam duas posições (centenas e dezenas) para colocar os algarismos $2, 3, 5, 8$ e 9 tomados 2 a 2 que podem ser repetidos. Logo, os múltipos de 5 são $AR_5^2 = 5^2 = 25$.

   (d) Quantos são pares?

   Resposta: Os números pares são aqueles finalizados em 2 ou 8, ou seja temos 2 possibilidades para as unidades.

Seguindo o mesmo raciocínio do ítem anterior temos para as primeiras duas posições AR_5^2 possibilidades.

Então, pelo princípio multiplicativo, a quantidade de números pares é $2AR_5^2 = 50$.

(e) Quantos são ímpares?

Resposta: Os números ímpares são $3AR_5^2 = 75$.

2. Quantas são as palavras de 5 letras de um alfabeto de 26 letras nas quais a letra **A** figura mas não é a letra inicial da palavra?

Resposta: Definimos os seguintes conjuntos:

U é o conjunto dos anagramas de 5 letras de um alfabeto de 26 que não começam com a letra **A**;

B é o conjunto dos anagramas de 5 letras de um alfabeto de 26 que não contêm a letra **A**;

A é o conjunto dos anagramas de 5 letras de um alfabeto de 26 letras nas quais a letra **A** figura mas não é a letra inicial da palavra (a letra **A** pode aparacer em várias posições).

Devemos calcular $n(A)$. Observemos que $B \subseteq U$, $A \subseteq U$ e $A = U - B$, portanto $n(A) = n(U) - n(B)$.

Começamos calculando $n(U)$: como a letra inicial não pode ser **A**, para a primeira posição dos anagramas de U temos 25 modos. Para as restantes posições temos AR_{26}^4. Portanto, pelo princípio multiplicativo, resulta $n(U) = 25AR_{26}^4 = 25.26^4$.

Calculamos agora $n(B)$, como **A** não figura em nenhuma posição dos anagramas de B, resulta $n(B) = AR_{25}^5 = 25^5$.

Logo, $n(A) = 25.26^4 - 25^5$.

3. Quantos números de 3 e 4 algarismos maiores do que 300 podem ser formados com os algarismos $0, 1, 3, 5$ e 7?

   Resposta:

   3.1. Quantidade de números de 3 algarismos maiores do que 300 formados com $0, 1, 3, 5$ e 7:

   Observemos que para o primeiro dígito (centena) as possibilidades são $3, 5$ ou 7.

   Primeiro, consideramos os números que começam com 3. Temos 2 situações diferentes:

   (i) O segundo algarismo do número é 0. Então, as unidades podem ser $1, 3, 5$ ou 7, ou seja, temos 4 possibilidades.

   (ii) O segundo algarismo do número é diferente de 0. Neste caso o segundo algarismo pode ser $1, 3, 5$ ou 7 o que dá 4 possibilidades. Fixado o segundo algarismo para as unidades podemos selecionar dentre $0, 1, 3, 5$ e 7, ou seja, para as unidades temos 5 possibilidades. Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos $4.5 = 20$ números que começam com 3 e o segundo algarismo é diferente de 0.

   Portanto, pelo princípio aditivo, a quantidade de números que começam com 3 é $4 + 20 = 24$.

   Agora estudamos a quantidade de números de 3 algarismos maiores do que 300 que não começam com 3. Para a primeira posição temos 2 possibilidades (5 ou 7). Para as duas posições restantes temos $AR_5^2 = 5^2$ possibilidades. Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos $2AR_5^2 = 50$ modos diferentes para este caso.

   Logo, pelo princípio aditivo, concluimos que a quantidade de números de 3 algarismos maiores do que 300 é $24 + 50 = 74$.

   3.2. Quantidade de números de 4 algarismos formados com $0, 1, 3, 5$ e 7:

   Para a primeira posição temos 4 maneiras $(1, 3, 5$ ou $7)$. Fixado um número na primeira posição, temos $AR_5^3 = 5^3$ possibilidades, pois também devemos considerar o 0 e os números podem estar repetidos. Logo, neste caso, usando o princípio multiplicativo temos $4AR_5^3 = 500$ possibilidades.

Finalmente, pelo princípio aditivo, temos que a quantidade de números de 3 e 4 algarismos distintos e maiores do que 300 que podem ser formados com os algarismos $0, 1, 3, 5$ e 7 é $74+500 = 574$.

4. Quantos são os números de 5 algarismos na base 10:

   (a) nos quais o algarismo 2 figura?

   Resposta: O raciocínio é semelhante ao usado na questão 2, definimos os seguintes conjuntos:

   U é o conjunto dos números de 5 algarismos na base 10;

   B é o conjunto dos números de 5 algarismos na base 10 que não contêm o algarismo 2;

   A é o conjunto dos números de 5 algarismos na base 10 nos quais o algarismo 2 figura.

   Nesta parte vamos calcular $n(A)$ sabendo que $n(A) = n(U) - n(B)$. Temos que $n(U) = 9AR_{10}^4 = 9.10^4 = 90000$ e $n(B) = 8AR_9^4 = 8.9^4 = 52488$. Portanto, $n(A) = 37512$.

   (b) nos quais o algarismo 2 não figura?

   Resposta: Corresponde a $n(B) = 52488$ calculado no ítem anterior.

5. Com os algarismos de 1 a 9 quantos números constituídos de 3 algarismos pares e 4 algarismos ímpares podem ser formados se é permitida a repetição dos algarismos pares?

   Resposta:

   (i) Começamos selecionando 4 lugares dentre 7 para colocar os algarismos ímpares. O total de possibilidades é $C(7, 4)$.

   (ii) Para cada escolha de 4 posições, estudamos o número de possibilidades de colocar nesses lugares 4 algarismos ímpares sem repetição. Como os ímpares são $1, 3, 5, 7,$ e 9, temos $A(5, 4)$ formas diferentes.

(iii) Observemos que, fixado os lugares para os algarismos ímpares, ficam automaticamente definidas as 3 posições dos algarismos pares $(2, 4, 6, 8)$. Portanto, para cada colocação dos ímpares temos $AR(3, 4)$ maneiras de colocar os pares nas posições que restam pois é permitida a repetição.

De (i), (ii) e (iii) e do princípio multiplicativo, concluímos que a quantidade de números constituídos de 3 algarismos pares e de 4 algarismos ímpares que podem ser formados se é permitida a repetição dos algarismos pares é $C(7, 4)A(5, 4)AR(4, 3) = 268800$.

Notemos que podemos começar analisando os lugares e posibilidades para os algarismos pares.

6. Com as 5 letras a, b, c, d, e, quantos anagramas de 3 letras podem ser formados se:

   (a) as 3 letras são distintas?

   Resposta: Como temos de escolher anagramas de 3 letras distintas dentre 5, o número total corresponde a $A(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$.

   (b) pelo menos duas letras são idênticas?

   Resposta: Definamos os seguintes conjuntos:

   U é o conjunto dos anagramas de 3 letras formados com a, b, c, d, e;

   B é o conjunto dos anagramas de 3 letras diferentes formados com a, b, c, d, e;

   A é o conjunto dos anagramas de 3 letras que têm pleo menos 2 repetidas, formados com a, b, c, d, e.

   Queremos calcular $n(A)$. Como $A \subseteq U$, $B \subseteq U$ e $A = U - B$, resulta $n(A) = n(U) - n(B)$.

   Temos $n(U) = AR_5^3 = 5^3 = 125$ e $n(B) = A(5, 3) = 60$, logo, $n(A) = 125 - 60 = 65$.

7. Quantos números ímpares existem entre 100 e 999?

   (*Observação:* Lembre que estão excluídos os números 100 e 999)

   Resposta:

   Raciocínio usando arranjos com repetição:

   Consideramos os seguintes conjuntos:

   U é o conjunto dos números entre 100 e 999 incluídos 100 e 999;

   B é o conjunto dos números pares (divisíveis por 2) entre 100 e 999 incluído 100;

   A é o conjunto dos números ímpares entre 100 e 999 incluído 999.

   O nosso problema consiste em calcular $n(A) - 1$ pois não podemos contar o número ímpar 999 que está incluído em $n(A)$.

   Novamente temos que $n(A) = n(U) - n(B)$. Temos que $n(U) = 9AR^2_{10} = 900$ pois na posição das centenas temos 9 possibilidades e 10 para as dezenas e unidades.

   Os números pares entre 100 e 999 incluído 100 é $9.10.5 = 450$ pois temos 9 possibilidades para o primeiro dígito (centenas), 10 para o segundo e 5 para o terceiro $(0, 2, 4, 6, 8)$.

   Logo, a quantidade de números ímpares que existem entre 100 e 999 exluído o 999 é $n(A) - 1 = n(U) - n(B) - 1 = 900 - 450 - 1 = 449$.

   Raciocínio sem usar arranjos com repetição:

   Os números ímpares finalizam em $1, 3, 5, 7$ ou 9. Os números podem começar de 9 maneiras $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ e para as dezenas temos 10 possibilidades pois incluímos o 0. Portanto, pelo princípio multiplicativo, a quantidade de números ímpares entre 100 e 999 incluído 999 é $9.10.5 = 450$. Como devemos excluir o 999, temos que os números ímpares existem entre 100 e 999 são $450 - 1 = 449$.

8. Considere uma máquina *decimal* cuja palavra tem 16 posições, 12 para armazenar a mantissa normalizada de um número ($t = 12$), 2 para a característica ($r = 2$) e os restantes são para os sinais do número e da

potência.

(a) Quantos números são armazenados exatamente nesta máquina?

Resposta: O número de possibilidades para escolher o sinal do número e da característica é $AR(2,2) = 2^2$ pois temos 2 binários, que podem estar reptidos, para colocar em 2 posições (sinal do número e sinal da característica).

O total de seleções possíveis para a característica (2 posições e 10 dígitos para colocar em cada uma) corresponde a $AR(10,2) = 10^2$.

Para calcular as possibilidades para a mantissa normalizada, lembremos que ela deve começar com um dígito diferente de 0, logo para a primeira posição temos 9 possibilidades. Para as restantes 11 posições temos $AR(10,11) = 10^{11}$ possibilidades. Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos $9AR(10,11) = 9.10^{11}$ maneiras diferentes de armazenar as mantissas.

Logo, pelo princípio multiplicativo, resulta que o total de números armazenados exatamente nesta máquina é $4.9.10^2 10^{11} = 36.10^{13}$.

(b) Considere um computador *binário* que tem 6 bits para armazenar a característica de um número binário normalizado. Determine o tamanho mínimo que deve ter a mantissa da palavra de maneira tal que a quantidade de números armazenados exatamente nesta máquina seja maior ou igual ao obtido no ítem (a).

Resposta: Seja t o tamanho da mantissa normalizada. Como o primeiro bit da mantissa normalizada é 1, temos $t-1$ (tamanho da mantissa restante) $+2$ (sinal do número e sinal da característica) $+6$ (número de bits da característica) $= t+7$ posições para colocar 0 ou 1. Portanto, a quantidade de números armazenados exatamente nesta máquina *binária* é $AR(2, t+7) = 2^{t+7}$. Queremos calcular o mínimo $t \in$ N tal que $2^{t+7} \geqq 36.10^{13}$. Portanto deve ser $n \in \mathbb{N}$ e

$$(t+7)log2 \geqq log36 + 13log10,$$

ou seja,

$$t \geqq \frac{log36 + 13}{log2} - 7$$

quer dizer, $t \geqq 41,3549$...... Como temos a restrição $n \in \mathbb{N}$ e procuramos o mínimo t que verifica a desigualdade acima, deve ser $t = 42$.

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da EP da Aula 12

Observações:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.
2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo antes de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.
3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

---

1. De quantas maneiras podemos distribuir 6 laranjas entre 2 pessoas?

   Resposta: Denominemos as pessoas de a e b. O total de distribuições é igual ao número de soluções inteiras e não negativas de $a+b=6$. Portanto, temos $CR_2^6 = CR(2,6) = C(6+2-1,6) = C(7,6) = 7$.

2. Queremos comprar 12 docinhos. De quantas maneiras os podemos escolher se têm 8 variedades diferentes de docinhos?

   ***R*esposta:** Existem 8 tipos de doce, seja x_i o número de docinhos do tipo i que foram comprados para $1 \leq i \leq 8$.

   Logo,

   $$\begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 & = & 12 \\ x_i \geq 0, \ \forall \ \ 1 \leq i \leq 8, & & \end{array}$$

   Portanto, podemos comprar os doces de $CR_8^{12} = C(8 + 12 - 1, 12) = C(19, 12) = \frac{19!}{12!7!}$ formas distintas.

3. De quantas maneiras podemos colocar 20 bolas da mesma cor em 5 caixas de modo que nenhuma caixa fique vazia?

   ***R*esposta:** Seja x_i o número de bolas na caixa i, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Este problema equivale a calcular o número de soluções inteiras não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$ com $x_i > 0$, ou seja, $x_i \geq 1$ para todo $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Fazendo $x_i^* = x_i - 1$ e substituindo na equação, temos $(x_1^* + 1) + (x_2^* + 1) + (x_3^* + 1) + (x_4^* + 1) + (x_5^* + 1) = 20$ com $x_i^* \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq 5$.
   Portanto, o nosso problema é equivalente a encontrar o número de soluções inteiras não negativas de $x_1^* + x_2^* + x_3^* + x_4^* + x_5^* = 15$ com $x_i^* \geq 0$ para todo $i = 1, 2, 3, 4, 5$ que corresponde a $CR(5, 15) = C(19, 15) = 3876$.

4. Quantas são as soluções inteiras não negativas de $x + y + z < 10$?

   ***R*esposta:** Note que o número de soluções inteiras não negativas deste problema é igual ao número de soluções inteiras não negativas de $x + y + z \leq 9$, e por sua vez esta inequação tem o mesmo número de soluções inteiras não negativas de $x + y + z + u = 9$.

   O total de soluções inteiras e não negativas de $x + y + z + u = 9$ é $CR_4^9 = C(4 + 9 - 1, 9) = C(12, 9) = 220$.

   *O*bservação: Tente resolver a questão usando outro raciocínio.

5. Quantas são as soluções inteiras positivas de $x + y + z < 10$?

   ***R*esposta:** O problema é equivalente a encontrar as soluções inteiras de $x + y + z < 10$ com $x \geq 1$, $y \geq 1$ e $z \geq 1$. Fazendo as seguintes transformações de variáveis: $x^* = x - 1 \geq 0$, $y^* = y - 1 \geq 0$ e $z^* = z - 1 \geq 0$, temos $x^* + y^* + z^* < 7$. Procedendo como na questão anterior, devemos calcular o número de soluções inteiras não negativas de $x^* + y^* + z^* + u = 6$ que é $CR_4^6 = C(4 + 6 - 1, 6) = C(9, 6) = 84$.

6. Quantos números inteiros entre 1 e 100000 inclusive têm soma dos algarismos igual a 6?
   *O*bservação: Ao número 1 associe a seqüência 00001.

   ***R*esposta:** Primeiro notemos que a soma dos algarismos de 100000 não é 6, logo consideraremos números entre 1 e 99999, e convencionaremos que qualquer número será representado por uma seqüência de 5 dígitos.

   Representaremos um número qualquer por $abcde$. Devemos ter $a + b + c + d + e = 6$, com a, b, c, d, e inteiros não negativos. Logo, o total de números é $CR_5^6 = C(5 + 6 - 1, 6) = C(10, 6) = 210$.

7. Quantos números inteiros entre 1 e 1000 inclusive têm a soma dos dígitos menor que 7?

   ***R*esposta:** Observemos que o número 1000 tem a soma dos dígitos menor que 7.

   Por separado, analisaremos a quantidade de números inteiros entre 1 e 999 inclusive que têm a soma dos dígitos menor que 7.
   Representaremos os números por seqüências de 3 dígitos, abc, e procederemos agora como no ítem anterior. O total de números números inteiros entre 1 e 999 inclusive que têm a soma dos dígitos menor que 7 é igual ao número de soluções inteiras não negativas de $a+b+c \leq 6$, que é igual ao número de soluções inteiras não negativas de $a+b+c+u = 6$ dado por $CR_4^6 = C(4 + 6 - 1, 6) = C(9, 6) = 84$.

   Portanto, pelo princípio aditivo, temos que a quantidade de números inteiros entre 1 e 1000 inclusive que têm a soma dos dígitos menor que 7 é $1 + 84 = 85$.

8. Quantas soluções inteiras existem para a equação $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ sendo:

(i) $1 \leq x_1 \leq 6$, $x_i \geq 0$ para $i=2,3,4$.

Resposta: Consideramos o conjunto de 4-uplas ordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4), com $x_i \in \mathbb{Z}$ para $i = 1, 2, 3, 4$ que é $\mathbb{Z}^4 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e definimos:

$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}^4 \mid \sum_{i=1}^{4} x_i = 20, x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4\}$,
$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid 1 \leq x_1 \leq 6\}$,
$B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid x_1 \geq 1\}$,
$C = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid x_1 \geq 7\}$.

O conjunto U é o conjunto universo. Observemos que $A = B - C$ e $C \subseteq B$. Portanto, $n(A) = n(B) - n(C)$ (ver exercício 1 da lista correspondente à aula 3). Para resolver nosso problema, que corresponde a calcular $n(A)$, devemos encontrar $n(B)$ e $n(C)$.

Obtenção de $n(B)$: Definindo $x_1^* = x_1 - 1$ temos que $n(B)$ é o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1^* + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ com $x_1^* \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ e $x_4 \geq 0$, que corresponde a $CR_4^{19} = C(19+4-1, 19) = C(22, 19) = 1540$. Logo, $n(B) = 1540$.

Obtenção de $n(C)$: Considerando $y_1 = x_1 - 7$ obtemos $n(C)$ como sendo o número de soluções inteiras não negativas da equação $y_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13$ com $y_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ e $x_4 \geq 0$, dado por $CR_4^{13} = C(13+4-1, 13) = C(16, 13) = 560$. Logo, $n(C) = 560$.

Portanto, o número de soluções inteiras não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ com $1 \leq x_1 \leq 6$, $x_i \geq 0$ para $i = 2, 3, 4$ é dado por $n(A) = n(B) - n(C) = 1540 - 560 = 980$.

(ii) $1 \leq x_1 \leq 6$, $1 \leq x_2 \leq 7$, $x_i \geq 0$ para $i = 3, 4$.

Resposta: Consideramos o conjunto universo U da parte (i). Definimos os seguintes conjuntos:

$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid 1 \leq x_1 \leq 6,\ 1 \leq x_2 \leq 7\}$
$B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 1\}$,
$C_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid x_1 \geq 7,\ x_2 \geq 1\}$,
$C_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid x_1 \geq 1, x_2 \geq 8\}$.

Notemos que $A = B - (C_1 \cup C_2)$ e $C_1 \cup C_2 \subseteq B$. Portanto, o número de elementos de A, que é o que queremos calcular, verifica que $n(A) = n(B) - n(C_1 \cup C_2)$.

Obtenção de $n(B)$: Temos que $n(B)$ é igual ao número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1^* + x_2^* + x_3 + x_4 = 18$ com $x_1^* = x_1 - 1 \geq 0$, $x_2^* = x_2 - 1 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ e $x_4 \geq 0$, que corresponde a $CR_4^{18} = C(18 + 4 - 1, 18) = C(21, 18) = 1330$. Isto é, $n(B) = 1330$.
Obtenção de $n(C_1 \cup C_2)$: Pelo princípio de inclusão e exclusão, sabemos que:

$$n(C_1 \cup C_2) = n(C_1) + n(C_2) - n(C_1 \cap C_2).$$

O número de elementos de $n(C_1)$ é igual ao número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1^* + x_2^* + x_3 + x_4 = 12$ com $x_1^* = x_1 - 7 \geq 0$, $x_2^* = x_2 - 1 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ e $x_4 \geq 0$, que é dado por $CR_4^{12} = C(12 + 4 - 1, 12) = C(15, 12) = 455$. Isto é, $n(C_1) = 445$.
Usando o mesmo raciocínio para calcular $n(C_2)$, obtemos que $n(C_2) = CR_4^{11} = C(11 + 4 - 1, 11) = C(14, 11) = 364$.
Como $n(C_1 \cap C_2)$ corresponde às soluções inteiras não negativas de $x_1^* + x_2^* + x_3 + x_4 = 5$ com $x_1^* = x_1 - 7 \geq 0$, $x_2^* = x_2 - 8 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ e $x_4 \geq 0$, resulta $n(C_1 \cap C_2) = CR_4^5 = C(8, 5) = 56$.
Logo,$n(C_1 \cup C_2) = 455 + 364 - 56 = 763$.
Portanto, $n(A) = 1330 - 763 = 567$ que é o queriamos calcular.

(iii) $1 \leq x_1 \leq 6$, $1 \leq x_2 \leq 7$, $1 \leq x_3 \leq 8$, $1 \leq x_4 \leq 9$.

Resposta: Para o desenvolvimento deste ítem é usado o mesmo raciocínio da parte (ii).
Consideramos o conjunto universo da parte (i). Definimos os seguintes conjuntos:
$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid 1 \leq x_1 \leq 6, 1 \leq x_2 \leq 7, 1 \leq x_3 \leq 8, 1 \leq$

$x_4 \leq 9\}$,
$B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 1, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1\}$,
$C_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid x_1 \geq 7,\ x_2 \geq 1, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1\}$,
$C_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid x_1 \geq 1, x_2 \geq 8, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1\}$,
$C_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_3 \geq 9, x_4 \geq 1\}$,
$C_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_3 \geq 1, x_4 \geq 10\}$.

Temos que $A = B - (C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4)$, sendo $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \subseteq B$.
Portanto, $n(A) = n(B) - n(C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4)$.
Pelo princípio de inclusão e exlusão temos que:
$n(C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4) = n(C_1) + n(C_2) + n(C_3) + n(C_4) -$
$[n(C_1 \cap C_2) + n(C_1 \cap C_3) + n(C_1 \cap C_4) + n(C_2 \cap C_3) +$
$n(C_2 \cap C_4) + n(C_3 \cap C_4)] +$
$n(C_1 \cup C_2 \cup C_3) + n(C_1 \cup C_2 \cup C_4) + n(C_2 \cup C_3 \cup C_4) + n(C_1 \cup C_3 \cup C_4) -$
$n(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4)$

Logo, resta calcular cada somando da igualdade acima. Continue com o desenvolvimento.

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da EP da Aula 13

Observações:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.

2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo antes de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.

3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

---

1. Prove, usando um argumento combinatório semelhante ao usado na aula 13 para provar a relação de Stifel, que:

$$C_{n+2}^{p+2} = C_n^p + 2C_n^{p+1} + C_n^{p+2}$$

Resposta: Consideremos $n+2$ pessoas, entre as quais Pedro e João. O número de comissões com $p+2$ dessas pessoas é igual a C_{n+2}^{p+2}. Essas comissões dividem-se em três categorias:

i) comissões das quais Pedro e João participam; essas são em número de C_n^p, pois para formá-las basta escolher p companheiros para Pedro e João dentre as demais n pessoas;

ii) comissões das quais participa um só dentre Pedro e João; essas são em número de $2C_n^{p+1}$, pois para formá-las basta escolher um dentre Pedro e João (2 possibilidades) e $p+1$ companheiros para o escolhido, dentre as demais n pessoas (C_n^{p+1} possibilidades).

iii) comissões das quais nem Pedro nem João participam; essas são em número de C_n^{p+2}, pois para formá-las basta escolher $p+2$ pessoas dentre as demais n pessoas.

Portanto, $C_{n+2}^{p+2} = C_n^p + 2C_n^{p+1} + C_n^{p+2}$.

2. Usando a relação de Stifel, escreva a oitava linha do triângulo de Pascal a partir da sétima linha dada na aula 13.

Resposta:

Temos pela sétima linha dada na aula 13, pela relação de Stifel ($C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r$) e pela condição de Fronteira ($C_n^0 = C_n^n = 1$) que:

$$\begin{array}{lccccccccc} n=7 & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & \\ n=8 & 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 \end{array}$$

3. Se o conjunto A possui 512 subconjuntos, qual é o número de elementos de A?

Resposta: Pelo teorema das linhas, temos que:

$$\underbrace{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n}_{512} = 2^n$$
$$512 = 2^n$$
$$2^9 = 2^n$$
$$\boxed{n = 9}$$

4. Quantos coquetéis (misturas de duas ou mais bebidas) podem ser feitos a partir de 7 ingredientes distintos?

   Resposta: Pelo teorema das linhas, temos:

   $$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

   Se $n = 7$ e misturas de 2 ou mais bebidas, então:

   $$C_7^0 + C_7^1 + \underbrace{C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7}_{x} = 2^7$$

   $$\begin{aligned} x &= 2^7 - C_7^0 - C_7^1 \\ x &= 128 - 1 - 7 \\ x &= 120 \end{aligned}$$

5. Prove que:

   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1)$$

   .

   Resposta:

$$
\begin{array}{rcl}
\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} & = & \sum_{k=0}^{n} \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{(k+1)} & = \\
& = & \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)k!(n-k)!} & = \\
& = & \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} & = \\
& = & \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \cdot \frac{(n+1)}{(n+1)} & = \\
& = & \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \cdot \frac{(n+1)}{(n+1)} & = \\
& = & \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} & = \\
& = & \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1} & = \\
& = & \frac{1}{n+1} \left[C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+1}^{n+1} \right] & = \\
& = & \frac{1}{n+1} \left[C_{n+1}^0 - C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + \ldots + C_{n+1}^{n+1} \right] & = \\
& = & \frac{1}{n+1} \left[C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + \ldots + C_{n+1}^{n+1} - C_{n+1}^0 \right] & = \\
& = & \frac{1}{n+1} \left[2^{n+1} - 1 \right] &
\end{array}
$$

6. Calcule:

$$CR_n^0 + CR_n^1 + CR_n^2 + \ldots + CR_n^p.$$

Resposta: Temos que $CR_n^r = C_{n+r-1}^r$. Logo:

$$
\begin{array}{rcl}
& CR_n^0 + CR_n^1 + \ldots + CR_n^p & = \\
= & \underbrace{C_{n-1}^0 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+p-1}^p}_{\textit{Teorema das diagonais, quando } r=p} & = \\
= & C_{n-1+p+1}^p & = \\
= & C_{n+p}^p &
\end{array}
$$

7. Prove que:

$$\sum_{k=0}^{m} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} n-k \\ m-k \end{array} \right) = 2^m \left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right), (m < n)$$

Resposta:

$$
\begin{array}{lcr}
 & \sum_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-k \\ m-k \end{pmatrix} & = \\
= & \sum_{k=0}^{m} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-k-m+k)!} & = \\
= & \sum_{k=0}^{m} \frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!} & = \\
= & \frac{m!}{m!} \sum_{k=0}^{m} \frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!} & = \\
= & \sum_{k=0}^{m} \frac{m!n!}{k!(m-k)!m!(n-m)!} & = \\
= & \frac{n!}{m!(n-m)!} \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} & = \\
= & \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix} \right] & =
\end{array}
$$

Pelo teorema das linhas, temos:

$$
\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} 2^m, n > m
$$

8. Usando o teorema das colunas prove que:

   (a)
   $$
   \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}
   $$

   Resposta:

$$
\begin{array}{rccr}
\sum_{k=1}^{n} k & = & \sum_{k=1}^{n} k \frac{(k-1)!}{(k-1)!} & = \\
 & = & \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{1!(k-1)!} & = \\
 & = & \sum_{k=1}^{n} C_k^1 & = \\
 & = & \underbrace{C_1^1 + C_2^1 + \ldots + C_n^1}_{\textit{Pelo teorema das colunas, quando } r=1} & = \\
 & = & C_{n+1}^2 & = \\
 & = & \frac{(n+1)!}{2!(n+1-2)!} & = \\
 & = & \frac{(n+1)!}{2(n-1)!} & = \\
 & = & \frac{n(n+1)(n-1)!}{2(n-1)!} & = \\
 & = & \frac{n(n+1)}{2} &
\end{array}
$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Resposta:

$$\begin{array}{rcll}
\sum_{k=1}^{n} k(k+1) & = & \sum_{k=1}^{n}(k+1)k\frac{(k-1)!}{(k-1)!} & = \\
& = & \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)!}{(k-1)!} & = \\
& = & \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)!}{(k-1)!}\frac{2!}{2!} & = \\
& = & 2!\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)!}{2!(k-1)!} & = \\
& = & 2!\sum_{k=1}^{n} C_{k+1}^{2} & = \\
& = & 2!(\underbrace{C_2^2 + C_3^2 + \ldots + C_{n+1}^2}_{\text{Pelo teorema das colunas, quando } r=2}) & = \\
& = & 2!\left(C_{n+1}^{3} + C_{n+1}^{2}\right) & = \\
& = & 2!\left(\frac{(n+1)!}{3!(n+1-3)!} + \frac{(n+1)!}{2!(n+1-2)!}\right) & = \\
& = & 2!\left(\frac{(n+1)!}{3!(n-2)!} + \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}\right) & = \\
& = & 2!\frac{[(n-1)(n+1)!+3(n+1)!]}{3!(n-1)!} & = \\
& = & \frac{2!(n-1)![(n-1)(n+1)n+3(n+1)n]}{3!(n-1)!} & = \\
& = & \frac{[(n-1)(n+1)n+3(n+1)n]}{3} & = \\
& = & \frac{n(n+1)[n-1+3]}{3} & = \\
& = & \frac{n(n+1)(n+2)}{3} &
\end{array}$$

9. Prove que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Resposta: Temos que:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

Observe que:

$$
\begin{aligned}
k^3 &= ak(k+1)(k+2) + bk(k+1) + ck \\
&= a(k^2+k)(k+2) + b(k^2+k) + ck \\
&= a(k^3+3k^2+2k) + b(k^2+k) + ck \\
&= ak^3 + 3ak^2 + 2ak + bk^2 + bk + ck \\
&= ak^3 + (3a+b)k^2 + (2a+b+c)k
\end{aligned}
$$

Logo, temos que:

$$\boxed{a=1}$$

$$
\begin{gathered}
3a+b=0 \\
3.1+b=0 \\
\boxed{b=-3}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
2a+b+c=0 \\
2.1+(-3)+c=0 \\
-1+c=0 \\
\boxed{c=1}
\end{gathered}
$$

Temos então que:

$$1^3+2^3+\ldots+n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) - 3k(k+1) + k$$

Fazendo à parte temos:

$$
\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\frac{(k-1)!}{(k-1)!} \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+2)!}{(k-1)!} \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+2)!}{(k-1)!}.\frac{3!}{3!} \\
&= \textstyle 3!\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+2)!}{(k-1)!3!} \\
&= \textstyle 3!\sum_{k=1}^{n} C_{k+2}^{3} \quad = \\
&= 3!\left[C_3^3+\ldots+C_{n+2}^3\right] \quad = \\
&= 3!C_{n+3}^{4} \quad = \\
&= 3!\tfrac{(n+3)!}{4!(n-1)!} \quad = \\
&= \tfrac{3!(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)!}{4.3!(n-1)!} \quad = \\
&= \tfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}
\end{aligned}
$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Temos então que:

$$\begin{array}{rcl}
1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 & = & \sum_{k=1}^{n} k^3 & = \\
& = & \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) - 3k(k+1) + k & = \\
& = & \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) + \sum_{k=1}^{n}(-3)k(k+1) + \sum_{k=1}^{n} k & = \\
& = & \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) - 3\sum_{k=1}^{n} k(k+1) + \sum_{k=1}^{n} k & = \\
& = & \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} - 3\frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} & = \\
& = & \frac{3n(n+1)(n+2)(n+3) - 12n(n+1)(n+2) + 6n(n+1)}{12} & = \\
& = & \frac{n(n+1)[3(n+2)(n+3) - 12(n+2) + 6]}{12} & = \\
& = & \frac{n(n+1)\left[3(n^2+5n+6) - 12n - 24 + 6\right]}{12} & = \\
& = & \frac{n(n+1)\left[3n^2+15n+18-12n-18\right]}{12} & = \\
& = & \frac{n(n+1)\left[3n^2+3n\right]}{12} & = \\
& = & \frac{n(n+1)3(n^2+n)}{12} & = \\
& = & \frac{n(n+1)n(n+1)}{4} & = \\
& = & \frac{n^2(n+1)^2}{4}
\end{array}$$

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da EP da Aula 14

Observações:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.

2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo antes de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.

3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

---

1. Desenvolver as potências seguintes:

   Observação: Nos ítens abaixo estaremos usando o Teorema Binomial: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i$, onde a e b são reais e n natural.

(a) $(\frac{x^3}{2}+1)^5$

Resposta: Desenvolvendo:
$(\frac{x^3}{2}+1)^5 = \sum_{i=0}^{5} C_5^i (\frac{x^3}{2})^{5-i} 1^i = \sum_{i=0}^{5} C_5^i \frac{x^{15-3i}}{2^{5-i}} =$
$C_5^0 \frac{x^{15}}{2^5} + C_5^1 \frac{x^{12}}{2^4} + C_5^2 \frac{x^9}{2^3} + C_5^3 \frac{x^6}{2^2} + C_5^4 \frac{x^3}{2} + C_5^5 =$
$\frac{x^{15}}{2^5} + 5\frac{x^{12}}{2^4} + 10\frac{x^9}{2^3} + 10\frac{x^6}{2^2} + 5\frac{x^3}{2} + 1 =$
$\frac{1}{32}x^{15} + \frac{5}{16}x^{12} + \frac{5}{4}x^9 + \frac{5}{2}x^6 + \frac{5}{2}x^3 + 1.$

(b) $(2y+3x)^4$

Resposta: Desenvolvendo:
$(2y+3x)^4 = \sum_{i=0}^{4} C_4^i (2y)^{4-i}(3x)^i = \sum_{i=0}^{4} \frac{4!}{i!(4-i)!} 2^{4-i} 3^i y^{4-i} x^i =$
$16y^4 + 96y^3x + 216y^2x^2 + 216yx^3 + 81x^4.$

(c) $(2a-3b)^3$

Resposta: Desenvolvendo:
$(2a-3b)^3 = \sum_{i=0}^{3} C_3^i (2a)^{3-i}(-3b)^i = 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3.$

(d) $(\frac{1}{y}-y)^6$

Resposta: Desenvolvendo:
$(\frac{1}{y}-y)^6 = \sum_{i=0}^{6} C_6^i (\frac{1}{y})^{6-i}(-y)^i = \sum_{i=0}^{6} \frac{6!}{i!(6-i)!}(-1)^i y^{2i-6}.$

2. Considerando $(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{n-k} v^k$, calcule o sexto termo das potências abaixo:

(a) $(\frac{a}{b}+\frac{b}{a^2})^{17}$

Resposta: O termo genérico do desenvolvimento é dado por:
$T_{k+1} = \binom{17}{k}(\frac{a}{b})^{17-k}(\frac{b}{a^2})^k$, $k = 0, 1, \ldots, 17$.
Como queremos o sexto termo, teremos no nosso caso $k = 5$, isto é: $T_6 = \binom{17}{5}(\frac{a}{b})^{17-5}(\frac{b}{a^2})^5 = \frac{17!}{5!12!}\frac{a^{12}}{b^{12}}\frac{b^5}{a^{10}} = \frac{17!}{5!12!}\frac{a^2}{b^7}.$

(b) $(1-\frac{1}{b})^7$

Resposta: $T_6 = \binom{7}{5}(1)^{7-5}(-\frac{1}{b})^5 = -\frac{7!}{5!2!}\frac{1}{b^5} = -\frac{21}{b^5}$.

(c) $(3x^2y - \frac{1}{3})^9$

Resposta: $T_6 = -\frac{9!}{5!4!}\frac{1}{3}x^8y^4 = -42x^8y^4$.

(d) $(2x^3 - \frac{3}{x^2})^{12}$

Resposta: $T_6 = -\frac{12}{5!7!}2^7 3^5 x^{11}$.

3. Calcular a soma dos coeficientes de todos os termos do desenvolvimento de $(x^3 - \frac{1}{2x})^{12}$.

Resposta: Sabemos que em um polinômio em x :
$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$ temos
$P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$,
ou seja, a soma dos coeficientes de um polinômio em x é o valor numérico do polinômio para $x = 1$.
Logo para $P(x) = (x^3 - \frac{1}{2x})^{12}$, a soma dos seus coeficientes é dada por $P(1) = (1^3 - \frac{1}{2.1})^{12} = (\frac{1}{2})^{12}$.

4. Calcular o termo independente de x nas potências seguintes:

(a) $(x^2 + \frac{1}{x^2})^6$

Resposta: O termo genérico do desenvolvimento é dado por:
$T_{k+1} = \binom{6}{k}(x^2)^{6-k}(\frac{1}{x^2})^k = \binom{6}{k}x^{12-4k}$
Para o termo ser independente de x o expoente de x deve ser zero, ou seja, $12 - 4k = 0$, logo $k = 3$.
Então o termo independente de x é: $T_4 = \binom{6}{3}x^0 = \frac{6!}{3!3!} = 20$.

(b) $(x^2 + \frac{1}{x})^9$

Resposta: o termo independente de x é: $T_7 = \frac{9!}{6!3!} = 84$.

(c) $(x^2+\frac{1}{x^2})^8(x^2-\frac{1}{x^2})^8$

Resposta: Sabemos que $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
Reescrevendo:
$(x^2+\frac{1}{x^2})^8(x^2-\frac{1}{x^2})^8= [(x^2+\frac{1}{x^2})(x^2-\frac{1}{x^2})]^8=(x^4-\frac{1}{x^4})^8$
O termo genérico do desenvolvimento é então dado por:
$T_{k+1}=\binom{8}{k}(x^4)^{8-k}(-\frac{1}{x^4})^k=\binom{8}{k}(x^{32-4k}(-1)^k\frac{1}{x^{4k}}=\binom{8}{k}(-1)^kx^{32-8k}$
Para o termo ser independente de x o expoente de x deve ser zero, ou seja, $32-8k=0$, logo $k=4$.
Então o termo independente de x é: $T_5=\binom{8}{4}(-1)^4==\frac{8!}{4!4!}=70$.

5. Prove, a partir do binômio de Newton, que para $n\geq 2$ temos $(1+\frac{1}{n})^n>2$

   Resposta: Temos pelo binômio de Newton que:

   $(1+\frac{1}{n})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{(n-k)}(\frac{1}{n})^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}+\ldots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$
   Como $\binom{n}{0}=1$, $\binom{n}{1}\frac{1}{n}=n\frac{1}{n}=1$ e $\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}+\ldots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}>0$
   Então segue que $(1+\frac{1}{n})^n=1+1+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}+\ldots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}>2$.

6. Explicar porque não existe termo independente de x no desenvolvimento de $(x+\frac{1}{x})^{2n+1}$.

   Resposta: O termo genérico do desenvolvimento é dado por:
   $T_{k+1}=\binom{2n+1}{k}(x^{2n+1-k})(\frac{1}{x})^k=\binom{2n+1}{k}x^{2n+1-2k}$
   Para o termo ser independente de x o expoente de x deve ser zero, ou seja, $2n+1-2k=0$. Mas isso implica em que $2k=2n+1$. Isso é impossível: não podemos ter um número par igual a um número ímpar.

7. Calcule 11^{14} usando o Teorema Binomial.

   Resposta: Usando o Teorema Binomial temos:
   $11^{14}=(1+10)^{14}=\sum_{k=0}^{14}C_{14}^{k}1^{14-k}10^k=C_{14}^{0}10^0+C_{14}^{1}10^1+C_{14}^{2}10^2+\ldots+C_{14}^{14}10^{14}$.

8. Mostre que:
$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Resposta: Basta fazermos $a = b = 1$ na fórmula do binômio de Newton:
$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$,
ou seja:
$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$.

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da EP da Aula 15

Observações:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.
2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo antes de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.
3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

---

1. Uma torre de Hanoi dupla contém $2n$ discos de n tamanhos diferentes, dois de cada tamanho. As regras de movimentação dos discos são as mesmas: um disco de cada vez e nunca colocar um disco sobre outro menor.

Para determinar o número de movimentos que são necessários para transferir a torre dupla de um eixo para outro, supondo que os discos do mesmo tamanho sejam idênticos, siga os seguintes passos:

(a) Monte a relação de recorrência.

***R*esposta:** Seja $T(n)$ o número de movimentos necessários para deslocar uma torre de Hanoi com $2n$ discos de n tamanhos diferentes, dois de cada tamanho.

Quando $n = 1$, o número de movimentos necessários é $T(1) = 2$. Para valores maiores de n, é preciso inicialmente mover os $2(n-1)$ blocos menores (gastando $T(n-1)$ movimentos e trocando a ordem relativa dos blocos de mesmo tamanho) mover os dois maiores (2 movimentos) e depois transferir os $2(n-1)$ blocos menores para cima dos maiores (gastando $T(n-1)$ movimentos e trocando a ordem novamente). Portanto $T(1) = 2$ e $T(n) = 2T(n-1) + 2$, para $n \geq 2$.

$$\begin{cases} T(n) &= 2T(n-1) + 2 \text{ , para } n \geq 2. \\ T(1) &= 2 \end{cases}$$

(b) Resolva a relação de recorrência pelo método de substituição.

***R*esposta:**

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n-1) + 2 \\ &= 2[2T(n-2) + 2] + 2 \\ &= 2^2T(n-2) + 2^2 + 2 \\ &= 2^2[2T(n-3) + 2] + 2^2 + 2 \\ &= 2^3T(n-3) + 2^3 + 2^2 + 2 \end{aligned}$$

Logo, $T(n) = 2^iT(n-i) + \sum_{k=1}^{i} 2^k$.

Tomando $i = n-1$ temos:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2^{n-1}T(1) + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \\ &= 2^{n-1}.2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \end{aligned}$$

Como $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} =^{\text{PG}} 2^n - 1$

Logo, $2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 2$.

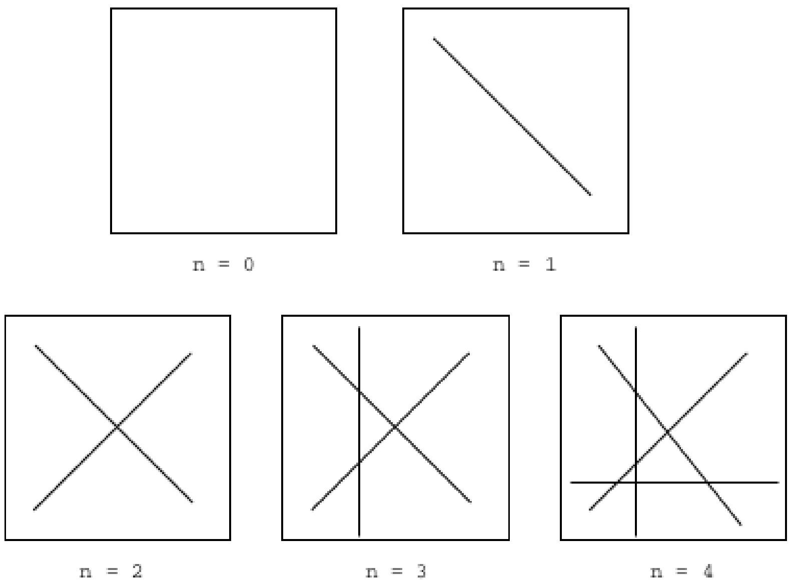
Portanto,

$$\begin{aligned} T(n) &= 2^n + 2^n - 2 \\ &= 2^{n+1} - 2 \end{aligned}$$

2. Seja a_n o número de regiões ilimitadas em que um plano é dividido por n retas tais que a interseção de qualquer subconjunto de k retas ($k \geq 2$) só é diferente de vazio se $k = 2$. A relação de recorrência correspondente é

$$a_n = a_{n-1} + 2 \text{ com } a_0 = 1, a_1 = 2.$$

(a) Ilustre o problema para $n = 0, 1, 2, 3, 4$.



(b) Resolva a relação de recorrência para a_n.

***R*esposta:**

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2 \\ &= [a_{n-2} + 2] + 2 \\ &= a_{n-2} + 2 + 2 \\ &= a_{n-3} + 2 + 2 + 2 \\ &= a_{n-i} + 2i \end{aligned}$$

Logo, tomando $i = n - 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + 2(n-1) \\ &= 2 + 2(n-1) \\ &= 2n \end{aligned}$$

Portanto $a_n = 2n$.

3. Considere a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2a_{n-2} \text{ , para } n \geq 3 \\ & a_1 = 1, a_2 = 3 \end{aligned}$$

Verifique, usando indução, que a correspondente fórmula fechada é:

$$a_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}2^n$$

***R*esposta:**

(i) **Base de indução.**

$P(1)$: $a_1 = 1 = \frac{-1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}(-1)^1 + \frac{2}{3}2^1$;

$P(2)$: $a_2 = 3 = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = \frac{1}{3}(-1)^2 + \frac{2}{3}2^2$.

Logo $P(1)$ e $P(2)$ são válidas.

(ii) **Hipótese de indução.**

Suponha que $P(k)$ é válida para todo $i \leq k$: $a_i = \frac{1}{3}(-1)^i + \frac{2}{3}2^i$.

(iii) **Passo indutivo.**

Devemos provar que $a_{k+1} = \frac{1}{3}(-1)^{k+1} + \frac{2}{3}2^{k+1}$.

Desenvolvendo,

$$\begin{array}{rcl} a_{k+1} & = & a_{(k+1)-1} + 2a_{(k+1)-2} \\ & = & a_k + 2a_{k-1} \\ \text{(pela HI, i = k, i = k - 1)} & = & (\frac{1}{3}(-1)^k + \frac{2}{3}2^k) + 2(\frac{1}{3}(-1)^{k-1} + \frac{2}{3}2^{k-1}) \\ & = & (\frac{1}{3}(-1)^k + \frac{2}{3}(-1)^{k-1}) + \frac{2}{3}2^k + \frac{2}{3}2^k \\ & = & \frac{1}{3}(-1)^{k-1}(-1+2) + \frac{2}{3}2^{k+1} \\ & = & \frac{1}{3}(-1)^{k-1} + \frac{2}{3}2^{k+1} \\ & = & \frac{1}{3}(-1)^2(-1)^{k-1} + \frac{2}{3}2^{k+1} \\ & = & \frac{1}{3}(-1)^{k+1} + \frac{2}{3}2^{k+1} \end{array}$$

Então, pelo princípio de indução forte, resulta $a_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}2^n$.

4. Suponha que existe um tipo de planta que vive eternamente, mas que se reproduz apenas uma vez logo após o primeiro ano de vida. Qual é a rapidez de crescimento dessa "população" se o processo começa com uma planta?

   Observe que este é o problema reverso daquele do crescimento dos coelhos que se reproduzem todo ano exceto o primeiro ano.

   ***R*esposta:** Seja a_i a quantidade de plantas existentes no i-ésimo ano. Inicialmente temos apenas uma planta, $a_1 = 1$. Note que a primeira planta reproduz uma vez logo após o primeiro ano, conseqüentemente $a_2 = 2$. Logo após o segundo ano, só a planta que nasceu logo após o primeiro ano poderá reproduzir gerando uma nova planta, portanto $a_3 = a_2 + 1 = 3$. Esse processo continua com a geração de uma única planta por ano sem que nenhuma morra. Logo, a velocidade de crescimento da população de plantas é de uma planta por ano, no ano n tem - se o número de plantas do ano $n-1$ mais a planta reproduzida neste ano. Portanto:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 1 \text{ , para } n \geq 2. \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da EP da Aula 17

Observações:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.

2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo antes de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.

3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

---

1. Escreva o conjunto de vértices e o conjunto de arestas dos grafos abaixo dados por suas representações geométricas.

   (a) ***Resposta:***

$V(G_1) = \{a, b, c, d, e\}$, $E(G_1) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (c, d), (c, e)\}$.

(b) ***R*esposta:**

$V(G_2) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E(G_2) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 1)\}$.

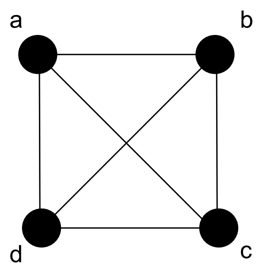
(c) ***R*esposta:**

$V(G_3) = \{x, y, z, w, r\}$, $E(G_3) = \{(x, y), (y, z), (z, w), (w, r)\}$.

2. Desenhe os grafos dados por:

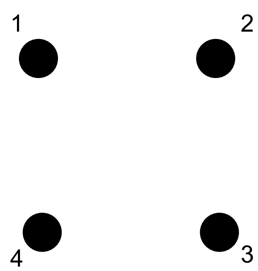
$a)$ grafo G: $V(G) = \{a, b, c, d\}$, $E(G) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$

***R*esposta:**



$b)$ grafo H: $V(H) = \{1, 2, 3, 4\}$, $E(H) = \emptyset$

***R*esposta:**



3. Considere o grafo de G de (2)

   a) G tem algum vértice universal? Justifique.

   ***R*esposta:** Sim. Todos os vértices de G são universais pois cada vértice de G é adjacente a todos os demais vértices do grafo.

   b) G tem algum vértice isolado? Justifique.

   ***R*esposta:** Não. Cada vértice de G é adjacente a algum outro vértice no grafo.

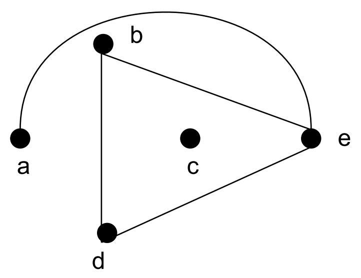
   c) Qual a vizinhança do vértice c ?

   ***R*esposta:** $N(c) = \{a, b, d\}$.

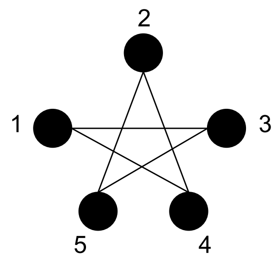
4. Desenhe os complementos dos grafos G_1 , G_2 e G_3 de 1).

   ***R*esposta:**

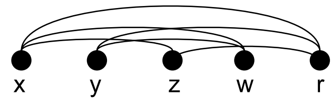
   $\overline{G_1}$



   $\overline{G_2}$



$\overline{G_3}$



5. Considere o grafo G_1 de 1). O grafo H tal que $V(H) = \{a, b, c, d\}$ e $E(H) = \{(a, b), (b, c), (c, d), (a, d)\}$ é um subgrafo induzido de G_1? Justifique.

   ***R*esposta:** Não. Pois $(a, c) \in E(G_1)$; a, $c \in V(H)$, porém $(a, c) \notin E(H)$.

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da EP da Aula 18

Observações:

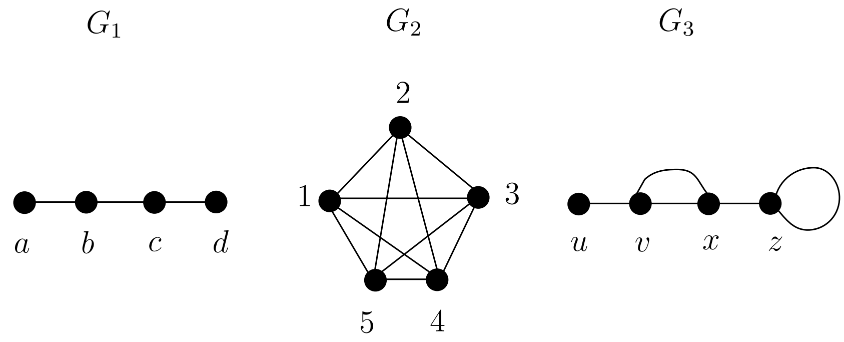
1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.

2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo <u>antes</u> de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.

3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

---

1. Para cada um dos grafos (não necessariamente simples) abaixo, escreva:



   (a) o grau de cada um de seus vértices:

   Resposta: Temos que o grau de um vértice v é o número de arestas incidentes a v. Logo:

   Para o grafo G_1, temos:

   $d(a) = 1$
   $d(b) = 2$
   $d(c) = 2$
   $d(d) = 1$

   Para o grafo G_2, temos:

   $d(1) = 4$
   $d(2) = 4$
   $d(3) = 4$
   $d(4) = 4$
   $d(5) = 4$

   Para o grafo G_3, que é um multigrafo, temos:

   $d(u) = 1$
   $d(v) = 3$

$d(x) = 3$
$d(z) = 3$ (laço conta 2 unidades)

(b) a sequência de graus:

Resposta:

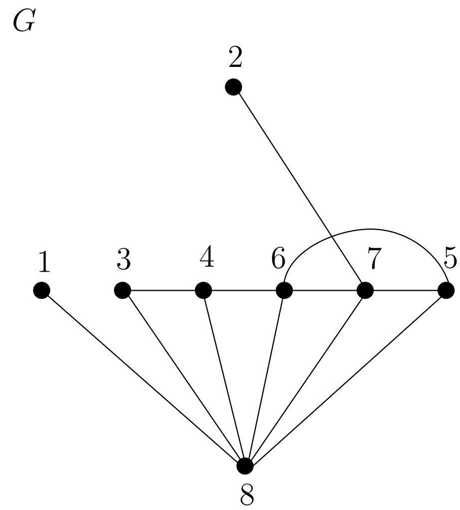
Para o grafo G_1, temos a sequência de graus $(1, 1, 2, 2)$.

Para o grafo G_2, temos a sequência de graus $(4, 4, 4, 4, 4)$.

Para o grafo G_3, temos a sequência de graus $(1, 3, 3, 3)$.

2. Desenhe um grafo (simples) com 8 vértices e sequência de graus $(1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 6)$

Resposta: Consideremos o grafo simples, abaixo:



$d(1) = 1$
$d(2) = 1$
$d(3) = 2$

$d(4) = 3$
$d(5) = 3$
$d(6) = 4$
$d(7) = 4$
$d(8) = 6$

3. Existe grafo simples com 4 vértices e sequência de graus $(1, 2, 3, 4)$? Caso exista, desenhe esse grafo, caso contrário, justifique.

   Resposta: Não.

   Suponha que temos os vértices v_1, v_2, v_3 e v_4 e $d(v_4) = 4$, logo como o grafo é simples temos que não existe laços nem arestas múltiplas, mas v_4 só pode ser adjacente a v_1, v_2 e v_3 que são os outros três vértices existentes. Logo, não existe tal grafo.

4. Mostre que não existe grafo regular de grau 3 com 7 vértices.

   Resposta: Temos que em qualquer grafo G, a soma dos graus de todos os vértices é igual a duas vezes o número de arestas, isto é,

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|,$$

   ou seja, a soma dos graus de todos os vértices é necessariamente um número par.

   Suponha que existe um grafo regular de grau 3 com 7 vértices. Temos então que $d(v) = 3$, $\forall v \in V(G)$. Logo:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)| = 3 \times 7 = 21 \ \textit{que é um número ímpar. Absurdo!}$$

   Logo este grafo regular não existe.

5. Mostre que em um grupo de pelo menos duas pessoas sempre existem duas com exatamente o mesmo número de amigos dentro do grupo.

Resposta:

Considere um grafo com n pessoas, $n \geq 2$. Vamos modelar o problema por um grafo G. A cada pessoa do grupo associe a um vértice. E para cada par de pessoas distintas, se elas são amigas associe uma aresta entre os vértices correspondentes a essas pessoas.

O número de amigos de uma pessoa é exatamente o grau do vértice correpondente a essa pessoa. Queremos mostrar então que:

Em um grupo G com pelo menos 2 vértices sempre existem 2 vértices de mesmo grau.

Suponha, por absurdo, que isso não é verdade, isto é, suponha que todos os vértices de G tem graus distintos. Nesse caso G deve ter a seguinte sequência de graus: $(0, 1, 2, \dots, n-1)$, ou seja, G possui um vértice de grau $(n-1)$, isto é, um vértice universal, que é adjacente a todos os outros vértices e G possui um vértice de grau 0, isto é, um vértice isolado, que não é adjacente a nenhum outro vértice de G. Isso é absurdo!

Logo, existem pelo menos dois vértices de mesmo grau em um grafo com pelo menos dois vértices, o que corresponde que em um grupo de pelo menos duas pessoas sempre existem dois com exatamente o mesmo número de amigos.

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da EP da Aula 19

Observações:

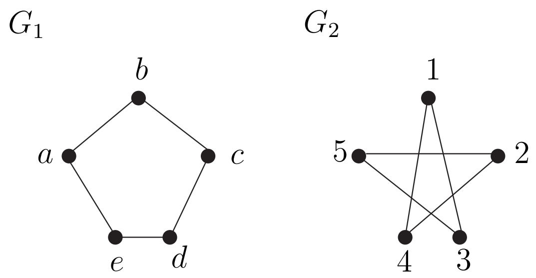
1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.

2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo antes de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.

3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

---

1. Considere cada par de grafos abaixo e verifique se são isomorfos. Justifique sua resposta.



(a) Resposta: G_1 e G_2 são isomorfos.

Justificativa: Observe que $G_1 = C_5$ e $G_2 = \overline{C_5} = C_5$, ou seja, G_1 e G_2 representam o mesmo grafo com rotulações diferentes.

Mais formalmente, seja $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ tal que:

v	$f(v)$
a	1
b	3
c	5
d	2
e	4

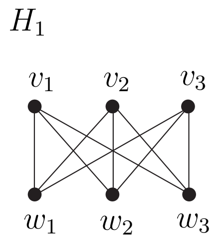
f é injetiva(1 a 1) e sobrejetiva. Para f ser isomorfa precisamos verificar se:

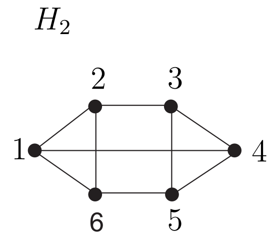
$(v, w) \in E(G_1) \Leftrightarrow (f(v), f(w)) \in E(G_2)$, $\forall v, w \in V(G_1)$ tal que $(v, w) \in E(G_1)$.

$(a, b) \in E(G_1) \leftrightarrow (1, 3) \in E(G_2)$
$(b, c) \in E(G_1) \leftrightarrow (3, 5) \in E(G_2)$
$(c, d) \in E(G_1) \leftrightarrow (5, 2) \in E(G_2)$
$(d, e) \in E(G_1) \leftrightarrow (2, 4) \in E(G_2)$
$(e, a) \in E(G_1) \leftrightarrow (4, 1) \in E(G_2)$

Logo, f é isomorfismo e G_1 é isomorfo a G_2.

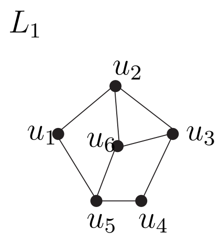
(b) Resposta: H_1 e H_2 não são isomorfos.

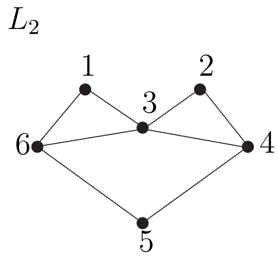




Justificativa: H_2 contém dois triângulos (K_3) induzidos pelos conjuntos de vértices $\{1, 2, 6\}$ e $\{3, 4, 5\}$ e H_1 não contém nenhum triângulo, logo H_1 e H_2 não são isomorfos.

(c) Resposta: L_1 e L_2 não são isomorfos.





Justificativa: Sabemos que dois grafos isomorfos tem necessariamente a mesma sequência de graus (consequência da propriedade que o isomorfismo preserva adjacências). A recíproca não é verdadeira, ou seja, grafos com sequência diferentes de graus não são isomorfos.

A sequência de graus de L_1 é: $(2, 2, 2, 3, 3, 3)$.
A sequência de graus de L_2 é: $(2, 2, 2, 3, 3, 4)$.

Logo, L_1 e L_2 não são isomorfos.

2. Verifique se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, prove, se for falsa dê um contra-exemplo.

(a) Se G e H são isomorfos então eles têm o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas.

Resposta: Verdadeira.

Se G e H são isomorfos então:

(1) existe uma função $f : V(G) \to V(H)$ injetora e sobrejetora, e além disso:

(2) $(v, w) \in E(G) \Leftrightarrow (f(v), f(w)) \in E(H)$.

De (1) temos que como f é injetora (1 a 1) e sobre isso significa que cada $v \in V(G)$ é correspondente a um único $u \in V(H)$ e vice-versa, isto é, a cada $u \in V(H)$ corresponde um único $v = f^{-1}(u) \in V(G)$. Logo, $|V(G)| = |V(H)|$.

De (1) e (2) temos que a cada aresta (v, w) corresponde a uma única aresta $(f(v), F(w)) \in E(H)$ e vice-versa. Logo, $|E(G)| = |E(H)|$.

(b) Se G e H têm o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas então eles são isomorfos.

Resposta: Falsa.

Como contra-exemplo, podemos considerar os grafos L_1 e L_2 do exercício 1.

$|V(L_1)| = |V(L_2)| = 6$
$|E(L_1)| = |E(L_2)| = 8$

Mas, eles não são isomorfos, como visto no exercício 1, item c.

(c) Se G e H são grafos isomorfos então eles têm a mesma sequência de graus.

Resposta: Verdadeiro.

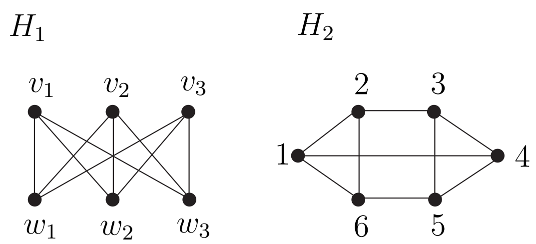
Como G e H são isomorfos então existe um isomorfismo f entre eles e o isomorfismo preserva adjacências, isto é, vértices correspondentes $v \in V(G)$ e $f(v) \in V(H)$ têm as mesmas adjacências e portanto o mesmo grau. E, como $|V(G)| = |V(H)|$ as sequências de graus de V e H são iguais.

Logo, possuem a mesma sequência de graus.

(d) Se G e H têm a mesma sequência de graus então eles são isomorfos.

Resposta: Falsa.

Como contra-exemplo podemos considerar os grafos H_1 e H_2 do exercício 1.



Os grafos H_1 e H_2 possuem a mesma sêquência de graus, que é: $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$, mas não são isomorfos como visto no exercício anterior.

3. Determine a matriz de adjacência e a matriz de incidência do grafo L_1 de $1.c$.

Resposta:

A matriz de adjacência do grafo L_1 é:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

E, a matriz de incidência do grafo L_1 é:

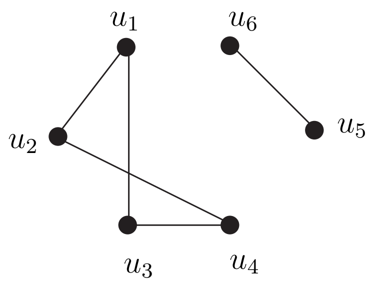
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

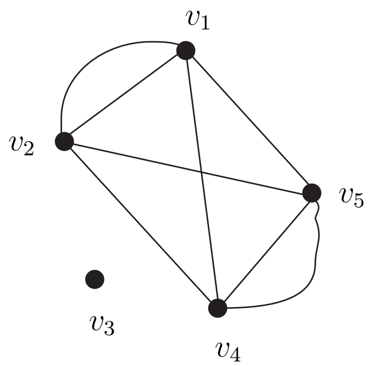
4. Desenhe o grafo cuja matriz de adjacência é dada por:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Resposta: O grafo G correspondente a matriz de adjacência é:

5. Desenhe o grafo cuja matriz de incidência é dada por:





$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resposta: O grafo H correspondente a matriz de incidência é: