

Aula 9: Combinações Simples

Conteúdo:

- ➡ Introdução
- ➡ Combinação simples
- ➡ Número de combinações simples

Introdução:

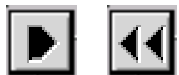
Exemplo 1:

Numa sala estão reunidas três pessoas, P_1 , P_2 e P_3 .

De quantas maneiras podemos **selecionar** duas pessoas?

Reformulação do exemplo:

Seja $A = \{ P_1, P_2, P_3 \}$. Quantos subconjuntos de 2 elementos possui A ?



Exemplo 1 (continuação):**Resolução:**

$$A = \{ P_1, P_2, P_3 \}$$

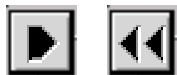
N: número de subconjuntos de 2 elementos de **A**

Raciocínio 1: enumeração dos subconjuntos de **A**

$$B = \{ \{ P_1, P_2 \}, \{ P_1, P_3 \}, \{ P_2, P_3 \} \}$$

Resposta:

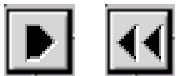
$$N = |B| = n(B) = 3$$



Exemplo 1 (raciocínio 2):

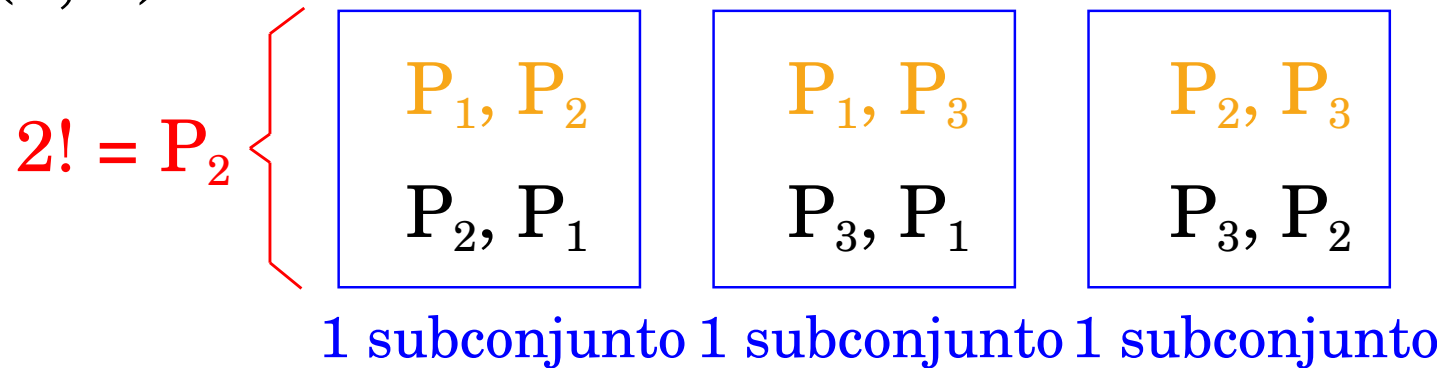
Sem enumeração dos subconjuntos de **A**
(usando arranjos e permutações)

Os **arranjos** de 3 elementos tomados 2 a 2 consideram a ordem ! Então, devemos reduzir a 1 possibilidade todas as **permutações** dos mesmos elementos.



Exemplo 1 (continuação):

$A(3, 2)$:



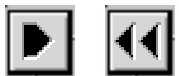
Resumindo:

P_2 $\xrightarrow{\text{correspondem}}$ 1 subconjunto

$A(3, 2)$ $\xrightarrow{\text{correspondem}}$ $N = \frac{A(3, 2)}{P_2}$ total de subconjuntos

Resposta:

$$N = \frac{A(3, 2)}{P_2} = \frac{3!}{2! (3 - 2)!} = \frac{3 \cdot 2!}{2! \cdot 1!} = 3$$



Exemplo 2:

Uma fábrica de sucos está lançando no mercado **5 novos sabores**. Como propaganda, cada pessoa pode experimentar **2 sabores diferentes**. Quantas opções têm cada um?

Resolução:

S_1, S_2, S_3, S_4, S_5

1 opção: uma escolha de **2** sabores entre **5**
(não importa a ordem)

N: número de opções

P_2
 $A(5, 2)$

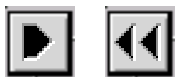
da lugar a
da lugar a

1 opção

$$\mathbf{N} \text{ opções} = \frac{A(5, 2)}{P_2}$$

Resposta:

$$\mathbf{N} = \frac{A(5, 2)}{P_2} = \frac{5!}{2! (5 - 2)!} = \frac{5!}{2! 3!} = \mathbf{10}$$



Características dos exemplos

- ▮ Os elementos considerados a_1, a_2, \dots, a_n são diferentes
- ▮ Cada escolha de r elementos distintos (sem importar a ordem) entre a_1, a_2, \dots, a_n corresponde a uma possibilidade
- ▮ Na obtenção do número de possibilidades aplica-se os princípios aditivo e multiplicativo (usa-se os conceitos de arranjos e permutações)



Combinação simples:

➡ Definição:

Dados n objetos distintos a_1, a_2, \dots, a_n , uma **combinação simples** de n elementos tomados r a r é uma seleção de r elementos distintos escolhidos entre a_1, a_2, \dots, a_n , não importando a ordem da escolha, sendo r e n números naturais com $1 \leq r \leq n$.

➡ Ilustração:

Dados as pessoas P_1, P_2, P_3 ,

P_1, P_3 é uma combinação de **3** elementos tomados **2** a **2**.



Número de combinações simples:

➡ Problema:

{ Dados n elementos distintos, a_1, a_2, \dots, a_n ,
encontrar o número de combinações simples dos
 n elementos tomados r a r

➡ Propriedade:

O número de combinações simples de n elementos distintos tomados r a r , denominado $C(n, r)$, é:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r! (n - r)!} \quad \left(= \frac{A(n, r)}{P_r} \right)$$

➡ Observação:

$$C(n, r) = C(n, n - r) = \frac{n!}{(n - r)! (n - (n - r))}$$



Exemplo 3:

Um técnico convocou 9 jogadores para um campeonato de vôlei. Para formar a equipe inicial deve escolher 5 jogadores. Quantas opções ele tem?

Resolução:

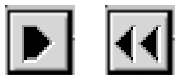
n = número de jogadores = 9

r = número de jogadores da equipe = 5

$$\text{total de opções} = C(9, 5) = \frac{9!}{5! (9 - 5)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! 4 \cdot 3 \cdot 2} = 9 \cdot 2 \cdot 7 = 126$$

Resposta:

O técnico tem 126 opções de formar a equipe inicial.



Exemplo 4:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas?

Resolução:

$$n = \text{número de professores} = 12 + 12 = 24$$

$$r = \text{número de professores em uma comissão} = 8$$

N : número de comissões possíveis

Resposta:

Podem ser formadas

$$N = C(24, 8) = \frac{24!}{8! 16!} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 735471 \text{ comissões.}$$



Exemplo 5:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas havendo 3 professores de matemática?

Resolução:

número de professores = 12 + 12 = 24

número de professores de matemática numa comissão = 3

número de professores de informática numa comissão = 8 - 3 = 5

Possibilidades:

$$\frac{C(12, 3)}{\text{matemática} \atop (3 \text{ entre } 12)} \times \frac{C(12, 5)}{\text{informática} \atop (5 \text{ entre } 12)} = \frac{12!}{3! 9!} \times \frac{12!}{5! 7!}$$

Resposta:

O número de comissões é 174240.



Exemplo 6:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas havendo pelo menos 1 professor de matemática?

Resolução:Raciocínio 1:

U : conjunto universo := o conjunto de todas as comissões de 8 professores

A := conjunto de todas as comissões com pelo menos 1 professor de matemática

B := conjunto de todas as comissões sem professor de matemática



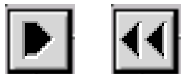
Exemplo 6 (continuação):

$$\left\{ \begin{array}{l} A = U - B \\ \text{número de comissões} := N = |A| = |U| - |B| \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |U| = C(24, 8), |B| = C(12, 8) \\ N = C(24, 8) - C(12, 8) = \frac{24!}{8! 16!} - \frac{12!}{8! 4!} = 734976 \end{array} \right.$$

Resposta:

O número de comissões possíveis neste caso é **734976**.



Exemplo 6 (raciocínio 2):

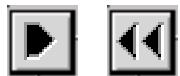
A_i := conjunto de todas as comissões com i professores de matemática, para $i = 1, 2, \dots, 8$

$$A = \bigcup_{i=1}^8 A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_8$$

$$N = |A| \stackrel{\text{princípio aditivo}}{=} \sum_{i=1}^8 |A_i| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_8|$$

$$|A_i| \stackrel{\text{princípio multiplicativo}}{=} C(12, i) C(12, 8 - i) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, 8$$

$$\begin{aligned} N = & C(12, 1) C(12, 7) + C(12, 2) C(12, 6) + C(12, 3) C(12, 5) + \\ & C(12, 4) C(12, 4) + C(12, 5) C(12, 3) + C(12, 6) C(12, 2) + \\ & C(12, 7) C(12, 1) + C(12, 8) \underbrace{C(12, 0)}_1 \end{aligned}$$



Exemplo 7:

De quantos modos é possível dividir 20 pessoas em um grupo de 12 e um grupo de 8?

Resolução:

Raciocínio 1:

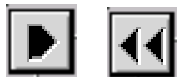
N: modos de dividir 20 em 1 grupo de 12 e outro de 8

= M: quantidade de grupos de 12 dentre 20 = $C(20, 12)$

= Dado 1 grupo de 12, o grupo de 8 fica definido.

Resposta:

$$N = C(20, 12) = \frac{20!}{12! 8!}$$



Exemplo 7 (raciocínio 2):

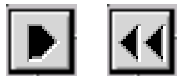
N: modos de dividir **20** em 1 grupo de 12 e outro de 8

⇒ **M**: quantidade de grupos de 8 dentre **20** = $C(20, 8)$

⇒ Dado 1 grupo de 8, o grupo de 12 fica definido.

Resposta:

$$N = C(20, 8) = \frac{20!}{8! 12!} = C(20, 12)$$



Exemplo 8:

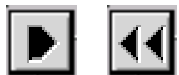
De quantos modos é possível dividir 20 pessoas em 2 grupos de 10 ?

Resolução:

N: modos de dividir 20 em 2 grupos de 10

= M: quantidade de grupos de 10 dentre 20 = $C(20, 10)$

= Dado 1 grupo de 10, o outro grupo fica definido.



Exemplo 8 (continuação):

Diferença com o exemplo 7:

Os 2 grupos são de 10 pessoas,

(estamos dividindo as 20 pessoas por 2)

Ilustração:

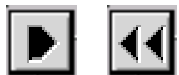
p_1, p_2, \dots, p_{20} as pessoas

a escolha p_1, p_2, \dots, p_{10} define o outro grupo $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{20}$

a escolha $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{20}$ define o outro grupo p_1, p_2, \dots, p_{10}

Resposta:

$$N = \frac{C(20, 10)}{2} = \frac{1}{2} \frac{20!}{10! 10!}$$



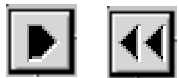
Exemplo 9:

Um concurso para professor tem **20 inscritos**. Devem ser selecionadas 10 pessoas para realizar a prova em 1 dia e 10 para fazê-la no dia seguinte. De quantos modos é possível fazer a seleção?

Resolução:

Relações com o exercício 8:

- ⇒ Semelhança: Escolha de 2 grupos de 10 entre **20**
- ⇒ Diferença: Existe uma ordem entre os grupos determinada pelo dia da prova.



Exemplo 9 (continuação):

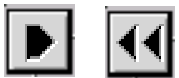
seleções
distintas

a escolha p_1, p_2, \dots, p_{10} (1º dia) define o
grupo $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{20}$ (2º dia)

a escolha $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{20}$ (1º dia) define o
grupo p_1, p_2, \dots, p_{10} (2º dia)

Resposta:

Tem-se $C(20, 10)$ possibilidades de seleção.



Exemplo 10:

Resposta

Voltar

De quantos modos é possível dividir 20 pessoas em 4 grupos de 5?

Resumo:

Sejam n objetos distintos a_1, a_2, \dots, a_n

Conceito:

Combinação simples de n objetos tomados r a r .

Característica:

Importa os objetos considerados e não a posição deles.

(exemplos: $a_1, a_2, \dots, a_r = a_2, a_1, \dots, a_r$
 $a_2, a_3, \dots, a_{r+1} \neq a_1, a_2, \dots, a_r$)

Propriedade:

Número de combinações de n objetos tomados r a r .

$$C(n, r) = \frac{n!}{r! (n - r)!}$$

Observação: $C(n, r) = C(n, n - r)$