Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP2 - Primeiro Semestre de 2011

Questões:

1. (1.5) Determine o termo independente no desenvolvimento de

$$\left(\frac{1}{x^4} - 3x^2\right)^{21}$$

Justifique a resposta.

Resposta: O termo $(k+1)$ do binômio $(a+b)^n$ é dado por:

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k, \qquad \forall\ k = 0, 1, \ldots, n$$

Considerando $n = 21$, $a = \frac{1}{x^4}$ e $b = -3x^2$, temos que:

$$\begin{array}{rcll}
T_{k+1} & = & C_n^k a^{n-k} b^k & = \\
 & = & C_{21}^k \left(\frac{1}{x^4}\right)^{21-k} (-3x^2)^k & = \\
 & = & C_{21}^k\ (x^{-4})^{21-k}(-1)^k 3^k x^{2k} & = \\
 & = & C_{21}^k\ x^{-84+4k}(-1)^k\ 3^k x^{2k} & = \\
 & = & C_{21}^k(-1)^k\ 3^k x^{-84+4k+2k} & = \\
 & = & C_{21}^k(-1)^k\ 3^k x^{6k-84} & =
\end{array}$$

Devemos determinar k tal que $T_{k+1} = C_{21}^k (1)^{21-k}(-1)^k 3^k x^0$.

Portanto, deve ser $6k - 84 = 0 \Rightarrow \boxed{\text{k} = 14}$.

Logo, o termo independente de $\left(\frac{1}{x^4} - 3x^2\right)^{21}$ é:

$$C_{21}^{14}(1)^{21-14}(-1)^{14}3^{14} = C_{21}^{14}3^{14} = \frac{21!}{14!7!}3^{14}$$

2. (1.5) Use o Teorema das diagonais para calcular a seguinte soma:

$$C_{50}^{1} \ + \ C_{51}^{2} \ + \ C_{52}^{3} \ + \ \cdots + C_{60}^{11}$$

Resposta: Temos que $C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \ldots + C_{n+r}^r = C_{n+r+1}^r$, pelo Teorema das Diagonais. Logo:

$$\begin{array}{rcl}
 & C_{50}^{1} \ + \ C_{51}^{2} \ + \ C_{52}^{3} \ + \ \cdots + C_{60}^{11} & = \\
= & C_{50}^{1} \ + \ C_{51}^{2} \ + \ C_{52}^{3} \ + \ \cdots + C_{60}^{11} + C_{49}^{0} - C_{49}^{0} & = \\
= & C_{49}^{0} + C_{50}^{1} \ + \ C_{51}^{2} \ + \ C_{52}^{3} \ + \ \cdots + C_{60}^{11} - C_{49}^{0} & = \\
= & \underbrace{C_{49}^{0} + C_{50}^{1} \ + \ C_{51}^{2} \ + \ C_{52}^{3} \ + \ \cdots + C_{60}^{11}}_{\textit{Teorema das diagonais, quando } n=49 \textit{ e } r=11} - C_{49}^{0} & = \\
= & C_{49+11+1}^{11} - C_{49}^{0} & = \\
= & C_{61}^{11} - C_{49}^{0} & = \\
= & \frac{61!}{11!50!} - \frac{49!}{0!49!} & = \\
= & \frac{61!}{11!50!} - 1 &
\end{array}$$

3. (1.0) Encontre a fórmula fechada da relação de recorrência:
$a_n = a_{n-1} - 3$ para todo número natural n,
$a_0 = 1$
Justifique.

Resposta:

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} - 3 \\
&= (a_{n-2} - 3) - 3 \\
&= a_{n-2} - 3 - 3 \\
&= (a_{n-3} - 3) - 3 - 3 \\
&= a_{n-3} - 3 - 3 - 3 \\
&= (a_{n-4} - 3) - 3.3 \\
&= a_{n-4} - 3 - 3.3 \\
&= a_{n-4} - 3.4 \\
&\vdots \\
&= a_{n-i} - 3.i
\end{aligned}$$

Logo, para $n - i = 0$, ou seja, $i = n$, temos

$$a_n = a_0 - 3n$$

Como $a_0 = 1$, concluímos:

$$a_n = 1 - 3n$$

4. (1.0) Considere a afirmação seguinte:

   "Se G é um grafo bipartido e possui um ciclo hamiltoniano então G tem um número par de vértices."

   Diga se é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

   Resposta: **Verdadeiro.**

   Prova: Seja G um grafo bipartido e suponha que G possui um ciclo hamiltoniano C, isto é, um ciclo que inclui todos os vértices de G.

   Suponha, por absurdo, que G tem um número ímpar de vértices. Nesse caso, o ciclo hamiltoniano C de G é um ciclo ímpar. Logo, G não é bipartido (G é um grafo bipartido se e somente se G não possui ciclos ímpares). Absurdo!

   Portanto, G tem um número par de vértices.

5. (5.0) Determine:

(a) O número de arestas de uma floresta F que possui 10 componentes conexos e 65 vértices. Justifique a resposta.

Resposta: Consideremos o grafo G, que é uma floresta, e os seus 10 componentes conexos G_i, $i = 1, 2, \ldots, 10$.

Temos então que:

$|V(G)| = |V(G_1)| + |V(G_2)| + \ldots + |V(G_{10})|$
e
$|E(G)| = |E(G_1)| + |E(G_2)| + \ldots + |E(G_{10})|$.

Como G é uma floresta, então cada componente conexo de G é uma árvore, isto é, cada G_i possui exatamente $E(G_i) = V(G_i) - 1$ arestas, $i = 1, 2, \ldots, 10$.

Temos que $|V(G)| = 65$, então:

$$\begin{array}{lcl} |V(G)| & = & |V(G_1)| + |V(G_2)| + \ldots + |V(G_{10})| \\ 65 & = & |E(G_1)| + 1 + |E(G_2)| + 1 + \ldots + |E(G_{10})| + 1 \\ 65 & = & |E(G_1)| + |E(G_2)| + \ldots + |E(G_{10})| + 10 \\ 65 & = & |E(G)| + 10 \\ 55 & = & |E(G)| \end{array}$$

Logo, o número de arestas de uma floresta G que possui 10 componentes conexos e 65 vértices é $|E(G)| = 55$.

(b) O diâmetro e o centro de $G = K_{3,4}$ (grafo bipartido completo com bipartição (V_1, V_2), onde $|V_1| = 3$ e $|V_2| = 4$ vértices). Justifique a resposta.

Resposta: Seja $G = K_{3,4}$ um grafo bipartido completo com bipartição (V_1, V_2), onde $|V_1| = 3$, $|V_2| = 4$, $V_1 = \{a, b, c\}$ e $V_2 = \{d, e, f, g\}$.

A excentricidade $e(v)$ de um vértice v de G é o valor da maior distância de v aos outros vértices de G, isto é, $e(v) = max_{w \in V(G)}$ $\{d(v,w)\}$.

O diâmetro de um grafo, denotado por $diam(G)$, é o valor da sua maior excentricidade.

Logo, $diam(G) = 2$, pois temos $e(a) = e(b) = e(c) = e(d) = e(e) = e(f) = e(g) = 2$.

O centro $c(G)$ de um grafo G é o conjunto dos vértices de G que têm excentridade mínima. Como em $G = K_{3,4}$ todos os vértices tem excentricidade 2, então $c(K_{3,4}) = V(K_{3,4}) = V_1 \cup V_2$ $= \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

(c) Para quais n ($n > 1$, n inteiro) os grafos k_n (grafos completos com n vértices) são eulerianos. Justifique a resposta.

Resposta: Sabemos que um grafo é euleriano se e somente se todos os graus de seus vértices são pares. Em um grafo completo K_n cada vértice é adjacente a $n-1$ vértices, isto é, $d(v) = n-1$ para todo vértice v de G. Para K_n ser euleriano $d(v) = n - 1 = 2k$, $k = 1, 2, ..,$ ou seja o grau de v é um número par para todo vértice v de K_n. Logo $n = 2k+1$, $k = 1, 2, ..$, isto é n é um número ímpar.

(d) O número de faces de um grafo planar 6-regular com 17 vértices. Justifique a resposta.

Resposta: Temos que em qualquer grafo G, a soma dos graus de todos os vértices é igual a duas vezes o número de arestas, isto é,

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|.$$

Como o grafo G é 6-regular, temos que para todo vértice v do grafo, $d(v) = 6$, logo:

$$\sum_{v=1}^{17} d(v) = 17 \times 6 = 2|E(G)| \Rightarrow \boxed{\ |E(G)| = 51}.$$

Seja f o número de faces do grafo planar 6-regular, G. Pela fórmula de Euler, temos que $|V(G)| - |E(G)| + f = 2$, para grafos conexos planares. Como $|V(G)| = 17$ e $|E(G)| = 51$, então temos $f = |E(G)| - |V(G)| + 2 = 51 - 17 + 2 = 36$ faces.