Gabarito da AP3 - Fundamentos de Algoritmos para Computação

1. Queremos provar que: $(\overline{A \cap B} \cup (\overline{A \cap C})) = \overline{A \cap B \cap C}$.
   De fato,

$$
\begin{array}{lcll}
 & & (\overline{A \cap B} \cup (\overline{A \cap C})) & = \\
\text{(lei de Morgan)} & = & (\overline{A} \cup \overline{B}) \cup (\overline{A} \cup \overline{C})) & = \\
\text{(propriedade comutativa)} & = & (\overline{B} \cup \overline{A}) \cup (\overline{A} \cup \overline{C}) & = \\
\text{(propriedade associativa)} & = & [(\overline{B} \cup \overline{A}) \cup \overline{A}] \cup \overline{C} & = \\
\text{(propriedade associativa)} & = & [\overline{B} \cup (\overline{A} \cup \overline{A})] \cup \overline{C} & = \\
(\overline{A} \cup \overline{A} = \overline{A}) & = & (\overline{B} \cup \overline{A}) \cup \overline{C} & = \\
\text{(propriedade comutativa)} & = & (\overline{A} \cup \overline{B}) \cup \overline{C} & = \\
\text{(lei de Morgan)} & = & \overline{(A \cap B)} \cup \overline{C} & = \\
\text{(lei de Morgan)} & = & \overline{A \cap B \cap C} &
\end{array}
$$

2. Por indução:

   Base da indução:
   Para $n = 1$, $\frac{1}{1 \times (1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ é verdadeira.

   Hipótese indução:
   Suponha verdadeiro par $n = k$, isto é:

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \ldots + \frac{1}{k \times (k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

   Vamos mostrar que se é verdadeiro para k então é verdadeiro para $k+1$.

   Desenvolvendo para $n = k+1$ e usando a hipótese de indução, temos que:

$$
\begin{array}{lcll}
\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \ldots + \frac{1}{k\times(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} & = & & \\
 & = & \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} & = \\
 & = & \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} & = \\
 & = & \frac{k(k+1+1)+1}{(k+1)(k+2)} & = \\
 & = & \frac{k(k+1)+k+1}{(k+1)(k+2)} & = \\
 & = & \frac{(k+1)(k+1)}{(k+1)(k+2)} & = \\
 & = & \frac{(k+1)}{(k+2)} &
\end{array}
$$

   Logo, a expressão é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$

3. Raciocínio 1 (princípio multiplicativo)
   A primeira letra do anagrama pode ser escolhido de 23 modos; a segunda, de 22 modos; e a terceira, de 21 modos. A resposta é: $23 \times 22 \times 21 = 10626$.
   Raciocínio 2 (arranjos simples)
   O número de anagramas de 3 letras diferentes que podemos formar com 23 letras corresponde a arranjos simples de 32 tomados 3 a 3, $A(23,3) = \frac{23!}{(23-3)!} = 23 \times 22 \times 21$.

4. Raciocínio 1

   As soluções inteiras não-negativas de $x+y+z+w \leq 27$ dividem-se em vários grupos: soluções onde $x+y+z+w=27$, onde $x+y+z+w=26$, onde $x+y+z+w=25$, ..., onde$x+y+z+w=1$, onde $x+y+z+w=0$. A resposta é:

$$\begin{array}{ll} CR_4^{27} + CR_4^{26} + \ldots CR_4^1 + CR_4^0 & = \\ C_{30}^{27} + C_{29}^{26} + \ldots C_4^1 + C_3^0 & = \\ 4060 + 3654 + \ldots + 4 + 1 & = \\ 31465 & \end{array}$$

   Raciocínio 2

   Em cada solução inteira não-negativa de $x+y+z+w \leq 27$ defina-se a folga da solução por:

$$f = 27 - (x+y+z+w)$$

   É claro que existe uma correspondência biunívoca entre as soluções inteiras não-negativas de $x+y+z+w \leq 27$ e as soluções inteiras não-negativas de $x+y+z+w+f = 27$.

   Logo, o número de soluções inteiras não-negativas da inequação $x+y+z+w \leq 27$ é igual ao número de soluções inteiras não-negativas de $x+y+z+w+f=27$ que é $CR_5^{27} = C_{31}^{27} = 31465$.

5. O número total de subconjuntos de um conjunto A de n elementos corresponde a $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n$. Logo, usando o teorema das linhas temos que o número total de subconjuntos é $2^n = 256 = 2^8$. Portanto, a resposta é $n = 8$.

6. (a) Verdadeira

   Justificativa: Sabemos que um grafo é bipartido se e somente se ele não possui ciclo ímpar. Uma árvore é um grafo conexo e acíclico, logo não tem ciclos ímpares. Portanto, é um grafo bipartido.

   (b) Falso

   Justificativa: Seja $G = K_2$(grafo completo com 2 vértices). G é 1-regular, mas não existe um ciclo que passe por todos os vértices, já que G é acíclico.

   (c) Falso

   Justificativa: Seja $G = K_{3,3}$(grafo bipartido completo), $E(G) = m = 9$ e $V(G) = n = 6$.

   Temos que $9 \leq 3 \times 6 - 6 = 12$, mas G não é planar

   (d) Verdadeiro

   Justificativa: Seja D um digrafo fortemente conexo então $\forall\, u, v \in V(D)$ existe caminho de u para v e de v para u.

Se D possui fonte, então seja v uma ponte de D, isto é, $d^-(v) = 0$. Mas, se $d^-(v) = 0$ então não existe nenhum caminho de w para v, $\forall\ w \in V(D\backslash\{v\})$. Contradição, pois D é fortemente conexo.

Se D possui sumidouro, então seja w uma sumidouro de D, isto é, $d^+(w) = 0$. Mas, se $d^+(w) = 0$ então não existe nenhum caminho de w para x, $\forall\ x \in V(D\backslash\{w\})$. Contradição, pois D é fortemente conexo.