Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AP3 - Primeiro Semestre de 2013

Nome -
Assinatura -

Observações:

1. Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular. Se necessário deixe o resultado indicado, como um produto ou quociente ou potência de números inteiros ou fatoriais.
2. Resultado sem indicação de como foi obtido, não será considerado.
3. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.
4. Você pode usar lápis para responder as questões.
5. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.
6. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

Questões:

1. (1,5) Mostre usando indução matemática que:

$$2 \text{ divide } (n^2 + n)$$

para todo número natural $n \geq 1$.

Resposta: Queremos mostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n$ tem resto igual a zero na divisão por 2. Isto é equivalente a mostrar que $n^2 + n$ é um múltiplo de 2. Assim, considere a seguinte proposição:

$P(n) : n^2 + n = 2m$, para algum $m \in \mathbb{N}$.

BASE DA INDUÇÃO: Vamos mostrar que $P(1) : 1^2+1 = 2m$ é verdadeira para algum $m \in \mathbb{N}$.

$$1^2 + 1 = 2$$

e

$$2 = 2.1$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira (neste caso, $m = 1$).

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Suponha que $P(k) : k^2+k = 2m'$ é verdadeira para algum $m' \in \mathbb{N}$.

PASSO DA INDUÇÃO: Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1) : (k+1)^2 + (k+1) = 2m''$ é também verdadeira para algum $m'' \in \mathbb{N}$.

$$\begin{gathered}(k+1)^2 + (k+1) = \\ k^2 + 2k + 1 + k + 1 = \\ \underbrace{k^2 + k}_{\text{H.I.}} + 2k + 2 = \\ 2m' + 2k + 2 = \\ 2\underbrace{(m' + k + 1)}_{\in\mathbb{N}} = \\ 2m''\end{gathered}$$

Logo, $P(n) : n^2 + n = 2m$, para algum $m \in \mathbb{N}$ é verdadeira pelo Princípio de Indução Matemática para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. (1,5) Dada a palavra **V I R T U O S A**, quantos são os anagramas que não tem 2 ou mais vogais consecutivas? Justifique.

Resposta: Quermos determinar o número de anagramas da palavra VIRTUOSA que não possuem vogais consecutivas. Logos, nesses anagramas, as vogais aparecem sempre separadas. Note que a palavra VIRTUOSA, possui 8 letras distintas das quais 4 são vogais. Vamos separar as vogais da seguinte forma:

(a) Posicionar as consoantes: Temos $P_4 = 4! = 24$ formas de posicionar as 4 consoantes da palavra.

(b) Escolher 4 espaços separados pelas consoantes para posicionar as 4 vogais: Com as consoantes já posicionadas, vamos escolher 4 entre os 5 espaços diponíveis para posicionar as vogais.

$$\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot$$

Esta escolha pode ser feita de $C_5^4 = \frac{5!}{1!4!} = 5$ maneiras.

(c) Posicionar as vogais: Para posicionar as vogais nos locais escolhidos, temos: $P_4 = 4! = 24$ formas.

Assim, pelo P.M., temos $24 \times 5 \times 24 = 24^2 \times 5$ anagramas da palavra VIRTUOSA sem vogais consecutivas.

3. (1,5) Uma padaria produz 5 tipos de pães diferentes, oferecendo cestas prontas contendo 20 pães. Quantas cestas diferentes podem ser formadas quando:

(a) a cesta pode conter qualquer tipo de pão? Justifique.

Resposta: Considere $x_i, i = 1, \cdots, 5$, a quantidade de pães do tipo i presente na cesta. Sabemos que a cesta é composta por 20 pães, então:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_5 = 20 \qquad (I)$$

Como qualquer tipo de pão pão pode formar a cesta, temos que $x_i \geq 0, i = 1, \cdots, 5$. Assim, podemos resolver a equação (I) da seguinte forma:

$$CR_5^{20} = C_{5+20-1}^{20} = C_{24}^{20} = \frac{24!}{4!20!} = 23 \times 22 \times 21 = 10626$$

Logo, temos 10626 cestas diferentes.

(b) a cesta deve conter pelo menos 2 pães de cada tipo? Justifique.

Resposta: Considere $x_i, i = 1, \cdots, 5$ a quantidade de pães do tipo i presente na cesta. Sabemos que a cesta é composta por 20 pães, então:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_5 = 20 \qquad (I)$$

Entretando, diferentemente do item (a), as cestas devem conter pelo menos 2 pães de cada tipo. Assim, $x_i \geq 2, i = 1, \cdots, 5$. Portanto, não podemos resolver a equação (I) diretamente. Vamos fazer a seguinte mudança de variáveis, a fim de obter uma equação equivalente a (I) mas com todas as variáveis não negativas.

Sejam a_i variáveis tais que $x_i = a_i + 2, i = 1, \cdots, 5$. Por esta definição temos que $a_i \geq 0, i = 1, \cdots, 5$. Vamos reescrever a equação (I) da seguinte maneira:

$$a_1 + 2 + a_2 + 2 + \cdots + a_5 + 2 = 20$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_5 + 10 = 20$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_5 = 10 \qquad (II)$$

O número de soluções distintas para a equação (II) é dado por:

$$CR_5^{10} = C_{5+10-1}^{10} = C_{14}^{10} = \frac{14!}{4!10!} = 13 \times 11 \times 7 = 1001$$

Como (II) é equivalente a (I), temos 1001 cestas de 20 pães distintas com pelo menos 2 pães de cada tipo.

4. (1,0) Determine o termo independente no desenvolvimento de

$$(\frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{1}{x^2})^{50}$$

Justifique a resposta.

Resposta: A fórmula do termo geral nos diz que:

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k,$$

para $k = 0, \cdots, n$.

Considere $a = \frac{\sqrt{x}}{3} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{3}$, $b = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ e $n = 50$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= C_{50}^{k} \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{3} \right)^{50-k} x^{-2k} \\ &= C_{50}^{k} \left(\frac{1}{3} \right)^{50-k} x^{\frac{50-k}{2}} x^{-2k} \\ &= C_{50}^{k} \left(\frac{1}{3} \right)^{50-k} x^{\frac{50-5k}{2}} \end{aligned}$$

Como queremos determinar o termo independente do desenvolvimento, $\frac{50-5k}{2} = 0$, donde $k = 10$.

Assim, concluímos que o termo independente do desenvolvimento é: $T_{11} = C_{50}^{10} \left(\frac{1}{3} \right)^{40} x^0 = \frac{50!}{40!10!} \left(\frac{1}{3} \right)^{40}$

5. (4,5) As seguintes perguntas devem ser respondidas considerando o grafo $G = (V, E)$, sendo:
$V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e
$E = \{(a, b), (b, c), (c, d), (a, d), (e, a), (e, b), (e, c), (e, d), (f, a), (f, d), (g, b), (g, c)\}$.

(a) G é planar? Justifique.

Resposta: Sim, a Figura 1 é uma representação plana do grafo descrito. Logo, G é planar.

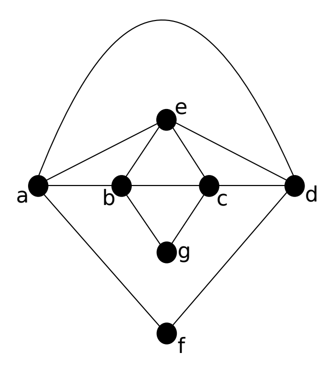

Figura 1: Representação plana do grafo G.

(b) G é um grafo bipartido? Justifique.

Resposta: Não. Pela caracterização de grafos bipartidos temos que: um grafo é bipartido se e somente se não possui ciclos ímpares. Como G tem o ciclo ímpar $adfa$ podemos garantir que G não é bipartido.

(c) G é euleriano? Justifique.

Resposta: Sim. Um grafo é euleriano se e somente se todos os seus vértices têm grau par. Como em G, $d(a) = d(b) = d(c) = d(d) = d(e) = 4$ e $d(f) = d(g) = 2$, podemos garantir que G é euleriano.

(d) G é hamiltoniano? Justifique

Resposta: Sim, pois podemos exibir o seguinte ciclo Hamiltoniano: $bgcdfaeb$.

(e) Calcule o diâmetro de G, e dê o seu centro. Justifique.

Resposta: Sabemos que:

A distância entre vértices v, w, denotada por $d(v, w)$ é o tamanho do menor caminho entre v e w, caso exista algum.

A excentricidade de um vértice v, denotada por $e(v)$, é a maior distância de v a qualquer outro vértice do grafo.

O diâmetro de um grafo G, denotado por $\text{diam}(G)$, é o valor da maior excentricidade de G.

O centro de um grafo G, denotado por $C(G)$, é o conjunto de vértices com a menor excentricidade de G.

Assim, como $e(a) = e(b) = e(c) = e(d) = e(e) = 2$ e $e(f) = e(g) = 3$, temos que $\text{diam}(G) = 3$ e $C(G) = \{a, b, c, d, e\}$.