Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD1 - Segundo Semestre de 2018

Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (1.5) Considere os conjuntos A, B, C e o conjunto de partes de A, $P(A)$. Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Justifique cada resposta.

   (a) $A \subseteq P(A)$;

   Resposta: Falsa. Seria correto afirmar que $A \in P(A)$, ou ainda que $\{A\} \subseteq P(A)$.

   (b) $\{\emptyset\} \subseteq P(A)$;

   Resposta: Verdadeira. Como $\emptyset \in P(A), \forall$ conjunto A, $\{\emptyset\} \subseteq P(A)$.

   (c) $[(A - B) \cup (B - A)] \cap C = [(A \cap C) - B] \cup (B \cap C)$

   Resposta: Falsa. Observe os Diagramas de Venn da Figura 1.

2. (1.0) Os 50 alunos de uma turma escolheram ou fazer capoeira, ou música ou cerâmica como atividades extracurriculares. Tem-se que 30 deles fazem música, 20 capoeira, 15 cerâmica, 10 fazem música e

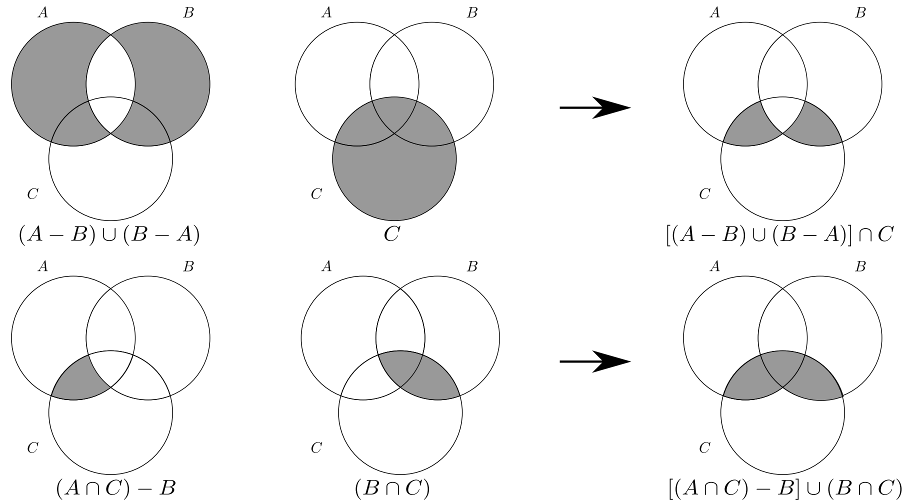

Figura 1: Diagramas de Venn que ilustram a falsidade do item (c).

capoeira, 4 música e cerâmica e 5 fazem capoeira e cerâmica.
Usando o Princípio da Inclusão e Exclusão, determine o número de alunos que fazem música, capoeira e cerâmica. Justifique.

Resposta: Sejam K, M, C os conjuntos dos alunos que cursam capoeira, música e cerâmica, respectivamente. Queremos determinar o valor de $n(K\cap M\cap C)$ utilizando o PIE, que garante que:

$$n(K\cup M\cup C)=n(K)+n(M)+n(C)-n(K\cap M)-n(K\cap C)-n(M\cap C)+n(K\cap M\cap C)$$

Como a turma é composta por 50 alunos, temos que $n(K\cup M\cup C)=50$. Além disso, sabemos que $n(K)=20, n(M)=30, n(C)=15, n(K\cap M)=10, n(K\cap C)=5, n(M\cap C)=4$. Logo, pelo PIE,

$$n(K\cap M\cap C)=4$$

3. (2.0) Mostre pelo Princípio da Indução Matemática que:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2^n}=\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3\times 2^n} \text{ para todo } n\in\mathbb{Z}_+.$$

Resposta: Seja $P(n): 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2^n}=\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3\times 2^n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

BASE DA INDUÇÃO: Como $\frac{2^2+(-1)^1}{3\times 2^1}=\frac{1}{2}$ e $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, temos que $P(1)$ é verdadeira.

HIPÓTESE DA INDUÇÃO: Suponha que $P(k): 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{(-1)^k}{2^k}=\frac{2^{k+1}+(-1)^k}{3\times 2^k}$ seja verdadeira $\forall k\in\mathbb{Z}_+$.

PASSO INDUTIVO: Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeira então $P(k+1): 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}}=\frac{2^{k+2}+(-1)^{k+1}}{3\times 2^{k+1}}$ é verdadeira.

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{(-1)^k}{2^k}}_{\text{H.I}}+\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}}=$$

$$\frac{2^{k+1}+(-1)^k}{3\times 2^k}+\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}}=$$

$$\frac{2^{k+2}+(-1)^k\times 2+3\times(-1)^{k+1}}{3\times 2^{k+1}}=$$

$$\frac{2^{k+2}+(-1)^{k+1}[(-1)^{-1}\times 2+3]}{3\times 2^{k+1}}=$$

$$\frac{2^{k+2}+(-1)^{k+1}[-2+3]}{3\times 2^{k+1}}=$$

$$\frac{2^{k+2}+(-1)^{k+1}}{3\times 2^{k+1}}$$

Logo, pelo PIM, temos que $P(n): 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2^n}=\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3\times 2^n}$, é verdadeira $\forall n\in\mathbb{Z}_+$.

4. (2.0) Uma embarcação deve ser tripulada por 10 pessoas que devem ser escolhidas entre 15 participantes. Um participante só rema do lado direito e outro participante somente rema do lado esquerdo. De quantos modos podemos formar uma tripulação se de cada lado devemos ter

5 tripulantes. Tanto a participação de tripulantes diferentes como a ordem dos tripulantes em cada lado distingue as tripulações. Justifique.

Resposta: Como existem dois participantes que só remam em um lado específico, vamos dividir a solução em 3 casos.

- Os dois participantes com restrição de lado não estão na tripulação.

  Neste caso, temos que escolher 5 participantes entre os 13 restantes para tripular um lado da embarcação, o que fazemos de $A_{13}^5 = \frac{13!}{8!}$ maneiras distintas, e em seguida, devemos escolher 5 dos 8 participantes restantes para tripular o outro lado da embarcação, o que pode ser feito de $A_8^5 = \frac{8!}{3!}$ formas. Assim, pelo PM, temos $A_{13}^5 \times A_8^5$ formas de tripular a embarcação neste caso. Observemos que $A_{13}^5 \times A_8^5 = \frac{13!}{8!} \times \frac{8!}{3!} = \frac{13!}{3!} = A_{13}^{10}$, que corresponde ao raciocínio equivalente de considerar a distribuição dos participantes na embarcação sem contar os que remam de um único lado.

- Os dois participantes com restrição de lado estão na tripulação.

  Neste caso, vamos escolher e posicionar os outros tripulantes em cada lado da embarcação para depois posicionar os participantes com restrição. Podemos escolher e posicionar os tripulantes de um lado de $A_{13}^4 = \frac{13!}{9!}$ formas e, em seguida, posicionar os restantes do outro lado de $A_9^4 = \frac{9!}{5!}$ formas. Para posicionar os participantes com restrições, temos que escolher uma entre as 5 posições possíveis em cada lado da embarcação. Assim, pelo PM, temos $A_{13}^4 \times 5 \times A_9^4 \times 5$ maneiras de tripular a embarcação neste caso. Analogamente, temos $A_{13}^4 \times A_9^4 \times 5^2 = A_{13}^8 \times 5^2$.

- Apenas um participante com restrição está na tripulação.

  Neste caso, vamos escolher e posicionar os outros tripulantes em cada lado da embarcação para depois posicionar o participante com restrição em um dos lados. Podemos escolher e posicionar os tripulantes de um lado de $A_{13}^4 = \frac{13!}{9!}$ formas e, em seguida, posicionar os restantes do outro lado de $A_9^5 = \frac{9!}{4!}$ formas. Como temos duas maneiras de escolher o participante com restrição, e, além disso, temos 5 possíveis posições para posicioná-lo, pelo PM temos, $2 \times 5 \times A_{13}^4 \times A_9^5$ formas de tripular a navegação neste caso.

Assim, pelo PA, temos $A_{13}^5 \times A_8^5 + A_{13}^4 \times 5 \times A_9^4 \times 5 + 2 \times 5 \times A_{13}^4 \times A_9^5$ maneiras distintas de tripular esta navegação satisfazendo as restrições impostas.

5. (1.5) Um estudante precisa selecionar 5 disciplinas, entre 12, para o próximo semestre e uma delas tem de ser Física ou Álgebra Linear. De quantas maneiras o estudante pode escolher suas disciplinas? Justifique.

   Resposta: Observe que o estudante deve cursar pelo menos uma disciplina entre Física ou Álgebra Linear e pode, inclusive, cursar ambas. Assim, vamos resolver a questão dividindo-a em 2 casos.

   - Ele vai cursar, exclusivamente, uma das disciplinas.

     Neste caso, ele tem que escolher outras 4 disciplinas para cursar dentre as 10 restantes, o que pode ser feito de $C_{10}^4 = \frac{10!}{4!6!}$ formas. Como ele pode escolher entre Física ou Álgebra Linear, pelo PM, temos $2 \times C_{10}^4$.
   - Ele vai cursar ambas, Física e Álgebra Linear.

     Então, resta-lhe escolher outras 3 disciplinas para cursar, o que pode ser feito de $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!}$ formas distintas.

   Daí, pelo PA, o aluno pode escolher sua grade curricular de $2 \times C_{10}^4 + C_{10}^3$ formas distintas.

6. (2.0) De quantas maneiras é possível arranjar as letras da palavra **PROBABILIDADE** de forma que:

   (a) as vogais fiquem consecutivas e as consoantes também,

   Resposta: Inicialmente, vamos permutar somente as vogais e somente as consoantes levando em consideração as repetições. Desta forma temos $P_6^{1,2,2,1} = \frac{6!}{1!2!2!1!}$ formas de posicionar as vogais de maneira consecutiva, e $P_7^{1,1,2,2,1} = \frac{7!}{1!1!2!2!1!}$ formas de posicionar as consoantes de maneira consecutiva. Agora vamos considerar as 6 vogais como uma única letra, bem como as 7 consoantes e permutar essas duas “letras”, pois podemos ter VOGAIS CONSOANTES ou CONSOANTES VOGAIS. Assim, pelo PM, temos $2 \times P_6^{1,2,2,1} \times P_7^{1,1,2,2,1}$ maneiras de arranjar as letras da palavra **PROBABILIDADE** respeitando as restrições.

(b) não fiquem **I**'s consecutivos e não fiquem **B**'s consecutivos.
Justifique os dois itens.

Resposta: Não podemos ter I's consecutivos nem B's consecutivos. Desta forma, se I (resp. B) é o conjunto das palavras com I's (resp. B's) consecutivos, então queremos determinar $n(\overline{I} \cap \overline{B}) = n(\overline{I \cup B}) = n(U) - n(I \cup B)$, onde U é o conjunto de todos os possíveis anagramas da palavra **PROBABILIDADE**. Utilizando o PIE, temos $n(I \cup B) = n(I) + n(B) - n(I \cap B)$.

- Cálculo de $n(U)$
  A palavra **PROBABILIDADE** possui 1P, 1R, 1O, 2B's, 2A's, 2I's, 2D's, 1L e 1E, totalizando 13 letras.
  $P_{13}^{1,2,2,1,1,1,2,2,1} = \frac{13!}{1!2!2!1!1!1!2!2!1!}$
- Cálculo de $n(I)$ (resp. $n(B)$)
  Vamos considerar os dois I's (resp. B's) como uma única letra e, desta forma, vamos posicioná-la junto com as outras 11 letras, totalizando 12 letras a serem permutadas. Podemos fazer isso de $P_{12}^{1,1,2,2,1,1,1,2,1} = \frac{12!}{1!1!2!2!1!1!1!2!1!}$ formas distintas.
- Cálculo de $n(I \cap B)$
  Vamos posicionar todas as letras, considerando os I's como uma única letra, assim como os B's. Note que temos, desta forma temos 11 letras a serem permutadas. Portanto, temos $P_{11}^{1,1,1,2,2,1,1,1,1} = \frac{11!}{1!1!1!2!2!1!1!1!1!}$ formas distintas de fazer isso.

Portanto, temos

$$n(I \cup B) = 2 \times P_{12}^{1,1,2,2,1,1,1,2,1} - P_{11}^{1,1,1,2,2,1,1,1,1}.$$

Daí, existem

$n(\overline{I} \cap \overline{B}) = n(U) - n(I \cup B) = P_{13}^{1,2,2,1,1,1,2,2,1} - (2 \times P_{12}^{1,1,2,2,1,1,1,2,1} - P_{11}^{1,1,1,2,2,1,1,1,1})$ anagramas da palavra **PROBABILIDADE** que não possuem I's consecutivos nem B's consecutivos.