Exercícios

1. Sejam $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $A = \{0, 4\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$, $C = \{1, 4\}$, $D = \{0, 1\}$. Determine os seguintes conjuntos:

   a. $A \cup B$ c. $A \cap \overline{B}$ e. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ g. $A \cup \overline{B}$ i. $B - \overline{A}$

   b. $B \cap C$ d. $A \cup (B \cap C)$ f. $(\overline{A \cap B}) \cup (\overline{A \cap C})$ h. $A - B$ j. $A \cup (B \cap C \cap D)$

2. Represente por meio de um diagrama de Venn a diferença simétrica entre dois conjuntos, $A \,\Delta\, B$, definida por

   $$A \,\Delta\, B := (A - B) \cup (B - A)$$

3. Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto universo U. Represente por meio de diagramas de Venn as seguintes situações.

   (i) $A \subset B \subset C$ (iii) $A \subseteq B \cup C$ (v) $A \subseteq B - C$

   (ii) $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$ (iv) $A \subseteq \overline{B}$

4. Verifique, usando os diagramas de Venn as seguintes igualdades:

   (i) $(A - B) \cup B = A \cup B$ (iv) $A - B = A \cap \overline{B}$ (vii) $(A \cap D) \cup \overline{D} = A \cup \overline{D}$

   (ii) $(A - B) \cap B = \varnothing$ (v) $(\overline{\overline{A}}) = A$

   (iii) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$ (vi) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

5. Mostre que $A \subseteq B$ e $A \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B \cap C$

   Dica: Lembre-se da definição de inclusão de conjuntos ("$D \subseteq E$" significa que "se $x \in D$ então $x \in E$").
   Para mostrar que $A \subseteq B \cap C$ considere um elemento de A e deve chegar à conclusão de que $x \in B \cap C$ usando para isso as hipóteses da questão.

6. Mostre que $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \varnothing$

   Dica: Mostre primeiro: $A \subseteq B \Rightarrow A - B = \varnothing$. Depois mostre a implicação inversa:
   $A - B = \varnothing \Rightarrow A \subseteq B$

7. Mostre que $A - B \subseteq A$

8. Mostre que $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$

9. Dados os conjuntos $C = \{ x \in \mathbb{N} \mid x$ é múltiplo de $2 \}$, $D = \{ x \in \mathbb{N} \mid x$ é múltiplo de $3 \}$, $E = \{ x \in \mathbb{N} \mid x$ é múltiplo de $6 \}$, verifique que $C \cap D = E$.

10. Considere $A = \{ x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x^2 \leq 300 \}$, $B = \{ x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq 3x - 2 \leq 30 \}$. Calcule:

(i) $A \cup B$ (iii) $A - B$ (v) $\overline{A} \cap \overline{B}$

(ii) $A \cap B$ (iv) $B - A$ (vi) $\overline{A} \cup \overline{B}$

11. Dado C = { 2, -1, 5 }, considere o conjunto universo sendo o conjunto de partes de C, U = P(C). Calcule:

(i) $\overline{A}$ (ii) $A \cap B$

para $A = \{ \{2, -1\}, \{2\} \}$, $B = \{ \{5\}, \{2, -1, 5\}, \{-1, 2\} \}$.

12. Use a propriedade distributiva da interseção em relação a união de conjuntos para provar que $(A \cap D) \cup \overline{D} = A \cup \overline{D}$.

13. Prove que $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.

Dica: Use a igualdade $A - B = A \cap \overline{B}$ vista no exercício 4(iv), uma das propriedades distributivas, uma das leis de Morgan e a identidade vista em 4(v).

14. Mostre as seguintes igualdades:

(i) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$ (isto é, $A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cap B)$)

(ii) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

15. Dados os seguintes conjuntos: $A = \{ x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq 7 \}$, $B = \{ x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 7 \}$ Verifique que:

(i) $A = B$ (ii) $\overline{A} \neq \overline{B}$

16. Exercício comentado: Mostre a seguinte igualdade

$$[\,(A - B) \cup (B - A)\,] \cap C = [\,(A \cap C) - B\,] \cup [\,(B \cap C) - A)$$

Prova: Raciocínio correto:

$$[\,(A - B) \cup (B - A)\,] \cap C =$$

(propriedade da diferença $A - B = A \cap \bar{B}$) $= [(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})] \cap C =$

(propriedade distributiva) $= [(A \cap \bar{B}) \cap C] \cup [(B \cap \bar{A}) \cap C] =$

(prop. comutativa e associativa da interseção) $= [(A \cap C) \cap \bar{B}] \cup [(B \cap C) \cap \bar{A}] =$

(propriedade da diferença) $= [(A \cap C) - B] \cup [(B \cap C) - A]$

Raciocínio incorreto: $[(A - B) \cup (B - A)] \cap C = [(A \cap C) - B] \cup [(B \cap C) - A]$

$$[(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})] \cap C = [(A \cap C) \cap \bar{B}] \cup [(B \cap C) \cap \bar{A}]$$

$$[(A \cap \bar{B}) \cap C] \cup [(B \cap \bar{A}) \cap C] = [(A \cap C) \cap \bar{B}] \cup [(B \cap C) \cap \bar{A}]$$

$$[(A \cap C) \cap \bar{B}] \cup [(B \cap C) \cap \bar{A}] = [(A \cap C) \cap \bar{B}] \cup [(B \cap C) \cap \bar{A}]$$

Portanto, a igualdade é verdadeira.

Ainda que cada passagem esteja bem justificada, o raciocínio continua incorreto.

Porquê? Tente você mesmo responder à pergunta. Pense ... e depois veja a resposta.

O erro deste raciocínio está em que para provar a igualdade está se partindo justamente dela e através de raciocínios corretos chega-se a uma identidade, de um lado exatamente igual ao outro. Você poderia ter partido de uma falsidade e ter chegado a uma verdade, mas com este raciocínio está se supondo que chegou-se a provar o que queria, ou seja, a igualdade inicial.

Não está convencido? Vejamos o seguinte exemplo.

Prove que $-1 = 1$

Prova: Usamos o raciocínio incorreto:

$-1 = 1 \qquad (-1)^2 = 1^2 \qquad 1 = 1$

Chegamos a uma identidade então, por este raciocínio incorreto temos que -1 = 1. Partimos de uma proposição falsa e chegamos a uma verdadeira.

Atenção: Partir do que está tentando-se provar não pode ser feito da maneira mecânica como no raciocínio incorreto.

Modificação do raciocínio incorreto

Provar que $[(A - B) \cup (B - A)] \cap C = [(A \cap C) - B] \cup [(B \cap C) - A]$ é equivalente a provar que

$[(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})] \cap C = [(A \cap C) \cap \bar{B}) \cup [(B \cap C) \cap \bar{A}]$ devido a propriedade da diferença.

Pela propriedade distributiva, mostrar esta última igualdade é equivalente a provar que

$[(A \cap \bar{B}) \cap C] \cup [(B \cap \bar{A}) \cap C] = [(A \cap C) \cap \bar{B}] \cup [(B \cap C) \cap \bar{A}]$

Pelas propriedades associativa e comutativa, mostrar esta última igualdade é equivalente a provar que

$[(A \cap C) \cap \bar{B}] \cup [(B \cap C) \cap \bar{A}] = [(A \cap C) \cap \bar{B}] \cup [(B \cap C) \cap \bar{A}]$ que é verdadeira.

Logo, pelas igualdades equivalentes provamos que $[(A - B) \cup (B - A)] \cap C = [(A \cap C) - B] \cup [(B \cap C) - A]$ é verdadeira.

(Observe que, -1 = 1 não é equivalente a $(-1)^2 = 1^2$)

Outra modificação: $[(A - B) \cup (B - A)] \cap C =$

(propriedade $A - B = A \cap \bar{B}$) $= [(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})] \cap C =$

(propriedade distributiva) $= [(A \cap \bar{B}) \cap C] \cup [(B \cap \bar{A}) \cap C] =$

(prop. comutativa e associativa da interseção) $= [(A \cap C) \cap \bar{B}] \cup [(B \cap C) \cap \bar{A}]$ (1)

Por outro lado temos que: $[(A \cap C) - B] \cup [(B \cap C) - A] =$

(propriedade $A - B = A \cap \bar{B}$) $= [(A \cap C) \cap \bar{B}] \cup [(B \cap C) \cap \bar{A}]$ (2)

De (1) e (2) resulta que $[(A - B) \cup (B - A)] \cap C = [(A \cap C) - B] \cup [(B \cap C) - A]$