Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da EP da Aula 12

Observações:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.
2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo antes de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.
3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

---

1. De quantas maneiras podemos distribuir 6 laranjas entre 2 pessoas?

   Resposta: Denominemos as pessoas de a e b. O total de distribuições é igual ao número de soluções inteiras e não negativas de $a + b = 6$. Portanto, temos $CR_2^6 = CR(2, 6) = C(6 + 2 - 1, 6) = C(7, 6) = 7$.

2. Queremos comprar 12 docinhos. De quantas maneiras os podemos escolher se têm 8 variedades diferentes de docinhos?

   ***R*esposta:** Existem 8 tipos de doce, seja x_i o número de docinhos do tipo i que foram comprados para $1 \leq i \leq 8$.

   Logo,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 &= 12 \\ x_i \geq 0, \ \forall \ \ 1 \leq i \leq 8, \end{aligned}$$

   Portanto, podemos comprar os doces de $CR_8^{12} = C(8 + 12 - 1, 12) = C(19, 12) = \frac{19!}{12!7!}$ formas distintas.

3. De quantas maneiras podemos colocar 20 bolas da mesma cor em 5 caixas de modo que nenhuma caixa fique vazia?

   ***R*esposta:** Seja x_i o número de bolas na caixa i, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Este problema equivale a calcular o número de soluções inteiras não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$ com $x_i > 0$, ou seja, $x_i \geq 1$ para todo $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Fazendo $x_i^* = x_i - 1$ e substituindo na equação, temos $(x_1^* + 1) + (x_2^* + 1) + (x_3^* + 1) + (x_4^* + 1) + (x_5^* + 1) = 20$ com $x_i^* \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq 5$.
   Portanto, o nosso problema é equivalente a encontrar o número de soluções inteiras não negativas de $x_1^* + x_2^* + x_3^* + x_4^* + x_5^* = 15$ com $x_i^* \geq 0$ para todo $i = 1, 2, 3, 4, 5$ que corresponde a $CR(5, 15) = C(19, 15) = 3876$.

4. Quantas são as soluções inteiras não negativas de $x + y + z < 10$?

   ***R*esposta:** Note que o número de soluções inteiras não negativas deste problema é igual ao número de soluções inteiras não negativas de $x+y+z \leq 9$, e por sua vez esta inequação tem o mesmo número de soluções inteiras não negativas de $x + y + z + u = 9$.

   O total de soluções inteiras e não negativas de $x + y + z + u = 9$ é $CR_4^9 = C(4 + 9 - 1, 9) = C(12, 9) = 220$.

   *O*bservação: Tente resolver a questão usando outro raciocínio.

5. Quantas são as soluções inteiras positivas de $x + y + z < 10$?

   ***R*esposta:** O problema é equivalente a encontrar as soluções inteiras de $x + y + z < 10$ com $x \geq 1$, $y \geq 1$ e $z \geq 1$. Fazendo as seguintes transformações de variáveis: $x^* = x - 1 \geq 0$, $y^* = y - 1 \geq 0$ e $z^* = z - 1 \geq 0$, temos $x^* + y^* + z^* < 7$. Procedendo como na questão anterior, devemos calcular o número de soluções inteiras não negativas de $x^* + y^* + z^* + u = 6$ que é $CR_4^6 = C(4 + 6 - 1, 6) = C(9, 6) = 84$.

6. Quantos números inteiros entre 1 e 100000 inclusive têm soma dos algarismos igual a 6?
   *O*bservação: Ao número 1 associe a seqüência 00001.

   ***R*esposta:** Primeiro notemos que a soma dos algarismos de 100000 não é 6, logo consideraremos números entre 1 e 99999, e convencionaremos que qualquer número será representado por uma seqüência de 5 dígitos.

   Representaremos um número qualquer por $abcde$. Devemos ter $a + b + c + d + e = 6$, com a, b, c, d, e inteiros não negativos. Logo, o total de números é $CR_5^6 = C(5 + 6 - 1, 6) = C(10, 6) = 210$.

7. Quantos números inteiros entre 1 e 1000 inclusive têm a soma dos dígitos menor que 7?

   ***R*esposta:** Observemos que o número 1000 tem a soma dos dígitos menor que 7.

   Por separado, analisaremos a quantidade de números inteiros entre 1 e 999 inclusive que têm a soma dos dígitos menor que 7.
   Representaremos os números por seqüências de 3 dígitos, abc, e procederemos agora como no ítem anterior. O total de números números inteiros entre 1 e 999 inclusive que têm a soma dos dígitos menor que 7 é igual ao número de soluções inteiras não negativas de $a+b+c \leq 6$, que é igual ao número de soluções inteiras não negativas de $a+b+c+u = 6$ dado por $CR_4^6 = C(4 + 6 - 1, 6) = C(9, 6) = 84$.

   Portanto, pelo princípio aditivo, temos que a quantidade de números inteiros entre 1 e 1000 inclusive que têm a soma dos dígitos menor que 7 é $1 + 84 = 85$.

8. Quantas soluções inteiras existem para a equação $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ sendo:

(i) $1 \leq x_1 \leq 6$, $x_i \geq 0$ para $i = 2,3,4$.

***R*esposta:** Consideramos o conjunto de 4-uplas ordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4), com $x_i \in \mathbb{Z}$ para $i = 1,2,3,4$ que é $\mathbb{Z}^4 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e definimos:

$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}^4 \mid \sum_{i=1}^{4} x_i = 20, x_i \geq 0, i = 1,2,3,4\}$,
$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid 1 \leq x_1 \leq 6\}$,
$B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid x_1 \geq 1\}$,
$C = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid x_1 \geq 7\}$.

O conjunto U é o conjunto universo. Observemos que $A = B - C$ e $C \subseteq B$. Portanto, $n(A) = n(B) - n(C)$ (ver exercício 1 da lista correspondente à aula 3). Para resolver nosso problema, que corresponde a calcular $n(A)$, devemos encontrar $n(B)$ e $n(C)$.

Obtenção de $n(B)$: Definindo $x_1^* = x_1 - 1$ temos que $n(B)$ é o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1^* + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ com $x_1^* \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ e $x_4 \geq 0$, que corresponde a $CR_4^{19} = C(19+4-1, 19) = C(22, 19) = 1540$. Logo, $n(B) = 1540$.

Obtenção de $n(C)$: Considerando $y_1 = x_1 - 7$ obtemos $n(C)$ como sendo o número de soluções inteiras não negativas da equação $y_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13$ com $y_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ e $x_4 \geq 0$, dado por $CR_4^{13} = C(13+4-1, 13) = C(16, 13) = 560$. Logo, $n(C) = 560$.

Portanto, o número de soluções inteiras não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ com $1 \leq x_1 \leq 6$, $x_i \geq 0$ para $i = 2,3,4$ é dado por $n(A) = n(B) - n(C) = 1540 - 560 = 980$.

(ii) $1 \leq x_1 \leq 6$, $1 \leq x_2 \leq 7$, $x_i \geq 0$ para $i = 3,4$.

***R*esposta:** Consideramos o conjunto universo U da parte (i). Definimos os seguintes conjuntos:

$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid 1 \leq x_1 \leq 6,\ 1 \leq x_2 \leq 7\}$
$B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 1\}$,
$C_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid x_1 \geq 7,\ x_2 \geq 1\}$,
$C_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid x_1 \geq 1, x_2 \geq 8\}$.

Notemos que $A = B - (C_1 \cup C_2)$ e $C_1 \cup C_2 \subseteq B$. Portanto, o número de elementos de A, que é o que queremos calcular, verifica que $n(A) = n(B) - n(C_1 \cup C_2)$.

Obtenção de $n(B)$: Temos que $n(B)$ é igual ao número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1^* + x_2^* + x_3 + x_4 = 18$ com $x_1^* = x_1 - 1 \geq 0$, $x_2^* = x_2 - 1 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ e $x_4 \geq 0$, que corresponde a $CR_4^{18} = C(18 + 4 - 1, 18) = C(21, 18) = 1330$. Isto é, $n(B) = 1330$.
Obtenção de $n(C_1 \cup C_2)$: Pelo princípio de inclusão e exclusão, sabemos que:

$$n(C_1 \cup C_2) = n(C_1) + n(C_2) - n(C_1 \cap C_2).$$

O número de elementos de $n(C_1)$ é igual ao número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1^* + x_2^* + x_3 + x_4 = 12$ com $x_1^* = x_1 - 7 \geq 0$, $x_2^* = x_2 - 1 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ e $x_4 \geq 0$, que é dado por $CR_4^{12} = C(12 + 4 - 1, 12) = C(15, 12) = 455$. Isto é, $n(C_1) = 445$.
Usando o mesmo raciocínio para calcular $n(C_2)$, obtemos que $n(C_2) = CR_4^{11} = C(11 + 4 - 1, 11) = C(14, 11) = 364$.
Como $n(C_1 \cap C_2)$ corresponde às soluções inteiras não negativas de $x_1^* + x_2^* + x_3 + x_4 = 5$ com $x_1^* = x_1 - 7 \geq 0$, $x_2^* = x_2 - 8 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ e $x_4 \geq 0$, resulta $n(C_1 \cap C_2) = CR_4^5 = C(8, 5) = 56$.
Logo,$n(C_1 \cup C_2) = 455 + 364 - 56 = 763$.
Portanto, $n(A) = 1330 - 763 = 567$ que é o queriamos calcular.

(iii) $1 \leq x_1 \leq 6$, $1 \leq x_2 \leq 7$, $1 \leq x_3 \leq 8$, $1 \leq x_4 \leq 9$.

Resposta: Para o desenvolvimento deste ítem é usado o mesmo raciocínio da parte (ii).
Consideramos o conjunto universo da parte (i). Definimos os seguintes conjuntos:
$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid 1 \leq x_1 \leq 6, 1 \leq x_2 \leq 7, 1 \leq x_3 \leq 8, 1 \leq$

$x_4 \leq 9\}$,
$B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 1, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1\}$,
$C_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid x_1 \geq 7,\ x_2 \geq 1, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1\}$,
$C_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid x_1 \geq 1, x_2 \geq 8, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1\}$,
$C_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_3 \geq 9, x_4 \geq 1\}$,
$C_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_3 \geq 1, x_4 \geq 10\}$.

Temos que $A = B - (C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4)$, sendo $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \subseteq B$.
Portanto, $n(A) = n(B) - n(C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4)$.
Pelo princípio de inclusão e exlusão temos que:
$n(C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4) = n(C_1) + n(C_2) + n(C_3) + n(C_4) -$
$[n(C_1 \cap C_2) + n(C_1 \cap C_3) + n(C_1 \cap C_4) + n(C_2 \cap C_3) +$
$n(C_2 \cap C_4) + n(C_3 \cap C_4)] +$
$n(C_1 \cup C_2 \cup C_3) + n(C_1 \cup C_2 \cup C_4) + n(C_2 \cup C_3 \cup C_4) + n(C_1 \cup C_3 \cup C_4) -$
$n(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4)$

Logo, resta calcular cada somando da igualdade acima. Continue com o desenvolvimento.