Gabarito da AD1 - Fundamentos de Algoritmos para Computação

1. (1.0) Verifique se cada uma das afirmacões abaixo é verdadeira. Se for falsa, justifique e faça a devida modificação de modo a torná-la verdadeira. Caso seja verdadeira, justifique.

   (a) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}, \sqrt{2}, \pi\}$

   Resposta:

   A afirmativa é verdadeira, $\{\emptyset\}$ é um elemento do conjunto $A = \{\{\emptyset\}, \sqrt{2}, \pi\}$ e, usamos o símbolo *pertence* ($\in$) para relacionar elementos de conjuntos.

   (b) $\{1, 2\} \subseteq \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

   Resposta:

   A afirmação é falsa, pois se um conjunto $A \subseteq B$, temos que todo elemento de A deve pertencer ao conjunto B, no entanto 1 e 2 (os elementos de $\{1, 2\}$) não são elementos de B.

   As afirmações corretas são:

   $\{1, 2\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

   OU

   $\{\{1\}, \{2\}\} \subseteq \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

2. (1.5) Mostre, sem usar diagramas de Venn, a seguinte equivalência:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$$

   Resposta:

   ($\Rightarrow$) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$

   Se $x \in A \cup B$, então $x \in A$ ou $x \in B$. Por hipótese, se $x \in A$, então $x \in B$. Concluímos portanto que se $x \in A \cup B$, então $x \in B$. Isto significa que $A \cup B \subseteq B$. Por definição de união, $B \subseteq A \cup B$. Logo, $A \cup B = B$.

   ($\Leftarrow$) $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$

   Seja $x \in A$ então $x \in A \cup B$ e por hipótese tem - se que $A \cup B = B$, logo $x \in B$. Portanto $A \subseteq B$.

3. (1.5) Quantos inteiros, entre 1 e 1000 inclusive, são divisíveis por pelo menos um dos números 2, 3 e 10? Justifique.

   Resposta:

   Sejam $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 1000$ e x é divisível por $2\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 1000$, $x = 2k$ para algum $k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 1000$ e x é divisível por $3\} =$

$\{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 1000,\ x = 3k$ para algum $k \in \mathbb{Z}\}$ e $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 1000$ e x é divisível por $10\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 1000,\ x = 10k$ para algum $k \in \mathbb{Z}\}$.

O conjunto dos números naturais entre 1 e 1000 que é divisível por pelo menos um dos números 2, 3 e 10 é o conjunto $A \cup B \cup C$. Precisamos portanto determinar $n(A \cup B \cup C)$.

Pelo princípio de inclusão e exclusão, sabemos que:

$$n(A\cup B\cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

Calcularemos o número de elementos de cada conjunto:

Como os elementos de A são da forma $2k$ e atendem a condição $1 \leq 2k \leq 1000$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, temos $\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1000}{2}$. Logo, o primeiro elemento de A corresponde a $k = 1$ e o último a $k = 500$, portanto $n(A) = 500$. De forma análoga obtemos que o primeiro elemento de B corresponde a $k = 1$ e o último a $k = 333$, logo $n(B) = 333$. Como o primeiro elemento de C corresponde a $k = 1$ e o último a $k = 100$ temos $n(C) = 100$.

Os demais conjuntos são:

$A \cap B = \{x \in \mathbb{Z} | 1 \leq x \leq 1000$ e x é divisível por 2 e $3\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 1000,\ x = 6k$ para algum $k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 6k, \frac{1}{6} \leq k \leq \frac{1000}{6},\ k \in \mathbb{Z}\} = \{6.1, \ldots, 6.166\}$. Logo, $n(A \cap B) = 166$.

$A \cap C = \{x \in \mathbb{Z} | 1 \leq x \leq 1000$ e x é divisível por 2 e $10\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 1000,\ x = 10k$ para algum $k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 10k, \frac{1}{10} \leq k \leq \frac{1000}{10},\ k \in \mathbb{Z}\} = \{10.1, \ldots, 10.100\}$. Logo, $n(A \cap C) = 100$.

$B \cap C = \{x \in \mathbb{Z} | 1 \leq x \leq 1000$ e x é divisível por 3 e $10\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 1000,\ x = 30k$ para algum $k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 30k, \frac{1}{30} \leq k \leq \frac{1000}{30},\ k \in \mathbb{Z}\} = \{30.1, \ldots, 30.33\}$. Logo, $n(A \cap B) = 33$.

$A \cap B \cap C = \{x \in \mathbb{Z} | 1 \leq x \leq 1000$ e x é divisível por 2, 3 e $10\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 1000,\ x = 30k$ para algum $k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 30k, \frac{1}{30} \leq k \leq \frac{1000}{30},\ k \in \mathbb{Z}\} = \{30.1, \ldots, 30.33\}$. Logo, $n(A \cap B \cap C) = 33$.

Logo,

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= 500 + 333 + 100 - 166 - 100 - 33 + 33 \\ &= 667 \end{aligned}$$

Concluindo, existem 667 números naturais entre 1 e 1000 que são divisíveis por pelo menos um dos números 2, 3 e 10.

4. (1.5) Use o Princípio da Indução Matemática para provar que:

   $\prod_{i=1}^{n}(4i-2) = 2.6.10\ldots(4n-2) = \frac{(2n)!}{n!}$ para todo n natural.

   Resposta:

   Seja $P(n) = \prod_{i=1}^{n}(4i-2) = 2.6.10\ldots(4n-2) = \frac{(2n)!}{n!}$

   Base da indução:

Para $n = 1$, $4.1 - 2 = 2 = \frac{2!}{1!}$, logo $P(1)$ é verdadeira.

Hipótese de Indução:

Suponha verdadeiro para $n = k$, isto é, $P(k)$ é verdadeira:

$$\prod_{i=1}^{k}(4i-2) = 2.6.10\ldots(4k-2) = \frac{(2k)!}{k!}$$

Passo da indução:

Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeiro então $P(k+1)$ é verdadeiro, isto é, temos que provar que: $P(k+1) = \prod_{i=1}^{(k+1)}(4i-2) = 2.6.10\ldots(4(k+1)-2) = \frac{[2(k+1)]!}{(k+1)!}$ é verdadeira. De fato,

$$\begin{array}{ll} \prod_{i=1}^{(k+1)}(4i-2) & = \\ = \underbrace{\prod_{i=1}^{k}(4i-2)}_{(Por\ hipótese\ indutiva)} .(4(k+1)-2) & = \\ = \frac{(2k)!}{k!}.(4(k+1)-2) & = \\ = \frac{(2k)!}{k!}.(4k+2) & = \\ = \frac{(2k)!}{k!}.2.(2k+1) & = \\ = \frac{(2k)!}{k!}.2.(2k+1).\frac{(k+1)}{(k+1)} & = \\ = \frac{(2k+2).(2k+1).(2k)!}{(k+1).k!} & = \\ = \frac{[2(k+1)]!}{(k+1)!} & \end{array}$$

Logo, pelo princípio da indução, a expressão é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

5. (1.0) De quantos modos podemos distribuir 36 objetos distintos em 3 grupos de 12 objetos? Justifique.

Resposta:

O primeiro grupo de 12 objetos pode ser determinado de C_{36}^{12} formas.

Como 12 objetos já foram selecionados, o segundo grupo pode ser determinado de C_{24}^{12} formas.

Por fim o terceiro grupo pode ser determinado de C_{12}^{12} formas.

No entanto, uma dada distribuição (12 elementos no 1º grupo, 12 elementos no 2º grupo e 12 elementos no 3º grupo) será contada repetidas vezes, observe que também contamos esta distribuição ao contar o 1º grupo como 2º, o 2º como 3º e o 3º como 1º. Dessa forma um mesmo agrupamento pode se permutar de $P_3 = 3!$ maneiras entre os 3 grupos, logo:

Pelo princípio multiplicativo, o número total de distribuições dos 36 objetos em 3 grupos é $\frac{C_{36}^{12}C_{24}^{12}C_{12}^{12}}{3!}$.

6. (1.0) Um cubo deve ser pintado, cada face de uma cor, utilizando-se exatamente 5 cores, sendo que as únicas faces da mesma cor devem ser opostas. De quantas maneiras isto pode ser feito? Justifique sua solução.

   Resposta:

   Primeiramente escolhemos uma cor para pintar duas faces opostas, temos 5 cores distintas a nossa disposição.

   Uma vez pintadas as faces opostas, sobram 4 cores para 4 faces, portanto cada face receberá uma cor diferente. Note que as faces restantes estão dispostas em círculo. Logo, contar de quanta formas podemos colorir as 4 faces restantes é equivalente a contar o número de permutações circulares das 4 cores, isto é $(PC)_4 = 3! = 6$.

   Pelo princípio multiplicativo, podemos colorir o dado de 5×6 formas distintas. O total de colorações distintas é 30.

7. (2.5) Calcule cada ítem abaixo, justificando:

   (a) Quantas são as soluções inteiras e não negativas (≥ 0) da equação $x+y+z+w = 30$ tal que $x \geq 2$ e $w \geq 3$.

   Resposta:
   Para resolver este problema faremos a seguinte mudança de variáveis: $x^* = x - 2$ e $w^* = w - 3$, claramente $x^* \geq 0$ e $w^* \geq 0$. Substituindo estas variáveis na equação original obtemos:

   $$\begin{array}{lcl} (x^* + 2) + y + z + (w^* + 3) & = & 30 \\ x^* + y + z + w^* & = & 25 \\ x^*, y, z, w^* \geq 0 & & \end{array}$$

   A equação acima possui o mesmo número de soluções inteiras não negativas que a original, porém com a equação acima sabemos determinar este número: $CR_4^{25} = C_{25+4-1}^{25} = C_{28}^{25} = 3276$.

   (b) Quantas são as soluções inteiras e positivas (> 0) da equação $x + y + z = 21$ tal que $y > 5$.

   Resposta:
   Como $y \in \mathbb{N}$ e $y > 5$, então $y \geq 6$. Procederemos de forma análoga ao ítem anterior, faremos as seguintes mudanças de variáveis: Como x, $z > 0$, então x, $z \geq 1$, $x^* = x - 1$, $y^* = y - 6$ e $z^* = z - 1$. Obteremos a nova equação:

   $$\begin{array}{lcl} (x^* + 1) + (y^* + 6) + (z^* + 1) & = & 21 \\ x^* + y^* + z^* & = & 13 \\ x^*, y^*, z^* \geq 0 & & \end{array}$$

   O número de soluções inteiras não negativas desta equação é o mesmo da equação original, e é $CR_3^{13} = C_{3+13-1}^{13} = C_{15}^{13} = 105$.

(c) Quantas são as soluções inteiras e não negativas (≥ 0) da inequação $x+y+z < 7$.

***1º* raciocínio:**

Resposta:

Como a soma $x+y+z$ assume valores inteiros não negativos e menores que 7, esta soma pode assumir qualquer valor inteiro desde 0 a 6. Além disso, sabemos que o número de soluções inteiras não negativas da equação $x+y+z=k$ é $CR_3^k = C_{k+3-1}^k = C_{k+2}^k$, $\forall\ k \in \mathbb{Z}_+$. Logo, pelo princípio aditivo, o número de soluções inteiras não negativas de $x+y+z<7$ é:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=0}^{6} C_{k+2}^k &= C_2^0 + C_3^1 + C_4^2 + C_5^3 + C_6^4 + C_7^5 + C_8^6 \\ &= 1+3+6+10+15+21+28 \\ &= 84 \end{aligned}$$

Portanto, existem 84 soluções inteiras não negativas de $x+y+z<7$.

***2º* raciocínio:**

Resposta:

Encontrar as soluções inteiras não negativas da equação $x+y+z<7$ é equivalente a encontrar as soluções inteiras não negativas da equação:

$$\begin{aligned} x+y+z+w &= 7 \\ x,y,z \geq 0\ ;\ w>1 & \end{aligned}$$

Logo, fazendo $w^* = w-1$, a equação anterior é equivalente a:

$$\begin{aligned} x+y+z+w^* &= 6 \\ x,y,z,w^* \geq 0 & \end{aligned}$$

O número de soluções inteiras não negativas desta equação corresponde a CR_4^6 $= C_{6+4-1}^6 = \frac{9!}{6!3!} = 84$.