Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP3 - Primeiro Semestre de 2011

Questões:

1. (1,5) Mostre usando indução matemática que:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n} \quad \text{para todo número natural } n.$$

Resposta: Seja

$$P(n) : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n}, \quad \text{para todo número natural } n.$$

Base da indução: Para $n = 1$, temos que, $P(1) : \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$ é verdadeira.

Hipótese de indução:

Suponha que $P(k)$ é verdadeira, sendo assim:

$$P(k) : \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^k}$$

Devemos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, isto é:

$$P(k+1): \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$$

Usando a definição e a hipótese de indução, temos que:

$$\begin{array}{rll} & \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{2^i} & = \\ = & \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^k}}_{\textit{Por hipótese indutiva}} + \frac{1}{2^{k+1}} & = \\ = & 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} & = \\ = & 1 + \frac{-2+1}{2^{k+1}} & = \\ = & 1 - \frac{1}{2^{k+1}} & \end{array}$$

Logo, pelo princípio da indução, a igualdade é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. (1,5) De quantas maneiras podemos selecionar um júri de 6 homens e 7 mulheres em um conjunto de 17 homens e 23 mulheres? Justifique.

   Resposta: Para compor o júri devemos escolher 6 homens em um conjunto de 17 homens, o que nos dá um total de $C(17,6) = \frac{17!}{6!11!}$ maneiras. Analogamente para as mulheres, temos $C(23,7) = \frac{23!}{7!16!}$ maneiras. Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos $C(17,6).C(23,7) = \frac{17!}{6!11!} \cdot \frac{23!}{7!16!}$ júris distintos.

3. (1,5) Quantos números de 4 algarismos podemos formar com os algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ e 8, incluindo sempre o algarismo 5, se:

   (a) os algarismos não podem ser repetidos? Justifique.

   Resposta: Como o algarismo 5 deve estar sempre presente no número de 4 algarismos, temos 4 possibilidades para colocá-lo: ou na primeira, ou na segunda, ou na terceira ou na quarta casa decimal. Após escolhido onde o algarismo 5 vai ficar, vamos alocar os algarismos restantes, que são ao todo 7, e os números não devem possuir algarismos repetidos. Logo, temos 7 algarismos para serem escolhidos 3 a 3, o que corresponde a um arranjo de 7 tomados 3 a 3. Portanto, temos $A(7,3) = \frac{7!}{(7-3)!} = 7.6.5$ possibilidades. Finalmente, pelo princípio multiplicativo, temos $4.7.6.5 = 840$ maneiras de formarmos números de 4 algarismos, que não podem possuir algarismos repetidos, incluindo sempre o algarismo 5.

(b) os algarismos podem ser repetidos? Justifique.

Resposta: Observemos que o total de números de 4 algarismos que podem ser formados com todos os algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ e 8, que podem estar repetidos, correspondem a arranjos com repetição de 8 tomados 4 a 4, $AR(8,4) = 8^4$.
Por outro lado, a quantidade de números de 4 algarismos que podemos formar com os algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ e 8, que podem estar repetidos, onde o 5 não pode aparecer, corresponde a $AR(7,4) = 7^4$. Então, a quantidade de números de 4 algarismos que podemos formar com os algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ e 8, que podem estar repetidos, incluindo sempre o algarismo 5 corresponde a $AR(8,4) - AR(7,4) = 8^4 - 7^4$.

4. (1,5) Calcule a seguinte soma usando o teorema das linhas:

$$C_{10}^1 + C_{10}^2 + \cdots + C_{10}^{10}.$$

Justifique os cálculos.

Resposta: Pelo teorema das linhas temos que:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$$

Tomando $n = 10$, temos:

$$
\begin{aligned}
& C_{10}^{1}+C_{10}^{2}+\cdots+C_{10}^{10} && = \\
= \ & C_{10}^{0}+C_{10}^{1}+C_{10}^{2}+\cdots+C_{10}^{10}-C_{10}^{0} && = \\
= \ & \underbrace{C_{10}^{0}+C_{10}^{1}+C_{10}^{2}+\cdots+C_{10}^{10}}_{\textit{Pelo teorema das linhas}}-C_{10}^{0} && = \\
= \ & 2^{10}-1
\end{aligned}
$$

5. (1.5) Seja G um grafo planar, com sequência de graus de vértices $(2, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 5)$. Determine o número de arestas de G. Justifique.

   Resposta: Temos que em qualquer grafo G, a soma dos graus de todos os vértices é igual a duas vezes o número de arestas, isto é,

   $$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|.$$

   Seja G um grafo planar, com sequência de graus de vértices $(2, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 5)$, logo:

   $$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2+2+2+2+2+4+4+4+4+5+5 =$$

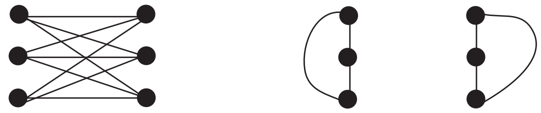
   $$= 36 = 2|E(G)| \Rightarrow \boxed{|\mathrm{E(G)}| = 18}$$

   Portanto, o grafo G possui 18 arestas.

6. (2.5) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for falsa, dê um exemplo e a sua justificação. Se for verdadeira, prove.

   (a) Se G é um grafo bipartido então seu complemento $\overline{G}$ é também um grafo bipartido.

   Resposta: FALSO. Segue abaixo um exemplo onde o grafo G é um $K_{3,3}$, que é um grafo bipartido. O seu complemento $\overline{G}$ não é



um grafo bipartido, já que possui dois ciclos ímpares de tamanho 3 (caracterização dos grafos bipartidos: um grafo é bipartido se e somente se não possui ciclos ímpares).

(b) Se F é uma floresta composta por 5 árvores e o número de vértices de F é 35 então F tem exatamente 30 arestas.

Resposta: VERDADEIRO.

Se F é uma floresta então cada componente conexo G_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$ é acíclico e conexo, isto é, cada G_i é uma árvore. Temos então (por teorema) que G_i possui $m_i = n_i - 1$ arestas, onde n_i é o número de vértices de G_i, e m_i ó número de arestas de G_i. Como:

$$|E(F)| = |E(G_1)| + |E(G_2| + \ldots + |E(G_5)| = m_1 + m_2 + \ldots + m_5$$
$$\Downarrow$$
$$|E(F)| = n_1 - 1 + n_2 - 1 + \ldots + n_5 - 1$$
$$|E(F)| = n_1 + n_2 + \ldots + n_5 - \underbrace{1 - 1 - \ldots - 1}_{5\ vezes}$$
$$|E(F)| = |V(G_1)| + |V(G_2)| + \ldots + |V(G_5)| = n_1 + n_2 + \ldots + n_5 - 5$$
$$|E(F)| = |V(F)| - 5 = 35 - 5 = 30$$

Logo, se F possui 35 vértices e 5 árvores, então F possui 30 arestas.

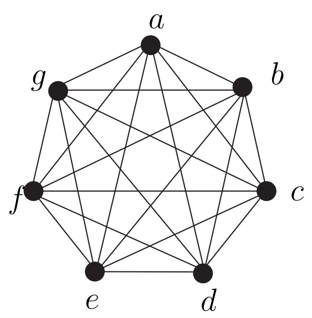
(c) O grafo completo K_7 é um grafo euleriano e é também um grafo hamiltoniano.

Resposta: VERDADEIRO.

A figura abaixo ilustra o grafo completo K_7.

Sabemos que um grafo G é euleriano se e somente se o grau de todos os seus vértices é par.

Temos no grafo K_7 que $d(a) = d(b) = d(c) = d(d) = d(e) = d(f) = d(g) = 6$, isto é, todos os vértices possuem grau par,



satisfazendo a caracterização dos grafos eulerianos. Logo, o K_7 é um grafo euleriano.

O grafo K_7 também é um grafo hamiltoniano, pois possui o seguinte ciclo hamiltoniano: a, b, c, d, e, f, g, a