Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP2 - Segundo Semestre de 2016

1. (1.0) Usando o Teorema das Diagonais calcule a seguinte soma:

$$C_{45}^0 + C_{46}^1 + C_{47}^2 + \cdots + C_{60}^{15}$$

Resposta: Temos que $C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \ldots + C_{n+r}^r = C_{n+r+1}^r$, pelo Teorema das Diagonais. Logo:

$$\begin{array}{ccc} & \underbrace{C_{45}^0 \ + \ C_{46}^1 \ + \ C_{47}^2 \ + \ C_{48}^3 \ + \ \cdots + C_{60}^{15}}_{Teorema\ das\ diagonais,\ quando\ n=45\ e\ r=15} & = \\ = & C_{45+15+1}^{15} & = \\ = & C_{61}^{15} & = \\ = & \frac{61!}{15!46!} & \end{array}$$

2. (1.5) Aplicando a fórmula do Binômio de Newton, calcule o coeficiente de x^{35} no desenvolvimento de $(\sqrt[3]{x} - x^2)^{70}$. Justifique a resposta.

Resposta: Como $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b^k a^{n-k}$ temos que o termo geral desta soma corresponde a

$$T_{k+1} = C_n^k b^k a^{n-k}$$

O objetivo da questão é determinar o coeficiente de x^{35}, portanto devemos encontrar o termo que contém tal coeficiente. Para isso, precisamos determinar k.

Neste caso temos $n = 70$, $a = \sqrt[3]{x}$ e $b = -x^2$. Assim, resulta:

$$
\begin{aligned}
T_{k+1} &= C_{70}^{k}(-x^2)^k\,(\sqrt[3]{x}))^{70-k}\\
&= C_{70}^{k}\,(-1)^k\,x^{2k}\,(x^{\frac{1}{3}})^{70-k}\\
&= C_{70}^{k}\,(-1)^k\,x^{2k}\,x^{\frac{70-k}{3}}\\
&= C_{70}^{k}\,(-1)^k\,x^{2k+\frac{70-k}{3}}\\
&= C_{70}^{k}\,(-1)^k\,x^{\frac{70+5k}{3}}
\end{aligned}
$$

Como queremos encontrar o coeficiente de x^{35}, deve ser $\frac{70+5k}{3} = 35$. Então $k = \frac{35\times 3-70}{5} = \frac{35}{5} = 7$. Logo o coeficiente de x^{35} é dado por:

$$C_{70}^{7}\,(-1)^7 = -C_{70}^{7} = -\frac{70!}{7!63!}.$$

3. (1.5) Encontre a fórmula fechada da relação de recorrência:
$a_n = a_{n-1} + n^2 \qquad n$ natural, $n \geq 1$
$a_0 = -1$
Descreva o processo utilizado para chegar à fórmula.

Resposta: Vamos utilizar substituição regressiva para determinar a fórmula fechada da relação de recorrência.

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + n^2\\
&= \underbrace{a_{n-2} + (n-1)^2}_{a_{n-1}} + n^2\\
&= \underbrace{a_{n-3} + (n-2)^2}_{a_{n-2}} + (n-1)^2 + n^2\\
&\vdots\\
&= a_{n-i} + (n-(i+1))^2 + (n-(i+2))^2 + \ldots + n^2
\end{aligned}
$$

Quando $n - i = 0$, temos $i = n$. Daí,

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_0 + (n-(n+1))^2 + (n-(n+2))^2 + \ldots + n^2\\
&= -1 + [1^2 + 2^2 + \ldots + n^2]
\end{aligned}
$$

4. (1.0) Existe grafo (simples) com 8 vértices e cuja sequência de vértices seja $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$? Justifique.

   Resposta: Seja G um grafo (simples) com 8 vértices $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8)$ com a seguinte sequência de graus: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

   Seja v_1 com $d_G(v_1) = 8$. Observe que v_1 precisa ser adjacente a 8 vértices, mas só temos 7 vértices restantes e, como o grafo é simples, não se pode ter laços. Portanto, não podemos construí-lo.

5. (3.5) As seguintes perguntas devem ser respondidas considerando o grafo $G = (V, E)$, sendo:
   $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ e
   $E = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a), (e, f), (f, g), (g, h), (h, e), (a, e), (b, f), (d, h), (c, g)\}$.

   (a) Desenhe uma representação plana de G.
   Resposta:

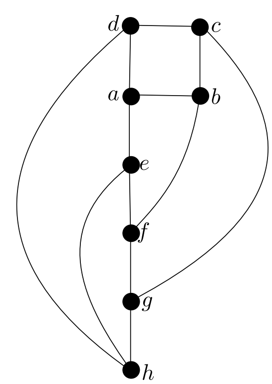

Figura 1: Grafo G.

   (b) G é euleriano? Por que?
   Resposta: Não.
   Temos a seguinte caracterização para grafos eulerianos:

   Um grafo G é euleriano $\Leftrightarrow$ todos os seus vértices têm grau par.

   Nesta questão, G é um grafo 3-regular e, portanto, todos os seus vértices têm grau ímpar, o que contradiz a caracterização de grafo euleriano.

(c) G é hamiltoniano? Por que?

Resposta: Sim, pois podemos exibir o seguinte ciclo hamiltoniano: $a, e, f, g, h, d, c, b, a$.

(d) G é bipartido? Por que? Caso a resposta seja positiva, dê a sua bipartição,

Resposta: Sim, pois todos os seus ciclos são C_4's, ou seja, são ciclos com 4 vértices. Assim, este grafo não possui ciclo ímpar e consequentemente é bipartido (caracterização dos grafos bipartidos). Portanto, podemos apresentar a seguinte bipartição (V_1, V_2) de seu conjunto de vértices V:

$V_1 = \{a, c, f, h\}$ e $V_2 = \{b, d, e, g\}$.

(e) Qual o centro de G. Por que?

Resposta: A excentricidade de um vértice v é a maior distância de v a todos os outros vértices w do grafo. Em outras palavras temos $e(v) = \max_{w \in V(G) \text{ e } w \neq v} d(v, w)$, onde $d(v, w)$ indica a distância de v a w.

O diâmetro de G é a maior excentricidade do grafo. Em outras palavras, o diâmetro dado por: $\{\max_{v \in V(G)} e(v)\}$.

O centro de um grafo G é dado pelo conjunto de vértices do grafo que tem a menor excentricidade, ou seja, $c(G) = \{v \in V(G) | e(v) \text{ é mínima } \}$.

Logo, para calcular o diâmetro e o centro de G, precisamos calcular a excentricidade de cada vértice e para tal, vamos calcular a distância entre cada par de vértices de G.

$d(a, b) = 1, d(a, c) = 2, d(a, d) = 1, d(a, e) = 1, d(a, f) = 2, d(a, g) = 3, d(a, h) = 2;$

$d(b, c) = 1, d(b, d) = 2, d(b, e) = 2, d(b, f) = 1, d(b, g) = 2, d(b, h) = 3;$

$d(c, d) = 1, d(c, e) = 3, d(c, f) = 2, d(c, g) = 1, d(c, h) = 2;$

$d(d, e) = 2, d(d, f) = 3, d(d, g) = 2, d(d, h) = 1;$

$d(e, f) = 1, d(e, g) = 2, d(e, h) = 1;$

$d(f, g) = 1, d(f, h) = 2,$

$d(g, h) = 1$.

Assim, podemos concluir que $e(v) = 3$ para todo vértice $v \in V(G)$. Como todas as excentricidades são iguais temos que o diâmetro de G é 3 e o seu centro é o próprio conjunto $V(G)$.

6. (1.5) Seja G um grafo 5-regular e tal que $|V(G)| = 10$. G é planar? Justifique o SIM ou o NÃO.

   Resposta: Não. Suponha, por absurdo, que G é um grafo planar. Pelo corolário apresentado na aula sobre grafos planares, temos que G possui $|E(G)| \leq 3 \times |V(G)| - 6$. Antes de aplicarmos tal corolário, precisamos descobrir qual o número de arestas do grafo G. Sabemos que $|V(G)| = 10$.

   Pelo Teorema do Aperto de Mãos, temos:

   $$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \times |E(G)|$$

   Como G é 5-regular, isto é, todo vértice de G tem grau 5, temos:

   $$5 \times 10 = 2 \times |E(G)| \Rightarrow |E(G)| = \frac{50}{2} \Rightarrow |E(G)| = 25$$

   Podemos verificar que $|E(G)| = 25 > 3 \times 10 - 6 = 24$, o que contradiz o corolário, podendo concluir que G não é um grafo planar.