Gabarito da AP1 - Primeiro Semestre de 2016

Questões:

1. (2.0) Dado o conjunto:
$$A = \{\emptyset, \{1\}\}$$

   (a) Calcule o conjunto de partes de A, denotado por $P(A)$.

   Resposta: O conjunto das partes de A é o conjunto de todos os seus subconjuntos. Desta forma, o conjunto das partes do conjunto $A = \{\emptyset, \{1\}\}$ é $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}\}$.

   (b) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

   (i) $\{\emptyset\} \in A$

   Resposta: A afirmação é falsa, pois $\{\emptyset\}$ não é elemento do conjunto $A = \{\emptyset, \{1\}\}$. Os únicos elementos deste conjunto são $\emptyset$ e $\{1\}$. Sendo assim, seria correto afirmar:

   - $\{\emptyset\} \subset A$, pois $\{\emptyset\}$ é um subconjunto do conjunto A.
   - $\emptyset \in A$, pois $\emptyset$ é um elemento do conjunto $A = \{\emptyset, \{1\}\}$.

   (ii) $\{\emptyset\} \in P(A)$

   Resposta: A afirmação é verdadeira, pois $\{\emptyset\}$ é um elemento do conjunto $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}\}$.

   (iii) $\{\emptyset\} \subseteq A$

   Resposta: A afirmação é verdadeira, pois $\{\emptyset\}$ é um subconjunto do conjunto $A = \{\emptyset, \{1\}\}$.

2. (1.5) Mostre por indução matemática que:

$$2.2! + 3.3! + \cdots + n.n! = (n+1)! - 2$$

para todo número natural maior ou igual a 2 ($n \geq 2$).

Resposta: Seja $P(n) : 2(2!) + 3(3!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Base da indução: Vamos mostrar que $P(2)$ é verdadeira.

Analisando o lado esquerdo quando $n = 2$, temos: $2(2!) = 4$.

E o lado direito nos fornece: $(2+1)! - 2 = 6 - 2 = 4$.

Logo, $P(2)$ é verdadeira.

Hipótese de indução: Suponha $P(k)$ verdadeira, isto é,

$$2(2!) + 3(3!) + \cdots + k(k!) = (k+1)! - 2, \quad k > 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Passo Indutivo: Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeira então $P(k+1) : 2(2!)+3(3!)+\cdots+k(k!)+(k+1)(k+1)! = [(k+1)+1]!-2 = (k+2)! - 2$ é verdadeira.
De fato, desenvolvendo o primeiro membro de $P(k+1)$, usando a hipótese de indução, a propriedade distributiva e o conceito de fatorial de um número resulta:

$$\begin{aligned}
\underbrace{2(2!) + \cdots + k(k!)}_{\text{H.I.}} + (k+1)(k+1)! &= (k+1)! - 2 + (k+1)(k+1)! \\
&= (k+1)![1 + (k+1)] - 2 \\
&= \underbrace{(k+1)!(k+2)}\; - 2 \\
&= (k+2)! \; - 2
\end{aligned}$$

Concluimos então que $P(k+1)$ é verdadeira.

Logo, pelo princípio da indução matemática,

$$P(n) : 2(2!) + 3(3!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 2$$

é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. (2.0) Oito estudantes universitários, sendo quatro mulheres e quatro homens, formam uma fila. Determine de quantas maneiras diferentes essa fila pode ser formada se:

   (a) as mulheres forem as últimas da fila. Justifique.

   Resposta: Como as mulheres são as últimas da fila, basta permutarmos os homens e depois permutarmos as mulheres. Logo, podemos organizar os 4 homens (mulheres) de 4! maneiras distintas.

   Pelo princípio multiplicativo, temos $4! \times 4!$ maneiras diferentes de se formar uma fila sendo que as mulheres se encontram sempre no fim da fila.

   (b) duas determinadas pessoas sempre ficarem juntas.

   Resposta: Vamos considerar que as duas pessoas A e B, que sempre ficam juntas, sejam uma pessoa só a se considerar. Assim o problema passa a ser organizar 7 pessoas de forma distinta em uma fila, portanto utilizamos 7! possibilidades. Como AB é diferente de BA temos $2 \times 7!$ maneiras de formarmos uma fila de modo que duas determinadas pessoas sempre fiquem juntas.

4. (1.5) Cada usuário em um dado sistema tem uma senha com 8 caracteres. Sabendo que cada caracter é uma letra qualquer (em um alfabeto de 26 letras) ou um digito qualquer (entre 10 digitos), quantas possibilidades de senha existem se cada senha deve conter pelo menos uma letra? Justifique.

   Resposta: Esta questão será feita pelo complemento: Devemos formar uma senha consistindo de 8 caracteres, sendo que a mesma pode conter letras do alfabeto (26 letras) ou dígitos qualquer (10 dígitos). Como importa a ordem e os caracteres podem se repetir, então temos $AR_{36}^{8} = 36^8$ maneiras distintas de formar a senha com 8 caracteres com letras e dígitos qualquer. Agora, devemos formar uma senha consistindo de 8 caracteres, sendo que a mesma contém apenas dígitos (10 dígitos), logo temos $AR_{10}^{8} = 10^8$.

Assim, temos $AR_{36}^8 - AR_{10}^8 = 36^8 - 10^8$ senhas diferentes.

5. (1.5) Quantos são os anagramas da palavra: **TRITRIACONTAEDRO** (poliedro de 33 faces), que não começam por **T** ?

   Resposta: A palavra **T R I T R I A C O N T A E D R O** possui 16 letras: 3 T, 3 R, 2 I, 2 A, 2 O, 1 N, 1 E, 1 D e 1 C.

   Os anagramas podem começar com as letras R, I, A, O, N, E, D ou C.

   O número de anagramas que começam com a letra R é

$$P_{15}^{3,2,2,2,2,1,1,1,1} = \frac{15!}{3!2!2!2!2!1!1!1!1!}$$

   O número de anagramas que começam com a letra I, a letra A ou letra O é

$$P_{15}^{3,3,2,2,1,1,1,1,1} = \frac{15!}{3!3!2!2!1!1!1!1!1!}$$

   O número de anagramas que começam com a letra N, a letra E, a letra D ou letra C é

$$P_{15}^{3,3,2,2,2,1,1,1} = \frac{15!}{3!3!2!2!2!1!1!1!}$$

   Logo, pelo princípio aditivo temos que o número de anagramas da palavra **T R I T R I A C O N T A E D R O** que não começam pela letra **T** é dado por:

$$P_{15}^{3,2,2,2,2,1,1,1,1} + 3 \times P_{15}^{3,3,2,2,1,1,1,1,1} + 4 \times P_{15}^{3,3,2,2,2,1,1,1} =$$

$$\frac{15!}{3!2!2!2!2!1!1!1!1!} + \frac{3 \times 15!}{3!3!2!2!1!1!1!1!1!} + \frac{4 \times 15!}{3!3!2!2!2!1!1!1!} =$$

$$\frac{15!}{3!2!2!2!2!1!1!1!1!} + \frac{15!}{3!2!2!2!1!1!1!1!1!} + \frac{15!}{3!3!2!1!1!1!}$$

   Outra maneira de fazer é usando o complemento:

   O número total de anagramas da palavra **T R I T R I A C O N T A E D R O** é $P_{16}^{3,3,2,2,2,1,1,1,1} = \frac{16!}{3!3!2!2!2!1!1!1!1!}$.

O número de anagramas da palavra **T R I T R I A C O N T A E D R O** que começam com a letra **T** é $P_{15}^{3,2,2,2,2,1,1,1,1} = \frac{15!}{3!2!2!2!2!1!1!1!1!}$.

Logo, o número de anagramas da palavra **T R I T R I A C O N T A E D R OA** que não começam com a letra **T** é:

$$P_{16}^{3,3,2,2,2,1,1,1,1} - P_{15}^{3,2,2,2,2,1,1,1,1} = \frac{16!}{3!3!2!2!2!1!1!1!1!} - \frac{15!}{3!2!2!2!2!1!1!1!1!}$$

6. (1.5) Um senhor deseja comprar 12 buquês de rosas. Cada buquê está formado por rosas de uma única cor: ou vermelhas, ou amarelas ou brancas. Determine o número de maneiras de comprar os 12 buquês, de modo que pelo menos dois buquês sejam de rosas vermelhas, pelo menos um buquê seja de rosas amarelas e pelo menos um buquê seja de rosas brancas. Justifique.

   Resposta: Consideremos as seguintes variáveis:

   x_1: quantidade de buquês com ROSAS VERMELHAS;

   x_2: quantidade de buquês com ROSAS AMARELAS;

   x_3: quantidade de buquês com ROSAS BRANCAS.

   Queremos encontrar o número de maneiras de selecionar 12 buquês de 3 tipos diferentes, de modo que pelo menos dois buquês sejam de rosas vermelhas, pelo menos um buquê seja de rosas amarelas e pelo menos um buquê seja de rosas brancas. Este problema é equivalente a resolver a equação:

   $$x_1 + x_2 + x_3 = 12, \ \ onde \ \ x_1 \geq 2, x_2 \geq 1, x_3 \geq 1$$

   Podemos escrever: $x_1 = x_1'+2$, $x_2 = x_2'+1$, $x_3 = x_3'+1$, onde $x_1', x_2', x_3' \geq 0$. Substituindo na equação acima temos: $x_1' + 2 + x_2' + 1 + x_3' + 1 = 12$, com $x_1', x_2', x_3' \geq 0$, ou seja, $x_1' + x_2' + x_3' = 8$, com $x_1', x_2', x_3' \geq 0$.

   O número de soluções inteiras e não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 = 12$, onde $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 1$ e $x_3 \geq 1$, é o número de soluções inteiras e não negativas de $x_1' + x_2' + x_3' = 8$, onde $x_1', x_2', x_3' \geq 0$, que corresponde a $CR_3^8 = C_{8+3-1}^8 = C_{10}^8 = \frac{10!}{8!2!} = 45$.

Logo, temos $CR_3^8 = 45$ maneiras de comprar 12 buquês de modo que pelo menos dois buquês sejam de rosas vermelhas, pelo menos um buquê seja de rosas amarelas e pelo menos um buquê seja de rosas brancas.