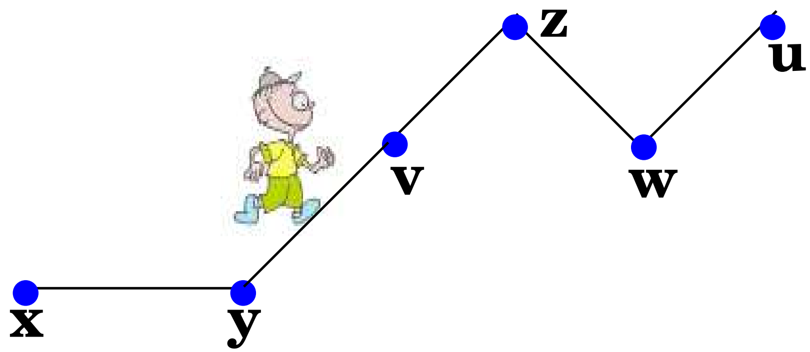
Aula 20: Caminhos e ciclos

Conteúdo:

- Passeio
  - Trajeto
  - Caminho
- Passeio fechado
  - Ciclo
- Conexidade
- Distância
  - Excentricidade
  - Diâmetro
  - Centro
- Grafos especiais
- Caracterização de grafo bipartido

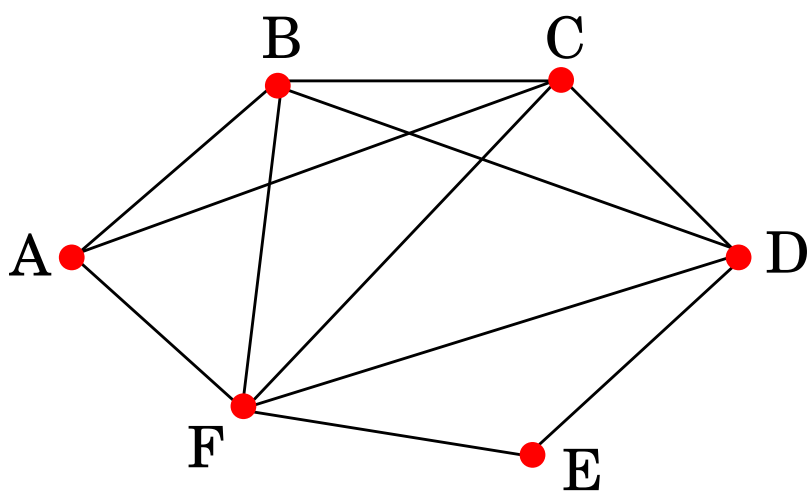
Muitas aplicações que são modeladas por grafos envolvem a idéia de "ir de um vértice a outro" em um grafo, ou seja, a idéia de caminhar em um grafo.



Por exemplo:

No modelo de um mapa rodoviário, como podemos ir de uma cidade a outra?

Quais são as possíveis rotas? Qual o menor caminho entre duas cidades?



cidades $\Leftrightarrow$ vértices

estrada entre 2 cidades $\Leftrightarrow$ aresta entre 2 vértices associados as cidades

Nesta aula vamos definir conceitos que são fundamentais para formalizar essas idéias e na resolução de tais problemas.

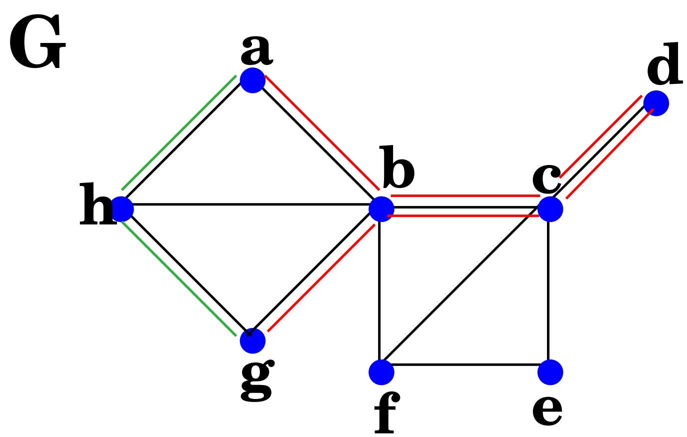
Passeio:

- Um passeio em um grafo G é uma sequência de vértices $P = v_0, v_1, \ldots v_k$ de G tal que $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$ para $1 \leq i \leq k-1$.

(Em outras palavras, é uma sequência de vértices de G, tal que entre cada par de vértices consecutivos na sequência existe uma aresta).

- O inteiro k (isto é, o número de arestas percorridas) é o comprimento do passeio P, v_0 é o início do passeio e v_k o seu término, e P é dito um passeio de v_0 a v_k.

Exemplo 1:



$P_1 =$ a, b, c, d, c, b, g

P_1 é um passeio de a a g

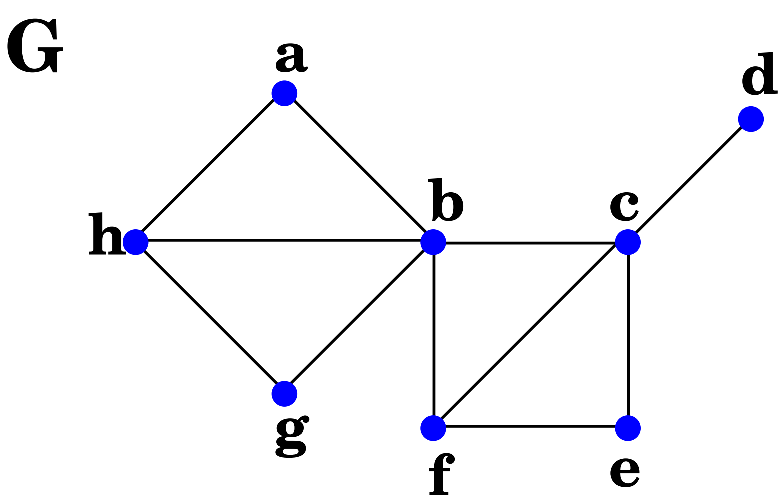
$P_2 =$ a, h, g

P_2 é um passeio de a a g

- Observação: Num passeio podemos ter arestas e vértices repetidos.

- Um passeio em que todas as arestas são distintas é chamado de trajeto (ou trilha).
- Um passeio em que todos os vértices são distintos é chamado de caminho.

Exemplo 2:



$P_3 =$ a, b, c, f, b, g

P_3 é um trajeto de a a g

P_3 não é um caminho
(o vértice b é visitado 2 vezes)

$P_4 =$ a, h, g

P_4 é um caminho entre a e g

$P_5 =$ g, h, a, b, f, e, c, d

P_5 é um caminho entre g e d

Passeio fechado:

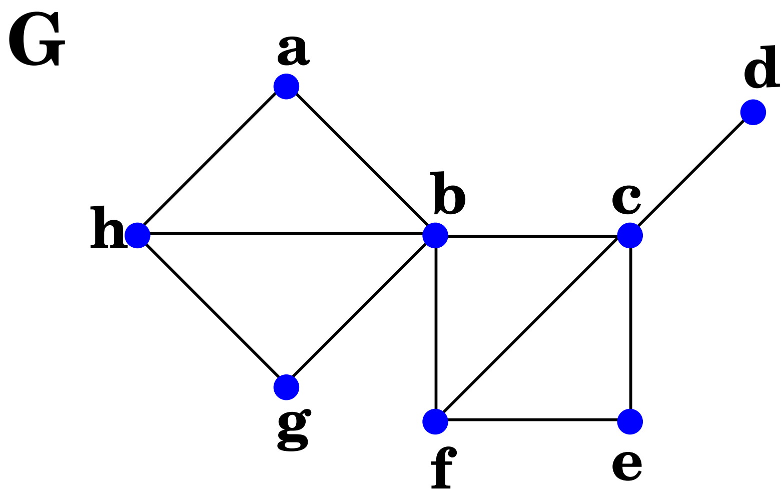
- Um passeio fechado $P = v_0, v_1, \ldots, v_k$ é aquele em que $v_0 = v_k$.

  Se todas as arestas desse passeio forem distintas, ele é dito um trajeto fechado.

  E se, além do mais, todos os vértices forem distintos, com exceção dos extremos (isto é, $v_0, \ldots, v_{k-1}$ é um caminho) ele é dito um ciclo.

- O comprimento do ciclo é dado pelo seu número de arestas (ou de vértices distintos).
  Se ele tem um número ímpar de arestas é dito um ciclo ímpar, caso contrário é um ciclo par.

Exemplo 3:



P_6 = a, b, c, d, c, e, f, b, g, h, a

P_6 é um passeio fechado

P_6 não é um trajeto fechado
(a aresta (c, d) é visitada 2 vezes)

P_7 = a, b, c, e, f, b, g, h, a

P_7 é um trajeto fechado

P_7 não é um ciclo
(o vértice b é visitado 2 vezes)

P_8 = a, b, g, h, a

P_8 é um ciclo (ciclo par)

P_9 = a, b, h, a

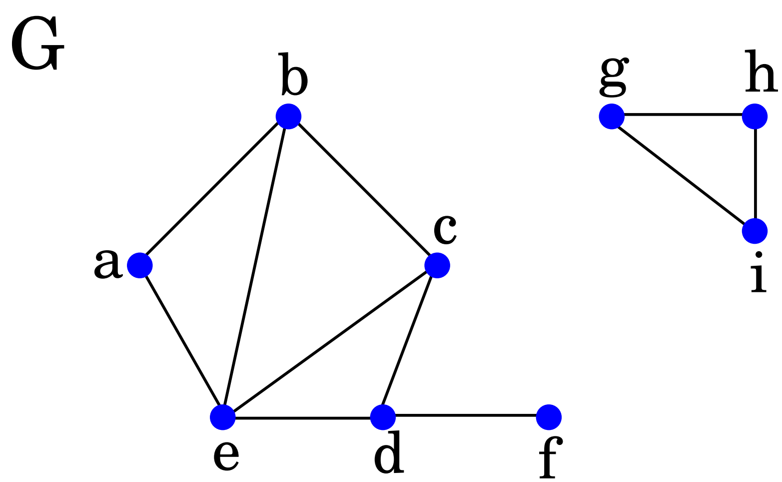
P_9 é um ciclo (ciclo ímpar)

Conexidade:

Dois vértices v e w são conexos em G quando existe algum caminho entre v e w em G.

Exemplo 4:

Considere o grafo G abaixo:



b e f são conexos

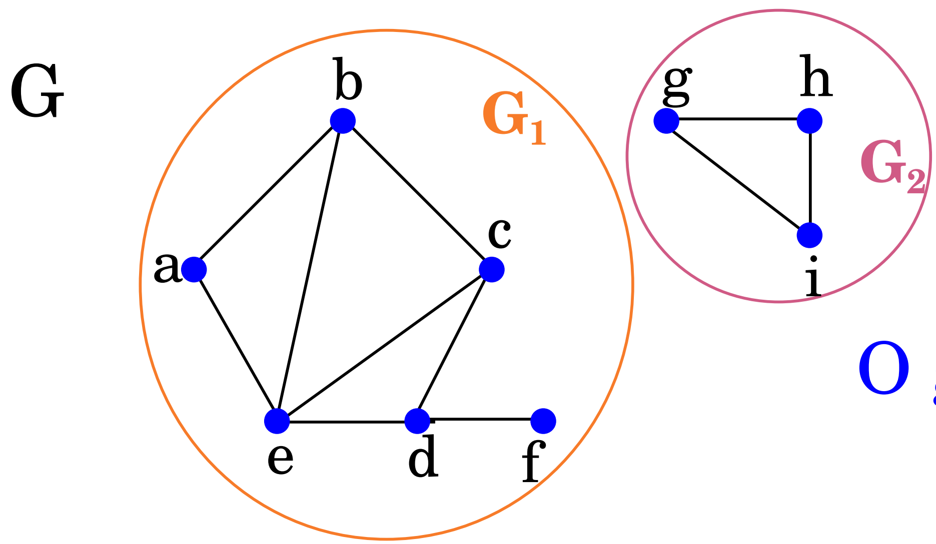
P = b, c, d, f caminho entre b e f

b e h não são conexos

Não existe caminho entre b e h

Um grafo G é conexo quando todo par de vértices distintos de G é conexo (isto é, para todo par de vértices distintos de G existe um caminho entre eles), caso contrário é desconexo.

Exemplo 5: (voltando ao grafo G do exemplo anterior)



O grafo G é desconexo.

Mas o subgrafo G_1 induzido por {a, b, c, d, e, f} é conexo - observe que existe caminho entre todo par de vértices de G_1.

Igualmente, o subgrafo G_2 induzido por {g, h, i} é conexo.

Observação:

Muitas das aplicações e algoritmos para resolver problemas em grafos, assumem como entrada um grafo conexo.

Portanto, quando o grafo não é conexo, é comum "pré-processar" o grafo de modo a obter seus "maiores conjuntos" conexos, ou como vamos definir formalmente, seu componentes conexos.

Seja $G=(V, E)$ um grafo e $(V_1, V_2, \ldots, V_k)$ uma partição de V (isto é, $V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k = V$ e $V_i \cap V_j = \emptyset \quad 1 \leq i \neq j \leq k$). O subgrafo $G[V_i]$ (subgrafo de G induzido por V_i) é um componente conexo de G se

(i) $G[V_i]$ é um grafo conexo e

(ii) $\forall\ v \in V - V_i$, $G[\, V_i \cup \{v\}\,]$ não é conexo.

- Observação: o item (ii) "força" que cada componente conexo seja o maior possível, no sentido que se um vértice for adicionado a um componente, então o novo subgrafo obtido não é conexo.

Exemplo 6:

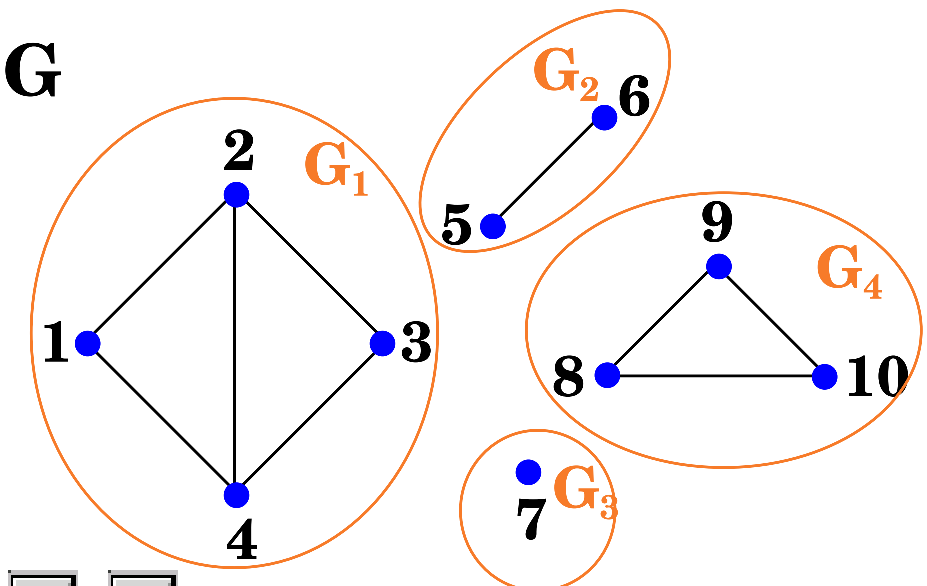
Consideremos o grafo G abaixo:

$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Sejam

$V_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $V_2 = \{5, 6\}$, $V_3 = \{7\}$, $V_4 = \{8, 9, 10\}$

(V_1, V_2, V_3, V_4) é uma partição de V.



Seja $G_i = G[V_i]$ $1 \le i \le 4$

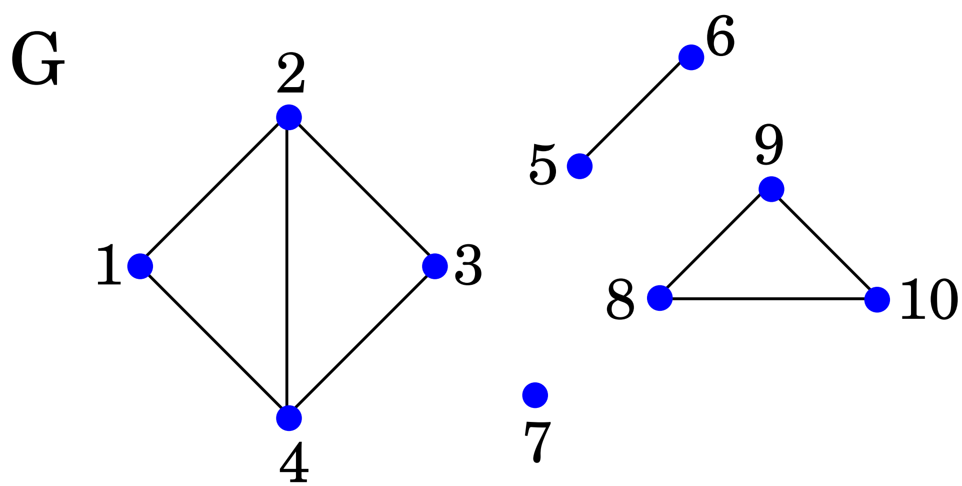
Cada G_i é conexo.

$\forall\ v \in V - V_i \rightarrow G_i + v$ não é conexo.

G_1, G_2, G_3, G_4 são componentes conexos de G.

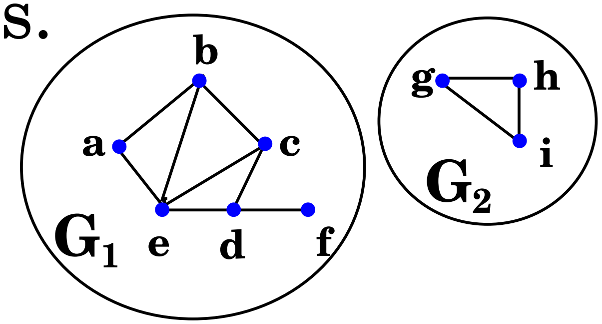
O **número** de **componentes conexos** de G é denotado por w(G).

Exemplo 7: No exemplo anterior



w(G) = 4

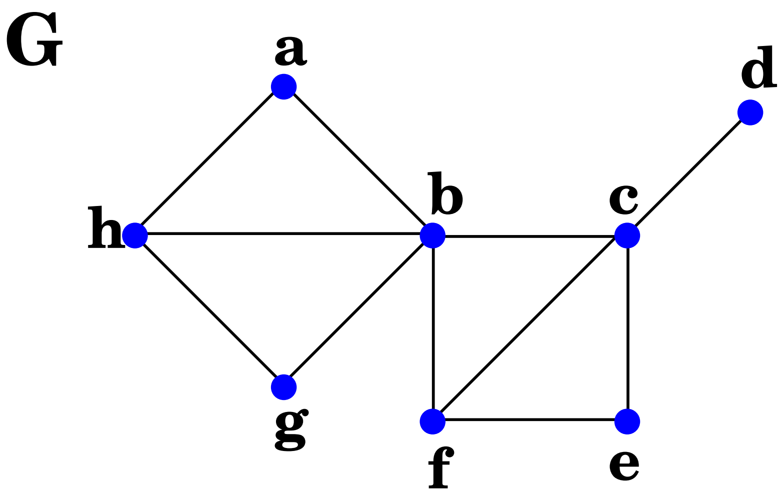
E no exemplo 4, quantos componentes conexos temos? Identifique-os.



w(G) = 2

Resposta Voltar

E no exemplo 1?



w(G) = 1

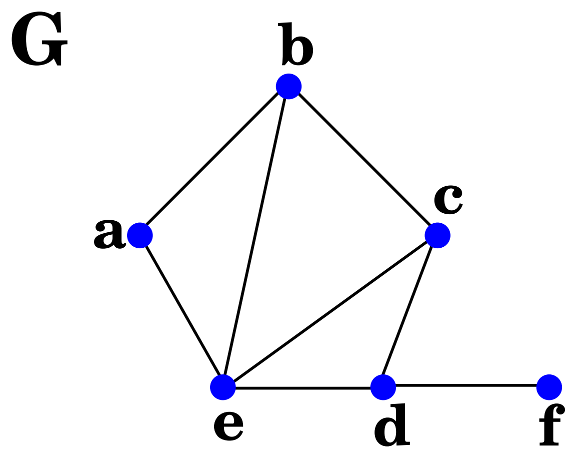
- Observe que:

  Um grafo G é conexo $\Leftrightarrow$ w(G) = 1

Distância:

A distância entre dois vértices v e w de um grafo G, denotada por d(v, w), é o comprimento do menor caminho entre eles (caso exista caminho entre eles). Se não existir caminho entre eles (isto é, se v e w estão em componentes conexos distintos de G) definimos $d(v, w) = \infty$.

Exemplo 8:



$d(a, f) = 3$

$d(b, e) = 1$

$d(a, g) = \infty$

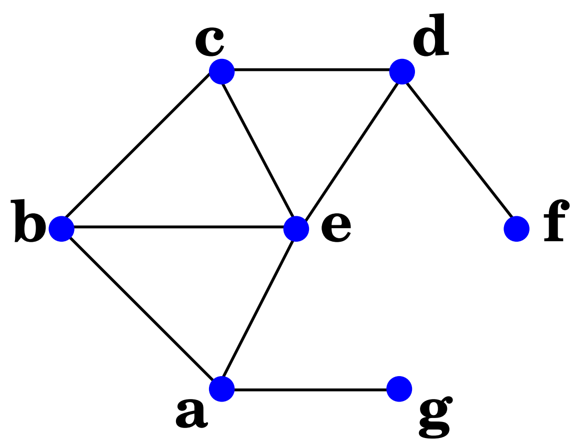
Seja G um grafo conexo

A excentricidade de um vértice v de G, denotada por e(v), é o valor da maior distância de v aos outros vértices de G.

$$\mathbf{e(v) = \max_{w \in V(G)} \{\, d(v, w) \,\}}$$

Exemplo 9:

G

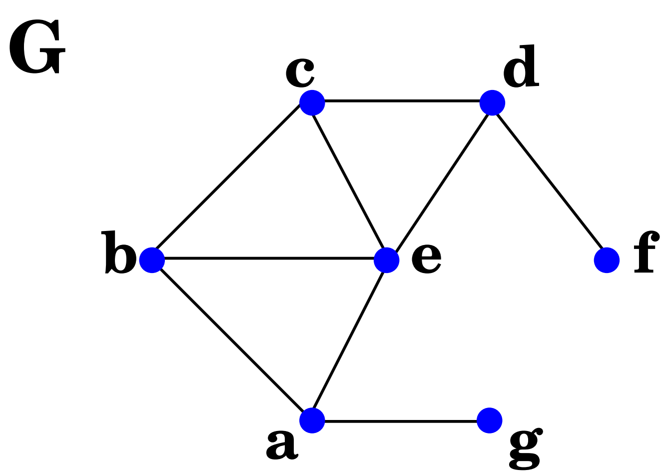


$$\left.\begin{array}{l} d(a, b) = 1 \\ d(a, c) = 2 \\ d(a, d) = 2 \\ d(a, e) = 1 \\ d(a, f) = 3 \\ d(a, g) = 1 \end{array}\right\} e(a) = 3 \qquad \left.\begin{array}{l} d(f, a) = 3 \\ d(f, b) = 3 \\ d(f, c) = 2 \\ d(f, d) = 1 \\ d(f, e) = 2 \\ d(f, g) = 4 \end{array}\right\} e(f) = 4$$

O diâmetro de um grafo G é o valor de sua maior excentricidade.

$$\mathbf{diam(G)} = \max_{v \in V(G)} \{ e(v) \}$$

Exemplo 10:



$e(a) = e(b) = e(c) = e(d) = 3$

$e(e) = 2$

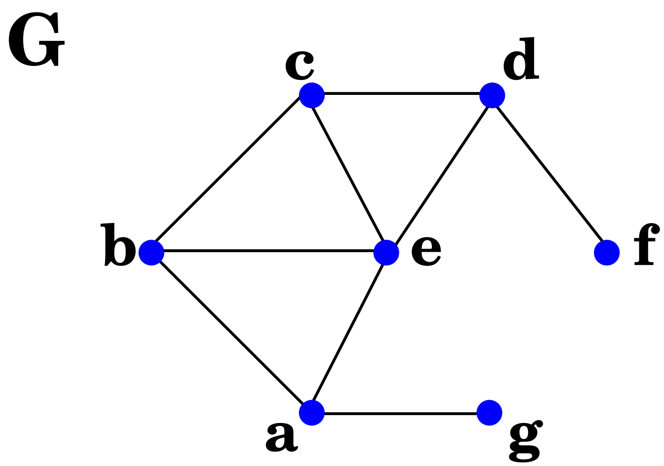
$e(f) = e(g) = 4$

$diam(G) = \max\{ 2, 3, 4 \} = 4$

O **centro** de um grafo G, denotado por $c(G)$ é o conjunto dos vértices de G que têm a menor excentricidade.

$$c(G) = \{v \in V(G) \mid e(v) \text{ é mínima}\}$$

Exemplo 11:



$e(a) = e(b) = e(c) = e(d) = 3$

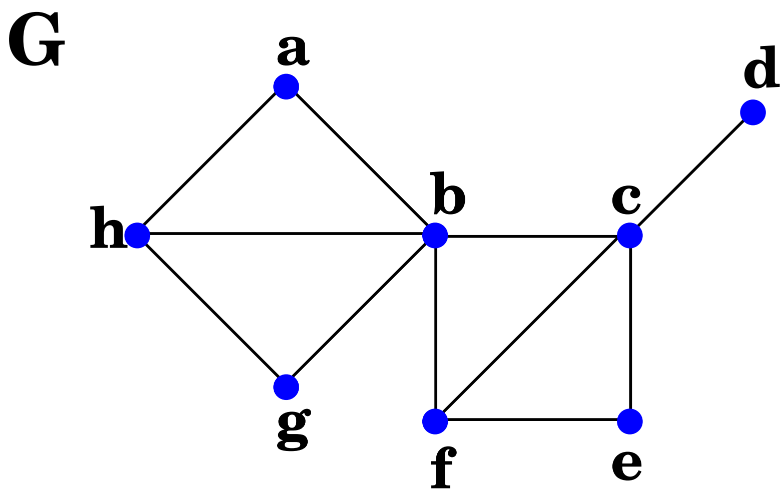
$e(e) = 2$

$e(f) = e(g) = 4$

$c(G) = \{ e \}$

Exemplo 12:

Considere o grafo G do exemplo 1



Calcule agora você o centro de G.

Resposta Voltar

Primeiro calculamos as excentricidades dos vértices de G:

$e(a) = e(g) = e(h) = e(e) = e(d) = 3$

$e(b) = e(f) = e(c) = 2$

$C(G) = \{ v \in V(G) \mid e(v) \text{ é mínima} \} = \{ b, f, c \}$

Grafos especiais:

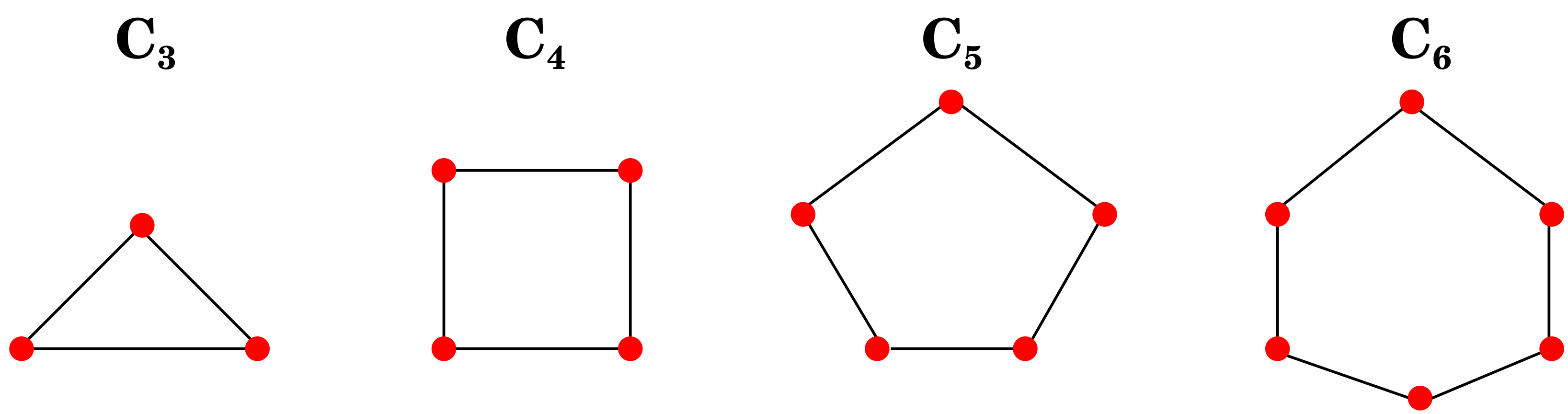
- Vamos definir alguns grafos especiais, que aparecem frequentemente em aplicações e exemplos. Por isso, é importante que esses grafos se tornem familiares.
- Já vimos os
  - Grafos completos: denotamos por K_n, n o número de vértices (todo par de vértices está ligado por uma aresta).

    Em particular destacamos o K_1, o grafo completo com um único vértice, que é chamado de grafo trivial.

    K_1 
  - Grafos nulos: denotamos por N_n, n o número de vértices (grafo que não tem arestas).

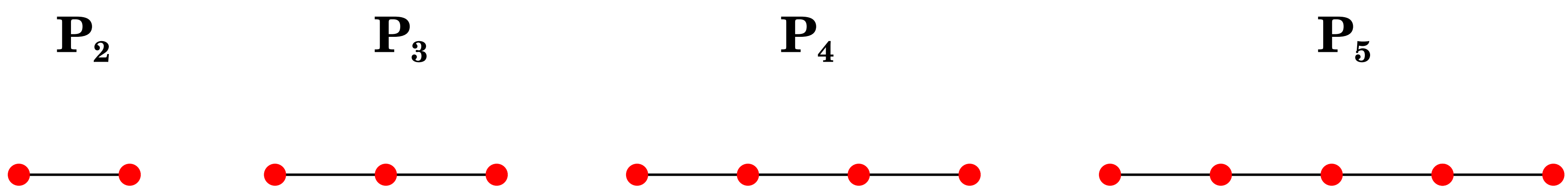
Um grafo ciclo é um grafo que consiste de um único ciclo.

O grafo ciclo com n vértices é denotado por C_n , $n \geq 3$



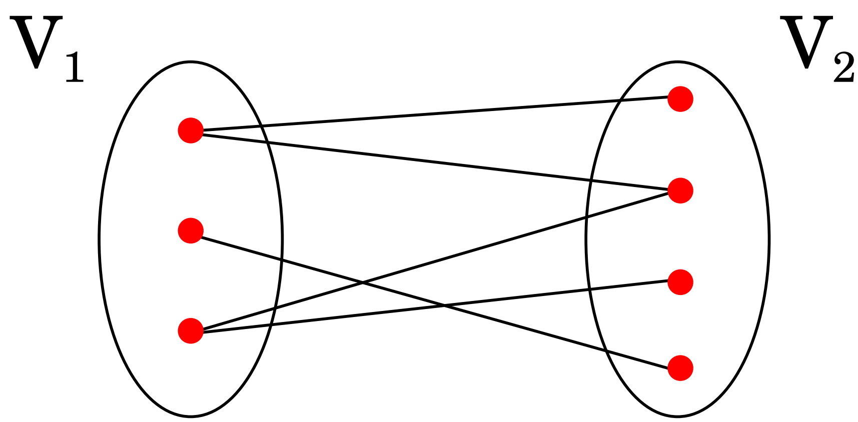
Um grafo caminho é um grafo que consiste de um único caminho.

O grafo caminho com n vértices é denotado por P_n , $n \geq 2$



Um grafo $G = (V, E)$ é um grafo bipartido se o seu conjunto de vértices puder ser particionado em dois subconjuntos V_1 e V_2 ($V_1 \cup V_2 = V$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$) tais que cada aresta de G tem um extremo em V_1 e o outro em V_2. Dizemos que (V_1, V_2) é uma bipartição de V.

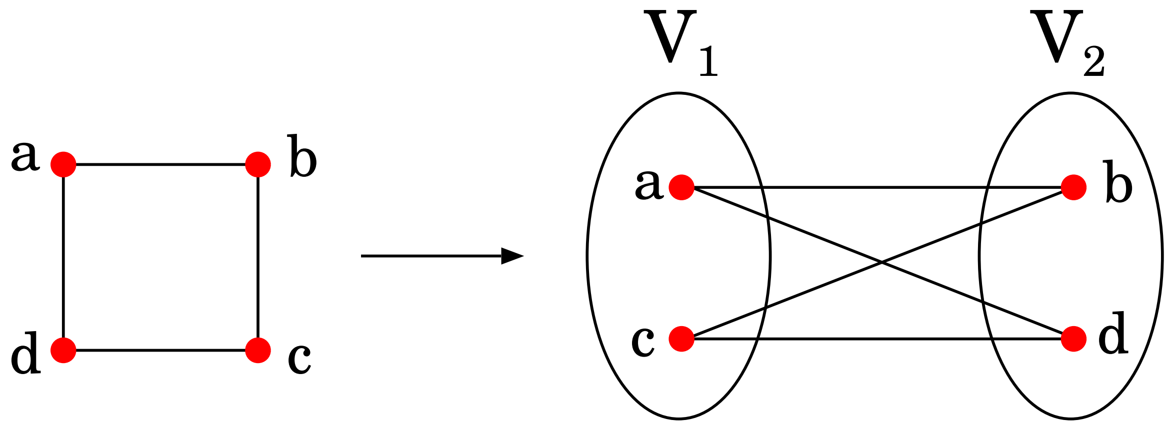
Exemplo 13:



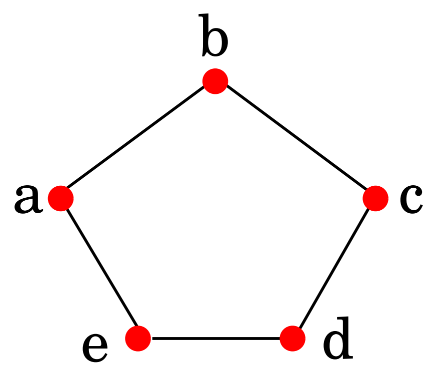
- Observe que: V_1 e V_2 são conjuntos independentes em G.

Exemplo 14:

C_4 é bipartido



C_5 não é bipartido

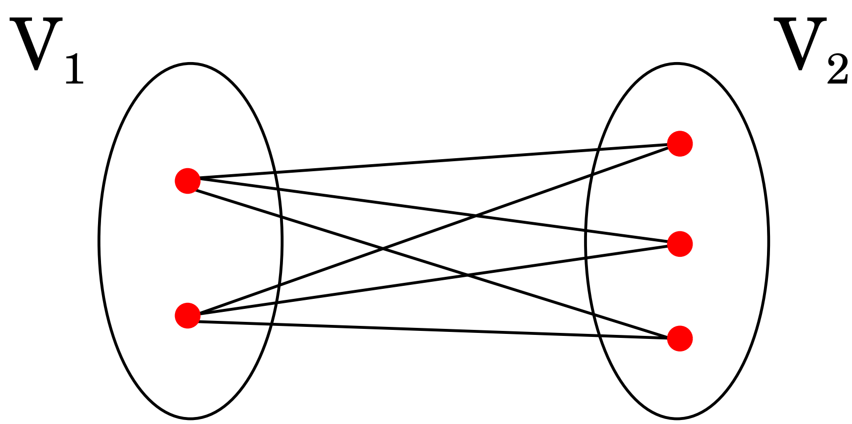


Tente achar uma bipartição para $V(C_5)$.

Um grafo bipartido completo é um grafo bipartido $G = (V, E)$ com bipartição (V_1, V_2) tal que todo vértice de V_1 é adjacente a todo vértice de V_2.
Se V_1 tem q vértices e V_2 tem p vértices onde $p + q = n$ então o grafo é denotado por $K_{p, q}$

Exemplo 15:

$K_{2, 3}$



Caracterização de grafos bipartidos:

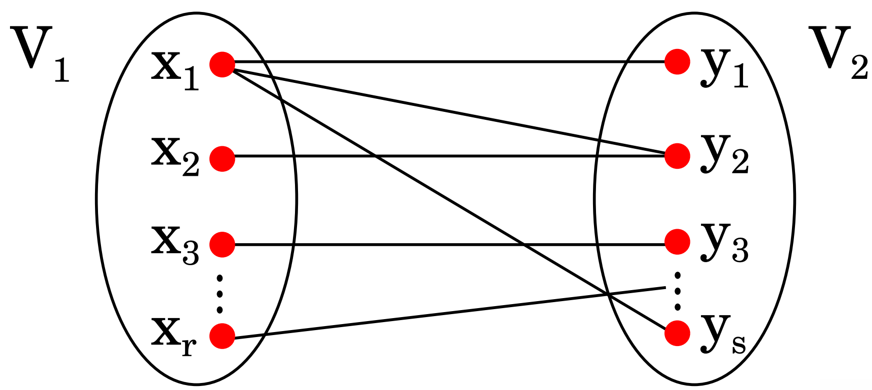
Os grafos bipartidos têm grande importância em aplicações. Diversas situações são modeladas por estes grafos.

Exemplo: **operários × máquinas**

$$\left.\begin{array}{l}\text{operários} \rightarrow \text{vértices} \in V_1 \\ \text{máquinas} \rightarrow \text{vértices} \in V_2\end{array}\right\} V_1 \cup V_2 = V$$

Existe uma aresta entre $x \in V_1$ e $y \in V_2$ se o operário x é capaz de operar a máquina y

Diagrama que representa esse grafo



É um problema importante decidir se um grafo é bipartido ou não.

O teorema a seguir, nos mostra que basta procurar por ciclos ímpares.

Teorema:

Um grafo G é bipartido se e somente se não contém um ciclo ímpar.

Prova: $(\Rightarrow)$

Seja G um grafo bipartido com bipartição (V_1, V_2), e $C = v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1$ um ciclo em G. Assuma que $v_1 \in V_1$, logo $v_2 \in V_2$, $v_3 \in V_1$, $v_4 \in V_2$ e assim por diante.

De forma geral $v_{2i-1} \in V_1$ e $v_{2i} \in V_2$. Como $(v_k, v_1) \in E$ e $v_1 \in V_1$ então $v_k \in V_2$ (porque G é bipartido), temos que $k = 2i$, para algum i, logo k é par e portanto C é um ciclo par.

($\Leftarrow$) Assuma que G não contém ciclo ímpar.

(Vamos construir uma bipartição de G)

Seja v um vértice qualquer de G.

Defina os seguintes conjuntos:

$$V_1 = \{ w \in V(G) \mid d(v, w) \text{ é par} \}$$

$$V_2 = \{ u \in V(G) \mid d(v, u) \text{ é ímpar} \}$$

$$V_1 \cup V_2 = V(G) \ , \ V_1 \cap V_2 = \varnothing$$

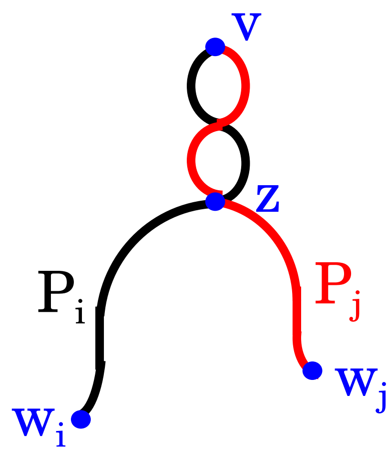
(Vamos mostrar que se (V_1, V_2) não é uma bipartição para G, então G contém algum ciclo ímpar. Esta contradição garante que (V_1, V_2) é de fato uma bipartição)

De fato, se (V_1, V_2) não é uma bipartição de G, então:
ou existe aresta (w_i, w_j) entre vértices w_i e $w_j \in V_1$,
ou existe aresta (u_i, u_j) entre vértices u_i e $u_j \in V_2$.

Sem perda de generalidade, assumimos a existência da aresta (w_i, w_j).

Sejam P_i e P_j respectivamente, os caminhos mais curtos entre v e w_i e v e w_j.

Além disso, seja z o vértice comum a P_i e P_j mais distante de v.

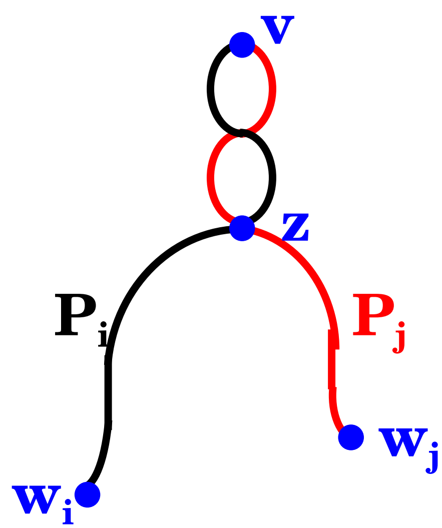


Fato: O subcaminho de P_i que começa em v e termina em z, denotado por $P_i(v - z)$, tem comprimento igual ao subcaminho $P_j(v - z)$ de P_j que começa em v e termina em z.

Desafio: Prove este fato.

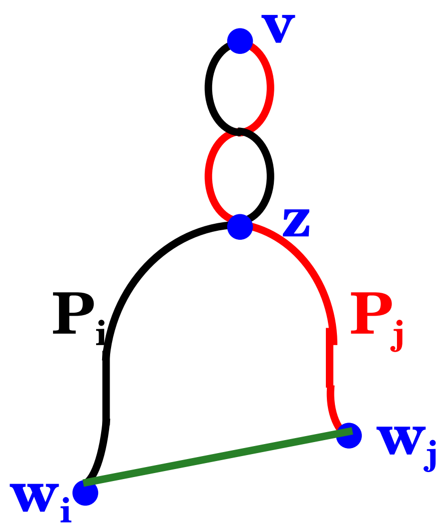
Desafio Voltar

Seja $P_i(z - w_i)$ e $P_j(z - w_j)$ os subcaminhos de P_i e P_j que começam em z e terminam em w_i e w_j respectivamente.



Como P_i e P_j têm comprimento par e o comprimento dos subcaminhos $P_i(v - z)$ e $P_j(v - z)$ são iguais, então os subcaminhos $P_i(z - w_i)$ e $P_j(z - w_j)$ têm a mesma paridade (ou são ambos pares ou ambos ímpares).

Portanto se existe a aresta (w_i, w_j)



$P_i(z - w_i) \cup (w_i, w_j) \cup P_j(z - w_i)$ é um ciclo ímpar.
Esta contradição implica que a aresta (w_i, w_j) não pode existir.
Analogamente para uma aresta (u_i, u_j).
Logo (V_1, V_2) é uma bipartição de G,
ou seja, G é um grafo bipartido.

Resumo:

Seja $G = (V, E)$ um grafo.

Conceitos:

Passeio: $v_0, v_1, \ldots, v_k$ tal que $(v_i, v_{i+1}) \in E(G) \quad 1 \leq i \leq k-1$

Se não há repetição de arestas $\rightarrow$ trajeto

Se não há repetição de vértices $\rightarrow$ caminho

Passeio fechado: $v_0 = v_k$

Se $v_0 = v_k$ e $v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}$ é um caminho $\rightarrow$ ciclo

Conexidade:

G é conexo se para todo par de vértices de G existe algum caminho entre eles, caso contrário G é desconexo

Componentes conexos de G são os "maiores" subgrafos conexos de G.

Conceitos:

Distância entre vértices:

$d(v, w)$ = comprimento do menor caminho entre v e w.

Excentricidade de um vértice:

$$e(v) = \max_{w \in V(G)} \{ d(v, w) \}$$

$$diam(G) = \max_{v \in V(G)} \{ e(v) \}$$

Centro de um grafo: $c(G) = \{v \in V \mid e(v) \text{ é mínimo}\}$

Conceitos:

Grafos especiais:

Grafo bipartido:

$V(G) = (V_1, V_2) \rightarrow V_1 \cup V_2 = V$ e $V_1 \cap V_2 = \varnothing$

toda aresta de G tem um extremo em V_1 e outro em V_2

Caracterização de grafos bipartidos:

Um grafo é bipartido se e somente se ele não contém ciclos ímpares.