Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
GABARITO DA AP1 - Segundo Semestre de 2009

Questões:

1. (2.0) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa, justifique.

   (a) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}, 0, 1\}$

   Resposta: A afirmação é verdadeira, pois $\{\emptyset\}$ é um elemento do conjunto $\{\{\emptyset\}, 0, 1\}$.

   (b) $\{2\} \in \{0, 1, 2\}$

   Resposta: A afirmação é falsa, pois $\{2\}$ não é um elemento do conjunto $\{0, 1, 2\}$.

   As afirmações corretas são:

   $2 \in \{0, 1, 2\}$

   ou

   $\{2\} \subseteq \{0, 1, 2\}$

   (c) $n(A \cap B) \leq n(A) + n(B)$

   Resposta: A afirmação é verdadeira. De fato, temos que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. Como $n(A \cup B) \geq 0$ então $n(A) + n(B) - n(A \cap B) \geq 0$, e isto implica em dizer que $n(A) + n(B) \geq n(A \cap B)$, isto é, $n(A \cap B) \leq n(A) + n(B)$.

2. (2.0) Mostre usando o Princípio da Indução Matemática que:

$$2 + 5 + 8 + \cdots + (3n - 1) = \frac{n(1 + 3n)}{2}$$

   para todo número natural n.

Resposta:

Seja $P(n) : 2+5+8+\cdots+(3n-1) = \frac{n(1+3n)}{2}$ para todo número natural n.

Base da indução:

Para $n = 1$, tem-se

$$3 \cdot 1 - 1 = 2 = \frac{1(1+3)}{2}$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira.

Hipótese de indução

Suponha verdadeiro para $k \geq 1$, isto é, $P(k)$ é verdadeira:

$$P(k) : 2 + 5 + 8 + \cdots + (3k - 1) = \frac{k(1 + 3k)}{2}$$

Passo de indução

Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeiro então $P(k + 1)$ é verdadeiro, isto é, temos que provar que:

$$P(k+1) : 2+5+8+\cdots+(3k-1)+[3(k+1)-1] = \frac{(k+1)[1+3(k+1)]}{2}$$

é verdadeira.

De fato, primeiro observemos que:

$$\frac{(k+1)[1+3(k+1)]}{2} = \frac{(k+1)(3k+4)}{2} = \frac{3k^2+7k+4}{2} \qquad (\mathbf{1})$$

Por outro lado,

$$\underbrace{2+5+8+\cdots+(3k-1)}_{HI} + [3(k+1)-1] = \frac{k(1+3k)}{2} + [3(k+1)-1]$$

Desenvolvendo o segundo lado da igualdade, temos:

$$\begin{aligned} & \tfrac{k(1+3k)}{2} + [3(k+1)-1] && = \\ = \; & \tfrac{k(1+3k)}{2} + (3k+2) && = \\ = \; & \tfrac{k(1+3k)+2(3k+2)}{2} && = \\ = \; & \tfrac{3k^2+k+6k+4}{2} && = \\ = \; & \tfrac{3k^2+7k+4}{2} && \qquad (\mathbf{2}) \end{aligned}$$

Logo, de **(1)** e **(2)** temos que $P(k+1)$ é verdadeira, o que mostra que a afirmação $P(n) : 2+5+8+\cdots+(3n-1) = \frac{n(1+3n)}{2}$ é verdadeira para todo número natural $n \geq 1$.

3. (2.0) Dada a palavra **M A M B U C A B A**, quantos anagramas podem ser formados se:

   (i) Os anagramas não podem começar com a letra M? Justifique.
   Resposta:

   A palavra **M A M B U C A B A** possui 9 letras: 2 M, 3 A, 2 B, 1 U e 1 C.

   Os anagramas podem começar com as letras A, B, U ou C.

   O número de anagramas que começam com a letra A é

$$P_8^{2,2,2,1,1} = \frac{8!}{2!2!2!}$$

   O número de anagramas que começam com a letra B é

$$P_8^{2,3,1,1,1} = \frac{8!}{2!3!}$$

   O número de anagramas que começam com a letra U é

$$P_8^{2,3,2,1} = \frac{8!}{2!3!2!}$$

   O número de anagramas que começam com a letra C é

$$P_8^{2,3,2,1} = \frac{8!}{2!3!2!}$$

   Logo, pelo princípio aditivo temos que o número de anagramas da palavra **M A M B U C A B A** que não começam com a letra **M** é dado por:

$$P_8^{2,2,2,1,1} + P_8^{2,3,1,1,1} + P_8^{2,3,1,1,1} + P_8^{2,3,2,1} =$$

$$\frac{8!}{2!2!2!} + \frac{8!}{2!3!} + \frac{8!}{2!3!2!} + \frac{8!}{2!3!2!} = 11.760$$

   Outra maneira de fazer é usando o complemento:

O número total de anagramas da palavra **M A M B U C A B A** é $P_9^{2,3,2,1,1} = \frac{9!}{2!3!2!}$

O número de anagramas da palavra **M A M B U C A B A** que começam com a letra **M** é $P_8^{1,3,2,1,1} = \frac{8!}{3!2!}$.

Logo, o número de anagramas da palavra **M A M B U C A B A** que não começam com a letra **M** é:

$$P_9^{2,3,2,1,1} - P_8^{1,3,2,1,1} = \frac{9!}{2!3!2!} - \frac{8!}{3!2!} = 11.760$$

(ii) Os anagramas devem ter pelo menos duas (2) letras A juntas? Justifique

Resposta: Consideremos novamente o raciocínio usando o complemento.

O número total de anagramas da palavra **M A M B U C A B A** é

$$P_9^{2,3,2,1,1} = \frac{9!}{2!3!2!}$$

O número de anagramas em que os três **A**'s estão separados pode ser calculado da seguinte forma: Construa todos os anagramas com as letras 2 M, 2 B, 1 U e 1 C. Isso nos dá: $P_6^{2,2,1,1} = \frac{6!}{2!2!}$ anagramas.

Existem 6 letras e 7 espaços, contendo 5 entre elas e os 2 extremos para colocarmos as 3 letras **A**'s. Isso nos dá $C_7^3 = \frac{7!}{3!4!}$.

Portanto, o número de anagramas em que os três **A**'s estão separados é

$$P_6^{2,2,1,1} \cdot C_7^3 = \frac{6!}{2!2!} \cdot \frac{7!}{3!4!}$$

Logo, o número de anagramas que tem pelo menos duas (2) letras **A** juntas é

$$P_9^{2,3,2,1,1} - P_6^{2,2,1,1} \cdot C_7^3 = \frac{9!}{2!3!2!} - \frac{6!}{2!2!} \cdot \frac{7!}{3!4!} =$$

$$15.120 - 180 \times 35 = 15.120 - 6.300 = 8.820$$

4. (1.5) Temos 8 crianças, sendo 5 meninos e 3 meninas. De quantos modos podemos dividir essas crianças em 2 grupos de 4, de forma que cada grupo inclua pelo menos uma menina? Justifique.

Resposta: A solução será dada pelo complemento.

Primeiro consideremos o caso geral, onde das 8 pessoas escolhemos 4, o que pode ser feito de $\frac{C_8^4}{2}$ maneiras.

Agora, consideremos o caso de só termos meninos em um grupo (esse grupo não terá nenhuma menina): essa escolha pode ser feita de C_5^4 maneiras, dado que o outro grupo fica automaticamente determinado. Logo o número de modos é dado por

$$\frac{C_8^4}{2} - C_5^4 = 35 - 5 = 30$$

Uma outra maneira é:

A única maneira de atendermos a restrição é que um grupo possua 1 menina e 3 meninos, e o outro grupo, 2 meninas e 2 meninos. Para formarmos o grupo com 1 menina e 3 meninos temos $C_3^1 \times C_5^3$ maneiras. Consequentemente, o outro grupo, com 2 meninas e 2 meninos fica determinado. Logo, o número de maneiras é

$$C_3^1 \times C_5^3 = 3 \times 10 = 30$$

5. (1.0) Quantas palavras com 5 letras podemos formar com as 26 letras de nosso alfabeto? Justifique.

   Resposta: Cada palavra com 5 letras (que podem ser repetidas) formada com as 26 letras de nosso alfabeto corresponde a um arranjo com repetição de 26 elementos tomados 5 a 5. Portanto, o número total de palavras é $AR_{26}^5 = 26^5$.

6. (1.5) Determine o número de soluções inteiras e não negativas da equação: $x+y+z+w = 32$ nas quais nenhuma variável é inferior a 3. Justifique.

   Resposta: Como nenhuma variável é inferior a 3, então temos de encontrar o número de soluções não-negativas da equação $x+y+z+w = 32$ com as restrições: $x \geq 3$, $y \geq 3$, $z \geq 3$, e $w \geq 3$.

   Podemos escrever: $x = x' + 3$, $y = y' + 3$, $z = z' + 3$, $w = w' + 3$, onde $x', y', z', w' \geq 0$. Substituindo na equação temos: $x' + 3 + y' + 3 + z' + 3 + w' + 3 = 32$, com $x', y', z', w' \geq 0$, ou seja, $x' + y' + z' + w' = 20$, com $x', y', z', w' \geq 0$.

   O número de soluções inteiras não negativas de $x + y + z + w = 32$, onde $x, y, z, w \geq 3$, é o número de soluções inteiras não negativas de $x' + y' + z' + w' = 20$, onde $x', y', z', w' \geq 0$, que corresponde a

$$CR_4^{20} = C_{20+4-1}^{20} = C_{23}^{20} = \frac{23!}{20!3!} = 1771.$$