Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AD1 - Primeiro Semestre de 2011

Questões:

1. (2.0) Considere os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{N} : 2 < x \leq 10\} \qquad , \qquad B = \{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq 5\}.$$

(a) Escreva explicitamente os conjuntos A e B. Justifique.

Resposta:
Os elementos de A são números naturais estritamente maiores que 2, ou seja, maiores ou iguais a 3 e menores ou iguais a 10. Então:

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Para explicitarmos os elementos de B precisamos resolver a inequação modular $|x| \leq 5$. Assim, temos:

$$\begin{array}{rcl} B & = & \{x \in \mathbb{Z} : \quad 0 \leq \quad |x| \quad \leq 5\} \\ & = & \{x \in \mathbb{Z} : \; -5 \leq \quad x \quad \leq 5\} \end{array}$$

Então,

$$B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

(b) Escreva explicitamente $A \cap B$. Justifique.

Resposta:
$A \cap B = \{3, 4, 5\}$ pois $3, 4, 5$ são os únicos elementos comuns a A e B.

(c) Calcule $n(A \cup B)$ usando o Princípio de Inclusão e Exclusão. Justifique.

Resposta:

Sabemos que, pelo princípio de inclusão e exclusão,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Como já explicitamos os conjuntos A, B e $A \cap B$ nos itens (a) e (b), temos os seguintes dados:

$$n(A) = 8, \;\; n(B) = 11, \;\; n(A \cap B) = 3.$$

Então, substituindo na equação supracitada, temos:

$$n(A \cup B) = 8 + 11 - 3 = 16.$$

Portanto, $A \cup B$ tem 16 elementos.

(d) A seguinte afirmação é verdadeira?

$$\{\emptyset\} \subseteq (A \cap B)$$

Se for verdadeira, justifique. Se for falsa justifique e faça a devida modificação de modo a torná-la verdadeira.

Resposta:
Falsa, pois $\emptyset$ não é um elemento de $A \cap B$. Como $\emptyset$ está contido em qualquer conjunto, uma afirmação verdadeira é:

$$\emptyset \subseteq A \cap B.$$

Uma outra modificação é considerando o conjunto de partes de $A \cap B$:

$$P(A \cap B) = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}, \{3,4,5\}\}.$$

Como $\emptyset \in P(A \cap B)$, também é correto afirmar que:

$$\{\emptyset\} \subseteq P(A \cap B)$$

2. (2.0) Mostre usando Indução Matemática:

$$1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Resposta:

Seja $P(n) : 1(1!)+2(2!)+3(3!)+\cdots+n(n!) = (n+1)!-1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

Base da indução: Vamos mostrar que $P(1)$ é verdadeira.

Analisando o lado esquerdo quando $n = 1$, temos: $1(1!) = 1$.

E o lado direito nos fornece: $2! - 1 = 2 - 1 = 1$.

Logo, $P(1)$ é verdadeira.

Hipótese de indução: Suponha $P(k)$ verdadeira, isto é,

$$1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \cdots + k(k!) = (k+1)! - 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Passo Indutivo: Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeira então $P(k+1) : 1(1!)+2(2!)+3(3!)+\cdots+k(k!)+(k+1)(k+1)! = ([k+1]+1)!-1$ é verdadeira.
De fato, desenvolvemos o primeiro membro de $P(k+1)$. Usando a hipótese de indução, a propriedade distributiva e o conceito de fatorial de um número resulta:

$$\begin{aligned} 1(1!) + 2(2!) + \cdots + k(k!) + (k+1)(k+1)! &= \underbrace{(k+1)! - 1}_{\text{H.I.}} + (k+1)(k+1)! \\ &= (k+1)![1 + (k+1)] - 1 \\ &= \underbrace{(k+1)!(k+2)}_{} - 1 \\ &= (k+2)! - 1 \end{aligned}$$

Por outro lado, considerando o segundo membro de $P(k+1)$ temos:

$$([k+1]+1)! - 1 = (k+2)! - 1$$

Como cada membro de $P(k+1)$ é igual a $(k+2)! - 1$, concluimos que $P(k+1)$ é verdadeira.

Logo, pelo princípio da indução matemática,

$$P(n) : 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \cdots + n(n!) = (n + 1)! - 1$$

é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. (2.0) Uma companhia aérea tem 6 pilotos e 10 aeromoças. Sabendo que cada tripulação é formada por 2 pilotos e 4 aeromoças, quantas tripulações diferentes são possíveis? Justifique.

   Resposta:

   Queremos saber de quantas maneiras distintas podemos escolher uma tripulação composta por 2 pilotos e 4 aeromoças a partir de um grupo de 6 pilotos e 10 aeromoças.

   1º Passo: Número de formas de escolher dois pilotos.

   Observemos que, neste caso, a ordem de escolha não importa, pois escolher os pilotos A e B é o mesmo que escolher os pilotos B e A. Assim, o número de formas de fazer esta escolha é dado por:

$$C_6^2 = \frac{6!}{4!2!} = 15.$$

   Logo, temos 15 maneiras distintas de escolher 2 entre 6 pilotos.

   2º Passo: Número de formas de escolher quatro aeromoças.

   Utilizando raciocínio análogo ao do passo anterior, percebemos que este número é dado por:

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{6!4!} = 210.$$

   Pelo princípio multiplicativo temos que o número de formas distintas de formarmos uma tripulação com 2 pilotos e 4 aeromoças a partir de um grupo de 6 pilotos e 10 aeromoças é:

$$15 \times 210 = 3150.$$

4. (2.0) Considere a palavra **B I B L I O T E C O N O M I S T A**.

(a) Quantos anagramas podem ser formados? Justifique.

Resposta:
A palavra BIBLIOTECONOMISTA é composta por 17 letras, das quais 2 são B, 3 são I, 3 são O, 2 são T, 1 é L, 1 é C, 1 é N, 1 é M, 1 é S, 1 é A e 1 é E. Nessas circunstâncias, sabemos que o número de anagramas distintos dessa palavra é dado por:

$$P_{17}^{2,3,3,2,1,1,1,1,1,1,1} = \frac{17!}{2!3!3!2!1!1!1!1!1!1!1!} = 2470051584000.$$

Portanto, a palavra BIBLIOTECONOMISTA tem 2470051584000 anagramas distintos.

(b) Quantos anagramas começam com a letra **B** e terminam em **O**? Justifique.

Resposta:
Fixando as letras B e O na primeira e na última posições, respectivamente, temos 15 letras para permutar, das quais 3 são I, 2 são O, 2 são T, e as demais letras aparecem uma única vez. Assim, o número de anagramas distintos que começam com B e terminam com O é dado por:

$$P_{15}^{3,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1} = \frac{15!}{3!2!2!1!1!1!1!1!1!1!1!} = 54486432000.$$

Portanto, temos 54486432000 anagramas distintos da palavra BIBLIOTECONOMISTA que começam com B e terminam com O.

5. (2.0) Determine quantas são as soluções inteiras, não negativas da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 23$$

tais que $x_2 > 1$ e $x_4 \geq 5$? Justifique.

Resposta:

Como $x_2 > 1$, temos que $x_2 \geq 2$. Assim, sejam

$$a = x_2 - 2 \quad \text{e} \quad b = x_4 - 5.$$

As variáveis a e b são inteiras e não negativas e podemos re-escrever x_2 e x_4 como:

$$x_2 = a + 2 \quad \text{e} \quad x_4 = b + 5.$$

Substituindo esses valores na equação, temos:

$$(a + 2) + x_2 + x_3 + (b + 5) = 23,$$

onde $a, b, x_2, x_3 \geq 0$.

Logo,

$$a + x_2 + x_3 + b = 16,$$

onde $a, b, x_2, x_3 \geq 0$.

Para obtermos o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1+x_2+x_3+x_4 = 23$ com $x_2 > 1$ e $x_4 \geq 5$, basta resolvermos a equação

$$a + x_2 + x_3 + b = 16,$$

com $a, b, x_2, x_3 \geq 0$.

A solução de tal equação é dada por: $CR_4^{16} = C_{4+16-1}^{16} = C_{19}^{16} = \frac{19!}{16!3!} = 969$.

Portanto, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 23$ com $x_2 > 1$ e $x_4 \geq 5$ tem 969 soluções inteiras e não negativas.