Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
GABARITO DA AP2 - Segundo Semestre de 2008

**Questões:**

1. (1.5) Usando o Teorema das Colunas mostre que:

$$1 \ + \ 2 \ + \ 3 \ + \ 4 \ \cdots \ + n \ = \ \frac{n(n \ + \ 1)}{2}$$

**Resposta:**

$$\begin{array}{rcll}
1+2+3+\ldots+n & = & \sum_{k=1}^{n} k & = \\
 & = & \sum_{k=1}^{n} k\frac{(k-1)!}{(k-1)!} & = \\
 & = & \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{1!(k-1)!} & = \\
 & = & \sum_{k=1}^{n} C_k^1 & = \\
 & = & \underbrace{C_1^1 + C_2^1 + \ldots + C_n^1}_{\text{Pelo teorema das colunas, quando } r=1} & = \\
 & = & C_{n+1}^2 & = \\
 & = & \frac{(n+1)!}{2!(n+1-2)!} & = \\
 & = & \frac{(n+1)!}{2(n-1)!} & = \\
 & = & \frac{n(n+1)(n-1)!}{2(n-1)!} & = \\
 & = & \frac{n(n+1)}{2} &
\end{array}$$

2. (1.5) Determine o coeficiente de $x^8$ no desenvolvimento de $(x^4 - \frac{1}{x^4})^{28}$. Justifique a resposta.

*Resposta:* Temos $n = 28$, $a = x^4$ e $b = -\frac{1}{x^4}$.

Daí, para $0 \leq k \leq 28$ temos:

$$
\begin{array}{rcl l}
T_{k+1} & = & C_n^k a^{n-k} b^k & = \\
 & = & C_{28}^k \left(x^4\right)^{28-k} \left(-\frac{1}{x^4}\right)^k & = \\
 & = & C_{28}^k \; x^{112-4k} \; \frac{(-1)^k}{x^{4k}} & = \\
 & = & C_{28}^k \; (-1)^k \; x^{112-4k-4k} & = \\
 & = & C_{28}^k \; (-1)^k \; x^{112-8k} &
\end{array}
$$

Devemos determinar $k$ tal que $T_{k+1} = C_{28}^k \; (-1)^k \; x^8$.

Portanto, deve ser $112 - 8k = 8 \Rightarrow 8k = 104 \Rightarrow \boxed{\text{k=13}}$.

Logo, o coeficiente de $x^8$ em $\left(x^4 - \frac{1}{x^4}\right)^{28}$ é $C_{28}^{13} \; (-1)^{13} = -\frac{28!}{13!15!}$.

3. (1.0) Encontre a fórmula fechada da relação de recorrência:
$a_n = a_{n-1} + 3^{n-1}$ para $n \; \geq \; 2$, $n$ natural.
$a_1 = 2$
Justifique.

*Resposta:*

$$
\begin{array}{rcl l}
a_n & = & a_{n-1} + 3^{n-1} & = \\
 & = & (a_{n-2} + 3^{n-2}) + 3^{n-1} & = \\
 & = & a_{n-2} + 3^{n-2} + 3^{n-1} & = \\
 & = & (a_{n-3} + 3^{n-3}) + 3^{n-2} + 3^{n-1} & = \\
 & = & a_{n-3} + 3^{n-3} + 3^{n-2} + 3^{n-1} & = \\
 & & \vdots & \\
 & = & a_{n-k} + 3^{n-k} + 3^{n-k+1} + \ldots + 3^{n-1} &
\end{array}
$$

Como conhecemos o valor de $a_1$, então devemos tomar $n - k = 1$, isto é, $k = n - 1$. Desta maneira, obtemos:

$$
\begin{array}{rcl}
a_n & = & a_1 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1} \\
 & = & a_1 + 3(3^0 + 3^1 + \ldots + 3^{n-2})
\end{array}
$$

Usando a condição $a_1 = 2$ e o fato que $3^0 + 3^1 + \ldots + 3^{n-2}$ são os $n-1$ primeiros termos de uma progressão geométrica de razão 3, obtemos:

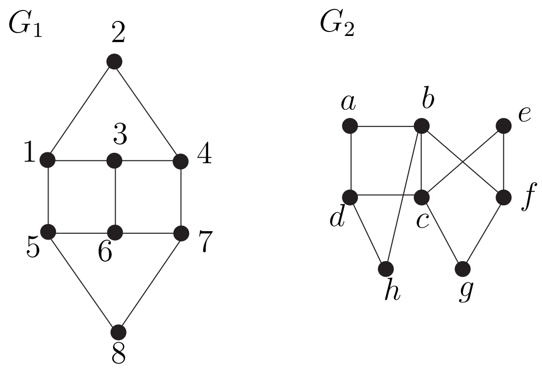
$$a_n = 2 + 3\ \left(\frac{3^{n-1}-1}{3-1}\right) = 2 + \frac{3^n - 3}{2} = \frac{4 + 3^n - 3}{2} = \frac{3^n + 1}{2}.$$

4. (1.5) Determine o número de vértices de um grafo $G$ (simples) com 15 arestas, 3 vértices de grau 4 e todos os outros vértices de grau 3. Justifique.

   *Resposta:* Seja $n$ o número de vértices do grafo $G$ (simples), com $m = 15$, $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = 4$, para algum $v_1, v_2, v_3 \in V(G)$ e $d(v_i) = 3$, para todos os $v_i \in V(G)$ tal que $4 \leq i \leq n$.

   Sabemos que $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$. Logo, $3 \times 4 + (n-3) \times 3 = 2 \times 15 \Rightarrow 3n = 30 - 3 \Rightarrow \boxed{\text{n = 9}}$.

5. (4.5) Considere os grafos $G_1$ e $G_2$ dados abaixo:
   (Respostas sem justificativas não serão consideradas.)




   **(a)** Mostre que $G_1$ e $G_2$ **não** são isomorfos.

*Resposta:* $G_1$ e $G_2$ não são isomorfos dado que a sequência dos graus do grafo $G_1$ é $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2)$ e a sequência de graus do grafo $G_2$ é $(4, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 2)$.

**(b)** $G_1$ é bipartido? Justifique. Caso seja, determine sua bipartição.

*Resposta:* Sim, pois como $G_1$ não possui ciclos ímpares então, pelo teorema de caracterização dos grafos bipartidos, $G_1$ é bipartido.

$G_1$ pode ser particionado em 2 conjuntos independentes $A$ e $B$ tal que $A = \{1, 4, 6, 8\}$ e $B = \{2, 3, 5, 7\}$.

**(c)** $G_1$ é euleriano? Justifique. Caso seja, dê um circuito euleriano de $G_1$.

*Resposta:* Não, pois um grafo é euleriano se e somente se todo vértice têm grau par, e $d(1) = d(3) = d(4) = d(5) = d(6) = d(7) = 3$ têm grau ímpar.

Logo, $G_1$ não é euleriano.

**(d)** $G_1$ é hamiltoniano? Justifique. Caso seja, dê um ciclo hamiltoniano de $G_1$.

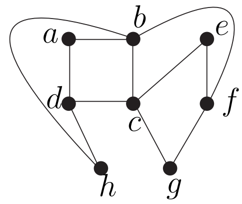
*Resposta:* Sim, pois $G_1$ possui o seguinte ciclo hamiltoniano: $1, 2, 4, 3, 6, 7, 8, 5, 1$.

Portanto, $G_1$ é hamiltoniano.

**(e)** $G_2$ é planar? Justifique. Caso seja, determine o número de faces de $G_2$ usando a fórmula de Euler.

*Resposta:* $G_2$ é um grafo planar, pois admite a seguinte representação plana:

$G_2$




Seja $f$ o número de faces de $G_2$. Como $G_2$ é conexo e planar, a fórmula de Euler nos diz que $n - m + f = 2$. Como $n = 8$ e $m = 11$, então $f = m - n + 2 \Rightarrow f = 11 - 8 + 2 \Rightarrow \boxed{\text{f} = 5}$.