Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD2 - Primeiro Semestre de 2018

Nome -
Assinatura -

**Questões:**

1. (1.1) Uma florista tem rosas, cravos, lírios e margaridas em estoque. Quantos buquês diferentes de uma dúzia de flores contendo pelo menos 2 rosas e um lírio podem ser feitos? Justifique.

   *Resposta:* Sejam $r, c, l, m$ as quantidades de rosas, cravos, lírios e margaridas em estoque, respectivamente. Queremos montar buquês com 12 flores, das quais pelo menos duas são rosas e pelo menos uma é um lírio. Desta forma, queremos o número de soluções inteiras não-negativas para a seguinte equação:

   $$r + c + l + m = 12 \quad (I)$$

   com as seguintes restrições: $r \geq 2$ e $l \geq 1$.

   Note que podemos reescrever as variáveis $r$ e $l$ em função de duas outras variáveis $r'$ e $l'$ não-negativas, da seguinte maneira:

   $$\begin{array}{rcl} r & = & r' + 2 \\ l & = & l' + 1 \end{array}$$

   Desta forma, a equação $(I)$ pode ser escrita de forma equivalente como descrito na equação $(II)$.

$$
\begin{array}{rcl}
r' + 2 + c + l' + 1 + m & = & 12 \\
r' + c + l' + m & = & 9 \quad (II)
\end{array}
$$

O número de soluções inteiras não-negativas da equação $(II)$ é dado por: $CR_4^9 = C_{9+4-1}^9 = C_{12}^9 = \dfrac{12!}{3!9!} = 220.$

Logo, podem-se montar 220 buquês de 12 flores com pelo menos duas rosas e um lírio a partir do estoque disponível de rosas, cravos, lírios e margaridas.

2. (1.1) Usando o teorema das colunas calcule a seguinte soma:

$$S = 5 \times 6 \times 7 + 6 \times 7 \times 8 + 7 \times 8 \times 9 + \ldots + 32 \times 33 \times 34.$$

Justifique.

*Resposta:* Seja $S = \sum_{i=5}^{32} i(i+1)(i+2)$. Vamos calcular o valor deste somatório utilizando o Teorema das Colunas.

$$
\begin{array}{rcl}
S & = & \sum_{i=5}^{32} i(i+1)(i+2) \\
& = & \sum_{i=5}^{32} A_{i+2}^3 \\
& = & \sum_{i=5}^{32} 3!C_{i+2}^3 \\
& = & 3! \sum_{i=5}^{32} C_{i+2}^3 \\
& = & 3!(C_7^3 + C_8^3 + \ldots + C_{34}^3) \\
& = & 3!(\underbrace{[C_3^3 + C_4^3 + \ldots + C_7^3 + C_8^3 + \ldots + C_{34}^3]}_{\text{Teorema das Colunas}} - \underbrace{[C_3^3 + C_4^3 + \ldots + C_6^3]}_{\text{Teorema das Colunas}}) \\
& = & 3!(C_{35}^4 - C_7^4) \\
& = & 3!(\dfrac{35!}{31!4!} - \dfrac{7!}{3!4!}) \\
& = & \dfrac{35!}{31!4} - \dfrac{7!}{4!}
\end{array}
$$

Logo, $S = \dfrac{35!}{31!4} - \dfrac{7!}{4!}$.

3. (1.1) Para que valores de $n \in \mathbb{N}$ o desenvolvimento do binômio de Newton $(\sqrt{2x} - \frac{5}{x^3})^n$ possui termo independente? Justifique.

   *Resposta:* Sejam $a = \sqrt{2x} = (2x)^{\frac{1}{2}}$ e $b = -\frac{5}{x^3} = -5x^{-3}$. Do Teorema Binomial, sabemos que a fórmula do termo geral do desenvolvimento do binômio $(a+b)^n$ é dada por:

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$$

   Daí, temos:

$$\begin{aligned}
T_{k+1} &= C_n^k[(2x)^{\frac{1}{2}}]^{n-k}[-5x^{-3}]^k \\
&= C_n^k(2x)^{\frac{n-k}{2}}(-1)^k5^kx^{-3k} \\
&= C_n^k2^{\frac{n-k}{2}}x^{\frac{n-k}{2}}(-1)^k5^kx^{-3k} \\
&= C_n^k2^{\frac{n-k}{2}}(-1)^k5^kx^{\frac{n-k}{2}}x^{-3k} \\
&= C_n^k2^{\frac{n-k}{2}}(-1)^k5^kx^{(\frac{n}{2}-\frac{7k}{2})}
\end{aligned}$$

   Como queremos que haja termos independente no desenvolvimento do binômio,

$$\frac{n}{2} - \frac{7k}{2} = 0 \leftrightarrow \frac{n}{2} = \frac{7k}{2} \leftrightarrow n = 7k$$

   Portanto, para que haja termo independente no desenvolvimento de $(\sqrt{2x} - \frac{5}{x^3})^n$, $n$ deve ser um múltiplo de 7.

4. (1.1) Determine a fórmula fechada da seguinte relação de recorrência:

$$a_n = 2a_{n-1} + n2^n \quad , \; a_0 = 1,$$

   para $n \geq 1$. Justifique.

   *Resposta:* Vamos utilizar o método das substituições regressivas.

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2a_{n-1} + n2^n \\
&= 2\underbrace{\left(2a_{n-2} + (n-1)2^{(n-1)}\right)}_{a_{n-1}} + n2^n \\
&= 2^2 a_{n-2} + (n-1)2^n + n2^n \\
&= 2^2\underbrace{\left(2a_{n-3} + (n-2)2^{(n-2)}\right)}_{a_{n-2}} + (n-1)2^n + n2^n \\
&= 2^3 a_{n-3} + (n-2)2^n + (n-1)2^n + n2^n \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
&= 2^i a_{n-i} + (n-(i-1))2^n + (n-(i-2))2^n + \ldots + n2^n \\
&= 2^i a_{n-i} + (n-i+1)2^n + (n-i+2)2^n + \ldots + n2^n
\end{aligned}
$$

Quando $n - i = 0$, temos $n = i$ e

$a_n = 2^n a_0 + 2^n + 2 \times 2^n + \ldots + n \times 2^n$

Como $a_0 = 1$, temos

$$a_n = 2^n + 2^n \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{\text{P.A. de razão 1}}$$

Sabemos que a soma dos $n$ termos de uma PA de razão 1 é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

onde $a_1$ e $a_n$ são o primeiro e o n-ésimo termo da P.A., respectivamente. Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(1+n)(n)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

Daí,

$a_n = 2^n + 2^n(\frac{n^2+n}{2})$ e, consequentemente

$a_n = 2^n + 2^{(n-1)}(n^2+n) = 2^{(n-1)}(n^2+n+2)$

Logo, a fórmula fechada da relação de recorrência é

$$a_n = 2^{(n-1)}(n^2+n+2), \forall n \geq 0$$

5. (4.0) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa dê um contra-exemplo, justificando.

**(a)** Se dois grafos $G_1$ e $G_2$ têm o mesmo número de vértices, o mesmo número de arestas e a mesma sequência de graus de vértices então $G_1$ e $G_2$ são isomorfos.

*Resposta:* Falsa. Observe na Figura 1 que $G^1$ e $G^2$ são ambos grafos 3-regulares, com mesmo número de vértices e arestas mas não são isomorfos, uma vez que $G^1$ possui triângulos (ou seja 3 vértices que são mutuamente adjacentes) e em $G^2$ o menor ciclo tem tamanho 4, ou seja, não existem 3 vértices mutuamente adjacentes.

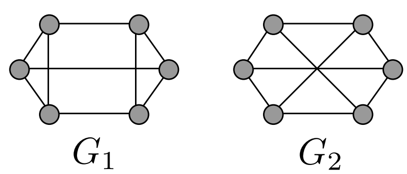


Figura 1: $G_1$ e $G_2$ não isomorfos com sequência de vértices $(3,3,3,3,3,3)$.

**(b)** Se $F = (V, E)$ é uma floresta então $|E| = |V| - k$ , onde $k$ é o número de componentes conexos de $F$.

*Resposta:* Verdadeiro.

Seja $F = (V, E)$ uma floresta tal que $|V(F)| = n$, $|E(F)| = m$ e $k =$ *número de componentes conexas*. Como $F$ é uma floresta, cada componente conexa é uma árvore. Sejam $T_1,\ T_2,\ \cdots,\ T_k$ os componentes conexos (árvores) de $F$, $V(F) = \sum_{i=1}^{k} V(T_i),\ E(F) = \sum_{i=1}^{k} E(T_i)$. Sabemos que $|E(T_i)| = |V(T_i)| - 1$ (Teorema).

Logo,

$$
\begin{aligned}
|E(F)| &= |\textstyle\sum_{i=1}^{k} E(T_i)| = \sum_{i=1}^{k} |E(T_i)| = \sum_{i=1}^{k} |V(T_i) - 1| \\
&= |V(T_1)| + |V(T_2)| + \cdots + |V(T_k)| - \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{k} \\
&= |V(F)| - k \\
&= n - k
\end{aligned}
$$

**(c)** O grafo bipartido completo $K_{6,6}$ é euleriano e hamiltoniano.

*Resposta:* Verdadeiro. O Teorema de Euler garante que um grafo é Euleriano se, e somente se, todos os seus vértices têm grau par. Um $K_{6,6}$ é um grafo bipartido completo com 6 vértices em cada parte da bipartição. Consequentemente, é um grafo 6-regular, e, pelo Teorema de Euler, o $K_{6,6}$ é euleriano. Além disso, podemos exibir um ciclo hamiltoniano para o $K_{6,6}$: $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, a$ (considere a Figura 2). Logo, o $K_{6,6}$ é hamiltoniano.

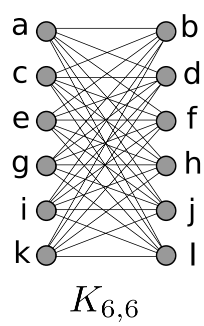


Figura 2: $K_{6,6}$ e um de seus ciclos hamiltonianos.

**(d)** Se $G$ é um grafo planar regular de grau 3 com 20 vértices então $G$ tem 12 faces.

*Resposta:* Verdadeiro. O número de faces $f$ de um grafo planar com $n$ vértices e $m$ arestas é dado por $f = m - n + 2$. Como $G$ é 3-regular, pelo Teorema do Aperto de Mãos, temos:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$$

donde, $m = 30$. Portanto, $f = 30 - 20 + 2 = 12$ e $G$ tem 12 faces.

6. (1.6) Considere o grafo $G = (V, E)$, onde
$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ e
$V(G) = \{(a, b), (b, c), (b, e), (c, d), (d, e), (c, f), (d, g)), (e, h), (f, g), (g, h), (f, j), (h, j), (f, i)\}$.

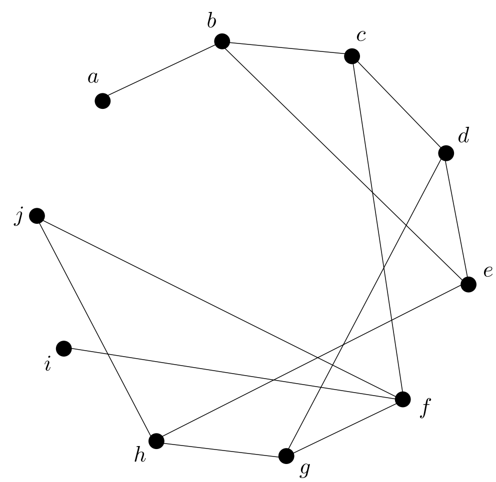


Figura 3: Grafo $G$.

**(i)** $G$ é bipartido? Justifique.

*Resposta:* Sim, pois podemos exibir a seguinte bipartição: $V = V_1 \cup V_2$, onde $V_1 = \{a, c, e, g, i, j\}$ e $V_2 = \{b, d, f, h\}$ (Figura 4).

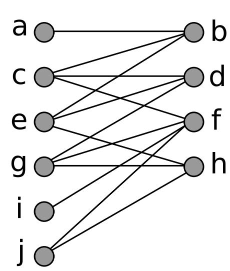


Figura 4: Bipartição para $G$.

**(ii)** Calcule o diâmetro de $G$? E qual o centro de $G$? Justifique.

*Resposta:* A *excentricidade* de um vértice $v$, denotada por $e(v)$, é o maior valor da distância entre $v$ e $w$, para todo vértice $w$ em $G$.

| v \ w | a | b | c | d | e | f | g | h | i | j |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 4 | 3 | 4 | 4 |
| b | | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 |
| c | | | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 |
| d | | | | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 3 |
| e | | | | | 0 | 3 | 2 | 1 | 4 | 4 |
| f | | | | | | 0 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| g | | | | | | | 0 | 1 | 2 | 2 |
| h | | | | | | | | 0 | 3 | 1 |
| i | | | | | | | | | 0 | 2 |
| j | | | | | | | | | | 0 |

Tabela 1: Distância entre o par de vértices $v, w$, para todo $v, w \in G$. Note que, devido à simetria do conceito de distância, a tabela foi parcialmente preenchida.

Pela Tabela 1, é possível determinar que $e(a) = e(e) = e(g) = e(j) = e(i) = 4$ e $e(b) = e(c) = e(d) = e(f) = e(h) = 3$.

O *diâmetro* de um grafo $G$ é o maior valor dentre as excentricidades dos vértices de $G$, i.e., diam(G) $= \max_{v \in V(G)} e(v)$. Daí, diam(G) $= 4$.

O *centro* de $G$, denotado por $c(G)$, é o conjunto dos vértices de $G$ com menor excentricidade. Neste caso, $c(G) = \{b, c, d, f, h\}$.