Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AP2 - Segundo Semestre de 2010

Nome -
Assinatura -

Observações:

1. Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular. Deixe o resultado indicado, como um produto ou quociente ou potência de números inteiros ou fatoriais.
2. Resultado sem indicação de como foi obtido, não será considerado.
3. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.
4. Você pode usar lápis para responder as questões.
5. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.
6. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

Questões:

1. (1.0) Use a relação de Stifel para mostrar que:

$$C_n^p + C_n^{p+1} + C_{n+1}^{p+2} = C_{n+2}^{p+2}$$

Resposta: Temos que $C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p$ (Relação de Stifel). Vamos desenvolver o lado esquerdo da equação objetivando o resultado do lado direito. Utilizando a relação descrita temos que:

$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}\ .$$

Assim, obtemos a seguinte expressão:

$$C_n^p + C_n^{p+1} + C_{n+1}^{p+2} = C_{n+1}^{p+1} + C_{n+1}^{p+2}\ .$$

Aplicando novamente a relação de Stifel, obtemos o resultado esperado:

$$C_{n+1}^{p+1} + C_{n+1}^{p+2} = C_{n+1}^{p+2}\ .$$

Logo, $C_n^p + C_n^{p+1} + C_{n+1}^{p+2} = C_{n+2}^{p+2}$.

2. (1.5) Determine o coeficiente de x^{30} no desenvolvimento de $(\frac{2}{x} - x^2)^{90}$. Justifique a resposta.

   Resposta: O termo geral do desenvolvimento binomial pode ser escrito como:

$$T_{k+1} = C_n^k b^k a^{n-k}$$

O objetivo da questão é determinar o coeficiente de x^{30}, por isso precisamos descobrir qual o termo que contém tal coeficiente. Para isso, precisamos determinar k.

Sabemos que $n = 90$ e vamos definir $a = \frac{2}{x}$ e $b = -x^2$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
T_{k+1} &= C_{90}^k (-x^2)^k \left(\tfrac{2}{x}\right)^{90-k} \\
&= C_{90}^k (-x)^{2k} \left(2x^{-1}\right)^{90-k} \\
&= C_{90}^k \underbrace{(-1)^{2k}}_{=1 \text{ pois } 2k \text{ é par}} x^{2k}\, 2^{90-k}\, x^{k-90} \\
&= C_{90}^k\, 2^{90-k} \underbrace{x^{2k}\, x^{k-90}} \\
&= C_{90}^k\, 2^{90-k}\, x^{3k-90}
\end{aligned}$$

Como queremos o coeficiente de x^{30}, basta considerarmos $3k-90=30$. Então $k=40$. Assim, o coeficiente de x^{30} é dado por:

$$C_{90}^{40}\,2^{90-40} = C_{90}^{40}\,2^{50}.$$

3. (1.5) Encontre a fórmula fechada da relação de recorrência:
$a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$ $\quad$ n natural, $n \geq 1$
$a_0 = 1$
Descreva o processo utilizado para chegar à fórmula.

Resposta:

$$\begin{array}{rcl}
a_n & = & a_{n-1} + 2^{n-1} \\
 & = & (a_{n-2} + 2^{n-2}) + 2^{n-1} \\
 & = & a_{n-3} + 2^{n-3} + 2^{n-2} + 2^{n-1} \\
 & \vdots & \\
 & = & a_{n-i} + 2^{n-i} + \cdots + 2^{n-3} + 2^{n-2} + 2^{n-1} \\
 & = & a_{n-i} + \sum_{k=1}^{i} 2^{n-k}
\end{array}$$

Quando $n-i=0$ temos $n=i$ e

$$\begin{array}{rcl}
a_n & = & a_0 + \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} \\
 & = & 1 + \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} \\
 & = & 1 + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 2^0 \\
 & = & 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k
\end{array}$$

Mas $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k$ é a soma finita de uma progressão geométrica de razão 2. Então, aplicando a fórmula da soma finita de uma PG, temos:

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = \frac{2^{n-1} \times 2 - 1}{1} = 2^n - 1$$

Assim,

$$\begin{array}{rcl}
a_n & = & 1 + 2^n - 1 \\
 & = & 2^n
\end{array}$$

Logo, a fórmula fechada para a relação de recorrência é $a_n = 2^n$.

4. (1.5) Seja G um grafo regular de grau 5, com 40 arestas. Determine quantos vértices tem G. Justifique.

   Resposta: Sabemos que:

   $$\sum_{v \in V} d(v) = 2m \ .$$

   Como G é 5-regular, temos que

   $$\sum_{v \in V} d(v) = 5n \ , \text{ onde } n \text{ é o número de vértices de } G.$$

   Daí temos que

   $$5n = 2 \times 40 \Rightarrow n = 16.$$

   Logo, G tem 16 vértices.

5. (1.5) Seja F uma floresta com exatamente 3 componentes conexos T_1, T_2, T_3, sendo que T_1 tem 7 vértices, T_2 tem 10 e T_3 tem 15. Quantas vértices e quantas arestas F possui? Justifique.

   Resposta: Se F é uma floresta com 3 componentes conexos T_1, T_2, T_3, então T_1, T_2, T_3 são árvores porque são acíclicos (F é acíclico) e conexos. Então, podemos expressar o número de arestas de T_i como $m_i = n_i - 1$, onde m_i e n_i são os números de arestas e vértices de T_i, respectivamente, $1 \leq i \leq 3$. Assim,

   $$\begin{array}{rcrcl} m_1 & = & 7-1 & = & 6 \\ m_2 & = & 10-1 & = & 9 \\ m_3 & = & 15-1 & = & 14 \end{array}$$

   Como F tem apenas 3 componentes conexos, não existem arestas e vértices em F que não sejam de T_1, T_2, T_3, e além disso, não existem arestas e vértices comuns a dois componentes conexos (por definição de componente conexo), logo o número de arestas de F é $\sum_{i=1}^{3} m_i = 29$ e o número de vértices de F é $\sum_{i=1}^{3} n_i = 32$.

6. (3.0) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é **VERDADEIRA** ou **FALSA**. Se for verdadeira prove, se for falsa dê um contra-exemplo.

(a) Se G é um grafo bipartido hamiltoniano então G tem um número par de vértices.

Resposta: **Verdadeiro.**

Prova: Seja G um grafo bipartido hamiltoniano. Então, por definição G tem um ciclo hamiltoniano C, isto é, um ciclo que inclui todos os vértices de G.

Suponha, por absurdo, que G tem um número ímpar de vértices. Nesse caso, o ciclo hamiltoniano C de G é um ciclo ímpar. Logo G não é bipartido (G é um grafo bipartido se e somente se G não possui ciclos ímpares). Absurdo!

Portanto, G tem um número par de vértices.

(b) Os grafos completos K_n são planares para todo n inteiro, $1 \leq n \leq 4$

Resposta: **Verdadeiro.**

Prova: Os grafos K_1, K_2, K_3, K_4 possuem representações planas, pois podem ser representados sem cruzamento de arestas, como nas figuras abaixo. Logo são planares.

Figura 1: K_1.

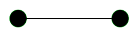

Figura 2: K_2.

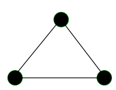

Figura 3: K_3.

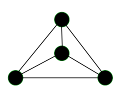

Figura 4: K_4.

(c) Todo digrafo (com pelo menos 3 vértices) possui pelo menos uma fonte e pelo menos um sumidouro.

Resposta: **Falso.**

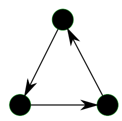

Figura 5: Digrafo cíclico sem fonte e sem sumidouro.

(d) Um grafo planar com 70 vértices e 15 faces tem exatamente 83 arestas.

Resposta: **Verdadeiro.**

Prova: Seja G um grafo planar com 15 faces e 70 vértices. Pelo Teorema de Euler temos:

$$m = n + f - 2.$$

Assim,

$$m = 70 + 15 - 2 = 83.$$

Logo, G tem 83 arestas.