Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP2 - Primeiro Semestre de 2013

Nome -
Assinatura -

Observações:

1. Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular. Se necessário deixe o resultado indicado, como um produto ou quociente ou potência de números inteiros ou fatoriais.
2. Resultado sem indicação de como foi obtido, não será considerado.
3. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.
4. Você pode usar lápis para responder as questões.
5. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.
6. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

Questões:

1. (1.0) Usando a relação de Stiefel, mostre que:

$$C_n^p + C_n^{p+1} + C_{n+1}^{p+2} = C_{n+2}^{p+2}$$

Resposta: A relação de Stiefel nos diz que: $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$. Daí temos:

$$\begin{aligned} \underbrace{C_n^p + C_n^{p+1}}_{\text{RS}} + C_{n+1}^{p+2} &= \underbrace{C_{n+1}^{p+1} + C_{n+1}^{p+2}}_{\text{RS}} \\ &= C_{n+2}^{p+2} \end{aligned}$$

Logo, $C_n^p + C_n^{p+1} + C_{n+1}^{p+2} = C_{n+2}^{p+2}$.

2. (1.5) Avalie o valor S da seguinte soma, usando o binômio de Newton:

$$S = \sum_{k=0}^{85} 5^k C_{85}^k$$

Justifique.

Resposta: O Teorema Binomial nos diz que: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^n b^n$.
Note que se $a = 1$, $b = 5$ e $n = 85$, temos:

$$(1+5)^{85} = C_{85}^0 + 5C_{85}^1 + 5^2 C_{85}^2 + 5^3 C_{85}^3 \cdots + 5^{85} C_{85}^{85}$$

Logo,

$$(1+5)^{85} = \sum_{k=0}^{85} 5^k C_{85}^k$$

Portanto,

$$S = (1+5)^{85}$$

$$S = 6^{85}$$

3. (1.5) Encontre a fórmula fechada da seguinte relação de recorrência, usando substituição regressiva:
   $a_n = a_{n-1} + 3(n-1) \qquad n$ natural, $n \geq 1$
   $a_0 = 0$
   Descreva o processo utilizado para chegar à fórmula.

   Resposta: Vamos utilizar o método das Substituições Regressivas.

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + 3(n-1) \\
&= \underbrace{(a_{n-2} + 3(n-2))}_{a_{n-1}} + 3(n-1) \\
&= \underbrace{(a_{n-3} + 3(n-3))}_{a_{n-2}} + 3(n-2) + 3(n-1) \\
&\vdots \\
&= \underbrace{(a_{n-i} + 3(n-i))}_{a_{n-(i-1)}=a_{n-i+1}} + \cdots + 3(n-3) + 3(n-2) + 3(n-1) \\
&= a_{n-i} + 3((n-i) + \cdots + (n-3) + (n-2) + (n-1))
\end{aligned}$$

   O problema nos diz que $a_0 = 0$. Então, $n - i = 0 \Leftrightarrow i = n$. Logo, temos:

$$\begin{aligned}
a_n &= a_0 + 3(0 + 1 + 2 + \cdots + (n-3) + (n-2) + (n-1)) \\
&= 0 + 3\underbrace{(1 + 2 + \cdots + (n-3) + (n-2) + (n-1))}_{\text{PA}} \\
&= 3^{\frac{[1+(n-1)](n-1)}{2}} \\
&= 3^{\frac{n^2-n}{2}}
\end{aligned}$$

   Portanto, $a_n = 3^{\frac{n^2-n}{2}}$.

4. (1.0) Seja G um grafo conexo, 4-regular (regular de grau 4), com 10 vértices. Calcule o número de arestas de G. Justifique.

   Resposta: O Teorema do Aperto de Mãos nos diz que:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m,$$

   onde $d(v)$ e m denotam o grau do vértice v e a quantidade de arestas de G, respectivamente. Sabemos que o grafo G em questão é 4-regular, ou seja, todo vértice tem grau 4 e, além disso, que G tem 10 vértices, ou seja, $n = 10$. Assim,

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 4n$$

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 4 \times 10$$

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 40$$

   Substituindo na fórmula do Teorema, temos:

$$40 = 2m$$

$$m = 20$$

   Portanto, G possui 20 arestas.

5. (1.0) Seja G um grafo conexo planar com 25 arestas e 17 faces. Qual o número de vértices de G? Justifique.

   Resposta: A fórmula de Euler garante que se G é planar, então: $f = m - n + 2$, onde f, m, n denotam o número de faces, de arestas e de vértices de G, respectivamente. Sabemos que $m = 25$ e $f = 17$. Assim, substituindo na fórmula de Euler temos:

$$17 = 25 - n + 2$$
$$n = 25 - 17 + 2$$
$$n = 10$$

Logo, G tem 10 vértices.

6. (4.0) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é **FALSA** ou **VERDADEIRA**. Se for verdadeira, prove. Se for falsa, dê um contra-exemplo (o contra-exemplo deve ser justificado).

(a) Se dois grafos G_1 e G_2 são isomorfos então êles têm o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas.

Resposta: Verdadeiro. Por definição, dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ são isomorfos se existe uma função bijetora $f : V_1 \to V_2$ tal que $(u, v) \in E_1$ se e somente se $(f(u), f(v)) \in E_2$. Logo, segue da definição que $|V_1| = |V_2|$, pois f é bijetora. Além disso, toda aresta de E_1 está relacionada a uma única aresta de E_2. Portanto, $|E_1| = |E_2|$. Logo, G_1 e G_2 isomorfos têm o mesmo número de vértices e de arestas.

(b) Se G é um grafo bipartido então G não possui ciclo ímpar.

Resposta: Verdadeiro. Seja G um grafo com bipartição (V_1, V_2) e C_k um ciclo de G. Suponha que $C_k = v_1v_2 \cdots v_{k-1}v_kv_1$. Como G é bipartido, toda aresta de G tem um extremo em V_1 e outro extremo em V_2. Assim, suponha sem perda de generalidade que $v_1 \in V_1$. Consequentemente $v_2 \in V_2$ e $v_3 \in V_1$ e assim sucessivamente. De maneira geral, $v_{2i+1} \in V_1$ e $v_{2i} \in V_2$. Como $v_1 \in V_1$, temos $v_k \in V_2$, donde $k = 2i$, para algum i, ou seja k é par. Logo, se existir um ciclo em G, ele será um ciclo par.

(c) Se G é um grafo hamiltoniano então G é também euleriano.

Resposta: Falso. Observe que no contra exemplo da Figura 1 temos um $K_{3,3}$ que é Hamiltoniano (podemos exibir o seguinte ciclo Hamiltoniano: $abcdefa$), mas que não é Euleriano, visto que todos os vértices têm grau ímpar.

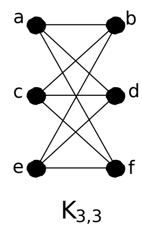

Figura 1: Grafo $K_{3,3}$ hamiltoniano mas não possui trajeto Euleriano.

(d) Todo digrafo fracamente conexo é unilateralmente conexo.

Resposta: Falso. Observe que no contra exemplo da Figura 2, temos um grafo direcionado G, que claramente tem seu grafo subjacente conexo, ou seja, G é fracamente conexo, mas que não tem caminho do vértice a para o vértice e e nem do vértice e para o vértice a, não sendo, portanto, unilateralmente conexo.

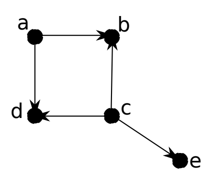

Figura 2: Digrafo G fracamente conexo que não é unilateralmente conexo.