Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD2 -1 Segundo Semestre de 2019

Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (1.5) Usando o Teorema das Diagonais calcule a seguinte soma:

$$S = \sum_{k=8}^{30} CR_{98}^{k}.$$

Justifique.

Resposta: Segundo o Teorema das Diagonais, $\sum_{i=0}^{k} C_{n+i}^{i} = C_{n+k+1}^{k}$. Para solucionar a questão utilizando tal teorema, vamos inicialmente reescrever a Combinação com repetição na forma de Combinação, ou seja, $CR_n^k = C_{n+k-1}^{k}$. Assim,

$$S = \sum_{k=8}^{30} CR_{98}^{k} = \sum_{k=8}^{30} C_{98+k-1}^{k} = \sum_{k=8}^{30} C_{97+k}^{k} = C_{105}^{8} + C_{106}^{9} + \ldots + C_{127}^{30}$$

Como, pelo Teorema das Diagonais,

$$\sum_{k=0}^{30} C_{97+k}^{k} = C_{97}^{0} + C_{98}^{1} + \ldots + C_{104}^{7} + C_{105}^{8} + C_{106}^{9} + \ldots + C_{127}^{30}$$

resulta em C_{128}^{30}, temos que

$$C_{105}^{8} + C_{106}^{9} + \ldots + C_{127}^{30} = C_{128}^{30} - [C_{97}^{0} + C_{98}^{1} + \ldots + C_{104}^{7}]$$

.

Aplicando novamente o Teorema das Diagonais, $[C_{97}^0 + C_{98}^1 + \ldots + C_{104}^7] = C_{105}^7$. Portanto, $S = \sum_{k=8}^{30} CR_{98}^k = C_{128}^{30} - C_{105}^7$.

2. (1.5) Considere o seguinte binômio:

$$\left(\sqrt{2xy} - \frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^4}\right)^{105}$$

Usando o desenvolvimento do binômio de Newton calcule o coeficiente de x^{50} . Justifique.

Resposta: A fórmula do termo geral do binômio de Newton $(a+b)^n$ é dada por $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$. Neste item, temos: $a = \sqrt{2xy} = (2xy)^{\frac{1}{2}}, b = -\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^4} = -x^{\frac{1}{3}}y^{-4}, n = 105$. Assim,

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= C_{105}^k[(2xy)^{\frac{1}{2}}]^{105-k}(-x^{\frac{1}{3}}y^{-4})^k \\ &= C_{105}^k(-1)^k(2)^{\frac{105-k}{2}}x^{\frac{105-k}{2}}y^{\frac{105-k}{2}}x^{\frac{k}{3}}y^{-4k} \\ &= C_{105}^k(-1)^k(2)^{\frac{105-k}{2}}y^{\frac{105-9k}{2}}x^{\frac{315-k}{6}} \end{aligned}$$

Como queremos determinar o coeficiente de x^{50}, temos: $\frac{315-k}{6} = 50$, donde $k = 15$. Portanto, o termo do qual procuramos o coeficiente de x^{50} é: $T_{16} = -C_{105}^{15}2^{45}y^{-15}x^{50}$. Logo, o coeficiente de x^{50} no desenvolvimento do binômio é $-C_{105}^{15}2^{45}y^{-15}$.

3. (1.5) Determine a fórmula fechada da seguinte relação de recorrência:

$$a_n = na_{n-1} + 2^n n! \qquad a_0 = 1,$$

para $n \geq 1$. Justifique.

Resposta: Vamos utilizar o Método das Substituições Regressivas.

$$
\begin{aligned}
a_n &= na_{n-1} + 2^n n! \\
&= n\underbrace{\left([n-1]a_{n-2} + 2^{n-1}(n-1)!\right)}_{a_{n-1}} + 2^n n! \\
&= n(n-1)a_{n-2} + 2^{n-1}n! + 2^n n! \\
&= n(n-1)[(n-2)a_{n-3} + 2^{n-2}(n-2)!] + 2^{n-1}n! + 2^n n! \\
&= n(n-1)(n-2)a_{n-3} + 2^{n-2}n! + 2^{n-1}n! + 2^n n! \\
&\vdots \\
&= n(n-1)(n-2)\ldots 1 \times a_0 + n!\underbrace{[2 + 2^2 + \ldots + 2^n]}_{\text{PG razão 2}} \\
&= n! + n!2(2^n - 1) \\
&= n! + n!(2^{n+1} - 2) \\
&= n![1 + 2^{n+1} - 2] \\
&= n!(2^{n+1} - 1)
\end{aligned}
$$

Logo, $a_n = n!(2^{n+1} - 1)$, para todo $n \geq 1$.