Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

# Gabarito da EP da Aula 02

---

Observações:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.

2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo antes de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.

3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

---

1. Sejam $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $A = \{0, 4\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$, $C = \{1, 4\}$, $D = \{0, 1\}$. Determine os seguintes conjuntos:

   $(a)$ $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$(b)$ $B \cap C = \{1\}$

$(c)$ $A \cap \overline{B} = \{4\}$

$(d)$ $A \cup (B \cap C) = \{0, 1, 4\}$, pois

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= \{0, 4\} \cup \{1\} \\ &= \{0, 1, 4\}. \end{aligned}$$

$(e)$ $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{0, 1, 4\}$, dado que

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (A \cup C) &= \{0, 1, 2, 3, 4\} \cap \{0, 1, 4\} \\ &= \{0, 1, 4\} \end{aligned}$$

***O*bservação:** Note que os ítens (d) e (e) devem ser iguais pela propriedade distributiva da união em relação a interseção, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$(f)$ $(\overline{A \cap B}) \cup (\overline{A \cap C})$

$$\begin{aligned} (\overline{A \cap B}) \cup (\overline{A \cap C}) &= (U - (A \cap B)) \cup (U - (A \cap C)) \\ &= (\{0, 1, 2, 3, 4\} - \{0\}) \cup (\{0, 1, 2, 3, 4\} - \{4\}) \\ &= \{1, 2, 3, 4\} \cup \{0, 1, 2, 3\} \\ &= \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{aligned}$$

$(g)$ $A \cup \overline{B} = \{0, 4\}$, pois $A = \{0, 4\}$ e $\overline{B} = \{4\}$

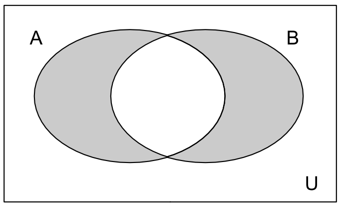
$(h)$ $A - B = \{4\}$

$(i)$ $B - \overline{A} = \{0\}$

$(j)$ $A \cup (B \cap C \cap D) = \{0, 1, 4\}$

2. Represente por meio de um diagrama de Venn a diferença simétrica entre dois conjuntos, $A \Delta B$, definida por $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

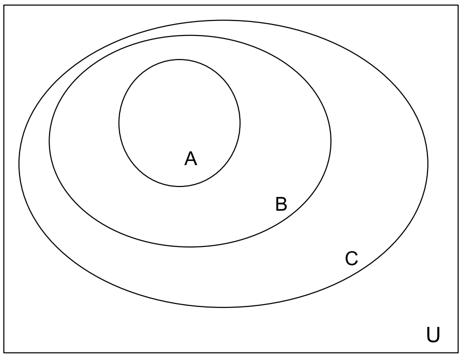
   ***R*esposta:**




3. Sejam $A$, $B$ e $C$ subconjuntos de um conjunto universo $U$. Represente por meio de diagramas de Venn as seguintes situações:

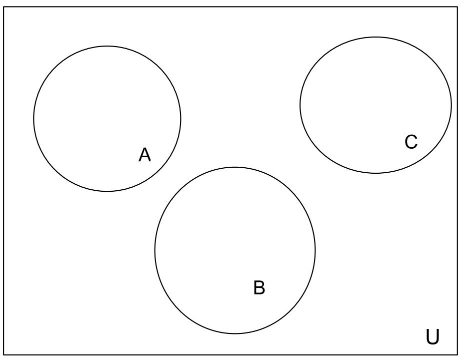
   $(i)$ $A \subset B \subset C$

   ***R*esposta:**



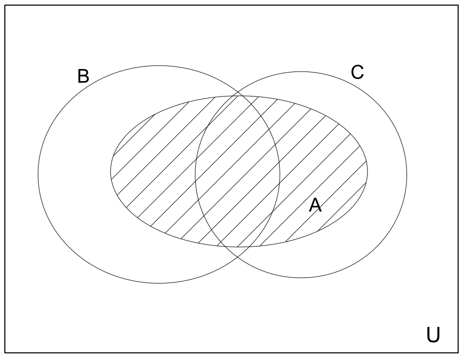

   $(ii)$ $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$

   ***R*esposta:**



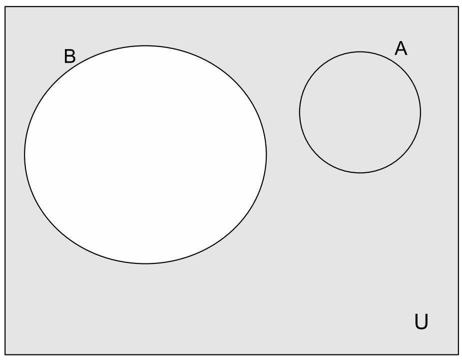
$(iii)$ $A \subseteq B \cup C$

***R*esposta:**



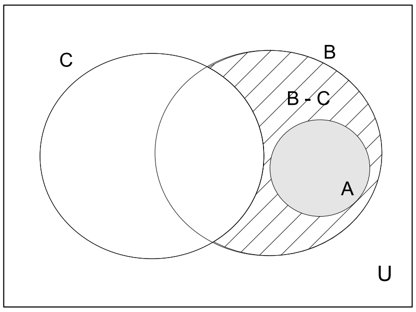

$(iv)$ $A \subseteq \overline{B}$

***R*esposta:**



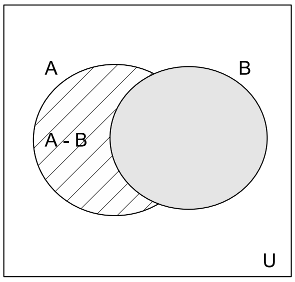

$(v)$ $A \subseteq B - C$

***R*esposta:**

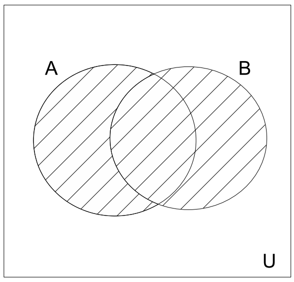



4. Verifique, usando os diagramas de Venn as seguintes igualdades:
$(i)$ $(A - B) \cup B = A \cup B$

***R*esposta:**



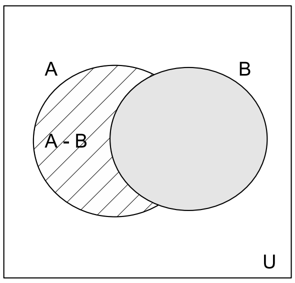

$(A - B) \cup B$



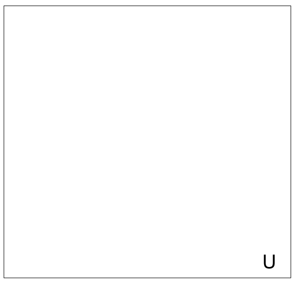

$A \cup B$

$(ii)$ $(A - B) \cap B = \emptyset$

***R*esposta:**



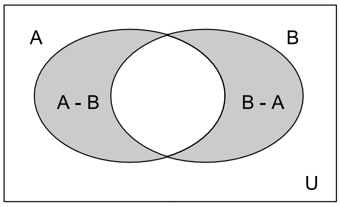

$(A - B) \cup B$



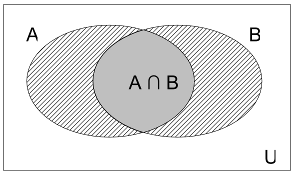

$\emptyset$

$(iii)$ $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

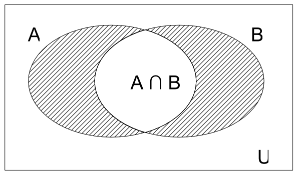
***R*esposta:**




$(A - B) \cup (B - A)$



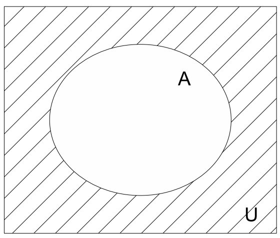

$A \cup B$



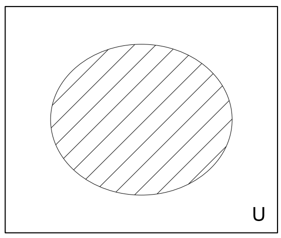

$(A \cup B) - (A \cap B)$

$(v)$ $(\overline{\overline{A}}) = A$

***R*esposta:**




$\overline{A}$




$\overline{\overline{A}}$

5. Mostre que $A \subseteq B$ e $A \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B \cap C$.

   ***R*esposta:** Seja $x \in A$. Como$A \subseteq B$ e $A \subseteq C$, então $x \in B$ e $x \in C$. Logo, $x \in B \cap C$ e conseqüentemente $A \subseteq B \cap C$.

6. Mostre que $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$

   ***R*esposta:** Primeiro provaremos que $A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset$.

Se $x \in A - B$, então $x \in A$ e $x \notin B$. No entanto, sabemos por hipótese que todo elemento de $A$ é também elemento de $B$, isto implica que $x \in B$ o que é uma contradição. Logo, $A - B = \emptyset$.

Provaremos agora que $A - B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$.

Notemos que provar $A - B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$ é equivalente a provar a contrapositiva da implicação, isto é, $A \nsubseteq B \Rightarrow A - B \neq \emptyset$.

Usaremos esta estratégia.

Se $A \nsubseteq B$ significa que existe $x \in A$ tal que $x \notin B$, então $x \in A - B$, portanto $A - B \neq \emptyset$ que é o que queríamos provar. Logo, $A - B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$.

Portanto, provamos que $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$.

7. Mostre que $A - B \subseteq A$

   ***R*esposta:** Provaremos a inclusão acima. $A - B = \{x | x \in A \text{ e } x \notin B\}$. Portanto, se $x \in A - B$, então $x \in A$, logo pela definição de inclusão tem - se $A - B \subseteq A$.

8. Mostre que $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$

   ***R*esposta:** ($\Rightarrow$) Inicialmente provaremos que $A \subseteq B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$.

   Seja $x \in \overline{B}$, então $x \notin B$. Logo, por hipótese $x \notin A$, portanto $x \in \overline{A}$ o que implica que $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

   ($\Leftarrow$) Provaremos agora que $\overline{B} \subseteq \overline{A} \Rightarrow A \subseteq B$.

   Assumimos que $\overline{B} \subseteq \overline{A}$, devemos provar que $A \subseteq B$.

   Se $x \in A$, então $x \notin \overline{A}$. Por hipótese $\overline{B} \subseteq \overline{A}$, isto significa que $x \notin \overline{B}$, conseqüentemente, $x \in B$. Concluímos portanto que $A \subseteq B$.

9. Dados os conjuntos $C = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ é múltiplo de } 2\}$ , $D = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ é múltiplo de } 3\}$, $E = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ é múltiplo de } 6\}$ , verifique que $C \cap D = E$.

   ***R*esposta:** Decompondo 6 em fatores primos obtemos que $6 = 2.3$, portanto se um número $n$ é múltiplo de 6, então $n$ é múltiplo de 2 e 3, isto significa que $E \subseteq C \cap D$. Analogamente, se $n$ é múltiplo de 2 e 3 então $n$ é múltiplo de 6, isto é $D \cap C \subseteq E$. Concluímos portanto que $C \cap D = E$.

10. Considere $A = \{x \in \mathbb{N} | 5 \leq x^2 \leq 300\}$ , $B = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq 3x - 2 \leq 30\}$. Calcule:

    ***R*esposta:** $A$ e $B$ representam os conjuntos: $A = \{3, 4, 5, ..., 17\}$ e $B = \{1, 2, 3, ..., 10\}$.

    $(i)$ $A \cup B = \{1, 2, 3, ..., 16, 17\}$

    $(ii)$ $A \cap B = \{3, 4, ..., 10\}$

    $(iii)$ $A - B = \{11, 12, ..., 17\}$

    $(iv)$ $B - A = \{1, 2\}$

    $(v)$ $\overline{A} \cap \overline{B} = \{x \in \mathbb{N} | x \geq 18\}$, pois $\overline{A} = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 2$ ou $x \geq 18\}$ e $\overline{B} = \{x \in \mathbb{N} | x \geq 11\}$.

    $(vi)$ $\overline{A} \cup \overline{B} = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 2$ ou $x \geq 11\}$

11. Dado $C = \{2, -1, 5\}$, considere o conjunto universo sendo o conjunto de partes de $C$, $U = P(C)$. Calcule:

    $(i)$ $\overline{A}$ $(ii)$ $A \cap B$

    para $A = \{\{2, -1\}, \{2\}\}$ , $B = \{\{5\}, \{2, -1, 5\}, \{-1, 2\}\}$.

    ***R*esposta:** $U = P(C) = \{\emptyset, \{2\}, \{-1\}, \{5\}, \{2, -1\}, \{2, 5\}, \{-1, 5\}, \{2, -1, 5\}\}$.

    $(i)$ $\overline{A} = \{\emptyset, \{-1\}, \{5\}, \{2, 5\}, \{-1, 5\}, \{2, -1, 5\}\}$.

    $(ii)$ $A \cap B = \{\{2, \text{-}1\}\}$.

12. Use a propriedade distributiva da interseção em relação a união de conjuntos para provar que $(A \cap D) \cup \overline{D} = A \cup \overline{D}$

***R*esposta:** Para provar a igualdade, consideremos $U$ o conjunto universo onde estão os conjuntos $A$ e $D$.

$$\begin{array}{lcl}
(A \cap D) \cup \overline{D} & = & \\
\text{(propriedade distributiva)} & = & (A \cup \overline{D}) \cap (D \cup \overline{D}) \\
 & = & (A \cup \overline{D}) \cap U \\
 & = & A \cup \overline{D}
\end{array}$$

13. Prove que $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.

    ***R*esposta:** Para provar a igualdade utilizaremos as propriedades conhecidas e obteremos o segundo termo a partir do primeiro.

$$\begin{array}{lcl}
A - (B - C) & = & \\
\text{(prop. da diferença)} & = & A \cap \overline{(B \cap \overline{C})} \\
\text{(Lei de Morgan)} & = & A \cap (\overline{B} \cup \overline{\overline{C}}) \\
 & = & A \cap (\overline{B} \cup C) \\
\text{(prop. distributiva)} & = & (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C) \\
\text{(prop. da diferença)} & = & (A - B) \cup (A \cap C)
\end{array}$$

14. Mostre as seguintes igualdades:

    $(i)$ $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

    ***R*esposta:** Para provar a igualdade, consideremos $U$ o conjunto universo onde estão os conjuntos $A$ e $D$.

$$\begin{array}{lcl}
(A - B) \cup (B - A) & = & \\
\text{(prop. da diferença)} & = & (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \\
\text{(prop. distributiva)} & = & [A \cup (B \cap \overline{A})] \cap [\overline{B} \cup (B \cap \overline{A})] \\
\text{(prop. distributiva)} & = & [(A \cup B) \cap (A \cup \overline{A})] \cap [(\overline{B} \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})] \\
\text{(Lei de Morgan)} & = & [(A \cup B) \cap U] \cap [U \cap \overline{(A \cap B)}] \\
 & = & (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} \\
\text{(prop. da diferença)} & = & (A \cup B) - (A \cap B)
\end{array}$$

    $(ii)$ $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

***R*esposta:** Para provar a igualdade, consideremos $U$ o conjunto universo onde estão os conjuntos $A$ e $D$.

$$\begin{array}{lcl}
(A \cap B) - (A \cap C) & = & \\
\text{(prop. da diferença)} & = & (A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)} \\
\text{(Lei de Morgan)} & = & (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \\
\text{(prop. distributiva)} & = & [(A \cap B) \cap \overline{A}] \cup [(A \cap B) \cap \overline{C}] \\
\text{(prop. comutativa e associativa)} & = & [(A \cap \overline{A}) \cap B] \cup [A \cap (B \cap \overline{C})] \\
\text{(prop. da diferença)} & = & (\emptyset \cap B) \cup [A \cap (B - C)] \\
 & = & \emptyset \cup [A \cap (B - C)] \\
 & = & A \cap (B - C)
\end{array}$$

15. *O*bservação: Nesta questão estamos considerando $0 \in \mathbb{N}$.

Dados os seguintes conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{Z} | 0 \leq x \leq 7\}$ , $B = \{x \in \mathbb{N} | 0 \leq x \leq 7\}$. Verifique que:

$(i)$ $A = B$

***R*esposta:** Os elementos de $A$ e $B$ são os mesmos, $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

$(ii)$ $\overline{A} \neq \overline{B}$

***R*esposta:** $A \subseteq \mathbb{Z}$ logo o conjunto universo onde está $A$ é $\mathbb{Z}$, portanto, $\overline{A} = \{x \in \mathbb{Z} | x \geq 8 \text{ ou } x \leq -1\} = \{..., -3, -2, -1, 8, 9, ...\}$.

Por definição $B \subseteq \mathbb{N}$, portanto o conjunto universo é $\mathbb{N}$, então $\overline{B} = \{x \in \mathbb{N} | x \geq 8\} = \{8, 9, 10, ...\}$.