Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AD2 - Primeiro Semestre de 2013

Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (1.5) Usando o Teorema das colunas calcule a seguinte soma:

$$8.9 + 9.10 + \cdots + 99.100$$

Justifique.

Resposta: Seja $S = 8.9 + 9.10 + \cdots + 99.100$. Observe que podemos reescrever S da seguinte maneira:

$$S = 2\left(\frac{9!}{7!2!} + \frac{10!}{8!2!} + \cdots + \frac{100!}{98!2!}\right).$$

Mas,

$$2\left(\frac{9!}{7!2!} + \frac{10!}{8!2!} + \cdots + \frac{100!}{98!2!}\right) = 2(C_9^2 + C_{10}^2 + \cdots + C_{100}^2) \quad (I).$$

O Teorema das Colunas garante que:

$$C_r^r + C_{r+1}^r + \cdots + C_n^r = C_{n+1}^{r+1}.$$

Observe que não podemos aplicar o teorema das colunas diretamente à soma (I), pois falta a ela o seguinte somatório: $C_2^2 + \cdots + C_8^2$. Assim, temos:

$$S = 2([C_2^2 + \cdots + C_8^2] + C_9^2 + \cdots + C_{100}^2 - [C_2^2 + \cdots + C_8^2])$$

Agora podemos aplicar o Teorema das Colunas com $r = 2$ e $n = 100$:

$$S = 2(\underbrace{C_{101}^3}_{\text{TC}} - [C_2^2 + \cdots + C_8^2]).$$

Contudo, nosso problema ainda não foi resolvido, visto que ainda resta uma soma a ser solucionada. Note que, para resolvê-la, podemos utilizar diretamente o Teorema das Colunas com $r = 2$ e $n = 8$. Desta forma, temos:

$$S = 2(C_{101}^3 - \underbrace{C_9^3}_{\text{TC}}).$$

$$S = 2\left(\frac{101!}{98!3!} - \frac{9!}{6!3!}\right)$$

$$S = 2\left(\frac{101 \times 100 \times 99}{6} - \frac{9 \times 8 \times 7}{6}\right)$$

$$S = \left(\frac{101 \times 100 \times 99}{3} - \frac{9 \times 8 \times 7}{3}\right)$$

$$S = 333132$$

2. (1.5) Avalie o valor S da seguinte soma, usando o binômio de Newton:

$$S = \sum_{k=3}^{100} 2^k C_{100}^k$$

Justifique.

Resposta: O Teorema Binomial nos diz que: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^n b^n$.

Note que se $a = 1$, $b = 2$ e $n = 100$, temos:

$$(1 + 2)^{100} = C_{100}^0 + 2C_{100}^1 + 2^2 C_{100}^2 + 2^3 C_{100}^3 \cdots + 2^{100} C_{100}^{100}$$

Assim, podemos observar que S difere do cálculo de $(1 + 2)^{100}$ pela soma dos seguintes três fatores: $C_{100}^0, 2C_{100}^1, 2^2 C_{100}^2$.

Logo,

$S = [C_{100}^0 + 2C_{100}^1 + 2^2C_{100}^2] + 2^3C_{100}^3 \cdots + 2^{100}C_{100}^{100} - [C_{100}^0 + 2C_{100}^1 + 2^2C_{100}^2].$

Daí,

$$
\begin{gathered}
S = (1+2)^{100} - [C_{100}^0 + 2C_{100}^1 + 2^2C_{100}^2] \\
S = 3^{100} - \left[1 + 2 \times 100 + 2^2\left(\frac{100!}{98!2!}\right)\right] \\
S = 3^{100} - [1 + 200 + (2 \times 100 \times 99)] \\
S = 3^{100} - [201 + 19800] \\
S = 3^{100} - 20001
\end{gathered}
$$

3. (1.5) Encontre a fórmula fechada da seguinte relação de recorrência, usando substitução regressiva.

$$a_n = a_{n-1} + 2 \times 5^{n-1} \;\text{ para }\; a_0 = 1.$$

Justifique.

Resposta: Vamos utilizar o método das Substituições Regressivas.

$$
\begin{array}{rcc}
a_n & = & a_{n-1} + 2 \times 5^{n-1} \\
 & = & \underbrace{(a_{n-2} + 2 \times 5^{n-2})}_{a_{n-1}} + 2 \times 5^{n-1} \\
 & = & \underbrace{(a_{n-3} + 2 \times 5^{n-3})}_{a_{n-2}} + 2 \times 5^{n-2} + 2 \times 5^{n-1} \\
 & \vdots & \\
 & = & \underbrace{(a_{n-i} + 2 \times 5^{n-i})}_{a_{n-(i-1)} = a_{n-i+1}} + \cdots + 2 \times 5^{n-3} + 2 \times 5^{n-2} + 2 \times 5^{n-1} \\
 & = & a_{n-i} + 2 \times (5^{n-i} + \cdots + 5^{n-3} + 5^{n-2} + 5^{n-1})
\end{array}
$$

O problema nos diz que $a_0 = 1$. Então, $n - i = 0 \Leftrightarrow i = n$. Logo, temos:

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + 2 \times \underbrace{(5^0 + \cdots + 5^{n-3} + 5^{n-2} + 5^{n-1})}_{\text{PG de razão 5}} \\ &= 1 + 2\left(\frac{1(5^n-1)}{5-1}\right) \\ &= 1 + \frac{5^n-1}{2} \\ &= \frac{5^n+1}{2} \end{aligned}$$

Portanto, $a_n = \frac{5^n+1}{2}$.

4. (1.0) Qual o maior número possível de vértices num grafo com 18 arestas, sabendo que todos os seus vértices têm grau maior ou igual a 3? Justifique.

   Resposta: O Teorema do Aperto de Mãos nos diz que:

   $$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m,$$

   onde $d(v)$ e m denotam o grau do vértice v e a quantidade de arestas de G, respectivamente. Sabemos que o grafo G em questão tem 18 arestas e que cada vértice tem grau maior ou igual a 3, donde podemos extrair que:

   $$\sum_{v \in V(G)} d(v) \geq 3n,$$

   onde n denota o número de vértices de G.

   Substituindo na fórmula do Teorema, temos:

   $$2m \geq 3n$$

   $$2 \times 18 \geq 3n$$

Daí,

$$n \leq 12$$

Portanto, G possui no máximo 12 vértices.

5. (4.5) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é **FALSA** ou **VERDADEIRA**. Se for verdadeira, prove. Se for falsa, dê um contra-exemplo (o contra-exemplo deve ser justificado).

(a) O grafo complementar de um grafo conexo é conexo.

Resposta: Falso. Observe o grafo completo K_2 representado na Figura **??**. Note K_2 é conexo mas seu complemento $\overline{K_2}$ é composto por dois vértices não adjacentes, sendo, portanto, desconexo.

Figura 1: Grafo K_2 conexo e seu complemento $\overline{K_2}$ desconexo.

(b) Se dois grafos G_1 e G_2 têm o mesmo número de vértices, o mesmo número de arestas e a mesma sequência de graus de vértices então G_1 e G_2 são isomorfos.

Resposta: Falso. Observe a Figura **??**. Note que ambos os grafos G_1 e G_2 têm 6 vértices, 8 arestas e a seguinte sequência de graus dos vértices: $(2, 2, 3, 3, 3, 3)$. Contudo, G_1 e G_2 não são isomorfos pois em G_1 temos um triângulo enquanto que em G_2 não temos triângulos.

(c) Se T é uma árvore com grau máximo 5 ($\Delta = 5$) então T possui pelo menos 5 folhas.

Resposta: Verdadeiro.

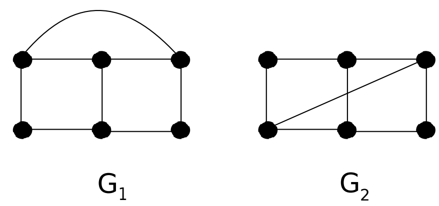

Figura 2: Grafos G_1 e G_2 não isomorfos com mesmo número de vértices e arestas e mesma sequência de graus de vértices.

Sejam T uma árvore e v um vértice de T de grau 5. Vamos enraizar T pelo vértice v. Claramente v tem 5 filhos. Observe que estes filhos podem ser folhas (se todos forem folhas, T tem exatamente 5 folhas) ou podem ter pelo menos um filho (folha ou não). Neste caso, certamente eles compõem um caminho em T que ao percorrermos nos conduzirá a pelo menos uma folha de T. Como folhas tem exatamente 1 pai, não estamos contando folhas repetidas. Logo, cada um dos 5 filhos de v ou será uma folha, ou conduzirá a pelo menos uma folha de T. Portanto, T com grau máximo 5 tem pelo menos 5 folhas.

(d) Os elementos de uma matriz de adjacência do K_5 (grafo completo com 5 vértices) são todos unitários com exceção dos elementos da diagonal principal, que são nulos.

Resposta: Verdadeiro. Uma matriz de adjacência A é uma matriz $n \times n$ onde $a_{ij} = 1$ se $(i, j) \in E(G)$ e $a_{ij} = 0$ caso contrário. Como o grafo K_5 é um grafo completo com 5 vértices, todos os vértices são mutuamente adjacentes, e consequentemente, apenas a diagonal principal da matriz será nula, pois ela representa a adjacência entre um vértice e ele próprio. Observe a matriz de adjacência do K_5 dada a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(e) O grafo bipartido completo $K_{4,4}$ é hamiltoniano e é também euleriano.

Resposta: Verdadeiro. O grafo $K_{4,4}$ é um grafo bipartido completo, ou seja, seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos (V_1, V_2) de modo que toda aresta do $K_{4,4}$ tem um extremo em V_1 e o outro em V_2. Além disso, como o grafo é completo, todo vértice de V_1 é adjacente a todo vértice de V_2. Assim, $d(v) = 4$, $\forall v \in K_{4,4}$. Observe a Figura **??**.

O Teorema de Euler garante que um grafo é Euleriano se e somente se seus vértices têm grau par. Desta forma, podemos garantir que o $K_{4,4}$ é Euleriano.

Além disso, o grafo $K_{4,4}$ é Hamiltoniano pois podemos exibir o seguinte ciclo Hamiltoniano: $abcdefgha$.

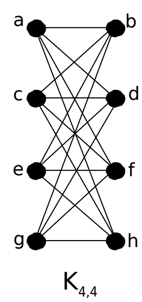

Figura 3: Grafo $K_{4,4}$.

Portanto o grafo $K_{4,4}$ é Euleriano e Hamiltoniano.