Aula 18: Grau de um vértice

Conteúdo:

- Grau de um vértice
- Grafo regular
- Soma dos graus de um grafo
- Sequência de graus

Grau de um vértice:

Seja $G = (V, E)$ um grafo e $v \in V$.

O grau de v é o número de arestas incidentes a v.

Em outras palavras, o grau de v é o número de vértices adjacentes a v.

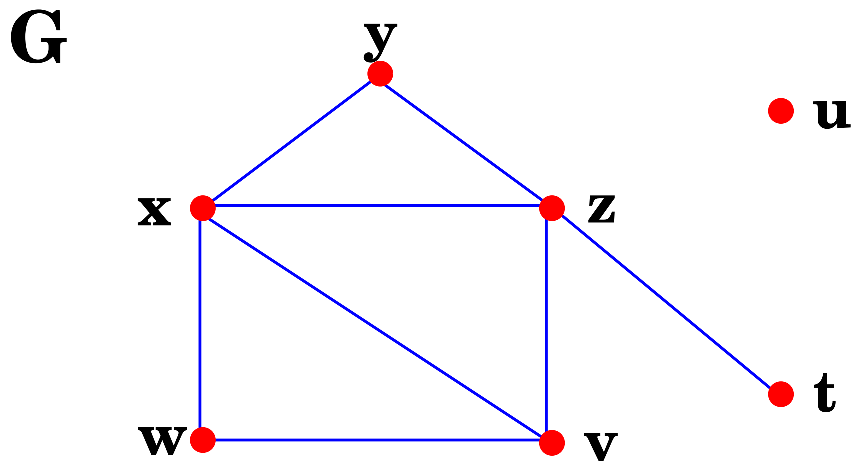
O grau (degree) de v se denota por $d(v)$ ou por $d_G(v)$ (caso haja vários grafos)

$$d(v) = |N(v)| = |\{ w \in V \mid (v, w) \in E \}|$$

Exemplo 1:

Seja G o grafo abaixo:

V(G) = { x, y, z, v, w, t, u }



d(x) = 4

d(y) = 2

d(z) = 4

d(v) = 3

d(w) = 2

d(t) = 1

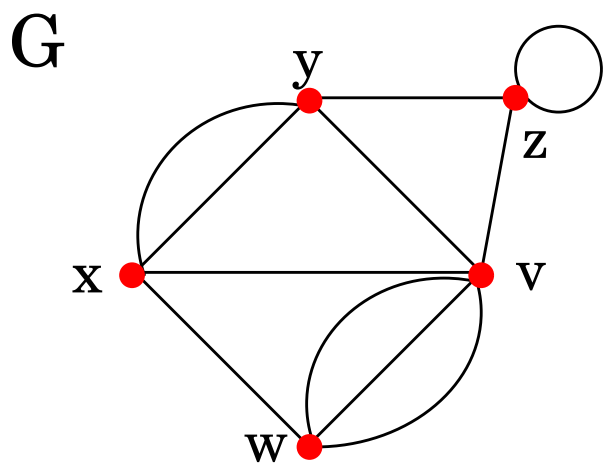
d(u) = 0

Observação: Embora tenhamos definido o conceito de grau para grafos simples, a definição pode ser estendida para multigrafos.
Basta convencionarmos que cada laço contribui com 2 unidades para o grau do vértice correspondente.

Exemplo 2:

Seja G o multigrafo abaixo:

$V(G) = \{ x, y, z, v, w \}$



$d(x) = 4$

$d(y) = 4$

$d(z) = 4$

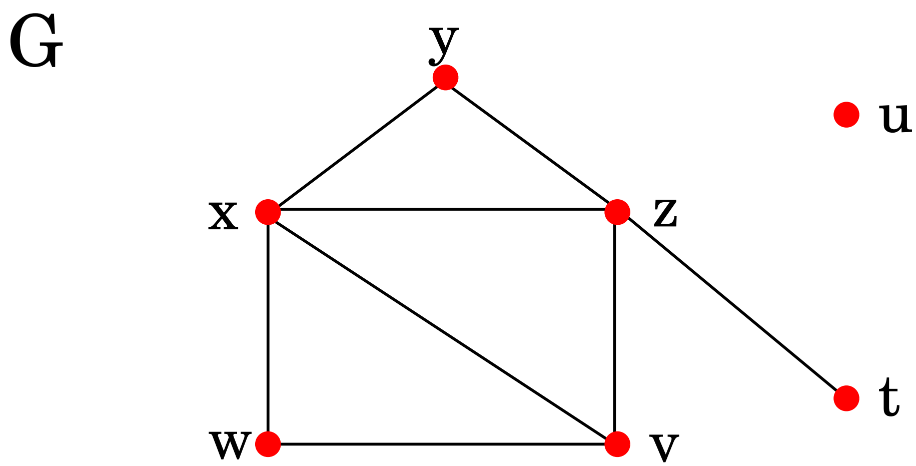
$d(v) = 6$

$d(w) = 4$

Denotamos por:

- $\delta(G)$ o menor grau de G
- $\Delta(G)$ o maior grau de G

Exemplo 3: (Considerando o grafo G do exemplo 1)



$\delta(G) = 0$

$\Delta(G) = 4$

$d(x) = 4$ $d(v) = 3$

$d(y) = 2$ $d(w) = 2$

$d(z) = 4$ $d(t) = 1$

$d(u) = 0$

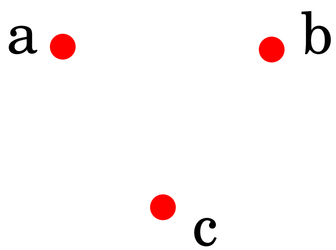
Grafo regular:

- Dizemos que um grafo é regular se todos os seus vértices têm o mesmo grau.

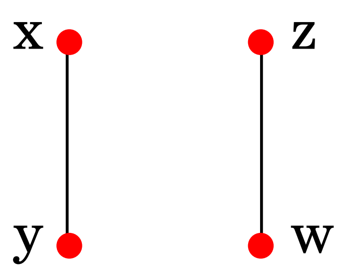
  Em particular, se em um grafo G, $d(v) = k \ \forall \ v \in V(G)$, k um número inteiro positivo, então G é dito k - regular ou regular de grau k.

Exemplo 4:

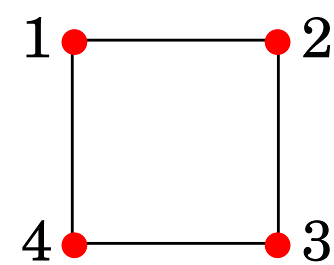
G_1



G_2



G_3



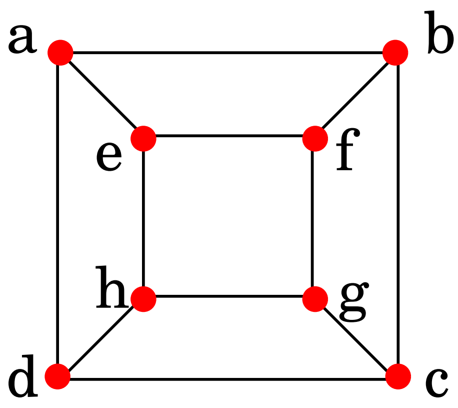
$d(a) = d(b) = d(c) = 0$ $d(x) = d(y) = d(z) = d(w) = 1$ $d(1) = d(2) = d(3) = d(4) = 2$

$k = 0$ $k = 1$ $k = 2$

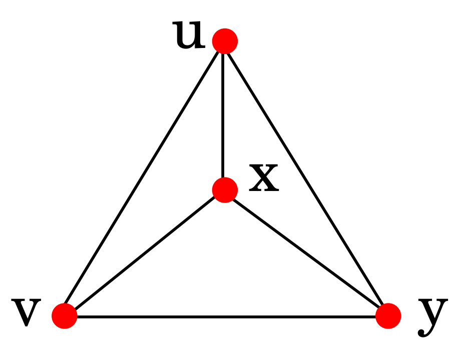
G_1 é 0 - regular G_2 é 1 - regular G_3 é 2 - regular

Exemplo 4 (continuação):

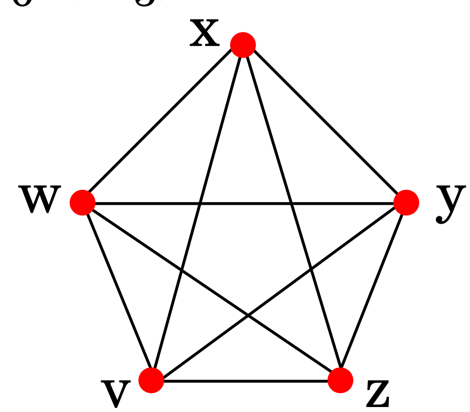
G_4



G_5 (K_4)



G_6 (K_5)



$d(a) = d(b) = \ldots = d(h) = 3$

$k = 3$

G_4 é 3 - regular

$d(u) = d(v) = d(x) = d(y) = 3$

$k = 3$

G_5 é 3 - regular

$d(x) = d(y) = \ldots = d(w) = 4$

$k = 4$

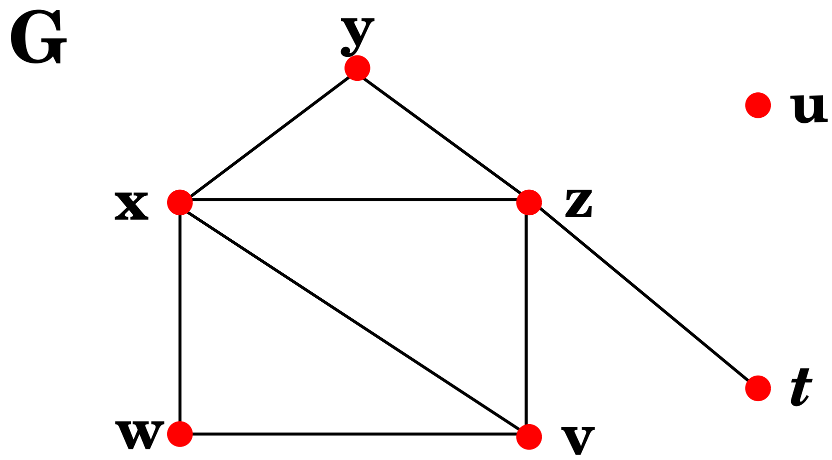
G_6 é 4 - regular

- Observação: K_n é regular de grau $(n - 1)$

  $(n - 1)$ - regular

Soma dos graus de um grafo:

Exemplo 5: Seja G o grafo do exemplo 1



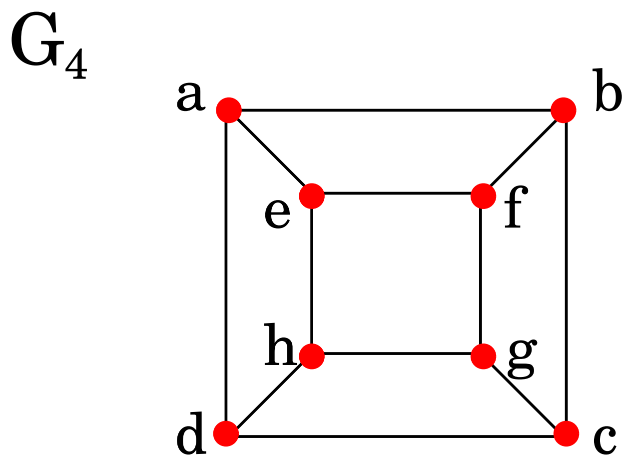
Somando os graus dos vértices

$$\sum_{v \in V} d(v) = d(x) + d(y) + d(z) + d(v) + d(w) + d(t) + d(u) =$$

$$= 4 + 2 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 16$$

- Observe que o número de arestas de G é 8, e a soma dos graus de G é 16, que é exatamente 2 vezes o número de arestas de G.

Exemplo 6: Considere o grafo G_4 do exemplo 3.
Temos 8 vértices de grau 3.



Somando os graus dos vértices

$$\sum_{v \in V(G_4)} d(v) = 3 \times 8 = 24$$

Temos 12 arestas

Também nesse caso a soma dos graus dos vértices é 2 vezes o número de arestas do grafo.

Teorema 1:

Em qualquer grafo G, a soma dos graus de todos os vértices é igual a duas vezes o número de arestas, isto é, $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$

Prova:

Como cada aresta tem 2 extremos, ela deve contribuir exatamente com 2 unidades para a soma dos graus.

O resultado segue imediatamente.

Observação: O resultado é válido também para multigrafos.

O Teorema 1 é chamado de Teorema do Aperto de Mãos.

Você pode representar um grupo de pessoas em uma reunião, onde as pessoas que se conhecem se cumprimentam (isto é, trocam um aperto de mãos) por um grafo.

Em tal grafo, as pessoas são representadas por vértices, e existe uma aresta entre um par de vértices se e somente se as pessoas correspondentes a estes vértices se cumprimentam.

Logo, o teorema pode ser interpretado:
o número total de mãos apertadas é igual a 2 vezes o número de apertos de mãos (em cada aperto de mãos temos 2 mãos envolvidas)

Consequências:

Corolário 1:

Em qualquer grafo, a soma de todos os graus dos vértices é um número par.

Prova:

Seja G um grafo qualquer

Pelo Teorema 1 $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)| \rightarrow$ par

- Corolário 2:

Em qualquer grafo, o número de vértices de grau ímpar é par.

Prova:

Seja G um grafo qualquer, e

$$V_P = \{ v \in V(G) \mid d(v) \text{ é par} \}$$

$$V_I = \{ v \in V(G) \mid d(v) \text{ é ímpar} \}$$

$V(G) = V_P \cup V_I$ e $V_P \cap V_I = \emptyset$

Mas,

$$\underbrace{\sum_{v \in V(G)} d(v)}_{\substack{\text{par} \\ \text{pelo corolário 1}}} = \sum_{v \in (V_I \cup V_P)} d(v) = \sum_{v \in V_I} d(v) + \underbrace{\sum_{v \in V_P} d(v)}_{\substack{\text{par} \\ \text{(soma de parcelas pares)}}}$$

Logo $\sum_{v \in V_I} d(v)$ é par

ou seja, temos um número par de vértices de grau ímpar.

- Corolário 3:

  Se G é um grafo com n vértices e k - regular, então G tem exatamente $\frac{1}{2}nk$ arestas.

Prova: Seja $G = (V, E)$ um grafo, $|V| = n$, $|E| = m$

Pelo Teorema 1 temos

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

$$||$$

$$\underbrace{k + k + \ldots + k}_{n} = 2m$$

Logo $nk = 2m \Rightarrow m = \frac{1}{2}nk$

Seqüência de graus:

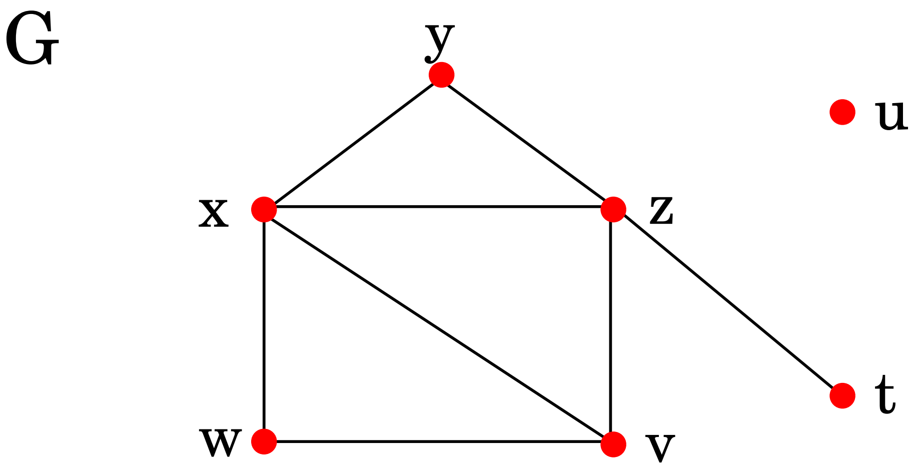
- Muitas vezes é conveniente listar os graus dos vértices de um grafo.

  Fazemos isso, escrevendo os graus dos vértices (em geral) em ordem crescente (permitindo repetições quando necessário).

  Essa lista resultante é chamada de seqüência dos graus dos vértices de G.

Exemplo 7:

Seja G o grafo do exemplo 1:



d(x) = 4

d(y) = 2

d(z) = 4

d(v) = 3

d(w) = 2

d(t) = 1

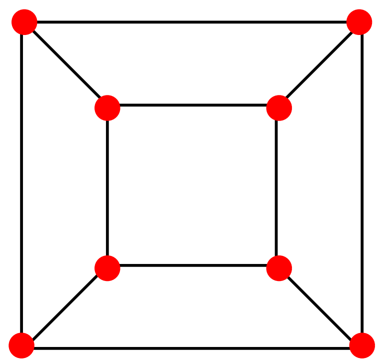
d(u) = 0

Seqüência de graus de G: **(0, 1, 2, 2, 3, 4, 4)**

Exemplo 8:

Consideremos o grafo G_4 do exemplo 6:

G_4



$$d(v) = 3 \quad \forall \ v \in V(G)$$

Seqüência de graus de G

$$(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$$

Resumo:

- Seja $G = (V, E)$ um grafo
  - O grau de v, denotado por d(v), é o número de vizinhos de v.
  - G é um grafo regular se todos os seus vértices possuem o mesmo grau.
  - A soma dos graus de um vértice é igual a duas vezes o número de suas arestas.
  - Seqüência dos graus de G:
    lista dos graus de G em ordem crescente.