Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP3 - Segundo Semestre de 2009

Questões:

1. (1.5) Mostre usando indução matemática que:

$$3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2 - 1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

Resposta: Seja $P(n)$: $3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 - 1$, para todo $n \geq 2$

Base da indução:

Para $n = 2$, $\quad 2.2 - 1 = 3 = 2^2 - 1$, logo $P(2)$ é verdadeira.

Hipótese de Indução:

Suponha verdadeira para $k \geq 2$, isto é, $P(k)$ é verdadeira:

$$P(k)\text{: } 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2 - 1$$

Passo da Indução:

Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeira então $P(k + 1)$ é verdadeira, isto é, temos que provar que:

$$3 + 5 + \ldots + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2 - 1 \text{ é verdadeira.}$$

De fato, observando que $2(k + 1) - 1 = 2k + 1$ e desenvolvendo, temos:

$$\begin{aligned} 3 + 5 + \ldots + (2k + 1) &= \underbrace{3 + 5 + \ldots + (2k - 1)}_{\text{H.I.}} + (2k + 1) \\ &= k^2 - 1 + 2k + 1 \\ &= (k^2 + 2k + 1) - 1 \\ &= (k + 1)^2 - 1 \end{aligned}$$

Logo $P(k{+}1)$ é verdadeira. Então pelo princípio da indução matemática temos que $P(n)$: $3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 - 1$, para todo $n \geq 2$.

2. (1.5) Quantos são os anagramas da palavra:

C A R A G U A T A T U B A

que terminam em vogal? Justifique.

Resposta: Classificaremos os anagramas de CARAGUATATUBA em 2 grupos disjuntos:

(i) Anagramas terminados em A, temos $P_{12}^{4,2,2,1,1,1,1} = \frac{12!}{4!2!2!} = 4989600$
(ii) Anagramas terminados em U, temos $P_{12}^{5,2,1,1,1,1,1} = \frac{12!}{5!2!} = 1995840$

Pelo princípio aditivo, o total de anagramas é $P_{12}^{4,2,2,1,1,1,1} + P_{12}^{5,2,1,1,1,1,1} = 4989600 + 1995840 = 6985440$.

3. (1.5) De quantas maneiras podemos distribuir 30 laranjas para 4 crianças de modo que cada criança receba pelo menos 2 laranjas? Justifique.

Resposta: Este poblema é equivalente a encontrar o número de soluções inteiras não-negativas da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30,$$

onde x_i denota o número de laranjas, $x_i \geq 2$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

Este problema irá recair em um outro problema em que sabemos resolver, pois $x_i \geq 2$ significa que $x_i - 2 \geq 0$, definindo $y_i = x_i - 2$, temos $y_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$. Portanto, $x_i = y_i + 2$, para $i = 1, 2, 3, 4$. Logo, a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$ transforma-se em $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 22$, com $y_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Podemos concluir que, o número de maneiras diferentes de distribuir 30 laranjas para 4 crianças, de modo que cada criança receba pelo menos 2 laranjas, corresponde ao número de soluções não negativas da última equação que é:

$$CR_4^{22} = C_{25}^{22} = \frac{25!}{22!3!} = \frac{25.24.23}{3.2.1}$$

4. (1.5) Calcule o termo independente no desenvolvimento de $(x^2 - \frac{1}{x^2})^{50}$. Justifique.

Resposta: O termo $(k + 1)$ do binômio $(a + b)^n$ é dado por:

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k, \qquad \forall\ k = 0, 1, \ldots, n$$

Considerando $n = 50$, $a = x^2$ e $b = -\frac{1}{x^2}$, temos que:

Para $0 \leq k \leq 50$ temos:

$$\begin{array}{rcll}
T_{k+1} & = & C_n^k a^{n-k} b^k & = \\
& = & C_{50}^k (x^2)^{50-k} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k & = \\
& = & C_{50}^k x^{100-2k} (-1)^k \left(\frac{1}{x^2}\right)^k & = \\
& = & C_{50}^k (-1)^k \frac{x^{100-2k}}{x^{2k}} & = \\
& = & C_{50}^k (-1)^k x^{100-2k-2k} & = \\
& = & C_{50}^k (-1)^k x^{100-4k} & =
\end{array}$$

Devemos determinar k tal que $T_{k+1} = C_{50}^k (-1)^k x^0$.

Portanto, deve ser $100 - 4k = 0 \Rightarrow \boxed{\mathrm{k} = 25}$.

Logo, o termo independente de $\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^{50}$ é:

$$C_{50}^{25} (-1)^{25} = -C_{50}^{25} = -\frac{50!}{25!25!}$$

5. (4.0) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for falsa, dê um exemplo e a sua justificação. Se for veraddeira, prove.

   (a) Se T é uma árvore então os seus vértices que são folhas não pertencem ao seu centro.

   Como faltou no enunciado dizer que o resultado é válido para árvores com pelo menos três vértices, consideraremos as duas respostas apresentadas a seguir:

   Resposta 1: Falso.
   Contra-exemplo: Seja a árvore $T = (V, E)$, onde $V = \{a, b\}$.
   Note que os vértices a e b são folhas da árvore, porém o centro desta árvore é $c(T) = \{a, b\}$.

Resposta 2: Verdadeiro.

Em uma árvore T as folhas são os vértices que têm maior excentricidade. Logo, não pertencem ao centro (em uma árvore com pelo menos três vértices), já que o centro é o conjunto dos vértices de T que têm a menos excentricidade.

(b) Se G é um grafo bipartido então G não contém ciclo ímpar.

Resposta: Verdadeiro.

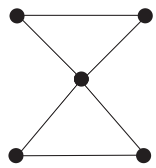
Seja $G = (V, E)$ um grafo bipartido, com bipartição (V_1, V_2) e $C = v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1$ um ciclo em G. Assuma que $v_1 \in V_1$, logo $v_2 \in V_2$, $v_3 \in V_1$, $v_4 \in V_2$ e assim por diante.

De forma geral, $v_{2i-1} \in V_1$ e $v_{2i} \in V_2$. Como $(v_k, v_1) \in E$ e $v_1 \in V_1$ então $v_k \in V_2$ (porque G é bipartido), temos que $k = 2i$, para algum i, logo k é par e portanto C é um ciclo par.

(c) Todo grafo euleriano é hamiltoniano.

Resposta: Falso.

O grafo apresentado abaixo é euleriano, pois todos os vértices possuem grau par, mas não possui um ciclo passando por todos os vértices uma única vez, já que o grafo possui uma articulação. Portanto, não é hamiltoniano.



(d) Cada coluna de uma matriz de incidência de um grafo G qualquer tem exatamente dois 1's.

Resposta: Verdadeiro.

Dado um grafo $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $|V| = n$ e $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, $|E| = m$, a matriz de incidência $B = b_{ij}$ é uma matriz $n \times m$ tal que:

$$\begin{aligned} b_{ij} \;&=\; 1, \;\; \textit{se o vértice } v_i \textit{ é incidente a aresta } e_j \\ &\;\; 0, \;\; \textit{caso contrário} \end{aligned}$$

Em cada coluna j, a aresta $e_j = (v_r, v_s)$ é incidente aos vértices v_r e v_s, $r \neq s$, logo nessa coluna os elementos $b_{rj} = 1$ e $b_{sj} = 1$ e os restantes serão nulos. Logo, cada coluna da matriz de incidência B possui exatamente dois 1's.

(e) O grafo completo K_4 é planar.

Resposta: Verdadeiro. Um grafo é planar se ele admite alguma representação plana.

Abaixo, exibimos a representação plana do K_4: