Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP3 - Primeiro Semestre de 2018

Questões:

1. (1,5) Mostre usando indução matemática que:

$$3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2n - 1) = n^2 - 1$$

para todo número natural $n \geq 2$.

Resposta: Seja $P(n)$: $3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 - 1$, para todo $n \geq 2$

Base da indução:

Para $n = 2$, $2.2 - 1 = 3 = 2^2 - 1$, logo $P(2)$ é verdadeira.

Hipótese de Indução:

Suponha verdadeiro para $k \geq 2$, isto é, $P(k)$ é verdadeira, para $k \geq 2$:

$$P(k): \; 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2 - 1$$

Passo da Indução:

Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeiro então $P(k+1)$ é verdadeiro, isto é, dado que $(2(k+1) - 1) = 2k + 1$, temos que provar que:

$$P(k+1):\ 3+5+\ldots+(2k+1)\ =\ (k+1)^2\ -\ 1 \text{ é verdadeira.}$$

De fato, desenvolvendo:

$$\begin{aligned}
3+5+\ldots+(2k+1) &= \underbrace{3+5+\ldots+(2k-1)}_{\text{H.I.}}+(2k+1)\\
&= k^2\ -\ 1\ +\ 2k\ +\ 1\\
&= k^2\ +\ 2k\ +\ 1\ -\ 1\\
&= (k+1)^2\ -\ 1
\end{aligned}$$

Logo $P(k+1)$ é verdadeira. Então pelo princípio da indução matemática temos que $P(n)$: $3+5+\ldots+(2n-1)\ =\ n^2\ -\ 1$, para todo $n \geq 2$.

2. (1,5) Quantos números distintos de 5 algarismos diferentes podem ser formados com os algarismos $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9 se

   (a) não tem nenhuma outra restrição? **Justifique**.

   Resposta: Os números de 5 algarismos distintos formados com os dígitos $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9 são $A(8,5) = \frac{8!}{(8-5)!} = 8.7.6.5.4 = 6720$.

   (b) o dígito 3 sempre aparece? **Justifique**.

   Resposta: Como o algarismo 3 deve estar sempre presente no número de 5 algarismos distintos, temos 5 possibilidades para colocá-lo: ou na primeira, ou na segunda, ou na terceira, ou na quarta ou na quinta casa decimal. Após escolhido onde o algarismo 3 vai ficar, vamos alocar os algarismos restantes, que são ao todo 7, pois os números não devem possuir algarismos repetidos. Logo, temos 7 algarismos para serem escolhidos 4 a 4, o que corresponde a um arranjo de 7 tomados 4 a 4. Portanto, temos $A(7,4) = \frac{7!}{(7-4)!} = 7.6.5.4$ possibilidades. Finalmente, pelo princípio multiplicativo, temos $5.7.6.5.4 = 4200$ maneiras de formarmos números de 5 algarismos, que não podem possuir algarismos repetidos, incluindo sempre o algarismo 3.

3. (1,5) Encontre o número de soluções de inteiros não negativos de :

$$x_1 + x_2 + x_3 < 16$$

com $x_1 \geq 3$. **Justifique**.

Resposta: Observe $x_1 + x_2 + x_3 < 16$ é equivalente a $x_1 + x_2 + x_3 \leq 15$.

Como a variável x_1 é maior ou igual a 3, precisamos reescrever a inequação em função de uma variável não negativa. Seja $x_1 = x_1' + 3$. Note que, como $x_1 \geq 3$, $x_1' \geq 0$. Fazendo a substituição na inequação de x_1 por $x_1' + 3$ temos:

$$x_1' + 3 + x_2 + x_3 \leq 15$$

$$x_1' + x_2 + x_3 \leq 12$$

Para transformar esta inequação em uma equação, vamos acrescentar uma variável f de folga. Esta variável tem o papel de completar o valor que a expressão à esquerda assume de modo a igualá-lo ao resultado da direita da inequação. Então, se, por exemplo, $x_1' + x_2 + x_3 = 12$, f assume o valor 0. Se $x_1' + x_2 + x_3 = 11$, então f assume o valor 1 e assim sucessivamente. Note que o maior valor que f pode assumir é 12. Assim, estamos acrescentando à inequação a variável $f \geq 0$ de modo a obter a seguinte equação com variáveis inteiras e não-negativas:

$$x_1' + x_2 + x_3 + f = 12$$

Logo, o número de soluções inteiras não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 \leq 15$ com $x_1 \geq 3$ corresponde ao número de soluções inteiras não negativas da equação acima, que podemos obter utilizando o conceito de *Combinações com repetição.* Portanto, temos $CR_4^{12} = C_{12+4-1}^{12} = C_{15}^{12} = \dfrac{15!}{12!3!} = 455$ soluções inteiras e não-negativas para a inequação $x_1 + x_2 + x_3 < 16$, sendo $x_1 \geq 3$.

4. (1,0) Pede-se:

   (a) Escrever o enunciado do teorema das colunas.

   Resposta: O Teorema das colunas nos diz: $C_r^r + C_{r+1}^r + C_{r+2}^r + C_n^r = C_{n+1}^{r+1}$.

   (b) Calcular a seguinte soma, usando o teorema das colunas:

$$C_{14}^{12} + C_{15}^{12} + C_{16}^{12} + \cdots + C_{25}^{12}$$

   Resposta: Seja $S = C_{14}^{12} + C_{15}^{12} + C_{16}^{12} + \cdots + C_{25}^{12}$. Observe que não podemos aplicar o teorema das colunas diretamente à soma $C_{14}^{12}+C_{15}^{12}+C_{16}^{12}+\cdots+C_{25}^{12}$, pois falta a ela o seguinte somatório: $C_{12}^{12}+C_{13}^{12}$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
S &= [C_{12}^{12} + C_{13}^{12}] + C_{14}^{12} + C_{15}^{12} + C_{16}^{12} + \cdots + C_{25}^{12} - [C_{12}^{12} + C_{13}^{12}] &=\\
&= \underbrace{C_{12}^{12} + C_{13}^{12} + C_{14}^{12} + \cdots + C_{25}^{12}}_{\textit{Teorema das Colunas com } r=12 \textit{ e } n=25} - \underbrace{C_{12}^{12} + C_{13}^{12}}_{\textit{Teorema das Colunas com } r=12 \textit{ e } n=13} &=\\
&= C_{26}^{13} - C_{14}^{13} &=\\
&= \tfrac{26!}{13!13!} - \tfrac{14!}{13!1!} &=\\
&= \tfrac{26!}{13!13!} - 14
\end{aligned}$$

5. (4,5) As perguntas seguintes são sobre grafos. Responda cada uma delas **justificando**.

   (a) Seja G um grafo com duas componentes conexas G_1 e G_2, tal que G_1 é uma árvore com 19 arestas e G_2 é o grafo bipartido completo $K_{6,7}$. Determine o número de vértices e o número de arestas de G.

Resposta: Consideremos o grafo G e os suas componentes conexas G_1 e G_2 como no enunciado.

Temos então que:

$|V(G)| = |V(G_1)| + |V(G_2)|$ e $|E(G)| = |E(G_1)| + |E(G_2)|$.

- G_1 é uma árvore com 19 arestas. Temos então que $|E(G_1)| = |V(G_1)| - 1 \Rightarrow 19 = |V(G_1)| - 1 \Rightarrow |V(G_1)| = 20$;

- G_2 é um grafo bipartido completo com bipartição (V', V''), com $|V'| = 6$ e $|V''| = 7$ $(K_{6,7})$, logo $d(v) = 7$, $\forall v \in V'$ e $d(w) = 6$, $\forall w \in V''$. Como $V(G_2) = V' \cup V''$ e $V' \cap V'' = \emptyset$, temos então que $\sum_{y \in V(G_2)} d(y) = \sum_{y \in V'} d(y) + \sum_{y \in V''} d(y) \Rightarrow 2|E(G_2)| = 6 \times 7 + 7 \times 6 \Rightarrow 2|E(G_2)| = 84 \Rightarrow |E(G_2)| = 42$ (De uma outra forma, podemos observar que como o grafo G_2 é bipartido completo, com $|V'| = 6$ e $|V''| = 7$, cada vértice de V' é adjacente a cada vértice de V''. Logo, temos $|V'| \times |V''| = 6 \times 7 = 42$ arestas) e $|V(G_2)| = |V'| + |V''| \Rightarrow |V(G_2)| = 6 + 7 = 13$.

Podemos concluir que, $|V(G)| = |V(G_1)| + |V(G_2)| = 20 + 13 = 33$ e $|E(G)| = |E(G_1)| + |E(G_2)| = 19 + 42 = 61$.

(b) Se um grafo G possui um único caminho entre cada par de seus vértices então G é uma árvore. A afirmativa é verdadeira ou falsa? Justifique.

Resposta: A afirmativa é Verdadeira. Por definição, uma árvore é um grafo conexo e acíclico. Logo, queremos mostrar que um grafo G no qual existe um único caminho entre todo par de vértices é conexo e acíclico.

Como existe um caminho entre quaisquer dois vértices de G, por definição, G é conexo. Falta mostrar que G é acíclico.

Suponha, por absurdo, que G contém um ciclo C e seja $e = (x, y)$ uma aresta de C. Então G possui dois caminhos entre x e y: a aresta e e o caminho $C - e$. Absurdo! (por hipótese existe um único caminho entre cada par de vértices de G).

Logo, G é acíclico e conexo e portanto, G é árvore.

(c) Enuncie a condição necessária e suficiente para um grafo ser euleriano. O grafo completo K_8 é euleriano? Justifique.

Resposta: A condição necessária e suficiente para um grafo euleriano é dada pela caracterização do mesmo e é:

Um grafo G é euleriano $\Leftrightarrow$ todos os vértices de G têm grau par.

Um grafo $G = K_n$ com n vértices é completo, por definição, se para quaisquer dois vértices u e v do grafo, tais vértices são adjacentes. Podemos observar que $d_G(v) = n - 1$, $\forall v \in V(K_n)$. Logo, o grafo K_8 não é euleriano, pois todos os seus vértices possuem grau $8 - 1 = 7$, que é ímpar.

(d) Se G tem n vértices, $n \geq 3$ e é hamiltoniano então $d(v) \geq \frac{n}{2}$. A afirmativa é verdadeira ou falsa? Justifique.

Resposta: Considere o grafo $G = C_6$ como mostra a Figura abaixo.

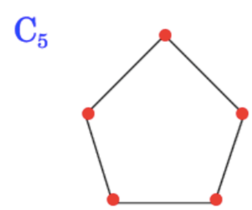

Figura 1: Grafo hamiltoniano.

O grafo $G = C_5$ é hamiltoniano, pois possui o ciclo hamiltoniano *abcdea* e $d_G(v) = 2 < \frac{5}{2}$, $\forall v \in V(G)$. Portanto, esta afirmação é falsa.

(e) O grafo bipartido completo $K_{2,3}$ é planar? Justifique sua resposta.

Resposta: Sim, pois $G = K_{2,3}$ pode ser desenhado sem cruzamento de arestas. Observe a Figura abaixo.

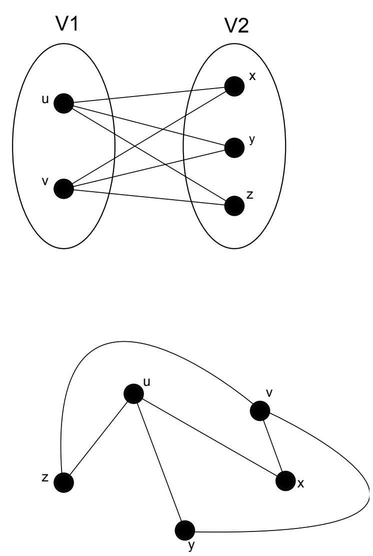

Figura 2: Representações do $K_{2,3}$.