Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD1 - Primeiro Semestre de 2018

Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (1,0) Verifique se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira prove, se for falsa justifique.

   (a) $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$.

   Resposta: Falsa. O único elemento do conjunto em questão é $\{\emptyset\}$. As afirmações $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$ e $\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}$ estariam corretas.

   (b) $\{\emptyset\} \subseteq \{\{\emptyset\}\}$.

   Resposta: Falsa. Esta afirmação só seria verdadeira se $\emptyset$ fosse elemento do conjunto. Entretanto, o único elemento do conjunto em questão é $\{\emptyset\}$. As afirmações $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$, $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\{\emptyset\}\}$ e $\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}$ estariam corretas.

   (c) $A \cup (B - C) = (A - B) \cup (A - C)$. sendo A e B conjuntos quaisquer.

   Resposta: Falsa. Observe os diagramas de Venn da Figura 1.

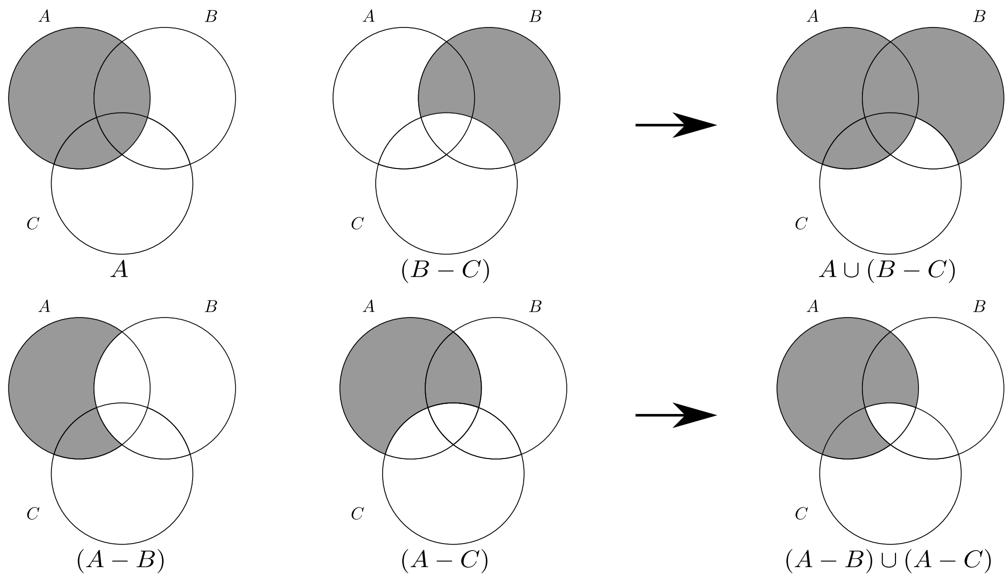

Figura 1: Diagramas de Venn

2. (1,5) Usando o Princípio de Inclusão e Exclusão, determine o número de permutacoes de $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ nas quais nem o 2 ocupa o 2° lugar nem o 6 ocupa o 6° lugar.

   Resposta: Vamos considerar A como o conjunto das permutações de $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ nas quais o 2 ocupa o 2° lugar, B como o conjunto das permutações de $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ nas quais o 6 ocupa o 6° lugar, U como o conjunto de todas as permutações de $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ e P como o conjunto de permutações de $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ nas quais nem o 2 ocupa o 2° lugar nem o 6 ocupa o 6° lugar. Para calcular o número de elementos de P, vamos usar a noção de complemento e o PIE para 2 conjuntos, dado por:

   $$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

   Utilizando a noção de complemento, podemos escrever $n(P)$ da seguinte forma:

   $$n(P) = n(U) - n(A \cup B)$$

onde $n(A \cup B)$ é calculado usando o PIE, como descrito acima.

CÁLCULO DAS CARDINALIDADES DOS CONJUNTOS

$n(U) = P_8 = 8!$. Basta permutar os 8 algarismos.

$n(A) = P_7 = 7!$. Como o algarismo 2 está fixado na segunda posição, basta permutarmos os outros 7 algarismos.

$n(B) = P_7 = 7!$. Como o algarismo 6 está fixado na sexta posição, basta permutarmos os outros 7 algarismos.

$n(A \cap B) = P_6 = 6!$. Como os algarismos 2 e 6 estão fixados nas segunda e sexta posições, respectivamente, basta permutarmos os outros 6 algarismos.

Pelo PIE, temos: $n(A \cup B) = 7! + 7! - 6! = 2 \times 7! - 6! = 2 \times 7 \times 6! - 6! = (14 - 1)6! = 13 \times 6!$.
Logo, $n(P) = 8! - 13 \times 6!$.

3. (2,0) Mostre pelo Princípio da Indução Matemática que:

(a)

$$2.6.10.14 \cdots (4n-2) = \frac{(2n)!}{n!}$$

para todo número natural n.
Resposta: Seja $P(n) : 2.6.10.14 \cdots (4n-2) = \frac{(2n)!}{n!}$, $\forall\ n$ natural.

BASE DA INDUÇÃO: Vamos mostrar que $P(1)$ é verdadeira. Como $4(1) - 2 = 2$ e $\frac{(2 \times 1)!}{1!} = 2! = 2$, temos que $P(1)$ é verdadeira.

HIPÓTESE DA INDUÇÃO: Suponha que $P(k) : 2.6.10.14. \cdots .(4k-2) = \frac{(2k)!}{k!}$ seja verdadeira, $\forall k \geq 1$.

PASSO DA INDUÇÃO: Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1) : 2.6.10.14. \cdots .(4k-2).(4(k+1)-2) = \frac{(2[k+1])!}{(k+1)!}$ é verdadeira.

$$\begin{aligned}
\underbrace{2.6.10.14.\cdots.(4k-2)}_{\text{H.I.}}.(4(k+1)-2) &= \tfrac{(2k)!}{k!}(4k+2) \\
&= \tfrac{(2k)!2(2k+1)}{k!} \times \tfrac{(k+1)}{(k+1)} \\
&= \tfrac{(2k)!2(k+1)(2k+1)}{k!(k+1)} \\
&= \tfrac{(2k+2)(2k+1)(2k)!}{(k+1)!} \\
&= \tfrac{(2k+2)!}{(k+1)!} \\
&= \tfrac{(2[k+1])!}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

Logo, pelo PIM, $P(n) : 2.6.10.14\cdots(4n-2) = \frac{(2n)!}{n!}$ é verdadeira $\forall n$ natural.

(b)

$$\sum_{i=3}^{n} \frac{i}{2^i} = 1 - \frac{n+2}{2^n}$$

para todo número natural $n \geq 3$.

Resposta: Seja $P(n) : \sum_{i=3}^{n} \frac{i}{2^i} = 1 - \frac{n+2}{2^n}$, $n \geq 3$.

BASE DA INDUÇÃO: Vamos mostrar que $P(3)$ é verdadeira.
De fato, como $\frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$ e $1 - \frac{3+2}{2^3} = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$, $P(3)$ é verdadeira.

HIPÓTESE DA INDUÇÃO: Suponha que $P(k) : \sum_{i=3}^{k} \frac{i}{2^i} = 1 - \frac{k+2}{2^k}$ seja verdadeira, $\forall k \geq 3$.

PASSO DA INDUÇÃO: Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1) : \sum_{i=3}^{k+1} \frac{i}{2^i} = 1 - \frac{(k+1)+2}{2^{k+1}}$ é verdadeira.

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=3}^{k+1} \frac{i}{2^i} &= \underbrace{\sum_{i=3}^{k} \frac{i}{2^i}}_{\text{H.I}} + \tfrac{k+1}{2^{k+1}} \\
&= \left(1 - \tfrac{k+2}{2^k}\right) + \tfrac{k+1}{2^{k+1}} \\
&= 1 - \left(\tfrac{k+2}{2^k} - \tfrac{k+1}{2^{k+1}}\right) \\
&= 1 - \left(\tfrac{2(k+2)-(k+1)}{2^{k+1}}\right) \\
&= 1 - \left(\tfrac{2k+4-k-1}{2^{k+1}}\right) \\
&= 1 - \left(\tfrac{k+3}{2^{k+1}}\right) \\
&= 1 - \left(\tfrac{(k+1)+2}{2^{k+1}}\right)
\end{aligned}$$

Logo, pelo PIM, $P(n) : \sum_{i=3}^{n} \frac{i}{2^i} = 1 - \frac{n+2}{2^n}$, é verdadeira $\forall n \geq 3$.

4. (2.0) Para usar um aplicativo, deve ser escolhida uma senha de 8 caracteres formada por algumas das 26 letras do alfabeto e/ou por alguns dos 10 dígitos $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$. As letras e os números não podem estar repetidos. As letras devem ser maiúsculas. De quantas maneiras podem ser escolhidas se cada senha deve conter:

   (a) pelo menos 1 letra? Justifique,

   Resposta: Vamos usar a noção de complemento neste caso. Para tal, vamos calcular a quantidade total de senhas e subtrair a quantidade de senhas que NÃO possuem letras. A quantidade total de senhas com 8 caracteres é dada por: $A_{36}^{8} = \frac{36!}{28!}$. A quantidade de senhas que NÃO possuem letras é dada por: $A_{10}^{8} = \frac{10!}{2!}$. Logo, utilizando a noção de complemento, a quantidade de senhas é dada por $\frac{36!}{28!} - \frac{10!}{2!}$.

   (b) a letra Z? Justifique,

Resposta: Como a letra Z está fixada, temos que escolher e posicionar os outros 7 dígitos e, em seguida, vamos escolher uma posição para a letra Z. Para escolher e posicionar os 7 dígitos, temos $A_{35}^{7} = \frac{35!}{28!}$ formas. Posicionados esses dígitos, temos 8 espaços para posicionar a letra Z, ou seja, 8 formas de posicionar a letra Z. Pelo PM, a quantidade de senhas que possuem a letra Z é dada por: $8 \times \frac{35!}{28!}$.

(c) os dígitos 7 e 9 sempre juntos? Justifique.

Resposta: Começaremos escolhendo e posicionando os outros dígitos da senha. Para isso, temos $A_{34}^{5} = \frac{34!}{29!}$. Vamos considerar que os dígitos 7 e 9 são um único algarismo e escolher um lugar para posicioná-los entre os algarismos já posicionados. Note que temos 6 espaços e, portanto, 6 maneiras de posicionar o 7 e 9. Note também que temos duas configurações possíveis para o 7 e 9: ou vão aparecer como 79 ou como 97. Logo, pelo PM, a quantidade de senhas que possuem os dígitos 7 e 9 sempre juntos é dada por $\frac{34!}{29!} \times 6 \times 2 = \frac{34!}{29!} \times 12$.

5. (1.5) Numa classe de 12 estudantes um grupo de 7 será selecionado para uma excursão. De quantas maneiras diferentes esse grupo poderá ser formado:

(a) se não houver restrições? Justifique.

Resposta: Neste caso, não importa a ordem das escolhas. Portanto, a excursão pode ser montada de $C_{12}^{7} = \frac{12!}{7!5!}$ formas.

(b) se 2 dos 12 estudantes são namorados e só irão juntos? Justifique.

Resposta: Vamos separar em dois casos: os namorados vão e os namorados não vão.

- CASO 1: NAMORADOS VÃO
  Neste caso, basta escolher os outros 5 estudantes dentre os 10 restantes. Logo, temos $C_{10}^{5} = \frac{10!}{5!5!}$ maneiras de formar essa excursão.

- <u>CASO 2:</u> NAMORADOS NÃO VÃO

  Neste caso, basta escolher os 7 estudantes dentre os 10 restantes. Logo, temos $C_{10}^{7} = \frac{10!}{7!3!}$ maneiras de formar essa excursão.

Pelo PA, temos $\frac{10!}{5!5!} + \frac{10!}{7!3!}$ maneiras de formar esta excursão.

6. (2.0) Quantos são os anagramas da palavra **ARARUAMA**:

   (a) sem restrições? Justifique;

   Resposta: A palavra ARARUAMA possui 4 A's, 2 R's, 1 U e 1 M, totalizando 8 letras. Logo, o número total de anagramas desta palavra é dado por $P_8^{4,2,1,1} = \frac{8!}{4!2!1!1!}$.

   (b) que contenham as vogais todas juntas? Justifque;

   Resposta: Vamos considerar todas as vogais como uma única letra $\mathcal{V}$. Note que existem $P_5^{4,1} = \frac{5!}{4!1!} = 5$ configurações diferentes para $\mathcal{V}$. Em seguida, vamos posicionar as consoantes. Temos $P_3^{2,1} = \frac{3!}{2!1!} = 3$ maneiras de posicioná-las. Depois de posicioná-las, temos 4 espaços para posicionar $\mathcal{V}$. Logo, pelo PM, temos $5 \times 3 \times 4 = 60$ anagramas nos quais as vogais estão todas juntas.

   (c) que contenham as vogais todas juntas e as consoantes também todas juntas? Justifique

   Resposta: No item (b), constatamos que existem 5 configurações para $\mathcal{V}$. Vamos assumir que as consoantes também são uma única letra $\mathcal{C}$. Neste caso, temos $P_3^{2,1} = \frac{3!}{2!1!} = 3$ configurações distintas para $\mathcal{C}$. Note que, como vogais devem estar todas juntas e consoantes também, ou temos vogais e consoantes (nesta ordem), ou consoantes e vogais (nesta ordem). Portanto, 2 configurações distintas. Assim, pelo PM, temos $5 \times 3 \times 2 = 30$ anagramas nos quais as vogais todas juntas e as consoantes também todas juntas.