

Lista de Exercícios

AULA 12: Combinações com repetição

Exercício comentado:

Quantas são as soluções inteiras não negativas de $x + y + z + w \leq 5$?

Resolução:

- *Raciocínio 1*

Sejam:

q o número de soluções inteiras não negativas de $x + y + z + w \leq 5$, e $q(i)$ o número de soluções inteiras não negativas de $x + y + z + w = i$, para $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Então, pelo princípio aditivo temos que $q = \sum_{i=0}^5 q(i)$.

Como $q(i) = CR(4, i) = C(4 + i - 1, i) = C(3 + i, i) = \frac{(3+i)(2+i)(1+i)}{6}$, resulta:

$q(0) = 1, q(1) = 4, q(2) = 10, q(3) = 20, q(4) = 35$ e $q(5) = 56$.

Portanto, o número de soluções inteiras não negativas de $x + y + z + w \leq 5$ é $q = 1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 = 126$.

- *Raciocínio 2*

Definimos uma variável f inteira e não negativa dada por:

$f = 5 - (x + y + z + w)$, ou seja, $x + y + z + w + f = 5$.

Notemos que:

para $f = 0$, a equação se reduz a $x + y + z + w = 5$,

para $f = 1$, a equação se reduz a $x + y + z + w = 4$,

para $f = 2$, a equação se reduz a $x + y + z + w = 3$,

para $f = 3$, a equação se reduz a $x + y + z + w = 2$,

para $f = 4$, a equação se reduz a $x + y + z + w = 1$,

para $f = 5$, a equação se reduz a $x + y + z + w = 0$.

Portanto, o problema original equivale a encontrar as soluções inteiras não negativas de $x + y + z + w + f = 5$ que corresponde a $CR(5, 5) = C(9, 5) = 126$.

A variável f , se denomina *variável de folga*.

Exercícios propostos:

1. De quantas maneiras podemos distribuir 6 laranjas entre 2 pessoas?
2. Queremos comprar 12 docinhos. De quantas maneiras os podemos escolher se têm 8 variedades diferentes de docinhos?
3. De quantas maneiras podemos colocar 20 bolas da mesma cor em 5 caixas de modo que nenhuma caixa fique vazia?
4. Quantas são as soluções inteiras não negativas de $x + y + z < 10$?
5. Quantas são as soluções inteiras *positivas* de $x + y + z < 10$?
6. Quantos números inteiros entre 1 e 100000 inclusive têm soma dos algarismos igual a 6?
Observação: Ao número 1 associe a seqüência 00001.
7. Quantos números inteiros entre 1 e 1000 inclusive têm a soma dos dígitos menor que 7?
8. Quantas soluções inteiras existem para a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ sendo:
 - (i) $1 \leq x_1 \leq 6, \quad x_i \geq 0, \quad i = 2, 3, 4,$
 - (ii) $1 \leq x_1 \leq 6, \quad 1 \leq x_2 \leq 7, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0,$
 - (iii) $1 \leq x_1 \leq 6, \quad 1 \leq x_2 \leq 7, \quad 1 \leq x_3 \leq 8, \quad 1 \leq x_4 \leq 9.$