Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AP1 - Primeiro Semestre de 2014

Nome -
Assinatura -

Observações:

1. Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular. Não é necessário fazer as contas. Pode deixar o resultado indicado, como uma soma, ou produto, ou quociente, ou potência de números inteiros ou fatoriais.
2. Resultado sem indicação de como foi obtido, não será considerado.
3. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.
4. Você pode usar lápis para responder as questões.
5. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.
6. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

Questões:

1. (1.5)

(a) Considere $A = \{\{\emptyset\}, 1\}$.

(a_1) Encontre o conjunto de partes de A, $\mathbb{P}(A)$.

Resposta: $\mathbb{P}(A) = \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{1\}, \{\{\emptyset\}, 1\}\}$

(a_2) Determine se a seguinte relação

$$\{\emptyset\} \in \mathbb{P}(A)$$

é verdadeira ou não. Justifique a resposta.

Resposta: Através do conjunto $\mathbb{P}(A)$ descrito no item a_1, temos que a afirmação é falsa. Note que ela só seria verdadeira se $\emptyset \in A$. Seria correto afirmar que: $\emptyset \in \mathbb{P}(A)$, $\{\{\emptyset\}\} \in \mathbb{P}(A)$, $\{\emptyset\} \subseteq \mathbb{P}(A)$ ou ainda que $\{\emptyset\} \in A$.

(b) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

(b_1) $B - (C \cup D) = (B - C) \cup (B - D)$,

Resposta: Falsa. Observe os Diagramas de Venn da Figura 1.

(b_2) $n(B \cup C) + n(B \cap C) > n(B) + n(C)$,
onde B, C e D são conjuntos arbitrários.

Resposta: Falso. Pelo Princípio da Inclusão e Exclusão para dois conjuntos, temos:

$$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C).$$

Logo,

$$n(B \cup C) + n(B \cap C) = n(B) + n(C).$$

2. (2.0) Considere a sequência $a_1, a_2, a_3, \cdots$ definida por:
$a_1 = 3$,
$a_k = 7a_{k-1}$ para todos os inteiros $k \geq 2$.
Mostre por Indução Matemática que $a_n = 3 \times 7^{n-1}$ para todos os inteiros $n \geq 1$.

Resposta: Dada a sequência $a_1, a_2, a_3, \cdots$ definida por:

$$\begin{cases} a_k &= 7a_{k-1} \\ a_1 &= 3 \end{cases}$$

para $k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$, considere $P(n) : a_n = 3 \times 7^{n-1}$ para $n \in \mathbb{N}$.

Vamos provar por Indução Matemática que $P(n)$ é verdadeira para $n \in \mathbb{N}$.

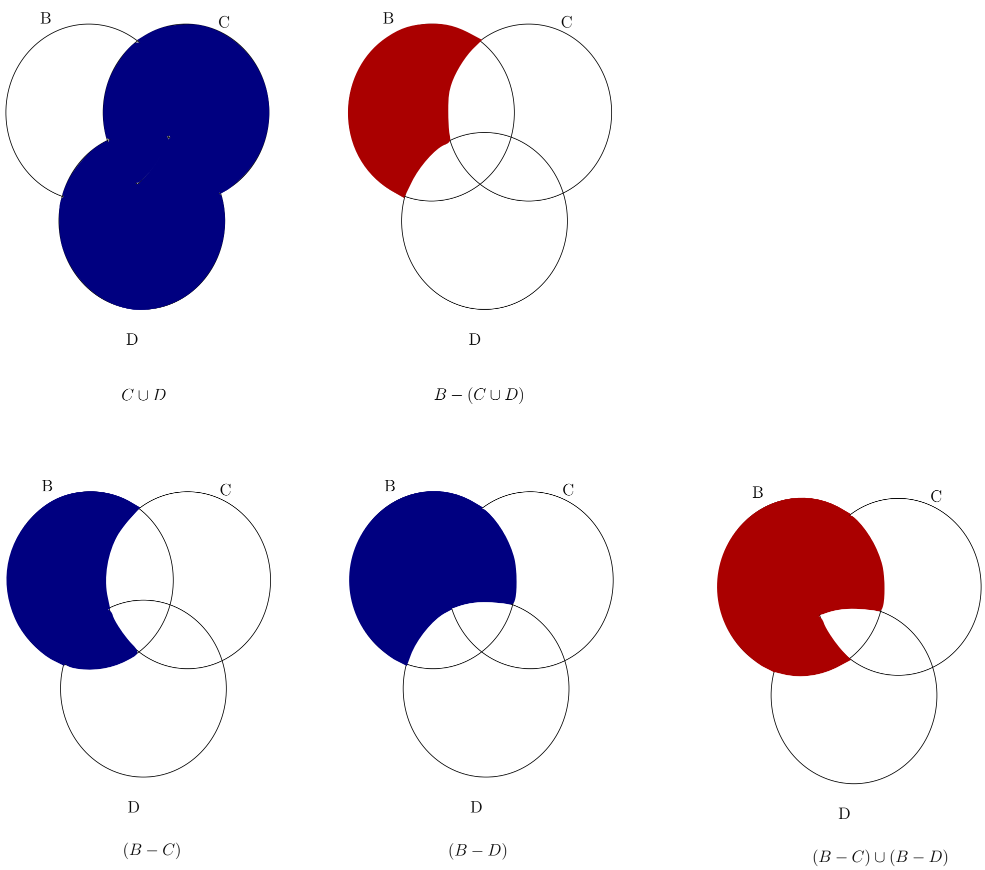

Figura 1: Diagramas de Venn para $B-(C\cup D)$ e $(B-C)\cup(B-D)$. Note que o resultado das operações não é o mesmo.

BASE DA INDUÇÃO: Considere $n = 1$. Neste caso temos que $a_1 = 3 \times 7^{1-1} = 3$. Como $a_1 = 3$, temos que $P(1)$ é verdadeira.

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Suponha que $P(k) : a_k = 3 \times 7^{k-1}$ seja verdadeira, para $k \geq 1$.

PASSO INDUTIVO: Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1) : a_{k+1} = 3 \times 7^k$ é verdadeira:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 7 \underbrace{a_k}_{\text{H.I.}} \\ &= 7 \times 3 \times 7^{k-1} \\ &= 3 \times 7^k \end{aligned}$$

Logo, dada a sequência $a_1, a_2, a_3, \cdots$ definida por: $a_1 = 3$ e $a_k = 7a_{k-1}$, para $k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$, pelo Princípio de Indução Matemática, temos que $P(n) : a_n = 3\times 7^{n-1}$ é verdadeira para $n \in \mathbb{N}$.

3. (1.5) Uma comissão de 10 alunos deve ser escolhida em um grupo contendo 19 alunos do primeiro ano e 29 do segundo ano. De quantas maneiras é possível selecionar uma comissão contendo no máximo 1 aluno do primeiro ano? Justifique.

   Resposta: Como a comissão pode ter no máximo um aluno do primeiro ano, vamos dividir a solução em dois casos disjuntos:

   - CASO 1: Comissões que não possuem alunos do primeiro ano.

     Neste caso, temos que escolher 10 dos 29 alunos do segundo ano para formarem a comissão. Fazemos isso de $C_{29}^{10} = \frac{29!}{19!10!}$ maneiras distintas.
   - CASO 2: Comissões com exatamente um aluno do primeiro ano.

     Neste caso temos que escolher o aluno do primeiro ano que participará da comissão e escolher 9 dentre os 29 alunos do segundo ano para comporem a comissão juntamente com o aluno do primeiro ano. Para escolher o aluno do primeiro ano que participará da comissão temos $C_{19}^{1} = 19$ formas distintas. Para determinar os alunos do segundo ano que se juntarão a ele temos $C_{29}^{9} = \frac{29!}{20!9!}$. Assim, pelo princípio multiplicativo, temos $19 \times \frac{29!}{20!9!}$ comissões distintas com exatamente um aluno do primeiro ano.

   Portanto, pelo Princípio Aditivo, temos $\frac{29!}{19!10!} + 19 \times \frac{29!}{20!9!}$ comissões distintas com no máximo um aluno do primeiro ano.

4. (2.0) Quantos números naturais de 8 algarismos, ímpares e maiores do que 50000000, podem ser formados, usando apenas os algarismos $1, 1, 3, 5, 5, 5, 8, 8$? Justifique.

   Resposta: Para resolver a questão, vamos usar a noção de complemento. Desta forma, vamos calcular a quantidade de números com 8 algarismos maiores que 50000000 e subtrair deste valor aqueles maiores que 50000000 que terminam em 8.

   CASO 1: Números com 8 algarismos maiores que 50000000.

   Números maiores que 50000000 de acordo com a descrição do problema ou começam por 5 ou por 8. Vamos analisar estes casos separadamente.

   - Números que começam por 5.

     Temos uma possibilidade para o primeiro dígito e para os 7 restantes temos 7 possíveis algarismos: dois 1's, um 3, dois 5's e dois 8's. Logo, para determinar o total de números maiores que 50000000 que começam por 5, basta permutar esses 7 possíveis algarismos, com cuidado com as repetições.

$$P_7^{2,1,2,2} = \frac{7!}{2!2!2!}$$

- Números que começam por 8.

  Temos uma possibilidade para o primeiro dígito e para os 7 restantes temos 7 possíveis algarismos: dois 1's, um 3, três 5's e um 8. Logo, para determinar o total de números maiores que 50000000 que começam por 8, basta permutar esses 7 possíveis algarismos, com cuidado com as repetições.

$$P_7^{2,1,3,1} = \frac{7!}{2!3!}$$

Assim, pelo Princípio Aditivo, existem $\frac{7!}{2!2!2!} + \frac{7!}{2!3!}$ números com 8 algarismos maiores que 50000000 formados apenas pelos algarismos $1, 1, 3, 5, 5, 5, 8, 8$.

CASO 2: Números com 8 algarismos maiores que 50000000 terminados em 8.

Novamente vamos analisar se o número começa por 5 ou por 8.

- Números que começam por 5 e terminam em 8.

  Temos uma possibilidade para o primeiro dígito e uma para o oitavo dígito. Para os 6 restantes temos 6 possíveis algarismos: dois 1's, um 3, dois 5's e um 8. Logo, para determinar o total de números maiores que 50000000 que começam por 5 e terminam em 8, basta permutar esses 6 possíveis algarismos, com cuidado com as repetições.

$$P_6^{2,1,2,1} = \frac{6!}{2!2!}$$

- Números que começam e terminam por 8.

  Temos uma possibilidade para o primeiro dígito e uma para o oitavo dígito. Para os 6 restantes temos 6 possíveis algarismos: dois 1's, um 3 e três 5's. Logo, para determinar o total de números maiores que 50000000 que começam e terminam por 8, basta permutar esses 6 possíveis algarismos, com cuidado com as repetições.

$$P_6^{2,1,3} = \frac{6!}{2!3!}$$

Assim, pelo Princípio Aditivo, existem $\frac{6!}{2!2!} + \frac{6!}{2!3!}$ números com 8 algarismos maiores que 50000000 e terminados em 8 formados apenas pelos algarismos $1, 1, 3, 5, 5, 5, 8, 8$.

Portanto, utilizando a noção de complemento temos

$$\frac{7!}{2!2!2!} + \frac{7!}{2!3!} - \left(\frac{6!}{2!2!} + \frac{6!}{2!3!}\right) = 810$$

números ímpares com 8 algarismos e maiores que 50000000 formados apenas pelos algarismos $1, 1, 3, 5, 5, 5, 8, 8$.

5. (1.5) Quantos são os números naturais de 3 algarismos que têm:

(a) todos os algarismos distintos?

Resposta: Como queremos que o número tenha 3 algarismos, não podemos considerar o algarismo 0 para a primeira posição. Sendo assim, temos 9 possíveis algarismos para este dígito. Para o segundo e o terceiro, basta fazermos um arranjo simples considerando o 0 como opção e excluindo o algarismo utilizado na primeira posição: $A_9^2 = \frac{9!}{7!} = 9 \times 8$. Portanto, pelo P.M. temos $9 \times 9 \times 8 = 648$ números naturais de 3 algarismos distintos.

(b) algarismos que podem se repetir?

Resposta: Novamente temos que excluir o 0 da primeira posição. Então, para ela, temos 9 possíveis algarismos. Como podemos ocupar as outras duas com algarismos repetidos, basta fazermos um arranjo com repetição, considerando o 0 como opção: $AR_{10}^2 = 10^2$. Portanto, pelo P.M., temos $9 \times 10^2 = 900$ números naturais de 3 algarismos.

6. (1.5) Calcule o número de soluções inteiras e não negativas da equação: $x + y + z + w = 30$ tal que $x > 3$, $y \geq 2$ e $w \geq 1$. Justifique.

Resposta: Sabemos determinar o número de soluções inteiras não negativas para equações deste tipo quando todas as variáveis da equação são não negativas. Então, neste caso, temos que fazer uma mudança de variáveis para obtermos uma equação equivalente a (I) com variáveis não negativas.

Sejam

$a = x - 4 \quad \rightarrow x = a + 4$;

$b = y - 2 \quad \rightarrow y = b + 2$, e

$c = w - 1 \quad \rightarrow w = c + 1$.

Observe que $z \geq 0$ e como $a, b, c \geq 0$ podemos reescrever (I) da seguinte forma:

$$a + 4 + b + 2 + z + c + 1 = 30$$
$$a + b + z + c = 30 - 7$$

Logo, temos a seguinte equação com variáveis não negativas:

$$a + b + z + c = 23 \ \ (II)$$

A equação (II) é equivalente a equação (I) e possui $CR_4^{23} = C_{23+4-1}^{23} = C_{26}^{23} = \frac{26!}{23!3!} =$ 2600 soluções inteiras não negativas.