Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD2 - Primeiro Semestre de 2012

Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (1.3) Usando a relação de Stifel mostre que

$$C_n^0 \; - \; C_n^1 \; + \; C_n^2 \; - \; C_n^3 \cdots + (-1)^p C_n^p \; = \; (-1)^p C_{n-1}^p$$

com $n \geq 2$. Justifique.

Resposta: Pela relação de Stifel temos:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

Aplicando-a a expressão do lado esquerdo da equação, temos:

$$\begin{array}{cc} C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \cdots + (-1)^{p-1} C_n^{p-1} + (-1)^p C_n^p & = \\ C_n^0 - \underbrace{(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1)}_{C_n^1} + \underbrace{(C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2)}_{C_n^2} + \cdots + & \\ \underbrace{((-1)^{p-1} C_{n-1}^{p-2} + (-1)^{p-1} C_{n-1}^{p-1})}_{(-1)^p C_n^{p-1}} + \underbrace{((-1)^p C_{n-1}^{p-1} + (-1)^p C_{n-1}^p)}_{(-1)^p C_n^p} & = \\ (-1)^p C_{n-1}^p & \end{array}$$

Observe que a utilização da Relação de Stifel simplifica a expressão. Afinal, ao aplicá-la, obtemos termos de sinais opostos que são eliminados.

2. (1.2) Usando o teorema do binômio de Newton calcule o termo do desenvolvimento de

$$(\frac{y^4}{x} - \frac{x^2}{\sqrt{y}})^{90}$$

que tem o mesmo grau em x e y, sendo $y > 0$ e $x \neq 0$. Justifique.

Resposta: Pelo Teorema do Binômio de Newton temos a seguinte fórmula para o termo geral do desenvolvimento de $(a+b)^n$:

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$$

Vamos utilizar esta fórmula para determinar o termo em que os graus de x e y são iguais. Nesta questão temos $a = \dfrac{y^4}{x}$, $b = -\dfrac{x^2}{\sqrt{y}}$ e $n = 90$.

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= C_{90}^k \left(\frac{y^4}{x}\right)^{90-k} \left(-\frac{x^2}{\sqrt{y}}\right)^k \\ &= C_{90}^k \left(\frac{y^{360-4k}}{x^{90-k}}\right) \left((-1)^k \frac{x^{2k}}{y^{\frac{k}{2}}}\right) \\ &= C_{90}^k (-1)^k y^{360-4k} x^{k-90} x^{2k} y^{-\frac{k}{2}} \\ &= C_{90}^k (-1)^k y^{360-\frac{9k}{2}} x^{3k-90} \end{aligned}$$

Para que x e y tenham o mesmo grau no termo T_{k+1}, devemos ter:

$$360 - \frac{9k}{2} = 3k - 90$$

.

Daí,

$$\frac{9k}{2} + 3k = 360 + 90$$

$$\frac{15k}{2} = 450$$

e, portanto,

$$k = 60.$$

Logo,

$$T_{61} = C_{90}^{60} y^{90} x 90$$

Assim, o 61º termo do desenvolvimento de $\left(\frac{y^4}{x} - \frac{x^2}{\sqrt{y}}\right)^{90}$ tem os graus de x e y iguais.

3. Uma máquina de vender selos só aceita moedas de 1 real e notas de 2 reais.

   (a) (0,8) Encontre a relação de recorrência (incluindo as condicões iniciais) para o número de maneiras de pagar uma quantía de n reais na máquina. A ordem em que as moedas ou as notas são inseridas na máquina é relevante. Justifique.

   Resposta: Vamos denotar por a_n o número de formas distintas de pagar n reais.

   Inicialmente, vamos analisar os casos iniciais.

   - Para pagarmos 1 real temos apenas uma forma: utilizamos uma moeda de 1 real. Logo, $a_1 = 1$.
   - Para pagarmos 2 reais temos duas formas: ou utilizamos duas moedas de 1 real ou uma nota de 2 reais. Logo $a_2 = 2$
   - Para pagarmos 3 reais podemos pagar 2 reais e em seguida acrescentar mais 1 real ou pagar 1 real e em seguida acrescentar mais 2 reais. É importantíssimo notar que o caso de inserir 3 moedas de 1 real já está sendo analisado (está implícito no caso em que pagamos 1 real e em seguida 2 reais). Logo, temos que $a_3 = a_2 + a_1$.

   Suponha que já tenhamos pago $n-1$ reais. Podemos pagar esses $n-1$ reais de a_{n-1} maneiras distintas. Resta pagar 1 real e podemos fazê-lo apenas de uma maneira (com uma moeda de 1 real).

   Agora suponha que tenhamos pago $n-2$ reais. Podemos fazer isso de a_{n-2} formas distintas. A pergunta que devemos fazer é: Existe alguma forma diferente da que acabamos de analisar para pagar esses 2 reais que restam? Note que se inserirmos uma moeda de 1 real para em seguida inserirmos outra recairemos no caso em que pagamos $n-1$ reais. Então, a única forma diferente da analisada anteriormente de pagar estes 2 reais restantes é utilizando uma nota de 2 reais.

Observe que se fôssemos analisar o caso $n-3$ recairíamos nos casos que já estudamos.

Assim, para pagarmos n reais podemos pagar $n-1$ reais e em seguida depositar mais uma moeda de 1 real OU pagar $n-2$ reais e inserir uma nota de 2 reais. Portanto, podemos escrever a seguinte relação de recorrência para o problema:

$$\begin{cases} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \quad n \geq 3 \\ a_1 &= 1 \\ a_2 &= 2 \end{cases}$$

(b) (0,7) Obtenha a fórmula fechada da seguinte relacão de recorrência pelo método de substitução:

$$a_n = 3a_{n-1} + 1 \qquad a_0 = 1$$

Justifique.

Resposta:

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 1 \\ &= 3\underbrace{(3a_{n-2} + 1)}_{a_{n-1}} + 1 \\ &= 3^2 a_{n-2} + 3 + 1 \\ &= 3^2 \underbrace{(3a_{n-3} + 1)}_{a_{n-2}} + 3 + 1 \\ &= 3^3 a_{n-3} + 3^2 + 3 + 1 \\ &= 3^3 \underbrace{(3a_{n-4} + 1)}_{a_{n-3}} + 3^2 + 3 + 1 \\ &= 3^4 a_{n-4} + 3^3 + 3^2 + 3 + 1 \\ &\vdots \\ &= 3^j a_{n-j} + \cdots + 3^2 + 3 + 1 \end{aligned}$$

Note que teremos a_0 quando $j = n$ e então obtemos a expressão:

$$a_n = 3^n a_0 + 3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3^3 + 3^2 + 3 + 1$$

Como $a_0 = 1$ temos

$$a_n = 3^n + 3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3^3 + 3^2 + 3 + 1$$

Então

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} 3^i = \underbrace{\frac{1(3^{n+1}-1)}{3-1}}_{\text{Soma de uma PG com n+1 termos e razão 3}}$$

Logo,

$$a_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$$

4. Responda as seguintes perguntas, justificando a resposta de cada uma delas.

   (a) (0.8) Quantas arestas há em K_n (grafo completo com n vértices)?

   Resposta:

   PRIMEIRO RACIOCÍNIO: UTILIZANDO O TEOREMA DO APERTO DE MÃOS.

   Um grafo completo com n vértices K_n é um grafo $(n-1)$-regular, ou seja, todos os n vértices do grafo tem grau $n-1$. Pelo teorema do Aperto de Mãos temos

   $$\sum_{v \in V(K_n)} d(v) = 2m,$$

   onde m é o número de arestas do grafo.
   Então

   $$n(n-1) = 2m \Rightarrow m = \frac{n^2-n}{2}$$

   Logo, um grafo completo tem $\frac{n^2-n}{2}$ arestas.

SEGUNDO RACIOCÍNIO: UTILIZANDO ARGUMENTO COMBINATÓRIO.

Em um grafo completo, entre cada par de vértices distintos existe uma aresta. Como temos n vértices teremos:

$$C_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2} \text{ arestas.}$$

(b) (0.8) Quantas arestas tem o grafo $\overline{G}$ (grafo complemento de G), onde G tem n vértices e m arestas?

Resposta:

O grafo complemento de G, $\overline{G}$, possui todas as arestas que faltam a G para ele se tornar um grafo completo. Então, dado que G possui m arestas e que um grafo completo possui $\frac{n^2-n}{2}$, o grafo $\overline{G}$ possui:

$$\frac{n^2-n}{2} - m$$

arestas.

Note que, se G for um grafo completo, então $\overline{G}$ é um grafo nulo e se G for um grafo nulo, então $\overline{G}$ é um grafo completo.

(c) Quantos vértices tem um grafo regular de grau 4 com 28 arestas?

Resposta: Novamente vamos utilizar o Teorema do Aperto de Mãos.

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$$

Como G é 4-regular, cada um de seus vértices tem grau 4 e, além disso, $m = 28$. Então

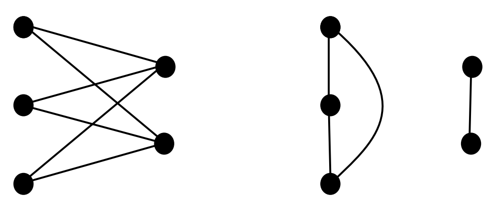
$$4n = 2 \times 28 \Rightarrow n = 14.$$

Logo, um grafo 4-regular com 28 arestas possui 14 vértices.

(d) (0.8) Quantos componentes conexos tem o grafo complemento de um grafo bipartido completo $K_{3,2}$? E de uma maneira geral, quantos componentes conexos tem o grafo complemento de $K_{p,q}$, p e q inteiros positivos?

Resposta:

O grafo complemento do grafo $K_{3,2}$ possui 2 componentes conexos, pois, para obtê-lo todas as arestas entre os vértices das duas partições devem ser removidas e todas as arestas entre vértices de uma mesma partição de G devem ser inseridas. Note que cada partição de $K_{3,2}$ se torna uma clique em $\overline{K}_{3,2}$ e que não existem arestas entre vértices de partições distinttas de $K_{3,2}$ no seu grafo complemento. Observe a figura de um $K_{3,2}$ e de seu grafo complementar.



$K_{3,2}$ $\overline{K}_{3,2}$

Figura 1: Grafo $K_{3,2}$ e seu grafo complementar.

Note que o número de componentes conexos se mantém para qualquer grafo complementar de um grafo bipartido completo.

Portanto, de maneira geral, o grafo complemento de um $K_{p,q}, p, q \in \mathbb{N}$ tem 2 componentes conexos.

(e) (0.8) Se T é uma árvore, a remoção de qualquer aresta e de T desconecta T (isto é o grafo $T - e$ é desconexo)?

Resposta: Sim.

Suponha, por absurdo que exista um aresta $e = (u, v)$ em T cuja remoção não desconecte o grafo T. Neste caso, existe um outro caminho entre os vértices u e v. Seja $P = ux_1 \cdots x_j v$ o caminho entre u e v em $T - e$. Note que $P + e = ux_1 \cdots x_j vu$ é um ciclo em T. Absurdo, pois T é uma árvore e portanto um grafo acíclico.

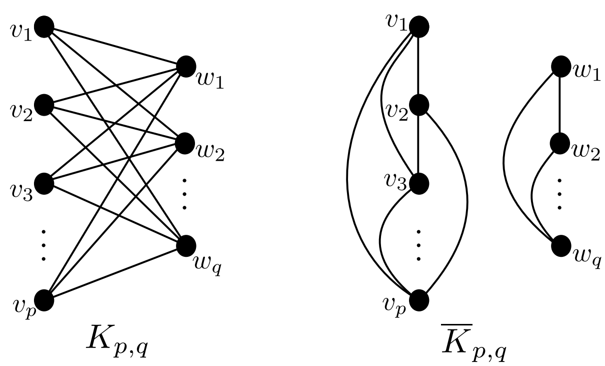


Figura 2: Grafo $K_{p,q}, p, q \in \mathbb{N}$ e seu grafo complementar.

Logo, a remoção de qualquer aresta em uma árvore T desconecta T.

5. Considere o grafo $G = (V, E)$, onde
$V = \{a, b, c, d, e, f\}$ e
$V(G) = \{(a, b), (b, c), (a, c), (a, f), (a, d), (c, d), (c, f), (d, f)), (e, f), (d, e)\}$.

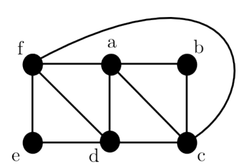


Figura 3: Grafo G.

(a) (0.8) G é euleriano? Justifique.

Resposta: Sim, pois todos os vértices de G têm grau par (fato que caracteriza um grafo euleriano).

(b) (0.8) Qual o centro de G?

Resposta: Para determinar os vértices que são o centro de G temos que determinar os vértices que têm menor excentricidade no grafo.
$e(a) = 2, e(b) = 3, e(c) = 2, e(d) = 2, e(e) = 3, e(f) = 2$

Assim, $c(G) = \{a, c, d, f\}$.

6. (1.2) Mostre que um grafo bipartido com um número ímpar de vértices não pode ser hamiltoniano.

   Resposta: Suponha por absurdo que existe um grafo G bipartido com um número ímpar de vértices que seja hamiltoniano. Então G tem um ciclo hamiltoniano de tamanho ímpar, o que contradiz a caracterização de grafo bipartido (*um grafo é bipartido se e somente se não contém ciclo ímpar*). Logo, um grafo bipartido com um número ímpar de vértices não pode ser hamiltoniano.