Gabarito da AD1 - Fundamentos de Algoritmos para Computação

1. (1.5) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

   (a) $\{\emptyset\} \subseteq \{\{\emptyset\}, 1\}$

   Resposta:

   A afirmativa é falsa porque $\{\emptyset\}$ é um elemento do conjunto $A = \{\{\emptyset\}, 1\}$ e, usamos o símbolo *está contido* ($\subseteq$) para relacionar conjuntos.

   Dizemos que um conjunto A está contido em um conjunto B se todo elemento de A é elemento de B ($A \subseteq B$).

   As afirmações corretas são:

   $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}, 1\}$

   OU

   $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\{\emptyset\}, 1\}$

   (b) $\emptyset \subseteq \{1, 0, -1\}$

   Resposta: A afirmação é verdadeira, pois $\emptyset$ é um conjunto e, para todo conjunto A, temos que o conjunto vazio, $\emptyset$, está contido em A, isto é, $\emptyset \subseteq A$.

   (c) $n(A \cup B) \leq n(A) + n(B)$

   Resposta: A afirmação é verdadeira.

   De fato, temos que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. Como $n(A \cap B) \geq 0$ então $-n(A \cap B) \leq 0$.

   Logo,

   $$n(A) + n(B) - n(A \cap B) \leq n(A) + n(B)$$

   isto é,
   $$n(A \cup B) \leq n(A) + n(B)$$

2. (1.0) Mostre a seguinte igualdade usando as propriedades de conjuntos.(Observação: não verifique por diagramas de Venn).

$$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$$

Prova:

$$\begin{array}{lcll}
 & & (A-B)\cup(B-A) & = \\
\text{(propriedade da diferença)} & = & (A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A}) & = \\
\text{(propriedade distributiva)} & = & [(A\cap\overline{B})\cup B]\cap[(A\cap\overline{B})\cup\overline{A}] & = \\
\text{(propriedade distributiva)} & = & [(A\cup B)\cap(\overline{B}\cup B)]\cap[(A\cup\overline{A})\cap(\overline{B}\cup\overline{A})] & = \\
\text{(propriedade } A\cup\overline{A}=\mathbb{U}) & = & [(A\cup B)\cap\mathbb{U}]\cap[\mathbb{U}\cap(\overline{B}\cup\overline{A})] & = \\
\text{(propriedade } A\cap\mathbb{U}=A) & = & (A\cup B)\cap(\overline{B}\cup\overline{A}) & = \\
\text{(lei de Morgan)} & = & (A\cup B)\cap\overline{(B\cap A)} & = \\
\text{(propriedade comutativa)} & = & (A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)} & = \\
\text{(propriedade da diferença)} & = & (A\cup B)-(A\cap B) &
\end{array}$$

3. (2.0) Mostre usando Indução Matemática:

$\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\sum_{i=1}^{n} i)^2$ para todo n inteiro natural.

Sugestão: Lembre-se que $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$

Prova:

Como $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$ então $(\sum_{i=1}^{n} i)^2 = (\frac{n(n+1)}{2})^2 = \frac{(n(n+1))^2}{2^2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Então, é equivalente mostrar que $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Seja $P(n) = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Base da indução:

Para $n=1$, $1^3 = 1^2.\frac{4}{4} = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$, logo $P(1)$ é verdadeira.

Hipótese de Indução:

Suponha verdadeiro para $n=k$, isto é, $P(k)$ é verdadeira:

$$\sum_{i=1}^{k} i^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeiro então $P(k+1)$ é verdadeiro, isto é:

Temos que provar que: $P(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} i^3 = 1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$ é verdadeira.

Desenvolvendo para $n = k + 1$ e usando a hipótese de indução, temos que:

$$
\begin{array}{ll}
& \sum_{i=1}^{k+1} i^3 \qquad\qquad\qquad\qquad = \\
= & 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 \quad = \\
= & \underbrace{(1^3 + 2^3 + \ldots + k^3)}_{(Por\ hip\acute{o}tese\ indutiva)} + (k+1)^3 \quad = \\
= & \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \qquad\qquad = \\
= & \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} \qquad\qquad = \\
= & \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4} \qquad\qquad = \\
= & \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} \qquad\qquad = \\
= & \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}
\end{array}
$$

Logo, pelo princípio da indunção, a expressão é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$

4. (2.0) Quantos são os números naturais de 8 dígitos nos quais o dígito 5 figura exatamente 4 vezes e o dígito 7 exatamente 2 vezes?

Resposta:

1º raciocínio: Vamos contar separadamente:

i) números que começam em 5; ii) números que começam em 7; iii) números que não começam nem em 5 nem em 7.

i) números que começam em 5;

Há um modo de preencher a primeira casa; depois disso, há C_7^3 modos de escolher as outras três casas do número que também serão preenchidas com o algarismo 5; depois disso, há C_4^2 modos de escolher as duas casas que serão ocupadas pelo algarismo 7; finalmente, as duas casas restantes podem ser preenchidas de 8×8 modos(não podemos usar nessas casas os dígitos 5 e 7).

Há $1 \times C_7^3 \times C_4^2 \times 8 \times 8 = 1 \times 35 \times 6 \times 64 = 13440$ números do tipo (i)

ii) números que começam em 7;

Há um modo de preencher a primeira casa; depois disso, há 7 modos de escolher a outra casa do número que também será preenchida com o algarismo 7; depois disso, há C_6^4 modos de escolher as quatro casas que serão ocupadas pelo algarismo 5; finalmente, as duas casas restantes podem ser preenchidas de 8×8 modos(não podemos usar nessas casas os dígitos 5 e 7).

Há $1 \times 7 \times C_6^4 \times 8 \times 8 = 1 \times 7 \times 15 \times 64 = 6720$ números do tipo (ii)

iii) números que não começam nem em 5 nem em 7;

Há 7 modos de preencher a primeira casa (não podemos usar nem o 5, nem o 7 e nem o 0); depois disso, há C_7^4 modos de escolher a três casas do número que serão preenchidas com o algarismo 5; depois disso, há C_3^2 modos de escolher as duas casas que serão ocupadas pelo algarismo 7; finalmente, a casa restante pode ser preenchida de 8 modos(não podemos usar nessas casas os dígitos 5 e 7).

Então pelo princípio multiplicativo temos $7 \times C_7^4 \times C_3^2 \times 8 = 7 \times 35 \times 3 \times 8 = 5880$ números do tipo (iii)

A resposta é $13440 + 6720 + 5880 = 26040$.

2° raciocínio:

Vamos esquecer que a primeira casa do número não pode ser igual a zero. Isso fará com que contemos a mais e, depois, descontaremos o que foi contado indevidamente.

Há C_8^4 modos de escolher as casas que serão ocupadas pelo dígito 5; depois disso, há C_4^2 modos de selecionar as casas que serão ocupadas pelo dígito 7; finalmente, as duas casas restantes podem ser preenchidas de 8×8 modos (não podemos usar nessas casas os dígitos 5 e 7).

A "resposta" seria $C_8^4 \times C_4^2 \times 8 \times 8 = 70 \times 6 \times 64 = 26880$.

Devemos subtrair os números começados por 0. Se o número começa por 0, há C_7^4 modos de escolher as casas que serão ocupadas pelo dígito 5; depois disso, há C_3^2 modos de selecionar as casas que serão ocupadas pelo dígito 7; finalmente, a casa restante pode ser preenchida de 8 modos (não podemos usar nessas casas os dígitos 5 e 7). Há $C_7^4 \times C_3^2 \times 8 = 35 \times 3 \times 8 = 840$.

A resposta é $26880 - 840 = 26040$.

5. (2.0) Considere o seguinte problema: De quantos modos podemos retirar (sem olhar) 7 bolas de uma caixa que contém pelo menos 7 bolas brancas, pelo menos 7 bolas vermelhas e pelo menos 7 azuis?

   Resolva o problema achando as soluções inteiras, não negativas, de uma determinada equação(com restrições nas variáveis) que você deve explicitar.

   Resposta: Seja x_1 o número de bolas brancas retiradas da caixa, x_2 o número de bolas vermelhas retiradas da caixa e x_3 o número de bolas azuis retiradas da caixa. Como são retiradas 7 bolas ao todo, temos a seguinte equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7,$$

   onde $x_i \geq 0$ para $i = 1, 2, 3$.

O número de soluções inteiras, não-negativas da equação é dado por:

$$CR_3^7 = C_9^7 = \frac{9!}{7!2!} = \frac{9.8.7!}{7!.2} = \frac{9.8}{2} = 9.4 = 36$$

6. (1.5) Quantos são os anagramas da palavra **PIRACICABA** que não possuem duas letras **A** juntas?

   Resposta:

   1º raciocínio: O número de modos de arrumar as letras diferentes de A é $P_7^{2,2,1,1,1}$. Para 2 A's não ficarem juntos, temos que colocar os A's entre as outras letras (o que nos dá 8 espaços possíveis onde os A's podem ser colocados). Isso pode ser feito de C_8^3 maneiras. Logo pelo princípio multiplicativo temos $P_7^{2,2,1,1,1} \times C_8^3 = 1260 \times 56 =$ 70560 anagramas.

   2º raciocínio: Consideramos os seguintes conjuntos:

   U: conjunto de todos os anagramas da palavra PIRACICABA (é o conjunto universo).
   V: conjunto de elementos de U que não possuem duas letras A juntas.
   W: conjunto de elementos de U que possuem duas letras A juntas

   Observemos que devemos calcular $n(V) = n(U) - n(W)$.

   Primeiro calcularemos $n(U)$ que corresponde a todas as permutações de 10 elementos (número de letras de PIRACICABA) onde temos a letra A repetida 3 vezes, a letra I repetida 2 vezes e a letra C repetida 2 vezes:

$$n(U) = P_{10}^{3,2,2} = \frac{10!}{3!2!2!} = 151200$$

   Agora, calcularemos $n(W)$. Como 2 letras A devem estar juntas, consideraremos estas como sendo um único elemento, então, repetindo o raciocínio anterior para 8 elementos, sendo repetida a letra I duas vezes e repetida a letra C duas vezes. Podemos colocar a letra formada pelos dois A's em uma das oito posições.

$$n(W) = 8 \times P_8^{2,2} = 8 \times \frac{8!}{2!2!} = 80640$$

   Portanto, $n(V) = 151200 - 80640 = 70560$