Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Gabarito da AP1 - Primeiro Semestre de 2013

Nome -
Assinatura -

Observações:

1. Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular. Se necessário deixe o resultado indicado, como um produto ou quociente ou potência de números inteiros ou fatoriais.
2. Resultado sem indicação de como foi obtido, não será considerado.
3. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.
4. Você pode usar lápis para responder as questões.
5. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.
6. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

Questões:

1. (1.5) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

   (a) $\{\emptyset\} \in P(A)$, onde A é um conjunto arbitrário e $P(A)$ é o conjunto das partes de A.

   Resposta: Falso, pois $\{\emptyset\} \in P(A)$ apenas quando $\emptyset$ é elemento do conjunto A. Seria correto afirmar que $\{\emptyset\} \subseteq P(A)$ ou $\emptyset \in P(A)$, pois $\emptyset$ é elemento de qualquer conjunto das partes.

(b) Dados os conjuntos $B = \{x \in \mathbb{N} \,|x \geq 7\}$ e $C = \{x \in \mathbb{Z} \,|x \geq 7\}$, temos que $\overline{B} \neq \overline{C}$.

Resposta: Verdadeiro. Observe os conjuntos B e C:

$B = \{7, 8, 9, \cdots\}$ $\qquad C = \{7, 8, 9, \cdots\}$

Note que $B = C$. Entretanto, como os conjuntos universo de B e de C são diferentes, temos que: $\overline{B} = \mathbb{N} \setminus B$ e $\overline{C} = \mathbb{Z} \setminus C$. Logo, $\overline{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $\overline{C} = \{\cdots, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Assim, $\overline{B} \neq \overline{C}$

(c) $n(D \cup E \cup S) = n(D) + n(E) + n(S) - n(D \cap E) - n(E \cap S) - n(E \cap S)$, onde D, E e S são conjuntos arbitrários.

Resposta: Falso.

Podemos apresentar o seguinte contra-exemplo:

Considere os seguintes conjuntos:

$$D = \{1, 2, 3\}, E = \{1, 2, 4\}, S = \{1, 3, 5\}$$

Neste caso, $n(D) = n(E) = n(S) = 3, D \cap E = \{1, 2\}$, e consequentemente $n(D \cap E) = 2$, $E \cap S = \{1\}$ e, portanto, $n(E \cap S) = 1$. Note que $D \cup E \cup S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e, portanto, $n(D \cup E \cup S) = 5$. Por outro lado,

$$n(D) + n(E) + n(S) - n(D \cap E) - n(E \cap S) - n(E \cap S) =$$

$$3 + 3 + 3 - 2 - 1 = 6,$$

valor diferente de $n(D \cup E \cup S)$. Portanto, a fórmula está incorreta e pode ser reescrita da seguinte maneira, utilizando o Princípio da Inclusão e Exclusão:

$n(D \cup E \cup S) = n(D) + n(E) + n(S) - n(D \cap E) - n(E \cap S) - n(D \cap S) + n(D \cap E \cap S)$.

2. (1.5) Mostre por Indução Matemática que:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Resposta: Seja $P(n) : \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

BASE DA INDUÇÃO: Para $n = 1$, pelo lado esquerdo da igualdade temos: $\frac{1}{2}$.

Pelo lado direito, temos $1 - \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$. Como ambos os lados da igualdade resultam no mesmo valor para $n = 1$, temos que a Base da Indução está verificada.

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Suponha $P(k) : \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$ verdadeira.

PASSO DA INDUÇÃO: Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1) : \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$ é verdadeira.

De fato,

$$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^k}}_{\text{Hipótese de Indução}} + \frac{1}{2^{k+1}} =$$

$$1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} =$$

$$1 - \left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}}\right) =$$

$$1 - \left(\frac{2-1}{2^{k+1}}\right) =$$

$$1 - \frac{1}{2^{k+1}}$$

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, temos que $P(n) : \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. (2.0) Desejamos formar uma comissão de 6 pessoas entre 5 pais de alunos e 4 professores.

   (a) Quantas comissões terão somente 2 professores? Justifique.

Resposta: Inicialmente, vamos escolher 2 entre os 4 professores para formarem a comissão. Temos $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$ formas de fazer isso. Em seguida, vamos escolher os pais que ocuparão o restante das posições. Temos 5 pais e 4 posições restantes. Logo, temos $C_5^4 = \frac{5!}{4!1!} = 5$ maneiras de escolher 4 entre os 5 pais. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, temos $C_4^2 \times C_5^4 = 6 \times 5 = 30$ comissões distintas contendo somente 2 professores.

(b) Quantas comissãoes terão no mínimo 2 professores? Justifique.

Resposta: Como agora queremos que pelo menos 2 professores participem da comissão, ou seja, podemos escolher mais professores para formá-la, para facilitar o desenvolvimento da questão, vamos trabalhar com a noção de complemento. Observe que não temos comissões com nenhum professor, visto que as comissões são formadas por 6 pessoas e temos apenas 5 pais. Sendo assim, no mínimo temos um professor na comissão. Então, como queremos determinar o número de comissões com no mínimo 2 professores, vamos subtrair do total de comissões possíveis aquelas que tem apenas 1 professor.

Cálculo do número total de comissões:

Temos 9 pessoas e queremos escolher 6 para formar a comissão. Logo, temos $C_9^6 = \frac{9!}{6!3!} = 84$ comissões distintas.

Cáculo do número de comissões com apenas um professor:

Primeiramente vamos escolher o professor que formará a comissão. Podemos fazer isso de $C_4^1 = \frac{4!}{3!1!} = 4$ formas. Como restam 5 posições e 5 pais, temos apenas 1 forma de escolher os pais. Assim, pelo PM, temos $C_4^1 \times 1 = 4$ comissões possíveis com apenas 1 professor.

Utilizando a noção de complemento, temos que o número de comissões distintas que podem ser formadas com pelo menos 2 professores é: $84 - 4 = 80$.

Outro Raciocínio:

Usamos o conceito do Princípio Aditivo. Como pelo menos 2 professores participam da comisssão, temos que podem participar da comissão $2, 3$ ou 4 professores, que correspondem a possibilidades excludentes. Em (a) vimos que temos 30 possibilidades se escolher uma comissão com 2 professores. Quando a comissão tem exatamente 3 professores teremos $C_4^3 = \frac{4!}{3!1!} = 4$ maneiras de escolher os professores e $C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$ formas de escolher os pais para formar a comissão. Logo, teríamos $C_4^3 \times C_5^3 = 4 \times 10 = 40$ comissões com 3 professores. Finalmente, as comissões com 4 professores têm 2 pais. Logo, temos $C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = 10$ maneiras de formar estas comissões. Como os eventos são excludentes, pelo princípio aditivo, temos $30+40+10 = 80$ maneiras de escolher 1 comissão contendo pelo menos 2 professores.

4. (1.5) Considere os anagramas da palavra:

P O L I N O M I A L I D A D E

Quantos desses anagramas não começam nem por **P** e nem por **L**? Justifique.

Resposta: Vamos utilizar a noção de complemento para resolver esta questão. Vamos calcular os anagramas que **começam** por P ou L e subtrair do total de anagramas.

P O L I N O M I A L I D A D E tem 1 P, 2 O's, 2 L's, 3 I's, 1 N, 1 M, 2 A's, 2 D's e 1 E, totalizando 15 letras. Consideremos U o conjunto de todos os anagramas, A o conjunto dos que começam com P e B os que começam com L. Usando a noção de complemento, temos que o número de anagramas que não começam nem por P e nem por L é dado por

$$n(U) - n(A \cup B)$$

. Como A e B são excludentes, temos que $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

Cálculo do número total de anagramas, $n(U)$:

$$P_{15}^{1,2,2,3,1,1,2,2,1} = \frac{15!}{2!2!3!2!2!}$$

Cálculo do número de anagramas que começam por P, n(A):

Fixamos a letra P na primeira posição e permutamos (com repetições) as demais.

$$P_{14}^{2,2,3,1,1,2,2,1} = \frac{14!}{2!2!3!2!2!}$$

Cálculo do número de anagramas que começam por L, N(B):

Fixamos uma letra L na primeira posição e permutamos (com repetições) as demais.

$$P_{14}^{1,2,1,3,1,1,2,2,1} = \frac{14!}{2!3!2!2!}$$

PORTANTO, temos que o número de anagramas que **não começam** por P e nem por L é:

$$n(U) - n(A) - n(B) =$$
$$P_{15}^{1,2,2,3,1,1,2,2,1} - P_{14}^{2,2,3,1,1,2,2,1} - P_{14}^{1,2,1,3,1,1,2,2,1} =$$
$$\frac{15!}{2!2!3!2!2!} - \frac{14!}{2!2!3!2!2!} - \frac{14!}{2!3!2!2!} =$$
$$\frac{14!}{2!2!2!3!}\left(\frac{15}{2} - \frac{1}{2} - 1\right) =$$
$$\frac{14!}{2 \times 2 \times 2 \times 6} \times 6 =$$
$$\frac{14!}{8}$$

5. (1.5) Quantos números naturais de 4 algarismos (repetidos ou não), podem ser formados com os algarismos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,$ e 9. Justifique.

   Resposta: Queremos formar números naturais com 4 algarismos, logo a única restrição é que a primeira posição não pode ser ocupada pelo algarismo 0. Portanto, temos 9 algarismos que podem ocupá-la. Cada uma das outras 3 posições podem ser ocupadas por um dos 10 algarismos possíveis. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, temos $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$ números com quatro algarismos formados com os algarismos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,$ e 9.

Outro raciocínio:

A quantidade de números de 4 algarismos são todos os arranjos de 4 posições usando 10 algarismos, que podem ser com repetição, menos aqueles que começam por zero.

O total de arranjos de 4 posições são arranjos com repetição $A_{10}^4 = 10^4$. O total de arranjos de 4 algarismos que têm 0 na primeira posição é $A_{10}^3 = 10^3$. Logo, usando a noção de complemento, tem-se que $10^4 - 10^3 = 10000 - 1000 = 9000$ números.

6. (2.0) Uma fábrica produz 8 tipos de bombons que são vendidos em caixas de 30 bombons (de um mesmo tipo ou sortidos). Quantas caixas diferentes podem ser formadas de maneira que cada caixa contenha pelo menos um bombom de cada tipo? Justifique.

   Resposta: Seja x_i o número de bombons do tipo i presentes em uma caixa de bombons, para $i = 1, \cdots, 8$. Sabemos que cada caixa de bombom fabricada contém 30 bombons sortidos, mas pelo menos um de cada tipo está presente na caixa. Daí temos que $x_i \geq 1, \forall i = 1, \cdots, 8$. Observe que, ao determinarmos quantas soluções inteiras não negativas a equação (I) possui, estamos determinando quantas caixas de bombons distintas podemos formar.

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_8 = 30, \quad \text{onde} \quad x_i \geq 1 \qquad (I)$$

   Sabemos determinar o número de soluções inteiras não negativas para equações deste tipo quando todas as variáveis da equação são não negativas. Então, neste caso, temos que fazer uma mudança de variáveis para obtermos uma equação equivalente a (I) com variáveis não negativas.

Sejam $a_i = x_i - 1 \quad \rightarrow x_i = a_i + 1, \quad i = 1, \cdots, 8$. Observe que, como $x_i \geq 1$, temos que $a_i \geq 0$. Assim, podemos reescrever (I) da seguinte forma:

$$a_1 + 1 + a_2 + 1 + \cdots + a_8 + 1 = 30$$
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_8 = 30 - 8$$

Logo, temos a seguinte equação com variáveis $a_i \geq 0, i = 1, \cdots, 8$.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_8 = 22 \quad (II)$$

A equação (II) é equivalente a equação (I) e possui $CR_8^{22} = C_{22+8-1}^{22} = C_{29}^{22} = \frac{29!}{22!7!}$ soluções inteiras não negativas.