Tema : Conjuntos

- Conceitos
- Diagramas de Venn e operações
- Número de elementos de um conjunto

Objetivos:

- Familiarizar-se com a linguagem de conjuntos.
- Melhorar o raciocínio lógico.

Importância:

- Fornece uma linguagem e ferramentas básicas que nos ajudam no raciocínio tanto na vida cotidiana como na manipulação de outros tópicos matemáticos.

Aula 1 : Conceitos

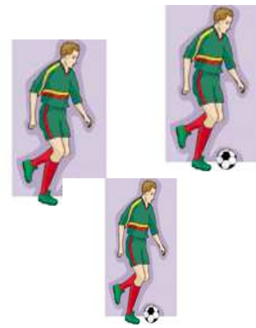
Conteúdo:

- Introdução
- Noção intuitiva
- Notação
- Relação de pertinência
- Definição
- Descrição
- Formalização
- Conjunto vazio
- Relações entre conjuntos
- Conjunto de partes

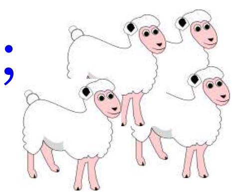
Introdução:

Encontrar a estrutura comum a:

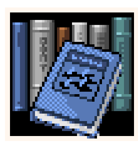
- uma equipe de futebol;



- um rebanho de ovelhas;

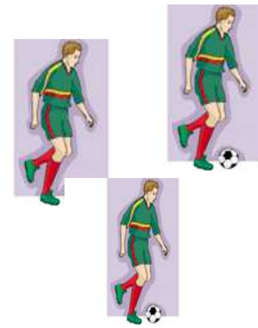


- uma biblioteca.

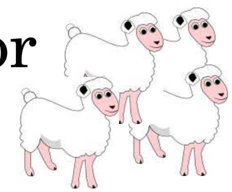


Formação de estrutura comum:

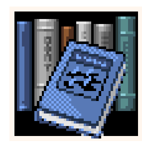
- uma equipe de futebol é constituída por um grupo de jogadores;



- um rebanho de ovelhas é formado por uma reunião de ovelhas;

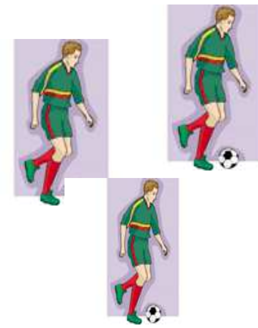


- uma biblioteca está formada por uma coleção de livros.

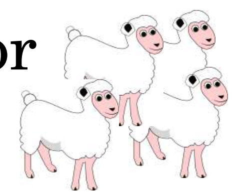


Formação de estrutura comum:

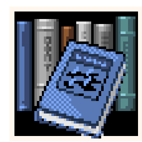
- uma equipe de futebol é constituída por uma coleção de jogadores;



- um rebanho de ovelhas é formado por uma coleção de ovelhas;



- uma biblioteca está formada por uma coleção de livros.



Estrutura comum:

- equipe de futebol
- rebanho de ovelhas
- biblioteca

está formada(o) por uma coleção de objetos.

Noção intuitiva:

Um conjunto é uma coleção de objetos, chamados elementos.

Exemplos:

- uma equipe de futebol é um conjunto de jogadores.

  os elementos são os jogadores

- um rebanho de ovelhas é um conjunto de ovelhas.

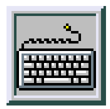
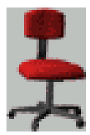
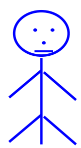
  os elementos são as ovelhas

- uma biblioteca é um conjunto de livros.

  os elementos são os livros

Invente um conjunto com 4 elementos considerando coisas e/ou pessoas do lugar em que você está agora.

Meu conjunto está formado pelo(a):

- monitor do computador 
- teclado 
- cadeira 
- você mesmo 

Notação de conjuntos:

- Letras maiúsculas são usadas para denotar conjuntos.

  Exemplo: seu conjunto pode chamar-se A e o meu B.

- Letras minúsculas são usadas para descrever os elementos de um conjunto.

  Exemplo: os elementos do meu conjunto B podem ser denominados por:

  m : monitor;
  t : teclado;
  c : cadeira;
  v : você.

Descrição de um conjunto:

- O símbolo { indica o início da descrição de um conjunto.

- O símbolo } indica o fim da descrição de um conjunto.

Resumindo:

- Conjunto: letras maiúsculas
- Elementos de um conjunto: letras minúsculas
- Início do conjunto: $\{$
- Fim do conjunto: $\}$

Exemplo: $B = \{m, t, c, v\}$

Relação de pertinência:

- Noção intuitiva:

Seja $B = \{m, t, c, v\}$

- O elemento t (teclado) está no conjunto B.
- O elemento r (relógio) não está em B.

Definição de pertinência:

- x pertence a um conjunto X se x é um elemento de X.

Notação: $\boldsymbol{x} \in \mathbf{X}$

Exemplo:

B = { m, t, c, v }

t pertence a B , $t \in B$

r não pertence a B, $r \notin B$

Exemplo importante:

- $\mathbb{N}$ = conjunto dos números naturais

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \dots \}$$

- $10598 \in \mathbb{N}$
- $-1 \notin \mathbb{N}$
- $1/5 \notin \mathbb{N}$
- $2,5 \notin \mathbb{N}$

Outro exemplo:

- C = conjunto das pessoas que são altas.

  Você pertence a C ?

  - Se você mede 1,95 metros, está claro que você pertence a C.
  - Se você mede 1,50 metros, está claro que você não pertence a C.
  - Se você mede 1,75 metros, você está em C ou não?

  Conclusão: esta coleção não está bem definida.

Modificação do exemplo:

- C = conjunto das pessoas que têm mais de 1,75 metros.

Você pertence a C ?

Conclusão: esta coleção está bem definida.

Definição de conjunto:

Um conjunto é uma coleção **BEM DEFINIDA** de objetos, chamados elementos.

Isto é, **SEMPRE** podemos decidir quando um objeto está ou não no conjunto.

Um conjunto é uma coleção bem definida de objetos, chamados elementos.

Exemplos:

- O conjunto de números naturais que são pares;
- O conjunto dos meses do ano que têm exatamente 30 dias;
- O conjunto dos meses do ano que têm pelo menos 30 dias.

Descrição de um conjunto:

Representação explícita

- Enumeração dos elementos do conjunto.

Exemplo: $B = \{ m, t, c, v \}$ $\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \dots \}$

Representação implícita

- Indicação da propriedade que caracteriza os elementos.

Exemplo:

C = conjunto das pessoas que têm mais de 1,75 metros de altura

Representação implícita:

C = conjunto das pessoas de altura maior que 1,75 metros.

ou

C está constituído por elementos (pessoas) x tal que a altura de x é maior que 1,75 metros.

- Levando a idéia da notação matemática:

C = { x | altura de x > 1,75 metros }

Formalização:

- C está constituído por elementos (pessoas) x tal que a altura de x é maior que 1,75 metros.

$$C = \{\, x \mid \text{altura de } x > 1{,}75 \text{ metros} \,\}$$

- Propriedade que caracteriza os elementos de C:

$P(x)$: a altura de x é maior que 1,75 metros.

$$C = \{\, x \mid P(x) \,\}$$

C está constituído pelos elementos x tal que verifica $P(x)$

Outro exemplo:

D = conjunto de números naturais maiores ou iguais a 5.

Representação explícita:

$$D = \{\, 5, 6, 7, \ldots \}$$

Representação implícita:

$$D = \{\, x \mid \underbrace{x \in \mathbb{N} \text{ e } x \geq 5}_{P(x)} \,\}$$

Notação de conjuntos conhecidos

$\mathbb{N}$ = conjunto dos números naturais

$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

$\mathbb{Z}$ = conjunto dos números inteiros

$\mathbb{Z} = \{... -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

$\mathbb{Q}$ = conjunto dos números racionais

$\mathbb{Q} = \{ x \mid x = p/q \ , \ p, q \in \mathbb{Z} \ , q \neq 0 \}$

$\mathbb{R}$ = conjunto dos números reais

Conjunto especial:

- O conjunto vazio, $\emptyset$, é o conjunto que não tem elementos.

- Pode-se falar da representação de $\emptyset$?

Exemplos:

$$\emptyset = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \ , \ x > 5 \ \text{e} \ x < 0 \}$$

$$\emptyset = \{ x \mid x \in \mathbb{Z} \ , \ 2x - 1 = 0 \}$$

Relações entre conjuntos:

Definição de igualdade

- Os conjuntos A e B são iguais quando têm os mesmos elementos.
- Notação: **A = B**

Exemplo:

Sejam $A = \{ 1, 3, a \}$ $C = \{ 1, 3, 1, a \}$

$B = \{ 3, a, 1 \}$ $D = \{ 2, 3, a \}$

Os conjuntos A, B e C são iguais, $\mathbf{A = B = C}$

A é diferente de D, $\mathbf{A \neq D}$

Definição de inclusão

- Um conjunto A está contido em um conjunto B se todo elemento de A é elemento de B.
- Notação: $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$

Exemplo 1:

$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, \ldots \}$

$P = \{ 2, 4, 6, 8, \ldots \}$

$S = \{ 0, 1 \}$

P está contido em $\mathbb{N}$, $P \subseteq \mathbb{N}$

S não está contido em $\mathbb{N}$, $S \not\subseteq \mathbb{N}$

Exemplo 2:

$$A = \{\,1, 3, a\,\}$$

$$B = \{\,3, a, 1\,\}$$

$$A \subseteq B \quad \text{e} \quad B \subseteq A$$

Conclusão: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A$

(é equivalente)

Observação:

$$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$$

- A está contido em B

- A é um subconjunto de B

- B contém A ($B \supseteq A$)

Definição de inclusão estrita:

- $A \subseteq B$ e $A \neq B$
- Notação: $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ (A <u>está contido estritamente</u> em B)

Exemplo 1:

$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, \ldots \}$

$P = \{ 2, 4, 6, 8, \ldots \}$

$P \subseteq \mathbb{N}$, mas $\underbrace{1 \in \mathbb{N} \text{ e } 1 \notin P}_{N \neq P}$

Conclusão: $P \subset \mathbb{N}$

Observação:

- Para todo conjunto: $\varnothing \subseteq A$
- Para todo conjunto $A \neq \varnothing$: $\varnothing \subset A$

Conjunto de partes de um conjunto:

Considere o conjunto A.

- O conjunto das partes de A, $P(A)$, é o conjunto formado por todos os subconjuntos de A.

Exemplo:

Seja $A = \{ 1, 2, 3 \}$

<u>então</u>

$P(A) = \{\varnothing, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 3 \}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$

Observação:

- Os <u>elementos</u> de P(A) são <u>conjuntos</u>:

Exemplo:

$A = \{ 1, 2, 3 \}$

$P(A) = \{\varnothing, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 3 \}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$

- $\{ 1 \} \in P(A)$ pois $\{ 1 \} \subseteq \{ 1, 2, 3 \}$
- $1 \notin P(A)$
- $\{ \{ 1 \}, \{ 1, 2, 3 \} \} \subseteq P(A)$
- $\{ \{ 1 \} \} \subseteq P(A)$
- $\varnothing \in P(A)$

Resumo:

Conceitos	Notação
- Conjunto	A, B, ...
- Elemento	a, b, x, ...
- Relação de pertinência	$x \in A$, ($x \notin A$)
- Relações entre conjuntos:	
Igualdade	$A = B$, ($A \neq B$)
Inclusão	$A \subseteq B$, ($A \not\subseteq B$)
Inclusão estrita	$A \subset B$, ($A \not\subset B$)
Conjuntos especiais	$\varnothing$, P(A)

Propriedade: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ e $B \subseteq A$

cederj

Aula 2 : Diagramas de Venn e operações

Conteúdo:

- Conjunto universo
- Diagramas de Venn
- Operações e propriedades
- Identidades básicas

Introdução

Exemplos:

$$D = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x \geq 5 \} = \{ 5, 6, 7, \ldots \}$$

$$A = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x^2 = 36 \} = \{ 6 \}$$

- Outra notação:

$$D = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \geq 5 \}$$

$$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 36 \}$$

Conjunto universor:

Definição

O conjunto universo, U, é aquele que contém todos os conjuntos que estão sendo considerados em um dado contexto.

Notação:

$$\mathbf{A} = \{\, \underbrace{x \in \mathbf{U}} \mid \mathbf{P}(x) \,\}$$

o conjunto A

está constituído

pelos elementos x pertencentes ao conjunto U (universo)

tal que

x verifica P(x)

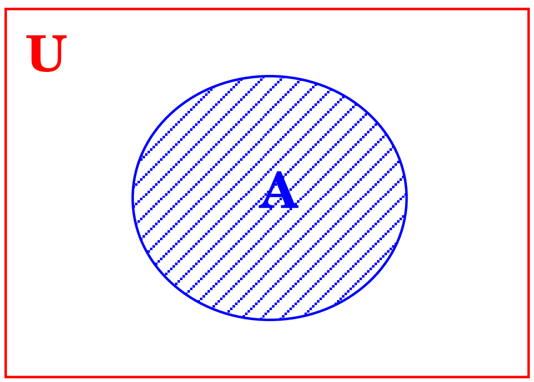
Diagramas de Venn:

- Característica: representação visual de conjuntos, suas operações e relações.

- Referência Histórica: matemático inglês John Venn (Século XIX).

Representação visual

- O conjunto universo U é representado por um retângulo e os subconjuntos próprios por regiões circulares dentro do retângulo.



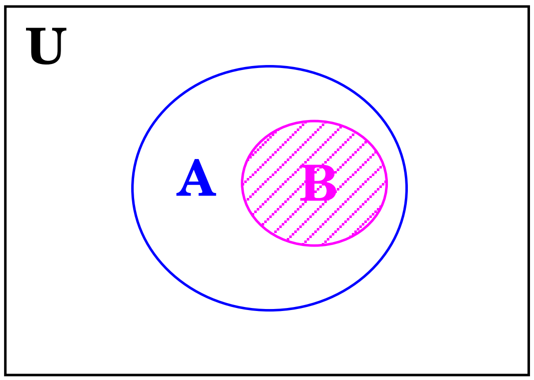
$$\mathbf{A} \subset \mathbf{U}$$

Exemplo:

$\mathbf{U} = \mathbb{N}$

$A = \{\, x \in \mathbb{N} \mid 10 \leq x \leq 100 \,\}$ $\quad (x \geq 10 \text{ e } x \leq 100)$

$B = \{\, x \in \mathbb{N} \mid 15 \leq x \leq 50 \,\}$



$B \subset A \subset U$

Operações e propriedades:

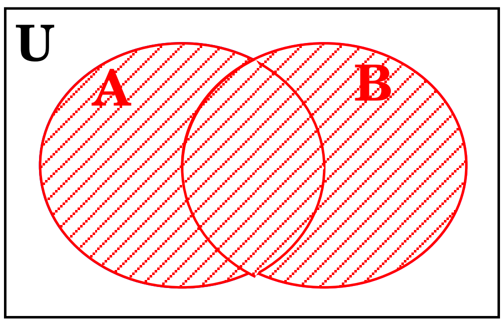
Vamos definir as operações:

- União
- Interseção
- Diferença
- Complemento

Definição de união:

Sejam A e B subconjuntos de U.

- A união de A e B que denotamos por $A \cup B$ é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A ou que pertencem a B.



$$\mathbf{A \cup B = \{ \boldsymbol{x} \in U \mid \boldsymbol{x} \in A \ \text{ou} \ \boldsymbol{x} \in B \}}$$

União Voltar

$$A \cup B = \{\, x \in U \mid x \in A \text{ ou } x \in B \,\}$$

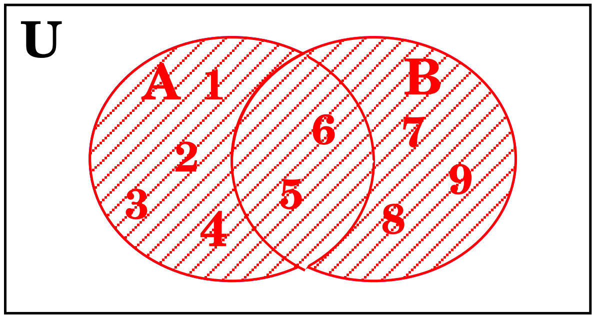
Exemplo 1:

$$A = \{\, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \,\}$$

$$B = \{\, 5, 6, 7, 8, 9 \,\}$$

$$\mathbf{A \cup B = \{\, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \,\}}$$

União Voltar



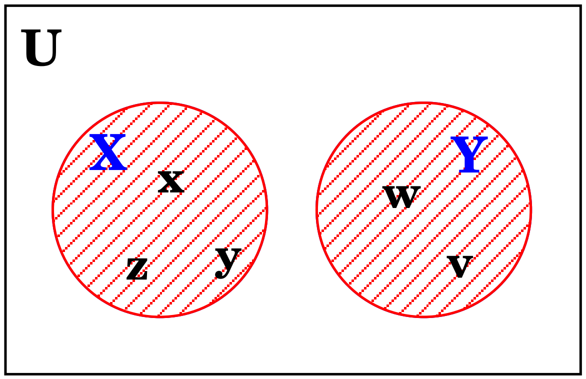
Propriedade:

$$A \subseteq A \cup B \quad \text{e} \quad B \subseteq A \cup B$$

Exemplo 2:

$X = \{\ x, y, z\ \}$

$Y = \{\ w, v\ \}$



$X \cup Y = \{\ x, y, z, w, v\ \}$

União Voltar

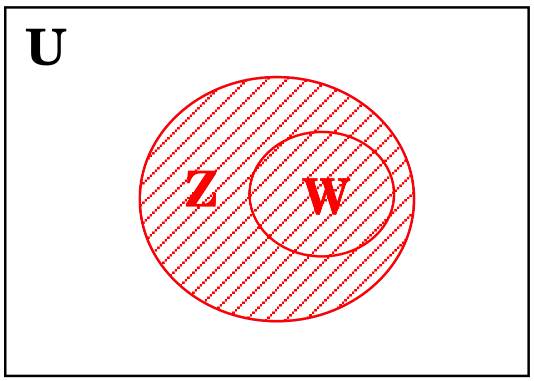
Exemplo 3:

U = conjunto das pessoas

$Z = \{ x \in U \mid \text{altura de } x \geq 1{,}75 \}$

$W = \{ x \in U \mid \text{altura de } x \geq 1{,}90 \}$

$(W \subseteq Z)$



$Z \cup W = Z$

União Voltar

Propriedade:

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq B \underset{\text{então}}{\Rightarrow} A \cup B = B \\ \qquad\qquad \text{e} \\ A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B \end{array}\right\} \quad A \subseteq B \underset{\substack{\text{se e somente se} \\ \text{(equivalente)}}}{\Leftrightarrow} A \cup B = B$$

Observação:

Seja $A \subseteq U$, temos:

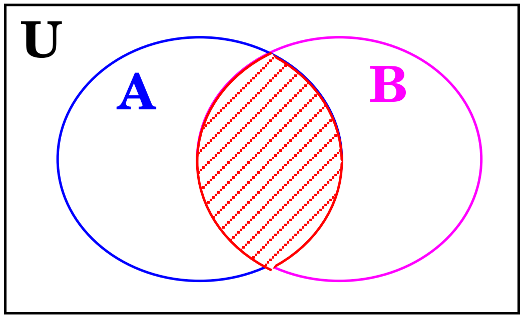
$$A \cup A = A$$

$$A \cup \varnothing = A$$

Definição de interseção:

Sejam A e B subconjuntos de U.

- A interseção de A e B que denotamos por $A \cap B$ é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem ao conjunto A e ao conjunto B.



$$\mathbf{A \cap B = \{ \boldsymbol{x} \in U \mid \boldsymbol{x} \in A \ \ e \ \ \boldsymbol{x} \in B \}}$$

$\cap$ Voltar

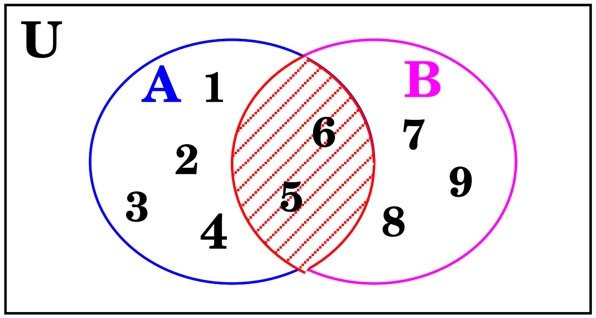
$$A \cap B = \{ x \in U \mid x \in A \text{ e } x \in B \}$$

Exemplo 1:

$$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

$$B = \{ 5, 6, 7, 8, 9 \}$$

∩ Voltar



$$A \cap B = \{ 5, 6 \}$$

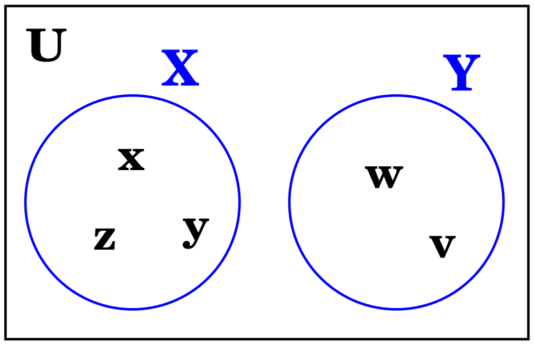
Propriedade:

$$A \cap B \subseteq A \quad \text{e} \quad A \cap B \subseteq B$$

Exemplo 2:

$X = \{ x, y, z \}$

$Y = \{ w, v \}$



$X \cap Y = \varnothing$

$\cap$ Voltar

- Quando $X \cap Y = \varnothing$ os conjuntos X e Y são ditos disjuntos.

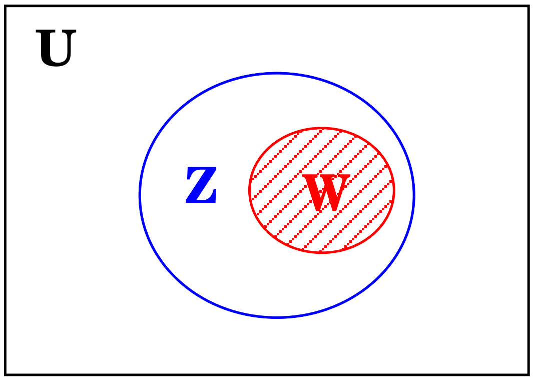
Exemplo 3:

U = conjunto das pessoas

$Z = \{ x \in U \mid \text{altura de } x \geq 1{,}75 \}$

$W = \{ x \in U \mid \text{altura de } x \geq 1{,}90 \}$

$(W \subseteq Z)$



$Z \cap W = W$

$\cap$ Voltar

Propriedade:

$$A \subseteq B \iff A \cap B = A$$

Observação:

Seja $A \subseteq U$, temos:

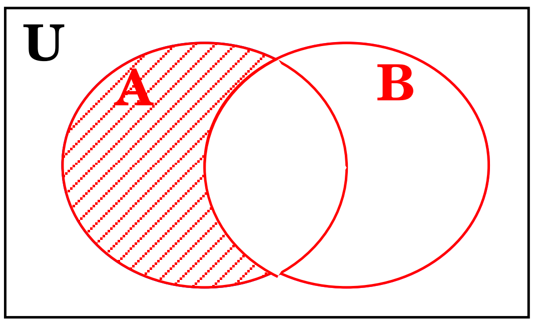
$$A \cap A = A$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

Definição de diferença:

Sejam A e B subconjuntos de U.

A diferença entre A e B que denotamos por $A - B$ é o conjunto formado por todos os elementos que estão em A mas não estão em B.



$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \{\, x \in \mathbf{U} \mid x \in \mathbf{A} \ \text{e} \ x \notin \mathbf{B} \,\}$$

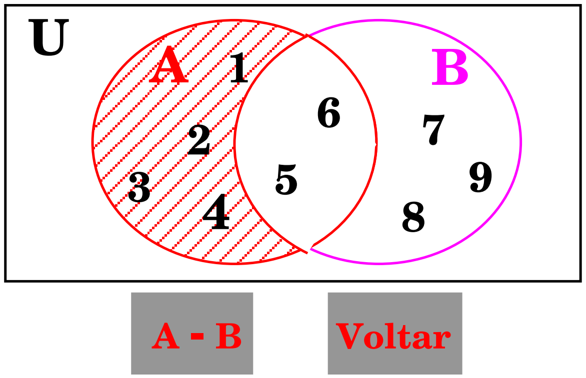
Diferença Voltar

$$A - B = \{\, x \in U \mid x \in A \text{ e } x \notin B \,\}$$

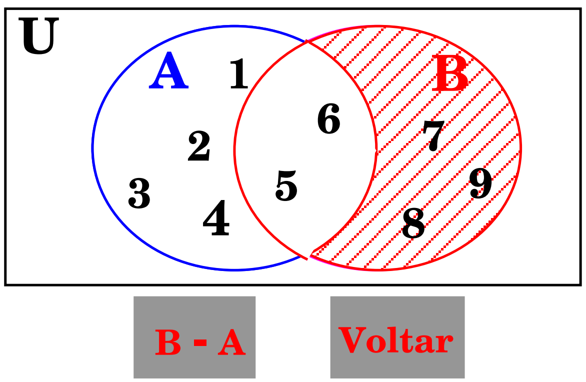
$$B - A = \{\, x \in U \mid x \in B \text{ e } x \notin A \,\}$$

Exemplo 1:

$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ $\quad$ $B = \{ 5, 6, 7, 8, 9 \}$



$A - B = \{ 1, 2, 3, 4 \}$



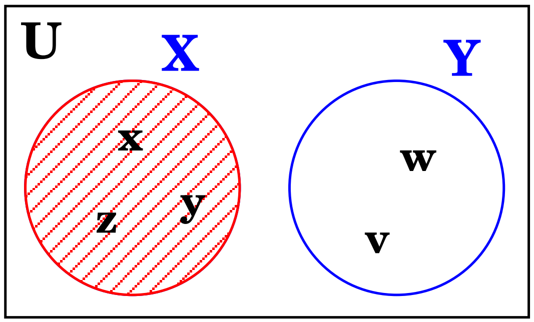
$B - A = \{ 7, 8, 9 \}$

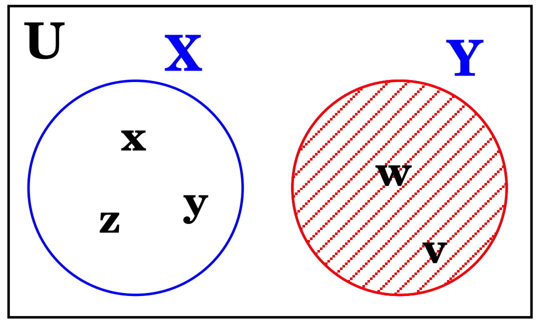
Propriedade:

$$A - B \subseteq A \quad \text{e} \quad B - A \subseteq B$$

Exemplo 2:

$X = \{ x, y, z \}$ $Y = \{ w, v \}$





$$\mathbf{X - Y = X} \qquad \mathbf{Y - X = Y}$$

Diferença Voltar

Exemplo 3:

U = conjunto das pessoas

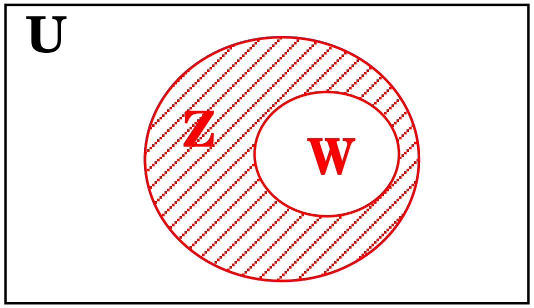
Z = { x ∈ U | altura de x ≥ 1,75 }

W = { x ∈ U | altura de x ≥ 1,90 }

Z − W = { *x* ∈ U | 1,75 m ≤ altura de *x* < 1,90 m }

Z - W

Voltar



Faça W − Z

Resposta

W − Z = ∅

Propriedade:

$$A \subseteq B \iff A - B = \varnothing$$

Observação:

Seja $A \subseteq U$, temos:

$$A - A = \varnothing$$

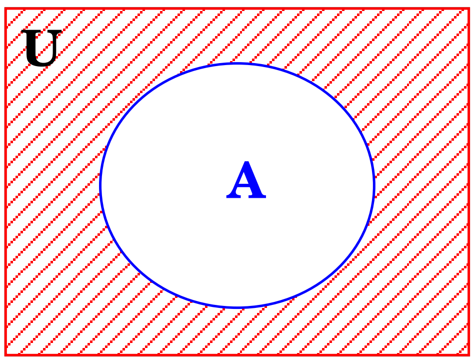
$$A - \varnothing = A$$

Definição de complemento:

Sejam o conjunto universo U e o conjunto $A \subseteq U$.

- O complemento de A que denotamos por $\bar{A}$ é o conjunto formado por todos os elementos de U que não estão em A.

  Isto é, $\bar{A} = U - A$



$$\bar{A} = \{ x \in U \mid x \notin A \}$$

$\bar{A}$ Voltar

Exemplos:

1. $U = \mathbb{N}$ (conjunto dos números naturais)

   $A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \leq 50 \}$

   $\bar{A} = \mathbb{N} - A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x > 50 \}$

2. $U = \mathbb{Z}$

   $A = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x > 2 \} = \{ 3, 4, 5, \ldots \}$

   $\bar{A} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 2 \} = \{ 2, 1, 0, -1, -2, \ldots \}$

3. $U = \mathbb{N}$

   $A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x > 2 \} = \{ 3, 4, 5, \ldots \}$

   $\bar{A} = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2 \} = \{ 1, 2 \}$

Observações:

$$A - B = A \cap \bar{B}$$

$$B - A = B \cap \bar{A}$$

$$A \cup \bar{A} = U$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$\bar{U} = \emptyset \quad (\bar{U} = U - U)$$

$$\bar{\emptyset} = U \quad (\bar{\emptyset} = U - \emptyset)$$

Identidades básicas:

Comutatividade

1. $A \cup B = B \cup A$

2. $A \cap B = B \cap A$

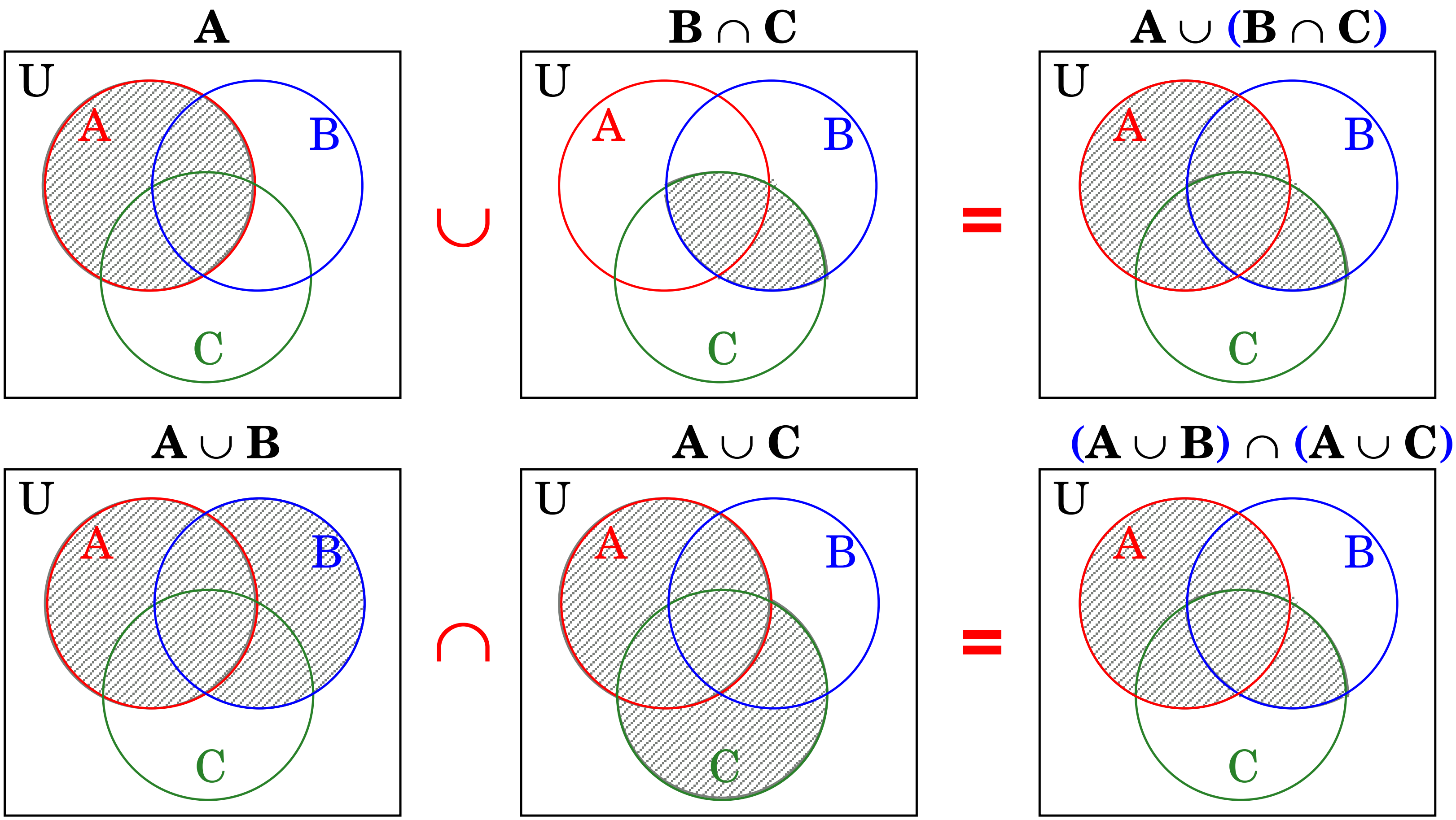
Associatividade

3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$

4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

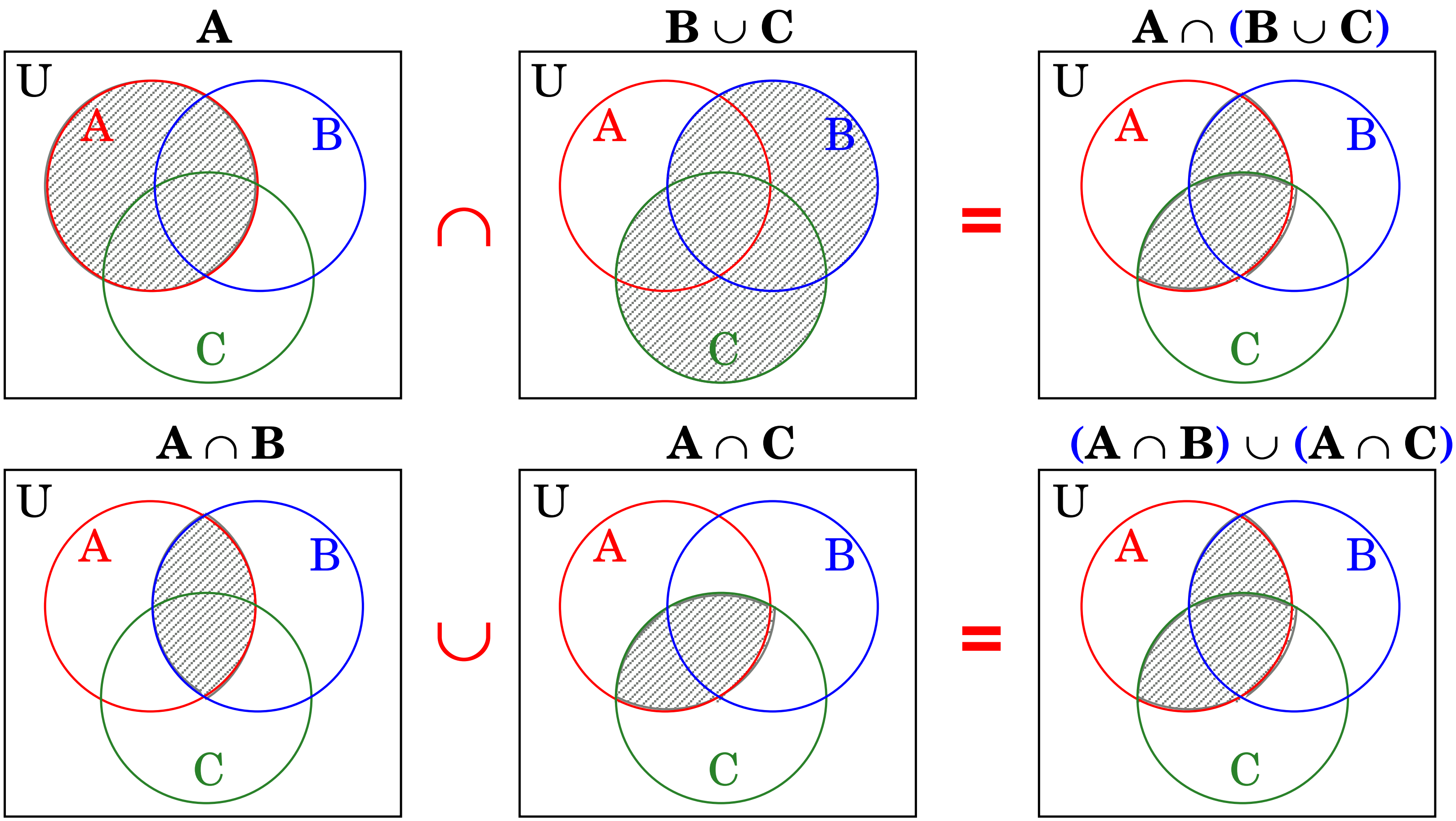
Distributividade

5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



Distributividade

6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$



Leis de Morgan

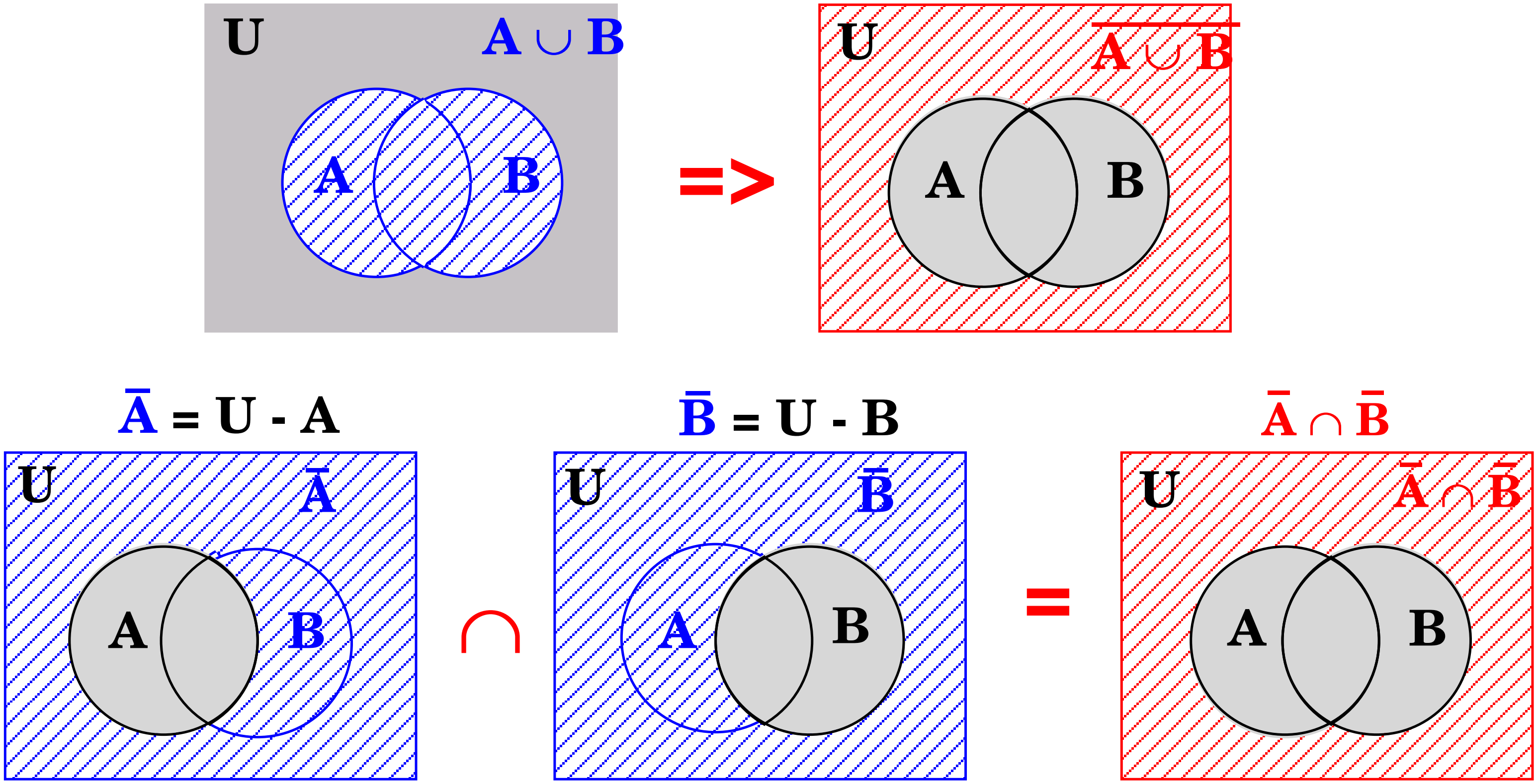
7. $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$\overline{(A \cup B)} = U - (A \cup B)$

$\bar{A} = U - A$

$\bar{B} = U - B$

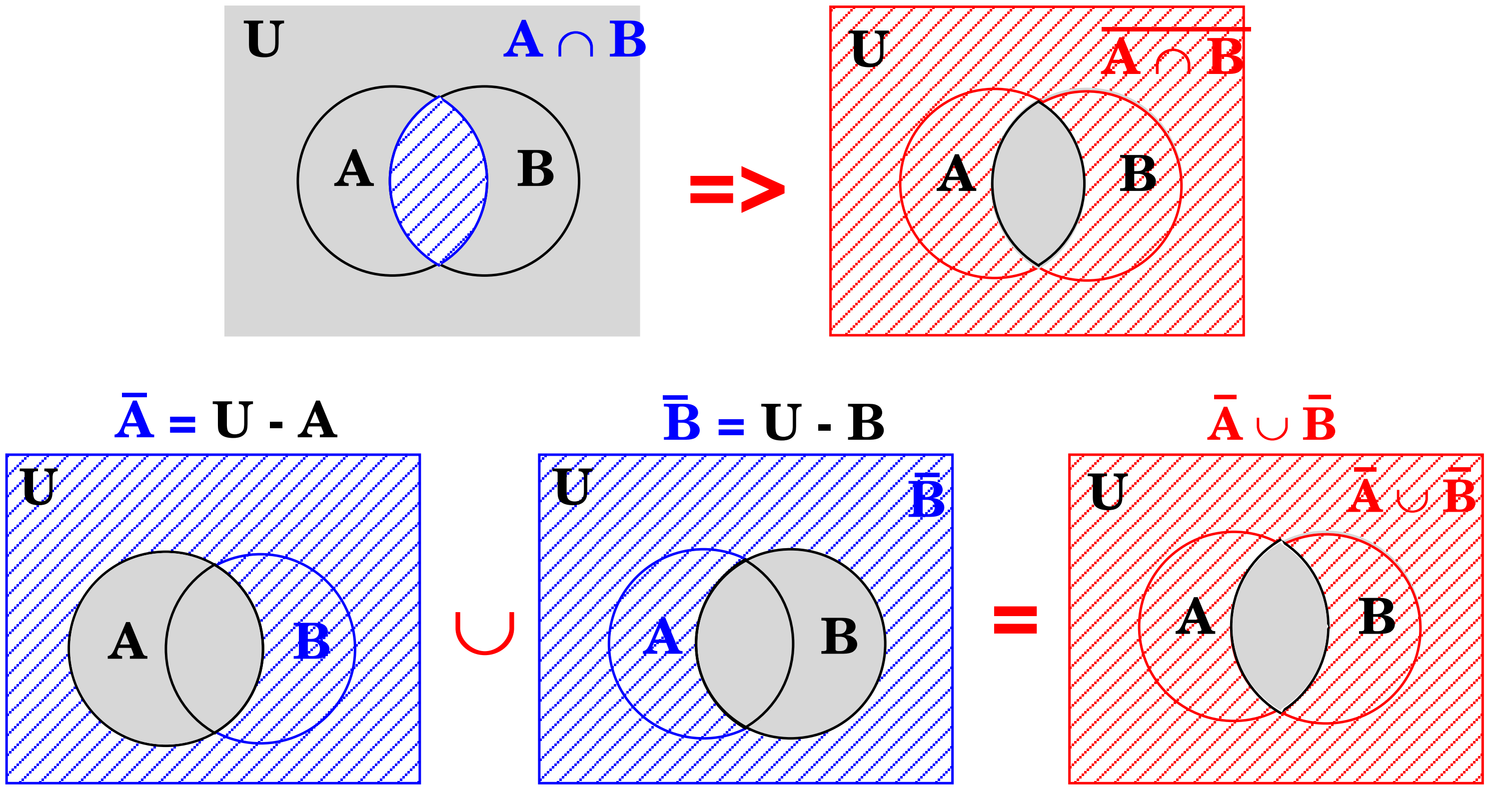
$\bar{A} \cap \bar{B}$



Leis de Morgan

8. $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$\overline{(A \cap B)} = U - (A \cap B)$



Prova formal da identidade 5:

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ou seja,

(1) $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$

e

(2) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$

- Prova de (1) :

Dado $x \in A \cup (B \cap C)$, mostraremos que

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C):$$

$$\boldsymbol{x} \in \mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \mathbf{A} \ \textbf{ou} \ \boldsymbol{x} \in (\mathbf{B} \cap \mathbf{C})$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{x} \in \mathbf{A} \ \textbf{ou} \ (\boldsymbol{x} \in \mathbf{B} \ \textbf{e} \ \boldsymbol{x} \in \mathbf{C})$$

$$\Downarrow$$

$$(\boldsymbol{x} \in \mathbf{A} \ \textbf{ou} \ \boldsymbol{x} \in \mathbf{B}) \ \textbf{e} \ (\boldsymbol{x} \in \mathbf{A} \ \textbf{ou} \ \boldsymbol{x} \in \mathbf{C})$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{x} \in (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \ \textbf{e} \ \boldsymbol{x} \in (\mathbf{A} \cup \mathbf{C})$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{x} \in (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap (\mathbf{A} \cup \mathbf{C})$$

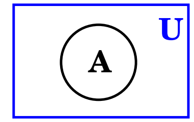
- Prova de (2):

Faça você a prova de 2.

Resumo:

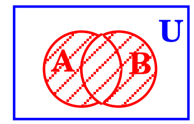
Conceitos — **Notação** — **Diagramas de Venn**

- Conjunto universso — U

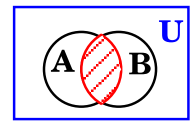


- Operações com conjuntos:

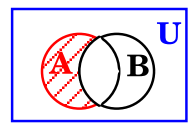
União — $A \cup B$

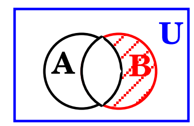


Interseção — $A \cap B$

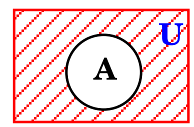


Diferença — $\begin{cases} A - B \\ B - A \end{cases}$

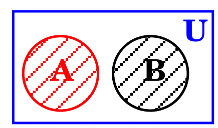




Complemento — $\bar{A}$



- Conjuntos disjuntos — $(A \cap B = \varnothing)$



Resumo:

Propriedades

- $A \subseteq A \cup B\,,\quad B \subseteq A \cup B$
- $A \cap B \subseteq A\,,\quad A \cap B \subseteq B$
- $A - B \subseteq A\,,\quad B - A \subseteq B$

- $A \subseteq B \iff A \cup B = B$
- $A \subseteq B \iff A \cap B = A$
- $A \subseteq B \iff A - B = \varnothing$

- $A \cap B = \varnothing \iff A - B = A$
- $A \cap B = \varnothing \iff B - A = B$

Resumo:

Identidades Básicas:

- Comutatividade: $A \cup B = B \cup A$

  $A \cap B = B \cap A$

- Associatividade: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$

  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

- Distributividade: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- Leis de Morgan: $(\overline{A \cup B}) = \bar{A} \cap \bar{B}$

  $(\overline{A \cap B}) = \bar{A} \cup \bar{B}$

Resumo:

Observações:

- $A \cup A = A$
- $A \cup \varnothing = A$
- $A \cup \bar{A} = U$
- $\bar{U} = \varnothing$
- $A - \varnothing = A$
- $A \cap A = A$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cap \bar{A} = \varnothing$
- $\bar{\varnothing} = U$
- $A - B = A \cap \bar{B}$, $B - A = B \cap \bar{A}$

Exercícios

1. Sejam $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $A = \{0, 4\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$, $C = \{1, 4\}$, $D = \{0, 1\}$.

Determine os seguintes conjuntos:

a. $A \cup B$

b. $B \cap C$

c. $A \cap \overline{B}$

d. $A \cup (B \cap C)$

e. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

f. $(\overline{A \cap B}) \cup (\overline{A \cap C})$

g. $A \cup \overline{B}$

h. $A - B$

i. $B - \overline{A}$

j. $A \cup (B \cap C \cap D)$

2. Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto universo U.

Represente por meio de diagramas de Venn as seguintes situações.

(i) $A \subset B \subset C$

(ii) $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$

(iii) $A \subseteq B \cup C$

(iv) $A \subseteq \overline{B}$

(v) $A \subseteq B - C$

3. Verifique, usando os diagramas de Venn as seguintes igualdades:

(i) $(A - B) \cup B = A \cup B$

(ii) $(A - B) \cap B = \varnothing$

(iii) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

(iv) $A - B = A \cap \overline{B}$

(v) $(\overline{\overline{A}}) = A$

(vi) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

4. Mostre que

$$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \quad \text{e} \quad \mathbf{A} \subseteq \mathbf{C} \implies \mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \cup \mathbf{C}$$

5. Mostre que

$$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \iff \bar{\mathbf{B}} \subseteq \bar{\mathbf{A}}$$

6. Dados os conjuntos $C = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de } 2 \}$ **,**

$D = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de } 3 \}$ **,**

$E = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de } 6 \}$ **,**

verifique que $C \cap D = E$**.**

7. **Considere $A = \{ x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x^2 \leq 300 \}$,**

$B = \{ x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq 3x - 2 \leq 30 \}$. Calcule:

(i) $A \cup B$ **(ii)** $A \cap B$

(iii) $A - B$ **(iv)** $B - A$

(v) $\bar{A} \cap \bar{B}$ **(vi)** $\bar{A} \cup \bar{B}$

8. **Dado $C = \{ 2, -1, 5 \}$, considere o conjunto universo sendo o conjunto de partes de C, $U = P(C)$. Calcule:**

(i) $\bar{A}$ **(ii)** $A \cap B$

para $A = \{ \{2, -1\}, \{2\} \}$, $B = \{ \{5\}, \{2, -1, 5\}, \{-1, 2\} \}$.

9. **Use a propriedade distributiva da interseção em relação a união de conjuntos para provar que $(A \cap D) \cup \bar{D} = A \cup \bar{D}$. Verifique a igualdade usando o diagrama de Venn.**

10. **Prove que $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.**

Dica: a igualdade $A - B = A \cap \bar{B}$ (vista no exercício 2 (iv)), uma propriedade distributiva de conjuntos e uma das leis de Morgan.

11. Dados os seguintes conjuntos:

$\mathbf{A} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq 7 \}$, $\mathbf{B} = \{ x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 7 \}$

Verifique que:

(i) $\mathbf{A} = \mathbf{B}$

(ii) $\bar{\mathbf{A}} \neq \bar{\mathbf{B}}$

Aula 3 : Número de elementos de um conjunto

Conteúdo:

- Conceitos iniciais
- Introdução ao princípio aditivo
- Introdução ao princípio da inclusão e exclusão

Conceitos iniciais:

- Faz sentido saber quantos elementos tem um conjunto?

- É sempre possível contar os elementos de um conjunto?

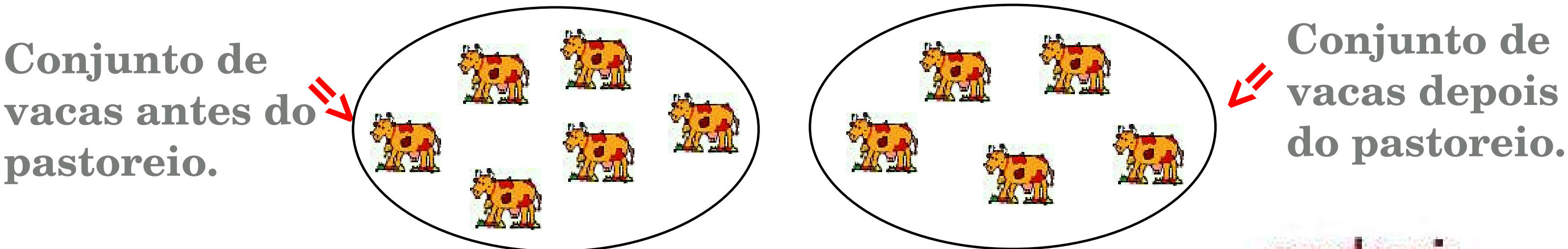
- Tem uma fórmula para calcular o número de elementos de $A \cup B$?

Questão 1:

Faz sentido saber quantos elementos tem um conjunto ?

Exemplo 1:

O vaqueiro João cuida das vacas da fazenda "Três Irmãos". Ele leva as vacas para pastar nos campos fora da fazenda. Ele não pode perder nenhuma vaca. Então o que ele faz ? Conta as vacas que formam o gado antes e depois do pastoreio.



Questão 1:

Faz sentido saber quantos elementos tem um conjunto ?

Exemplo 2:

Você deu dez notas de R$ 1,00 para um amigo fazer compras. No retorno, você contou o dinheiro que sobrou (3 notas de R$ 1,00).

Resposta: SIM

Notação:

$n(A)$: é o número de elementos do conjunto A (ou cardinalidade de A).

Exemplo 1:

$$A = \{ x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3 \} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3 \}$$
$$= \{ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \}$$

$$n(A) = 7$$

Questão 2:

É sempre possível contar os elementos de um conjunto ?

Exemplo 1:

$$A = \{ x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3 \} = \{ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \}$$

- Como contamos os elementos de A ?

=> Enumerando seus elementos:

1 é o número -3
2 é o número -2
⋮ ⋮
7 é o número 3

=> Acabamos a enumeração em 7

Questão 2:

É sempre possível contar os elementos de um conjunto ?

Exemplo 2:

$$B = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par} \}$$

$$= \{ 2, 4, 6, \ldots \}$$

- Podemos ir enumerando seus elementos mas nunca acabaremos a enumeração.

Resposta: NEM sempre

Definição:

- Um conjunto é finito se é possível contar o número de seus elementos.
- Um conjunto é infinito se não é possível contar o número de seus elementos.

Exemplo 1:

$A = \{ x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3 \}$ é finito

$B = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par} \}$ é infinito

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$ são conjuntos infinitos.

É sempre possível contar os elementos de um conjunto finito. Mas, será que sempre <u>conseguimos</u> contar ?

Exemplo:

C = { x | x é uma pessoa que nasceu antes de 2000 }

<u>então</u>:

- C está bem definido
- C é finito
- n(C) é um número que não conhecemos

<u>Conclusão:</u> Embora tenhamos um conjunto finito, pode ser impraticável contá-lo.

Assumimos, nesta aula:

- A é um conjunto finito;
- É possível determinar o número de elementos de A, $n(A)$.

Questão 3:

Tem uma fórmula para calcular o número de elementos de $A \cup B$?

Introdução ao princípio aditivo:

- Problema inicial:

  Dados os conjuntos A e B,

  calcular $n(A \cup B)$

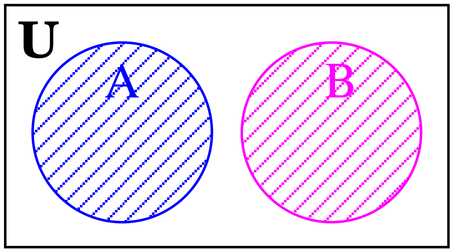
- Objetivo:

  - Encontrar uma fórmula para calcular $n(A \cup B)$.

- Princípio aditivo (para dois conjuntos)

  Se A e B são disjuntos, $A \cap B = \varnothing$,

  então $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$



Exemplo 1:

U = { x | x é aluno do Instituto de Línguas IL }

A = { $x \in$ U | x está no 4º ano do curso de inglês }

B = { $x \in$ U | x está no 1º ano do curso de inglês }

Problema:

Dados $n(\mathrm{U}) = 300$, $n(\mathrm{A}) = 150$, $n(\mathrm{B}) = 40$

Determinar o número de alunos do IL que está no 1º ou no 4º ano do curso de inglês.

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing \Rightarrow n(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = n(\mathrm{A}) + n(\mathrm{B}) = 190$$

Problema:

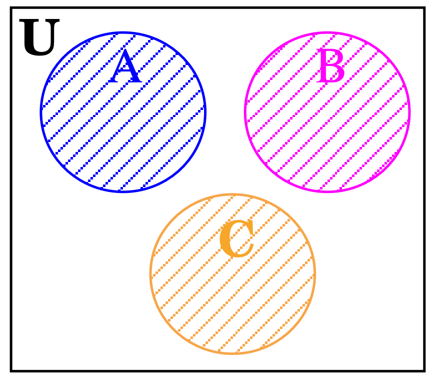
$$\begin{cases} \underline{\text{Dados}} \text{ os conjuntos A, B e C,} \\ \underline{\text{calcular}} \;\; n(A \cup B \cup C) \end{cases}$$

Princípio aditivo (para três conjuntos)

<u>Se</u> A, B e C são disjuntos dois a dois:

$$A \cap B = \varnothing, \quad A \cap C = \varnothing, \quad B \cap C = \varnothing$$

<u>então</u> $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$



Prova:

$$n(A \cup B \cup C) = n((A \cup B) \cup C) \overset{(A \cup B) \cap C = \varnothing}{=} n(A \cup B) + n(C)$$

$$\overset{A \cap B = \varnothing}{=} n(A) + n(B) + n(C)$$

Princípio aditivo (para quatro conjuntos)

Se A, B, C e D são conjuntos disjuntos dois a dois

$$(A \cap B = A \cap C = A \cap D = B \cap C = B \cap D = C \cap D = \varnothing)$$

então $n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D)$

Tente fazer a prova aplicando o raciocínio anterior.

Prova: $n(A \cup B \cup C \cup D) = n((A \cup B) \cup C \cup D)$

como $A \cap B = A \cap C = A \cap D = B \cap C = B \cap D = C \cap D = \varnothing$

Prova

Voltar

resulta $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = \varnothing$

$(A \cup B) \cap D = (A \cap D) \cup (B \cap D) = \varnothing$

$C \cap D = \varnothing$

isto é, $(A \cup B)$**, C e D são disjuntos dois a dois.**

Logo, estamos nas condições do problema anterior, portanto temos:

$$n((A \cup B) \cup C \cup D) = n(A \cup B) + n(C) + n(D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D)$$

pois, $A \cap B = \varnothing$

Quer dizer, provamos que

$$n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D)$$

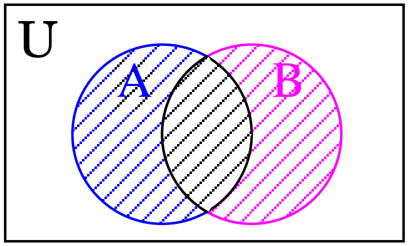
Introdução ao princípio da inclusão e exclusão:

- Problema inicial:

  $\begin{cases} \text{Dados os conjuntos A e B,} \\ \text{calcular } n(A \cup B) \end{cases}$

  - A e B podem não ser disjuntos

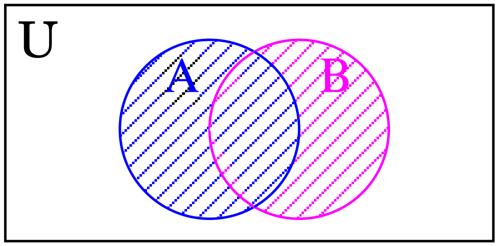
    $$A \cap B \neq \emptyset$$



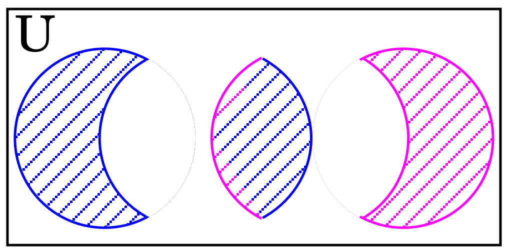
$n(A \cup B) = ?$

- Objetivo:
  - Encontrar uma fórmula para $n(A \cup B)$.
- Estratégia:
  - Reescrever $A \cup B$ como conjuntos disjuntos.

Dados A, B, $A \cap B \neq \emptyset$

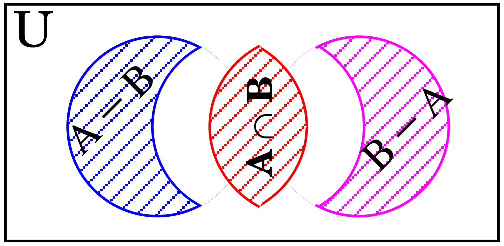


Como reescrever $A \cup B$ como união de conjuntos disjuntos?



Disjuntos **Voltar**

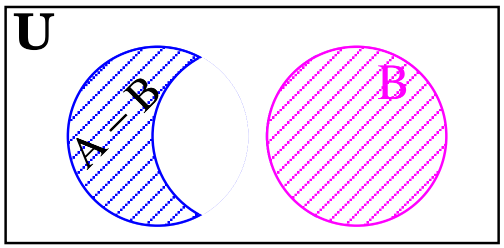
Conjuntos: *Número de elementos / Introdução ao princípio da inclusão e exclusão*



$\mathbf{A - B = A \cap \overline{B}}$

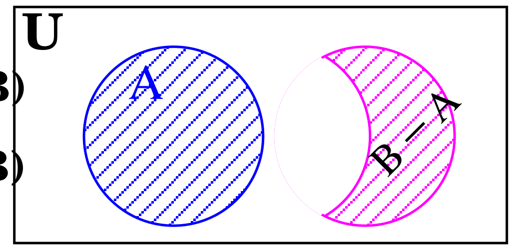
$\mathbf{B - A = B \cap \overline{A}}$

∩ Voltar



$\mathbf{B = (B - A) \cup (A \cap B)}$

$\mathbf{A = (A - B) \cup (A \cap B)}$



União Voltar

União Voltar

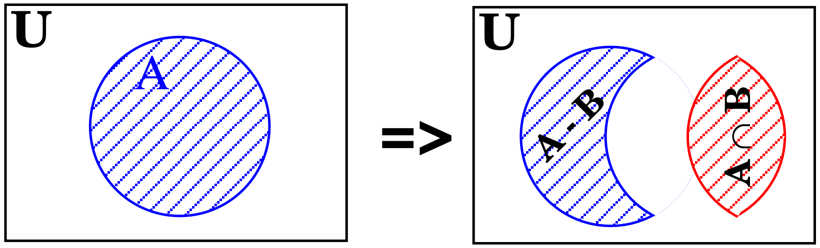
Conclusão: $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$

$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$

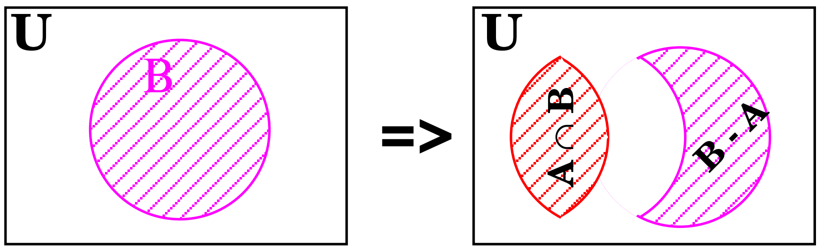
Introdução ao princípio da inclusão e exclusão

$$n(A \cup B) = n(\,(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)\,)$$

$$= n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$



$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$



$$B = (A \cap B) \cup (B - A)$$

$$n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$$

$$n(B) = n(B - A) + n(A \cap B)$$

Resumindo:

- $n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$
- $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B) \Rightarrow n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$
- $n(B) = n(B - A) + n(A \cap B) \Rightarrow n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$

$$n(A \cup B) = [\, n(A) - n(A \cap B)\,] + n(A \cap B) + [\, n(B) - n(A \cap B)\,]$$

$$= n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

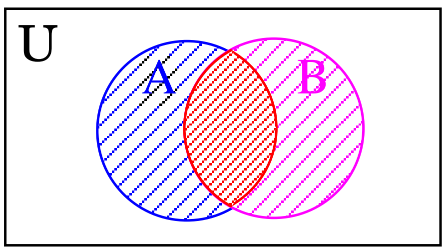
Princípio da inclusão e exclusão (para dois conjuntos)

Dados A e B,

então

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Interpretação visual



∩ Voltar

$n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Observação: estamos contando 2 vezes os elementos da interseção, então devemos subtrair um deles.

Exemplo 2:

U = { x | x é aluno do Instituto de Línguas IL }

A = { $x \in$ U | x está no 4º ano do curso de inglês }

B = { $x \in$ U | x está no 2º ano do curso de francês }

dados: $n(\text{U}) = 300$ $n(\text{A}) = 40$

$n(\text{B}) = 20$ $n(\text{A} \cap \text{B}) = 2$

então o número de alunos do IL que cursam o 4º ano de inglês ou o 2ºano de francês é:

$n(\text{A} \cup \text{B}) = n(\text{A}) + n(\text{B}) - n(\text{A} \cap \text{B}) = 40 + 20 - 2 = 58$

Questão:

Como calcular $n(A \cup B \cup C)$ usando o Princípio da inclusão e exclusão para <u>dois conjuntos</u> ?

$$n(A \cup B \cup C) = n(\underbrace{(A \cup B)} \cup C)$$

$$= n(\underbrace{A \cup B}) + n(C) - n(\underline{(A \cup B) \cap C})$$

$$= [\, n(A) + n(B) - n(A \cap B) \,] + n(C) - n((A \cap C) \cup (B \cap C))$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B)$$

$$- [\, n(A \cap C) + n(B \cap C)) - n(\underbrace{(A \cap C) \cap B \cap C)}_{A \cap B \cap C} \,]$$

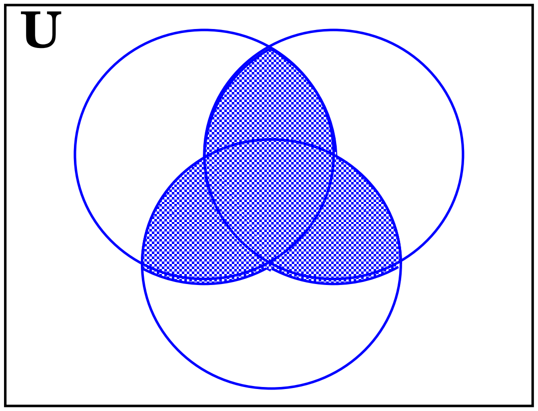
$$= \mathbf{n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)}$$

Princípio da inclusão e exclusão (para três conjuntos)

Dados A, B e C,

então $$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

- Interpretação gráfica:



Exemplo 3:

$U = \{ x \mid x$ é aluno do Instituto de Línguas IL $\}$

$A = \{ x \in U \mid x$ está no 4^{o} ano do curso de inglês $\}$

$B = \{ x \in U \mid x$ está no 2^{o} ano do curso de francês $\}$

$C = \{ x \in U \mid x$ está no 1^{o} ano do curso de italiano $\}$

Exemplo 3 (continuação):

<u>Dados</u>: $n(U) = 300$, $n(A) = 40$, $n(B) = 20$, $n(C) = 30$

$n(A \cap B) = 2$ $n(A \cap C) = 5$

$n(B \cap C) = 3$ $n(A \cap B \cap C) = 1$

<u>então</u> o número de alunos do IL que estão cursando o 4^o ano de inglês <u>ou</u> o 2^o ano de francês <u>ou</u> o 1^o ano de italiano é:

$$n(A \cup B \cup C) =$$

$$= \mathbf{n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)}$$

$$n(A \cup B \cup C) = 40 + 20 + 30 - 2 - 5 - 3 + 1 = 81$$

Prove o princípio da inclusão e exclusão no seguinte caso:

Dados A_1 , A_2 , A_3 e A_4 ,

então $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) =$

$$= \begin{cases} n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) - \\ - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_1 \cap A_4) - n(A_2 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_4) - \\ - n(A_3 \cap A_4) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + n(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - \\ - n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \end{cases}$$

Fórmula Voltar

$$= \sum_{i=1}^{4} n(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{4} n(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i,j,l=1 \\ i<j \\ j<l \\ i<j<l}}^{4} n(A_i \cap A_j \cap A_l) - n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

Prova: $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = n((A_1 \cup A_2) \cup A_3 \cup A_4)$

Prova Voltar

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = n((\underbrace{A_1 \cup A_2}) \cup A_3 \cup A_4)) = n(A_1 \cup A_2) + n(A_3) + n(A_4) -$$

$$- n((A_1 \cup A_2) \cap A_3) - n((A_1 \cup A_2) \cap A_4) - n(A_3 \cup A_4) + n((A_1 \cup A_2) \cap A_3 \cap A_4)$$

$$n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2)$$

$$n((A_1 \cup A_2) \cap A_3) = n((\underbrace{A_1 \cap A_3}) \cup (\underbrace{A_2 \cap A_3})) =$$

$$= n((A_1 \cap A_3) + (A_2 \cap A_3) - n(\underbrace{(A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3)}_{A_1 \cap A_2 \cap A_3})$$

$$n((A_1 \cup A_2) \cap A_4) = n((\underbrace{A_1 \cap A_4}) \cup (\underbrace{A_2 \cap A_4})) =$$

$$= n(A_1 \cap A_4) + n(A_2 \cap A_4) - n(\underbrace{(A_1 \cap A_4) \cap (A_2 \cap A_4)}_{A_1 \cap A_2 \cap A_4})$$

$$n((A_1 \cup A_2) \cap A_3 \cap A_4) = n([(A_1 \cup A_2) \cap A_3] \cap A_4) =$$

$$= n([(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)] \cap A_4) = n[\underline{(A_1 \cap A_3 \cap A_4)} \cup \underline{(A_2 \cap A_3 \cap A_4)}] =$$

$$= n(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + n(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - n(\underbrace{(A_1 \cap A_3 \cap A_4) \cap (A_2 \cap A_3 \cap A_4)}_{A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4})$$

Observação:

A partir de $n(A \cup B)$ podemos obter outras relações.

Exemplo:

Determine a quantidade de números naturais que existe entre 1 e 100 e não são divisíveis por 2 nem por 5.

$C = \{ x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 100 \}$

$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \in C,\ x = 2k,\ k \in \mathbb{N} \} = \{2, 4, 6, \dots, 100\}$

$B = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \in C,\ x = 5k,\ k \in \mathbb{N} \} = \{5, 10, 15, \dots, 100\}$

$\{ x \in \mathbb{N} \mid x \in C,\ x \notin A \text{ e } x \notin B \}$

$$\{ x \in \mathbb{N} \mid x \in C \text{ e } x \notin A \text{ e } x \notin B \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{N} \mid x \in C \text{ e } (x \in \bar{A} \text{ e } x \in \bar{B}) \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{N} \mid x \in C \text{ e } (x \in \bar{A} \cap \bar{B}) \}$$

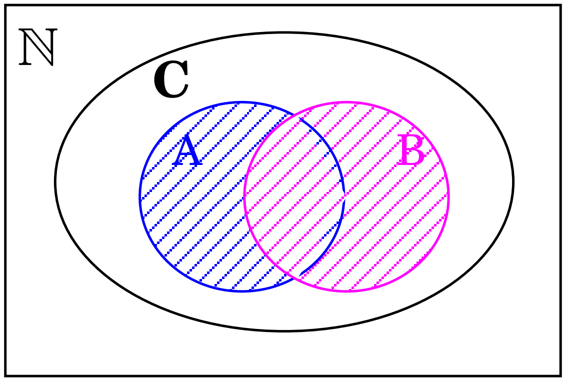
$$= \{ x \in \mathbb{N} \mid x \in C \text{ e } x \in \overline{(A \cup B)} \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{N} \mid x \in C \text{ e } x \notin (A \cup B) \}$$

$$= C - (A \cup B)$$

Lembremos o enunciado do exemplo:

Determine a quantidade de números naturais que existe entre 1 e 100 e não são divisíveis por 2 nem por 5.



Conclusão:

Pede-se $n(\,C - (A \cup B)\,)$

Observe que:

$$(\, C - (A \cup B)\,) \cup (A \cup B) = C$$

e $$(\, C - (A \cup B)\,) \cap (A \cup B) = \varnothing$$

$$\Rightarrow \underbrace{n((C - (A \cup B)) \cup (A \cup B))}_{n(C)} \overset{\text{princípio aditivo}}{=} n(C - (A \cup B)) + n(A \cup B)$$

$$\Rightarrow \quad n(C - (A \cup B)) = n(C) - n(A \cup B)$$

Resumindo:

Devemos calcular $n(C - (A \cup B)) = n(C) - n(A \cup B)$

$C = \{ x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 100 \}$

$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \in C, x = 2k, k \in \mathbb{N} \} = \{2, 4, 6, \ldots, 100\}$

$B = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \in C, x = 5k, k \in \mathbb{N} \} = \{5, 10, 15, \ldots, 100\}$

$n(C) = 100$ $\qquad n(A \cup B) \overset{\text{princípio}}{\underset{\text{inclusão e exclusão}}{=}} n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= 50 + 20 - 10 = 60$

logo, $n(C - (A \cup B)) = 100 - 60 = 40$

Resposta: A quantidade de números naturais que existe entre 1 e 100 e não são divisíveis por 2 nem por 5 é 40.

Resumo:

Conceitos:

- Número de elementos de um conjunto, $n(A)$ - (cardinalidade)
- Conjunto finito
- Conjunto infinito
- Introdução ao princípio aditivo:

(Número de elementos da união de conjuntos disjuntos dois a dois)

- A_1 e A_2 disjuntos => $n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) = \sum_{i=1}^{2} n(A_i)$
- A_1, A_2 e A_3 disjuntos => $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$

$$= n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) = \sum_{i=1}^{3} n(A_i)$$

- A_i disjuntos dois a dois => $n(\bigcup_{i=1}^{4} A_i) = \sum_{i=1}^{4} n(A_i)$

Resumo:

Conceitos:

- Introdução ao princípio da inclusão e exclusão:

(Número de elementos da união de conjuntos não necessariamente disjuntos)

- $n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2) = \sum_{i=1}^{2} n(A_i) - n(A_1 \cap A_2)$

- $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) -$
  $- n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \sum_{i=1}^{3} n(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{3} n(A_i \cap A_2) + n(\bigcap_{i=1}^{3} A_i)$

- $n(\bigcup_{i=1}^{4} A_i) = \sum_{i=1}^{4} n(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{4} n(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i,j,l=1 \\ i<j \\ j<l \\ i<j<l}}^{4} n(A_i \cap A_j \cap A_l) - n(\bigcap_{i=1}^{4} A_i)$

Exercícios

1. Sejam A e B dois subconjuntos de um conjunto universo U tais que $B \subseteq A$. Usando o princípio aditivo prove que $n(A - B) = n(A) - n(B)$.

2. Quantos números inteiros entre 1 e 100 são divisíveis por 3 ou por 7.

Dica: Considere

$$A = \{ x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 100 \text{ e } x = 3k \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\}$$

$$B = \{ x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 100 \text{ e } x = 7k \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\}$$

e use o princípio de inclusão e exclusão.

3. Use os princípios aditivo ou de inclusão e exclusão para determinar, em cada caso, a quantidade de números naturais entre 1 e 60 que verificam:

(i) são divisíveis por 2 e por 3

(ii) são divisíveis por 2 ou por 3

(iii) não são divisíveis nem por 2 nem por 3

(iv) são ímpares divisíveis por 3 ou são divisíveis por 2

(v) são divisíveis por 2 ou por 3 ou por 5

4. Foram consultadas 200 pessoas que estavam pesquisando preços de televisores em lojas de eletrodomésticos. As respostas foram as seguintes:

- 40% perguntaram pela marca A;
- 35% pela marca B;
- 10% pelas marcas A e B;
- 25% somente perguntaram por outras marcas.

Use o princípio de adição ou o princípio da inclusão e exclusão para determinar:

4. (continuação)

(i) quantidade de pessoas que perguntaram pelos preços das televisões de marcas A ou B.

(ii) número de pessoas que perguntaram pela marca A e não pela marca B (lembre-se do exercício 1).

Módulo: Indução matemática

- Princípio da indução matemática
- Indução forte

Objetivo:

- Aprender uma técnica para provar resultados matemáticos.

Importância:

- É uma técnica poderosa e muito útil usada para provar resultados que envolvem os números naturais.

Por exemplo:

Provar que $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2} \quad \forall \; n \in \mathbb{N}$

Aula 4: Princípio da indução matemática

Conteúdo:

- Introdução
- Princípio da indução matemática (PIM)
- Princípio da indução matemática generalizado

Introdução:

Idéia intuitiva:

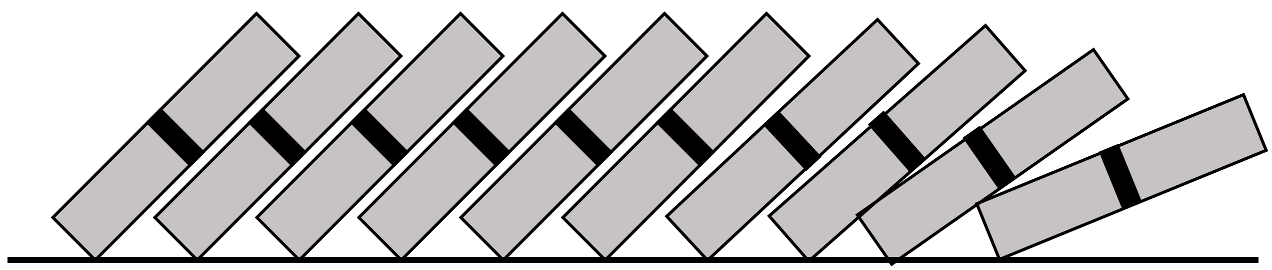
Exemplo 1:

Consideremos uma sequência de dominós alinhados tal que:

Se um cair ele vai derrubar o seguinte

PIM

Voltar



Observação:

Se o primeiro dominó cair então todos os outros cairão.

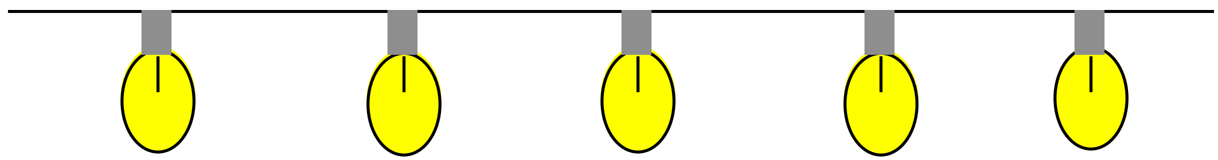
Exemplo 2:

Consideremos lâmpadas elétricas alinhadas e conectadas tal que:

ao acender uma delas acende-se a seguinte

PIM

Voltar



Observação:

Se a primeira lâmpada for acesa então todas as outras estarão acesas.

Princípio da indução matemática:

Formalização:

- Seja P(n) uma afirmação, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Se : (i) P(1) verdadeira e

(ii) P(k) verdadeira => P(k+1) verdadeira, $\forall\ k \in \mathbb{N}$

Então P(n) verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para aplicarmos o PIM precisamos executar os três passos a seguir:

(1) Base da indução:

Mostrar que $P(n)$ verdadeira para $n = 1$

(2) Hipótese de indução:

Assumir que $P(k)$ verdadeira para $k \geq 1$

(3) Passo indutivo:

Mostrar que $P(k + 1)$ verdadeira, assumindo (2).

Exemplo 3:

- Mostre que $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2} \quad \forall \; n \in \mathbb{N}.$

Prova:

$$\text{Seja } P(n): 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(1) Base da indução:

$$P(1): 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \quad \text{verdadeira}$$

(2) Hipótese de indução (HI): Assuma que P(k) é verdadeira, $k \geq 1$:

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

(3) Passo indutivo:

$$P(k) \text{ verdadeira} \Rightarrow \underbrace{P(k+1) \text{ verdadeira}}_{1+2+\ldots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}}$$

Desenvolvendo:

$$\underbrace{1 + 2 + \ldots + k}_{\overset{\|}{(HI)}} + (k+1) =$$

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} =$$

cederj

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} =$$

$$\frac{k^2 + 3k + 2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Logo P(k+1) verdadeira

Então pelo PIM

$$P(n) : 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{verdadeira} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Exemplo 4:

- Mostre que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \quad \forall \ n \in \mathbb{N}$.

Prova:

Seja $P(n) : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

(1) Base da indução:

$P(1) : 1 = 1^2$ verdadeira

(2) Hipótese de indução (HI):

$P(k) : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$ verdadeira

(3) Passo indutivo:

$$P(k) \text{ verdadeira } \Rightarrow \underbrace{P(k+1)}_{1+3+\ldots+[\,2(k+1)-1] = (k+1)^2} \text{ verdadeira}$$

Desenvolvendo:

$$\underbrace{1 + 3 + \ldots + (2k - 1)}_{\substack{\parallel \text{ (HI)} \\ k^2}} + \underbrace{[\,2(k + 1) - 1\,]}_{\substack{\parallel \\ 2k+1}} =$$

$$k^2 + 2k+1 = (k + 1)^2$$

Logo P(k + 1) verdadeira

Então pelo PIM

$P(n) : 1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ verdadeira $\forall \; n \in \mathbb{N}$

Exemplo 5:

- Mostre que 8 divide $3^{2n} - 1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Prova:

Seja $P(n)$: 8 divide $3^{2n} - 1$

ou

$3^{2n} - 1 = 8 \cdot p$ para algum $p \in \mathbb{N}$

(1) Base da indução:

$P(1) : 3^{2\,.\,1} - 1 = 9 - 1 = 8\,.\,1 \quad (p = 1)$ verdadeira

(2) Hipótese de indução:

P(k) verdadeira,

$3^{2k} - 1 = 8\,.\,p$ para algum $p \in \mathbb{N}$

(3) Passo indutivo:

$$P(k) \text{ verdadeira} \Rightarrow \underbrace{P(k+1)}_{3^{2(k+1)} - 1 = 8 \,.\, p \text{ para algum } p \in \mathbb{N}} \text{ verdadeira}$$

<u>Desenvolvendo</u>:

$$3^{2(k+1)} - 1 = 3^{2k} . 3^2 - 1 = 3^{2k}(8+1) - 1 =$$

$$= 3^{2k} . 8 + 3^{2k} - 1 = \underbrace{3^{2k} . 8}_{\| \atop 3^{2k} . 8} + \underbrace{3^{2k} - 1}_{\|\,(HI) \atop 8 \,.\, p}$$

$$3^{2(k+1)} - 1 = 3^{2k} . 8 + 8 . p = \underbrace{8 . (3^{2k} + p)}_{\in \mathbb{N}} \qquad (p = 3^{2k} + p)$$

Logo P(k+1) verdadeira

Então pelo PIM

$P(n)$: 8 divide $3^{2n} - 1$ verdadeira $\forall \; n \in \mathbb{N}$

Princípio da indução matemática generalizado:

Princípio da indução matemática generalizado

Seja P(n) uma afirmação, para cada inteiro positivo n.

Se:

(i') P(n_0) verdadeira e

(ii') P(k) verdadeira => P(k+1) verdadeira, $\forall$ k $\geq n_0$, k $\in \mathbb{N}$

Então P(n) verdadeira $\forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$.

PIM Voltar

cederj

Para aplicarmos o PIM generalizado precisamos executar os três passos a seguir:

(1) Base da indução:

Mostrar que P(n) verdadeira para $n = n_0$

(2) Hipótese de indução:

Assumir que P(k) verdadeira para $k \geq n_0$

(3) Passo indutivo:

Mostrar que P(k + 1) verdadeira, assumindo a hipótese de indução (2)

Exemplo 6:

- Mostre que $n^2 > 3n \quad \forall \; n \geq 4 \, , \; n \in \mathbb{N}$.

Prova:

Seja $P(n)$: $n^2 > 3n \, , \; n \geq 4$

(1) Base da indução:

$P(4) : 16 > 3 \,.\, 4 = 12$ verdadeira

(2) Hipótese de indução:

$P(k) : k^2 > 3k \quad , \quad k \geq 4$ verdadeira

(3) Passo indutivo:

$$P(k) \text{ verdadeira } \Rightarrow \underbrace{P(k+1)}_{k^2+2k+1 = (k+1)^2 > 3(k+1)} \text{ verdadeira}$$

<u>Desenvolvendo</u>:

$$P(k): k^2 > 3k \text{ verdadeira para } k \geq 4$$

$$\underbrace{k^2 + (2k+1)}_{(k+1)^2} > 3k + (2k+1) \overset{(k \geq 4)}{\geq} 3k + 8 + 1 = 3k + 9$$

$$> 3k + 9 = 3(k+3) > 3(k+1)$$

Logo P(k + 1) verdadeira

Então pelo PIM generalizado

$$P(n): n^2 > 3n \text{ verdadeira } \forall\, n \geq 4$$

cederj

- Verifique que:

$P(n) : n^2 > 3n$ não é verdadeira para $n = 1, 2, 3$

$$\left.\begin{array}{l} P(1) : 1^2 > 3 \,.\, 1 \\ P(2) : 2^2 > 3 \,.\, 2 \\ P(3) : 3^2 > 3 \,.\, 3 \end{array}\right\} \text{não são verdadeiras}$$

Resumo:

Princípio PIM generalizado

- Estrutura

- <u>Base de indução</u>: P(n) verdadeira $n = n_0$

- <u>Hipótese de indução</u>: P(k) verdadeira $\forall$ k $\geq n_0$

- <u>Passo indutivo</u>: P(k) verdadeira => P(k + 1) verdadeira

- Em particular

$n_0 = 1$: PIM

Exercícios:

Prove usando indução matemática

(i) $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{(n-1)} = 2^n - 1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$

(ii) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(iii) $2 + 5 + 8 + \ldots + (3n - 1) = \dfrac{n(1+3n)}{2}$

(iv) $(1 + 1)\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)\left(1 + \dfrac{1}{3}\right) \ldots \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = n + 1$

(v) 2 divide $n^2 + n$

Aula 5: Indução forte

Conteúdo:

- Série de Fibonacci
- Indução forte
- Indução forte generalizada

Sequência de Fibonacci:

É uma sequência de números naturais $\{F_1, F_2, F_3, \ldots\}$, denotada por $\{F_n\}$ definida da seguinte forma:

$$F_1 = 1$$

$$F_2 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ para } n \geq 3$$

Ou seja, os termos F_n $n \geq 3$ são calculados recursivamente:

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	...
1	1	2	3	5	8	13	21	...

Voltar

{ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... }

Observe a seguinte propriedade:

Somando os termos da sequência de Fibonacci elevada ao quadrado:

$$F_1^2 = 1^2 = 1$$

Voltar

$$F_1^2 + F_2^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 = 1 \,.\, 2 = F_2 \,.\, F_3$$

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = 2 \,.\, 3 = F_3 \,.\, F_4$$

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15 = 3 \,.\, 5 = F_4 \,.\, F_5$$

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 40 = 5 \,.\, 8 = F_5 \,.\, F_6$$

Conjectura: $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \,.\, F_{n+1}$

Exemplo 1:

- Mostre que $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1} \quad \forall \ n \in \mathbb{N}$

Prova:

Seja $P(n)$: $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$

(1) Base da indução:

$P(1)$: $F_1^2 = 1 = F_1 \cdot F_2 = 1 \cdot 1 = 1$ verdadeira

(2) Hipótese de indução (HI):

$P(k)$: $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_k^2 = F_k \cdot F_{k-1}$ verdadeira

(3) Passo indutivo:

P(k) verdadeira => $\underbrace{\text{P(k + 1) verdadeira}}_{F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_k^2 + F_{k+1}^2 = F_{k+1} \bullet F_{k+2}}$

Desenvolvendo:

$$\underbrace{F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_k^2}_{\overset{\|\,(HI)}{F_k \cdot F_{k+1}}} + \underbrace{F_{k+1}^2}_{} =$$

$$F_k \cdot F_{k+1} + F_{k+1}^2 = F_{k+1}\underbrace{(F_k + F_{k+1})}_{\overset{\|}{F_{k+2}}} = F_{k+1} \cdot F_{k+2}$$

Logo P(k + 1) verdadeira

Então pelo PIM

$P(n) : F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$ verdadeira $\forall \; n \in \mathbb{N}$

Indução forte (IF):

- Seja P(n) uma afirmação, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Se:

(i) P(1) verdadeira e

(ii) P(1), P(2), ... ,P(k) verdadeira => P(k+1) verdadeira

Então P(n) verdadeira $\forall \quad n \in \mathbb{N}$

- Observação: O PIM e a IF são equivalentes.

IF Voltar

cederj

Para aplicarmos a indução forte precisamos executar os três passos a seguir:

(1) Base da indução:

Mostrar que P(n) verdadeira para $n = 1$

(2) Hipótese de indução forte:

Assumir que P(1), P(2), ... , P(k) são verdadeiras

(3) Passo indutivo:

Mostrar que P(k + 1) verdadeira, assumindo (2)

Exemplo 2:

- Considerando a sequência de Fibonacci $\{F_n\}$, mostre que $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n \ \forall \ n \in \mathbb{N}$

Prova:

Seja P(n) : $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$

(1) Base da indução:

P_1 : $F_1 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^1$ verdadeira

(2) Hipótese da indução forte (HIF):

Assuma que $P_1, P_2, \ldots, P_k$ são verdadeiras

$$F_i < \left(\frac{7}{4}\right)^i \quad \forall\ i,\ 1 \leq i \leq k$$

(3) Passo indutivo:

$$P_1, P_2, \ldots, P_k \text{ verdadeiras} \Rightarrow \underbrace{P(k+1)}_{F_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}} \text{ verdadeira}$$

Desenvolvendo:

$$F_{k+1} = \underbrace{F_k}_{\substack{\| HF \\ F_k < \left(\frac{7}{4}\right)^k}} + \underbrace{F_{k-1}}_{\substack{\| HF \\ F_{k-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}}} < \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{7}{4}+1\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{11}{4}\right)$$

Observe que $\frac{11}{4} < 3 < \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2$

$$F_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}\frac{11}{4} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \bullet \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}$$

Logo $P(k+1)$ verdadeira

Então pelo IF $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n \quad \forall \; n \in \mathbb{N}$

Indução forte generalizada:

- Seja P(n) uma afirmação, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Se:

(i) P(n_0) verdadeira

(ii) P(n_0), P(n_0+1), ...,P(k) verdadeira => P(k+1) verdadeira

(k = n_0 + k')

Então <u>P(n) é verdadeira</u> $\forall \; n \geq n_0 \quad n \in \mathbb{N}$

Para aplicarmos a IF generalizada precisamos executar os três passos a seguir:

(1) Base da indução:

Mostrar que $P(n)$ verdadeira para $n = n_0$

(2) Hipótese de indução:

Assumir que $P(n_0), P(n_0 + 1), \ldots, P(k)$ são verdadeiras $(\forall\ k \geq n_0)$

(3) Passo indutivo:

Mostrar que $P(k + 1)$ verdadeira, assumindo a hipótese de indução (2)

Exemplo 3:

- Mostre que todo inteiro maior do que 1 é primo ou produto de primos.

  (Obs: primo é um inteiro maior do que 1, que só é divisível por 1 e por ele mesmo. Exemplos: 2, 3, 5, 7 são primos)

  Prova:

  Seja $P(n)$: n é primo ou produto de primos.

  (1) Base da indução:

  $P(2)$: 2 é primo verdadeira

(2) Hipótese de indução forte:

P(i) é verdadeira para $2 \leq i \leq k$

Assuma que:

i é primo ou produto de primos, $2 \leq i \leq k$

(3) Passo indutivo:

P(i) verdadeira $2 \leq i \leq k$ => $\underbrace{P(k+1)}_{\parallel}$ verdadeira

k + 1 é primo ou produto de primos

Desenvolvendo:

Temos duas possibilidades mutuamente exclusivas

(i) k + 1 é primo

(ii) k + 1 não é primo

Se (i) acontece então P(k + 1) é verdadeira

Caso contrário (ii) acontece, então k + 1 não é primo

$k + 1$ não é primo

Então $k + 1$ pode ser escrito como:

$$k + 1 = a \, . \, b \quad \text{onde} \quad 1 < a < k + 1$$
$$1 < b < k + 1$$

Usando agora a <u>hipótese de indução forte</u> temos que:

$P(a)$ e $P(b)$ são verdadeiras $\quad 1 < a \leq k$
$1 < b \leq k$

<u>ou seja</u>, a é primo ou produto de primos e

b é primo ou produto de primos

Logo $k + 1 = a \,.\, b$ é produto de primos

Logo $P(k + 1)$ é verdadeira

Então pelo princípio da indução forte generalizada

$P(n) : n$ é primo ou produto de primos $\forall \quad n \in \mathbb{N} \quad n > 1$

Resumo:

Conceitos:

- Sequência de Fibonacci
- Indução forte generalizada
- Estrutura

- Base de indução: P(n) verdadeira $n = n_0$
- Hipótese de indução:

P(n_0), (n_0+1), ..., P(k) verdadeira => P(k + 1) verdadeira

- Em particular

$n_0 = 1$: Indução forte

Exercícios:

(1) Seja $\{a_n\}$ a sequência definida por:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 5$$

$$a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1} \quad n \geq 3$$

Mostre que usando a indução forte $a_n = 2^n + (-1)^n \ \forall \ n \geq 2$

(2) Seja $\{F_n\}$ a sequência de Fibonacci.

Mostre usando a indução forte que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \forall \ n \in \mathbb{N}$$

Aula 6: Princípios Aditivo e Multiplicativo

Conteúdo:

- Princípios básicos de contagem:
  - Princípio Aditivo
  - Princípio Multiplicativo

Objetivos:

- Desenvolver as idéias e técnicas básicas para problemas de contagem.

- Reduzir um problema grande a vários problemas pequenos, usando os Princípios Aditivo e Multiplicativo.

Importância:

- Os problemas de contagem aparecem naturalmente no nosso dia a dia.
- Muitas vezes estamos apenas interessados em contar os elementos de um determinado conjunto, sem enumerá-los.
- No desenvolvimento de técnicas de contagem que veremos mais adiante, tais como: permutações, combinações, etc, estaremos usando basicamente os Princípios Aditivo e Multiplicativo.

Problemas de contagem:

Exemplo 1:

- Dados quatro livros distintos de Matemática (M_1, M_2, M_3, M_4) e três livros distintos de Português (P_1, P_2, P_3), de quantas maneiras podemos selecionar (escolher):

a) Um livro (<u>ou</u> de Matemática <u>ou</u> de Português).

b) Dois livros, sendo <u>um</u> de Matemática <u>e outro</u> de Português.

Exemplo 1 (continuação):

a) Um livro (<u>ou</u> de Matemática <u>ou</u> de Português)

O livro de Matemática pode ser escolhido de 4 maneiras:

livro M_1 ou
livro M_2 ou
livro M_3 ou
livro M_4

O livro de Português pode ser escolhido de 3 maneiras:

livro P_1 ou
livro P_2 ou
livro P_3

Número de maneiras: $4 + 3 = 7$

Exemplo 1 (continuação):

b) Dois livros, sendo <u>um</u> de Matemática <u>e outro</u> de Português.

Temos dois conjuntos:

$$A = \{M_1, M_2, M_3, M_4\} \qquad B = \{P_1, P_2, P_3\}$$

$$\begin{aligned} C = \{ \; & (M_1, P_1) \;\; (M_1, P_2) \;\; (M_1, P_3) \\ & (M_2, P_1) \;\; (M_2, P_2) \;\; (M_2, P_3) \\ & (M_3, P_1) \;\; (M_3, P_2) \;\; (M_3, P_3) \\ & (M_4, P_1) \;\; (M_4, P_2) \;\; (M_4, P_3) \; \} \end{aligned}$$

PA

Voltar

Número de maneiras: $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3 = \mathbf{12}$

Resumindo

a) De quantas maneiras podemos escolher um livro qualquer (ou de Matemática ou de Português)?

Resposta:

Temos 4 maneiras de escolher um livro de Matemática e 3 maneiras de escolher um livro de Português.

Logo temos $4 + 3 = 7$ maneiras de escolher um livro qualquer dentre os de Matemática e Português.

b) De quantas maneiras podemos escolher dois livros sendo um de Matemática e outro de Português?

Resposta:

Para cada livro de Matemática, temos 3 maneiras de escolher os livros de Português.
Como temos 4 maneiras de escolher os livros de Matemática, teremos $3 \times 4 = 12$ maneiras de escolher um livro de Matemática e outro de Português.

Exemplo 2:

- Maria vai a uma papelaria para comprar lapiseira e borracha. Nessa papelaria há 7 tipos diferentes de lapiseiras e 5 tipos diferentes de borrachas.

a) Se o dinheiro de Maria só dá para comprar um item, ou uma lapiseira ou uma borracha, de quantas maneiras diferentes ela pode fazer isso?

$L = \{L_1, L_2, \ldots, L_7\}$ $B = \{B_1, B_2, \ldots, B_5\}$

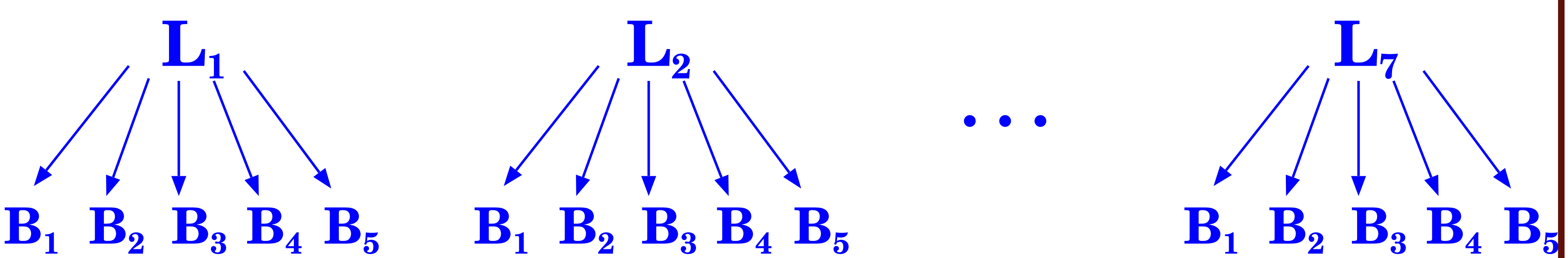
ou L_1, ou L_2, ou ... ou $L_7 \rightarrow$ 7 maneiras

ou B_1, ou B_2, ou ... ou $B_5 \rightarrow$ 5 maneiras

Número de maneiras de escolher um item : $7 + 5 = 12$

Exemplo 2 (continuação):

b) Suponha agora que Maria tem dinheiro para comprar 2 itens, sendo que ela quer uma lapiseira e uma borracha. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer isso?



Observe que temos os pares:

(L_1, B_1) (L_1, B_2) ... (L_1, B_5) , ... ,(L_7, B_1) (L_7, B_2) ... (L_7, B_5)

Número de maneiras de escolher 2 itens, sendo um item uma lapiseira e o outro uma borracha5 +...+ 5 = $5 \times 7 = 35$

Resumindo

a) De quantas maneiras diferentes Maria pode comprar um item (ou uma lapiseira ou uma borracha)?

Resposta:

Ela tem 7 possibilidades de escolha de lapiseira e 4 possibilidades de escolha de borracha.
Logo Maria tem $7 + 5$ possibilidades diferentes de comprar <u>ou</u> uma lapiseira <u>ou</u> uma borracha.

b) De quantas maneiras diferentes Maria pode comprar 2 itens: uma lapiseira e uma borracha?

Resposta:

Para cada escolha de lapiseira, ela tem 5 escolhas de borracha.
Como ela tem 7 escolhas de lapiseiras diferentes, ela terá 7×5 maneiras diferentes de comprar uma lapiseira e uma borracha.

Introdução ao Princípio Aditivo (PA):

- Princípio Aditivo (para dois conjuntos)

  Se A e B são dois conjuntos disjuntos ($A \cap B = \varnothing$),

  então $|A \cup B| = |A| + |B|$

- Outra notação usual

  $n(A) = |A|$

PA

Voltar

Outra interpretação da formulação:

- Sejam A e B eventos mutuamente exclusivos. Se um evento A pode ocorrer de m maneiras e outro evento B pode ocorrer de n maneiras, então existem $m + n$ maneiras em que algum desses dois eventos podem ocorrer.

Voltando ao exemplo 1:

- Dados quatro livros distintos de Matemática e três livros distintos de Português:

  a) De quantas maneiras podemos escolher um livro qualquer?

  Podemos identificar os conjuntos:

  $A = \{ M_1, M_2, M_3, M_4 \}$ $B = \{ P_1, P_2, P_3 \}$

  $A \cap B = \varnothing$ $|A| = n(A) = 4$ $|B| = n(B) = 3$

  Pelo P. A. temos

  $|A \cup B| = |A| + |B| = 7$ maneiras de escolher um livro qualquer, ou de Matemática ou de Português.

Voltando ao exemplo 2:

- Na papelaria há 7 tipos diferentes de lapiseira e 5 tipos diferentes de borracha:

a) De quantas maneiras Maria pode comprar um item?

Identificando os conjuntos:

$L = \{L_1, L_2, \ldots, L_7\}$ $B = \{B_1, B_2, \ldots, B_5\}$

$L \cap B = \varnothing$ $|L| = 7$ $|B| = 5$

Pelo P. A. Maria tem

$|L \cup B| = |L| + |B| = 7 + 5 = 12$ maneiras de escolher ou uma lapiseira ou uma borracha.

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM):

Princípio Multiplicativo (para dois conjuntos)

Se A é um conjunto com m elementos e B é um conjunto com n elementos então o conjunto $A \times B$

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B \}$$

tem $m \times n$ elementos

$$|A \times B| = |A| \, . \, |B| = m \times n$$

cederj

Outra interpretação da formulação:

- Se um evento A pode ocorrer de m maneiras e um evento B pode ocorrer de n maneiras então o par de eventos, primeiro um e depois o outro, podem ocorrer de $m \times n$ maneiras.

Voltando ao exemplo 1:

- Dados quatro livros distintos de Matemática e três livros distintos de Português:

b) De quantas maneiras podemos escolher 2 livros sendo um de Matemática e outro de Português?

$A = \{ M_1, M_2, M_3, M_4 \}$ $B = \{ P_1, P_2, P_3 \}$

$|A| = 4$ $|B| = 3$

Pelo P. M. temos então

$|A \times B| = |A| \times |B| = 4 \times 3 = 12$ maneiras de escolher dois livros sendo um de Matemática e outro de Português.

- O exemplo 2 b) vocês interpretam.

Resposta Voltar

Exemplo 3:

- Um prédio tem oito portas:

a) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar e sair?

$$A = B = \{ P_1, P_2, \dots , P_8 \} \qquad |A| = 8$$

$$\left.\begin{array}{l}
(P_1, P_1) , (P_1, P_2) \dots (P_1, P_7) , (P_1, P_8) \\
(P_2, P_1) , (P_2, P_2) \dots (P_2, P_7) , (P_2, P_8) \\
\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
(P_8, P_1) , (P_8, P_2) \dots (P_8, P_7) , (P_8, P_8)
\end{array}\right\} 8 \times 8$$

$$|A \times B| = |A| \times |A| = 8 \times 8 = 64$$

Resposta:

Uma pessoa pode entrar e sair do prédio de 64 maneiras.

Exemplo 3 (continuação):

b) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra diferente?

Observe: Se usarmos a porta P_1 para entrar, ela não pode ser usada para sair.

$$\left.\begin{array}{l}
(P_1, P_2)\ ,\ (P_1, P_3)\ \ldots\ (P_1, P_7)\ ,\ (P_1, P_8) \\
(P_2, P_1)\ ,\ (P_2, P_3)\ \ldots\ (P_2, P_7)\ ,\ (P_2, P_8) \\
\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
(P_8, P_1)\ ,\ (P_8, P_2)\ \ldots\ (P_8, P_6)\ ,\ (P_8, P_7)
\end{array}\right\}\ 8 \times 7$$

Resposta:

Uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra diferente de 56 maneiras.

Exemplo 3 (continuação):

Formalização:

$$A = \{ P_1, P_2, \dots , P_8 \} \quad , \quad |A| = 8$$

$$D = \{ (P_1, P_1) , \dots , (P_8, P_8) \} \quad , \quad |D| = 8$$

$$C = A \times A - D$$

$$|C| = |A \times A| - |D| \qquad \text{(Princípio Aditivo)}$$

$$|C| = |A| \,.\, |A| - |D| \qquad \text{(Princípio Multiplicativo)}$$

$$= 8 \times 8 - 8 \;\; = 8\,(8 - 1) \;\; = \;\; 8 \,.\, 7$$

Exemplo 3 (continuação):

Interpretação:

a) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar e sair?

maneiras de entrar - 8

maneiras de sair - 8

=> $8 \times 8 = 64$

b) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra diferente?

maneiras de entrar - 8

maneiras de sair - 7

=> $8 \times 7 = 56$

Exemplo 4:

- Numa sala estão reunidos cinco homens, seis mulheres e quatro crianças.

  De quantas maneiras podemos selecionar:

  a) uma pessoa?

  b) um homem, uma mulher e uma criança?

Exemplo 4 (continuação):

a) De quantas maneiras podemos selecionar uma pessoa?

$$H = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 \}$$

$$M = \{ m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6 \}$$

$$C = \{ c_1, c_2, c_3, c_4 \}$$

$$H \cap M = \varnothing \quad H \cap C = \varnothing \quad M \cap C = \varnothing$$

$$|H| = 5 \quad |M| = 6 \quad |C| = 4$$

$$|H \cup M \cup C| = |H| \cup |M| \cup |C| = 5 + 6 + 4 = 15$$

$$H \cup M \cup C = \{ h_1, h_2, \ldots , h_5, m_1, m_2, \ldots , m_6, c_1, \ldots , c_4 \}$$

Exemplo 4 (continuação):

b) De quantas maneiras podemos selecionar um homem, uma mulher e uma criança?

$$H \times M \times C = \{ (h, m, c) \mid h \in H,\ m \in M,\ c \in C \}$$

$$H \times M \times C = \{ (h_1, m_1, c_1), (h_1, m_2, c_1), (h_1, m_3, c_1), (h_1, m_4, c_1), (h_1, m_5, c_1), (h_1, m_6, c_1), (h_1, mb_1, c_2), (h_1, m_1, c_3), (h_1, m_1, c_4), \ldots \}$$

Observação:

$$|H \times M \times C| = |H| \times |M| \times |C| = 5 \times 6 \times 4 = 120$$

Extensão do Princípio Aditivo:

- Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos disjuntos dois a dois

$$(A_i \cap A_j = \varnothing \qquad i \neq j)$$

e $|A_1| = m_1$, $|A_2| = m_2$, ..., $|A_n| = m_n$

então o conjunto $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

possui $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ elementos

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Outra interpretação da formulação:

- Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos mutuamente exclusivos. Se cada evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras então existem $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ maneiras em que algum desses n eventos podem ocorrer.

Extensão do Princípio Multiplicativo:

- Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos tais que

$$|A_1| = m_1, \; |A_2| = m_2, \; \ldots, \; |A_n| = m_n$$

então o conjunto $\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

possui $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_n$

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \ldots \times |A_n| = \prod_{i=1}^{n} m_i$$

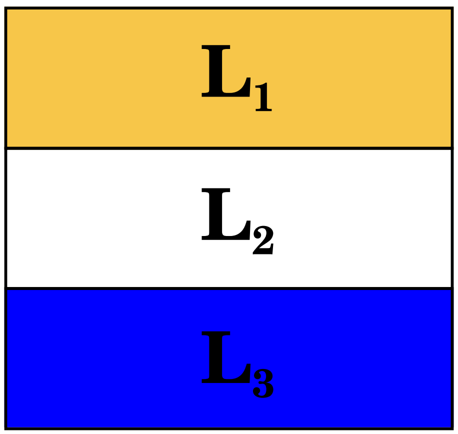
Outra interpretação da formulação:

- Se temos n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, onde cada evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras então existem $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_n$ maneiras em que esses n eventos podem ocorrer sucessivamente.

Exemplo 5:

- Uma bandeira é formada por três listras que devem ser coloridas usando-se apenas as cores: amarelo, branco, azul, de tal maneira que listras adjacentes não recebam a mesma cor.

  De quantos modos podemos colorir esta bandeira?



$\longrightarrow$ $\mathbf{L_1}$ pode ser colorida de 3 modos

$\longrightarrow$ $\mathbf{L_2}$ pode ser colorida de 2 modos
(a cor usada em $\mathbf{L_1}$ não pode ser usada em $\mathbf{L_2}$)

$\longrightarrow$ $\mathbf{L_3}$ pode ser colorida de 2 modos
(a cor usada em $\mathbf{L_2}$ não pode ser usada em $\mathbf{L_3}$)

Logo pelo PM temos $3 \times 2 \times 2$ modos de colorir esta bandeira.

Exemplo 6:

- Um teste de matemática consta de 20 perguntas para serem classificadas como Verdadeira ou Falsa.

  Quantos são os possíveis gabaritos para este teste?

Resposta:

Cada pergunta tem duas possibilidades de resposta: Verdadeiro ou Falso

$$\left.\begin{array}{l} P_1 - 2 \text{ possibilidades} \\ P_2 - 2 \text{ possibilidades} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ P_{20} - 2 \text{ possibilidades} \end{array}\right\}$$

Logo pelo PM temos

$2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^{20}$ gabaritos

Exemplo 7:

- Considerando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números naturais de três algarismos distintos podem ser formados?

Para formar números naturais de três algarismos, podemos considerar que temos três posições a serem preenchidas:

$\underline{P_1}$ $\underline{P_2}$ $\underline{P_3}$

P_1 - posição das centenas

P_2 - posição das dezenas

P_3 - posição das unidades

Exemplo 7 (continuação):

- Exemplo de um número formado

3 **6** **5**

$\underline{\mathbf{P_1}}$	$\underline{\mathbf{P_2}}$	$\underline{\mathbf{P_3}}$
$\downarrow$ **1º**	$\downarrow$ **2º**	$\downarrow$ **3º**
6 possibilidades	5 possibilidades	4 possibilidades

Logo pelo PM temos $6 \times 5 \times 4 = 120$ números naturais de três algarismos distintos formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Exemplo 8:

- Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base 10) existem?

Observação: Estamos considerando agora os algarismos 0, 1, 2, ... , 9.

$$\underline{P_1} \quad \underline{P_2} \quad \underline{P_3}$$

Na posição P_1 temos 9 possibilidades (estamos excluindo o zero)

Na posição P_2 temos 9 possibilidades (diferente do anterior)

Na posição P_3 temos 8 possibilidades (diferente dos dois anteriores)

Logo pelo PM temos $9 \times 9 \times 8$ números naturais de três algarismos distintos.

Exemplo 8 (continuação):

- E se neste exemplo em vez de começarmos analisando a posição P_1, começassemos pela P_3 ?

3º	2º	1º
P_1	P_2	P_3

Na posição P_3 temos 10 possibilidades

Na posição P_2 temos 9 possibilidades (diferente do anterior)

Na posição P_1 temos $\begin{cases} 8 & \text{(se o algarismo zero já tiver sido usado)} \\ \text{ou} & \\ 7 & \text{(caso contrário)} \end{cases}$

Exemplo 8 (continuação):

- Quebramos o problema em dois:

1^{o}) Ignoramos o fato do zero não estar na posição P_1 e contamos todas as possibilidades (com ele incluído)

$$\underline{P_1} \quad \underline{P_2} \quad \underline{P_3}$$

Na posição P_3 temos 10 possibilidades

Na posição P_2 temos 9 possibilidades

Na posição P_1 temos 8 possibilidades

Logo pelo PM temos $10 \times 9 \times 8 = 720$ números de três algarismos distintos onde o zero pode estar na posição P_1

cederj

2º) Contamos os números de três algarismos distintos que têm apenas o zero na posição P_1

$$\underline{P_1} \quad \underline{P_2} \quad \underline{P_3}$$

Na posição P_1 temos 1 possibilidade

Na posição P_2 temos 9 possibilidades

Na posição P_3 temos 8 possibilidades

Logo pelo PM temos $1 \times 9 \times 8 = 72$ números de três algarismos distintos que tem apenas o zero na posição P_1

Temos então $720 - 72 = 648$ números naturais de três algarismos distintos.

Resumo:

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos

Princípio Aditivo

Se $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ e

$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ então

$|A| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$

Princípio Multiplicativo

Se $B = \prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ então

$|B| = |A_1| \times |A_2| \times \ldots \times |A_n|$

cederj

Módulo: Aplicações dos princípios aditivo e multiplicativo

- Permutações simples
- Permutações circulares
- Arranjos simples
- Combinações simples
- Permutações com repetições
- Arranjos com repetições
- Combinações com repetições

Objetivo:

- Obtenção de uma técnica de contagem para cada problema (de permutação, de arranjo, de combinação) a partir dos princípios aditivo e multiplicativo (isto é, sem a enumeração explícita dos seus elementos).

Importância:

As permutações, os arranjos e as combinações aparecem na modelagem de problemas provenientes, principalmente, das seguintes áreas:

- probabilidades
- teoria de grafos
- análise de algoritmos

Exemplos:

- Algoritmos randômicos (probabilísticos)
- Armazenamento de informações em banco de dados nos computadores
- Análise do comportamento de um algoritmo através da contagem das suas operações.

Aula 7: Permutações simples e circulares

Conteúdo:

- Introdução
- Fatorial de um número
- Permutação simples
- Número de permutações simples
- Permutação circular
- Número de permutações circulares

Introdução:

Exemplo 1:

(a) Comprei três canetas de distintas cores, azul, verde e branca, para dar de presente a três amigos, João, Rita e Luiza.

(b) Comprei mais uma caneta, de cor preta, pois tinha esquecido do Gabriel.

Em cada caso, de quantas maneiras diferentes eu posso distribuí-las?

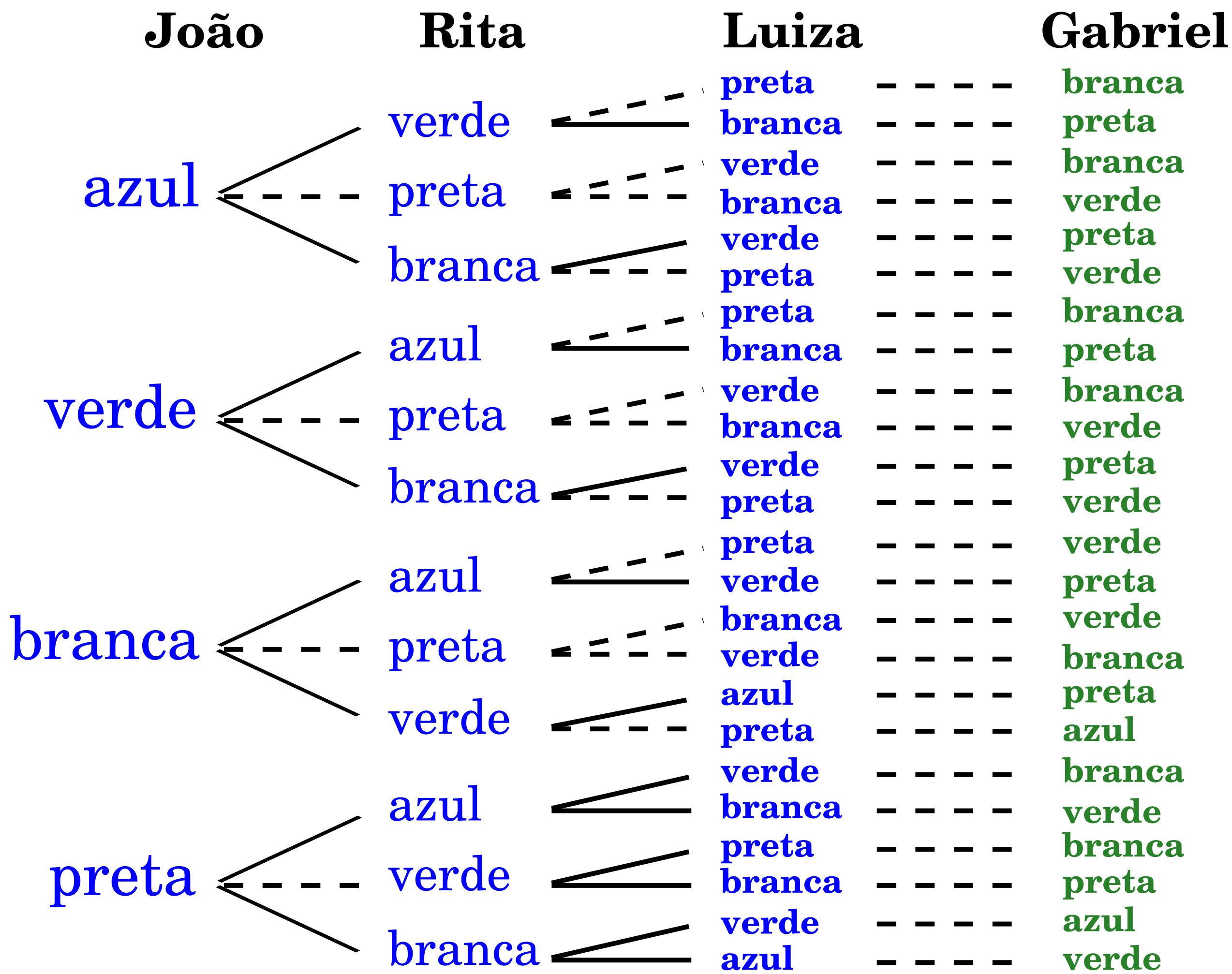
Resolução:

(a)

João	Rita	Luiza
azul	verde	branca
	branca	verde
verde	azul	branca
	branca	azul
branca	azul	verde
	verde	azul

Número de possibilidades: $3 \times 2 \times 1$

(b)



Possibilidades: **4** × **3** × **2** × **1**

Resumindo

- Problema:

De quantas maneiras diferentes eu posso distribuir as canetas:

(a) azul, verde e branca

(b) azul, verde, branca e preta

Resposta:

Eu posso reparti-las

(a) de 6 maneiras diferentes

(b) de 24 maneiras diferentes

- Observação: $6 = 3 \times 2 \times 1$

$24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$

Fatorial de um número:

Definição

O fatorial de um número natural n, denotado por n! , é o produto dos n primeiros números naturais:

$$n! := n(n-1)(n-2)\ \dots\ 1$$

Ilustração

$$3! = 3 \times 2 \times 1$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

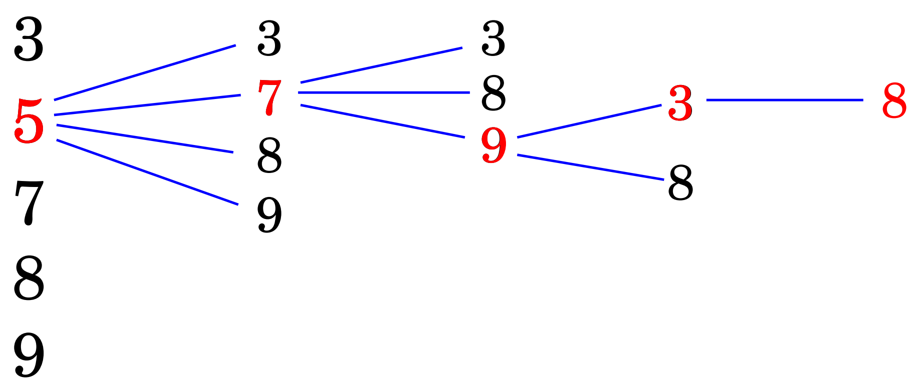
Convenção:

$$0! := 1$$

Exemplo 2:

Quantos números distintos de 5 algarismos podem se formar com os dígitos 3, 5, 7, 8 e 9 ?

Resolução:



Possibilidades: $\dfrac{5}{p_1}\quad \dfrac{4}{p_2}\quad \dfrac{3}{p_3}\quad \dfrac{2}{p_4}\quad \dfrac{1}{p_5} = 5!$

posições dos dígitos no número

Resposta: Podem se formar $5! = 120$ números diferentes de 5 algarismos

Características dos exemplos:

- Os <u>elementos</u> considerados são <u>diferentes</u>
- <u>Cada troca de posição</u> (de ordem) dos elementos corresponde a <u>uma possibilidade</u>
- Na obtenção do número de possibilidades aplica-se os princípios aditivo e multiplicativo

Permutação simples:

Definição

Dados n objetos distintos, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, uma permutação simples é uma ordenação desses elementos.

Ilustração

Dados os dígitos 3, 5, 7, 8 e 9,

87539 é uma permutação simples de 3, 5, 7, 8, 9.

Número de permutações simples:

Problema

Dados n elementos distintos, a_1, a_2, ... , a_n,
encontrar o número de permutações simples

Propriedade

O número de permutações simples de n elementos distintos, denominado P_n, é dado por:

$$P_n = n! = n(n-1) \dots 1$$

Prove esta propriedade usando indução

Prova:

Seja P(n): $P_n = n!$

Prova Voltar

(1) Base de indução:

P(1): $P_1 = 1! = 1$ verdadeira

(2) Hipótese de indução:

Assume P(k): $P_k = k!$ é verdadeira

(3) Passo indutivo:

Prova Voltar

Mostrar que $P_{k+1} = (k+1)!$ é verdadeira

Provemos que $P_{k+1} = (k+1)!$ é verdadeira:

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$ elementos distintos.

Na última posição p_{k+1} tem-se $(k+1)$ possibilidades

$$\underset{p_1}{\underline{\quad}} \quad \underset{p_2}{\underline{\quad}} \quad \cdots \quad \underset{p_k}{\underline{\quad}} \quad \underset{p_{k+1}}{\underline{\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k+1} \end{matrix}}}$$

Fixado um elemento na posição p_{k+1} restam k elementos para ordenar em k posições (permutação de elementos):

para 1 possibilidade em p_{k+1} tem-se P_k permutações das posições $p_1, \ldots, p_k$

então, para $(k+1)$ possibilidades em p_{k+1} tem-se $(k+1)\,P_k$ permutações das posições p_{k+1}

Logo, $P_{k+1} = (k+1)\ P_k \overset{HI}{=} (k+1)\,k! = (k+1)!$ é verdadeira

Portanto, $P(n)$: $P_n = n!$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$

cederj

Exemplo 3:

Vários amigos combinaram passar o dia no clube. Planejaram ir para a piscina, fazer um churrasco e jogar volei. De quantas maneiras diferentes podem programar essas atividades?

Resolução:

elementos: p (piscina) c (churrasco) v (volei)

número de programas possíveis: $P_3 = 3! = 6$

Resposta:

Eles podem programar as atividades planejadas de 6 maneiras diferentes.

Exemplo 4:

Quantos números distintos de 5 algarismos podem se formar com os dígitos 0, 5, 7, 8 e 9 ?

PS Voltar

Lembremos que algarismo é cada um dos símbolos usados na representação de um número no sistema decimal de numeração.

- Ilustração:

$57809 \rightarrow 5 \,.\, 10^4 + 7 \,.\, 10^3 + 8 \,.\, 10^2 + 0 \,.\, 10^1 + 9 \,.\, 10^0$

05789 é uma ordenação de 5 dígitos que não corresponde à representação no sistema decimal

5789 corresponde à representação no sistema decimal

Conclusão:

Os números de 5 algarismos não iniciam com 0.

Exemplo 4 (resolução):

Raciocínio 1:

dígitos do problema: 0, 5, 7, 8, 9

Possibilidades $\underset{\cancel{0}}{\overset{4}{\underline{\quad\quad}}} \times \overbrace{\underline{\quad\quad}\ \underline{\quad\quad}\ \underline{\quad\quad}\ \underline{\quad\quad}}^{P_4} = 4 \,.\, 4! = 96$

posições dos dígitos
no número

- Na primeira posição temos 4 possibilidades (excluimos o 0)
- Nas posições restantes temos 4 posições para 4 dígitos incluindo o 0, ou seja, P_4 possibilidades

Resposta: Podem se formar 96 números diferentes de 5 algarismos com 0, 5, 7, 8 e 9.

Exemplo 4 (raciocínio 2):

Usamos o conceito de complemento.

U: conjunto universo := conjunto das ordenações de 5 dígitos formados com 0, 5, 7, 8 e 9 sem repetição (05798 $\in$ U)

A := conjunto dos números de 5 algarismos formados com 0, 5, 7, 8 e 9 = conjunto dos elementos de U que não iniciam com 0

B := conjunto dos elementos de U que iniciam com 0

$$\begin{cases} A = U - B \\ \text{número de possibilidades} = |A| = |U| - |B| \end{cases}$$

$$\begin{cases} |U| = P_5 \;,\; |B| = P_4 \\ \text{número de possibilidades} = P_5 - P_4 = 5! - 4! = 96 \end{cases}$$

Observação: $5! - 4! = 5.4! - 4! = (5 - 1)\,4! = 4.4!$

Exemplo 5:

Nove amigos assistem a um show, com lugares marcados consecutivos. As mulheres (quatro) se sentam todas juntas e os homens também. De quantas maneiras diferentes podem se sentar?

Resolução: mulheres M_1, M_2, M_3, M_4

homens H_1, H_2, H_3, H_4, H_5

Algumas possibilidades: $M_1, M_2, M_3, M_4, H_1, H_2, H_3, H_4, H_5$

$H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, M_1, M_2, M_3, M_4$

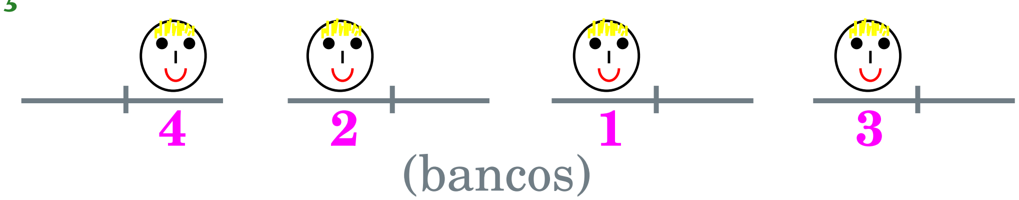
Número de possibilidades: $2P_4P_5 = 2 \,.\, 4! \,.\, 5! = 5760$

Resposta: Podem se sentar de 5760 maneiras diferentes.

Exemplo 6:

De quantos modos 4 rapazes e 4 moças podem se sentar em 4 bancos de 2 lugares cada um, de modo que em <u>cada</u> banco fiquem 1 rapaz e 1 moça?

Resolução:



Voltar

1ª moça pode escolher seu lugar de 8 modos

2ª moça pode escolher seu lugar de 6 modos

3ª moça pode escolher seu lugar de 4 modos

4ª moça pode escolher seu lugar de 2 modos

Número de possibilidades para as moças: $8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$

Exemplo 6 (continuação):

Considere uma colocação das moças.

Para cada colocação das moças, os moços sentam de P_4 maneiras diferentes nos 4 lugares restantes.

Número total de possibilidades: $8 \,.\, 6 \,.\, 4 \,.\, 2 \,.\, 4! = 9216$

Resposta: Podem se sentar de 9216 maneiras diferentes

Observação: A resposta não muda se analisarmos primeiro os rapazes ($8 \,.\, 6 \,.\, 4 \,.\, 2$ modos) e depois as moças ($4!$)

Exemplo 7:

Quantos anagramas podem ser formados com a palavra VIRUS?

Resolução:

- 1 anagrama de VIRUS: 1 transposição das letras de VIRUS (permutação das letras de VIRUS)
- VIRUS tem letras distintas
- n: número de letras da palavra VIRUS = 5

Resposta:

A partir da palavra VIRUS podem ser formados $P_5 = 5! = 120$ anagramas.

Exemplo 8:

Quantos anagramas da palavra VIRUS começam e terminam em consoante?

Resolução:

Possibilidades:

$$\underset{p_1}{\underline{\ 3\ }} \times \overbrace{\underset{p_2}{\underline{\quad}}\quad \underset{p_3}{\underline{\quad}}\quad \underset{p_4}{\underline{\quad}}}^{P_3} \times \underset{p_5}{\underline{\ 2\ }}$$

posição das letras em um anagrama

consoantes de VIRUS: V, R, S

Ordem da análise das possibilidades:

1ª) possibilidades para a posição $p_1 = 3$

2ª) possibilidades para a posição $p_5 = 2$

3ª) possibilidades para as posições $p_2, p_3, p_4 = P_3 = 3!$

Resposta: da palavra VIRUS podem ser formados $3 \,.\, 2 \,.\, 3! =$ 36 anagramas que começam e terminam em consoante.

Exemplo 9:

Ana, Luis e Fernando sentam-se juntos na aula de monitoria do curso de informática. De quantas maneiras diferentes podem se sentar, se:

(1) as cadeiras estão numa mesma fila ① ② ③

(2) as cadeiras formam um triângulo e estão numeradas

①
② ③

(3) as cadeiras formam um triângulo e o que interessa é a posição de cada pessoa em relação as outras duas

➡ Ilustração:

A	F	L
L F	A L	F A

mesma possibilidade

Exemplo 9 (primeira parte):

Ana, Luis e Fernando sentam-se juntos na aula de monitoria do curso de informática. De quantas maneiras diferentes podem-se sentar, se:

(1) as cadeiras estão numa mesma fila 1 2 3

Resolução:

Número de possibilidades: $P_3 = 3! = 6$

Resposta: Eles podem se sentar numa fila de 6 maneiras distintas

Exemplo 9 (segunda parte):

Ana, Luis e Fernando sentam-se juntos na aula de monitoria do curso de informática. De quantas maneiras diferentes podem se sentar, se:

(2) as cadeiras formam um triângulo e estão numerados

1

2 3

Resolução: importa a cadeira em que estão sentados:

- Ilustração:

A
L F

F
A L

L
F A

possibilidades diferentes

Resposta: Eles podem se sentar nos lugares numerados de 6 maneiras distintas

Exemplo 9 (terceira parte):

Ana, Luis e Fernando sentam-se juntos na aula de monitoria do curso de informática. De quantas maneiras diferentes podem se sentar, se:

(3) as cadeiras formam um triângulo e o que interessa é a posição de cada pessoa em relação as outras duas

A	L	F		
F L	A F	L A	$\xrightarrow{\text{correspondem}}$	uma possibilidade

Resolução:

3 permutações de A, L e F $\longrightarrow$ 1 possibilidade

P_3 permutações de A, L e F $\longrightarrow$ $\dfrac{P_3}{3}$ possibilidades

Resposta:

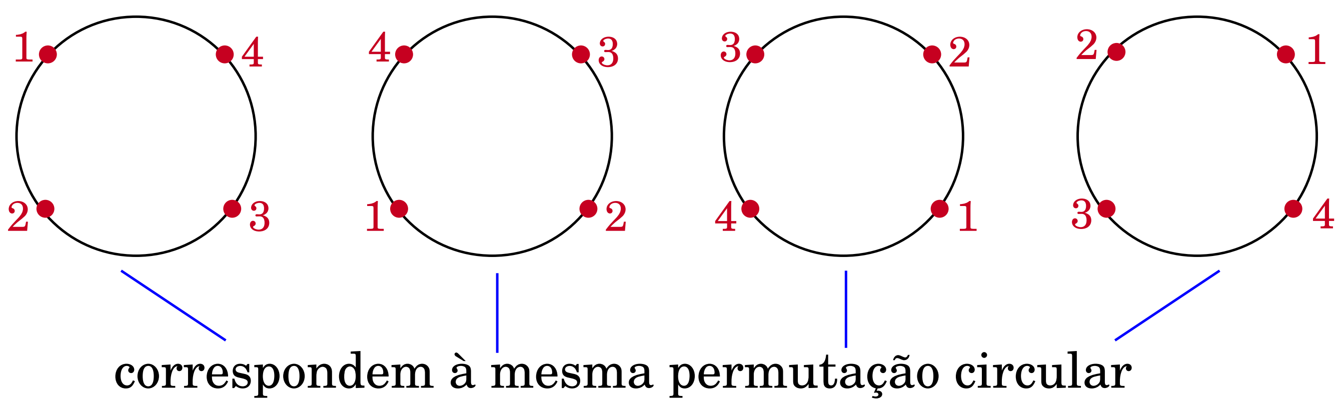
A quantidade de posições diferentes é $\dfrac{3!}{3} = \dfrac{3\,.\,2!}{3} = 2$

Permutação circular:

Definição

Dados **n** objetos <u>distintos</u>, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, uma permutação circular é uma ordenação onde o que importa é a posição relativa dos objetos.

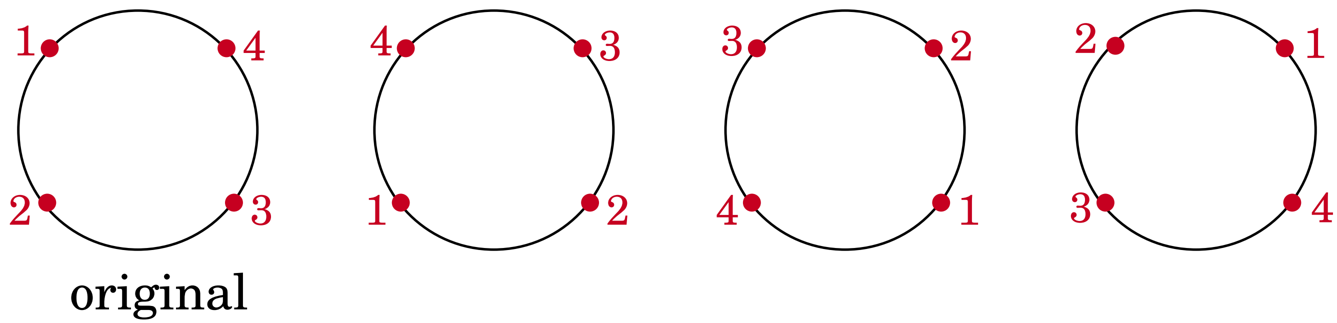
Ilustração



Observação

Duas permutações circulares são iguais quando uma pode ser obtida da outra por uma rotação.

Ilustração



permutações circulares iguais

Número de permutações circulares:

Problema

Dados n elementos distintos, $a_1, a_2, \ldots, a_n$,

encontrar o número de permutações circulares

Propriedade

O número de permutações circulares de n objetos distintos, denominado $(PC)_n$, é dado por:

$$(PC)_n = \frac{P_n}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Ilustração

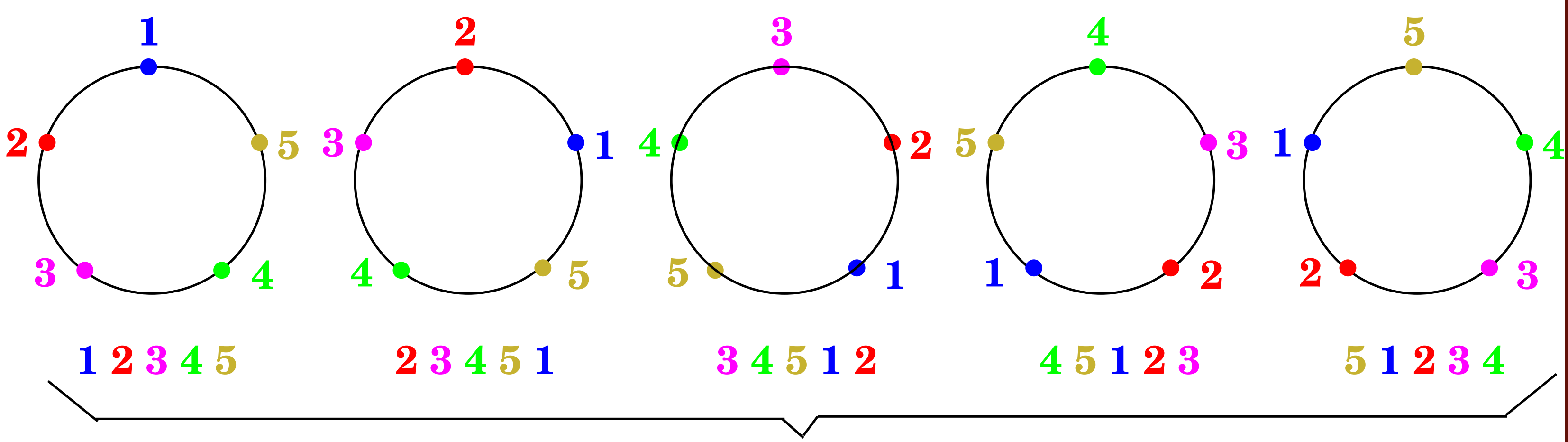
$$(PC)_3 = \frac{3!}{3} = 2! = 2$$

Exemplo 10:

Quantas rodas de ciranda podem ser formadas com 5 crianças?

crianças: 1, 2, 3, 4, 5

PC Voltar



representam a mesma permutação circular

Exemplo 10 (continuação):

Resolução:

$$\left.\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right\} \text{permutações simples} \longrightarrow \text{1 permutação circular}$$

5 permutações simples $\longrightarrow$ 1 permutação circular

total de permutações, $P_5 \longrightarrow \dfrac{P_5}{5} = (PC)_5$

$$\frac{P_5}{5} = \frac{5!}{5} = 4! = 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 24$$

Resposta:

Podem ser formadas 24 rodas diferentes de ciranda

Exemplo 11:

De quantas maneiras é possível formar uma roda de ciranda com 6 crianças, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 e c_6 de modo que c_1 e c_2 não fiquem juntas?

Resolução:

Primeira etapa

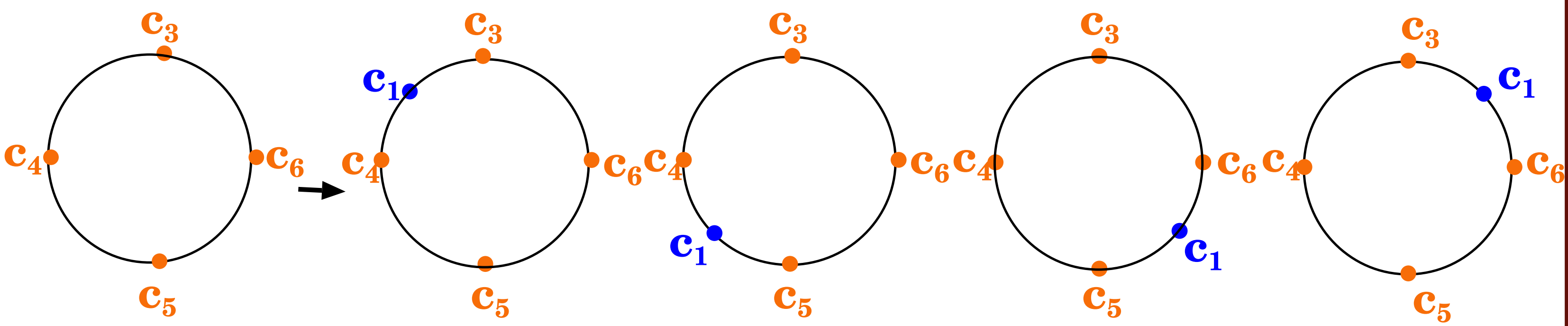
Considere c_3, c_4, c_5, c_6. Podem se formar

$$(PC)_4 = (4-1)! = 3! = 6$$

Exemplo 11 (segunda etapa):

Para cada roda formada por c_3, c_4, c_5, c_6 tem-se

4 maneiras de se colocar c_1

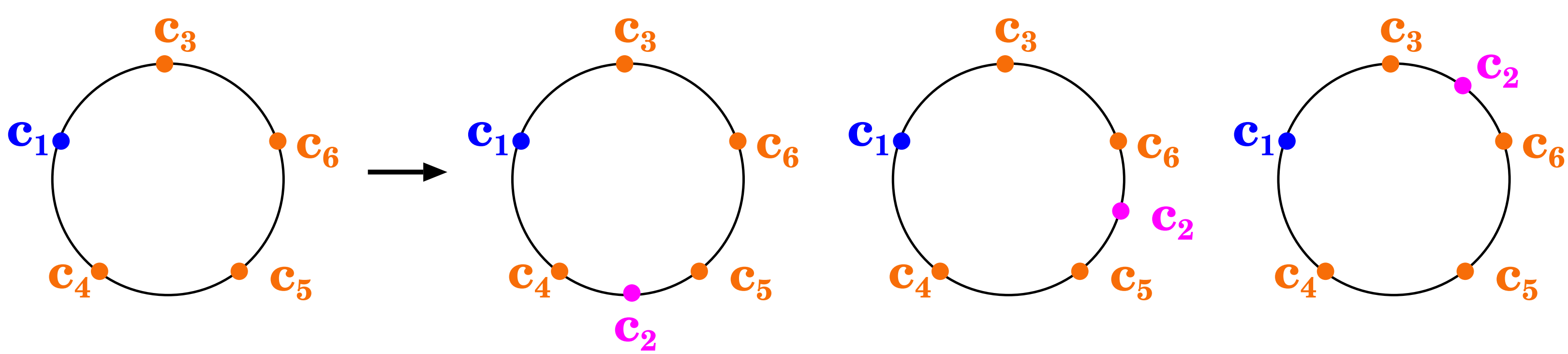


1 roda

PC Voltar

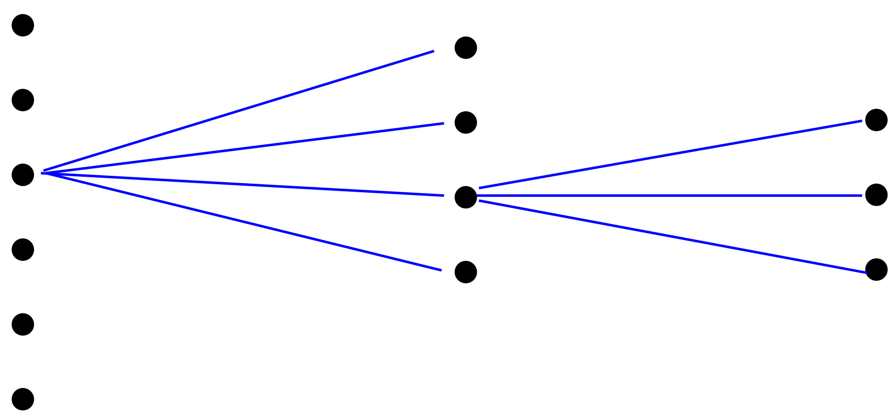
Exemplo 11 (terceira etapa):

Para <u>cada roda</u> formada por c_1, c_3, c_4, c_5, c_6 tem-se <u>3</u> maneiras de se <u>colocar c_2</u>



1 roda
incluída c_1

Exemplo 11 (análise final):



$(PC)_4 = 6$	4	3
primeira etapa (c_3, c_4, c_5, c_6)	segunda etapa (inclusão de c_1)	terceira etapa (inclusão de c_2)

Resposta:

Podem ser formadas 6 . 4 . 3 = 72 rodas diferentes de modo que c_1 e c_2 não fiquem juntas.

Resumo:

Sejam n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Conceitos:

Permutação simples de $a_1, a_2, \ldots, a_n$

Características:

importam as posições que os objetos ocupam.

(exemplo: $a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n \neq a_2\, a_3 \ldots a_n\, a_1$)

Permutação circular de $a_1, a_2, \ldots, a_n$

importa a posição relativa dos objetos entre si.

(exemplo: $a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n = a_2 a_3 \ldots a_n a_1$)

Propriedades:

1. Número de permutações simples:

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \,.\, 1$$

2. Número de permutações circulares: $(PC)_n = \dfrac{P_n}{n} = (n-1)!$

cederj

Aula 8: Arranjos simples

Conteúdo:

- Introdução
- Arranjo simples
- Número de arranjos simples

Introdução:

Exemplo 1:

Um prédio tem 8 portas. De quantas maneiras 1 pessoa pode entrar por 1 porta e sair por outra diferente?

Resolução:

$$\text{Possibilidades} \quad \underset{\text{}}{\overset{\text{entrada}}{\underline{\mathbf{8}}}} \times \overset{\text{saída}}{\underline{\mathbf{7}}} = \mathbf{56}$$

Resposta:

Uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra de 56 maneiras distintas.

Reformulação do exemplo 1:

Um prédio tem 8 portas. De quantas maneiras 1 pessoa pode entrar por 1 porta e sair por outra diferente?

De quantas maneiras distintas uma pessoa pode escolher 2 portas diferentes (entrada, saída) entre 8 portas diferentes?

Resposta:

Uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra de 56 maneiras distintas.

Resposta:

Uma pessoa pode escolher 2 portas distintas para entrar e sair entre 8 portas distintas de 56 maneiras diferentes.

Observação: $8\,.\,7 = \dfrac{8\,.7\,.6!}{6!} - \dfrac{8\,.7\,.6\,.5\,.4\,.3\,.2\,.1}{6!} = \dfrac{8!}{6!} = \dfrac{8!}{(8-2)!}$

Exemplo 2:

Quantos números distintos de 3 algarismos distintos podem se formar com os dígitos 3, 5, 7, 8 e 9?

Resolução:

Possibilidades $\dfrac{5}{p_1} \times \dfrac{4}{p_2} \times \dfrac{3}{p_3}$

posições dos dígitos no número

Resposta:

Podem se formar 5 . 4 . 3 = 60 números diferentes com 3 algarismos escolhidos entre os dígitos 3, 5, 7, 8 e 9.

Observação: $5 \, . \, 4 \, . \, 3 = \dfrac{5.4.3.2!}{2!} = \dfrac{5!}{2!} = \dfrac{5!}{(5-3)!}$

Características dos exemplos:

- Os <u>elementos</u> considerados $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são <u>diferentes</u>

- <u>Cada escolha</u> de <u>r</u> elementos $(r \leq n)$ <u>distintos</u> e <u>ordenados</u> entre $a_1, a_2, \ldots, a_n$ corresponde a <u>uma possibilidade</u>

- Na obtenção do número de possibilidades aplica-se os princípios aditivo e multiplicativo

Arranjo simples:

Definição

Dados n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, um arranjo simples de n elementos tomados r a r é uma ordenação de r elementos distintos escolhidos entre $a_1, a_2, \ldots, a_n$, sendo r e n números naturais com $1 \leq r \leq n$.

Ilustração

Dados os dígitos 3, 5, 7, 8 e 9,

398 é um arranjo simples de 5 elementos tomados 3 a 3.

Número de arranjos simples:

Problema:

Dados n elementos distintos, $a_1, a_2, \ldots, a_n$,
encontrar o número de arranjos simples dos
n elementos tomados r a r

Propriedade:

O número de arranjos simples de n elementos distintos tomados r a r, denominado A(n, r), é dado por:

$$A(n, r) = n(n-1)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Observação:

$$P_n = A(n, n) = n!$$

Exemplo 3:

Vários amigos combinaram passar o dia no clube. Planejaram ir para a piscina, fazer um churrasco, jogar volei e tennis. Mas, como chegaram tarde precisaram escolher 3 entre as 4 atividades. De quantas maneiras diferentes poderiam programar essas atividades?

Resolução:

programa : arranjo simples de 3 atividades escolhidas entre 4

número de programas possíveis $A(4, 3) = \dfrac{4!}{(4-3)!} = 4! = 24$

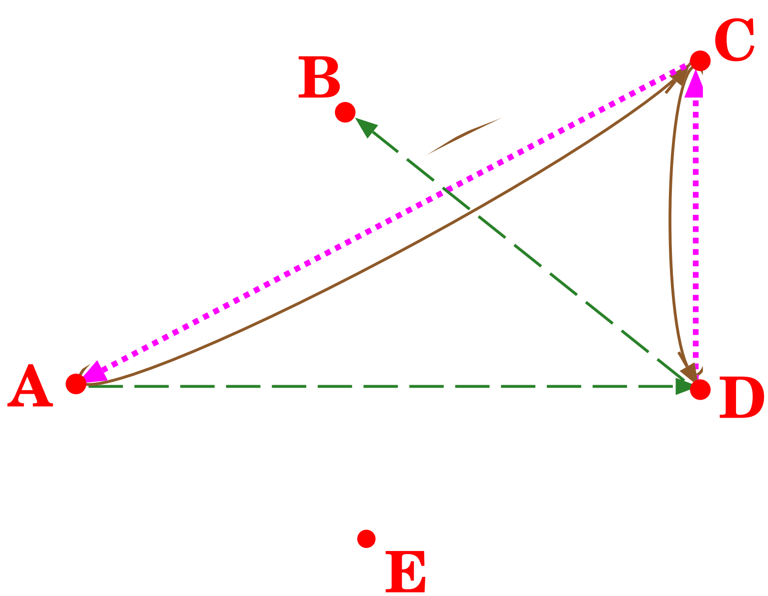
Resposta:

Eles têm 24 maneiras diferentes de fazer um programa.

Exemplo 4:

Uma companhia aérea tem vôos ligando 5 cidades. Cada rota interliga 3 cidades. Calcule o número de rotas diferentes.

- Ilustração



exemplos de rotas

ACD, DCA, ADB

Resolução:

$\overline{}\quad\overline{}\quad\overline{}$

$p_1 \quad p_2 \quad p_3$

posição das cidades
numa rota

rota: arranjo simples de 3 cidades escolhidas entre 5

número de rotas: $A(5, 3) = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Resposta:

A companhia pode ter 60 rotas ligando as 5 cidades.

Exemplo 5:

As placas dos automóveis são formadas por três letras seguidas de quatro dígitos. Quantas placas com letras e números diferentes podem ser formadas?

Resolução:

As letras do alfabeto são 26.

___ ___ ___   ___ ___ ___ ___

posições

letras   números

número de letras = 26

número de letras numa placa = 3

número de dígitos = 10

número de dígitos numa placa = 4

Característica:

$$\underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_}_{\text{letras}}\quad \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{\text{números}}$$

- Pares ordenados de 3 letras e 4 números

Número de possibilidades:

letras números

$$A(26, 3) \times A(10, 4) = \frac{26!}{23!} \cdot \frac{10!}{6!} = 78624 \times 10^3$$

Resposta:

Tem-se 78624000 placas com 3 letras e 4 números diferentes.

Exemplo 6:

Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base 10) existem?

Resolução:

dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

$\cancel{0}$ ___ ___ ___

Raciocínio 1 $\longrightarrow$ $\underbrace{\cancel{0}}_{9} \times \underbrace{\_\_\_\ \_\_\_}_{A(9,\,2)}$

Possibilidades: $9 \times A(9, 2) = 9 \,.\, 9 \,.\, 8 = 648$

Exemplo 6 (raciocínio 2)

Usamos o conceito de complemento:

U: conjunto universo := o conjunto das ordenações de três dígitos

A := conjunto dos números de 3 algarismos

B := conjunto dos elementos de U que iniciam com 0

$$\begin{cases} A = U - B \\ N = |A| = |U| - |B| \end{cases}$$

$$\begin{cases} |U| = A(10, 3) = \dfrac{10!}{7!} \quad , \quad |B| = A(9, 2) = \dfrac{9!}{7!} \\ N = \dfrac{10!}{7!} - \dfrac{9!}{7!} = \dfrac{10.9! - 9!}{7!} = 648 \end{cases}$$

Resposta:

Tem-se 648 números naturais de três algarismos distintos.

Recomendação

Em geral é conveniente começar a análise dos eventos (ou possibilidades) por aquelas que tem algum tipo de impedimento (ou dificuldade).

Exemplo 7:

Quantos números naturais com todos os dígitos distintos ímpares, m, existem entre 1000 e 9999 ($1000 < m < 9999$)?

Resolução:

- Os números m têm 4 dígitos
- Dígitos ímpares: 1, 3, 5, 7, 9

$\_\_\_ \ \_\_\_ \ \_\_\_ \ \_\_\_$
$p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4$

n: quantidade de dígitos ímpares = 5

r: quantidade de dígitos de um número = 4

Possibilidades: $A(5, 4) = \dfrac{5!}{(5-4)!} = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$

Resposta: Existem 120 números com todos os dígitos distintos ímpares entre 1000 e 9999.

Observação

$$A(5, 4) = \frac{5!}{(5-4)!} = 5! = P_5 = A(5, 5) = \frac{5!}{(5-5)!}$$

<u>em geral</u>,

$$A(n, n-1) = A(n, n) = P_n = n!$$

Exemplo 8:

Quantos números pares entre 1000 e 9999 têm dígitos distintos?

Resolução:

$$\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{array}} \qquad \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} 0 \end{array}\right\} \underline{\text{etapa 1}} \\ \left.\begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{array}\right\} \underline{\text{etapa 2}} \end{array}$$

$$p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4$$

M: quantidade de números naturais de 4 dígitos terminados em 0, 2, 4, 6 ou 8

$M = M_1 + M_2$, sendo

M_1: quantidade de números de 4 dígitos terminados em 0 (etapa 1)

M_2: quantidade de números de 4 dígitos terminados em 2, 4, 6 ou 8 (etapa 2)

Exemplo 8 (etapa 1):

Obtenção de M_1, quantidade de números de dígitos distintos, entre 1000 e 9999 terminados em 0:

Possibilidades: $\underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_}_{A(9,\,3)}\ \underline{0}$

como $\quad A(n, r) = n(n - 1) \ldots (n - r + 1)$

$n = 9, \ r = 3$

Resposta da etapa 1:

$$M_1 = A(9, 3) = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

Exemplo 8 (etapa 2):

Obtenção de M_2, quantidade de números de dígitos distintos, entre 1000 e 9999 terminados em 2, 4, 6 ou 8:

$$\begin{array}{cccc} & & & 2\\ & & & 4\\ & & & 6\\ \cancel{0} & & & 8\\ \hline p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{array}$$

ordem da análise das possibilidades $\left\{\begin{array}{l} P_4 \\ P_1 \\ P_2 \text{ e } P_3 \end{array}\right.$

Possibilidades: $\underbrace{8}_{p_1} \times \underbrace{A(8,2)}_{p_2\,p_3} \times \underbrace{4}_{p_4}$

Exemplo 8 (continuação etapa 2):

Possibilidades para p_4 : 4 (2, 4, 6, ou 8)

Possibilidades para p_1 : 8 (dos 10 dígitos elimina-se o 0 e o dígito já usado na posição p_4)

Possibilidades para p_2 e p_3 : $A(8, 2) = 8 \, . \, 7$ (dos 10 dígitos já foram usados 2, então, temos 8 dígitos tomados 2 a 2)

Resposta da etapa 2:

$$M_2 = 8 \, . \, 8 \, . \, 7 \, . \, 4 = 1792$$

Exemplo 8 (análise final):

Enunciado: Quantos números naturais entre 1000 e 9999 têm dígitos distintos e <u>são pares</u>?

Resolução:

$M = M_1 + M_2$, sendo

M: total de números naturais de 4 dígitos terminados em 0, 2, 4, 6 ou 8

M_1: total de números de 4 dígitos terminados em 0 (etapa 1)

M_2: total de números de 4 dígitos terminados em 2, 4, 6 ou 8 (etapa 2)

Resposta:

Como, $M_1 = A(9, 3) = 504$, $M_2 = 8 . 4 . A(8, 2) = 1792$

tem-se que $M = 504 + 1792 = 2296$

Resumo:

Sejam n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Conceito:

Arranjo simples de n objetos tomados r a r.

Características:

Importa os objetos considerados e a posição deles.

(exemplos: $\mathbf{a_1 a_2 \ldots a_r} \neq \mathbf{a_2 a_1 a_3 \ldots a_r} \neq \mathbf{a_2 a_3 \ldots a_r a_{r+1}}$)

Propriedade:

Número de arranjos simples de n objetos tomados r a r:

$$A(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)\ldots(n-r+1)$$

Observação:

$$P_n = A(n, n) = A(n, n-1)$$

cederj

Aula 9: Combinações Simples

Conteúdo:

- Introdução
- Combinação simples
- Número de combinações simples

Introdução:

Exemplo 1:

Numa sala estão reunidas três pessoas, P_1, P_2 e P_3.
De quantas maneiras podemos selecionar duas pessoas?

Reformulação do exemplo:

Seja $A = \{ P_1, P_2, P_3 \}$. Quantos subconjuntos de 2 elementos possui A?

Exemplo 1 (continuação):

Resolução:

$$A = \{ P_1, P_2, P_3 \}$$

N: número de subconjuntos de 2 elementos de A

Raciocínio 1: enumeração dos subconjuntos de A

$$B = \{ \{ P_1, P_2 \}, \{ P_1, P_3 \}, \{ P_2, P_3 \} \}$$

Resposta:

$$N = |B| = n(B) = 3$$

Exemplo 1 (raciocínio 2):

Sem enumeração dos subconjuntos de A

(usando arranjos e permutações)

Os arranjos de 3 elementos tomados 2 a 2 consideram a ordem ! Então, devemos reduzir a 1 possibilidade todas as permutações dos mesmos elementos.

Exemplo 1 (continuação):

A(3, 2):

$$2! = P_2 \left\{ \begin{array}{ccc} P_1, P_2 & P_1, P_3 & P_2, P_3 \\ P_2, P_1 & P_3, P_1 & P_3, P_2 \end{array} \right.$$

1 subconjunto 1 subconjunto 1 subconjunto

Resumindo:

$P_2 \xrightarrow{\text{correspondem}}$ 1 subconjunto

$A(3, 2) \xrightarrow{\text{correspondem}} N = \dfrac{A(3, 2)}{P_2}$ total de subconjuntos

Resposta:

$$N = \frac{A(3, 2)}{P_2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{3\,.\,2!}{2!\,.\,1!} = 3$$

Exemplo 2:

Uma fábrica de sucos está lançando no mercado 5 novos sabores. Como propaganda,cada pessoa pode experimentar 2 sabores diferentes. Quantas opções têm cada um?

Resolução:

S_1, S_2, S_3, S_4, S_5

1 opção: uma escolha de 2 sabores entre 5

(não importa a ordem)

N: número de opções

$P_2 \xrightarrow{\text{da lugar a}}$ 1 opção

$A(5, 2) \xrightarrow{\text{da lugar a}}$ N opções $= \dfrac{A(5, 2)}{P_2}$

Resposta:

$$N = \frac{A(5, 2)}{P_2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10$$

Características dos exemplos

- Os <u>elementos</u> considerados $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são <u>diferentes</u>
- <u>Cada escolha</u> de <u>r</u> elementos <u>distintos</u> (sem importar a ordem) entre $a_1, a_2, \ldots, a_n$ corresponde a <u>uma possibilidade</u>
- Na obtenção do número de possibilidades aplica-se os princípios aditivo e multiplicativo (usa-se os conceitos de arranjos e permutações)

Combinação simples:

Definição:

Dados n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, uma combinação simples de n elementos tomados r a r é uma seleção de r elementos distintos escolhidos entre $a_1, a_2, \ldots, a_n$, não importando a ordem da escolha, sendo r e n números naturais com $1 \leq r \leq n$.

Ilustração:

Dados as pessoas P_1, P_2, P_3,

P_1, P_3 é uma combinação de 3 elementos tomados 2 a 2.

Número de combinações simples:

Problema:

Dados n elementos distintos, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, encontrar o número de combinações simples dos n elementos tomados r a r

Propriedade:

O número de combinações simples de n elementos distintos tomados r a r, denominado $C(n, r)$, é:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \quad \left(= \frac{A(n, r)}{P_r} \right)$$

Observação:

$$C(n, r) = C(n, n-r) = \frac{n!}{(n-r)!\,(n-(n-r))}$$

Exemplo 3:

Um técnico convocou 9 jogadores para um campeonato de vôlei. Para formar a equipe inicial deve escolher 5 jogadores. Quantas opções ele tem?

Resolução:

n = número de jogadores = 9

r = número de jogadores da equipe = 5

$$\textbf{total de opções} = C(9, 5) = \frac{9!}{5!\,(9-5)!} = \frac{9.8.7.6.5!}{5!\,4.3.2} = 9.2.7 = 126$$

Resposta:

O técnico tem 126 opções de formar a equipe inicial.

Exemplo 4:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas?

Resolução:

n = número de professores = 12 + 12 = 24

r = número de professores em uma comissão = 8

N: número de comissões possíveis

Resposta:

Podem ser formadas

$$N = C(24, 8) = \frac{24!}{8!\,16!} = \frac{24.23.22.21.20.19.18.17}{8.7.6.5.4.3.2} = 735471 \text{ comissões.}$$

Exemplo 5:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas havendo 3 professores de matemática?

Resolução:

número de professores = 12 + 12 = 24

número de professores de matemática numa comissão = 3

número de professores de informática numa comissão = 8 − 3 = 5

Possibilidades: $$\underbrace{C(12,3)}_{\substack{\text{matemática} \\ \text{(3 entre 12)}}} \times \underbrace{C(12,5)}_{\substack{\text{informática} \\ \text{(5 entre 12)}}} = \frac{12!}{3!\,9!} \times \frac{12!}{5!\,7!}$$

Resposta:

O número de comissões é 174240.

Exemplo 6:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas havendo pelo menos 1 professor de matemática?

Resolução:

Raciocínio 1:

U: conjunto universo := o conjunto de todas as comissões de 8 professores

A := conjunto de todas as comissões com pelo menos 1 professor de matemática

B := conjunto de todas as comissões sem professor de matemática

Exemplo 6 (continuação):

$$\begin{cases} A = U - B \\ \text{número de comissões} := N = |A| = |U| - |B| \end{cases}$$

$$\begin{cases} |U| = C(24,\, 8)\ ,\ |B| = C(12,\, 8) \\ N = C(24,\, 8) - C(12,\, 8) = \dfrac{24!}{8!\ 16!} - \dfrac{12!}{8!\ 4!} = 734976 \end{cases}$$

Resposta:

O número de comissões possíveis neste caso é 734976.

Exemplo 6 (raciocínio 2):

A_i := conjunto de todas as comissões com i professores de matemática, para $i = 1, 2, \ldots, 8$

$$A = \bigcup_{i=1}^{8} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_8$$

$$N = |A| \overset{\text{princípio}}{\underset{\text{aditivo}}{=}} \sum_{i=1}^{8} |A_i| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_8|$$

$$|A_i| \overset{\text{princípio}}{\underset{\text{multiplicativo}}{=}} C(12, i)\, C(12, 8-i) \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, 8$$

$$N = C(12, 1)\, C(12, 7) + C(12, 2)\, C(12, 6) + C(12, 3)\, C(12, 5) + C(12, 4)\, C(12, 4) + C(12, 5)\, C(12, 3) + C(12, 6)\, C(12, 2) + C(12, 7)\, C(12, 1) + C(12, 8)\, \underbrace{C(12, 0)}_{1}$$

Exemplo 7:

De quantos modos é possível dividir 20 pessoas em um grupo de 12 e um grupo de 8?

Resolução:

Raciocínio 1:

N: modos de dividir 20 em 1 grupo de 12 e outro de 8

⇒ M: quantidade de grupos de 12 dentre 20 = C(20, 12)

⇒ Dado 1 grupo de 12, o grupo de 8 fica definido.

Resposta:

$$N = C(20, 12) = \frac{20!}{12!\,8!}$$

Exemplo 7 (raciocínio 2):

N: modos de dividir 20 em 1 grupo de 12 e outro de 8

- M: quantidade de grupos de 8 dentre 20 = C(20, 8)
- Dado 1 grupo de 8, o grupo de 12 fica definido.

Resposta:

$$N = C(20, 8) = \frac{20!}{8!\ 12!} = C(20, 12)$$

Exemplo 8:

De quantos modos é possível dividir 20 pessoas em 2 grupos de 10 ?

Resolução:

N: modos de dividir 20 em 2 grupos de 10

- M: quantidade de grupos de 10 dentre 20 = C(20, 10)
- Dado 1 grupo de 10, o outro grupo fica definido.

Exemplo 8 (continuação):

Diferença com o exemplo 7:

Os 2 grupos são de 10 pessoas,

(estamos dividindo as 20 pessoas por 2)

- Ilustração:

$p_1, p_2, \ldots, p_{20}$ as pessoas

a escolha $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$ define o outro grupo $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{20}$

a escolha $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{20}$ define o outro grupo $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$

Resposta:

$$N = \frac{C(20, 10)}{2} = \frac{1}{2} \frac{20!}{10!\,10!}$$

Exemplo 9:

Um concurso para professor tem 20 inscritos. Devem ser selecionadas 10 pessoas para realizar a prova em 1 dia e 10 para fazê-la no dia seguinte. De quantos modos é possível fazer a seleção?

Resolução:

Relações com o exercício 8:

- Semelhança: Escolha de 2 grupos de 10 entre 20
- Diferença: Existe uma ordem entre os grupos determinada pelo dia da prova.

Exemplo 9 (continuação):

seleções distintas

$\left\{ \begin{array}{l} \text{a escolha } p_1, p_2, \ldots, p_{10} \text{ (1}^{\text{o}} \text{ dia) define o} \\ \text{grupo } p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{20} \text{ (2}^{\text{o}} \text{ dia)} \\ \text{a escolha } p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{20} \text{ (1}^{\text{o}} \text{ dia) define o} \\ \text{grupo } p_1, p_2, \ldots, p_{10} \text{ (2}^{\text{o}} \text{ dia)} \end{array} \right.$

Resposta:

Tem-se $C(20, 10)$ possibilidades de seleção.

Exemplo 10:

Resposta Voltar

De quantos modos é possível dividir 20 pessoas em 4 grupos de 5?

Resumo:

Sejam n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$

Conceito:

Combinação simples de n objetos tomados r a r.

Característica:

Importa os objetos considerados e não a posição deles.

(exemplos: $\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_r = a_2, a_1, \ldots, a_r}$

$\mathbf{a_2, a_3, \ldots, a_{r+1} \neq a_1, a_2, \ldots, a_r}$)

Propriedade:

Número de combinações de n objetos tomados r a r.

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Observação: $C(n, r) = C(n, n - r)$

Aula 10 : Permutações com Repetição

Conteúdo:

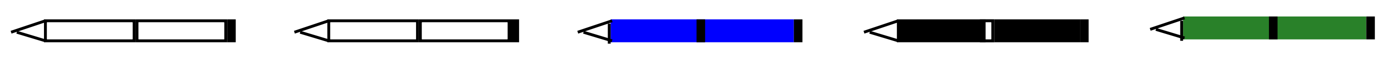
- Introdução
- Permutação com repetição
- Número de permutações com repetição

Introdução:

Exemplo 1:

Comprei 5 lapiseiras, 2 brancas, 1 azul, 1 preta e 1 verde, para dar de presente a meus amigos João, Rita, Luiza, Gabriel e Felipe. De quantas maneiras diferentes eu posso distribuí-las?

- Ilustração:



uma possibilidade

João Rita Luiza Gabriel Felipe

- Observações:
  - A troca de lapiseiras entre João e Luiza modifica a distribuição.
  - A troca de lapiseiras entre João e Rita não modifica a distribuição.

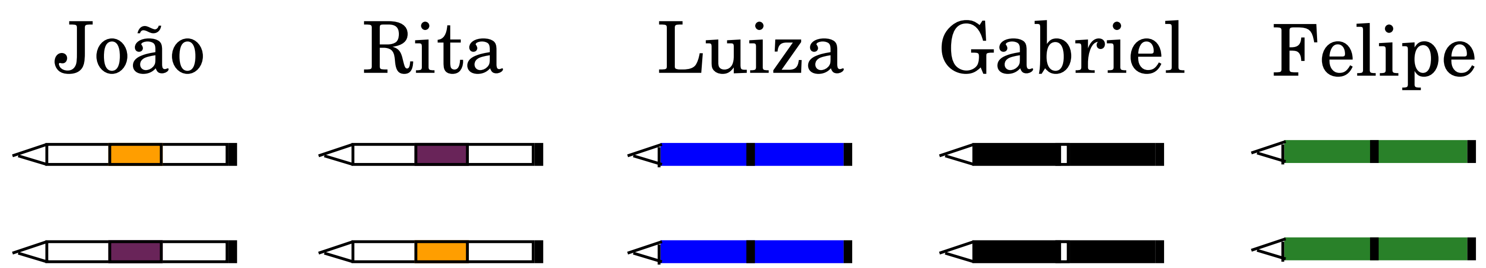
Exemplo 1 (continuação):

Resolução:

Raciocínio (baseado em permutações simples)

Etapa 1: Calculamos o número de distribuições considerando que marcamos cada lapiseira branca para diferenciá-las.

Ilustração:

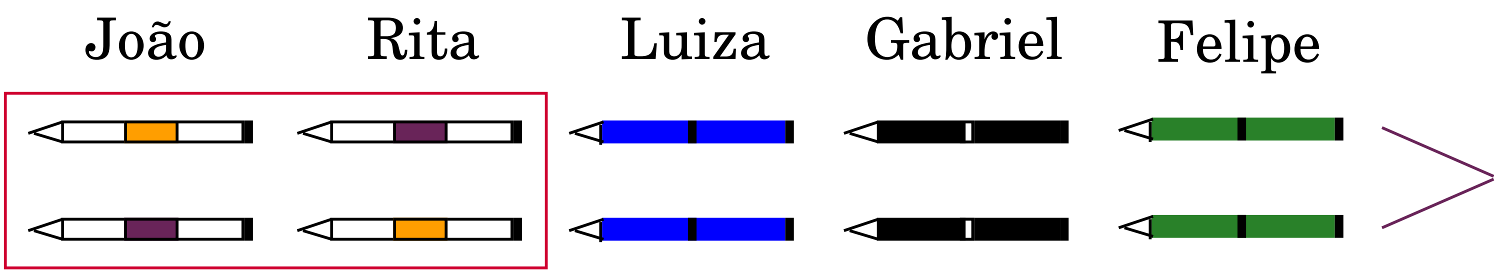


Número de distribuições marcadas: $P_5 = 5!$

Exemplo 1 (continuação):

Atenção, estamos considerando distribuições iguais como sendo diferentes!

- Ilustração:



Etapa 2: Reduzimos as distribuições repetidas

$$P_2 = 2 \xrightarrow{\text{correspondem}} 1 \text{ distribuição}$$

$$\text{(etapa 1) } P_5 \xrightarrow{\text{correspondem}} \frac{P_5}{P_2} = \frac{5!}{2} \text{ total de distribuições}$$

Resposta: Posso distribuir as lapiseiras para meus amigos de $\frac{5!}{2} = 60$ modos diferentes.

Exemplo 2:

Quantos números distintos de 6 algarismos podem ser formados usando-se o dígito 1 três vezes, o dígito 3 duas vezes e o dígito 9 uma vez?

- Ilustração:

133191 é uma possibilidade

Resolução:

Raciocínio 1 (baseado em permutações simples)

Raciocínio 2 (baseado em combinações simples)

Exemplo 2 (continuação):

Raciocínio 1 (baseado em permutações simples)

Etapa 1: Consideramos como sendo diferentes os números repetidos (os marcamos). Calculamos o número total de ordenamentos.

Ilustração:

1 3 3 1 9 1

1 3 3 1 9 1

Número de ordenamentos diferentes de algarismos marcados: $P_6 = 6!$

Atenção,

estamos considerando números iguais como sendo diferentes!

Exemplo 2 (continuação raciocínio 1):

Etapa 2: Reduzimos os casos iguais considerados como diferentes na etapa 1.

Ilustração:

1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1 — 1 3 3 1 9 1 — 1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1

são iguais a $\boxed{133191}$

$$P_3 \;\times\; \text{P.M.} \;\; P_2 \;\times\; \text{P.M.} \;\; P_1$$

$P_3 \times P_2 \times P_1$ permutações simples $\xrightarrow{\text{correspondem}}$ 1 número

(etapa1) P_6 permutações simples $\xrightarrow{\text{correspondem}}$ $\dfrac{P_6}{P_3 \times P_2 \times P_1} = \dfrac{6!}{3!\,2!\,1!}$ total de números distintos

Exemplo 2 (continuação):

Raciocínio 2 (baseado em combinações simples)

- Observação: dois números são diferentes quando as posições dos algarismos diferentes estão trocados (131139 é diferente de 311139).

Reformulação do problema:

De quantas maneiras diferentes podemos colocar três 1, dois 3 e um 9 em 6 posições?

Exemplo 2 (continuação raciocínio 2):

Etapa 1: Consideramos somente as possíveis posições dos três 1. Calculamos todos os modos de colocar os três 1 em 6 posições.

- Ilustração:

$$\underline{\;1\;}\quad\underline{\;\;\;}\quad\underline{\;1\;}\quad\underline{\;1\;}\quad\underline{\;\;\;}\quad\underline{\;\;\;}$$

$$\underline{\;1\;}\quad\underline{\;\;\;}\quad\underline{\;1\;}\quad\underline{\;\;\;}\quad\underline{\;1\;}\quad\underline{\;\;\;}$$

N_1: número de modos de colocar três 1 em 6 posições

$N_1 = C(6, 3)$

Exemplo 2 (continuação raciocínio 2):

Etapa 2: Fixada uma posição para os três 1, consideramos as possíveis posições dos dois 3 nos lugares restantes.

- Ilustração: **1 3 1 1 3 9**

  1 3 1 1 9 3

N_2: número de modos de colocar os dois 3 em 3 lugares

$N_2 = C(3, 2)$

Etapa 3: Fixada uma posição para os três 1 e os dois 3, consideramos as possíveis posições para o 9.

N_3: número de modos de colocar o 9 em 1 lugar $= C(1, 1)$

Exemplo 2 (continuação raciocínio 2):

Resumindo

Etapa 1 — Etapa2 — Etapa3

$$\underbrace{\frac{1}{p_1}\;\frac{\;}{p_2}\;\frac{1}{p_3}\;\frac{1}{p_4}\;\frac{\;}{p_5}\;\frac{\;}{p_6}}_{N_1=C(6,3)} \rightarrow \times\ \text{P.M.} \quad \underbrace{\underline{1}\;\underline{3}\;\underline{1}\;\underline{1}\;\underline{3}\;\underline{\;\;}}_{N_2=C(3,2)} \rightarrow \times\ \text{P.M.} \quad \underbrace{\underline{1}\;\underline{3}\;\underline{1}\;\underline{1}\;\underline{3}\;\underline{9}}_{N_3=C(1,1)}$$

Resposta: O número total de possibilidades são

$$N_1 \times N_2 \times N_3 = \frac{6!}{3!\,3!}\cdot\frac{3!}{2!\,1!}\cdot\frac{1!}{1!\,0!} = \frac{6!}{3!\,2!\,1!} = \frac{P_6}{P_3 P_2 P_1}$$

Observação:

$$3 + 2 + 1 = 6$$

Características:

- Os elementos considerados não são necessariamente diferentes.
- Os elementos iguais são indistinguíveis
- Cada troca de posição (de ordem) dos elementos distinguíveis corresponde a uma possibilidade

  (não são consideradas as permutações dos elementos iguais).
- Na obtenção do número de possibilidades aplica-se os princípios aditivo e multiplicativo.

Permutação com repetição:

Definição

Entre n objetos dados tem-se n_1 elementos iguais a a_1, n_2 elementos iguais a a_2, ... , n_r elementos iguais a a_r, sendo $a_1, a_2, \ldots, a_r$ diferentes e $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$.

Uma permutação com repetição destes n objetos é uma ordenação desses elementos onde não são consideradas as permutações entre os elementos iguais.

Ilustração

Exemplo 2: $a_1 = 1$, $n_1 = 3$, $a_2 = 3$, $n_2 = 2$, $a_3 = 9$, $n_3 = 1$ $(r = 3)$

$$n = n_1 + n_2 + n_3 = 3 + 2 + 1 = 6,$$

permutações com repetição diferentes: 131139 e 311139

Número de permutações com repetição:

Problema

Dados n objetos tais que n_1 elementos são iguais a a_1, n_2 elementos são iguais a a_2 , ... , n_r elementos são iguais a a_r e n = $n_1 + n_2 + \ldots + n_r$,
encontrar o número de permutações com repetição.

Propriedade

O número de permutações com repetição de n elementos sendo n_1 iguais a a_1, n_2 iguais a a_2, ... , n_r iguais a a_r e
$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$, é dado por: $P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}$

Número de permutações com repetição:

Ilustração

exemplo 2: $$P_6^{3,\,2,\,1} = \frac{6!}{3!\;2!\;1!}$$

Outra notação:

$$PR\,(n;\, n_1,\, \ldots\,,\, n_r)$$

Observação: se $n = r$ e $n_1 = n_2 = \cdots = n_r = 1$

então $P_n^{n_1,\,\ldots\,,\,n_r} = P_n^{1,\,\ldots\,,\,1} = P_n$

Exemplo 3:

Um time de futebol jogou 15 partidas em um campeonato. Venceu 7 jogos, perdeu 5 e empatou 3. De quantos modos isto pode ter acontecido?

Resolução: $n=15$, a_1 = jogo vencido, $n_1 = 7$

a_2 = jogo perdido, $n_2 = 5$

a_3 = jogo empatado, $n_3 = 3$

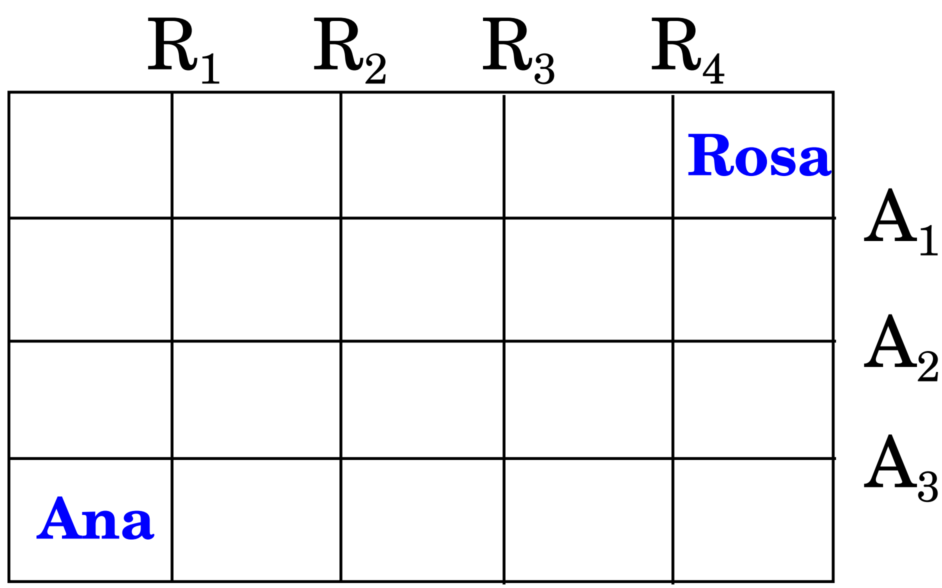
N: total das possíveis sequências de jogos vencidos, perdidos e empatados.

$$N = P_{15}^{7,\,5,\,3} = \frac{15!}{7!\;5!\;3!} = 360360$$

Resposta: O número de modos em que o time venceu, perdeu e empatou é $N = 360360$

Exemplo 4:

Ana e Rosa moram em vértices opostos de um retângulo. Ana precisa atravessar 3 avenidas e 4 ruas para chegar à casa de Rosa. Quantos caminhos diferentes unem as casas de Ana e de Rosa?



Exemplo 4 (continuação):

- Observação:

Cada caminho, a partir da casa de Ana até a de Rosa, pode ser representado por uma sequência de 0 e de 1 com o seguinte significado:

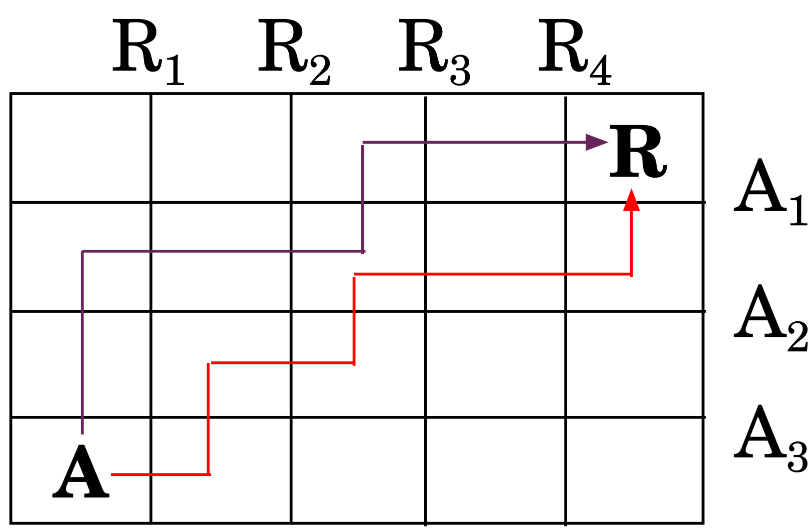
0 : atravessa 1 rua (R_1, R_2, R_3 ou R_4)

1 : atravessa 1 avenida (A_1, A_2 ou A_3)

- Ilustração:

0 1 0 1 0 0 1

1 1 0 0 1 0 0



Exemplo 4 (continuação):

Reformulação do problema:

Quantas sequências diferentes podem ser formados com quatro 0 e três 1 ?

Resolução:

Cada sequência corresponde a uma permutação com repetição.

$$n_1 = 4 \ \ (a_1 = 0)\ , \ \ n_2 = 3 \ \ (a_2 = 1)\ , \ \ n = 7$$

Resposta (problema reformulado):

O número de sequências diferentes é $P_7^{4,\,3} = \dfrac{7!}{4!\;3!} = 35.$

Resposta do problema:

As casas de Ana e Rosa estão unidas por 35 caminhos diferentes.

Exemplo 5:

Quantos são os anagramas da palavra MAMBEMBE que começam com vogal?

Resolução:

$$\left.\mathbf{A}\right\}\ \text{etapa 1}$$

$$\left.\frac{\mathbf{E}}{p_1}\ \frac{\quad}{p_2}\ \frac{\quad}{p_3}\ \frac{\quad}{p_4}\ \frac{\quad}{p_5}\ \frac{\quad}{p_6}\ \frac{\quad}{p_7}\ \frac{\quad}{p_8}\right\}\ \text{etapa 2}$$

N: número de anagramas que começam com vogal

N_1: número de anagramas que começam com A

N_2: número de anagramas que começam com E

$N = N_1 + N_2$

Exemplo 5 (continuação):

Etapa 1: (MAMBEMBE)

$$\underline{\mathbf{A}}\ \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{\text{7 letras: 3 M, 2 B, 2 E}} \qquad N_1 = P_7^{3,\,2,\,2} = \frac{7!}{3!\;2!\;2!}$$

Etapa 2:

$$\underline{\mathbf{E}}\ \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{\text{7 letras: 3 M, 2 B, 1 E, 1 A}} \qquad N_2 = P_7^{3,\,2,\,1,\,1} = \frac{7!}{3!\;2!\;1!\;1!}$$

Resposta: O número de anagramas de MAMBEMBE que começam com vogal são $N = \dfrac{7!}{3!\;2!}\left(\dfrac{1}{2} + 1\right) = 630$.

Exemplo 6:

Quantos são os anagramas da palavra MAMBEMBE que não possuem duas ou três letras M juntas?

- Ilustração:

MAMBEMBE, AMBMEMBE são possíveis anagramas

AMMBEMBE, AMMMBEBE não são anagramas possíveis para o problema

Exemplo 6 (continuação):

Resolução:

N: número de anagramas que não possuem duas ou três letras M juntas.

Etapa 1: Consideramos as letras de MAMBEMBE diferentes de M e calculamos o número de ordenamentos.

- Observação: cada ordem das letras A (1 vez), B (2 vezes) e E (2 vezes) é 1 permutação com repetição:

$$n_1 = 1 \ (a_1 = A)\ ,\ n_2 = 2 \ (a_2 = B)\ ,\ n_3 = 2 \ (a_3 = E)\ ,\ n = 5$$

⇨ Conclusão 1: O número de ordens diferente de A, B, E, B e E é $P_5^{2,\,2,\,1}$.

Exemplo 6 (continuação):

Etapa 2: Fixada uma permutação de A (1 vez), B (2 vezes) e E (2 vezes), calculamos as possibilidades de intercalar nessa permutação cada M(3).

- Ilustração: • E • A • B • B • E •

  lugares possíveis para colocar M(3)

- Observações:
  - Para cada permutação com repetição temos 6 lugares possíveis para colocar a letra M
  - Devemos escolher 3 lugares entre 6 para colocar as 3 letras M

- Conclusão 2: Fixada uma permutação de A(1), B(2) e E(2), temos C(6, 3) maneiras de colocar as letras M(3).

Exemplo 6 (continuação):

- Conclusão do problema:

1 permutação com repetição de A, B e E $\xrightarrow[\textbf{(etapa 2)}]{\textbf{gera}}$ C(6, 3) anagramas

total de permutações com repetição $P_5^{2,\,2,\,1}$ $\xrightarrow[\textbf{(P. M.)}]{\textbf{geram}}$ $P_5^{2,\,2,\,1} \times C(6, 3) = N$

(etapa 1)

$$\left(\frac{5!}{2!\,2!\,1!} \times \frac{6!}{3!\,3!}\right)$$

Resposta:

O número de anagramas da palavra MAMBEMBE que não possuem duas ou três letras M juntas são 600.

Desafio:

Tente resolver o exemplo 6 usando o seguinte raciocínio:

Etapa 1: Calcule o número de todos os anagramas de MAMBEMBE (incluindo aqueles em que aparecem 2 ou 3 letras M juntas), N_1.

Etapa 2: Calcule o número de anagramas onde aparecem exatamente duas M juntas, N_2.

(MMMABEBE não é um anagrama desta etapa)

Etapa 3: Calcule o número de anagramas onde aparecem exatamente três M juntas, N_3.

Conclusão:

$$N = N_1 - N_2 - N_3$$ (pelo princípio aditivo)

Resumo:

Sejam <u>n</u> objetos tais que n_1 entre eles são <u>iguais</u> a a_1, n_2 são <u>iguais</u> a a_2, ... , n_r são <u>iguais</u> a a_r, sendo $a_1 \ldots a_r$ <u>diferentes</u> e <u>n</u> = $n_1 + n_2 + \ldots + n_r$.

Conceito:

Permutação com repetição

Característica: importa a posição dos objetos diferentes.

$$(\underbrace{a_1, a_1, \ldots, a_1}_{n_1}, \underbrace{a_2 \ldots a_2}_{n_2} \ldots \underbrace{a_r, \ldots a_r}_{n_r} \neq \underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n_1 - 1}, a_2\ a_1 \underbrace{a_2 \ldots a_2}_{n_2 - 1} \ldots \underbrace{a_r \ldots a_r}_{n_r})$$

Propriedade:

Número de permutações com repetição

$$P_n^{n_1, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \ldots n_r!}$$

Aula 11 : Arranjos com Repetição

Conteúdo:

- Introdução
- Arranjo com repetição
- Número de arranjos com repetição

Introdução:

Exemplo 1:

Um prédio tem 8 portas. De quantas maneiras 1 pessoa pode entrar e sair?

- Observemos que a pessoa pode entrar e sair pela mesma porta.

Resolução:

Possibilidades $N = \underset{\text{entrada}}{\underline{8}} \underset{\text{P.M}}{\times} \underset{\text{saída}}{\underline{8}} = 8^2$

Interpretação do princípio multiplicativo aqui usada:

Se o evento "entrar por 1 porta" pode ocorrer de 8 maneiras e o evento "sair por 1 porta" pode ocorrer de 8 maneiras então o par de eventos, primeiro "entrar" e depois "sair", podem ocorrer de 8×8 maneiras.

Exemplo 1 (continuação):

- Outra interpretação do princípio multiplicativo (baseada em conjuntos):

$$A = \{ P_1, \dots , P_8 \} , \qquad n(A) = |A| = 8$$

(P_i, P_j) representa entrada P_i e saída P_j,para i, j = 1, ... ,8.

$$\mathbf{A \times A = \underbrace{\{ (P_1, P_1), (P_1, P_2), \dots ,(P_1, P_8), (P_2, P_1), \dots ,(P_8, P_7), (P_8, P_8) \}}_{\text{todas as possibilidades de entrar e sair}}}$$

$$N = |A \times A| \overset{\text{P.M.}}{=} |A| \times |A| = 8^2$$

Resposta:

Uma pessoa pode entrar e sair de 64 maneiras diferentes.

cederj

Exemplo 2:

Quantos números distintos de 3 algarismos podem se formar com os dígitos 3, 5, 7, 8 e 9?

Resolução:

- Ilustração:

$(\underbrace{\mathbf{3}}_{\mathbf{p_1}}, \underbrace{\mathbf{5}}_{\mathbf{p_2}}, \underbrace{\mathbf{5}}_{\mathbf{p_3}})$ representa $\underset{\mathbf{p_1}}{\underline{\mathbf{3}}}\ \underset{\mathbf{p_2}}{\underline{\mathbf{5}}}\ \underset{\mathbf{p_3}}{\underline{\mathbf{5}}}$ (posições dos dígitos no número)

$A = \{ 3, 5, 7, 8, 9 \}$

$A \times A \times A = \{ (u, v, w) \mid u \in A, v \in A, w \in A \}$ = conjunto de possibilidades

$$\mathbf{N} = |\mathbf{A} \times \mathbf{A} \times \mathbf{A}| \overset{\text{P.M.}}{=} |\mathbf{A}| \times |\mathbf{A}| \times |\mathbf{A}| = |\mathbf{A}|^3 = \mathbf{5}^3$$

(pois $A \times A \times A = (A \times A) \times A$, logo $|A \times A \times A| = |(A \times A) \times A| \overset{\text{P.M.}}{=} |A \times A| \times |A| \overset{\text{P.M.}}{=} |A| \times |A| \times |A|$)

Resposta: Podem se formar $\mathbf{5^3 = 125}$ números diferentes com 3 algarismos escolhidos entre 3, 5, 7, 8 e 9.

Exemplo 3:

Quantos números distintos de 8 algarismos podem se formar com os dígitos 3, 5, 7, 8 e 9?

Resolução:

$$A = \{3, 5, 7, 8, 9\}\ , \qquad |A| = 5$$

representamos um número de 8 algarismos por:

$$(\underset{p_1}{\ }, \underset{p_2}{\ }, \underset{p_3}{\ }, \underset{p_4}{\ }, \underset{p_5}{\ }, \underset{p_6}{\ }, \underset{p_7}{\ }, \underset{p_8}{\ })$$

- Ilustração:

$$\mathbf{35789359} \xleftrightarrow{\text{associado}} (\mathbf{3}, \mathbf{5}, \mathbf{7}, \mathbf{8}, \mathbf{9}, \mathbf{3}, \mathbf{5}, \mathbf{9}) \in \underbrace{\mathbf{A} \times \mathbf{A} \times \ldots \times \mathbf{A}}_{8}$$

conjuntode possibilidades: $\mathbf{B} = \underbrace{\mathbf{A} \times \mathbf{A} \times \mathbf{A} \times \mathbf{A} \times \mathbf{A} \times \mathbf{A} \times \mathbf{A} \times \mathbf{A}}_{8}$

Resposta: Pelo princípio multiplicativo podem se formar

$|B| = |A|^8 = 5^8$ números de 8 algarismos com 3, 5, 7, 8 e 9.

Características dos exemplos:

- Os <u>elementos</u> considerados $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são <u>diferentes</u>
  ($A = \{ a_1, a_2, \ldots , a_n \}$)

- <u>Cada escolha</u> de <u>r</u> elementos <u>ordenados</u>, <u>repetidos ou não</u>, de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ corresponde a <u>uma possibilidade</u>
  (os r elementos ordenados correspondem a 1 r-upla do conjunto $B = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{r}$)

- Na obtenção do número de possibilidades aplica-se o princípio multiplicativo.
  ($N = |B|$)

Arranjo com repetição:

Definição

Dados n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, um arranjo com repetição de n elementos tomados r a r é uma ordenação de r elementos escolhidos entre $a_1, a_2, \ldots, a_n$, que podem ser repetidos.

(não são consideradas permutações entre elementos iguais)

Ilustração

- 357, 989, 998 são arranjos com repetição de 5 elementos, 3, 5, 7, 8 e 9, tomados 3 a 3.
- 35789359 é um arranjo com repetição de 5 elementos, 3, 5, 7, 8 e 9 tomados 8 a 8.

Observação: Pode ser $r \leq n$ ou $r > n$.

Observação

Número de escolhas dos exemplos anteriores:

Exemplo 1	**Exemplo 2**	**Exemplo 3**
2 entre 8 portas	3 entre 5 algarismos	8 entre 5 algarismos

Resposta:

8^2	5^3	5^8

Número de arranjos com repetição:

Problema:

Dados n elementos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$,

encontrar o número de arranjos com repetição de n elementos tomados r a r

Propriedade:

O número de arranjos com repetição de n elementos distintos tomados r a r, denominado A_n^r, é dado por:

$$A_n^r = n^r$$

Observação:

$$A_n^r = \Big|\underbrace{A \times \ldots \times A}_{r}\Big| \quad \text{onde } A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$$

Ilustração:

Exemplo 1: $A_8^2 = 8^2$ $(\ n = 8,\ \ r = 2\ )$

Exemplo 2: $A_5^3 = 5^3$ $(\ n = 5,\ \ r = 3\ )$

Exemplo 3: $A_5^8 = 5^8$ $(\ n = 5,\ \ r = 8\ )$

Outras notações:

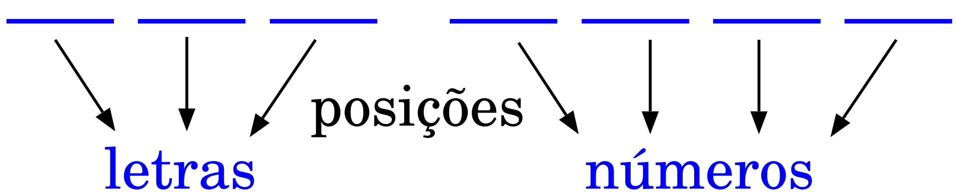
$$AR_n^r\ ,\ \ AR(n, r)$$

Exemplo 4:

As placas dos automóveis são formadas por três letras seguidas de quatro dígitos. Quantas placas podem ser formadas?

Resolução:

As letras do alfabeto são 26.



número de letras = 26

número de letras numa placa = 3

número de dígitos = 10

número de dígitos numa placa = 4

Exemplo 4 (continuação):

Característica:

___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

letras números

- Sequências ordenadas de 3 letras e 4 números que podem ser repetidos.

Número de possibilidades:

letras números

$$A_{26}^{3} \underset{\text{P.M.}}{\times} A_{10}^{4} = 26^3 \times 10^4 = 17576 \times 10^4$$

Resposta:

Tem-se 175.760.000 placas diferentes com 3 letras e 4 números.

Exemplo 5:

Quantos números naturais de 3 algarismos, na base 10, existem?

Resolução:

dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

$\underline{\cancel{0}}$ ___ ___ os dígitos podem ser iguais

Possibilidades: $\underbrace{\underline{\cancel{0}}}_{9} \times \underbrace{\_\_\_\ \_\_\_}_{A^{2}_{10}}$

$$9 \times A^{2}_{10} = 9 \times 10^{2} = 900$$

Resposta:

Tem-se 900 números naturais de 3 algarismos.

Exemplo 6:

Quantos números naturais ímpares, m, existem entre 1000 e 9999 ($1000 < m < 9999$)?

Resolução:

$$|U| = \underset{p_1}{\underline{9}} \times \underset{p_2}{\underline{}}\ \underset{p_3}{\underline{}}\!\!A^2_{10} \times \underset{p_4}{\underline{5}}$$

- dígitos ímpares: 1, 3, 5, 7, 9
- dígitos na posição p_1 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- dígitos na posição p_4 : 1, 3, 5, 7, 9 (excluímos 9999)
- dígitos nas posições p_2 e p_3 : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- $U = \{ p \in \mathbb{N} \mid p \text{ ímpar}, 1001 \leq p \leq 9999\}$, $B = \{ 9999 \}$

Possibilidades: $|U - B| \underset{\text{P.A.}}{=} |U| - |B| = 9 \times 10^2 \times 5 - 1$

Resposta:

Existem 4499 números ímpares entre 1000 e 9999.

cederj

Preliminares para os próximos exemplos:

Representação decimal dos números

Ilustração:

- $30{,}25: \; 3 \times 10^{1} + 0 \times 10^{0} + 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$
- $-\frac{1}{3} = -0{,}333\ldots3\ldots : -[3 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} + \ldots + \underbrace{3 \times 10^{-k}}_{\text{termo geral}} + \ldots] =$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} 3 \times 10^{-k}$$

- $\pi = 3{,}1415926\ldots :$

$$3 \times 10^{0} + 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-4} + 9 \times 10^{-5} + \ldots$$

Observação:

Os números racionais admitem uma representação decimal com finitos dígitos ou com infinitos dígitos periódicos. Os números irracionais admitem uma representação decimal com infinitos dígitos não periódicos.

Preliminares (continuação):

Representação binária

Ilustração:

- Expressão binária de 30,25 : 11110,01

$$(30{,}25 = 1 \times 2^{4} + 1 \times 2^{3} + 1 \times 2^{2} + 1 \times 2^{1} + 0 \times 2^{0} + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2})$$

- Expressão binária de $-\dfrac{1}{3}$: $-0{,}010101 \ldots 01\ldots$ (binário periódico)

$$\left(-\frac{1}{3} = -[\,0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} + \ldots + + 0 \times 2^{-(2n-1)} + 1 \times 2^{-2n} + \ldots\,]\right)$$

- Expressão binária de π : 11,001001000011... (binário não periódico)

Arranjos com repetição: *Número de arranjos*

Preliminares (continuação):

Representação

Número real	decimal	decimal em aritmética de ponto flutuante	binária	binária em aritmética de ponto flutuante
30,25	30,25	$10^{2} \times 0{,}3025$	11110,01	$2^{5} \times 0{,}1111001$
$-\dfrac{1}{3}$	$-0{,}333 \ldots 3\ldots$	$-10^{0} \times 0{,}33\ldots33\ldots$	$-0{,}0101 \ldots 01\ldots$	$-2^{-1} \times 0{,}101010\ldots10\ldots$
π	3,1415926...	$10^{1} \times \boxed{0{,}31415}$	11,001001000...	$2^{2} \times \boxed{0{,}110010010\ldots}$

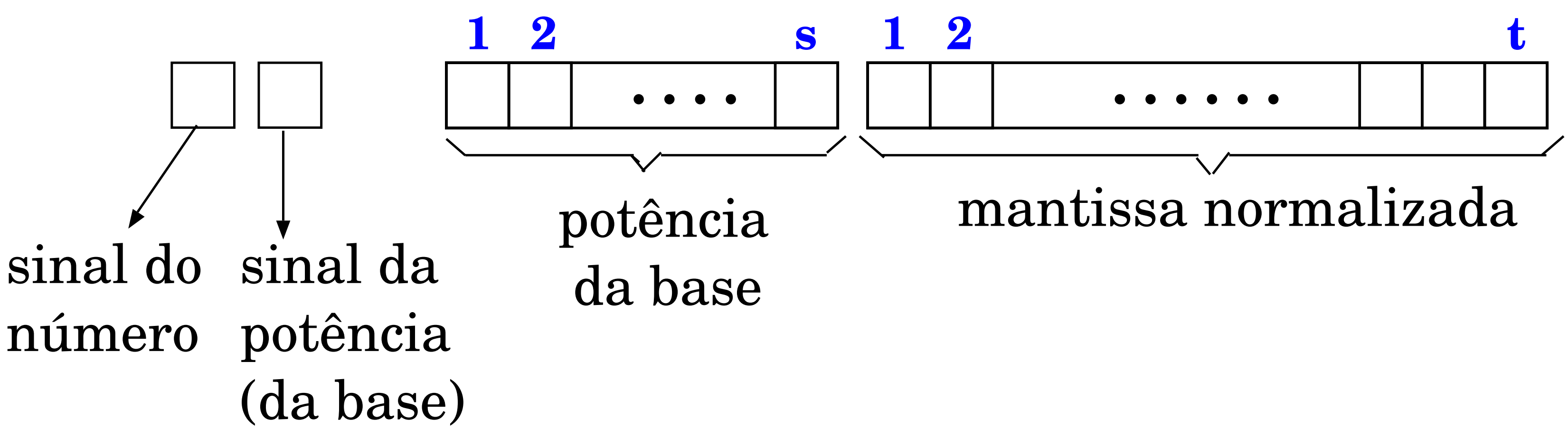
potência de 10 — mantissa normalizada decimal — potência de 2 — mantissa normalizada binária

Característica de uma mantissa normalizada: o <u>primeiro</u> decimal (ou binário) é <u>diferente</u> de <u>0</u>

Preliminares (continuação):

- Representação dos números no computador

Os <u>números</u> são <u>armazenados</u> em um computador (ou calculadora) em uma <u>palavra</u>



Sinal do número ou da potência: 0 : + , 1 : −

s : tamanho da potência

t : tamanho da mantissa

Preliminares (continuação):

- Ilustração

Armazenamos os números –30,3125 e 0,0263671875 numa máquina

(a) decimal com s = 2, t = 8

(b) binária com s = 4, t = 8

(a)

$$\boxed{1}\ \boxed{0}\ \underbrace{\boxed{0|2}}_{2}\ \underbrace{\boxed{3|0|3|1|2|5|0|0}}_{8}$$

$-30{,}3125 = -10^{2} \times 0{,}303125$

(número armazenado exatamente)

$$\boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{0|1}\ \boxed{2|6|3|6|7|1|8|7}\ \cancel{5}$$

$0{,}0263671875 = 10^{-1} \times 0{,}263671875$

(truncamento do número)

Preliminares (continuação):

(b) binária com s = 4, t = 8

$\boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{0|1|0|1}\ \boxed{1|1|1|1|0|0|1|0}\ \cancel{1}$ $-30{,}3125 \xrightarrow[\text{bin.}]{\text{repr.}} -11110{,}0101 =$

(truncamento do número)

$= -2^5 \times 0{,}111100101$

$(5 \xrightarrow[\text{bin.}]{\text{repr.}} 101)$

$\boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{0|1|0|1}\ \boxed{1|1|0|1|1|0|0|0}$ $0{,}0263671875 \xrightarrow[\text{bin.}]{\text{repr.}} 0{,}0000011011 =$

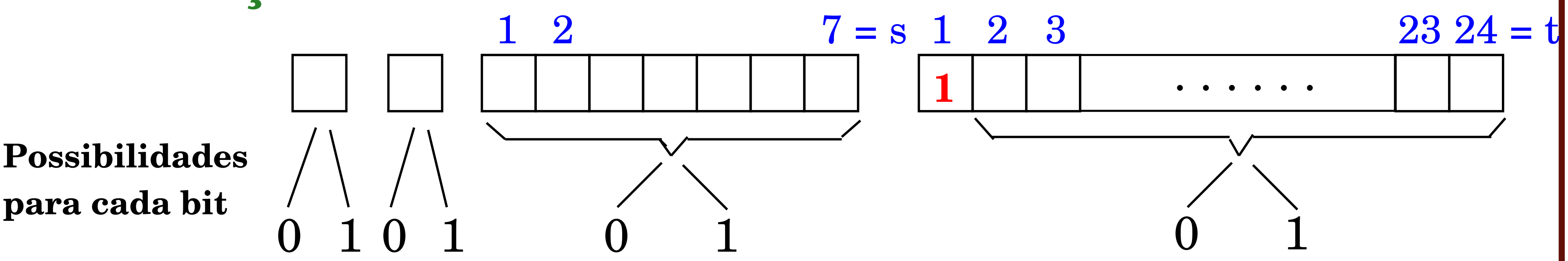
(número armazenado exatamente)

$= 2^{-5} \times 0{,}11011$

Exemplo 7:

Considere uma máquina binária (Intel 8087) que armazena os números em uma palavra com 24 bits para a mantissa, 7 bits para a potência de 2, 1 bit para o sinal da potência e 1 bit para o sinal do número. Quantos números são armazenados exatamente nesta máquina?

Resolução:



$$n = 2 \quad (0, 1) \quad , \quad r = \underbrace{1}_{\text{sinal número}} + \underbrace{1}_{\text{sinal potência}} + \underbrace{7}_{\text{potência}} + \underbrace{23}_{\text{mantissa}} = 32$$

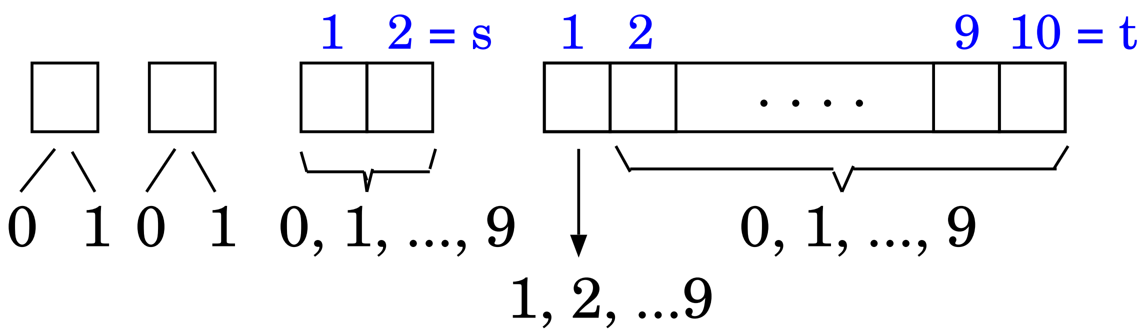
Resposta: Nesta máquina são armazenados exatamente $A_2^{32} = 2^{32} = 4.294.967.296$ números.

Exemplo 8:

Seja uma máquina <u>decimal</u> (HP-11C) cuja palavra tem s = 2 e t = 10. Quantos números são armazenados exatamente nesta máquina?

Resolução:

Possibilidades para cada posição



Possibilidades:

- sinais: $A_2^2 = 2^2$
- primeira posição da mantissa (normalizada) : 9
- posições restantes da mantissa e da potência : $A_{10}^{2+9} = A_{10}^{11} = 10^{11}$

Resposta: Pelo princípio multiplicativo tem-se $2^2 \times 9 \times 10^{11}$ números armazenados exatamente.

Observação: $2^2 \times 9 \times 10^{11} > 2^2 \times 2^2 \times (2 \times 4)^{11} = 2^{37} > 2^{32}$

Resumo:

Considere n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($A = \{a_1, \ldots, a_n\}$).

Conceito:

Arranjo com repetição de n objetos tomados r a r

Características:

Importa os objetos considerados, as suas repetições e a posição dos elementos distinguíveis.

(exemplos: $\underbrace{a_1a_1a_1a_2a_3 \ldots a_{r-2}}_{r} \neq \underbrace{a_1a_2 \ldots a_{r-2}a_1a_1}_{r} \neq a_1a_2a_3 \ldots a_{r-2}a_{r-1}a_r$)

Propriedade:

Número de arranjos com repetição de n objetos tomados r a r : $A_n^r = n^r = |\underbrace{A \times \ldots \times A}_{r}|$

Observação: $r \leq n$ ou $r > n$

Aula 12 : Combinações com Repetição

Conteúdo:

- Introdução
- Combinação com repetição
- Número de combinações com repetição

Introdução:

Exemplo 1 (revisão):

De quantos modos podemos colocar três binários iguais a 1 e cinco iguais a 0 em 8 posições?

Resolução 1:

Raciocínio 1 (usando permutações com repetição)

- Ilustração

1	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8

Observação:

Cada possibilidade corresponde a uma seqüência de 8 binários com três 1's e cinco 0's.

Exemplo 1 (raciocínio 1):

- Reformulação 1

Quantas seqüências de 8 números binários com exatamente três 1's e cinco 0's podem ser formados?

elementos: binários (0, 1)

Resposta 1:

O número de seqüências de 8 binários com 3 iguais a 1 e 5 iguais a 0 corresponde ao número de permutações com repetição de 8 elementos com 3 iguais a 1 e 5 iguais a 0, ou seja, $P_8^{3,5} = \dfrac{8!}{3!\,5!} = 56$

Exemplo 1 (continuação):

- Observação:

Outros enunciados equivalentes:

1 - Quantas seqüências de 8 números binários com exatamente três 1's podem ser formuladas?

2 - Quantas seqüências de 8 números binários com exatamente cinco 0's podem ser formuladas?

Exemplo 1 (resolução 2):

De quantos modos podemos colocar três binários iguais a 1 e cinco iguais a 0 em 8 posições?

Raciocínio 2: (usando combinações simples)

- Ilustração

0	1	0	0	1	1	0	0
p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8

Atenção: Fixadas as posições para os três 1's automaticamente estão fixadas as posições para os cinco 0's

Reformulação 2

De quantos modos podemos selecionar 3 posições entre 8?

elementos diferentes: posições (p_1, p_2, ..., p_8)

Exemplo 1 (continuação raciocínio 2):

Resposta 2:

O número de combinações simples de 8 elementos

tomados 3 a 3 é $C(8, 3) = \dfrac{8!}{3!\,(8-3)!} = \dfrac{8!}{3!\,5!} = 56$

Resposta exemplo 1: Podemos colocar três 1's e cinco 0's em 8 posições de 56 modos diferentes.

- Observações:

1 - Podemos fazer um raciocínio similar fixando agora as posições correspondentes aos cinco 0's

(automaticamente estão fixadas as posições dos 1's, e obtemos como resultado C(8, 5))

2 - $P_8^{5,3} = C(8, 5) = C(8, 8-5) = C(8, 3) = \dfrac{8!}{5!\,3!}$

Exemplo 2: (Modelo matemático)

Queremos determinar o número de seqüências binárias finalizadas em 1 que podem ser formadas com cinco 0's e três 1's, que denominamos N.

- Ilustração

$$\underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{p_1\ p_2\ p_3\ p_4\ p_5\ p_6\ p_7}\ \ \underset{p_8}{\underline{1}}$$

Reformulação do problema

De quantos modos podemos colocar dois 1's e cinco 0's em 7 posições?

Resposta: N = C(7, 2) = C(7, 5) = 21

Observação: 7 = 3 + 5 − 1   2 = 3 − 1

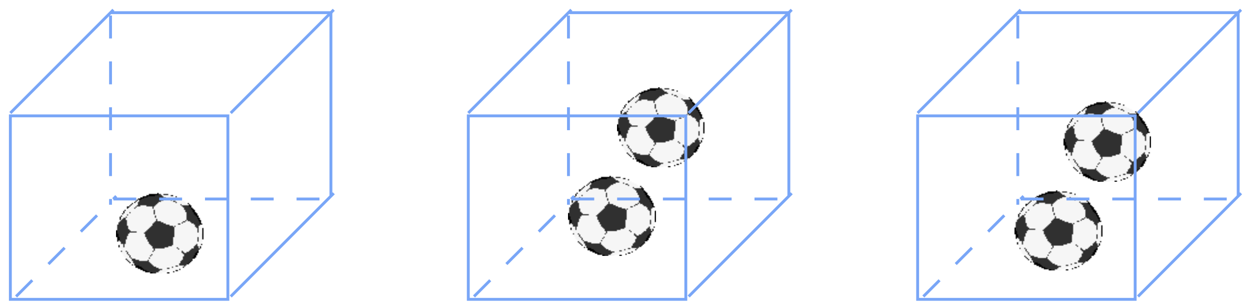
número de 1's   número de 0's   fixado 1

Exemplo 3:

De quantos modos podemos colocar 5 bolas de igual cor em 3 caixas numeradas?

Resolução:

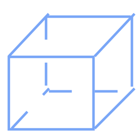
- Ilustração 1



1 **2** **3**

Representação matemática

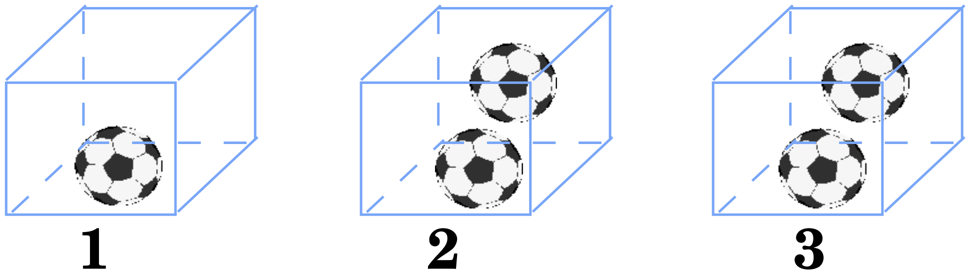
 $\xleftrightarrow{\text{significa}}$ 0

 $\xleftrightarrow{\text{significa}}$ 1

possibilidade $\xleftrightarrow{\text{significa}}$ seqüência de binários

Exemplo 3 (continuação):

- Ilustração 1



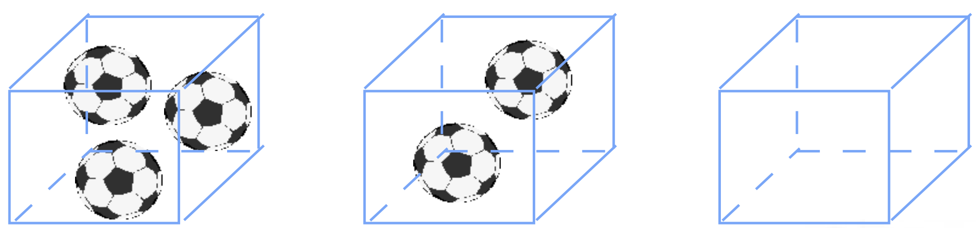
corresponde ⟷ **01001001**

Uma possibilidade do problema está associada a uma seqüência de 3 + 5 binários, finalizada em 1 com o seguinte significado:

número de 0's à esquerda do primeiro 1: número de bolas na caixa 1
número de 0's entre o primeiro 1 e o segundo 1: número de bolas na caixa 2
número de 0's entre o segundo e o último 1: número de bolas na última caixa

- Ilustração 2

00010011 ⟷ corresponde



Exemplo 3 (modelo matemático):

- Reformulação 1

  Quantas seqüências podemos formar com cinco 0's (bolas) e três 1's (caixas) que finalizem em 1?

- Reformulação 2

  Quantas seqüências podemos formar com cinco 0's e dois 1's?

Resposta dos problemas reformulados:

O número de seqüências é $C(7, 2) = 21$

Resposta do problema:

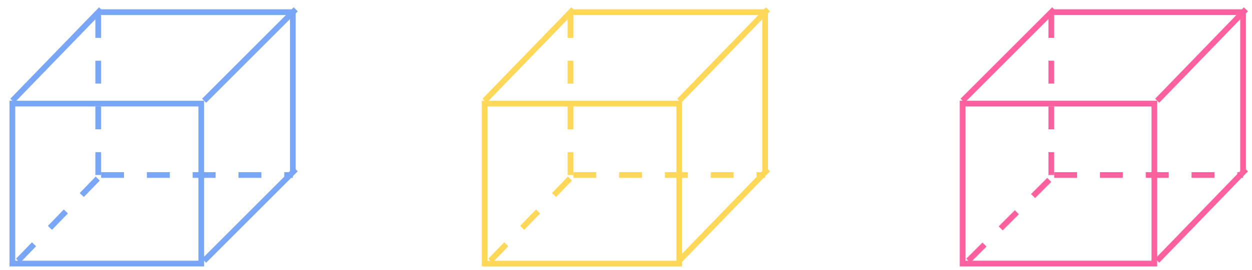
Podemos colocar 5 bolas de igual cor em 3 caixas numeradas de 21 modos diferentes.

Exemplo 4:

De quantos modos podemos selecionar 5 caixas escolhendo entre caixas de 3 cores diferentes?

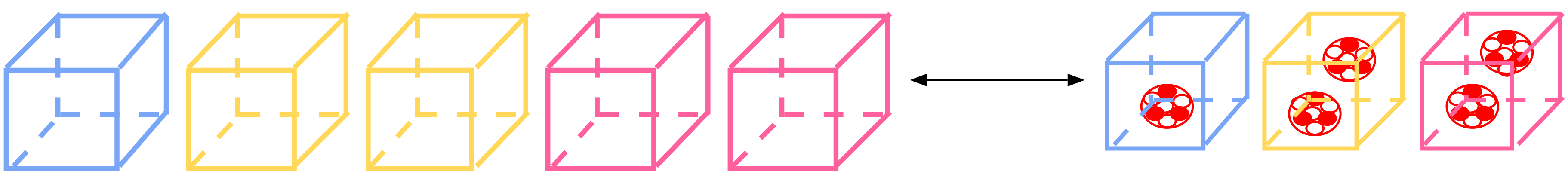
Resolução:

- Ilustração



Possibilidades

1.

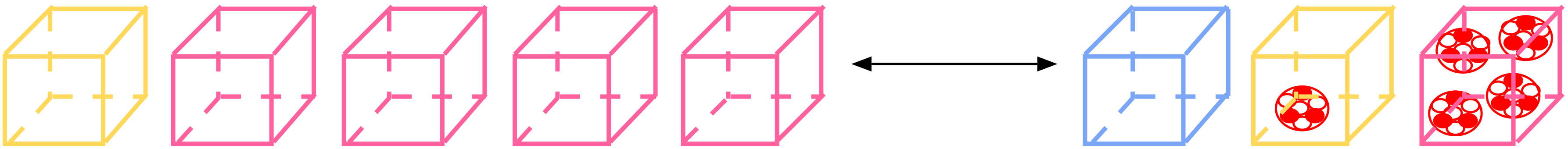


Exemplo 4 (continuação):

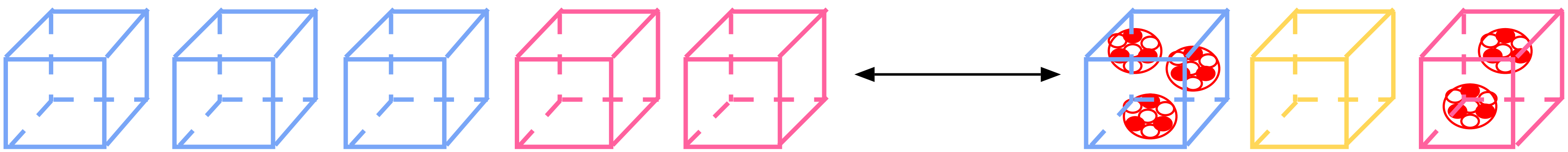
Possibilidades

Voltar

2.



3.



- Conclusão

  O problema tem a mesma resolução que o exemplo 3.

  (Os problemas dos exemplos 3 e 4 são equivalentes)

Exemplo 5:

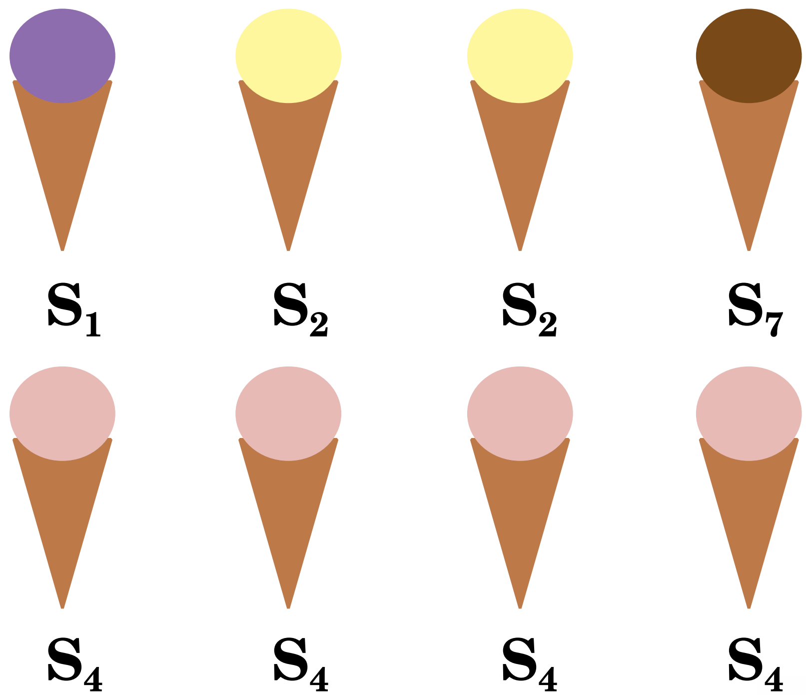
De quantos modos é possível comprar 4 sorvetes em casquinha de 1 sabor em uma loja que oferece 7 sabores diferentes?

Resolução:

- Ilustração

Possibilidade 1

Possibilidade 2

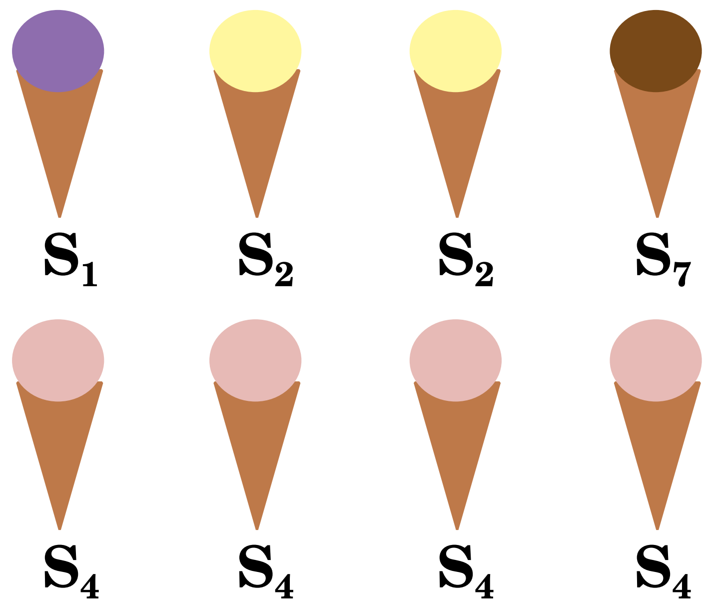


Exemplo 5 (continuação):

- Ilustração

Possibilidade 1 $\longleftrightarrow$ **01001111101**

Possibilidade 2 $\longleftrightarrow$ **11100001111**



Representação matemática

Sabores: objetos diferentes $\xleftrightarrow{(S_1,\, S_2,\, S_3,\, \dots\,,\, S_7)}$ 1

Casquinhas: objetos iguais $\longleftrightarrow$ 0

Possibilidade: seqüência de quatro 0's e sete 1's finalizada em 1

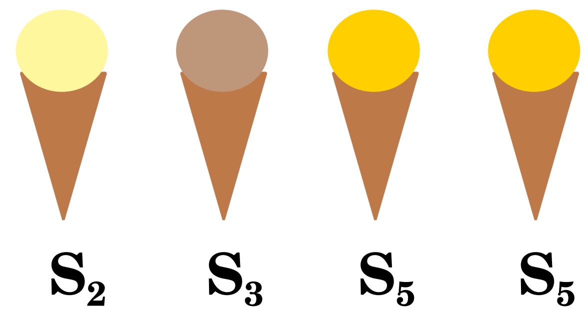
Exemplo 5 (continuação):

Reformulação matemática

Seja N o número de seqüências que podem ser formadas com quatro 0's e sete 1's finalizadas em 1. Calcular N.

- Ilustração

1 possibilidade: **10101100111** $\longleftrightarrow$



Resposta matemática:

$$N = C(4+7-1,\ 7-1) = C(10,4) = \frac{10!}{4!\,6!} = 210$$

número de 0's — número de 1's — fixada a última posição com 1

Resposta do problema:

Temos 210 modos diferentes de escolher 4 sorvetes de um sabor entre 7 sabores diferentes.

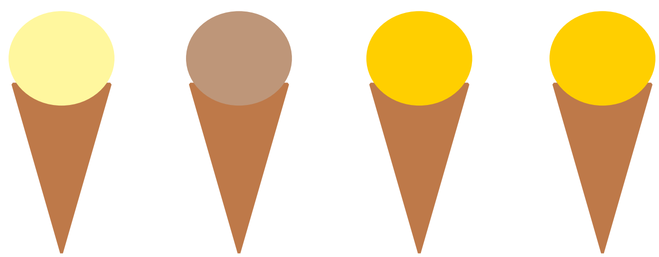
Observações:

1 - Reformulação do exemplo 5:

De quantos modos podemos escolher 4 sabores, que podem ser repetidos, entre 7 sabores diferentes.

- Ilustração

Casquinhas



equivale $\longleftrightarrow$

Sabores

$S_2 \ S_3 \ S_5 \ S_5$

2 - Os exemplos 3, 4 e 5 estão associados ao mesmo modelo matemático (exemplo 2) correspondente a seqüências de 0's e 1's finalizadas em 1.

Observações (continuação):

3 - Os exemplos 3 e 5 que consideram dois tipos de objetos (3 caixas diferentes e 5 bolas, 7 sabores diferentes e 4 casquinhas) são equivalentes a problemas que trabalham com os mesmos tipos de objetos diferentes (caixas, sabores), considerando possíveis repetições dos mesmos (5 caixas, 4 sabores).

Características dos exemplos

- Consideram-se n objetos diferentes (associados a 1)

  (3 caixas, 7 sabores)

- Entre os n objetos dados escolhem-se r que podem ser repetidos (associados a 0)

  (5 caixas, 4 sabores)

- Cada possibilidade está associada a uma sequência de $n + r$ binários finalizada em 1, onde o 0 está repetido r vezes e o 1 está repetido n vezes.

- Na obtenção do número de possibilidades aplica-se os princípios aditivo e multiplicativo (usa-se combinações simples ou permutações com repetição).

Combinação com repetição:

Definição

Considere n objetos diferentes, a_1, a_2, ..., a_n. Uma combinação com repetição de n objetos tomados r a r é uma seleção de r objetos, distintos ou não, escolhidos entre os n objetos dados.

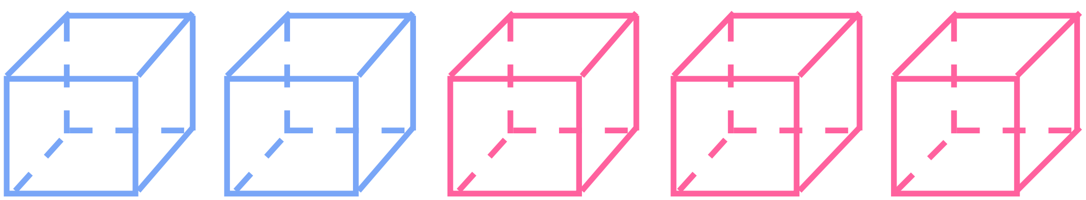
- Ilustração:

Exemplo 4:

objetos: caixas diferentes (azul, amarela, rosa)

$n = 3$, $r = 5$

Uma combinação com repetição de 3 tomados 5 a 5



representação ⟷ matemática **00110001**

Atenção

Cada combinação com repetição de n objetos diferentes, $a_1, \ldots, a_n$, selecionados r a r, repetidos ou não, está associado a uma seqüência de $n + r$ binários finalizada em 1, onde o número 0 aparece r vezes e o número 1 aparece n vezes.

número de 1's = n

$$\underbrace{0 \ldots 0}_{m_1}\ 1\ \underbrace{0 \ldots 0}_{m_2}\ 1 \ \ldots\ldots\ 1\ \underbrace{0 \ldots 0}_{m_n}\ 1$$

$m_i :=$ número de 0's = número de repetições de a_i, $i = 1, \ldots, n$

$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = r\ , \quad 0 \leq m_i \leq r\ , \quad i = 1, \ldots , n$

- Observação: $r \leq n$ ou $r > n$

Número de combinações com repetição:

- Problema

  Dados n objetos diferentes, a_1, a_2, ..., a_n
  encontrar o número de combinações com repetição
  de n objetos tomados r a r.

- Modelo matemático do problema

  Encontrar o número de seqüências de $n + r$ binários finalizadas em 1 onde o 0 está repetido r vezes e o 1 está repetido n vezes.

Propriedade

O número de combinações com repetição de n objetos tomados r a r, denominado CR_n^r, é dado por

$$CR_n^r = C(n + r - 1, r) = C(n + r - 1, n - 1)$$

Ilustração:

Exemplo 3:

$$n = 3, \quad r = 5$$

$$CR_3^5 = C(3 + 5 - 1, 5) = C(7, 2) = 21$$

Exemplo 6:

Se jogarmos 10 moedas iguais, quantos resultados diferentes de cara e coroa podem ser obtidos?

Resolução:

elementos distintos: $\underbrace{\text{cara}}_{a_1}, \underbrace{\text{coroa}}_{a_2}$

$n = 2, \; r = 10$

Resposta:

O número de resultados diferentes que podem ser obtidos é $CR_2^{10} = C(10 + 2 - 1, 10) = C(11, 10) = 11$

Observação:

Problema similar

De quantos modos podemos colocar 10 bolas em 2 caixas?

Desafio:

Coloque um enunciado similar pensando em sorvetes, sabores e casquinhas.

Desafio Voltar

De quantos modos podemos comprar 10 sorvetes em casquinhas de um sabor em uma loja que oferece 2 sabores diferentes?

Exemplo 7:

Quantas são as soluções inteiras não negativas da equação
$x + y + z + w = 9$?

Resolução: elementos diferentes:

4 objetos distintos a_1, a_2, a_3, a_4 associados às variáveis x, y, z, w respectivamente

- Ilustraçao: 1 solução (1 possibilidade)

$$x = 3,\ y = 4,\ z = 0,\ w = 2 \longleftrightarrow \underbrace{a_1\ a_1\ a_1\ a_2\ a_2\ a_2\ a_2\ a_4\ a_4}_{9}$$

Interpretação da solução:

$x = 3$: 3 unidades do elemento a_1

$y = 4$: 4 unidades do elemento a_2

$z = 0$: 0 unidades do elemento a_3

$w = 2$: 2 unidades do elemento a_4

$n = 4,\ r = 9$

Resposta: O número de soluções inteiras não negativas da equação dada é $CR_4^9 = C(9 + 4 - 1, 9) = \dfrac{12!}{9!\,3!} = 220$

Exemplo 8:

Encontrar o número de soluções inteiras não negativas da equação

$x_1 + x_2 + x_3 = 10$, onde $x_2 > 3$.

Resolução: $\mathbb{Z}_+ := \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0 \}$

$x_1 + x_2 + x_3 = 10$ é equivalente a $x_1 + \underbrace{(x_2 - 4)}_{y_2} + x_3 = 10 - 4$

Problema original		Problema reformulado
encontrar $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+$ $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ $x_2 > 3$	$(y_2 = x_2 - 4)$ $\longleftrightarrow$ $(x_2 = y_2 + 4)$	encontrar $x_1, y_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+$ $x_1 + y_2 + x_3 = 6$
(a)		(b)

- Ilustração:

$\underbrace{x_1 = 2 ,\ x_2 = 4 ,\ x_3 = 4}_{\text{é uma solução de (a)}} \quad \overset{(y_2 = 4 - 4)}{\underset{(x_2 = 0 + 4)}{\longleftrightarrow}} \quad \underbrace{x_1 = 2 ,\ y_2 = 0 ,\ x_3 = 4}_{\text{é uma solução de (b)}}$

Exemplo 8 (continuação):

- Resolução do problema reformulado

  $x_1 + y_2 + x_3 = 6, \quad x_1, y_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+$

  elementos diferentes: 3 (associados a x_1, y_2, x_3)

  $n = 3, \; r = 6$

Resposta do problema reformulado

O número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + y_2 + x_3 = 6$ é $CR_n^r = CR_3^6 = C(3+6-1, 6) =$

$$= \frac{8!}{6!\,2!} = 28$$

Resposta do problema

O número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ com $x_2 > 3$ é $CR_3^6 = 28$

Desafios:

Desafio Voltar

(1) Coloque o enunciado de um problema similar ao do exemplo 8 em termos de caixas e bolas.

De quantos modos podem ser colocadas 10 bolas iguais em 3 caixas numeradas se a segunda caixa tem sempre mais de 3 bolas?

(2) Escreva a sequência binária correspondente a solução $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 4$ do problema 8.

0010000100001

Exemplo 9:

Quantas são as soluções inteiras não negativas de $x + y \leq 5$?

Resolução:

Tente resolver o problema observando que:

$x, y \in \mathbb{Z}_+$ é uma solução se verifica:

$x + y = 5$ ou $x + y = 4$ ou $x + y = 3$ ou

$x + y = 2$ ou $x + y = 1$ ou $x + y = 0$

Exemplo 9 (continuação):

Desafio Voltar

Considere:

N := número de soluções inteiras não negativas de $x+y \leq 5$

$C := \{ (x, y) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ : x + y \leq 5 \}$

Então $N = |C|$

Da observação anterior temos que

$$C = \underbrace{\{(x, y) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ : x+y = 5\}}_{C_5} \cup \underbrace{\{(x, y) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ : x+y = 4\}}_{C_4} \cup$$

$$C = \underbrace{\{(x, y) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ : x+y = 3\}}_{C_3} \cup \underbrace{\{(x, y) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ : x+y = 2\}}_{C_2} \cup$$

$$C = \underbrace{\{(x, y) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ : x+y = 3\}}_{C_1} \cup \underbrace{\{(x, y) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ : x+y = 2\}}_{C_0} \cup$$

Exemplo 9 (continuação):

Desafio Voltar

Como os conjuntos C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 e C_5 são disjuntos 2 a 2,

$$C_i \cap C_j = \varnothing \qquad 0 \le i, j \le 5, \; i \ne j,$$

resulta pelo princípio aditivo que

$$|C| = \sum_{i=0}^{5} |C_i| = |C_0| + |C_1| + |C_2| + |C_3| + |C_4| + |C_5|$$

$$|C_0| = CR_2^0 = C(2 + 0 - 1, 0) \;,\; |C_1| = CR_2^1 = C(2 + 1 - 1, 1)$$

$$|C_2| = CR_2^2 = C(2 + 2 - 1, 2) \;,\; |C_3| = CR_2^3 = C(2 + 3 - 1, 3)$$

$$|C_4| = CR_2^4 = C(2 + 4 - 1, 4) \;,\; |C_5| = CR_2^5 = C(2 + 5 - 1, 5)$$

Resposta:

$$N = \frac{1!}{0!\,1!} + \frac{2!}{1!\,1!} + \frac{3!}{2!\,1!} + \frac{4!}{3!\,1!} + \frac{5!}{4!\,1!} + \frac{6!}{5!\,1!}$$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

Resumo:

Sejam n objetos diferentes, $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Conceito:

Uma combinação com repetição de n objetos tomados r a r é uma seleção de r objetos escolhidos entre os n dados que podem ser repetidos.

Características:

Cada combinação com repetição de n objetos tomados r a r

está associado

a uma sequência de n + r binários finalizada em 1 onde o 0 está repetido r vezes e o 1 está repetido n vezes

o que corresponde

a uma combinação simples de (n+r–1) objetos tomados r a r

Propriedade:

Número de combinações com repetição de n objetos tomados r a r:

$$CR_n^r = C(n + r - 1, r) = C(n + r - 1, n - 1) = \frac{(n + r - 1)!}{r!\,(n - 1)!}$$

Módulo: Coeficientes binomiais e aplicações

- Coeficientes binomiais
- Binômio de Newton

Objetivo:

- Apresentar identidades envolvendo coeficientes binomiais.

Importância:

- Na análise de algoritmos aparece a necessidade de manipular relações envolvendo coeficientes binomiais.

Aula 13: Coeficientes binomiais

- Definição
- Argumentos combinatório e algébrico
- Identidades
- Triângulo de Pascal
- Teoremas das linhas, das colunas e das diagonais

Definição:

Chamamos $C(n, r)$ de coeficiente binomial.

Observação

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad (0 \leq r \leq n)$$

número de possibilidades de escolher r objetos diferentes entre n objetos diferentes	⟷	expressão algébrica do coeficiente binomial envolvendo fatoriais

Argumentos combinatório e algébrico:

Dois tipos de argumentos podem ser usados na dedução de teoremas e identidades envolvendo fatoriais ou coeficientes binomiais:

- combinatórios
- algébricos

- O raciocínio combinatório está baseado na decomposição de um conjunto em subconjuntos adequados e na contagem de seus elementos aparecem as combinações simples.
- O raciocínio algébrico está baseado na manipulação dos fatoriais.

Observações:

Na resolução de problemas combinatórios tem-se que:

- um raciocínio combinatório determina a forma de uma expressão algébrica

  e vice-versa

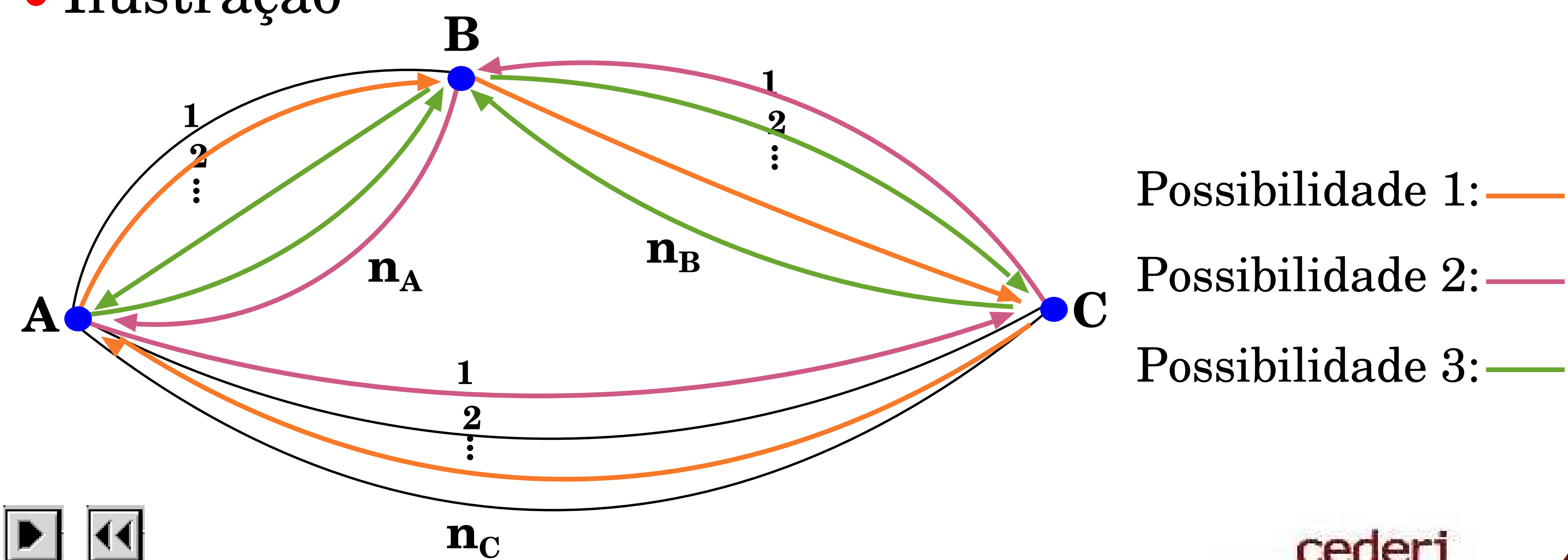
  uma forma da expressão algébrica sugere um raciocínio combinatório.

- raciocínios combinatórios equivalentes geram identidades algébricas e vice-versa.

Exemplo 1:

Considere três cidades A, B, C. Sejam n_A, n_B e n_C os números de caminhos unindo diretamente A e B, B e C, e A e C respectivamente. Quantos caminhos originados em A, chegam a C e regressam a A passando pelo menos uma vez por B?

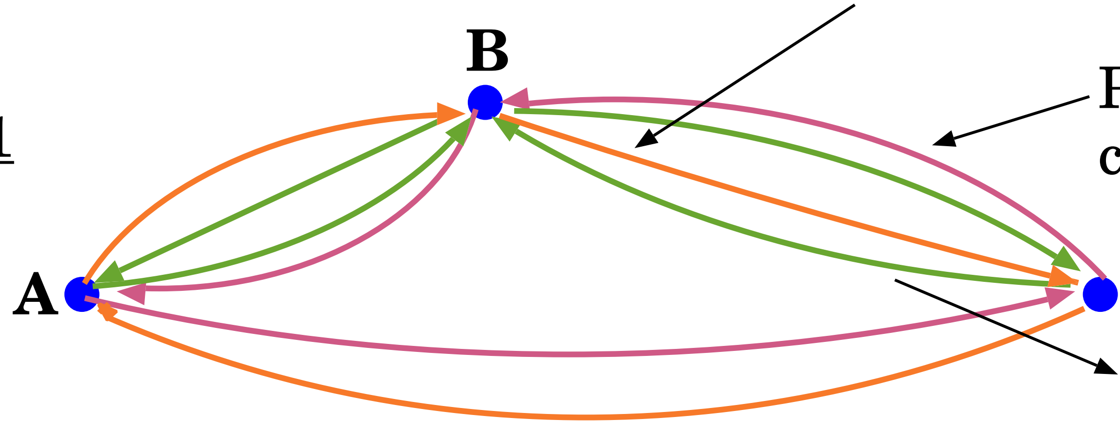
- Ilustração



Exemplo 1 (continuação):

Resolução:

Raciocínio 1



Sejam

W:= conjunto de caminhos que partem de A, chegam a C e voltam a A passando pelo menos uma vez por B.

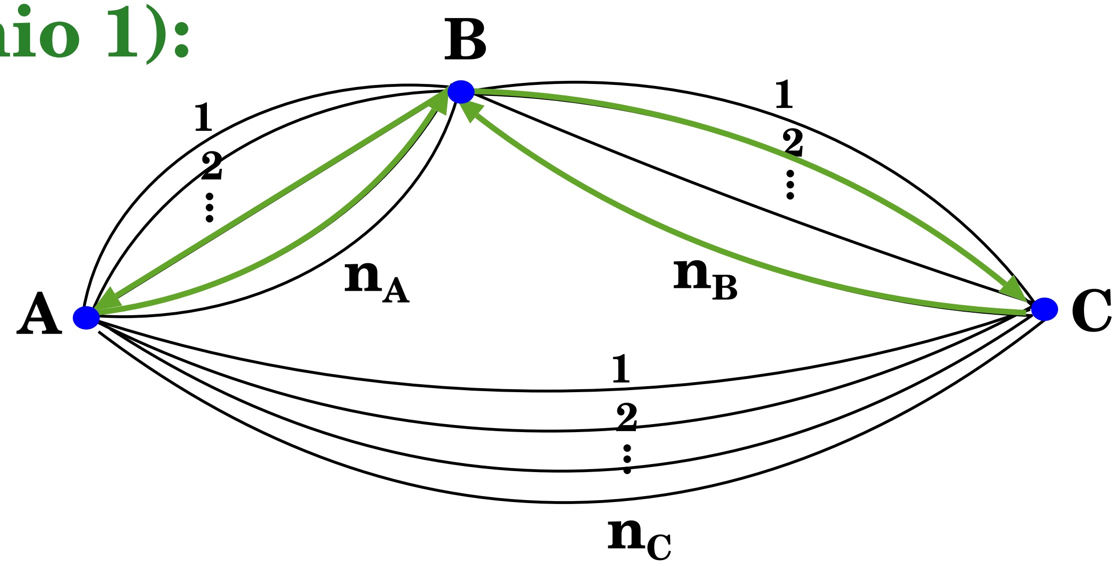
U_1:= conjunto dos caminhos que partem de A, chegam a C passando por B e retornam diretamente a A ($c_1 \in$ U)

U_2:= conjunto dos caminhos que saem de A, chegam a C diretamente e voltam a A passando por B ($c_2 \in U_2$)

V:= conjunto dos caminhos que se originam em A, chegam a C e retornam a A passando as duas vezes por B ($c_3 \in$ V)

$W = U_1 \cup U_2 \cup V$, $|W| \overset{P.A.}{=} |U_1| + |U_2| + |V|$ $(U_1 \cap U_2 = \varnothing, U_1 \cup V = \varnothing, U_2 \cap V = \varnothing)$

Exemplo 1 (raciocínio 1):



Calculamos

$$|U_1| = C(n_A, 1)\, C(n_B, 1)\, C(n_C, 1) = n_A n_B n_C$$

$$|U_2| = C(n_C, 1)\, C(n_B, 1)\, C(n_A, 1) = n_C n_B n_A$$

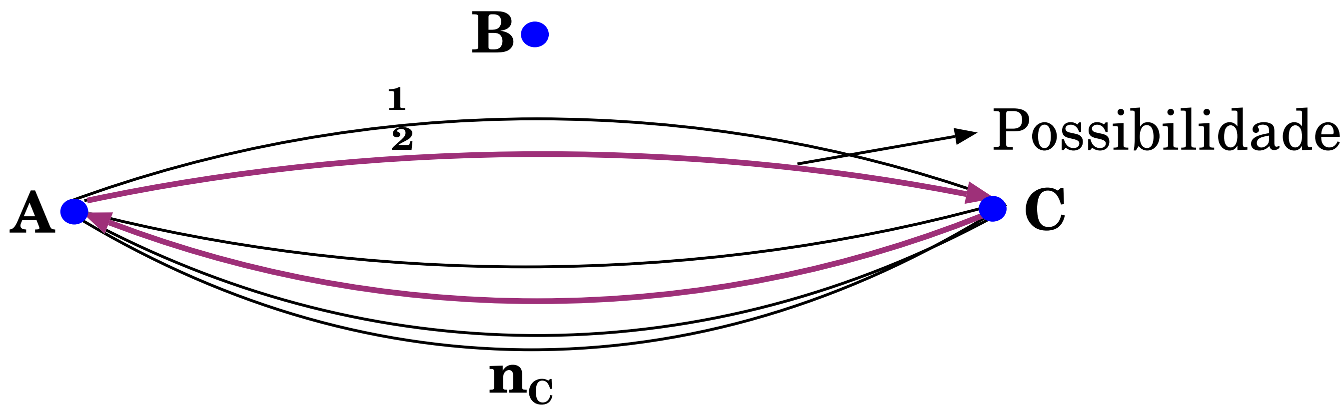
$$|V| = \underbrace{C(n_A, 1)\, C(n_B, 1)}_{\substack{\text{possibilidades entre} \\ \text{A e C passando por B}}}\, \underbrace{C(n_B, 1)\, C(n_A, 1)}_{\substack{\text{possibilidades entre} \\ \text{C e A passando por B}}} = (n_A n_B)^2$$

Resposta 1:

$$|W| = n_A n_B n_C + n_C n_B n_A + (n_A n_B)^2$$

Exemplo 1 (continuação):

<u>Raciocínio 2</u> (baseado em complemento de um conjunto)



W:= conjunto de caminhos que partem de A, chegam a C e voltam a A <u>passando pelo menos uma vez</u> por B.

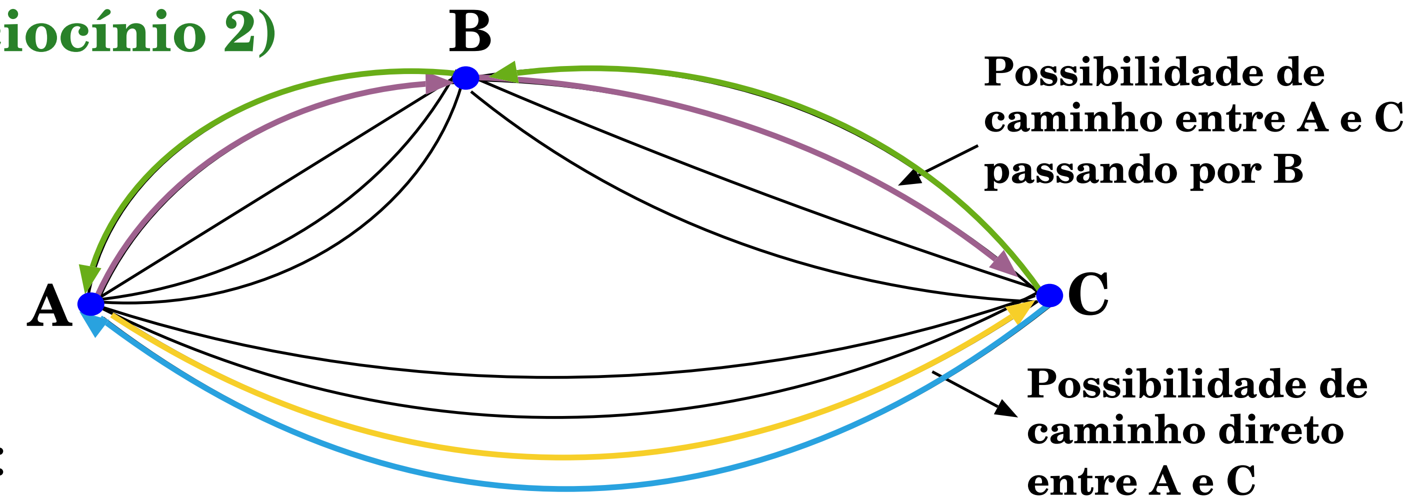
U:= conjunto universo:= conjunto de <u>todos</u> os caminhos que partem de A, chegam a C e retornam a A.

Y:= conjunto dos caminhos que partem de A, chegam a C e retornam a A <u>sem</u> passar por B.

$$W = \overline{Y} = U - Y \quad , \quad |W| \overset{\text{P.A.}}{=} |U| - |Y|$$

$$|Y| = \underbrace{C(n_C, 1)}_{\text{caminhos que unem diretamente A e C}} \underbrace{C(n_C, 1)}_{\text{caminhos que unem diretamente C e A}} = n_C^{\,2}$$

Exemplo 1 (raciocínio 2)



Cálculo de |U|:

- N:= número de caminhos que unem A e C =
  número de caminhos que unem A e C passando por B +
  número de caminhos que unem A e C diretamente

$$N = \underbrace{C(n_A, 1)}_{\text{caminhos que unem A e B}}\underbrace{C(n_B, 1)}_{\text{caminhos que unem B e C}} + \underbrace{C(n_C, 1)}_{\text{caminhos que unem diretamente A e C}} = n_A n_B + n_C$$

- Número de caminhos que unem C e A = $N = n_A n_B + n_C$
- $|U| = \underbrace{N}_{\text{caminhos que unem A e C}} \times \underbrace{N}_{\text{caminhos que unem C e A}} = (n_A n_B + n_C)^2$

Exemplo 1 (continuação raciocínio 2)

Resumindo:

$$|W| = |U| - |Y| \quad , \quad |Y| = n_C^{\,2} \quad , \quad |U| = (n_A n_B + n_C)^2$$

Resposta 2:

$$|W| = (n_A n_B + n_C)^2 - n_C^{\,2} = (n_A n_B)^2 + 2 n_A n_B n_C$$

Resposta do problema:

O número de caminhos que partem de A, chegam a C e retornam a A passando pelo menos uma vez por B é $(n_A n_B + n_C)^2 - n_C^{\,2} = n_A n_B n_C + n_C n_B n_A + (n_A n_B)^2$.

Observação

$$2n_An_Bn_C + (n_An_B)^2 = (n_An_B + n_C)^2 - n_C^{\,2} =$$

$$= (n_An_B + n_C)\,(n_An_B + n_C) - n_C^{\,2} =$$

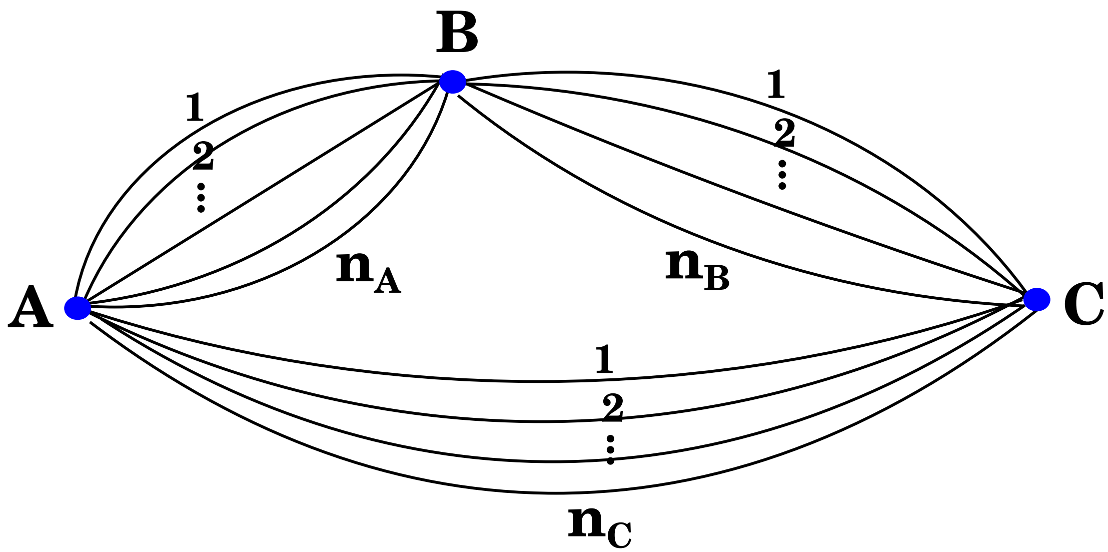
$$= n_An_B(n_An_B + n_C) + n_C(n_An_B + n_C) - n_C^{\,2} =$$

$$= n_An_B(n_C + n_Bn_A) + n_Cn_An_B$$

Exemplo 2:

Determine o raciocínio combinatório no exemplo 1 motivado pela expressão $n_A n_B(n_C + n_B n_A) + n_C n_A n_B$?

Resolução:



$$\mathbf{M} := \underbrace{n_A n_B}_{\text{caminhos que unem A e C passando por B}}\underbrace{(n_C + n_B n_A)}_{\text{caminhos que unem C e A}} + \underbrace{n_C n_A n_B}_{\text{caminhos que unem A e C e retornam a A passando 1 vez por B}}$$

M:= número de caminhos que unem A e C passando por B e retornam a A por qualquer caminho + número de caminhos que unem A e C sem passar por B e retornam a A passando por B.

S:= conjunto de caminhos que unem A e C passando por B e retornam a A.

T:= conjunto de caminhos que unem diretamente A e C e retornam a A passando por B.

Resposta: O raciocínio combinatório motivado por

$n_A n_B(n_C + n_B n_A) + n_C n_A n_B$ corresponde a considerar

$W = S \cup T$, $|S| = n_A n_B(n_C + n_B n_A)$, $|T| = n_C n_A n_B$,

$|W| \overset{\text{P.A.}}{=} |S| + |T| = M \qquad (S \cap T = \varnothing)$

Identidades:

(1) Combinação complementar (ou de simetria)

$$C(n, r) = C(n, n-r)$$

Prova: Argumento algébrico

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!\,(n-(n-r))!} = C(n, n-r)$$

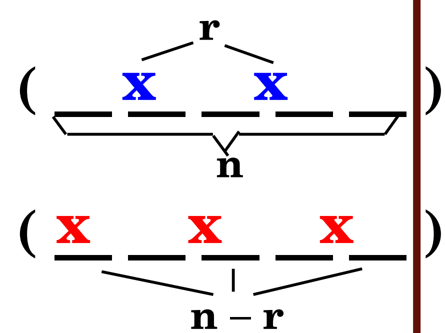
Argumento combinatório **(desafio)**

Desafio **Voltar**

Fixada uma combinação de r elementos entre n

⇓ automaticamente está

definida uma combinação de (n – r) elementos entre n



Conclusão:

Tem-se o mesmo número de combinações de r elementos escolhidos entre n e de combinações de (n – r) elementos escolhidos entre n, ou seja, $C(n, r) = C(n, n-r)$.

(2) Relação de Stifel (1486 - 1567) ou Fórmula de Pascal (1623 - 1662)

$$C(n, r) + C(n, r + 1) = C(n + 1, r + 1)$$

Prova: Argumento algébrico (desafio!) Desafio Voltar

$$C(n, r) + C(n, r + 1) = \frac{n!}{r!\,(n - r)!} + \frac{n!}{(r + 1)!\,(n - (r + 1))!}$$

$$\overset{(k+1)k! = (k+1)!}{\underset{(k = r;\ k = n-r+1)}{=}} \frac{n!\,(r + 1)}{(r + 1)!\,(n - r)!} + \frac{n!\,(n - r)}{(r + 1)!\,(n - r)!} =$$

$$= \frac{n!}{(r + 1)!\,(n - r)!}\,[(r + 1) + (n - r)] = \frac{n!\,(n + 1)}{(r + 1)!\,(n - r)!}$$

$$= \frac{(n + 1)!}{(r + 1)!\,((n + 1) - (r + 1))!} = C(n + 1, r + 1)$$

Prova (continuação):

Argumento combinatório

- Seja um grupo (conjunto) formado por $n + 1$ elementos, onde n são do mesmo tipo e 1 é de outro tipo (por exemplo, n homens, 1 mulher).
- As diferentes maneiras de selecionar nesse grupo um subgrupo de $r + 1$ elementos (por exemplo, $r + 1$ pessoas entre os n homens e 1 mulher) podem ser decompostos em 2 classes disjuntas:
  - os que têm r do mesmo tipo e 1 do outro tipo (por exemplo, r homens e 1 mulher)
  - os que têm $r + 1$ do mesmo tipo (por exemplo, $r + 1$ homens)

Prova (continuação argumento combinatório):

Logo, pelo princípio da adição, resulta:

O número de modos de selecionar nesse grupo $r+1$ elementos entre $n+1$ é igual a

$$\boxed{C(n+1, r+1)}$$

O número de modos de selecionar r elementos entre n

$$\boxed{C(n, r)}$$

$+$

O número de modos de selecionar $r+1$ elementos entre n

$$\boxed{C(n, r+1)}$$

Ou seja,

$$C(n+1, r+1) = C(n, r) + C(n, r+1)$$

Observação

Relação de Stifel

$$C(n+1, r+1) = C(n, r) + C(n, r+1) \quad n = 1, 2, \ldots$$
$$r = 0, 1, \ldots, n-1$$

é equivalente a:

$$C(n, r) = C(n-1, r-1) + C(n-1, r) \quad n = 2, \ldots$$
$$r = 1, 2, \ldots, n-1$$

(3) Condições de fronteira

$$C(n, 0) = C(n, n) = 1 \quad , \quad n = 0, 1, \ldots$$

(é a condição de simetria para $r = 0$)

(4) Condições secundárias

$$C(n, 1) = C(n, n-1) = n \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

(é a condição de simetria para $r = 1$)

Triângulo de Pascal:

Gráfico 1

- Ilustração:

linhas

n = 0						C(0, 0)					
n = 1					C(1, 0)		C(1, 1)				
n = 2				C(2, 0)		C(2, 1)		C(2, 2)			
n = 3			C(3, 0)		$\boxed{C(3, 1)}$		$\boxed{C(3, 2)}$		C(3, 3)		
n = 4		C(4, 0)		C(4, 1)		$\boxed{C(4, 2)}$		C(4, 3)		C(4, 4)	
n = 5	C(5, 0)		C(5, 1)		C(5, 2)		C(5, 3)		C(5, 4)		C(5, 5)

- Relação $C(n, r) = C(n-1, r-1) + C(n-1, r)$

$$C(4, 2) = C(3, 1) + C(3, 2) = 3 + 3 = 6 \quad (n = 4, r = 2)$$

- Observação: C(n, r) está na linha n e na diagonal r

cederj

Gráfico 2

Notação: $C(n, r) = C_n^r$

- Ilustração:

$$
\begin{array}{cccccc}
C_0^0 \\
C_1^0 & C_1^1 \\
C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 \\
C_3^0 & \boxed{C_3^1} & \boxed{C_3^2} & C_3^3 \\
C_4^0 & C_4^1 & \boxed{C_4^2} & C_4^3 & C_4^4 \\
C_5^0 & C_5^1 & C_5^2 & C_5^3 & C_5^4 & C_5^5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}
$$

- Observação: C_n^r está na linha n e na coluna r
- Propriedades consideradas:
  - $C_n^0 = C_n^n = 1$ (condições de fronteira) $n = 0, 1, 2, \ldots$
  - $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$ (condições secundárias) $n = 2, 3, \ldots$
  - $C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r$ (relação de Stifel) $n = 2, 3, \ldots, r = 1, 2, \ldots$

Exemplo 3:

Dada a linha 6 do triângulo de Pascal:

$$1 \qquad 6 \qquad 15 \qquad 20 \qquad 15 \qquad 6 \qquad 1$$

Calcule a linha 7 usando as condições de fronteira e as relações de Stifel (fórmula de Pascal).

Resolução: (desafio)

Desafio Voltar

$$
\begin{array}{ll}
n = 6 & \qquad\quad 1 \qquad 6 \qquad 15 \qquad 20 \qquad 15 \qquad 6 \qquad 1 \\
n = 7 & \underbrace{1 \quad \underbrace{\underset{1+6=7}{7} \quad \underset{6+15=21}{21} \quad \underset{15+20=35}{35} \quad \underset{20+15=35}{35} \quad \underset{15+6=21}{21} \quad \underset{6+1=7}{7}}_{\text{relações de Stifel}} \quad 1}_{\text{condições de fronteira}}
\end{array}
$$

Resposta: A linha 7 do triângulo de Pascal está dada por:

$$1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7$$

Teorema das linhas, das colunas e das diagonais:

- Motivação do teorema das linhas

  - **Ilustração:**

n	**Gráfico 1**	**Gráfico 2**
0	1	1
1	1 1	1 1
2	1 2 1	1 2 1
3	1 3 3 1	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1	1 7 21 35 35 21 7 1

- Observações:

n	Soma da linha n	
3	$1+3+3+1=8$	$=2^3$
4	$1+4+6+4+1=16$	$=2^4$
7	$1+7+21+35+35+21+7+1=128$	$=2^7$

Teorema das linhas

$$\boxed{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Observação:

Pelo teorema das linhas, podemos calcular a soma dos elementos de uma linha n sem necessidade de conhecer seus elementos.

- Ilustração:

A soma dos elementos da linha 8 do triângulo de Pascal é igual a $2^8 = 256$.

- Motivação do teorema das colunas

  - Ilustração:

n \ r	0	1	2	3	4	5	6	
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

$$\boxed{\begin{matrix} C_4^4 \\ C_5^4 \\ C_6^4 \end{matrix}} \rightarrow \boxed{C_7^5}$$

- Observações:

r	Soma da coluna r	
0	1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7	= C(7, 1) = C(6 + 1, 0 + 1)
2	1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35	= C(7, 3) = C(6 + 1, 2 + 1)
4	1 + 5 + 15 = 21	= C(7, 5) = C(6 + 1, 4 + 1)

Teorema das colunas

$$\boxed{C_r^r + C_{r+1}^r + C_{r+2}^r + \ldots + C_n^r = C_{n+1}^{r+1}}$$

$0 \leq r \leq n$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

- Ilustração:

A soma da coluna associada a $r = 1$ do triângulo de Pascal com o número de linhas $n = 6$ é $C_{6+1}^{1+1} = C_7^2 = 21$.

Exemplo 4:

Determine o valor da soma

$$S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + 50.51.52$$

Resolução:

$$S = \sum_{k=1}^{50} k(k+1)(k+2) =$$

$$= \sum_{k=1}^{50} \frac{1.2 \ldots (k-1)\, k(k+1)(k+2)}{1.2 \ldots (k-1)} = \sum_{k=1}^{50} \frac{(k+2)!}{(k-1)!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{50} \frac{3!\,(k+2)!}{3!\,(k-1)!} = 3! \sum_{k=1}^{50} \frac{(k+2)!}{3!\,((k+2)-3)!} =$$

$$= 3! \sum_{k=1}^{50} C^3_{k+2} = 3!\,\underbrace{(C^3_3 + C^3_4 + \ldots + C^3_{52})}_{\text{coluna do triângulo de Pascal, } r = 3,\ n = 52} \overset{\text{T.C.}}{=} 6\,.\,C^4_{53} = 1.756.950$$

Exemplo 5:

Usando as condições secundárias e o teorema das colunas obtenha a identidade

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Resolução: (desafio)

Desafio Voltar

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n \overset{\text{C.S.}}{=} C_1^1 + C_2^1 + C_3^1 + \ldots C_n^1 =$$

$$\overset{\text{T.C.}}{=} C_{n+1}^2 = \frac{(n+1)!}{2!\,(n+1-2)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{2!\,(n-1)!} = \frac{(n+1)\,n(n-1)!}{2!\,(n-1)!} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

cederj

Motivação do teorema das diagonais

- Ilustração:

Gráfico 1

n								
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Gráfico 2

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Observações:

$$C_2^0 + C_3^1 + C_4^2 + C_5^3 + C_6^4 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35 = C_7^4$$

$$C_4^0 + C_5^1 + C_6^2 = 1 + 5 + 15 = 21 = C_7^2$$

cederj

Teorema das diagonais

$$\boxed{C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \ldots + C_{n+r}^r = C_{n+r+1}^r}$$

n = 0, 1, 2, ...
r = 0, 1, 2, ...

- Ilustração:

$n = 2, \ r = 4, \ n + r = 6$

$$C_2^0 + C_3^1 + C_4^2 + C_5^3 + C_6^4 = C_7^4 = 35$$

Resumo:

Definição:

Coeficiente binomial: $$\boxed{C(n, r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}}$$ $(0 \leq r \leq n)$

Argumentos:

Na dedução de propriedades envolvendo coeficientes binomiais

- combinatórios
- algébricos

Observação:

Raciocínios combinatórios equivalentes geram identidades algébricas e vice-versa.

Identidades:

(1) Combinação complementar : $C(n, r) = C(n, n - r)$

(2) Relação de Stifel :

$$C(n, r) = C(n - 1, r - 1) + C(n - 1, r) \qquad \begin{array}{l} n = 2, \ldots \\ r = 0, 1, \ldots, n-1 \end{array}$$

(3) Condições de fronteira : $C(n, 0) = C(n, n) = 1$

(4) Condições secundárias : $C(n, 1) = C(n, n - 1) = n$

Triângulo de Pascal:

C(0, 0)			
C(1, 0)	C(1, 1)		
C(2, 0)	C(2, 1)	C(2, 2)	
C(3, 0)	C(3, 1)	C(3, 2)	C(3, 3)
$\vdots$			

C_0^0			
C_1^0	C_1^1		
C_2^0	C_2^1	C_2^2	
C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3
$\vdots$			

1			
1	1		
1	2	1	
1	3	3	1
$\vdots$			

Teoremas:

- das linhas: $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$ (linha n)
- das colunas: $C_r^r + C_{r+1}^r + \ldots + C_n^r = C_{n+1}^{r+1}$ (coluna r)
- das diagonais: $C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \ldots + C_{n+r}^r = C_{n+r+1}^r$ (diagonal n)

cederj

Aula 14: Binômio de Newton

Conteúdo:

- Definição de binômio
- Introdução ao binômio de Newton
- Teorema binomial

Definição de binômio:

Chamamos de binômio qualquer expressão da forma $a + b$, onde a e b são símbolos diferentes.

Exemplo 1: Sejam $x, y \in \mathbb{R}$

(a) $x - y = x + (-y)$ é um binômio $(a := x,\ b := -y)$

(b) $3xy + x^2$ é um binômio $(a := 3xy,\ b := x^2)$

Introdução ao binômio de Newton:

Exemplo 2:

Desenvolva as potências do binômio a + b, $(a + b)^n$, para $n = 0, 1, 2, 3$.

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

- Observação: os coeficientes dos termos podem ser ordenados da seguinte forma:

$$\begin{array}{llll} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{llll} C_0^0 & & & \\ C_1^0 & C_1^1 & & \\ C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & \\ C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 \end{array}$$

Triângulo de Pascal

Exemplo 3:

Calcule a linha $n = 4$ do triângulo de Pascal e verifique que são os coeficientes da expansão de $(a + b)^4$.

Resolução:

$$
\begin{array}{lccccc}
n = 3 & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
n = 4 & \underbrace{1}_{\text{C.F.}} & \underbrace{4}_{\text{C.S. ou R.S.}} & \underbrace{6}_{\text{R.S.}} & \underbrace{4}_{\text{C.S. ou R.S.}} & \underbrace{1}_{\text{C.F.}}
\end{array}
$$

Cálculo de $(a + b)^4$:

$$(a + b)^4 = (a + b)(a + b)^3 = (a + b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) =$$

$$= a(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + b(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) =$$

$$= \underbrace{1}_{C_4^0}a^4 + \underbrace{4}_{C_4^1}a^3b + \underbrace{6}_{C_4^2}a^2b^2 + \underbrace{4}_{C_4^3}ab^3 + \underbrace{1}_{C_4^4}b^4)$$

Teorema Binomial (Binômio de Newton):

Se a e b são números reais e n é um número natural então tem-se:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r =$$

$$= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

Prova (princípio de indução matemática):

- Seja $P(n)$: $(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r$

(1) Base de indução

$P(1)$: $(a + b)^1 = a + b \overset{\text{C.F.}}{=} C_1^0 a^1 + C_1^1 b^1 = \sum_{r=0}^{1} C_1^r a^{1-r} b^r$

Logo, $P(1)$ é verdadeira

(2) Hipótese de indução (HI)

$P(k)$ é verdadeira

Prova (continuação):

(3) P(k) é verdadeira $\Rightarrow$ P(k + 1) é verdadeira

$$\underbrace{}_{(a+b)^k = \sum_{r=0}^{k} C_k^r a^{k-r} b^r} \qquad \underbrace{}_{(a+b)^{k+1} = \sum_{r=0}^{k+1} C_{k+1}^r a^{k+1-r} b^r}$$

Desenvolvendo

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)\underbrace{(a+b)^k}_{} \overset{HI}{=} (a+b)\sum_{r=0}^{k} C_k^r a^{k-r} b^r =$$

$$= a\sum_{r=0}^{k} C_k^r a^{k-r} b^r + b\sum_{r=0}^{k} C_k^r a^{k-r} b^r$$

Desenvolvimento indutivo (continuação):

<u>ou seja</u>:

$$(a+b)^{k+1} = a\left(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \ldots + C_k^{k-1} a b^{k-1} + C_k^k b^k\right)$$

$$+\, b\left(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \ldots + C_k^{k-1} a b^{k-1} + C_k^k b^k\right) =$$

$$= C_k^0 a^{k+1} + C_k^1 a^k b + C_k^2 a^{k-1} b^2 + \ldots + C_k^{k-1} a^2 b^{k-1} + C_k^k a b^k$$

$$+\, C_k^0 a^k b + C_k^1 a^{k-1} b^2 + C_k^2 a^{k-2} b^3 + \ldots + C_k^{k-1} a b^k + C_k^k b^{k+1} =$$

$$= \underbrace{C_k^0}_{\overset{\text{C.F.}}{=}\, 1 \,=\, C_{k+1}^0} a^{k+1} + \underbrace{\left(C_k^0 + C_k^1\right)}_{\overset{\text{R.S.}}{=}\, C_{k+1}^1} a^k b + \underbrace{\left(C_k^1 + C_k^2\right)}_{\overset{\text{R.S.}}{=}\, C_{k+1}^2} a^{k-1} b^2 + \ldots$$

$$+\, \underbrace{\left(C_k^{k-1} + C_k^k\right)}_{\overset{\text{R.S.}}{=}\, C_{k+1}^k} a b^k + \underbrace{C_k^k}_{\overset{\text{C.F.}}{=}\, 1 \,=\, C_{k+1}^{k+1}} b^{k+1}$$

Desenvolvimento indutivo (continuação):

Usando a relação de Stifel e as condições de fronteira obtém-se:

$$P(k+1):\ (a+b)^{k+1} = C_{k+1}^{0}a^{k+1} + C_{k+1}^{1}a^{k}\,b + C_{k+1}^{2}a^{k-1}\,b^{2} + \ldots$$

$$+ C_{k+1}^{k}ab^{k} + C_{k+1}^{k+1}b^{k+1} =$$

$$= \sum_{r=0}^{k+1} a^{k+1-r}\,b^{r}$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeira

Então, pelo princípio de indução matemática tem-se

$$P(n):\ (a+b)^{n} = \sum_{r=0}^{n} C_{n}^{r}a^{n-r}\,b^{r} \text{ é verdadeira } \forall\ n \in \mathbb{N}$$

Observações:

$$(a+b)^n \overset{\text{T.B.}}{=} \underbrace{\sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r}\, b^r}$$

desenvolvimento ou expansão
da potência n de a + b

(1) Os coeficientes do desenvolvimento de $(a + b)^n$ são os elementos da linha n do triângulo de Pascal.

(por exemplo, $(a + b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3$)

(2) O desenvolvimento de $(a + b)^n$ tem $(n + 1)$ termos

(3) O somando $(r + 1)$ do desenvolvimento de $(a + b)^n$

$$T_{r+1} = C_n^r a^{n-r}\, b^r$$

(por exemplo, o segundo somando de $(a + b)^3$ é $T_2 = C_3^1 a^2\, b$, $n = 3$, $r = 1$)

Exemplo 4:

Determine a expansão de $(x + 3)^4$.

Resolução:

$$(x+3)^4 \overset{\text{B.N.}}{=} C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3.3 + C_4^2 x^2.3^2 + C_4^3 x.3^3 + C_4^4 3^4$$

Triângulo de Pascal até n = 4

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & C_0^0 & & & & \\ & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\ & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\ & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\ C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Resposta: $(x+3)^4 = x^4 + 4.3x^3 + 6.9x^2 + 4.27x + 81 =$

$= x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$

cederj

Exemplo 5:

Seja n um número natural. Prove que para todo número real x se verifica:

$$(x + 1)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r x^r$$

Prova (desafio!)

Desafio Voltar

Sabemos que

$$(a + b)^n \overset{\text{B.N.}}{=} \sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r$$

Logo, considerando $a := 1$ e $b := x$, resulta

$$(x + 1)^n = (1 + x)^n \overset{\text{B.N.}}{=} \sum_{r=0}^{n} C_n^r 1^{n-r} \,.\, x^r = \sum_{r=0}^{n} C_n^r x^r$$

isto é: $$(x + 1)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r x^r$$

Exemplo 6:

Seja n um número natural. Determine a expansão do binômio de Newton de $(x-1)^n$, para $x \in \mathbb{R}$.

Resolução:

No teorema do binômio de Newton consideramos

$$a := x\,, \quad b := -1$$

Logo, $$(x-1)^n = (x+(-1))^n \overset{\text{B.N.}}{=} \sum_{r=0}^{n} C_n^r x^{n-r}(-1)^r = \sum_{r=0}^{n} C_n^r (-1)^r x^{n-r}$$

isto é, $$(x-1)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r (-1)^r x^{n-r}$$

Ilustração: $$(x-1)^5 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$$

Observação:

$$(a+b)^n = (b+a)^n \overset{\text{B.N.}}{=} \sum_{r=0}^{n} C_n^r b^{n-r} a^r \ ,$$

substituindo r por k , resulta

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Outra notação:

$$\binom{n}{k} := C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$(a+b)^n \overset{\text{B.N.}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Propriedade

Dados a e b números reais e n um número natural, o binômio de Newton admite o seguinte desenvolvimento:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{n-k} a^k\, b^{n-k}$$

Prova (desafio!)

Desafio Voltar

Use a condição complementar ou de simetria do coeficiente binomial.

De fato, pela condição de simetria tem-se que

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad \text{ou seja} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Usando a observação anterior resulta

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} a^k\, b^{n-k}$$

Exemplo 7:

Determine o coeficiente de x^2 no desenvolvimento de

$$\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^9$$

Resolução:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \qquad k = 0, 1, \dots, n$$

Consideramos $a = x^3$, $b = -\dfrac{1}{x^2}$, $n = 9$:

Resolução (continuação):

$$T_{k+1} = \binom{9}{k}(x^3)^{9-k}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^k \qquad 0 \le k \le 9$$

$$= \binom{9}{k}(-1)^k \frac{x^{27-3k}}{x^{2k}} =$$

$$= (-1)^k \binom{9}{k} x^{27-3k-2k} = (-1)^k \binom{9}{k} x^{27-5k}$$

Logo, devemos determinar k tal que $T_{k+1} = (-1)^k \binom{9}{k} x^2$

Portanto, deve ser $27 - 5k = 2 \Rightarrow k = 5$

Resposta:

O coeficiente x^2 de $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^9$ é $(-1)^5 \binom{9}{5} = -126$

Resumo:

Definição de binômio: $a + b$

Teorema binomial (ou Binômio de Newton):

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}_+$$

Observações:

(1) Os coeficientes da expansão de $(a + b)^n$ são os elementos da linha n do triângulo de Pascal.

(2) A expansão de $(a + b)^n$ tem $n + 1$ termos

(3) O termo $r + 1$ da expansão de $(a + b)^n$ é $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$

cederj

Notação:

$$\binom{n}{r} := C_n^r$$

Propriedade:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} a^k b^{n-k}$$

Módulo: Relação de Recorrência

Objetivo:

- Apresentar a técnica recursiva que permite reduzir um problema envolvendo n objetos a outro problema semelhante com n–1 objetos, que por sua vez é possível reduzir a outro problema do mesmo tipo com n–2 objetos, e assim pode-se ir reduzindo a problemas com menos elementos até obter um problema de simples resolução.

Importância:

- Muitos problemas de contagem são modelados e resolvidos usando relações de recorrência.

Aula 15

Conteúdo:

- Introdução
- Definição
- Relação de Fibonacci
- Torre de Hanoi
- Método de substituição

Introdução:

Exemplo 1:

Considere expressões de 4 elementos formadas por dígitos ou por símbolos das operações aritméticas.
Neste problema uma expressão é válida se verifica:

(a) O primeiro e o último termo da expressão é um dígito (0, 1, 2, ..., 9)

(b) Não podem estar juntos símbolos aritméticos (+,−,×,÷)

Determine o número de expressões válidas.

- Ilustração:

$$\left.\begin{array}{l}0187\\1+99\end{array}\right\}\text{ expressões válidas}$$

$$\left.\begin{array}{l}5\times3-\\6\div+2\end{array}\right\}\text{ expressões não válidas}$$

Exemplo 1 (continuação):

Resolução:

$$\underbrace{\_\_\ \ \_\_\ \ \_\_}_{\textbf{Possibilidades}}\ \ \underbrace{\_\_}_{\textbf{Dígito}}$$

Caso I		**Caso II**		
expressão válida de comprimento 3 (total N_3)	**ou**	expressão válida de comprimento 2 (total N_2)	+	Símbolo aritmético

N_4 : número de expressões válidas de comprimento 4

N_3 : número de expressões válidas de comprimento 3

N_2 : número de expressões válidas de comprimento 2

N_1 : número de expressões válidas de comprimento 1

Resolução (continuação):

Cálculo de N_4 a partir de N_3 e N_2

Caso I

$$\underbrace{\_\_\ \ \_\_\ \ \_\_}_{\text{expressão válida}}\ \ \underbrace{\overset{\overbrace{0,\ 1,\ \ldots,\ 9}^{\text{dígito}}}{\_\_}}$$

Número de possibilidades: $N_3 \times 10$

Caso II

$$\underbrace{\_\_\ \ \_\_}_{\text{expressão válida}}\ \ \underbrace{\overset{\overbrace{+,\ -,\ \times,\ \div}^{\text{símbolo}}}{\_\_}}\ \ \underbrace{\overset{\overbrace{0,\ 1,\ \ldots,\ 9}^{\text{dígito}}}{\_\_}}$$

Número de possibilidades: $N_2 \times 4 \times 10$

Logo, $N_4 = 10N_3 + 40N_2$

Resolução (continuação):

Portanto, pode-se calcular N_4 a partir da relação encontrada $N_4 = 10N_3 + 40N_2$

Cálculo de N_3:

$$\underbrace{\_\_\_ \quad \_\_\_}\quad \underbrace{\_\_\_}_{10}$$

expressão válida de extensão 2 (total N_2)	ou	expressão válida de extensão 1 (total N_1) + símbolo aritmético

Logo,

$$N_3 = 10N_2 + 40N_1$$

Resolução (continuação):

Cálculo de N_2:

$$\underbrace{\_\_\_}\quad\underbrace{\_\_\_}_{10}$$

expressão válida de extensão 1 (total N_1)

Portanto,

$$N_2 = 10N_1$$

Como N_0: número de expressões válidas de cumprimento 0 = 0

podemos escrever

$$N_2 = 10N_1 + 40N_0$$

Observe que $N_1 = 10$

Resolução (continuação):

Resumo:

- N_k: número de expressões válidas de extensão k,
  k = 0, 1, 2, 3, 4
- Objetivo do problema: Cálculo de N_4.
- Relações obtidas: $N_4 = 10N_3 + 40N_2$

$$N_3 = 10N_2 + 40N_1$$

$$N_2 = 10N_1 + 40N_0$$

(relação: $N_k = 10N_{k-1} + 40N_{k-2}$, k = 4, 3, 2)

$N_0 = 0$, $N_1 = 10$ $\Rightarrow$ $N_2 = 10 \times 10 = 100$

$\Rightarrow$ $N_3 = 10 \times 100 + 40 \times 10 = 1400$

Resposta: O número de expressões válidas é

$$N_4 = 10 \times 1400 + 40 \times 100 = 18000$$

Definição:

Uma relação de recorrência é uma fórmula que relaciona um número a_n a alguns dos seus predecessores $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_k, \dots, a_0$

- Ilustração:

No exemplo 1, $n = 4$, $a_k = N_k$, $k = 4, 3, 2, 1, 0$

relação de recorrência $N_k = 10N_{k-1} + 40N_{k-2}$

Exemplo 2:

Seja S_n a soma dos primeiros n números naturais.

Determine a relação de recorrência em termos de S_{n-1}.

Resolução:

$$S_n = \underbrace{1 + 2 + \ldots + (n-1)}_{S_{n-1}} + n$$

Resposta:

A relação de recorrência é $S_n = S_{n-1} + n$

- Observação:

  A relação de recorrência é também denominada equação de diferenças.

Relação de Fibonacci:

O problema proposto por Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, em um livro publicado em 1202 é o seguinte:

Determine o número de pares de coelhos ao final de 12 meses sob as seguintes condições:

(a) Inicialmente tem-se um único par de coelhos, um macho e uma fêmea recém nascidos.

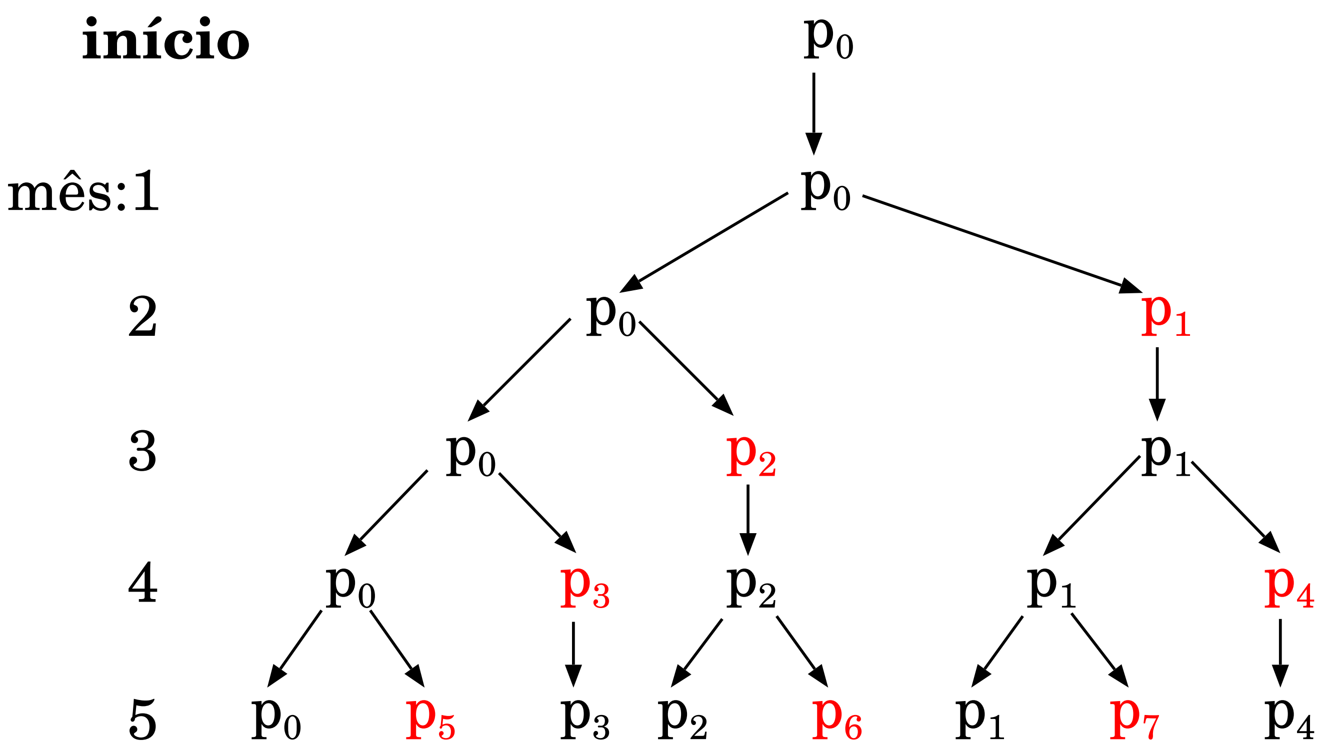
(b) Todo mês cada par de coelhos com pelo menos 2 meses produz um novo par de coelhos de sexo oposto.

(c) Nenhum coelho morre durante este processo.

Resolução:

F_n : número de pares de coelhos no final do mês n ($n \in \mathbb{N}$)

F_0 : número de pares no início do processo



$$F_0 = \underbrace{1}_{p_0}$$

$$F_1 = \underbrace{1}_{p_0}$$

$$F_2 = \underbrace{F_1}_{p_0} + \underbrace{1}_{p_1}$$

$$F_3 = F_2 + \underbrace{1}_{p_2}$$

$$F_4 = F_3 + \underbrace{1}_{p_3} + \underbrace{1}_{p_4} = F_3 + F_2$$

$$F_5 = F_4 + F_3$$

Logo, a relação de recorrência é $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ (k = 2, 3, 4, ...)

e as condições iniciais são $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$

Resolução (continuação):

Cálculo de F_{12}:

Usamos $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ para $k = 2, 3, \ldots, 12$:

$F_1 = 1$ $F_2 = F_1 + F_0 = 2$ $F_3 = F_2 + F_1 = 3$

$F_4 = F_3 + F_2 = 5$ $F_5 = F_4 + F_3 = 8$ $F_6 = F_5 + F_4 = 13$

$F_7 = F_6 + F_5 = 21$ $F_8 = F_7 + F_6 = 34$ $F_9 = F_8 + F_7 = 55$

$F_{10} = F_9 + F_8 = 89$ $F_{11} = F_{10} + F_9 = 144$ $F_{12} = F_{11} + F_{10} = 233$

Resposta: O número de pares de coelhos ao final de 12 meses é 233.

- Observação: Os números de Fibonacci, F_n, aparecem frequentemente em problemas combinatórios.

Torre de Hanoi:

1. Torre de Hanoi simplificada

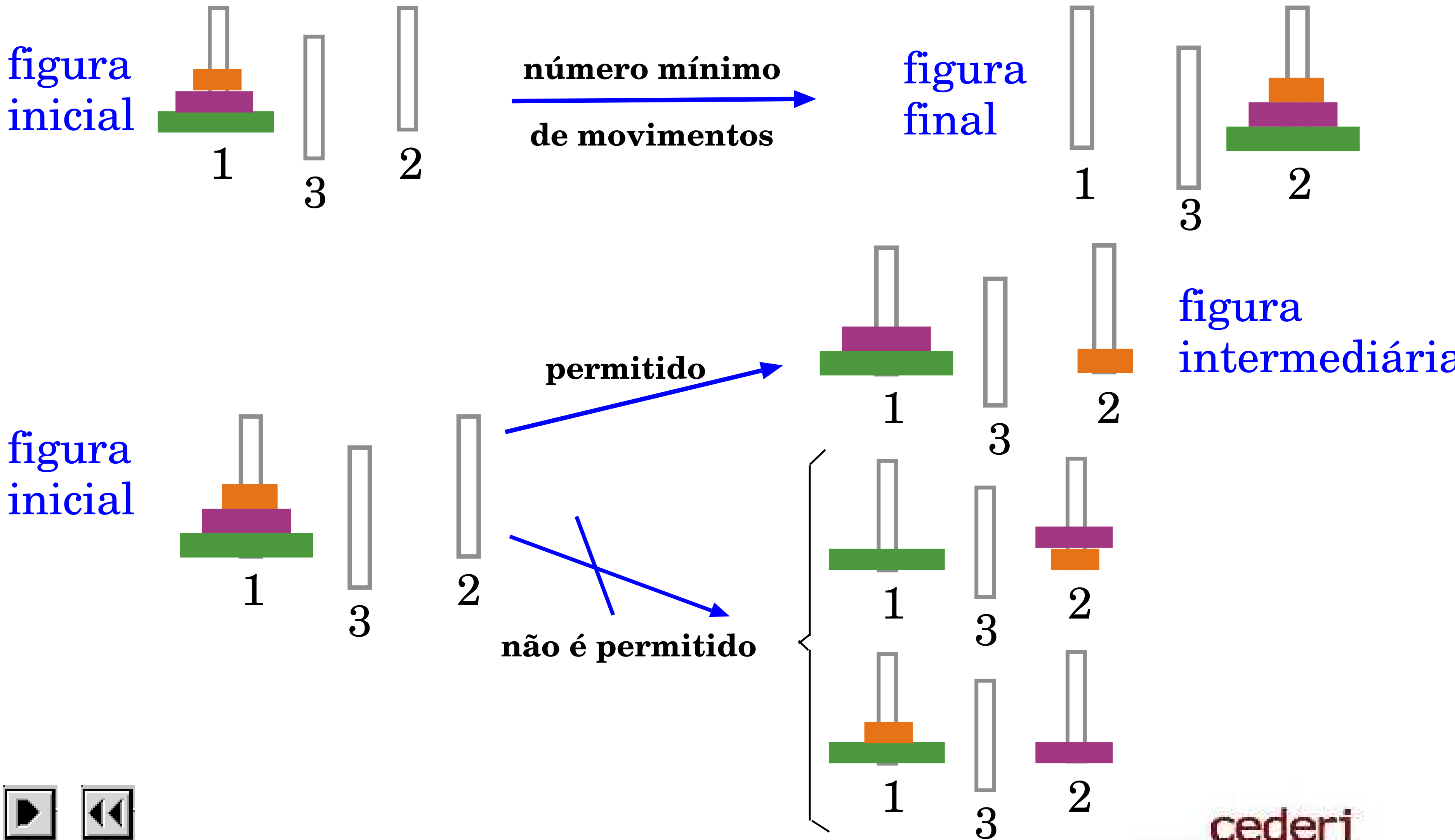
   Determine o menor número de movimentos que são necessários para passar 3 discos colocados em um eixo, em ordem crescente de tamanho (de cima para baixo), para um outro eixo. Pode ser usado de forma auxiliar um terceiro eixo. Devem ser respeitadas as seguintes regras:

   (a) Só é permitido mover um disco do topo para um outro eixo.

   (b) Não é permitido colocar um disco maior em cima de um menor.

Torre de Hanoi simplificada (continuação)

- Ilustração



Torre de Hanoi simplificada (continuação):

Resolução:

figura inicial

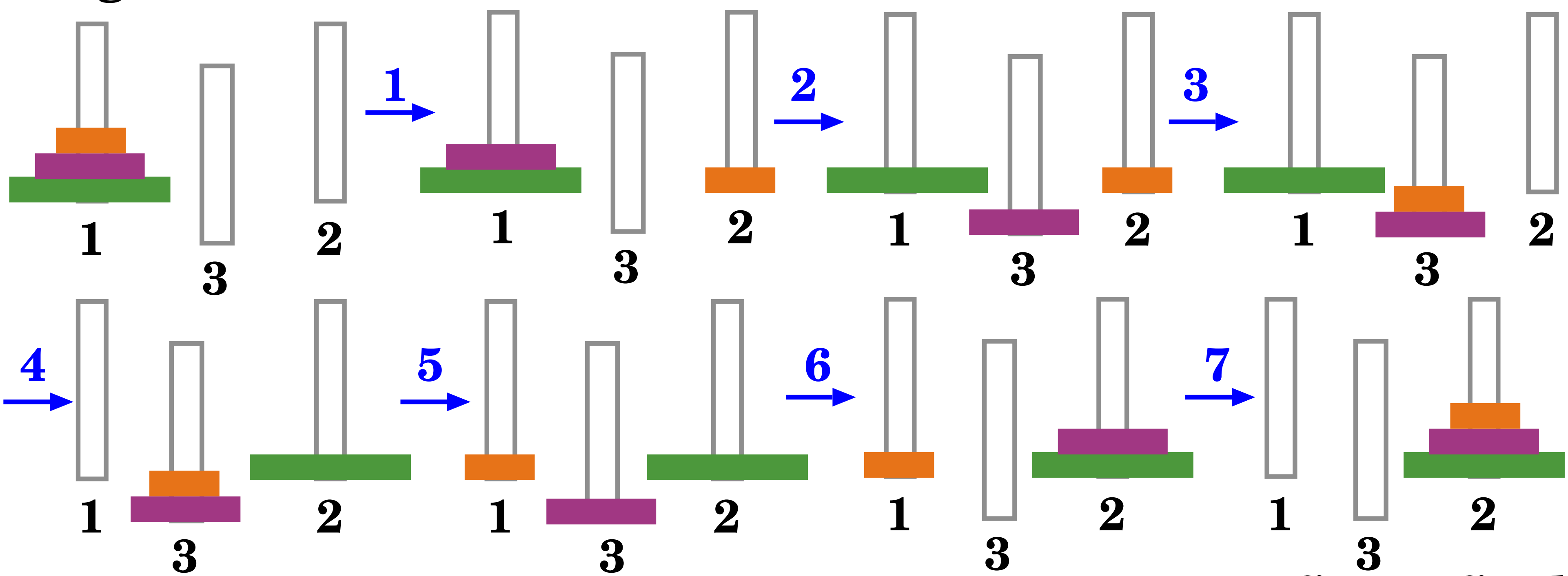


figura final

Resposta:

O menor número de movimentos para passar 3 discos de um eixo a um outro seguindo as regras é 7.

Resolução (continuação):

Releitura do raciocínio:

T_k: número mínimo de movimentos necessários para passar k discos de um eixo a outro nas condições do problema (k = 2, 3)

Cálculo de T_3 (Algoritmo)

Passo 1 - Mover os 2 primeiros discos (de cima para baixo) do primeiro para o terceiro eixo (k = 3   2 = k–1)

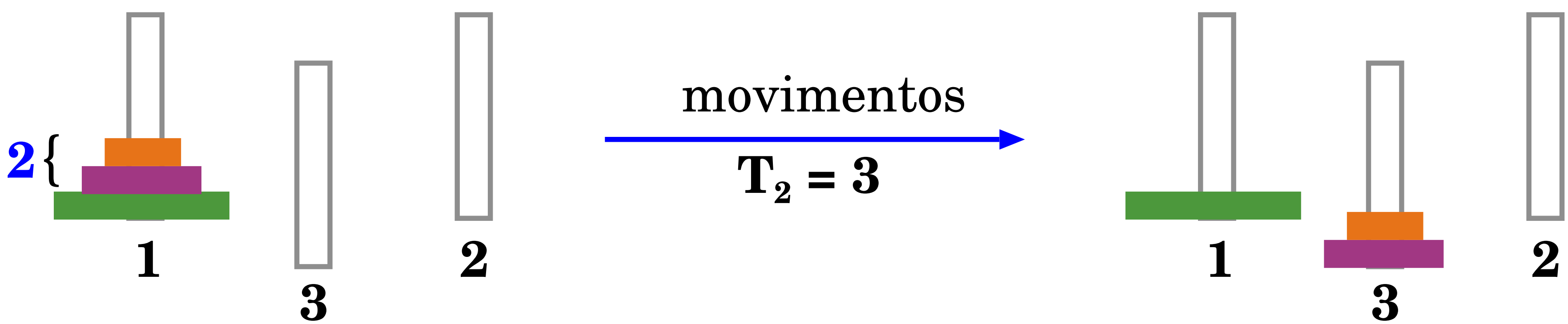
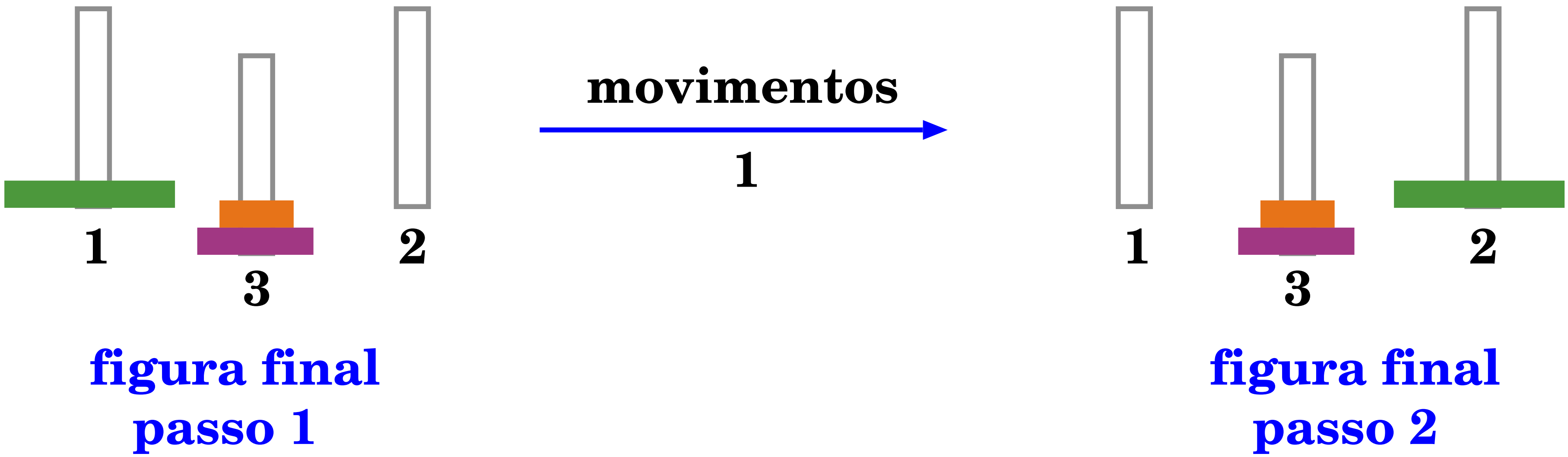


figura inicial

figura final - passo 1

Resolução (continuação):

Passo 2 - Mover o disco maior do primeiro para o segundo eixo



Resolução (continuação):

Passo 3 - Mover os 2 discos do terceiro eixo para o segundo eixo

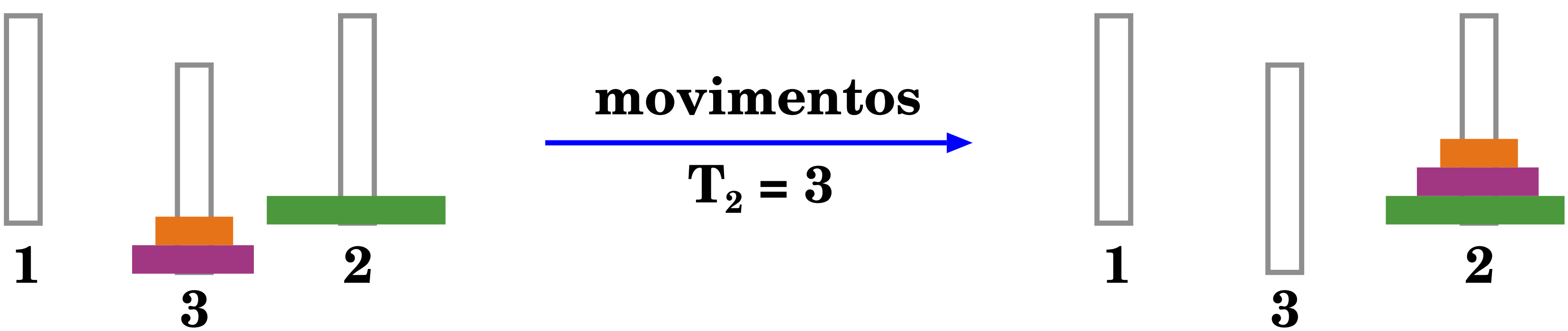


figura final passo 2

figura final

Logo,

$$T_3 = T_2 + 1 + T_2 = 2T_2 + 1 = 7$$

2. Caso geral

Determine o menor número de movimentos que são necessários para passar n discos colocados em um eixo, em ordem crescente de tamanho (de cima para baixo), para um outro eixo. Pode ser usado de forma auxiliar um terceiro eixo. Devem ser respeitadas as seguintes regras:

(a) Só é permitido mover um disco do topo para um outro eixo.

(b) Não é permitido colocar um disco maior em cima de um menor.

T_k: número mínimo de movimentos necessários para passar k discos de um eixo a outro nas condições do problema (k = 1, 2, ... , n)

Resolução (algoritmo recursivo):

Passo 1 - Mover os primeiros $n-1$ discos do topo do primeiro eixo para o terceiro eixo
(é feito recursivamente em T_{n-1} movimentos)

Passo 2 - Mover o disco maior do primeiro eixo para o segundo eixo (precisa-se de 1 movimento)

Passo 3 - Mover os $n-1$ discos do terceiro eixo para o segundo eixo
(como no passo 1, é feito em T_{n-1} movimentos)

Resposta: A partir do algoritmo obtemos que o número de movimentos necessários para resolver a torre de Hanoi está dado pela relação de recorrência $T_n = 2T_{n-1} + 1$ com condição inicial $T_1 = 1$.

Relação de Recorrência: *Torre de Hanoi*

Exemplo 3: Aplicando o algoritmo recursivo, faça todos os movimentos correspondentes ao problema da torre de Hanoi com n = 4 ($T_4 = 2T_3 + 1 = 15$).

Resposta Voltar

Passo 1 - Mover os primeiros 3 discos do topo do eixo 1 para o 3

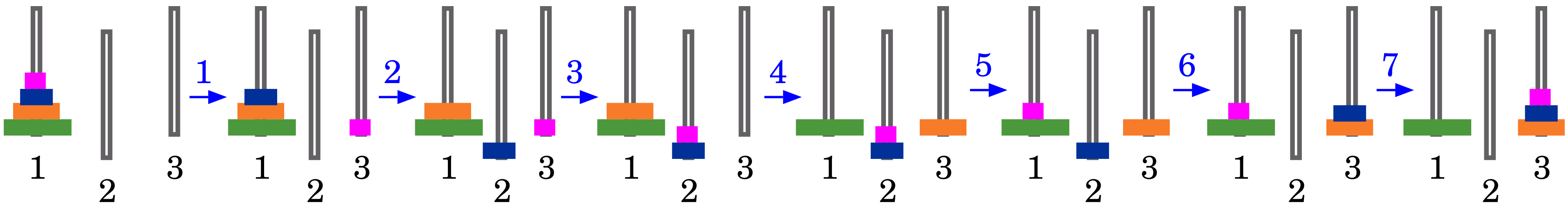
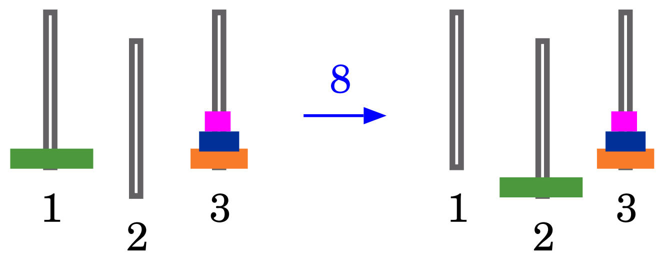


figura inicial

(T_3 = 7 movimentos)

Passo 2 - Mover o disco maior do eixo 1 para o eixo 3

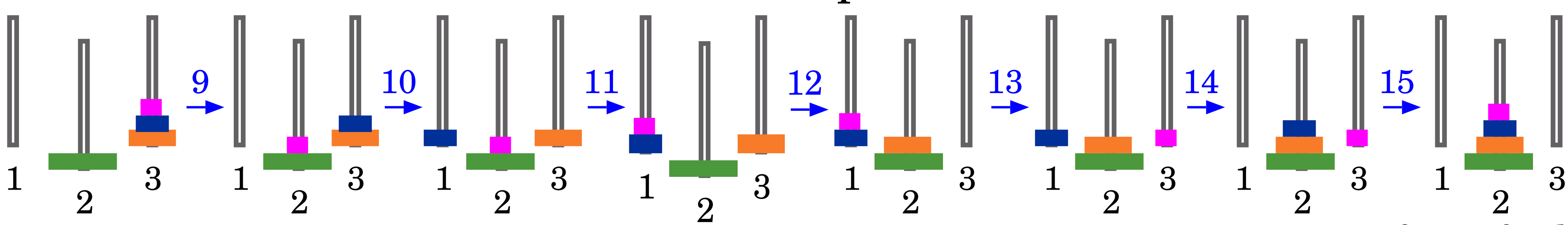
início passo 2



(1 movimento)

Passo 3 - Mover os discos do eixo 3 para o eixo 2

(T_3 = 7 movimentos)



início passo 3

figura final

- Dado histórico:

  Este problema foi inventado em 1883 pelo matemático francês Edouard Lucas. O número de discos era 64.

- Observação:

  Podemos calcular T_{64} usando a relação de recorrência $T_k = 2T_{k-1} + 1$ e a condição inicial $T_1 = 1$.

  Precisamos calcular T_2, T_3, T_4, ... até T_{64}, o que é bem demorado.

- Pergunta:

É possível encontrar uma fórmula fechada para T_n que nos permita calcular rapidamente o número de movimentos que são necessários para resolver o problema da Torre de Hanoi para um dado número de discos n?

Resposta:

Sim. A fórmula é obtida considerando a relação de recorrência $T_n = 2T_{n-1} + 1$ e um método de substituição.

Método de Substituição:

$$T_n = 2T_{n-1} + 1 \qquad (T_{n-1} = 2T_{n-2} + 1)$$

$$= 2[\, 2T_{n-2} + 1 \,] + 1$$

$$= 2^2T_{n-2} + 2 + 1 \qquad (T_{n-2} = 2T_{n-3} + 1)$$

$$= 2^3T_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \qquad (T_{n-3} = 2T_{n-4} + 1)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$= 2^kT_{n-k} + 2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 1 \qquad (T_{n-k} = 2T_{n-k-1} + 1)$$

$$\vdots$$

$$\overset{(k=n-1)}{=} 2^{n-1}\underbrace{T_1}_{=1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^2 + 2 + 1 =$$

$$= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^2 + 2 + 1 \qquad \text{(progressão geométrica)}$$

$$= \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n - 1$$

Propriedade $T_n = 2^n - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Prova (princípio de indução matemática):

$$P(n):\ T_n = 2^n - 1$$

Prova Voltar

(1) Base de indução: $P(1)$ é verdadeira pois $T_1 = 1 = 2^1 - 1$

(2) Hipótese de indução (HI): $P(k)$: $T_k = 2^k - 1$ é verdadeira

(3) $P(k)$ verdadeira $\Rightarrow$ $P(k+1)$: $T_{k+1} = 2^{k+1} - 1$ é verdadeira

Desenvolvendo

Pela relação de recorrência resulta

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= 2T_k + 1 \\ &\overset{HI}{=} 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 2 + 1 = 2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeira

Portanto, pelo princípio de indução matemática temos que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Ilustração: $T_{64} = 2^{64} - 1 > 18 \times 10^{12}$

- Observação:

O método de substituição usado para resolver algumas relações de recorrência também é denominado de suposição e verificação.

De fato:

Pela substituição obtém-se uma expressão fechada que é a suposição ou conjectura ($T_n = 2^n - 1$)
A verificação consiste em provar que a conjectura é verdadeira (a prova por indução completa de $T_n = 2^n - 1$).

Exemplo 4:

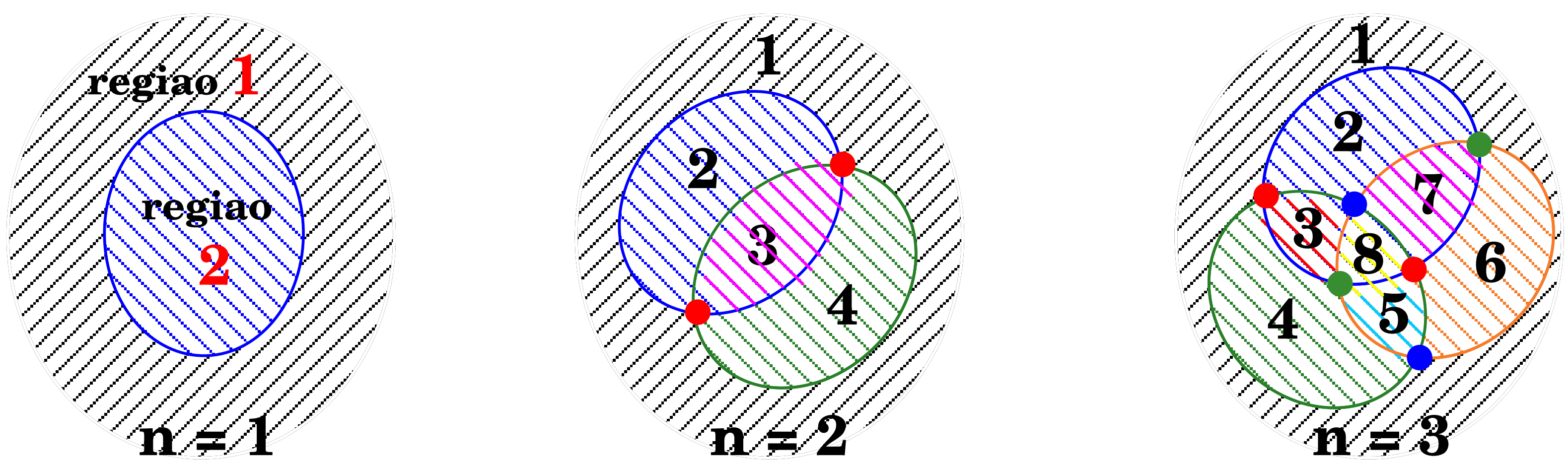
São desenhados no plano n ovais verificando as condições:

(a) dois ovais se interceptam em exatamente 2 pontos

(b) três ovais não se interceptam no mesmo ponto

Em quantas regiões esses ovais dividem o plano?

- Ilustração:



Exemplo 4 (continuação):

Resolução:

a_k : número de regiões em que o plano é dividido por k ovais $(k = 1, 2, \dots , n)$

Relação de recorrência

$$a_k = a_{k-1} + 2\,(k - 1) \qquad k = n, n-1, \dots , 2$$

Condição inicial

$$a_1 = 2$$

Exemplo 4 (continuação):

Obtenção de uma fórmula fechada

(método de substituição)

$$a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$$

$$= \overbrace{a_{n-2} + 2(n-2)} + 2(n-1)$$

$$= \overbrace{a_{n-3} + 2(n-3)} + 2(n-2) + 2(n-1)$$

$$\vdots$$

$$= a_{n-k} + 2[\,(n-k) + (n-k+1) + \ldots + (n-1)\,]$$

$$\vdots$$

k = n-1

$$= \underbrace{a_1} + 2\,\underbrace{[\,1 + 2 + \ldots (n-1)\,]}$$

$$= 2 + 2\,\frac{(n-1)n}{2} = 2 + (n-1)n$$

Exemplo 4 (continuação):

Conjectura

$$a_n = 2 + (n - 1)n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Verificação: indução em n (desafio)

Desafio Voltar

Base de indução P(1): $a_1 = 2 + (1 - 1).1$ é verdadeira pois $a_1 = 2$

Passo da indução: Devemos provar que

P(k): $a_k = 2 + (k - 1)k$ é verdadeira $\Rightarrow$ P(k + 1): $a_{k+1} = 2 + k(k + 1)$ é verdadeira

De fato, assuma que P(k) é verdadeira (hipótese indutiva, HI), então pela relação de recorrência temos que

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + 2(k + 1 - 1) \\ &\overset{HI}{=} \overbrace{2 + (k - 1)k} + 2k = 2 + [\underbrace{(k - 1) + 2}]k \\ &= 2 + (k + 1)k \end{aligned}$$

Logo, P(k + 1) é verdadeira

Pelo princípio de indução matemática resulta que

P(n): $a_n = 2 + (n - 1)n$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$

Exemplo 4 (continuação):

Resposta:

O número de regiões em que n ovais dividem o plano é $a_n = 2 + (n - 1)n$

- Ilustração

Se $n = 4$ então o plano fica dividido em $a_4 = 2 + 3.4 = 14$ regiões.

Desafio:

Faça o desenho das 14 regiões determinadas pelos 4 ovais.

Resumo:

Definição de relação de recorrência (ou equação de diferenças)

É uma fórmula que relaciona um número a_n a alguns de seus predecessores a_{n-1}, a_{n-2}, a_k, ...

Relação de Fibonacci (1202)

F_n: número de pares de coelhos no final do mês n sob as condições do problema

Relação de recorrência $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Condições iniciais $F_0 = 1$, $F_1 = 1$

Torre de Hanoi (E. Lucas, 1883)

T_n: número mínimo de movimentos necessários para passar n discos ordenados de um eixo a um outro eixo segundo as condições do problema.

Relação de recorrência $T_n = 2T_{n-1} + 1$

Condições iniciais $T_1 = 1$

Fórmula fechada (resolução da relação de recorrência)

$$T_n = 2^n - 1$$

Método de substituição (ou de suposição e verificação)

- Permite resolver <u>algumas</u> relações de recorrência a partir da relação e de suas condições iniciais.
- Através de substituições sucessivas chega-se a uma conjectura (ou suposição) que precisa ser verificada.

Módulo: Grafos

- Introdução aos Grafos
- Definições Básicas e Notações
- Grau de um vértice
- Problema do Isomorfismo e Representação de Grafos por Matrizes
- Caminhos e Ciclos
- Árvores
- Grafos Eulerianos e Grafos Hamiltonianos
- Grafos Planares
- Grafos Direcionados

Objetivo:

- Construir um embasamento teórico e estrutural da Teoria dos Grafos que permitirá adquirir a capacidade de resolver problemas algoritmicos em grafos, tendo em mente uma preocupação computacional.

Importância:

- Inúmeros problemas reais podem ser convenientemente modelados por grafos.

- Os grafos são estruturas matemáticas discretas e seu estudo além de um interesse puramente teórico tem também um enorme interesse prático.

Aula : Introdução aos Grafos

Conteúdo:

- História
  - Problema das Pontes de Königsberg
  - Problema das quatro cores
- Aplicações

História:

A Teoria dos Grafos, considerada como um ramo da Matemática Discreta tem uma origem relativamente recente.

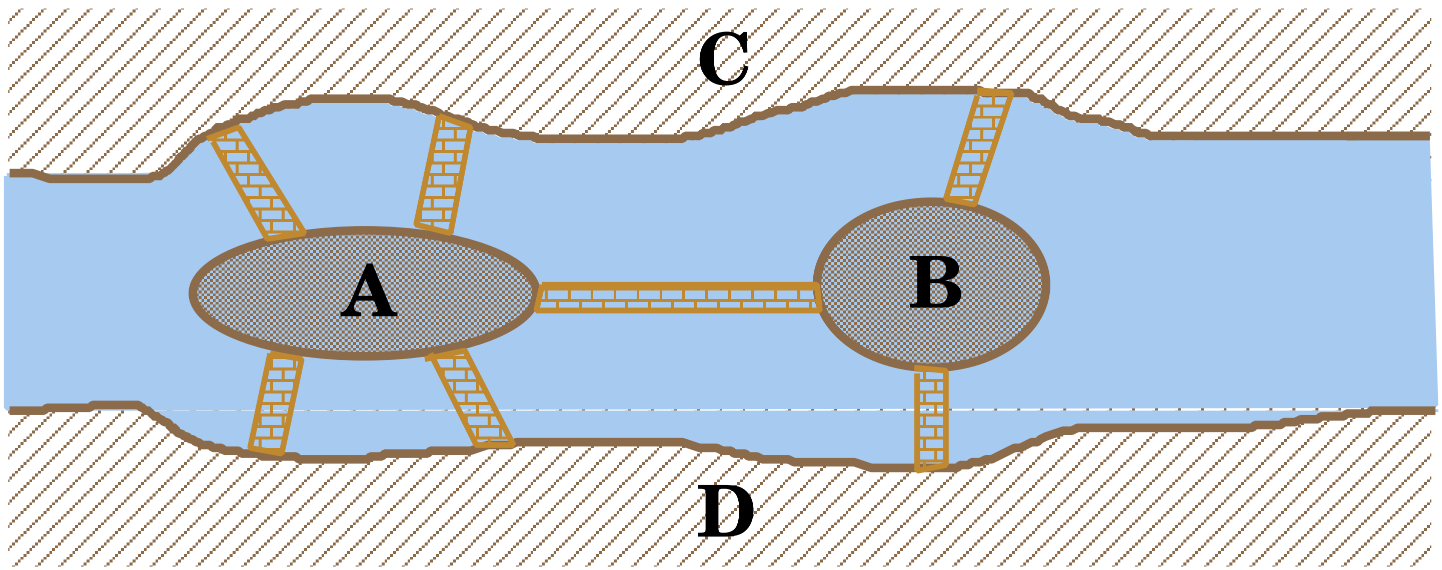
Século XVIII - Marco inicial da Teoria dos Grafos

O problema que é considerado o marco inicial na Teoria dos Grafos é o Problema da Ponte de Königsberg resolvido pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707 - 1783) em 1736.

(Euler foi um dos matemáticos mais prolíficos de todos os tempos e deixou contribuições importantes em diferentes áreas da matemática)

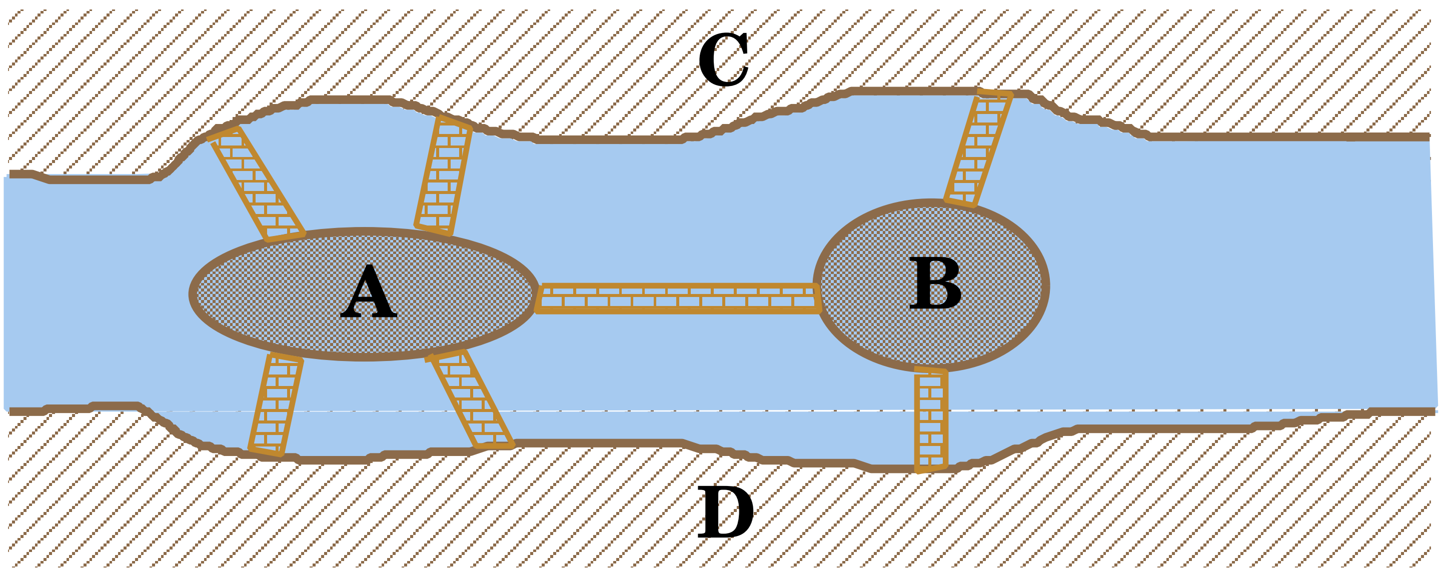
Problema das Pontes de Königsberg

Na cidade de Königsberg (na antiga Prússia), hoje Kaliningrado, sete pontes cruzam o rio Pregel, estabelecendo ligações entre duas ilhas e entre as ilhas e as margens opostas do rio, conforme a ilustração abaixo:



Ilhas $\rightarrow$ A, B
Margens $\rightarrow$ C, D

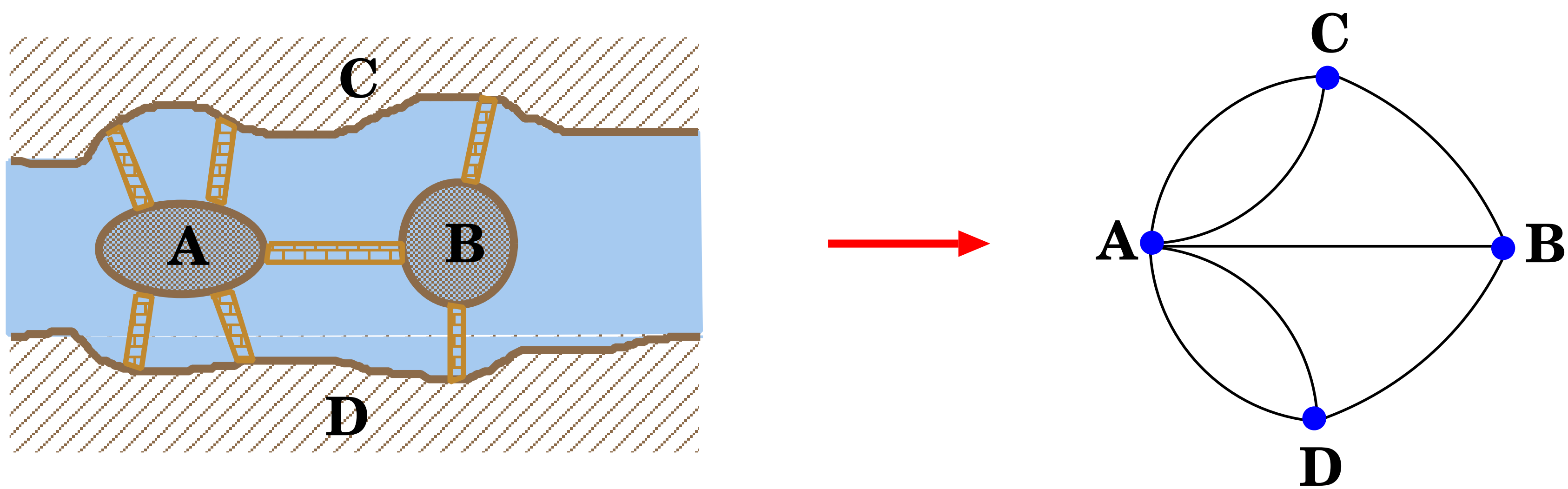
O problema consiste em, partindo de alguma das margens (C ou D) ou de alguma das ilhas (A ou B) é possível determinar um trajeto segundo o qual se possa retornar à região de partida após atravessar cada ponte uma única vez?

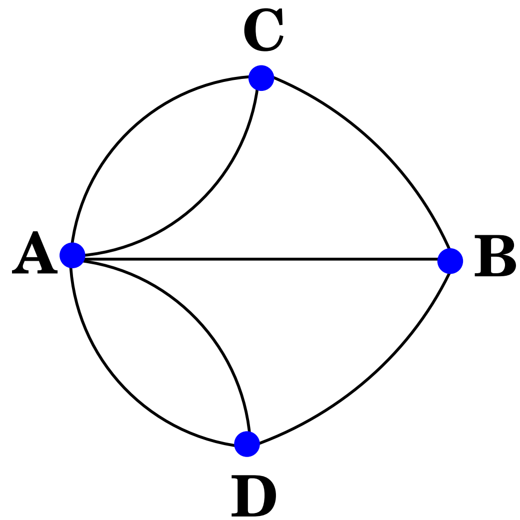


- Euler foi o primeiro a tratar esse problema sob um ponto de vista matemático e provou formalmente que esse trajeto era impossível.

- A prova de Euler apareceu em 1736 em um artigo intitulado "Solutio problematis ad geometrian situs pertinentis". Embora esse artigo não tenha sido escrito na linguagem atual de grafos, as suas idéias são de natureza grafo teóricas e esse artigo é considerado o primeiro artigo de grafos.

Euler modelou o problema associando a cada região de terra um ponto e a cada ponte uma linha ligando os pontos correspondentes as regiões que a ponte conectava.





- Esse diagrama representa um grafo (multigrafo) G e vamos ver mais adiante que o problema se torna determinar um trajeto euleriano no grafo G.
- Euler mostrou que o problema só podia ser resolvido se tivéssemos um número par de pontes saindo de cada região.

  (Vamos estudar isso na aula de Grafos Eulerianos)

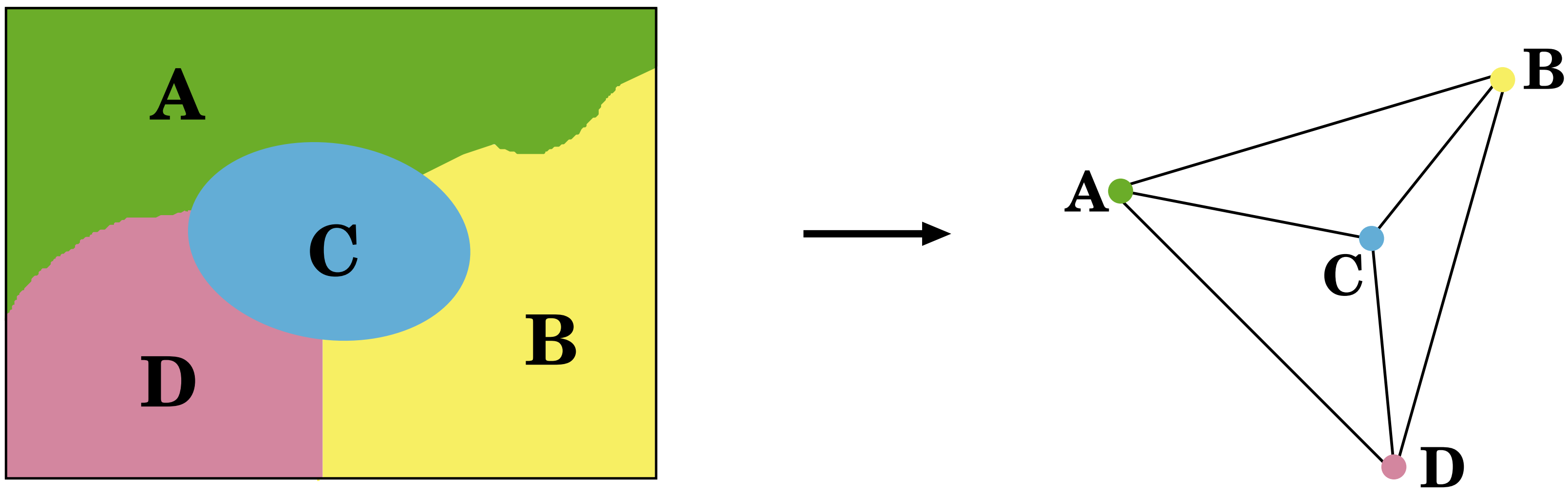
Século XIX

- Problemas das quatro cores (Guthrie 1852)
- Problema do Ciclo Hamiltoniano (Sir William Hamilton - 1859)
  (Problema do Caixeiro viajante)
- Teoria das Árvores $\begin{cases} \text{Kirchhoff (circuitos elétricos) - 1847} \\ \text{Cayley (química orgânica) - 1857} \end{cases}$
- Contexto puramente matemático (Jordan 1869)

Problema das quatro cores

- Outro problema famoso que impulsionou o desenvolvimento da Teoria dos Grafos foi o Problema das quatro cores.
  Em 1852 Francis Guthrie formulou esse problema.
- O problema das quatro cores consiste em colorir os países de um mapa arbitrário, plano, cada país com uma cor, de tal forma que países fronteiriços possuam cores diferentes, e de maneira que sejam usadas o mínimo de cores.
- Guthrie <u>conjecturou</u> que quatro cores eram suficientes. Esse problema ficou em aberto por mais de 100 anos.

O exemplo a seguir mostra que 3 cores não são suficientes.



- Em 1977 Appel e Haken apresentaram uma prova, utilizando o computador (parcialmente aceita pela comunidade matemática), de que a conjectura era verdadeira.
- Em 1977 Robertson, Seymour, Sanders e Thomas apresentaram uma prova mais combinatória, mas que também utiliza o computador.

Século XX

- Resultados fundamentais $\begin{cases} \text{Kuratowski} \\ \text{König} \\ \text{Menger} \end{cases}$

- Aparecimento do computador impulsionou enormemente o desenvolvimento da Teoria de Grafos.

Aplicações:

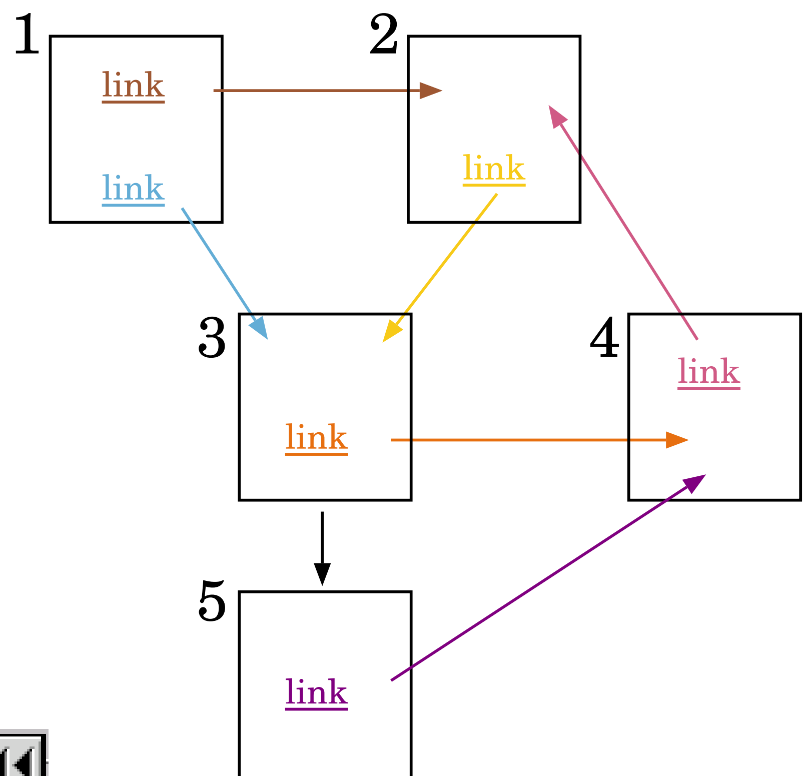
Computação:
- Banco de Dados
- Redes
- Algoritmos Distribuídos
- Web
- ⋮

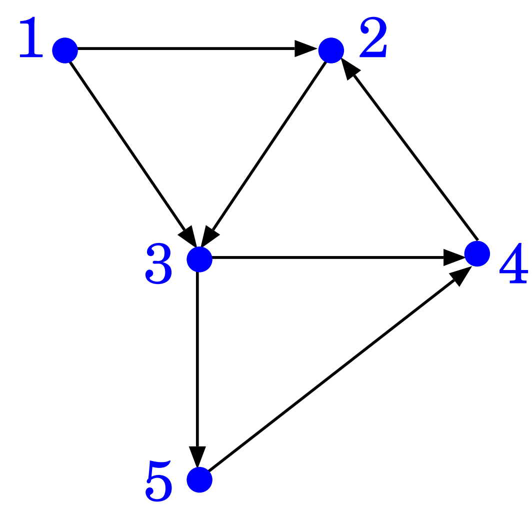
Química
Pesquisa Operacional
Engenharia Elétrica e Civil
Arquitetura
Sociologia
Genética
Psicologia
Antropologia
Linguística
⋮

Exemplo 1:

"Web"

Cada página da "web" pode ser associada a um ponto (nó) e os "links" associados as linhas entre os pontos correspondentes as páginas.





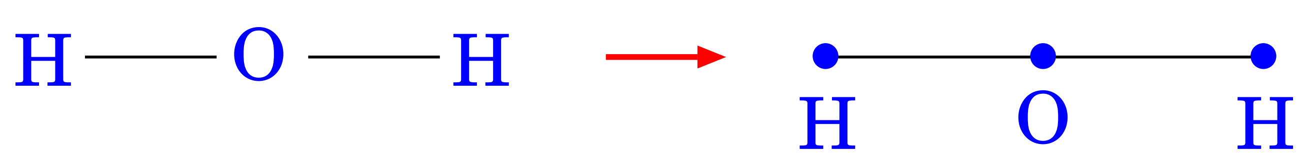
Grafo da "Web"

(milhões de nós
bilhões de arestas)

Exemplo 2:

Química

Uma molécula química consiste de um número de átomos ligados entre si. Por exemplo, uma molécula de água (H_2O) consiste de um átomo de oxigênio ligado a 2 átomos de hidrogênio e podemos representar pelo diagrama

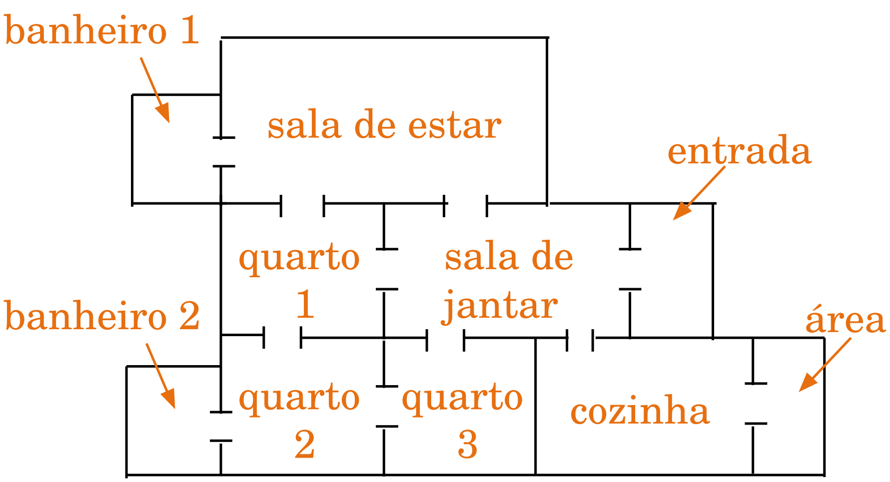


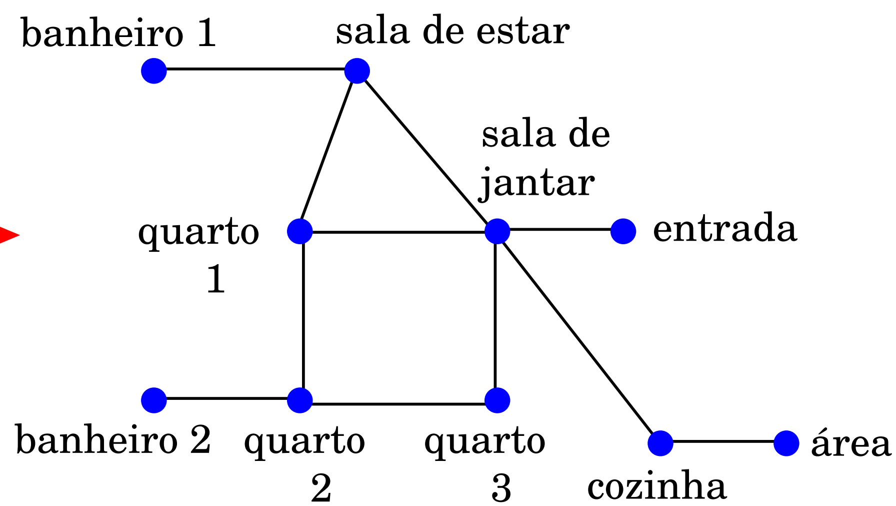
aos átomos $\longrightarrow$ pontos no plano

as ligações $\longrightarrow$ linhas unindo os pontos associados aos átomos correspondentes

Exemplo 3: Arquitetura

Planta plana de um apartamento é representada pelo diagrama





Grafo de circulação

aos cômodos → pontos no plano

as ligações entre os cômodos → linhas unindo os pontos associados aos cômodos correspondentes

— Esses grafos são úteis para representar as conexões entre vários cômodo e para analisar o movimento de pessoas em edifícios.

Resumo:

História:

Século XVIII - Problema da Ponte de Königsberg (Euler)

Século XIX - Problema das quatro cores

Século XX - Aparecimento do computador

Aplicações

Aula 17: Definições Básicas e Notações

Conteúdo:

- Definições, notações e exemplos:
  - Grafos
  - Representação geométrica
  - Vizinhança
  - Complemento
  - Subgrafos
  - Grafo completo
  - Grafo nulo

Objetivos:

- Introduzir as definições básicas da Teoria de Grafos e suas Notações para que possamos estabelecer uma linguagem própria e desenvolver gradualmente a teoria.

- Exemplificar os conceitos, sempre que possível, para um melhor entendimento.

Grafos:

Um grafo simples ou grafo G é um par (V, E), denotado G = (V, E), onde V é um conjunto finito não vazio de elementos denominados vértices e E é um conjunto de pares não ordenados de elementos distintos de V, chamados arestas.

Exemplo 1:

Seja G = (V, E)

V = { a, b, c, d, e }

E = { (a, b), (b, c), (a, c), (a, e), (c, d), (e, d) }

G é um grafo

Observações:

- Grafos = grafos simples
- Vértices = nós = pontos
- Número de vértices de G : $|V(G)| = n$
- Número de arestas de G : $|E(G)| = m$
- Quando temos vários grafos: $G_1, G_2, \ldots, G_k$, para não haver confusão denotamos seus conjuntos de vértices e arestas respectivamente por: $(V(G_1), E(G_1)), (V(G_2), E(G_2)), \ldots, (V(G_k), E(G_k))$

Dado um grafo G = (V, E)

Cada aresta $e \in$ E será denotado pelo par de vértices e = (v, w) que a forma, v, w $\in$ V. Nesse caso, os vértices v, w são os extremos da aresta e.

A aresta e é dita incidente aos vértices v e w.

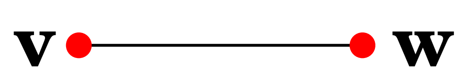
Representação geométrica:

- Representação geométrica (no plano)

Cada vértice $\longrightarrow$ ponto do plano

Cada aresta (v, w) $\longrightarrow$ linha unindo os pontos correspondentes aos vértices v e w.

(v, w) $\longrightarrow$

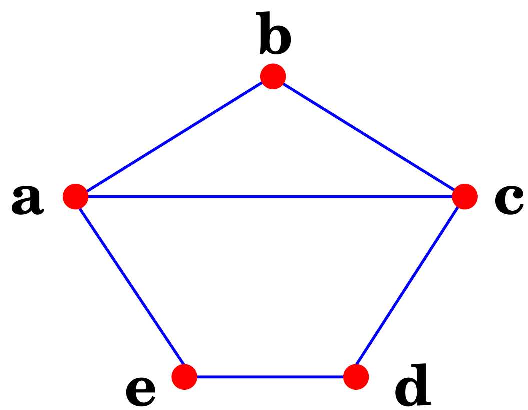


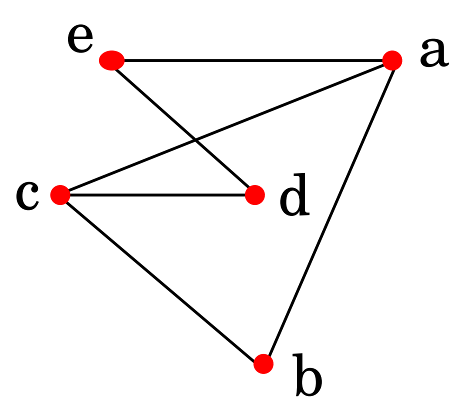
Exemplo 2:

G = (V, E) (grafo do exemplo 1)

V = { a, b, c, d, e }

E = { (a, b), (b, c), (a, c), (a, e), (c, d), (e, d) }





Essa representação é única?

Faça você a sua representação.

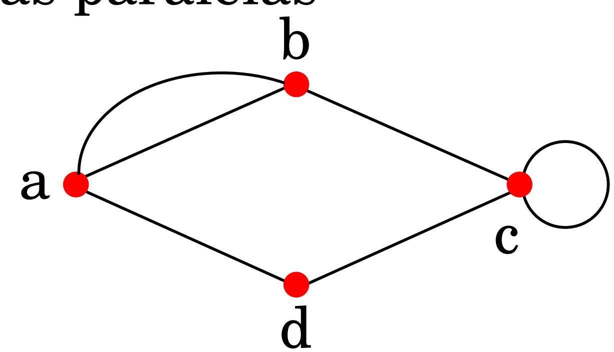
Observação:

Se relaxarmos a definição de grafo (simples), de maneira que admitamos a existência de pares não ordenados iguais de elementos distintos de V, chamadas arestas paralelas e de pares não ordenados de elementos iguais, chamados laços, temos então um multigrafo.

Exemplo 3: $G = (V, E)$

$$V = \{ a, b, c, d \}$$

$$E = \{ \underbrace{(a, b), (a, b)}_{\text{arestas paralelas}}, (b, c), (c, d), (d, a), \underbrace{(c, c)}_{\text{laço}} \}$$



Vizinhança:

Seja $G = (V, E)$ um grafo

Os vértices v e $w \in V$ são ditos adjacentes ou vizinhos se $(v, w) \in E$.

Chamamos de adjacência ou vizinhança de v em G o conjunto:

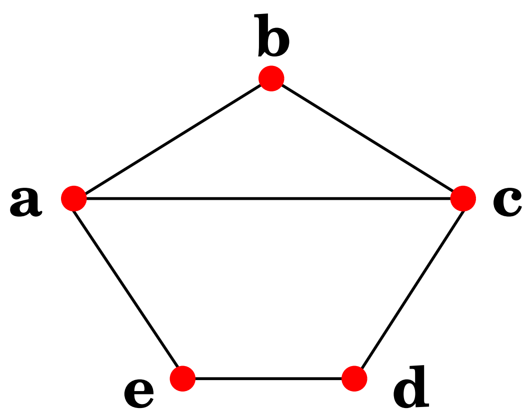
$$N(v) = \{ w \in V \mid (v, w) \in E \}$$

$N(v) = N_G(v)$, se houver mais grafos.

Exemplo 4:

Seja G o grafo do exemplo 1

$$N(v) = \{ w \in V \mid (v, w) \in E \}$$



N(a) = { b, c, e }

N(b) = { a, c }

N(c) = { b, a, d }

N(d) = { c, e }

N(e) = { a, d }

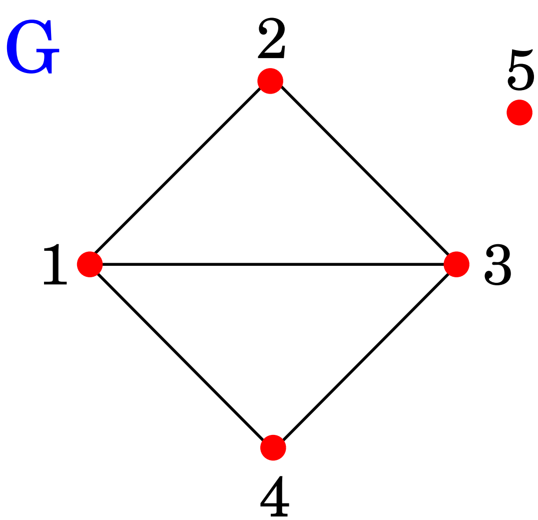
Seja $G = (V, E)$ um grafo

Um vértice v de G é dito isolado quando $N(v) = \emptyset$.

Exemplo 5: $G = (V, E)$

$V = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$

$E = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 4), (3, 4) \}$



$N(5) = \emptyset$

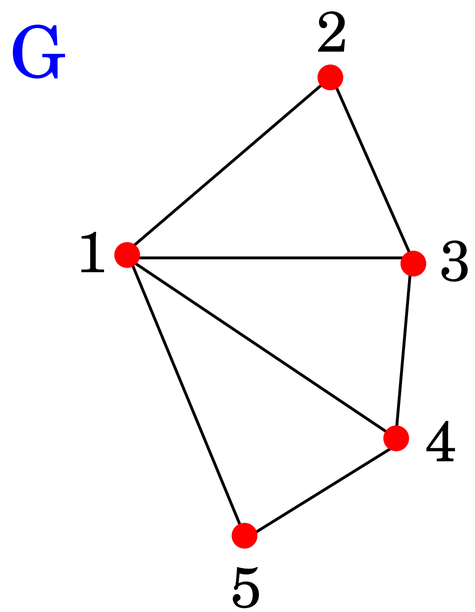
Logo 5 é isolado

Um vértice v de G é dito universal quando $N(v) = V - \{v\}$

Exemplo 6: $G = (V, E)$

$V = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$

$E = \{ (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (3, 4), (4, 5) \}$



$N(1) = \{ 2, 3, 4, 5 \} = V - \{1\}$

Logo 1 é universal

- Observação: Em um mesmo grafo não podemos ter ao mesmo tempo um vértice isolado e um vértice universal.

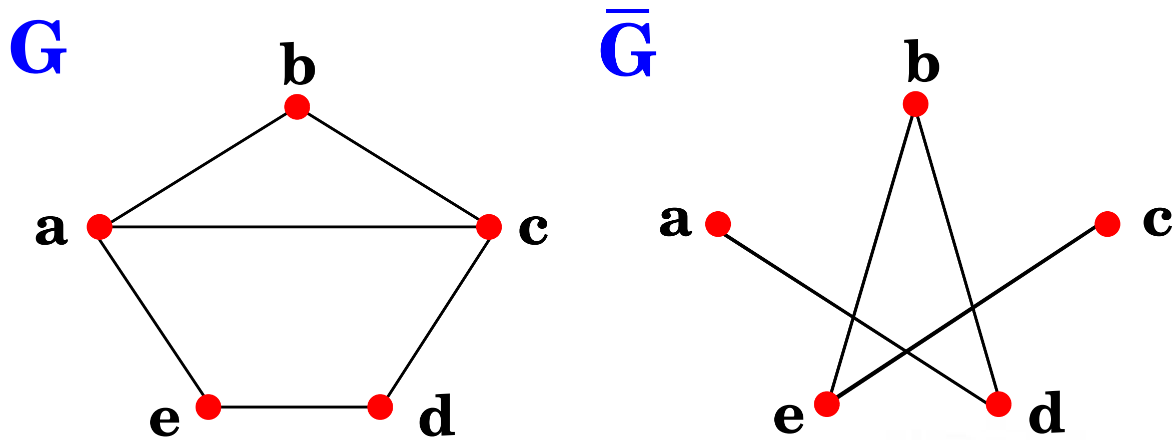
Complemento:

O Complemento de um grafo G, denotado por $\overline{G}$ é o grafo que tem o mesmo conjunto de vértices de G e tal que dois vértices distintos são adjacentes em $\overline{G}$ se e somente se não são adjacentes em G.

$$V(\overline{G}) = V(G)$$

$$E(\overline{G}) = \{ (v, w) \mid v, w \in V(G) \text{ e } (v, w) \notin E(G) \}$$

Exemplo 7:



Subgrafos:

Sejam os grafos G e H.

H é dito um subgrafo de G se

- $V(H) \subseteq V(G)$ e
- $E(H) \subseteq E(G)$

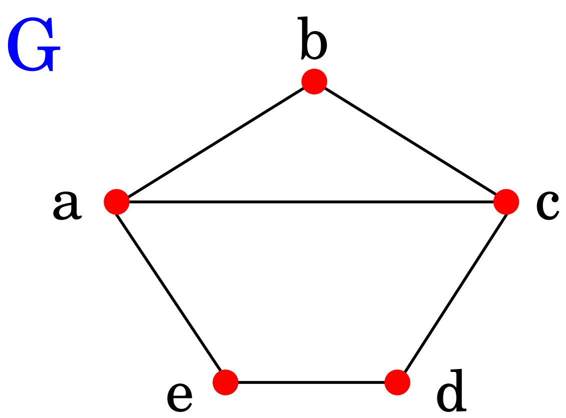
Exemplo 8: Sejam G e H os seguintes grafos

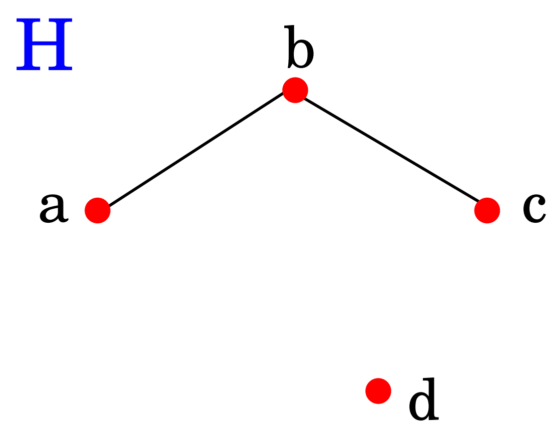
$$V(G) = \{ a, b, c, d, e \}$$

$$E(G) = \{ (a, b), (b, c), (a, c), (c, d), (e, d), (a, e) \}$$

$$V(H) = \{ a, b, c, d \}$$

$$E(H) = \{ (a, b), (b, c) \}$$





$V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G) \Rightarrow$ H é um subgrafo de G

Subgrafo induzido

Seja G um grafo e A um subconjunto dos vértices de G, isto é, $A \subseteq V(G)$.

O subgrafo H de G induzido por A é denotado por G[A] e definido por:

$$V(H) = V(G[A]) = A \quad \text{e}$$

$$E(H) = E(G[A]) = \{ (x, y) \in E(G) \mid x \in A \ \text{ e } \ y \in A \}$$

H é dito um subgrafo induzido de G.

Exemplo 9:

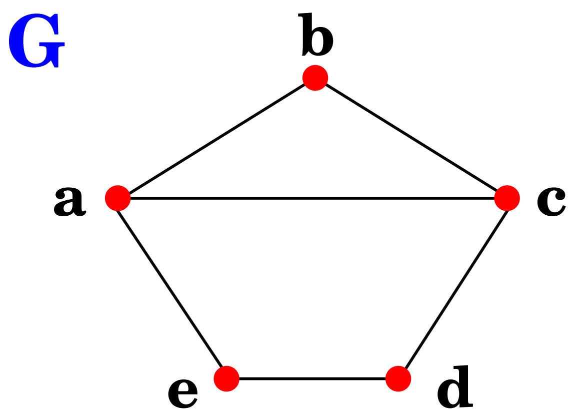
Considerando o grafo G do exemplo anterior, seja:

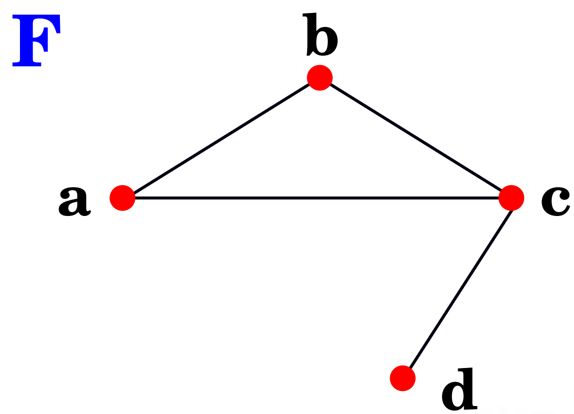
$A = \{ a, b, c, d \}$ $\qquad A \subset V(G)$

então o subgrafo F de G induzido por A é $F = G[A]$

$V(F) = \{ a, b, c, d \}$

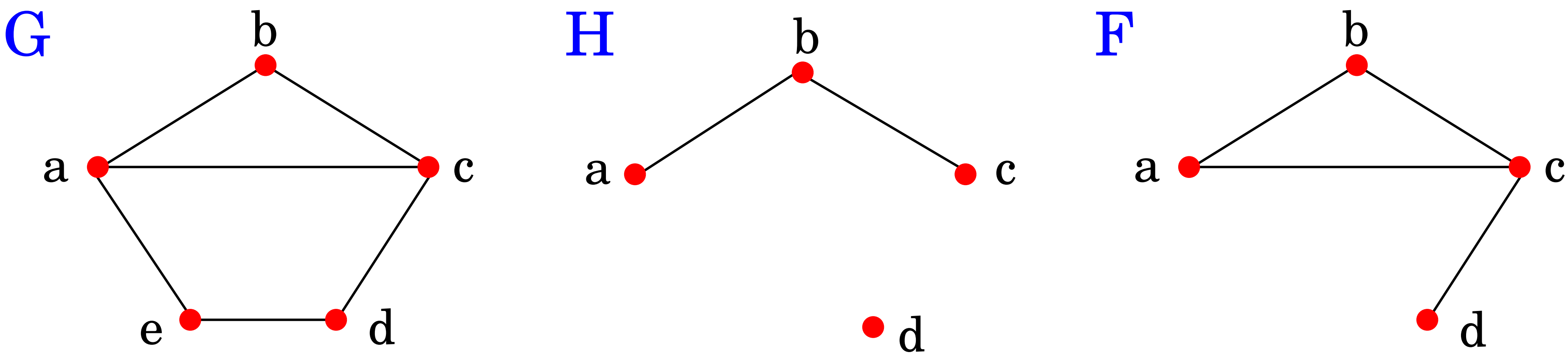
$\mathbf{E(F) = \{ (a, b), (b, c), (a, c), (c, d) \}}$





Observe que o subgrafo H de G do exemplo 8 <u>não</u> é um subgrafo induzido de G.

$V(H) = V(F) = \{ a, b, c, d \} \subset \{ a, b, c, d, e \} = V(G)$



Mas F é subgrafo induzido de G (como vimos no exemplo 9)

$E(H) = \{ (a, b), (b, c) \} \subset E(G)$

$E(F) = \{ (a, b), (b, c), (a, c), (c, d) \} \subset E(G)$

Subgrafo gerador

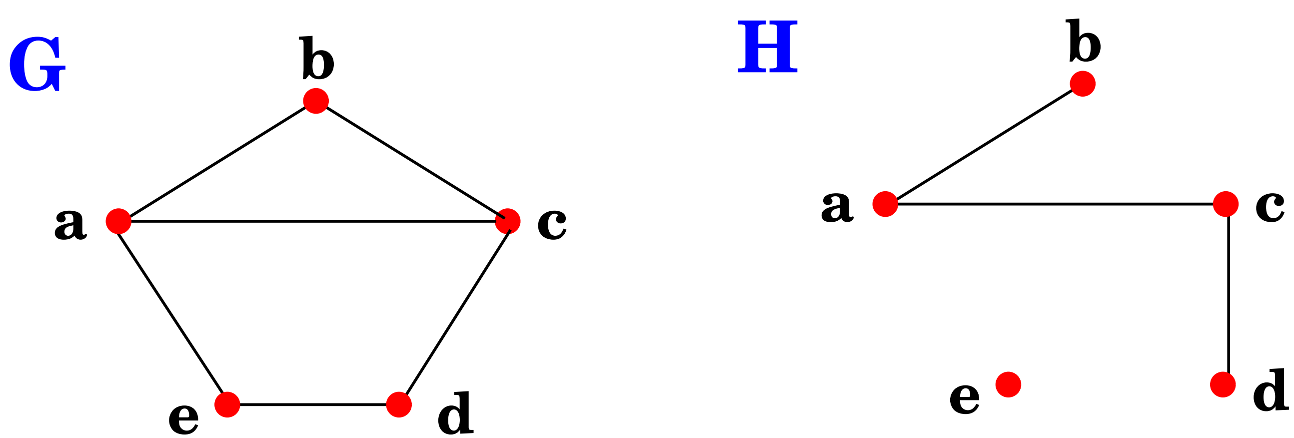
Sejam os grafos G e H.

H é dito um subgrafo gerador de G se H é um subgrafo de G e V(H) = V(G)

Exemplo 10:

Consideremos o grafo G dos exemplos anteriores (8 e 9) e seja H dado por:

V(H) = V(G) = { a, b, c, d, e }   E(H) = { (a, b), (a, c), (c, d) }



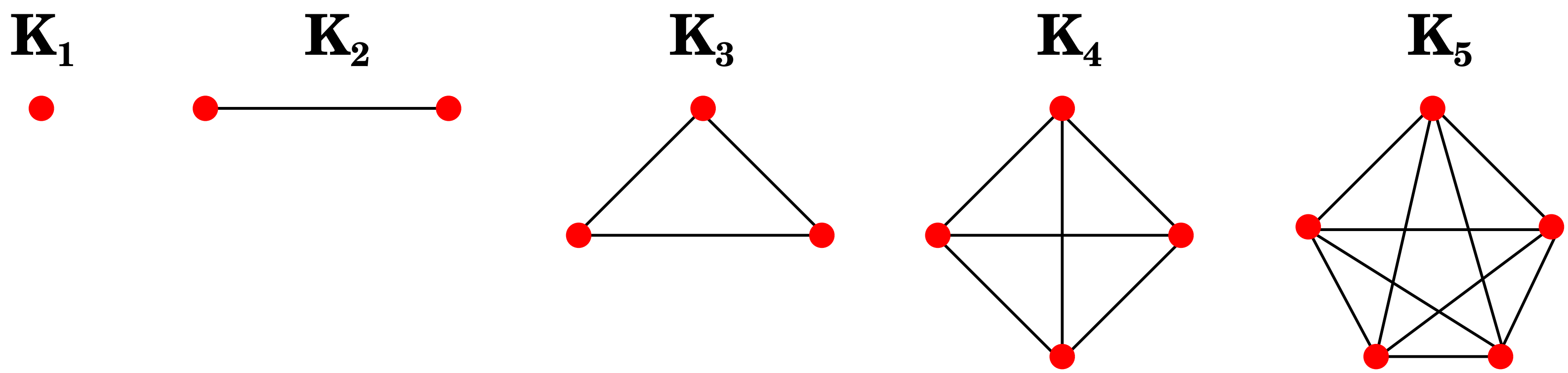
H é um subgrafo gerador de G.

Grafo completo:

Um grafo G é dito completo se todos os seus pares de vértices distintos são adjacentes. Em outras palavras, todos os seus vértices são universais.

Um grafo completo com n vértices é representado por K_n

Exemplo 11:



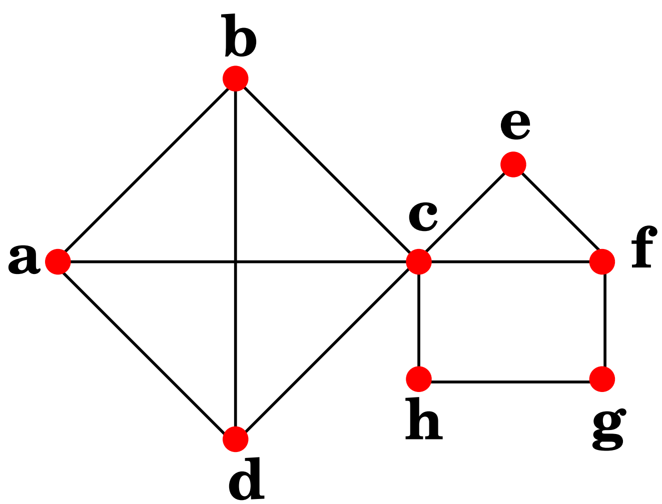
Clique

Seja G um grafo e A um subconjunto de vértices de G

$$(A \subseteq V(G))$$

A é uma clique de G se G[A] é um grafo completo

Exemplo 12:



$A_1 = \{ a, b, c, d \}$

$A_2 = \{ a, b, c \}$

$A_3 = \{ c, e, f \}$

$A_4 = \{ g, h \}$

$\vdots$

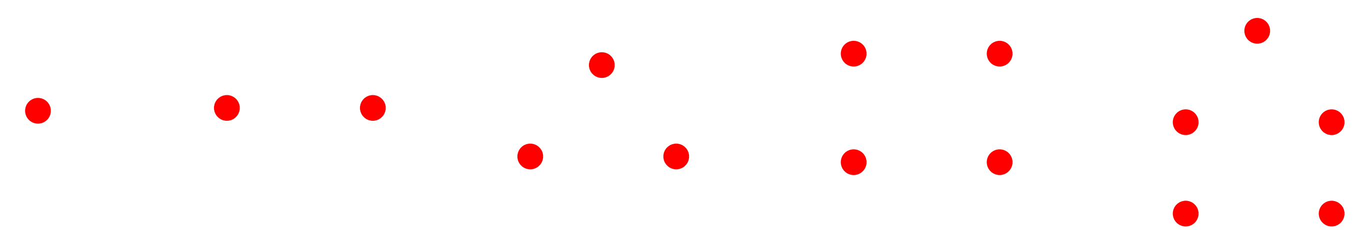
A_1 , A_2 , A_3 e A_4 são cliques de G.

Grafo nulo:

Um grafo G é dito nulo (ou completamente independente) se todos os seus pares de vértices distintos não são adjacentes. Em outras palavras, todos os seus vértices são isolados.
Um grafo nulo com n vértices é denotado por N_n

Exemplo 13:

N_1 N_2 N_3 N_4 N_5



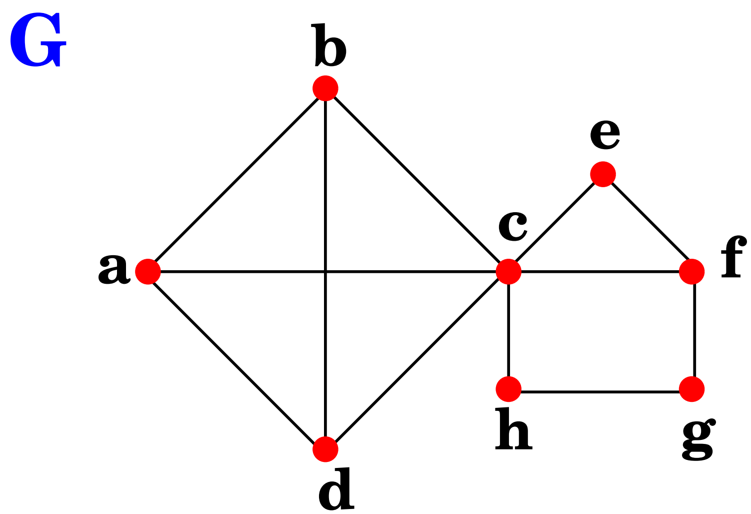
Conjunto independente

Seja G um grafo e S um subconjunto de vértices de G.

$$(S \subseteq V(G))$$

S é um conjunto independente de G se G[S] é um grafo nulo

Exemplo 14:



$\mathbf{S_1 = \{ a, e, g \}}$

$\mathbf{S_2 = \{ e, h \}}$

$\mathbf{S_3 = \{ d, h, f \}}$

⋮

S_1 , S_2 , S_3 são conjuntos independentes de G.

Resumo:

- Um grafo G é uma estrutura formada por 2 tipos de objetos: vértices e arestas.

  Notação: $G = (V, E)$, V conjunto de vértices,
  E conjunto de arestas

- Cada aresta *e* é um par não ordenado de 2 vértices distintos do grafo

  Notação: $e = (v, w) \quad v, w \in V$

- Um vértice x é adjacente a um vértice y se (x, y) é uma aresta do grafo

- Vizinhança de v : conjunto de vértices adjacentes a v.
- Um subgrafo é um grafo "contido" em outro grafo
- Tipos especiais de subgrafo:

  Subgrafo induzido (mantém a estrutura do grafo original)

  Subgrafo gerador (tem o mesmo conjunto de vértices do grafo original)

Aula 18: Grau de um vértice

Conteúdo:

- Grau de um vértice
- Grafo regular
- Soma dos graus de um grafo
- Sequência de graus

Grau de um vértice:

Seja $G = (V, E)$ um grafo e $v \in V$.

O grau de v é o número de arestas incidentes a v.

Em outras palavras, o grau de v é o número de vértices adjacentes a v.

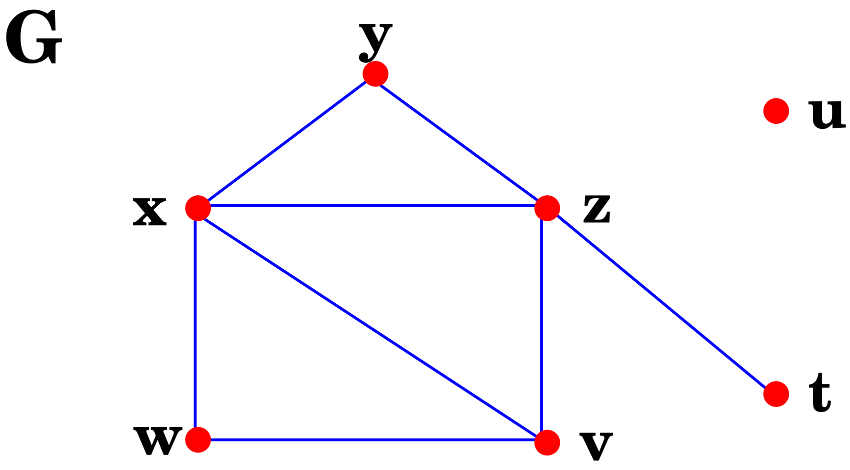
O grau (degree) de v se denota por $d(v)$ ou por $d_G(v)$ (caso haja vários grafos)

$$d(v) = |N(v)| = |\{ w \in V \mid (v, w) \in E \}|$$

Exemplo 1:

Seja G o grafo abaixo:

V(G) = { x, y, z, v, w, t, u }



d(x) = 4

d(y) = 2

d(z) = 4

d(v) = 3

d(w) = 2

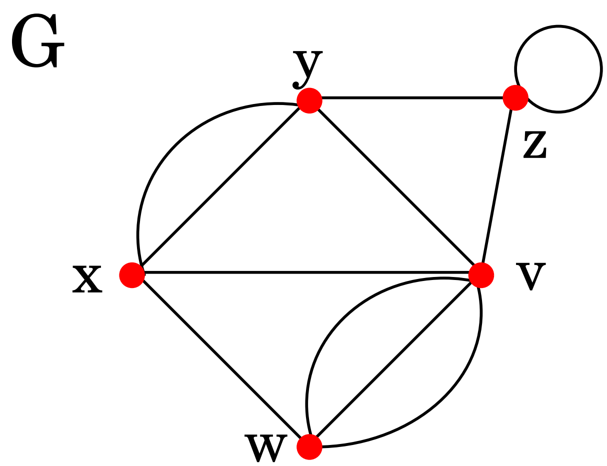
d(t) = 1

d(u) = 0

Observação: Embora tenhamos definido o conceito de grau para grafos simples, a definição pode ser estendida para multigrafos.
Basta convencionarmos que cada laço contribui com 2 unidades para o grau do vértice correspondente.

Exemplo 2:

Seja G o multigrafo abaixo:
$V(G) = \{ x, y, z, v, w \}$



$d(x) = 4$ $d(v) = 6$

$d(y) = 4$ $d(w) = 4$

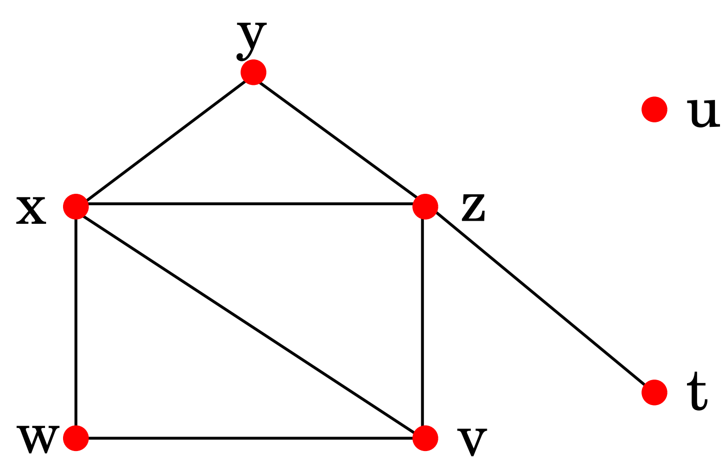
$d(z) = 4$

Denotamos por:

- $\delta(G)$ o menor grau de G
- $\Delta(G)$ o maior grau de G

Exemplo 3: (Considerando o grafo G do exemplo 1)

G



$\delta(G) = 0$

$\Delta(G) = 4$

$d(x) = 4$ $d(v) = 3$

$d(y) = 2$ $d(w) = 2$

$d(z) = 4$ $d(t) = 1$

$d(u) = 0$

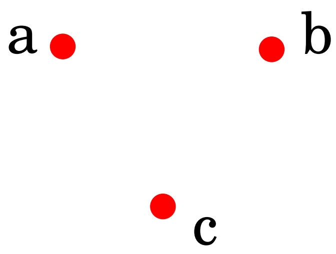
Grafo regular:

- Dizemos que um grafo é regular se todos os seus vértices têm o mesmo grau.

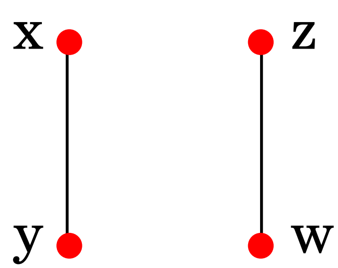
  Em particular, se em um grafo G, $d(v) = k \ \forall \ v \in V(G)$, k um número inteiro positivo, então G é dito k - regular ou regular de grau k.

Exemplo 4:

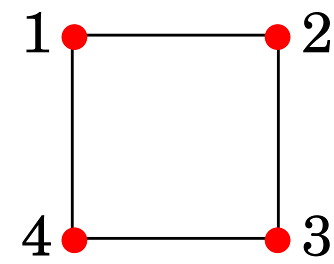
G_1



G_2



G_3



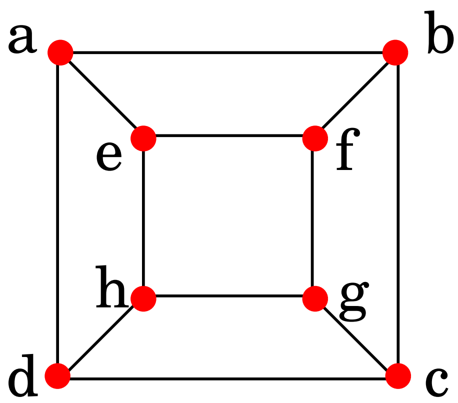
$d(a) = d(b) = d(c) = 0$ $\quad$ $d(x) = d(y) = d(z) = d(w) = 1$ $\quad$ $d(1) = d(2) = d(3) = d(4) = 2$

$k = 0$ $\quad$ $k = 1$ $\quad$ $k = 2$

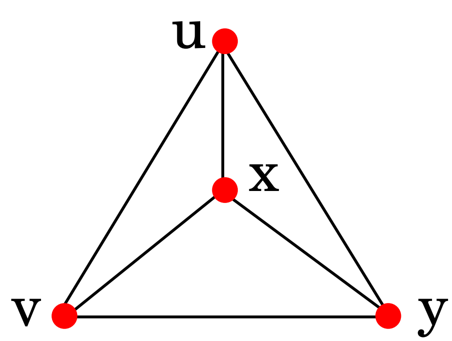
G_1 é 0 - regular $\quad$ G_2 é 1 - regular $\quad$ G_3 é 2 - regular

Exemplo 4 (continuação):

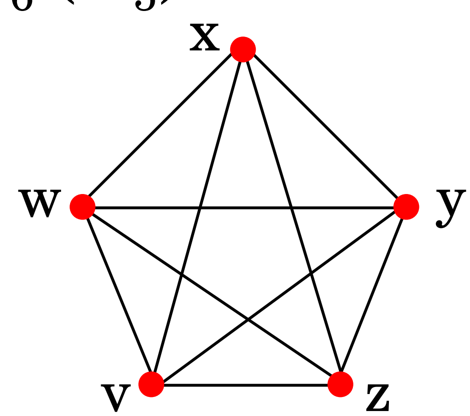
G_4



G_5 (K_4)



G_6 (K_5)



d(a) = d(b) =…= d(h) = 3

$k = 3$

G_4 é 3 - regular

d(u) = d(v) = d(x) = d(y) = 3

$k = 3$

G_5 é 3 - regular

d(x) = d(y) =…= d(w) = 4

$k = 4$

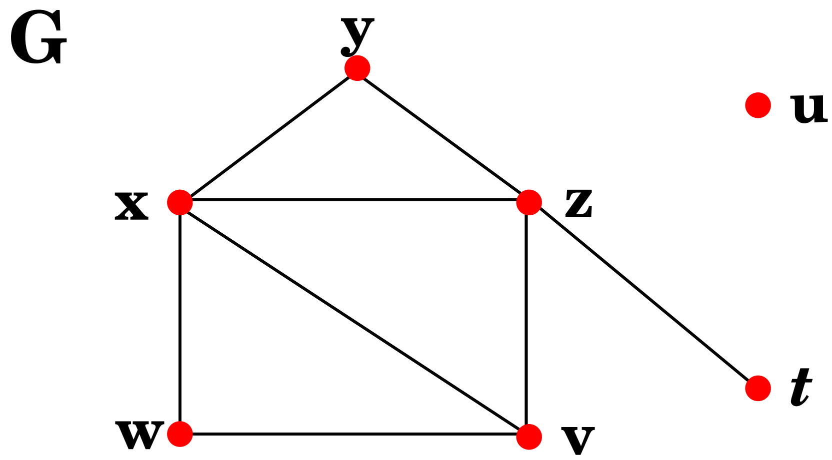
G_6 é 4 - regular

- Observação: K_n é regular de grau $(n – 1)$

  $(n – 1)$ - regular

Soma dos graus de um grafo:

Exemplo 5: Seja G o grafo do exemplo 1

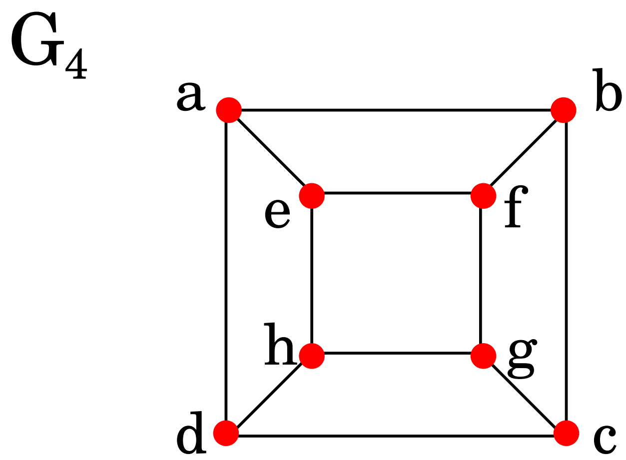


Somando os graus dos vértices

$$\sum_{v \in V} d(v) = d(x) + d(y) + d(z) + d(v) + d(w) + d(t) + d(u) =$$
$$= 4 + 2 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 16$$

- Observe que o número de arestas de G é 8, e a soma dos graus de G é 16, que é exatamente 2 vezes o número de arestas de G.

Exemplo 6: Considere o grafo G_4 do exemplo 3.
Temos 8 vértices de grau 3.



Somando os graus dos vértices

$$\sum_{v \in V(G_4)} d(v) = 3 \times 8 = 24$$

Temos 12 arestas

Também nesse caso a soma dos graus dos vértices é 2 vezes o número de arestas do grafo.

Teorema 1:

Em qualquer grafo G, a soma dos graus de todos os vértices é igual a duas vezes o número de arestas, isto é, $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$

Prova:

Como cada aresta tem 2 extremos, ela deve contribuir exatamente com 2 unidades para a soma dos graus. O resultado segue imediatamente.

Observação: O resultado é válido também para multigrafos.

O Teorema 1 é chamado de Teorema do Aperto de Mãos.

Você pode representar um grupo de pessoas em uma reunião, onde as pessoas que se conhecem se cumprimentam (isto é, trocam um aperto de mãos) por um grafo.

Em tal grafo, as pessoas são representadas por vértices, e existe uma aresta entre um par de vértices se e somente se as pessoas correspondentes a estes vértices se cumprimentam.

Logo, o teorema pode ser interpretado:
o número total de mãos apertadas é igual a 2 vezes o número de apertos de mãos (em cada aperto de mãos temos 2 mãos envolvidas)

Consequências:

Corolário 1:

Em qualquer grafo, a soma de todos os graus dos vértices é um número par.

Prova:

Seja G um grafo qualquer

Pelo Teorema 1 $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)| \rightarrow$ par

- Corolário 2:

Em qualquer grafo, o número de vértices de grau ímpar é par.

Prova:

Seja G um grafo qualquer, e

$V_P = \{ v \in V(G) \mid d(v) \text{ é par} \}$

$V_I = \{ v \in V(G) \mid d(v) \text{ é ímpar} \}$

$V(G) = V_P \cup V_I$ e $V_P \cap V_I = \varnothing$

Mas,

$$\underbrace{\sum_{v \in V(G)} d(v)}_{\substack{\text{par} \\ \text{pelo corolário 1}}} = \sum_{v \in (V_I \cup V_P)} d(v) = \sum_{v \in V_I} d(v) + \underbrace{\sum_{v \in V_P} d(v)}_{\substack{\text{par} \\ \text{(soma de parcelas pares)}}}$$

Logo $\sum_{v \in V_I} d(v)$ é par

ou seja, temos um número par de vértices de grau ímpar.

- Corolário 3:

  Se G é um grafo com n vértices e k - regular, então G tem exatamente $\frac{1}{2}nk$ arestas.

Prova: Seja $G = (V, E)$ um grafo, $|V| = n$, $|E| = m$

Pelo Teorema 1 temos

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

$$\|$$

$$\underbrace{k + k + \ldots + k}_{n} = 2m$$

Logo $nk = 2m \quad \Rightarrow \quad m = \frac{1}{2}nk$

Seqüência de graus:

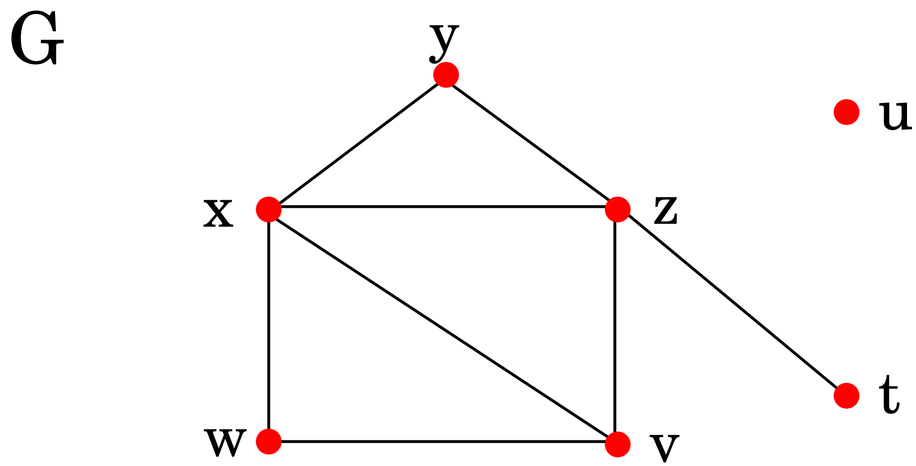
- Muitas vezes é conveniente listar os graus dos vértices de um grafo.

  Fazemos isso, escrevendo os graus dos vértices (em geral) em ordem crescente (permitindo repetições quando necessário).

  Essa lista resultante é chamada de seqüência dos graus dos vértices de G.

Exemplo 7:

Seja G o grafo do exemplo 1:



$d(x) = 4$

$d(y) = 2$

$d(z) = 4$

$d(v) = 3$

$d(w) = 2$

$d(t) = 1$

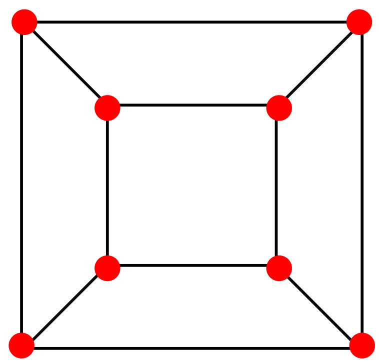
$d(u) = 0$

Seqüência de graus de G: **(0, 1, 2, 2, 3, 4, 4)**

Exemplo 8:

Consideremos o grafo G_4 do exemplo 6:

G_4



$d(v) = 3 \quad \forall \ v \in V(G)$

Seqüência de graus de G

(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)

Resumo:

- Seja $G = (V, E)$ um grafo
  - O grau de v, denotado por d(v), é o número de vizinhos de v.
  - G é um grafo regular se todos os seus vértices possuem o mesmo grau.
  - A soma dos graus de um vértice é igual a duas vezes o número de suas arestas.
  - Seqüência dos graus de G:
    lista dos graus de G em ordem crescente.

Aula 19: Problema do Isomorfismo e Representação de Grafos por Matrizes

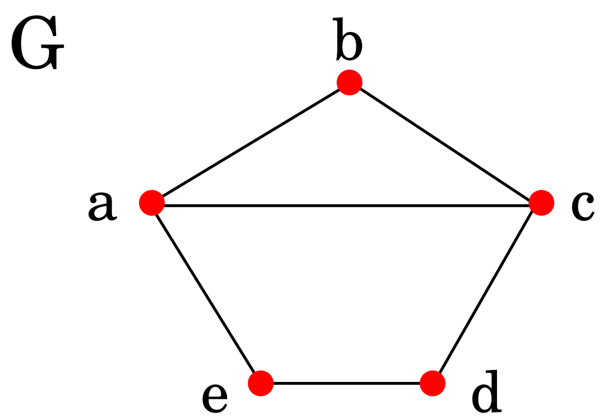
Conteúdo:

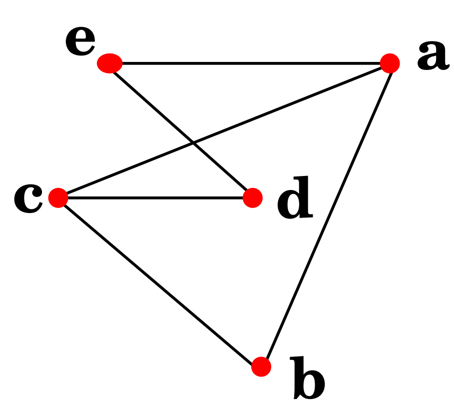
- Grafos Isomorfos
- Representação de Grafos por Matrizes
  - Matriz de Adjacência
  - Matriz de Incidência

Grafos Isomorfos:

Vimos que é possível que duas representações geométricas de um grafo sejam muito diferentes, mas representem o mesmo grafo.

Exemplo 1: (foi o nosso primeiro exemplo de grafo - aula 17)



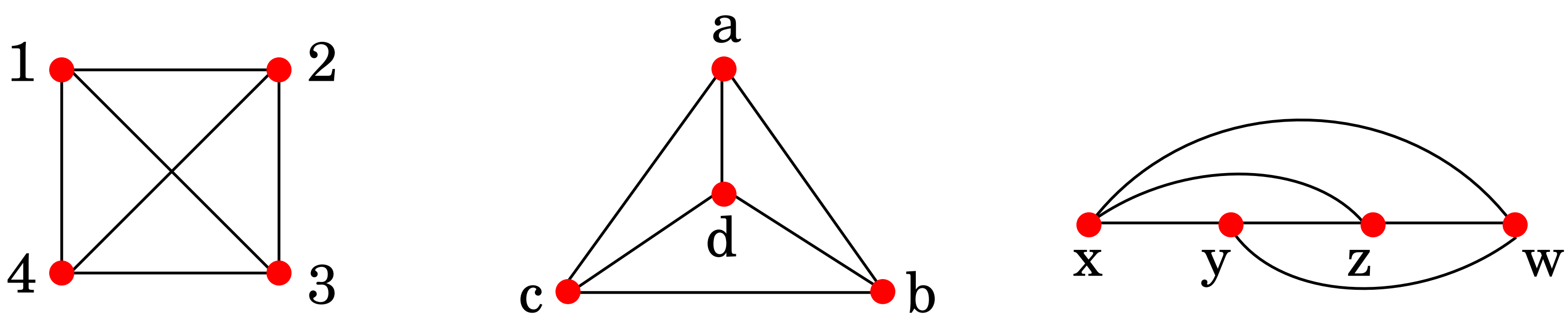


$V(G) = \{ a, b, c, d, e \}$

$E(G) = \{ (a, b), (b, c), (a, c), (a, e), (c, d), (e, d) \}$

Exemplo 2:

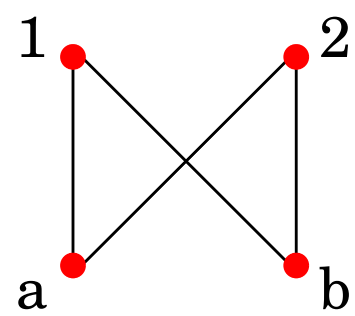
O grafo completo com 4 vértices, K_4, pode ser representado geometricamente de várias formas:



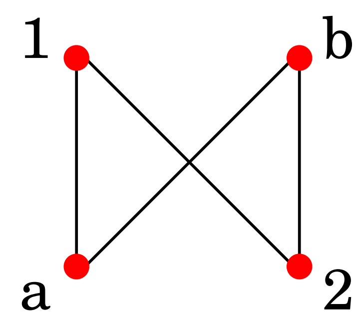
Por outro lado, é possível que duas representações geométricas pareçam iguais, mas representem grafos diferentes.

Exemplo 3:

H_1



H_2



$V(H_1) = V(H_2) = \{ 1, 2, a, b \}$

Mas,

$E(H_1) = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b) \} \neq E(H_2) = \{ (1, a), (1, 2), (b, a), (b, 2)\}$

Mas, se em H_2, renomeássemos os vértices de maneira que obtivéssemos H_1 (mudando b com 2) voltaríamos a ter o mesmo grafo.

cederj

Problema do Isomorfismo:

Dadas duas representações geométricas,
elas correspondem a um mesmo grafo?

Em outras palavras, é possível fazer coincidir,
respectivamente, os pontos das duas representações geométricas, de modo a preservar adjacências
(ou seja, de modo que as arestas coincidam)?

Formalizando

Dados dois grafos G_1 e G_2,

dizemos que G_1 e G_2 são isomorfos e denotamos $G_1 \approx G_2$ quando existir uma função bijetora (injetora e sobrejetora)

$$f : V(G_1) \to V(G_2)$$

tal que

$$(v_1, v_2) \in E(G_1) \Leftrightarrow (f(v_1), f(v_2)) \in E(G_2)$$

- Note que essa função preserva as adjacências.

Observações:

- Como f é injetora e sobrejetora

$$\Rightarrow \quad |V(G_1)| = |V(G_2)|$$

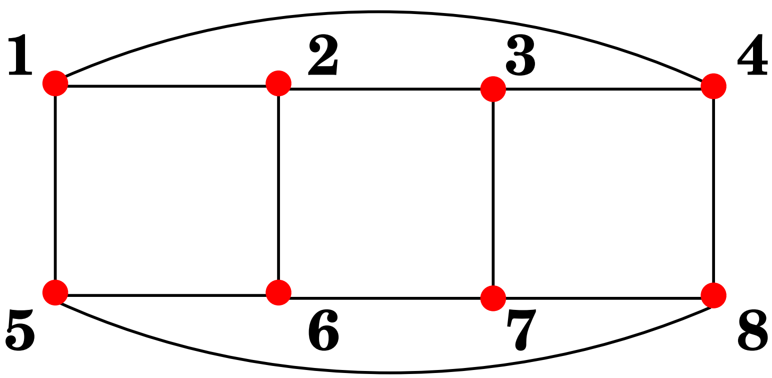
- E como para cada par $(v, w) \in |E(G_1)|$ temos um par correspondente $(f(v), f(w)) \in |E(G_2)|$

$$\Rightarrow \quad |E(G_1)| = |E(G_2)|$$

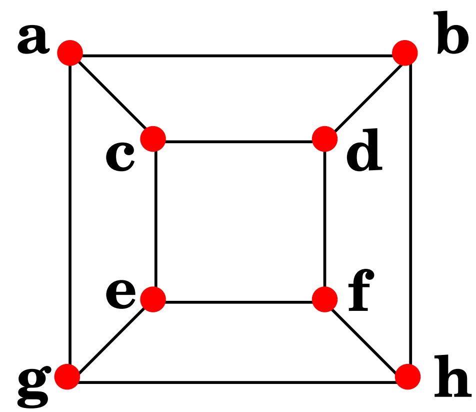
Exemplo 4:

Sejam G_1 e G_2 os grafos abaixo (dados pela sua representação geométrica)

G_1



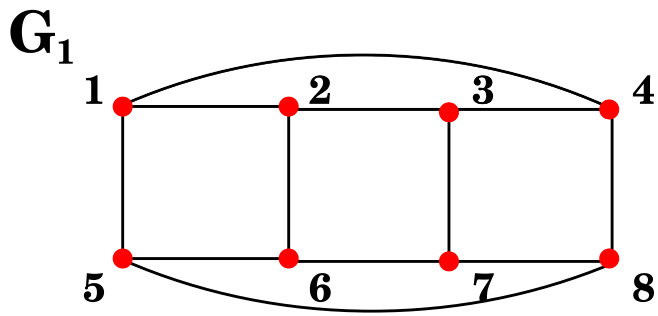
G_2

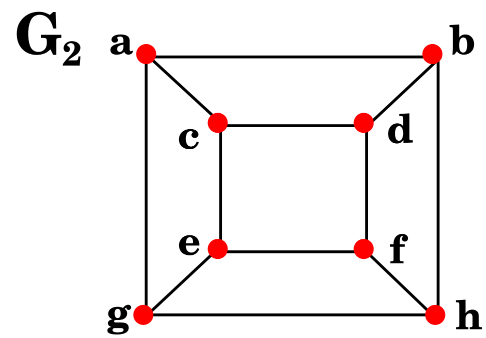


G_1 e G_2 são isomorfos?

Observe que: $|V(G_1)| = |V(G_2)| = 8$ e $|E(G_1)| = |E(G_2)| = 12$

G_1 e G_2 são 3 - regulares.





Seja $f : V(G_1) \to V(G_2)$ dada pela seguinte tabela:

v	f(v)
1	a
2	c
3	d
4	b
5	g
6	e
7	f
8	h

Precisamos verificar se

$(v, w) \in E(G_1) \iff (f(v), f(w)) \in E(G_2)$

para todo par $(v, w) \in E(G_1)$

$(1, 2) \in E(G_1) \iff (f(1), f(2)) = (a, c) \in E(G_2)$

$(1, 4) \in E(G_1) \iff (f(1), f(4)) = (a, b) \in E(G_2)$

$(1, 5) \in E(G_1) \iff (f(1), f(5)) = (a, g) \in E(G_2)$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

G_1 e G_2 são isomorfos.

O problema de determinar se dois grafos com o mesmo número de vértices são isomorfos é um problema difícil.

Procedimento natural: (força bruta)

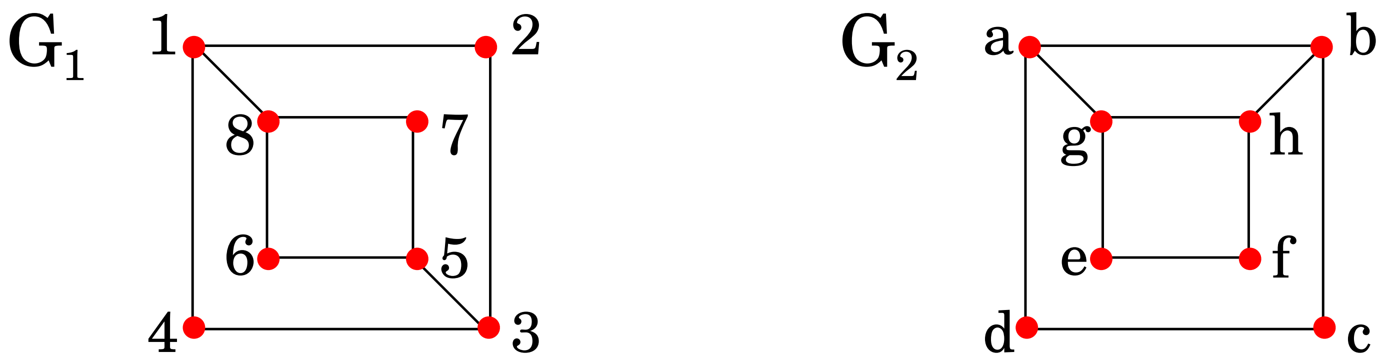
Examinar cada uma das possíveis n! permutações de vértices

(ou seja, examinar cada função possível)

Exemplo 5:

Sejam G_1 e G_2 os grafos abaixo.

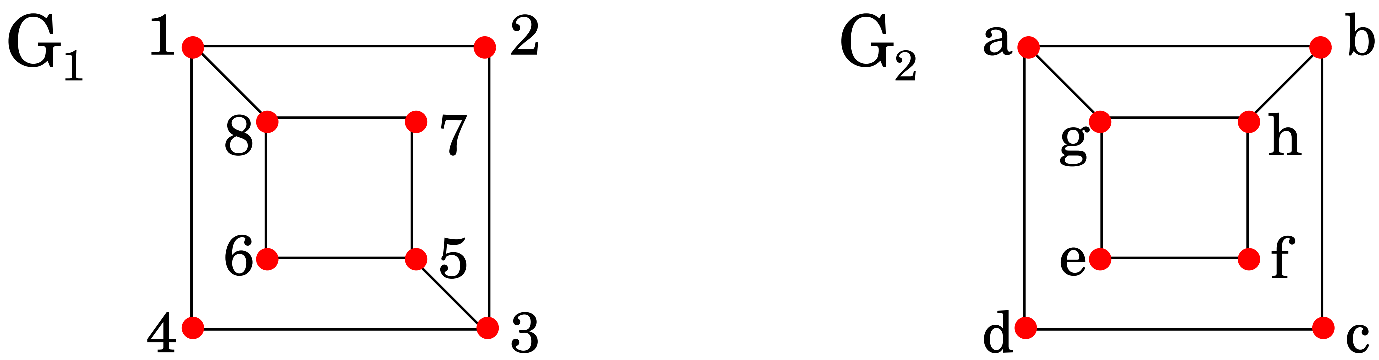
G_1 e G_2 são isomorfos?



(Antes de tentarmos provar que são isomorfos vamos verificar alguns parâmetros)

$|V(G_1)| = |V(G_2)| = 8 \qquad |E(G_1)| = |E(G_2)| = 10$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sequência de vértices de } G_1\text{: } (2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3) \\ \text{Sequência de vértices de } G_2\text{: } (2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3)\end{array}\right\} \text{iguais}$$



Em G_1, temos o vértice 1 de grau 3 adjacente a dois vértices de grau 2 e um de grau 3.

Em G_2 nenhum dos quatro vértices de grau 3 (a, b, g, h) tem adjacência semelhante.

a é adjacente a 2 vértices de grau 3 e 1 de grau 2

b é adjacente a 2 vértices de grau 3 e 1 de grau 2

g é adjacente a 2 vértices de grau 3 e 1 de grau 2

h é adjacente a 2 vértices de grau 3 e 1 de grau 2

Logo G_1 e G_2 não são isomorfos.

Representação de Grafos por Matrizes:

- Vimos duas maneiras de representar um grafo G

  1. Dando o seu conjunto de vértices: V(G)
     e o seu conjunto de arestas: E(G)

  2. Dando a sua representação geométrica no plano, ou seja, um diagrama consistindo de pontos (associados aos vértices) e linhas (correspondentes as arestas) que ligam pontos cujos vértices correspondentes são adjacentes.

- Vamos agora examinar a representação de grafos por matrizes.

Essas representações são úteis em diversas aplicações práticas e especialmente adequadas ao uso em computador.

As matrizes são estruturas que podem ser manipuladas sem dificuldade em um computador.

Matriz de Adjacência:

Dado um grafo $G = (V, E)$, $V = \{ v_1, v_2, \ldots , v_n \}$, $|V| = n$, a matriz de adjacência $A = (a_{ij})$ é uma matriz $n \times n$ tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

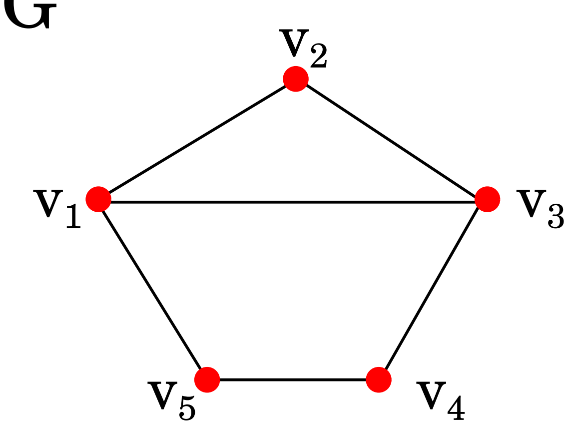
Ou seja, $a_{ij} = 1$ quando os vértices v_i e v_j são adjacentes e $a_{ij} = 0$, caso contrário.

Consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo 6:

$$G = (V, E) \quad V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}, \ |V| = 5, \ |E| = 6,$$

G



$$A_{ij} = \begin{array}{c} \\ v_1 \rightarrow \\ v_2 \rightarrow \\ v_3 \rightarrow \\ v_4 \rightarrow \\ v_5 \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 \downarrow & v_2 \downarrow & v_3 \downarrow & v_4 \downarrow & v_5 \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Propriedades

- A diagonal principal é nula
- A matriz é simétrica (em relação a diagonal principal)
- Número de 1's = 2m (pois cada aresta (v_i, v_j) dá origem a dois 1's em A, relativos a a_{ij} e a_{ji})
- Uma matriz de adjacência caracteriza univocamente um grafo.

  Mas a um mesmo grafo G podem corresponder diversas matrizes diferentes (basta permutar a ordem dos vértices)

Exemplo 7:

Se no exemplo 6, permutássemos as posições dos vértices $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ por $(v_3, v_2, v_5, v_1, v_4)$ a matriz de adjacência seria:

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \to \\ v_2 \to \\ v_3 \to \\ v_4 \to \\ v_5 \to \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \\ v_3 \to \\ v_2 \to \\ v_5 \to \\ v_1 \to \\ v_4 \to \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_3 & v_2 & v_5 & v_1 & v_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ambas as matrizes representam o mesmo grafo.

Matriz de Incidência:

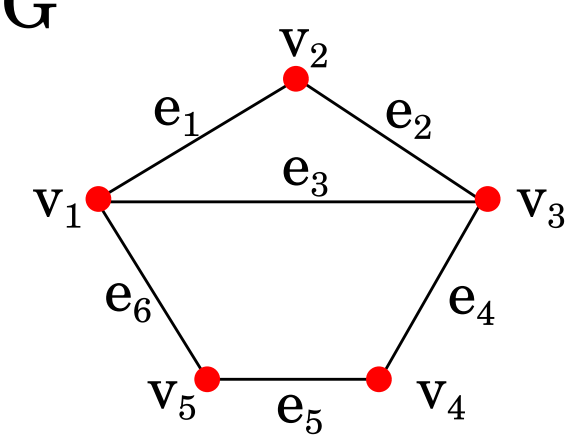
Dado um grafo $G = (V, E)$, $V = \{ v_1, v_2, \ldots , v_n \}$, $|V| = n$ e $E = \{ e_1, e_2, \ldots , e_m \}$, $|E| = m$, a matriz de incidência $B = (b_{ij})$ é uma matriz $n \times m$ tal que:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o vértice } v_i \text{ é incidente a aresta } e_j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Ou seja, $b_{ij} = 1$ quando o vértice v_i for um extremo da aresta e_j e $b_{ij} = 0$, caso contrário.

Exemplo 8: (exemplo 6, rotulando as arestas)

G



$$B_{ij} = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Propriedades

- Número de 1's = 2m

  Cada coluna tem exatamente dois 1's (porque corresponde a uma aresta).

- Uma matriz de incidência caracteriza univocamente um grafo.

  Mas a um mesmo grafo podem corresponder matrizes de incidência diferentes (basta permutar a ordem dos vértices e a ordem das arestas)

Exemplo 9:

Se no exemplo 8 consideramos as permutações:

$$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \longrightarrow (v_3, v_5, v_1, v_4, v_2)$$
$$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6) \longrightarrow (e_5, e_3, e_2, e_1, e_6, e_4)$$

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \rightarrow \\ v_2 \rightarrow \\ v_3 \rightarrow \\ v_4 \rightarrow \\ v_5 \rightarrow \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{c} \\ v_3 \rightarrow \\ v_5 \rightarrow \\ v_1 \rightarrow \\ v_4 \rightarrow \\ v_2 \rightarrow \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_5 & e_3 & e_2 & e_1 & e_6 & e_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ambas as matrizes representam o mesmo grafo.

O problema do isomorfismo também pode ser colocado da seguinte forma:

Dadas duas matrizes de adjacência $n \times n$ (ou duas matrizes de incidência $n \times m$) elas representam o mesmo grafo?

Resumo:

- Dois grafos G_1 e G_2 são isomorfos se existe uma função $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ que preserva as adjacências, isto é, $(v, w) \in E(G_1) \Leftrightarrow (f(v), f(w)) \in E(G_2)$

- O problema do isomorfismo, isto é, o de determinar se dois grafos são isomorfos é um problema difícil.

- Seja $G = (V, E)$ um grafo, $|V| = n$ $|E| = m$
  - Um grafo G pode ser representado univocamente por sua matriz de adjacência $A = (a_{ij})$, $n \times n$,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

  - Um grafo G pode ser representado univocamente por sua matriz de incidência $B = (b_{ij})$, $n \times m$,

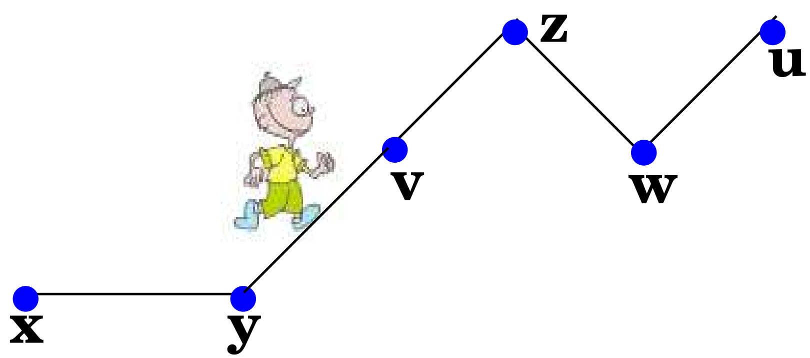
$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } v_i \text{ é incidente a aresta } e_j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Aula 20: Caminhos e ciclos

Conteúdo:

- Passeio
  - Trajeto
  - Caminho
- Passeio fechado
  - Ciclo
- Conexidade
- Distância
  - Excentricidade
  - Diâmetro
  - Centro
- Grafos especiais
- Caracterização de grafo bipartido

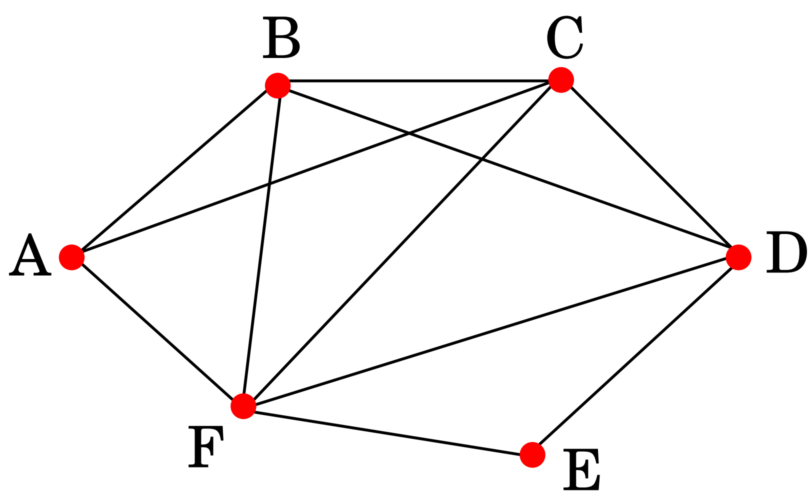
Muitas aplicações que são modeladas por grafos envolvem a idéia de "ir de um vértice a outro" em um grafo, ou seja, a idéia de caminhar em um grafo.



Por exemplo:

No modelo de um mapa rodoviário, como podemos ir de uma cidade a outra?

Quais são as possíveis rotas? Qual o menor caminho entre duas cidades?



cidades $\Leftrightarrow$ vértices

estrada entre 2 cidades $\Leftrightarrow$ aresta entre 2 vértices associados as cidades

Nesta aula vamos definir conceitos que são fundamentais para formalizar essas idéias e na resolução de tais problemas.

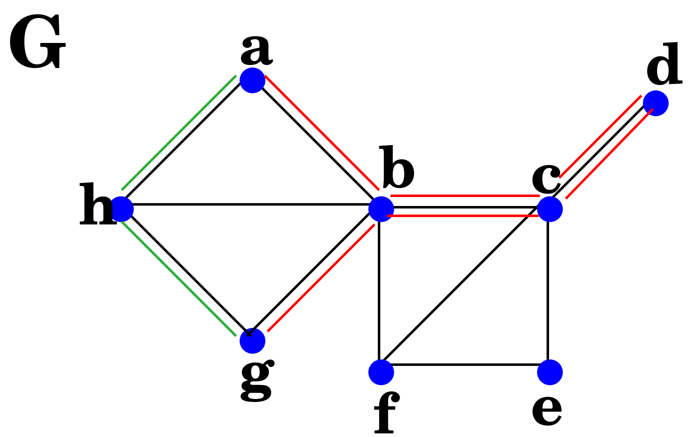
Passeio:

- Um passeio em um grafo G é uma sequência de vértices $P = v_0, v_1, \ldots v_k$ de G tal que $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$ para $1 \leq i \leq k-1$.

(Em outras palavras, é uma sequência de vértices de G, tal que entre cada par de vértices consecutivos na sequência existe uma aresta).

- O inteiro k (isto é, o número de arestas percorridas) é o comprimento do passeio P, v_0 é o início do passeio e v_k o seu término, e P é dito um passeio de v_0 a v_k.

Exemplo 1:



$P_1 =$ a, b, c, d, c, b, g

P_1 é um passeio de a a g

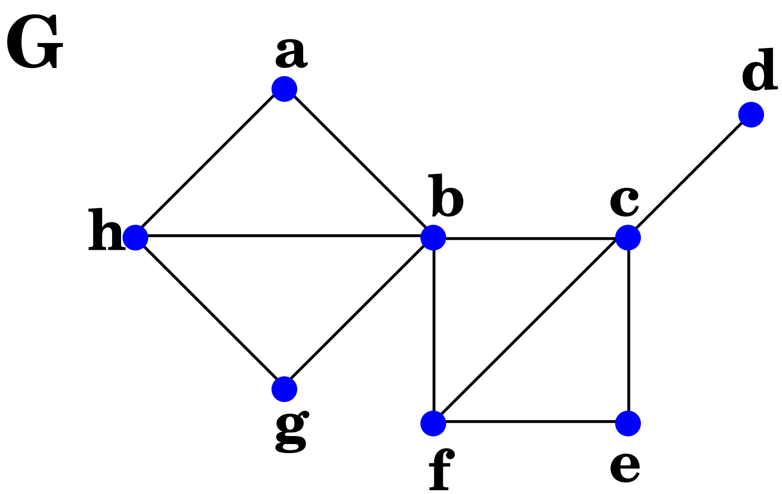
$P_2 =$ a, h, g

P_2 é um passeio de a a g

- Observação: Num passeio podemos ter arestas e vértices repetidos.

- Um passeio em que todas as arestas são distintas é chamado de trajeto (ou trilha).
- Um passeio em que todos os vértices são distintos é chamado de caminho.

Exemplo 2:



P_3 = a, b, c, f, b, g

P_3 é um trajeto de a a g

P_3 não é um caminho
(o vértice b é visitado 2 vezes)

P_4 = a, h, g

P_4 é um caminho entre a e g

P_5 = g, h, a, b, f, e, c, d

P_5 é um caminho entre g e d

Passeio fechado:

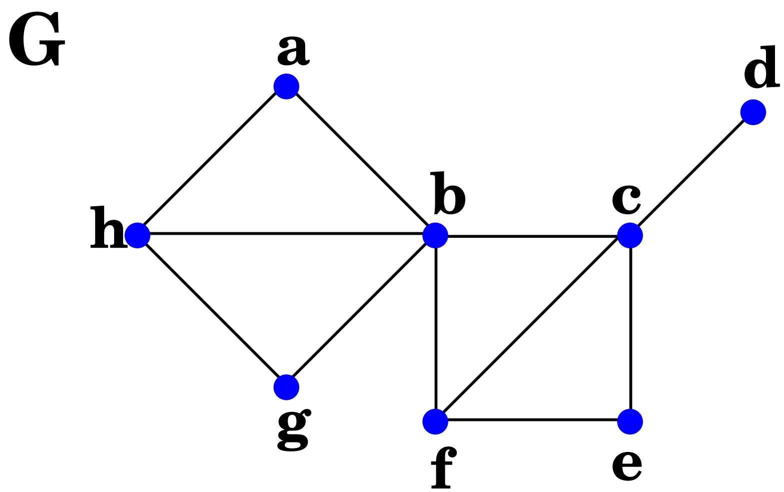
- Um passeio fechado $P = v_0, v_1, \ldots, v_k$ é aquele em que $v_0 = v_k$.

  Se todas as arestas desse passeio forem distintas, ele é dito um trajeto fechado.

  E se, além do mais, todos os vértices forem distintos, com exceção dos extremos (isto é, $v_0, \ldots, v_{k-1}$ é um caminho) ele é dito um ciclo.

- O comprimento do ciclo é dado pelo seu número de arestas (ou de vértices distintos).
  Se ele tem um número ímpar de arestas é dito um ciclo ímpar, caso contrário é um ciclo par.

Exemplo 3:



P_6 = a, b, c, d, c, e, f, b, g, h, a

P_6 é um passeio fechado

P_6 não é um trajeto fechado
(a aresta (c, d) é visitada 2 vezes)

P_7 = a, b, c, e, f, b, g, h, a

P_7 é um trajeto fechado

P_7 não é um ciclo
(o vértice b é visitado 2 vezes)

P_8 = a, b, g, h, a

P_8 é um ciclo (ciclo par)

P_9 = a, b, h, a

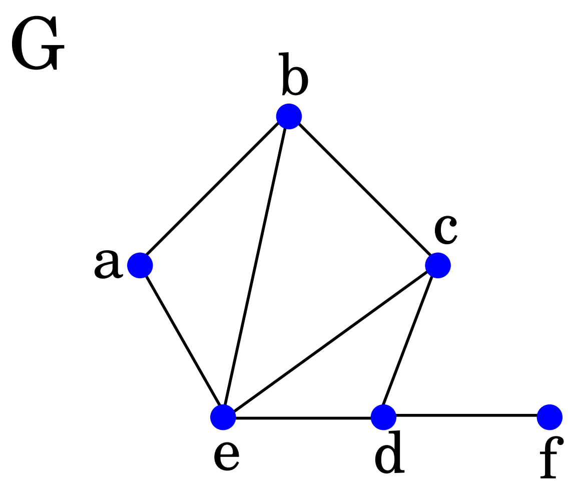
P_9 é um ciclo (ciclo ímpar)

Conexidade:

Dois vértices v e w são conexos em G quando existe algum caminho entre v e w em G.

Exemplo 4:

Considere o grafo G abaixo:



b e f são conexos

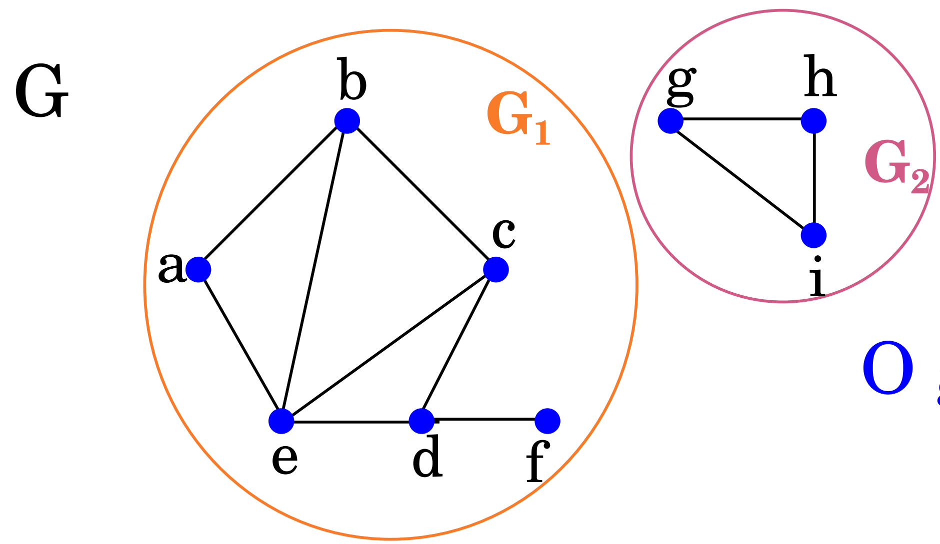
P = b, c, d, f caminho entre b e f

b e h não são conexos

Não existe caminho entre b e h

Um grafo G é conexo quando todo par de vértices distintos de G é conexo (isto é, para todo par de vértices distintos de G existe um caminho entre eles), caso contrário é desconexo.

Exemplo 5: (voltando ao grafo G do exemplo anterior)



O grafo G é desconexo.

Mas o subgrafo G_1 induzido por {a, b, c, d, e, f} é conexo - observe que existe caminho entre todo par de vértices de G_1.

Igualmente, o subgrafo G_2 induzido por {g, h, i} é conexo.

Observação:

Muitas das aplicações e algoritmos para resolver problemas em grafos, assumem como entrada um grafo conexo.

Portanto, quando o grafo não é conexo, é comum "pré-processar" o grafo de modo a obter seus "maiores conjuntos" conexos, ou como vamos definir formalmente, seu componentes conexos.

Seja $G=(V, E)$ um grafo e $(V_1, V_2, \ldots, V_k)$ uma partição de V (isto é, $V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k = V$ e $V_i \cap V_j = \emptyset \quad 1 \le i \ne j \le k$). O subgrafo $G[V_i]$ (subgrafo de G induzido por V_i) é um componente conexo de G se

(i) $G[V_i]$ é um grafo conexo e

(ii) $\forall \ v \in V - V_i$, $G[\, V_i \cup \{v\}\,]$ não é conexo.

- Observação: o item (ii) "força" que cada componente conexo seja o maior possível, no sentido que se um vértice for adicionado a um componente, então o novo subgrafo obtido não é conexo.

Exemplo 6:

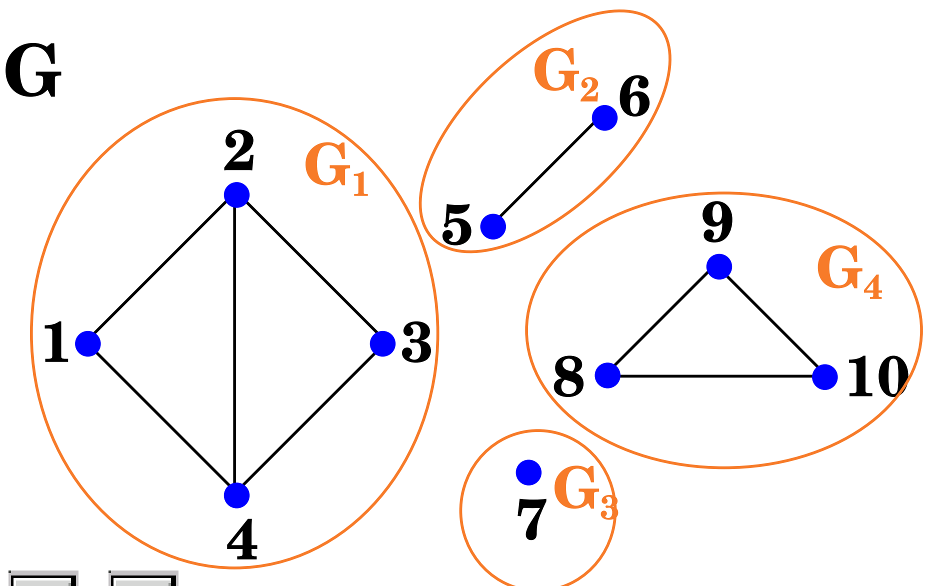
Consideremos o grafo G abaixo:

$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Sejam

$V_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $V_2 = \{5, 6\}$, $V_3 = \{7\}$, $V_4 = \{8, 9, 10\}$

(V_1, V_2, V_3, V_4) é uma partição de V.



Seja $G_i = G[V_i]$ $1 \leq i \leq 4$

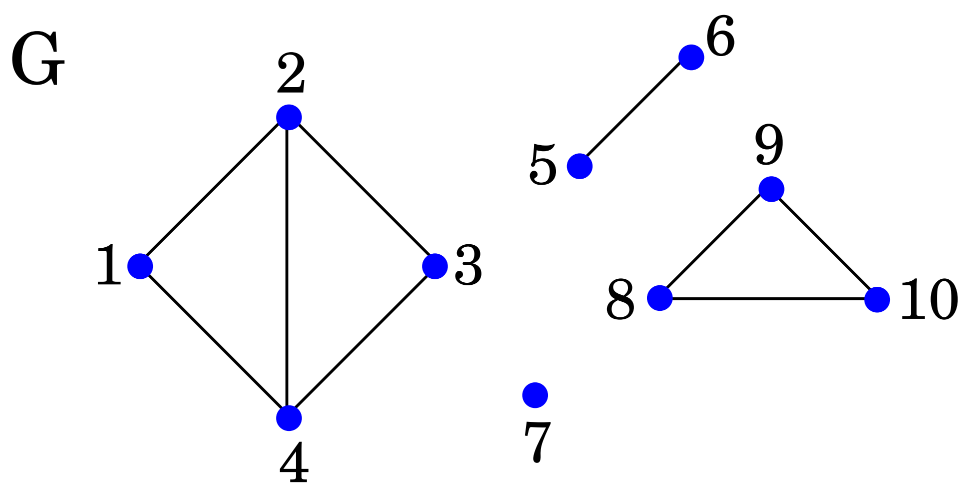
Cada G_i é conexo.

$\forall\ v \in V - V_i \rightarrow G_i + v$ não é conexo.

G_1, G_2, G_3, G_4 são componentes conexos de G.

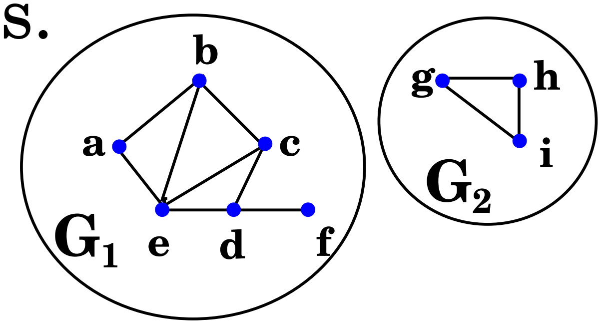
O **número** de **componentes conexos** de G é denotado por **w(G)**.

Exemplo 7: No exemplo anterior



w(G) = 4

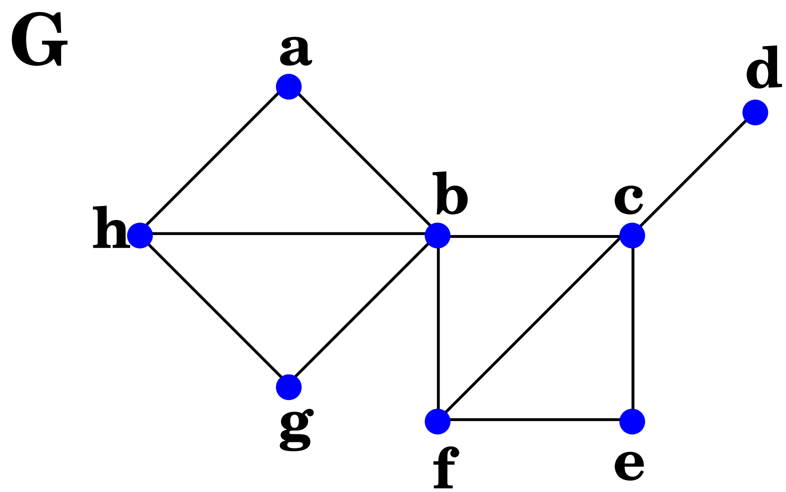
E no exemplo 4, quantos componentes conexos temos? Identifique-os.



w(G) = 2

Resposta Voltar

E no exemplo 1?



$w(G) = 1$

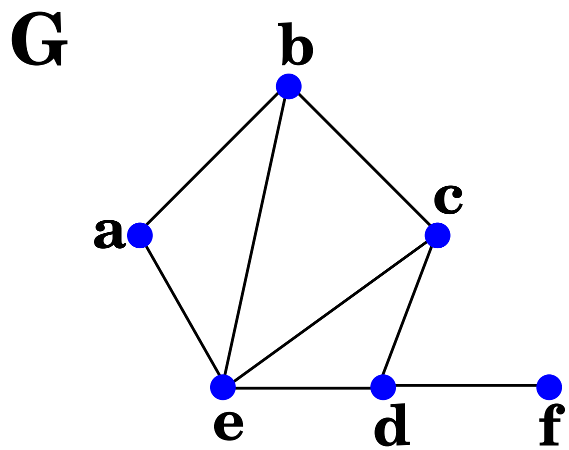
- Observe que:

  Um grafo G é conexo $\Leftrightarrow$ $w(G) = 1$

Distância:

A **distância** entre dois vértices v e w de um grafo G, denotada por d(v, w), é o comprimento do menor caminho entre eles (caso exista caminho entre eles). Se não existir caminho entre eles (isto é, se v e w estão em componentes conexos distintos de G) definimos $d(v, w) = \infty$.

Exemplo 8:



$d(a, f) = 3$

$d(b, e) = 1$

$d(a, g) = \infty$

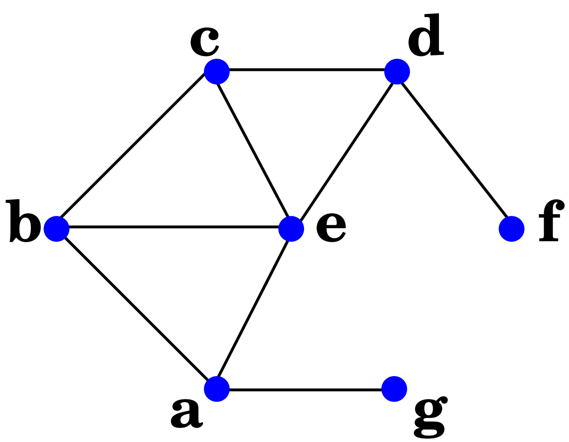
Seja G um grafo conexo

A excentricidade de um vértice v de G, denotada por e(v), é o valor da maior distância de v aos outros vértices de G.

$$e(v) = \max_{w \in V(G)} \{ d(v, w) \}$$

Exemplo 9:

G

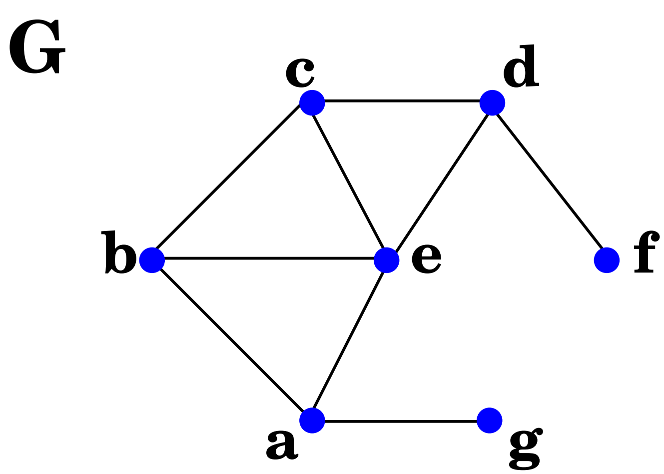


$$\left.\begin{array}{l} d(a, b) = 1 \\ d(a, c) = 2 \\ d(a, d) = 2 \\ d(a, e) = 1 \\ d(a, f) = 3 \\ d(a, g) = 1 \end{array}\right\} e(a) = 3 \qquad \left.\begin{array}{l} d(f, a) = 3 \\ d(f, b) = 3 \\ d(f, c) = 2 \\ d(f, d) = 1 \\ d(f, e) = 2 \\ d(f, g) = 4 \end{array}\right\} e(f) = 4$$

O diâmetro de um grafo G é o valor de sua maior excentricidade.

$$\mathbf{diam(G)} = \max_{v \in V(G)} \{ e(v) \}$$

Exemplo 10:



$e(a) = e(b) = e(c) = e(d) = 3$

$e(e) = 2$

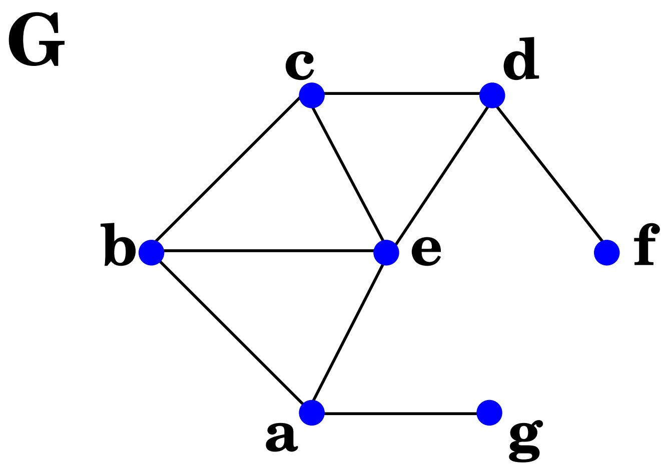
$e(f) = e(g) = 4$

$\text{diam}(G) = \max\{ 2, 3, 4 \} = 4$

O **centro** de um grafo G, denotado por c(G) é o conjunto dos vértices de G que têm a menor excentricidade.

$$c(G) = \{v \in V(G) \mid e(v) \text{ é mínima}\}$$

Exemplo 11:



$e(a) = e(b) = e(c) = e(d) = 3$

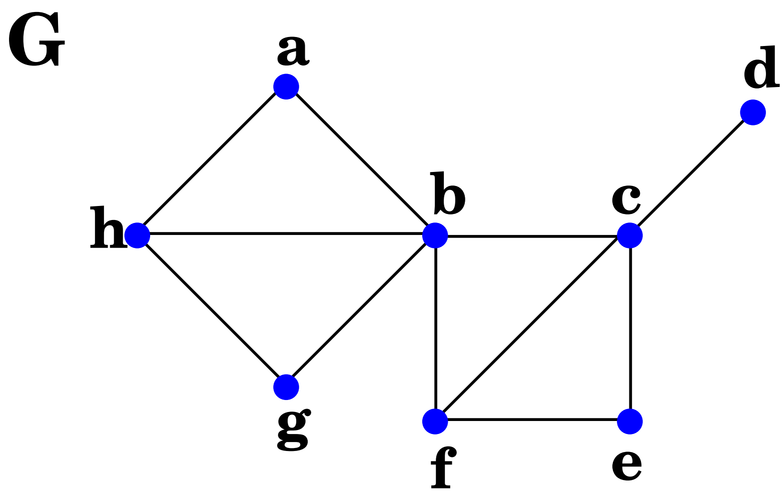
$e(e) = 2$

$e(f) = e(g) = 4$

$$c(G) = \{ e \}$$

Exemplo 12:

Considere o grafo G do exemplo 1



Calcule agora você o centro de G.

Resposta Voltar

Primeiro calculamos as excentricidades dos vértices de G:

$e(a) = e(g) = e(h) = e(e) = e(d) = 3$

$e(b) = e(f) = e(c) = 2$

$C(G) = \{ v \in V(G) \mid e(v) \text{ é mínima} \} = \{ b, f, c \}$

Grafos especiais:

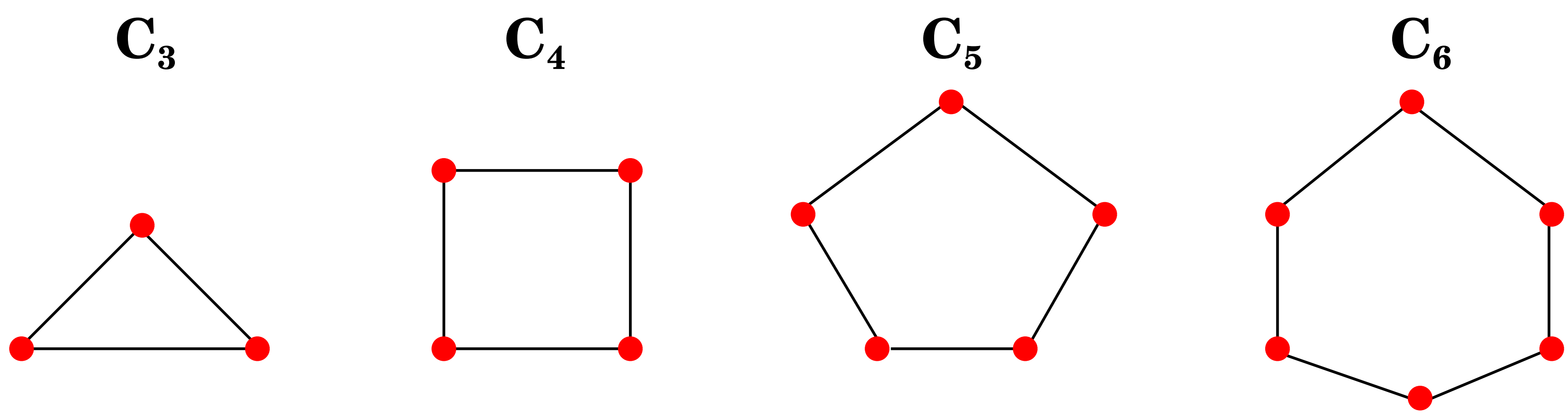
- Vamos definir alguns grafos especiais, que aparecem frequentemente em aplicações e exemplos. Por isso, é importante que esses grafos se tornem familiares.
- Já vimos os
  - Grafos completos: denotamos por K_n, n o número de vértices (todo par de vértices está ligado por uma aresta).

    Em particular destacamos o K_1, o grafo completo com um único vértice, que é chamado de grafo trivial.

    K_1 
  - Grafos nulos: denotamos por N_n, n o número de vértices (grafo que não tem arestas).

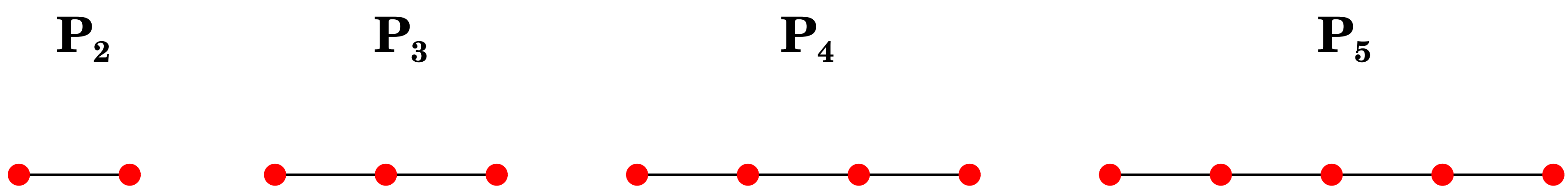
Um grafo ciclo é um grafo que consiste de um único ciclo.

O grafo ciclo com n vértices é denotado por C_n , $n \geq 3$



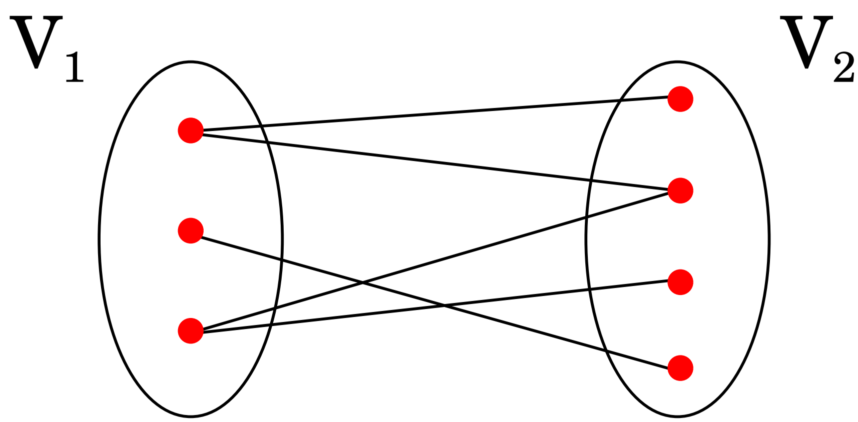
Um grafo caminho é um grafo que consiste de um único caminho.

O grafo caminho com n vértices é denotado por P_n , $n \geq 2$



Um grafo G = (V, E) é um grafo bipartido se o seu conjunto de vértices puder ser particionado em dois subconjuntos V_1 e V_2 ($V_1 \cup V_2 = V$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$) tais que cada aresta de G tem um extremo em V_1 e o outro em V_2. Dizemos que (V_1, V_2) é uma bipartição de V.

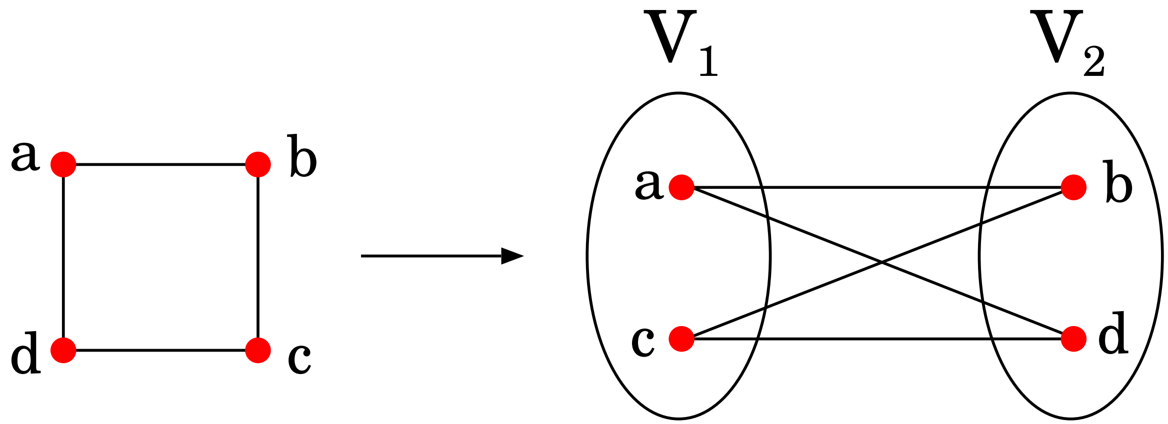
Exemplo 13:



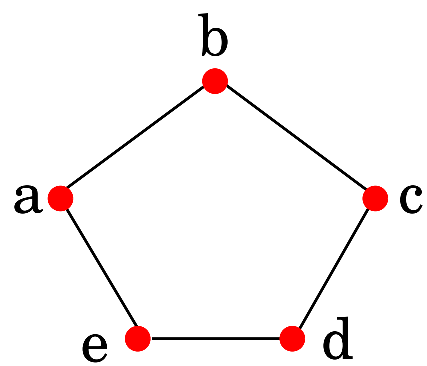
- Observe que: V_1 e V_2 são conjuntos independentes em G.

Exemplo 14:

C_4 é bipartido



C_5 não é bipartido



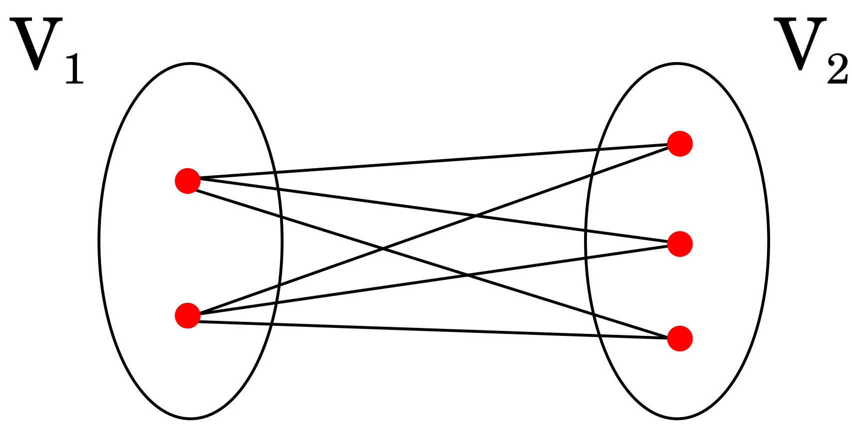
Tente achar uma bipartição para $V(C_5)$.

Um grafo bipartido completo é um grafo bipartido $G = (V, E)$ com bipartição (V_1, V_2) tal que todo vértice de V_1 é adjacente a todo vértice de V_2.

Se V_1 tem q vértices e V_2 tem p vértices onde $p + q = n$ então o grafo é denotado por $K_{p,\, q}$

Exemplo 15:

$K_{2,\, 3}$



Caracterização de grafos bipartidos:

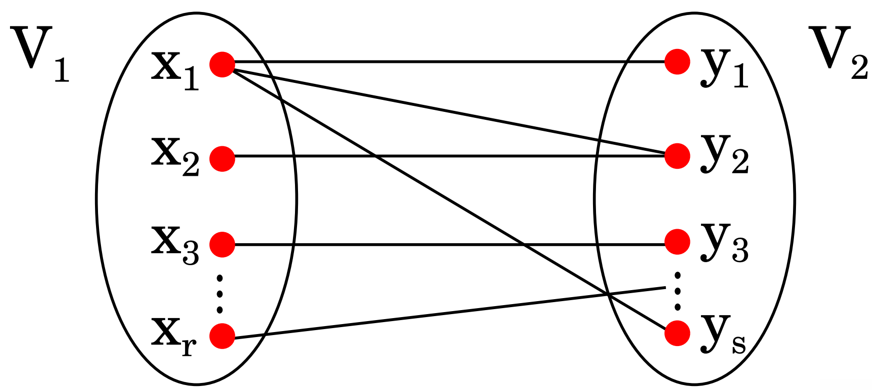
Os grafos bipartidos têm grande importância em aplicações. Diversas situações são modeladas por estes grafos.

Exemplo: **operários $\times$ máquinas**

$$\left.\begin{array}{l} \text{operários} \rightarrow \text{vértices} \in V_1 \\ \text{máquinas} \rightarrow \text{vértices} \in V_2 \end{array}\right\} V_1 \cup V_2 = V$$

Existe uma aresta entre $x \in V_1$ e $y \in V_2$ se o operário x é capaz de operar a máquina y

Diagrama que representa esse grafo



- É um problema importante decidir se um grafo é bipartido ou não.

O teorema a seguir, nos mostra que basta procurar por ciclos ímpares.

Teorema:

Um grafo G é bipartido se e somente se não contém um ciclo ímpar.

Prova: ($\Rightarrow$)

Seja G um grafo bipartido com bipartição (V_1, V_2), e $C = v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1$ um ciclo em G. Assuma que $v_1 \in V_1$, logo $v_2 \in V_2$, $v_3 \in V_1$, $v_4 \in V_2$ e assim por diante.

De forma geral $v_{2i-1} \in V_1$ e $v_{2i} \in V_2$. Como $(v_k, v_1) \in E$ e $v_1 \in V_1$ então $v_k \in V_2$ (porque G é bipartido), temos que $k = 2i$, para algum i, logo k é par e portanto C é um ciclo par.

($\Leftarrow$) Assuma que G não contém ciclo ímpar.

(Vamos construir uma bipartição de G)

Seja v um vértice qualquer de G.

Defina os seguintes conjuntos:

$$V_1 = \{ w \in V(G) \mid d(v, w) \text{ é par } \}$$

$$V_2 = \{ u \in V(G) \mid d(v, u) \text{ é ímpar } \}$$

$$V_1 \cup V_2 = V(G) \ , \ V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

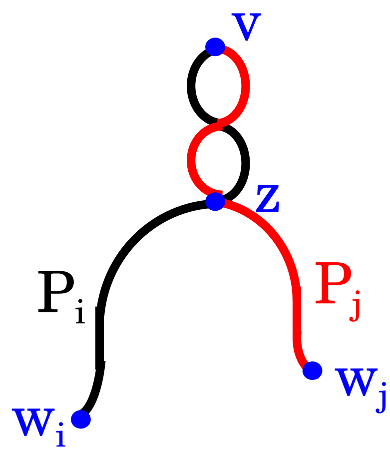
(Vamos mostrar que se (V_1, V_2) não é uma bipartição para G, então G contém algum ciclo ímpar. Esta contradição garante que (V_1, V_2) é de fato uma bipartição)

De fato, se (V_1, V_2) não é uma bipartição de G, então:
ou existe aresta (w_i, w_j) entre vértices w_i e $w_j \in V_1$,
ou existe aresta (u_i, u_j) entre vértices u_i e $u_j \in V_2$.

Sem perda de generalidade, assumimos a existência da aresta (w_i, w_j).

Sejam P_i e P_j respectivamente, os caminhos mais curtos entre v e w_i e v e w_j.

Além disso, seja z o vértice comum a P_i e P_j mais distante de v.



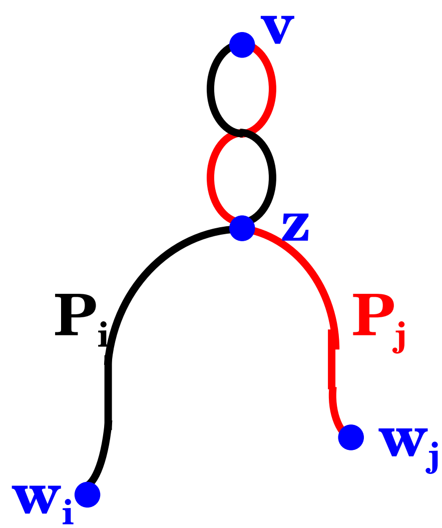
Fato: O subcaminho de P_i que começa em v e termina em z, denotado por $P_i(v - z)$, tem comprimento igual ao subcaminho $P_j(v - z)$ de P_j que começa em v e termina em z.

Desafio: Prove este fato.

Desafio Voltar

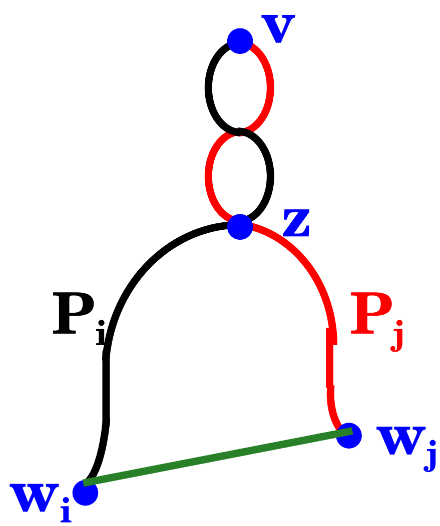
cederj

Seja $P_i(z - w_i)$ e $P_j(z - w_j)$ os subcaminhos de P_i e P_j que começam em z e terminam em w_i e w_j respectivamente.



Como P_i e P_j têm comprimento par e o comprimento dos subcaminhos $P_i(v - z)$ e $P_j(v - z)$ são iguais, então os subcaminhos $P_i(z - w_i)$ e $P_j(z - w_j)$ têm a mesma paridade (ou são ambos pares ou ambos ímpares).

Portanto se existe a aresta (w_i, w_j)



$P_i(z - w_i) \cup (w_i, w_j) \cup P_j(z - w_i)$ é um ciclo ímpar.
Esta contradição implica que a aresta (w_i, w_j) não pode existir.
Analogamente para uma aresta (u_i, u_j).
Logo (V_1, V_2) é uma bipartição de G,
ou seja, G é um grafo bipartido.

Resumo:

Seja G = (V, E) um grafo.

Conceitos:

Passeio: $v_0, v_1, \ldots, v_k$ tal que $(v_i, v_{i+1}) \in E(G) \quad 1 \leq i \leq k-1$

Se não há repetição de arestas $\rightarrow$ trajeto

Se não há repetição de vértices $\rightarrow$ caminho

Passeio fechado: $v_0 = v_k$

Se $v_0 = v_k$ e $v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}$ é um caminho $\rightarrow$ ciclo

Conexidade:

G é conexo se para todo par de vértices de G existe algum caminho entre eles, caso contrário G é desconexo

Componentes conexos de G são os "maiores" subgrafos conexos de G.

Conceitos:

Distância entre vértices:

$d(v, w)$ = comprimento do menor caminho entre v e w.

Excentricidade de um vértice:

$$e(v) = \max_{w \in V(G)} \{ d(v, w) \}$$

$$\text{diam}(G) = \max_{v \in V(G)} \{ e(v) \}$$

Centro de um grafo: $c(G) = \{v \in V \mid e(v) \text{ é mínimo}\}$

Conceitos:

Grafos especiais:

Grafo bipartido:

$V(G) = (V_1, V_2) \rightarrow V_1 \cup V_2 = V$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

toda aresta de G tem um extremo em V_1 e outro em V_2

Caracterização de grafos bipartidos:

Um grafo é bipartido se e somente se ele não contém ciclos ímpares.

Aula 21: Árvores

Conteúdo:

- Definição
- Uma caracterização
- Relação entre número de vértices e arestas
- Centro
- Árvore geradora
- Árvore enraizada

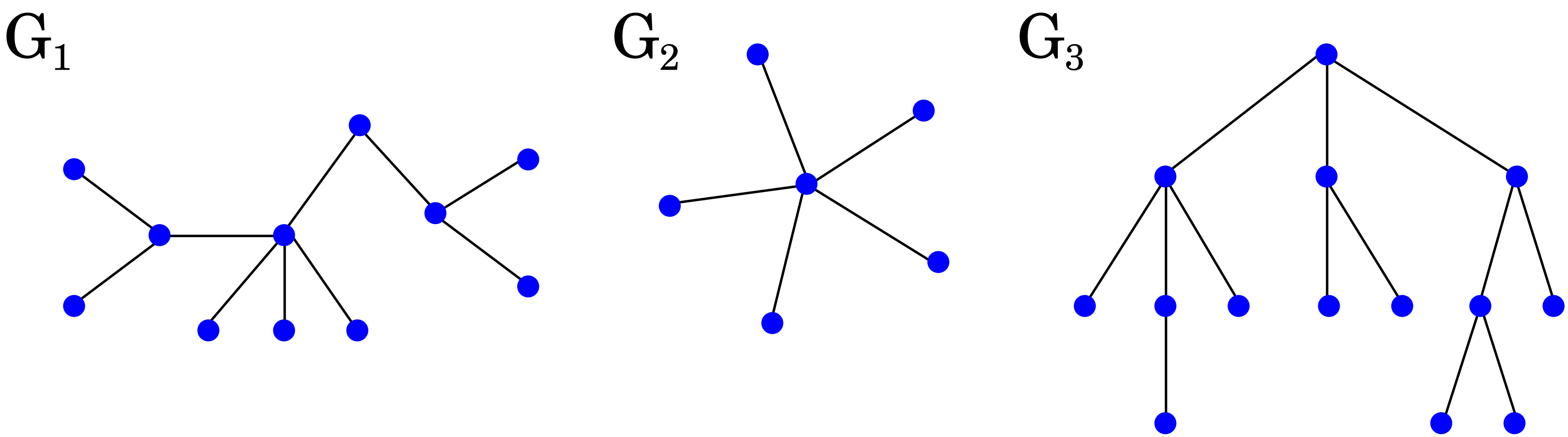
Introdução:

- As árvores constituem uma família de grafos muito importante. Elas têm uma aplicação enorme no mundo real.
- As árvores são estruturas que aparecem em diferentes contextos, tais como química, linguística e computação.
- As árvores são consideradas as estruturas mais simples e com propriedades amigáveis dentre os grafos.
- Por isso, quando procuramos provar um resultado geral para grafos, o procedimento natural é verificar primeiro se o resultado é válido para árvores.

Definição:

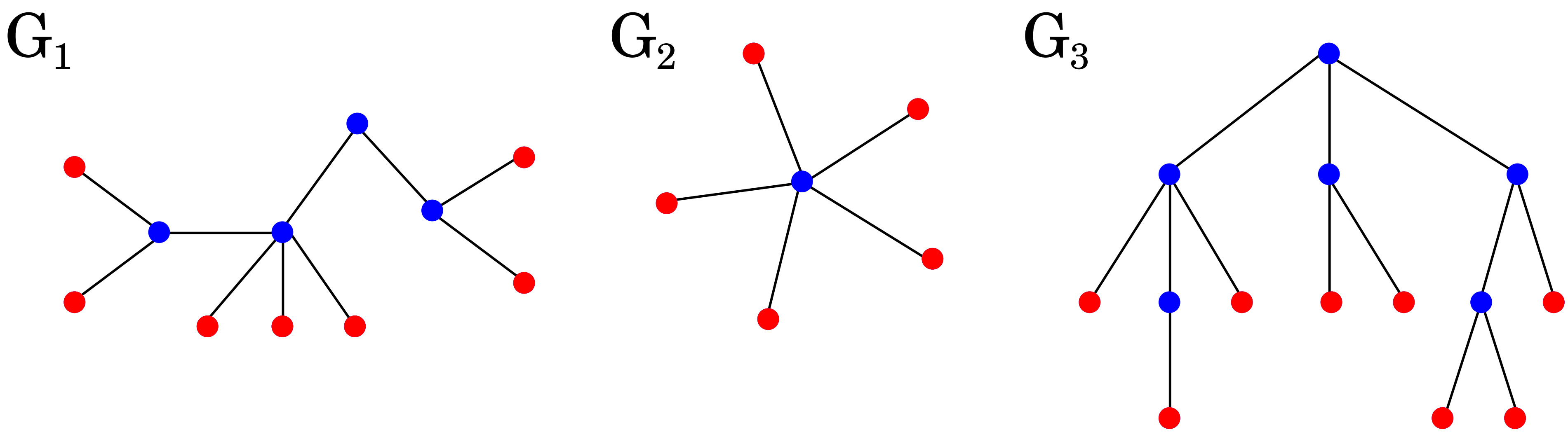
- Um grafo acíclico é um grafo que não contém ciclos.
- Uma árvore é um grafo conexo e acíclico.

Exemplo 1: G_1, G_2, G_3 são exemplos de árvores



Uma folha de uma árvore é um vértice v tal que o seu grau é exatamente um, isto é: $d(v) = 1$.

Exemplo 2: (considerando as árvores do exemplo anterior)



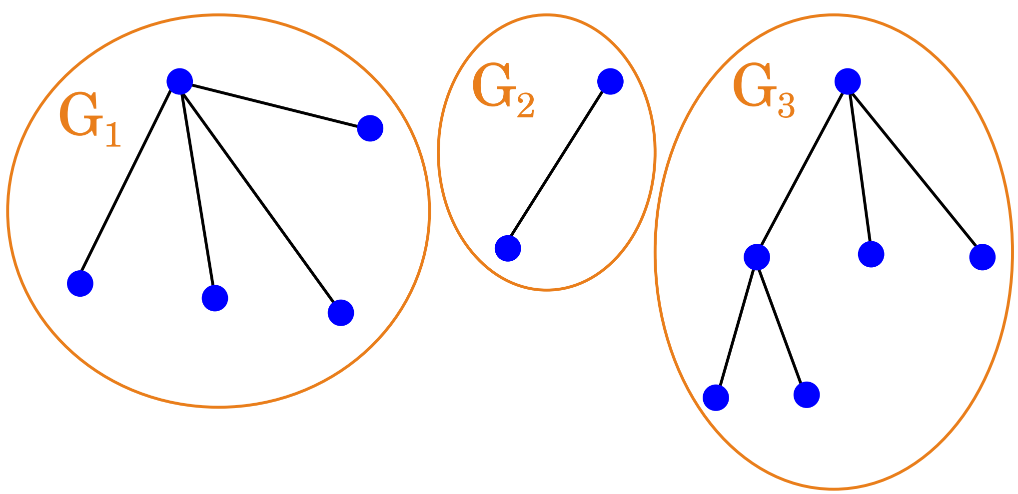
(Os vértices vermelhos são as folhas dos grafos)

Um grafo acíclico é uma floresta.

Em outras palavras, uma floresta é um grafo tal que cada componente conexo é uma árvore.

Exemplo 3: G é uma floresta, com componentes conexos G_1, G_2, G_3

G

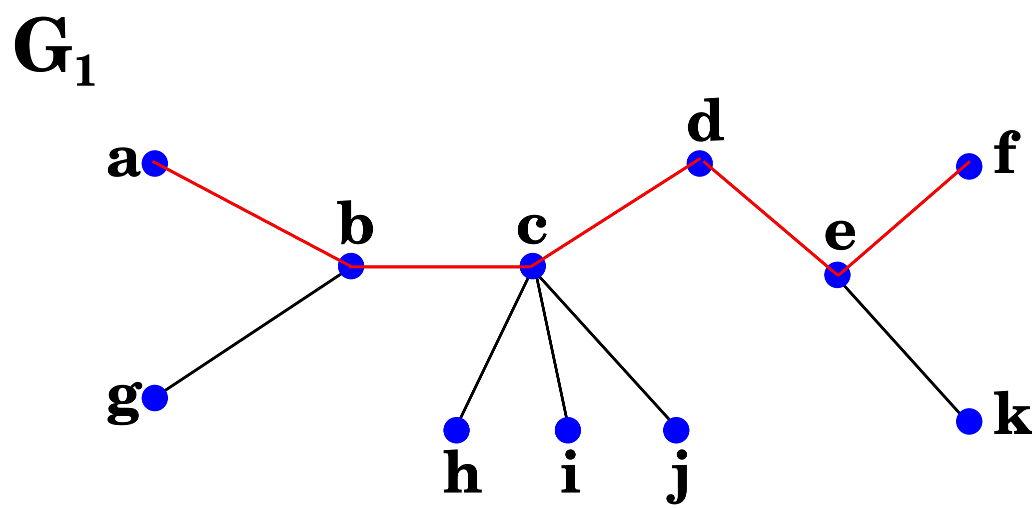


G_1, G_2, G_3 são árvores.

Uma caracterização:

<u>Teorema 1</u>: Um grafo G é uma árvore se e somente se existir um único caminho entre cada par de vértices de G.

Exemplo 4: Consideremos a árvore G_1 abaixo



Observe o caminho entre a e f (único).

Prova:

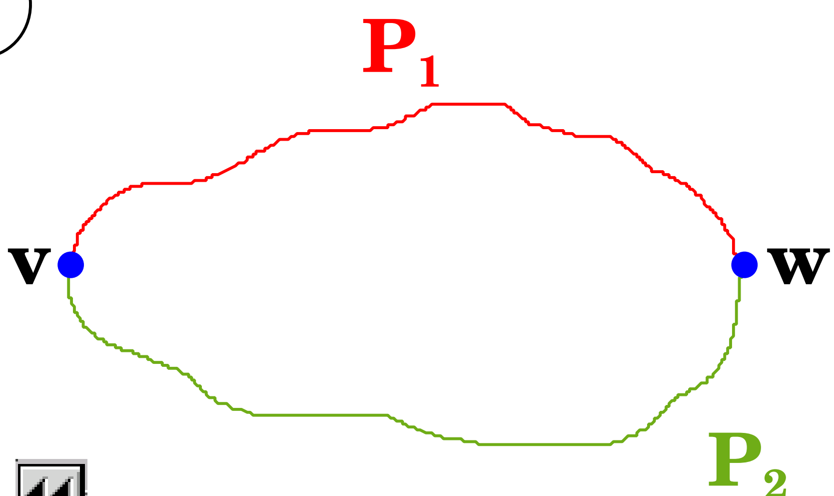
($\Rightarrow$) Seja G uma árvore.

Por definição G é conexo, logo entre cada par de vértices v e w de G existe pelo menos um caminho.

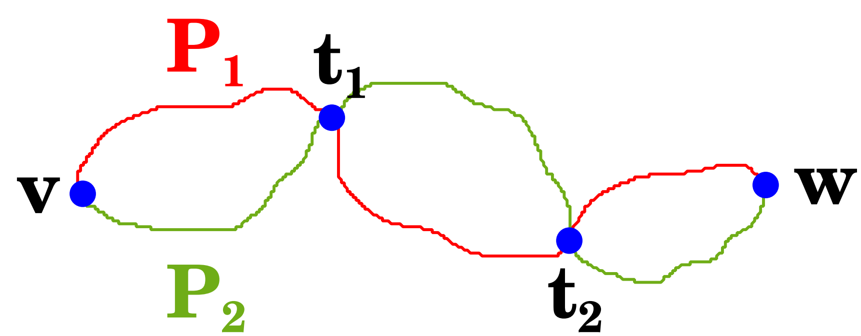
(Falta mostrar que esse caminho é único)

Vamos supor (por absurdo) que existam dois caminhos distintos P_1 e P_2 entre v e w.

1

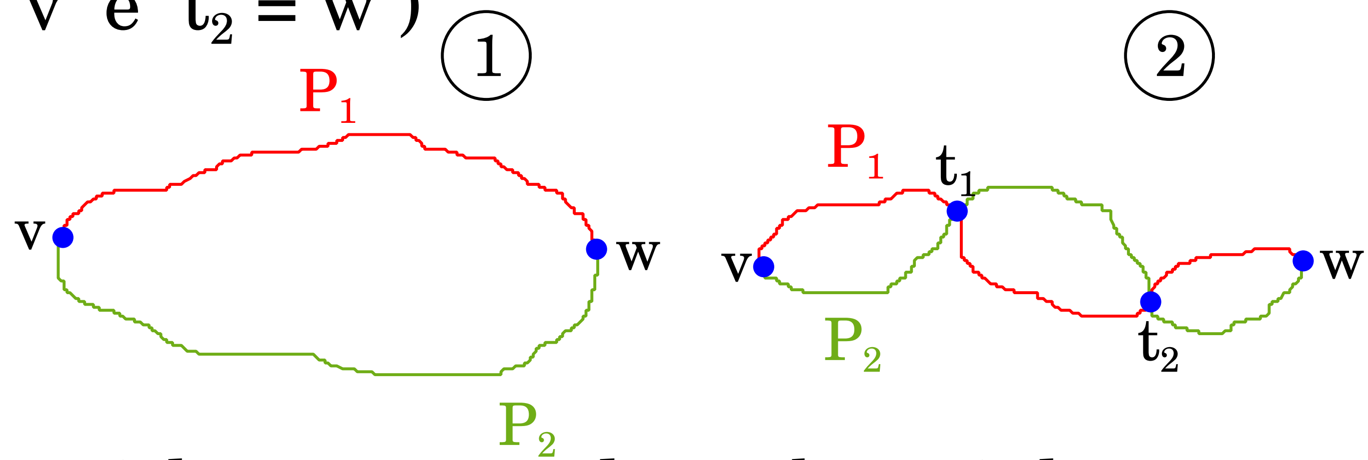


2



Então existem necessariamente dois vértices t_1 e $t_2 \in P_1 \cap P_2$ tais que entre t_1 e t_2 os caminhos P_1 e P_2 são disjuntos em vértices.

(Em 1 $t_1 = v$ e $t_2 = w$)



Logo, existe um ciclo composto dos subcaminhos $P_1(t_1 - t_2) \cup P_2(t_1 - t_2)$. Mas isso é uma contradição, porque por definição, uma árvore é acíclica.

Ou seja, mostramos que existe um caminho entre v e w e esse caminho é único.

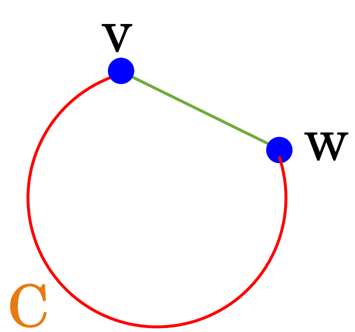
($\Leftarrow$) Suponha que existe um único caminho entre cada par de vértices de G.

Logo, G é conexo (existe um caminho entre cada par de vértices de G.

(Falta mostrar que G é acíclico)

Vamos supor (por absurdo) que C é um ciclo de G.

Seja (v, w) uma aresta de C.



Então entre v e w existem 2 caminhos: a aresta (v, w) e C – (v, w). Contradição

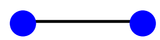
Logo, G é acíclico.

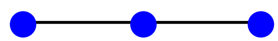
$$G \begin{cases} \text{acíclico} \\ \text{e conexo} \end{cases} \Rightarrow \text{G é uma árvore}$$

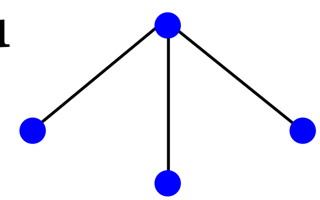
Relação entre número de vértices e arestas:

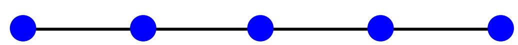
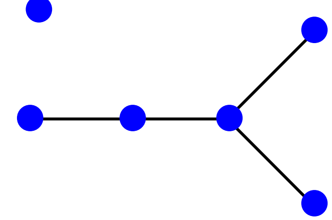
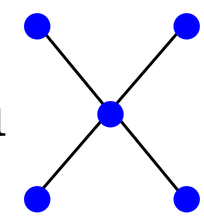
Outro resultado interessante é a relação que temos entre o número de arestas e o de vértices em uma árvore.

Observemos:

Árvores com 2 vértices  m = 1 n = 2

Árvores com 3 vértices  m = 2 n = 3

Árvores com 4 vértices  ou  m = 3 n = 4

Árvores com 5 vértices  ou  ou 

m = 4 n = 5

Teorema 2: Se G = (V, E) é uma árvore, $|V| = n$, $|E| = m$ então $m = n - 1$.

Prova: Indução em n

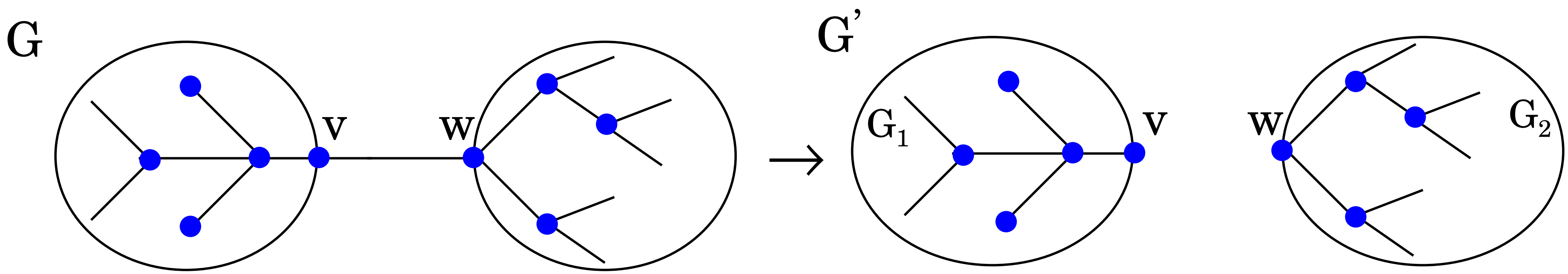
1. Base da indução: Se $n = 1$ então $m = 0$ (grafo trivial)
   $0 = 1 - 1$ verdadeiro
2. Hipótese de indução (indução forte): Suponha que o resultado vale para todas as árvores com menos de n vértices ($n \geq 1$).

3. Passo indutivo:

Seja G uma árvore com n vértices (n > 1). Então G contém ao menos uma aresta e = (v, w). Seja G' o grafo obtido removendo e de G.

Como v e w possuem um único caminho em G (teorema 1), então v e w não são conexos em G', ou seja v e w estão em 2 componentes conexos distintos de G'.

Sejam G_1 e G_2 esses componentes. Eles são acíclicos e logo são árvores e têm menos do que n vértices.



$V(G_1) \cup V(G_2) = V(G)$ $E(G_1) \cup E(G_2) \cup (v, w) = E(G)$

A hipótese de indução se aplica a G_1 e G_2.

Logo $|E(G_1)| = |V(G_1)| - 1$

$|E(G_2)| = |V(G_2)| - 1$

Mas $n = |V(G)| = |V(G_1)| + |V(G_2)|$

$$m = |E(G)| = \underbrace{|E(G_1)|} + \underbrace{|E(G_2)|} + 1 =$$

$$= |V(G_1)| - 1 + |V(G_2)| - 1 + 1 =$$

$$= \underbrace{|V(G_1)| + |V(G_2)|} - 1 =$$

$$m = n - 1$$

Logo, por indução temos $m = n - 1$ para $n \geq 1$.

Centro:

Outro resultado interessante e bastante particular de árvores é sobre o número de vértices de seu centro.

Lembrando:

G = (V, E) um grafo

$C(G) = \{w \in V \mid e(v) \text{ é mínimo}\}$ onde $e(v) = \max_{w \in V}\{d(v, w)\}$

Em um grafo qualquer temos que $1 \leq C(G) \leq |V(G)|$.

Vamos ver que em uma árvore podemos ter:
ou um único vértice ou 2 vértices (adjacentes entre si)

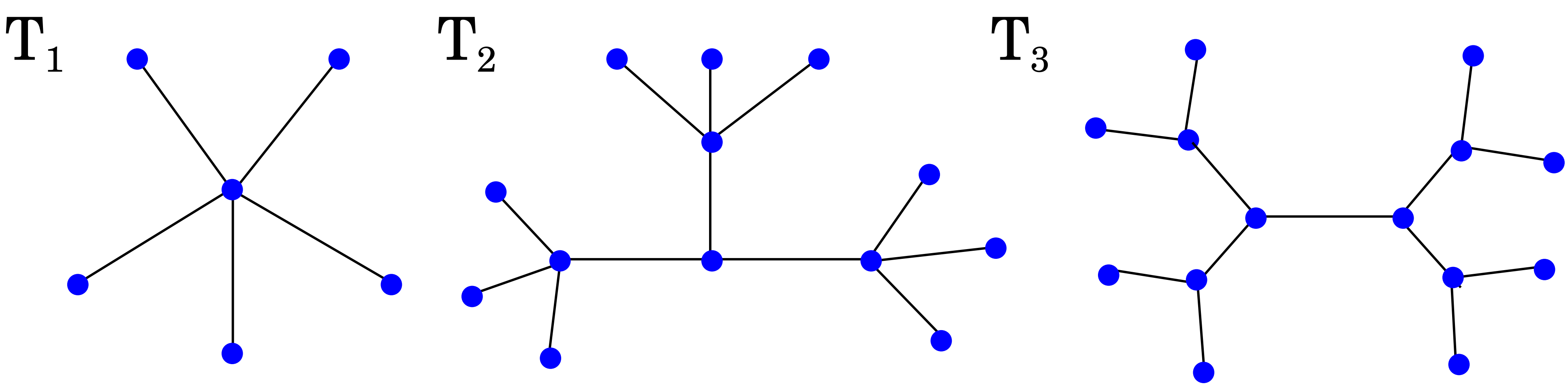
Motivação

Quando estamos provando resultados envolvendo árvores, muitas vezes é conveniente começar no meio da árvore e se "mover" para fora.

(Esse foi o caminho usado por Cayley em 1870 quando contou o número de moléculas químicas de uma certa fórmula, construindo-a passo a passo).

Mais recentemente o conceito de árvore balanceada tem sido muito usado em computação. Por árvore balanceada entendemos uma árvore que é construída de tal maneira que os vários subgrafos (subárvores) emergindo de cada vértice são "balanceados", isto é têm o mesmo número de vértices.

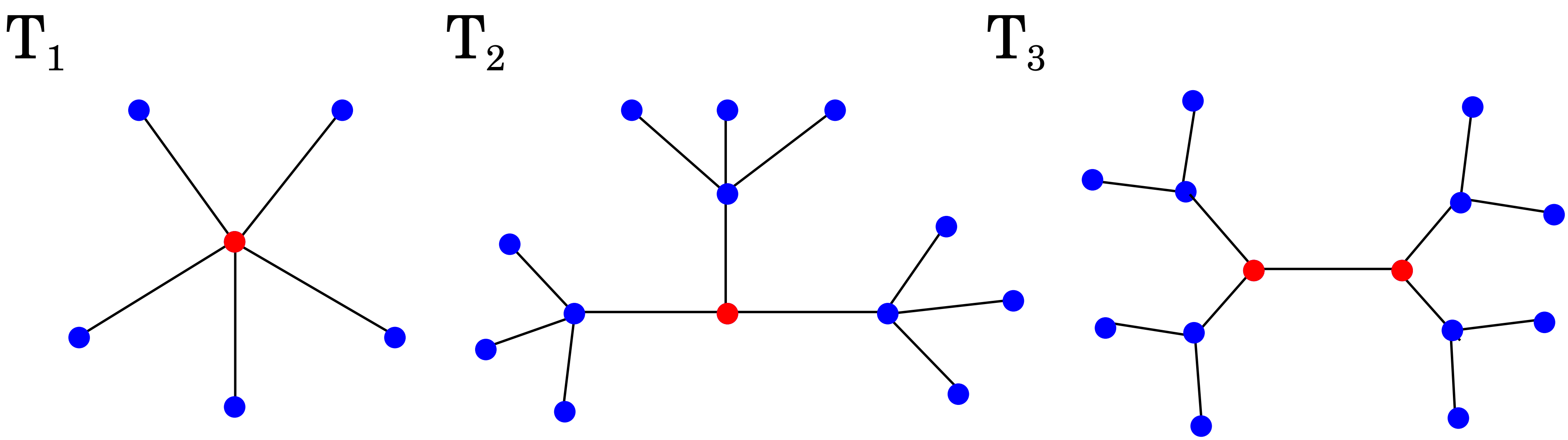
Exemplos:



T_1, T_2 e T_3 são árvores balanceadas.

O que é o centro de uma árvore?

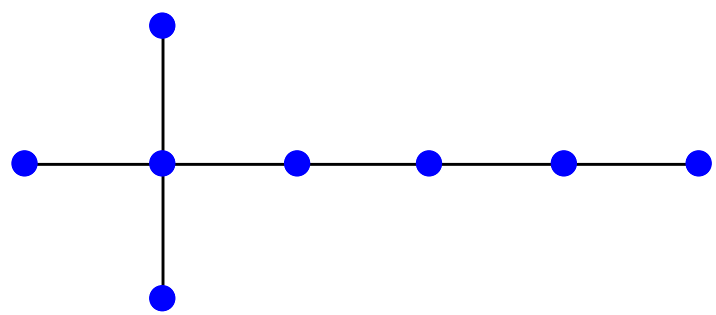
Intuitivamente: Nas árvores do exemplo anterior



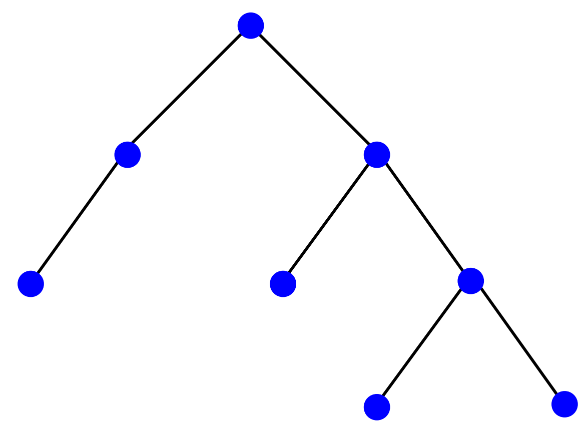
Em cada árvore o seu centro é composto dos vértices em vermelho.

Mas nas árvores abaixo não é tão intuitivo determinar o centro.

T_4



T_5



Teorema: O centro de uma árvore possui <u>um</u> vértice ou <u>dois</u> vértices (adjacentes).

Prova: Se baseia em

Fato 1: As folhas são os vértices de maior excentricidade de uma árvore.
(logo as folhas não pertencem ao centro)

Fato 2: Se removermos as folhas de uma árvore G, obtendo um grafo G', cada vértice de G' tem excentricidade exatamente uma unidade a menos do que em G.

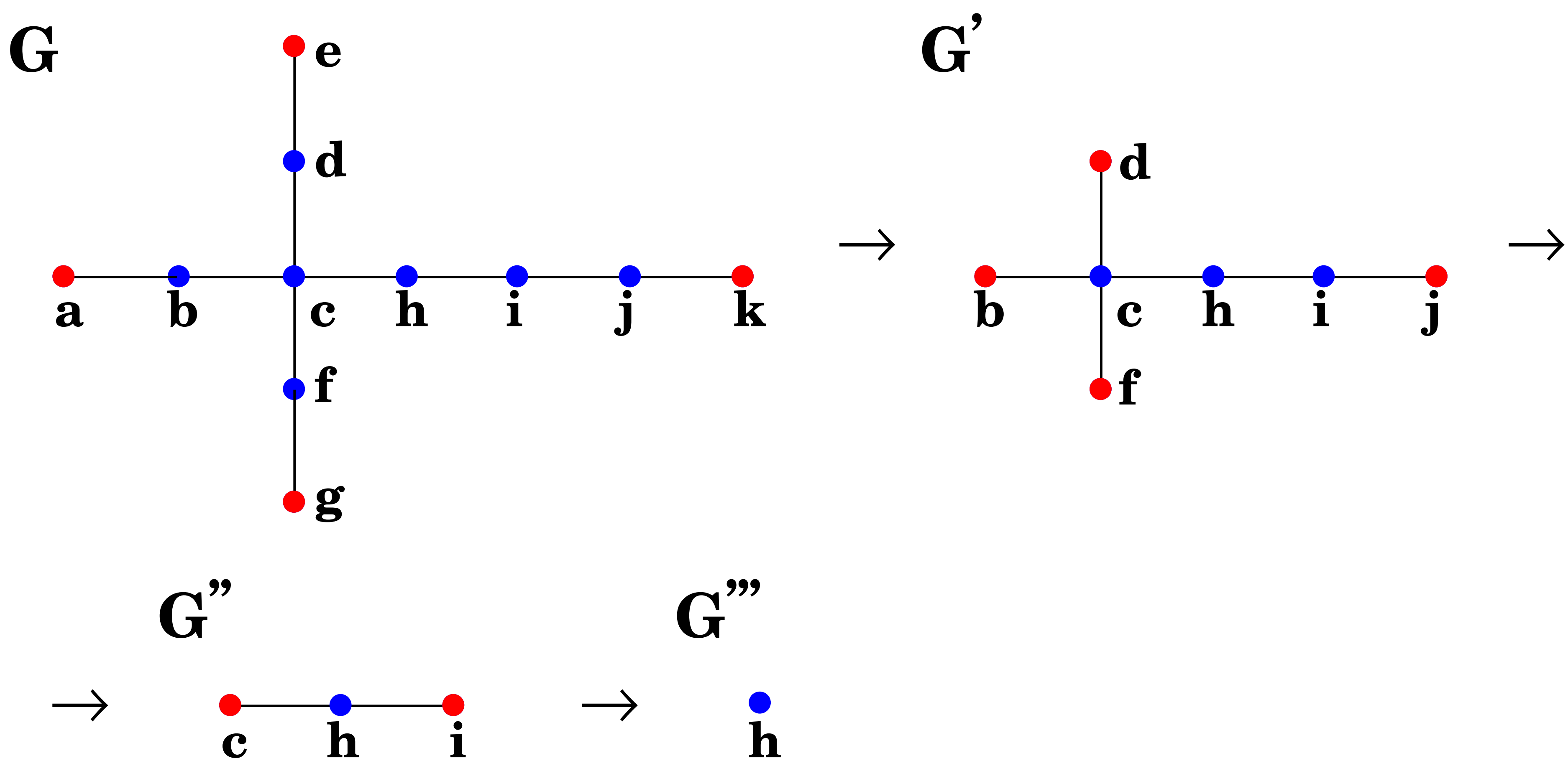
Fato 3: $C(G) = C(G')$

Os fatos 1, 2, 3 nos dão um método (algoritmo) para determinar o centro.

Remova todas as folhas de G (com as suas arestas incidentes).

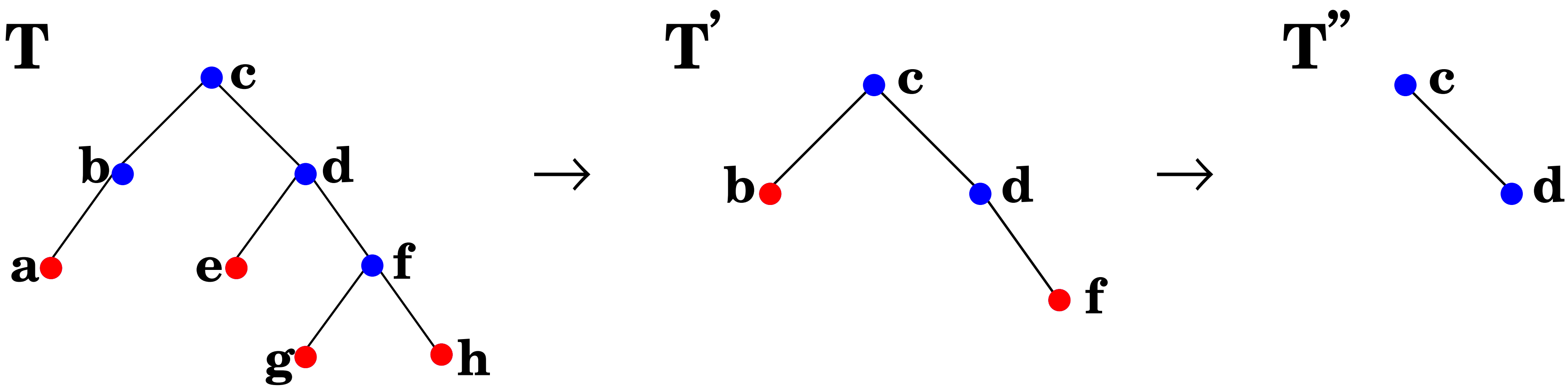
Repita esse procedimento até que tenha sido obtido um único vértice ou 2 vértices ligados por uma aresta.

Exemplo 5:



$$C(G) = C(G') = C(G'') = C(G''') = \{ h \}$$

Exemplo 6:



$$C(T) = C(T') = C(T'') = \{ c, d \}$$

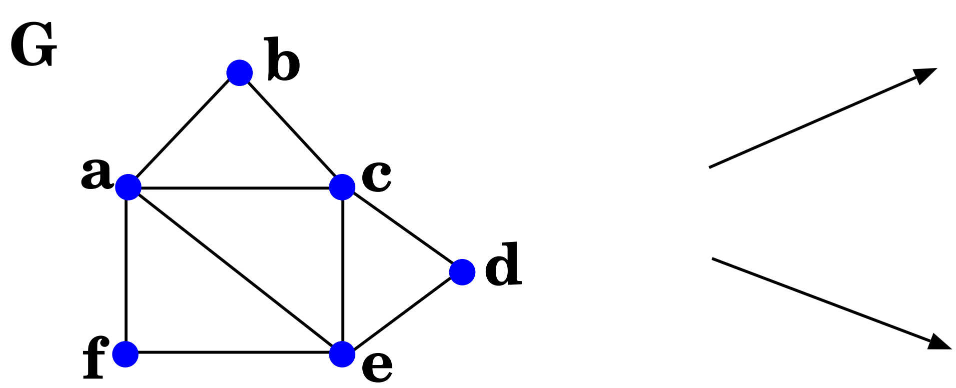
Árvore geradora:

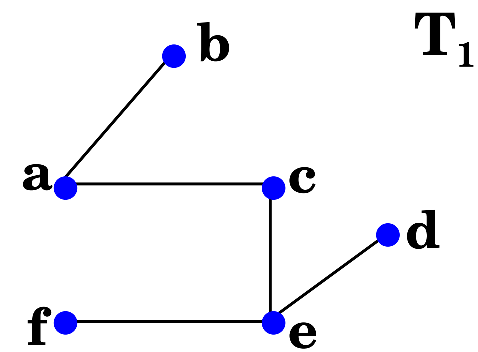
Seja G um grafo conexo.

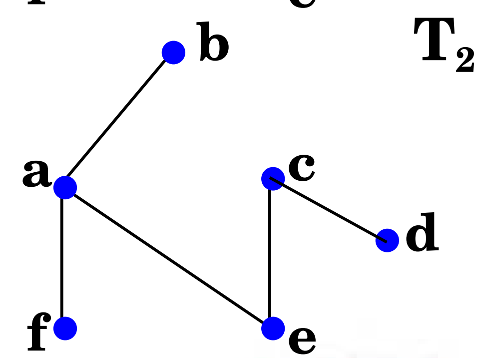
Uma árvore geradora de G é um subgrafo gerador T de G, que é em particular uma árvore;

isto é, $\underbrace{V(T) = V(G) \text{ e } E(T) \subseteq E(G)}_{\textbf{definição de subgrafo gerador}}$ e T é conexo e acíclico

Exemplo 5:







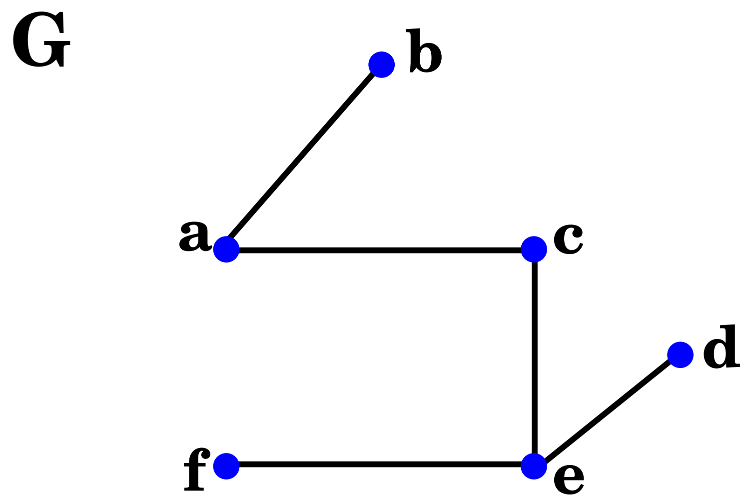
T_1 e T_2 são árvores geradoras de G

- Para todo grafo conexo G, podemos achar uma árvore geradora, de maneira sistemática da seguinte maneira:

  Selecione arestas de G, uma de cada vez, de maneira que nenhum ciclo seja criado, e esse procedimento é repetido até que todos os vértices tenham sido incluídos.

Exemplo 6:

{ (a, b), (a, c), (b, c), (c, e), (a, e), (e, f), (a, f), (e, d), (c, d) }



- Observe que se trocarmos a ordem das arestas, a árvore geradora obtida pode ser diferente.

Exercício:

Dê uma outra ordem para a lista de arestas do grafo G do exemplo anterior e ache uma outra árvore geradora de G.

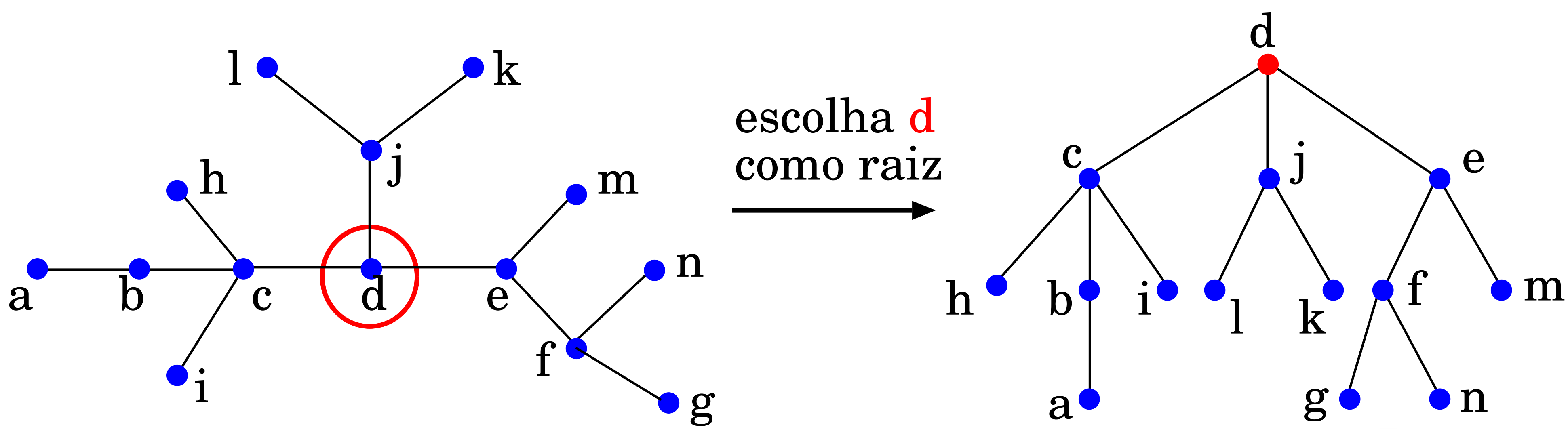
Árvore enraizada:

Seja T = (V, E) uma árvore.

Escolha um vértice qualquer v da árvore e chame esse vértice de raiz.

A árvore é então dita uma árvore enraizada e a sua representação gráfica tem características bastante particulares.

Exemplo 7:



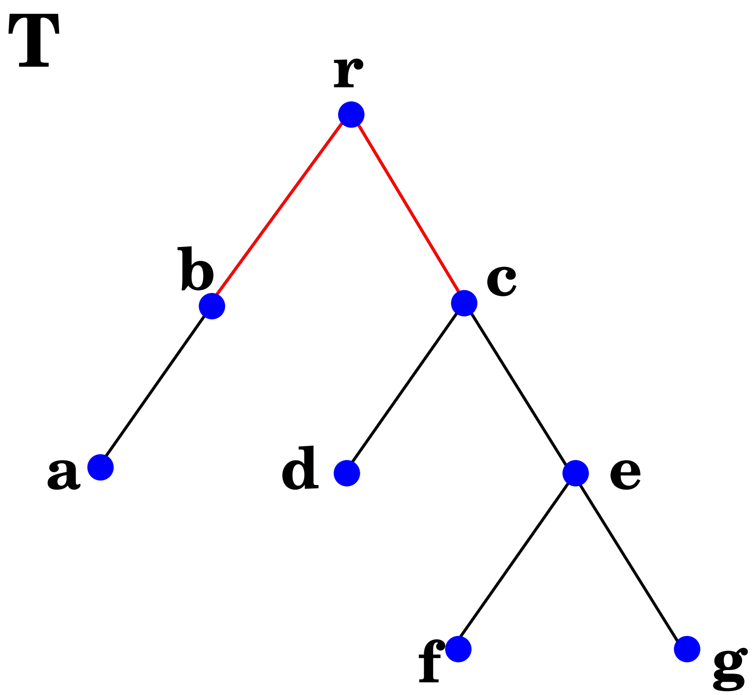
Características da árvore enraizada

Seja T = (V, E) uma árvore enraizada com raiz r.

Sejam v e w dois vértices de T.

Se v pertence ao caminho de r a w
então v é ancestral de w e w é descendente de v.
Se além disso (v, w) é uma aresta, então v é dito pai de w (w é filho de v).

Exemplo 8:



c é <u>ancestral</u> de d, e, f, g

c é <u>pai</u> de d e de e

b <u>não é</u> nem ancestral, nem descendente de c em T

b e c são <u>filhos</u> de r

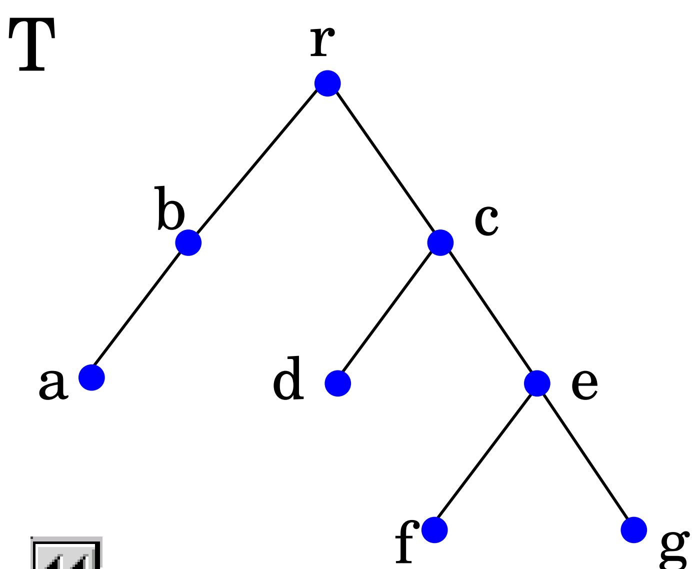
Características

Seja T = (V, E) uma árvore enraizada com raiz r.

O nível de um vértice v de T, denotado por nível(v) é o comprimento do caminho de r a v em T.

Altura de T é o maior dos níveis, isto é

$$\text{Altura de } T = \max_{v \in V} \{ \text{nível}(v) \}$$



nível(r) = 0

nível(b) = nível(c) = 1

nível(a) = nível(d) = nível(e) = 2

nível(f) = nível(g) = 3

Altura de T = 3

Resumo:

Conceito de árvore:

Grafo conexo e acíclico.

Caracterização:

Existe um caminho único entre quaisquer dois vértices v e w de um grafo $\Leftrightarrow$ o grafo é uma árvore.

Relação: vértices $\times$ arestas

$$|E(T)| = |E(V)| - 1$$

Centro:

O centro de uma árvore tem um único vértice ou dois vértices (adjacentes)

Árvore geradora:

Um subgrafo gerador que é uma árvore.

Fato: dado um grafo conexo G, sempre podemos achar uma árvore geradora de G.

Árvore enraizada:

Uma árvore com um vértice especial chamado raiz.

Hierarquia e níveis bem definidos.

Aula 22: Grafos Eulerianos e Grafos Hamiltonianos

Conteúdo:

- Introdução
- Definições
  - Grafo Euleriano
  - Grafo Hamiltoniano
- Grafo Euleriano: Caracterização
- Grafo Hamiltoniano
  - Teorema de Dirac
  - Teorema de Ore
  - Problema do Caixeiro Viajante

Introdução:

Vamos considerar dois tipos de problemas, aparentemente muito semelhantes, mas de natureza muito diferentes.

Suponhamos que temos n cidades ligadas por estradas.

Problema do explorador

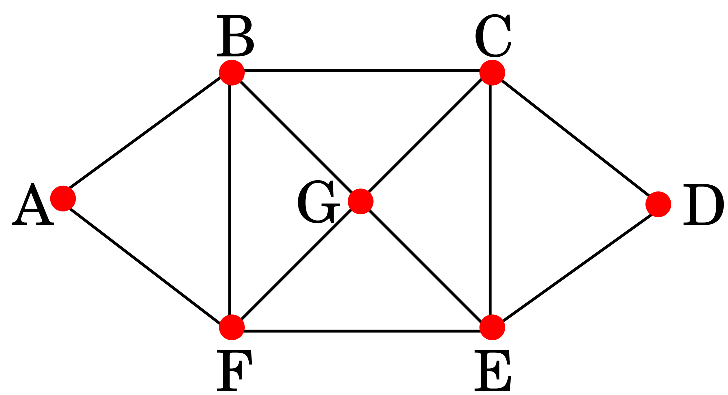
Um explorador deseja visitar todas as rotas (estradas) existentes entre as n cidades. É possível achar um percurso que atravessa cada rota apenas uma vez, retornando ao ponto de partida?

Problema do viajante

Um viajante deseja visitar todas as n cidades.
É possível achar um percurso que visita cada cidade apenas uma vez, retornando ao ponto de partida?

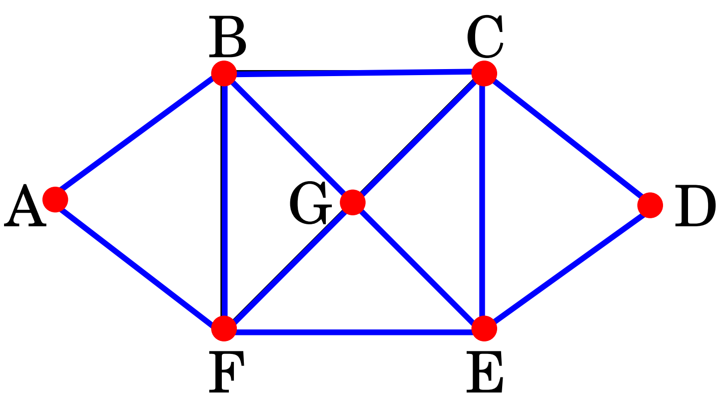
Para apreciar a diferença entre esses dois problemas, vamos considerar um exemplo com 7 cidades: A, B, C, D, E, F e G, e as estradas entre elas.

Podemos visualizar essa situação utilizando o grafo abaixo, onde cada cidade está associada a um vértice e cada estrada entre duas cidades está associada a uma aresta, unindo os vértices correspondentes as respectivas cidades.



Problema do explorador

O explorador deseja achar um percurso que começa em A, atravessa cada estrada exatamente uma vez e termina em A.



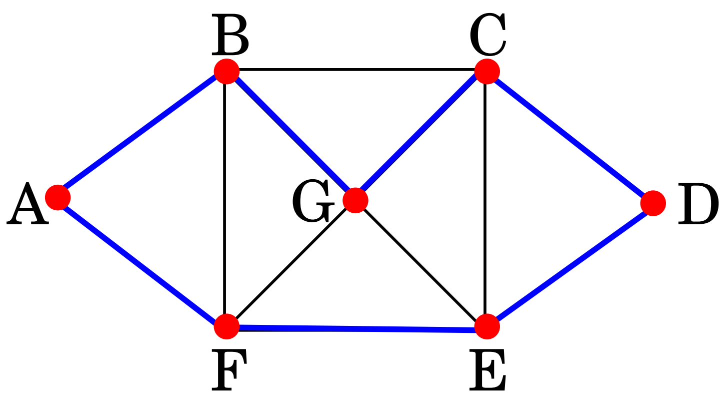
P_1: A B C D E F B G C E G F A

P_2: A F G C D E G B C E F B A

- Observe que o explorador passa por cada estrada uma única vez, mas pode passar por alguma cidade várias vezes.

Problema do viajante

O viajante deseja achar um percurso que começa em A, passa por cada cidade exatamente uma vez e termina em A.



P_1: A B C D E G F A

P_2: A F E D C G B A

- Observe que o viajante passa por cada cidade uma única vez (excetuando a inicial).

Resumindo:

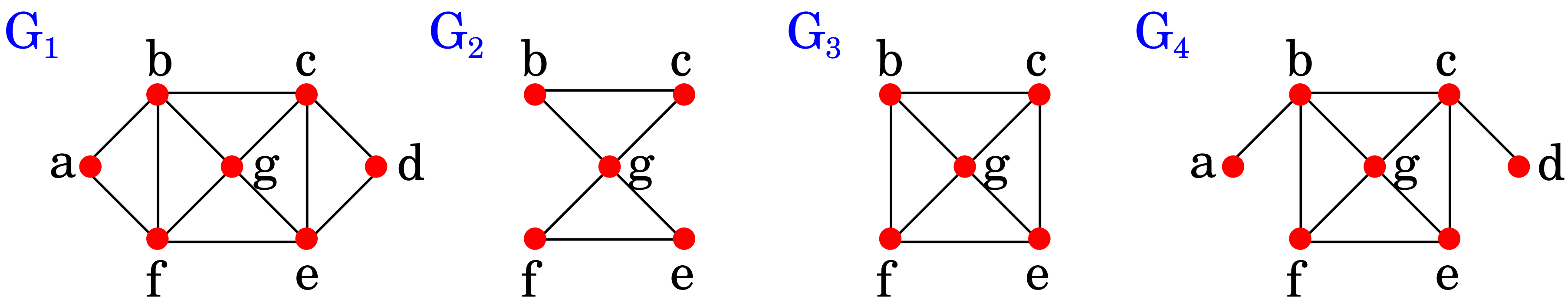
- O problema do explorador é achar um trajeto fechado que inclui cada aresta do grafo.
- O problema do viajante é achar um ciclo que inclui cada vértice do grafo.

Definições:

- Um grafo conexo G é euleriano se existe um trajeto fechado que inclui cada aresta de G. Tal trajeto é chamado de trajeto euleriano ou circuito euleriano.

- Um grafo G é hamiltoniano se existe um ciclo que inclui cada aresta de G. Tal ciclo é chamado de ciclo hamiltoniano.

Exemplo 1: Consideremos os 4 grafos abaixo:



G_1 é euleriano e hamiltoniano (já vimos).

G_2 é euleriano: b c g f e g b é um circuito euleriano.

G_2 não é hamiltoniano. Por que?

G_3 não é euleriano. Por que?

G_3 é hamiltoniano: b c g e f b é um ciclo hamiltoniano.

G_4 não é nem euleriano e nem hamiltoniano.

Por que?

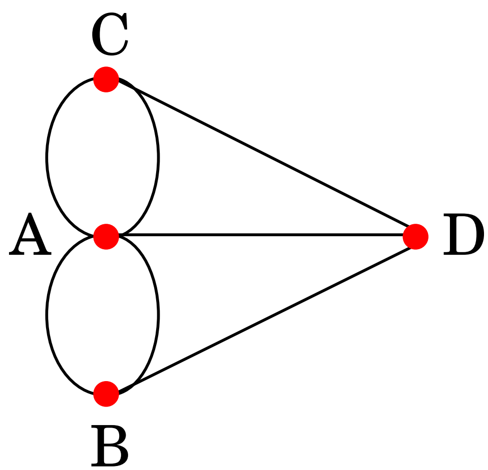
- Vamos tratar agora, cada um dos problemas separadamente:
  - O problema do explorador: determinar se um grafo é euleriano.
  - O problema do viajante: determinar se um grafo é hamiltoniano.

Grafos Eulerianos:

- Quando introduzimos os grafos, falamos do problema da Ponte de Königsberg.

- Esse problema foi resolvido pelo matemático Leonard Euler (1707 - 1783) e sua solução está no que é considerado o primeiro trabalho em grafos: "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis".

O problema da Ponte de Königsberg como vimos (se precisar volte a aula de Introdução aos grafos) era achar um percurso que atravessava cada ponte uma única vez, voltando ao ponto de partida. Esse problema corresponde exatamente ao problema de achar um trajeto (fechado) euleriano no grafo (multigrafo) correspondente:



- Daí a origem do nome: grafo euleriano.

- Comentamos que o problema não tinha solução e mais ainda, para que tivesse solução seria necessário termos em cada vértice um número par de arestas (pontes).

  E essa é justamente a caracterização de grafos eulerianos.

Caracterização de grafos eulerianos

Teorema: Seja G um grafo conexo.

G é <u>euleriano</u> se e somente se todo vértice de G tem <u>grau par</u>.

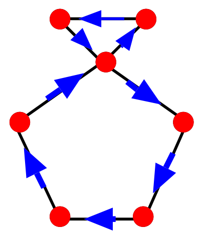
- A prova consiste de duas partes:

1. Se G é euleriano $\Rightarrow$ todo vértice de G tem grau par (parte fácil)

2. Se todo vértice de G tem grau par $\Rightarrow$ G é euleriano

1. Se G é euleriano $\Rightarrow$ todo vértice de G tem grau par

Prova: Se G é euleriano, então temos um trajeto euleriano e podemos percorrer esse trajeto, passando por cada aresta uma vez e retornando a origem.



Cada vez que passamos por um vértice, temos uma contribuição de 2 unidades para o grau desse vértice (incluindo o inicial, pois terminamos nele). Como cada aresta é usada uma única vez, o grau de cada vértice é 2 vezes o número de visitas a esse vértice, logo é um número par.

2. Se todo vértice de G tem grau par então G é euleriano.

   Essa prova é mais elaborada e será omitida.

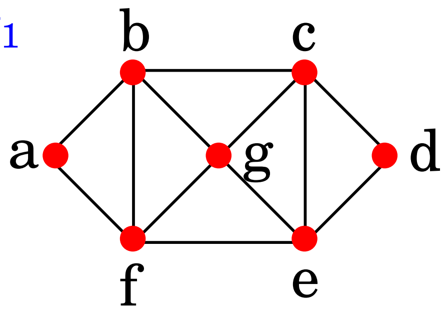
   Esse teorema nos dá uma maneira fácil e rápida de decidir se um grafo é ou não euleriano.

   Basta verificarmos os graus de todos os vértices do grafo:

   - Se todos tiverem grau par então o grafo é euleriano.
   - Caso contrário, o grafo não é euleriano.

Exemplo 2:

G_1

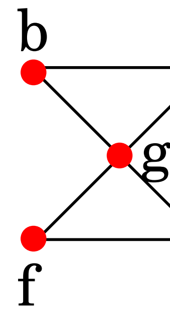


$d(a) = d(d) = 2$

$d(b) = d(c) = d(f) = d(e) = d(g) = 4$

G_1 é euleriano

G_2

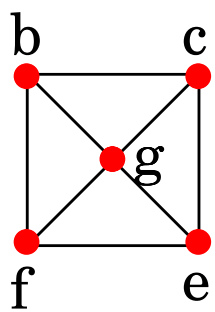


$d(b) = d(c) = d(f) = d(e) = 2$

$d(g) = 4$

G_2 é euleriano

G_3

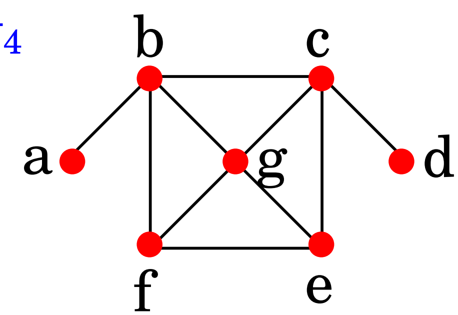


$d(b) = d(c) = d(f) = d(e) = 3$

$d(g) = 4$

G_3 não é euleriano

G_4



$d(b) = d(c) = d(g) = 4$

$d(f) = d(e) = 3$

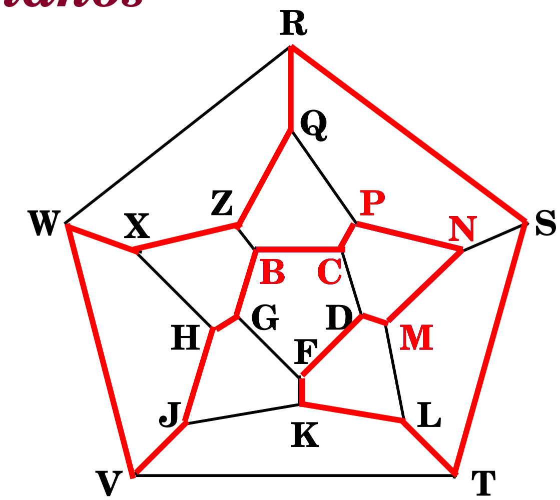
$d(a) = d(d) = 1$

G_4 não é euleriano

Grafos Hamiltonianos:

- Os grafos hamiltonianos são grafos em que existe um ciclo que passa por todos os vértices do grafo.

- O nome "hamiltoniano" vem do famoso matemático Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865).
  Ele popularizou o jogo do icosaedro, em que o jogador tem que achar ciclos hamiltonianos começando com 5 vértices consecutivos dados:



- Suponha que sejam dados: B C P N M

  Podemos completar o ciclo hamiltoniano da seguinte forma:

  B C P N M D F K L T S R Q Z X W V J H G B

Desafio: Ache outro ciclo hamiltoniano que também comece com B C P N M.

Desafio Voltar

B C P N M D F G H X W V J K L T S R Q Z B

- Aparentemente o problema de decidir se um grafo é hamiltoniano parece muito semelhante ao problema de decidir se um grafo é euleriano, e gostaríamos de poder conseguir condições necessárias e suficientes para isso.

- Infelizmente não se conhecem condições necessárias e suficientes para este problema, mas apenas condições parciais.

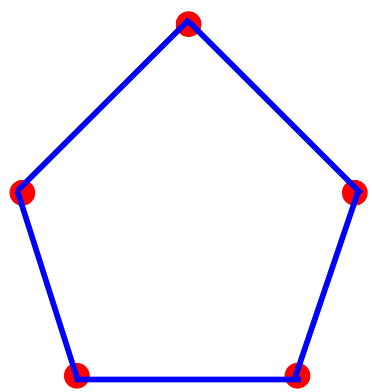
- Observemos alguns grafos que são (trivialmente) hamiltonianos.

Por exemplo:

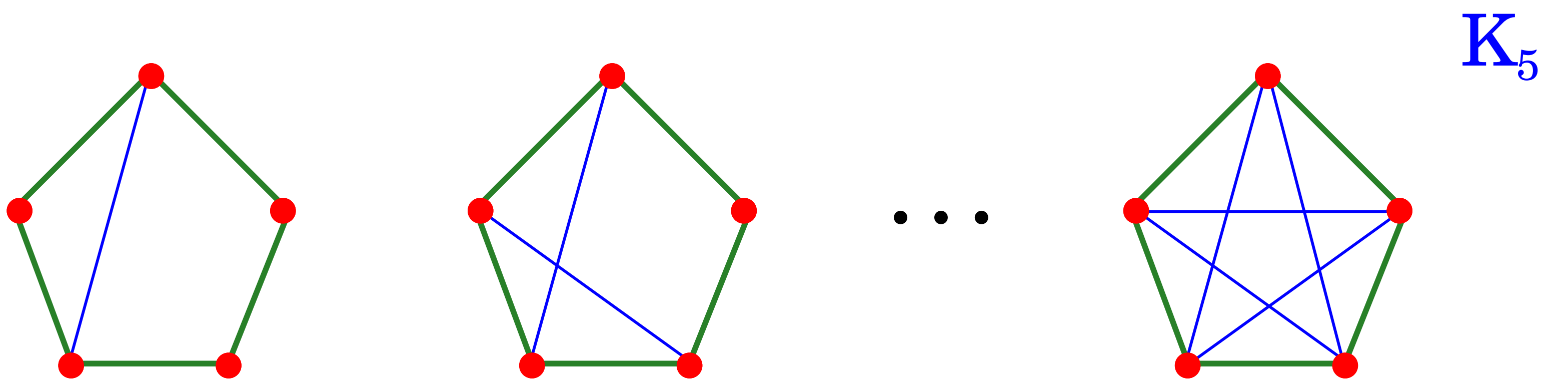
C_n (ciclo com n vértices) é hamiltoniano.

Vamos exemplificar com $n = 5$

C_5



- Se colocamos mais arestas em um grafo hamiltoniano, o grafo obtido continua hamiltoniano.



K_n (o grafo completo com n vértices) é hamiltoniano.

- Observação:

  Podemos dizer que grafos com mais arestas têm mais possibilidade de serem hamiltonianos que grafos com menos arestas.

  Temos duas condições de suficiência, mas não de necessidade que saem da observação acima.

- **Teorema** (Dirac):

  Seja G um grafo com n vértices, $n \geq 3$.

  Se $d(v) \geq \frac{1}{2}n \quad \forall \; v \in V(G)$ então G é hamiltoniano.

- **Teorema** (Ore):

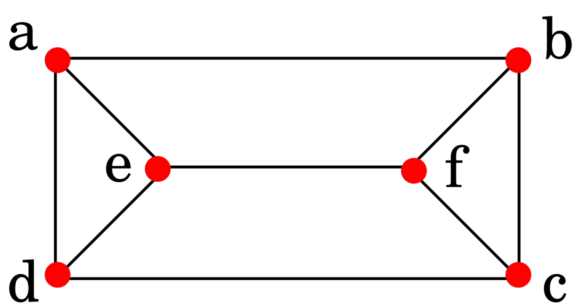
  Seja G um grafo com n vértices, $n \geq 3$.

  Se $d(v) + d(w) \geq n$ para todo par de vértices v e w não adjacentes, $v, w \in V(G)$ então G é hamiltoniano.

- Vamos ilustrar os teoremas considerando os exemplos a seguir:

Exemplo 3:

G_1



$n = 6$

$d(a) = d(b) = d(c) = d(d) = d(e) = d(f) = 3$

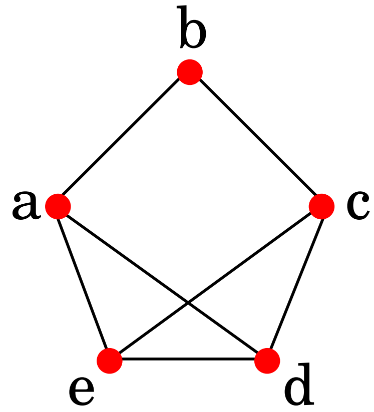
G_1 é regular de grau 3, isto é $d(v) = 3 \quad \forall \; v \in V(G_1)$

$$d(v) = 3 = \frac{n}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \forall \; v \in V(G_1)$$

Logo G_1 é hamiltoniano pelo <u>Teorema de Dirac</u>.

Exemplo 4:

G_2



$n = 5$

$d(a) = d(c) = d(d) = d(e) = 3$

$d(b) = 2$

Para $v = a, c, d, e$ $\quad d(v) = 3 > \dfrac{n}{2} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$

Para $v = b$ $\quad d(b) = 2 < \dfrac{5}{2} = 2{,}5$

Logo o Teorema de Dirac não se aplica

Mas se testarmos a condição do Teorema de Ore

$d(a) + d(c) = 6 > n = 5$

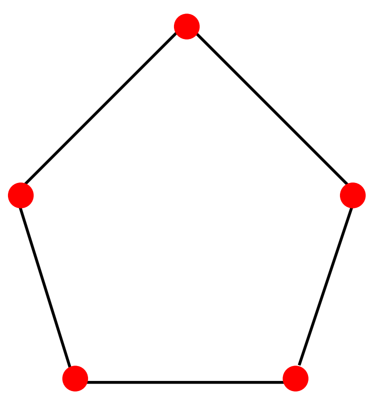
$d(b) + d(e) = d(b) + d(d) = 5 = n = 5$

Logo, G_2 é hamiltoniano pelo Teorema de Ore.

- Mas observe que as condições dadas pelo Teorema de Dirac e pelo teorema de Ore não são necessárias.

Exemplo 5: C_5 é hamiltoniano e não satisfaz nem a condição de Dirac e nem as condições de Ore.

C_5



$(\ n = 5 \quad d(v) = 2 \quad \forall\ v \in C_5\ )$

Verifique!

- Um problema famoso e muito estudado:

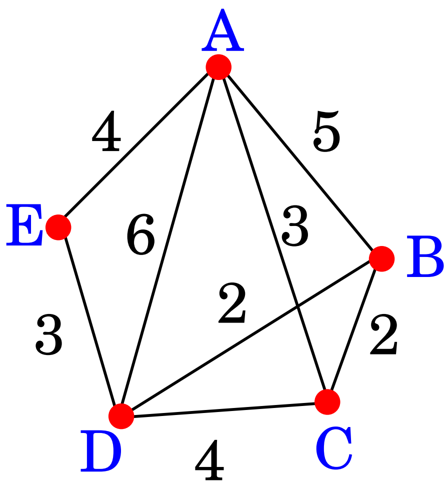
Problema do caixeiro viajante

Um caixeiro viajante deseja visitar n cidades (A_1, A_2, ... , A_n), começando na cidade A_1 e retornando ao fim a esta mesma cidade, de tal maneira que cada cidade é visitada apenas uma única vez e que a distância coberta seja a menor possível.

Dadas as distâncias entre as cidades, como o problema pode ser resolvido?

- Consideremos um exemplo pequeno:

5 cidades: A, B, C, D, E



(As distâncias entre cada cidade são os números associados a cada aresta que liga as respectivas cidades)

A princípio poderíamos resolver esse problema olhando todos os possíveis percursos (ciclos) e escolhendo o que envolve a menor distância.

Por exemplo: C_1 : A B C D E A $\rightarrow$ 18

C_2 : A C B D E A $\rightarrow$ 14

Se você testar todas as possibilidades verá que 14 é a menor distância.

- O Problema do Caixeiro Viajante é determinar (se possível) os ciclos hamiltonianos do grafo e escolher o de menor valor (somando todas as arestas do grafo).

  Se aumentarmos o número de cidades (e considerarmos todas as estradas possíveis entre as cidades, ou seja o modelo é um grafo completo) o problema pode complicar muito.

  10 cidades - 362880 possíveis percursos

  20 cidades - $1{,}22 \times 10^{17}$ possíveis percursos

  $\vdots$

- Infelizmente não se conhece algoritmos eficientes para resolver esse problema. Embora existam heurísticas, que podem ser usadas para se conseguir soluções aproximadas, uma solução exata envolveria olhar todos os possíveis ciclos hamiltonianos e escolher o de menor valor.

  O Problema do Caixeiro Viajante (e suas variações) é muito importante na prática e é um problema ainda muito estudado.

Resumo:

Grafo Euleriano:

É um grafo que possui um trajeto fechado que inclui todas as arestas do grafo.

Caracterização:

Um grafo é euleriano $\Leftrightarrow$ todos os seus vértices têm grau par

Grafo Hamiltoniano:

É um grafo que possui um ciclo que inclui todos os vértices do grafo.

Condições parciais:

G grafo conexo com n vértices, $n \geq 3$

Dirac: Se $d(v) \geq \frac{1}{2}n \quad \forall\, v \;\Rightarrow$ G é hamiltoniano.

Ore: Se $d(v) + d(w) \geq n$ para todo par de vértices v e w não adjacentes $\Rightarrow$ G é hamiltoniano.

Problema do Caixeiro Viajante:

Determinar (se possível) o ciclo hamiltoniano de menor valor do grafo.

Aula : Grafos Planares

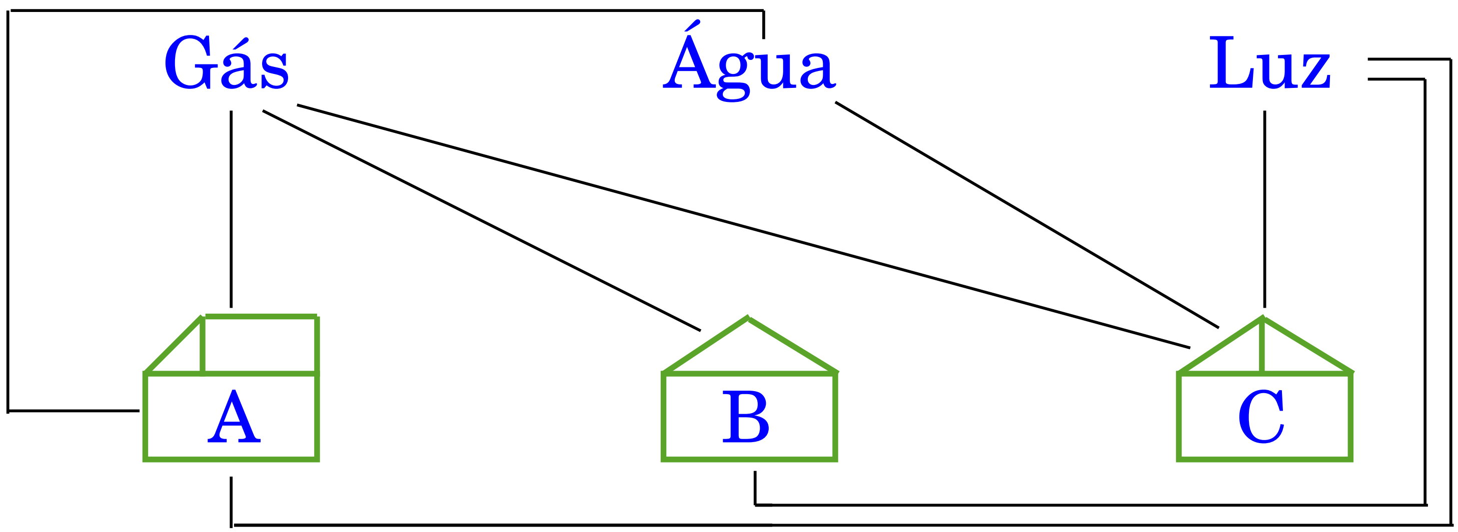
Conteúdo:

- Introdução
- Grafo Planar
- Fórmula de Euler
- Caracterização de Grafo Planar
  - Teorema de Kuratowski

Introdução:

Consideremos o seguinte problema:

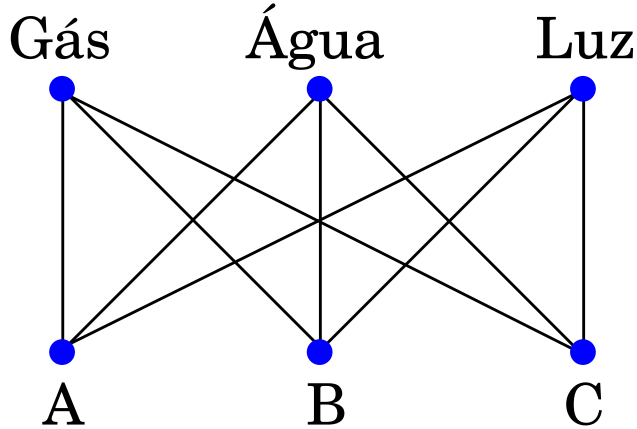
Temos 3 casas A, B e C e queremos conectá-las a 3 comodidades (utilidades): gás, água e luz. Por razões de segurança queremos evitar que essas conexões se cruzem. Isso é possível?



A figura mostra 8 conexões possíveis.
E a última (água e casa B) ?

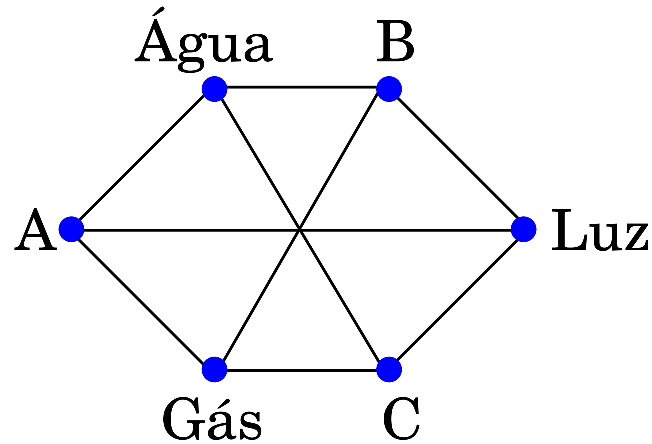
Podemos modelar o problema por um grafo, onde os vértices correspondem as casas (A, B e C) e as 3 utilidades (gás, água e luz) e as arestas as respectivas conexões.

G_1



ou

G_2



- G_1 e G_2 são isomorfos.
- $G_1(G_2)$ é um grafo bipartido completo (K_{33})
- O problema consiste então em:

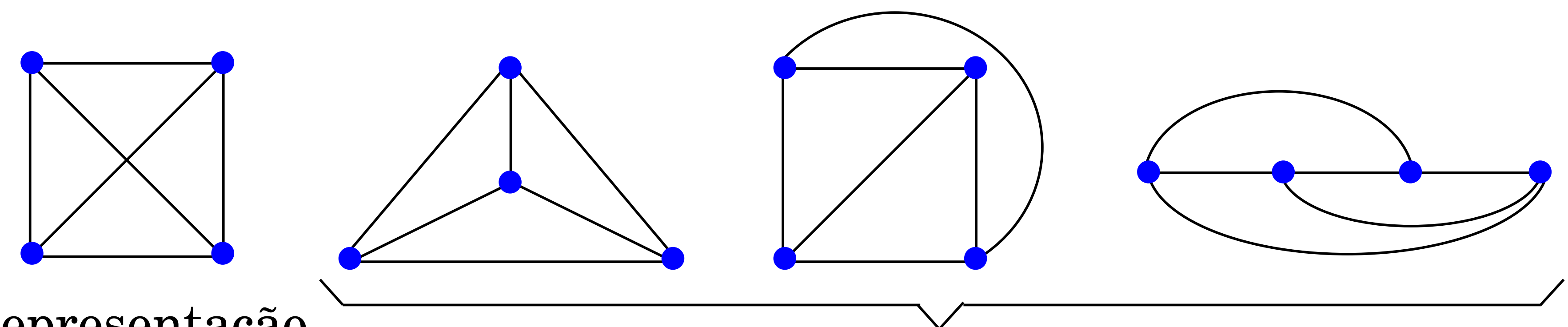
  É possível desenhar o grafo $G_1(G_2)$ de maneira que não tenhamos cruzamento de arestas?

Grafo Planar:

Definição:

Um grafo G é planar se ele pode ser desenhado no plano de maneira que não haja cruzamento de arestas isto é, quaisquer duas arestas só se interceptam nos vértices aos quais são incidentes. Tal desenho é dito uma representação plana de G.

Exemplo 1: Consideremos o grafo completo K_4

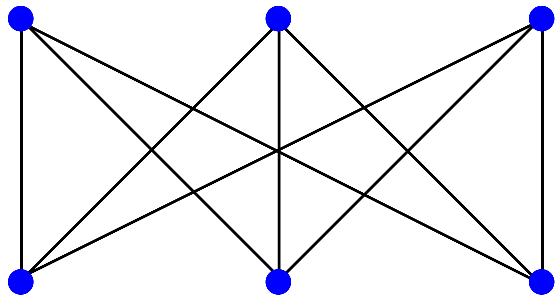


Representação não plana do K_4

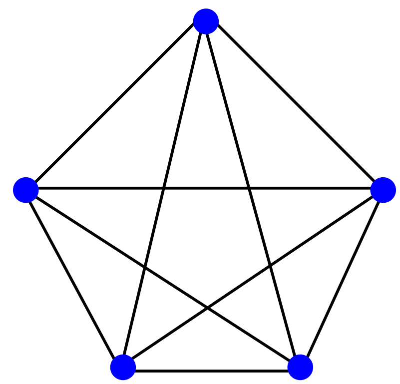
Representações planas do K_4

O Grafo K_4 é planar.

Exemplo 2: Consideremos os grafos K_{33} e K_5



K_{33}



K_5

Tente desenhar uma representação plana destes grafos.

Os grafos K_{33} e K_5 não são planares.

(Vamos provar isto mais adiante)

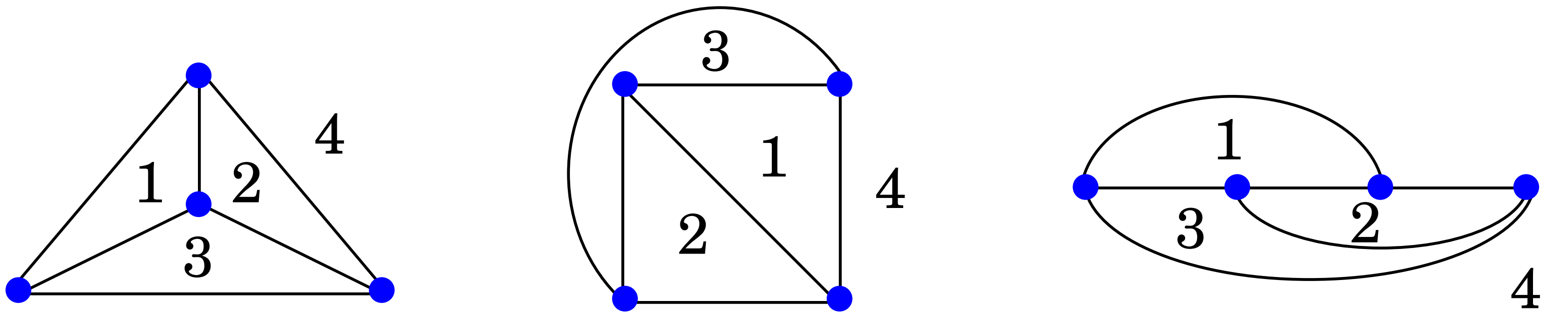
Fórmula de Euler:

Definição:

Se G é um grafo planar então toda representação plana de G divide o plano em regiões chamadas faces.Uma dessas regiões é não limitada e é chamada de face externa.

Exemplo 3:

Consideremos o grafo K_4 e três de suas representações planas.



R_1 R_2 R_3

Observe que as três representações planas do K_4 possuem o mesmo número de faces.

- Se G é um grafo planar, toda representação plana de G tem o mesmo número de faces e esse número é denotado por f .

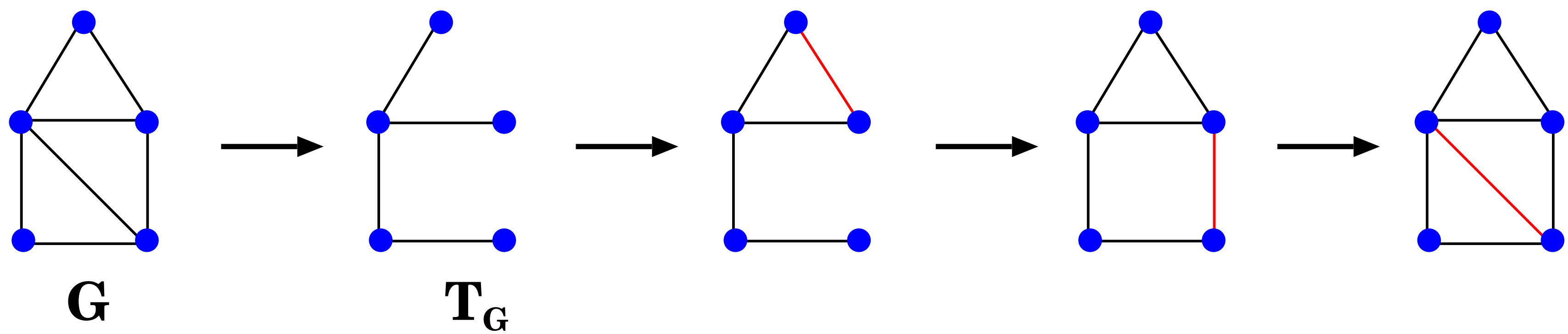
- O interessante é que os números de vértices, arestas e faces de um grafo planar não são independentes. A sua relação é dada pelo Teorema a seguir.

Teorema 1: (Fórmula de Euler)

Seja G um grafo conexo planar e sejam n, m e f o número de vértices, número de arestas e número de faces respectivamente de uma representação plana de G. Então $n - m + f = 2$.

Prova: Qualquer grafo conexo G pode ser construído, a partir de uma árvore geradora T_G, adicionando arestas a ela, uma a uma, até que o grafo G é obtido.

Exemplo 4:



Vamos mostrar:

(i) Para uma árvore geradora: $n - m + f = 2$

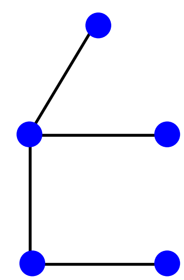
(ii) Em qualquer etapa da construção do grafo G a partir de sua árvore geradora, a adição de uma aresta não altera o valor de $n - m + f$.

Prova de (i):

Seja T_G uma árvore geradora de G.

(Observe que qualquer árvore possui apenas uma face.)

T_G



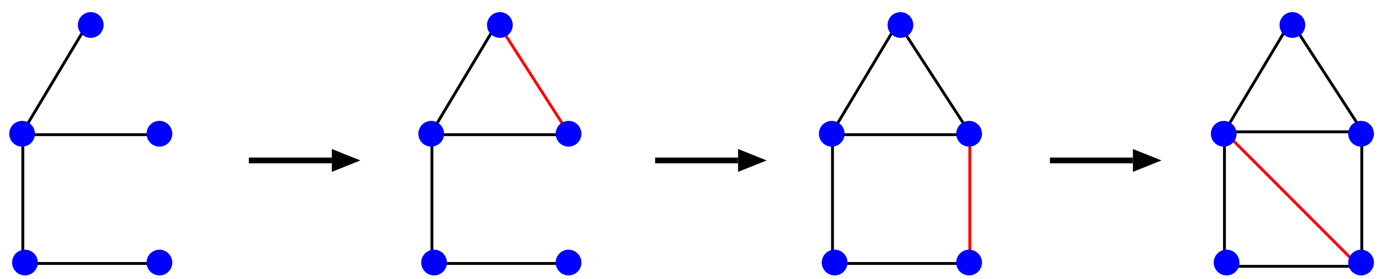
Como T_G tem n vértices, $n - 1$ arestas e 1 face temos:

$$n - m + f = n - (n - 1) + 1 = 2$$

ou seja, a relação é válida para a árvore geradora de G.

Prova de (ii):

Cada vez que adicionamos uma aresta, tal aresta deve conectar 2 vértices diferentes, e ela corta uma face existente em 2.



T_G

Isso deixa n fixo, aumenta m de 1 e f de 1

Logo $n - m + f$ fica inalterado.

Como $n - m + f = 2$ durante todo o processo, o resultado segue.

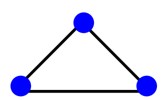
Intuitivamente podemos observar que quanto maior é o número de arestas de um grafo G em relação ao seu número de vértices, mais difícil se torna a obtenção de uma representação plana para G.

De fato, temos um limite máximo para o número de arestas de um grafo planar, dado pelos dois corolários a seguir.

Corolário 1: Seja G um grafo conexo planar com n vértices ($n \geq 3$) e m arestas. Então $m \leq 3n - 6$

Corolário 2: Seja G um grafo conexo planar com n vértices ($n \geq 3$) e m arestas e sem triângulos. Então $m \leq 2n - 4$

Observação: Um grafo sem triângulos significa um grafo que não contém K_3 como subgrafo.

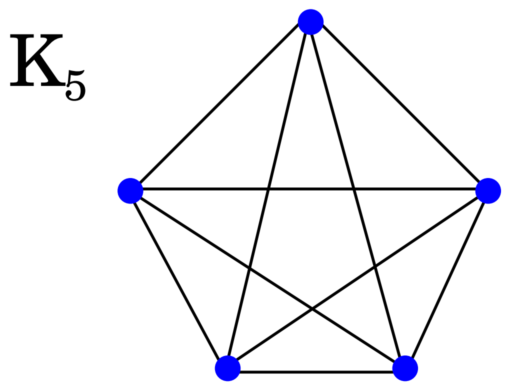


K_3

Com esses resultados podemos mostrar formalmente que os grafos K_5 e K_{33} não são planares.

Corolário 3: O grafo K_5 não é planar.

Prova:



Para K_5 temos $n = 5$, $m = 10$

Suponha que K_5 seja um grafo planar.

Então pelo corolário 1, a relação $m \leq 3n - 6$ deve ser satisfeita.

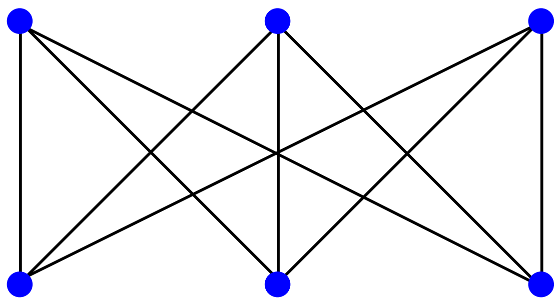
Mas, $m = 10 > (3 \times n) - 6 = (3 \times 5) - 6 = 9$ Contradição!

Logo K_5 não é um grafo planar.

Corolário 4: O grafo K_{33} não é planar.

Prova:

K_{33}



Para K_{33} temos $n = 6$, $m = 9$

K_{33} não tem triângulos (K_3)

Suponha que K_{33} seja um grafo planar.

Se aplicarmos o corolário 1

$$m = 9 < (3 \times n) - 6 = (3 \times 6) - 6 = 12 \quad \text{satisfaz}$$

(nada se pode concluir)

Mas o grafo K_{33} não contém triângulos.

Então pelo corolário 2 a relação $m \leq 2n - 4$ deve ser satisfeita.

$$m = 9 \; > \; (2 \times n) - 4 = (2 \times 6) - 4 = 8 \quad \text{Contradição!}$$

Logo K_{33} não é um grafo planar.

Caracterização de Grafo Planar:

As restrições do número de arestas em um grafo planar dadas pelos corolários 1 e 2 são em geral úteis para mostrar que um grafo é não planar, como vimos para o K_5 e o K_{33}.

Mas, essas condições apesar de necessárias, não são suficientes para determinar a planaridade de um grafo. Existem muitos grafos que satisfazem essas condições e não são planares.

Observações simples, mas importantes:

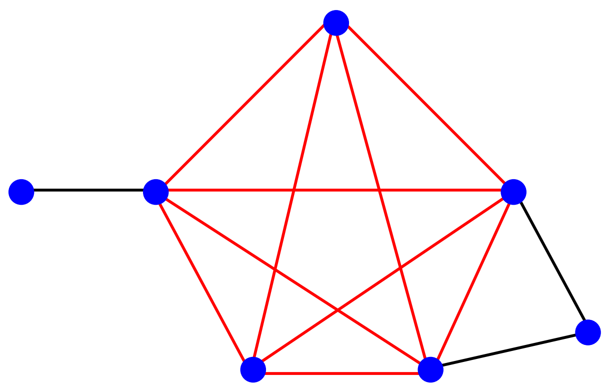
1) K_5 e K_{33} são os grafos não planares com o menor número de vértices e arestas, respectivamente.

2) Se G é um grafo planar então todo subgrafo de G é planar.

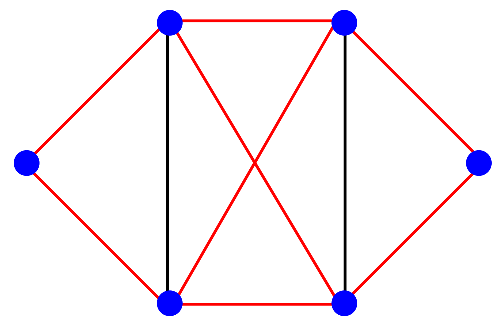
ou de maneira equivalente

2') Se G contém um grafo não planar como subgrafo então G é não planar.

Exemplo 5:



G_1

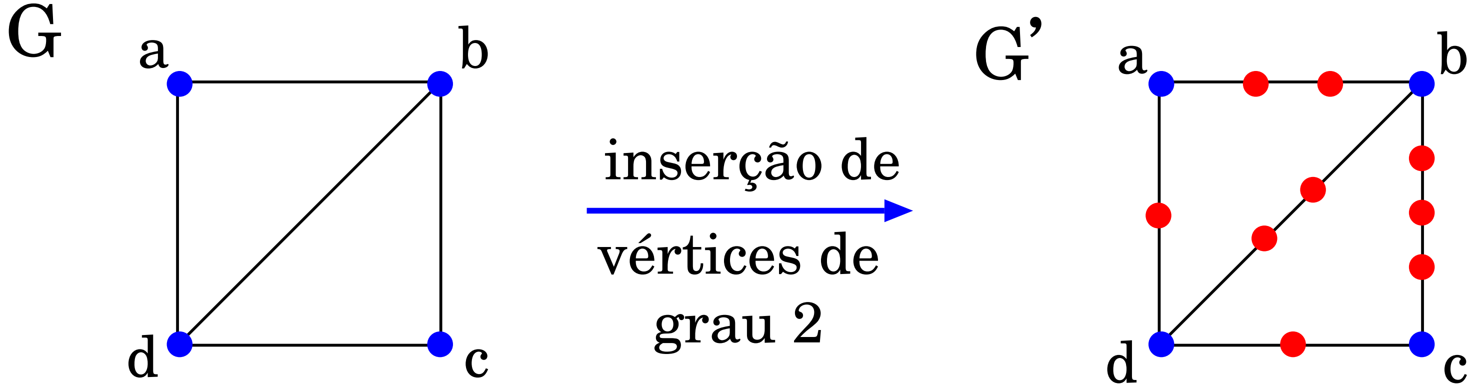


G_2

G_1 contém K_5 $\Rightarrow$ G_1 é não planar.

G_2 contém K_{33} $\Rightarrow$ G_2 é não planar.

As duas observações a seguir envolvem a operação de inserção de vértices de grau 2 nas arestas de um grafo G que mostramos no diagrama.



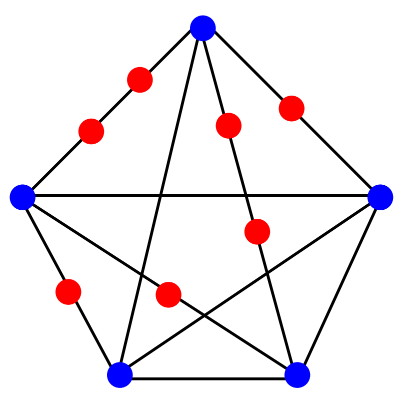
- Qualquer grafo formado de G pela inserção de vértices de grau 2 nas suas arestas é dito uma subdivisão de G.

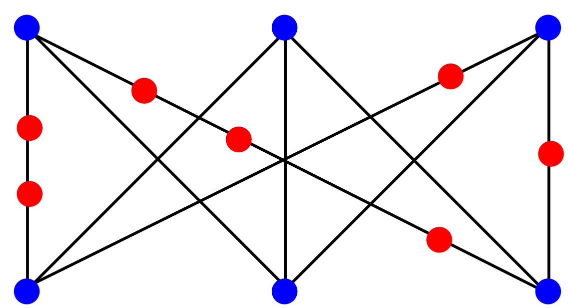
(Continuando as observações)

3) Se G é um grafo planar, então qualquer subdivisão de G é planar.

ou de maneira equivalente

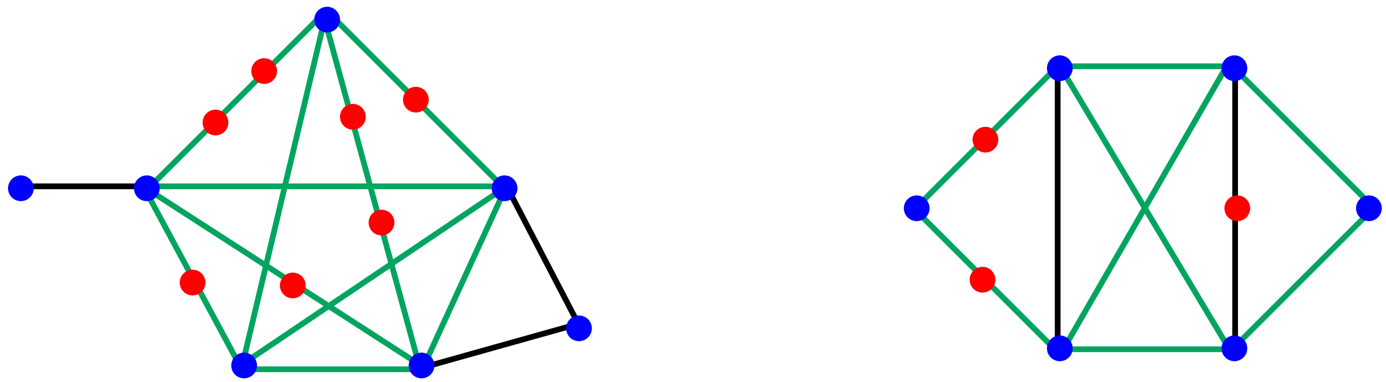
3') Se G é uma subdivisão de um grafo não planar então G é não planar.





Das observações anteriores segue:

4) Se G é um grafo que contém subdivisões do K_5 ou do K_{33} então G é não planar.



Agora estamos prontos para enunciar o resultado fundamental para o reconhecimento de grafos planares.

Esse resultado é de um matemático polonês K. Kuratowski (1930).

Teorema de Kuratowski

Teorema: Um grafo é planar se e somente se ele não contém subdivisões de K_5 e de K_{33} como subgrafos.

A prova da necessidade é imediata (sai de nossas observações).

A prova da suficiência é longa e complicada, será omitida aqui.

Com esse teorema foi possível o desenvolvimento de algoritmos eficientes para o reconhecimento de grafos planares.

Resumo:

Grafo Planar:

- Uma representação geométrica de um grafo G em que não há cruzamento de linhas (arestas) é dita uma representação plana de G.
- Se G admite uma representação plana então G é um grafo planar.

Fórmula de Euler:

- Se G é um grafo planar conexo então $n - m + f = 2$
  $n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$, f = número de faces de G.

Consequências:

G planar conexo, $n \geq 3$ então $m \leq 3n - 6$

G planar conexo, $n \geq 3$ sem K_3 então $m \leq 2n - 4$

K_5 e K_{33} são não planares.

- Um grafo obtido de um grafo G pela inserção de vértices de grau 2 nas suas arestas é uma subdivisão de G.

Caracterização de Grafo Planar (Kuratowski):

- G é planar $\Leftrightarrow$ não contém como subgrafo uma subdivisão de K_5 ou de K_{33}

Aula 24: Grafos Direcionados

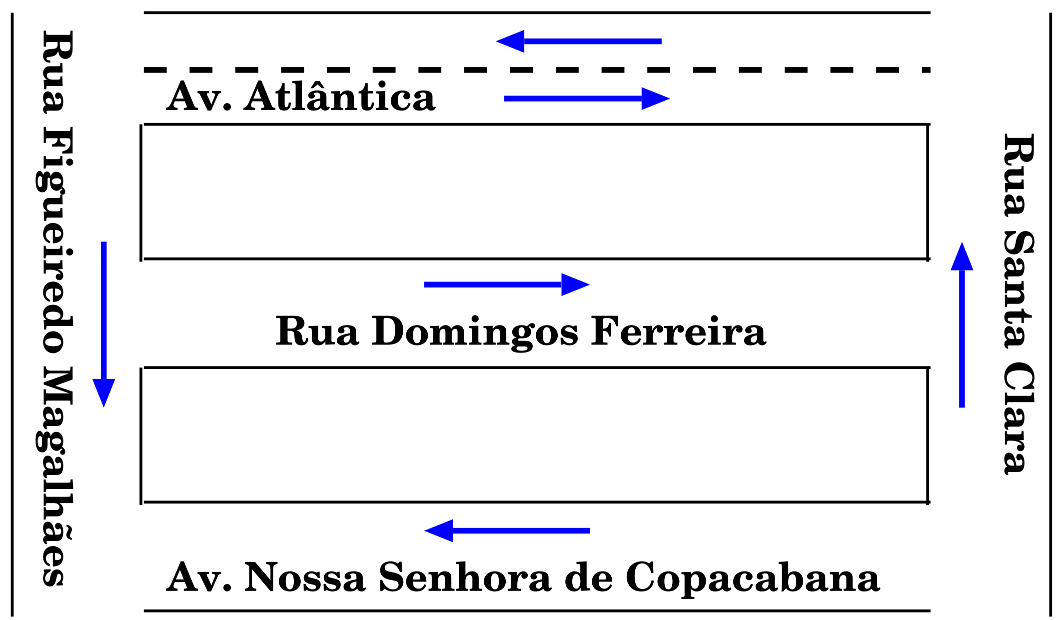
Conteúdo:

- Introdução
- Definição
- Representação Geométrica
- Conceitos Básicos e Nomenclatura
- Representação por Matrizes

Introdução:

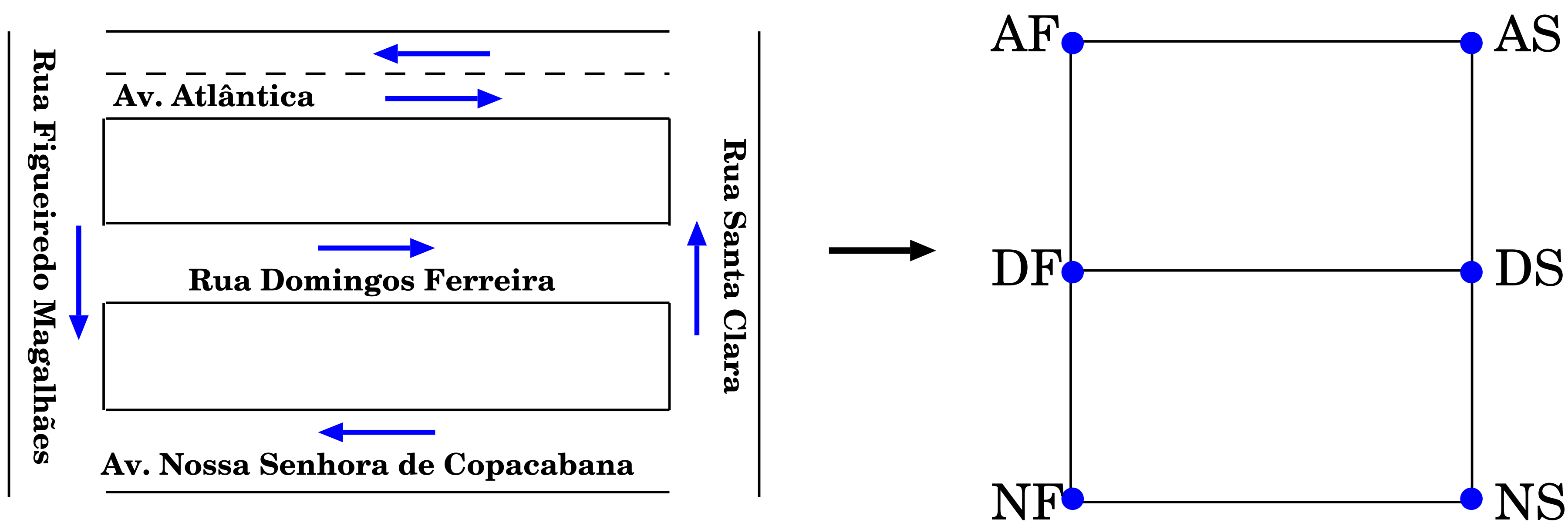
Exemplo 1:

Queremos representar, através de um diagrama, um quarteirão de Copacabana compreendido entre as ruas Figueiredo Magalhães e Santa Clara e limitado pela Av. Atlântica e Av. Nossa Senhora de Copacabana, e nesse diagrama desejamos que estejam contidas as informações sobre a direção (da mão) das ruas desse quarteirão.



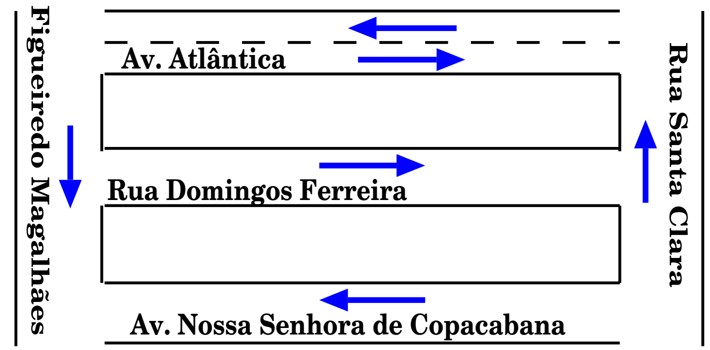
Exemplo 1 (continuação):

Vamos construir o seguinte grafo G:
A cada esquina (interseção de ruas) associamos um vértice e a cada rua entre as esquinas uma aresta ligando vértices correspondentes.



Exemplo 1 (continuação):

Mas queremos associar a essa representação a informação sobre direção (fluxo de trânsito) das ruas.



A Av. Atlântica tem 2 pistas com direções opostas ou seja vamos associar duas arestas a ela, as arestas (AF, AS) e (AS, AF) que chamaremos de arestas direcionadas, onde consideramos que a aresta (AF, AS) tem direção de AF para AS, e a aresta (AS, AF) tem direção de AS para AF.

A Rua Figueiredo Magalhães tem mão única no sentido da Av. Atlântica para a Domingos Ferreira e da Domingos Ferreira para a N. S. de Copacabana, ou seja temos as arestas direcionadas correspondentes (AF, DF) e (DF, NF).

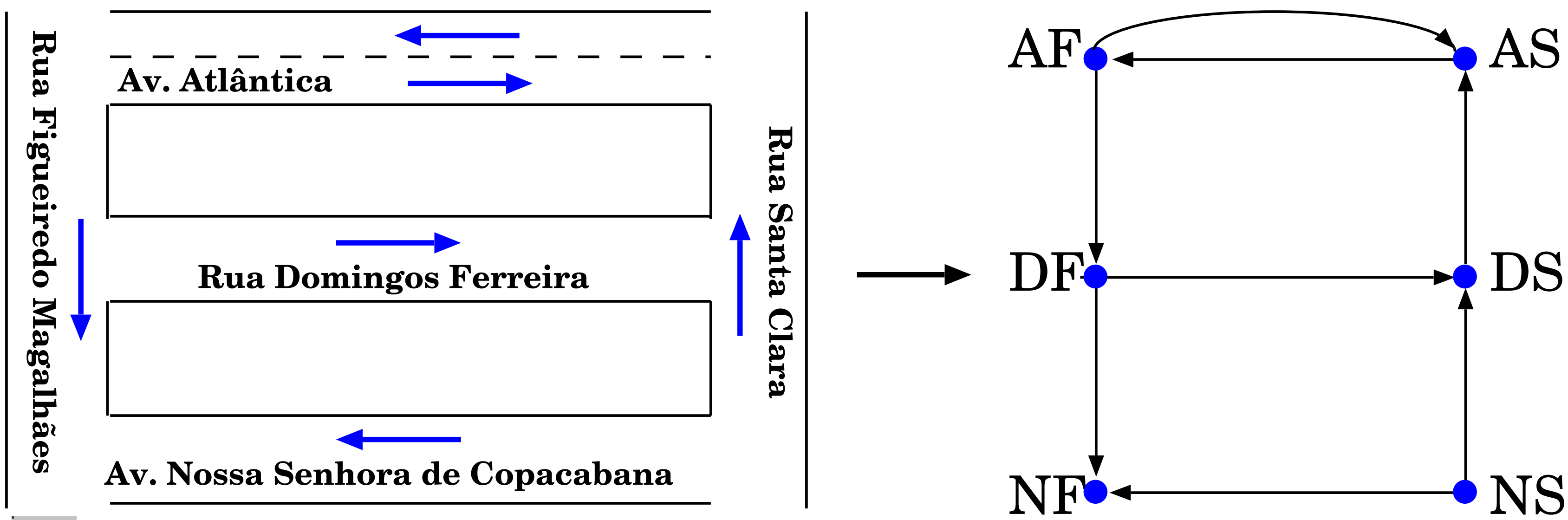
A Rua Santa Clara tem direção contrária a da Figueiredo e temos as arestas direcionadas (DS, AS) e (NS, AS) correspondentes.

Exemplo 1 (continuação):

A Domingos Ferreira tem sentido da Figueiredo para a Santa Clara e corresponde a aresta direcionada (DF, DS).

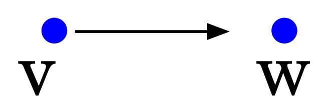
E finalmente a Av. Nossa Senhora de Copacabana tem direção da Santa Clara para a Figueiredo e corresponde a aresta (NS, NF).

Refazendo nosso diagrama com as arestas direcionadas temos então um grafo onde estamos considerando direções nas suas arestas e que chamaremos de grafo direcionado.



Definição:

- Um grafo direcionado ou digrafo D é um par ordenado (V, E), denotado D = (V, E), onde V é um conjunto finito não vazio de elementos denominados vértices e E é um conjunto de pares ordenados de vértices distintos de V denominados arestas direcionadas ou arcos.
- Portanto num digrafo cada aresta direcionada (v, w) possui uma única direção: de v para w.
- Representa-se geometricamente



Note que (v, w) ≠ (w, v)

Dado uma aresta direcionada e = (v, w) dizemos que (v, w) é divergente de v e convergente a w.

Além disso v é dito a cauda de (v, w) e w a cabeça de (v, w).

Representação Geométrica:

Cada vértice → ponto do plano

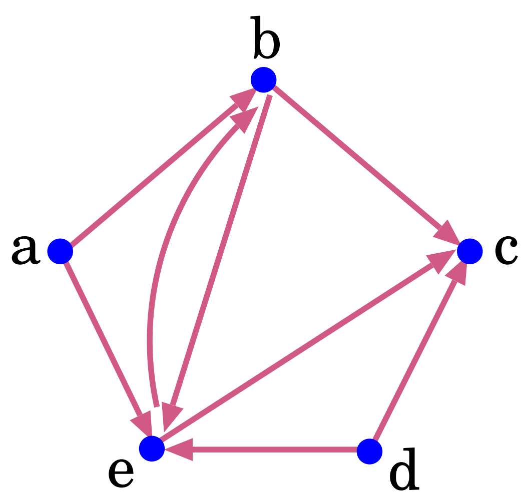
Cada aresta direcionada (arco) (v, w) → linha unindo os pontos correspondentes aos vértices v e w onde agora na linha temos uma seta apontando de v para w (a cabeça de (v, w))

Exemplo 2:

$$D = (V, E)$$

$V = \{ a, b, c, d, e \}$

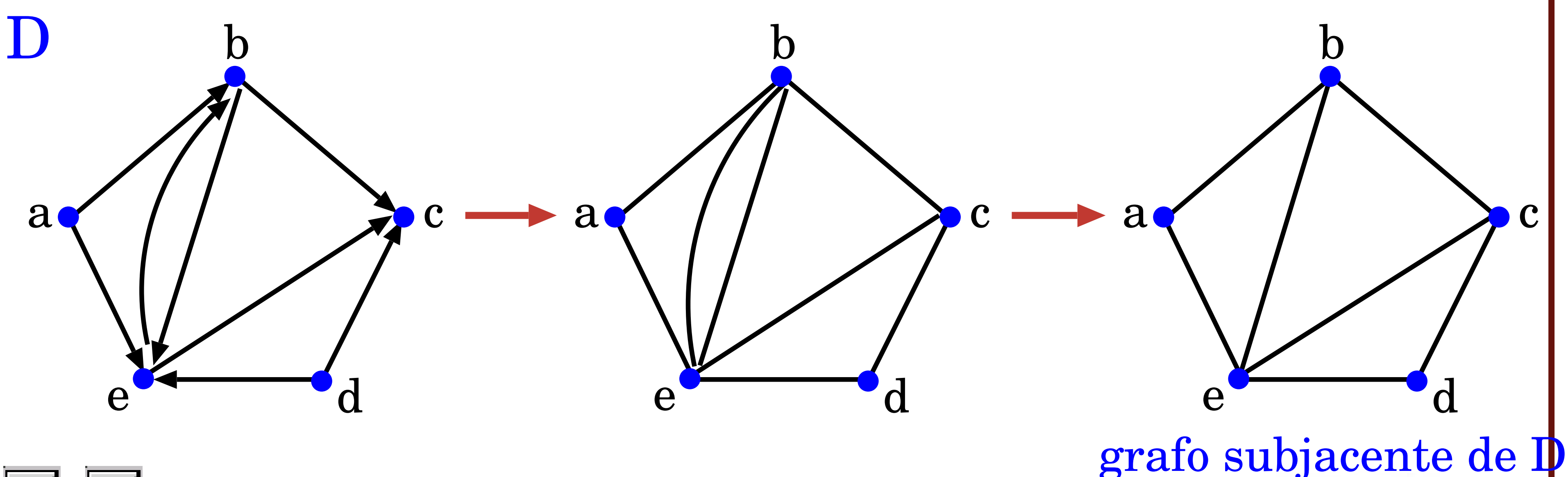
$E = \{ (a, b), (b, c), (a, e), (b, e), (e, b), (e, c), (d, c), (d, e) \}$



Conceitos Básicos e Nomenclatura:

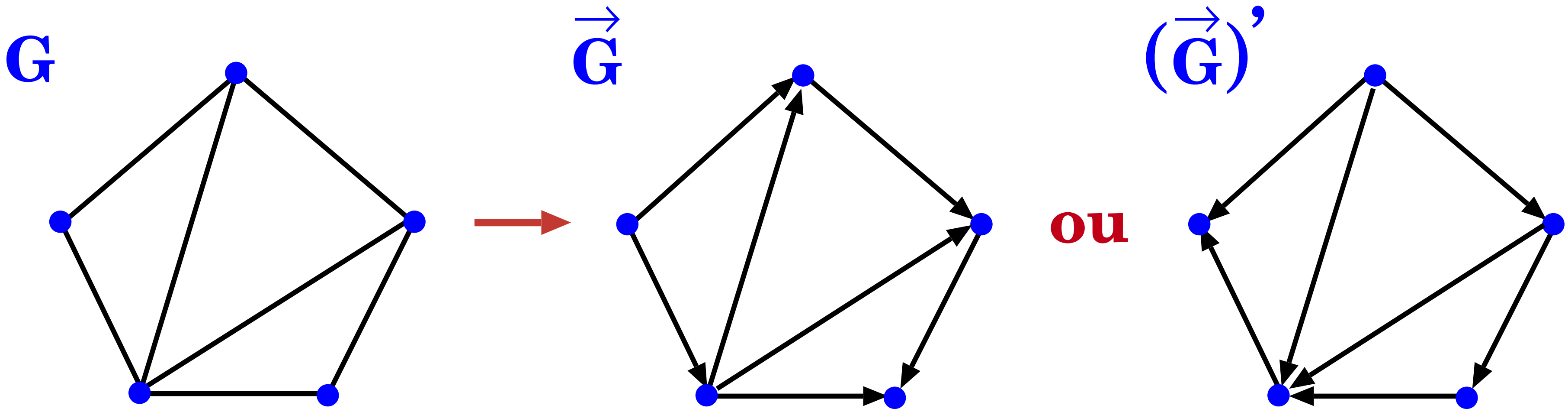
- O grafo não direcionado obtido de D pela remoção das direções das arestas e também pela remoção das arestas paralelas porventura formadas é dito o grafo subjacente de D.

Exemplo 3: Consideremos o grafo D do exemplo 1



Reciprocamente, dado um grafo G, podemos obter um digrafo a partir de G, especificando para cada aresta uma direção. Esse digrafo obtido é dito uma orientação de G e denotado $\overrightarrow{G}$.
(Note que essa orientação não é única)

Exemplo 4:



Seja $D = (V, E)$ um digrafo

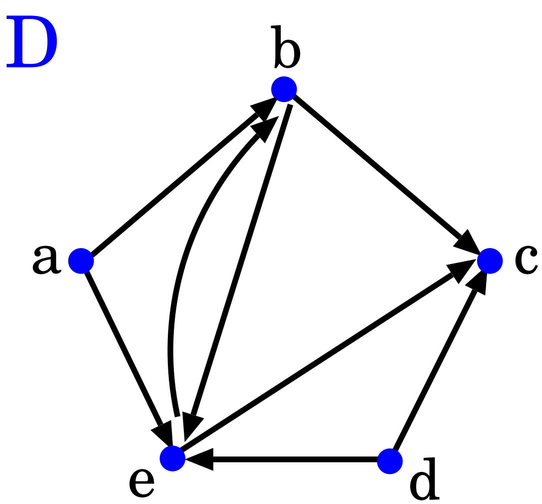
O grau de entrada de $v \in V$ denotado por $d^{-}(v)$ é o número de arestas direcionadas que convergem para v.

O grau de saída de $v \in V$ denotado por $d^{+}(v)$ é o número de arestas direcionadas que divergem de v.

Se $d^{-}(v) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ v é dito fonte de D

Se $d^{+}(v) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ v é dito sumidouro de D

Exemplo 5: Considerando o grafo D do exemplo 1



$d^-(a) = 0$ $d^+(a) = 2 \Rightarrow$ a é fonte

$d^-(b) = 2$ $d^+(b) = 2$

$d^-(c) = 3$ $d^+(c) = 0 \Rightarrow$ c é sumidouro

$d^-(d) = 0$ $d^+(d) = 2 \Rightarrow$ d é fonte

$d^-(e) = 3$ $d^+(e) = 2$

Grande parte dos conceitos básicos e da nomenclatura de Grafos Direcionados é análoga a de Grafos (não direcionados).

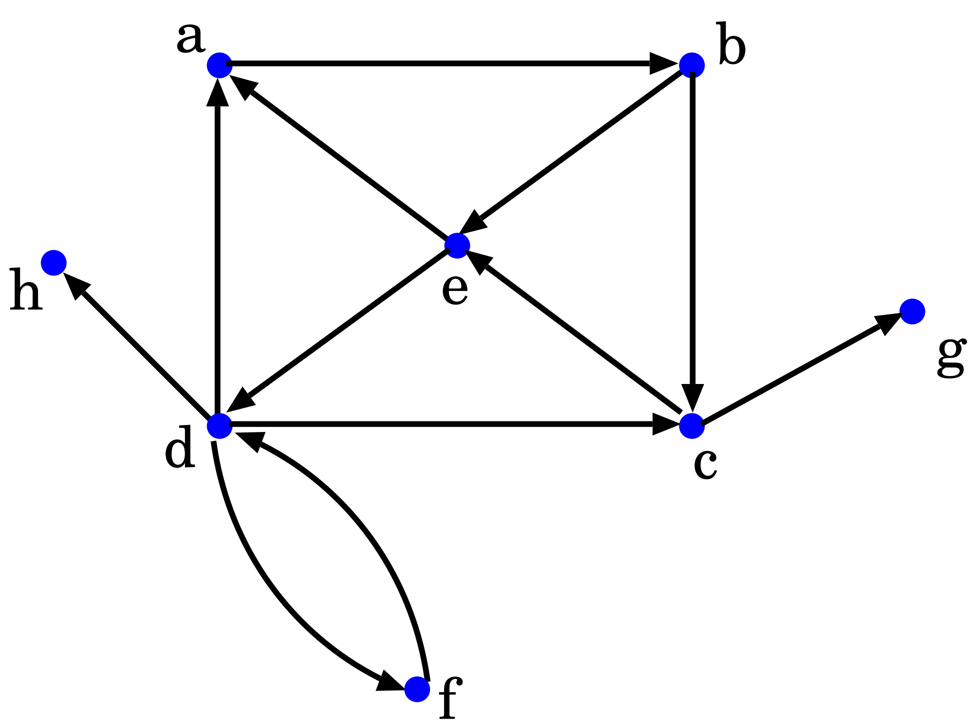
Define-se de forma análoga passeio, trajeto, caminho, ciclo.

Por exemplo:

Um passeio (direcionado) em um digrafo D é uma sequência de vértices $P = v_0, v_1, \ldots, v_k$ de D tal que $(v_i, v_{i+1}) \in E(D)$ para $1 \leq i \leq k-1$

Note que cada aresta do passeio é direcionada e considerando 2 arestas consecutivas $e_{i-1} = (v_{i-1}, v_i)$ e $e_i = (v_i, v_{i+1})$, o vértice v_i é a cabeça de e_{i-1} e a cauda de e_i.

Exemplo 6:



P_1: a b c e d c g

P_1: é um passeio de a a g

P_2: a b e d f d c g

é um trajeto de a a g

P_3: a b c g

é um caminho de a a g

C_1: a b c e d a

é um ciclo

C_2: d f d

é um ciclo

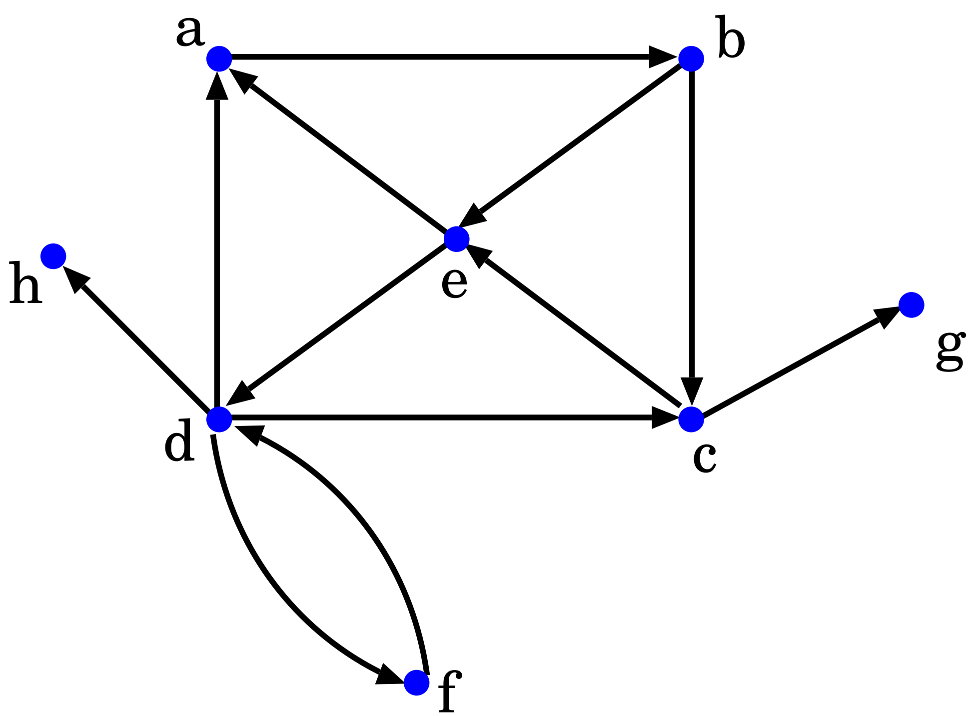
- Observação:

  Em digrafos podemos ter ciclos de comprimento 2.

  C_2: d f d

Dizemos que um vértice v alcança um vértice u se existe um caminho (direcionado) de v para u.
(u é alcançavel de v)

Exemplo 7: No exemplo anterior



a alcança g (a b c g)

a alcança f (a b e d f)

a alcança h (a b e d h)

⋮

(Verifique que a alcança todos os outros vértices de D)

Isso acontece com todos os vértices de D? Verifique.
(por exemplo: g não alcança a)

- Um digrafo D = (V, E) é fortemente conexo quando para todo par de vértices v, w ∈ V existir um caminho em D de v para w e também de w para v.

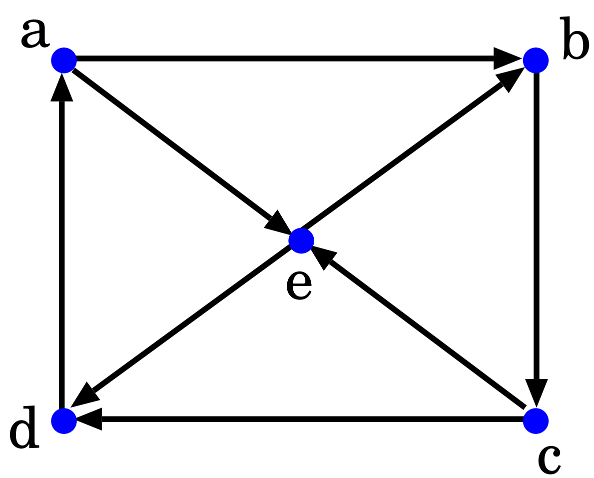
- Se pelo menos um desses caminhos existir para todo v, w ∈ V, então D é unilateralmente conexo.
(isto é, se para cada par v, w de V existir caminho de v para w ou de w para v)

- D é fracamente conexo quando seu grafo subjacente for conexo.

- D é desconexo se seu grafo subjacente é desconexo.

Exemplo 8:

D

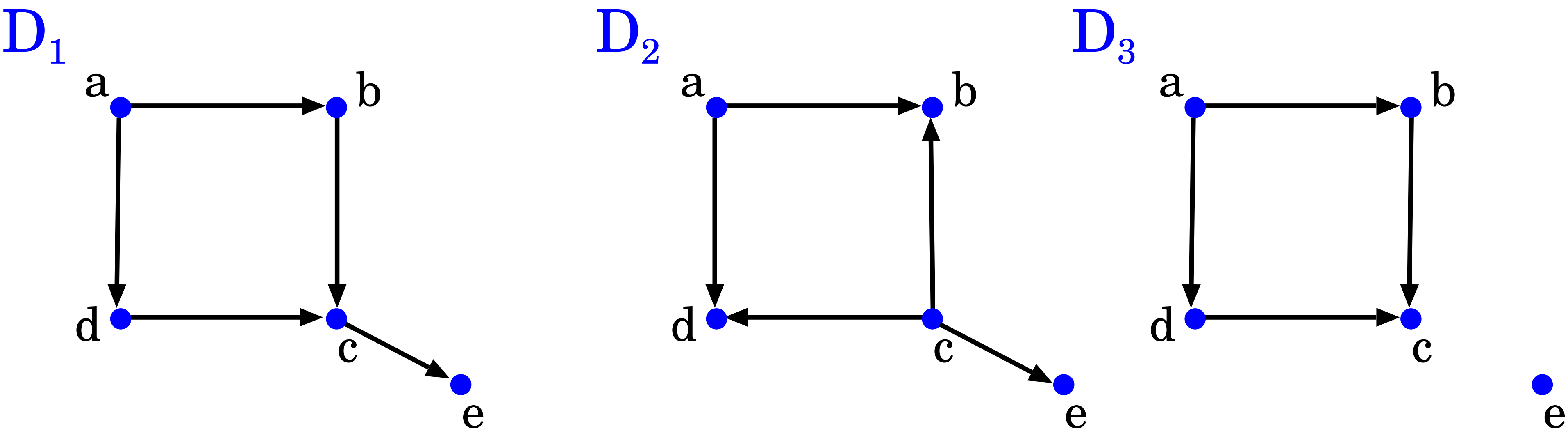


D é fortemente conexo.

(Verifique)

- Observe que se um digrafo é fortemente conexo então ele é unilateralmente conexo e fracamente conexo.

Exemplo 9:



D_1 é unilateralmente conexo

D_1 não é fortemente conexo

D_2 é fracamente conexo

D_2 não é unilateralmente conexo

D_3 é desconexo

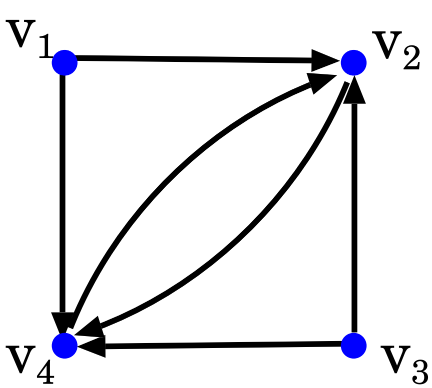
Representação por Matrizes:

Matriz de Adjacência:

Dado um digrafo (simples) $D = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $|V| = n$, a matriz de adjacência $A = (a_{ij})$ é uma matriz $n \times n$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } (v_i, v_j) \in E \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo 10:



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \rightarrow \\ v_2 \rightarrow \\ v_3 \rightarrow \\ v_4 \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{array}$$

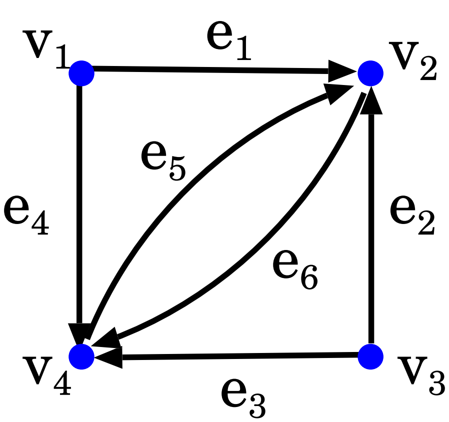
- Observe que a matriz não é simétrica (como no caso de grafos não direcionados).

Matriz de Incidência:

Dado um digrafo (simples) $D = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \dots , v_n\}$, $|V| = n$ e $E = \{e_1, e_2, \dots , e_m\}$, $|E| = m$, a matriz de incidência $B = (b_{ij})$ é uma matriz $n \times m$ tal que

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se a aresta } e_j \text{ é divergente do vértice } v_i \\ -1 \text{ se a aresta } e_j \text{ é convergente ao vértice } v_i \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo 11:



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Resumo:

- Um grafo direcionado ou digrafo D é uma estrutura formada por 2 tipos de objetos: vértices e arestas direcionadas.

  Notação: $D = (V, E)$, V conjunto de vértices,
  E conjunto de arestas direcionadas

- Cada aresta direcionada (v, w) é um par ordenado de 2 vértices distintos de V, ou seja cada aresta direcionada possui uma direção: de v para w.
- O grau de entrada: $d^{-}(v)$ é o número de arestas direcionadas que convergem a v.
- O grau de saída: $d^{+}(v)$ é o número de arestas direcionadas que divergem de v.

cederj

- Um digrafo D é fortemente conexo se para todo par de vértices v e w existe caminho de v para w e de w para v. Caso exista apenas um ou outro é dito unilateralmente conexo. D é fracamente conexo se seu grafo subjacente for conexo.
- Dado um digrafo $D = (V, E)$, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$
  - Matriz de adjacência $A = (a_{ij})$ $n \times n$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } (v_i, v_j) \in E \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

  - Matriz de incidência $B = (b_{ij})$ $n \times m$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se a aresta } e_j \text{ é divergente do vértice } v_i \\ -1 \text{ se a aresta } e_j \text{ é convergente ao vértice } v_i \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$