Aula 24: Grafos Direcionados

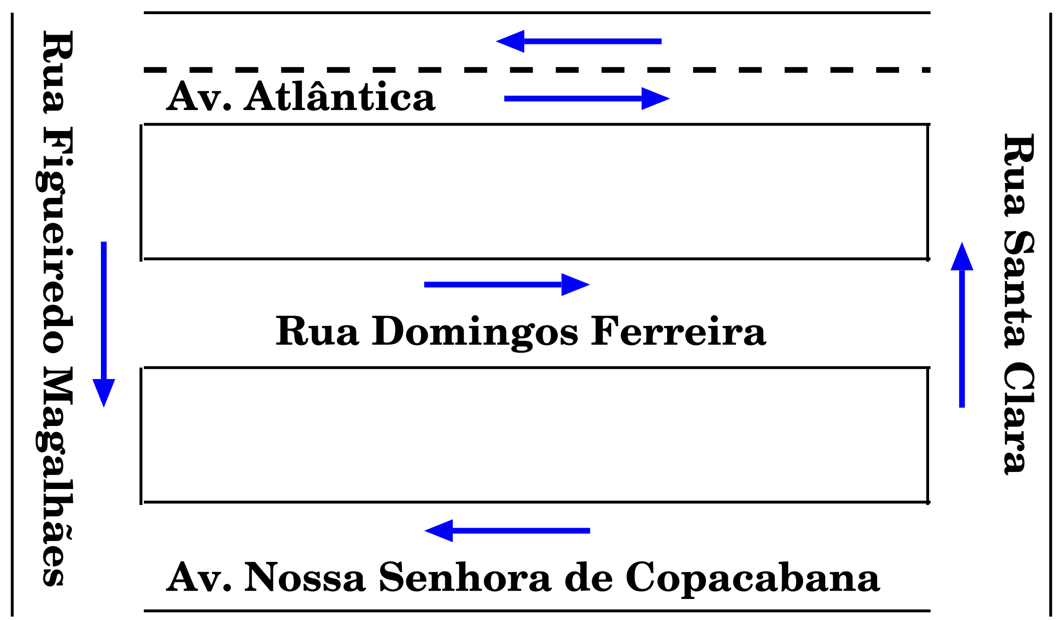
Conteúdo:

- Introdução
- Definição
- Representação Geométrica
- Conceitos Básicos e Nomenclatura
- Representação por Matrizes

Introdução:

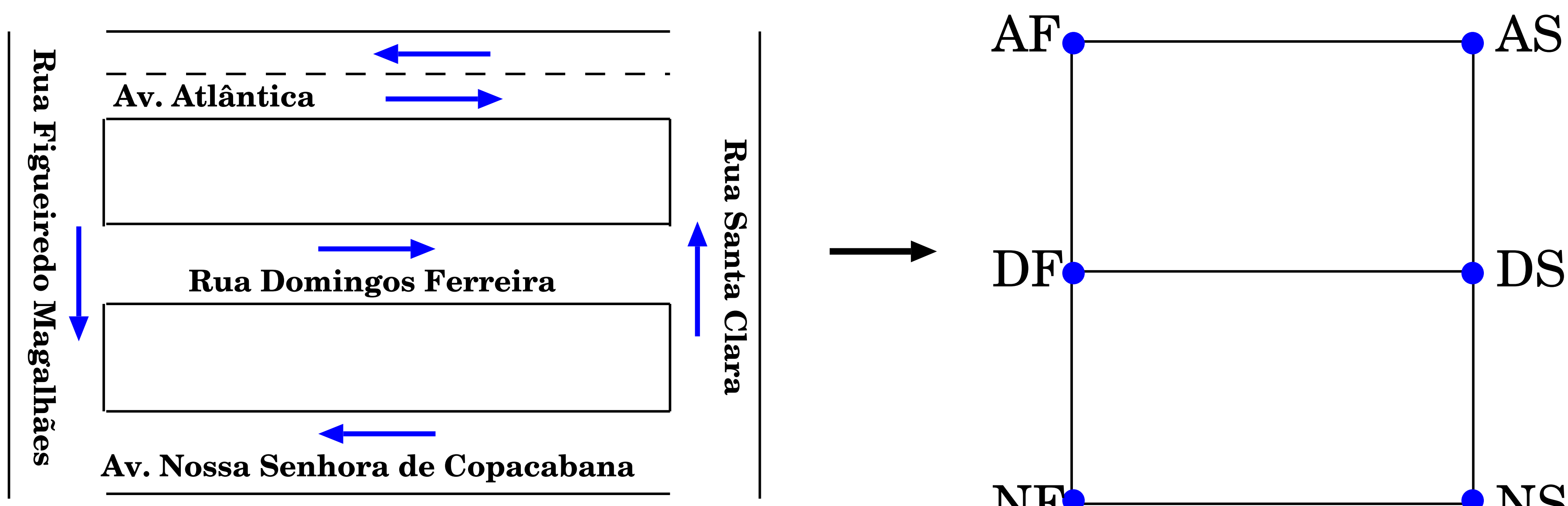
Exemplo 1:

Queremos representar, através de um diagrama, um quarteirão de Copacabana compreendido entre as ruas Figueiredo Magalhães e Santa Clara e limitado pela Av. Atlântica e Av. Nossa Senhora de Copacabana, e nesse diagrama desejamos que estejam contidas as informações sobre a direção (da mão) das ruas desse quarteirão.



Exemplo 1 (continuação):

Vamos construir o seguinte grafo G:
A cada esquina (interseção de ruas) associamos um vértice e a cada rua entre as esquinas uma aresta ligando vértices correspondentes.



Exemplo 1 (continuação):

Mas queremos associar a essa representação a informação sobre direção (fluxo de trânsito) das ruas.

A Av. Atlântica tem 2 pistas com direções opostas ou seja vamos associar duas arestas a ela, as arestas (AF, AS) e (AS, AF) que chamaremos de arestas direcionadas, onde consideramos que a aresta (AF, AS) tem direção de AF para AS, e a aresta (AS, AF) tem direção de AS para AF.

A Rua Figueiredo Magalhães tem mão única no sentido da Av. Atlântica para a Domingos Ferreira e da Domingos Ferreira para a N. S. de Copacabana, ou seja temos as arestas direcionadas correspondentes (AF, DF) e (DF, NF).

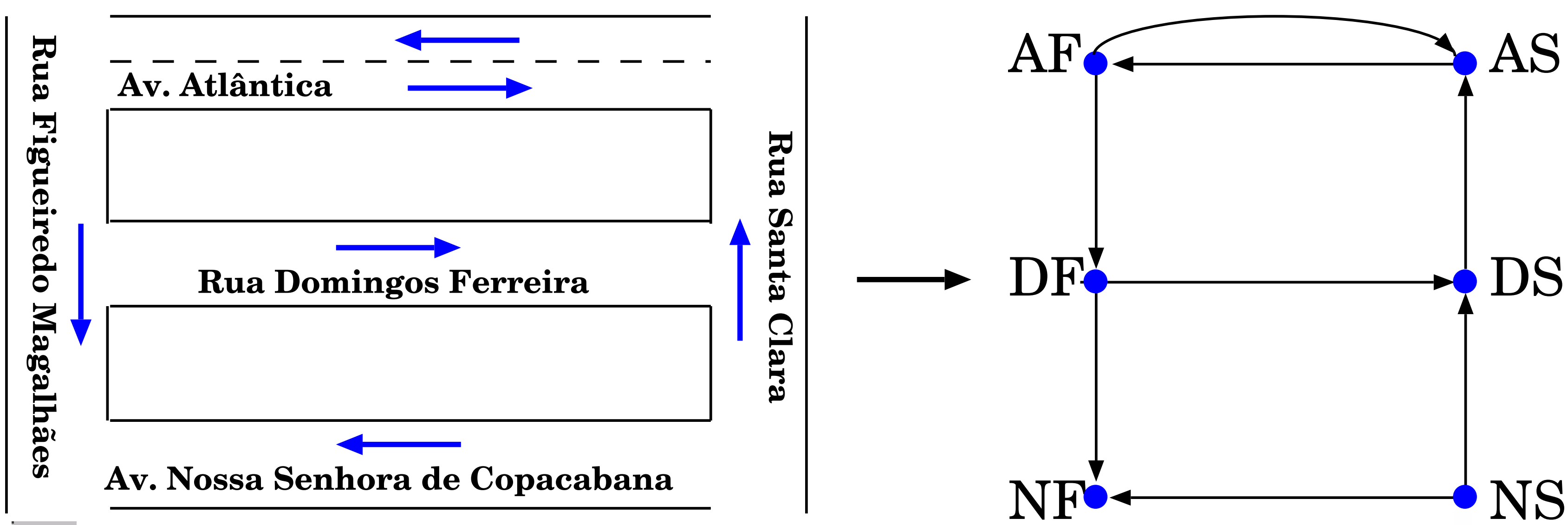
A Rua Santa Clara tem direção contrária a da Figueiredo e temos as arestas direcionadas (DS, AS) e (NS, AS) correspondentes.

Exemplo 1 (continuação):

A Domingos Ferreira tem sentido da Figueiredo para a Santa Clara e corresponde a aresta direcionada (DF, DS).

E finalmente a Av. Nossa Senhora de Copacabana tem direção da Santa Clara para a Figueiredo e corresponde a aresta (NS, NF).

Refazendo nosso diagrama com as arestas direcionadas temos então um grafo onde estamos considerando direções nas suas arestas e que chamaremos de grafo direcionado.

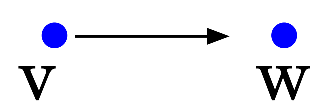


Definição:

- Um grafo direcionado ou digrafo D é um par ordenado (V, E), denotado D = (V, E), onde V é um conjunto finito não vazio de elementos denominados vértices e E é um conjunto de <u>pares ordenados</u> de vértices distintos de V denominados arestas direcionadas ou arcos.

- Portanto num digrafo cada aresta direcionada (v, w) possui uma única direção: de v para w.

- Representa-se geometricamente



Note que $(v, w) \neq (w, v)$

Dado uma aresta direcionada $e = (v, w)$ dizemos que (v, w) é divergente de v e convergente a w.

Além disso v é dito a cauda de (v, w) e w a cabeça de (v, w).

Representação Geométrica:

Cada vértice → ponto do plano

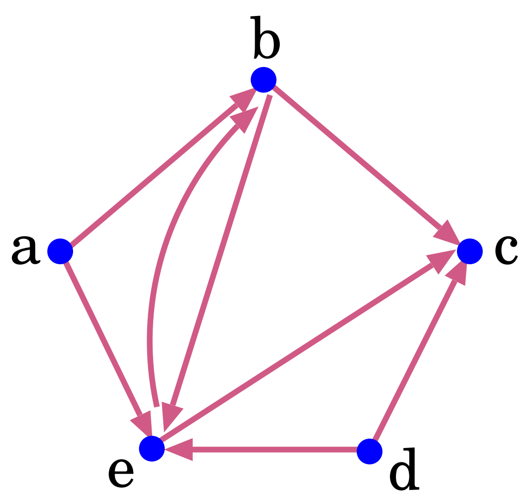
Cada aresta direcionada (arco) (v, w) → linha unindo os pontos correspondentes aos vértices v e w onde agora na linha temos uma seta apontando de v para w (a cabeça de (v, w))

Exemplo 2:

$$D = (V, E)$$

$V = \{ a, b, c, d, e \}$

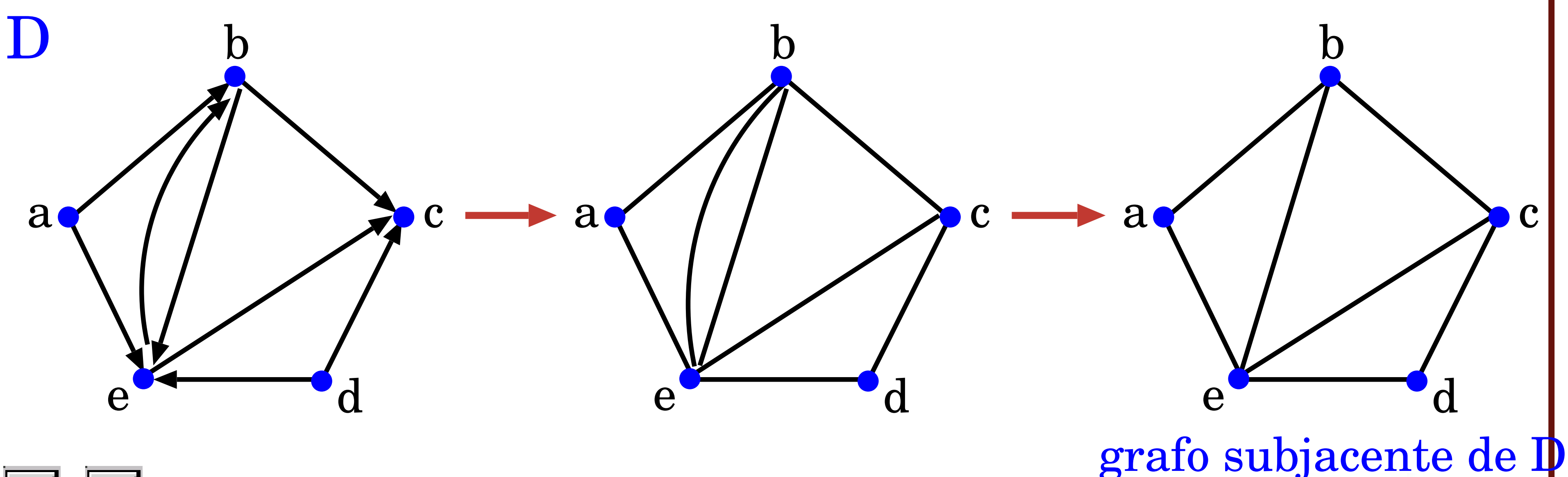
$E = \{ (a, b), (b, c), (a, e), (b, e), (e, b), (e, c), (d, c), (d, e) \}$



Conceitos Básicos e Nomenclatura:

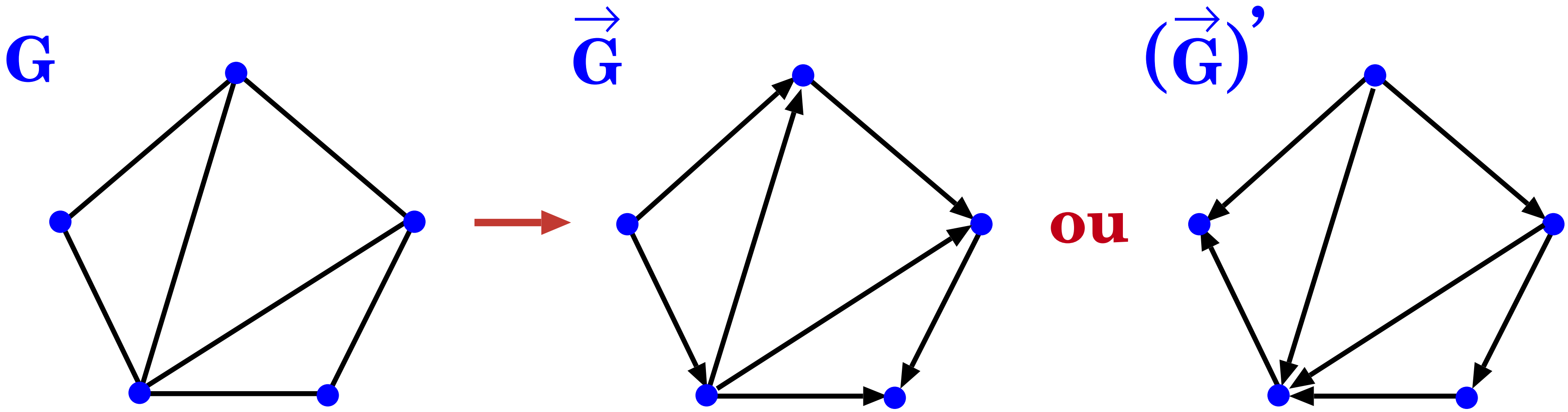
O grafo não direcionado obtido de D pela remoção das direções das arestas e também pela remoção das arestas paralelas porventura formadas é dito o grafo subjacente de D.

Exemplo 3: Consideremos o grafo D do exemplo 1



Reciprocamente, dado um grafo G, podemos obter um digrafo a partir de G, especificando para cada aresta uma direção. Esse digrafo obtido é dito uma orientação de G e denotado $\overrightarrow{G}$.
(Note que essa orientação não é única)

Exemplo 4:



Seja D = (V, E) um digrafo

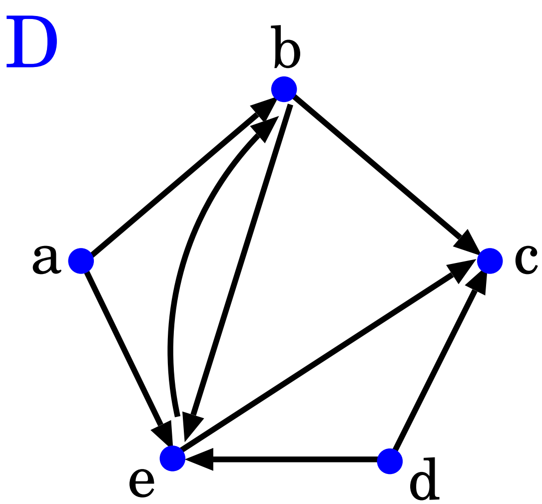
O grau de entrada de $v \in V$ denotado por $d^{-}(v)$ é o número de arestas direcionadas que convergem para v.

O grau de saída de $v \in V$ denotado por $d^{+}(v)$ é o número de arestas direcionadas que divergem de v.

Se $d^{-}(v) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ v é dito fonte de D

Se $d^{+}(v) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ v é dito sumidouro de D

Exemplo 5: Considerando o grafo D do exemplo 1



$d^-(a) = 0$ $d^+(a) = 2$ $\Rightarrow$ a é fonte

$d^-(b) = 2$ $d^+(b) = 2$

$d^-(c) = 3$ $d^+(c) = 0$ $\Rightarrow$ c é sumidouro

$d^-(d) = 0$ $d^+(d) = 2$ $\Rightarrow$ d é fonte

$d^-(e) = 3$ $d^+(e) = 2$

- Grande parte dos conceitos básicos e da nomenclatura de Grafos Direcionados é análoga a de Grafos (não direcionados).

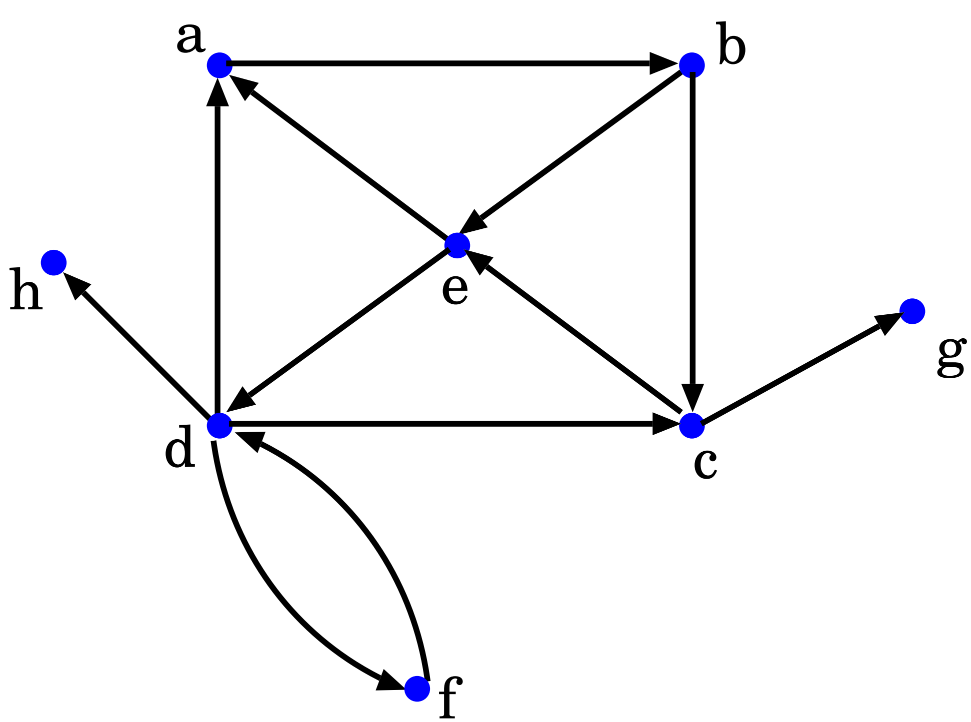
  Define-se de forma análoga passeio, trajeto, caminho, ciclo.

Por exemplo:

Um passeio (direcionado) em um digrafo D é uma sequência de vértices $P = v_0, v_1, \ldots , v_k$ de D tal que $(v_i, v_{i+1}) \in E(D)$ para $1 \leq i \leq k-1$

Note que cada aresta do passeio é direcionada e considerando 2 arestas consecutivas $e_{i-1} = (v_{i-1}, v_i)$ e $e_i = (v_i, v_{i+1})$, o vértice v_i é a cabeça de e_{i-1} e a cauda de e_i.

Exemplo 6:



P_1: a b c e d c g

P_1: é um passeio de a a g

P_2: a b e d f d c g

é um trajeto de a a g

P_3: a b c g

é um caminho de a a g

C_1: a b c e d a

é um ciclo

C_2: d f d

é um ciclo

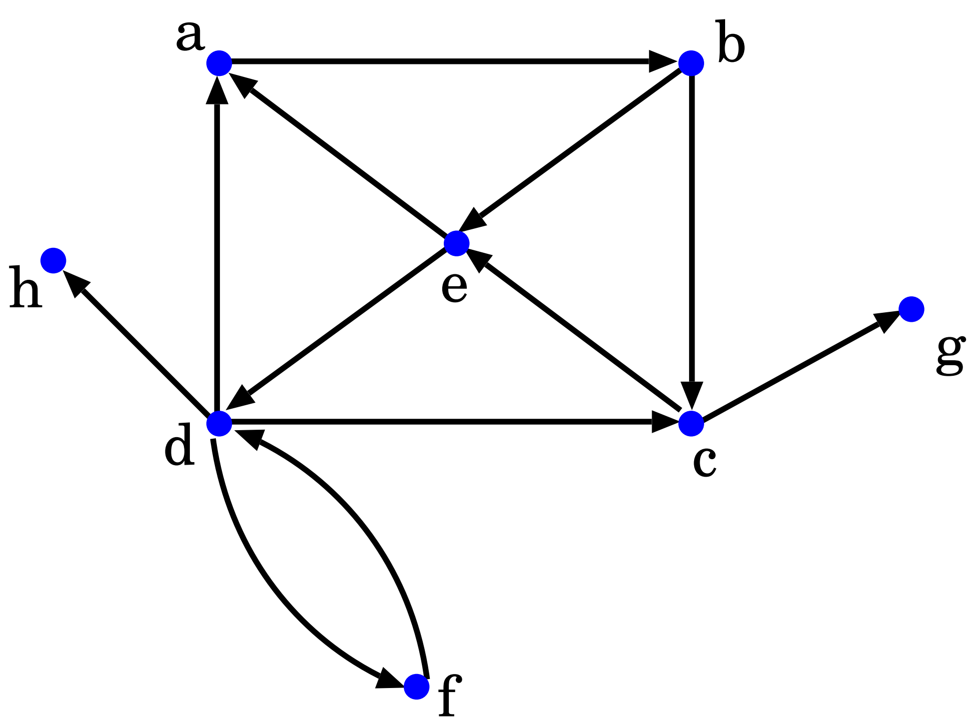
- Observação:

  Em digrafos podemos ter ciclos de comprimento 2.

  C_2: d f d

Dizemos que um vértice v **alcança** um vértice u se existe um caminho (direcionado) de v para u. (u é alcançavel de v)

Exemplo 7: No exemplo anterior



a alcança g (a b c g)

a alcança f (a b e d f)

a alcança h (a b e d h)

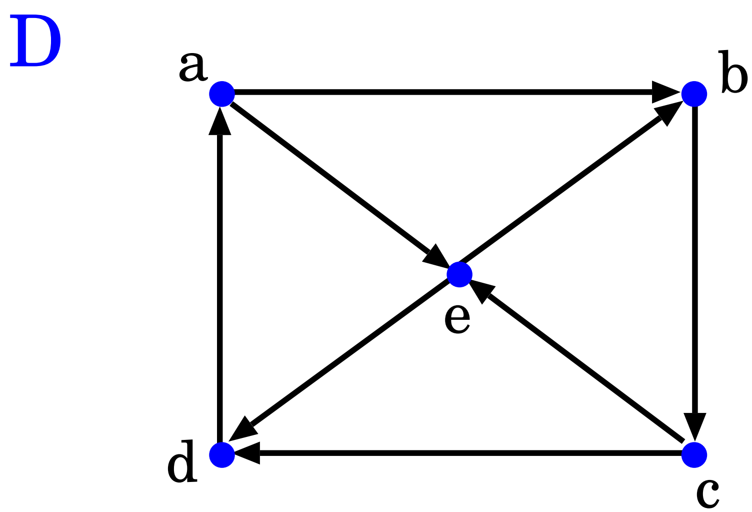
⋮

(Verifique que a alcança todos os outros vértices de D)

Isso acontece com todos os vértices de D? Verifique. (por exemplo: g não alcança a)

- Um digrafo D = (V, E) é fortemente conexo quando para todo par de vértices v, w $\in$ V existir um caminho em D de v para w e também de w para v.
- Se pelo menos um desses caminhos existir para todo v, w $\in$ V, então D é unilateralmente conexo. (isto é, se para cada par v, w de V existir caminho de v para w ou de w para v)
- D é fracamente conexo quando seu grafo subjacente for conexo.
- D é desconexo se seu grafo subjacente é desconexo.

Exemplo 8:



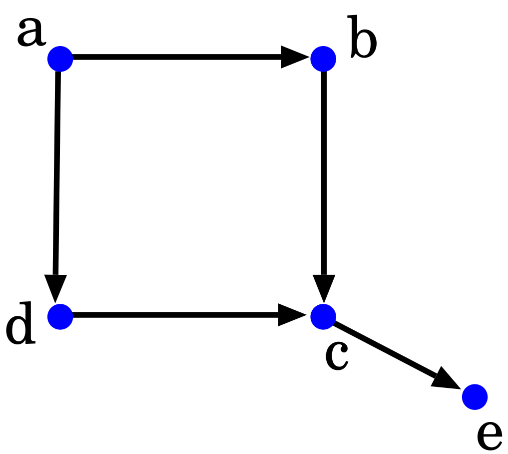
D é fortemente conexo.

(Verifique)

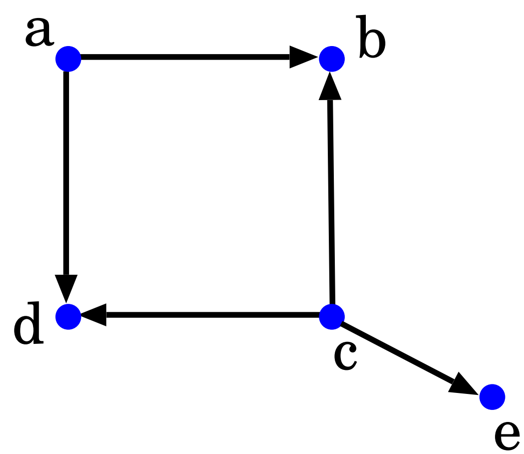
- Observe que se um digrafo é fortemente conexo então ele é unilateralmente conexo e fracamente conexo.

Exemplo 9:

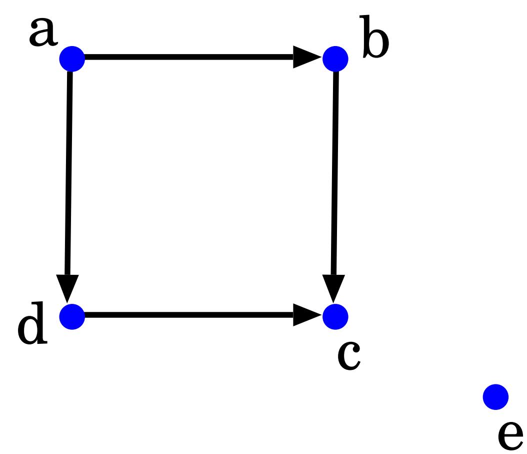
D_1



D_2



D_3



D_1 é unilateralmente conexo

D_1 não é fortemente conexo

D_2 é fracamente conexo

D_2 não é unilateralmente conexo

D_3 é desconexo

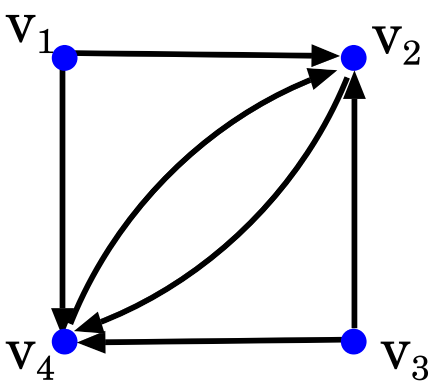
Representação por Matrizes:

➡ Matriz de Adjacência:

Dado um digrafo (simples) $D = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \dots , v_n\}$, $|V| = n$, a matriz de adjacência $A = (a_{ij})$ é uma matriz $n \times n$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } (v_i, v_j) \in E \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo 10:



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \rightarrow \\ v_2 \rightarrow \\ v_3 \rightarrow \\ v_4 \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{array}$$

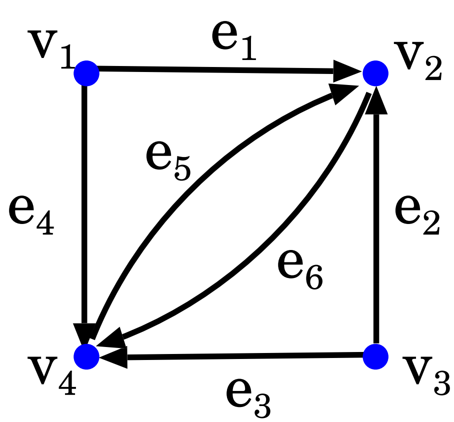
- Observe que a matriz não é simétrica (como no caso de grafos não direcionados).

Matriz de Incidência:

Dado um digrafo (simples) $D = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $|V| = n$ e $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, $|E| = m$, a matriz de incidência $B = (b_{ij})$ é uma matriz $n \times m$ tal que

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a aresta } e_j \text{ é divergente do vértice } v_i \\ -1 & \text{se a aresta } e_j \text{ é convergente ao vértice } v_i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo 11:



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \rightarrow \\ v_2 \rightarrow \\ v_3 \rightarrow \\ v_4 \rightarrow \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Resumo:

- Um grafo direcionado ou digrafo D é uma estrutura formada por 2 tipos de objetos: vértices e arestas direcionadas.

  Notação: $D = (V, E)$, V conjunto de vértices,
  E conjunto de arestas direcionadas

- Cada aresta direcionada (v, w) é um par ordenado de 2 vértices distintos de V, ou seja cada aresta direcionada possui uma direção: de v para w.
- O grau de entrada: $d^{-}(v)$ é o número de arestas direcionadas que convergem a v.
- O grau de saída: $d^{+}(v)$ é o número de arestas direcionadas que divergem de v.

- Um digrafo D é fortemente conexo se para todo par de vértices v e w existe caminho de v para w e de w para v. Caso exista apenas um ou outro é dito unilateralmente conexo. D é fracamente conexo se seu grafo subjacente for conexo.
- Dado um digrafo $D = (V, E)$, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$
  - Matriz de adjacência $A = (a_{ij})$ $n \times n$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } (v_i, v_j) \in E \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

  - Matriz de incidência $B = (b_{ij})$ $n \times m$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se a aresta } e_j \text{ é divergente do vértice } v_i \\ -1 \text{ se a aresta } e_j \text{ é convergente ao vértice } v_i \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$