Gabarito da AP1 - Fundamentos de Algoritmos para Computação

1. (2.0) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira. Se for falsa, justifique e faça a devida modificação de modo a torná-la verdadeira. Caso seja verdadeira, justifique.

   (a) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, 2, -3, 5\}$

   Resposta:

   A afirmativa é verdadeira porque $\emptyset$ é o único elemento do conjunto $\{\emptyset\}$ e é um elemento do conjunto $A = \{\emptyset, 2, -3, 5\}$, usamos o símbolo *está contido* ($\subseteq$) para estudarmos a relação entre conjuntos.

   (b) $(A \cup B) \cap C = (A \cap B) \cup C$

   Resposta: A afirmativa é falsa, pois por exemplo, se considerarmos os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ e $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, temos $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $(A \cup B) \cap C = \{1, 3, 5\}$, $A \cap B = \{3, 4\}$ e $(A \cap B) \cup C = \{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$, concluímos que $(A \cup B) \cap C \neq (A \cap B) \cup C$.

   As afirmações corretas são:

   $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

   OU

   $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

   (c) Se $n(A \cup B) = 15$, $n(A) = 9$, $n(A \cap B) = 2$ então $n(B) = 6$.

   Resposta: A afirmação é falsa, pois pelo princípio de inclusão e exclusão, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, implicando em $n(B) = 8$, para $n(A \cup B) = 15$, $n(A) = 9$, $n(A \cap B) = 2$.

   Portanto, a afirmação correta é:

   Se $n(A \cup B) = 15$, $n(A) = 9$, $n(A \cap B) = 2$ então $n(B) = 8$.

2. (2.0) Mostre usando Indução Matemática:

$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n}$ para todo n inteiro natural.

Prova:

Seja $P(n) : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n}$

Base da indução:

Para $n = 1$, $\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^1}$, logo $P(1)$ é verdadeiro.

Hipótese de Indução:

Suponha verdadeiro para $n = k$, isto é, $P(k)$ é verdadeiro:

$$P(k) : \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^k}$$

Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeiro então $P(k+1)$ é verdadeiro, isto é:

Temos que provar que: $P(k+1) : \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$ é verdadeiro.

Desenvolvendo para $n = k+1$ e usando a hipótese de indução, temos que:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{2^i} & = \\
= \ & \underbrace{\left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right)}_{(Por\ hipótese\ indutiva)} + \frac{1}{2^{k+1}} & = \\
= \ & 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} & = \\
= \ & 1 + \frac{(-2+1)}{2^{k+1}} & = \\
= \ & 1 + \frac{-1}{2^{k+1}} & = \\
= \ & 1 - \frac{1}{2^{k+1}} &
\end{aligned}$$

Logo, pelo princípio da indução, a igualdade é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. (1.5) Quantos números com cinco algarismos podemos construir com os números ímpares $1, 3, 5, 7, 9$, desde que estejam sempre juntos os algarismos 5 e 9?

   Resposta: O número de maneiras de ordenar 5 algarismos de modo que 2 números, 5 e 9, fiquem juntas é $2.P_4$, pois para formar um número com 5 algarismos, devemos inicialmente decidir em que ordem se colocarão 5 e 9 (59 ou 95), e, em seguida, formar o número com 4 alagarismos. Portanto a resposta é $2.4! = 2.24 = 48$.

4. (1.5) Uma embarcação deve ser tripulada por 8 homens, 2 dos quais só remam do lado direito e 1 apenas do lado esquerdo. De quantos modos podemos formar uma tripulação, se de cada lado devemos ter 4 tripulantes?

   Resposta: Como temos que 2 homens só remam do lado direito então faltam 2 lugares para a ocupação dos 4 tripulantes do lado direito, o mesmo ocorre com o lado esquerdo, sendo que faltam 3 tripulantes. Daí, ficam faltando 5 tripulantes, logo para o lado esquerdo devemos escolher 3 tripulantes dos 5 restantes, o que pode ser feito de C_5^3. Agora, com a escolha desses 3 tripulantes, automaticamente definimos os 2 restantes para o lado direito. Portanto, temos $C_5^3 = 10$.

5. (1.5) Considerando o sistema decimal de numeração, quantos números naturais com 4 algarismos (repetidos ou não) existem?

   Resposta: Pelo sistema decimal de numeração podemos usar os números $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, logo o primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos (o dígito zero não entra, pois não formaria um número de 4 dígitos). Observemos que para os algarismos restantes temos de escolher 3 números ordenados dentre 10, que podem ser repetidos o que corresponde a arranjos com repetição, $AR_{10}^3 = 10^3$. Daí, pelo princípio multiplicativo, temos que a resposta é $9.10^3 = 9000$.

6. (1.5) Quantas são as soluções inteiras, não negativas da inequação $x + y + z \leq 10$, tal que $y > 1$? Justifique.

   Resposta: Como $y > 1$, isto é, $y \geq 2$, então temos de encontrar quantas são as soluções inteiras não-negativas da inequação $x + y + z \leq 10$ com a restrição: $y \geq 2$.

   Definindo por $y' = y - 2$, e substituindo y por $y' + 2$, a equação $x + y + z \leq 10$ resulta equivalentemente a: $x + y' + 2 + z \leq 10$, com $x, y', z \geq 0$, ou seja, $x + y' + z \leq 8$, com $x, y', z \geq 0$.

   Em cada solução inteira não-negativa de $x + y' + z \leq 8$ defina-se a folga da solução por:

$$f = 8 - (x + y' + z)$$

   É claro que existe uma correspondência biunívoca entre as soluções inteiras não-negativas de $x + y' + z \leq 8$ e as soluções inteiras não-negativas de $x + y' + z + f = 8$.

   Logo, o número de soluções inteiras não-negativas da inequação $x + y' + z \leq 8$ é igual ao número de soluções inteiras não-negativas de $x + y' + z + f = 8$ que é $CR_4^8 = C_{11}^8 = 165$.