Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP2 - Primeiro Semestre de 2019

Questões:

1. (1.5) Aplicando a fórmula do Binômio de Newton, calcule o coeficiente de x^{17} no desenvolvimento de

$$(3x^2 - \frac{2}{x^3})^{101}$$

Justifique a resposta.

Resposta: Como $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b^k a^{n-k}$ temos que o termo geral desta soma corresponde a

$$T_{k+1} = C_n^k a^k b^{n-k}$$

O objetivo da questão é determinar o coeficiente de x^{17}, portanto devemos encontrar o termo que contém tal coeficiente. Para isso, precisamos determinar k.

Neste caso temos $n = 101$, $a = 3x^2$ e $b = -\frac{2}{x^3}$. Assim, resulta:

$$\begin{array}{rcl} T_{k+1} & = & C_{101}^k (3x^2)^k \, (-\frac{2}{x^3})^{101-k} \\ & = & C_{101}^k \; 3^k \; x^{2k} \; (-1)^{101-k} \; 2^{101-k} \; x^{-3(101-k)} \\ & = & C_{101}^k \; 3^k \; x^{2k} \; (-1)^{101-k} \; 2^{101-k} \; x^{-303+3k} \\ & = & C_{101}^k \; 3^k \; (-1)^{101-k} \; 2^{101-k} \; x^{2k} \; x^{-303+3k} \\ & = & C_{101}^k \; 3^k \; (-1)^{101-k} \; 2^{101-k} \; x^{2k-303+3k} \\ & = & C_{101}^k \; 3^k \; (-1)^{101-k} \; 2^{101-k} \; x^{5k-303} \end{array}$$

Como queremos encontrar o coeficiente de x^{17}, deve ser $5k - 303 = 17$. Então $k = \frac{17+303}{5} = \frac{320}{5} = 64$. Logo o coeficiente de x^{17} é dado por:

$$C_{101}^{64} \; 3^{64} \; (-1)^{101-64} \; 2^{101-64} = C_{101}^{64} \; 3^{64} \; (-1)^{37} \; 2^{37} = -\frac{101!}{64!37!} \; 3^{64} \; 2^{37}$$

2. (1.5) Pede-se:

   (a) Escrever o enunciado do Teorema das Linhas.

   Resposta: Pelo teorema das linhas, temos que:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

   (b) Calcular a seguinte soma usando o Teorema das Linhas:

$$S = C_{15}^1 + C_{15}^2 + C_{15}^3 + \ldots + C_{15}^{14}$$

   Tomando $n = 15$ temos:

$$\begin{array}{rcl} C_{15}^0 + C_{15}^1 + C_{15}^2 + C_{15}^3 + \ldots + C_{15}^{14} + C_{15}^{15} & = & 2^{15} \\ C_{15}^1 + C_{15}^2 + \ldots + C_{15}^{14} & = & 2^{15} - C_{15}^0 - C_{15}^{15} \\ S & = & 2^{15} - \frac{15!}{0!15!} - \frac{15!}{15!0!} \\ S & = & 2^{15} - 1 - 1 \\ S & = & 2^{15} - 2 \end{array}$$

3. (1.5) Encontre a fórmula fechada da relação de recorrência:
   $a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$ para todo número natural n, $n \geq 2$
   $a_1 = 3$
   Justifique.

   Resposta: Vamos utilizar o método de Substituições Regressivas.

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & a_{n-1} + 2(n-1) \\ & = & [a_{n-2} + 2(n-2)] + 2(n-1) \\ & = & [a_{n-3} + 2(n-3)] + 2(n-2) + 2(n-1) \\ & = & a_{n-3} + 2\,[(n-3) + (n-2) + (n-1)] \\ \vdots & & \vdots \\ & = & a_{n-i} + 2\,[(n-i) + (n-i+1) + \ldots + (n-1)] \end{array}$$

Tomando $n - i = 1$ temos $i = n - 1$. Substituindo, concluímost que:

$$a_n = a_1 + 2 \underbrace{[1 + 2 + \ldots + (n-1)]}_{\text{Soma da PA de } n-1 \text{ termos}}$$

$$a_n = 3 + 2\left[\frac{(1+n-1)(n-1)}{2}\right]$$

$$a_n = 3 + 2\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]$$

$$a_n = 3 + n(n-1)$$

$$a_n = n^2 - n + 3$$

Logo, a fórmula fechada da relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 2(n - 1)$, n natural, $n \geq 1$, $a_1 = 3$ é dada por $a_n = n^2 - n + 3$.

4. (0.8) Existe algum grafo (simples) com a sequência de graus de vértices $(2, 2, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 7, 7)$? Justifique.

   Resposta: Não. Pelo Teorema do Aperto de Mãos, temos:

   $$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \times |E(G)|$$

   Como G possui a sequência de graus de vértices $(2, 2, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 7, 7)$, temos:

   $$2 \times |E(G)| = \sum_{v \in V} d(v) = 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 5 + 5 + 5 + 5 + 7 + 7 = 47$$

   Logo, não existe nenhum grafo com a sequência de vértices $(2, 2, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 7, 7)$, pois a soma dos graus tem que ser par, por colorário..

5. (3.2) As seguintes perguntas devem ser respondidas considerando o grafo $G = (V, E)$, tal que:
   $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ e
   $E = \{(a, b), (b, c), (c, d), (a, d), (a, e), (e, f), (f, g), (g, h), (b, f), (c, g), (d, h), (e, h)\}$.

(a) Desenhe uma representação plana de G.

Resposta:

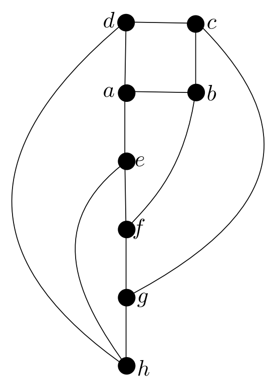

Figura 1: Grafo G.

(b) G é bipartido? Justifique. Caso seja, dê a sua bipartição.

Resposta: Sim, pois todos os seus ciclos são C_4's, ou seja, são ciclos com 4 vértices. Assim, este grafo não possui ciclo ímpar e consequentemente é bipartido (caracterização dos grafos bipartidos). Portanto, podemos apresentar a seguinte bipartição (V_1, V_2) de seu conjunto de vértices V:
$V_1 = \{a, c, f, h\}$ e $V_2 = \{b, d, e, g\}$.
Segue abaixo a representação gráfica do grafo bipartido:

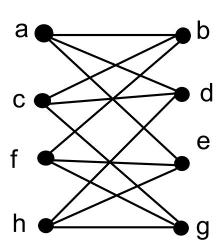

Figura 2: Grafo G.

(c) G é euleriano? Justifique.

Resposta: Não.
Temos a seguinte caracterização para grafos eulerianos:

Um grafo G é euleriano $\Leftrightarrow$ todos os seus vértices têm grau par.

Nesta questão, G é um grafo 3-regular e, portanto, todos os seus vértices têm grau ímpar, o que contradiz a caracterização de grafo euleriano.

(d) G é hamiltoniano? Justifique.

Resposta: Sim, pois podemos exibir o seguinte ciclo hamiltoniano: $a, b, c, d, h, g, f, e, a$.

6. (1.5) Seja G um grafo planar conexo **planar**, 3-regular, com 27 arestas. Determine o número de vértices e o número de faces de G. Justifique.

Resposta: Como $d_G(v) = 3$, $\forall v \in V(G)$, pois G é 3-regular e $m = 27$, temos que $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2m \Rightarrow 3 \times n = 2 \times 27 \Rightarrow n = \frac{54}{3} \Rightarrow \boxed{\text{n=18}}$.

Seja f o número de faces de G. Como G é conexo, planar e regular de grau 3, a fórmula de Euler nos diz que $n - m + f = 2$. Como $n = 18$ e $m = 27$, então $f = m - n + 2 \Rightarrow f = 27 - 18 + 2 \Rightarrow \boxed{\text{f = 11}}$.