Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
AD2 - Segundo Semestre de 2016

Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (1.5) Usando a relação de Stifel mostre que:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^p C_n^p = (-1)^p C_{n-1}^p$$

Justifique.

Resposta: Pela Relação de Stifel sabemos que $C_n^i = C_{n-1}^{i-1} + C_{n-1}^i$, para $1 \leq i \leq n$. Substituindo na expressão, temos:

$$\begin{aligned}
& C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^{p-1} C_n^{p-1} + (-1)^p C_n^p \quad = \\
& C_n^0 - (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) + (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2) - (C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3) + \cdots \\
& + \cdots + ((-1)^{p-1} C_{n-1}^{p-2} + (-1)^{p-1} C_{n-1}^{p-1}) + ((-1)^p C_{n-1}^{p-1} + (-1)^p C_{n-1}^p) \quad = \\
& C_n^0 - C_{n-1}^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 - C_{n-1}^2 - C_{n-1}^3 + \cdots \\
& + \cdots + (-1)^{p-1} C_{n-1}^{p-2} + (-1)^{p-1} C_{n-1}^{p-1} + (-1)^p C_{n-1}^{p-1} + (-1)^p C_{n-1}^p.
\end{aligned}$$

Note também que $C_n^0 = C_{n-1}^0 = 1$, e $-C_{n-1}^i + C_{n-1}^i = 0$, soma esta que aparece na expressão para $i = 1, 2, \cdots, p-1$. Assim:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^{p-1} C_n^{p-1} + (-1)^p C_n^p = (-1)^p C_{n-1}^p.$$

2. (1.5) Para que valores naturais de n o desenvolvimento do binômio de Newton $(\sqrt{5}x^3 - \frac{2}{x^4})^n$ possui termo independente? Justifique.

   Resposta: Pelo Teorema Binomial, sabemos que: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$. Assim, $a = \sqrt{5}x^3$ e $b = \frac{-2}{x^4}$.

   Desenvolvendo a expressão, um termo genérico é:

$$\begin{aligned}
T_{k+1} &= C_n^k a^{n-k} b^k \\
&= C_n^k (\sqrt{5}x^3)^{n-k} (\tfrac{-2}{x^4})^k \\
&= C_n^k 5^{\frac{n-k}{2}} x^{3(n-k)} \frac{(-2)^k}{x^{4k}} \\
&= C_n^k 5^{\frac{n-k}{2}} (-2)^k \frac{x^{3n-3k}}{x^{4k}} \\
&= C_n^k 5^{\frac{n-k}{2}} (-2)^k x^{3n-7k}.
\end{aligned}$$

   Para a existência do termo independente, o expoente de x deve ser zero, ou seja, $3n - 7k = 0$. Como k é natural, $k = \frac{3n}{7}$, então n é múltiplo de 7.

3. (1.5) Determine a fórmula fechada da seguinte relação de recorrência com as condições iniciais dadas:

$$a_n = a_{n-1} + 3n - 2, \quad a_0 = -2, \quad \text{para } n \geq 1$$

   Justifique.

   Resposta: Resolvendo a relação de recorrência pelo método de substituição:

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + 3n - 2 \\
&= a_{n-2} + 3(n-1) + 3n - 2 - 2 \\
&= a_{n-3} + 3(n-2) + 3(n-1) + 3n - 3.2 \\
&= \cdots \\
&= a_{n-k} + 3\sum_{i=0}^{k-1}(n-i) - 2k
\end{aligned}$$

   Logo $a_n = a_{n-k} + 3\sum_{i=0}^{k-1}(n-i) - 2k$. Tomando $a_{n-k} = a_0$, temos $n - k = 0$, então $k = n$. Substituindo em a_n:

   $a_n = a_0 + 3\sum_{i=0}^{n-1}(n-i) - 2n = -2 - 2n + 3\sum_{i=1}^{n} i$.

   Como $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (Soma de P.A.). Portanto,

$$
\begin{aligned}
a_n &= 3\frac{n(n+1)}{2} - 2(n+1) \\
&= (n+1)(\frac{3n}{2} - 2)
\end{aligned}
$$

Assim, $a_n = \frac{(n+1)(3n-4)}{2}$.

4. (4.0) Responda as seguintes perguntas,

(a) Quantos vértices e quantas arestas tem um grafo que possui a sequência de graus de vértices $\{1, 1, 2, 3, 3, 4, 4\}$? Justifique.

Resposta: Seja V o conjunto dos vértices, temos que $|V| = 7$, já que cada elemento da sequência de graus é um vértice do grafo. Sabemos também que a soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas do grafo, seja E o conjunto das arestas, assim $1 + 1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 = 18 = 2|E|$. Com isso, $|E| = 9$.

(b) Se $r = s$, o grafo bipartido completo $K_{r,s}$ é hamiltoniano? Justifique.

Reposta: Verdadeiro. Sejam $R = \{r_1, r_2, \cdots, r_r\}$ e $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_s\}$ tais que $r, s > 1$ as partes da bipartição, e $|R| = r$ e $|S| = s$. Como $r = s$, então as duas partes possuem o mesmo número de vértices. Como um grafo é hamiltoniano se existe um ciclo que inclui cada um de seus vértices, e no grafo $K_{r,s}$ cada vértice de R é vizinho a todos os vértices de S, tomemos o seguinte ciclo: $r_1, s_1, r_2, s_2, \cdots, r_r, s_r, r_1$. Como cada vértice do grafo está incluido no ciclo, temos que este grafo é hamiltoniano. Para o caso degenerado em que $r = s = 1$, temos que o grafo bipartido $K_{1,1}$ não possui um ciclo, logo não é hamiltoniano.

(c) Para que valores de n, o grafo completo K_n é euleriano? Justifique.

Resposta: Um grafo é euleriano se cada vértice possui grau par. Um grafo completo com n vértices, cada vértice possui grau $n-1$. Portanto, se n é ímpar então K_n é euleriano, dado que $n-1$ é par.

(d) Se G é um grafo planar 3-regular, e tem 12 vértices, quantas faces G possui? Justifique.

Reposta: Como G é planar, sabemos pela fórmula de Euler que $|F| + |V| - |E| = 2$, onde $|F|$ é o número de faces, $|V|$ o número de vértices e $|E|$ o número de arestas de G. Um grafo é 3-regular se cada vértice possui grau 3. Já que a soma dos graus é o dobro do número de aretas, e há 12 vértices no grafo, temos que: $|E| = \frac{3.12}{2} = 18$. Com isso: $|F| = -|V| + |E| + 2 = -12 + 18 + 2 = 8$.

5. (1.5) Mostre que se F é uma floresta, então o seu número de arestas é igual ao seu número de vértices menos o seu número de componentes conexos.

   Resposta: Seja $F = (V, E)$ uma floresta tal que $|V(F)| = n$, $|E(F)| = m$ e $k = \textit{número de componentes conexas}$. Como F é uma floresta, cada componente conexa é uma árvore. Sejam $T_1,\ T_2,\ \cdots,\ T_k$ os componentes conexos (árvores) de F, $V(F) = \sum_{i=1}^{k} V(T_i)$, $E(F) = \sum_{i=1}^{k} E(T_i)$. Sabemos que $|E(T_i)| = |V(T_i)| - 1$ (Teorema).

   Logo,

$$\begin{aligned} |E(F)| &= |\textstyle\sum_{i=1}^{k} E(T_i)| = \sum_{i=1}^{k} |E(T_i)| = \sum_{i=1}^{k} |V(T_i) - 1| \\ &= |V(T_1)| + |V(T_2)| + \cdots + |V(T_k)| - \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{k} \\ &= |V(F)| - k \\ &= n - k \end{aligned}$$

   Outra resposta: Sejam $C_1, C_2, \cdots, C_c$ as componentes conexas da floresta com n vértices e m arestas. Mostraremos por Indução no número de componentes conexas da floresta, para $c \geq 1$ e $c \in \mathbb{N}$.

   BASE: Seja $c = 1$. Ou seja, há uma única componente conexa. Neste caso a floresta é uma árvore, donde sabemos que $m = n - 1$.

   HIPÓTESE: Seja $c = k$, para algum $k > 1$ e $k \in \mathbb{N}$. Suponha que em toda floresta com k componentes conexas, $m = n - k$.

   PASSO: Queremos mostrar que qualquer floresta com $c = k + 1$, o número de arestas é igual ao número de vértices menos $k + 1$. Tomemos uma floresta F com $k + 1$ componentes conexas, removamos uma componente conexa, seja C_{k+1} esta componente removida. Seja F' a floresta resultante (com k componentes conexas). Por hipótese, F' possui $n_1 + n_2 + \cdots + n_k - k$ arestas, tal que n_i é um número de vértices na componente C_i. Como a componente removida C_{k+1} é uma árvore, então o número de arestas é $n_{k+1} - 1$. Vamos recompor C_{k+1} em F', temos que a floresta F possui $n_1 + n_2 + \cdots + n_k + n_{k+1} = n$ vértices, e

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k - k + n_{k+1} - 1 = n - (k+1) \text{ arestas.}$$