Aula 10 : Permutações com Repetição

Conteúdo:

- Introdução
- Permutação com repetição
- Número de permutações com repetição

Introdução:

Exemplo 1:

Comprei 5 lapiseiras, 2 brancas, 1 azul, 1 preta e 1 verde, para dar de presente a meus amigos João, Rita, Luiza, Gabriel e Felipe. De quantas maneiras diferentes eu posso distribuí-las?

- Ilustração:

uma possibilidade

João Rita Luiza Gabriel Felipe

- Observações:
  - A troca de lapiseiras entre João e Luiza <u>modifica</u> a distribuição.
  - A troca de lapiseiras entre João e Rita <u>não</u> modifica a distribuição.

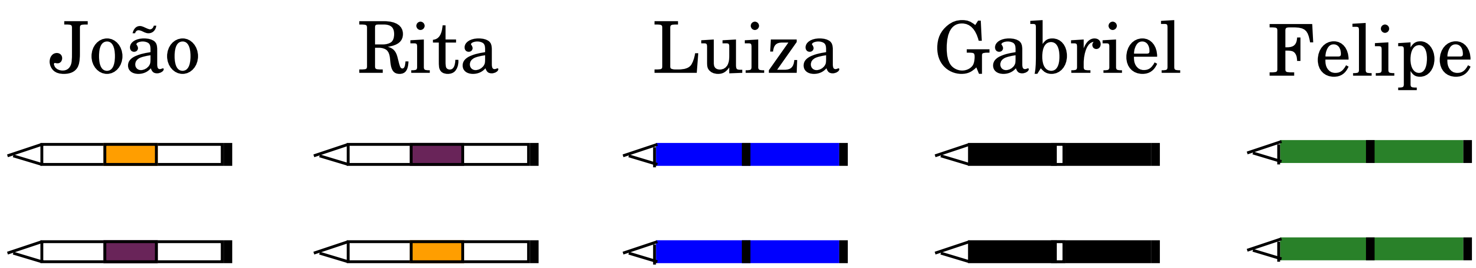
Exemplo 1 (continuação):

Resolução:

Raciocínio (baseado em permutações simples)

Etapa 1: Calculamos o número de distribuições considerando que marcamos cada lapiseira branca para diferenciá-las.

Ilustração:

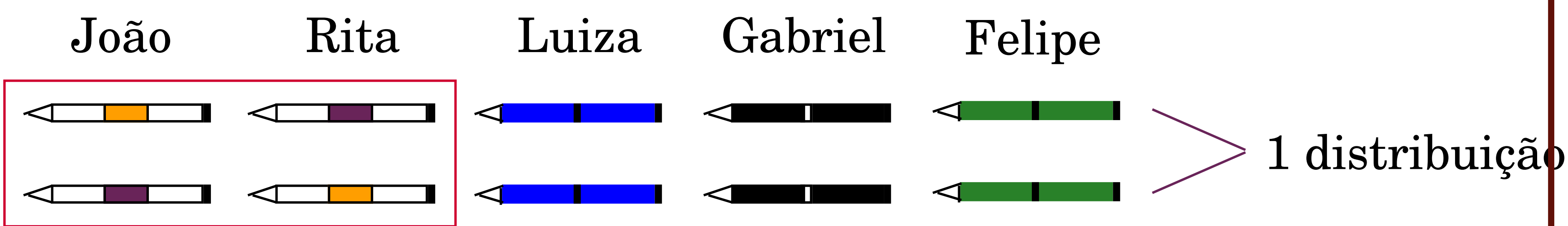


Número de distribuições marcadas: $P_5 = 5!$

Exemplo 1 (continuação):

Atenção, estamos considerando distribuições iguais como sendo diferentes!

- Ilustração:



Etapa 2: Reduzimos as distribuições repetidas

$$P_2 = 2 \xrightarrow{\text{correspondem}} 1 \text{ distribuição}$$

$$\text{(etapa 1) } P_5 \xrightarrow{\text{correspondem}} \frac{P_5}{P_2} = \frac{5!}{2} \text{ total de distribuições}$$

Resposta: Posso distribuir as lapiseiras para meus amigos de $\frac{5!}{2} = 60$ modos diferentes.

Exemplo 2:

Quantos números distintos de 6 algarismos podem ser formados usando-se o dígito 1 três vezes, o dígito 3 duas vezes e o dígito 9 uma vez?

- Ilustração:

133191 é uma possibilidade

Resolução:

Raciocínio 1 (baseado em permutações simples)

Raciocínio 2 (baseado em combinações simples)

Exemplo 2 (continuação):

Raciocínio 1 (baseado em permutações simples)

Etapa 1: Consideramos como sendo diferentes os números repetidos (os marcamos). Calculamos o número total de ordenamentos.

Ilustração:

1 3 3 1 9 1

1 3 3 1 9 1

Número de ordenamentos diferentes de algarismos marcados: $P_6 = 6!$

Atenção,

estamos considerando números iguais como sendo diferentes!

Exemplo 2 (continuação raciocínio 1):

Etapa 2: Reduzimos os casos iguais considerados como diferentes na etapa 1.

Ilustração:

1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1 — 1 3 3 1 9 1 — 1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1 — 1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1

são iguais a $\boxed{133191}$

$$\underbrace{}_{P_3} \ \overset{\times}{\text{P.M.}} \ \underbrace{}_{P_2} \ \overset{\times}{\text{P.M.}} \ \underbrace{}_{P_1}$$

$P_3 \times P_2 \times P_1$ permutações simples $\xrightarrow{\text{correspondem}}$ 1 número

(etapa1) P_6 permutações simples $\xrightarrow{\text{correspondem}}$ $\dfrac{P_6}{P_3 \times P_2 \times P_1} = \dfrac{6!}{3!\ 2!\ 1!}$

total de números distintos

Exemplo 2 (continuação):

<u>Raciocínio 2</u> (baseado em combinações simples)

- Observação: dois números são <u>diferentes</u> quando <u>as posições</u> dos algarismos <u>diferentes</u> estão trocados (131139 é diferente de 311139).

Reformulação do problema:

De quantas maneiras diferentes podemos colocar três 1, dois 3 e um 9 em 6 posições?

Exemplo 2 (continuação raciocínio 2):

Etapa 1: Consideramos somente as possíveis posições dos três 1. Calculamos todos os modos de colocar os três 1 em 6 posições.

- Ilustração:

1 __ 1 1 __ __

1 __ 1 __ 1 __

N_1: número de modos de colocar três 1 em 6 posições

$N_1 = C(6, 3)$

Exemplo 2 (continuação raciocínio 2):

Etapa 2: Fixada uma posição para os três 1, consideramos as possíveis posições dos dois 3 nos lugares restantes.

Ilustração:

1	**3**	**1**	**1**	**3**	**9**
1	**3**	**1**	**1**	**9**	**3**

N_2: número de modos de colocar os dois 3 em 3 lugares

$N_2 = C(3, 2)$

Etapa 3: Fixada uma posição para os três 1 e os dois 3, consideramos as possíveis posições para o 9.

N_3: número de modos de colocar o 9 em 1 lugar $= C(1, 1)$

Exemplo 2 (continuação raciocínio 2):

Resumindo

Etapa 1 Etapa2 Etapa3

$$\underbrace{\underset{p_1}{\underline{\ 1\ }}\ \underset{p_2}{\underline{\quad}}\ \underset{p_3}{\underline{\ 1\ }}\ \underset{p_4}{\underline{\ 1\ }}\ \underset{p_5}{\underline{\quad}}\ \underset{p_6}{\underline{\quad}}}_{N_1 = C(6,3)} \rightarrow \times\ \text{P.M.}\ \underbrace{\underline{\ 1\ }\ \underline{\ 3\ }\ \underline{\ 1\ }\ \underline{\ 1\ }\ \underline{\ 3\ }\ \underline{\quad}}_{N_2 = C(3,2)} \rightarrow \times\ \text{P.M.}\ \underbrace{\underline{\ 1\ }\ \underline{\ 3\ }\ \underline{\ 1\ }\ \underline{\ 1\ }\ \underline{\ 3\ }\ \underline{\ 9\ }}_{N_3 = C(1,1)}$$

Resposta: O número total de possibilidades são

$$N_1 \times N_2 \times N_3 = \frac{6!}{3!\,3!} \cdot \frac{3!}{2!\,1!} \cdot \frac{1!}{1!\,0!} = \frac{6!}{3!\,2!\,1!} = \frac{P_6}{P_3 P_2 P_1}$$

Observação:

$$3 + 2 + 1 = 6$$

cederj

Características:

- Os elementos considerados não são necessariamente diferentes.
- Os elementos iguais são indistinguíveis
- Cada troca de posição (de ordem) dos elementos distinguíveis corresponde a uma possibilidade

  (não são consideradas as permutações dos elementos iguais).
- Na obtenção do número de possibilidades aplica-se os princípios aditivo e multiplicativo.

Permutação com repetição:

Definição

Entre n objetos dados tem-se n_1 elementos iguais a a_1, n_2 elementos iguais a a_2, ... , n_r elementos iguais a a_r, sendo $a_1, a_2, \ldots, a_r$ diferentes e $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$.

Uma permutação com repetição destes n objetos é uma ordenação desses elementos onde não são consideradas as permutações entre os elementos iguais.

Ilustração

Exemplo 2: $a_1 = 1$, $n_1 = 3$, $a_2 = 3$, $n_2 = 2$, $a_3 = 9$, $n_3 = 1$ $(r = 3)$

$$n = n_1 + n_2 + n_3 = 3 + 2 + 1 = 6,$$

permutações com repetição diferentes: 131139 e 311139

Número de permutações com repetição:

Problema

Dados n objetos tais que n_1 elementos são iguais a a_1, n_2 elementos são iguais a a_2 , ... , n_r elementos são iguais a a_r e n = $n_1 + n_2 + \ldots + n_r$,
encontrar o número de permutações com repetição.

Propriedade

O número de permutações com repetição de n elementos sendo n_1 iguais a a_1, n_2 iguais a a_2, ... , n_r iguais a a_r e $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$, é dado por:

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}$$

Número de permutações com repetição:

Ilustração

exemplo 2: $$P_6^{3,\,2,\,1} = \frac{6!}{3!\;2!\;1!}$$

Outra notação:

$$PR\,(n;\, n_1, \,\ldots\,,\, n_r)$$

Observação: se $n = r$ e $n_1 = n_2 = \cdots = n_r = 1$

então $P_n^{n_1,\,\ldots\,,\,n_r} = P_n^{1,\,\ldots\,,\,1} = P_n$

Exemplo 3:

Um time de futebol jogou 15 partidas em um campeonato. Venceu 7 jogos, perdeu 5 e empatou 3. De quantos modos isto pode ter acontecido?

Resolução: $n=15$, a_1 = jogo vencido, $n_1 = 7$

a_2 = jogo perdido, $n_2 = 5$

a_3 = jogo empatado, $n_3 = 3$

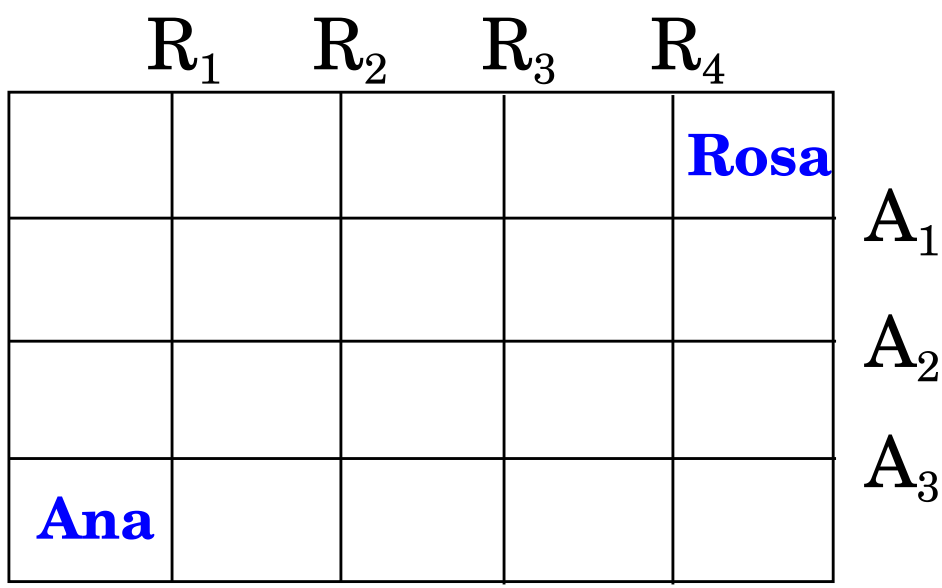
N: total das possíveis sequências de jogos vencidos, perdidos e empatados.

$$N = P_{15}^{7,\,5,\,3} = \frac{15!}{7!\;5!\;3!} = 360360$$

Resposta: O número de modos em que o time venceu, perdeu e empatou é $N = 360360$

Exemplo 4:

Ana e Rosa moram em vértices opostos de um retângulo. Ana precisa atravessar 3 avenidas e 4 ruas para chegar à casa de Rosa. Quantos caminhos diferentes unem as casas de Ana e de Rosa?



Exemplo 4 (continuação):

- Observação:

Cada caminho, a partir da casa de Ana até a de Rosa, pode ser representado por uma sequência de 0 e de 1 com o seguinte significado:

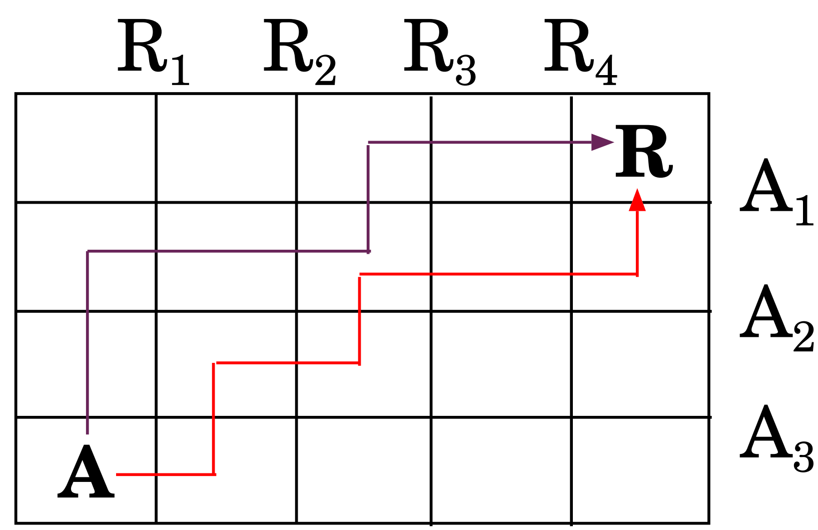
0 : atravessa 1 rua (R_1, R_2, R_3 ou R_4)

1 : atravessa 1 avenida (A_1, A_2 ou A_3)

- Ilustração:

0 1 0 1 0 0 1

1 1 0 0 1 0 0



Exemplo 4 (continuação):

Reformulação do problema:

Quantas sequências diferentes podem ser formados com quatro 0 e três 1 ?

Resolução:

Cada sequência corresponde a uma permutação com repetição.

$$n_1 = 4 \ (a_1 = 0) \ , \ n_2 = 3 \ (a_2 = 1) \ , \ n = 7$$

Resposta (problema reformulado):

O número de sequências diferentes é $P_7^{4,\,3} = \dfrac{7!}{4!\,3!} = 35.$

Resposta do problema:

As casas de Ana e Rosa estão unidas por 35 caminhos diferentes.

Exemplo 5:

Quantos são os anagramas da palavra MAMBEMBE que começam com vogal?

Resolução:

$$\left.\mathbf{A}\right\}\text{ etapa 1}$$

$$\left.\underset{p_1}{\underline{\mathbf{E}}}\ \underset{p_2}{\underline{\quad}}\ \underset{p_3}{\underline{\quad}}\ \underset{p_4}{\underline{\quad}}\ \underset{p_5}{\underline{\quad}}\ \underset{p_6}{\underline{\quad}}\ \underset{p_7}{\underline{\quad}}\ \underset{p_8}{\underline{\quad}}\right\}\text{ etapa 2}$$

N: número de anagramas que começam com vogal

N_1: número de anagramas que começam com A

N_2: número de anagramas que começam com E

$$N = N_1 + N_2$$

Exemplo 5 (continuação):

Etapa 1: (MAMBEMBE)

$$\mathbf{A}\ \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{\text{7 letras: 3 M, 2 B, 2 E}} \qquad N_1 = P_7^{3,\,2,\,2} = \frac{7!}{3!\,2!\,2!}$$

Etapa 2:

$$\mathbf{E}\ \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{\text{7 letras: 3 M, 2 B, 1 E, 1 A}} \qquad N_2 = P_7^{3,\,2,\,1,\,1} = \frac{7!}{3!\,2!\,1!\,1!}$$

Resposta: O número de anagramas de MAMBEMBE que começam com vogal são $N = \frac{7!}{3!\,2!}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = 630$.

Exemplo 6:

Quantos são os anagramas da palavra MAMBEMBE que não possuem duas ou três letras M juntas?

- Ilustração:

MAMBEMBE, AMBMEMBE são possíveis anagramas

AMMBEMBE, AMMMBEBE não são anagramas possíveis para o problema

Exemplo 6 (continuação):

Resolução:

N: número de anagramas que não possuem duas ou três letras M juntas.

Etapa 1: Consideramos as letras de MAMBEMBE diferentes de M e calculamos o número de ordenamentos.

- Observação: cada ordem das letras A (1 vez), B (2 vezes) e E (2 vezes) é 1 permutação com repetição:

$$n_1 = 1 \ (a_1 = A)\ ,\ n_2 = 2 \ (a_2 = B)\ ,\ n_3 = 2 \ (a_3 = E)\ ,\ n = 5$$

Conclusão 1: O número de ordens diferente de A, B, E, B e E é $P_5^{2,\,2,\,1}$.

Exemplo 6 (continuação):

Etapa 2: Fixada uma permutação de A (1 vez), B (2 vezes) e E (2 vezes), calculamos as possibilidades de intercalar nessa permutação cada M(3).

- Ilustração:

$$\bullet\ \underline{\ \mathrm{E}\ }\ \bullet\ \underline{\ \mathrm{A}\ }\ \bullet\ \underline{\ \mathrm{B}\ }\ \bullet\ \underline{\ \mathrm{B}\ }\ \bullet\ \underline{\ \mathrm{E}\ }\ \bullet$$

lugares possíveis para colocar M(3)

- Observações:
  - Para cada permutação com repetição temos 6 lugares possíveis para colocar a letra M
  - Devemos escolher 3 lugares entre 6 para colocar as 3 letras M

- Conclusão 2: Fixada uma permutação de A(1), B(2) e E(2), temos C(6, 3) maneiras de colocar as letras M(3).

Exemplo 6 (continuação):

- Conclusão do problema:

$$\text{1 permutação com repetição de A, B e E} \xrightarrow[\textbf{(etapa 2)}]{\textbf{gera}} C(6,3) \text{ anagramas}$$

$$\underset{\textbf{(etapa 1)}}{\text{total de permutações com repetição}}\ P_5^{2,\,2,\,1} \xrightarrow[\textbf{(P. M.)}]{\textbf{geram}} P_5^{2,\,2,\,1} \times C(6,3) = N$$

$$\left(\frac{5!}{2!\,2!\,1!} \times \frac{6!}{3!\,3!} \right)$$

Resposta:

O número de anagramas da palavra MAMBEMBE que não possuem duas ou três letras M juntas são 600.

Desafio:

Tente resolver o exemplo 6 usando o seguinte raciocínio:

Etapa 1: Calcule o número de todos os anagramas de MAMBEMBE (incluindo aqueles em que aparecem 2 ou 3 letras M juntas), N_1.

Etapa 2: Calcule o número de anagramas onde aparecem exatamente duas M juntas, N_2.

(MMMABEBE não é um anagrama desta etapa)

Etapa 3: Calcule o número de anagramas onde aparecem exatamente três M juntas, N_3.

Conclusão:

$$N = N_1 - N_2 - N_3$$ (pelo princípio aditivo)

Resumo:

Sejam n objetos tais que n_1 entre eles são iguais a a_1, n_2 são iguais a a_2, ... , n_r são iguais a a_r, sendo $a_1 \dots a_r$ diferentes e $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$.

Conceito:

Permutação com repetição

Característica: importa a posição dos objetos diferentes.

$$(\underbrace{a_1, a_1, \dots, a_1}_{n_1}, \underbrace{a_2 \dots a_2}_{n_2} \dots \underbrace{a_r, \dots a_r}_{n_r} \neq \underbrace{a_1 \dots a_1}_{n_1 - 1}, a_2\ a_1\ \underbrace{a_2 \dots a_2}_{n_2 - 1} \dots \underbrace{a_r \dots a_r}_{n_r})$$

Propriedade:

Número de permutações com repetição

$$P_n^{n_1, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \dots n_r!}$$