UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

IMECC

TEOREMA DO BINÔMIO DE NEWTON

TRIANGULO DE PASCAL

Louraine de Paula Oliveira – RA: 141822

Fundamentos da Matemática – Professor Torres

29 de abril de 2014

Sumário

Introdução

Em matemática, **binómio de Newton** ou **binômio de Newton** permite escrever na forma canônica o polinómio correspondente à potência de um binómio. O nome é dado em homenagem ao físico e matemático Isaac Newton. Entretanto deve-se salientar que o Binômio de Newton não foi o objeto de estudos de Isaac Newton. Na verdade o que Newton estudou foram regras que valem para $(a+b)^n$ quando o expoente **n** é fracionário ou inteiro negativo, o que leva ao estudo de séries infinitas.

Casos particulares do Binômio de Newton são:

$$(x+y)^1 = x+y$$
$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$

Notação e fórmula

O teorema do binômio de Newton se escreve como segue:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Os coeficientes $\binom{n}{k}$ são chamados coeficientes binomiais e são definidos como:

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, onde n e k são inteiros, $k \leq n$ e $x! = 1 \times 2 \times \ldots x$ é o fatorial de x.

O coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ corresponde, em análise combinatória, ao número de combinações de *n* elementos agrupados *k* a *k*.

Triângulo de Pascal

É um triângulo numérico infinito formado por números binomiais $\binom{n}{k}$, onde n representa o número da linha (posição horizontal) e k representa o número da coluna (posição vertical), iniciando a contagem a partir do zero. O triângulo foi descoberto pelo matemático chinês Yang Hui, e 500 anos depois várias de suas propriedades foram estudadas pelo francês Blaise Pascal.

Binômio de Newton

Pelos produtos notáveis, sabemos que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Se quisermos calcular $(a + b)^3$, podemos escrever:

$$\mathbf{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Se quisermos calcular $(a+b)^4$, podemos adoptar o mesmo procedimento:

$$\mathbf{(a + b)^4 = (a + b)^3 (a+b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) (a+b)}$$

$$\mathbf{= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}$$

De modo análogo, podemos calcular as quintas e sextas potências e, de modo geral, obter o desenvolvimento da potência $(a+b)^n$ a partir da anterior, ou seja, de $(a+b)^{n-1}$.

Porém quando o valor de **n** é grande, este processo gradativo de cálculo é muito trabalhoso.

Existe um método para desenvolver a enésima potência de um binómio, conhecido como **binómio de Newton** (Isaac Newton, matemático e físico inglês, 1642 - 1727). Para esse método é necessário saber o que são coeficientes binomiais, algumas de suas propriedades e o triângulo de Pascal.

Coeficientes Binomiais

Sendo **n** e **p** dois números naturais $(n \geq p)$, chamamos de **coeficiente binomial** de classe **p**, do número **n**, o número $\frac{n!}{p!(n-p)!}$, que indicamos por $\binom{n}{p}$ (lê-se: **n** sobre **p**). Podemos escrever:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \qquad (n, p \in \mathbb{N} \quad e \quad n \geq p)$$

O coeficiente binomial também é chamado de **número binomial**. Por analogia com as fracções, dizemos que **n** é o seu **numerador** e **p**, o **denominador**. Podemos escrever:

$$C_{n,p} = \binom{n}{p}$$

É também imediato que, para qualquer **n** natural, temos:

$$\binom{n}{n} = 1, \ \binom{n}{1} = n \quad e \quad \binom{n}{0} = 1$$

Exemplos:

1) $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3! \ 2!} = 10$

2) $\binom{4}{1} = 4$

3) $\binom{6}{6} = 1$

1) $\binom{3}{0} = 1$

2) $\binom{0}{0} = 1$

Propriedades dos coeficientes binomiais

1ª)

Se n, p, k $\in \mathbb{N}$ e p + k = n então

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{k}$$

Coeficientes binomiais como esses, que tem o mesmo numerador e a soma dos denominadores igual ao numerador, são chamados **complementares**.

Exemplos:

1) $\binom{5}{3} = \binom{5}{2}$ 2) $\binom{10}{6} = \binom{10}{4}$ 3) $\binom{8}{1} = \binom{8}{7}$

2ª)

Se n, p, k $\in \mathbb{N}$ e p $\geq$ p-1 $\geq$ 0 então

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$$

Essa igualdade é conhecida como **relação de Stifel** (Michael Stifel, matemático alemão, 1487 - 1567).

Exemplos:

1) $\binom{2}{1} + \binom{2}{2} = \binom{3}{2}$ 2) $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3}$ 3) $\binom{7}{4} + \binom{7}{5} = \binom{8}{5}$

Triângulo de Pascal

A disposição ordenada dos números binomiais, como na tabela ao lado, recebe o nome de **Triângulo de Pascal**

$$
\begin{array}{llllll}
\binom{0}{0} & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\
\ldots & & & & & \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} \ldots & \binom{n}{n} \\
\ldots & & & & &
\end{array}
$$

Nesta tabela triangular, os números binomiais com o mesmo numerador são escritos na mesma linha e os de mesmo denominador, na mesma coluna.

Por exemplo, os números binomiais $\binom{3}{0}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$ e $\binom{3}{3}$ estão na linha 3 e os números binomiais $\binom{1}{1}$, $\binom{2}{1}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{4}{1}$, ..., $\binom{n}{1}$, ... estão na coluna 1.

Substituindo cada número binomial pelo seu respectivo valor, temos:

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Construção do triângulo de Pascal

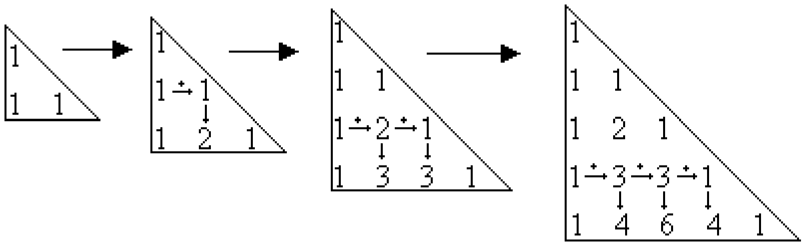
Para construir o triângulo do Pascal, basta lembrar as seguintes propriedades dos números binomiais, não sendo necessário calculá-los:

1ª) Como $\binom{n}{0} = 1$, todos os elementos da coluna 0 são iguais a 1.

2ª) Como $\binom{n}{n} = 1$, o último elemento de cada linha é igual a 1.

3ª) Cada elemento do triângulo que não seja da coluna 0 nem o último de cada linha é igual à soma daquele que está na mesma coluna e linha anterior com o elemento que se situa à esquerda deste último (relação de Stifel).

Observe os passos e aplicação da relação de Stifel para a construção do triângulo:



Propriedade do triângulo de Pascal

P1 Em Qualquer linha, dois números binomiais equidistantes dos extremos são iguais.

$$
\begin{array}{lllllll}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & \boxed{10} & \boxed{10} & 5 & 1 & \\
1 & 6 & \boxed{15} & 20 & \boxed{15} & 6 & 1 \\
\cdots & & & & & &
\end{array}
$$

$$\binom{3}{1} = \binom{3}{2}$$

$$\binom{4}{1} = \binom{4}{3}$$

$$\binom{5}{1} = \binom{5}{4} \quad \text{e} \quad \binom{5}{2} = \binom{5}{3}$$

$$\binom{6}{1} = \binom{6}{5} \quad \text{e} \quad \binom{6}{2} = \binom{6}{4}$$

De fato, esses binomiais são **complementares**.

P2 **Teorema das linhas:** A soma dos elementos da enésima linha é 2^n.

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{linha } 0 & 1 & & & & \longrightarrow & 1 = 2^0 \\
\text{linha } 1 & 1 & 1 & & & \longrightarrow & 1+1 = 2 = 2^1 \\
\text{linha } 2 & 1 & 2 & 1 & & \longrightarrow & 1+2+1 = 4 = 2^2 \\
\text{linha } 3 & 1 & 3 & 3 & 1 & \longrightarrow & 1+3+3+1 = 8 = 2^3 \\
\text{linha } 4 & 1 & 4 & 6 & 4 \;\; 1 & \longrightarrow & 1+4+6+4+1 = 16 = 2^4
\end{array}
$$

De modo geral temos:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{0} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

P3 **Teorema das colunas:** A soma dos elementos de qualquer coluna, do 1º elemento até um qualquer, é igual ao elemento situado na coluna à direita da considerada e na linha imediatamente abaixo.

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1
...							

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21

1 + 4 + 10 + 20 = 35

P4 **Teorema das diagonais:** A soma dos elementos situados na mesma diagonal desde o elemento da 1ª coluna até o de uma qualquer é igual ao elemento imediatamente abaixo deste.

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1
...							

1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35

Fórmula do desenvolvimento do binómio de Newton

Como vimos, a potência da forma $(a+b)^n$, em que a, $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, é chamada binómio de Newton. Além disso:

- quando n = 0 temos $(a+b)^0 = 1$
- quando n = 1 temos $(a+b)^1 = 1a + 1b$
- quando n = 2 temos $(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
- quando n = 3 temos $(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
- quando n = 4 temos $(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

$$\begin{array}{lllll} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

....

Observe que os coeficientes dos desenvolvimentos foram o triângulo de Pascal. Então, podemos escrever também:

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0} a^0 b^0$$

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1$$

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 b^0 + \binom{3}{1} a^2 b^1 + \binom{3}{2} a^1 b^2 + \binom{3}{3} a^0 b^3$$

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0} a^4 b^0 + \binom{4}{1} a^3 b^1 + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a^1 b^3 + \binom{4}{3} a^0 b^4$$

....

De modo geral, quando o expoente é **n**, podemos escrever a **fórmula do desenvolvimento do binómio de Newton:**

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Note que os expoentes de **a** vão diminuindo de unidade em unidade, variando de **n** até 0, e os expoentes de **b** vão aumentando de unidade em unidade, variando de 0 até **n**. O desenvolvimento de $(a + b)^n$ possui n + 1 termos.

Fórmula do termo geral do binómio

Observando os termos do desenvolvimento de $(a + b)^n$, notamos que cada um deles é da forma $\binom{n}{p} . a^{n-p} . b^p$.

- Quando p = 0 temos o 1º termo: $\binom{n}{0} . a^n . b^0$.
- Quando p = 1 temos o 2º termo: $\binom{n}{1} . a^{n-1} . b^1$.
- Quando p = 2 temos o 3º termo: $\binom{n}{2} . a^{n-2} . b^2$.
- Quando p = 3 temos o 4º termo: $\binom{n}{3} . a^{n-3} . b^3$.
- Quando p = 4 temos o 5º termo: $\binom{n}{4} . a^{n-4} . b^4$.

  ....

Percebemos, então, que um termo qualquer **T** de ordem p + 1pode ser expresso por:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} . a^{n-p} . b^p$$

Bibliografia

www.google.com.br

www.infoescola.com/Matemática

www.mundoeducacao.com/.../**binomio-newton**-desenvolvendo-expressao

www.colegioweb.com.br › ... › Matemática › Binômio de Newton