Gabarito da AD2 - Fundamentos de Algoritmos para Computação

1. (1.0) Use a relação de Stifel para mostrar que:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^p C_n^p = (-1)^p C_{n-1}^p$$

Resposta: A relação de Stifel nos diz que:

$$C_{n+1}^{r+1} = C_n^r + C_n^{r+1}$$

Logo, considerando $C_n^1 = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1$, $C_n^2 = C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2$, ..., $C_n^{p-1} = C_{n-1}^{p-2} + C_{n-1}^{p-1}$, $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ resulta:

$$\begin{array}{rll}
 & C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^p C_n^p & = \\
= & C_n^0 - (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) + (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2) - (C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3) + \ldots & \\
 & +(-1)^p (C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p) & = \\
= & C_n^0 - C_{n-1}^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 - C_{n-1}^2 - C_{n-1}^3 + \ldots & \\
 & +(-1)^p C_{n-1}^{p-1} + (-1)^p C_{n-1}^p & = \\
= & \underbrace{C_n^0}_{C_n^0 = C_{n-1}^0} - C_{n-1}^0 + (-1)^p C_{n-1}^p & = \\
= & C_{n-1}^0 - C_{n-1}^0 + (-1)^p C_{n-1}^p & = \\
= & (-1)^p C_{n-1}^p &
\end{array}$$

Portanto, $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^p C_n^p = (-1)^p C_{n-1}^p$.

2. (1.5) Calcule o termo do desenvolvimento de $\left(\frac{y^2}{\sqrt{x}} - \frac{x^4}{y}\right)^{90}$ que tem o mesmo grau em x e em y, sendo $x > 0$ e $y \neq 0$. Justifique.

Resposta: O termo $(k+1)$ de $(a+b)^n$ é $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Temos $n = 90$, $a = \frac{y^2}{\sqrt{x}}$ e $b = -\frac{x^4}{y}$.

Daí, para $0 \leq k \leq 90$ temos:

$$\begin{array}{rcll}
T_{k+1} & = & C_{90}^k \left(\frac{y^2}{\sqrt{x}}\right)^{90-k} \left(-\frac{x^4}{y}\right)^k & = \\
 & = & C_{90}^k (y^2 x^{\frac{-1}{2}})^{90-k} (-x^4 y^{-1})^k & = \\
 & = & C_{90}^k y^{180-2k} x^{-45+\frac{k}{2}} (-1)^k x^{4k} y^{-k} & = \\
 & = & C_{90}^k (-1)^k y^{180-2k-k} x^{4k-45+\frac{k}{2}} & = \\
 & = & C_{90}^k (-1)^k y^{180-3k} x^{-45+\frac{9k}{2}} &
\end{array}$$

Como queremos determinar o termo do desenvolvimento de $\left(\frac{y^2}{\sqrt{x}} - \frac{x^4}{y}\right)^{90}$ que tem o mesmo grau em x e em y, então devemos determinar k tal que $T_{k+1} = C_{90}^{k}(-1)^k y^a x^a$, para algum a.

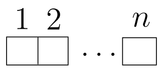
Portanto, deve ser $180 - 3k = -45 + \frac{9k}{2} \Rightarrow \boxed{\text{k=30}}$.

Logo, $a = 180 - 3k = 90$.

Portanto, o coeficiente de $x^{90}y^{90}$ em $\left(\frac{y^2}{\sqrt{x}} - \frac{x^4}{y}\right)^{90}$ é:

$$\begin{aligned} & C_{90}^{30}(-1)^{30} = \\ = \; & C_{90}^{30} \end{aligned}$$

3. (1.5) Considere n quadrados dispostos lado a lado, como mostra a figura:



Seja a_n = número de maneiras de colorir os quadrados de forma que não fiquem dois quadrados vermelhos adjacentes. Encontre uma relação de recorrência para a_n se cada quadrado pode ser colorido de vermelho ou azul. Justifique.

Resposta: Uma fila de tamanho 1 pode conter ou um peça vermelha, ou uma peça azul, portanto $a_1 = 2$. Uma fila de tamanho 2 pode ter qualquer um dos seguintes formatos: (Azul, azul) ou (azul, vermelho) ou (vermelho, azul). Logo, $a_2 = 3$.

A fila com n peças, para $n \geq 3$, pode ser dividida em dois grupos, a que termina com uma peça azul e a que termina com uma peça vermelha. Se a última (n-ésima) peça da fila é azul, as demais $n-1$ peças da fila podem ter qualquer coloração desde que não existam peças vermelhas consecutivas, este total de colorações é a_{n-1}. Se a última (n-ésima) peça da fila é vermelha, obrigatoriamente, a penúltima peça deve ser azul. Logo, as demais $n-2$ peças da fila podem ter qualquer coloração desde que não existam peças vermelhas consecutivas, este total de colorações é a_{n-2}.

Pelo princípio aditivo, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$.

Logo,

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} & \text{, para } n \geq 3 \\ a_1 = 2, \; a_2 = 3 \end{cases}$$

4. (1.0) Seja F uma floresta com 20 vértices e 8 componentes conexos. Calcule quantas arestas F possui? Justifique.

Resposta: Se F é uma floresta então F é acíclico, e cada componente conexo é uma árvore.

Sejam $F_1, F_2, \ldots, F_8$ os componentes conexos da floresta F.

Se cada F_i, $i = 1, \ldots, 8$, é uma árvore então, por teorema, $m_i = n_i - 1$, onde m_i é o número de arestas de F_i e n_i é o número de vértices de F_i.

Como $|E(F)| = \sum |E(F_i)| = \sum m_i$ e $|V(F)| = \sum |V(F_i)| = n_i$, temos que:

$$
\begin{gathered}
|E(F)| = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 + m_8 \\
|E(F)| = n_1 - 1 + n_2 - 1 + n_3 - 1 + n_4 - 1 + n_5 - 1 + n_6 - 1 + n_7 - 1 + n_8 - 1 \\
|E(F)| = \underbrace{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8}_{|V(F)|} - 8 \\
|E(F)| = |V(F)| - 8 \\
|E(F)| = 20 - 8 \\
|E(F)| = 12
\end{gathered}
$$

5. (1.5) Mostre que em um grupo de 9 pessoas não é possível que cada pessoa conheça exatamente três outras pessoas deste grupo. (Sugestão: Modele o problema com um grafo)

   Resposta: Suponha, por absurdo, que em um grupo de 9 pessoas é possível que cada pessoa conheça exatamente 3 pessoas deste grupo.

   Consideremos o seguinte grafo G: a cada pessoa do grupo corresponde a um vértice do grafo, isto é, a pessoa i do grupo, $i = 1, \ldots, 9$ corresponde o vértice i. Se a pessoa i conhece a pessoa j então existe a aresta (i, j), caso contrário não existe esta aresta. Como cada pessoa i conhece exatamente 3 outras pessoas então $d(i) = 3$, $i = 1, \ldots, 9$.

   Pelo teorema do aperto de mãos, a soma dos graus de todos os vértices é igual a duas vezes o número de arestas, isto é,

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|,$$

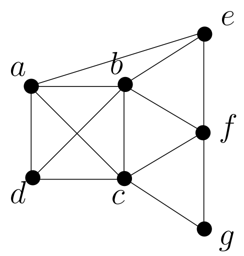
   ou seja, a soma dos graus de todos os vértices de um grafo é par.

   Mas,

$$
\begin{gathered}
\textstyle\sum_{v \in V(G)} d(v) \\
d(1) + d(2) + d(3) + d(4) + d(5) + d(6) + d(7) + d(8) + d(9) \\
3.9 = 27, \text{ que é ímpar, IMPOSSÍVEL!}
\end{gathered}
$$

Portanto, em um grupo de 9 pessoas não é possível que cada pessoa conheça exatamente 3 pessoas deste grupo.

6. (3.5) Responda as seguintes perguntas, considerando o grafo G abaixo:



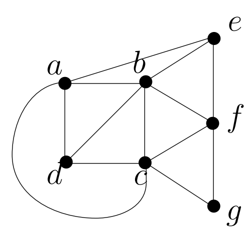
(a) G é euleriano? G é hamiltoniano?

Resposta: G não é euleriano, pois pela caracterização de grafos eulerianos, todo vértice do grafo G tem grau par, o que não ocorre nesse grafo, por exemplo, o vértice e tem grau $d(e) = 3$, que é ímpar.

G é hamiltoniano, pois G possui um ciclo que passa por todos os vértices uma única vez. E o ciclo é $aebfgcda$.

(b) G é planar?

Resposta: Sim, pois G possui a seguinte representação plana:



(c) Qual é o diâmetro de G? Qual o centro de G?

Resposta: Temos que $diam(G) = max_{v \in V(G)}\{e(v)\}$, $c(G) = \{v \in V(G) | e(v)$ é mínima $\}$ e $e(v) = max_{w \in V(G)}\{d(v, w)\}$.

Calculando as excentricidades dos vértices de G:

$e(a) = 2$
$e(b) = 2$
$e(c) = 2$
$e(d) = 2$
$e(e) = 2$
$e(f) = 2$

$e(g) = 2$

Logo, $diam(G) = 2$ e $c(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

(d) Qual o tamanho da maior clique de G?

Resposta: A é uma clique de G se $G[A]$ é um grafo completo, onde $A \subseteq V(G)$.

A maior clique de G é $A = \{a, b, c, d\}$, onde $G[A] = K_4$, logo o tamanho da maior clique de G é 4.