Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da EP da Aula 03

Observações:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.

2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo antes de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.

3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

---

1. Sejam A e B dois subconjuntos de um conjunto universo U, tais que $B \subseteq A$. Usando o princípio aditivo prove que $n(A-B) = n(A) - n(B)$.

***R*esposta:** Lembremos (Exercício 4 da aula 2) que $A \cup B = (A - B) \cup B$, sendo $(A - B) \cap B = \emptyset$.

Como $B \subseteq A$ temos que $A \cup B = A$. Logo, resulta $A = A \cup B = (A - B) \cup B$, implicando em $n(A) = n(A \cup B) = n((A - B) \cup B)$. Como $(A - B) \cap B = \emptyset$, usando o princípio aditivo, obtemos:

$$\begin{aligned} n(A) &= \underbrace{n((A - B) \cup B)}_{Princpio \quad aditivo} \\ &= n(A - B) + n(B) \end{aligned}$$

Portanto, $n(A - B) = n(A) - n(B)$.

2. Quantos números inteiros entre 1 e 100 inclusive são divisíveis por 3 ou por 7.

   DICA: Considere

$$A = \{x \in \mathbb{Z} | 1 \leq x \leq 100 \text{ e } x = 3k \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{Z} | 1 \leq x \leq 100 \text{ e } x = 7k \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\}$$

   e use o princípio de inclusão e exclusão.

   ***R*esposta:** Temos que $A = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq 100$ e $x = 3k$ para algum $k \in \mathbb{N}\} = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots, 93, 96, 99\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq 100$ e $x = 7k$ para algum $k \in \mathbb{N}\} = \{7, 14, 21, 28, \ldots, 91, 98\}$.

   Como queremos os números que são divisíveis por 3 ou por 7 então precisamos encontrar: $\{x \in \mathbb{N} | x \in A$ ou $x \in B\} = A \cup B$. Portanto, devemos calcular $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

   Calculemos $n(A)$, $n(B)$ e $n(A \cap B)$.

   Dado que os elementos de A são da forma $1 \leq x = 3k \leq 100$, $k \in \mathbb{N}$ então deve ser $\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{100}{3}$ e $k \in \mathbb{N}$, logo tem-se que $1 \leq k \leq 33$. Isto é,

$A = \{3.1, 3.2, \ldots, 3.33\}$ donde resulta que $n(A) = 33$. Analogamente para B, temos que o máximo $k \in \mathbb{N}$ tal que $7k \leq 100$ é $k = 14$, implicando que $n(B) = 14$. Como $A \cap B = \{x \in \mathbb{N} | x = 3 \times 7 \times k, k \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{N} | x = 21k, k \in \mathbb{N}\}$, tem-se que $n(A \cap B) = 4$.

Logo, a quantidade de números naturais que são divisíveis por 3 ou por 7 é $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 33 + 14 - 4 = 43$.

3. Use os princípios aditivo ou de inclusão e exclusão para determinar, em cada caso, a quantidade de números naturais entre 1 e 60 que verificam (i)-(v).

   Sejam $A = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x < 60 \text{ e } x = 2k \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, \ldots, 56, 58\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x < 60 \text{ e } x = 3k \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\} = \{3, 6, 9, \ldots, 54, 57\}$.

   (i) são divisíveis por 2 e por 3.

   ***R*esposta:** Como queremos os números que são divisíveis por 2 e por 3 então temos que encontrar: $\{x \in \mathbb{N} | x \in A \text{ e } x \in B\} = A \cap B = \{x \in \mathbb{N}\} | x \text{ é divisível por } 6\} = \{6, 12, 18, \ldots, 48, 54\}$. Observemos que o último elemento deste conjunto é $54 = 6.9$, portanto, $n(A \cap B) = 9$.

   Logo, os números inteiros entre 1 e 60 que são divisíveis por 2 e por 3 tem no total 9 números.

   (ii) são divisíveis por 2 ou por 3.

   ***R*esposta:** Observe que $n(A) = 29$ e $n(B) = 19$, pois o último elemento de A é $58 = 2.21$ e de B é $57 = 3.19$.

   O conjunto de números que são divisíveis por 2 ou por 3 é $A \cup B$, portanto devemos calcular $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 29 + 19 - 9 = 39$.

Portanto, os números inteiros entre 1 e 60 que são divisíveis por 2 ou por 3 tem no total 39 números.

(iii) não são divisíveis nem por 2 nem por 3.

Resposta: Sejam $A \cup B = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x < 60,\ x = 2k$ ou $x = 3k$ para algum $k \in \mathbb{N}\} = \{2, 3, 4, 6, \ldots, 54, 56, 57, 58\}$ e $C = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x < 60\} = \{2, 3, 4, \ldots, 57, 58, 59\}$.

Vimos que $n(A \cup B) = 39$. Por outro lado, observe que $n(C) = 58$.

Queremos encontrar todos os números que não são divisíveis nem por 2 nem por 3, logo queremos os números que estão no conjunto C, mas que não está no conjunto $A \cup B$. Como $A \cup B \subseteq C$ então, pelo exercício 1 desta lista, temos que $n(C - (A \cup B)) = n(C) - n(A \cup B)$, isto é, $n(C - (A \cup B)) = 58 - 39 = 19$.

Logo, os números inteiros entre 1 e 60 que não são divisíveis nem por 2 nem por 3, tem no total 19 números.

(iv) são ímpares divisíveis por 3 ou são divisíveis por 2.

Resposta: Seja $D = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x < 60,\ x = 3k$ e ímpar para algum $k \in \mathbb{N}\} = \{3, 9, \ldots, 51, 57\}$. Observe que $D = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x < 60, x = 3(2m - 1)\ , m \in \mathbb{N}\}$. Portanto, o primeiro elemento corresponde a $m = 1$, o segundo a $m = 2$ e assim seguimos até que o último elemento corresponde a $m = 10$. Logo, $n(D) = 10$.

Como queremos os números que são divisíveis por 2 ou, por 3 que são ímpares, então temos que encontrar: $n(A \cup D)$. Como $A \cap D = \emptyset$, pelo princípio aditivo resulta $n(A \cup D) = n(A) + n(D) = 29 + 10 = 39$.

Logo, os números inteiros entre 1 e 60 que são divisíveis por 2 ou, por 3 que são ímpares, tem no total 39 números.

(v) são divisíveis por 2 ou por 3 ou por 5.

Resposta: Seja $E = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x < 60$ e $x = 5k$ para algum $k \in \mathbb{N}\} = \{5, 10, \ldots, 50, 55\}$.

Queremos os números que são divisíveis por 2 ou por 3 ou por 5, então temos que encontrar: $n(A \cup B \cup E)$. Pelo princípio de inclusão e exclusão sabemos que $n(A \cup B \cup E) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cup B \cup C)$.

Lembre que $n(A) = 29$, $n(B) = 19$. Observe também que $n(E) = 11$, $n(A \cap E) = 5$, $n(B \cap E) = 3$ e $n(A \cap B \cap E) = 1$.

Portanto, $n(A \cup B \cup E) = 29 + 19 + 11 - 9 - 5 - 3 + 1 = 43$.

Logo, os números inteiros entre 1 e 60 que são divisíveis por 2 ou por 3 ou por 5 tem no total 43 números.

4. Foram consultadas 200 pessoas que estavam pesquisando preços de televisores em lojas de eletrodomésticos. As respostas foram as seguintes:

- 40% perguntaram pela marca A;
- 35% pela marca B;
- 10% pelas marcas A e B;
- 35% somente perguntaram por outras marcas.

Use o princípio de adição ou o princípio da inclusão e exclusão para determinar:

(i) quantidade de pessoas que perguntaram pelos preços das televisões de marcas A ou B.

Temos que:

- 40% perguntaram pela marca A, isto é, $\frac{40}{100} \times 200 = 80$ pessoas;
- 35% pela marca B, isto é, $\frac{35}{100} \times 200 = 70$ pessoas;
- 10% pelas marcas A e B, isto é, $\frac{10}{100} \times 200 = 20$ pessoas;
- 25% somente perguntaram por outras marcas, isto é, $\frac{25}{100} \times 200 = 50$ pessoas.

***R*esposta:** Como queremos o número de pessoas que perguntaram pelos preços das televisões A ou B, então temos que encontrar o número de pessoas que estão no conjunto A ou no conjunto B, isto é, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 80 + 70 - 20 = 130$ pessoas.

(ii) número de pessoas que perguntaram pela marca A e não pela marca B (lembre-se que $(A - B) \cup B = A \cup B$ e $(A - B) \cap B = \emptyset$).

***R*esposta:**

O conjunto das pessoas que perguntaram pela marca A e não pela marca B é $A - B$, então devemos calcular $n(A - B)$. Vimos que

$$n(A \cup B) = n((A - B) \cup B)) = n(A - B) + n(B)$$

Daí temos que:

$$n(A - B) = n(A \cup B) - n(B) = 130 - 70 = 60.$$