Aula 8: Arranjos simples

Conteúdo:

- Introdução
- Arranjo simples
- Número de arranjos simples

Introdução:

Exemplo 1:

Um prédio tem 8 portas. De quantas maneiras 1 pessoa pode entrar por 1 porta e sair por outra diferente?

Resolução:

$$\text{Possibilidades} \quad \underset{\text{entrada}}{\underline{\mathbf{8}}} \times \underset{\text{saída}}{\underline{\mathbf{7}}} = \mathbf{56}$$

Resposta:

Uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra de 56 maneiras distintas.

Reformulação do exemplo 1:

Um prédio tem 8 portas. De quantas maneiras 1 pessoa pode entrar por 1 porta e sair por outra diferente?

De quantas maneiras distintas uma pessoa pode escolher 2 portas diferentes (entrada, saída) entre 8 portas diferentes?

Resposta:

Uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra de 56 maneiras distintas.

Resposta:

Uma pessoa pode escolher 2 portas distintas para entrar e sair entre 8 portas distintas de 56 maneiras diferentes.

Observação: $8\,.\,7 = \dfrac{8\;.7\;.6!}{6!} = \dfrac{8\;.7\;.6\;.5\;.4\;.3\;.2\;.\,1}{6!} = \dfrac{8!}{6!} = \dfrac{8!}{(8-2)!}$

cederj

Exemplo 2:

Quantos números distintos de 3 algarismos distintos podem se formar com os dígitos 3, 5, 7, 8 e 9?

Resolução:

$$\text{Possibilidades} \qquad \frac{5}{p_1} \times \frac{4}{p_2} \times \frac{3}{p_3}$$

posições dos dígitos no número

Resposta:

Podem se formar $5 \,.\, 4 \,.\, 3 =$ 60 números diferentes com 3 algarismos escolhidos entre os dígitos 3, 5, 7, 8 e 9.

Observação: $$5 \,.\, 4 \,.\, 3 = \frac{5.4.3.2!}{2!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!}$$

Características dos exemplos:

- Os elementos considerados $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são diferentes

- Cada escolha de r elementos $(r \leq n)$ distintos e ordenados entre $a_1, a_2, \ldots, a_n$ corresponde a uma possibilidade

- Na obtenção do número de possibilidades aplica-se os princípios aditivo e multiplicativo

cederj

Arranjo simples:

Definição

Dados n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, um arranjo simples de n elementos tomados r a r é uma ordenação de r elementos distintos escolhidos entre $a_1, a_2, \ldots, a_n$, sendo r e n números naturais com $1 \leq r \leq n$.

Ilustração

Dados os dígitos 3, 5, 7, 8 e 9,

398 é um arranjo simples de 5 elementos tomados 3 a 3.

Número de arranjos simples:

Problema:

Dados n elementos distintos, $a_1, a_2, \dots, a_n$,
encontrar o número de arranjos simples dos n elementos tomados r a r

Propriedade:

O número de arranjos simples de n elementos distintos tomados r a r, denominado $A(n, r)$, é dado por:

$$A(n, r) = n(n-1)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Observação:

$$P_n = A(n, n) = n!$$

Exemplo 3:

Vários amigos combinaram passar o dia no clube. Planejaram ir para a piscina, fazer um churrasco, jogar volei e tennis. Mas, como chegaram tarde precisaram escolher 3 entre as 4 atividades. De quantas maneiras diferentes poderiam programar essas atividades?

Resolução:

programa : arranjo simples de 3 atividades escolhidas entre 4

número de programas possíveis $A(4, 3) = \frac{4!}{(4-3)!} = 4! = 24$

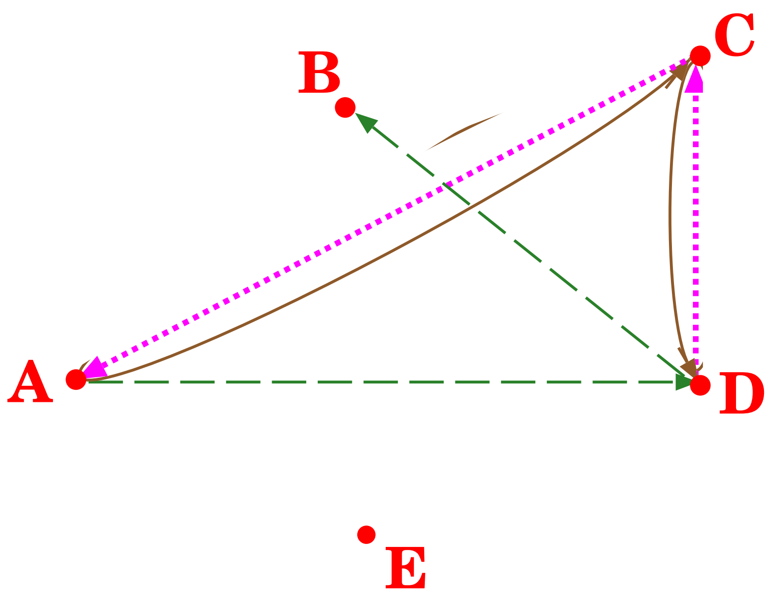
Resposta:

Eles têm 24 maneiras diferentes de fazer um programa.

Exemplo 4:

Uma companhia aérea tem vôos ligando 5 cidades. Cada rota interliga 3 cidades. Calcule o número de rotas diferentes.

- Ilustração



exemplos de rotas

ACD, DCA, ADB

Resolução:

$\overline{}$ $\overline{}$ $\overline{}$

$p_1 \quad p_2 \quad p_3$

posição das cidades
numa rota

rota: arranjo simples de 3 cidades escolhidas entre 5

número de rotas: $A(5, 3) = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5!}{2!} = 5 \,.\, 4 \,.\, 3 = 60$

Resposta:

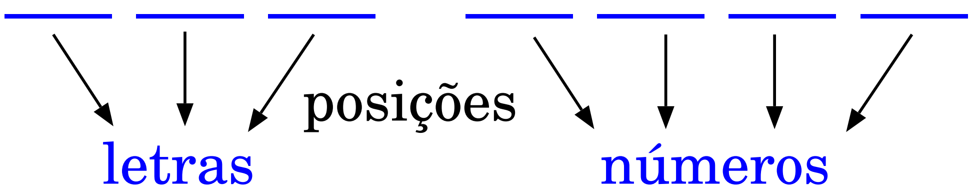
A companhia pode ter 60 rotas ligando as 5 cidades.

Exemplo 5:

As placas dos automóveis são formadas por três letras seguidas de quatro dígitos. Quantas placas com letras e números diferentes podem ser formadas?

Resolução:

As letras do alfabeto são 26.



número de letras = 26

número de letras numa placa = 3

número de dígitos = 10

número de dígitos numa placa = 4

Característica:

$$\underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_}_{\text{letras}} \quad \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{\text{números}}$$

- Pares ordenados de 3 letras e 4 números

Número de possibilidades:

$$\overset{\text{letras}}{A(26,3)} \times \overset{\text{números}}{A(10,4)} = \frac{26!}{23!} \cdot \frac{10!}{6!} = 78624 \times 10^3$$

Resposta:

Tem-se 78624000 placas com 3 letras e 4 números diferentes.

Exemplo 6:

Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base 10) existem?

Resolução:

dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

$\underline{\cancel{0}}\quad \underline{\quad}\quad \underline{\quad}$

<u>Raciocínio 1</u> $\longrightarrow$ $\underline{\cancel{0}}\quad \underline{\quad}\quad \underline{\quad}$

Possibilidades: $\underbrace{9}\ \times\ \underbrace{A(9,\,2)}\ =\ 9\,.\,9\,.\,8 = 648$

Exemplo 6 (raciocínio 2)

Usamos o conceito de complemento:

U: conjunto universo := o conjunto das ordenações de três dígitos

A := conjunto dos números de 3 algarismos

B := conjunto dos elementos de U que iniciam com 0

$$\begin{cases} A = U - B \\ N = |A| = |U| - |B| \end{cases}$$

$$\begin{cases} |U| = A(10, 3) = \dfrac{10!}{7!} \;,\; |B| = A(9, 2) = \dfrac{9!}{7!} \\ N = \dfrac{10!}{7!} - \dfrac{9!}{7!} = \dfrac{10.9! - 9!}{7!} = 648 \end{cases}$$

Resposta:

Tem-se 648 números naturais de três algarismos distintos.

Recomendação

Em geral é conveniente começar a análise dos eventos (ou possibilidades) por aquelas que tem algum tipo de impedimento (ou dificuldade).

Exemplo 7:

Quantos números naturais com todos os dígitos distintos ímpares, m, existem entre 1000 e 9999 (1000 < m < 9999)?

Resolução:

- Os números m têm 4 dígitos
- Dígitos ímpares: 1, 3, 5, 7, 9

$\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$
$p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4$

n: quantidade de dígitos ímpares = 5

r: quantidade de dígitos de um número = 4

Possibilidades: $A(5, 4) = \dfrac{5!}{(5-4)!} = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$

Resposta: Existem 120 números com todos os dígitos distintos ímpares entre 1000 e 9999.

Observação

$$A(5, 4) = \frac{5!}{(5-4)!} = 5! = P_5 = A(5, 5) = \frac{5!}{(5-5)!}$$

em geral,

$$A(n, n-1) = A(n, n) = P_n = n!$$

Exemplo 8:

Quantos números pares entre 1000 e 9999 têm dígitos distintos?

Resolução:

$$\begin{array}{cccc}
 & & & \left.\begin{array}{c}0\end{array}\right\}\ \underline{\text{etapa 1}} \\
 & & & \left.\begin{array}{c}2\\4\\6\\8\end{array}\right\}\ \underline{\text{etapa 2}} \\
\rule{2em}{0.4pt} & \rule{2em}{0.4pt} & \rule{2em}{0.4pt} & \rule{2em}{0.4pt} \\
p_1 & p_2 & p_3 & p_4
\end{array}$$

M: quantidade de números naturais de 4 dígitos terminados em 0, 2, 4, 6 ou 8

$M = M_1 + M_2$, sendo

M_1: quantidade de números de 4 dígitos terminados em 0 (etapa 1)

M_2: quantidade de números de 4 dígitos terminados em 2, 4, 6 ou 8 (etapa 2)

Exemplo 8 (etapa 1):

Obtenção de M_1, quantidade de números de dígitos distintos, entre 1000 e 9999 terminados em 0:

Possibilidades: $\underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_}_{A(9,\ 3)}\ \underline{\ 0\ }$

como $A(n, r) = n(n-1) \ldots (n-r+1)$

$n = 9, \ r = 3$

Resposta da etapa 1:

$$M_1 = A(9, 3) = 9 \,.\, 8 \,.\, 7 = 504$$

Exemplo 8 (etapa 2):

Obtenção de M_2, quantidade de números de dígitos distintos, entre 1000 e 9999 terminados em 2, 4, 6 ou 8:

$$\begin{array}{cccc} & & & 2 \\ & & & 4 \\ & & & 6 \\ \cancel{0} & \_\_ & \_\_ & 8 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{array}$$

ordem da análise das possibilidades $\left\{ \begin{array}{l} P_4 \\ P_1 \\ P_2 \text{ e } P_3 \end{array} \right.$

Possibilidades: $\underbrace{8}_{p_1} \times \underbrace{A(8,2)}_{p_2\,p_3} \times \underbrace{4}_{p_4}$

Exemplo 8 (continuação etapa 2):

Possibilidades para p_4 : 4 (2, 4, 6, ou 8)

Possibilidades para p_1 : 8 (dos 10 dígitos elimina-se o 0 e o dígito já usado na posição p_4)

Possibilidades para p_2 e p_3 : $A(8, 2) = 8 \,.\, 7$ (dos 10 dígitos já foram <u>usados</u> 2, então, temos 8 dígitos tomados 2 a 2)

Resposta da etapa 2:

$$M_2 = 8 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 4 = 1792$$

Exemplo 8 (análise final):

Enunciado: Quantos números naturais entre 1000 e 9999 têm dígitos distintos e são pares?

Resolução:

$M = M_1 + M_2$, sendo

M: total de números naturais de 4 dígitos terminados em 0, 2, 4, 6 ou 8

M_1: total de números de 4 dígitos terminados em 0 (etapa 1)

M_2: total de números de 4 dígitos terminados em 2, 4, 6 ou 8 (etapa 2)

Resposta:

Como, $M_1 = A(9, 3) = 504$, $M_2 = 8 \cdot 4 \cdot A(8, 2) = 1792$ tem-se que $M = 504 + 1792 = 2296$

Resumo:

Sejam n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Conceito:

Arranjo simples de n objetos tomados r a r.

Características:

Importa os objetos considerados e a posição deles.

(exemplos: $\mathbf{a_1a_2 \ldots a_r \neq a_2a_1a_3 \ldots a_r \neq a_2a_3 \ldots a_ra_{r+1}}$)

Propriedade:

Número de arranjos simples de n objetos tomados r a r:

$$A(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)\ldots(n-r+1)$$

Observação:

$$P_n = A(n, n) = A(n, n-1)$$