Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD1 - Primeiro Semestre de 2016

Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (1.5) Considere o seguinte conjunto:

$$A = \{0, \emptyset, \{0, \emptyset\}\}$$

Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

(a) *P(A)* $= \{\{0\}, \{\emptyset\}, \{0, \emptyset\}, \{0, \{0, \emptyset\}\}, \{\emptyset, \{0, \emptyset\}\}, \{0, \emptyset, \{0, \emptyset\}\}\}$, onde *P(A)* é a notação do conjunto de partes do conjunto A;

Resposta: Falso, pois

$$P(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{\emptyset\}, \{\{0, \emptyset\}\}, \{0, \emptyset\}, \{0, \{0, \emptyset\}\}, \{\emptyset, \{0, \emptyset\}\}, \{0, \emptyset, \{0, \emptyset\}\}\}$$

(b) $\{0, \emptyset\} \in A$;

Resposta: Verdadeiro, pois $\{0, \emptyset\}$ é um elemento do conjunto A.

(c) $\{0, \emptyset\} \subset A$.

Resposta: Verdadeiro, pois $\{0, \emptyset\}$ é subconjunto de A, sendo portanto, como visto no item (a), elemento de $P(A)$.

2. (1.5) Considere os seguintes conjuntos:
$A = \{n \in Z : -100 < n \leq 60\}$,
$B = \{n \in Z : |2n - 1| \leq 153\}$,
$C = \{n \in Z : n^2 + 30n - 5400 \leq 0\}$,
sendo Z o conjuntos dos números inteiros.
(a) Descreva B e C como intervalos de números inteiros como A. Justifique.

Resposta: Para identificar os elementos de B, precisamos resolver a seguinte inequação: $|2n - 1| \leq 153$.

$|2n-1| \leq 153 \Leftrightarrow -153 \leq 2n-1 \leq 153 \Leftrightarrow -153+1 \leq 2n-1+1 \leq 153+1$

$$\Leftrightarrow -152 \leq 2n \leq 154 \Leftrightarrow \frac{-152}{2} \leq \frac{2n}{2} \leq \frac{154}{2} \Leftrightarrow -76 \leq n \leq 77$$

Logo, $B = \{n \in Z : -76 \leq n \leq 77\}$.

Igualmente, para identificar os elementos de C, precisamos resolver a inequação: $n^2 + 30n - 5400 \leq 0$.

As raízes da equação do segundo grau $n^2 + 30n - 5400 = 0$ são $n_1 = -90$ e $n_2 = 60$. Pela análise do sinal, temos que a função quadrática $n^2+30n-5400$ assume valores não positivos (≤ 0) para $-90 \leq n \leq 60$. Logo, $C = \{n \in Z : -90 \leq n \leq 60\}$.

(b) Encontre o número de elementos de $A \cup B \cup C$ usando o Princípio de Inclusão e Exclusão. Justifique.

Resposta: O Princípio da Inclusão e Exclusão garante que:

$n(A \cup B \cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(A \cap C)-n(B \cap C)+n(A \cap B \cap C)$

$A = \{-99, -98, \ldots, 0, 1, 2, \ldots, 59, 60\}$, donde $n(A) = 160$.

$B = \{-76, -75, \ldots, 0, 1, 2, \ldots, 76, 77\}$, donde $n(B) = 154$.

$C = \{-90, -89, \ldots, 59, 60\}$, donde $n(B) = 151$.

$A \cap B = \{n \in Z : -76 \leq n \leq 60\}$. Daí, $A \cap B = \{-76, -75, \ldots, 0, 1, \ldots, 59, 60\}$. Portanto, $n(A \cap B) = 137$.

$A \cap C = \{n \in Z : -90 \leq n \leq 60\}$, donde $n(A \cap C) = 151$.

$B \cap C = \{n \in Z : -76 \leq n \leq 60\} \Rightarrow C = \{-76, -75, \ldots, 59, 60\}$. Logo, $n(B \cap C) = 137$.

$A \cap B \cap C = \{n \in Z : -76 \leq n \leq 60\}$, donde $n(A \cap B \cap C) = 137$.

Assim, pelo Princípio da Inclusão e Exclusão temos que

$$n(A \cup B \cup C) = 160 + 154 + 151 - 137 - 151 - 137 + 137 = 177$$

3. (1.5) Mostre usando o Princípio da Indução que:

$$2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 3 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$$

para todo inteiro n, $n \geq 2$.

Resposta: Seja $P(n) : 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 3 - \left[\frac{n+2}{2^{n-1}}\right]$, $\forall n \in N, n \geq 2$.

BASE DA INDUÇÃO: Vamos mostrar que $P(2)$ é verdadeira.

$2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Como $3 - \frac{2+2}{2^{2-1}} = 1$, temos que $P(2)$ é verdadeira.

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Suponha que $P(k) : 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + n\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 3 - \left[\frac{k+2}{2^{k-1}}\right]$ seja verdadeira, para todo $k \geq 2$.

PASSO INDUTIVO: Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeira, para $k \geq 2$, então $P(k+1) : 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + (k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k = 3 - \left[\frac{k+3}{2^k}\right]$ é verdadeira.

$$\underbrace{2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}_{H.I.} + (k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k =$$

$$3 - \left[\frac{k+2}{2^{k-1}}\right] + (k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k =$$

$$3 - \left[\frac{k+2}{2^{k-1}} - \frac{(k+1)}{2^k}\right] =$$

$$3 - \left[\frac{2(k+2)}{2^k}\frac{-k-1}{2^k}\right] =$$

$$3 - \left[\frac{2k+4-k-1}{2^k}\right]$$

$$3 - \frac{k-3}{2^k}$$

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, $P(n) : 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 3 - \left[\frac{n+2}{2^{n-1}}\right]$ é verdadeira para todo $n \geq 2$, $n \in Z$.

4. (1.5) Tem 12 mulheres e 12 homens esperando para entrar numa sessão de um filme em um cinema. De quantas maneiras diferentes eles podem permanecer na fila de espera tal que homens e mulheres estejam dispostos alternadamente? Justifique.

   Resposta: Vamos analisar dois casos:

   CASO1: A fila começa por uma mulher.

   Vamos inicialmente permutar as 12 mulheres. Para fazermos isto temos $P_{12} = 12!$ maneiras. Observe que, após posicionarmos as mulheres em fila, temos 12 espaços entre as mulheres, como mostra o esquema abaixo, onde os pontos representam os espaços vazios.

   _._._._._._._._._._._._.

   Assim, basta permutarmos os 12 homens entre as mulheres. Podemos fazer isto de $P_{12} = 12!$ formas. Daí, pelo Princípio Multiplicativo, temos $12! \times 12!$ maneiras de posicionar 12 homens e 12 mulheres em fila que começa por mulher de modo que homens e mulheres estejam dispostos alternadamente.

   CASO2: A fila começa por um homem.

   Este caso é equivalente ao CASO 1. Inicialmente permutaremos os 12 homens, de $P_{12} = 12!$ formas. Em seguida, posicionamos as 12 mulheres nos espaços entre os homens já posicionados. Isto pode ser feito também de $P_{12} = 12!$ formas. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, temos $12! \times 12!$ maneiras de posicionar 12 homens e 12 mulheres em fila que começa por homem de modo que homens e mulheres estejam dispostos alternadamente.

Pelo Princípio Aditivo, temos $12! \times 12! + 12! \times 12! = 2 \times 12! \times 12!$ maneiras de formar uma fila com 12 homens e 12 mulheres de modo que homens e mulheres estejam dispostos alternadamente.

5. (2.0) De quantas formas é possível arranjar as letras da palavra **IRREDUTIBILIDADE**, de forma que:

(a) as vogais fiquem consecutivas e as consoantes também,

Resposta: A palavra **IRREDUTIBILIDADE** possui 16 letras, a saber: 4I's, 2 E's, 1 U, 1 A, 2R's, 3D's, 1T, 1B e 1L. Note que, ou bem teremos as 8 vogais iniciando a palavra e as 8 consoantes finalizando, ou as 8 consoantes seguidas da 8 vogais. Nenhuma outra configuração satisfaz às exigências da questão. Assim, começaremos permutando as vogais, tomando cuidado com as repetições. Logo, temos $P_8^{4,2,1,1} = \frac{8!}{4!2!1!1!}$ maneiras de posicionar as 8 vogais. Agora, faremos os mesmo com as consoantes. Temos $P_8^{2,3,1,1,1} = \frac{8!}{2!3!1!1!1!}$. Como podemos ter duas configurações possíveis, temos, pelo Princípio Multiplicativo, o número de formas de arranjar a palavra **IRREDUTIBILIDADE** de modo que as vogais fiquem consecutivas assim como as consoantes é $2 \times \frac{8!}{4!2!1!1!} \times \frac{8!}{2!3!1!1!1!} = 8! \times 140$.

(b) duas letras **I** nunca fiquem juntas

Resposta: Para solucionar esta questão, vamos arranjar todas as letras da palavra **IRREDUTIBILIDADE** exceto as letras I. Em seguida, escolheremos 4 espaços vazios entre as demais letras já posicionadas para posicionar os I's que, por sua vez, ficarão separados 2 a 2. Para arranjar as outras 12 letras, temos $P_{12}^{2,2,3,1,1,1,1,1} = \frac{12!}{2!2!3!1!1!1!1!1!}$. Agora temos 13 espaços vazios entre as 12 letras para escolhermos 4 a fim de posicionar as letras I. Observe o esquema a seguir, onde os pontos representam os espaços vazios.

.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.

Temos $C_{13}^4 = \frac{13!}{9!4!} = 13 \times 11 \times 5$ maneiras de escolhermos os espaços em branco e posicionarmos as quatro letras I nesses espaços. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, temos $\frac{12!}{2!2!3!1!1!1!1!1!} \times 13 \times 11 \times 5 = \frac{13! \times 55}{24}$ anagramas da palavra **IRREDUTIBILIDADE** nos quais duas letras I nunca figuram juntas.

6. (2.0) Determine justificando:

(i) De quantas maneiras diferentes podemos colocar 9 anéis **idênticos** em 4 dedos da mão direita (excluindo o polegar)? Justifique.

Resposta: Vamos modelar o problema da seguinte forma: a quantidade de anéis em cada dedo será uma variável $x_i, i = 1, 2, 3, 4$. Note que $x_i \geq 0$. Daí, precisamos solucionar a seguinte equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$$

Temos $CR_4^9 = C_{12}^9 = \frac{12!}{3!9!} = 220$ soluções inteiras e não negativas para esta equação.

Como os anéis são todos iguais, temos 220 formas de colocar 9 anéis idênticos em 4 dedos da mão direita.

(i) De quantas maneiras diferentes podemos colocar 9 anéis **diferentes** em 4 dedos da mão direita (excluindo o polegar)? Justifique.

Resposta: Como, neste caso, os anéis são todos distintos, basta permutarmos os anéis, uma vez que já identificamos no item anterior quantas configurações possíveis existem considerando 9 anéis e 4 dedos. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, temos $220 \times P_9 = 220 \times 9!$ modos de colocar 9 anéis distintos em 4 dedos da mão direita.