Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP3 - Segundo Semestre de 2017

Questões:

1. (1,5) Mostre usando indução matemática que:

$$2+5+8+\cdots+(3n-1) = \frac{n(1+3n)}{2} \quad \text{para todo número natural } n \geq 1.$$

Resposta: Seja $P(n) : 2+5+8+\cdots+(3n-1) = \frac{n(1+3n)}{2}$ para todo número natural $n \geq 1$.

BASE DA INDUÇÃO: Para $n = 1$, pelo lado esquerdo da igualdade temos: $3.1 - 1 = 2$.

Pelo lado direito, temos $\frac{1(1+3.1)}{2} = \frac{4}{2} = 2$. Como ambos os lados da igualdade resultam no mesmo valor para $n = 1$, temos que a Base da Indução está verificada.

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Suponha $P(k) : 2+5+8+\cdots+(3k-1) = \frac{k(1+3k)}{2}$ verdadeira.

PASSO DA INDUÇÃO: Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1) : 2+5+8+\cdots+(3(k+1)-1) = \frac{(k+1)(1+3(k+1))}{2} = \frac{(k+1)(3k+4)}{2}$ é verdadeira.

De fato, desenvolvemos primeiro o lado direito da proposição P(k+1),

$$\underbrace{2+5+8+\cdots+(3k-1)}_{\text{Hipótese de Indução}} + 3(k+1) - 1 =$$

$$\frac{k(1+3k)}{2} + 3(k+1) - 1 =$$
$$\frac{(k+3k^2)}{2} + (3k+2) =$$
$$\frac{(k+3k^2) + 2(3k+2)}{2} =$$
$$\frac{(k+3k^2) + (6k+4)}{2} =$$
$$\frac{3k^2+7k+4}{2}$$

Agora, desenvolvemos o lado direito de P(k+1):

$$\frac{(k+1)(3k+4)}{2} =$$
$$\frac{(3k^2+4k+3k+4)}{2}$$
$$\frac{(3k^2+7k+4)}{2}$$

Pelos lados direito e esquerdo do desenvolvimento chegamos à mesma expressão, logo podemos concluir que P(k+1) é verdadeira. Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, temos que $P(n) : 2+5+8+\cdots+(3n-1) = \frac{n(1+3n)}{2}$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. (1,0) De quantos modos 10 mulheres e 12 homens podem formar uma roda de ciranda de modo que as mulheres permeneçam juntas? Justifique.

   Resposta: **Raciocínio 1:** Consideremos as 10 mulheres contando como 1 mulher. Então, podemos formar uma roda de 13 pessoas de $(PC)_{13} = 12!$ maneiras diferentes. Por outro lado, a quantidade de formas como as 10 mulheres podem estar juntas correspondem a Permutações de 10, ou seja, $P_{10} = 10!$. Logo, o número total de modos de colocar 10 mulheres e 12 homens podem formar uma roda de ciranda de modo que as mulheres permaneçam juntas é 12!10!.

Raciocínio 2: Separamos as 10 mulheres que devem estar juntas. Podemos formar uma roda com os 10 homens de $(PC)_{10} = 9!$ modos. Depois, devemos escolher um dos 10 espaços entre esses homens (o que pode ser feito de 10 modos) para colocarmos as mulheres. Finalmente, devemos decidir em que ordem as 12 mulheres se colocarão nesse espaço (12! modos). A resposta é $9!10.12! = 10!12!$.

3. (1,5) Determine o número de soluções inteiras não negativas da equação $x+y+z+w = 35$ nas quais nenhuma variável é inferior a 3. Justifique.

   Resposta: Como nenhuma variável é inferior a 3, então temos de encontrar o número de soluções não-negativas da equação $x+y+z+w = 35$ com as restrições: $x \geq 3$, $y \geq 3$, $z \geq 3$, e $w \geq 3$.

   Podemos escrever: $x = x' + 3$, $y = y' + 3$, $z = z' + 3$, $w = w' + 3$, onde $x', y', z', w' \geq 0$. Substituindo na equação temos: $x' + 3 + y' + 3 + z' + 3 + w' + 3 = 35$, com $x', y', z', w' \geq 0$, ou seja, $x' + y' + z' + w' = 23$, com $x', y', z', w' \geq 0$.

   O número de soluções inteiras não negativas de $x + y + z + w = 35$, onde $x, y, z, w \geq 3$, é o número de soluções inteiras não negativas de $x' + y' + z' + w' = 23$, onde $x', y', z', w' \geq 0$, que corresponde a $CR_4^{23} = C_{23+4-1}^{23} = C_{26}^{23} = \frac{26!}{23!3!}$.

4. (1,0) Calcule o número de anagramas da palavra **MINIMALISTA** que terminam em vogal. Justifique.

   Resposta: Classificaremos os anagramas de **M I N I M A L I S T A** em 2 grupos disjuntos:

   Temos $2A's$, $3I's$, $2M's$, $1N$, $1L$, $1S$, $1T$, logo:

   (i) Anagramas terminados em A, temos $P_{10}^{1,3,2,1,1,1,1} = \frac{10!}{3!2!}$
   (ii) Anagramas terminados em I, temos $P_{10}^{2,2,2,1,1,1,1} = \frac{10!}{2!2!2!}$

   Pelo princípio aditivo, o total de anagramas é:

$$P_{10}^{1,3,2,1,1,1,1} + P_{10}^{2,2,2,1,1,1,1} =$$

$$= \frac{10!}{3!2!} + \frac{10!}{2!2!2!}$$

5. (1,0) Pede-se:

   (i) Escreva o enunciado do Teorema das Diagonais.

   Resposta: O teorema das diagonais nos diz que $C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \ldots + C_{n+r}^r = C_{n+r+1}^r$

   (ii) Usando o Teorema das Diagonais calcule a seguinte soma:

$$C_{11}^1 + C_{12}^2 + C_{13}^3 + \cdots + C_{18}^8$$

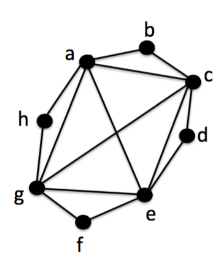
   Resposta:

$$\begin{array}{rll}
 & C_{11}^1 + C_{12}^2 + C_{13}^3 + \cdots + C_{18}^8 & = \\
= & C_{11}^1 + C_{12}^2 + C_{13}^3 + \cdots + C_{18}^8 + C_{10}^0 - C_{10}^0 & = \\
= & \underbrace{C_{10}^0 + C_{11}^1 + C_{12}^2 + C_{13}^3 + C_{14}^4 + C_{15}^5 + C_{16}^6 + C_{17}^7 + C_{18}^8}_{Pelo\ teorema\ das\ diagonais,\ quando\ n=10\ e\ r=8} - C_{10}^0 & = \\
= & C_{10+8+1}^8 - C_{10}^0 & = \\
= & C_{19}^8 - C_{10}^0 & = \\
= & \frac{19!}{8!11!} - \frac{10!}{0!10!} & = \\
= & \frac{19!}{8!11!} - 1 &
\end{array}$$

6. (4.0) Considere o grafo G dado por:

   $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
   $E(G) = \{(a, b), (a, c), (a, e), (a, g), (a, h), (b, c), (c, d), (c, e), ((c, g), (d, e), (e, f), (e, g), (f, g), (g, h)\}$

   Considere a seguinte representação gráfica:



   (a) G é bipartido? Justifique.

   Resposta: NÃO, pois um grafo G é bipartido se e somente G não possui ciclo ímpar, e neste caso o grafo G possui ciclo ímpar, como por exemplo, a, b, c, a.

(b) G é hamiltoniano? Justifique.

Resposta: VERDADEIRO, pois G possui o seguinte ciclo hamiltoniano: $a, b, c, d, e, f, g, h, a$. Portanto, G é hamiltoniano.

(c) G é euleriano? Justifique.

Resposta: FALSO. Por teorema temos que um grafo G é euleriano se e somente se todo vértice de G possui grau par.

Os graus dos vértices a, c, e e g do grafo G possuem grau ímpar, isto é, $d_G(a) = d_G(c) = d_G(e) = d_G(g) = 5$.

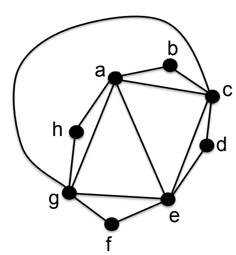
Logo, G não é euleriano.

(d) Qual a maior clique de G? Justifique.

Resposta: A maior clique do grafo é formada pelos vértices a, c, e e g.

(e) G é planar? Justifique. Caso seja, calcule o seu número de faces. Justifique.

Resposta: VERDADEIRO. O grafo G é planar, pois admite a seguinte representação plana:



Seja f o número de faces de G, n o número de vértices e m o número de arestas. Como G é conexo e planar, a fórmula de Euler nos diz que n - $m + f = 2$. Como $n = 8$ e $m = 14$, então $f = m - n + 2 = 14 - 8 + 2 = 8$.