Módulo: Grafos

- Introdução aos Grafos
- Definições Básicas e Notações
- Grau de um vértice
- Problema do Isomorfismo e Representação de Grafos por Matrizes
- Caminhos e Ciclos
- Árvores
- Grafos Eulerianos e Grafos Hamiltonianos
- Grafos Planares
- Grafos Direcionados

Grafos

Objetivo:

Construir um embasamento teórico e estrutural da Teoria dos Grafos que permitirá adquirir a capacidade de resolver problemas algoritmicos em grafos, tendo em mente uma preocupação computacional.

Importância:

- Inúmeros problemas reais podem ser convenientemente modelados por grafos.
- Os grafos são estruturas matemáticas discretas e seu estudo além de um interesse puramente teórico tem também um enorme interesse prático.

Aula: Introdução aos Grafos

Conteúdo:

- História
 - Problema das Pontes de Königsberg
 - Problema das quatro cores
- Aplicações

História:

A Teoria dos Grafos, considerada como um ramo da Matemática Discreta tem uma origem relativamente recente.

Século XVIII - Marco inicial da Teoria dos Grafos

O problema que é considerado o marco inicial na Teoria dos Grafos é o Problema da Ponte de Königsberg resolvido pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707 - 1783) em 1736.

(Euler foi um dos matemáticos mais prolíficos de todos os tempos e deixou contribuições importantes em diferentes áreas da matemática)

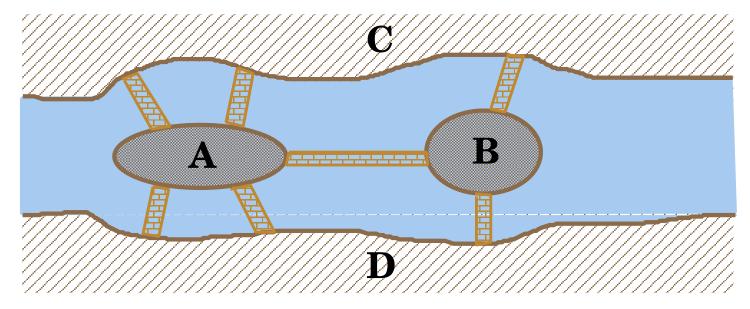






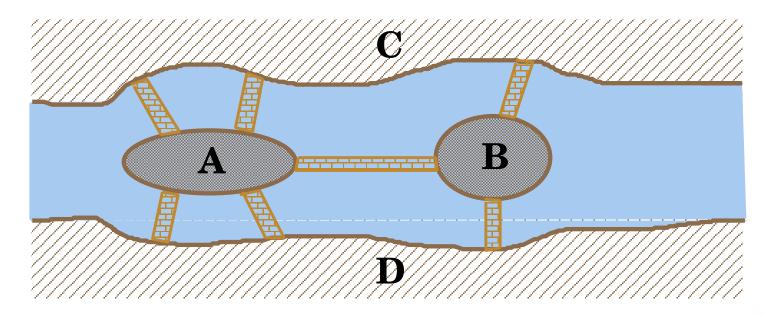
Problema das Pontes de Königsberg

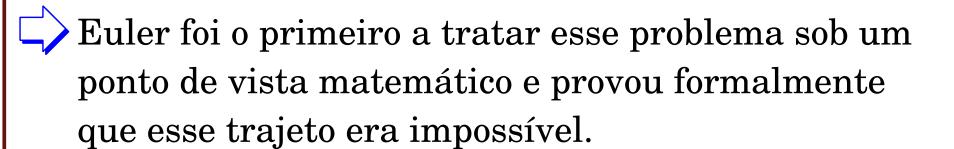
Na cidade de Königsberg (na antiga Prússia), hoje Kaliningrado, sete pontes cruzam o rio Pregel, estabelecendo ligações entre duas ilhas e entre as ilhas e as margens opostas do rio, conforme a ilustração abaixo:



Ilhas \rightarrow A, B Margens \rightarrow C, D

O problema consiste em, partindo de alguma das margens (C ou D) ou de alguma das ilhas (A ou B) é possível determinar um trajeto segundo o qual se possa retornar à região de partida após atravessar cada ponte uma única vez?



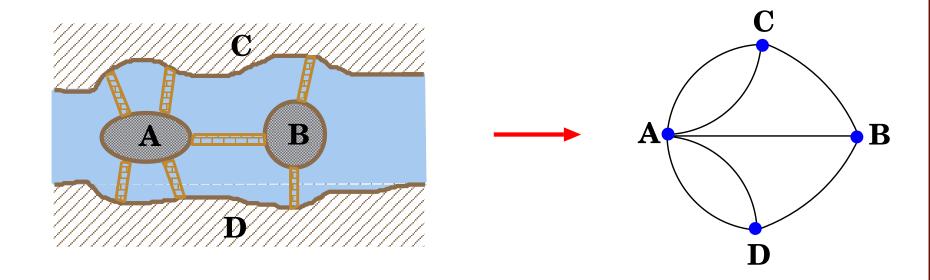


A prova de Euler apareceu em 1736 em um artigo intitulado "Solutio problematis ad geometrian situs pertinentis". Embora esse artigo não tenha sido escrito na linguagem atual de grafos, as suas idéias são de natureza grafo teóricas e esse artigo é considerado o primeiro artigo de grafos.



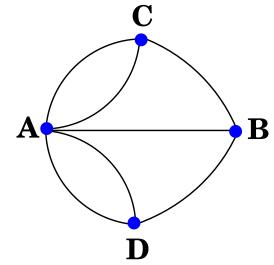


Euler modelou o problema associando a cada região de terra um ponto e a cada ponte uma linha ligando os pontos correspondentes as regiões que a ponte conectava.









- Esse diagrama representa um grafo (multigrafo) G e vamos ver mais adiante que o problema se torna determinar um trajeto euleriano no grafo G.
- Euler mostrou que o problema só podia ser resolvido se tivéssemos um número par de pontes saindo de cada região.

(Vamos estudar isso na aula de Grafos Eulerianos)





Século XIX

- → Problemas das quatro cores (Guthrie 1852)
- → Problema do Ciclo Hamiltoniano (Sir William Hamilton 1859)
 (Problema do Caixeiro viajante)
- Teoria das Árvores Kirchhoff (circuitos elétricos) 1847 Cayley (química orgânica) - 1857
- ─ Contexto puramente matemático (Jordan 1869)







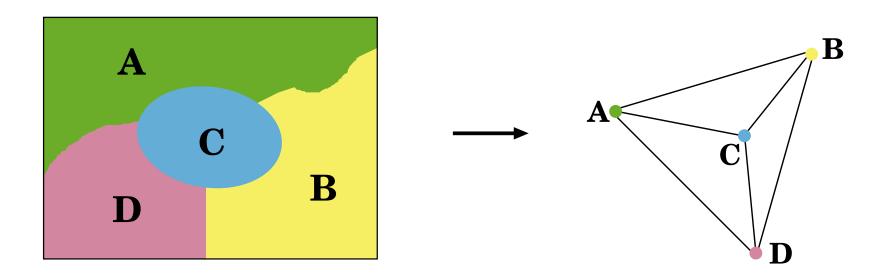
Problema das quatro cores

- Outro problema famoso que impulsionou o desenvolvimento da Teoria dos Grafos foi o Problema das quatro cores.
 Em 1852 Francis Guthrie formulou esse problema.
- O problema das quatro cores consiste em colorir os países de um mapa arbitrário, plano, cada país com uma cor, de tal forma que países fronteiriços possuam cores diferentes, e de maneira que sejam usadas o mínimo de cores.
- Guthrie <u>conjecturou</u> que quatro cores eram suficientes. Esse problema ficou em aberto por mais de 100 anos.





O exemplo a seguir mostra que 3 cores não são suficientes.



- Em 1977 Appel e Haken apresentaram uma prova, utilizando o computador (parcialmente aceita pela comunidade matemática), de que a conjectura era verdadeira.
- Em 1977 Robertson, Seymour, Sanders e Thomas apresentaram uma prova mais combinatória, mas que também utiliza o computador.



Século XX

- Resultados fundamentais

Kuratowski König Menger

Aparecimento do computador impulsionou enormemente o desenvolvimento da Teoria de Grafos.



Aplicações:

Banco de Dados

Redes

Computação:

Algoritmos Distribuídos

Web

Química

Pesquisa Operacional

Engenharia Elétrica e Civil

Arquitetura

Sociologia

Genética

Psicologia

Antropologia

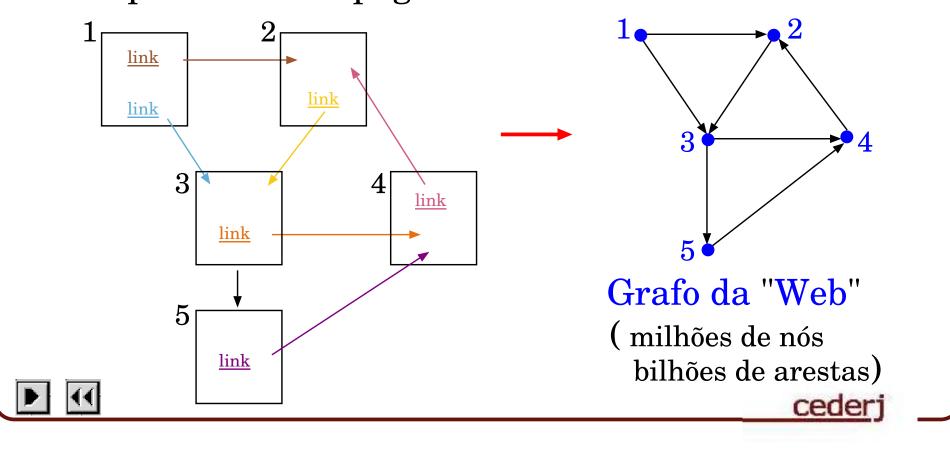
Linguística

Grafos: Aplicações

Exemplo 1:

"Web"

Cada página da "web" pode ser associada a um ponto (nó) e os "links" associados as linhas entre os pontos correspondentes as páginas.



Exemplo 2:

Química

Uma molécula química consiste de um número de átomos ligados entre si. Por exemplo, uma molécula de água (H₂O) consiste de um átomo de oxigênio ligado a 2 átomos de hidrogênio e podemos representar pelo diagrama



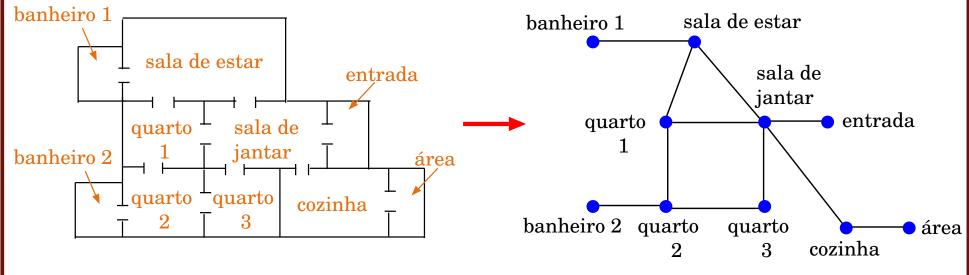
aos átomos — pontos no plano

as ligações — linhas unindo os pontos associados aos átomos correspondentes

Grafos: Aplicações

Exemplo 3: Arquitetura

Planta plana de um apartamento é representada pelo diagrama



Grafo de circulação

aos cômodos —— pontos no plano as ligações entre os cômodos —— linhas unindo os pontos associados aos cômodos correspondentes

— Esses grafos são úteis para representar as conexões entre vários cômodo e para analisar o movimento de pessoas em edifícios.





Resumo:

História:

Século XVIII - Problema da Ponte de Königsberg (Euler)

Século XIX - Problema das quatro cores

Século XX - Aparecimento do computador

Aplicações