Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP3 - Primeiro Semestre de 2015

Questões:

1. (1,5) Mostre por Indução Matemática que:

$$1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Resposta: Seja $P(k) : 1 + 5 + 9 + \cdots + (4k - 3) = k(2k - 1)$ para todo $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$.

Base da Indução: Para $k = 1$ temos que $1 = 1(2.1 - 1)$, logo $P(1)$ é verdadeira.

Hipótese de Indução (H.I.): Suponha que $P(k)$ é verdadeiro, isto é, $1 + 5 + 9 + \cdots + (4k - 3) = k(2k - 1)$.

Passo Indutivo: Vamos provar que se $P(k)$ é verdadeiro então $P(k + 1)$ é verdadeiro, isto é, $1+5+9+\cdots+(4k-3)+(4(k+1)-3) = (k+1)(2(k+1)-1)$, ou seja

$$\text{P(k+1): } 1 + 5 + 9 + \cdots + (4k - 3) + (4k + 1) = (k + 1)(2k + 1)$$

. Desenvolvendo:

$$
\begin{aligned}
\underbrace{1+5+9+\cdots+(4k-3)}_{\text{Aplicando a H.I. :}}+(4k+1) &= k(2k-1)+(4k+1)\\
&= 2k^2-k+4k+1\\
&= 2k^2+3k+1\\
&= 2k^2+k+2k+1\\
&= (k+1)(2k+1)
\end{aligned}
$$

Portanto $P(k+1)$ é verdadeiro. Pelo Princípio de Indução Matemática, temos que $P(n): 1+5+9+\cdots+(4n-3)=n(2n-1)$ é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$.

2. (1,5) Entre 35 alunos de uma turma devem ser escolhidos 6 para tirar uma foto que aparecerá no facebook.

   (a) De quantas maneiras podem ser escolhidos os alunos se Ana, Marcos e Fernanda não podem aparecer os 3 (três) juntos? Justifique.

   Resposta: Consideramos 2 raciocínios para resolver este problema.
   Raciocínio 1: Usamos a noção de complemento de um conjunto: o número total de 6 alunos que podem ser escolhidos entre 35 é dado por C_{35}^{6} dado que a ordem de nossas escolhas não importa. O número de 6 alunos que podem ser escolhidos entre 35 de modo que Ana, Marcos e Fernanda sejam parte desses 6 alunos corresponde a escolher 3 alunos entre 32 , o que é dado por C_{32}^{3}.
   Logo, o número de maneiras em que podem ser escolhidos os alunos se Ana, Marcos e Fernanda não podem aparecer os 3 (três) juntos é dada por $C_{35}^{6}-C_{32}^{3}=\frac{35!}{6!29!}-\frac{32!}{3!29!}$
   Raciocínio 2: Vamos dividir em 3 casos:

   CASO 1: Ana, Marcos e Fernanda não participarão da foto.

   Neste caso vamos escolher os 6 participantes num total de 32 alunos. Como a ordem de nossas escolhas não importa, temos $C_{32}^{6}=\frac{32!}{26!6!}$ formas de escolher os alunos para tirar uma foto se os 3 não participarem.

   CASO 2: Apenas um entre Ana, Marcos e Fernanda participará da foto. Suponhamos que seja Ana.

Se Ana participar, temos que escolher outros 5 alunos para aparecerem na foto dentre os 32 restantes (lembrando que estamos excluindo desta lista a própria Ana, o Marcos e a Fernanda). Como a ordem de nossas escolhas não importa, temos $C_{32}^{5} = \frac{32!}{27!5!}$ formas de escolher os alunos a participarem da foto se a Ana participar.

O caso em que Marcos ou Fernanda participam é análogo a este, isto é, temos $C_3^1 = 3$ maneiras de escolher entre Ana, Marcos e Fernanda para participar da foto. Logo, pelo princípio multiplicativo, o total de maneiras de escolher os participantes da foto de maneira que somente um entre Ana, Marcos e Fernanda participem da foto é dada por $C_3^1 C_{32}^5$.

CASO 3: Participam da foto exatamente 2 entre Ana, Marcos e Fernanda.

Se, por exemplo, Ana e Marcos participam da foto, temos que escolher outros 4 alunos para aparecerem na foto dentre os 32 restantes (lembrando que estamos excluindo desta lista a Ana, o Marcos e a Fernanda). Por tanto temos $C_{32}^4 = \frac{32!}{4!28!}$ formas de escolher os alunos a participarem da foto se Ana e Marcos já fazem parte. Mas, podemos escolher a Ana e Fernanda para estarem na foto, ou Marcos e Fernanda, ou seja, temos $C_3^2 = 3$ maneiras de escolher exatamente 2 entre Ana, Marcos e Fernanda para participarem da foto. Logo, pelo princípio multiplicativo, o total de maneiras de escolher os participantes da foto de maneira que exatamente 2 entre Ana, Marcos e Fernanda participem da foto é dada por $C_3^2 C_{32}^4$.

Assim, pelo Princípio Aditivo, temos que o número de maneiras distintas que pode ser formada essa escolha para a foto se os alunos Ana, Marcos e Fernanda não aparecem os três juntos é de: $\frac{32!}{26!6!} + 3.\frac{32!}{27!5!} + 3.\frac{32!}{4!28!}$.

(b) De quantas maneiras podem ser posicionados os alunos para tirar a foto se Ana, Marcos e Fernanda devem sempre estar entre os 6 alunos escolhidos? Justifique.

Resposta: Neste caso, se Ana, Marcos e Fernanda devem estar entre os 6 alunos para tirar a foto, devemos escolher mais 3 alunos dentre os 32 restantes para comporem a foto, isto é, temos

$C_{32}^3 = \frac{32!}{29!3!}$. Após ter escolhido os 6 alunos para tirar a foto, agora devemos posicioná-los, o que é feito por permutação simples dos 6 alunos, ou seja, $P_7 = 7!$

Assim, pelo Princípio Multiplicativo, temos que o número de maneiras distintas que pode ser posicionados os alunos para tirar a foto, sabendo que Ana, Marcos e Fernanda devem sempre estar entre os 6 alunos escolhidos é de: $C_{32}^3 \times P_7 = \frac{32!}{29!3!} \times 7!$.

3. (1,5) Os números do CPF tem 11 algarismos.

   (a) Quantos números de CPF são possíveis? Justifique.

   Resposta: Neste caso, como queremos números com 11 algarismos, temos 10 escolhas para cada um dos 11 algarismos. Para isso temos, $AR_{10}^{11} = 10^{11}$ maneiras de formar números de CPF.

   (b) Quantos números de CPF tem um único 8? Justifique.

   Resposta: Inicialmente, vamos calcular os 10 algarismos do CPF sem contar com o algarismo 8. Para isso, temos AR_9^{10} formas. Agora, vamos inserir o algarismo 8 entre os 11 espaços existentes, como mostra abaixo:

   $$\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot$$

   onde . representa a posição que o algarismo 8 será inserido e _ a posição dos outros algarismos.

   Assim, pelo princípio multiplicativo temos $AR_9^{10} \times 11 = 9^{10} \times 11$ números de CPF que tem um único 8.

4. (1,5) Calcule o termo independente de x no desenvolvimento de :

$$\left(\frac{x^3}{2} - \frac{1}{x^2}\right)^{105}$$

Justifique.

Resposta: Pelo Teorema do Binômio de Newton temos a seguinte fórmula para o termo geral do desenvolvimento de $(a+b)^n$:

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$$

Vamos utilizar esta fórmula para determinar o termo independente do desenvolvimento, ou seja o termo em que x está elevado a 0. Nesta questão temos $a = \frac{x^3}{2}$, $b = -\frac{1}{x^2}$ e $n = 105$.

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= C_{105}^k \left(\frac{x^3}{2}\right)^{105-k} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k \\ &= C_{105}^k \ x^{3(105-k)} \ (2^{-1})^{105-k} \ (-1)^k \ (x^{-2})^k \\ &= C_{105}^k \ x^{315-3k} \ 2^{k-105} \ (-1)^k \ x^{-2k} \\ &= C_{105}^k \ 2^{k-105} \ (-1)^k \ x^{-2k+315-3k} \\ &= C_{105}^k \ 2^{k-105} \ (-1)^k \ x^{315-5k} \end{aligned}$$

Para que o termo T_{k+1} seja o termo independente deste desenvolvimento, x deve ter grau 0. Assim,

$$315 - 5k = 0 \Rightarrow k = \frac{315}{5} = 63.$$

Logo,

$$T_{64} = C_{105}^{63} \ 2^{63-105} \ (-1)^{63} = -\frac{105!}{63!42!} \times 2^{-42}$$

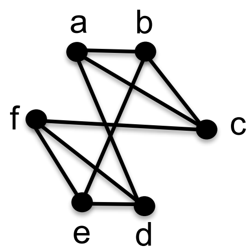
5. (4,0) Considere os grafos G_1 e G_2 dados por:

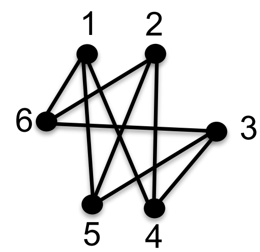
$V(G_1) = \{a, b, c, d, e, f\}$,
$E(G_1) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, e), (c, f), (d, e), (d, f), (e, f)\}$

$V(G_2) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
$E(G_2) = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$

(i) Desenhe os grafos G_1 e G_2.

Resposta: A representação dos grafos G_1 e G_2 são.



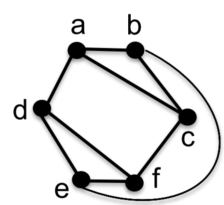


(ii) Eles são isomorfos? Justifique.

Resposta: Não. Note que ambos os grafos G_1 e G_2 têm 6 vértices, 9 arestas e a seguinte sequência de graus dos vértices: $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$. Contudo, G_1 e G_2 não são isomorfos pois em G_1 temos um triângulo enquanto que em G_2 não temos triângulos.

(iii) G_1 é um grafo planar? Justifique.

Resposta: Sim, pois a Figura abaixo apresenta uma representação plana de G_1, ou seja, uma representação em que não há cruzamento de arestas, logo G_1 é um grafo planar.



(iv) G_2 é um grafo hamiltoniano? Justifique.

Resposta: Sim, pois G_2 possui um ciclo que passa por todos os vértices uma única vez. E o ciclo é $1, 4, 3, 5, 2, 6, 1$.

(v) G_1 é um grafo euleriano? Justifique.

Resposta: Não, pois por teorema, G_1 é euleriano se e somente se todo vértice de G tem grau par, e no grafo G temos $d(a) = d(b) = d(c) = d(d) = d(e) = d(f) = 3$, que é ímpar.

(vi) Qual é o centro de G_1? Justifique.

Resposta: A excentricidade de um vértice v, denotada por $e(v)$, é a maior distância (menor caminho) que pode ser percorrida a partir de v para alcançar qualquer outro vértice do grafo, isto é, $e(v) = max_{w \in V(G)}\{d(v, w)\}$.

O diâmetro de um grafo G, denotado por $diam(G)$, é o valor da maior excentricidade em G.

O centro de um grafo G, denotado por $c(G)$, é o conjunto de vértices de G composto pelos vértices de menor excentricidade.

Logo, para calcular o diâmetro e o centro de G, precisamos calcular a excentricidade de cada vértice e para tal, vamos calcular a distância entre cada par de vértices de G.

$d(a, b) = 1, d(a, c) = 1, d(a, d) = 1, d(a, e) = 2, d(a, f) = 2;$

$d(b, c) = 1, d(b, d) = 2, d(b, e) = 1, d(b, f) = 2;$

$d(c, d) = 2, d(c, e) = 2, d(c, f) = 1;$

$d(d, e) = 1, d(d, f) = 1;$

$d(e, f) = 1.$

Assim, podemos concluir que $e(v) = 2$ para todo vértice $v \in V(G)$.

Como todas as excentricidades são iguais temos que o diâmetro de G é $diam(G) = 2$ e o seu centro é o próprio conjunto $V(G)$, ou seja, $C(G) = \{V(G)\}$.