Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD2 - Segundo Semestre de 2010

Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (1.0) Usando a relação de Stifel mostre que

$$S = \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}C_n^k = C_n^1 - C_n^2 + \cdots + (-1)^{p-1}C_n^p = 1 + (-1)^{p-1}C_{n-1}^p$$

   com $n \geq 2$. Justifique.

   Resposta: Temos que $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ (Relação de Stifel). Logo:

$$\begin{aligned} S &= \underbrace{C_n^1 - C_n^2 + \cdots + (-1)^{p-1}C_n^p}_{\text{Aplicando a Relação de Stifel a cada termo temos:}} \\ &= (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) - (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2) + (C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3) + \cdots \\ &\quad \cdots + (-1)^{p-1}(C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p) \end{aligned}$$

   Observe que a utilização da relação de Stifel simplifica a expressão. Afinal, ao aplicá-la, obtemos termos de sinais opostos que são eliminados.

   Assim, temos:

$$S = \overbrace{1}^{C_{n-1}^0} + (-1)^{p-1} C_{n-1}^p.$$

2. (1.5) Usando o teorema do binômio de Newton determine o coeficiente de x^{100} no desenvolvimento de

$$(2x-1)^2(3-x)^{100}.$$

Justifique.

Resposta: Sabemos, pelo teorema do binômio de Newton, que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Então, utilizando o teorema temos:

$$\begin{aligned} (2x-1)^2 &= 4x^2 - 4x + 1 \\ (3-x)^{100} &= \textstyle\sum_{k=0}^{100} C_{100}^k\, 3^k\, (-x)^{100-k} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} (2x-1)^2(3-x)^{100} &= (4x^2-4x+1)(3-x)^{100} \\ &= 4x^2(3-x)^{100} - 4x(3-x)^{100} + (3-x)^{100} \end{aligned}$$

Vamos calcular o coeficiente de x^{100} em cada parcela da soma acima:

- $4x^2(3-x)^{100}$

$$\begin{aligned} 4x^2(3-x)^{100} &= 4x^2 \textstyle\sum_{k=0}^{100} C_{100}^k\, 3^k\, (-x)^{100-k} \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{100} 4\, C_{100}^k\, 3^k\, (-1)^{100-k} x^{100-k+2} \end{aligned}$$

Fazendo $100 - k + 2 = 100$ temos $k = 2$.
Logo, o coeficiente de x^{100} na expressão $4x^2(3-x)^{100}$ é:

$$4\, C_{100}^2\, 3^2\, (-1)^{100-2} = 4\ \frac{100!}{2!98!}\ 9 = 18\ \frac{100!}{98!} = 178200.$$

- $-4x\ (3-x)^{100}$

$$\begin{array}{rcl} -4x\ (3-x)^{100} & = & -4x\ \sum_{k=0}^{100} C_{100}^{k}\ 3^{k}\ (-x)^{100-k} \\ & = & \sum_{k=0}^{100} 4\ C_{100}^{k}\ 3^{k}\ (-1)\ (-1)^{100-k}\ x^{100-k+1} \end{array}$$

Fazendo $100-k+1=100$ temos $k=1$.
Assim, o coeficiente de x^{100} na expressão $-4x\ (3-x)^{100}$ é:

$$4\ C_{100}^{1}\ 3\ (-1)^{100} = 12\ \frac{100!}{1!(100-1)!} = 12\ \frac{100!}{99!} = 12 \times 100 = 1200.$$

- $(3-x)^{100}$

$$\begin{array}{rcl} (3-x)^{100} & = & \sum_{k=0}^{100} C_{100}^{k}\ (-x)^{100-k} \\ & = & \sum_{k=0}^{100} C_{100}^{k}\ (-1)^{100-k}\ x^{100-k} \end{array}$$

Fazendo $100-k=100$ temos $k=0$ e o coeficiente de x^{100} na expressão $(3-x)^{100}$ é:

$$C_{100}^{0}\ (-1)^{100-0} = \frac{100!}{0!(100-0)!} = 1.$$

Portanto, o coeficiente de x^{100} no desenvolvimento de $(2x-1)^2(3-x)^{100}$ é dado por:

$$178200 + 1200 + 1 = 179401.$$

3. (1.5)

(a) Marcela e Carlos tiveram 2 filhos. Vamos chamar estes filhos de *geração* 1. Cada um destes filhos também tiveram dois filhos, logo, a *geração* 2 contém 4 descendentes. Isso continua de geração em geração. Encontre a relação de recorrência para a *geração* n. Justifique.

Resposta: Vamos denotar por g_n o número de descendentes que a *geração* n contém.

Através do enunciado, é facil perceber que $g_1 = 2$, pois a geração 1 contém dois descendentes (os filhos de Marcela e Carlos). Note que cada integrante de uma *geração* tem dois filhos, gerando dois descendentes para próxima geração. Observe o esquema abaixo:

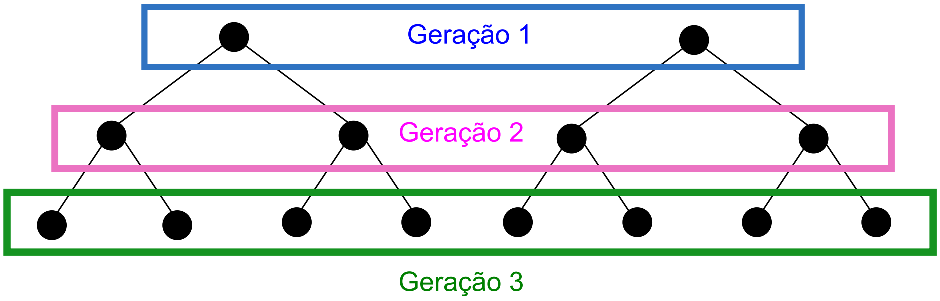

Figura 1: Esquema de gerações até g_3.

Como é possível notar no esquema, a *geração* 2 tem o dobro de descendentes da *geração* 1, já que cada descendente da *geração* 1 tem dois filhos. O mesmo acontece com a *geração* 3 em relação a *geração* 2, porque a cada dois descendentes da *geração* 3 temos um correspondente na *geração* 2. Utilizando este raciocínio, podemos perceber que $g_n = 2g_{n-1}$, para $n > 1$.
Portanto, temos a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{cases} g_1 & = & 2 \\ g_n & = & 2g_{n-1} \end{cases}$$

(b) Encontre a fórmula fechada da seguinte relação de recorrência.

$$S(n) = 3S(n-1) + 1 \quad \text{sendo} \quad S(0) = 1.$$

Justifique.

Resposta:

$$\begin{aligned}
S(n) &= 3S(n-1)+1\\
&= 3(3S(n-2)+1)+1\\
&= 3^2S(n-2)+3+1\\
&= 3^2(3S(n-3)+1)+3+1\\
&= 3^3S(n-3)+3^2+3+1\\
&= 3^3(3S(n-4)+1)+3^2+3+1\\
&\vdots\\
&= 3^iS(n-i)+3^{i-1}+3^{i-2}+\cdots+3^2+3^0\\
&= 3^iS(n-i)+\textstyle\sum_{k=0}^{i-1}3^k
\end{aligned}$$

Quando $n-i=0$, temos $i=n$ e $S(n)=3^nS(0)+\sum_{k=0}^{n-1}3^k$.

Mas $\sum_{k=0}^{n-1}3^k=\frac{(3^{n-1+1}-1)}{2}=\frac{3^n-1}{2}$, por ser o somatório dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão 3.

Logo,

$$S(n)=3^nS(0)+\frac{3^n-1}{2}$$

Como $S(O)=1$, temos:

$$\begin{aligned}
S(n) &= 3^n+\tfrac{3^n-1}{2}\\
&= \tfrac{2(3^n)+3^n-1}{2}\\
&= \tfrac{3^{n+1}-1}{2}
\end{aligned}$$

Portanto, a fórmula fechada para a relação de recorrência é $S(n)=\frac{3^{n+1}-1}{2}$.

4. (1.5) Descreva a matriz de adjacência do K_5 (o grafo completo com 5 vértices) e a matriz de incidência do grafo C_5 (o grafo ciclo com 5 vértices).

Resposta: Observe o grafo K_5 (grafo completo com 5 vértices) a seguir.

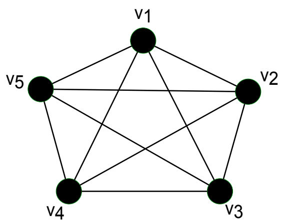

Figura 2: K_5.

Sabemos que a matriz de adjacência $A = (a_{ij})$ é definida da seguinte forma:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G); \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Dessa forma, obtemos a seguinte matriz:

$$A = \left[\begin{array}{c|ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ v_4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v_5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Agora observe o grafo C_5 (ciclo com 5 vértices).

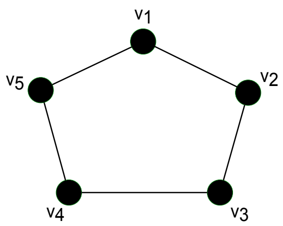

Figura 3: C_5.

Sabemos que a matriz de incidência $B = (b_{ij})$ é definida da seguinte forma:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } e_j \text{ é incidente a } v_i; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

De acordo com a figura 3, vamos rotular as arestas do grafo da seguinte maneira:

$$\begin{cases} e_i &= (v_i, v_{i+1}),\ 1 \leq i \leq 4; \\ e_5 &= (v_5, v_1) \end{cases}$$

Assim, a matriz de incidência do grafo C_5 é:

$$B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

5. (1.5) Desenhe dois grafos não isomorfos, regulares, com 8 vértices e 12 arestas cada. Justifique porque não são isomorfos.

Resposta: Primeiramente, como os grafos têm 8 vértices e 12 arestas e são d-regulares, precisamos descobrir d. Sabemos que

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

Então, $8d = 2(12) = 24$. Logo, $d = 3$.

Observe as figuras 2 e 3.

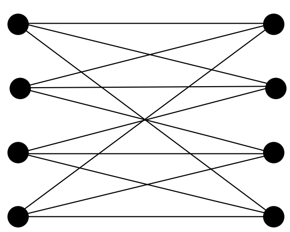

Figura 4: Grafo G.

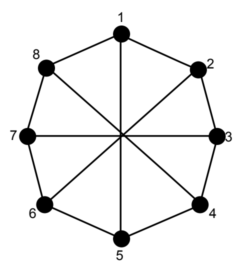

Figura 5: Grafo H.

G e H são 3-regulares com 8 vértices e 12 arestas. Entretanto, G é bipartido e H não o é, pois tem ciclos ímpares como por exemplo: 1 2 3 4 5 1 ou 1 5 6 7 8. Logo, nunca conseguiremos uma função que leve cada vértice de G em H e cada vértice de H em G de modo a preservar todas as adjacências. Logo, G e H não são isomorfos.

6. (1.5) Mostre que o grafo bipartido completo $K_{4,4}$ é euleriano e é também hamiltoniano.

Resposta: Observe o grafo $K_{4,4}$.

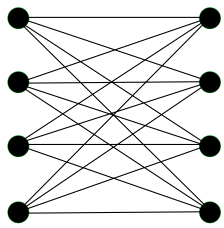

Figura 6: Grafo bipartido completo $K_{4,4}$.

$K_{4,4}$ é bipartido completo donde, $d(v) = 4, \ \forall \ v \ \in \ V$. Logo, o grafo em questão é euleriano pois cada um de seus vértices tem grau par.

Além disso, como $d(v) = 4$ e $n = 8$ temos que $d(v) \geq \frac{n}{2} = \frac{8}{2} = 4 \ \ \forall \ v \ \in V$.

Assim, pelo teorema de Dirac temos que $K_{4,4}$ é também hamiltoniano.

7. (1.5) Seja G um grafo planar com sequência de graus $(2, 2, 2, 2, 4, 4, 5, 5)$. Calcule quantas faces tem o grafo G. Justifique.

Utilizando a sequência de graus fornecida pelo enunciado da questão, podemos obter duas informações. A primeira delas é que o número de vértices desse grafo planar é 8. A segunda é o número de arestas que esse grafo tem. Para obter essa informação, vamos utilizar o seguinte teorema:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m, \text{ onde } m \text{ é o número de arestas em } G \text{ .}$$

Daí temos que $\underbrace{26}_{\sum_{v \in V} d(v)} = 2m \Rightarrow m = 13.$

Agora, como G é planar, podemos utilizar a relação de Euler para obter seu número de faces.

$$\begin{array}{rcl} f & = & m - n + 2 \\ f & = & 13 - 8 + 2 \\ f & = & 7 \end{array}$$

Portanto, G tem 7 faces.