Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AP2 - Primeiro Semestre de 2012

Nome -
Assinatura -

Observações:

1. Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular. Se necessário deixe o resultado indicado, como um produto ou quociente ou potência de números inteiros ou fatoriais.
2. Resultado sem indicação de como foi obtido, não será considerado.
3. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.
4. Você pode usar lápis para responder as questões.
5. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.
6. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

Questões:

1. (1.5) Determine o termo independente no desenvolvimento de

$$(2x^3 - \frac{3}{x})^{12}$$

Justifique a resposta.

Resposta: Pelo Teorema do Binômio de Newton temos a seguinte fórmula para o termo geral do desenvolvimento de $(a+b)^n$:

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$$

Vamos utilizar esta fórmula para determinar o termo independente do desenvolvimento, ou seja o termo em que x está elevado a 0. Nesta questão temos $a = 2x^3$, $b = -\frac{3}{x}$ e $n = 12$.

$$\begin{aligned}
T_{k+1} &= C_{12}^k (2x^3)^{12-k} \left(-\frac{3}{x}\right)^k \\
&= C_{12}^k 2^{12-k} x^{36-3k} (-1)^k \frac{3^k}{x^k} \\
&= C_{12}^k 2^{12-k} (-1)^k x^{36-3k} 3^k x^{-k} \\
&= C_{12}^k 2^{12-k} (-1)^k 3^k x^{36-4k}
\end{aligned}$$

Para que o termo T_{k+1} seja o termo independente deste desenvolvimento, x deve ter grau 0. Assim,

$$36 - 4k = 0 \Rightarrow k = 9.$$

Logo,

$$T_{10} = -C_{12}^9 \times 2^3 \times 3^9 = -\frac{12!}{9!3!} \times 2^3 \times 3^9$$

2. (1.5) Use o Teorema das diagonais para calcular a seguinte soma:

$$CR_{50}^{0} \; + \; CR_{50}^{1} \; + \; CR_{50}^{2} \; + \; \cdots + CR_{50}^{10}$$

Resposta: Sabemos que $CR_n^p = C_{n+p-1}^p$. Assim, vamos reescrever a equação acima:

$$C_{50+0-1}^{0} + C_{50+1-1}^{1} + C_{50+2-1}^{2} + \cdots + C_{50+10-1}^{10}$$

$$\underbrace{C_{49}^{0} + C_{50}^{1} + C_{51}^{2} + \cdots + C_{59}^{10}}_{\text{Teorema das diagonais}} = C_{60}^{10}$$

3. (1.0) Encontre a fórmula fechada da relação de recorrência:
$a_n = 2a_{n-1}$ para todo número natural n,
$a_0 = 2$
Justifique.

Resposta: Vamos utilizar o método da substituição.

$$\begin{array}{rcc} a_n & = & 2a_{n-1} \\ & = & 2(2a_{n-2}) \\ & = & 2^2 a_{n-2} \\ & = & 2^2(2a_{n-3}) \\ & = & 2^3 a_{n-3} \\ & \vdots & \\ & = & 2^i a_{n-i} \end{array}$$

Para que $n - i = 0$, $i = n$. Logo,

$$a_n = 2^n a_0$$

.

Como $a_0 = 2$, temos que $a_n = 2^n.2 = 2^{n+1}$.

4. (1.5) Considere a afirmação seguinte:

   "Se G é um grafo conexo bipartido planar com $|V(G)| = 10$ então $|E(G)| \leq 16$."

   Diga se é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

   Resposta: Verdadeira.

   Pela caracterização de grafos bipartidos temos:

$$G \text{ é bipartido} \Leftrightarrow G \text{ não contém ciclos ímpares.}$$

   Por hipóstese temos que G é um grafo bipartido. Logo, pela caracterização, G não possui ciclos ímpares e consequentemente, não possui triângulos. Assim, G é um grafo planar e sem triângulos. Portanto,

$$m \leq 2n - 4,$$

   onde $m = |E(G)|$ e $n = |V(G)|$.

   Como $n = 10$, temos que

$$m \leq 20 - 4$$

   Logo,

$$m \leq 16.$$

5. (4.5) As seguintes perguntas devem ser respondidas considerando o grafo $G = (V, E)$, sendo:
   $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ e
   $E = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a), (e, f), (f, g), (g, h), (h, e), (a, e), (b, f), (d, h), (c, g)\}$.

   (a) Desenhe uma representação plana de G.

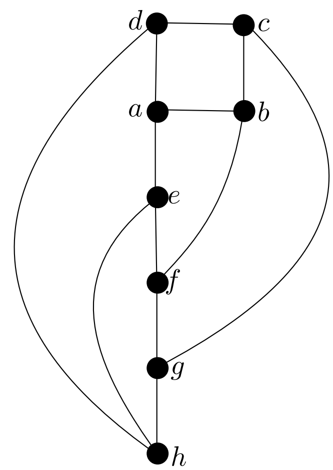

Figura 1: Grafo G.

(b) G é euleriano? Justifique.

Resposta: Não.
Temos a seguinte caracterização para grafos eulerianos:

Um grafo G é euleriano $\Leftrightarrow$ todos os seus vértices têm grau par.

Nesta questão, G é um grafo 3-regular e, portanto, todos os seus vértices têm grau ímpar, o que contradiz a caracterização de grafo euleriano.

(c) G é hamiltoniano? Justifique

Resposta: Sim, pois podemos exibir o seguinte ciclo hamiltoniano: $a, e, f, b, c, g, h, d, a$.

(d) G é bipartido? Por que? Caso a resposta seja positiva, dê a sua bipartição.

Resposta: Sim, pois todos os seus ciclos são C_4's, ou seja, são ciclos com 4 vértices. Assim, este grafo não possui ciclo ímpar e consequentemente é bipartido (veja questão 4). Portanto, podemos apresentar a seguinte bipartição (V_1, V_2) de seu conjunto de vértices V:

$V_1 = \{a, c, f, h\}$ e $V_2 = \{b, d, e, g\}$.

(e) Qual o diâmetro de G e qual o centro de G? Justifique.

Resposta: A excentricidade de um vértice v é a maior distância de v a todos os outros vértices w do grafo. Em outras palavras temos $e(v) = \max_{w \in V(G) \text{ e } w \neq v} d(v, w)$, onde $d(v, w)$ indica a distância de v a w.

O diâmetro de G é a maior execentricidade do grafo. Em outras palavras, o diâmetro dado por: $\{\max_{v \in V(G)} e(v)\}$.

O centro de um grafo G é dado pelo conjunto de vértices do grafo que tem a menor excentricidade, ou seja, $c(G) = \{v \in V(G) | e(v) \text{ é mínima } \}$.

Logo, para calcular o diâmetro e o centro de G, precisamos calcular a excentricidade de cada vértice e para tal, vamos calcular a distância entre cada par de vértices de G.

$d(a, b) = 1, d(a, c) = 2, d(a, d) = 1, d(a, e) = 1, d(a, f) = 2, d(a, g) = 3, d(a, h) = 2;$

$d(b, c) = 1, d(b, d) = 2, d(b, e) = 2, d(b, f) = 1, d(b, g) = 2, d(b, h) = 3;$

$d(c, d) = 1, d(c, e) = 3, d(c, f) = 2, d(c, g) = 1, d(c, h) = 2;$

$d(d, e) = 2, d(d, f) = 3, d(d, g) = 2, d(d, h) = 1;$

$d(e, f) = 1, d(e, g) = 2, d(e, h) = 1;$

$d(f, g) = 1, d(f, h) = 2,$

$d(g, h) = 1.$

Assim, podemos concluir que $e(v) = 3$ para todo vértice $v \in V(G)$.

Como todas as excentricidades são iguais temos que o diâmetro de G é 3 e o seu centro é o próprio conjunto $V(G)$.