Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP3 - Segundo Semestre de 2018

Questões:

1. (1,5) Mostre usando indução matemática que:

$$2 \times 2 \ + \ 3 \times 2^2 \ + \ 4 \times 2^3 \ + \ 5 \times 2^4 + \cdots + n \times 2^{n-1} = (n-1)2^n$$

para todo número natural maior ou igual a 2, $n \geq 2$.

Resposta: Seja $P(n) : 2 \times 2 \ + \ 3 \times 2^2 \ + \ 4 \times 2^3 \ + \ 5 \times 2^4 + \cdots + n \times 2^{n-1} = (n-1)2^n$, para todo número natural maior ou igual a 2, $n \geq 2$.

BASE DA INDUÇÃO: Devemos provar que $P(2) : 2 \times 2 = (2-1).2^2$. De fato, como $2 \times 2 = 4$ e $(2-1).2^2 = 1.2^2 = 4$, temos que $P(2)$ é verdadeira.

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Suponha $P(k) : 2 \times 2 \ + \ 3 \times 2^2 \ + \ 4 \times 2^3 \ + \ 5 \times 2^4 + \cdots + k \times 2^{k-1} = (k-1)2^k$ verdadeira.

PASSO DA INDUÇÃO: Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1) : 2 \times 2 \ + \ 3 \times 2^2 \ + \ 4 \times 2^3 \ + \ 5 \times 2^4 + \cdots + (k+1) \times 2^k = (k)2^{k+1}$ é verdadeira.

De fato,

$$\underbrace{2 \times 2 \ + \ 3 \times 2^2 \ + \ 4 \times 2^3 \ + \ 5 \times 2^4 + \cdots + k \times 2^{k-1}}_{\text{Hipótese de Indução}} + (k+1) \times 2^k =$$

$$(k-1)\,2^k + (k+1)\times 2^k =$$
$$2^k\,(k-1+k+1) =$$
$$2^k\,(2k) =$$
$$k\,2^{k+1}$$

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, temos que $P(n) : 2\times 2\ +\ 3\times 2^2\ +\ 4\times 2^3\ +\ 5\times 2^4 + \cdots + n\times 2^{n-1} = (n-1)2^n$, para todo número natural maior ou igual a 2, $n \geq 2$.

2. (1,5) Considerando todos os números naturais menores do que 1000, determine quantos deles podem ser expressos utilizando somente os dígitos $5, 6, 7, 8$ ou 9, se:

(a) os dígitos devem ser todos diferentes. Justifique.

Resposta: Esta questão deve ser analisada de acordo com o número de algarismos que o número poderá ter:

- 1 algarismo

  Como só podemos utilizar os dígitos $5, 6, 7, 8$ ou 9, temos 5 possibilidades neste caso, o que representa arranjo simples de 5 elementos tomados 1 a 1: $A_5^1 = \frac{5!}{(5-1)!} = \frac{5!}{4!} = 5$ números com um algarismo;
- 2 algarismos

  A primeira posição pode ser ocupada pelos dígitos $5, 6, 7, 8$ ou 9, já a segunda posição pode ser ocupada por qualquer um dos 4 algarismos restantes. Assim, pelo PM temos $5 \times 4 = 20$ números com 2 algarismos utilizando os dígitos $5, 6, 7, 8$ ou 9; Podemos observar que a análise pode ser feita por arranjo simples, ou seja, o problema pode ser resolvido por arranjo de 5 elementos tomados 2 a 2: $A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 5\times 4 = 20$ números com dois algarismos;
- 3 algarismos

  A primeira posição pode ser ocupada pelos 5 dígitos, a segunda posição pode utilizar todos os dígitos exceto o que foi utilizado na primeira posição e a última posição pode ser ocupada por qualquer um dos 3 dígitos restantes. Assim, pelo PM, temos $5 \times 4 \times 3 = 60$

números com 3 algarismos utilizando os dígitos $5, 6, 7, 8$ ou 9, ou seja, arranjo simples de 5 elementos tomados 3 a 3: $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$ números com três algarismo;

Pelo PA temos que podemos formar $5 + 20 + 60 = 85$ números com dígitos $5, 6, 7, 8$ ou 9, sem repetição dos mesmos, menores do que 1000.

(b) os dígitos podem aparecer repetidos. Justifique.

Resposta: Vamos solucionar esta questão contando a quantidade de números no intervalo $[1, 1000)$ de acordo com a quantidade de dígitos dos algarismos neste intervalo.

- 1 algarismo

  Neste caso, temos 5 números que utilizam apenas os dígitos $5, 6, 7, 8$ e 9; Assim, temos arranjos com repetição de 5 elementos tomados 1 a 1: $AR_5^1 = 5^1 = 5$ números com um algarismo onde apenas o $5, 6, 7, 8$ ou 9 figuram.

- 2 algarismos

  Com dois algarismos, temos 5 possibilidades de escolha para cada um dos dois algarismos, i.e., podemos escolher o $5, 6, 7, 8$ ou 9 para ocupar cada uma das duas posições. Então, pelo Princípio Multiplicativo, temos $5 \times 5 = 5^2$ números com dois algarismos onde apenas o $5, 6, 7, 8$ ou 9 figuram. Ou seja, temos arranjos com repetição de 5 elementos tomados dois a dois: $AR_5^2 = 5^2 = 25$;

- 3 algarismos

  Seguindo o mesmo raciocínio do caso anterior, para cada posição temos 5 dígitos possíveis. Assim, temos arranjos com repetição de 5 elementos tomados 3 a 3: $AR_5^3 = 5^3$ números com três algarismos onde apenas o $5, 6, 7, 8$ ou 9 figuram.

Então, pelo Princípio Aditivo, temos $5+5^2+5^3 = 155$ números no intervalo $[1, 1000)$ que são expressos utilizando somente os dígitos $5, 6, 7, 8$ e 9.

3. (1,0) Dada a linha 8 do triângulo de Pascal:

   1 8 28 56 70 56 28 8 1

   calcule a linha 9 usando as condições de fronteira e a Relação de Stifel. Justifique sua resposta.

   Resposta: Observe que a linha 9 é:

   $$C_9^0 \quad C_9^1 \quad C_9^2 \quad C_9^3 \quad C_9^4 \quad C_9^5 \quad C_9^6 \quad C_9^7 \quad C_9^8 \quad C_9^9$$

   A Relação de Stifel garante que $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$. Através desta relação, podemos calcular os elementos $C_9^2, C_9^3, C_9^4, \ldots, C_9^8$. Assim, utilizando as condições de fronteira (C.F.: $C_n^0 = C_n^n = 1$) e a Relação de Stifel, podemos obter a linha 9 do triângulo de Pascal:

   $$\underbrace{1}_{\text{C.F.}} \quad \underbrace{9}_{C_8^1+C_8^2} \quad \underbrace{36}_{C_8^2+C_8^3} \quad \underbrace{84}_{C_8^3+C_8^4} \quad \underbrace{126}_{C_8^4+C_8^5} \quad \underbrace{126}_{C_8^5+C_8^6} \quad \underbrace{84}_{C_8^6+C_8^7} \quad \underbrace{36}_{C_8^6+C_8^7} \quad \underbrace{9}_{C_8^7+C_8^8} \quad \underbrace{1}_{\text{C.F.}}$$

4. (1,5) Uma confeitaria produz 6 tipos de doces diferentes, oferecendo bandejas prontas contendo 30 doces. Quantas bandejas diferentes podem ser formadas quando:

   (a) a bandeja pode conter qualquer tipo de doce? Justifique.

   Resposta: Vamos modelar este problema da seguinte forma: enumerar os diferentes tipos de doces por $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Representamos por x_i a quantidade de doces do tipo i que está na bandeja, para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Essas variáveis serão todas não negativas, visto que cada tipo de doce possui de 0 ou mais unidades. Além disso, sabemos que o total de doces a serem colocados na bandeja é de 30 unidades. Assim, podemos escrever a seguinte equação:

   $$x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 30 \qquad (I)$$

   Esta questão pode ser resolvida por combinação com repetição. Logo, temos $CR_6^{30} = C_{6+30-1}^{30} = C_{35}^{30} = \dfrac{35!}{(35-30)!30!} = \dfrac{35!}{5!30!}$ soluções inteiras não negativas para a equação (I). Consequentemente, temos $\dfrac{35!}{5!30!}$

maneiras de montar uma bandeja com 30 doces utilizando a produção dos 6 tipos de doces.

(b) a bandeja deve conter pelo menos 3 doces de cada tipo? Justifique.

Resposta: Agora queremos resolver a mesma equação anterior, entretanto teremos a exigência de que cada tipo de doce tem pelo menos três unidades na bandeja. Neste caso, nossas variáveis x_i são todas positivas maiores ou iguais a três, ou seja, $x_i \geq 3$, $i = 1, \cdots, 6$. Para resolvermos esta equação utilizando o conceito de combinação com repetição temos que ter apenas variáveis maiores ou iguais a 0. Por isso, vamos reescrever x_i, $i = 1, \cdots, 6$ como $x_i = z_i + 3, i = 1, \cdots, 6$ e $z_i \geq 0$. Agora, vamos reescrever a equação (I) em função das variáveis z_i, $i = 1, \cdots, 6$.

$$(z_1 + 3) + (z_2 + 3) + \cdots + (z_6 + 3) = 30$$

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_7 + 18 = 30$$

Isto é,

$$\sum_{i=1}^{6} z_i = 12 \qquad\qquad (II)$$

Desta forma, temos $CR_6^{12} = C_{6+12-1}^{12} = C_{17}^{12} = \dfrac{17!}{(17-12)!12!} = \dfrac{17!}{5!12!}$ soluções inteiras não negativas para a equação (II) e consequentemente temos $\dfrac{17!}{5!12!}$ formas de montar uma bandeja com 30 doces de modo a conter pelo menos 3 doces de cada tipo.

5. (4,5) As perguntas seguintes são sobre grafos.

   (a) Seja G um grafo com 2 componentes conexos G_1 e G_2. Sabendo que G_1 tem a sequência de graus de vértices: $(2, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 5)$ e G_2 é uma árvore com 27 vértices, determine o número de vértices e o número de arestas de G. Justifique.

Resposta: Sejam G um grafo com n vértices e m arestas, com 2 componentes conexos G_1 e G_2, com n_1 e n_2 vértices, respectivamente, e m_1 e m_2 arestas, respectivamente.

Obtenção do número de vértices e do número de arestas do grafo G_1:
O número de vértices n_1 é dado pelo número de elementos na sequência de graus, já que cada elemento da sequência se refere a exatamente um vértice do grafo, portanto $n_1 = 8$.

Para encontrarmos o número de arestas m_1 do grafo, é suficiente utilizar a relação dada pelo Teorema do Aperto de Mãos:

$$\sum_{v \in V(G_1)} d(v) = 2m$$

onde $d(v)$ denota o grau de v. Dessa forma, temos que $2m = 2+2+2+2+5+5+5+5 = 28$ e, portanto, $\boxed{\text{m=14}}$.

Obtenção do número de vértices e do número de arestas do grafo G_2:
G_2 é uma árvore com 27 vértices, ou seja, $n_2 = 27$. Sabemos que uma árvore possui o número de arestas $m_2 = n_2 - 1$, isto é, $m_2 = 27 - 1 = 26$.

Como G_1 e G_2 são os únicos componentes conexos de G, então $n = n_1 + n_2 = 8 + 27 = 35$ vértices e $m = m_1 + m_2 = 14 + 26 = 40$ arestas.

(b) Sabemos pelo teorema de Dirac, que dado um grafo G com n vértices, $n \geq 3$, se $d(v) \geq \frac{1}{2}n$ então G é hamiltoniano. Essa condição é necessária para G ser hamiltoniano? Justifique.

Resposta: Essa condição não é necessária. Observe o contra-exemplo da Figura 1. Temos um ciclo hamiltoniano (o próprio grafo) de 6 vértices e cada vértice tem grau $2 < \frac{6}{2}$.

Podemos concluir que $d(v) \geq \frac{1}{2}n$ não é condição necessária para G

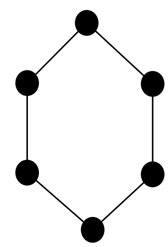

Figura 1: C_6 é hamiltoniano, mas não satisfaz a condição descrita.

ser hamiltoniano, mas observe que essa condição é suficiente para um grafo ser hamiltoniano.

(c) Defina o que é um grafo euleriano, e enuncie a sua caracterização. O grafo bipartido completo $K_{2,4}$ é euleriano? Justifique.

Resposta: Um grafo conexo G é euleriano se existe um trajeto fechado que inclui cada aresta de G.

O teorema de Euler caracteriza os grafos Eulerianos da seguinte forma: Um grafo G é Euleriano se e somente se todo vértice de G tem grau par.

Observe a Figura 2. Note que no grafo $K_{2,4}$ os vértices ou têm grau 4, ou têm grau 2. Portanto, o $K_{2,4}$ é Euleriano.

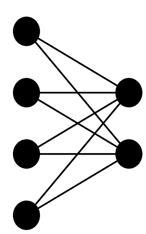

Figura 2: Grafo $K_{2,4}$.

(d) O grafo bipartido completo $K_{2,4}$ é planar? Justifique.

Resposta: Sim, pois a Figura 3 abaixo apresenta uma representação plana do grafo $K_{4,2}$, ou seja, uma representação em que não há cruzamento de arestas. Logo $K_{4,2}$ é um grafo planar.

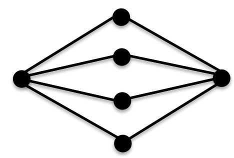

Figura 3: Grafo planar $K_{4,2}$.

(e) Dê um exemplo de um digrafo D com pelo menos 7 vértices tal que D seja unilateralmente conexo e não seja fortemente conexo. Justifique seu exemplo.

Resposta: Um digrafo D é unilateralmente conexo se possui entre quaisquer dois vértices $v, w \in V$ caminho direcionado em pelo menos uma direção ($v \to w$ ou $w \to v$).

Um digrafo D é fortemente conexo quando para todo par de vértices $v, w \in V(G)$ existir um caminho em D de v para w e também de w para v.

Observe que a Figura 4 possui um digrafo D com 7 vértices que é unilateralmente conexo, pois possui caminho direcionado em pelo menos uma direção para quaisquer dois vértices. Mas D não é fortemente conexo, pois existem pares de vértices de $V(D)$ que não possuem caminho para ambas as direções, como por exemplo, os vértices a e c (existe caminho de c para a , mas não existe caminho de a para c).

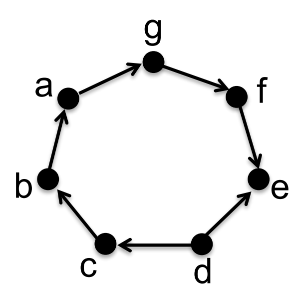

Figura 4: Digrafo D é unilateralmente conexo e não é fortemente conexo