Gabarito da AP2 de Fundamentos de Algoritmos para Computação

Questões:

1. (1.0) Use o teorema das colunas para mostrar que:

$$\tfrac{1}{5!}\left(5! + 6! + \tfrac{7!}{2!} + \ldots + \tfrac{20!}{15!}\right) = \tfrac{21!}{6!15!}$$

   Resposta:

$$\begin{array}{rcll}
\tfrac{1}{5!}\left(5! + 6! + \tfrac{7!}{2!} + \ldots + \tfrac{20!}{15!}\right) & = & \tfrac{5!}{0!5!} + \tfrac{6!}{1!5!} + \tfrac{7!}{2!5!} + \ldots + \tfrac{20!}{15!5!} & = \\
 & = & \underbrace{C_5^5 + C_6^5 + C_7^5 + \ldots + C_{20}^5}_{Teorema \quad das \quad colunas} & = \\
 & = & C_{21}^6 & = \\
 & = & \tfrac{21!}{6!15!} &
\end{array}$$

2. (1.0) Use o binômio de Newton para mostrar que para todo número natural n, vale que:

$$\textstyle\sum_{k=0}^{n} C(n,k)(-1)^k = 0.$$

   Resposta:

$$\begin{array}{rcll}
\textstyle\sum_{k=0}^{n} C(n,k)(-1)^k & = & \underbrace{\sum_{k=0}^{n} C(n,k)(1)^{n-k}(-1)^k}_{Pelo \quad binômio \quad de \quad Newton} & = \\
 & = & (1 + (-1))^n & = \\
 & = & 0^n & = \\
 & = & 0 &
\end{array}$$

3. (1.5) Encontre a fórmula fechada da relação de recorrência:
$a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$
$a_0 = 1$
Descreva o processo utilizado para chegar à fórmula.

Resposta:

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + 2(n-1) & = \\
&= [a_{n-2} + 2(n-1-1)] + 2(n-1) & = \\
&= a_{n-2} + 2(n-2) + 2(n-1) & = \\
&= [a_{n-3} + 2(n-2-1)] + 2(n-2) + 2(n-1) & = \\
&= a_{n-3} + 2(n-3) + 2(n-2) + 2(n-1) & = \\
&\vdots \\
&= a_{n-i} + 2(n-i) + 2(n-i+1) + \ldots + 2(n-2) + 2(n-1)
\end{aligned}$$

Para que $n - i = 0$ então $n = i$.

Tomemos $n = i$, logo:

$$\begin{aligned}
a_n &= a_0 + 2.0 + 2.1 + \ldots + 2(n-2) + 2(n-1) & = \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2k & = \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k & = \\
&= 1 + n(n-1)
\end{aligned}$$

Temos que $\sum_{k=1}^{n-1} 2k = n(n-1)$, pois:

$$
\begin{array}{rclr}
\sum_{k=1}^{n-1} 2k & = & \sum_{k=1}^{n-1} 2k\frac{(k-1)!}{(k-1)!} & = \\
& = & \sum_{k=1}^{n-1} 2\frac{k!}{1!(k-1)!} & = \\
& = & \sum_{k=1}^{n-1} 2C_k^1 & = \\
& = & 2 \quad \underbrace{\left(C_1^1 + C_2^1 + \ldots + C_{n-1}^1\right)}_{\textit{Pelo teorema das colunas, quando } r=1} & = \\
& = & 2C_n^2 & = \\
& = & 2\frac{n!}{2!(n-2)!} & = \\
& = & 2\frac{n!}{2(n-2)!} & = \\
& = & 2\frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} & = \\
& = & 2\frac{n(n-1)}{2} & = \\
& = & n(n-1) &
\end{array}
$$

Outro raciocínio, $\sum_{k=1}^{n} = 1 + 2 + \ldots + (n-1)$ são os primeiros $(n-1)$ termos de uma progressão aritmética, logo temos que $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$, logo, $\sum_{k=1}^{n-1} 2k = 2\sum_{k=1}^{n-1} k = 2\frac{n(n-1)}{2} = n(n-1)$.

4. (1.0) Quantas arestas tem um grafo 6-regular e com 20 vértices? Justifique:

   Resposta: Temos que em qualquer grafo G, a soma dos graus de todos os vértices é igual a duas vezes o número de arestas, isto é,

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$$

   .

   Como o grafo é 6-regular, temos que para todo vértice v do grafo, $d(v) = 6$, logo, $\sum_{v=1}^{20} d(v) = 20 \times 6 = 2|E(G)| \Rightarrow |E(G)| = 60$.

5. (1.5) Seja G uma floresta com 15 arestas e 3 componentes conexos. Quantos vértices G possui? Justifique.

   Resposta: Temos que $|E(G)| = |V(G)| - |w(G)|$, onde $|E(G)|$ é o número de arestas, $|V(G)|$ é o número de vértices e $|w(G)|$ é o número de componentes conexos, pois:

Se G é uma floresta então cada componente conexo G_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ é acíclico e conexo, isto é, G_i é uma árvore, daí por teorema, G_i possui $m_i = n_i - 1$ arestas, onde n_i é o número de vértices de G_i, logo:

$$
\begin{gathered}
|E(G)| = m_1 + m_2 + \ldots + m_k \\
\Downarrow \\
|E(G)| = n_1 - 1 + n_2 - 1 + \ldots + n_k - 1 \\
|E(G)| = n_1 + n_2 + \ldots + n_k - \underbrace{1 - 1 - \ldots - 1}_{k\ vezes} \\
|E(G)| = n_1 + n_2 + \ldots + n_k - k \\
|E(G)| = |V(G)| - |w(G)|
\end{gathered}
$$

Logo, se G possui 15 arestas e 3 componentes conexos então G possui $15 = |V(G)| - 3 \Rightarrow |V(G)| = 18$ vértices.

6. (4.0) Considere o grafo bipartido completo $G = K_{4,6}$. Responda as seguintes perguntas:

   Como $G = K_{4,6}$ é um grafo bipartido completo então o conjunto de vértices admite uma bipartição (A, B), onde $|A| = 4$, $|B| = 6$, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$.

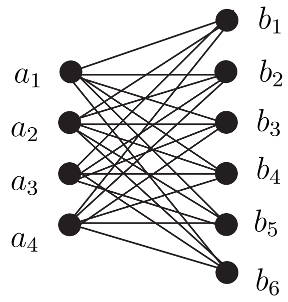
   O grafo abaixo ilustra o grafo $G = K_{4,6}$:

   (a) G é planar? Justifique.

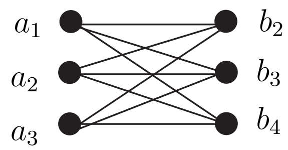
   Resposta: Não, pois possui como subgrafo o $K_{3,3}$ (vide figura abaixo) que não é planar e pelo teorema de Kuratowski temos que G não é planar.

   (b) G é euleriano? Justifique.

$K_{4,6}$



$K_{3,3}$



Resposta: Sim. Sabemos que um grafo G é euleriano se ele admite um circuito euleriano, isto é, um circuito que passe por todas as arestas exatamente uma vez. E além disso, temos a seguinte caracterização para os grafos eulerianos: Um grafo é euleriano se e somente se o grau de todos os seus vértices é par.

Temos no grafo G que $d(a_1) = d(a_2) = d(a_3) = d(a_4) = 6$ e $d(b_1) = d(b_2) = d(b_3) = d(b_4) = d(b_5) = d(b_6) = 4$, isto é, todos os vértices possuem grau par, satisfazendo a caracterização de grafos eulerianos. Podemos verificar, também, que G admite o seguinte circuito euleriano: $a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4a_3b_5a_4b_6a_3b_1a_4b_2a_1b_3a_2\, b_4a_1b_5a_2b_6a_1$.

(c) G é hamiltoniano? Justifique.

Resposta: Não. Como como o grafo é bipartido completo, então se existisse um ciclo hamiltoniano, esse ciclo deveria conter todos os vértices de G, alternadamente (pois só temos arestas com extremos em A e B). Sem perda de generalidade, suponhamos que o ciclo C seja da forma $a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4a_ib_5a_jb_6a_1$. Mas, observe que i ou j teriam que variar entre 1 e 4, logo haveria repetições de vértices de A, ou seja, C não seria um ciclo. Conseqüentemente, G não admite ciclo hamiltoniano, logo G não é hamiltoniano.

(d) G tem algum vértice universal? Justifique.

Resposta: Não, pois dizemos que um vértice v é universal quando $N(v) = V - \{v\}$, e temos que $N(a_1) = N(a_2) = N(a_3) = N(a_4) = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$ e $N(b_1) = N(b_2) = N(b_3) = N(b_4) = N(b_5) = N(b_6) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Logo, G não possui vértice universal.

(e) Qual é o diâmetro e o centro de G? Justifique.

Resposta: A excentricidade de um vértice v de G, $e(v)$, é o valor da maior distância de v aos outros vértices de G, isto é, $e(v) = max_{w \in V(G)}\{d(v, w)\}$. O diâmetro de um grafo G é o valor da maior excentricidade, isto é, $diam(G) = max_{v \in (G)}\{e(G)\}$.

Como $d(a_i, a_j) = 2$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq 4$, $d(b_i, b_j) = 2$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq 6$ e $d(a_i, b_j) = 1$, $1 \leq i \leq 4$ e $1 \leq j \leq 6$. Temos então que $e(a_i) = e(b_j) = 2$, com $1 \leq i \leq 4$ e $1 \leq j \leq 6$.

Logo, $diam(G) = 2$.

E, o centro de um grafo G é o conjunto dos vértices de G que tem a menor excentricidade, isto é, $c(G) = \{v \in V(G) \backslash e(v) \text{ é mínima}\}$.

Então, $c(G) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\} = V(G)$.