Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AP2 - Segundo Semestre de 2013

Nome -
Assinatura -

Observações:

1. Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular. Se necessário deixe o resultado indicado, como um produto ou quociente ou potência de números inteiros ou fatoriais.
2. Resultado sem indicação de como foi obtido, não será considerado.
3. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.
4. Você pode usar lápis para responder as questões.
5. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.
6. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

Questões:

1. (1.0) Use o teorema das diagonais para calcular a seguinte soma:

$$C_{52}^{2} + C_{53}^{3} + C_{54}^{4} + \cdots + C_{70}^{20}$$

Resposta: Pelo Teorema das Diagonais sabemos que:

$$C_{n}^{0} + C_{n}^{1} + \cdots + C_{n+r}^{r} = C_{n+r+1}^{r}$$

Assim, podemos garantir que:

$$C_{50}^{0} + C_{51}^{1} + C_{52}^{2} + C_{53}^{3} + C_{54}^{4} + \cdots + C_{70}^{20} = C_{71}^{20}$$

Logo,

$$C_{52}^{2} + C_{53}^{3} + C_{54}^{4} + \cdots + C_{70}^{20} = C_{71}^{20} - C_{50}^{0} - C_{51}^{1}$$

$$C_{52}^{2} + C_{53}^{3} + C_{54}^{4} + \cdots + C_{70}^{20} = \frac{71!}{20!51!} - 1 - 51$$

$$C_{52}^{2} + C_{53}^{3} + C_{54}^{4} + \cdots + C_{70}^{20} = \frac{71!}{20!51!} - 52$$

2. (1.5) Determine o termo independente no desenvolvimento do binômio de Newton correspondente a:

$$(\frac{3}{x^2} - 2x^3)^{15}$$

Justifique.

Resposta: A fórmula para o termo geral do desenvolvimento do Binômio de Newton de $(a+b)^n$ é dada por: $T_{k+1} = C_n^k \ a^{n-k} \ b^k$, para $k = 0, 1, \cdots, n$. Neste caso, temos que determinar o valor de k de modo que o $(k+1)$-ésimo termo deste desenvolvimento seja o termo independente. Note que $a = \frac{3}{x^2} = 3x^{-2}$ e $b = -2x^3$ e $n = 15$. Assim:

$$T_{k+1} = C_{15}^{k}\ (3x^{-2})^{15-k}\ (-2x^3)^k$$

$$T_{k+1} = C_{15}^{k}\ 3^{15-k}x^{-30+2k}\ (-2)^k x^{3k}$$

$$T_{k+1} = C_{15}^{k}\ 3^{15-k}(-2)^k x^{-30+5k}$$

Como queremos o termo independente temos:

$$-30 + 5k = 0$$

$$k = 6$$

Logo, o termo procurado é:

$$T_7 = C_{15}^{6}\ 3^9 2^6 x^0$$

$$T_7 = \frac{15!}{6!9!} 3^9 2^6$$

3. (1.5) Encontre a fórmula fechada da seguinte relação de recorrência, usando substitução regressiva:
   $a_n = 3a_{n-1} + 1 \qquad n$ natural, $n \geq 1$
   $a_0 = 1$
   Descreva o processo utilizado para chegar à fórmula.

   Resposta: Utilizando o método da Substituição regressiva temos:

$$
\begin{aligned}
a_n &= 3a_{n-1}+1 \\
&= 3\underbrace{(3a_{n-2}+1)}_{a_{n-1}}+1 \\
&= 3^2a_{n-2}+3+1 \\
&= 3^2\underbrace{(3a_{n-3}+1)}_{a_{n-2}}+3+1 \\
&= 3^3a_{n-3}+3^2+3+1 \\
&\vdots \\
&= 3^ia_{n-i}+3^{i-1}+3^{i-2}+\cdots+3+3^0
\end{aligned}
$$

Fazendo $n-i=0$ temos que $i=n$ e sabendo que $a_0=1$, temos:

$$
\begin{aligned}
a_n &= 3^na_0+3^{n-1}+3^{n-2}+\cdots+3^0 \\
&= \underbrace{3^n+3^{n-1}+3^{n-2}+\cdots+3^0}_{\text{soma de uma P.G. finita de razão 3}} \\
&= \tfrac{3^{n+1}-1}{3-1} \\
&= \tfrac{3^{n+1}-1}{2}
\end{aligned}
$$

Portanto, a fórmula fechada para a relação de recorrência é $a_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}, n \geq 1, a_0 = 1$.

4. (1.5) Seja G um grafo conexo, planar, 3-regular (regular de de grau 3), com 21 arestas. Determine o número de faces de G. Justifique.

   Resposta: Pelo Teorema de Euler para grafos planares temos:

$$f = m - n + 2,$$

onde f é o número de faces, m o número de arestas, que neste caso é 21 e n é o número de vértices, que precisamos descobrir para utilizar esta fórmula.

Note que o grafo é 3-regular, portanto todos os seus vértices têm grau 3, isto é, $d(v) = 3 \forall v \in V$. Assim, podemos utilizar o Teorema do Aperto de Mãos para descobrirmos o valor de n.

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

$$3 \times n = 2 \times 21$$

$$n = 14$$

Daí,

$$f = 21 - 14 + 2$$

$$f = 9$$

Logo, G tem 9 faces.

5. (4.5) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é **FALSA** ou **VERDADEIRA**. Se for verdadeira, prove. Se for falsa, dê um contra-exemplo (o contra-exemplo deve ser justificado).

   (a) Se dois grafos G_1 e G_2 possuem a mesma sequência de graus de vértices então eles são isomorfos.

   Resposta: Falso. Observe o seguinte contra exemplo:

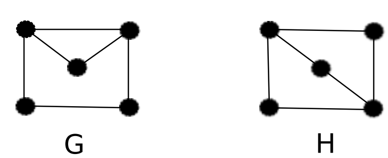

Figura 1: G e H com mesma sequência de graus de vértices mas não isomorfos.

Os grafos G e H têm a mesma sequência de graus dos vértices: $(2, 2, 2, 3, 3)$. Mas G e H não são isomorfos. De fato, note que em G temos exatamente dois vértices de grau 3 adjacentes entre si enquanto que em H os dois vértices de grau grau 3 tais vértices não são adjacentes.

(b) O grafo bipartido completo $K_{4,4}$ é euleriano.

Resposta: Verdadeiro. Um grafo é Euleriano se e somente se todos os seus vértices têm grau par. O grafo $K_{4,4}$ é um grafo 4-regular, isto é, todos os seus vértices têm grau 4, par, logo é Euleriano.

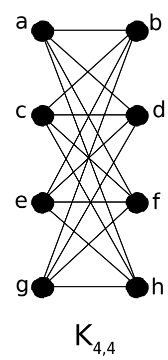

Figura 2: Grafo $K_{4,4}$.

(c) Se G é um grafo conexo então o seu complemento $\overline{G}$ é desconexo.

Resposta: Falso. Observe o seguinte contra exemplo:

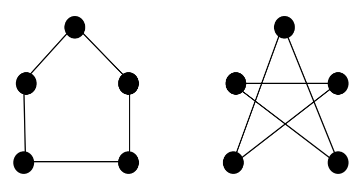

Figura 3: G conexo e $\overline{G}$ também conexo.

d) Se G é um grafo hamiltoniano com 25 vértices então o seu maior ciclo tem exatamente 25 arestas.

Resposta: Verdadeiro. Se G é um grafo Hamiltoniano então ele possui um ciclo que inclui todos os seus vértices. Portanto, o maior ciclo de G possui 25 vértices, e consequentemente 25 arestas.

(e) Se um digrafo é unilateralmente conexo então seu grafo subjacente é conexo.

Resposta: Verdadeiro. Um digrafo é unilateralmente conexo se possui entre quaisquer dois vértices $v, w \in V$ caminho direcionado em pelo menos uma direção ($v \rightarrow w$ ou $w \rightarrow v$). Sendo assim, se removermos as direções das arestas (para obtermos o grafo subjacente) teremos caminho entre quaisquer dois pares de vértices, o que caracteriza que o grafo subjacente é conexo.