Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AD2 - Primeiro Semestre de 2015

Questões:

1. (1.5) Usando o Teorema das Colunas calcule a seguinte soma:

$$S = 3 \times 4 \times 5 \ + \ 4 \times 5 \times 6 \ + \ 5 \times 6 \times 7 \ + \ \cdots + 31 \times 32 \times 33$$

Justifique.

Resposta: Seja $S = 3 \times 4 \times 5 \ + \ 4 \times 5 \times 6 \ + \ + \ \cdots + 31 \times 32 \times 33$. Observe que podemos reescrever S da seguinte maneira:

$$S = 3!\left(\frac{5!}{2!3!} + \frac{6!}{3!3!} + \cdots + \frac{33!}{30!3!}\right).$$

Mas,

$$3!\left(\frac{5!}{2!3!} + \frac{6!}{3!3!} + \cdots + \frac{33!}{30!3!}\right) = 6(C_5^3 + C_6^3 + \cdots + C_{33}^3) \quad (I).$$

O Teorema das Colunas garante que:

$$C_r^r + C_{r+1}^r + \cdots + C_n^r = C_{n+1}^{r+1}.$$

Observe que não podemos aplicar o teorema das colunas diretamente à soma (I), pois estÃ¡ faltando o seguinte somatório: $C_3^3 + C_4^3$. Assim, temos:

$$S = 6[C_3^3 + C_4^3] + 6(C_5^3 + C_6^3 \cdots + C_{33}^3) - 6[C_3^3 + C_4^3]$$
$$S = 6[C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 + C_6^3 \cdots + C_{33}^3] - 6[C_3^3 + C_4^3]$$

Agora podemos aplicar o Teorema das Colunas com $r = 3$ e $n = 33$:

$$S = 6\underbrace{C_{34}^4}_{\text{TC}} - 6[C_3^3 + C_4^3] = 6[C_{34}^4 - (C_3^3 + C_4^3)].$$

Contudo, nosso problema ainda não foi resolvido, visto que ainda resta uma soma a ser solucionada. Note que, para resolvê-la, podemos utilizar diretamente o Teorema das Colunas com $r = 3$ e $n = 4$. Desta forma, temos:

$$S = 6(C_{34}^4 - \underbrace{C_5^4}_{\text{TC}}).$$

$$S = 6\left(\frac{34!}{30!4!} - \frac{5!}{1!4!}\right)$$

$$S = 6\left(\frac{34 \times 33 \times 32 \times 31}{24} - 5\right)$$

$$S = \left(\frac{34 \times 33 \times 32 \times 31}{4} - 30\right)$$

$$S = 278226$$

2. (1.5) Determine o coeficiente de x^{10} no desenvolvimento do binômio de Newton:

$$(\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{1}{x^2})^{90}$$

Justifique.

Resposta: A fórmula para o termo geral do desenvolvimento do Binômio de Newton de $(a+b)^n$ é dada por: $T_{k+1} = C_n^k \ a^{n-k} \ b^k$, para $k = 0, 1, \cdots, n$. Neste caso temos $n = 90$, $a = \frac{\sqrt{x}}{3}$ e $b = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$.

$$\begin{aligned}
T_{k+1} &= C_{90}^k \ (\tfrac{\sqrt{x}}{3})^{90-k} \ (-x^{-2})^k \\
&= C_{90}^k (\sqrt{x})^{90-k} \ (3^{-1})^{90-k} \ (-1)^k (x^{-2k}) \\
&= C_{90}^k (3^{-90+k}) \ (-1)^k \ (x^{\frac{1}{2}})^{90-k} \ (x^{-2k}) \\
&= C_{90}^k (3^{k-90}) \ (-1)^k \ (x^{\frac{90-k}{2}}) \ (x^{-2k}) \\
&= C_{90}^k (-1)^k \ (3^{k-90}) \ (x^{\frac{90-k}{2}-2k}) \\
&= C_{90}^k (-1)^k \ (3^{k-90}) \ (x^{\frac{90-k-4k}{2}}) \\
&= C_{90}^k (-1)^k \ (3^{k-90}) \ (x^{\frac{90-5k}{2}})
\end{aligned}$$

Como queremos o coeficiente de x^{10}, temos:

$$\frac{90-5k}{2} = 10 \Rightarrow 90 - 5k = 20 \Rightarrow 5k = 70 \Rightarrow k = 14$$

Logo, $k = 14$.

Portanto, $T_{15} = C_{90}^{14}(-1)^{14}\,(3^{14-90})\,x^{10} = \frac{90!}{76!14!}\,(\frac{1}{3^{76}})\,x^{10}$ e, consequentemente, o coeficiente de x^{10} é $\frac{90!}{76!14!}\,(\frac{1}{3^{76}})$.

3. (1.5) Determine a fórmula fechada da seginte relação de recorrência com as condições iniciais dadas:

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{4}, \quad a_0 = 1, \;\; a_1 = 0, \;\; \text{para } n \geq 2$$

Justifique.

Observação: Para a obtenção da fórmula, é conveniente considerar, o caso em que n é par e o caso em que n é ímpar.

Resposta:

Utilizando o método da Substituição regressiva temos:

$$\begin{array}{rclclclcl}
a_n & = & \frac{1}{4}a_{n-2} & = & \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}a_{n-4}\right) & & & & = \\
& = & \frac{1}{4^2}a_{n-4} & = & \frac{1}{(2^2)^2}a_{n-4} & & & = \frac{1}{2^4}a_{n-4} & = \\
& = & \frac{1}{4^2}(\frac{1}{4}\;a_{n-6}) & = & \frac{1}{4^3}a_{n-6} & = & \frac{1}{(2^2)^3}a_{n-6} & = \frac{1}{2^6}a_{n-6} & = \\
& = & \frac{1}{4^3}\left(\frac{1}{4}\;a_{n-8}\right) & = & \frac{1}{4^4}a_{n-8} & = & \frac{1}{(2^2)^4}a_{n-8} & = \frac{1}{2^8}a_{n-8} & = \\
& & & \vdots & & & & & \\
& = & \frac{1}{2^i}a_{n-i} & & & & & &
\end{array}$$

sendo i um número par ($i = 2 \times 1,\ i = 2 \times 2,\ i = 2 \times 3,\ i = 2 \times 4, \cdots$).

Se n é par, então observemos que $n-2, n-4, n-6, \cdots, n-i$ são números pares pois i é par. Logo devemos fazer $n - i = 0$ por ser 0 par, portanto resulta $i = n$, obtendo:

$$a_n = \frac{1}{2^n} a_0 = \frac{1}{2^n}$$

Se n é ímpar, então $n-2, n-4, n-6, \cdots, n-i$ são números ímpares pois i é par . Logo devemos fazer $n-i = 1$ e portanto resulta $i = n-1$, obtendo:

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}} a_1 = 0$$

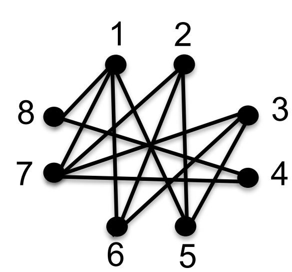
Assim,

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}, & \text{se n é par} \\ 0, & \text{se n é ímpar} \end{cases}$$

4. (3.0) Considere o grafo $G = (V, E)$, onde
   $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e
   $V(G) = \{(1,5), (1,6), (1,7), (1,8), (2,5), (2,6), (2,7), (3,5), (3,6), (3,7), (4,7), (4,8)\}$.

   (a) Desenhe o grafo G

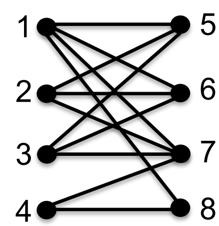
   Resposta: A representação geométrica é:



(b) G é bipartido? Justifique.

Resposta: Sim, pois G não possui ciclos ímpares (G é bipartido se e somente se G não possui ciclos ímpares). Além disso, podemos exibir a seguinte bipartição (V_1, V_2) dos vértices de G:
$V_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ e $V_2 = \{5, 6, 7, 8\}$.

A figura abaixo ilustra o grafo G com as duas bipartições V_1 e V_2.



(c) G é euleriano? Justifique.

Resposta: Não. O Teorema de Euler nos diz que um grafo é euleriano se e somente se todos os seus vértices têm grau par.
Como neste caso, $d(2) = d(3) = d(5) = d(6) = d(7) = 3$, temos que o grafo em questão não é euleriano.

(d) G é hamiltoniano? Justifique.

Resposta: Sim, pois podemos exibir o seguinte ciclo hamiltoniano (ciclo que passa por todos os vértices do grafo): 1 8 4 7 3 6 2 5 1.

(e) G é planar? Justifique.

Resposta: Não. Observe que o conjunto de vértices $1, 2, 3, 5, 6, 7$ induz um $K_{3,3}$. O teorema de Kuratowski garante que um grafo é planar se e somente se não possui subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$. Sendo assim, o grafo em questão não é planar.

5. (1.5) Uma árvore com exatamente um vértice de grau 2 (a raiz), e tal que todos os outros vértices (excluindo as folhas) possuem grau 3 é

chamada de *árvore binária*. Mostre que o número de vértices de uma árvore binária é ímpar.

Resposta 1: Considere uma árvore com exatamente um vértice de grau 2 (a raiz), e todos os outros vértices (excluindo as folhas) com grau 3.

Observe que existe exatamente um vértice de grau par, que é a raiz. O restante dos vértices possuem grau 3 ou grau 1 (folhas), que é ímpar. Mas, sabemos que o número de vértices com grau ímpar é par. Portanto, se $n-1$ é par então n é ímpar.

Resposta 2: Considere uma árvore com exatamente um vértice de grau 2 (a raiz), e todos os outros vértices (excluindo as folhas) com grau 3.

Vamos analisar todos os vértices exceto a raiz. Observe que todo nível na árvore possui um número par de vértices, já que todos esses vértices possuem grau 3 (excluindo o nível das folhas), e, portanto, possuem 2 filhos na árvore. Se cada nó interno na árvore possui dois filhos, temos que cada nível da árvore possui um número par de vértices (exceto o das folhas). E o nível das folhas terá exatamente o mesmo número de vértices que o nível anterior, isto é, também será par. Em consequência disso, podemos garantir que a soma de todos vértices que estão nos níveis que não seja o da raiz é par, e que quando somado ao vértice raiz, o número de vértices da árvore toda é ímpar.

6. (1.0) Considere 2 grafos G e H com o mesmo conjunto de vértices $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ e tal que todos os vértices possuem grau 3. Podemos afirmar que G e H são isomorfos? Se a resposta é **SIM**, prove. Se a resposta é **Não**, dê um contra-exemplo (o contra-exemplo deve ser justificado).

   Resposta: Não. Observe a Figura 1. Note que ambos os grafos G_1 e G_2 têm 6 vértices, 9 arestas e a seguinte sequência de graus dos vértices: $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$. Contudo, G_1 e G_2 não são isomorfos pois em G_1 temos um triãngulo enquanto que em G_2 não temos triângulos.

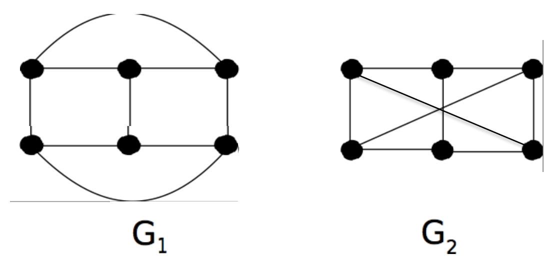


Figura 1: Grafos G_1 e G_2 não isomorfos com mesmo número de vértices e arestas e mesma sequência de graus de vértices.