Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD2 -1 Primeiro Semestre de 2019

Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (1.5) Usando o Teorema das Linhas calcule a seguinte soma:

$$S = \sum_{k=1}^{20} (k+1) C_{20}^{k}.$$

Justifique.

Resposta: Vamos desenvolver o somatório para então podermos aplicar o Teorema das Linhas.

$$
\begin{aligned}
S &= \textstyle\sum_{k=1}^{20}(k+1)C_{20}^{k}\\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{20} kC_{20}^{k} + \sum_{k=1}^{20} C_{20}^{k}\\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{20} k\frac{20!}{(20-k)!k!} + \sum_{k=1}^{20} C_{20}^{k}\\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{20} k\frac{20!}{(20-k)!k(k-1)!} + \sum_{k=1}^{20} C_{20}^{k}\\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{20} \frac{20!}{(20-k)!(k-1)!} + \sum_{k=1}^{20} C_{20}^{k}\\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{20} \frac{20\times 19!}{(19-(k-1))!(k-1)!} + \sum_{k=1}^{20} C_{20}^{k}\\
&= 20\textstyle\sum_{k=1}^{20} \frac{19!}{(19-(k-1))!(k-1)!} + \sum_{k=1}^{20} C_{20}^{k}\\
&= 20 \underbrace{\sum_{k=1}^{20} C_{19}^{k-1}}_{\text{Teorema das Linhas}} + \textstyle\sum_{k=1}^{20} C_{20}^{k}\\
&= 20\times 2^{19} + \underbrace{\sum_{k=0}^{20} C_{20}^{k}}_{\text{Teorema das Linhas}} - C_{20}^{0}\\
&= 20\times 2^{19} + 2^{20} - 1\\
&= 20\times 2^{19} + 2^{20} - 1\\
&= 2^{19}(20+2) - 1\\
&= 2^{19}\times 22 - 1
\end{aligned}
$$

2. (1.5) Considere o seguinte binômio.

$$(\frac{3}{2\sqrt{x}} - x^3)^{154}$$

Usando o desenvolvimento do binômio de Newton calcule:

(a) O termo independente. Justifique.

Resposta: A fórmula termo geral do desenvolvimento do binômio de Newton

$(a+b)^n$ é: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$. Neste caso, $a = \frac{3}{2\sqrt{x}} = 3 \times (2\sqrt{x})^{-1} = 3 \times 2^{-1} x^{\frac{-1}{2}}$, $b = -x^3$ e $n = 154$.

$$
\begin{aligned}
T_{k+1} &= C_{154}^k (3 \times 2^{-1} x^{\frac{-1}{2}})^{154-k} (-x^3)^k \\
T_{k+1} &= C_{154}^k (3)^{154-k} (2)^{-154+k} x^{-77+\frac{k}{2}} (-1)^k (x^{3k}) \\
T_{k+1} &= C_{154}^k (3)^{154-k} (2)^{-154+k} (-1)^k x^{-77+\frac{7k}{2}}
\end{aligned}
$$

Como queremos determinar o termo independente, temos:

$$-77 + \frac{7k}{2} = 0$$

donde $k = 22$ e o termo independente é dado por $T_{23} = C_{154}^{22} 3^{132} 2^{-132}$.

(b) O coeficiente de x^{28}. Justifique.

Resposta: Utilizaremos o mesmo desenvolvimento do termo geral do item anterior. Como queremos determinar o coeficiente de x^{28}, temos:

$$-77 + \frac{7k}{2} = 28$$

donde $k = 30$ e o coeficiente de x^{28} é: $C_{154}^{30} 3^{124} 2^{-124}$.

3. (1.5) Determine a fórmula fechada da seguinte relação de recorrência:

$$a_n = a_{n-1} + 3 \times 5^n + n \quad , \ a_1 = 1,$$

para $n \geq 2$. Justifique.

Resposta: Vamos utilizar o método das substituições regressivas.

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + 3 \times 5^n + n \\
&= a_{n-2} + 3 \times 5^{n-1} + (n-1) + 3 \times 5^n + n \\
&= a_{n-3} + 3 \times 5^{n-2} + (n-2) + 3 \times 5^{n-1} + (n-1) + 3 \times 5^n + n \\
&\vdots \\
&= a_{n-i} + 3 \times (5^{n-(i-1)} + 5^{n-(i-2)} + \ldots + 5^n) + [n-(i-1)] + [n-(i-2)] + \ldots + n
\end{aligned}
$$

Quando $n - i = 1$, temos $i = n - 1$ e

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + 3 \times \underbrace{\sum_{i=2}^{n} 5^i}_{\substack{\text{Soma de PG: } \frac{a_1(q^{n'}-1)}{q-1} \\ a_1=5^2, \text{ razão: } q=5 \\ \text{número de elementos: } n'=n-1}} + \underbrace{\sum_{i=2}^{n} i}_{\substack{\text{Soma de PA: } \frac{(a_1+a_{n'})n'}{2} \\ a_1=2,\ a_{n'}=n \\ \text{número de elementos: } n'=n-1}} \\
&= 1 + 3 \times \frac{5^2(5^{n-1}-1)}{4} + \frac{(2+n)(n-1)}{2}
\end{aligned}$$

Logo, a fórmula fechada da relação de recorrência é dada por:

$a_n = 1 + 3 \times \dfrac{5^2(5^{n-1}-1)}{4} + \dfrac{(2+n)(n-1)}{2}$.