Aula : Grafos Planares

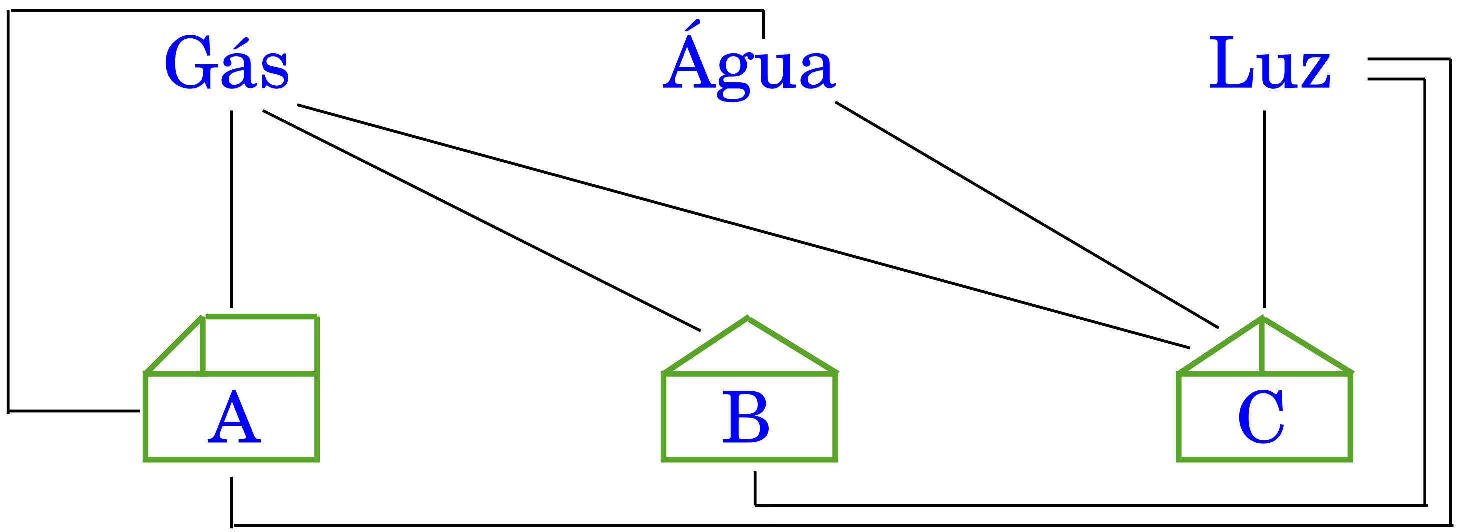
Conteúdo:

- Introdução
- Grafo Planar
- Fórmula de Euler
- Caracterização de Grafo Planar
  - Teorema de Kuratowski

Introdução:

Consideremos o seguinte problema:

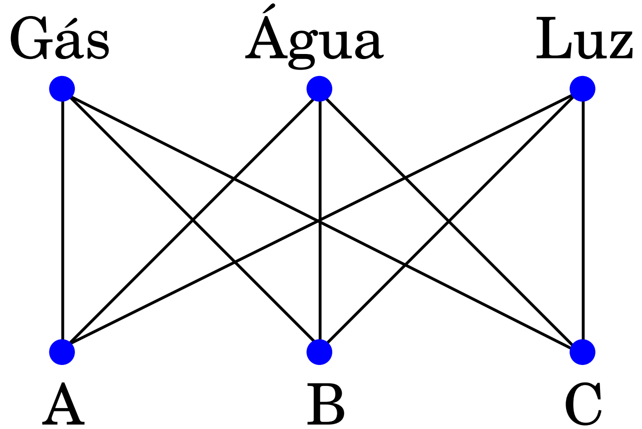
Temos 3 casas A, B e C e queremos conectá-las a 3 comodidades (utilidades): gás, água e luz. Por razões de segurança queremos evitar que essas conexões se cruzem. Isso é possível?



A figura mostra 8 conexões possíveis.
E a última (água e casa B) ?

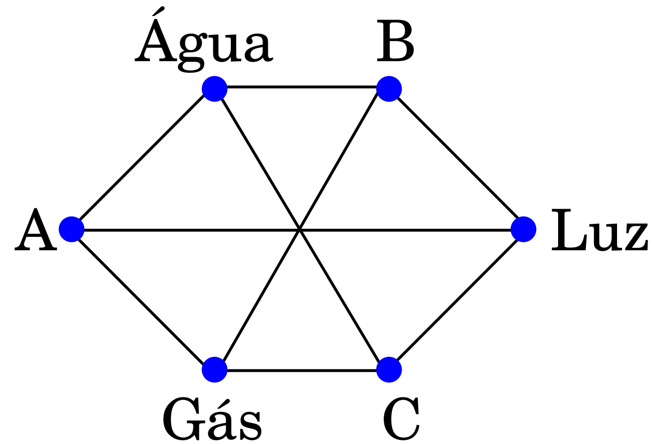
Podemos modelar o problema por um grafo, onde os vértices correspondem as casas (A, B e C) e as 3 utilidades (gás, água e luz) e as arestas as respectivas conexões.

G_1



ou

G_2



- G_1 e G_2 são isomorfos.
- $G_1(G_2)$ é um grafo bipartido completo (K_{33})
- O problema consiste então em:

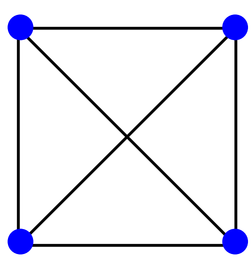
  É possível desenhar o grafo $G_1(G_2)$ de maneira que não tenhamos cruzamento de arestas?

Grafo Planar:

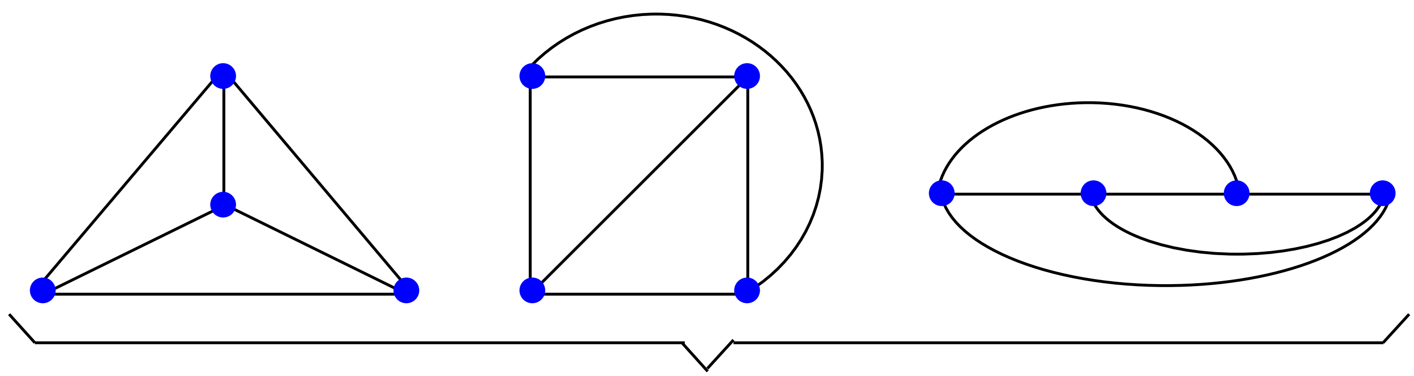
Definição:

Um grafo G é planar se ele pode ser desenhado no plano de maneira que não haja cruzamento de arestas isto é, quaisquer duas arestas só se interceptam nos vértices aos quais são incidentes. Tal desenho é dito uma representação plana de G.

Exemplo 1: Consideremos o grafo completo K_4



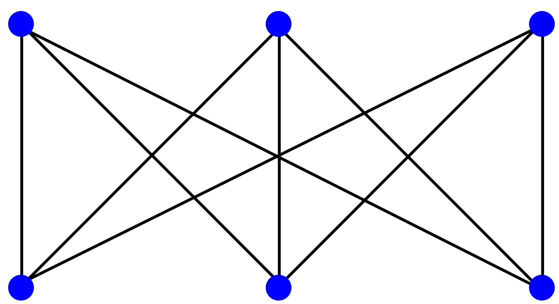
Representação não plana do K_4



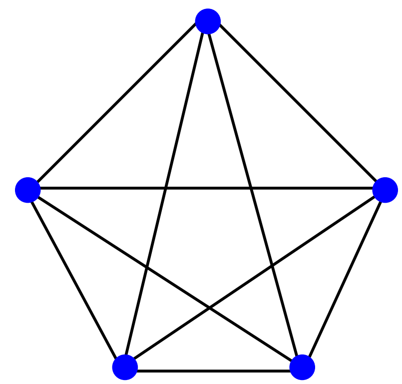
Representações planas do K_4

O Grafo K_4 é planar.

Exemplo 2: Consideremos os grafos K_{33} e K_5



K_{33}



K_5

Tente desenhar uma representação plana destes grafos.

Os grafos K_{33} e K_5 não são planares.

(Vamos provar isto mais adiante)

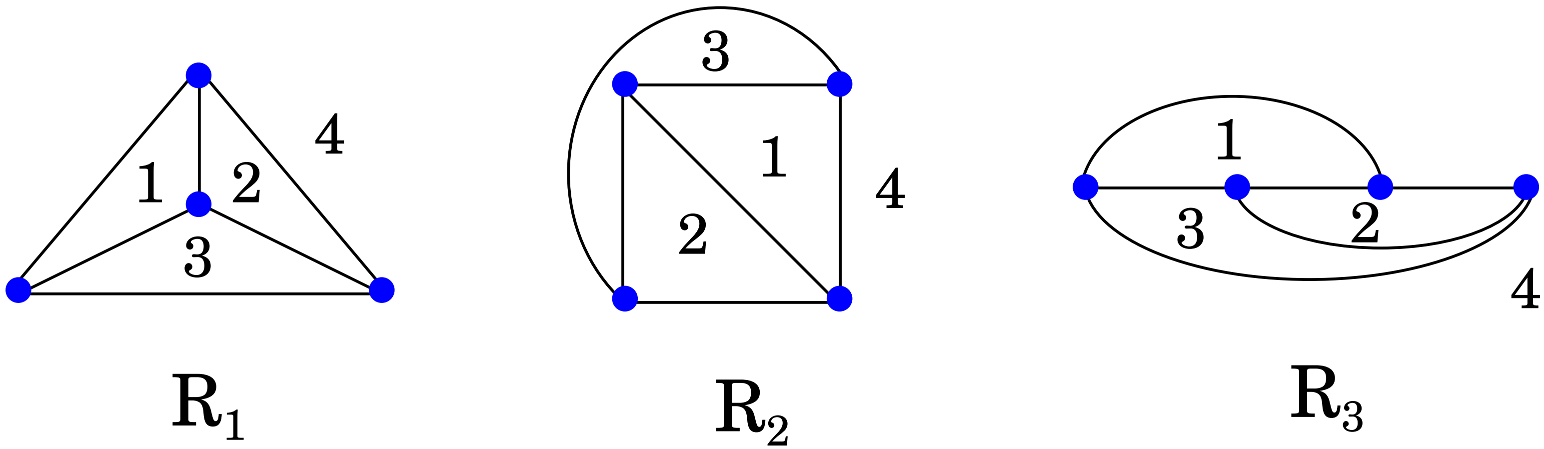
Fórmula de Euler:

Definição:

Se G é um grafo planar então toda representação plana de G divide o plano em regiões chamadas faces.Uma dessas regiões é não limitada e é chamada de face externa.

Exemplo 3:

Consideremos o grafo K_4 e três de suas representações planas.



Observe que as três representações planas do K_4 possuem o mesmo número de faces.

- Se G é um grafo planar, toda representação plana de G tem o mesmo número de faces e esse número é denotado por f .

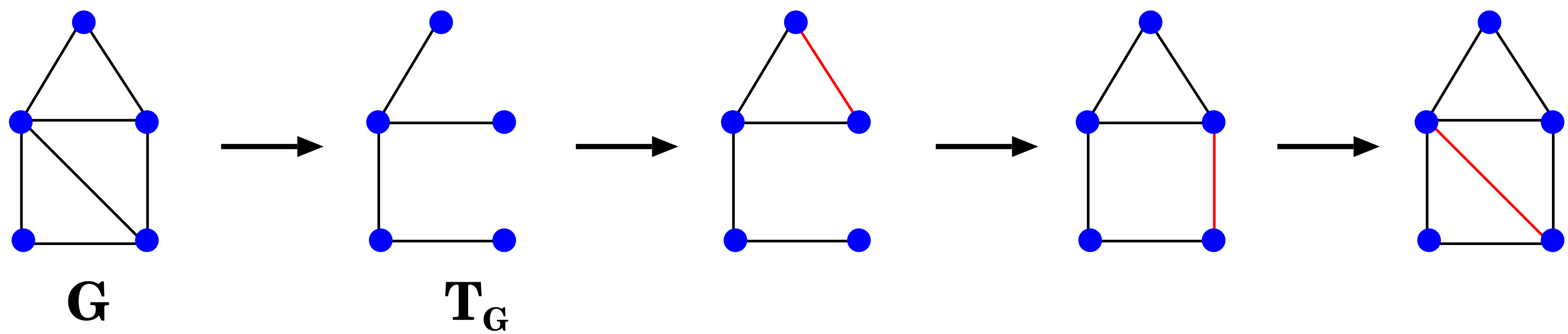
- O interessante é que os números de vértices, arestas e faces de um grafo planar não são independentes. A sua relação é dada pelo Teorema a seguir.

Teorema 1: (Fórmula de Euler)

Seja G um grafo conexo planar e sejam n, m e f o número de vértices, número de arestas e número de faces respectivamente de uma representação plana de G. Então $n - m + f = 2$.

Prova: Qualquer grafo conexo G pode ser construído, a partir de uma árvore geradora T_G, adicionando arestas a ela, uma a uma, até que o grafo G é obtido.

Exemplo 4:



Vamos mostrar:

(i) Para uma árvore geradora: $n - m + f = 2$

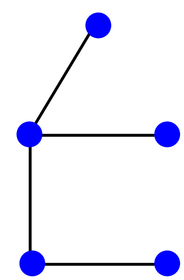
(ii) Em qualquer etapa da construção do grafo G a partir de sua árvore geradora, a adição de uma aresta não altera o valor de $n - m + f$.

Prova de (i):

Seja T_G uma árvore geradora de G.

(Observe que qualquer árvore possui apenas uma face.)

T_G



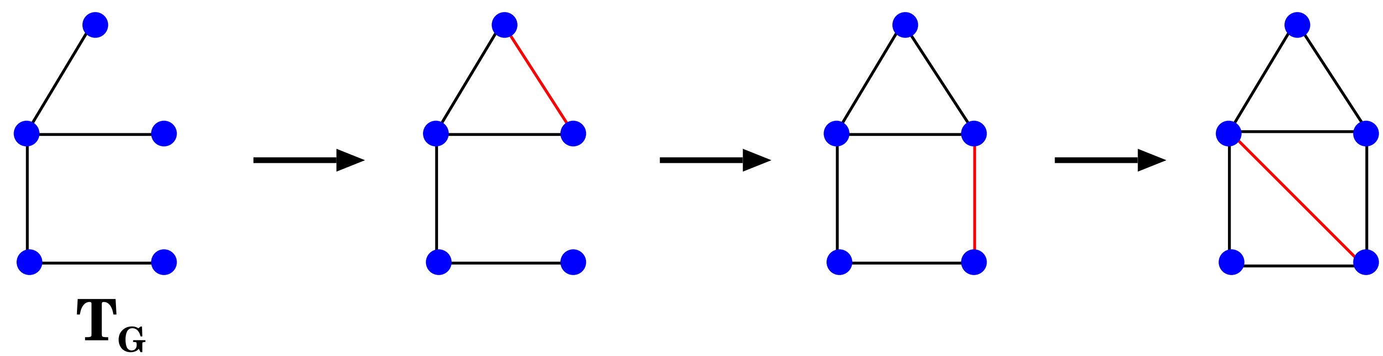
Como T_G tem n vértices, $n - 1$ arestas e 1 face temos:

$$n - m + f = n - (n - 1) + 1 = 2$$

ou seja, a relação é válida para a árvore geradora de G.

Prova de (ii):

Cada vez que adicionamos uma aresta, tal aresta deve conectar 2 vértices diferentes, e ela corta uma face existente em 2.



Isso deixa n fixo, aumenta m de 1 e f de 1

Logo $n - m + f$ fica inalterado.

Como $n - m + f = 2$ durante todo o processo, o resultado segue.

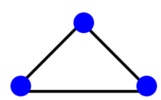
Intuitivamente podemos observar que quanto maior é o número de arestas de um grafo G em relação ao seu número de vértices, mais difícil se torna a obtenção de uma representação plana para G.

De fato, temos um limite máximo para o número de arestas de um grafo planar, dado pelos dois corolários a seguir.

Corolário 1: Seja G um grafo conexo planar com n vértices ($n \geq 3$) e m arestas. Então $m \leq 3n - 6$

Corolário 2: Seja G um grafo conexo planar com n vértices ($n \geq 3$) e m arestas e sem triângulos. Então $m \leq 2n - 4$

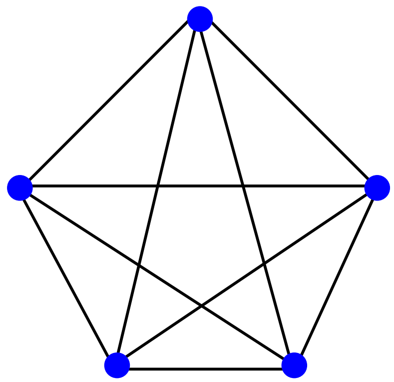
Observação: Um grafo sem triângulos significa um grafo que não contém K_3 como subgrafo.



Com esses resultados podemos mostrar formalmente que os grafos K_5 e K_{33} não são planares.

Corolário 3: O grafo K_5 não é planar.

Prova: K_5



Para K_5 temos $n = 5$, $m = 10$

Suponha que K_5 seja um grafo planar.

Então pelo corolário 1, a relação $m \leq 3n - 6$ deve ser satisfeita.

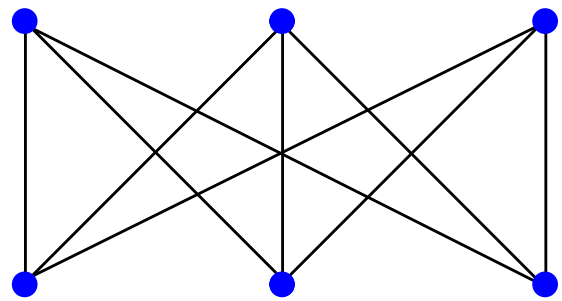
Mas, $m = 10 > (3 \times n) - 6 = (3 \times 5) - 6 = 9$ Contradição!

Logo K_5 não é um grafo planar.

Corolário 4: O grafo K_{33} não é planar.

Prova:

K_{33}



Para K_{33} temos $n = 6$, $m = 9$

K_{33} não tem triângulos (K_3)

Suponha que K_{33} seja um grafo planar.

Se aplicarmos o corolário 1

$$m = 9 < (3 \times n) - 6 = (3 \times 6) - 6 = 12 \quad \text{satisfaz}$$

(nada se pode concluir)

Mas o grafo K_{33} não contém triângulos.

Então pelo corolário 2 a relação $m \leq 2n - 4$ deve ser satisfeita.

$$m = 9 \;>\; (2 \times n) - 4 = (2 \times 6) - 4 = 8$$ Contradição!

Logo K_{33} não é um grafo planar.

Caracterização de Grafo Planar:

- As restrições do número de arestas em um grafo planar dadas pelos corolários 1 e 2 são em geral úteis para mostrar que um grafo é não planar, como vimos para o K_5 e o K_{33}.

  Mas, essas condições apesar de necessárias, não são suficientes para determinar a planaridade de um grafo. Existem muitos grafos que satisfazem essas condições e não são planares.

Observações simples, mas importantes:

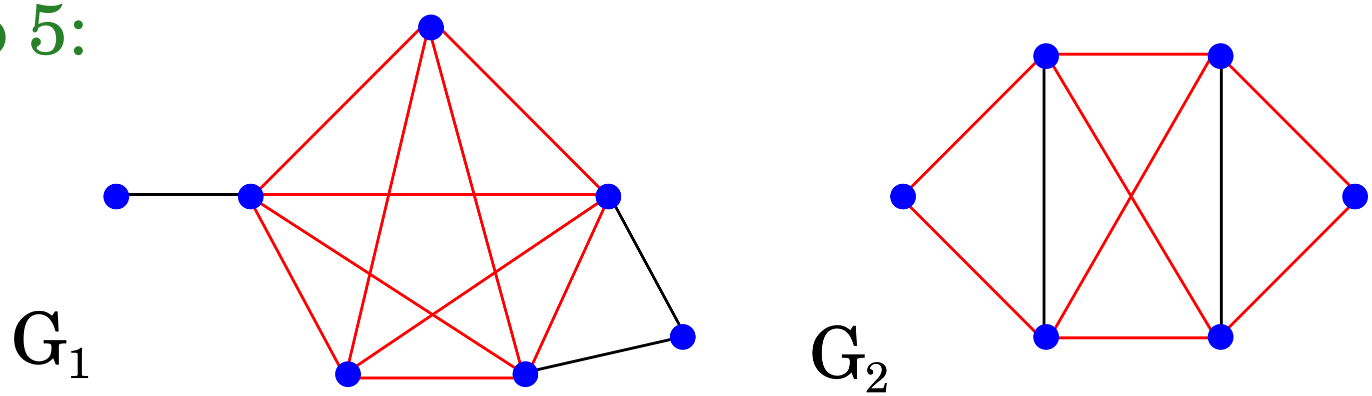
1) K_5 e K_{33} são os grafos não planares com o menor número de vértices e arestas, respectivamente.

2) Se G é um grafo planar então todo subgrafo de G é planar.

ou de maneira equivalente

2') Se G contém um grafo não planar como subgrafo então G é não planar.

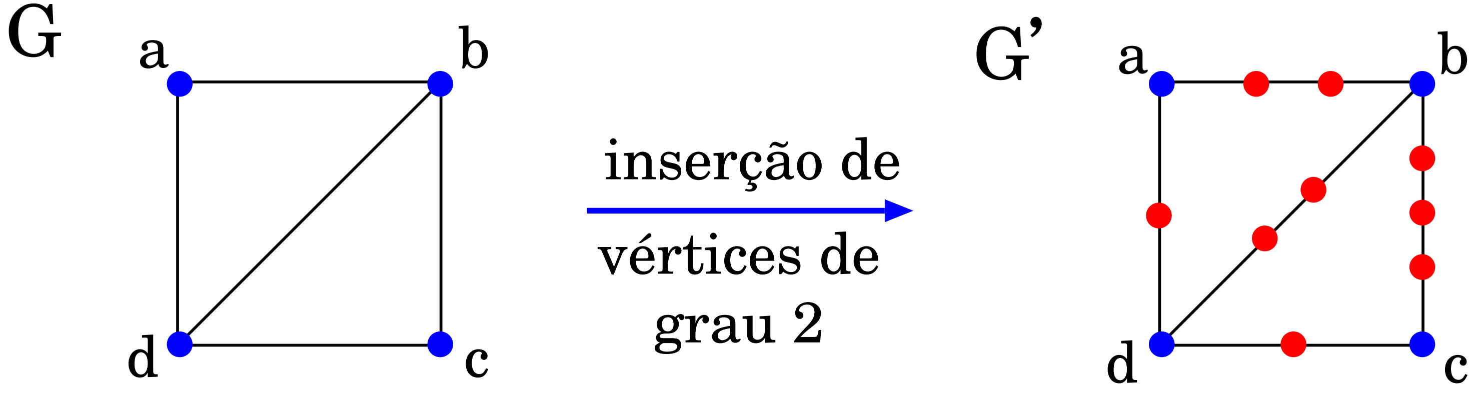
Exemplo 5:



G_1 contém K_5 $\Rightarrow G_1$ é não planar.

G_2 contém K_{33} $\Rightarrow G_2$ é não planar.

As duas observações a seguir envolvem a operação de inserção de vértices de grau 2 nas arestas de um grafo G que mostramos no diagrama.



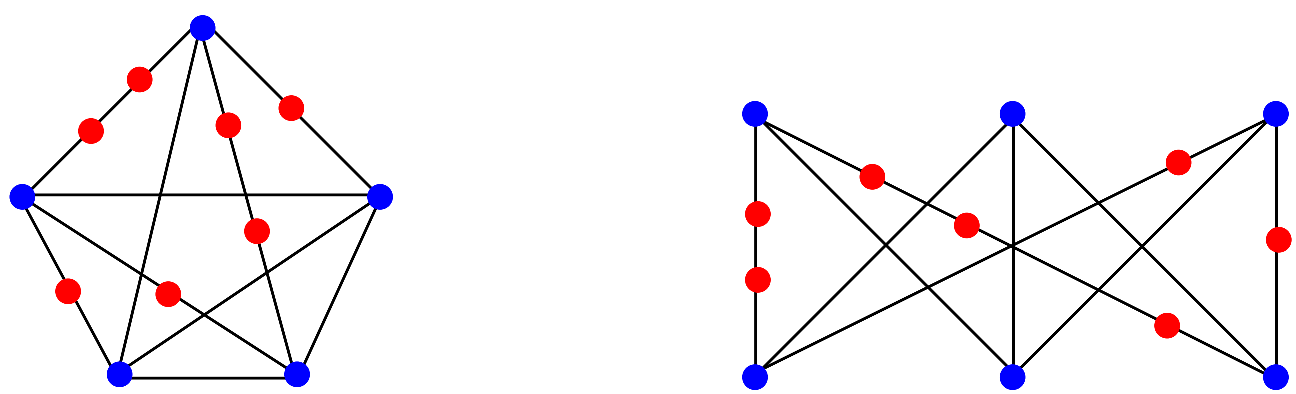
- Qualquer grafo formado de G pela inserção de vértices de grau 2 nas suas arestas é dito uma subdivisão de G.

(Continuando as observações)

3) Se G é um grafo planar, então qualquer subdivisão de G é planar.

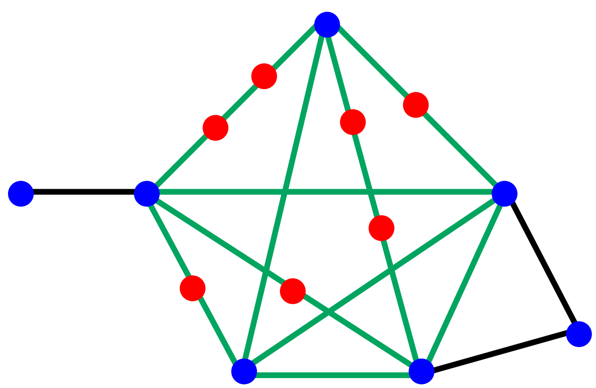
ou de maneira equivalente

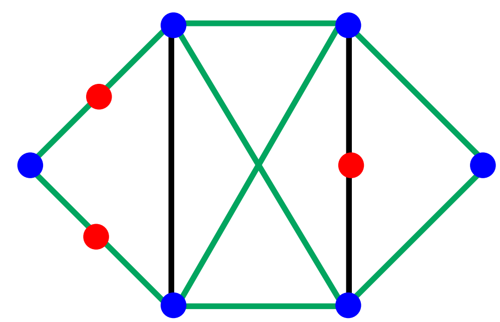
3') Se G é uma subdivisão de um grafo não planar então G é não planar.



Das observações anteriores segue:

4) Se G é um grafo que contém subdivisões do K_5 ou do K_{33} então G é não planar.





Agora estamos prontos para enunciar o resultado fundamental para o reconhecimento de grafos planares.

Esse resultado é de um matemático polonês K. Kuratowski (1930).

Teorema de Kuratowski

Teorema: Um grafo é planar se e somente se ele não contém subdivisões de K_5 e de K_{33} como subgrafos.

A prova da necessidade é imediata (sai de nossas observações).

A prova da suficiência é longa e complicada, será omitida aqui.

Com esse teorema foi possível o desenvolvimento de algoritmos eficientes para o reconhecimento de grafos planares.

Resumo:

Grafo Planar:

- Uma representação geométrica de um grafo G em que não há cruzamento de linhas (arestas) é dita uma representação plana de G.
- Se G admite uma representação plana então G é um grafo planar.

Fórmula de Euler:

- Se G é um grafo planar conexo então $n - m + f = 2$
  $n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$, f = número de faces de G.

Consequências:

G planar conexo, $n \geq 3$ então $m \leq 3n - 6$

G planar conexo, $n \geq 3$ sem K_3 então $m \leq 2n - 4$

K_5 e K_{33} são não planares.

- Um grafo obtido de um grafo G pela inserção de vértices de grau 2 nas suas arestas é uma subdivisão de G.

Caracterização de Grafo Planar (Kuratowski):

- G é planar $\Leftrightarrow$ não contém como subgrafo uma subdivisão de K_5 ou de K_{33}