Aula 6: Princípios Aditivo e Multiplicativo

Conteúdo:

- Princípios básicos de contagem:
  - Princípio Aditivo
  - Princípio Multiplicativo

Objetivos:

- Desenvolver as idéias e técnicas básicas para problemas de contagem.

- Reduzir um problema grande a vários problemas pequenos, usando os Princípios Aditivo e Multiplicativo.

Importância:

- Os problemas de contagem aparecem naturalmente no nosso dia a dia.
- Muitas vezes estamos apenas interessados em contar os elementos de um determinado conjunto, sem enumerá-los.
- No desenvolvimento de técnicas de contagem que veremos mais adiante, tais como: permutações, combinações, etc, estaremos usando basicamente os Princípios Aditivo e Multiplicativo.

Problemas de contagem:

Exemplo 1:

- Dados quatro livros distintos de Matemática (M_1, M_2, M_3, M_4) e três livros distintos de Português (P_1, P_2, P_3), de quantas maneiras podemos selecionar (escolher):

a) Um livro (<u>ou</u> de Matemática <u>ou</u> de Português).

b) Dois livros, sendo <u>um</u> de Matemática <u>e outro</u> de Português.

Exemplo 1 (continuação):

a) **Um livro (<u>ou</u> de Matemática <u>ou</u> de Português)**

O livro de Matemática pode ser escolhido de 4 maneiras:

livro M_1 ou
livro M_2 ou
livro M_3 ou
livro M_4

O livro de Português pode ser escolhido de 3 maneiras:

livro P_1 ou
livro P_2 ou
livro P_3

Número de maneiras: $4 + 3 = 7$

Exemplo 1 (continuação):

b) Dois livros, sendo um de Matemática e outro de Português.

Temos dois conjuntos:

$$A = \{M_1, M_2, M_3, M_4\} \qquad B = \{P_1, P_2, P_3\}$$

$$C = \{ \begin{array}{lll} (M_1, P_1) & (M_1, P_2) & (M_1, P_3) \\ (M_2, P_1) & (M_2, P_2) & (M_2, P_3) \\ (M_3, P_1) & (M_3, P_2) & (M_3, P_3) \\ (M_4, P_1) & (M_4, P_2) & (M_4, P_3) \end{array} \}$$

PA

Voltar

Número de maneiras: $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3 = \mathbf{12}$

Resumindo

a) De quantas maneiras podemos escolher <u>um</u> livro qualquer (ou de Matemática ou de Português)?

Resposta:

Temos 4 maneiras de escolher um livro de Matemática e 3 maneiras de escolher um livro de Português.

Logo temos $4 + 3 = 7$ maneiras de escolher um livro qualquer dentre os de Matemática e Português.

b) De quantas maneiras podemos escolher dois livros sendo um de Matemática e outro de Português?

Resposta:

Para cada livro de Matemática, temos 3 maneiras de escolher os livros de Português.
Como temos 4 maneiras de escolher os livros de Matemática, teremos $3 \times 4 = 12$ maneiras de escolher um livro de Matemática e outro de Português.

Exemplo 2:

- Maria vai a uma papelaria para comprar lapiseira e borracha. Nessa papelaria há 7 tipos diferentes de lapiseiras e 5 tipos diferentes de borrachas.

a) Se o dinheiro de Maria só dá para comprar um item, <u>ou</u> uma lapiseira <u>ou</u> uma borracha, de quantas maneiras diferentes ela pode fazer isso?

$L = \{L_1, L_2, \ldots, L_7\}$ $\qquad B = \{B_1, B_2, \ldots, B_5\}$

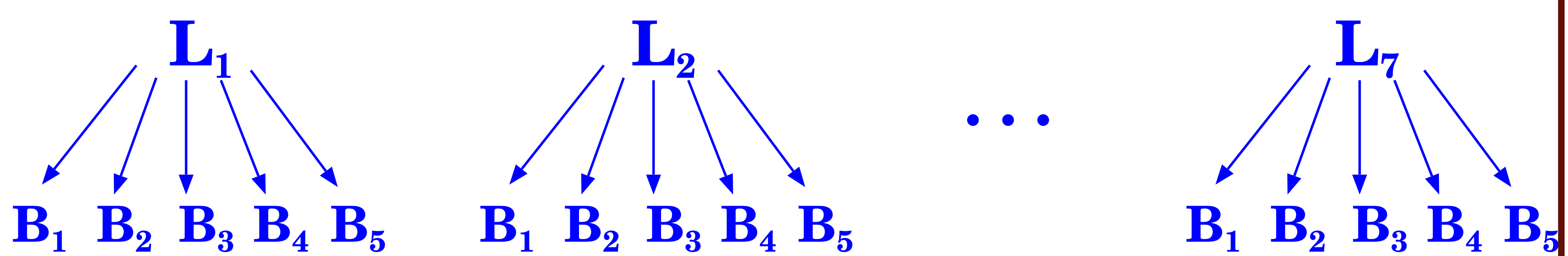
ou L_1, ou L_2, ou ... ou $L_7 \to$ 7 maneiras

ou B_1, ou B_2, ou ... ou $B_5 \to$ 5 maneiras

Número de maneiras de escolher um item : $7 + 5 = 12$

Exemplo 2 (continuação):

b) Suponha agora que Maria tem dinheiro para comprar 2 itens, sendo que ela quer uma lapiseira e uma borracha. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer isso?



Observe que temos os pares:

$$(L_1, B_1)\ (L_1, B_2)\ \ldots\ (L_1, B_5)\ ,\ \ldots\ ,(L_7, B_1)\ (L_7, B_2)\ \ldots\ (L_7, B_5)$$

Número de maneiras de escolher 2 itens, sendo um item uma lapiseira e o outro uma borracha5 +...+ 5 = $5 \times 7 = 35$

Resumindo

a) De quantas maneiras diferentes Maria pode comprar um item (ou uma lapiseira ou uma borracha)?

Resposta:

Ela tem 7 possibilidades de escolha de lapiseira e 4 possibilidades de escolha de borracha.
Logo Maria tem $7 + 5$ possibilidades diferentes de comprar <u>ou</u> uma lapiseira <u>ou</u> uma borracha.

b) De quantas maneiras diferentes Maria pode comprar 2 itens: uma lapiseira e uma borracha?

Resposta:

Para cada escolha de lapiseira, ela tem 5 escolhas de borracha.
Como ela tem 7 escolhas de lapiseiras diferentes, ela terá 7×5 maneiras diferentes de comprar uma lapiseira e uma borracha.

Introdução ao Princípio Aditivo (PA):

- **Princípio Aditivo** (para dois conjuntos)

  Se A e B são dois conjuntos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$),

  então $|A \cup B| = |A| + |B|$

- Outra notação usual

  $n(A) = |A|$

PA

Voltar

Outra interpretação da formulação:

- Sejam A e B eventos mutuamente exclusivos.
  Se um evento A pode ocorrer de m maneiras e outro evento B pode ocorrer de n maneiras, então existem $m + n$ maneiras em que algum desses dois eventos podem ocorrer.

Voltando ao exemplo 1:

- Dados quatro livros distintos de Matemática e três livros distintos de Português:

  a) De quantas maneiras podemos escolher um livro qualquer?

  Podemos identificar os conjuntos:

  $A = \{ M_1, M_2, M_3, M_4 \}$ $\quad$ $B = \{ P_1, P_2, P_3 \}$

  $A \cap B = \varnothing$ $\quad$ $|A| = n(A) = 4$ $\quad$ $|B| = n(B) = 3$

  Pelo P. A. temos

  $|A \cup B| = |A| + |B| = 7$ maneiras de escolher um livro qualquer, ou de Matemática ou de Português.

Voltando ao exemplo 2:

- Na papelaria há 7 tipos diferentes de lapiseira e 5 tipos diferentes de borracha:

a) De quantas maneiras Maria pode comprar um item?

Identificando os conjuntos:

$L = \{L_1, L_2, \ldots, L_7\}$ $\qquad$ $B = \{B_1, B_2, \ldots, B_5\}$

$L \cap B = \varnothing$ $\qquad$ $|L| = 7$ $\qquad$ $|B| = 5$

Pelo P. A. Maria tem

$|L \cup B| = |L| + |B| = 7 + 5 = 12$ maneiras de escolher ou uma lapiseira ou uma borracha.

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM):

Princípio Multiplicativo (para dois conjuntos)

Se A é um conjunto com m elementos e B é um conjunto com n elementos então o conjunto $A \times B$

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B \}$$

tem $m \times n$ elementos

$$|A \times B| = |A| \, . \, |B| = m \times n$$

Outra interpretação da formulação:

- Se um evento A pode ocorrer de m maneiras e um evento B pode ocorrer de n maneiras então o par de eventos, primeiro um e depois o outro, podem ocorrer de $m \times n$ maneiras.

Voltando ao exemplo 1:

- Dados quatro livros distintos de Matemática e três livros distintos de Português:

b) De quantas maneiras podemos escolher 2 livros sendo um de Matemática e outro de Português?

$A = \{ M_1, M_2, M_3, M_4 \}$ $B = \{ P_1, P_2, P_3 \}$

$|A| = 4$ $|B| = 3$

Pelo P. M. temos então

$|A \times B| = |A| \times |B| = 4 \times 3 = 12$ maneiras de escolher dois livros sendo um de Matemática e outro de Português.

- O exemplo 2 b) vocês interpretam.

Resposta Voltar

cederj

Exemplo 3:

- Um prédio tem oito portas:

a) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar e sair?

$$A = B = \{ P_1, P_2, \dots, P_8 \} \qquad |A| = 8$$

$$\left.\begin{array}{l}
(P_1, P_1), (P_1, P_2) \dots (P_1, P_7), (P_1, P_8) \\
(P_2, P_1), (P_2, P_2) \dots (P_2, P_7), (P_2, P_8) \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
(P_8, P_1), (P_8, P_2) \dots (P_8, P_7), (P_8, P_8)
\end{array}\right\} 8 \times 8$$

$$|A \times B| = |A| \times |A| = 8 \times 8 = 64$$

Resposta:

Uma pessoa pode entrar e sair do prédio de 64 maneiras.

Exemplo 3 (continuação):

b) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra diferente?

<u>Observe</u>: Se usarmos a porta P_1 para entrar, ela não pode ser usada para sair.

$$\left.\begin{array}{c} (P_1, P_2)\ ,\ (P_1, P_3)\ \ldots\ (P_1, P_7)\ ,\ (P_1, P_8) \\ (P_2, P_1)\ ,\ (P_2, P_3)\ \ldots\ (P_2, P_7)\ ,\ (P_2, P_8) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ (P_8, P_1)\ ,\ (P_8, P_2)\ \ldots\ (P_8, P_6)\ ,\ (P_8, P_7) \end{array}\right\} 8 \times 7$$

Resposta:

Uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra diferente de 56 maneiras.

Exemplo 3 (continuação):

Formalização:

$$A = \{ P_1, P_2, \ldots , P_8 \} \;,\; |A| = 8$$

$$D = \{ (P_1, P_1) , \ldots , (P_8, P_8) \} \;,\; |D| = 8$$

$$C = A \times A - D$$

$$|C| = |A \times A| - |D|$$ (Princípio Aditivo)

$$|C| = |A| \,.\, |A| - |D|$$ (Princípio Multiplicativo)

$$= 8 \times 8 - 8 = 8\,(8 - 1) = 8 \,.\, 7$$

Exemplo 3 (continuação):

Interpretação:

a) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar e sair?

maneiras de entrar - 8
maneiras de sair - 8

=> $8 \times 8 = 64$

b) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra diferente?

maneiras de entrar - 8
maneiras de sair - 7

=> $8 \times 7 = 56$

Exemplo 4:

- Numa sala estão reunidos cinco homens, seis mulheres e quatro crianças.

  De quantas maneiras podemos selecionar:

  a) uma pessoa?

  b) um homem, uma mulher e uma criança?

Exemplo 4 (continuação):

a) De quantas maneiras podemos selecionar uma pessoa?

$$H = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 \}$$

$$M = \{ m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6 \}$$

$$C = \{ c_1, c_2, c_3, c_4 \}$$

$$H \cap M = \varnothing \qquad H \cap C = \varnothing \qquad M \cap C = \varnothing$$

$$|H| = 5 \qquad |M| = 6 \qquad |C| = 4$$

$$|H \cup M \cup C| = |H| \cup |M| \cup |C| = 5 + 6 + 4 = 15$$

$$H \cup M \cup C = \{ h_1, h_2, \ldots, h_5, m_1, m_2, \ldots, m_6, c_1, \ldots, c_4 \}$$

Exemplo 4 (continuação):

b) De quantas maneiras podemos selecionar um homem, uma mulher e uma criança?

$$H \times M \times C = \{ (h, m, c) \mid h \in H,\ m \in M,\ c \in C \}$$

$$\begin{aligned} H \times M \times C = \{ & (h_1, m_1, c_1), (h_1, m_2, c_1), (h_1, m_3, c_1), \\ & (h_1, m_4, c_1), (h_1, m_5, c_1), (h_1, m_6, c_1), \\ & (h_1, mb_1, c_2), (h_1, m_1, c_3), (h_1, m_1, c_4), \ldots \} \end{aligned}$$

Observação:

$$|H \times M \times C| = |H| \times |M| \times |C| = 5 \times 6 \times 4 = 120$$

Extensão do Princípio Aditivo:

- Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos disjuntos dois a dois

$$(A_i \cap A_j = \varnothing \qquad i \neq j)$$

e $|A_1| = m_1$, $|A_2| = m_2$, ... , $|A_n| = m_n$

então o conjunto $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

possui $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ elementos

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Outra interpretação da formulação:

- Sejam $A_1, A_2, \ldots , A_n$ eventos mutuamente exclusivos. Se cada evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras então existem $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ maneiras em que algum desses n eventos podem ocorrer.

Extensão do Princípio Multiplicativo:

- Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos tais que

$$|A_1| = m_1 , |A_2| = m_2 , \ldots , |A_n| = m_n$$

então o conjunto $\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

possui $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_n$

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \ldots \times |A_n| = \prod_{i=1}^{n} m_i$$

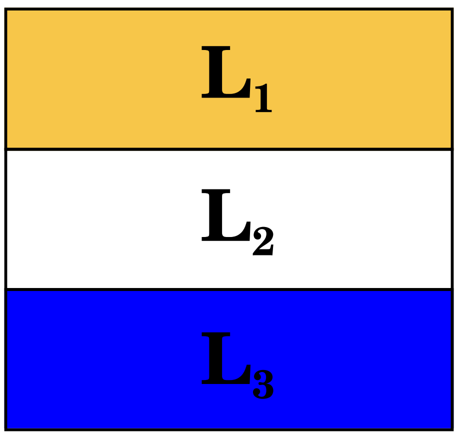
Outra interpretação da formulação:

- Se temos n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, onde cada evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras então existem $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_n$ maneiras em que esses n eventos podem ocorrer sucessivamente.

Exemplo 5:

- Uma bandeira é formada por três listras que devem ser coloridas usando-se apenas as cores: amarelo, branco, azul, de tal maneira que listras adjacentes não recebam a mesma cor.

De quantos modos podemos colorir esta bandeira?



$\longrightarrow$ $\mathbf{L_1}$ pode ser colorida de 3 modos

$\longrightarrow$ $\mathbf{L_2}$ pode ser colorida de 2 modos
(a cor usada em $\mathbf{L_1}$ não pode ser usada em $\mathbf{L_2}$)

$\longrightarrow$ $\mathbf{L_3}$ pode ser colorida de 2 modos
(a cor usada em $\mathbf{L_2}$ não pode ser usada em $\mathbf{L_3}$)

Logo pelo PM temos $3 \times 2 \times 2$ modos de colorir esta bandeira.

Exemplo 6:

- Um teste de matemática consta de 20 perguntas para serem classificadas como Verdadeira ou Falsa.

Quantos são os possíveis gabaritos para este teste?

Resposta:

Cada pergunta tem duas possibilidades de resposta: Verdadeiro ou Falso

$$\left.\begin{array}{l} P_1 - 2 \text{ possibilidades} \\ P_2 - 2 \text{ possibilidades} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ P_{20} - 2 \text{ possibilidades} \end{array}\right\}$$

Logo pelo PM temos

$2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^{20}$ gabaritos

Exemplo 7:

- Considerando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números naturais de três algarismos distintos podem ser formados?

Para formar números naturais de três algarismos, podemos considerar que temos três posições a serem preenchidas:

$$\underline{P_1} \quad \underline{P_2} \quad \underline{P_3} \qquad \begin{cases} P_1 \text{ - posição das centenas} \\ P_2 \text{ - posição das dezenas} \\ P_3 \text{ - posição das unidades} \end{cases}$$

Exemplo 7 (continuação):

- Exemplo de um número formado

$\underline{\ 3\ }\ \underline{\ 6\ }\ \underline{\ 5\ }$

$\underline{P_1}$	$\underline{P_2}$	$\underline{P_3}$
$\downarrow$ 1º	$\downarrow$ 2º	$\downarrow$ 3º
6 possibilidades	5 possibilidades	4 possibilidades

Logo pelo PM temos $6 \times 5 \times 4 = 120$ números naturais de três algarismos distintos formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Exemplo 8:

- Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base 10) existem?

Observação: Estamos considerando agora os algarismos 0, 1, 2, ... , 9.

$$\underline{P_1} \quad \underline{P_2} \quad \underline{P_3}$$

Na posição P_1 temos 9 possibilidades (estamos excluindo o zero)

Na posição P_2 temos 9 possibilidades (diferente do anterior)

Na posição P_3 temos 8 possibilidades (diferente dos dois anteriores)

Logo pelo PM temos $9 \times 9 \times 8$ números naturais de três algarismos distintos.

Exemplo 8 (continuação):

- E se neste exemplo em vez de começarmos analisando a posição P_1, começassemos pela P_3 ?

$$\underset{\textbf{P}_1}{3^o} \qquad \underset{\textbf{P}_2}{2^o} \qquad \underset{\textbf{P}_3}{1^o}$$

Na posição P_3 temos 10 possibilidades

Na posição P_2 temos 9 possibilidades (diferente do anterior)

Na posição P_1 temos
$$\begin{cases} 8 & \text{(se o algarismo zero já tiver sido usado)} \\ \text{ou} & \\ 7 & \text{(caso contrário)} \end{cases}$$

Exemplo 8 (continuação):

- Quebramos o problema em dois:

1º) Ignoramos o fato do zero não estar na posição P_1 e contamos todas as possibilidades (com ele incluído)

$$\underline{P_1} \quad \underline{P_2} \quad \underline{P_3}$$

Na posição P_3 temos 10 possibilidades

Na posição P_2 temos 9 possibilidades

Na posição P_1 temos 8 possibilidades

Logo pelo PM temos $10 \times 9 \times 8 = 720$ números de três algarismos distintos onde o zero pode estar na posição P_1

2º) Contamos os números de três algarismos distintos que têm apenas o zero na posição P_1

$$\underline{\ P_1\ }\quad \underline{\ P_2\ }\quad \underline{\ P_3\ }$$

Na posição P_1 temos 1 possibilidade

Na posição P_2 temos 9 possibilidades

Na posição P_3 temos 8 possibilidades

Logo pelo PM temos $1 \times 9 \times 8 = 72$ números de três algarismos distintos que tem apenas o zero na posição P_1

Temos então $720 - 72 = 648$ números naturais de três algarismos distintos.

Resumo:

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos

Princípio Aditivo

Se $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$ e

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \text{ então}$$

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

Princípio Multiplicativo

$$\text{Se } B = \prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \text{ então}$$

$$|B| = |A_1| \times |A_2| \times \ldots \times |A_n|$$