Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

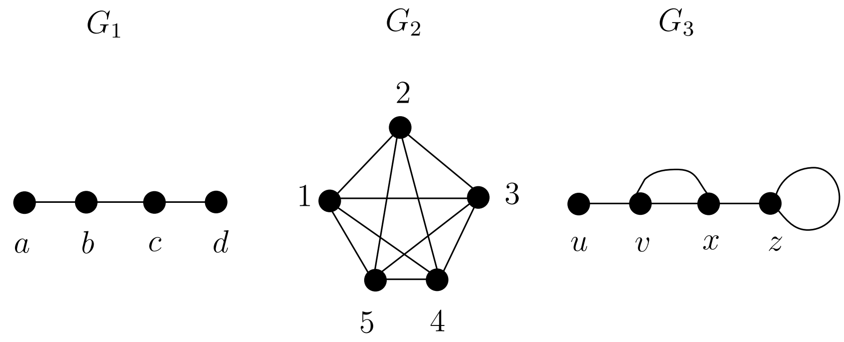
Gabarito da EP da Aula 18

Observações:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.
2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo antes de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.
3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

---

1. Para cada um dos grafos (não necessariamente simples) abaixo, escreva:



   (a) o grau de cada um de seus vértices:

   Resposta: Temos que o grau de um vértice v é o número de arestas incidentes a v. Logo:

   Para o grafo G_1, temos:

   $d(a) = 1$
   $d(b) = 2$
   $d(c) = 2$
   $d(d) = 1$

   Para o grafo G_2, temos:

   $d(1) = 4$
   $d(2) = 4$
   $d(3) = 4$
   $d(4) = 4$
   $d(5) = 4$

   Para o grafo G_3, que é um multigrafo, temos:

   $d(u) = 1$
   $d(v) = 3$

$d(x) = 3$
$d(z) = 3$ (laço conta 2 unidades)

(b) a sequência de graus:

Resposta:

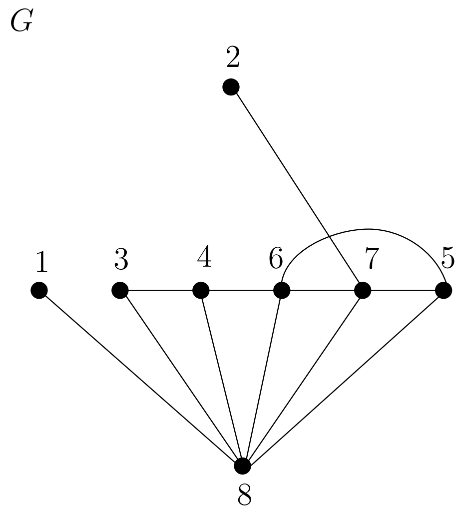
Para o grafo G_1, temos a sequência de graus $(1, 1, 2, 2)$.

Para o grafo G_2, temos a sequência de graus $(4, 4, 4, 4, 4)$.

Para o grafo G_3, temos a sequência de graus $(1, 3, 3, 3)$.

2. Desenhe um grafo (simples) com 8 vértices e sequência de graus $(1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 6)$

Resposta: Consideremos o grafo simples, abaixo:



$d(1) = 1$
$d(2) = 1$
$d(3) = 2$

$d(4) = 3$
$d(5) = 3$
$d(6) = 4$
$d(7) = 4$
$d(8) = 6$

3. Existe grafo simples com 4 vértices e sequência de graus $(1, 2, 3, 4)$? Caso exista, desenhe esse grafo, caso contrário, justifique.

   Resposta: Não.

   Suponha que temos os vértices v_1, v_2, v_3 e v_4 e $d(v_4) = 4$, logo como o grafo é simples temos que não existe laços nem arestas múltiplas, mas v_4 só pode ser adjacente a v_1, v_2 e v_3 que são os outros três vértices existentes. Logo, não existe tal grafo.

4. Mostre que não existe grafo regular de grau 3 com 7 vértices.

   Resposta: Temos que em qualquer grafo G, a soma dos graus de todos os vértices é igual a duas vezes o número de arestas, isto é,

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|,$$

   ou seja, a soma dos graus de todos os vértices é necessariamente um número par.

   Suponha que existe um grafo regular de grau 3 com 7 vértices. Temos então que $d(v) = 3$, $\forall v \in V(G)$. Logo:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)| = 3 \times 7 = 21 \ \textit{que é um número ímpar. Absurdo}!$$

   Logo este grafo regular não existe.

5. Mostre que em um grupo de pelo menos duas pessoas sempre existem duas com exatamente o mesmo número de amigos dentro do grupo.

Resposta:

Considere um grafo com n pessoas, $n \geq 2$. Vamos modelar o problema por um grafo G. A cada pessoa do grupo associe a um vértice. E para cada par de pessoas distintas, se elas são amigas associe uma aresta entre os vértices correspondentes a essas pessoas.

O número de amigos de uma pessoa é exatamente o grau do vértice correpondente a essa pessoa. Queremos mostrar então que:

Em um grupo G com pelo menos 2 vértices sempre existem 2 vértices de mesmo grau.

Suponha, por absurdo, que isso não é verdade, isto é, suponha que todos os vértices de G tem graus distintos. Nesse caso G deve ter a seguinte sequência de graus: $(0, 1, 2, \ldots, n-1)$, ou seja, G possui um vértice de grau $(n-1)$, isto é, um vértice universal, que é adjacente a todos os outros vértices e G possui um vértice de grau 0, isto é, um vértice isolado, que não é adjacente a nenhum outro vértice de G. Isso é absurdo!

Logo, existem pelo menos dois vértices de mesmo grau em um grafo com pelo menos dois vértices, o que corresponde que em um grupo de pelo menos duas pessoas sempre existem dois com exatamente o mesmo número de amigos.