Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD2-2 Segundo Semestre de 2019

Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (1.0) Mostre que não existe grafo simples com 15 vértices que seja regular de grau 5.

   Resposta: O Teorema do aperto de mãos garante que $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$, ou seja, o somatório dos graus dos vértices de um grafo é sempre um número PAR. Note que no grafo sugerido pela questão, o somatório dos graus dos vértices seria dado por $15 \times 5 = 75$, ou seja, seria um número ÍMPAR, configurando um absurdo. Logo, não existe grafo 5-regular com 15 vértices.

2. (3.5) Responda as seguintes perguntas considerando o grafo G dado por:
   $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$,
   $E(G) = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, f), (a, f), (b, e), (f, g), (g, h), (h, i), (i, d), (e, h), (a, c), (c, i), (g, i), (a, g)\}$.

   (a) Desenhe G e desenhe também seu grafo complementar $\overline{G}$.

   Resposta: Observe as Figuras 1 e 2.

   (b) G é bipartido? E o grafo $\overline{G}$ é bipartido? Justifique.

   Resposta: Um grafo é bipartido se, e somente se, não possui ciclo ímpar. Como G possui o ciclo $abca$, de tamanho 3, G não é bipartido. Da mesma forma, o grafo $\overline{G}$ possui o ciclo $cegc$, de tamanho 3, e, portanto, não é bipartido.

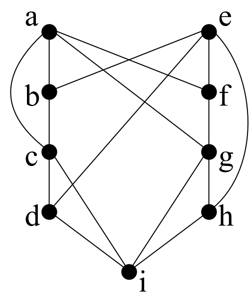

Figura 1: Grafo G.

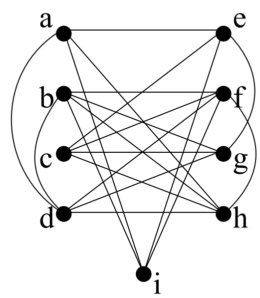

Figura 2: Complemento do grafo G.

(c) Determine o o centro de G. Justifique.

Resposta: O *centro* de um grafo é um conjunto composto pelos vértices de menor excentricidade. A *excentricidade* de um vértice é o valor da maior distância desse vértice a algum outro vértice do grafo. A *distância* entre dois vértices é o tamanho do menor caminho entre esses vértices.

Logo, para determinarmos o centro do grafo, vamos calcular as distâncias entre todos os pares de vértices.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
a	0	1	1	2	2	1	1	2	2
b	1	0	1	2	1	2	2	2	2
c	1	1	0	1	2	2	2	2	1
d	2	2	1	0	1	2	2	2	1
e	2	1	2	1	0	1	2	1	2
f	1	2	2	2	1	0	1	2	2
g	1	2	2	2	2	1	0	1	1
h	2	2	2	2	1	2	1	0	1
i	2	2	1	1	2	2	1	1	0

Note que todos os vértices possuem excentricidade 2, portanto, o centro de G é o próprio conjunto de vértices de G.

(d) G é um grafo euleriano? Justifique.

Resposta: Um grafo é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices possuem grau par. Como G tem vértices de grau ímpar, por exemplo b, G não é euleriano.

(e) G é hamiltoniano? Justifique.

Resposta: Sim, pois podemos exibir um ciclo hamiltoniano, a saber: $acdihgfeba$.

(g) Dê uma orientação as arestas de G de modo que o digrafo obtido seja fortemente conexo. (Desenhe as orientações nas arestas de G). Justifique.

Resposta: Observe o grafo direcionado D na Figura 3 obtido a partir de uma orientação do grafo G da Figura 1. Note que existe um ciclo direcionado $a, c, d, i, h, g, f, e, b, a$ que contém todos os vértices de D. Com isso temos um caminho direcionado entre quaisquer dois vértices de D. Logo D é fortemente conexo.

3. (1.0) Seja G um grafo planar conexo com sequência de vértices $(2, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 5)$. Em quantas regiões qualquer representação plana de G divide o plano? Justifique.

Resposta: Sejam n o número de vértices de G, m o número de arestas de G e f o número de faces de G. Pelo Teorema de Euler para grafos planares, temos $f = m - n + 2$. Da sequência de graus, temos que $n = 8$, e pelo Teorema do Aperto

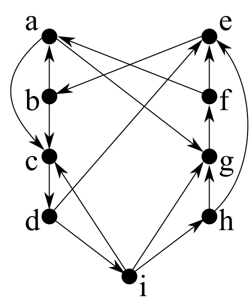

Figura 3: Grafo D_G obtido através de uma orientação de G.

de Mãos, temos que $2+2+2+2+5+5+5+5 = 2m$, ou seja, $m = 14$. Portanto, $f = 14 - 8 + 2 = 8$.