Gabarito da AD1 - Fundamentos de Algoritmos para Computação

1. Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for falsa, faça a devida modificação de modo a torná-la verdadeira.

   (a) $\{0, a\} \subseteq \{\{0\}, \emptyset, \{0, a\}, \{0, a, 1\}\}$

   Resposta: A afirmação é falsa.

   Seja $A = \{\{0\}, \emptyset, \{0, a\}, \{0, a, 1\}\}$

   A afirmativa é falsa porque $\{0, a\}$ é um elemento do conjunto A e, usamos o símbolo *está contido* ($\subseteq$) para relacionar conjuntos.

   Dizemos que um conjunto A está contido em um conjunto B se todo elemento de A é elemento de $B(A \subseteq B)$.

   As afirmações corretas são:

   $\{0, a\} \in \{\{0\}, \emptyset, \{0, a\}, \{0, a, 1\}\}$

   OU

   $\{\{0, a\}\} \subseteq \{\{0\}, \emptyset, \{0, a\}, \{0, a, 1\}\}\}$

   (b) $\emptyset \in \{\emptyset, d, e, \{a\}\}$

   Resposta: A afirmação é verdadeira, pois $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset, d, e, \{a\}\}$.

   (c) $B \subseteq \overline{A} \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B}$

   Resposta: A afirmação é verdadeira.

   Podemos verificar a proposição de duas maneiras:

   Primeira maneira: A afirmação pode ser verificada usando diagrama de Venn.(Não pede-se explicitamente "Provar ")

   Segunda maneira: A outra maneira de verificar a proposição é fazendo a dedução lógica.

   Prova:

($\Rightarrow$) Seja $B \subseteq \overline{A}$

Queremos provar que se $x \in A$ então $x \in \overline{B}$

Seja $x \in A$.

Se $x \in A$ então $x \notin \overline{A}$.

Como $B \subseteq \overline{A}$ e $x \notin \overline{A}$ então $x \notin B$ e isto implica em dizer que $x \in \overline{B}$.

Logo, $A \subseteq \overline{B}$

($\Leftarrow$) Seja $A \subseteq \overline{B}$

Queremos provar que se $x \in B$ então $x \in \overline{A}$

Seja $x \in B$.

Se $x \in B$ então $x \notin \overline{B}$.

Como $A \subseteq \overline{B}$ e $x \notin \overline{B}$ então $x \notin A$ e isto implica em dizer que $x \in \overline{A}$.

Logo, $B \subseteq \overline{A}$

Portanto, é verdadeira a proposição $B \subseteq \overline{A} \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B}$

(d) $\overline{E - F} = \overline{E} \cap F$

Resposta: A afirmação é falsa.

A afirmativa é falsa, pois:

Temos que $E - F = E \cap \overline{F}$ então: $\overline{E - F} = \overline{(E \cap \overline{F})}$ e pelas lei de Morgan temos que $\overline{(E \cap \overline{F})} = \overline{E} \cup \overline{(\overline{F})}$. Como $\overline{(\overline{F})} = F$ então temos que $\overline{E} \cup \overline{(\overline{F})} = \overline{E} \cup F$.

A afirmação correta é: $\overline{E - F} = \overline{E} \cup F$

2. Mostre usando indução matemática:

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$, $n \geq 1$, natural.

Prova:

Seja $P(n) = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$

Por indução:

Base da indução:

Para $n = 1$, $(-1)^{1-1}.(1)^2 = 1 = (-1)^{1-1}.\frac{1(1+1)}{2}$, logo $P(1)$ é verdadeira.

Hipótese indução:

Suponha verdadeiro para $n = k$, isto é, $P(k)$ é verdadeira:

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}$

Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeiro então é $P(k+1)$ é verdadeiro, isto é:
Temos que provar que: $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^k k^2 = (-1)^k \frac{(k+2)(k+1)}{2}$.

Desenvolvendo para $n = k+1$ e usando a hipótese de indução, temos que:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{k-1}k^2 + (-1)^{k+1-1}(k+1)^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{(1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{k-1}k^2)}_{(Por\ hipótese\ indutiva)} + (-1)^k(k+1)^2 &&= \\
&= (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k(k+1)^2 &&= \\
&= (k+1).(-1)^{k-1}[\tfrac{k}{2} + (-1)(k+1)] &&= \\
&= (k+1).(-1)^{k-1}[\tfrac{k}{2} + (-k-1)] &&= \\
&= (k+1).(-1)^{k-1}[\tfrac{k-2k-2}{2}] &&= \\
&= (k+1).(-1)^{k-1}(\tfrac{-k-2}{2}) &&= \\
&= (k+1).(-1)^{k-1}((-1)(\tfrac{k+2}{2})) &&= \\
&= (k+1).(-1)^{k-1}.(-1)[(\tfrac{k+2}{2})] &&= \\
&= (k+1).(-1)^{k}(\tfrac{k+2}{2}) &&= \\
&= (-1)^k.\tfrac{(k+1)(k+2)}{2}
\end{aligned}$$

Logo, a expressão é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$

3. Considere a palavra **QUADRO**

   (a) Quantos são seus anagramas?

   Resposta: Cada anagrama de $QUADRO$ nada mais é que uma ordenação das letras Q, U, A, D, R, O. Assim, o número de anagramas de $QUADRO$ é $P_6 = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$.

(b) Quantos são os anagramas que começam e terminam por consoante?

Resposta: A consoante inicial pode ser escolhida de 3 maneiras, fixada uma consoante inicial, a consoante final pode ser escolhida de 2 maneiras. Fixados as consoantes, inicial e outra final, fica 1 consoante e 3 vogais para os 4 lugares que podem ser arrumadas de $P_4 = 4!$ maneiras diferentes. Logo, pelo princípio multiplicativo e aditivo tem-se $3.P_4.2 = 3.4!.2 = 6.24 = 144$ anagramas.

(c) Quantos são os anagramas que começam por consoante e terminam por vogal?

Resposta: A consoante inicial pode ser escolhida de 3 maneiras. Fixada 1 consoante, a vogal final pode ser escolhida de 3 maneiras. Fixados 1 consoante inicial e 1 vogal final, as 4 posições restantes podem ser arrumadas de $P_4 = 4!$ maneiras. Logo, pelo princípio multiplicativo e aditivo tem-se $3.P_4.3 = 9.4! = 9.24 = 216$.

(d) Quantos anagramas de 4 letras podem ser formados com as letras da palavra dada acima?

Resposta: Para formarmos um anagrama de 4 letras, podemos considerar que temos 4 posições para serem preenchidas; a primeira posição pode ser preenchida de 6 maneiras; a segunda posição pode ser preenchida de 5 maneiras; a terceira posição pode ser preenchida de 4 maneiras; e a quarta posição pode ser preenchida de 3 maneiras, isto é, A_6^4.

Portanto, há $A_6^4 = \frac{6!}{2!} = \frac{6.5.4.3.2!}{2!} = 6.5.4.3 = 360$

4. (a) De quantos modos diferentes podemos distribuir 30 bombons idênticos em 5 caixas diferentes? (observação: cada caixa pode conter zero ou mais bombons).

Resposta: Este poblema é equivalente a encontrar o número de soluções inteiras não-negativas ($x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5$) da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30,$$

onde x_i denota o número de bombons na caixa i, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, o que é equivalente a encontrar o número de sequências de $(30+5)$ binários com exatamente cinco 1's (as caixas), trinta 0's (os bombons), onde o último elemento de sequência é 1.

Isto é, o número corresponde a:

$$CR_5^{30} = C_{34}^{30} = \frac{34.33.32.31.30!}{30!4!} = \frac{34.33.32.31}{4.3.2.1} = 46376$$

(b) E se tivermos a restrição de que nenhuma caixa pode ficar vazia?

Resposta: Este número é o número de soluções inteiras positivas da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30,$$

onde x_i denota o número de bombons na caixa, $x_i > 0$ i,e $x_i \geq 1$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Iremos fazer este problema recair em um outro problema em que sabemos resolver, pois $x_i \geq 1$ significa que $x_i - 1 \geq 0$, definindo $y_i = x_i - 1$, logo $y_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$:

Temos que $x_i = y_i + 1$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Daí, a equação $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 30$ transforma-se em $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5 = 25$ com $y_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
Logo, temos que o número de modos diferentes de distribuir 30 bombons idênticos em 5 caixas diferentes tal que nenhuma delas fique vazia corresponde ao número de soluções não negativas da última equação que é:

$$CR_5^{25} = C_{29}^{25} = \frac{29.28.27.26.25!}{25!4!} = \frac{29.28.27.26}{4.3.2.1} = 23751$$

5. De quantos modos 12 crianças podem ocupar os 6 bancos de 2 lugares em uma roda gigante?

   Resposta: Há $(PC)_{12} = \frac{12!}{12} = 11!$ modos de formar uma roda com as 12 crianças. Além disso, fixada uma ordenação, se por exemplo, consideramos entre essas 12 crianças, 3 crianças A, B, C e elas estão na seguinte ordem ABC e fixarmos a criança B temos duas possibilidades: a primeira possibilidade é da criança B ficar com a criança A e a segunda, da criança B ficar com a criança C, nessa ordenação automaticamente a posição das outras crianças fica determinada, logo para esta possibilidade na permutação circular teremos que contá-la duas vezes, e como temos $(PC)_{12} = 11!$ possibilidades, logo pelo princípio multiplicativo, temos:

$$2.(PC)_{12} = 2.11! = \frac{12}{6}.11! = \frac{12!}{6}$$

Vejamos, como exemplo, 4 crianças e 2 bancos:

Na permutação circular, temos as seguintes possibilidades:

- $(1, 2, 3, 4)$

Esta possibilidade tem duas maneiras para a questão, pois primeiro podemos ter as crianças $(1, 2)$ e $(3, 4)$, nos dois bancos, e segundo podemos ter as crianças $(2, 3)$ e $(4, 1)$, nos dois bancos.

- $(1, 2, 4, 3)$

Esta possibilidade tem duas maneiras para a questão, pois primeiro podemos ter as crianças $(1, 2)$ e $(4, 3)$, nos dois bancos, e segundo podemos ter as crianças $(2, 4)$ e $(3, 1)$, nos dois bancos.

- $(2, 1, 3, 4)$

Esta possibilidade tem duas maneiras para a questão, pois primeiro podemos ter as crianças $(2, 1)$ e $(3, 4)$, nos dois bancos, e segundo podemos ter as crianças $(1, 3)$ e $(4, 2)$, nos dois bancos.

- $(2, 1, 4, 3)$

Esta possibilidade tem duas maneiras para a questão, pois primeiro podemos ter as crianças $(2, 1)$ e $(4, 3)$, nos dois bancos, e segundo podemos ter as crianças $(1, 4)$ e $(3, 2)$, nos dois bancos.

- $(3, 1, 4, 2)$

Esta possibilidade tem duas maneiras para a questão, pois primeiro podemos ter as crianças $(3, 1)$ e $(4, 2)$, nos dois bancos, e segundo podemos ter as crianças $(1, 4)$ e $(2, 3)$, nos dois bancos.

- $(4, 1, 3, 2)$

Esta possibilidade tem duas maneiras para a questão, pois primeiro podemos ter as crianças $(4, 1)$ e $(3, 2)$, nos dois bancos, e segundo podemos ter as crianças $(1, 3)$ e $(2, 4)$, nos dois bancos.

Daí, além de termos somente as possibilidades da permutação circular temos, também, as seguintes possibilidades: $(4, 1, 2, 3)$, $(3, 1, 2, 4)$, $(4, 2, 1, 3)$, $(3, 2, 1, 4)$, $(2, 3, 1, 4)$, $(2, 4, 1, 3)$.

Logo, temos 12 possibilidades.

Portanto, vemos que para o exemplo temos $2.(PC)_4 = 2.3! = 2.6 = 12$ maneiras.