Gabarito da AP2 - Fundamentos de Algoritmos para Computação

AP2 - Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Questões:

1. (1.5) Determine o coeficiente de x^{71} no desenvolvimento de $(2x^4 - \frac{5}{x^3})^{100}$. Justifique a resposta.

   Resposta: Temos $n = 100$, $a = 2x^4$ e $b = -\frac{5}{x^3}$.

   Daí, para $0 \leq k \leq 100$ temos:

$$\begin{array}{rcll} T_{k+1} & = & C_n^k a^{n-k} b^k & = \\ & = & C_{100}^k (2x^4)^{100-k} (-\frac{5}{x^3})^k & = \\ & = & C_{100}^k \frac{(2x^4)^{100-k}(-1)^k 5^k}{(x^3)^k} & = \\ & = & C_{100}^k \frac{(-1)^k 5^k 2^{100-k}(x^4)^{100-k}}{x^{3k}} & = \\ & = & C_{100}^k (-1)^k 5^k 2^{100-k} x^{400-4k} x^{-3k} & = \\ & = & C_{100}^k (-1)^k 5^k 2^{100-k} x^{400-4k-3k} & = \\ & = & C_{100}^k (-1)^k 5^k 2^{100-k} x^{400-7k}. & \end{array}$$

   Devemos determinar k tal que $T_{k+1} = C_{100}^k (-1)^k 5^k 2^{100-k} x^{71}$.

   Portanto, deve ser $400 - 7k = 71 \Rightarrow k = 47$.

   Logo, o coeficiente de x^{71} em $(2x^4 - \frac{5}{x^3})^{100}$ é $C_{100}^{47}(-1)^{47}5^{47}2^{100-47} = -C_{100}^{47}5^{47}2^{53} = -\frac{100!}{47!53!}5^{47}2^{53}$.

2. (1.0) Encontre a fórmula fechada da relação de recorrência:
   $a_n = -2a_{n-1}$
   $a_0 = 3$
   Justifique.

   Resposta:

$$\begin{array}{rcll} a_n & = & -2a_{n-1} & = \\ & = & -2(-2a_{n-2}) & = \\ & = & (-2)^2 a_{n-2} & = \\ & = & (-2)^2(-2a_{n-3}) & = \\ & = & (-2)^3 a_{n-3} & = \\ & & \vdots & \\ & = & (-2)^i a_{n-i} & \end{array}$$

Para obter $n - i = 0$ deve ser $i = n$.

Logo, considerando $i = n$ resulta $a_n = (-2)^n a_0 = (-2)^n 3 = 3(-2)^n$. Isto é, a fórmula fechada está dada por $a_n = 3(-2)^n$ para $n \geq 0$.

3. (1.5) Calcule usando o Teorema das Diagonais:
$CR_5^0 + CR_5^1 + CR_5^2 + CR_5^3$
Justifique.

Resposta: Temos que $CR_n^r = C_{n+r-1}^r$, logo:

$$\begin{array}{rll} & CR_5^0 + CR_5^1 + CR_5^2 + CR_5^3 & = \\ = & C_{5+0-1}^0 + C_{5+1-1}^1 + C_{5+2-1}^2 + C_{5+3-1}^3 & = \\ = & C_4^0 + C_5^1 + C_6^2 + C_7^3 & \end{array}$$

Pelo teorema das diagonais sabemos que: $C_n^0 + C_{n+1}^1 + \ldots + C_{n+r}^r = C_{n+r+1}^r$.

Portanto, para $r = 3$ e $n = 4$ temos que

$C_4^0 + C_5^1 + C_6^2 + C_7^3 = C_8^3 = \frac{8!}{5!3!} = 56$.

4. (1.5) Seja F uma floresta com 20 vértices e 5 componentes conexos. Quantas arestas F possui? Fundamente sua resposta.

Resposta: Como F é uma floresta e possui 5 componentes conexos então cada componente conexo F_i é uma árvore, $i = 1, 2, \ldots, 5$.

Sejam n_i o número de vértices da árvore F_i e m_i o número de arestas da árvore F_i, $i = 1, \ldots, 5$.

Temos que em uma árvore seu número de arestas é igual ao número de vértices menos um, isto é, $m = n-1$. Logo, temos que para cada árvore F_i, $m_i = n_i-1$, $i = 1, \ldots, 5$.

Como o número de arestas da floresta F é a soma das arestas de cada componente conexo de F, isto é, a soma das arestas de cada árvore F_i, $i = 1, \ldots, 5$, então temos:

$$\begin{array}{rcll} m & = & m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 & = \\ & = & n_1 - 1 + n_2 - 1 + n_3 - 1 + n_4 - 1 + n_5 - 1 & = \\ & = & n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 - 5 & = \\ & = & n - 5 & = \\ & = & 20 - 5 & = \\ & = & 15 & \end{array}$$

5. (1.5) Considere a afirmação:
Um grafo bipartido com número ímpar de vértices não pode ser hamiltoniano. A afirmação é verdadeira ou falsa? Justifique.

Resposta: A afirmação é verdadeira.

Suponhamos, por absurdo, que um grafo bipartido com número ímpar de vértices é hamiltoniano.

Se um grafo bipartido, G, é hamiltoniano então existe um ciclo C que passa por todos os vértices de G. Como o número de vértices de G é ímpar, temos que C é um ciclo ímpar, contradição, pois pela caracterização dos grafos bipartidos, G não possui ciclo ímpar.

Logo, um grafo bipartido com número ímpar de vértices não pode ser hamiltoniano.

6. (1.5) Determine o número de arestas de um grafo planar conexo, 4-regular (isto é, regular de grau 4) e com 10 faces. Justifique.

Resposta: Como G é 4-regular então $d(v) = 4$, $\forall\ v \in V(G)$. Temos também que $f = 10$.

Sabemos que $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$.

Como G é 4-regular temos que $\sum_{v \in V(G)} d(v) = n\text{x}4 = 2m$, portanto $n = \frac{2m}{4} = \frac{m}{2}$.

Como G é conexo e planar, pela fórmula de Euler, temos:

$n + f = m + 2$, ou seja, $\frac{m}{2} + 10 = m + 2$, logo $m - \frac{m}{2} = 8$, isto é, $\frac{m}{2} = 8$, implicando em $m = 16$.

Logo, o grafo planar conexo 4-regular com 10 faces possui 16 arestas.

7. (1.5) Dê exemplo de um digrafo que não seja acíclico, contenha pelo menos uma fonte e pelo menos um sumidouro. Justifique.

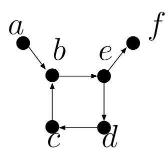

Figura 1: Digrafo cíclico D que contém pelo menos uma fonte e pelo menos um sumidouro

Resposta: Temos que v é fonte se o grau de entrada de v é igual a 0, e v é sumidouro se o grau de saída é igual a zero.

O digrafo D contém pelo menos uma fonte (o vértice a) e pelo menos um sumidouro (o vértice f).