Gabarito da AD1 - Fundamentos de Algoritmos para Computação - 2008/01

1. (2.0) Seja A um conjunto com um número finito de elementos sendo $P(A)$ o conjunto de partes de A. Sejam B e D dois conjuntos arbitrários. Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique

   (a) $\{A\} \subseteq P(A)$

   Resposta: A afirmação é verdadeira.

   Lembremos que:

   – $B \subseteq C$ significa que todo elemento de B é elemento de C;
   – $P(A)$ é o conjunto cujos elementos são subconjuntos de A, isto é, $B \in P(A)$ se e somente se $B \subseteq A$. Em particular, como $A \subseteq A$, tem-se que $A \in P(A)$.

   Logo, como o único elemento de $\{A\}$ é A, que é um elemento de $P(A)$, tem-se que $\{A\} \subseteq P(A)$.

   (b) $\emptyset \notin P(A)$

   Resposta: A afirmação é falsa, já que $\emptyset$ é um elemento de $P(A)$, pois $\emptyset \subseteq A$, para todo conjunto A. Logo, $\emptyset \in P(A)$.

   (c) $D \cap (B \cup \overline{D}) \subseteq B$

   Resposta: A afirmação é verdadeira, pois:

$$\begin{array}{lcll} & & D \cap (B \cup \overline{D}) & = \\ \text{(propriedade distributiva)} & = & (D \cap B) \cup (D \cap \overline{D}) & = \\ (D \cap \overline{D}) = \emptyset & = & (D \cap B) \cup \emptyset & = \\ A \cup \emptyset = A & = & D \cap B \subseteq B & \end{array}$$

   Pois, se $x \in (D \cap B)$ então $x \in B$.

2. (2.0) Mostre pelo princípio da indução matemática que:

$$1.3.5.7....(2n-1) = \tfrac{(2n)!}{2^n n!}$$

para todo n natural.

Resposta: Seja $P(n) = 1.3.5.....(2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$, para $n \in \mathbb{N}$.

Base da indução: Para $n = 1$, resulta que o produto se reduz ao primeiro fator dado, que é o $2.1 - 1 = 1 = \frac{(2.1)!}{2^1 1!}$.

Logo, $P(1)$ é verdadeira.

Hipótese de indução:

Suponha verdadeiro para k, isto é, $P(k)$ é verdadeiro:

$$P(k) : 1.3.5.....(2k-1) = \frac{(2k)!}{2^k.k!}$$

Devemos provar que $P(k+1)$ é verdadeiro, isto é:

$$P(k+1) : 1.3.5.....(2k-1)(2(k+1)-1) = \frac{(2(k+1))!}{2^{k+1}.(k+1)!}$$

Desenvolvendo para $k+1$ e usando a hipótese de indução, temos que:

$$\begin{array}{lll} & 1.3.5....(2k-1)(2(k+1)-1) & = \\ = & \underbrace{1.3.5.....(2k-1)}_{(Por\ hipótese\ indutiva)}\ (2(k+1)-1) & = \\ = & \frac{(2k)!}{2^k.k!}.[2(k+1)-1] & = \\ = & \frac{(2k)!}{2^k.k!}.[2k+1] & = \\ = & \frac{(2k)!(2k+1)(2k+2)}{2^k.k!(2k+2)} & = \\ = & \frac{(2k+2)!}{2^k.k!2(k+1)} & = \\ = & \frac{(2k+2)!}{2^{k+1}.(k+1)!} & = \\ = & \frac{(2(k+1))!}{2^{k+1}.(k+1)!} & \end{array}$$

Logo, pelo princípio da indução, a expressão é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. (2.0) Considere as letras da palavra $MATEMATICAMENTE$.

   (a) Em quantos anagramas não existem vogais consecutivas? Justifique.

   Resposta: Vamos primeiramente arrumar as consoantes e, depois vamos entremear as vogais. O número de modos de arrumar em fila as consoantes M (3 vezes), T (3 vezes), C (1 vez), N (1 vez) é $P_8^{3,3,1,1} = \frac{8!}{3!3!1!1!} = \frac{8.7.6.5.4}{3.2} = 1120$. Para cada arrumação das consoantes, por exemplo, $MTCMTNMT$, podemos colocar as 7 vogais nos 9 espaços vazios da figura:

$\_\_\_\_\_$ M $\_\_\_\_\_$ T $\_\_\_\_\_$ C $\_\_\_\_\_$ M $\_\_\_\_\_$ T $\_\_\_\_\_$ N $\_\_\_\_\_$ M $\_\_\_\_\_$ T $\_\_\_\_\_$

Temos, então, $C_9^7 = \frac{9!}{7!2!} = \frac{9.8}{2} = 36$ modos de escolher os sete espaços que serão ocupados. Como a combinação é dada para posicionar onde irá ficar as vogais, falta ainda permutar estas vogais, dando $P_7^{3,3,1} = \frac{7!}{3!3!} = \frac{7.6.5.4}{3.2} = 140$ maneiras de permutar as vogais para cada posição dada na combinação.

Logo, pelo princípio multiplicativo, a resposta é que temos $P_8^{3,3,1,1} \times C_9^7 \times P_7^{3,3,1} = 1120 \times 36 \times 140 = 5.644.800$ anagramas sem vogais consecutivas.

(b) Em quantos anagramas as vogais estão em ordem alfabética? Justifique.

Resposta:

1º Raciocínio: Imagine primeiro todos os anagramas sem esta restrição, isto é, todas as permutações das 15 letras, em número de $P_{15}^{3,3,3,3,1,1,1} = \frac{15!}{3!3!3!3!}$. Se fixarmos uma certa arrumação das consoantes, e permutarmos as vogais das quais existem $P_7^{3,3,1} = \frac{7!}{3!3!} = \frac{7.6.5.4}{6} = 140$ permutações, vai ver que dessas 140 possibilidades, só uma tem as vogais em ordem alfabética. Como isto vale para cada arrumação das consoantes, temos $\frac{P_{15}^{3,3,3,3,1,1,1}}{P_7^{3,3,1}} = \frac{\frac{15!}{3!3!3!3!}}{\frac{7!}{3!3!}} = \frac{15!}{7!3!3!}$.

2º Raciocínio: Escolha 7 lugares para colocar as vogais. Temos $C_{15}^7 = \frac{15!}{7!8!}$ maneiras. Para manter a ordem alfabética, nada mais há a fazer com as vogais. Agora, para cada uma dessas escolhas, podemos permutar as consoantes, isto é, $P_8^{3,3,1,1}$ modos. Pelo princípio multiplicativo, obtemos $C_{15}^7 P_8^{3,3,1,1} = \frac{15!}{7!3!3!}$.

4. (2.0) De quantas maneiras podem ser distribuídos 8 bombons e 3 balas entre 5 crianças, nos seguintes casos:

(a) Os bombons são todos idênticos e as balas são todas idênticas. Justifique.

Resposta: Denotamos por x_i e y_i os números de bombons e de balas, respectivamente, que a criança i pode receber, sendo $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Primeiro calculamos os modos de distribuir os bombons, que é equivalente a encontrar o número de soluções inteiras não negativas ($x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5$) da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8 \qquad (1)$$

que corresponde a $CR_5^8 = C_{12}^8$ modos diferentes de distribuir os bombons.

Agora, calculemos os modos de distribuir as balas entre as crianças. Este problema é equivalente a encontrar as soluções inteiras não-negativas ($y_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$) da equação:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 3 \qquad (2)$$

que corresponde a $CR_5^3 = C_7^3$.

Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $C_{12}^8 C_7^3 = \frac{12!7!}{8!4!3!4!} = \frac{12!}{8.4!4!3!}$ maneiras de distribuir 8 bombons idênticos e 3 balas idênticas entre 5 crianças.

(b) Os bombons são todos idênticos e as balas são todas idênticas mas nenhuma criança pode receber mais de uma bala. Justifique.

Resposta: Neste problema usamos a mesma notação que no item anterior. Como aqui não mudou a distribuição dos bombons, temos $CR_5^8 = C_{12}^8$ modos. No caso da distribuição das balas temos a restrição de que cada criança não pode receber mais de uma bala. Isso significa que das 5 crianças, 3 recebem uma bala, isto é, cada modo corresponde a escolha de 3 crianças entre 5. Portanto, temos $C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$ modos diferentes.

Então, no total, pelo princípio multiplicativo, temos $CR_5^8.C_5^3 = C_{12}^8.C_5^3 = 10.\frac{12!}{8!4!}$ maneiras diferentes de distribuir os 5 bombons e 3 balas.

5. (2.0) Considere o conjunto dos números inteiros de 0 a 10^6 (inclusive 0 e 10^6).

(a) Em quantos há ocorrência de pelo menos um 1? Justifique.

Resposta: Sejam X o número de inteiros de 0 a 10^6 (inclusive o 0 e 10^6) e Y o número de inteiros de 0 a 10^6 (inclusive o 0 e 10^6) de tal forma que não há ocorrência do algarismo 1. Logo, o número de inteiros de 0 a 10^6 (inclusive o 0 e 10^6) que há ocorrência de pelo menos um 1 é $X - Y$.

Para X temos $10^6 + 1$ inteiros. E para Y temos 2 maneiras de calcularmos:

1ª maneira:

Com 1 algarismo, temos 9 possibilidades;
Com 2 algarismos, temos 8.9 possibilidades;
Com 3 algarismos, temos 8.9.9 possibilidades;
Com 4 algarismos, temos 8.9.9.9 possibilidades;
Com 5 algarismos, temos 8.9.9.9.9 possibilidades;
Com 6 algarismos, temos 8.9.9.9.9.9 possibilidades;

Como 10^6 é o único número com 7 algarismos e este possui um 1, então não iremos contá-lo.

Logo, $Y = 9 + 8.9 + 8.9^2 + 8.9^3 + 8.9^4 + 8.9^5$.

OU

2ª maneira: Como 10^6 é o único número com 7 algarismos e este possui um 1, então não iremos contá-lo. Podemos transformar todos os números com menos de 6 algarismos em números com 6 algarismos, bastando apenas acrescentarmos $0's$ à esquerda do número, como por exemplo, podemos escrever o número 102 como 000102. Daí, o primeiro dígito pode ser escolhido de 9 modos, o segundo de 9 modos, o terceiro de 9 modos, o quarto de 9 modos, o quinto de 9 modos, e por último, o sexto de 9 modos. Pelo princípio multiplicativo, temos que a resposta é $9.9.9.9.9.9 = 9^6$, ou ainda, um problema direto de $AR(9,6) = 9^6$.

Daí, o número de inteiros de 0 a 10^6 (inclusive o 0 e 10^6) é $10^6 + 1 - 9^6$.

(b) Quantos números têm todos os algarismos distintos? Justifique.

Resposta: Para calcularmos os números que possuem algarismos distintos de 0 a 10^6 temos que calcular os números com 1 algarismo, com 2 algarismos, com 3 algarismos, com 4 algarismos, com 5 algarismos e com 6 algarismos, separadamente:

Daí, com 1 algarismo, temos 10 possibilidades;
Com 2 algarismos, temos 9.9 possibilidades;
Com 3 algarismos, temos 9.9.8 possibilidades;
Com 4 algarismos, temos 9.9.8.7 possibilidades;
Com 5 algarismos, temos 9.9.8.7.6 possibilidades;
Com 6 algarismos, temos 9.9.8.7.6.5 possibilidades;

Logo, pelo princípio aditivo, o número de inteiros de 0 a 10^6 que têm todos os algarismos distintos é $10 + 9.9 + 9.9.8 + 9.9.8.7 + 9.9.8.7.6 + 9.9.8.7.6.5$.