Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Gabarito AP1 - Segundo Semestre de 2012

Nome -
Assinatura -

Observações:

1. Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular. Se necessário deixe o resultado indicado, como um produto ou quociente ou potência de números inteiros ou fatoriais.

2. Resultado sem indicação de como foi obtido, não será considerado.

3. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.

4. Você pode usar lápis para responder as questões.

5. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.

6. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

Questões:

1. (1.2) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

   (a) $\emptyset \in A$ para todo conjunto A.

   Resposta: Falsa. Como o conjunto vazio não é elemento de todo conjunto, temos que a afirmação é falsa. Seria correto afirmar que $\emptyset \subseteq A$, visto que $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.

   (b) $A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$, para todos os conjuntos A, B e C.

   Resposta: Falsa. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 4, 5, 7\}, C = \{2, 3, 5, 6\}$. Observe que $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e que $A - (B \cup C) = \{1\}$. Por outro lado, $A - B = \{1, 3\}$ e $A - C = \{1, 4\}$ e, consequentemente, $(A - B) \cup (A - C) = \{1, 3, 4\}$. Logo, $A - (B \cup C) \neq (A - B) \cup (A - C)$.

2. (1.5) Mostre por indução matemática que:

$$1\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}} \quad \text{para todo natural } n \geq 1.$$

Observação: Indique claramente os passos da indução.

Resposta: Seja

$$P(n) : 1\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$$

para todo natural $n \geq 1$.

BASE DA INDUÇÃO: Para n=1 temos

$$1\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} = 1$$

e

$$4 - \frac{1+2}{2^{1-1}} = 4 - 3 = 1$$

.

Logo, $P(1)$ é verdadeira.

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Vamos supor que

$$P(k) : 1\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 4 - \frac{k+2}{2^{k-1}} \quad \text{para todo natural} \ \ k \geq 1$$

é verdadeira.

PASSO INDUTIVO: Vamos provar que se $P(k)$ é verdadeira, então

$$P(k+1) : 1\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + (k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k = 4 - \frac{k+3}{2^k}$$

também é verdadeira.

De fato,

$$\underbrace{1\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}_{\text{HI}} + (k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k =$$

$$4 - \left(\frac{k+2}{2^{k-1}}\right) + (k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k =$$

$$4 + \left(\frac{-k-2}{2^{k-1}}\right) + \left(\frac{k+1}{2^k}\right) =$$

$$4 + \left(\frac{-2k-4+k+1}{2^k}\right) =$$

$$4 + \left(\frac{-k-3}{2^k}\right) =$$

$$4 - \left(\frac{k+3}{2^k}\right)$$

Logo, pelo Princípio da Indução Matemática, temos que $P(n): 1\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$ para todo natural $n \geq 1$.

3. (1.5) Uma turma tem 10 meninos e 10 meninas. De quantas maneiras diferentes eles podem permanecer em fila, se os sexos devem ser alternados (duas meninas ou dois meninos não podem ficar juntos)? Justifique.

   Resposta: Inicialmente, vamos posicionar os meninos em fila. Para isso, temos $P_{10} = 10!$ formas. Com os meninos posicionados, temos duas formas de escolher onde posicionar as meninas:

   $$.\_.\_.\_.\_.\_.\_.\_.\_.\_.\_ \text{ ou } \_.\_.\_.\_.\_.\_.\_.\_.\_.\_.$$

   onde . representa a posição das meninas e _ a posição dos meninos.

   Agora basta permutarmos as meninas para posicioná-las em uma dessas posições. Podemos fazer isso de $P_{10} = 10!$ maneiras.

   Assim, pelo princípio multiplicativo temos $P_{10} \times 2 \times P_{10} = 2 \times 10! \times 10!$ modos de formar a fila respeitanto as restrições do enunciado.

4. (1.5) De quantas maneiras podemos selecionar um juri de 6 homens e 8 mulheres em um conjunto de 20 homens e 20 mulheres? Justifique.

   Resposta: Para escolher 6 entre os 20 homens, temos $C_{20}^6 = \frac{20!}{(20-6)!6!} = \frac{20!}{14!6!}$ maneiras, visto que, como queremos formar um juri, a ordem de nossas escolhas não é importante. Da mesma forma, para escolher 8 entre as 20 mulheres temos

   $$C_{20}^8 = \frac{20!}{(20-8)!8!} = \frac{20!}{12!8!}$$

   formas. Utilizando o Princípio Multiplicativo temos

   $$C_{20}^6 \times C_{20}^8 = \frac{20!}{14!6!} \times \frac{20!}{12!8!}$$

maneiras de escolher este juri.

5. (2.2) Considere a palavra **c o c h i n c h i n e n s e**.

   (a) Quantos anagramas podemos formar com essa palavra? Justifique.

   Resposta: A palavra C O C H I N C H I N E N S E tem 14 letras das quais 3 são C's, 1 é O, 3 são N's, 2 são H's, 2 são I's, 2 são E's e 1 é S. Como temos letras repetidas, para determinar o número de anagramas desta palavra temos que utilizar o conceito de permutação com repetição. Portanto, temos $P_{15}^{3,1,3,2,2,2,1} = \dfrac{14!}{3!3!2!2!2!}$ anagramas da palavra COCHINCHINENSE.

   (b) Quantos anagramas começam com **ch**? Justifique.

   Resposta: Vamos fixar um C na primeira posição e um H na segunda, de modo a termos palavras começadas por CH. Em seguida, vamos permutar as demais letras nas outras 12 posições, tomando cuidado com as repetições. Note que agora temos apenas 2 C's e 1 H. Logo, temos $P_{12}^{2,1,3,1,2,2,2,1} = \dfrac{12!}{2!3!2!2!2!}$ anagramas que começam com CH.

   (c) Quantos anagramas contêm as letras **o** e **s** juntas? Justifique.

   Vamos resolver esta questão tratando as letras O e S como uma única letra. Vamos permutar todas as outras letras juntamente com esta, tomando cuidado com as repetições. Temos $P_{13}^{3,3,2,2,2,1} = \dfrac{13!}{3!3!2!2!2!}$ maneiras de fazer isso. Além disso, observemos que as letras O e S juntas podem ser OS ou SO. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $2 \times P_{13}^{3,3,2,2,2,1} = \dfrac{13!}{3!3!2!2!}$ anagramas desta palavra com as letras O e S juntas.

6. (2.1) Temos 15 barras de chocolate idênticas, e queremos distribui-las entre 7 crianças.

   (a) De quantas maneiras isso pode ser feito? Justifique.

Resposta: Vamos modelar este problema da seguinte forma: Enumerar as crianças por $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Representamos por x_i a quantidade de barras de chocolate que a criança i recebe, para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Essas variáveis serão todas não negativas, visto que cada criança pode receber de 0 ou mais barras de chocolate. Além disso, sabemos que o total de barras a serem distribuídas é 15. Assim, podemos escrever a seguinte equação:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 15 \ \ (I)$$

e temos $CR_7^{15} = C_{7+15-1}^{15} = C_{21}^{15} = \dfrac{21!}{(21-15)!15!} = \dfrac{21!}{6!15!}$ soluções inteiras não negativas para a equação (I). Consequentemente, temos $\dfrac{21!}{6!15!}$ maneiras de distribuir as 15 barras de chocolate idênticas entre as 7 crianças.

(b) E se impusermos a restrição de que cada criança deve receber pelo menos uma barra de chocolate? Justifique.

Agora queremos resolver a mesma equação anterior, entretanto teremos a exigência de que cada criança receba pelo menos uma barra de chocolate. Neste caso, nossas variáveis x_i são todas positivas, ou seja, $x_i \geq 1, i = 1, \cdots, 7$. Para resolvermos esta equação utilizando o conceito de combinação com repetição temos que ter apenas variáveis maiores ou iguais a 0. Por isso, vamos reescrever $x_i, i = 1, \cdots, 7$ como $x_i = z_i + 1, i = 1, \cdots, 7$ e $z_i \geq 0$.
Agora, vamos reescrever a equação (I) em função das variáveis $z_i, i = 1, \cdots, 7$.

$$(z_1 + 1) + (z_2 + 1) + \cdots + (z_7 + 1) = 15$$

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_7 + 7 = 15$$

Isto é

$$\sum_{i=1}^{7} z_i = 8 \ \ (II)$$

Desta forma, temos $CR_7^8 = C_{7+8-1}^8 = C_{14}^8 = \dfrac{14!}{(14-8)!8!} = \dfrac{14!}{6!8!}$ soluções inteiras não negativas para a equação (II) e consequentemente temos $\dfrac{14!}{6!8!}$ formas e distribuir as 15 barras de chocolate idênticas entre as 7 crianças de modo que cada criança receba pelo menos uma barra de chocolate.