Gabarito da AD2 - Fundamentos de Algoritmos para Computação - 2008/01

1. (1.0) Usando o Teorema das linhas calcule:

$$\sum_{i=0}^{n}(k+1)^2C(n,k)$$

Resposta:

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2C(n,k) = \sum_{k=0}^{n}(k^2+2k+1)C(n,k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}k^2C(n,k) + \sum_{k=0}^{n}2kC(n,k) + \sum_{k=0}^{n}C(n,k)$$

Desenvolvendo cada termo da soma separadamente, temos:

(a) Pelo teorema das linhas, temos:

$$\sum_{k=0}^{n}C(n,k) = 2^n$$

(b) Da segunda parcela da soma, temos:

$$\sum_{k=0}^{n}2kC(n,k) = 2\sum_{k=0}^{n}k\frac{n!}{(n-k)!k(k-1)!} =$$

$$= 2\sum_{k=0}^{n}n\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = 2n\sum_{k=0}^{n}C(n-1,k-1)$$

$$\text{(Teorema das linhas)} = 2n\cdot 2^{n-1} = n\cdot 2^n$$

(c) Da primeira parcela da soma e usando o resultado da segunda parcela, temos:

$$\sum_{k=0}^{n}k^2C(n,k) = \sum_{k=1}^{n}k(k-1)C(n,k) + \sum_{k=0}^{n}kC(n,k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}k(k-1)\frac{n!}{(n-k)!k(k-1)(k-2)!} + \sum_{k=0}^{n}k\frac{n!}{(n-k)!k(k-1)!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} + n\cdot 2^{n-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}n(n-1)\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} + n\cdot 2^{n-1} =$$

$$= n(n-1)\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} + n\cdot 2^{n-1} =$$

$$\text{(Teorema das linhas)} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}$$

Portanto,

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2C(n,k) = \sum_{k=0}^{n}k^2C(n,k) + \sum_{k=0}^{n}2kC(n,k) + \sum_{k=0}^{n}C(n,k)$$

$$= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} + n2^n + 2^n = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} + 2^n(n+1)$$

2. (1.5) Usando o Teorema do binômio de Newton mostre que:

$$\sum_{k=0}^{n}(-2)^kC(n,k) = \begin{cases} 1 & \text{se n é par} \\ -1 & \text{se n é impar} \end{cases}$$

Resposta:

$$\sum_{k=0}^{n}(-2)^kC(n,k) = \sum_{k=0}^{n}1^{(n-k)}(-2)^kC(n,k)$$

Pelo Teorema Binomial, temos:

$$\sum_{k=0}^{n}1^{(n-k)}(-2)^kC(n,k) = (1-2)^n = (-1)^n$$

Logo, segue o resultado.

3. (1.5) Seja a_n o número de permutações dos n primeiros números naturais tais que cada elemento difere de uma unidade de algum elemento à sua esquerda na permutação. Construa e resolva uma relação de recorrência para a_n. Justifique.

(Para $n = 3$, por exemplo, tem-se as possibilidades 123, 213, 231 e 321).

Resposta:

Observe que para n=4, as possibilidades são: 1234, 2134, 3214, 2314, 2341, 3241, 4321, 3421.

Para $1 < i < n$, se 1 está na primeira posição, então 2 está na segunda posição, o 3 está na terceira, e assim por diante, o que implica que i deve estar à esquerda do $i+1$, e portanto n está na última posição.

Se n está na primeira posição, então $n-1$ está na segunda posição, $n-2$ está na terceira, e assim por diante, o que implica que i dever estar à esquerda do $i-1$, e portanto 1 está na última posição.

Suponha que nem 1 nem n estão na primeira posição e que i seja o elemento da última posição.

Seja $j > 1$ a posição do número 1, então 2 está a sua esquerda, o 3 está a esquerda do 2, porque o 1 está a sua direita, e assim por diante. O que implica que i está a esquerda do 1, o que é um absurdo!

O argumento para n é análogo.

Portanto, o último elemento é 1 ou n.

Considere que n é o último elemento: é fácil verificar que uma permutação será válida se, e somente se os $n-1$ primeiros números formarem uma permutação válida.

Considere que 1 é o último elemento: subtraia 1 unidade de cada um dos $n-1$ elementos iniciais. É fácil verificar que uma permutação será válida se, e somente se os $n-1$ primeiros números formarem uma permutação válida.

Logo, $a_n = a_{n-1} + a_{n-1} = 2a_{n-1}$ para $n \geq 2$. Como $a_1 = 1$, então, obtemos a seguinte relação de recorrência:

$$a_n = \begin{cases} 2a_{n-1} & , \quad n \geq 2 \\ 1 & , \quad n = 1 \end{cases}$$

Resolvendo a relação de recorrência pelo método iterativo:

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & 2a_{n-1} \\ 2a_{n-1} & = & 2(2a_{n-2}) = 2^2 a_{n-2} \\ 2^2 a_{n-2} & = & 2^2(2a_{n-3}) = 2^3 a_{n-3} \\ \ldots & = & \ldots \\ 2^{n-2} a_2 & = & 2(2^{n-2} a_1) = 2^{n-1} 1 = 2^{n-1} \end{array}$$

Portanto $a_n = 2^{n-1}$

4. (1.0) Mostre que toda floresta é um grafo bipartido.

   Resposta: Seja G uma floresta. G é acíclico, então G não possui ciclo. Pela caracterização de grafos bipartidos (G é bipartido se, e somente se, não contém ciclos ímpares), temos então que uma floresta G é um grafo bipartido.

5. (1.5) Determine o número de faces de um grafo planar conexo, 3-regular (regular de grau 3), e com 15 arestas. Justifique.

   Resposta: Seja n o número de vértices e m o número de arestas do grafo. Pelo Teorema do Aperto de Mãos, temos que $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$, onde $d(v)$ é o grau do vértice v e $d(v) = 3$, para todo vértice do grafo, então $3m = 2n$.

   Como $m = 15$, então $3n = 2 \cdot 15 \Rightarrow n = 10$, ou seja, o grafo possui 10 vértices.

   Como o grafo é planar então, pela fórmula de Euler, temos que:

$$n + f - m = 2,$$

   onde f é o número de faces do grafo. Logo, segue que o número de faces do grafo planar, 3-regular, com 15 arestas é $10 + f - 15 = 2 \Rightarrow f = 7$.

6. (3.5) Responda as seguintes perguntas considerando o grafo G dado por:

$$V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$
$$E(G) = \{(a,b), (b,c), (c,d), (d,e), (e,f), (a,f), (b,g), (g,h), (h,c), (h,e), (f,g)\}.$$

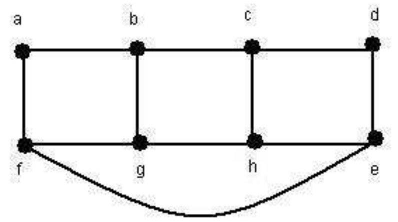

Figura 1: Grafo G

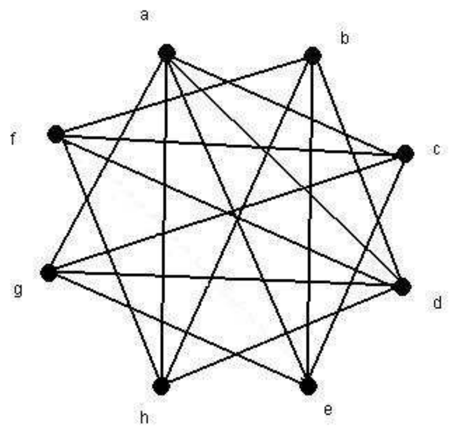

Figura 2: Grafo $\overline{G}$

(a) Desenhe G e desenhe também seu grafo complementar $\overline{G}$. Escreva $V(\overline{G})$ e $E(\overline{G})$.

Resposta: Ver figura 1: Grafo G e figura 2: Grafo $\overline{G}$

$$V(G) = V(\overline{G}) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$
$$E(\overline{G}) = \{(v, w); v, w \in V(G) \text{ e } (v, w) \notin E(G)\} =$$
$$= \{(a, c), (a, d), (a, e), (a, h), (a, g), (b, f), (b, h), (b, e), (b, d), (c, f), (c, g),$$
$$(c, e), (d, f), (d, g), (d, h), (e, g), (h, f)\}$$

(b) Dê a matriz de adjacência de G.

Resposta:

$$\left[\begin{array}{c|cccccccc}
 & a & b & c & d & e & f & g & h \\ \hline
a & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
b & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
c & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
d & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
e & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
f & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
g & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
h & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]$$

(c) G é bipartido? Caso seja, dê sua bipartição. E o grafo $\overline{G}$?

Resposta: Como G não possui ciclo impar, então G é bipartido. De fato, tome a partição $A = \{a, c, g, e\}$ e $B = \{f, b, h, d\}$, onde $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = V$. Todas as arestas de G têm um extremo no conjunto A e outro em B. Veja na figura 3 o grafo bipartido G.

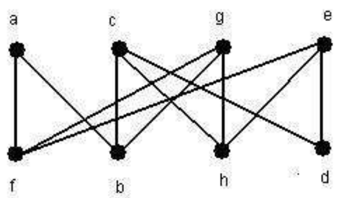

Figura 3: Bipartição de G

$\overline{G}$ não é bipartido, porque ele tem ciclo impar, por exemplo, veja na figura 2 o ciclo *agca* tem comprimento 3, é um ciclo impar.

(d) G é um grafo euleriano?

Resposta: Não, G não é euleriano. Um grafo é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices têm grau par. O grafo G possui os vértices b, c, g, f, e e h com grau 3.

(e) G é hamiltoniano?

Resposta: Sim, G é hamiltoniano. Um grafo é hamiltoniano quando possui um ciclo passando por todos os seus vértices. Tome em G o ciclo $abcdehgfa$.

(f) Dê uma orientação as arestas de G de modo que o digrafo obtido seja fortemente conexo. (Desenhe as orientações nas arestas de G).

Resposta: Para que um digrafo seja fortemente conexo, deve existir um caminho de x para y e de y para x para todo x e y vértices do grafo. Então na figura 4 representamos a orientação pedida. Observe que, de fato, temos um caminho (orientado) entre todo par de vértices.

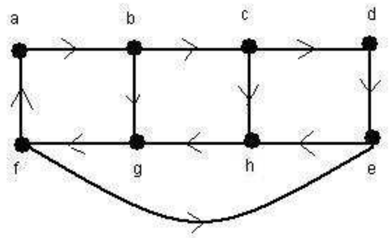

Figura 4: Orientação fortemente conexa de G