Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AP2 - Segundo Semestre de 2019

Questões:

1. (1.0) Pede-se:

   (a) Escrever o enunciado do Teorema das Linhas.

   Resposta: Pelo teorema das linhas, temos que:

   $$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

   (b) Usando o Teorema das Linhas calcule a seguinte soma:

   $$C_{50}^2 + C_{50}^3 + C_{50}^4 + \cdots + C_{50}^{49}$$

   Tomando $n = 50$ e $S = C_{50}^2 + C_{50}^3 + C_{50}^4 + \cdots + C_{50}^{49}$ temos:

   $$\begin{aligned}
   C_{50}^0 + C_{50}^1 + C_{50}^2 + \ldots + C_{50}^{49} + C_{50}^{50} &= 2^{50} \\
   C_{50}^2 + C_{50}^3 + \ldots + C_{50}^{49} &= 2^{50} - C_{50}^0 - C_{50}^1 - C_{50}^{50} \\
   S &= 2^{50} - \tfrac{50!}{0!50!} - \tfrac{50!}{1!49!} - \tfrac{50!}{50!0!} \\
   S &= 2^{50} - 1 - 50 - 1 \\
   S &= 2^{50} - 52
   \end{aligned}$$

2. (1.5) Aplicando a fórmula do Binômio de Newton, calcule o coeficiente de x^{45} no desenvolvimento de $(\frac{x^5}{2} - \frac{3}{x^4})^{63}$. Justifique a resposta.

   Resposta: Como $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ temos que o termo geral desta soma corresponde a

   $$T_{k+1} = C_n^k a^k b^{n-k}$$

O objetivo da questão é determinar o coeficiente de x^{45}, portanto devemos encontrar o termo que contém tal coeficiente. Para isso, precisamos determinar k.

Neste caso temos $n = 63$, $a = \frac{x^5}{2}$ e $b = -\frac{3}{x^4}$. Assim, resulta:

$$\begin{aligned}
T_{k+1} &= C_{63}^{k}\ (\tfrac{x^5}{2})^k\ (-\tfrac{3}{x^4})^{63-k} \\
&= C_{63}^{k}\ x^{5k}\ 2^{-k}\ (-1)^{63-k}\ 3^{63-k}\ x^{-4(63-k)} \\
&= C_{63}^{k}\ x^{5k}\ 2^{-k}\ (-1)^{63-k}\ 3^{63-k}\ x^{-252+4k} \\
&= C_{63}^{k}\ 2^{-k}\ (-1)^{63-k}\ 3^{63-k}\ x^{5k}\ x^{-252+4k} \\
&= C_{63}^{k}\ 2^{-k}\ (-1)^{63-k}\ 3^{63-k}\ x^{5k-252+4k} \\
&= C_{63}^{k}\ 2^{-k}\ (-1)^{63-k}\ 3^{63-k}\ x^{9k-252}
\end{aligned}$$

Como queremos encontrar o coeficiente de x^{45}, temos que ter $9k - 252 = 45$. Então $k = \frac{45+252}{9} = \frac{297}{9} = 33$. Logo, o coeficiente de x^{45} é dado por:

$$C_{63}^{33}\ 2^{-33}\ (-1)^{63-33}\ 3^{63-33} = C_{63}^{33}\ 2^{-33}\ (-1)^{30}\ 3^{30} = \frac{63!}{33!30!}\ 2^{-33}\ 3^{30}$$

3. (1.5) Encontre a fórmula fechada da relação de recorrência:
$a_n = a_{n-1} + 2n, \quad n$ natural, $n \geq 1$
$a_0 = 0$
Descreva o processo utilizado para chegar à fórmula.

Resposta: Vamos utilizar o método de Substituições Regressivas.

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + 2n \\
&= [a_{n-2} + 2(n-1)] + 2n \\
&= [a_{n-3} + 2(n-2)] + 2(n-1) + 2n \\
&= a_{n-3} + 2\ [(n-2) + (n-1) + n] \\
&\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&= a_{n-i} + 2\ [(n-i+1) + (n-i+2) + \ldots + n]
\end{aligned}$$

Tomando $n - i = 0$ temos $i = n$. Substituindo, concluímos que:

$$a_n = a_0 + 2 \underbrace{[\, 1 + 2 + \ldots + n \,]}_{\text{Soma da PA de } n \text{ termos}}$$

$$a_n = 0 + 2 \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]$$

$$a_n = n(n+1)$$

$$a_n = n^2 + n$$

Logo, a fórmula fechada da relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 2n$, n natural, $n \geq 0$, $a_0 = 0$ é dada por $a_n = n^2 + n$.

4. (4.5) Considere o grafo G definido por:
$V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ e
$E(G) = \{(a, b), (b, c), (c, d), (a, d), (a, e), (a, g), (b, f)(b, h), (c, f), (c, h), (d, e), (d, g), (e, f), (e, g), (f, h), (g, h)\}$

   (a) Desenhe G.

   Resposta:

   (b) G é conexo? Justifique.

   Resposta: Sim, pois um grafo G é conexo se existe caminho entre qualquer par de vértices de G, e o grafo G possui.

   (c) G é euleriano? Justifique.

   Resposta: Sim, pois sabemos que um grafo G é euleriano se ele admite um circuito euleriano, isto é, um circuito que passe por todas as arestas exatamente uma vez. O trajeto $adegdcbfhcfeaghba$ é euleriano.
   E além disso, temos a seguinte caracterização para os grafos eulerianos: Um grafo é euleriano se e somente se o grau de todos os seus vértices é par.

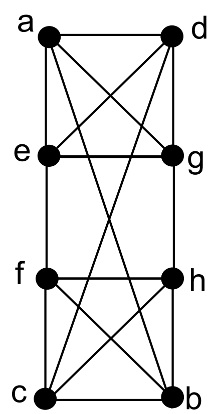

Figura 1: Grafo G.

Temos que G é um grafo 4-regular, logo, $d(a) = d(b) = d(c) = d(d) = d(e) = d(f) = d(g) = d(h) = 4$, isto é, todos os vértices possuem grau par, satisfazendo a caracterização de grafos eulerianos.

Portanto, podemos concluir que o grafo G é euleriano.

(d) G é hamiltoniano? Justifique.

Resposta: Sim, pois podemos exibir o seguinte ciclo hamiltoniano: $aefcbhgda$.

(e) Calcule a distância do vértice a ao vértice c. Calcule o centro de G. Justifique.

Resposta: A excentricidade de um vértice v, denotada por $e(v)$, é a maior distância (menor caminho) que pode ser percorrida a partir de v para alcançar qualquer outro vértice do grafo, isto é, $e(v) = max_{w \in V(G)}\{d(v, w)\}$.

O centro de um grafo G, denotado por $c(G)$, é o conjunto de vértices de G composto pelos vértices de menor excentricidade.

Logo, para calcular o centro de G, precisamos calcular a excentricidade de cada vértice e para tal, vamos calcular a distância entre cada par de vértices de G.

$d(a,b) = 1, d(a,c) = 2, d(a,d) = 1, d(a,e) = 1, d(a,f) = 2, d(a,g) = 1, d(a,h) = 2;$

$d(b,c) = 1, d(b,d) = 2, d(b,e) = 2, d(b,f) = 1, d(b,g) = 2, d(b,h) = 1;$

$d(c,d) = 1, d(c,e) = 2, d(c,f) = 1, d(c,g) = 2, d(c,h) = 1;$

$d(d,e) = 1, d(d,f) = 2, d(d,g) = 1, d(d,h) = 2;$

$d(e,f) = 1, d(e,g) = 1, d(e,h) = 2;$

$d(f,g) = 2, d(f,h) = 1,$

$d(g,h) = 1.$

Assim, podemos concluir que $e(v) = 2$ para todo vértice $v \in V(G)$. Como todas as excentricidades são iguais temos que o seu centro é o próprio conjunto $V(G)$, ou seja, $C(G) = \{V(G)\}$.

A questão também pede a distância do vértice a ao vértice c, logo temos $d(a,c) = 2$.

(f) Dê uma orientação as arestas de G, de modo que o digrafo obtido tenha fonte e sumidouro. Desenhe as orientações no grafo G e aponte justificando uma fonte e um sumidouro.

Resposta: Seja D_G o digrafo que possui a fonte a ($d^-(a) = 0$) e o sumidouro b ($d^+(b) = 0$).

5. (1.5) Seja G um grafo conexo, 3-regular com 8 vértices. Determine o número de arestas e o número de faces de G. Justifique.

Resposta: Como $d_G(v) = 3$, $\forall v \in V(G)$, pois G é 3-regular e $n = 8$, temos que $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2m \Rightarrow 3 \times 8 = 2m \Rightarrow m = \frac{24}{2} \Rightarrow \boxed{\text{m=12}}$.

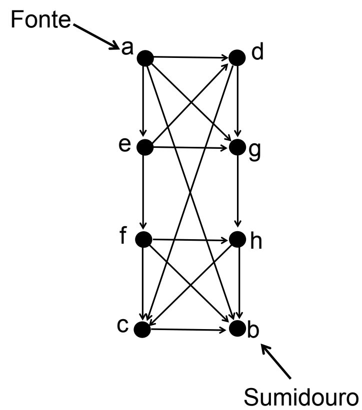

Figura 2: Digrafo D_G com fonte a e sumidouro b.

Seja f o número de faces de G. Como G é conexo e planar, a fórmula de Euler nos diz que $n - m + f = 2$. Como $n = 8$ e $m = 12$, então $f = m - n + 2 \Rightarrow f = 12 - 8 + 2 \Rightarrow \boxed{\text{f} = 6}$.