Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD1-2 Primeiro Semestre de 2019

Nome -
Assinatura -

**Questões:**

1. (1,2) Um avião de 16 lugares tem 2 fileiras, cada uma delas com 8 assentos individuais, em cada lado do avião, separadas por um corredor. De quantas maneiras podem se sentar 16 passageiros, entre eles João e Maria se:

   **(a)** Não tem reserva de assentos. **Justifique**.

   *Resposta:* Como não há reserva de assentos e temos 16 pessoas para ocupar 16 posições, temos: $P_{16} = 16!$ formas de sentar os passageiros deste avião.

   **(b)** João e Maria ficam sentados somente do lado esquerdo, em qualquer assento. **Justifique**.

   *Resposta:* Neste caso, inicialmente vamos sentar João e Maria do lado esquerdo. Para tal temos $A_8^2 = \frac{8!}{6!} = 56$ formas de posicioná-los. Para sentar os demais passageiros temos $P_{14} = 14!$ formas. Logo, pelo P.M. temos $A_8^2 \times P_{14} = 56 \times 14!$ formas de sentar os passageiros seguindo as restrições.

2. (1,0) Durante uma operação policial 15 homens foram detidos e transportados para a delegacia em 3 carros. No primeiro tem 6 lugares disponíveis para os detidos, no segundo tem 5 lugares e no terceiro tem 4 lugares. De quantas maneiras os detidos podem ser transportados para a delegacia? **Justifique**.
   Obesrvação: a posição das pessoas detidas em cada carro não é levada em consideração.

*Resposta:* Como a posição das pessoas dentro de cada carro não importa, o número de formas compor os passageiros no primeiro carro é $C_{15}^{6} = \frac{15!}{9!6!}$. No segundo carro é de $C_9^5 = \frac{9!}{4!5!}$ e no terceiro é de $C_4^4 = \frac{4!}{0!4!} = 1$. Logo, pelo P.M., temos $C_{15}^{6} \times C_9^5 \times C_4^4 = \frac{15!}{9!6!} \times \frac{9!}{4!5!}$ formas distintas de ocupar os carros de polícia com os detidos.

3. (1,5) Considere as letras da palavra

**p o s s i b i l i d a d e s**

Quantos anagramas podem ser formados se:

**(a)** as consoantes **p, b** e **l** estão todas juntas. **Justifique**.

*Resposta:* Vamos considerar as letras **p, b** e **l** como uma única letra. Para tal, como são letras distintas, temos que permutá-las de 3! formas. Agora, vamos posicionar as outras 11 letras com atenção para as repetições. Logo, temos $P_{11}^{1,3,3,2,1,1} = \frac{11!}{3!3!2!}$ maneiras de fazer isso. Com as 11 letras posicionadas, temos 12 possíveis espaços possíveis (entre as letras, na frente da primeira letra já posicionada e depois da última letra posicionada) para posicionar as letras **p, b** e **l** que estamos considerando como uma única letra. Portanto, pelo P.M., temos $3! \times \frac{11!}{3!3!2!} \times 12$ anagramas onde as letras **p, b** e **l** estão todas juntas.

**(b)** não podem finalizar em **s**. **Justifique**.

*Resposta:* Vamos utilizar a noção de complemento, subtraindo do total de anagramas possíveis aqueles que terminam em **s**. O total de anagramas é dado por: $P_{14}^{1,1,3,3,1,1,2,1,1} = \frac{14!}{3!3!2!}$. Para calcular o número de anagramas que terminam em **s**, vamos fixar uma letra **s** na última posição e permutar o restante com atenção às repetições. Neste caso, temos $P_{13}^{1,1,2,3,1,1,2,1,1} = \frac{13!}{2!3!2!}$ anagramas que terminam em **s**. Logo, temos $P_{14}^{1,1,3,3,1,1,2,1,1} - P_{13}^{1,1,2,3,1,1,2,1,1} = \frac{14!}{3!3!2!} - \frac{13!}{2!3!2!}$ anagramas que não terminam em **s**.

**(c)** as vogais estão em ordem alfabética (misturadas com as consoantes, juntas ou separadas). **Justifique**.

*Resposta:* Como as vogais precisam estar em ordem alfabética, i.e., $A\ E\ I\ I\ I\ O$, vamos escolher dentre os 14 lugares que temos disponíveis, 6 para posicioná-las nesta ordem. Para tal, temos $C_{14}^{6} = \frac{14!}{8!6!}$ formas distintas. Restam, portanto 8 lugares para posicionarmos as consoantes. Temos $P_8^{1,3,1,1,2} = \frac{8!}{3!2!}$ maneiras distintas de fazer isso. Logo, pelo P.M., temos $C_{14}^{6} \times P_8^{1,3,1,1,2} = \frac{14!}{8!6!} \times \frac{8!}{3!2!}$ anagramas onde as vogais aparecem em ordem alfabética.

4. (1,3) De quantas maneiras diferentes é possível colocar 9 anéis em 4 dedos da mão direita (excluindo o polegar), com a restrição de que no dedo indicador sejam colocados pelo menos 2 anéis, se:

**(a)** os anéis são todos iguais? **Justifique**.

*Resposta:* Sejam $i, m, a, d$ as quantidades de anéis nos dedos indicador, médio, anelar e dedo mínimo, respectivamente, da mão direita. Como no indicador devem ser colocados pelo menos dois anéis, temos: $i \geq 2$ e $m, a, d \geq 0$. Queremos saber a quantidade de soluções inteiras e não negativas da seguinte equação:

$$i + m + a + d = 9 \qquad (I)$$

Para solucionar essa questão, precisamos que todas as variáveis sejam não-negativas. Logo, vamos reescrever $i$ da seguinte forma:

$i = i' + 2 \rightarrow i' \geq 0$

Daí, a equação $(I)$ pode ser reescrita de maneira equivalente da seguinte forma:

$$i' + 2 + m + a + d = 9 \qquad \rightarrow i' + m + a + d = 7 \qquad (II)$$

O número de soluções inteiras e não-negativas de $(II)$ é dado por: $CR_4^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!3!}$.

**(b)** os anéis são todos diferentes? **Justifique**.

*Resposta:* No item (a) calculamos de quantas formas podemos posicionar os 9 anéis que eram todos iguais. Resta, neste item, permutar os anéis uma vez posicionados, dado que agora são anéis distintos. Logo, pelo P.M., temos $CR_4^7 \times P_9 = C_{10}^7 \times 9! = \frac{10!}{7!3!} \times 9!$