Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
AP1 - Primeiro Semestre de 2015

Nome -
Assinatura -

Observações:

1. Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular. Não é necessário fazer as contas. Pode deixar o resultado indicado, como uma soma, ou produto, ou quociente, ou potência de números inteiros ou fatoriais.

2. Resultado sem indicação de como foi obtido, não será considerado.

3. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.

4. Você pode usar lápis para responder as questões.

5. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.

6. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

Questões:

1. (1.5) Considere $A = \{\emptyset, 0\}$.

   (a) Encontre o conjunto de partes de A, $\mathbb{P}(A)$.

   Resposta: Dado um conjunto A, o conjunto das partes de A, $P(A)$, é aquele formado por todos os subconjuntos de A. Assim, temos que:

   $$P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{0\}, \{\emptyset, 0\}\}$$

   (b) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

   (b_1) $\{\emptyset\} \subset A$

   Resposta: Verdadeiro, pois como $\emptyset$ é um elemento de A, então o subconjunto $\{\emptyset\}$ deve estar contido em A. Além disso, como A é também formado pelo elemento 0, então $\{\emptyset\} \subsetneq A$, ou seja, $\{\emptyset\} \subset A$.

   (b_2) $\{\emptyset\} \notin \mathbb{P}(A)$

   Resposta: Falso, pois como $\{\emptyset\} \subset A$, então pela definição de $P(A)$ temos que $\{\emptyset\} \in P(A)$.

2. (2.0) Mostre por Indução Matemática que:

   $$(1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{3}) \times (1 - \frac{1}{4}) \times \cdots \times (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Resposta: Seja $P(k) : (1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{3}) \times (1 - \frac{1}{4}) \times \cdots \times (1 - \frac{1}{k}) = \frac{1}{k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $k \geq 2$.

Base da Indução: Para $k = 2$ temos que $(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, logo $P(2)$ é verdadeira.

Hipótese de Indução (H.I.): Suponha que $P(k)$ é verdadeiro.

Passo Indutivo: Vamos provar que se $P(k)$ é verdadeiro então $P(k + 1)$ é verdadeiro, isto é: $(1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{3}) \times (1 - \frac{1}{4}) \times \cdots \times (1 - \frac{1}{k}) \times (1 - \frac{1}{k+1}) = \frac{1}{k+1}$. Desenvolvendo:

$$\begin{aligned}
\underbrace{(1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{3}) \times (1 - \frac{1}{4}) \times \cdots \times (1 - \frac{1}{k})}_{\text{Aplicando a H.I. :}} \times (1 - \tfrac{1}{k+1}) &= \\
&= \tfrac{1}{k} \times (1 - \tfrac{1}{k+1}) \\
&= \tfrac{1}{k} \times (\tfrac{k+1-1}{k+1}) \\
&= \tfrac{1}{k} \times (\tfrac{k}{k+1}) \\
&= \tfrac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

Portanto $P(k+1)$ é verdadeiro. Pelo Princípio de Indução Matemática, temos que $P(n)$: $(1-\frac{1}{2}) \times (1-\frac{1}{3}) \times (1-\frac{1}{4}) \times \cdots \times (1-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$.

3. (1.0) Em uma classe com 20 alunos, que têm aula com 6 professores, deve ser formada uma comissão com 3 professores e 2 alunos. De quantas maneiras essa comissão pode ser formada? Justifique.

Resposta: O número de formas de escolhermos uma comissão com 2 alunos dentre 20 corresponde às Combinações Simples C_{20}^2 e o número de formas de escolhermos uma comissão com 3 professores dentre 6 é dado pelas Combinações Simples C_6^3. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, temos que o número de formas de formarmos uma comissão com 2 alunos e 3 professores é dado por:

$$C_{20}^2 \times C_6^3 = \frac{20!}{18!2!} \times \frac{6!}{3!3!} = \frac{20 \times 19}{2} \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = 190 \times 20 = 3800$$

4. (2.0) Considere os números de 5 dígitos maiores ou iguais a 20000, formados com os dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6$ e 9. Quantos números podem ser formados se:

(a) todos os dígitos devem ser diferentes? Justifique;

Resposta: Temos 6 possibilidades para escolher o primeiro dígito, já que o mesmo não pode assumir valor igual a 1. Além disso, como os dígitos não podem ser repetidos, podemos preencher as demais 4 posições do número de 5 dígitos maiores que 20000 com $A(6,4) = \frac{6!}{(6-4)!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, temos um total de $6 \times 360 = 2160$ possibilidades.

(b) é permitida a repetição dos dígitos? Justifique.

Resposta: Apresentamos dois raciocínios possíveis para esta questão. O primeiro consiste em verificar que temos 6 possibilidades para preencher o primeiro dígito, já que o mesmo não pode assumir valor 1. As 4 posições restantes podem assumir qualquer valor dentre 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 9, que correspondem a $AR(7,4) = 7^4$. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo temos $6 \times 7^4 = 14406$.

Outro raciocínio possível pode ser dado como segue. Podemos contar o total de números maiores que 20000 e que podem ter algarismos repetidos contando a quantidade de números de cinco algarismos que podem ser formados com os elementos $1, 2, 3, 4, 5, 6$ e 9, que pode ser dado por $AR(7,5) = 7^5$, e descontado deste total a quantidade de tais números que começam o algarismo 1, que pode ser dado por $1 \times AR(7,4) = 7^4$. Portanto, a quantidade de números com cinco algarismos maiores que 20000 é dado por $7^5 - 7^4 = 7^4(7-1) = 6 \times 7^4 = 14406$.

5. (1.5) Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra
O T O R R I N O L A R I N G O L O G I S T A
tal que sempre haja a presença da sequência OTO, nesta ordem? Justifique.

Resposta: Mostraremos dois raciocínios possíveis para este problema. O primeiro raciocínio segue do fato de que como queremos que a sequência X = OTO necessariamente figure no anagrama, então podemos considerar o problema de obter o número de anagramas da palavra X R R I N O L A R I N G O L O G I S T A, ou seja, anagramas que contém necessariamente ao menos uma ocorrência de OTO, que pode ser obtido através de uma permutação com repetições, já que temos 20 letras das quais temos 3 R's, 3 I's, 2 N's, 2 L's, 2 A's, 2 G's e 1 S, 3 O's e 1 T. Portanto, temos um total de anagramas de $P_{20}^{3,3,3,2,2,2,2} = \frac{20!}{3!3!3!2!2!2!2!}$.

O segundo raciocínio pode ser dado de forma análoga ao primeiro, onde consideramos o número de anagramas da palavra X R R I N O L A R I N G O L O G I S T A. Observamos que temos 20 posições para colocar a sequência X=OTO, o que pode ser feito de 20 maneiras. Fixada a posição de X, as demais 19 letras podem ser permutadas com repetição de $P_{19}^{3,3,3,2,2,2,2} = \frac{19!}{3!3!3!2!2!2!2!}$ maneiras. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, temos o total de $20 \times \frac{19!}{3!3!3!2!2!2!2!} = \frac{20!}{3!3!3!2!2!2!2!}$ possíveis anagramas.

6. (2.0) Dispondo de um número ilimitado de moedas de 10 centavos, de 25 centavos, 50 centavos e 1 real, calcule de quantas maneiras podemos selecionar 30 moedas, com a restrição de termos pelo menos 6 moedas de 25 centavos e pelo menos 2 moedas de 1 real. Justifique.

Resposta: Sejam m_1, m_{10}, m_{25} e m_{50} o número de moedas de 1 real, 10 centavos, 25 centavos e 50 centavos, respectivamente. Assim, podemos representar o problema como o de determinar quantas soluções existem para a equação $m_1 + m_{10} + m_{25} + m_{50} = 30$, onde $m_1 \geq 2$ e $m_{25} \geq 6$. Dessa forma, chamando $m_1' = m_1 - 2$ e $m_{25}' = m_{25} - 6$ tem-se $m_1 = m_1' + 2$ e $m_{25} = m_{25}' + 6$. Assim, podemos reescrever a equação anterior como $m_1' + 2 + m_{10} + m_{25}' + 6 + m_{50} = 30$, onde $m_1' \geq 0$, $m_{25}' \geq 0$, $m_{50} \geq 0$ e $m_{10} \geq 0$. Obtemos assim que o número de maneiras que podemos selecionar 30 moedas, com a restrição de termos pelo menos 6 moedas de 25 centavos e pelo menos 2 moedas de 1 real pode ser dado pelo número de soluções inteiras e não negativas da equação $m_1' + m_{10} + m_{25}' + m_{50} = 22$, que é igual a $CR_4^{22} = C_{25}^{22} = \frac{25!}{22!3!} = \frac{25 \times 24 \times 23}{3 \times 2} = 2300$.