Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD1-1 Primeiro Semestre de 2019

Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (0.8) Verifique se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira prove, se for falsa justifique.

   (a) $\emptyset = \{\emptyset\}$.

   Resposta: Falsa. $\emptyset$ denota o conjunto vazio, que não possui elementos. $\{\emptyset\}$ representa o conjunto unitário cujo único elemento é o conjunto vazio.

   (b) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - C$, sendo A, B e C conjuntos quaisquer.

   Resposta: Falsa. Observe o Diagrama de Venn da Figura 1

2. (0.5) Usando o princípio de inclusão e exclusão para 3 conjuntos, determine a quantidade de números naturais n tais que $150 \leq n \leq 1000$ e não são divisíveis nem por 2 nem por 3 e nem por 7. Justifique.

   Resposta: O Princípio da Inclusão e Exclusão para 3 conjuntos A, B, C garante que:

   $$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

   Vamos utilizar a noção de complemento para solucionar a questão. Assim, do total de números em nosso conjunto universo, vamos subtrair a quantidade de números nesse conjunto universo que são divisíveis por 2, por 3 ou por 7.

   Sejam: $\mathcal{U} = \{n \in \mathbb{N} \mid 150 \leq n \leq 1000\}$, o conjunto universo,
   $A = \{x \in \mathcal{U} \mid x = 2m,\ m \in \mathbb{N}\}$, o conjunto dos números divisíveis por 2,
   $B = \{x \in \mathcal{U} \mid x = 3k,\ k \in \mathbb{N}\}$, o conjunto dos números divisíveis por 3, e
   $C = \{x \in \mathcal{U} \mid x = 7l,\ l \in \mathbb{N}\}$, o conjunto dos números divisíveis por 7.

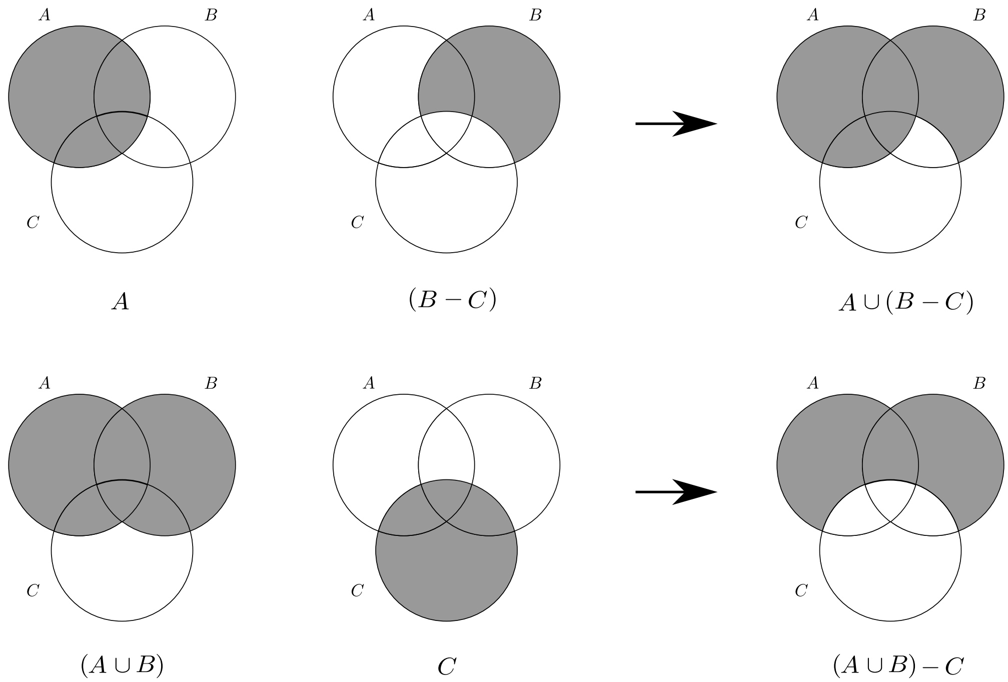

Figura 1: Diagrama de Venn do item 1(b).

Cálculo das Cardinalidades dos conjuntos

$n(\mathcal{U}) = 1000 - 149 = 851$

$A = \{x \in \mathcal{U} \mid x = 2m,\ m \in \mathbb{N}\} = \{2\times 75, 2\times 76, \ldots, 2\times 500\} \to n(A) = 500 - 74 = 426$.

$B = \{x \in \mathcal{U} \mid x = 3k,\ k \in \mathbb{N}\} = \{3\times 50, 3\times 51, \ldots, 3\times 333\} \to n(B) = 333 - 49 = 284$

$C = \{x \in \mathcal{U} \mid x = 7l,\ l \in \mathbb{N}\} = \{7\times 22, 7\times 23, \ldots, 7\times 142\} \to n(C) = 142 - 21 = 121$

$A \cap B = \{x \in \mathcal{U} \mid x = 6j,\ j \in \mathbb{N}\} = \{6\times 25, 6\times 26, \ldots, 6\times 166\} \to n(A \cap B) = 166 - 24 = 142$

$A \cap C = \{x \in \mathcal{U} \mid x = 14r,\ r \in \mathbb{N}\} = \{14\times 11, 14\times 12, \ldots, 14\times 71\} \to n(A \cap C) = 71 - 10 = 61$

$B \cap C = \{x \in \mathcal{U} \mid x = 21p,\ p \in \mathbb{N}\} = \{21\times 8, 21\times 9, \ldots, 21\times 47\} \to n(B \cap C) = 47 - 7 = 40$

$A \cap B \cap C = \{x \in \mathcal{U} \mid x = 42q,\ q \in \mathbb{N}\} = \{42\times 4, 42\times 5, \ldots, 42\times 23\} \to n(A \cap B \cap) = 23 - 3 = 20$

Vamos aplicar o P.I.E. para estes conjuntos.

$n(A \cup B \cup C) = 426 + 284 + 121 - 142 - 61 - 40 + 20 = 608.$

Como observado anteriormente, para terminar a solução desta questão vamos subtrair este resultado da quantidade de elementos de $\mathcal{U}$.

$n(\mathcal{U}) - n(A \cup B \cup C) = 851 - 608 = 243.$

Logo, existem em $\mathcal{U}$ 243 números que não são divisíveis por 2, nem por 3 e nem por 7.

3. (2.0) Mostre pelo Princípio da Indução Matemática que:

(a)

$$1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + \cdots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

para todo número natural $n \geq 1$.

Resposta: Seja $P(n) : 1\times 3+2\times 4+3\times 5+\cdots+n(n+2) = \dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

BASE DA INDUÇÃO: Vamos mostrar que $P(1)$ é verdadeira.

Como $1 \times 3 = 3$ e $\frac{1(1+1)(2\times 1+7)}{6} = 3$, $P(1)$ é verdadeira.

HIPÓTESE DA INDUÇÃO: Suponha $P(k) : 1\times 3+2\times 4+3\times 5+\cdots+k(k+2) = \dfrac{k(k+1)(2k+7)}{6}$ verdadeira $\forall k \in \mathbb{N}$.

PASSO INDUTIVO: Vamos mostrar que $P(k)$ verdadeira implica $P(k+1)$:

$$1 \times 3 + 2 \times 4 + \cdots + k(k+2) + (k+1)([k+1]+2) = \frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}$$

verdadeira.

$$
\begin{aligned}
\underbrace{1\times 3+2\times 4+3\times 5+\cdots+k(k+2)}_{\text{H.I.}}+(k+1)(k+3) &= \\
\frac{k(k+1)(2k+7)}{6}+(k+1)(k+3) &= \\
\frac{k(k+1)(2k+7)+6(k+1)(k+3)}{6} &= \\
\frac{(k+1)[k(2k+7)+6(k+3)]}{6} &= \\
\frac{(k+1)[k(k+2+k+2+3)+6(k+2+1)]}{6} &= \\
\frac{(k+1)\{k[2(k+2)+3)]+6(k+2)+6\}}{6} &= \\
\frac{(k+1)\{2k(k+2)+3k+6(k+2)+6\}}{6} &= \\
\frac{(k+1)\{2k(k+2)+6(k+2)+(3k+6)\}}{6} &= \\
\frac{(k+1)\{2k(k+2)+6(k+2)+3(k+2)\}}{6} &= \\
\frac{(k+1)(k+2)\{2k+6+3\}}{6} &= \\
\frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}
\end{aligned}
$$

Logo, pelo PIM, $1\times 3+2\times 4+3\times 5+\cdots+n(n+2)=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$ é verdadeira para todo número natural.

(b) n^3-n é divisível por 3 para todo número natural $n\geq 2$.

Resposta: Seja $P(n): n^3-n=3m$, para algum $m\in\mathbb{N}$ e para todo $n\in\mathbb{N}$.

BASE DA INDUÇÃO: Vamos provar que $P(2)$ é verdadeira. Seja $m=2$. Como $2^3-2=6$, então $2^3-2=3m$. Logo $P(2)$ é verdadeira.

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Suponha $P(k): k^3-k=3m'$ verdadeira $\forall k\in\mathbb{N}$ e para algum $m'\in\mathbb{N}$.

PASSO INDUTIVO: Vamos mostrar que $P(k)$ verdadeira implica em
$P(k+1):(k+1)^3-(k+1)=3q$, onde $q\in\mathbb{N}$ verdadeira.

$$
\begin{aligned}
(k+1)^3-(k+1) &= \\
(k^3+3k^2+3k+1)-(k+1) &= \\
k^3+3k^2+3k+1-k-1 &= \\
k^3+3k^2+3k-k &= \\
\underbrace{k^3-k}_{\text{H.I.}}+3k^2+3k &= \\
3m'+3k^2+3k &= \\
3(m'+k^2+k)
\end{aligned}
$$

Logo, pelo PIM, $P(n): n^3-n=3m$ é verdadeira , para algum $m \in \mathbb{N}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. (1.7) Considere todos os anagramas de 4 letras (podendo haver repetições) que são possíveis de se formarem com as 23 letras do nosso alfabeto.

   (a) Em quantos deles a primeira e última letras são vogais? Justifique.

   Resposta: Neste caso, temos que fixar vogais na primeira e última posições. Sendo assim, temos 5 possibilidades para cada uma dessas posições. Para as demais não temos restrições. Logo, pelo P.M., temos $5^2 \times 23^2$ anagramas de 4 letras respeitando as restrições.

   (b) Em quantos deles as vogais aparecem, obrigatória e exclusivamente, na primeira e última posições? Justifique.

   Resposta: Neste caso, as vogais devem aparecer na primeira e última posições e não podem aparecer em nenhum outro lugar. Sendo assim, diferentemente do item (a), temos para as suas posições intermediárias a restrição de não podermos alocar vogais para elas. Portanto, restam $23-5=18$ letras possíveis para essas posições. Assim, pelo P.M. temos : $5^2 \times 18^2$ anagramas com 4 letras seguindo as restrições da questão.