Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD2 - Primeiro Semestre de 2016

Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (1.5) Usando o Teorema das Linhas calcule a seguinte soma:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)C_n^k$$

Justifique.

Resposta: Observemos que o primeiro termo do somatório vale zero, logo, temos que:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)C_n^k =$$

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k =$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)n!}{k!(n-k)!} =$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)!n!}{k!(k-1)(k-2)!(n-k)!} =$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} =$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)!(n-2-(k-2))!} =$$

$$n(n-1)\sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2} =$$

$$n(n-1)\underbrace{\left[C_{n-2}^{0} + C_{n-2}^{1} + \ldots + C_{n-2}^{n-2}\right]}_{\text{Teorema das linhas}} =$$

$$n(n-1)2^{n-2}$$

2. (1.5) Determine o coeficiente de x^5 no desenvolvimento do binômio de Newton:

$$(3y\sqrt{x} - \frac{\sqrt{y}}{x^4})^{100}$$

Justifique.

Resposta: Sejam $a = 3y\sqrt{x} = 3yx^{\frac{1}{2}}$, $b = \frac{-\sqrt{y}}{x^4} = -y^{\frac{1}{2}}x^{-4}$ e $n = 100$. A fórmula do termo geral do binômio de Newton $(a+b)^n$ é:

$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$. Neste caso,

$$T_{k+1} = C_{100}^{k}(3yx^{\frac{1}{2}})^{100-k}(-y^{\frac{1}{2}}x^{-4})^k$$

$$T_{k+1} = C_{100}^{k}(3y)^{100-k}x^{\frac{1}{2}(100-k)}(-y^{\frac{1}{2}})^k x^{-4k}$$

$$T_{k+1} = C_{100}^{k}3^{100-k}y^{100-k}x^{50-\frac{k}{2}}(-1)^k y^{\frac{k}{2}} x^{-4k}$$

$$T_{k+1} = C_{100}^{k}3^{100-k}y^{100-k+\frac{k}{2}}x^{50-\frac{k}{2}-4k}$$

$$T_{k+1} = C_{100}^{k} 3^{100-k} (-1)^k y^{100-\frac{k}{2}} x^{50-\frac{9k}{2}}$$

Para obter o coeficiente de x^5, precisamos obter k tal que $50 - \frac{9k}{2} = 5$, isto é,

$$k = \frac{90}{9} = 10$$

Logo,

$T_{11} = C_{100}^{10} 3^{90} (-1)^{10} y^{95} x^5$.

Portanto, o coeficiente de x^5 é $C_{100}^{10} 3^{90} y^{95} = \frac{100!}{90!10!} 3^{90} y^{95}$.

3. (1.5) Determine a fórmula fechada da seguinte relação de recorrência com as condições iniciais dadas:

$$a_n = n a_{n-1} + n!, \quad a_1 = 1, \quad \text{para } n \geq 2$$

Justifique.

Resposta: Utilizando o método de substituição regressiva temos:

$$\begin{array}{rcc}
a_n & = & n a_{n-1} + n! \\
 & = & n\left[(n-1)a_{n-2} + (n-1)!\right] + n! \\
 & = & n(n-1)a_{n-2} + n(n-1)! + n! \\
 & = & n(n-1)a_{n-2} + n! + n! \\
 & = & n(n-1)[(n-2)a_{n-3} + (n-2)!] + n! + n! \\
 & = & n(n-1)(n-2)a_{n-3} + n(n-1)(n-2)! + n! + n! \\
 & = & n(n-1)(n-2)a_{n-3} + n! + n! + n! \\
 & = & n(n-1)(n-2)a_{n-3} + 3n! \\
 & \vdots & \vdots \\
 & = & n(n-1)\ldots(n-[i-1])a_{n-i} + in!
\end{array}$$

Quando $n - i = 1$, temos $i = n - 1$ e

$$\begin{array}{rcc}
a_n & = & n(n-1)\ldots(n-(n-1-1))a_{n-(n-1)} + (n-1)n! \\
 & = & \left[n(n-1)\ldots 2 \times 1\right] a_1 + (n-1)n! \\
 & = & n! + (n-1)n! \\
 & = & nn!
\end{array}$$

Logo, a fórmula geral para a relação de recorrência em questão é

$$a_n = nn!,\ n \geq 2, a_1 = 1$$

.

4. (3.0) Responda as seguintes perguntas, **justificando** a resposta de cada uma delas.

   (a) Porque não é possível construir um grafo (simples) conexo com 8 vértices, onde a sequência dos graus dos vértices é $\{7, 5, 4, 3, 2, 1, 1, 1\}$?

   Resposta: Como o grafo em questão possui 8 vértices, sabemos que o vértice de grau 7, que chamaremos de v_1, é universal e, portanto, adjacente a todos os demais vértices. Assim, os vértices de grau 1, que chamaremos de v_6, v_7, v_8 são somente adjacentes a v_1. Seja v_2 o vértice de grau 5. Claramente, v_2 é adjacente a v_1 e necessita de mais 4 vértices em sua vizinhança. Então, certamente v_2 é também adjacente a v_3, v_4, v_5 e a um dos vértices de grau 1, o que configura um absurdo. Logo, não é possível construir tal grafo.

   (b) Quantos vértices e quantas arestas tem um grafo $G = (V, E)$, tal que G é conexo e 3-regular e $|E| = 2|V| - 6$?

   Resposta: Pelo Teorema do Aperto de Mãos temos:

   $$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

   Como G é 3-regular, todo vértice $v \in V$ tem grau 3. Assim, $\sum_{v \in V} d(v) = 3 \times |V|$. Daí,

   $$3 \times |V| = 2[2|V| - 6]$$

   $$|V| = 12$$

   Substituindo este resultado na equação $|E| = 2|V| - 6$, temos $|E| = 18$.
   Logo, G possui 12 vértices e 18 arestas.

(c) Se G é um grafo bipartido e possui 15 vértices é possível afirmar que G não é hamiltoniano?

Resposta: Sim. Seja G um grafo bipartido com 15 vértices. Suponha que G seja hamiltoniano. Neste caso, G possui um ciclo que contém todos os seus vértices, ou seja, um ciclo de comprimento 15 e, portanto, um ciclo ímpar. Entretanto, isto é um absurdo, pois G não admite ciclos ímpares, uma vez que um grafo é bipartido se e somente se não possui ciclos ímpares.

5. (3.0) Considere o grafo $G = (V, E)$, onde
$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ e
$V(G) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (a, g), (h, b), (h, c), (h, d), (h, e), (h, f), (h, g)\}$.

(a) Desenhe o grafo G

Resposta:

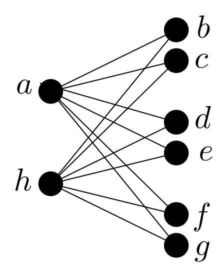

Figura 1: $G = (V, E)$.

(b) G é bipartido? Justifique.

Resposta: Sim. A Figura 1 apresenta um grafo bipartido. Além disso, sabemos que um grafo é bipartido se e somente se não possui ciclos ímpares. É fácil perceber que G não possui ciclos ímpares, sendo, portanto, bipartido.

(c) G é euleriano? Justifique.

Resposta: Sim. O Teorema de Euler garante que um grafo G é euleriano se e somente se todo vértice de G possui grau par. Note que os vértices a, h têm grau 6 e os vértices b, c, d, e, f, g têm grau 2. Logo, G é euleriano.

(d) G é hamiltoniano? Justifique.

Resposta: Não. Observe que todo ciclo de G tem tamanho 4. Logo, não existe ciclo que inclua todos os vértices de G sem repetição de vértices.

(e) G é planar? Justifique.

Resposta: Sim. A Figura 2 apresenta uma representação plana para o grafo G.

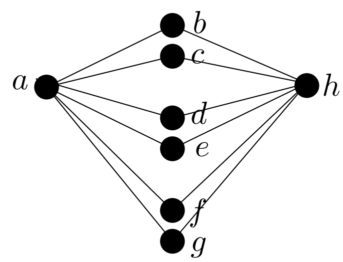

Figura 2: Representação plana para $G = (V, E)$.