Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
AP2 - Primeiro Semestre de 2014

Nome -
Assinatura -

Observações:

1. Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular. Se necessário deixe o resultado indicado, como um produto ou quociente ou potência de números inteiros ou fatoriais.
2. Resultado sem indicação de como foi obtido, não será considerado.
3. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.
4. Você pode usar lápis para responder as questões.
5. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.
6. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

Questões:

1. (1.0) Use (justificando) o Teorema das Linhas para calcular a seguinte soma:
$$C_{50}^0 + C_{50}^1 + C_{50}^2 + \cdots + C_{50}^{48}$$

   Resposta: O Teorema das Linhas nos diz que: $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.
   Daí, temos que: $C_{50}^0 + C_{50}^1 + C_{50}^2 + \cdots + C_{50}^{48} + C_{50}^{49} + C_{50}^{50} = 2^{50}$.
   Assim, $C_{50}^0 + C_{50}^1 + C_{50}^2 + \cdots + C_{50}^{48} = 2^{50} - C_{50}^{49} - C_{50}^{50}$.
   Como $C_{50}^{49} = \frac{50!}{49!1!} = 50$ e $C_{50}^{50} = \frac{50!}{50!0!} = 1$ temos que:
$$C_{50}^0 + C_{50}^1 + C_{50}^2 + \cdots + C_{50}^{48} = 2^{50} - 51$$

   .

2. (1.5) Calcule o coeficiente de x^{21} no desenvolvimento do binômio de Newton de:
$$(\frac{2}{x^4} - 5x^3)^{28}$$
   Justifique a resposta.

   Resposta: A fórmula para o termo geral do desenvolvimento do Binômio de Newton de $(a+b)^n$ é dada por: $T_{k+1} = C_n^k \ a^{n-k} \ b^k$, para $k = 0, 1, \cdots, n$. Neste caso temos $n = 28$, $a = \frac{2}{x^4} = 2x^{-4}$ e $b = -5x^3$.

$$\begin{array}{rcc} T_{k+1} & = & C_{28}^k \ (2x^{-4})^{28-k} \ (-5x^3)^k \\ & = & C_{28}^k (2)^{28-k} x^{-112+4k} (-1)^k (5)^k x^{3k} \\ & = & C_{28}^k (2)^{28-k} (-1)^k (5)^k x^{-112+7k} \end{array}$$

   Como queremos o coeficiente de x^{21}, temos:
$$-112 + 7k = 21$$
   Logo, $k = 19$.
   Portanto, $T_{20} = -\frac{28!}{9!19!} 2^9 5^{19} x^{21}$ e, consequentemente, o coeficiente de x^{21} é $-\frac{28!}{9!19!} 2^9 5^{19}$.

3. (1.5) Encontre a fórmula fechada da seguinte relação de recorrência, usando substitução regressiva:
$a_n = a_{n-1} + n \qquad n$ natural, $n \geq 1$
$a_0 = 1$
Descreva o processo utilizado para chegar à fórmula.

Resposta: Vamos utilizar substituição regressiva para determinar a fórmula fechada da relação de recorrência.

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & a_{n-1} + n \\ & = & \underbrace{a_{n-2} + (n-1)}_{a_{n-1}} + n \\ & = & \underbrace{a_{n-3} + (n-2)}_{a_{n-2}} + (n-1) + n \\ & \vdots & \\ & = & a_{n-i} + (n-(i+1)) + (n-(i+2)) + \ldots + n \end{array}$$

Quando $n - i = 0$, temos $i = n$. Daí,

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & a_0 + (n-(n+1)) + (n-(n+2)) + \ldots + n \\ & = & 1 + \underbrace{[1 + 2 + \ldots + n]}_{\text{soma da P.A. de } n \text{ termos}} \\ & = & 1 + \frac{(n+1)n}{2} \end{array}$$

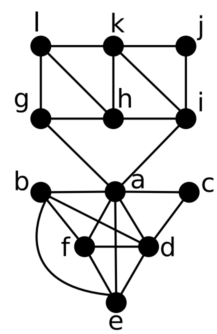
4. (1.0) Seja G um grafo com dois componentes conexos G_1 e G_2, onde G_1 é uma árvore com 15 vértices e G_2 é um grafo completo com 6 vértices. Calcule quantas arestas tem o grafo G. Justifique.

Resposta: Uma árvore com n vértices tem $m = n - 1$ arestas. Assim, $m_1 = 15 - 1 = 14$ arestas, onde m_1 denota as arestas de G_1.

Em um grafo completo com 6 vértices, todo vértice tem grau 5. Daí, pelo Teorema do Aperto de Mãos, temos: $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$. Por conseguinte, se m_2 denota a quantidade de arestas em G_2 temos: $\sum_{v \in V(G_2)} d(v) = 2m_2$. Como $\sum_{v \in V(G_2)} d(v) = 5 \times 6 = 30$, temos que $m_2 = 15$.

Por definição, não temos quaisquer arestas entre dois componentes conexos. Portanto, G tem $m = m_1 + m_2 = 29$ arestas, onde m é o número de arestas de G.

5. (5.0) Considere o grafo G abaixo e responda:



(a) G é planar? Justifique.

Resposta: Não. Observe que o conjunto de vértices $\{a, b, d, e, f\}$ induz um K_5. O teorema de Kuratowski garante que um grafo é planar se e somente se não possui subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$. Sendo assim, o grafo em questão não é planar.

(b) G é Hamiltoniano? Justifique.

Resposta: Não. Observe que, partindo de um vértice no conjunto $\{g, h, i, j, k, l\}$, quando passamos por a e percorremos os vértices do conjunto $\{b, c, f, d, e\}$, para voltarmos ao vértice inicial obrigatoriamente passaremos por a de novo. Logo, não é possível ter um ciclo passando por todos os vétices de G.

(c) G é Euleriano? Justifique.

Resposta: Não. O teorema de Euler caracteriza os grafos Eulerianos da seguinte forma: Um grafo G é Euleriano se e somente se todo vértice de G tem grau par. Como no grafo em questão temos vértices de grau ímpar, como por exemplo g, ele não é Euleriano.

(d) Determine o diâmetro de G.

Resposta: O diâmetro de um grafo G, denotado por $\text{diam}(G)$ é a maior excentricidade de G.

A excentricidade de um vértice v, denotada por $e(v)$, é a maior distância de v a um outro vértice do grafo.

A distância entre dois vértices v, w, denotada por $d(v, w)$, é o comprimento do menor caminho entre v, w.

Como $e(a) = e(i) = 2$ e $e(b) = e(c) = e(d) = e(e) = e(f) = e(g) = e(h) = e(j) = e(k) = 3$, temos que $\text{diam}(G) = 3$.

(e) Determine o centro de G.

Resposta: O centro de G, $C(G)$, é um conjunto de vértices composto pelos vértices de menor excentricidade.

De acordo com as excentricidades calculadas no item (d), temos que $C(G) = \{a, i\}$.