Gabarito da AP1 - Fundamentos de Algoritmos para Computação

1. (2.0) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

   (a) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}, 1\}$

   Resposta:

   A afirmativa é verdadeira porque $\{\emptyset\}$ é um elemento do conjunto $A = \{\{\emptyset\}, 1\}$ e usamos o símbolo *pertence* ($\in$) para estudarmos a relação entre elementos e conjuntos.

   (b) $\emptyset \in \{1, 0, -1\}$

   Resposta: A afirmativa é falsa porque $\emptyset$ não é um elemento do conjunto $A = \{1, 0, -1\}$, mas um conjunto contido no conjunto A (atentar para a notação do conjunto vazio: $\emptyset$).

   Usamos o símbolo *está contido* ($\subseteq$) para relacionar conjuntos. Dizemos que um conjunto A está contido em um conjunto B se todo elemento de A é elemento de B ($A \subseteq B$).

   A afirmação correta é:

   $\emptyset \subseteq \{1, 0, -1\}$

   (c) Sejam A e B dois conjuntos tais que $B \subseteq A$. Então $n(A - B) = n(A) - n(B)$

   Resposta: A afirmação é verdadeira.

   Como $B \subseteq A$ então temos que $A \cup B = A$ e $A \cap B = B$.

   Temos, também, que $A \cup B = (A - B) \cup B = A$, logo:

$$
\begin{gathered}
(A - B) \cup B = A \\
n((A - B) \cup B) = n(A) \\
n(A - B) + n(B) - n((A - B) \cap B) = n(A)
\end{gathered}
$$

   Mas $(A - B) \cap B = \emptyset$, então $n(A - B) \cap B) = 0$:

$$
\begin{gathered}
n(A - B) + n(B) = n(A) \\
n(A - B) = n(A) - n(B)
\end{gathered}
$$

2. (1.5) Mostre a seguinte igualdade usando as propriedades de conjuntos.(Observação: não verifique por diagramas de Venn).

$$(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap (B - C)$$

Prova:

$$\begin{array}{lcll}
 & & (A \cap B) - (A \cap C) & = \\
\text{(propriedade da diferença)} & = & (A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)} & = \\
\text{(lei de Morgan)} & = & (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) & = \\
\text{(propriedade distributiva)} & = & [(A \cap B) \cap \overline{A}] \cup [(A \cap B) \cap \overline{C}] & = \\
\text{(propriedade comutativa)} & = & [(B \cap A) \cap \overline{A}] \cup [(A \cap B) \cap \overline{C}] & = \\
\text{(propriedade associativa)} & = & [B \cap (A \cap \overline{A})] \cup [(A \cap B) \cap \overline{C}] & = \\
\text{(propriedade } A \cap \overline{A} = \emptyset) & = & [B \cap \emptyset] \cup [(A \cap B) \cap \overline{C}] & = \\
\text{(propriedade } A \cap \emptyset = \emptyset) & = & \emptyset \cup [(A \cap B) \cap \overline{C}] & = \\
\text{(propriedade } \emptyset \cup D = D) & = & (A \cap B) \cap \overline{C} & = \\
\text{(propriedade associativa)} & = & A \cap (B \cap \overline{C}) & = \\
\text{(propriedade da diferença)} & = & A \cap (B - C) &
\end{array}$$

3. (2.0) Mostre usando Indução Matemática:

$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ para todo n inteiro natural.

Prova:

Seja $P(n) : \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Base da indução:

Para $n = 1$, $1^2 = 1 = \frac{6}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6}$, logo $P(1)$ é verdadeiro.

Hipótese de Indução:

Suponha verdadeiro para $n = k$, isto é, $P(k)$ é verdadeiro:

$$P(k) : \sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeiro então $P(k+1)$ é verdadeiro, isto é:

Temos que provar que: $P(k+1) : \sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$ é verdadeiro.

Desenvolvendo para $n = k + 1$ e usando a hipótese de indução, temos que:

$$
\begin{array}{rlr}
 & \sum_{i=1}^{k+1} i^2 & = \\
= & \underbrace{(1^2 + 2^2 + \ldots + k^2)}_{(Por\ hip\acute{o}tese\ indutiva)} + (k+1)^2 & = \\
= & \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 & = \\
= & \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} & = \\
= & \frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6} & = \\
= & \frac{(k+1)[2k^2+k+6k+6]}{6} & = \\
= & \frac{(k+1)[2k^2+7k+6]}{6} & = \\
= & \frac{(k+1)[(k+2)(2k+3)]}{6} & = \\
= & \frac{(k+1)(k+2)(2k+2+1)}{6} & = \\
= & \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} &
\end{array}
$$

Logo, pelo princípio da indução, a expressão é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$

4. (1.0)Um departamento de uma universidade tem 22 professores. Estes professores devem escolher um chefe e um vice-chefe de departamento. De quantas maneiras podem fazê-lo? Justifique.

   Resposta: Para escolhermos um chefe e um vice-chefe do departamento, podemos considerar que temos 2 posições para serem preenchidas; a primeira posição pode ser preenchida de 22 maneiras; a segunda posição pode ser preenchida de 21 maneiras (tendo em vista que o chefe não pode ser vice-chefe ao mesmo tempo), isto é, A_{22}^2.

   Portanto, há $A_{22}^2 = \frac{22!}{(22-2)!} = \frac{22.21.20!}{20!} = 22.21 = 462$ maneiras.

5. (1.5) Quantos números naturais de 4 dígitos não possuem dois dígitos adjacentes iguais? Observe que consideramos o número 3575, mas não 3557. Justifique.

   Resposta: O primeiro dígito pode ser escolhido de 9 modos (o dígito zero não entra, pois não formaria um número de 4 dígitos), o segundo dígito pode ser escolhido de 9 modos (não podemos usar o dígito colocado na primeira posição), o terceiro dígito pode ser escolhido de 9 modos (não podemos usar o dígito colocado na segunda posição), e por último, o quarto dígito pode ser escolhido de 9 modos (não podemos usar o dígito colocado na terceira posição). Pelo princípio multiplicativo, temos que a resposta é $9.9.9.9 = 9^4 = 6561$.

6. (2.0) Quantas são as soluções inteiras, não negativas da equação $x + y + z + w = 20$, das quais nenhuma variável é inferior a 2? Justifique.

   Resposta: Como nenhuma variável é inferior a 2, então temos de encontrar quantas soluções não-negativas da equação $x + y + z + w = 20$ com as restrições: $x \geq 2$, $y \geq 2$, $z \geq 2$, e $w \geq 2$.

Definindo por $x' = x - 2$, $y' = y - 2$, $z' = z - 2$, $w' = w - 2$, e substituindo x, y, z e w, por $x = x' + 2$, $y = y' + 2$, $z = z' + 2$, $w = w' + 2$, a equação $x + y + z + w = 20$ resulta equivalentemente a: $x' + 2 + y' + 2 + z' + 2 + w' + 2 = 20$, com $x', y', z', w' \geq 0$, ou seja, $x' + y' + z' + w' = 12$, com $x', y', z', w' \geq 0$.

O número de soluções inteiras não negativas de $x + y + z + w = 20$, onde $x, y, z, w \geq 2$, é o número de soluções inteiras não negativas de $x' + y' + z' + w' = 12$, onde $x', y', z', w' \geq 0$, que corresponde a $CR_4^{12} = C_{12+4-1}^{12} = C_{15}^{12} = \frac{15!}{12!3!} = 455$.