Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP2 - Segundo Semestre de 2017

Questões:

1. (1.0) Usando o Teorema das Colunas calcule a seguinte soma:

$$C_{14}^{12} + C_{15}^{12} + C_{16}^{12} + \cdots + C_{30}^{12}$$

Resposta: O Teorema das Colunas afirma que:

$$C_p^p + C_{p+1}^p + \ldots + C_{n+p}^p = C_{n+p+1}^{p+1}$$

Assim, temos

$$C_{12}^{12} + C_{13}^{12} + C_{14}^{12} + C_{15}^{12} + C_{16}^{12} + \cdots + C_{30}^{12} = C_{31}^{13}$$

$$\begin{array}{lcr}
 & C_{14}^{12} + C_{15}^{12} + C_{16}^{12} + \cdots + C_{30}^{12} & = \\
= & C_{14}^{12} + C_{15}^{12} + C_{16}^{12} + \cdots + C_{30}^{12} + [C_{12}^{12} - C_{12}^{12}] + [C_{13}^{12} - C_{13}^{12}] & \\
= & \underbrace{C_{12}^{12} + C_{13}^{12} + C_{14}^{12} + C_{15}^{12} + C_{16}^{12} + \cdots + C_{30}^{12}}_{Teorema\ das\ colunas,\ quando\ r=12} - C_{12}^{12} - C_{13}^{12} & = \\
= & C_{31}^{13} - C_{12}^{12} - C_{13}^{12} & = \\
= & \frac{31!}{13!18!} - \frac{12!}{12!0!} - \frac{13!}{12!1!} & = \\
= & \frac{31!}{13!18!} - 1 - 13 & = \\
= & \frac{31!}{13!18!} - 14 &
\end{array}$$

2. (1.5) Aplicando a fórmula do Binômio de Newton, calcule o coeficiente de x^{12} no desenvolvimento de

$$(x^4 - \frac{3}{x^4})^{17}$$

Justifique a resposta.

Resposta: Como $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b^k a^{n-k}$ temos que o termo geral desta soma corresponde a

$$T_{k+1} = C_n^k b^k a^{n-k}$$

O objetivo da questão é determinar o coeficiente de x^{12}, portanto devemos encontrar o termo que contém tal coeficiente. Para isso, precisamos determinar k.

Neste caso temos $n = 17$, $a = x^4$ e $b = -\frac{3}{x^4}$. Assim, resulta:

$$\begin{array}{rcl} T_{k+1} & = & C_{17}^k (x^4)^k \left(-\frac{3}{x^4}\right)^{17-k} \\ & = & C_{17}^k (-1)^{17-k}\, 3^{17-k}\, x^{4k}\, (x^{-4})^{17-k} \\ & = & C_{17}^k (-1)^{17-k}\, 3^{17-k}\, x^{4k}\, x^{-68+4k} \\ & = & C_{17}^k (-1)^{17-k}\, 3^{17-k}\, x^{4k-68+4k} \\ & = & C_{17}^k (-1)^{17-k}\, 3^{17-k}\, x^{8k-68} \end{array}$$

Como queremos encontrar o coeficiente de x^{12}, deve ser $8k - 68 = 12$. Então $k = \frac{68+12}{8} = \frac{80}{8} = 10$. Logo o coeficiente de x^{12} é dado por:

$$C_{17}^{10} (-1)^{17-10}\, 3^{17-10} = C_{17}^{10} (-1)^7\, 3^7 = -3^7 \frac{17!}{10!7!}.$$

3. (1.5) Encontre a fórmula fechada da relação de recorrência:
$a_{n+1} = 3a_n + 1$ para todo n inteiro, $n \geq 1$
$a_1 = 1$
Descreva o processo utilizado para chegar à fórmula.

Resposta: Vamos utilizar o método de substituições regressivas:

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= 3a_n + 1 \\
&= 3\underbrace{(3a_{n-1}+1)}_{a_n}+1 \\
&= 3^2 a_{n-1} + 3 + 1 \\
&= 3^2\underbrace{(3a_{n-2}+1)}_{a_{n-1}}+3+1 \\
&= 3^3 a_{n-2} + 3^2 + 3 + 1 \\
&= 3^3\underbrace{(3a_{n-3}+1)}_{a_{n-2}}+3^2+3+1 \\
&= 3^4 a_{n-3} + 3^3 + 3^2 + 3 + 1 \\
&\vdots \\
&= 3^{i+1}a_{n-i} + 3^i + 3^{i-1} + \cdots + \underbrace{3^0}_{=1}
\end{aligned}
$$

Fazendo $n-i=1$, temos $i=n-1$ e

$$a_{n+1} = 3^{n-1+1}a_1 + 3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3^0 = 3^n a_1 + 3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3^0$$

Como $a_1 = 1$,

$$a_{n+1} = 3^n + 3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3^0.$$

Observe que podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} 3^i$$

que expressa a soma de uma Progressão Geométrica finita com $n+1$ termos e razão 3. Sabemos que a soma de n termos de uma PG finita de razão q e termo inicial a_1 é dada por: $S_n = \dfrac{a_1(q^n-1)}{q-1}$. Portanto,

$$\sum_{i=0}^{n} 3^i = \frac{1(3^{n+1}-1)}{3-1},$$

o que podemos concluir:

$$a_{n+1} = \frac{3^{n+1}-1}{2}.$$

ou seja,

$$a_n = \frac{3^n-1}{2}.$$

4. (5.0) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa dê um contra-exemplo ou justifique convenientemente.

   (a) Não existe grafo regular de grau 3 com 9 vértices.

   Resposta: VERDADEIRO. Temos, pelo Teorema do Aperto de Mãos, que em qualquer grafo G, a soma dos graus de todos os vértices é igual a duas vezes o número de arestas, isto é,

   $$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|,$$

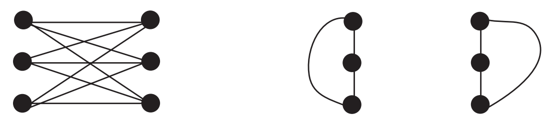
   Assim, a soma dos graus de todos os vértices é necessariamente par. Seja G um grafo regular de grau 3 com 9 vértices, ou seja, $\forall v \in V(G)$, $d(v) = 3$. Suponha que exista este grafo G. Temos então que:

   $$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)| = 3+3+3+3+3+3+3+3+3 = 3 \times 9 = 27$$

   que é um número ímpar. Absurdo!

   (b) Se o grafo G é conexo então o grafo complemento $\overline{G}$ é conexo.

   Resposta: FALSO. Segue abaixo um exemplo onde o grafo $G = K_{3,3}$, que é um grafo conexo, e o seu complemento $\overline{G}$ não é um grafo conexo, já que possui duas componentes conexas.



(c) Se T é uma árvore então a adição de uma aresta a dois vértices quaisquer de T produz um grafo com exatamente um ciclo.

Resposta: Se T é uma árvore então por definição G é conexo e acíclico. A adição de uma aresta e=(v,w) a T se dará ligando os vértices v e w já existentes em T. Como T é conexo então existe um caminho P entre v e w em T. Logo P + e (ou união) é um ciclo no grafo T+e. E como o caminho P entre v e w é unico (porque T é árvore) então o ciclo é único.

(d) O grafo bipartido completo $K_{4,6}$ é euleriano.

Resposta: VERDADEIRO. O grafo $K_{4,6}$ é um grafo bipartido completo, ou seja, seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos (V_1, V_2) de modo que toda aresta do $K_{4,6}$ tem um extremo em V_1 e o outro em V_2. Além disso, como o grafo é completo, todo vértice de V_1 é adjacente a todo vértice de V_2. Assim, $d(v) = 6,\ \forall v \in V_1$ e $d(v) = 4,\ \forall v \in V_2$.

O Teorema de Euler garante que um grafo é Euleriano se e somente se seus vértices têm grau par. Desta forma, podemos garantir que o $K_{4,6}$ é Euleriano.

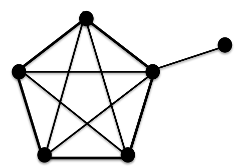
(e) O grafo bipartido completo $K_{5,5}$ é hamiltoniano.

Resposta: VERDADEIRO. Um grafo é Hamiltoniano se possui um ciclo Hamiltoniano, i.e., um ciclo que inclui todos os seus vértices uma única vez.

O grafo $K_{5,5}$ é um grafo bipartido completo, ou seja, seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos (V_1, V_2) de modo que toda aresta do $K_{5,5}$ tem um extremo em V_1 e o outro em V_2. Considere $V_1 = \{a, c, e, g, i\}$ e $V_2 = \{b, d, f, h, j\}$. Desta forma, o grafo $K_{5,5}$ é Hamiltoniano pois podemos exibir o seguinte ciclo Hamiltoniano: $abcdefghija$.

(f) Se G é um grafo tal que $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$ então G é planar.

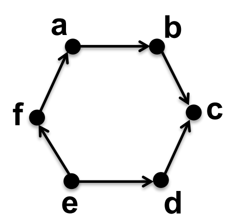
Resposta: FALSO. Seja o grafo G como mostra a figura abaixo:



Temos que G possui $m = |E(G)| = 11$, $n = |V(G)| = 6$ e $11 \leq 3 \times 6 - 6 = 12$, porém este grafo não é planar, pois possui um K_5 como subgrafo induzido.

5. (1.0) Dê exemplo de um digrafo com 6 vértices que seja fortemente conexo. Justifique seu exemplo.

Resposta: Seja D um digrafo:



Um digrafo D é fortemente conexo quando para todo par de vértices v, $w \in V(G)$ existir um caminho em D de v para w e também de w para v.

Podemos observar que como o digrafo apresentado é um ciclo direcionado e podemos partir de um vértice escolhido e chegar a qualquer outro, basta percorrer o ciclo no sentido dado. Logo o digrafo dado é fortemente conexo.