Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Gabarito da AP1 - Primeiro Semestre de 2010

Questões:

1. (2.0) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

   (a) $\emptyset = \{\emptyset\}$

   Resposta: FALSO. Dois conjuntos são iguais se todo elemento de um conjunto é elemento do outro conjunto e vice-versa.

   O conjunto $\emptyset$ não tem elementos enquanto $\{\emptyset\}$ tem um elemento, $\emptyset \in \{\emptyset\}$. Logo, $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

   (b) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap B$

   Resposta: FALSO. Contra-exemplo: Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ e $C = \{1, 3, 5\}$.

   Temos que $(A \cap B) = \{3\}$, $(A \cap B) \cup C = \{1, 3, 5\}$, $(A \cup C) = \{1, 2, 3, 5\}$ e $(A \cup C) \cap B = \{3, 5\}$.

   Podemos concluir que $(A \cap B) \cup C \neq (A \cup C) \cap B$.

   (c) $n((A \cup B) \cap C) \leq n(A \cap C) + n(B \cap C)$

   Resposta: VERDADEIRO. Pela propriedade distributiva, temos que $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, e isto implica em dizer que $n((A \cup B) \cap C) = n((A \cap C) \cup (B \cap C))$.

   Portanto,

$$\begin{array}{rlr} & n((A \cup B) \cap C) & = \\ = & n((A \cap C) \cup (B \cap C)) & = \\ = & n(A \cap C) + n(B \cap C) - n((A \cap C) \cap (B \cap C)) & = \\ = & n(A \cap C) + n(B \cap C) \underbrace{-n(A \cap B \cap C)}_{\textit{É negativo}} & = \\ \leq & n(A \cap C) + n(B \cap C) & \end{array}$$

2. (2.0) Mostre por indução matemática que:

$$2^{3n} - 1 \text{ é divisível por } 7 \text{ para todo natural } n \geq 1.$$

Resposta: Seja $P(n) : 2^{3n} - 1$ divisível por 7 , para todo $n \in \mathbb{N}$.

Base da indução:

Para $n = 1$, temos que $2^{3.1} - 1 = 7$, que é divisível por 7, portanto P(1) é verdadeira.

Hipótese de indução: Suponhamos que a proposição se verifica para k, isto é, P(k) é verdadeira:

$P(k)$: $2^{3k} - 1$ é divisível por 7 ,ou seja, para algum $q \in \mathbb{N}$ temos que $2^{3k} - 1 = 7q$.

Devemos provar que P(k + 1) é verdadeira, isto é:

$P(k+1) : 2^{3(k+1)} - 1$ é divisível por 7

De fato, da hipótese indutiva indutiva temos que $2^{3k} = 1 + 7q$.

Portanto, desenvolvendo $2^{3(k+1)} - 1$ e usando a igualdade acima, resulta:

$$
\begin{aligned}
2^{3(k+1)}-1 &= 2^{3k}.2^3-1 &&= \\
&= (1+7q)2^3-1 &&= \\
&= 8+7\times 8.q-1 &&= \\
&= 7+7\times 8.q &&= \\
&= 7\underbrace{(1+8q)}_{r}
\end{aligned}
$$

E como $r = 1+8q \in \mathbb{N}$ provamos que $2^{3(k+1)}-1$ é divisível por 7.

3. (2.0) Considere os algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6$ e 7. Quantos números naturais superiores a 1000 e inferiores a 10000 podem ser formados se:

(a) os números são pares e têm todos os dígitos diferentes. Justifique.

Resposta: Vamos contar separadamente, já que para um número ser par, este deve terminar em dígito par. Como os algarismos são $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, temos que os números pares devem terminar com $2, 4$ ou 6.

Os números são de 4 dígitos. O último dígito pode ser 2, ou 4, ou 6, isto é, temos 3 possibilidades para o último dígito.

Suponhamos que o último dígito está fixado, restam 6 números para 3 posições, ou seja, arranjos de 6 tomados 3 a 3, $A(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!}$.

Logo, pelo princípio multiplicativo temos $3\times A(6,3) = 360$ números que são pares, que são maiores que 1000 e menores que 10000 e que têm todos os dígitos diferentes.

(b) os números são ímpares e os dígitos podem ser repetidos. Justifique.

Resposta: Começamos novamente pelo último dígito, que pode ser 1, 3, 5 ou 7, portanto temos 4 possibilidades. Fixada uma possibilidade, restam 3 posições para serem preenchidas por 7 dígitos, que podem estar repetidos, portanto temos arranjos com repetição de 7 elementos tomados 3 a 3, $AR(7,3) = 7^3$.

Logo, pelo princípio multiplicativo temos $4 \times 7^3 = 1372$ números que são ímpares, que são maiores que 1000 e menores que 10000 e que podem ser repetidos.

4. (2.0) Quantos são os anagramas da palavra **ARARAQUARA** que não começam pela letra **A** ? Justifique.

Resposta: A palavra **A R A R A Q U A R A** possui 10 letras: 5 A, 3 R, 1 Q, e 1 U.

Os anagramas podem começar com as letras R, Q, ou U.

O número de anagramas que começam com a letra R é

$$P_9^{5,2,1,1} = \frac{9!}{5!2!1!1!} = 1.512$$

O número de anagramas que começam com a letra Q é

$$P_9^{5,3,1} = \frac{9!}{5!3!1!} = 504$$

O número de anagramas que começam com a letra U é

$$P_9^{5,3,1} = \frac{9!}{5!3!1!} = 504$$

Logo, pelo princípio aditivo temos que o número de anagramas da palavra **A R A R A Q U A R A** que não começam pela letra **A** é dado por:

$$P_9^{5,2,1,1} + P_9^{5,3,1} + P_9^{5,3,1} =$$
$$\frac{9!}{5!2!1!1!} + \frac{9!}{5!3!1!} + \frac{9!}{5!3!1!} =$$
$$1.512 + 504 + 504 =$$
$$2.520$$

Outra maneira de fazer é usando o complemento:

O número total de anagramas da palavra **A R A R A Q U A R A** é $P_{10}^{5,3,1,1} = \frac{10!}{5!3!1!1!} = 5.040$.

O número de anagramas da palavra **A R A R A Q U A R A** que começam com a letra **A** é $P_{9}^{4,3,1,1} = \frac{9!}{4!3!1!1!} = 2.520$.

Logo, o número de anagramas da palavra **A R A R A Q U A R A** que não começam com a letra **A** é:

$$P_{10}^{5,3,1,1} - P_{9}^{4,3,1,1} = \frac{10!}{5!3!1!1!} - \frac{9!}{4!3!1!1!} = 5.040 - 2.520 = 2.520$$

5. (2.0) Calcule:

(a) quantas são as soluções inteiras e não negativas (≥ 0) da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30 \text{ tal que } x_1 \geq 2 \text{ e } x_4 \geq 3.$$

Justifique.

Resposta: Temos de encontrar o número de soluções inteiras e não-negativas da equação $x_1+x_2+x_3+x_4 = 30$ com as restrições: $x_1 \geq 2$, $x_4 \geq 3$, e $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

Podemos escrever: $x_1 = x_1' + 2$, $x_4 = x_4' + 3$, onde $x_1', x_4' \geq 0$. Substituindo na equação temos: $x_1' + 2 + x_2 + x_3 + x_4' + 3 = 30$, com $x_1', x_2, x_3, x_4' \geq 0$, ou seja, $x_1' + x_2 + x_3 + x_4' = 25$, com $x_1', x_2, x_3, x_4' \geq 0$.

O número de soluções inteiras e não negativas de $x_1+x_2+x_3+x_4 = 30$, onde $x_1 \geq 2$ e $x_4 \geq 3$, é o número de soluções inteiras e não negativas de $x_1' + x_2 + x_3 + x_4' = 25$, onde $x_1', x_2, x_3, x_4' \geq 0$, que corresponde a $CR_4^{25} = C_{25+4-1}^{25} = C_{28}^{25} = \frac{28!}{25!3!} = 3276$.

(b) Quantas são as soluções inteiras e não negativas (≥ 0) da inequação

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 7.$$

Justifique.

Resposta: Note que o número de soluções inteiras e não negativas deste problema é igual ao número de soluções inteiras não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + y = 7$, onde $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, y \geq 0$.
O total de soluções inteiras e não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + y = 7$ é $CR_4^7 = C(4 + 7 - 1, 7) = C(10, 7) = \frac{10!}{7!3!} = 120$.