Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da EP da Aula 09

Observações:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.
2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo <u>antes</u> de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.
3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

---

1. Prove que:

$$C(n, n) = C(n, 0) = 1$$

***R*esposta:** Aplicando a fórmula de combinação:

$$C(n,n) = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = \frac{n!}{0!n!} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = C(n,0).$$

Temos também,

$$\frac{n!}{n!0!} = \frac{n!}{n!1} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

Portanto, $C(n,n) = C(n,0) = 1$.

2. Determine o valor de n que satisfaz:

$$P_n = 12C(n,2)$$

***R*esposta:**

$$\begin{array}{lcl} 12C(n,2) & = & 12\frac{n!}{2!(n-2)!} \\ & = & n!\frac{12}{2!(n-2)!} \\ & = & P_n\frac{12}{2!(n-2)!} \end{array}$$

Portanto, se $12C(n,2) = P_n$, então:

$$\begin{array}{lcl} \frac{12}{2!(n-2)!} & = & 1 \\ 12 & = & 2!(n-2)! \\ \frac{12}{2!} & = & (n-2)! \\ 6 & = & (n-2)! \\ 3! & = & (n-2)! \\ 3 & = & n-2 \\ n & = & 5 \end{array}$$

3. Um estudante recebe uma prova contendo 6 questões. Ele deve escolher 4 para resolver. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer essa escolha?

   ***R*esposta:** O estudante deve selecionar um grupo de 4 num total de 6 questões.

   Note que a ordem da resolução das questões não é importante: Resolvendo em ordem 1, 2, 3 e 4 ou, resolvendo 4, 3, 2 e 1 nesta ordem, de qualquer forma o aluno terá resolvido as mesmas questões.

   Portanto, o aluno pode fazer esta escolha de $C(6, 4) = 15$ maneiras.

4. Uma turma de calouros tem 15 rapazes e 10 moças. Devem escolher 2 representantes. De quantas maneiras eles podem ser escolhidos?

   ***R*esposta:** A turma tem 25 alunos, dentre estes podemos escolher 2 alunos de $C(25, 2) = 300$ maneiras.

5. De quantos modos 5 meninas e 3 meninos podem ser divididos em 2 grupos de 4 crianças de forma tal que cada grupo inclua pelo menos 1 menino?

   ***R*esposta:** Nessa questão adotaremos o seguinte raciocínio: Ao invés de contar o que é pedido no problema, contaremos seu complementar, subtrairemos este resultado do total e assim obteremos o número desejado.

   O conjunto complementar é calculado em relação ao conjunto formado pelas possíveis divisões de 8 crianças em 2 grupos de 4 (conjunto universo).

   Note que o único jeito de partirmos as crianças em 2 grupos de 4, de tal forma que algum desse grupos não tenha pelo menos um menino, é distribuir as crianças em um grupo com 4 meninas e outro com 3 meninos e uma menina.

   Podemos dividir 8 crianças em 2 grupos de 4 crianças da seguinte forma: Escolhemos 4 crianças para ficar num grupo, para isso temos $C(8, 4)$ maneiras e as restantes colocamos no outro grupo. Note que uma distribuição fixa é contada mais de uma vez, pois se enumerarmos as crianças de 1 a 8, o agrupamento $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{5, 6, 7, 8\}$, onde o primeiro grupo representa o grupo formado pela escolha de 4 entre 8 crianças e o segundo pelas crianças restantes é equivalente a $\{5, 6, 7, 8\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$. Precisamos portanto dividir o total pelo número de permutações entre os 2 grupos que é $P_2 = 2$. Logo, podemos distribuir 8 crianças em 2 grupos de 4 de $\frac{C(8,4)}{P_2} = \frac{70}{2} = 35$ maneiras.

Para dividir as crianças em grupos onde um dos grupos não tenha nenhum menino, devemos colocar os 3 meninos num único grupo, depois temos $C(5, 1)$ maneiras para determinar qual das meninas fará parte do grupo onde estão os 3 meninos. As meninas restantes irão compor o outro grupo.

O total de grupos com pelo menos 1 menino é $\frac{C(8,4)}{P_2}$ - $C(5, 1) = 35 - 5$ $= 30$.

6. Uma comissão formada por 3 homens e 3 mulheres deve ser escolhida em um grupo de 8 homens e 5 mulheres.

   (a) Quantas comissões podem ser formadas?

   ***R*esposta:** Para compor a comissão devemos escolher 3 em um grupo de 8 homens, o que nos dá um total de $C(8, 3) = 56$ maneiras. Analogamente para as mulheres temos $C(5, 3) = 10$ maneiras. Portanto, pelo princípio multiplicativo temos $C(8, 3).C(5, 3) = 56.10 = 560$ comissões distintas.

   (b) Qual seria a resposta se um dos homens não aceitasse participar da comissão se nela estivesse determinada mulher?

   ***R*esposta:** Dividiremos as comissões em dois grupos: Comissões onde se encontra a determinada mulher e comissões onde a mesma não se encontra.

   Contando o número de comissões onde a mulher se encontra, temos $C(4, 2) = 6$ maneiras de preencher as outras vagas destinadas a mulheres, e como não poderemos contar com um dos homens, temos $C(7, 3) = 35$ maneiras de selecionar os homens que vão compor a comissão. Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos $C(4, 2).C(7, 3) = 210$ comissões distintas.

   Sabendo que a determinada mulher não se encontra na comissão, temos $C(4, 3) = 4$ formas de escolher as 3 mulheres e $C(8, 3) =$

56 maneiras de escolher os 3 homens. Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos $C(4,3).C(8,3) = 224$ comissões distintas.

Logo, pelo princípio aditivo, podemos montar um total de $210 + 224 = 434$ comissões distintas.

7. Para a seleção brasileira foram convocados 2 goleiros, 6 zagueiros, 7 meios de campo e 4 atacantes. De quantos modos é possível escalar a seleção com 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meios de campo e 2 atacantes?

   ***R*esposta:** Podemos escalar o goleiro de $C(2,1) = 2$ maneiras, os zagueiros de $C(6,4) = 15$ formas, os meio de campo de $C(7,4) = 35$ maneiras e os atacantes de $C(4,2) = 6$ maneiras. Pelo princípio multiplicativo, podemos montar o time de $C(2,1).C(6,4).C(7,4).C(4,2) = 2.15.35.6 = 6300$ maneiras.

8. Em um torneio no qual cada participante enfrenta todos os demais uma única vez são jogadas 780 partidas. Quantos são os participantes?

   ***R*esposta:** Seja n o número de jogadores no torneio. Se todos jogaram contra todos uma única vez o total de partidas é $C(n,2)$, e portanto:

$$\begin{array}{rcl} C(n,2) & = & 780 \\ \frac{n!}{2!(n-2)!} & = & 780 \\ \frac{n(n-1)}{2} & = & 780 \\ n(n-1) & = & 1560 \end{array}$$

   Falta agora resolver a equação do 2º grau $n^2 - n - 1560 = 0$. Esta equação só possui uma única raíz inteira positiva que é 40, portanto $n = 40$ e conseqüentemente concluímos que o número de jogadores no torneio é 40.

9. Considere 3 vogais diferentes(incluindo o A) e 7 consoantes diferentes (incluindo o B).

   (a) Quantas anagramas de 5 letras diferentes podem ser formados com 3 consoantes e 2 vogais?

***R*esposta:** Inicialmente devemos selecionar quais vogais irão ser utilizadas nos anagramas, podemos fazer isso de $C(3,2) = 3$ formas. Agora determinamos as posições destas vogais no anagrama, podemos fazer isto de $A(5,2) = 20$ maneiras. Pelo princípio multiplicativo, temos $C(3,2)A(5,2) = 60$ formas de selecionar e alocar as vogais.

Em relação às consoantes, devemos inicialmente selecionar 3, podemos fazer isto de $C(7,3) = 35$ maneiras. Depois temos que distribuir as consoantes escolhidas nas 3 posições restantes, isto pode ser feito de $P_3 = 6$ maneiras. Pelo princípio multiplicativo, temos $C(7,3)P_3 = 210$ formas de selecionar e alocar as vogais.

Logo, pelo princípio multiplicativo, o número total de anagramas é $60.210 = 12600$.

(b) Quantas começam com A?

***R*esposta:** Fixemos a vogal A no início da palavra, devemos agora preencher o anagrama das letras a direita do A, isto é, um anagrama de 4 letras onde devemos usar uma vogal e 3 consoantes. O procedimento adotado será análogo ao do ítem anterior.

Primeiro selecionamos qual é a outra vogal a ser utilizada no anagrama (observe que não podemos mais usar a vogal A), podemos fazer isso de $C(2,1) = 2$ formas. Agora determinamos a posição desta vogal no anagrama, podemos fazer isto de $A(4,1) = 4$ maneiras. Pelo princípio multiplicativo, temos $C(2,1)A(4,1) = 8$ formas de selecionar e alocar as vogais.

Para as consoantes, devemos inicialmente selecionar 3, podemos fazer isto de $C(7,3) = 35$ maneiras. Depois temos que distribuir as consoantes escolhidas nas 3 posições restantes, isto pode ser feito de $P_3 = 6$ maneiras. Pelo princípio multiplicativo, temos $C(7,3)P_3 = 210$ formas de selecionar e alocar as vogais.

Logo, pelo princípio multiplicativo, o número total de anagramas é $8.210 = 1680$.

10. De quantas maneiras podemos arrumar em fila 5 sinais $(-)$ e 7 sinais $(+)$?

*O*bservação: O problema é equivalente a encontrar o número de 12 lugares diferentes a serem preenchidos por 5 sinais (-) e 7 sinais (+).

***R*esposta:** Dada uma fila com 12 lugares, escolheremos os lugares dos sinais $+$. Eles podem ser alocados em $C(12,7)$ lugares diferentes. Os sinais $-$ ocupam os lugares restantes.

Logo, existem $C(12,7) = 792$ maneiras de arrumar em fila 5 sinais $(-)$ e 7 sinais $(+)$.