Consórcio cederj
Fundação CECIERJ
Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD2 - Primeiro Semestre de 2011

Questões:

1. (1.5) Usando o teorema das colunas calcule a seguinte soma:

$$S = 12.13.14 + 13.14.15 + 14.15.16 + \cdots + 50.51.52$$

Resposta: O somatório S pode ser escrito da seguinte forma:

$$S = \sum_{n=12}^{50} n(n+1)(n+2).$$

Vamos fazer algumas operações algébricas a fim de aplicar o Teorema das Colunas.

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{n=12}^{50} n(n+1)(n+2) \\
&= \sum_{n=12}^{50} n(n+1)(n+2)\tfrac{(n-1)!}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=12}^{50} \tfrac{(n+2)(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=12}^{50} \tfrac{(n+2)!}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=12}^{50} \tfrac{(n+2)!}{(n-1)!}\tfrac{3!}{3!} \\
&= 3!\sum_{n=12}^{50} \tfrac{(n+2)!}{3!(n-1)!} \\
&= 3!\sum_{n=12}^{50} \tfrac{(n+2)!}{3!(n+2-3)!} \\
&= 3!\sum_{n=12}^{50} C_{n+2}^{3} \\
&= 3![\sum_{n=12}^{50} C_{n+2}^{3} + \sum_{n=1}^{11} C_{n+2}^{3} - \sum_{n=1}^{11} C_{n+2}^{3}] \\
&= 3![\sum_{n=1}^{50} C_{n+2}^{3} - \sum_{n=1}^{11} C_{n+2}^{3}] \\
&= 3!\,\underbrace{[(C_3^3 + C_4^3 + \cdots + C_{52}^3) - (C_3^3 + C_4^3 + \cdots + C_{13}^3)]}_{\text{Teorema das Colunas}} \\
&= 3!(C_{53}^4 - C_{14}^4) \\
&= 3!(\tfrac{53!}{4!49!} - \tfrac{14!}{4!10!})
\end{aligned}
$$

2. (1.0) Usando o teorema do binômio de Newton mostre que

$$\sum_{k=0}^{n}(-2)^k\ C(n,k) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é par} \\ -1 & \text{se } n \text{ é impar} \end{cases}$$

Resposta: Seja $S = \sum_{k=0}^{n}(-2)^k C_n^k$.

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=0}^{n}(-2)^k C_n^k \\
&= (-2)^0 C_n^0 + (-2)^1 C_n^1 + (-2)^2 C_n^2 + (-2)^3 C_n^3 + \cdots + (-2)^n C_n^n \\
&= \underbrace{C_n^0(-2)^0.\ 1^n + C_n^1(-2)^1.\ 1^{n-1} + C_n^2(-2)^2.\ 1^{n-2} + \cdots + C_n^n(-2)^n.\ 1^0}_{\text{Teorema Binomial com, } a=1 \text{ e } b=-2} \\
&= (1-2)^n \\
&= (-1)^n
\end{aligned}
$$

Assim, se n é par, então $(-1)^n = 1$. Com n ímpar temos $(-1)^n = -1$. Portanto, $S = 1$, se n é par e $S = -1$, caso contrário.

3. (1.5)

   (a) Seja a_n o número de maneiras de estacionar carros e micro-ônibus em uma garagem com n vagas dispostas em uma única fila. Considere que um carro ocupa uma vaga e um micro-ônibus ocupa duas vagas. (Por exemplo, numa garagem com 3 vagas temos 3 maneiras: carro, carro, carro; carro, micro-ônibus; micro-ônibus, carro, logo $a_3 = 3$.) Encontre uma relação de recorrência para a_n e as condições iniciais. Justifique.

   Resposta:

   Seja a_n o número de maneiras de estacionar em uma garagem com n vagas. Suponha inicialmente que temos uma garagem com apenas uma vaga. Neste caso, só podemos estacionar um carro, isto é, $a_1 = 1$.

   Agora, suponhamos que temos uma garagem com duas vagas. Podemos estacionar dois carros ou um micro-ônibus de modo a ocupar as duas vagas. Assim, temos 2 formas distintas de estacionarmos nesta garagem. Logo, $a_2 = 2$.

   Imagine agora que nossa garagem tem $n - 1$ vagas previamente ocupadas. Para ocupar a $n-$ésima, só temos uma forma: estacionando um carro. Se a_{n-1} é o número de formas distintas de estacionar em uma garagem com $n - 1$ vagas, então, como só temos uma maneira de estacionar nesta garagem com $n - 1$ vagas ocupadas, temos que o número de formas de estacionar em tal garagem é representado por a_{n-1}.

   Por fim, podemos ter uma garagem com $n - 2$ vagas previamente ocupadas. Para preenchermos estas duas vagas, podemos estacionar um micro-ônibus ou 2 carros. Entretanto, quando preenchemos com dois carros, recaímos no caso da garagem com $n-1$ vagas preenchidas, já analisado. Se o levarmos em consideração, estaremos contabilizando uma repetição. Assim, temos apenas uma maneira diferente das que já analisadas de estacionarmos nessa garagem com $n - 2$ vagas preenchidas. Logo, se a_{n-2} é o número de formas de estacionar em uma garagem com $n - 2$ vagas, temos a_{n-2} maneiras de estacionar na garagem em questão.

   Portanto, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Logo, a relação de recorrência que expressa o problema é:

$$\begin{cases} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 2 \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

(b) Encontre a fórmula fechada da seguinte relação de recorrência:

$$a_n = a_{n-1} \ + \ 3.2^{n-1} \quad , \quad \text{sendo } a_0 \ = \ 2$$

Resposta:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 3.2^{n-1} \\ &= a_{n-2} + 3.2^{n-2} + 3.2^{n-1} \\ &= a_{n-3} + 3.2^{n-3} + 3.2^{n-2} + 3.2^{n-1} \\ &\vdots \\ &= a_{n-i} + 3.2^{n-i} + \cdots + 3.2^{n-2} + 3.2^{n-1} \\ &= a_{n-i} + \textstyle\sum_{k=1}^{i} 3.2^{n-k} \end{aligned}$$

Fazendo $i = n$ temos $n - i = 0$ e então,

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + \textstyle\sum_{k=1}^{n} 3.2^{n-k} \\ &= a_0 + 3\textstyle\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} \\ &= a_0 + 3\underbrace{[2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 2^0]}_{\text{Soma PG de razão } 2} \\ &= a_0 + 3[\tfrac{2^0(2^n-1)}{2-1}] \\ &= a_0 + 3[2^n - 1] \\ &= 2 + 3.2^n - 3 \\ &= 3.2^n - 1 \end{aligned}$$

Portanto, a fórmula fechada para a relação de recorrência em questão é dada por $a_n = 3.2^n - 1$.

4. (1.5) Mostre que em uma festa com 25 pessoas não é possível que cada uma dessas pessoas conheça exatamente outras 5 pessoas da festa. Modele o problema por um grafo e mostre o resultado usando propriedades de grafos.

Resposta: Vamos modelar o problema da seguinte forma:

Seja $G = (V, E)$ um grafo onde os vértices representam as pessoas e as arestas representam a relação de “conhecimento”entre as pessoas da festa, isto é, se duas pessoas se conhecem existe uma aresta entre os vértices correspondentes as pessoas. Assim, G tem 25 vértices, cada um com grau 5. Então, $\sum_{v \in V} d(v) = 25 \times 5 = 125$ (número ímpar). Mas, pelo Teorema do aperto de mãos, temos que $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$ (número par), onde m é o número de arestas de G.

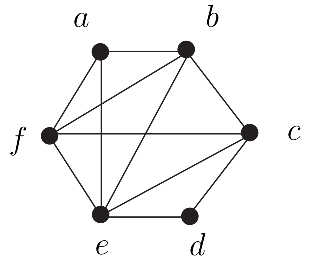
Logo, chegamos a uma contradição (pois 125 é um número ímpar).

Então podemos concluir que, em uma festa com 25 pessoas, não é possível que cada uma dessas pessoas conheça exatamente outras 5 pessoas da mesma festa.

5. (4.5) Seja G o grafo dado por:
$V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$,
$E(G) = \{(a, b), (a, e), (a, f), (b, c), (b, e), (b, f), (c, d), (c, e), (c, f), (d, e), (e, f)\}$.

(a) Desenhe G

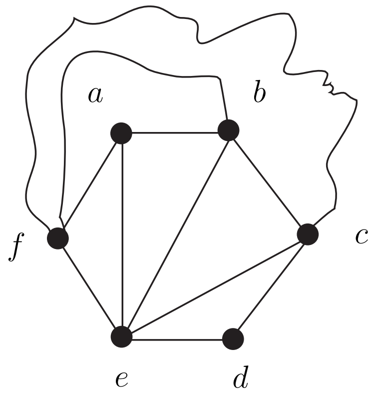
Resposta: A representação geométrica de G é:



(b) Mostre que G é um grafo planar. Quantas faces tem G? Justifique.

Resposta: O grafo G é planar, pois admite a seguinte representação plana:

Seja f o número de faces de G, n o número de vértices e m o número de arestas. Como G é conexo e planar, a fórmula de Euler nos diz que n - m + f = 2. Como $n = 6$ e $m = 11$, então $f = m - n + 2 = 11 - 6 + 2 = 7$.



(c) Determine o diâmetro de G e o centro de G. Justifique.

Resposta: A excentricidade $e(v)$ de um vértice v de G é o valor da maior distância de v aos outros vértices de G, isto é, $e(v) = max_{w \in V(G)}\{d(v,w)\}$. O diâmetro de um grafo G, denotado por $diam(G)$, é o valor da sua maior excentricidade. O centro de um grafo G, denotado por $c(G)$ é o conjunto dos vértices de menor excentricidade de G.
Como $e(e) = 1$ e $e(a) = e(b) = e(c) = e(d) = e(f) = 2$, temos:
$diam(G) = 2$,
$c(G) = \{e\}$.

(d) G é um grafo euleriano? Justifique.

Resposta: Por teorema temos que um grafo G é euleriano se e somente se todo vértice de G possui grau par.

Os graus dos vértices a e d do grafo G possuem grau ímpar, isto é, $d_G(a) = 3$ e $d_G(e) = 5$.

Logo, G não é euleriano.

(e) G é um grafo hamiltoniano? Justifique.

Resposta: Sim, pois G possui o seguinte ciclo hamiltoniano: a, b, c, d, e, f, a.

Portanto, G é hamiltoniano.

(f) G é um grafo bipartido? Justifique.

Resposta: Não, pois um grafo G é bipartido se e somente G não possui ciclo ímpar, e neste caso o grafo G possui ciclo ímpar, como por exemplo, a, b, e, a.