Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AD2 - Primeiro Semestre de 2010

Questões:

1. (1.5) Usando o teorema das linhas calcule a seguinte soma:

$$\sum_{k=3}^{n}(2k-1)C_n^k$$

com $n \geq 3$. Justifique.

Resposta:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=3}^{n}(2k-1)C_n^k = \\
& \sum_{k=3}^{n}(2kC_n^k - C_n^k) = \\
& \sum_{k=3}^{n}2kC_n^k - \sum_{k=3}^{n}C_n^k = \\
= \; & \sum_{k=3}^{n}2k\frac{n!}{(n-k)!k!} - (\underbrace{C_n^3 + C_n^4 + C_n^5 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n}_{\text{Pelo teorema das linhas, temos:}}) = \\
= \; & 2\sum_{k=3}^{n}k\frac{n!}{(n-k)!k!} - (2^n - C_n^0 - C_n^1 - C_n^2) = \\
= \; & 2\sum_{k=3}^{n}k\frac{n!}{(n-k)!k.(k-1)!} - (2^n - 1 - n - C_n^2) = \\
= \; & 2\sum_{k=3}^{n}\frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} - (2^n - 1 - n - C_n^2) = \\
= \; & 2\sum_{k=3}^{n}\frac{n.(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!} - (2^n - 1 - n - C_n^2) = \\
= \; & 2\sum_{k=3}^{n}n.\frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!} - (2^n - 1 - n - C_n^2) = \\
= \; & 2n\sum_{k=3}^{n}\frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!} - (2^n - 1 - n - C_n^2) = \\
= \; & 2n\sum_{k=3}^{n}C_{n-1}^{k-1} - (2^n - 1 - n - C_n^2) = \\
= \; & 2n(\underbrace{C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3 + \ldots + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}}_{\text{Pelo teorema das linhas, temos}}) - (2^n - 1 - n - C_n^2) = \\
= \; & 2n(2^{n-1} - C_{n-1}^0 - C_{n-1}^1) - (2^n - 1 - n - C_n^2) = \\
= \; & 2n(2^{n-1} - 1 - n + 1) - (2^n - 1 - n - C_n^2) = \\
= \; & n2^n - 2n^2 - 2^n + 1 + n + \frac{n!}{(n-2)!2!} = \\
= \; & n2^n - 2^n - 2n^2 + n + 1 + \frac{n(n-1)}{2} = \\
= \; & (n-1)2^n - 2n^2 + n + 1 + \frac{n(n-1)}{2} = \\
= \; & \frac{(n-1)2^{n+1} - 4n^2 + 2n + 2 + n^2 - n}{2} = \\
= \; & \frac{(n-1)2^{n+1} - 3n^2 + n + 2}{2}
\end{aligned}$$

2. (1.5) Para que valores de $n \in \mathbb{N}$ o desenvolvimento do binômio de Newton $(3x^2 - \frac{2}{x^4})^n$ possui termo independente? Justifique.

   Resposta: Temos $a = 3x^2$ e $b = -\frac{2}{x^4}$.

   Daí, para $0 \leq k \leq n$ temos:

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= C_n^k a^{n-k} b^k &= \\ &= C_n^k \left(3x^2\right)^{n-k} \left(-\frac{2}{x^4}\right)^k &= \\ &= C_n^k \; 3^{n-k} x^{2n-2k} \; \frac{(-1)^k 2^k}{x^{4k}} &= \\ &= C_n^k \; 3^{n-k} (-1)^k 2^k x^{2n-2k-4k} &= \\ &= C_n^k \; 3^{n-k} (-1)^k 2^k x^{2n-6k} \end{aligned}$$

   Devemos determinar k tal que $T_{k+1} = C_n^k \; 3^{n-k}(-1)^k 2^k x^0$.

   Portanto, deve ser $2n - 6k = 0 \Rightarrow 6k = 2n \Rightarrow k = \frac{n}{3}$.

   Logo, para que $(3x^2 - \frac{2}{x^4})^n$ possua termo independente, temos que $n = 3k$, isto é, n deve ser múltiplo de 3.

3. (1.5) Um processo cria memória dinamicamente. Inicialmente, aloca 64 MB (M_0). A cada iteração exige mais 15% de memória. Quanta memória terá alocado após k iterações? Para responder à pergunta, encontre primeiro a relação de recorrência e depois a fórmula fechada . Justifique.

   Resposta: Seja M_k a quantidade de memória após a k-ésima iteração, para $k \geq 1$. Como a cada iteração o processo exige mais 15% de memória, temos

   $M_1 = M_0 + 0,15M_0 = 1,15M_0$,
   $M_2 = M_1 + 0,15M_1 = 1,15M_1$.
   A quantidade de memória após a iteração k será
   $M_k = M_{k-1} + 0,15M_{k-1} = 1,15M_{k-1}$.

   Temos portanto a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{cases} M_0 = 64 \\ M_k = 1,15M_{k-1}, \quad para \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Obtenção da fórmula fechada:

$$\begin{aligned}
M_k &= 1,15M_{k-1} &= \\
&= 1,15(1,15M_{k-2}) &= \\
&= 1,15^2M_{k-2} &= \\
&= 1,15^2(1,15M_{k-3}) &= \\
&= 1,15^3M_{k-3}
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$= \quad 1,15^iM_{k-i} \quad =$$

Para obter a fórmula em termos do dado inicial M_0, devemos tomar $k-i=0$, isto é, $i=k$. Desta maneira obtemos a fórmula fechada para M_k:

$$M_k \quad = \quad 1,15^kM_0$$

Como $M_0 = 64$, temos que a quantidade de memória alocada após k iterações é dada por:

$$M_k \quad = \quad 64(1,15)^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

4. (1.0) Existe um grafo com a seguinte sequência de graus: $3,3,3,3,5,6,6,6,6$? Justifique.

   Resposta: Temos que em qualquer grafo G, a soma dos graus de todos os vértices é igual a duas vezes o número de arestas, isto é,

$$\sum_{v\in V(G)} d(v) = 2|E(G)|,$$

   ou seja, a soma dos graus de todos os vértices é necessariamente um número par.

   Suponha que existe um grafo G com a sequência de graus $3,3,3,3,5,6,6,6,6$. Temos então que:

$$\sum_{v\in V(G)} d(v) = 2|E(G)| = 3\times4+5+6\times4 = 41 \ \textit{que é um número ímpar. Absurdo!}$$

Logo, este grafo não existe.

5. (4.5) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa dê um contra-exemplo justificando.

(a) Se G é conexo então $\overline{G}$ é conexo.

Resposta: FALSO. Na figura 1, temos um grafo G conexo em que seu complemento não é conexo.

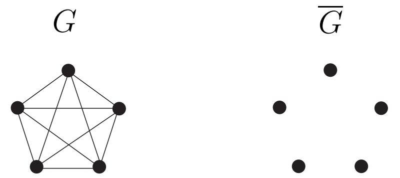

Figura 1: G é um grafo conexo e $\overline{G}$ é desconexo

(b) O grafo bipartido completo $K_{3,4}$ é euleriano.

Resposta: FALSO. Sabemos que um grafo G é euleriano se ele admite um circuito euleriano, isto é, um circuito que passe por todas as arestas exatamente uma vez. E além disso, temos a seguinte caracterização para os grafos eulerianos: Um grafo é euleriano se e somente se o grau de todos os seus vértices é par.

Temos que no grafo $K_{3,4}$, $d(a_1) = d(a_2) = d(a_3) = 4$ e $d(b_1) = d(b_2) = d(b_3) = d(b_4) = 3$, isto é, nem todos os vértices possuem grau par, não satisfazendo a caracterização de grafos eulerianos (veja a figura 2).

Logo, o grafo bipartido completo $K_{3,4}$ não é euleriano.

(c) Se G é um grafo hamiltoniano então o centro de G é igual ao conjunto de vértices de G.

Resposta: FALSO. Temos que a excentricidade de um vértice v de G, $e(v)$, é o valor da maior distância de v aos outros vértices de G, isto é, $e(v) = max_{w \in V(G)}\{d(v, w)\}$, e o centro de um grafo G é o conjunto dos vértices de G que tem a menor excentricidade,

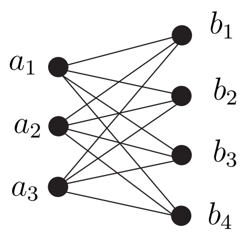

Figura 2: Grafo bipartido completo $K_{3,4}$

isto é, $c(G) = \{v \in V(G) \backslash e(v)$ é mínima$\}$. O grafo da figura 3 é hamiltoniano, pois possui o ciclo hamiltoniano (a, b, c, d, e, a) e temos que $e(a) = 1$, $e(b) = e(c) = e(d) = e(e) = 2$ e $c(G) = \{a\} \neq V(G)$. Logo, o grafo G é hamiltoniano, mas o centro de G não é igual ao conjunto de vértices de G.

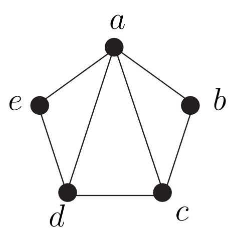

Figura 3: grafo hamiltoniano G

(d) Se T é um árvore então a adição de uma aresta a dois vértices quaisquer de T produz um grafo com exatamente um ciclo.

Resposta: VERDADEIRO. Seja T uma árvore. Então T é conexo e acíclico. A adição de uma aresta e a T se dará ligando dois vértices já existentes em T, por exemplo v e w, ou seja $e = (v, w)$. Como T é conexo, entre v e w existe um caminho P, logo $P + e$ é um ciclo em $T + e$. Além disso como o caminho P entre v e w é único (propriedade de árvores) então esse ciclo é único.

(e) Se G é um grafo planar regular de grau 4 com 10 vértices então G tem 12 faces.

Resposta: VERDADEIRO. Como $d_G(v) = 4, \forall v \in V(G)$ e $n = 10$,

temos que $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2m \Rightarrow 4 \times 10 = 2m \Rightarrow \boxed{\text{m=20}}$.
Seja f o número de faces de G. Como G é conexo, planar e regular de grau 4, a fórmula de Euler nos diz que $n - m + f = 2$. Como $n = 10$ e $m = 20$, então $f = m - n + 2 \Rightarrow f = 20 - 10 + 2 \Rightarrow \boxed{\text{f = 12}}$.