# Aula 21: Árvores

## Conteúdo:

- Definição
- Uma caracterização
- Relação entre número de vértices e arestas
- Centro
- Árvore geradora
- Árvore enraizada

# Introdução:

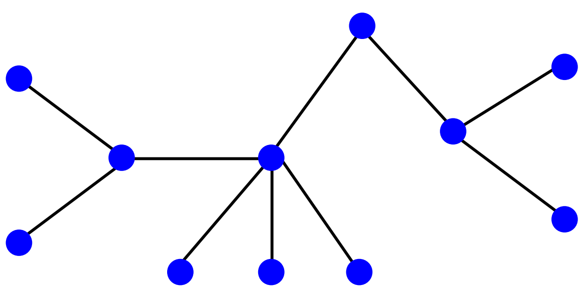
- As árvores constituem uma família de grafos muito importante. Elas têm uma aplicação enorme no mundo real.
- As árvores são estruturas que aparecem em diferentes contextos, tais como química, linguística e computação.
- As árvores são consideradas as estruturas mais simples e com propriedades amigáveis dentre os grafos.
- Por isso, quando procuramos provar um resultado geral para grafos, o procedimento natural é verificar primeiro se o resultado é válido para árvores.

# Definição:

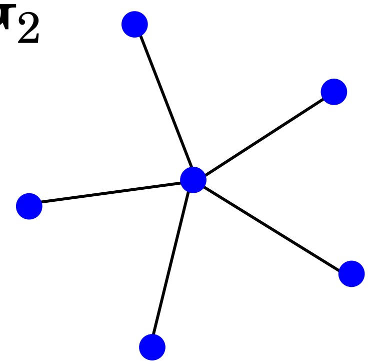
- Um grafo acíclico é um grafo que não contém ciclos.
- Uma árvore é um grafo conexo e acíclico.

**Exemplo 1:** $G_1$, $G_2$, $G_3$ são exemplos de árvores

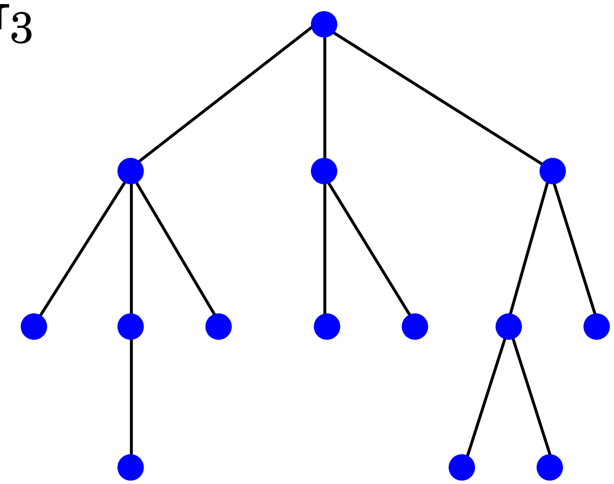
$G_1$



$G_2$

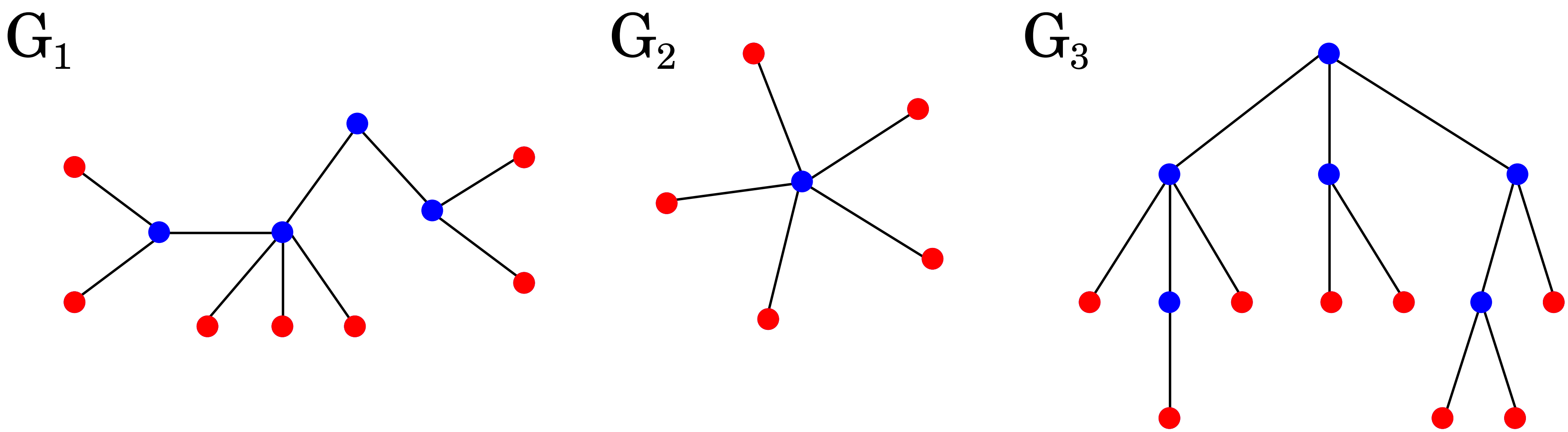


$G_3$



Uma folha de uma árvore é um vértice v tal que o seu grau é exatamente um, isto é: $d(v) = 1$.

**Exemplo 2:** (considerando as árvores do exemplo anterior)

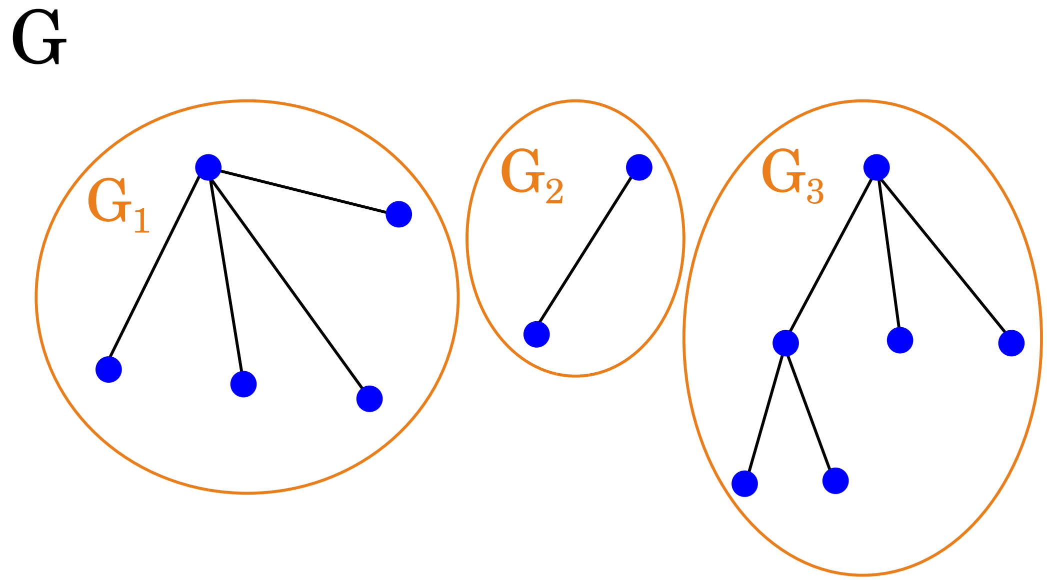



(Os vértices vermelhos são as folhas dos grafos)

Um grafo acíclico é uma floresta.

Em outras palavras, uma floresta é um grafo tal que cada componente conexo é uma árvore.

**Exemplo 3:** G é uma floresta, com componentes conexos $G_1$, $G_2$, $G_3$

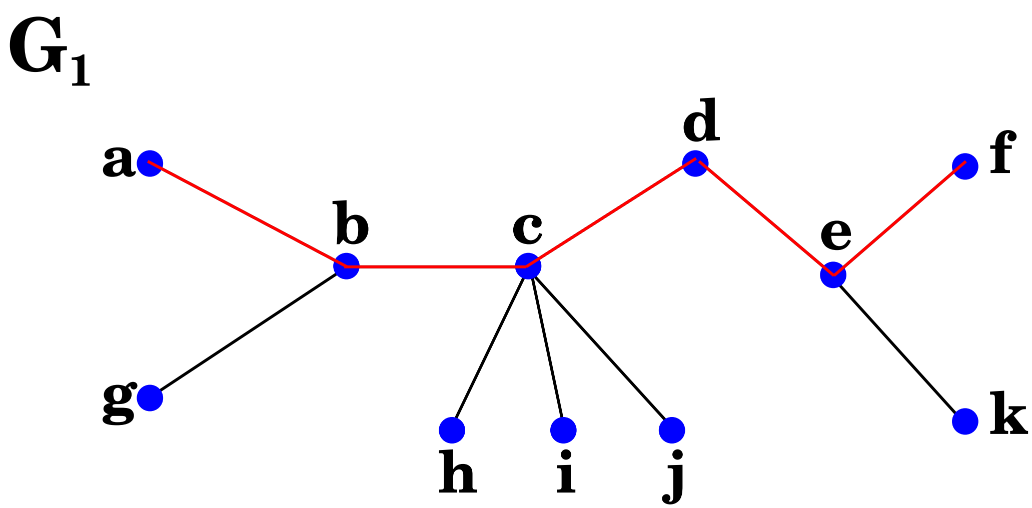



$G_1$, $G_2$, $G_3$ são árvores.

# Uma caracterização:

Teorema 1: Um grafo G é uma árvore se e somente se existir um único caminho entre cada par de vértices de G.

**Exemplo 4:** Consideremos a árvore $G_1$ abaixo




Observe o caminho entre a e f (único).

## Prova:

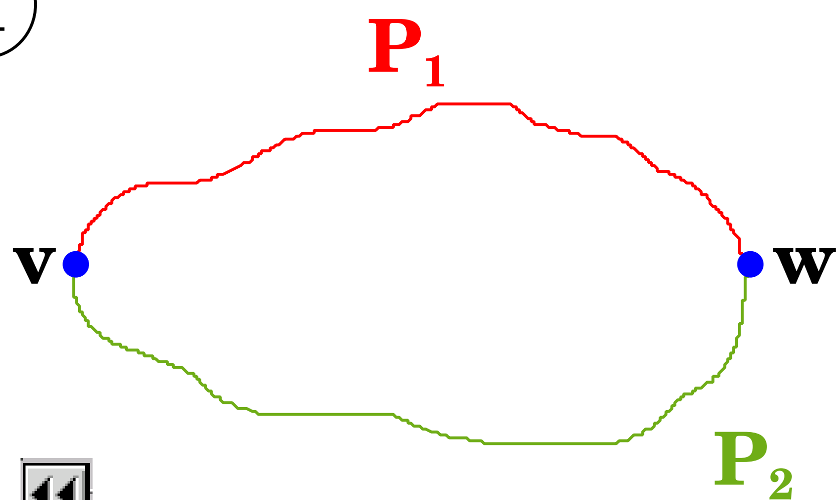
( $\Rightarrow$ ) Seja G uma árvore.

Por definição G é conexo, logo entre cada par de vértices v e w de G existe pelo menos um caminho.

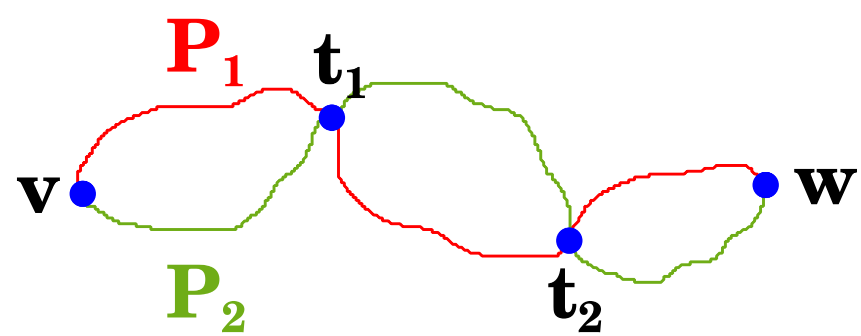
(Falta mostrar que esse caminho é único)

Vamos supor (por absurdo) que existam dois caminhos distintos $P_1$ e $P_2$ entre v e w.

1

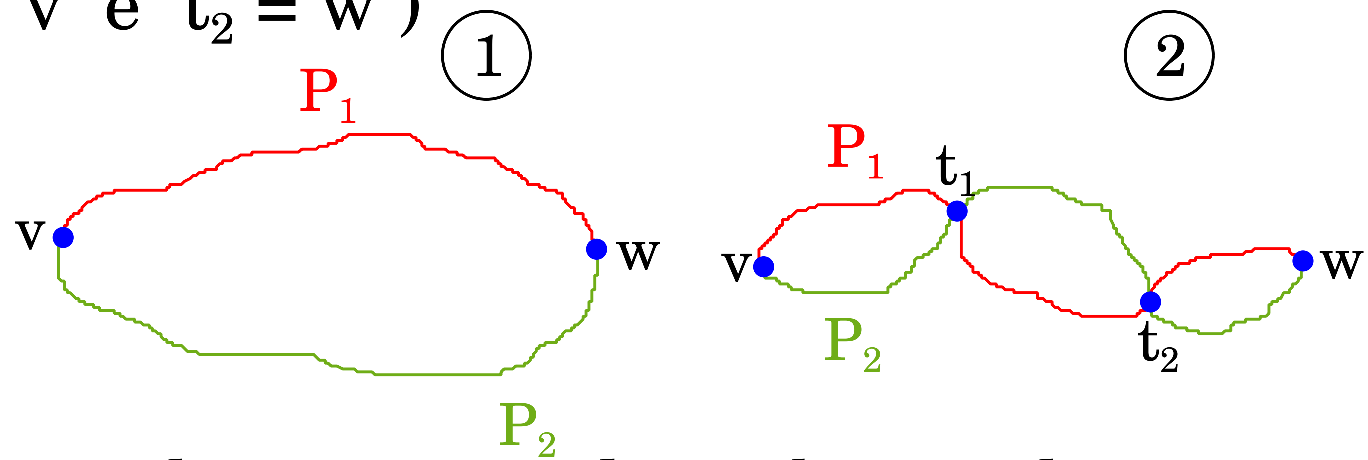



2



Então existem necessariamente dois vértices $t_1$ e $t_2 \in P_1 \cap P_2$ tais que entre $t_1$ e $t_2$ os caminhos $P_1$ e $P_2$ são disjuntos em vértices.

(Em 1 $t_1 = v$ e $t_2 = w$ )




Logo, existe um ciclo composto dos subcaminhos $P_1(t_1 - t_2) \cup P_2(t_1 - t_2)$. Mas isso é uma contradição, porque por definição, uma árvore é acíclica.

Ou seja, mostramos que existe um caminho entre v e w e esse caminho é único.

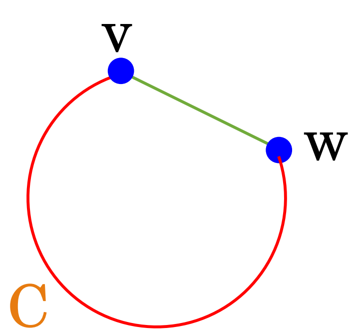
( $\Leftarrow$ ) Suponha que existe um único caminho entre cada par de vértices de G.

Logo, G é conexo (existe um caminho entre cada par de vértices de G.

(Falta mostrar que G é acíclico)

Vamos supor (por absurdo) que C é um ciclo de G.

Seja (v, w) uma aresta de C.




Então entre v e w existem 2 caminhos: a aresta (v, w) e C – (v, w). Contradição

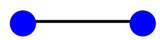
Logo, G é acíclico.

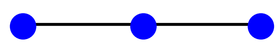
$$G \begin{cases} \text{acíclico} \\ \text{e conexo} \end{cases} \Rightarrow \text{G é uma árvore}$$

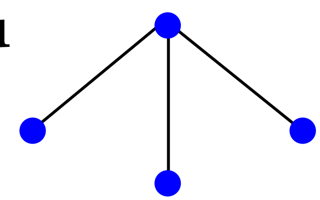
## Relação entre número de vértices e arestas:

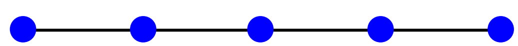
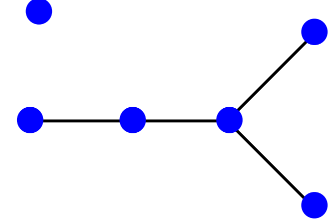
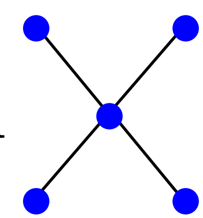
Outro resultado interessante é a relação que temos entre o número de arestas e o de vértices em uma árvore.

Observemos:

Árvores com 2 vértices  $m = 1$ $n = 2$

Árvores com 3 vértices  $m = 2$ $n = 3$

Árvores com 4 vértices  ou  $m = 3$ $n = 4$

Árvores com 5 vértices  ou  ou 

$m = 4$ $n = 5$

Teorema 2: Se $G = (V, E)$ é uma árvore, $|V| = n$, $|E| = m$ então $m = n - 1$.

**Prova:** Indução em n

1. Base da indução: Se $n = 1$ então $m = 0$ (grafo trivial)
   $0 = 1 - 1$ verdadeiro

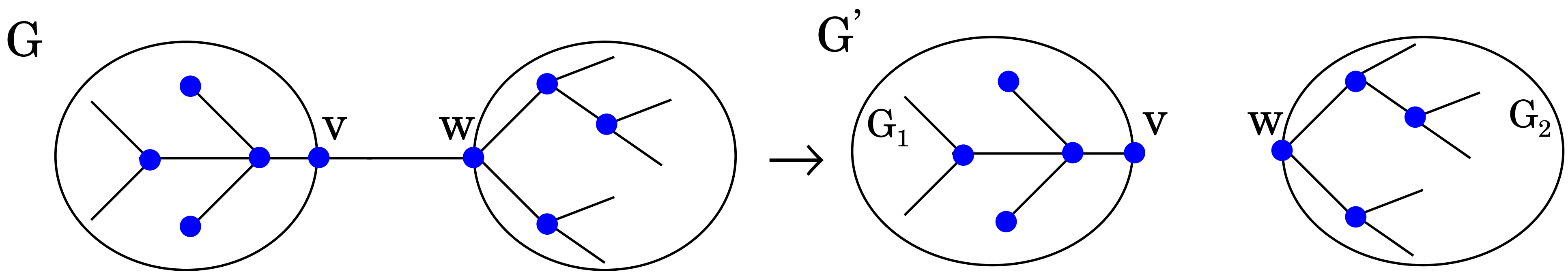
2. Hipótese de indução (indução forte): Suponha que o resultado vale para todas as árvores com menos de n vértices ($n \geq 1$).

3. Passo indutivo:

Seja G uma árvore com n vértices (n > 1). Então G contém ao menos uma aresta *e* = (v, w). Seja G' o grafo obtido removendo *e* de G.

Como v e w possuem um único caminho em G (teorema 1), então v e w não são conexos em G', ou seja v e w estão em 2 componentes conexos distintos de G'.

Sejam $G_1$ e $G_2$ esses componentes. Eles são acíclicos e logo são árvores e têm menos do que n vértices.




$V(G_1) \cup V(G_2) = V(G)$ $E(G_1) \cup E(G_2) \cup (v, w) = E(G)$

A hipótese de indução se aplica a $G_1$ e $G_2$.

Logo $|E(G_1)| = |V(G_1)| - 1$

$|E(G_2)| = |V(G_2)| - 1$

Mas $n = |V(G)| = |V(G_1)| + |V(G_2)|$

$$m = |E(G)| = \underbrace{|E(G_1)|} + \underbrace{|E(G_2)|} + 1 =$$

$$= |V(G_1)| - 1 + |V(G_2)| - 1 + 1 =$$

$$= \underbrace{|V(G_1)| + |V(G_2)|} - 1 =$$

$$m = n - 1$$

Logo, por indução temos $m = n - 1$ para $n \geq 1$.

# Centro:

Outro resultado interessante e bastante particular de árvores é sobre o número de vértices de seu centro.

Lembrando:

$G = (V, E)$ um grafo

$C(G) = \{w \in V \mid e(v) \text{ é mínimo}\}$ onde $e(v) = \max_{w \in V}\{d(v, w)\}$

Em um grafo qualquer temos que $1 \leq C(G) \leq |V(G)|$.

Vamos ver que em uma árvore podemos ter:
ou um único vértice ou 2 vértices (adjacentes entre si)

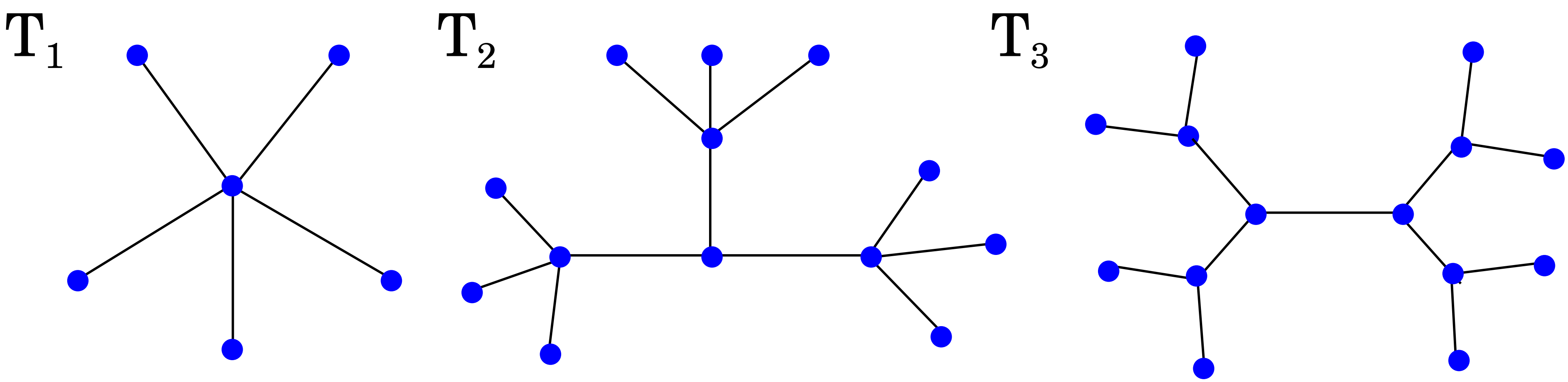
## Motivação

Quando estamos provando resultados envolvendo árvores, muitas vezes é conveniente começar no meio da árvore e se "mover" para fora.

(Esse foi o caminho usado por Cayley em 1870 quando contou o número de moléculas químicas de uma certa fórmula, construindo-a passo a passo).

Mais recentemente o conceito de árvore balanceada tem sido muito usado em computação. Por árvore balanceada entendemos uma árvore que é construída de tal maneira que os vários subgrafos (subárvores) emergindo de cada vértice são "balanceados", isto é têm o mesmo número de vértices.

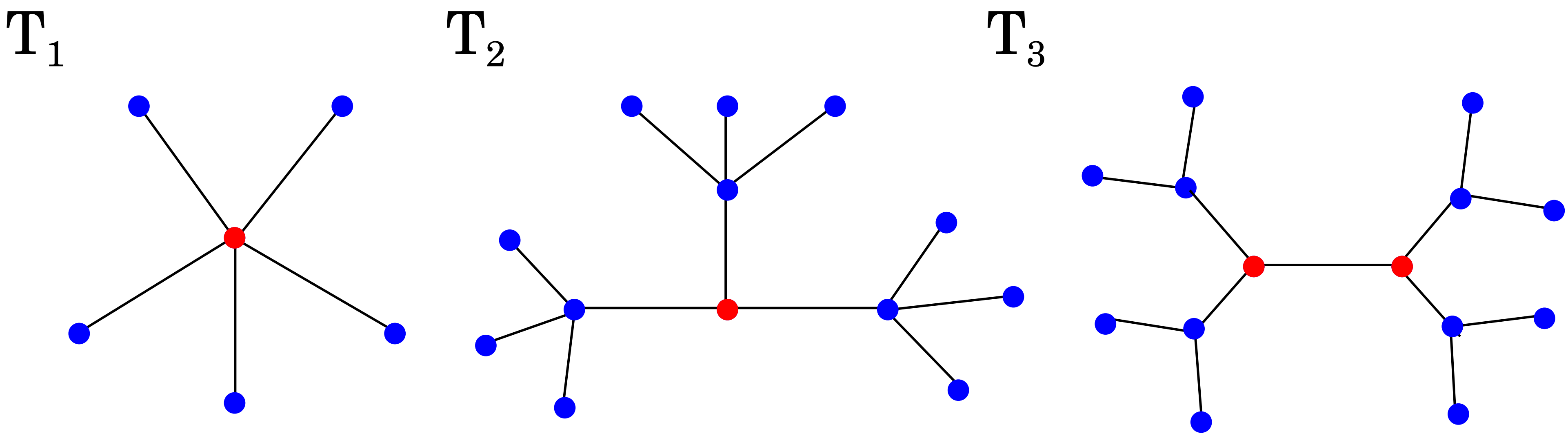
**Exemplos:**




$T_1$, $T_2$ e $T_3$ são árvores balanceadas.

O que é o centro de uma árvore?

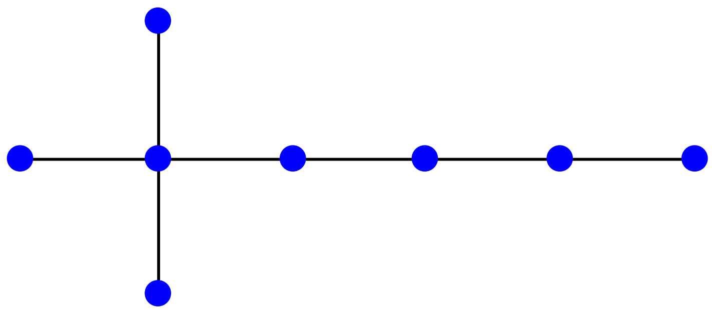
Intuitivamente: Nas árvores do exemplo anterior



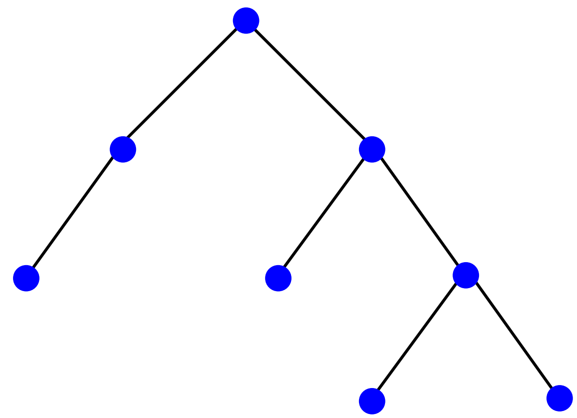

Em cada árvore o seu centro é composto dos vértices em vermelho.

Mas nas árvores abaixo não é tão intuitivo determinar o centro.

$T_4$



$T_5$



**Teorema**: O centro de uma árvore possui <u>um</u> vértice ou <u>dois</u> vértices (adjacentes).

**Prova:** Se baseia em

Fato 1: As folhas são os vértices de maior excentricidade de uma árvore.
(logo as folhas não pertencem ao centro)

Fato 2: Se removermos as folhas de uma árvore G, obtendo um grafo G', cada vértice de G' tem excentricidade exatamente uma unidade a menos do que em G.

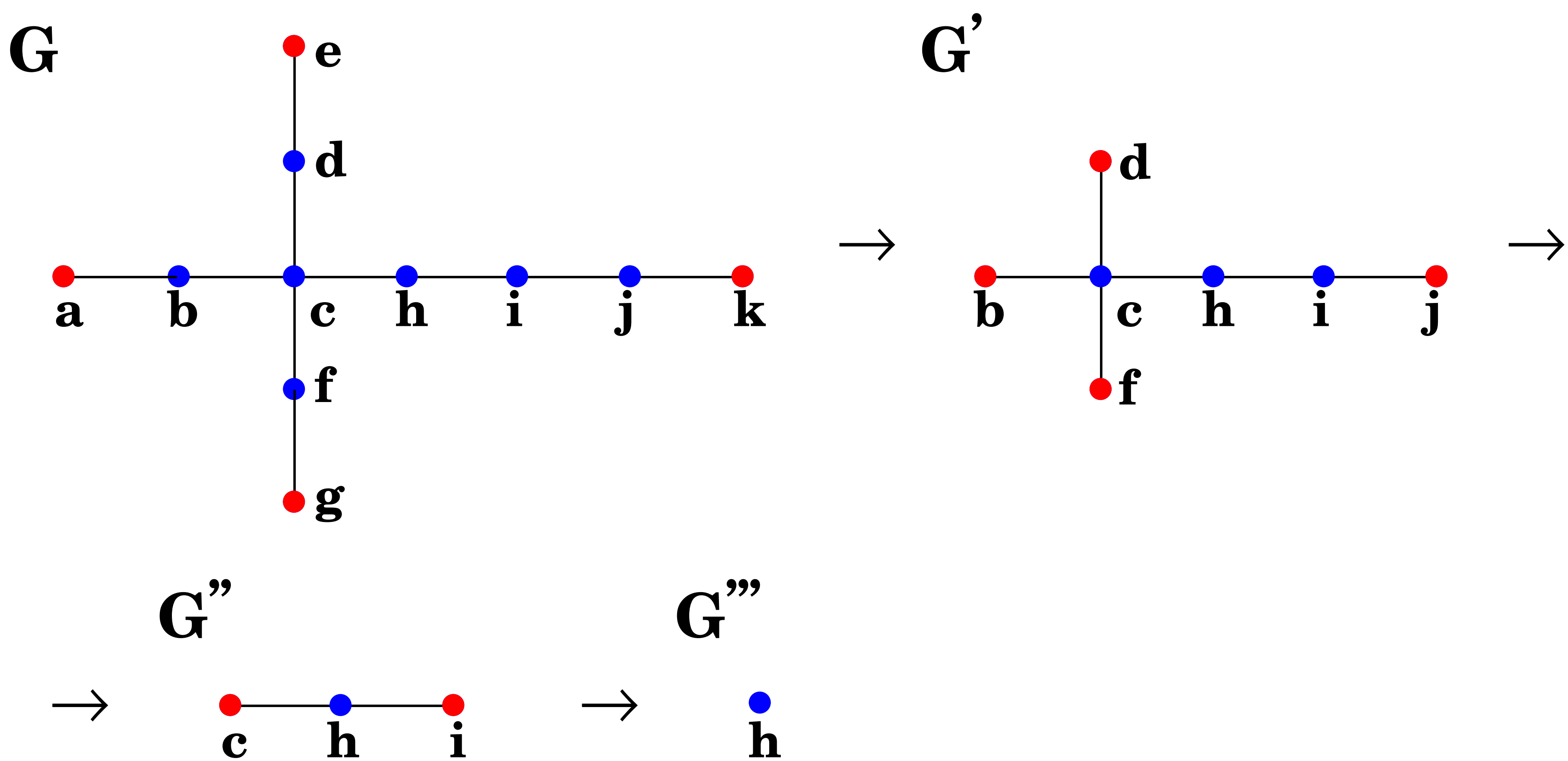
Fato 3: $C(G) = C(G')$

Os fatos 1, 2, 3 nos dão um método (algoritmo) para determinar o centro.

Remova todas as folhas de G (com as suas arestas incidentes).

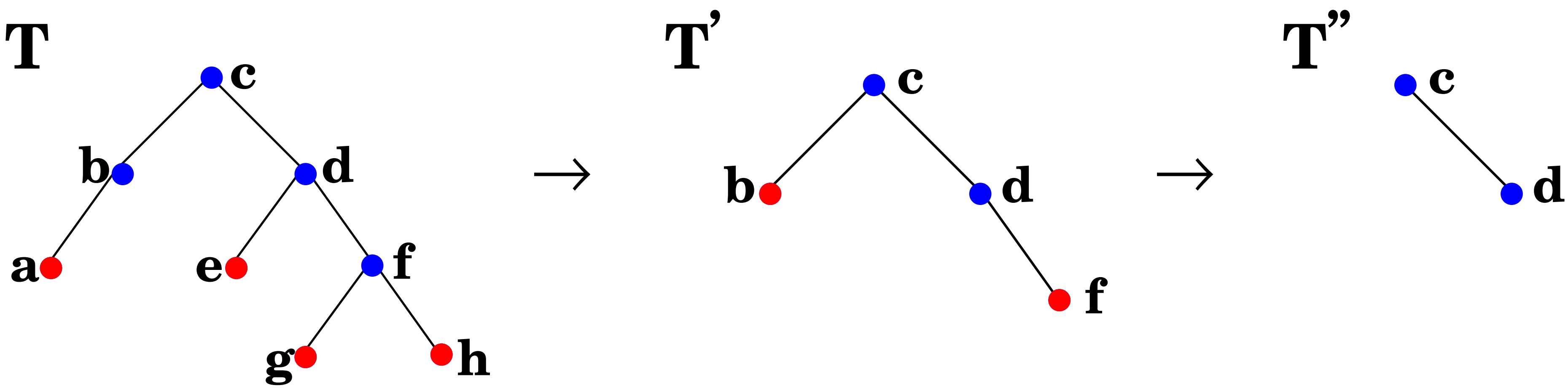
Repita esse procedimento até que tenha sido obtido um único vértice ou 2 vértices ligados por uma aresta.

# Exemplo 5:




$$C(G) = C(G') = C(G'') = C(G''') = \{\ h\ \}$$

## Exemplo 6:




$$C(T) = C(T') = C(T'') = \{ c, d \}$$

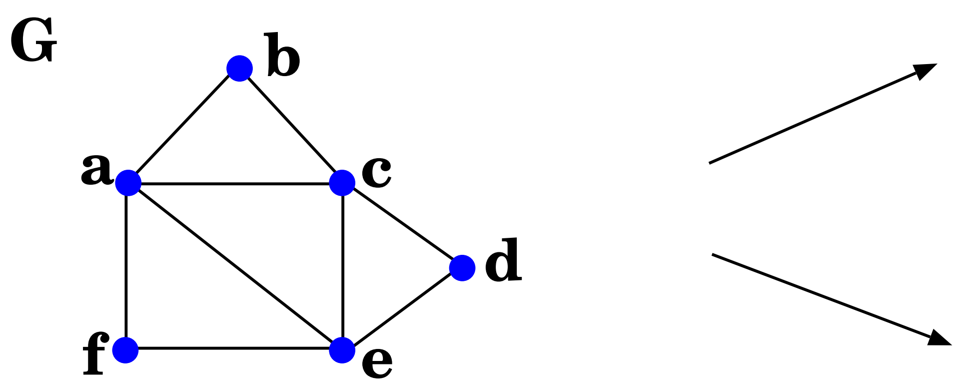
# Árvore geradora:

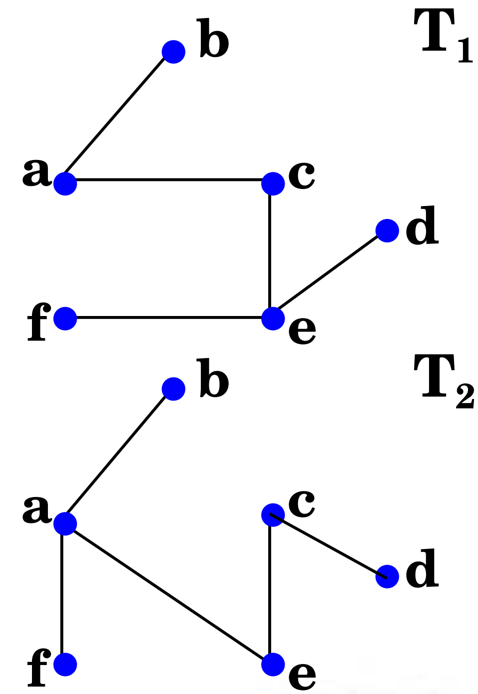
Seja G um grafo conexo.

Uma árvore geradora de G é um subgrafo gerador T de G, que é em particular uma árvore;

isto é, $\underbrace{V(T) = V(G) \text{ e } E(T) \subseteq E(G)}_{\textbf{definição de subgrafo gerador}}$ e T é conexo e acíclico

## Exemplo 5:



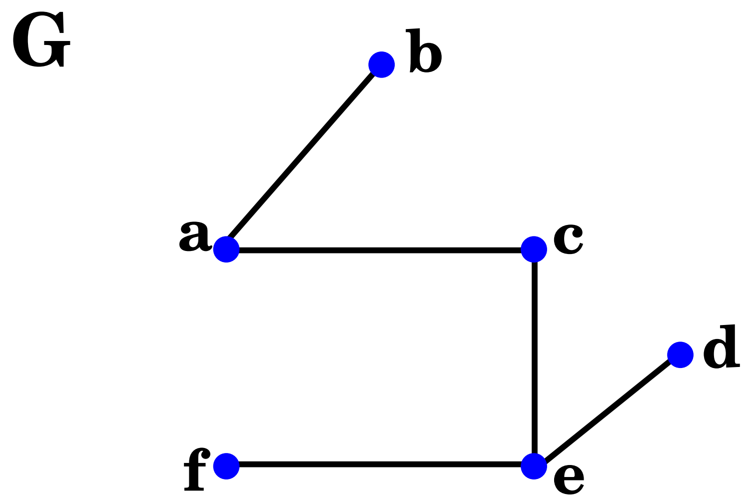

**$T_1$ e $T_2$ são árvores geradoras de G**

- Para todo grafo conexo G, podemos achar uma árvore geradora, de maneira sistemática da seguinte maneira:

  Selecione arestas de G, uma de cada vez, de maneira que nenhum ciclo seja criado, e esse procedimento é repetido até que todos os vértices tenham sido incluídos.

## Exemplo 6:

{ (a, b), (a, c), (b, c), (c, e), (a, e), (e, f), (a, f), (e, d), (c, d) }




- Observe que se trocarmos a ordem das arestas, a árvore geradora obtida pode ser diferente.

## Exercício:

Dê uma outra ordem para a lista de arestas do grafo G do exemplo anterior e ache uma outra árvore geradora de G.

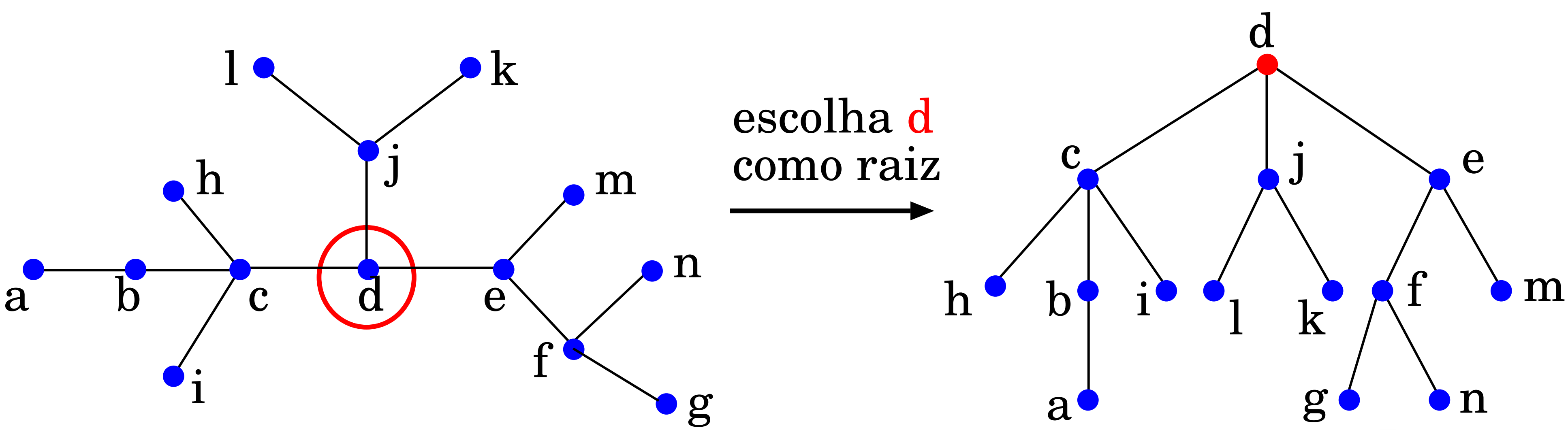
# Árvore enraizada:

Seja T = (V, E) uma árvore.

Escolha um vértice qualquer v da árvore e chame esse vértice de raiz.

A árvore é então dita uma árvore enraizada e a sua representação gráfica tem características bastante particulares.

## Exemplo 7:



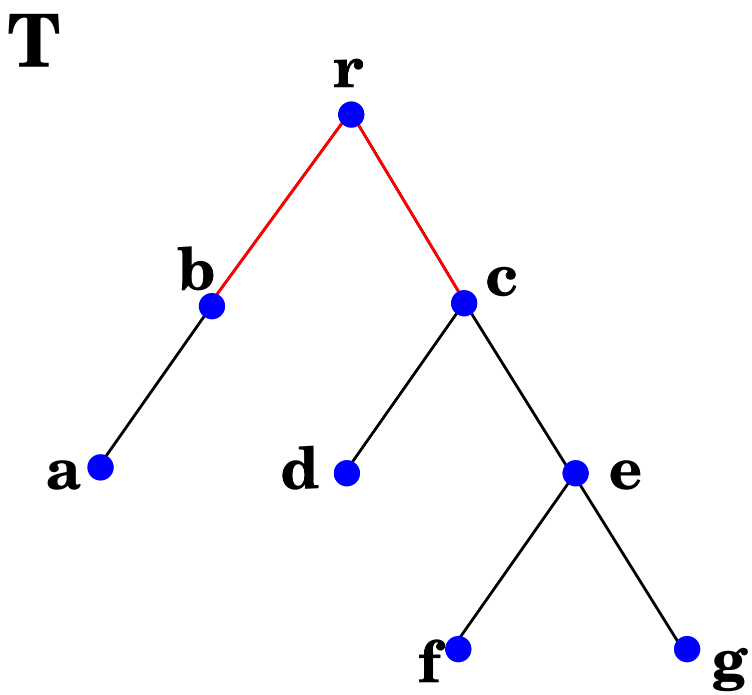
## Características da árvore enraizada

Seja T = (V, E) uma árvore enraizada com raiz r.

Sejam v e w dois vértices de T.

Se v pertence ao caminho de r a w
então v é ancestral de w e w é descendente de v.
Se além disso (v, w) é uma aresta, então v é dito pai de w (w é filho de v).

## Exemplo 8:




c é ancestral de d, e, f, g

c é pai de d e de e

b não é nem ancestral, nem descendente de c em T

b e c são filhos de r

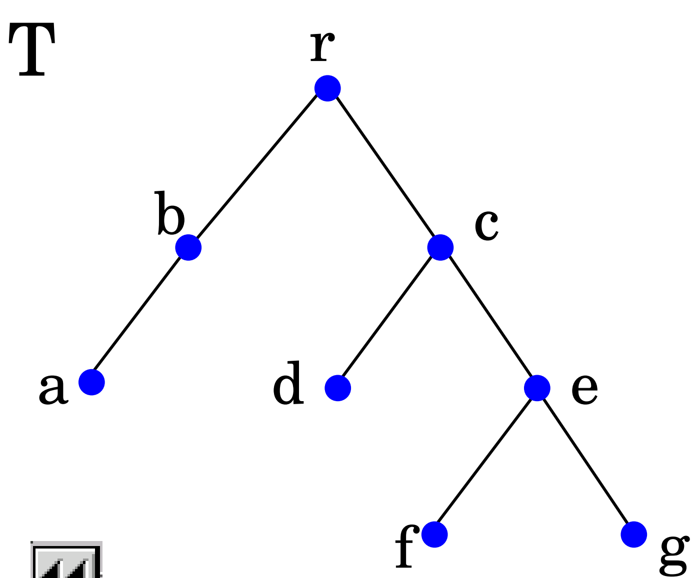
## Características

Seja T = (V, E) uma árvore enraizada com raiz r.

O nível de um vértice v de T, denotado por nível(v) é o comprimento do caminho de r a v em T.

Altura de T é o maior dos níveis, isto é

$$\text{Altura de } T = \max_{v \in V} \{ \text{nível}(v) \}$$




nível(r) = 0

nível(b) = nível(c) = 1

nível(a) = nível(d) = nível(e) = 2

nível(f) = nível(g) = 3

Altura de T = 3

# Resumo:

## Conceito de árvore:

Grafo conexo e acíclico.

## Caracterização:

Existe um caminho único entre quaisquer dois vértices v e w de um grafo $\Leftrightarrow$ o grafo é uma árvore.

## Relação: vértices $\times$ arestas

$$|E(T)| = |E(V)| - 1$$

## Centro:

O centro de uma árvore tem um único vértice ou dois vértices (adjacentes)

## Árvore geradora:

Um subgrafo gerador que é uma árvore.

Fato: dado um grafo conexo G, sempre podemos achar uma árvore geradora de G.

## Árvore enraizada:

Uma árvore com um vértice especial chamado raiz.

Hierarquia e níveis bem definidos.