Aula 5: Indução forte

Conteúdo:

- Série de Fibonacci
- Indução forte
- Indução forte generalizada

Sequência de Fibonacci:

É uma sequência de números naturais $\{F_1, F_2, F_3, \ldots\}$, denotada por $\{F_n\}$ definida da seguinte forma:

$$F_1 = 1$$

$$F_2 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ para } n \geq 3$$

Ou seja, os termos F_n $n \geq 3$ são calculados recursivamente:

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	$\cdots$
1	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**21**	$\cdots$

Voltar

{ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... }

Observe a seguinte propriedade:

Somando os termos da sequência de Fibonacci elevada ao quadrado:

$$F_1^2 = 1^2 = 1$$

Voltar

$$F_1^2 + F_2^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 = 1 \,.\, 2 = F_2 \,.\, F_3$$

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = 2 \,.\, 3 = F_3 \,.\, F_4$$

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15 = 3 \,.\, 5 = F_4 \,.\, F_5$$

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 = 1^2+1^2+2^2+3^2+5^2 = 40 = 5 \,.\, 8 = F_5 \,.\, F_6$$

Conjectura: $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \,.\, F_{n+1}$

cederj

Exemplo 1:

- Mostre que $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1} \quad \forall \ n \in \mathbb{N}$

Prova:

Seja $P(n) : \ F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$

(1) Base da indução:

$P(1) : \ F_1^2 = 1 = F_1 \cdot F_2 = 1 \cdot 1 = 1$ verdadeira

(2) Hipótese de indução (HI):

$P(k) : \ F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_k^2 = F_k \cdot F_{k-1}$ verdadeira

(3) Passo indutivo:

P(k) verdadeira => $\underbrace{\text{P(k + 1) verdadeira}}_{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_k^2 + F_{k+1}^2 = F_{k+1} \bullet F_{k+2}}$

Desenvolvendo:

$$\underbrace{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_k^2}_{\overset{\text{(HI)}}{=}\, F_k \cdot F_{k+1}} + \underbrace{F_{k+1}^2}_{} =$$

$$F_k \cdot F_{k+1} + F_{k+1}^2 = F_{k+1}\underbrace{(F_k + F_{k+1})}_{= F_{k+2}} = F_{k+1} \cdot F_{k+2}$$

Logo P(k + 1) verdadeira

Então pelo PIM

$P(n) : F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$ verdadeira $\forall\ n \in \mathbb{N}$

Indução forte (IF):

- Seja $P(n)$ uma afirmação, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Se:

(i) P(1) verdadeira e

(ii) P(1), P(2), ... ,P(k) verdadeira => P(k+1) verdadeira

Então <u>$P(n)$ verdadeira</u> $\forall \quad n \in \mathbb{N}$

- Observação: O PIM e a IF são equivalentes.

IF Voltar

cederj

Para aplicarmos a indução forte precisamos executar os três passos a seguir:

(1) Base da indução:

Mostrar que P(n) verdadeira para $n = 1$

(2) Hipótese de indução forte:

Assumir que P(1), P(2), ... , P(k) são verdadeiras

(3) Passo indutivo:

Mostrar que P(k + 1) verdadeira, assumindo (2)

Exemplo 2:

- Considerando a sequência de Fibonacci $\{F_n\}$, mostre que $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$

Prova:

Seja $P(n)$: $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$

(1) Base da indução:

P_1 : $F_1 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^1$ verdadeira

(2) Hipótese da indução forte (HIF):

Assuma que $P_1, P_2, \ldots, P_k$ são verdadeiras

$$F_i < \left(\frac{7}{4}\right)^i \quad \forall\ i,\ 1 \le i \le k$$

(3) Passo indutivo:

$P_1, P_2, \ldots, P_k$ verdadeiras => $\underbrace{P(k+1)}_{F_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}}$ verdadeira

Desenvolvendo:

$$F_{k+1} = \underbrace{F_k}_{\substack{\| \text{HF} \\ F_k < \left(\frac{7}{4}\right)^k}} + \underbrace{F_{k-1}}_{\substack{\| \text{HF} \\ F_{k-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}}} < \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{7}{4}+1\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{11}{4}\right)$$

Observe que $\frac{11}{4} < 3 < \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2$

$$F_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}\frac{11}{4} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}$$

Logo $P(k+1)$ verdadeira

Então pelo IF $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$

Indução forte generalizada:

- Seja P(n) uma afirmação, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Se:

(i) P(n_0) verdadeira

(ii) P(n_0), P(n_0+1), ...,P(k) verdadeira => P(k+1) verdadeira

(k = n_0 + k')

Então P(n) é verdadeira $\forall \ n \geq n_0 \quad n \in \mathbb{N}$

Para aplicarmos a IF generalizada precisamos executar os três passos a seguir:

(1) Base da indução:

Mostrar que P(n) verdadeira para $n = n_0$

(2) Hipótese de indução:

Assumir que P(n_0), P($n_0 + 1$), ... , P(k) são verdadeiras ($\forall$ k $\geq n_0$)

(3) Passo indutivo:

Mostrar que P(k + 1) verdadeira, assumindo a hipótese de indução (2)

Exemplo 3:

- Mostre que todo inteiro maior do que 1 é primo ou produto de primos.

  (Obs: primo é um inteiro maior do que 1, que só é divisível por 1 e por ele mesmo. Exemplos: 2, 3, 5, 7 são primos)

  Prova:

  Seja $P(n)$: n é primo ou produto de primos.

  (1) Base da indução:

  $P(2)$: 2 é primo verdadeira

(2) Hipótese de indução forte:

P(i) é verdadeira para $2 \leq i \leq k$

Assuma que:

i é primo ou produto de primos, $2 \leq i \leq k$

(3) Passo indutivo:

P(i) verdadeira $2 \leq i \leq k$ => $\underbrace{P(k+1)}_{\parallel}$ verdadeira

k + 1 é primo ou produto de primos

Desenvolvendo:

Temos duas possibilidades mutuamente exclusivas

(i) $k + 1$ é primo

(ii) $k + 1$ não é primo

Se (i) acontece então $P(k + 1)$ é verdadeira

Caso contrário (ii) acontece, então $k + 1$ não é primo

$k + 1$ não é primo

Então $k + 1$ pode ser escrito como:

$$k + 1 = a \cdot b \quad \text{onde} \quad 1 < a < k + 1$$
$$1 < b < k + 1$$

Usando agora a <u>hipótese de indução forte</u> temos que:

$P(a)$ e $P(b)$ são verdadeiras $\quad 1 < a \leq k$

$$1 < b \leq k$$

ou seja, a é primo ou produto de primos e

b é primo ou produto de primos

Logo $k + 1 = a \cdot b$ é produto de primos

Logo $P(k + 1)$ é verdadeira

Então pelo princípio da indução forte generalizada

$P(n) : n$ é primo ou produto de primos $\forall \; n \in \mathbb{N} \quad n > 1$

Resumo:

Conceitos:

- Sequência de Fibonacci
- Indução forte generalizada
- Estrutura

- Base de indução: P(n) verdadeira $n = n_0$
- Hipótese de indução:

P(n_0), (n_0+1), ..., P(k) verdadeira => P(k + 1) verdadeira

- Em particular

$n_0 = 1$: Indução forte

Exercícios:

(1) Seja $\{a_n\}$ a sequência definida por:

$$a_1 = 1\,, \quad a_2 = 5$$

$$a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1} \qquad n \geq 3$$

Mostre que usando a indução forte $a_n = 2^n + (-1)^n \; \forall \; n \geq 2$

(2) Seja $\{F_n\}$ a sequência de Fibonacci.

Mostre usando a indução forte que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad \forall \; n \in \mathbb{N}$$