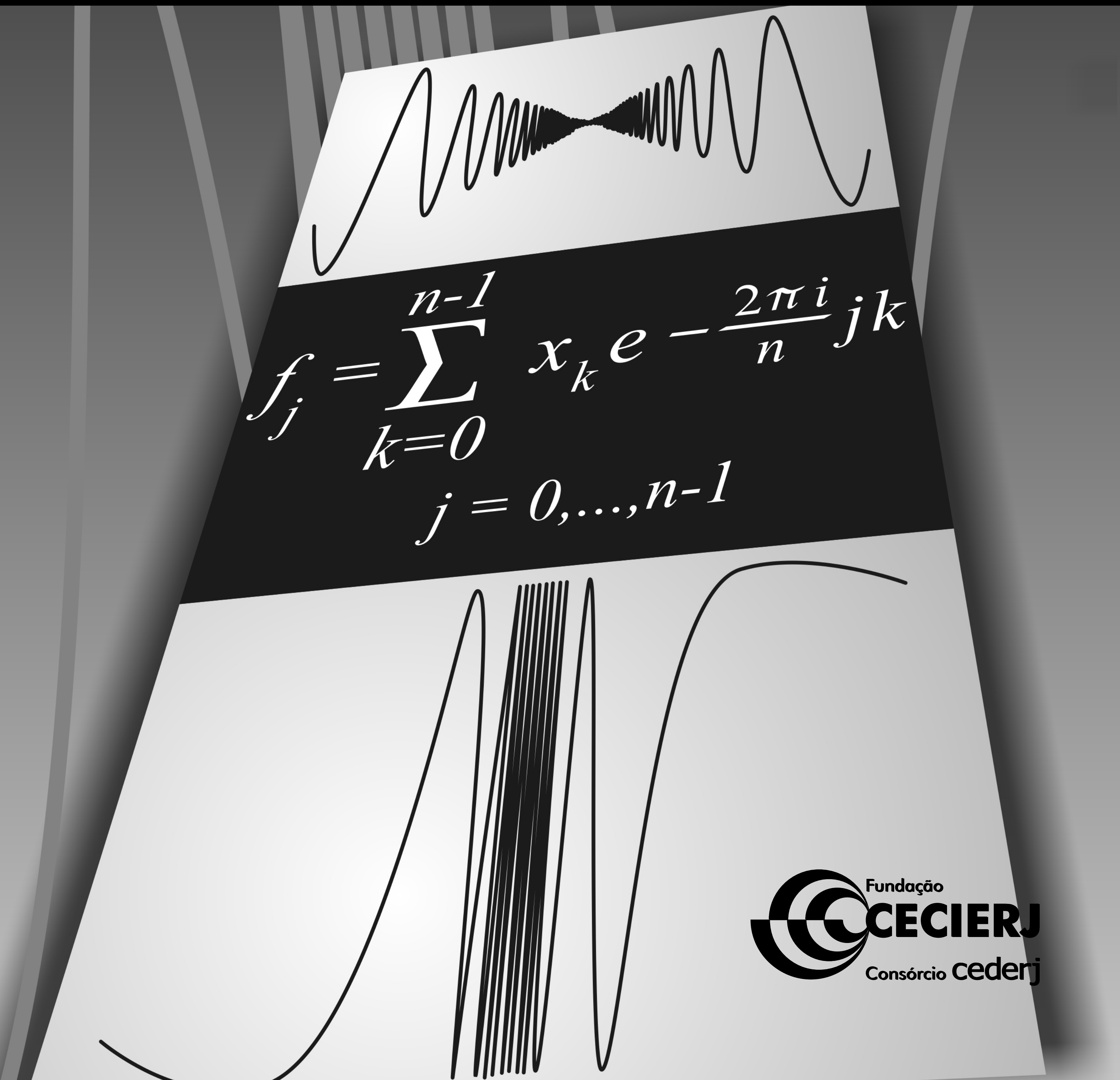
Módulo 1

Volume 1

Hermano Frid

Análise Real



Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Fundação

CECIERJ

Consórcio cederj

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Análise Real

Volume 1 - Módulo 1

Hermano Frid

GOVERNO DO Rio de Janeiro

SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

Apoio:

FAPERJ

Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO
Hermano Frid

EDITOR
Fábio Rapello Alencar

COORDENAÇÃO GRÁFICA
Ronaldo d'Aguiar Silva

PRODUÇÃO GRÁFICA
Oséias Ferraz
Patricia Seabra
Verônica Paranhos

F898a

Frid, Hermano.

Análise real. v. 1. / Hermano Frid. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

204p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 978-85-7648-660-2

1. Análise real. 2. Conjuntos. 3. Funções. 4. Números naturais. 5. Números reais. I. Título.

CDD: 515

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT e AACR2.

2010.2

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Vieiralves

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Aloísio Teixeira

UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Motta Miranda

UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitora: Malvina Tania Tuttman

Prefácio

O texto que ora introduzimos tem como propósito servir de Notas de Aula para o curso de Análise Real do CEDERJ. O texto é dividido em aulas. São 32 aulas cujos temas serão descritos mais adiante. Cada aula contém uma série de exercícios propostos. Algumas aulas contêm ao final seções entituladas "Prossiga:...". Essas seções são textos complementares e não fazem parte do conteúdo propriamente dito das aulas. Elas servem para saciar a curiosidade de leitores mais empenhados com relação a questões surgidas no texto da aula ou a tópicos relacionados com essas questões.

As referências básicas para a elaboração destas Notas são os livros [1, 2, 3, 4] que compõem a bibliografia. Claramente, por tratar-se de uma matéria tão fundamental, objeto de inúmeras obras, dentre as quais grandes clássicos da literatura matemática, diversas outras referências além dessas quatro explicitamente citadas terão influído, talvez de modo menos direto. Como o propósito do texto é somente o de servir de guia para um curso com programa bem definido, não houve de nossa parte nenhuma tentativa de originalidade. Assim, em grande parte, nosso trabalho se resumiu a fazer seleção, concatenação e edição de material extraído das referências citadas, à luz do programa a ser desenvolvido no curso.

A seguir damos a lista dos temas das aulas que compõem o curso.

- **Módulo 1:**

Aula 1: Preliminares: Conjuntos e Funções.

Aula 2: Os Números Naturais e o Princípio da Indução.

Aula 3: Conjuntos Finitos, Enumeráveis e Não-Enumeráveis.

Aula 4: Os Números Reais I.

Aula 5: Os Números Reais II.

Aula 6: Sequências e Limites.

Aula 7: Operações e Desigualdades com Limites de Sequências.

Aula 8: Sequências Monótonas e Subseqüências.

Aula 9: Critério de Cauchy e Limites Infinitos.

Aula 10: Séries Numéricas.

Aula 11: Convergência Absoluta e Não-Absoluta de Séries.

Aula 12: Limites de Funções.

Aula 13: Teoremas de Limites de Funções.

Aula 14: Funções Contínuas.

Aula 15: Combinações de Funções Contínuas.

Aula 16: Funções Contínuas em Intervalos.

- **Módulo 2:**

Aula 17: Continuidade Uniforme.

Aula 18: Limites Laterais, Limites Infinitos e no Infinito.

Aula 19: Funções Monótonas e Função Inversa.

Aula 20: A Derivada.

Aula 21: A Regra da Cadeia.

Aula 22: O Teorema do Valor Médio.

Aula 23: O Teorema de Taylor. Máximos e Mínimos Locais. Funções Convexas.

Aula 24: Integral de Riemann.

Aula 25: Funções Integráveis a Riemann.

Aula 26: O Teorema Fundamental do Cálculo.

Aula 27: Sequências de Funções.

Aula 28: Câmbio de Limites.

Aula 29: Funções Exponenciais e Logaritmos.

Aula 30: Funções Trigonométricas.

Aula 31: Topologia na Reta.

Aula 32: Conjuntos Compactos.

Bibliografia

[1] Ávila, G.- Análise Matemática para Licenciatura; 2^a edição. Ed. Edgar Blücher, São Paulo, 2005.

[2] Bartle, R.G., Sherbert, D.R.- Introduction to Real Analysis; Third Edition. John Wiley & Sons, New York, 2000.

[3] Lima, E.L.- Análise na Reta; 8^a edição. Coleção Matemática Universitária, Instituto de Matemática Pura e Aplicada-IMPA, 2006.

[4] Rudin, W.- Principles of Analysis; Third Edition. McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1976.

Aula 1 – Preliminares: Conjuntos e Funções

Metas da aula: Fazer uma breve recordação dos fatos básicos sobre conjuntos e funções. Apresentar uma introdução à prática de demonstração de proposições matemáticas, ponto central em todo o curso.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber o significado matemático e o uso dos principais símbolos e das operações da teoria elementar dos conjuntos;
- Saber os conceitos básicos relacionados à noção de função entre dois conjuntos bem como as operações de composição, inversão e restrição;
- Demonstrar proposições simples envolvendo conjuntos e funções.

Introdução

Iniciamos nosso curso de Análise Real recordando as noções de conjunto e função. Esta aula deve portanto ser vista como uma aula de recapitulação de fatos já aprendidos em cursos anteriores. Vamos aproveitar para introduzir algumas notações que serão utilizadas ao longo de todo curso.

Conjuntos

Admitimos como familiares o conceito (intuitivo) de *conjunto*, significando coleção, família etc., assim como as operações elementares entre conjuntos, nomeadamente, a união $A \cup B$, a interseção $A \cap B$ e a diferença, $A \setminus B$, entre dois conjuntos quaisquer A e B. O conjunto $A \setminus B$ também é chamado o *complementar de B em relação a A*. Lembremos as notações usuais:

$$x \in A, \quad \text{significa que } x \text{ é um elemento ou membro de } A,$$

e

$$A \subset B, \quad \text{significa que todo elemento do conjunto } A \text{ é também um elemento do conjunto } B,$$

ou seja, que o conjunto A é um *subconjunto* do conjunto B. A negação de $x \in A$ se denota por $x \notin A$, que se lê x não pertence a A ou x não é um elemento (ou membro) de A. Outrossim, é importante ressaltar o significado da igualdade entre dois conjuntos:

$$A = B, \quad \text{significa } A \subset B \text{ e } B \subset A,$$

isto é, A e B possuem exatamente os mesmos elementos.

Assim, para provarmos que o conjunto A está contido no conjunto B, isto é, $A \subset B$, devemos provar que para todo x, se $x \in A$, então $x \in B$. Por outro lado, para provarmos que $A = B$, devemos provar que para todo x, se $x \in A$, então $x \in B$ e, reciprocamente, se $x \in B$ então $x \in A$, ou seja, $x \in A$ se e somente se $x \in B$.

Ao longo do curso de Análise Real estaremos sempre lidando com conjuntos que são subconjuntos do conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, cujas propriedades fundamentais serão estudadas de modo sistemático mais adiante. Dentre esses subconjuntos de $\mathbb{R}$, cabe destacar o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros e o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais. De modo um tanto informal, podemos descrever esses conjuntos assim:

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &:= \{1, 2, 3, \cdots\}, \\
\mathbb{Z} &:= \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}, \\
\mathbb{Q} &:= \{r \,:\, r = \frac{p}{q},\ \ p, q \in \mathbb{Z},\ \ q \neq 0\}.
\end{aligned}$$

Aqui usamos a notação := que deve ser lida 'igual, por definição'. Temos, portanto,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Denotamos por $\emptyset$ o *conjunto vazio*, isto é, o conjunto que não possui nenhum elemento. Temos que, para todo conjunto A, $\emptyset \subset A$.

No que segue, usaremos a palavra *proposição* no sentido de *sentença matemática*, que pode ser expressa através de uma fórmula matemática ou uma declaração textual, ou ainda uma combinação dessas duas formas, e que, em geral, poderá depender de uma ou mais variáveis. Como exemplos citamos: $x \in A$ ou $x \in B$; $x > 2$ e $x < 3$; $x \in \mathbb{N}$ e $x = 2k$ para algum $k \in \mathbb{N}$ etc. Usaremos a letra P para denotar uma proposição qualquer e, quando quisermos enfatizar o fato dessa proposição depender de uma variável x, denotaremos $P[x]$.

Grosso modo, as regras para a formação de conjuntos são as seguintes:

1. A descrição explícita dos membros do conjunto na forma de uma lista delimitada à esquerda e à direita pelas chaves { e }, respectivamente. Por exemplo, $\{a, b, c, d\}$, $\{1, 2, 3\}$ etc. Nem sempre é possível descrever um conjunto listando-se seus elementos e por isso frequentemente utilizamos os modos alternativos a seguir.

2. A formação de novos conjuntos a partir de conjuntos já previamente definidos. Em geral, para essa construção usamos uma expressão da forma $\{x : P\}$, que se lê "o conjunto dos x tais que P", onde P é uma proposição envolvendo x e os conjuntos previamente definidos. Por exemplo, se A e B são conjuntos, então podemos definir os seguintes conjuntos:

   (a)
   $$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\},$$
   o membro à direita lê-se: conjunto dos x tal que x pertence a A ou x pertence a B;

   (b)
   $$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\},$$
   o membro à direita lê-se: conjunto dos x tal que x pertence a A e x pertence a B;

   (c)
   $$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\},$$
   o membro à direita lê-se: conjunto dos x tal que x pertence a A e x não pertence a B;

   (d)
   $$A \times B = \{(a, b) : \ a \in A \text{ e } b \in B\},$$
   o membro à esquerda é chamado o produto cartesiano do conjunto A pelo conjunto B e o membro à direita lê-se: conjunto dos pares ordenados (a, b) com a pertencente a A, e b pertencente a B. A rigor, para mantermos o padrão de descrição estabelecido acima, $\{x : P\}$, deveríamos escrever $A \times B = \{x : x = (a, b), \text{ com } a \in A \text{ e } b \in B\}$. A primeira forma, mais concisa, deve ser entendida como uma abreviatura desta última.

(e) Dado o conjunto A, podemos definir o conjunto $\mathcal{P}(A)$, cujos elementos são exatamente todos os subconjuntos de A, incluindo $\emptyset$ e o próprio A. Assim, temos

$$\mathcal{P}(A) = \{x : x \subset A\}.$$

Por exemplo,

$$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}.$$

(f) Um caso particular importante dessa forma de se obter novos conjuntos a partir de conjuntos já previamente definidos é a descrição de um novo conjunto como subconjunto de um conjunto conhecido, através de uma proposição ou fórmula P que deve ser satisfeita por todos os elementos do novo conjunto. Por exemplo, o conjunto $\mathbf{P}$ dos números naturais pares pode ser definido por

$$\mathbf{P} := \{x : x \in \mathbb{N} \text{ e existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } x = 2k\}.$$

A forma geral para a definição de um subconjunto A de um conjunto previamente definido B por meio de uma proposição P é: $\{x : x \in A \text{ e } x \text{ satisfaz } P\}$. Em geral, usa-se de fato a notação mais concisa $\{x \in A : x \text{ satisfaz } P\}$ ou $\{x \in A : P[x]\}$. No caso dos números naturais pares, P é "existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x = 2k$". Assim, na forma concisa, temos

$$\mathbf{P} = \{x \in \mathbb{N} : x = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\}.$$

De modo mais informal e mais conciso ainda, poderíamos escrever também $\mathbf{P} = \{2k : k \in \mathbb{N}\}$. Analogamente, o conjunto $\mathbf{I}$ dos números naturais ímpares é definido por $\mathbf{I} := \{x \in \mathbb{N} : x = 2k - 1, \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\}$, ou ainda $\mathbf{I} = \{2k - 1 : k \in \mathbb{N}\}$.

3. Ainda uma outra forma, muito particular, de definir conjuntos, é através da introdução de um axioma que estabeleça a existência de um conjunto satifazendo determinadas propriedades bem especificadas. Por exemplo, o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ pode ser definido dessa forma, como veremos na próxima aula. O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais também pode ser definido seguindo esse método, chamado *método axiomático*, como veremos mais adiante. É claro que o recurso a esse procedimento envolve uma discussão bastante delicada, de caráter lógico,

sobre a consistência do axioma introduzido com os demais previamente admitidos na teoria; é, portanto, utilizado apenas em casos excepcionais e somente por especialistas muito experientes. Os dois exemplos de (possível) adoção desse procedimento que acabamos de dar, para a construção de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$, pertencem à História da Matemática.

O curso de Análise Real constitui uma ótima oportunidade de se aprender, através de leitura e muitos exercícios, a entender e, principalmente, a produzir as chamadas *demonstrações* ou *provas matemáticas.* A teoria rigorosa do que venha a ser uma autêntica prova matemática pertence ao domínio da Lógica, a qual escapa dos objetivos do presente curso.

No entanto, não é em absoluto necessário um profundo conhecimento de Lógica Matemática para ser capaz de entender e de produzir provas matemáticas. Para tanto, uma introdução elementar como a oferecida pelo curso de Matemática Discreta é mais do que suficiente.

Como um primeiro exemplo de demonstração, vamos agora enunciar e provar as famosas regras de De Morgan da teoria elementar dos conjuntos.

Exemplo 1.1
(*Identidades de De Morgan*) Sejam A, B e C conjuntos. Então valem as igualdades

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \quad \text{e} \quad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Prova: Provemos a primeira igualdade. Para tanto, temos de mostrar que $A \setminus (B \cup C)$ e $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ possuem os mesmos elementos, ou seja, que para um x qualquer, se $x \in A \setminus (B \cup C)$, então $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ e, reciprocamente, se $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, então $x \in A \setminus (B \cup C)$.

Em outras palavras, temos de mostrar que, para qualquer que seja x, vale que $x \in A \setminus (B \cup C)$ se, e somente se, $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Com efeito, suponhamos que $x \in A \setminus (B \cup C)$. Então, $x \in A$ e $x \notin B \cup C$ (por quê?). Assim, vale $x \in A$ e vale $x \notin B$ e $x \notin C$ (por quê?).

Portanto, vale $x \in A$ e $x \notin B$ e vale $x \in A$ e $x \notin C$, ou seja, $x \in A \setminus B$ e $x \in A \setminus C$.

Por conseguinte, $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (por quê?), e assim fica provada a implicação (lembremos que "$p \Rightarrow q$" se lê "se p, então q")

$$x \in A \setminus (B \cup C) \Longrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C),$$

que mostra que

$$A \setminus (B \cup C) \subset (A \setminus B) \cap (A \setminus C). \qquad \text{(por quê?)}$$

Para provar a recíproca, suponhamos que $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Então, $x \in (A \setminus B)$ e $x \in (A \setminus C)$. Segue daí que vale $x \in A$ e $x \notin B$ e vale $x \in A$ e $x \notin C$, isto é, vale $x \in A$ e não vale $x \in B$ ou $x \in C$ (por quê?).

Portanto, vale $x \in A$ e não vale $x \in B \cup C$, isto é, vale $x \in A$ e $x \notin B \cup C$. Segue que $x \in A \setminus (B \cup C)$ e fica provada a implicação recíproca

$$x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \Longrightarrow x \in A \setminus (B \cup C),$$

que mostra que

$$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cup C),$$

e com isto fica provada a primeira igualdade.

A prova da segunda igualdade se faz de maneira inteiramente análoga; mesmo assim vamos fornecê-la para que você vá se habituando com o modo de proceder.

Provemos então inicialmente que se $x \in A \setminus (B \cap C)$, então $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Com efeito, suponhamos que $x \in A \setminus (B \cap C)$.

Então, $x \in A$ e $x \notin B \cap C$, ou seja, vale $x \in A$ e não vale $x \in B$ e $x \in C$.

Assim, vale $x \in A$ e vale $x \notin B$ ou $x \notin C$.

Portanto, ou vale $x \in A$ e $x \notin B$, ou temos $x \in A$ e $x \notin C$, isto é, ou $x \in A \setminus B$ ou $x \in A \setminus C$.

Segue daí que $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, o que prova a implicação

$$x \in A \setminus (B \cap C) \Longrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

que equivale a dizer que

$$A \setminus (B \cap C) \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Para provar a inclusão oposta, suponhamos que $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Então, ou vale $x \in (A \setminus B)$, ou vale $x \in (A \setminus C)$.

No primeiro caso, $x \in A$ e $x \notin B$; no segundo, $x \in A$ e $x \notin C$. Juntando os dois casos, temos que vale $x \in A$ e vale $x \notin B$ ou $x \notin C$, isto é, vale $x \in A$ e não vale $x \in B$ e $x \in C$.

Portanto, vale $x \in A$ e vale $x \notin (B \cap C)$, ou seja, $x \in A \setminus (B \cap C)$, o que prova a implicação recíproca

$$x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \Longrightarrow x \in A \setminus (B \cap C)$$

e, por conseguinte, mostra que também vale a inclusão oposta

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cap C).$$

Isto conclui a demonstração da segunda igualdade. □

A demonstração que acabamos de ver está escrita de um modo bem mais extenso do que o necessário. A razão é que procuramos enfatizar os detalhes de cada passagem sem saltar mesmo os passos mais óbvios. Em geral, no que segue, não perderemos tanto tempo com as inferências mais imediatas, deixando que você mesmo preencha as lacunas francamente mais evidentes.

Num contexto em que todos os conjuntos com os quais se trabalha são subconjuntos de um mesmo conjunto U (por exemplo, no curso de Análise Real, $U = \mathbb{R}$), é costume se usar uma notação mais simples para o complementar de um conjunto qualquer A, contido em U, em relação ao conjunto U (às vezes chamado *conjunto-base* ou *conjunto-universo*). Nesse caso, em vez de $U \setminus A$, denotamos o complementar de A em relação a U simplesmente por A^c. Podemos então tomar como definição $A^c := \{x : x \notin A\}$, omitindo o fato, subentendido, de que $x \in U$.

Exercícios 1.1

1. Prove que $(A^c)^c = A$. De modo mais geral, prove que

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B.$$

2. Dê a demonstração para as seguintes relações básicas envolvendo as operações de união e interseção de conjuntos, descritas abaixo:

1) $A \cup B = B \cup A$
2) $A \cap B = B \cap A$,
3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
5) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

3. Prove as proposições

$$1) \quad A \subset B \text{ e } C \subset D \Longrightarrow A \cup C \subset B \cup D$$
$$2) \quad A \subset B \text{ e } C \subset D \Longrightarrow A \cap C \subset B \cap D.$$

4. As relações 3) e 4) do exercício (2), chamadas propriedades associativas da união e da interseção de conjuntos, respectivamente, permitem que escrevamos simplesmente $A \cup B \cup C$, assim como $A \cap B \cap C$, para denotar a união e a interseção de três conjuntos quaisquer. De modo mais geral, podemos considerar a união e a interseção de um número qualquer, n, de conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$. Nesse caso, é comum usarmos a notação

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k := A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n, \qquad \bigcap_{k=1}^{n} A_k := A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

Mais precisamente, a definição para essas uniões e interseções de n conjuntos seria:

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k := \{x \,:\, x \in A_k, \text{ para algum } k \in \{1, \dots, n\}\,\},$$
$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k := \{x \,:\, x \in A_k, \text{ para todo } k \in \{1, \dots, n\}\,\}.$$

Prove as seguintes generalizações das identidades de De Morgan:

$$1) \quad \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^{n} (A_k)^c,$$
$$2) \quad \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)^c = \bigcup_{k=1}^{n} (A_k)^c,$$

5. Baseando-se no exposto no exercício anterior, dê as definições para $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ e $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ e prove as generalizações correspondentes para as identidades de De Morgan.

Sugestões e Respostas:

À guisa de incentivo, vamos dar um esboço da solução do exercício (1), primeira parte, do exercício (2), item 5, e da primeira parte do exercício (6). Você está convidado a fornecer os detalhes para as soluções a seguir.

Comecemos pelo exercício (1).

Temos $x \in (A^c)^c \Leftrightarrow x \notin A^c \Leftrightarrow$ não é verdade que $x \notin A \Leftrightarrow x \in A$. Assim, concluímos que $x \in (A^c)^c \Leftrightarrow x \in A$, que é o que teríamos que demonstrar (por quê?).

Quanto ao exercício (2), item 5, temos $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ e $x \in B \cup C \Leftrightarrow$ vale $x \in A$ e vale $x \in B$ ou $x \in C \Leftrightarrow$ vale $x \in A$ e $x \in B$ ou vale $x \in A$ e $x \in B$ (por quê?) $\Leftrightarrow$ vale $x \in A \cap B$ ou vale $x \in A \cap C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Assim, concluímos $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, que é o que precisavámos demonstrar.

Finalmente, em relação ao exercício (6), quanto às questões relativas à união dos conjuntos, temos o seguinte. Primeiramente, a definição de $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ é dada, naturalmente, por

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k := \{x \,:\, x \in A_k, \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\}.$$

A identidade de De Morgan (6), item 1, se prova do modo seguinte. Antes de mais nada, lembre que a negação de uma sentença da forma "existe x para o qual vale $P[x]$" ou "para algum x, vale $P[x]$" é dada por "qualquer que seja x, não vale $P[x]$" ou "para todo x, não vale $P[x]$".

Analogamente, a negação de uma sentença da forma "qualquer que seja x, vale $P[x]$" ou "para todo x, vale $P[x]$" é dada por "existe x para o qual não vale $P[x]$" ou "para algum x, não vale $P[x]$".

Apenas por curiosidade, mencionamos que, em símbolos matemáticos, essas afirmações se traduzem por

$$\sim (\exists x)\, P[x] \Leftrightarrow (\forall x) \sim P[x],$$
$$\sim (\forall x)\, P[x] \Leftrightarrow (\exists x) \sim P[x].$$

Aqui, $P[x]$ denota uma proposição ou fórmula dependendo da variável x, e $\sim P$ denota a negação da proposição P.

Passemos à solução do exercício em questão. Temos que $x \in \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c$ $\Leftrightarrow$ não é verdade que $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Leftrightarrow$ não é verdade que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_k \Leftrightarrow$ qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$, $x \notin A_k \Leftrightarrow x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} (A_k)^c$ (por quê?), que é o que precisávamos demonstrar.

Sobre Quantificadores

A propósito da solução do exercício (6), descrita anteriormente, cabe lembrar que os quantificadores $\forall$ ("para todo" ou "qualquer que seja") e $\exists$ ("para algum" ou "existe um") podem aparecer juntos numa mesma sentença aplicados a variáveis distintas. As seguintes sentenças servem de exemplo:

para todo x e para todo y vale $P[x,y]$, $\quad$ $(\,(\forall x)(\forall y)\,P[x,y]\,)$

para todo x existe um y tal que vale $P[x,y]$, $\quad$ $(\,(\forall x)(\exists y)\,P[x,y]\,)$

existe um x tal que para todo y vale $P[x,y]$, $\quad$ $(\,(\exists x)(\forall y)\,P[x,y]\,)$

existe um x e existe um y tal que vale $P[x,y]$, $\quad$ $(\,(\exists x)(\exists y)\,P[x,y]\,)$

Aqui, $P[x,y]$ denota uma fórmula ou proposição dependendo das variáveis x e y. Por exemplo, $P[x,y]$ poderia ser $x^2+y^2=1$, ou $|x-y|<5$, etc.

A negação da primeira das sentenças anteriores seria

existe um x e existe um y tal que não vale $P[x,y]$,

$$(\,(\exists x)(\exists y)\ \sim P[x,y]\,)$$

e a negação da segunda seria

existe um x tal que para todo y não vale $P[x,y]$,

$$(\,(\exists x)(\forall y)\ \sim P[x,y]\,).$$

Você está convidado a fornecer a negação para as outras duas sentenças anteriores.

Uma sentença da forma "qualquer que seja x, se $x \in A$ então vale $P[x]$", que em símbolos matemáticos se escreve

$$(\forall x)\, x \in A \Rightarrow P[x],$$

em geral é expressa na forma contraída "qualquer que seja $x \in A$, vale $P[x]$", que em símbolos matemáticos se escreve

$$(\forall x \in A)\, P[x].$$

Da mesma forma, uma sentença do tipo "existe um x, $x \in A$ e vale $P[x]$", que em símbolos matemáticos se escreve

$$(\exists x)\, x \in A \text{ e } P[x],$$

em geral é expressa na forma contraída "existe um $x \in A$ para o qual vale $P[x]$", que em símbolos matemáticos se escreve

$$(\exists x \in A)\, P[x].$$

Sendo assim, a negação de uma sentença da forma "qualquer que seja $x \in A$, vale $P[x]$" é simplesmente dada por "existe um $x \in A$ para o qual não vale $P[x]$" (lembre-se de que a negação de "se p, então q" é "p e não q") . Em símbolos matemáticos isso se expressa da forma

$$\sim (\forall x \in A)\, P[x] \Leftrightarrow (\exists x \in A) \sim P[x].$$

As mesmas observações se aplicam a sentenças iniciadas por vários quantificadores aplicados a diversas variáveis distintas, sendo uma para cada quantificador. Por exemplo, considere a sentença matemática "para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, se $|x-1| < \delta$ então $|x^2-1| < \varepsilon$", que em símbolos se escreve

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(|x-1| < \delta \Rightarrow |x^2-1| < \varepsilon).$$

A propósito, δ e ϵ são letras gregas chamadas "delta" e "epsilon", respectivamente. A negação desta sentença seria "existe um $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, existe um $x \in \mathbb{R}$ para o qual $|x-1| < \delta$ e $|x^2-1| \geq \varepsilon$. Em símbolos teríamos

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathbb{R})(|x-1| < \delta \text{ e } |x^2-1| \geq \varepsilon).$$

Como ficaria a negação da sentença matemática "qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n > N_0$, então $\frac{1}{n} < \varepsilon$"? Você saberia escrever esta sentença, assim como a sua negação, em símbolos matemáticos?

Sobre letras gregas

Por tradição ou pelas necessidades da notação, é habitual em cursos de matemática mais avançados, incluindo o de Análise Real, o uso de letras do alfabeto grego, além das do alfabeto latino. Acima, introduzimos duas delas, δ (delta) e ε (epsilon) que reaparecerão com muita frequência ao longo do curso. Outras letras gregas que também poderão aparecer são as seguintes:

- α (alpha), lê-se "alfa";

- β (beta), lê-se “beta”;
- γ (gamma), lê-se “gama”;
- Γ (Gamma), lê-se “gama maiúsculo”;
- Δ (Delta), lê-se “delta maiúsculo”;
- η (eta), lê-se “eta”;
- ϕ (phi, de imprensa), lê-se “fi”;
- φ (phi, cursivo), lê-se “fi”;
- ψ (psi), lê-se “psi”;
- κ (kappa), lê-se “capa”;
- λ (lambda), lê-se “lambda”;
- μ (mu), lê-se “mu”;
- ν (nu), lê-se “nu”;
- ω (omega), lê-se “ômega”;
- Ω (Omega), lê-se “ômega maiúsculo”;
- π (pi), lê-se “pi”;
- Π (Pi), lê-se “pi maiúsculo”;
- ρ (rho), lê-se “rô”;
- σ (sigma), lê-se “sigma”;
- Σ (Sigma), lê-se “sigma maiúsculo” (utilizado como símbolo para somatório);
- τ (tau), lê-se “tau”;
- ξ (xi), lê-se “csi”;
- ζ (zeta), lê-se “zeta”.

Funções

Uma função f de um conjunto A num conjunto B, que denotamos $f : A \to B$, é uma regra de correspondência que a cada $x \in A$ associa um único elemento $y \in B$, que denotamos por $f(x)$. Costuma-se representar pictoricamente uma função genérica como na figura **1.1**.

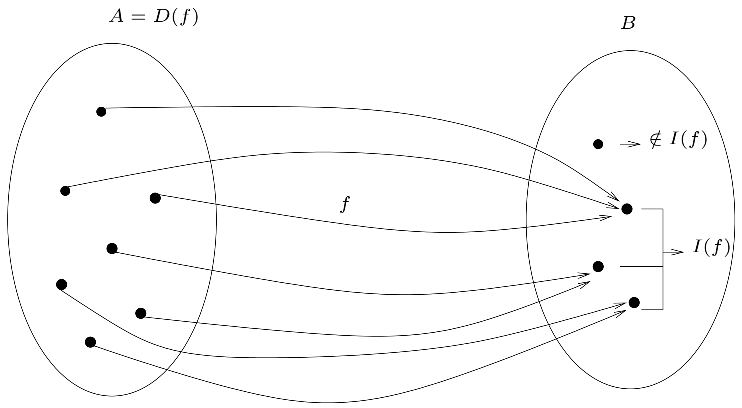


Figura 1.1: Função $f : A \to B$.

Assim, uma função $f : A \to B$ determina um subconjunto em $A \times B$, chamado o gráfico de f, que também denotaremos por f, com a propriedade que, para todo $x \in A$, existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$ e denotamos $y = f(x)$. Em particular, se $(x, y) \in f$ e $(x, y') \in f$, então $y = y' = f(x)$.

A expressão "regra de correspondência" utilizada na definição de função dada acima, embora bastante intuitiva, carece de uma formulação matemática mais precisa.

A maneira de expressar essa noção intuitiva de um modo matematicamente rigoroso é fornecida pelo gráfico $f \subset A \times B$. Assim, podemos definir, de modo matemático preciso, uma função como sendo o seu gráfico.

Mais claramente, temos a seguinte definição.

Definição 1.1
Uma função f de um conjunto A num conjunto B é um subconjunto de $A \times B$ com a propriedade que, para todo $x \in A$, existe um e somente um $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$, e denotamos $y = f(x)$.

O *domínio* da função $f : A \to B$, denotado por $D(f)$, é o conjunto A. Assim, $D(f) = A$. O conjunto B é algumas vezes chamado *contra-domínio* da função f. Chamamos *imagem* de f, e denotamos $I(f)$, o subconjunto de

B constituído pelos valores $f(x)$, com $x \in A$. Assim temos,

$$I(f) = \{y \in B : \text{ existe } x \in A \text{ tal que } y = f(x)\}.$$

Dado um subconjunto $X \subset A$, definimos a *imagem de X pela função $f : A \to B$*, denotada por $f(X)$, por

$$f(X) = \{y \in B : \text{ existe } x \in X \text{ tal que } y = f(x)\}.$$

Em particular, $I(f) = f(A)$ e, para todo $X \subset A$, temos $f(X) \subset B$. O conjunto $f(X)$ também é chamado *imagem direta do conjunto X por f*.

Em geral, teremos $I(f) \subsetneq B$, onde a notação $E \subsetneq F$ significa que E está estritamente ou propriamente contido em F, ou seja, E está contido em F mas existe pelo menos um elemento de F que não é membro de E.

Dado um subconjunto $Y \subset B$, definimos a *pré-imagem (ou imagem inversa) de Y pela função f*, denotada por $f^{-1}(Y)$, por

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}.$$

Exemplo 1.2
A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ tem domínio $D(f) = \mathbb{R}$ e imagem $I(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Neste caso, temos $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ e $I(f) \subsetneq B = \mathbb{R}$. A imagem do intervalo $[-2, 2]$ é o intervalo $[0, 4]$. Assim, $f([-2, 2]) = [0, 4]$, como você mesmo pode verificar desenhando uma porção adequada do gráfico de f.

Exemplo 1.3
Sejam E, H subconjuntos de A e f uma função de A em B. Provemos a identidade

$$f(E \cup H) = f(E) \cup f(H).$$

Com efeito, temos que $y \in f(E \cup H) \Leftrightarrow y = f(x)$ para algum $x \in E \cup H \Leftrightarrow y = f(x)$ para algum $x \in E$ ou $y = f(x)$ para algum $x \in H \Leftrightarrow y \in f(E)$ ou $y \in f(H) \Leftrightarrow y \in f(E) \cup f(H)$.

Exemplo 1.4
Você seria capaz de demonstrar a validade da relação

$$f(E \cap H) \subset f(E) \cap f(H) \quad ?$$

Observe que para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$, $E = [-2, 0]$, $H = [1, 2]$, temos $f(E) \cap f(H) = [1, 4]$ e $f(E \cap H) = f(\emptyset) = \emptyset$. Portanto, é possível acontecer que $f(E \cap H) \subsetneq f(E) \cap f(H)$.

Exemplo 1.5
Dada uma função $f : A \to B$ e conjuntos $C, D \subset B$, pedimos a você que demonstre a validade das relações:

1. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$,

2. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Portanto, a operação de tomada da pré-imagem de subconjuntos do contra-domínio se comporta bem tanto em relação à união quanto em relação à interseção.

Definição 1.2
Dizemos que uma função $f : A \to B$ é *injetiva*, ou que f é uma *injeção*, se, para quaisquer $x_1, x_2 \in A$, com $x_1 \neq x_2$, vale $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Dizemos que f é *sobrejetiva*, ou que f é uma *sobrejeção* de A sobre B, se $I(f) = B$, isto é, se para todo $y \in B$ existe ao menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Se $f : A \to B$ é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva, dizemos que f é *bijetiva* ou que f é uma *bijeção de A sobre B*.

Assim, para provar que uma função $f : A \to B$ é injetiva, devemos mostrar que a hipótese de que $f(x_1) = f(x_2)$, com $x_1, x_2 \in A$, leva à conclusão que $x_1 = x_2$.

Exemplo 1.6
Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x/(x-2)$. Então f é injetiva. Com efeito, se $f(x_1) = f(x_2)$, com $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, então $x_1/(x_1-2) = x_2/(x_2-2)$, de onde segue, multiplicando-se ambos os membros por $(x_1-2)(x_2-2)$, que $x_1(x_2-2) = x_2(x_1-2)$. Daí temos, $x_1x_2 - 2x_1 = x_2x_1 - 2x_2$, ou seja, $-2x_1 = -2x_2$, de onde se conclui que $x_1 = x_2$.

Definição 1.3 (Composição de funções)
Dada uma função $f : A \to B$ e uma função $g : B \to C$, definimos a *função composta* $g \circ f : A \to C$ pondo, para todo $x \in A$, $g \circ f(x) = g(f(x))$. Observe que só é possível definir a função composta $g \circ f$ quando $I(f) \subset D(g)$!

Exemplo 1.7
Seja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \sqrt{x}$, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = x^2 - 1$. Então podemos definir $g \circ f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ que, para $x \in [0, \infty)$, é dada por $g \circ f(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 1 = (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1$. Observe

que, embora a expressão $x - 1$ esteja bem definida para qualquer $x \in \mathbb{R}$, o domínio da função $g \circ f$ é o intervalo $[0, \infty)$, já que f não está definida em $(-\infty, 0)$.

Exemplo 1.8
Se f e g são as funções definidas no exemplo anterior, então não é possível definir a composta $f \circ g$ já que $I(g) \not\subset D(f)$. No entanto, se $h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ é definida por $h(x) = x^2 - 1$ (observe que h e g são definidas pela mesma fórmula mas $D(h) \neq D(g)$), então podemos definir $f \circ h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ que é dada por $f \circ h(x) = f(h(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$, que está bem definido para $x \in [-1, 1]$.

No exemplo que acabamos de dar, vemos uma situação em que é interessante considerar a restrição de uma determinada função (g, no referido exemplo) a um subconjunto do seu domínio ($[-1, 1]$ e $\mathbb{R}$, respectivamente, no exemplo mencionado).

Em outras circunstâncias, torna-se interessante considerar a restrição de uma determinada função não injetiva a um intervalo onde a mesma é injetiva, como no caso da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = \cos(x)$, que restrita ao intervalo $[0, \pi]$ se torna injetiva. Esses fatos motivam a definição a seguir.

Definição 1.4
Dada a função $f : A \to B$ e $E \subset A$, definimos a *restrição* de f a E, denotada por $f|E$, como a função de E em B definida por $f|E(x) = f(x)$, para todo $x \in E$.

Quando $f : A \to B$ é uma bijeção, é possível definir uma função $g : B \to A$ tal que $g \circ f(x) = x$, para todo $x \in A$. A função g que satisfaz essa propriedade é chamada a *função inversa* de f e denotada por f^{-1}. Podemos definir a inversa de uma bijeção $f : A \to B$ de modo mais preciso recorrendo ao gráfico de f.

Definição 1.5
Seja $f : A \to B$ uma bijeção, isto é, para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$ e para todo $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$. Definimos a *função inversa* de f, que denotamos $f^{-1} : B \to A$, por

$$f^{-1} := \{(y, x) \in B \times A \, : \, (x, y) \in f\}.$$

Exemplo 1.9
A função $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ dada por $f(x) = 2x/(x-3)$ é bijetiva (prove!). Sua inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$ é dada por $f^{-1}(y) = 3y/(y - 2)$. Basta

verificar que, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, temos $3f(x)/(f(x)-2) = x$. De fato, temos

$$\frac{3f(x)}{f(x)-2} = \frac{3\frac{2x}{x-3}}{\frac{2x}{x-3}-2} = \frac{\frac{6x}{x-3}}{\frac{2x-2(x-3)}{x-3}} = \frac{\frac{6x}{x-3}}{\frac{2x-2x+6}{x-3}} = \frac{6x}{x-3}\frac{x-3}{6} = x.$$

A fórmula $f^{-1}(y) = 3y/(y-2)$ é facilmente obtida escrevendo-se $y = 2x/(x-3)$ e, a partir dessa equação, determinando-se x como função de y. Assim, multiplicando-se ambos os lados da equação $y = 2x/(x-3)$ por $(x-3)$, obtemos $y(x-3) = 2x$, ou seja, $yx - 3y = 2x$, e daí, somando-se $3y - 2x$ a ambos os membros da última equação, segue que $yx - 2x = 3y$, isto é, $x(y-2) = 3y$, donde se conclui que $x = 3y/(y-2)$.

O resultado seguinte fornece uma fórmula para a pré-imagem de um conjunto pela função composta de duas funções.

Teorema 1.1
Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções e seja H um subconjunto de C. Então temos

$$(g \circ f)^{-1}(H) = f^{-1}(g^{-1}(H)).$$

Prova: A prova ficará como um ótimo exercício que você não deve deixar de fazer (veja, exercício 11 a seguir). Observe a troca na ordem das funções. □

Exercícios 1.2

1. Seja $f(x) := 1/x^2$, $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Determine a imagem direta $f(E)$ onde $E := \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\}$.

   (b) Determine a imagem inversa $f^{-1}(G)$ onde $G := \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 4\}$.

2. Seja $g(x) := x^2$ e $f(x) := x + 2$ para $x \in \mathbb{R}$, e seja h a função composta $h := g \circ f$.

   (a) Encontre a imagem direta $h(E)$ de $E := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$.

   (b) Encontre a imagem inversa $h^{-1}(G)$ de $G := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 4\}$.

3. Seja $f(x) = x^2$ para $x \in \mathbb{R}$, e seja $E := \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 0\}$ e $F := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$. Encontre os conjuntos $E \setminus F$ e $f(E) \setminus f(F)$ e mostre que *não* é verdade que $f(E \setminus F) \subset f(E) \setminus f(F)$.

4. Mostre que a função f definida por $f(x) := x/\sqrt{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$, é uma bijeção de $\mathbb{R}$ sobre $\{y : -1 < y < 1\}$.

5. Para $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, dê um exemplo explícito de uma bijeção de $A := \{x : a < x < b\}$ sobre $B := \{y : 0 < y < 1\}$.

6. Dê um exemplo de duas funções f, g de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$ tais que $f \neq g$ e vale:

   (a) $f \circ g \neq g \circ f$;

   (b) $f \circ g = g \circ f$.

7. (a) Mostre que se $f : A \to B$ é injetiva e $E \subset A$, então $f^{-1}(f(E)) = E$. Dê um exemplo para mostrar que a igualdade não precisa ser válida se f não é injetiva.

   (b) Mostre que se $f : A \to B$ é sobrejetiva e $H \subset B$, então $f(f^{-1}(H)) = H$. Dê um exemplo para mostrar que a igualdade não precisa valer se f não é sobrejetiva.

8. Mostre que se f é uma bijeção de A sobre B, então f^{-1} é uma bijeção de B sobre A.

9. Prove que se $f : A \to B$ é bijetiva e $g : B \to C$ é bijetiva, então a composta $g \circ f$ é uma bijeção de A sobre C.

10. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções.

    (a) Mostre que se $g \circ f$ é injetiva então f é injetiva.

    (b) Mostre que se $g \circ f$ é sobrejetiva, então g é sobrejetiva.

11. Prove o Teorema 1.1.

Prossiga: Nota sobre a Teoria dos Conjuntos

Um dos grandes feitos da Matemática do final do século XIX e início do século XX foi a fundamentação lógica rigorosa para a teoria dos conjuntos, isto é, a formulação de um sistema de axiomas a partir dos quais se tornou possível desenvolver, de modo aparentemente consistente, toda a teoria dos conjuntos.

Uma das sérias dificuldades encontradas na realização de tal obra residiu na própria definição do que venha a ser um conjunto, a qual se mostrou necessária. O fato é que qualquer tentativa de se deixar completamente a cargo da intuição o conceito de conjunto, ou de se dar a esta entidade uma definição simples, próxima da intuição, esbarra invariavelmente no risco de dar origem imediata ao surgimento de paradoxos. Isto ficou demonstrado claramente pelo filósofo e matemático inglês Bertrand Russel (1872-1970), em 1902, ao comentar a forma livre como o conceito havia sido deixado por outro grande filósofo-matemático da época, o alemão Gottlob Frege (1848-1925), numa obra importante sobre os fundamentos da aritmética, publicada havia pouco tempo.

Em resumo, a forma proposta por Frege admitia a possibilidade de se definir um conjunto R através da proposição: "R é o conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmo". Em notação matemática, essa definição se escreveria $R := \{x : x \notin x\}$. O resultado de tal especificação para R é a conclusão paradoxal de que $R \in R$ se e somente se $R \notin R$.

Para evitar situações semelhantes, entre outras providências, grandes matemáticos da época, dentre os quais citamos, em especial, David Hilbert (1862-1943), concluíram ser necessária a distinção entre o que se pode chamar *classe* ou coleção, que em geral não se define, deixando-se como uma noção meramente intuitiva, e o conceito de *conjunto*, que passou a ser definido rigorosamente como qualquer classe que pertença a uma outra classe. Assim, por definição, a classe x é um conjunto se, e somente se, existe uma classe y tal que $x \in y$.

Além disso, outra medida que se mostrou conveniente, nesse sentido, foi a introdução de um axioma-esquema (isto é, um esquema de formação de axiomas) que, grosso modo, estabelece que é sempre verdade uma afirmação da forma

$$\forall y,\ y \in \{x : P[x]\} \textit{ se e somente se } y \textit{ é um conjunto e } P[y].$$

Lembre-se de que o símbolo "$\forall$" significa "para todo" ou "qualquer que seja". Aqui, $P[y]$ denota a fórmula obtida substituindo-se em $P[x]$ toda ocorrência da letra x pela letra y. Por exemplo, se $P[x]$ é a fórmula $x \notin x$, então $P[R]$ é a expressão $R \notin R$. O fato nada óbvio no axioma acima é o aparecimento da sentença "*y é um conjunto*", cuja importância pode se constatar a partir da própria classe R, proposta por Russel, mencionada acima, como explicamos a seguir.

De fato, esse axioma-esquema implica, em particular, que $R \in R(= \{x : x \notin x\})$ se e somente se R é um conjunto e $R \notin R$. Desta equivalência resulta simplesmente que R *não* é um conjunto, já que, do contrário, valeria $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$ o que é impossível. Assim, conclui-se que a classe R não é um conjunto e o paradoxo de Russel deixa de existir. Apenas a título de curiosidade, mencionamos que o fato de que R não é um conjunto também decorre de um outro axioma da teoria dos conjuntos, chamado axioma da regularidade, cujo enunciado omitiremos por ser muito técnico, do qual decorre diretamente o fato de que, para toda classe x, vale que $x \notin x$, o qual é, na verdade, uma das principais razões para a introdução de tal axioma. Portanto, pelo mencionado axioma da regularidade, R coincide com a coleção de todas as classes e, em particular, não pertence a nenhuma outra classe.

Essas e outras providências, nos fundamentos da teoria dos conjuntos, eliminaram paradoxos mais evidentes como o de Russel e, a bem da verdade, até os dias de hoje, não se tem notícias de descoberta de paradoxos na teoria. Contudo, isto não significa que a possibilidade de que algum paradoxo venha a ser encontrado no futuro esteja definitivamente descartada ... Um tal achado não seria nem um pouco bem-vindo já que a teoria dos conjuntos serve de base para todas as demais teorias da Matemática.

A propósito, gostaríamos de mencionar brevemente aqui um fato absolutamente surpreendente provado pelo genial matemático austríaco Kurt Goedel (1906-1978), num célebre artigo publicado em 1931, quando tinha apenas 25 anos (!). Goedel provou que um sistema de axiomas qualquer, que possibilite a construção dos números naturais com suas propriedades usuais, e que não admita contradições (isto é, não contenha proposição que seja verdadeira juntamente com sua negação), dará sempre origem a proposições cujo valor-verdade não é possível de ser determinado. Isto é, haverá sempre alguma proposição cuja validade ou falsidade não se pode provar com um número finito de passos, partindo dos axiomas do sistema. Esse resultado de Goedel foi, sem dúvida, um marco fundamental da Matemática do século XX.

Aula 2 – Os Números Naturais e o Princípio da Indução

Metas da aula: Apresentar os números naturais e suas propriedades básicas. Apresentar o Princípio da Indução Matemática e algumas de suas aplicações.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber a definição dos números naturais através dos axiomas de Peano, bem como o seu uso na demonstração das propriedades elementares das operações com esses números;
- Saber usar o Princípio da Indução Matemática na demonstração de proposições elementares envolvendo os números naturais.

Introdução

Nesta aula vamos estudar o conjunto dos números naturais que é a base fundamental para a construção do conjunto dos números reais. Vamos aprender o Princípio da Indução Matemática que é um instrumento fundamental para a demonstração de proposições sobre os números naturais e será utilizado frequentemente ao longo de todo o curso.

Os números naturais

O conjunto dos números naturais, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, é definido a partir dos seguintes axiomas:

1. $\mathbb{N}$ possui um elemento que denotamos por 1; isto é, postula-se que $1 \in \mathbb{N}$.
2. Existe uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfazendo:
   (a) s é *injetiva*, isto é, dados $j, k \in \mathbb{N}$, $s(j) = s(k)$ se e somente se $j = k$;
   (b) $s(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

   Para cada número natural k, $s(k)$ é chamado sucessor de k e denota-se $s(k) = k + 1$. Portanto, (b) afirma que 1 é o único elemento de $\mathbb{N}$ que não é sucessor de nenhum outro número natural.

3. Se $A \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in A$ e $s(A) \subset A$, isto é, $k \in A$ implica $k+1 \in A$, então $A = \mathbb{N}$.

Os 3 axiomas acima são conhecidos como *Axiomas de Peano* em homenagem ao matemático italiano Giuseppe Peano (1858 - 1932), criador, entre outras coisas, da lógica simbólica, que foi quem primeiro os formulou. O terceiro axioma é conhecido como *Princípio da Indução Matemática*. Ele pode ser traduzido para o seguinte enunciado mais diretamente utilizado nas aplicações.

Teorema 2.1 (Princípio da Indução Matemática)
Seja P uma proposição acerca dos números naturais. Suponhamos que P seja tal que:

1. $P[1]$ vale, isto é, 1 verifica a proposição P;

2. Se $P[k]$ vale, então vale $P[k+1]$, isto é, se k verifica a proposição P, então seu sucessor $k+1$ também a verifica.

Então, P é válida para todos os números naturais.

Prova: Denotemos por A o conjunto dos números naturais satisfazendo P. Então, por hipótese, temos $1 \in A$; e se $k \in A$ então $k+1 \in A$. Pelo terceiro axioma de Peano temos que $A = \mathbb{N}$, que é o que teríamos que demonstrar.□

As provas matemáticas em que se aplica o Teorema 2.1 são chamadas *provas por indução*. Em 2, no enunciado do Teorema 2.1, a hipótese de que $P[k]$ é válida é chamada *hipótese de indução*. Como primeiro exemplo de prova por indução, vamos demonstrar que, para todo $k \in \mathbb{N}$, vale $s(k) \neq k$. Neste caso, a propriedade $P[k]$ é $s(k) \neq k$. Com efeito, $1 \neq s(1)$, pois 1 não é sucessor de nenhum número natural; em particular, 1 não é sucessor de si próprio. Logo vale $P[1]$. Além disso, se, para um certo $k \in \mathbb{N}$, vale $s(k) \neq k$, então, pela injetividade da função s, $s(s(k)) \neq s(k)$, isto é, $s(k+1) \neq k+1$, e, portanto, vale $P[k+1]$, o que conclui a prova por indução de que $s(k) \neq k$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{1\}$ é uma bijeção, existe a sua função inversa $s^{-1} : \mathbb{N} \setminus \{1\} \to \mathbb{N}$ que a cada $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ associa o número $s^{-1}(k)$ cujo sucessor é k. Denotamos $s^{-1}(k) = k - 1$, para $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

O terceiro axioma de Peano implica, em particular, que todos os números naturais podem ser obtidos a partir de 1 tomando-se reiteradamente sem cessar (começando-se pelo próprio 1) a aplicação sucessor s que também denotamos $\cdot + 1$, obtendo sucessivamente $1+1$, $1+1+1$, $1+1+1+1$ etc. Os nomes e as notações para a seqüência de sucessores de 1 no sistema decimal usual são bastante familiares a todos nós:

$$\begin{aligned}
&2 := 1+1,\\
&3 := 1+1+1,\\
&4 := 1+1+1+1,\\
&5 := 1+1+1+1+1,\\
&6 := 1+1+1+1+1+1,\\
&7 := 1+1+1+1+1+1+1,\\
&8 := 1+1+1+1+1+1+1+1,\\
&9 := 1+1+1+1+1+1+1+1+1,\\
&10 := 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

A adição de números naturais

Por meio da aplicação $\cdot + 1$ podemos facilmente definir a operação de adição ou soma de dois números naturais quaisquer. Intuitivamente, podemos estabelecer que a soma do natural j com o natural k é obtida aplicando-se k vezes a transformação $\cdot + 1$ a j, isto é,

$$j + k = j \underbrace{+1+1+\cdots+1}_{k \text{ vezes}}. \tag{2.1}$$

A rigor, a definição de soma de dois números naturais que acabamos de dar está imprecisa do ponto de vista lógico, já que recorremos à expressão "k vezes" cujo significado matemático ainda não foi definido. O procedimento mais correto é definir essa operação "passo a passo" fazendo uso do princípio da indução. Assim, primeiro definimos

$$j + 1 := s(j), \tag{2.2}$$

o que está de acordo com a notação $j+1$ que adotamos para o sucessor de j, $s(j)$. Uma vez que já temos a definicão de $j+k$ para $k=1$, podemos definir recursivamente

$$j + (k+1) := (j+k) + 1. \tag{2.3}$$

Isto significa que se já tivermos definido, para um certo $k \in \mathbb{N}$, quem é $j + k$, resultará também imediatamente definido, através de (2.3), quem é $j+(k+1)$. Chama-se esse procedimento de definição por indução (indutiva) ou definição por recorrência (recursiva).

Usando o Princípio da Indução podemos provar que a operação de adição de números naturais definida acima tem as propriedades de *associatividade*, *comutatividade* e a *lei do corte*. Mais especificamente, para todos $j, k, l \in \mathbb{N}$, valem:

1. $(j + k) + l = j + (k + l)$; (associatividade)
2. $j + k = k + j$; (comutatividade)
3. se $j + l = k + l$, então $j = k$. (lei do corte)

Por exemplo, para provar a associatividade basta uma simples indução em $l \in \mathbb{N}$. Para $l = 1$ a propriedade decorre diretamente de (2.3). Supondo a propriedade válida para um certo $l \in \mathbb{N}$, temos $(j+k)+(l+1) = ((j+k)+l)+1$ (por (2.3)) e $((j+k)+l)+1 = (j+(k+l))+1$ (pois vale $P[l]$) e, de novo por (2.3), $(j + (k + l)) + 1 = j + ((k + l) + 1) = j + (k + (l + 1))$, onde na última igualdade usamos $P[1]$. Logo, se vale $(j + k) + l = j + (k + l)$, vale também $(j + k) + (l + 1) = j + (k + (l + 1))$, o que conclui a prova por indução da associatividade da adição.

Para provar a propriedade da comutatividade, provamos primeiro que, para todo $j \in \mathbb{N}$, vale $j + 1 = 1 + j$, fazendo indução em j. Para $j = 1$ a igualdade é trivial. Supondo que vale para um certo $j \in \mathbb{N}$, prova-se facilmente que vale para $j + 1$, usando-se a definição de adição e a hipótese de indução, $P[j]$. Em seguida, fixando $j \in \mathbb{N}$ arbitrário, fazemos uma nova indução em $k \in \mathbb{N}$ para provar que $j + k = k + j$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Você certamente será capaz de dar agora os detalhes da demonstração da propriedade da comutatividade.

Finalmente, a prova da lei do corte também decorre de uma indução simples em $l \in \mathbb{N}$. Com efeito, fixados $j, k \in \mathbb{N}$, arbitrários, se tivermos $j + 1 = k + 1$ então, decorre da injetividade da função s que $j = k$ e, portanto, vale $P[1]$. Supondo que valha $P[l]$, para um certo $l \in \mathbb{N}$, isto é, que $j+l = k+l \Rightarrow j = k$, temos $j+(l+1) = k+(l+l) \Rightarrow (j+l)+1 = (k+l)+1$ (pela associatividade) e, como vale $P[1]$, $(j + l) + 1 = (k + l) + 1 \Rightarrow j + l = k + l \Rightarrow j = k$, onde a última implicação é a hipótese de indução $P[l]$. Logo temos que se vale $P[l]$ vale $P[l + 1]$, o que conclui a prova por indução da lei do corte para a adição de números naturais.

$\square$

A propriedade da associatividade nos permite escrever simplesmente $j + k + l$ em lugar de $(j + k) + l$ ou $j + (k + l)$.

A ordem entre os números naturais

O resultado seguinte exibe uma propriedade da adição dos números naturais que dá origem à noção de ordem usual entre os mesmos.

Teorema 2.2
Dados dois números naturais quaisquer, m e n, uma, e somente uma, das possibilidades abaixo é válida:

1. $m = n$;
2. Existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $m + d = n$;
3. Existe $d' \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + d'$.

Prova: Se um dos dois números, m ou n, é igual a 1, digamos $m = 1$, então a terceira possibilidade é vazia, já que se tivermos $1 = n + d'$, para certos $n, d' \in \mathbb{N}$, então 1 seria sucessor de $n + (d' - 1)$, ou de n, caso $d' = 1$, o que é impossível.

Além disso, vemos que se $m = 1$, então as duas primeiras possibilidades são mutuamente excludentes, isto é, no máximo uma delas ocorre, já que se $1 = n$, então não pode valer $1 + d = n$, para nenhum $d \in \mathbb{N}$, pois neste caso 1 seria sucessor de d o que é impossível.

Agora, supondo que para um $m \in \mathbb{N}$ qualquer, fixado, as três possibilidades acima são mutuamente excludentes, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$ (essa é a hiótese de indução $P[m]$), podemos provar que o mesmo deve valer quando tomamos $m + 1$ em lugar de m.

Com efeito, para isso supomos por absurdo que duas delas ocorram simultaneamente, usamos a associatividade da adição e/ou a lei do corte, para provar que isso implicaria a negação da hipótese de indução $P[m]$, chegando assim a uma contradição. Concluímos então que vale $P[m + 1]$, o que prova que as possibilidades 1, 2 e 3 do enunciado são sempre mutuamente excludentes.

Para concluir a prova do teorema devemos provar que uma dessas possibilidades sempre ocorre. Para tanto, dado um $n \in \mathbb{N}$ arbitrário, definimos o conjunto $X(n)$ por

$$X(n) = X^-(n) \cup \{n\} \cup X^+(n),$$

com

$$X^-(n) = \{m \in \mathbb{N} \,:\, m + d = n, \text{ para algum } d \in \mathbb{N}\},$$
$$X^+(n) = \{m \in \mathbb{N} \,:\, m = n + d', \text{ para algum } d' \in \mathbb{N}\}.$$

Observe que, pelo que ficou provado acima, a interseção de quaisquer dois entre os três conjuntos, $X^-(n)$, $\{n\}$ e $X^+(n)$, é vazia. O objetivo então é mostrar que $X(n) = \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Provamos primeiro que $X(1) = \mathbb{N}$. Neste caso, como observado acima, temos $X^-(1) = \emptyset$. Claramente, temos $1 \in X(1)$. Além disso, supondo $k \in X(1)$, para um certo $k \in \mathbb{N}$, provamos que $k + 1 \in X(1)$. Com efeito, se $k \in X(1)$ então, ou $k = 1$, e nesse caso $k+1 \in X^+(1)$, ou $k \in X^+(1)$, e nesse caso $k = 1+d'$, para algum $d' \in \mathbb{N}$. No último caso, temos $k+1 = (1+d')+1 =$(pela associatividade)$= 1+(d'+1)$, e assim fica provado que $k \in X(1) \Rightarrow k + 1 \in X(1)$. Pelo terceiro axioma de Peano (Princípio da Indução) segue que $X(1) = \mathbb{N}$. A prova de que $X(n) = \mathbb{N}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, decorrerá novamente do Princípio da Indução se mostrarmos que $X(k) = \mathbb{N} \Rightarrow X(k+1) = \mathbb{N}$. Deixamos isso como exercício para você fazer. $\square$

Definição 2.1

Dizemos que o natural m é menor que o natural n, ou que n é maior que n, e denotamos $m < n$, se existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $m + d = n$. A notação $n > m$ equivale a $m < n$ e a notação $m \leq n$ significa $m < n$ ou $m = n$. Se $m < n$, o número natural d tal que $m + d = n$ é denotado $n - m$. Observe que essa notação é coerente com a notação $n - 1$ para o antecessor de n.

A relação $<$ tem as propriedades:

1. Se $m < n$ e $n < p$ então $m < p$; (transitividade)
2. Se $m < n$ e $p \in \mathbb{N}$ então $m + p < n + p$; (monotonicidade)
3. Dados dois números quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ vale uma, e somente uma, das seguintes possibilidades: ou $m < n$, ou $m = n$, ou $n < m$. (tricotomia)

A terceira propriedade é o próprio Teorema 2.2 reescrito de forma distinta. A primeira e a segunda propriedade decorrem diretamente da definição de $<$.

Com efeito, se $m < n$ e $n < p$ então existem d_1 e d_2 tais que $m+d_1 = n$ e $n + d_2 = p$. Decorre daí que $(m + d_1) + d_2 = p$, isto é, $m + (d_1 + d_2) = p$ e, portanto, $m < p$. Quanto à segunda, se $m < n$, então $m+d = n$, para algum $d \in \mathbb{N}$, assim $n + p = (m + d) + p = (m + p) + d$ e, portanto, $m + p < n + p$. □

O seguinte resultado é uma conseqüência imediata do Teorema 2.1.

Teorema 2.3 (Princípio da Indução Matemática (segunda versão)) Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ e seja $P[n]$ uma proposição acerca dos números naturais $n \geq n_0$. Suponhamos que:

1. A proposição $P[n_0]$ é verdadeira;
2. Para todo $k \geq n_0$, a proposição $P[k]$ implica $P[k + 1]$.

Então, $P[n]$ é válida para todo $n \geq n_0$.

Prova: Se $n_0 = 1$, então o enunciado acima é o próprio Teorema 2.1. Se $n_0 > 1$, então, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos a proposição $Q[k] = P[(n_0 - 1) + k]$.

Então, a hipótese 1 do enunciado afirma que vale $Q[1]$, ao passo que a hipótese 2 afirma que $Q[k]$ implica $Q[k+1]$. Pelo Teorema 2.1 segue que vale $Q[k]$, para todo $k \in \mathbb{N}$, isto é, vale $P[n]$ para todo $n \geq n_0$. □

O produto de números naturais

O produto de dois números naturais, $m \cdot n$, $m, n \in \mathbb{N}$, pode ser definido recursivamente, como já foi feito para a adição, da seguinte forma:

$$m \cdot 1 = m,$$
$$m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m.$$

As duas linhas acima constituem o modo rigoroso de expressar a definição informal bastante conhecida:

$$m \cdot n := \underbrace{m + m + \cdots + m}_{n \text{ vezes}}.$$

No que segue, frequentemente, denotaremos $m{\cdot}n$ simplesmente por mn, como é usual.

Usando o Princípio da Indução, como fizemos para o caso da adição, podemos provar as seguintes propriedades bem conhecidas satisfeitas pelo produto de números naturais. Deixamos a você, como exercício, a demonstração de tais propriedades. Para todos $m, n, p \in \mathbb{N}$ temos:

1. $(mn)p = m(np)$; (associatividade)
2. $mn = nm$; (comutatividade)
3. Se $mn = mp$ então $n = p$; (lei do corte)
4. Se $m < n$ então $mp < np$; (monotonicidade)
5. $m(n + p) = mn + mp$. (distributividade)

Dado qualquer $m \in \mathbb{N}$, definimos m^k, para todo $k \in \mathbb{N}$, estabelecendo que $m^1 = m$ e $m^{k+1} = m \cdot m^k$. Analogamente, o fatorial de um número natural n é definido indutivamente pondo-se $1! = 1$ e $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$. Expresso de modo menos formal, temos

$$m^k = \underbrace{m \cdot m \cdots m}_{k \text{ vezes}}, \quad n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1.$$

O Princípio da Boa Ordenação

Dado um conjunto $A \subset \mathbb{N}$, dizemos que m_0 é o *menor elemento de* A, ou é o *elemento mínimo de* A, se $m_0 \leq m$, para todo $m \in A$. É imediato verificar que o elemento mínimo, quando existe, é único. Com efeito, se m_0 e m_1 são dois elementos mínimos de A, então $m_0 \leq m_1$, pois m_0 é mínimo, e $m_1 \leq m_0$, pois m_1 também é mínimo. Logo, $m_0 = m_1$.

Se considerarmos o próprio conjunto $\mathbb{N}$, vemos que 1 é o elemento mínimo de $\mathbb{N}$, já que, para todo $m \in \mathbb{N}$, ou $m = 1$, ou m é o sucessor de algum outro número natural, o qual é menor que m.

Analogamente, $M_0 \in A$ é chamado o *maior elemento de* A, ou o *elemento máximo de* A, se $m \leq M_0$, para todo $m \in A$. A prova de que o elemento máximo de $A \subset \mathbb{N}$ é único, quando existe (!), é feita de modo idêntico ao que foi feito para provar a unicidade do mínimo. Nem sempre um subconjunto não-vazio de $\mathbb{N}$ possui elemento máximo. O próprio $\mathbb{N}$ não o possui, já que para todo $m \in \mathbb{N}$, $m + 1 \in \mathbb{N}$ e $m < m + 1$.

No entanto, em relação ao mínimo, vale o seguinte princípio fundamental.

Teorema 2.4 (Princípio da Boa Ordenação)
Se $A \subset \mathbb{N}$ e $A \neq \emptyset$ então A possui um menor elemento.

Prova: Dado $n \in \mathbb{N}$, denotemos $J_n := \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\}$. Seja A um subconjunto não-vazio de $\mathbb{N}$. Como A é não-vazio, $\mathbb{N} \backslash A \neq \mathbb{N}$. Se $1 \in A$, então

1 é o elemento mínimo de A, já que 1 é o elemento mínimo de $\mathbb{N}$. Suponhamos, então, que $1 \notin A$, isto é, $1 \in \mathbb{N} \setminus A$. Seja $X := \{n \in \mathbb{N} : J_n \subset \mathbb{N} \setminus A\}$. Como $J_1 = \{1\}$, temos $1 \in X$, já que estamos supondo que $1 \in \mathbb{N} \setminus A$. Se para todo $m \in X$ tivermos $m + 1 \in X$ então, pelo Princípio da Indução, teremos $X = \mathbb{N}$, o que implicará $\mathbb{N} \setminus A = \mathbb{N}$ e daí $A = \emptyset$, contrariando a hipótese de que A é não-vazio. Assim, deve existir $m_0 \in X$ tal que $m := m_0 + 1 \notin X$. Afirmamos que m, assim definido, é o elemento mínimo de A.

Com efeito, se $p < m$, então $p \in J_{m_0} \subset \mathbb{N} \setminus A$, e, portanto, $p \notin A$. Logo, para todo $p \in A$ devemos ter $m \leq p$, o que demonstra que m é o elemento mínimo de A e conclui a prova. □

A seguir damos alguns exemplos mais práticos de demonstrações por indução. Neles faremos livre uso das propriedades dos números reais já bastante conhecidas por você (uma exposição mais formal sobre essas propriedades será feita mais adiante).

Exemplos 2.1

(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, a soma dos n primeiros números naturais é dada por

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1). \tag{2.4}$$

Com efeito, chamemos $P[n]$ esta fórmula. Nesse caso, $P[1]$ é $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$ que, portanto, é verdadeira. Suponhamos agora que valha $P[k]$, isto é,

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{1}{2}k(k + 1).$$

Somando $(k+1)$ a ambos os membros desta equação, obtemos uma nova equação cujo o membro esquerdo é $1+2+\cdots+(k+1)$, que é o membro esquerdo da fórmula $P[k+1]$. Por outro lado, após somarmos $(k+1)$ à equação $P[k]$, o membro direito da nova equação é $\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1) = \frac{1}{2}(k + 1)(k + 2)$. Assim, somando $(k + 1)$ à equação $P[k]$ obtemos

$$1 + 2 + \cdots + (k + 1) = \frac{1}{2}(k + 1)(k + 2),$$

que nada mais é que $P[k + 1]$. Assim, pelo Princípio da Indução Matemática (Teorema 2.1), segue que $P[n]$, isto é, a equação (2.4), é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais é dada por

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \tag{2.5}$$

De novo, chamando $P[n]$ esta fórmula, vemos que $P[1]$ é $1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$ e, portanto, é verdadeira. Suponhamos que valha $P[k]$:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1).$$

Somando $(k+1)^2$ a ambos os membros da equação $P[k]$ obtemos

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1)) \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6) \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3). \end{aligned}$$

O membro esquerdo da primeira equação desta cadeia de equações e o membro direito da última equação coincidem com os membros esquerdo e direito de $P[k+1]$. Portanto, temos que $P[k]$ implica $P[k+1]$. Logo, pelo Princípio da Indução Matemática, concluímos que (2.5) vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Dados dois números $a, b \in \mathbb{N}$, $a > b$, provaremos que $a - b$ é um fator de $a^n - b^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, para $n = 1$ a afirmação é óbvia. Suponhamos então que valha $P[k]$: $a - b$ é um fator de $a^k - b^k$. Então temos

$$\begin{aligned} a^{k+1} - b^{k+1} &= a^{k+1} - ab^k + ab^k - b^{k+1} \\ &= a(a^k - b^k) + (a-b)b^k. \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução (vale $P[k]$), concluímos então que vale $P[k+1]$. De novo, pelo Princípio da Indução, vemos que a afirmação vale para todo $n \in \mathbb{N}$. Como aplicação, deduzimos, por exemplo, que $13^n - 8^n$ é divisível por 5, $17^n - 13^n$ é divisível por 4, etc., qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

(d) A desigualdade $2^n > 2n + 1$ é verdadeira para $n \geq 3$ (observe que ela não vale para $n = 1, 2$). De fato, chamando de $P[n]$ a desigualdade, vemos que vale $P[3]$ já que $2^3 = 8 > 7 = 2 \cdot 3 + 1$. Suponhamos que valha $P[k]$: $2^k > 2k + 1$. Levando em conta que $2k + 2 > 3$ para todo $k \in \mathbb{N}$, após multiplicar $P[k]$ por 2, temos

$$2^{k+1} > 2(2k + 1) = 4k + 2 = 2k + (2k + 2) > 2k + 3 = 2(k + 1) + 1,$$

e assim obtemos $P[k + 1]$. Portanto, pelo Teorema 2.3 concluímos que a desigualdade vale para todo $n \geq 3$.

(e) A desigualdade $2^n \leq (n + 1)!$ pode ser estabelecida pelo Princípio da Indução Matemática. De fato, inicialmente observemos que vale $P[1]$, já que $2^1 = 2 = 2 \cdot 1 = 2!$. Supondo que valha $P[k]$, isto é, $2^k \leq (k+1)!$, multiplicando $P[k]$ por 2, e usando o fato que $2 \leq k + 2$, segue que

$$2^{k+1} \leq 2(k + 1)! \leq (k + 2)(k + 1)! = (k + 2)!,$$

o que nos dá que vale $P[k + 1]$. Portanto, o Teorema 2.1 implica que a desigualdade vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

A seguinte versão do Princípio da Indução Matemática é, às vezes, bastante útil. Alguns autores a chamam "Princípio da Indução Forte". Usamos a notação habitual $\{1, 2, \ldots, k\}$ para denotar o conjunto $J_k = \{j \in \mathbb{N} : 1 \leq j \leq k\}$.

Teorema 2.5 (Princípio da Indução Forte)
Seja S um subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que

(1) $1 \in S$.

(2) Para todo $k \in \mathbb{N}$, se $\{1, 2, \ldots, k\} \subset S$, então $k + 1 \in S$.

Então $S = \mathbb{N}$.

Prova: Consideremos o conjunto $X = \mathbb{N} \setminus S$. Provaremos por contradição que $X = \emptyset$. Suponhamos então que $X \neq \emptyset$. Então, pelo Princípio da Boa Ordenação, X possui um elemento mínimo m_0. Como, por (1), $1 \in S$, temos $m_0 > 1$. Por outro lado, como m_0 é o menor elemento de $X = \mathbb{N} \setminus S$, temos que $\{1, \ldots, m_0 - 1\} \subset S$. Decorre então de (2) que $m_0 \in S$, o que nos dá uma contradição e conclui a prova. $\square$

Exercícios 2.1

1. Prove que $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

2. Prove que $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

3. Prove que $3+11+\cdots+(8n-5)=4n^2-n$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

4. Prove que $1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=(4n^3-n)/3$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

5. Prove que $1^2-2^2+3^2+\cdots+(-1)^{n+1}n^2=(-1)^{n+1}n(n+1)/2$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

6. Prove que n^3+5n é divisível por 6 para todo $n\in\mathbb{N}$.

7. Prove que $5^{2n}-1$ é divisível por 8 para todo $n\in\mathbb{N}$.

8. Prove que $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ é divisível por 9 para todo $n\in\mathbb{N}$.

9. Prove que vale o binômio de Newton: dados $a,b\in\mathbb{R}$, para todo $n\in\mathbb{N}$, vale

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+b^n,$$

onde $\binom{n}{k}=n!/k!(n-k)!$. (Sugestão: verifique que $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.)

10. Prove a desigualdade de Bernoulli: dado $x\in\mathbb{R}$, $x>-1$, para todo $n\in\mathbb{N}$ vale

$$(1+x)^n\geq 1+nx.$$

11. Prove que $n<2^n$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

12. Prove que $2^n<n!$ para todo $n\geq 4$, $n\in\mathbb{N}$.

13. Prove que $2n-3\leq 2^{n-2}$ para todo $n\geq 5$, $n\in\mathbb{N}$.

14. Prove que $1/\sqrt{1}+1/\sqrt{2}+\cdots+1/\sqrt{n}>\sqrt{n}$ para todo $n>2$, $n\in\mathbb{N}$.

15. Sejam os números x_n definidos do seguinte modo: $x_1:=1$, $x_2:=2$ e $x_{n+2}:=\frac{1}{2}(x_{n+1}+x_n)$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Use o Princípio da Indução Forte (Teorema 2.5) para mostrar que $1\leq x_n\leq 2$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Prossiga: Números Inteiros e Racionais

Vamos descrever sucintamente como o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ e o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ são definidos a partir de $\mathbb{N}$ e como são definidas a adição, a multiplicação e a ordem entre esses números. Mencionaremos, omitindo as provas, algumas propriedades satisfeitas pelas operações e pela ordem definidas para os inteiros. Abordaremos mais detalhadamente essas propriedades em breve, quando estivermos estudando os números reais.

O conjunto $\mathbb{Z}$ é definido adicionando-se a $\mathbb{N}$ o elemento 0, chamado "zero", e, para cada $k \in \mathbb{N}$, o elemento $-k$, chamado "menos k". Define-se a adição entre dois inteiros quaisquer estabelecendo que a mesma coincide com a adição em $\mathbb{N}$, quando ambos os números pertencem a $\mathbb{N}$, e pondo-se além disso:

$$
\begin{aligned}
&0 + s = s + 0 := s, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{Z},\\
&(-j) + j = j + (-j) := 0, \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N},\\
&(-j) + (-k) := -(j+k), \quad \text{para todos } j, k \in \mathbb{N},\\
&(-j) + k = k + (-j) := k - j \quad \text{se } j, k \in \mathbb{N} \text{ e } j < k,\\
&(-j) + k = k + (-j) := -(j-k) \quad \text{se } j, k \in \mathbb{N} \text{ e } j > k,
\end{aligned}
$$

onde denotamos $-(j-k) := -d$, com $d = j - k$.

Verifica-se facilmente que a adição de inteiros assim definida satisfaz: $r + s = s + r$ (comutatividade) e $(r+s)+t = r+(s+t)$ (associatividade).

A ordem em $\mathbb{Z}$ é definida estabelecendo-se que $r < s$ se $r + d = s$ para algum $d \in \mathbb{N}$. Em particular, $0 < n$ e $-n < 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. A transitividade ($r < s$ e $s < t \Rightarrow r < t$), a monotonicidade ($r < s \Rightarrow r + t < s + t$) e a tricotomia (uma e só uma das alternativas é válida: $r < s$, $r = s$, ou $r > s$) valem quaisquer que sejam $r, s, t \in \mathbb{Z}$ como é fácil verificar.

A multiplicação em $\mathbb{Z}$ é definida estabelecendo-se que ela coincide com a multiplicação em $\mathbb{N}$, quando ambos os números pertencem a $\mathbb{N}$, e pondo

$$
\begin{aligned}
&0 \cdot s = s \cdot 0 := 0, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{Z},\\
&(-j) \cdot (-k) = (-k) \cdot (-j) := j \cdot k, \quad \text{para todos } j, k \in \mathbb{N},\\
&(-j) \cdot k = j \cdot (-k) := -j \cdot k, \quad \text{para todos } j, k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Pode-se provar sem dificuldade que a multiplicação em $\mathbb{Z}$, assim definida, é comutativa, associativa e distributiva em relação à adição: $r \cdot s = s \cdot r$

(comutatividade), $(rs)t = r(st)$ (associatividade), $r(s+t) = rs + rt$ (distributividade).

Além disso, não é difícil verificar que se $r < s$ então $r \cdot t < s \cdot t$, se $t > 0$ (isto é, se $t \in \mathbb{N}$) e $r \cdot t > s \cdot t$, se $t < 0$ (isto é, se $(-1) \cdot t \in \mathbb{N}$).

Finalmente, se, para todo $s \in \mathbb{Z}$, definirmos $-s = (-1) \cdot s$, temos que valem as equações $s + (-s) = (-s) + s = 0$ e $-(-s) = s$.

O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é formado por objetos da forma $\dfrac{p}{q}$ onde $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$, convencionando-se que $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ se e somente se $p \cdot s = r \cdot q$. Definem-se a soma e a multiplicação de números racionais como você já conhece bem:

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + qr}{qs}, \qquad \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \cdot r}{q \cdot s}.$$

As operações assim definidas são comutativas e associativas, e vale também a distributividade da multiplicação em relação à adição. Denota-se

$$-\frac{p}{q} := (-1) \cdot \frac{p}{q} = \frac{-p}{q} \quad \text{e} \quad \frac{p}{q} - \frac{r}{s} := \frac{p}{q} + \Big(-\frac{r}{s}\Big) = \frac{p}{q} + \frac{-r}{s}.$$

Define-se a ordem entre os racionais estabelecendo-se que $\dfrac{p}{q} > 0$ se $p \cdot q > 0$ e $\dfrac{p}{q} > \dfrac{r}{s}$ se $\dfrac{p}{q} - \dfrac{r}{s} > 0$.

Se $x, y, z \in \mathbb{Q}$, verifica-se sem muita dificuldade que: (i) $x < y$ e $y < z$ implica $x < z$; (ii) $x < y$ então $x + z < y + z$; (iii) $x < y$ então $xz < yz$ se $z > 0$ e $xz > yz$ se $z < 0$; (iv) uma e só uma das alternativas é válida: $x < y$, $x = y$, ou $x > y$.

Se $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ e $x = \dfrac{p}{q}$ define-se x^{-1}, chamado o inverso de x, por $x^{-1} := \dfrac{q}{p}$. Verifica-se sem dificuldade que x^{-1} é o único racional satisfazendo $x \cdot x^{-1} = 1$.

Aula 3 – Conjuntos Finitos, Enumeráveis e Não-Enumeráveis

Metas da aula: Apresentar a definição de conjunto finito e de número de elementos de um conjunto finito. Definir conjunto enumerável e conjunto não-enumerável.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber o significado e o uso da definição matemática de conjunto finito, bem como demonstrar fatos simples envolvendo esse conceito;

- Saber o significado e o uso da definição matemática de conjunto enumerável, bem como demonstrar fatos simples envolvendo esse conceito.

Introdução

O Produto Interno Bruto (PIB) dos Estados Unidos da América, no ano de 2005, foi calculado em 12.452.000.000.000 (doze trilhões, quatrocentos e cinqüenta e dois bilhões) de dólares e o do Brasil, no mesmo ano de 2005, foi calculado em 795.000.000.000 (setecentos e noventa e cinco bilhões) de dólares. Essas estimativas deram aos EUA e ao Brasil, respectivamente, a 1ª e a 11ª posição na classificação das maiores economias do mundo.

O fato para o qual queremos chamar atenção aqui não tem nada a ver com economia.

O ponto que queremos ressaltar é que, no nosso dia-a-dia, por exemplo, na leitura de um jornal, podemos nos deparar com números tão grandes que nenhum ser humano na face da Terra seria capaz de contar 1, 2, 3,. . . , até chegar a eles, sem saltar nenhum número intermediário, simplesmente porque seriam necessários centenas ou milhares de anos para fazê-lo, estimando-se que levássemos, digamos, *em média*, 1/2 segundo para recitar cada um deles. Mesmo assim, você não hesitaria em afirmar prontamente que os números referentes aos PIBs citados representam quantidades *finitas*, seja lá o que isso realmente signifique em última instância.

O fato é que a noção de conjunto finito é extremamente primitiva, e o ser humano criou sistemas numéricos capazes de representar qualquer quantidade finita muito antes de se preocupar em obter uma definição matemática precisa do que venha ser conjunto finito. Muito ao contrário, a definição que se procurou dar em tempos muito mais recentes (há menos de um século e meio) tinha, diante de si, o desafio de possibilitar a demonstração matemática de fatos absolutamente evidentes para o senso comum como, por exemplo, o de que "a união de uma quantidade finita de conjuntos finitos é um conjunto finito". Afinal, temos certeza de que um trilhão é uma quantidade finita porque sabemos que um trilhão corresponde a mil grupos de um bilhão de elementos e, por sua vez, um bilhão corresponde a mil grupos de um milhão, que por sua vez corresponde a mil grupos de mil etc.

Conjuntos Finitos e Infinitos

Por ora basta de discussão informal; vamos à definição matemática.

Definição 3.1

1. Dizemos que o conjunto vazio $\emptyset$ tem 0 *elementos*.

2. Se $n \in \mathbb{N}$, dizemos que um conjunto A tem n *elementos* se existe uma bijeção do conjunto $J_n := \{1, 2, \dots, n\}$ sobre A. Se A tem n elementos, dizemos que n é a *cardinalidade de* A e denotamos, $n = \#(A)$, ou $n = \text{card}(A)$.

3. Um conjunto é dito *finito* se, ou é vazio, ou tem n elementos para algum $n \in \mathbb{N}$.

4. Um conjunto A é dito *infinito* se ele não é finito.

Como a inversa de uma bijeção é uma bijeção, segue que o conjunto A tem n elementos se, e somente se, existe uma bijeção de A sobre J_n. Do mesmo modo, como a composisão de duas bijeções é uma bijeção, temos que um conjunto A tem n elementos se, e somente se, existe uma bijeção de A sobre um outro conjunto B que possui n elementos. Além disso, um conjunto C é finito se, e somente se, existe uma bijeção de C sobre um conjunto D que é finito.

Uma vez apresentada a definição matemática do que venha ser um conjunto ter n elementos é preciso, antes de mais nada, que se verifique a unicidade deste n, isto é, que um mesmo conjunto não pode possuir, de acordo com a definição, mais de um número n de elementos. Além disso, poderia acontecer que, com a definição dada, fosse possível mostrar que $\mathbb{N}$ é finito, o que iria contrariar a noção primitiva que temos desse conceito. Assim, é preciso mostrar que a definição acima implica que $\mathbb{N}$ é infinito, como manda o senso comum.

Teorema 3.1 (Unicidade)
Se $m, n \in \mathbb{N}$ e $m < n$, então não pode existir uma bijeção $f : J_m \to J_n$. Em particular, se A é finito, então $\#(A)$ é um número único.

Prova: Suponhamos, por absurdo, que existam $m, n \in \mathbb{N}$, com $m < n$, tal que existe uma bijeção $f : J_m \to J_n$. Então, o conjunto C dos $n \in \mathbb{N}$ para os quais existe $m < n$ tal que existe uma bijeção entre J_m e J_n é não-vazio.

Pelo Princípio da Boa Ordenação esse conjunto possui um menor elemento n_0. Assim, existem $m_0 < n_0$ e uma bijeção $f : J_{m_0} \to J_{n_0}$. Claramente $n_0 > 1$, pois do contrário não haveria $m \in \mathbb{N}$ com $m < n_0$. Se $f(m_0) = n_0$ então $f|J_{m_0-1}$ é uma bijeção entre J_{m_0-1} e J_{n_0-1}, o que contradiz o fato de n_0 ser o menor elemento de C. Por outro lado, se $f(m_0) \neq n_0$, tomemos $m_1 \in J_{m_0}$ tal que $f(m_1) = n_0$ e $n_1 \in J_{n_0}$ tal que $f(m_0) = n_1$. Definimos $g : J_{m_0} \to J_{n_0}$ pondo $g(m_0) = n_0$, $g(m_1) = n_1$, e $g(m) = f(m)$, para todo $m \in J_{m_0} \setminus \{m_1, m_0\}$. Claramente, g é uma bijeção, dado que f o é. Então, temos que $g|J_{m_0-1}$ é uma bijeção entre J_{m_0-1} e J_{n_0-1}, o que nos dá novamente uma contradição e prova a primeira parte do teorema.

Quanto a $\#(A)$ ser um número único, se isso não fosse verdade existiriam $m, n \in \mathbb{N}$, com $m < n$, e duas bijeções $f : J_m \to A$ e $g : J_n \to A$. Nesse caso, $f \circ g^{-1}$ seria uma bijeção de J_m sobre J_n o que contradiz a parte já provada do teorema. Logo, $\#(A)$ é um número único. □

Teorema 3.2
O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é um conjunto infinito.

Prova: Suponhamos por absurdo que $\mathbb{N}$ é finito. Nesse caso existe $m \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $f : J_m \to \mathbb{N}$. Seja $n := f(m)$. Definimos $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{n\}$ pondo $g(k) = k$, se $k < n$, e $g(k) = k + 1$, se $k \geq n$. Então g é uma bijeção (por quê?). Por outro lado, como f é bijeção, então $h := f|J_{m-1}$ é uma bijeção entre J_{m-1} e $\mathbb{N} \setminus \{n\}$. Logo, $g^{-1} \circ h$ é uma bijeção de J_{m-1} sobre J_m o que nos dá uma contradição em vista do Teorema 3.1. Logo, $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito. □

O próximo resultado estabelece algumas propriedades elementares de conjuntos finitos e infinitos.

Teorema 3.3

(a) Se A é um conjunto com m elementos e B é um conjunto com n elementos, e se $A \cap B = \emptyset$, então $A \cup B$ tem $m + n$ elementos.

(b) Se A é um conjunto com m elementos e $C \subset A$ é um conjunto com 1 elemento, então $A \setminus C$ é um conjunto com $m - 1$ elementos.

(c) Se C é um conjunto infinito e B é um conjunto finito, então $C \setminus B$ é um conjunto infinito.

Prova: Provemos (a). Seja f uma bijeção de J_m sobre A e g uma bijeção de J_n sobre B. Definimos $h : J_{m+n} \to A \cup B$ pondo $h(i) := f(i)$, para $i = 1, \ldots, m$, e $h(i) = g(i - m)$, para $i = m + 1, \ldots, m + n$. Você poderá verificar sem dificuldade que h é uma bijeção de J_{m+n} sobre $A \cup B$.

A demonstração de (b) segue diretamente de (a). A prova de (c) segue também de (a), mas por contradição, supondo, por absurdo, que C é um conjunto infinito, B é um conjunto finito e que $C \setminus B$ é um conjunto finito. Os detalhes dessas demonstrações são deixados para você como exercício (veja Exercício 2 ao final desta aula). $\square$

O fato de que um subconjunto de um conjunto finito também é um conjunto finito é intuitivamente óbvio mas precisa ser demonstrado partindo-se da definição dada acima. Como veremos, a prova, embora simples, requer um pouco mais de trabalho que o esperado.

Teorema 3.4
Suponhamos que A e B sejam conjuntos e que $A \subset B$.

(a) Se B é um conjunto finito então A é um conjunto finito.

(b) Se A é um conjunto infinito então B é um conjunto infinito.

Prova: Provemos, inicialmente, (a). Se $A = \emptyset$ então já sabemos que A é finito e nada há para demonstrar. Suponhamos então que $A \neq \emptyset$. A prova será feita por indução sobre o número de elementos de B. Se B tem 1 elemento, então o único subconjunto não-vazio de B é ele próprio. Logo $A = B$ e, portanto, A é finito.

Suponhamos que todo subconjunto de um conjunto com n elementos é finito; essa é a proposição $P[n]$ cuja veracidade tomamos como hipótese. Provemos que, neste caso, vale $P[n + 1]$, isto é, que todo subconjunto de um conjunto com $n + 1$ elementos é finito. Seja, então, B um conjunto com

$n + 1$ elementos, $A \subset B$ e seja $f : J_{n+1} \to B$ uma bijeção. Se $f(n+1) \notin A$, então $A \subset B_1 := B \setminus \{f(n+1)\}$ e, pelo ítem (b) do Teorema 3.3, B_1 tem n elementos. Logo, pela hipótese de indução $P[n]$, nesse caso A é finito. Por outro lado, se $f(n+1) \in A$, então $A_1 := A \setminus \{f(n+1)\}$ é subconjunto de B_1 que tem n elementos. Logo, A_1 é finito. Mas então, pelo ítem (a) do Teorema 3.3, $A = A_1 \cup \{f(n+1)\}$ é finito.

A afirmação (b) é a contrapositiva de (a). Recordemos que a contrapositiva de uma proposição da forma $p \Rightarrow q$ é a proposição $\sim q \Rightarrow \sim p$ e que essas duas proposições são equivalentes, isto é, possuem tabelas-verdade idênticas. □

Conjuntos Enumeráveis

Os conjuntos infinitos são divididos em duas classes complementares: a dos que são enumeráveis e a dos que são não-enumeráveis.

Definição 3.2
Diz-se que um conjunto A é *enumerável* se ele é finito ou se existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to A$. No segundo caso, diremos que A é *infinito enumerável*, quando quisermos enfatizar o fato do conjunto ser infinito, que decorre imediatamente da existência da referida bijeção e do fato de que $\mathbb{N}$ é infinito. A bijeção f de $\mathbb{N}$ sobre A é chamada *uma enumeração dos elementos de* A e, denotando-se $a_k = f(k)$, podemos escrever $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$. Diz-se que um conjunto A é *não-enumerável* se ele não é enumerável.

Pelas propriedades das bijeções, é claro que A é infinito enumerável se e somente se existe uma bijeção de A sobre $\mathbb{N}$. Outrossim, A é infinito enumerável se, e somente se, existe uma bijeção de A sobre um conjunto B que é infinito enumerável. De modo mais geral, A é enumerável se, e somente se, existe uma bijeção de A sobre um conjunto B enumerável.

Exemplos 3.1

(a) O conjunto $\mathbf{P} = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ dos números naturais pares é infinito enumerável, já que $f : \mathbb{N} \to \mathbf{P}$ definida por $f(n) = 2n$, para $n \in \mathbb{N}$, é uma bijeção de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbf{P}$. Do mesmo modo, o conjunto dos números naturais ímpares $\mathbf{I} = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$ é infinito enumerável, já que $g : \mathbb{N} \to \mathbf{I}$ definida por $g(n) = 2n - 1$ é uma bijeção de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbf{I}$.

(b) O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é enumerável.

Podemos descrever uma enumeração para $\mathbb{Z}$ de modo esquemático na forma

$$\begin{array}{ccccccc} 0, & -1, & 1, & -2, & 2, & -3, & 3, \cdots . \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

Isto é, o 1 é aplicado sobre 0, os números naturais pares são aplicados sobre os inteiros negativos e os números naturais ímpares sobre os inteiros positivos, ou seja, os números naturais. A bijeção correspondente, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, é definida de modo explícito por

$$f(k) = \begin{cases} \frac{(k-1)}{2}, & \text{se } k \text{ é ímpar} \\ -\frac{k}{2}, & \text{se } k \text{ é par} \end{cases} .$$

(c) A união de dois conjuntos enumeráveis disjuntos é um conjunto enumerável.

Sejam A e B conjuntos enumeráveis, com $A \cap B = \emptyset$. Se A e B são finitos $A \cup B$ é finito pelo Teorema 3.3 e, portanto, é enumerável. Se um deles, digamos, A, é finito, com $A = \{a_1, \dots, a_p\}$, e o outro, B, é infinito enumerável, com $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$, então definimos uma bijeção $f : \mathbb{N} \to A \cup B$ pondo $f(k) := a_k$, para $k = 1, \dots, p$, e $f(k) := b_{k-p}$, para $k > p$. Portanto, $A \cup B$ é infinito enumerável. Finalmente, se A e B são infinitos enumeráveis, com $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$, definimos uma bijeção $f : \mathbb{N} \to A \cup B$ pondo $f(k) = a_{\frac{(k+1)}{2}}$, se k é ímpar, e $f(k) = b_{\frac{k}{2}}$, se k é par. De modo esquemático representamos essa enumeração na forma

$$\begin{array}{cccccc} a_1, & b_1, & a_2, & b_2, & a_3, & b_3, \cdots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

Teorema 3.5
Todo subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ é enumerável.

Prova: Se A é finito então A é enumerável, por definição, e nada há para provar. Se A é infinito, definimos uma bijeção f de $\mathbb{N}$ sobre A pondo $f(1) := a_1$, onde a_1 é o menor elemento de A, $f(2) := a_2$, sendo a_2 o menor elemento de $A \backslash \{a_1\}$, e assim por diante. Isto é, supondo que $f(1) := a_1, \dots, f(n) := a_n$ tenham sido definidos, com $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, definimos $f(n+1) := a_{n+1}$, onde a_{n+1} é o menor elemento de $A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Afirmamos que $f : \mathbb{N} \to A$ assim definida é uma bijeção. Claramente f é injetiva pois $f(m) < f(n)$, se

$m < n$. Em particular, $f(\mathbb{N})$ é um conjunto infinito enumerável pois f é uma bijeção de $\mathbb{N}$ sobre $f(\mathbb{N})$. Por outro lado, se houvesse $a \in A$ tal que $a \notin f(\mathbb{N})$, então a seria necessariamente maior que todos os elementos de $f(\mathbb{N})$ e, portanto, teríamos $f(\mathbb{N}) \subset J_a$, o que, pelo Teorema 3.4(a), contradiz o fato de $f(\mathbb{N})$ ser infinito. □

O resultado a seguir mostra que subconjuntos de conjuntos enumeráveis também são conjuntos enumeráveis.

Teorema 3.6
Suponhamos que A e B são conjuntos e que $A \subset B$.

(a) Se B é enumerável, então A é enumerável.

(b) Se A é não-enumerável, então B é não enumerável.

Prova: Provemos inicialmente (a). Se B é finito, então A é finito, pelo Teorema 3.4(a), e, portanto, é enumerável. Suponhamos então que B é infinito enumerável. Nesse caso, existe uma bijeção $g : B \to \mathbb{N}$, de B sobre $\mathbb{N}$. Pondo $h := g|A$, temos que h é uma bijeção de A sobre um subconjunto de $\mathbb{N}$, isto é, h é uma bijeção de A sobre um conjunto enumerável, pelo Teorema 3.5. Logo, A é enumerável.

A afirmação (b) é equivalente a (a) pois é a sua contrapositiva. □

Teorema 3.7
As seguintes afirmações são equivalentes.

(a) A é um conjunto enumerável.

(b) Existe uma sobrejeção de $\mathbb{N}$ sobre A.

(c) Existe uma injeção de A para $\mathbb{N}$.

Prova: (a)⇒(b) Se A é finito, existe uma bijeção f de algum conjunto J_n sobre A e então definimos $g : \mathbb{N} \to A$ por

$$g(k) := \begin{cases} f(k), & \text{para } k = 1, \dots, n, \\ f(n), & \text{para } k > n. \end{cases}$$

Então, g é uma sobrejeção de $\mathbb{N}$ sobre A. Se A é infinito enumerável, então existe uma bijeção f de $\mathbb{N}$ sobre A, a qual é, em particular, uma sobrejeção de $\mathbb{N}$ sobre A.

(b)⇒(c) Se f é uma sobrejeção de $\mathbb{N}$ sobre A, definimos $g : A \to \mathbb{N}$ pondo $g(a)$ igual ao menor elemento do conjunto não-vazio de números naturais $f^{-1}(a) := \{n \in \mathbb{N} : f(n) = a\}$. Como $f(g(a)) = a$, segue que g é injetiva (por quê?).

(c)⇒(a) Se g é uma injeção de A para $\mathbb{N}$, então g é uma bijeção de A sobre $g(A) \subset \mathbb{N}$. Pelo Teorema 3.6(a), $g(A)$ é enumerável, donde se conclui que o conjunto A é enumerável. $\square$

Teorema 3.8
O conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é infinito enumerável.

Prova: Lembremos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ consiste de todos os pares ordenados (m, n) com $m, n \in \mathbb{N}$. Obtemos uma enumeração para os elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de modo esquemático na forma:

$$\begin{array}{ccccccc} (1,1), & (1,2), & (2,1), & (1,3), & (2,2), & (3,1), & (1,4), \cdots, \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

no sentido crescente da soma $m + n$ e de m (Fig. **3.1**).

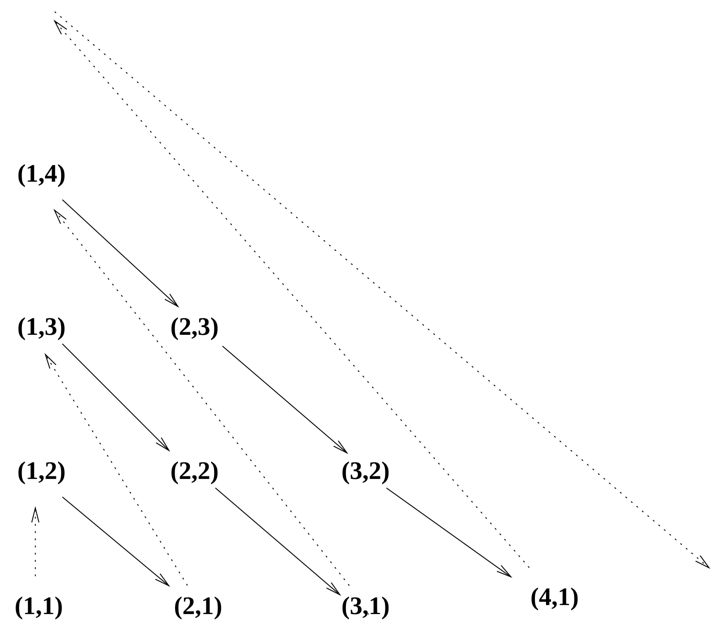


Figura 3.1: Enumeração de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pelo processo diagonal

A fórmula explícita para a bijeção de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ representada esquematicamente como acabamos de descrever será dada na seção Prossiga ao final desta aula.

Uma outra forma de mostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável é a seguinte. Você deve se lembrar de que um número natural é dito *primo* se os únicos números naturais dos quais ele é múltiplo são o 1 e ele próprio. Pode-se provar sem dificuldade que todo número natural admite uma única decomposição em fatores primos (veja Exercício 14, abaixo). Observe então que a função $g(m, n) := 2^m 3^n$ é uma injeção de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$, como conseqüência da unicidade da decomposição dos números naturais em fatores primos. Assim, pelo Teorema 3.7(c), $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. De passagem, observamos que, como é usual, escrevemos, de forma mais simples, $g(m, n)$ em vez de $g((m, n))$. $\square$

Teorema 3.9
O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é infinito enumerável.

Prova: Lembre-se de que $\mathbb{Q}$ é definido por $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\}$. Já provamos que $\mathbb{Z}$ é (infinito) enumerável e, portanto, $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ também é, pelos Teoremas 3.6(a) e 3.3(c). Assim, existem bijeções $g_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ e $g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Então, $G((j, k)) = (g_1(j), g_2(k))$ é uma bijeção de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sobre $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ (por quê?). Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, então $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ é enumerável. Portanto, existe uma bijeção $h_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

Agora, a função $h_2 : \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \to \mathbb{Q}$ definida por $h_2(m, n) = \frac{m}{n}$ é uma sobrejeção de $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ sobre $\mathbb{Q}$ (por quê?). Logo $f := h_2 \circ h_1$ é uma sobrejeção de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{Q}$. Pelo Teorema 3.7(b) concluímos que $\mathbb{Q}$ é enumerável. Como $\mathbb{Q}$ contém $\mathbb{N}$ e este último é infinito, segue também que $\mathbb{Q}$ é infinito. $\square$

A Figura **3.2** representa o esquema do processo diagonal para enumeração dos elementos de $\mathbb{Q}$ implicitamente empregado na prova anterior.

O próximo resultado estabelece que a união de uma coleção (possivelmente infinita) enumerável de conjuntos enumeráveis é também um conjunto enumerável.

Teorema 3.10
Se A_m é um conjunto enumerável para cada $m \in \mathbb{N}$, então a união $A := \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ é enumerável.

Prova: Em vista do Teorema 3.7, precisamos apenas mostrar que existe uma sobrejeção de $\mathbb{N}$ sobre A. Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja g_m uma sobrejeção de $\mathbb{N}$ sobre A_m; tal sobrejeção existe já que A_m é enumerável. Definimos

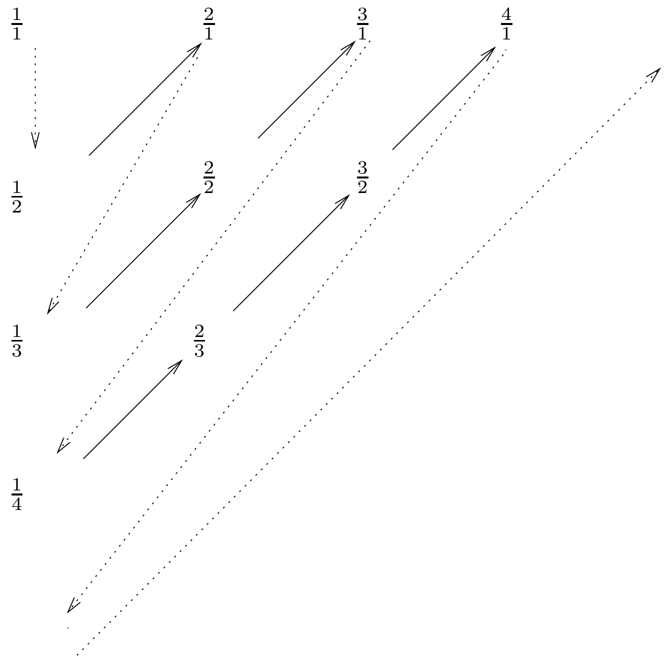


Figura 3.2: Enumeração de $\mathbb{Q}$ pelo processo diagonal.

$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A$ por

$$g(m, n) = g_m(n).$$

Afirmamos que g é uma sobrejeção; deixaremos a você a demonstração simples desse fato (veja Exercício 8, abaixo). Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, existe uma bijeção e, portanto, uma sobrejeção $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, donde $g \circ f$ é uma sobrejeção de $\mathbb{N}$ sobre A. Aplicando o Teorema 3.7 outra vez, concluímos que A é enumerável. Observe que o caso da união de uma coleção finita de conjuntos enumeráveis $A_1, \dots, A_n$ decorre do que acabamos de provar; basta fazer $A_k = A_n$, para $k = n + 1, n + 2, \dots$. $\square$

Para concluir, vamos enunciar e provar um belíssimo teorema devido a Georg Cantor (1845-1918) a quem também devemos a ideia genial do processo diagonal para mostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ são enumeráveis. A prova que daremos é igualmente devida a Cantor e também envolve um raciocínio "diagonal", como veremos.

Teorema 3.11 (Teorema de Cantor)
Se A é um conjunto qualquer, então não existe nenhuma sobrejeção de A sobre o conjunto $\mathcal{P}(A)$ de todos os subconjuntos de A.

Prova: Suponhamos que $g : A \to \mathcal{P}(A)$ é uma sobrejeção. Para cada $a \in A$, $g(a)$ é um subconjunto de A e, portanto, a pode ou não ser um elemento de $g(a)$. Então, definimos o conjunto

$$D := \{a \in A \,:\, a \notin g(a)\}.$$

Como D é subconjunto de A e, por conseguinte, $D \in \mathcal{P}(A)$, e como g é sobrejeção, então $D = g(a_0)$ para algum $a_0 \in A$. Devemos ter $a_0 \in D$, ou $a_0 \notin D$. Se $a_0 \in D$, então, como $D = g(a_0)$, $a_0 \in g(a_0)$, o que contradiz a definição de D. Da mesma forma, se $a_0 \notin D$, então $a_0 \notin g(a_0)$ e, pela definição de D, devemos ter $a_0 \in D$, o que também nos dá uma contradição. Portanto, não pode existir uma tal sobrejeção. $\square$

O Teorema de Cantor implica, em particular, que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ é não-enumerável, já que não pode existir uma bijeção de $\mathbb{N}$ sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Exercícios 3.1

1. Prove que um conjunto A é finito se, e somente se, existe uma bijeção de A sobre um conjunto finito B.

2. Dê os detalhes da prova das partes (b) e (c) do Teorema 3.3.

3. Seja $A := \{1, 2\}$ e $B := \{a, b, c\}$.

   (a) Determine o número de injeções diferentes de A para B.

   (b) Determine o número de sobrejeções diferentes de A para B.

4. Exibir uma bijeção uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e todos os números ímpares maiores que 11.

5. Exiba uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e um seu subconjunto próprio.

6. Prove que A é enumerável se, e somente se, existe uma bijeção de A sobre um conjunto B enumerável.

7. Dê um exemplo de uma coleção enumerável de conjuntos finitos cuja união não é finita.

8. Prove que a função $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A$, definida na demonstração do Teorema 3.10 é de fato uma sobrejeção.

9. Prove que o conjunto dos números primos é infinito enumerável. (Dica: Para provar que esse conjunto é infinito, argumente por contradição.)

10. Obtenha uma representação $\mathbb{N} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$ tal que os conjuntos A_1, A_2,..., A_n, ... sejam infinitos e dois a dois disjuntos.

11. Use o Princípio da Indução Matemática para provar que se A tem n elementos então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.

12. Seja $A \subset \mathbb{N}$ infinito. Prove que existe uma única bijeção crescente $f : \mathbb{N} \to A$ ($m < n \Rightarrow f(m) < f(n)$). (Dica: Para provar a existência de uma tal função use reiteradas vezes o Princípio da Boa Ordenação e o fato de que A é infinito.)

13. Prove que a coleção $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ de todos os subconjuntos *finitos* de $\mathbb{N}$ é enumerável.

14. Prove que todo número natural possui uma única representação como produto de potências de números primos. (Dica: Use o Princípio da Indução Forte para mostrar que existe uma tal representação. A unicidade decorre da definição de número primo e do fato que se n é um múltiplo de m, então todo divisor de m é um divisor de n.)

15. Inspirado pela demonstração do Teorema de Cantor, prove que o conjunto das funções $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ é não-enumerável.

Prossiga: O Processo Diagonal de Cantor.

Como os grandes gênios do futebol, Cantor era totalmente investido daquele "sentimento diagonal do homem-gol", evocado nos versos da canção "O futebol" de Chico Buarque. Em um punhado de momentos de pura genialidade, Cantor recorreu a "ataques pela diagonal" para furar bloqueios que guardavam verdadeiras maravilhas matemáticas atrás de si.

Vamos a seguir determinar mais precisamente a bijeção $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ representada pictoricamente na Figura **3.1** e com isso completar a prova do Teorem 3.8.

Em vez de buscar diretamente uma expressão para f, é bem mais simples exibir uma expressão para a inversa de f, $g : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Portanto, o que temos a fazer é encontrar uma expressão para g e provar que essa expressão realmente representa uma bijeção; neste caso, teremos também provado que a inversa de g, isto é, f, é uma bijeção de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Inicialmente, observemos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pode ser visto como uma coleção de diagonais: a primeira delas contém apenas o ponto $(1, 1)$; a segunda contém 2 pontos $(1, 2)$ e $(2, 1)$; a terceira contém 3 pontos $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$ etc. Assim, a k-ésima diagonal contém k pontos (m, n) cuja soma das coordenadas é constante $m + n = k + 1$. Em particular, o número de pontos incluídos da primeira até a k-ésima diagonal (inclusive) é:

$$S(k) := 1 + 2 + \cdots + k = \frac{1}{2}k(k + 1).$$

A segunda equação foi verificada no Exemplo 2.1(a). Ora, para um ponto (m, n) qualquer, sabemos que ele pertence à $(m + n - 1)$-ésima diagonal, e a sua ordem na enumeração estabelecida no processo diagonal será igual ao número de pontos contidos nas diagonais que antecedem a diagonal à qual ele pertence, isto é, $S(m + n - 2)$, mais o valor de sua primeira coordenada m. Sendo assim, definimos:

$$g(m, n) := S(m + n - 2) + m, \qquad \text{para } (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Conclusão da Prova do Teorema 3.8: Vamos então mostrar que g definida em (3.1) é uma bijeção de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}$. Mostremos inicialmente que g é injetiva. Se $(m, n) \neq (m', n')$, então:

(i) $m + n \neq m' + n'$,

ou

(ii) $m + n = m' + n'$ e $m \neq m'$.

De fato, chamando de P a proposição $m+n \neq m'+n'$ e Q a proposição $m \neq m'$, então (i) é P e (ii) é $\sim P$ e Q. Assim, a negação da proposição "(i) ou (ii)" é a proposição "$\sim P$ e (P ou $\sim Q$)" que é equivalente a "$\sim P$ e $\sim Q$", isto é, $m + n = m' + n'$ e $m = m'$, que, por sua vez, é equivalente a $(m, n) = (m', n')$.

Caso tenhamos (i), podemos supor $m + n < m' + n'$. Notemos que vale

$$S(k + 1) = S(k) + (k + 1). \tag{3.2}$$

Então, usando (3.2), o fato, que daí decorre, de que S é crescente, e também que $m' > 0$, temos

$$\begin{aligned} g(m, n) &= S(m + n - 2) + m \leq S(m + n - 2) + (m + n - 1) \\ &= S(m + n - 1) \leq S(m' + n' - 2) \\ &< S(m' + n' - 2) + m' = g(m', n'). \end{aligned}$$

Caso tenhamos (ii), então

$$g(m,n) - m = S(m+n-2) = S(m'+n'-2) = g(m',n') - m',$$

donde se conclui, igualmente, que $g(m,n) \neq g(m',n')$. Portanto, g é injetiva.

Mostremos agora que g também é sobrejetiva. Claramente $g(1,1) = 1$. Se $r \in \mathbb{N}$, com $r \geq 2$, encontraremos $(m_r, n_r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ com $g(m_r, n_r) = r$. Como $r < S(r)$, então o conjunto $C_r := \{k \in \mathbb{N} : S(k) \geq r\}$ é não-vazio. Usando o Princípio da Boa Ordenação, seja $k_r > 1$ o menor elemento em C_r. Em particular, $S(k_r - 1) < r$. Assim, como $r \geq 2$, usando (3.2), temos

$$S(k_r - 1) < r \leq S(k_r) = S(k_r - 1) + k_r.$$

Seja $m_r := r - S(k_r - 1)$, de modo que $1 \leq m_r \leq k_r$, e seja $n_r := k_r - m_r + 1$, de modo que $1 \leq n_r \leq k_r$ e $m_r + n_r - 1 = k_r$. Daí segue que

$$g(m_r, n_r) = S(m_r + n_r - 2) + m_r = S(k_r - 1) + m_r = r.$$

Portanto, g é uma sobrejeção de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}$. Como já provamos que g é uma injeção, segue que g é uma bijeção e, portanto, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. $\square$

Recomendamos fortemente que você faça uma pesquisa na internet sobre a vida e a obra de Georg Cantor, usando um sítio de buscas como o "http://www.google.com" ou visitando diretamente, por exemplo, a página da web: http://pt.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor.

Aula 4 – Os Números Reais I

Metas da aula: Definir os números reais tendo por base representações decimais. Mostrar que os números racionais podem ser caracterizados como decimais periódicos. Mostrar através de exemplos que o sistema dos números racionais possui falhas que motivam a introdução de decimais não-periódicos que correspondem aos números irracionais. Definir uma relação de ordem para os números reais e mostrar que ela coincide com a ordem dos racionais quando restrita aos decimais periódicos. Mostrar que o conjunto dos números reais não é enumerável. Introduzir os conceitos fundamentais de supremo e de ínfimo.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber o significado e o uso das representações decimais dos números reais.
- Saber o significado e o uso da identificação dos números racionais com os decimais periódicos.
- Demonstrar proposições simples envolvendo os conceitos de supremo e ínfimo.

Introdução

Nesta aula vamos iniciar nosso estudo sobre os números reais e suas propriedades. A discussão aqui conterá aspectos informais mas procurará se manter o mais próximo possível da argumentação matemática rigorosa. Assim, apresentaremos, de modo um tanto informal, o conjunto dos números reais como o conjunto dos decimais. Estes últimos são expressões onde aparecem um inteiro não-negativo, precedido ou não por um sinal de menos, seguido por um ponto, à direita do qual segue uma sucessão infindável de dígitos que tomam valores no conjunto dos algarismos $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. No que segue vamos estabelecer essa noção de forma mais precisa.

Essa abordagem tem a vantagem de dar aos números reais uma forma concreta, próxima da ideia que fazemos deles, pelo modo como já estamos habituados a lidar com expressões decimais do tipo mencionado. Porém tem a desvantagem de ter de trabalhar com expressões "pesadas" do ponto de vista notacional. De qualquer modo, logo que concluirmos a apresentação dos números reais na próxima aula, ficará claro que esse conjunto fica caracterizado não pela forma de seus elementos (de fato, eles poderiam assumir formas completamente distintas), mas pela relação de ordem entre esses elementos, as operações que podemos realizar entre eles e a completude do conjunto, que será explicada mais adiante. Assim, poderemos dispensar totalmente a representação dos reais como decimais logo após o término dessa apresentação.

Observe que adotamos aqui a convenção de apresentar os decimais com a parte inteira separada da fracionária por um ponto realçado "$\bullet$" e não por uma vírgula, que é a forma mais usual no Brasil. Fazemos isso para dar melhor visibilidade ao mesmo e evitar confusões, uma vez que a vírgula "," assim como o ponto "$\cdot$" usual são utilizados frequentemente com outras finalidades.

Os números reais vistos como decimais

Você certamente já está bastante familiarizado com a representação decimal para os números racionais. Essa representação é obtida através do conhecido algoritmo da divisão que aprendemos no ensino fundamental. O algoritmo para obter a representação decimal de 5/7 está descrito na Fig. **4.1**.

Seja p/q, $p, q \in \mathbb{N}$, um número racional positivo. Podemos, também supor que p e q sejam primos entre si, isto é, não possuem divisores comuns. A representação decimal de p/q tem a forma $a_0 \bullet a_1 a_2 a_3 \dots$, onde $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e

$$a_1, a_2, a_3, \dots \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Chamamos *algarismos* os elementos do conjunto

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

De modo geral, ou essa representação termina em zeros, isto é, $a_n = 0$, para $n \geq k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, ou apresenta um bloco de m algarismos (período), com $m \in \mathbb{N}$, repetindo-se indefinidamente a partir da $(k+1)$-ésima casa decimal, para um certo $k \in \mathbb{N}$, isto é, $a_n = a_{n+m}$ para todo natural $n > k$. Chamamos tal representação decimal *periódica*, incluindo nessa denominação também o caso em que a representação decimal termina em zeros, considerando nesse caso $m = 1$ e 0 como o bloco que se repete periodicamente com período 1.

5	7
50	$0.\underbrace{714285}_{\text{período}}71\cdots$
10	
30	
20	
60	
40	
50	
10	
.	
.	
.	

Figura 4.1: Algoritmo da divisão $5 \div 7$

O racional 0 tem a representação decimal trivial $0{\bullet}000\ldots$. Os racionais negativos da forma $r = -p/q$ com $p, q \in \mathbb{N}$, têm representação decimal da forma $-a_0{\bullet}a_1a_2a_3\ldots$, onde $a_0{\bullet}a_1a_2a_3\ldots$ é a representação decimal de p/q.

O fato de que a representação decimal de um racional positivo p/q, fornecida pelo algoritmo da divisão, é sempre periódica se explica do seguinte modo. Consideremos, para simplificar, apenas o caso em que $0 < p/q < 1$. Suponhamos, então, $x = p/q$, com $p, q \in \mathbb{N}$ e $0 < p < q$, como no exemplo da Figura **4.1**, em que $p = 5$, $q = 7$. Notamos que cada passo do algoritmo da divisão de p por q fornece um resto que é um inteiro entre 0 e $q - 1$. Portanto, após um número de passos nunca maior que q, algum resto ocorrerá uma segunda vez e, a partir daí, os algarismos no quociente começarão a se repetir em ciclos. Portanto, essa representação decimal é periódica.

Formalmente, a representação decimal de um racional positivo p/q deixa de ser sempre única pelo seguinte fato. Para cada racional cuja representação decimal obtida através do algoritmo da divisão termina em 0's, $p/q = a_0{\bullet}a_1\ldots a_k000\ldots$, com $a_k \geq 1$, poderíamos também considerar uma representação decimal na forma

$$a_0{\bullet}a_1\ldots(a_k - 1)999\ldots$$

terminando em 9's. De fato, tal representação também se aplicaria ao mesmo racional p/q, já que, multiplicando-se essa representação, que chamaremos x, por 10^{k+1}, obteríamos $10^{k+1}x = a_0a_1 \ldots (a_k - 1)9{\bullet}999\ldots$ e, multiplicando-a por 10^k, obteríamos $10^k x = a_0a_1 \ldots (a_k - 1){\bullet}999\ldots$. Fazendo a diferença, temos

$$\begin{aligned} 9 \cdot 10^k x &= a_0a_1 \ldots (a_k - 1)9{\bullet}000 \cdots - a_0a_1 \ldots (a_k - 1){\bullet}000\ldots \\ &= 10 \cdot a_0a_1 \ldots (a_k - 1) + 9 - a_0a_1 \ldots (a_k - 1) \\ &= 9 \cdot a_0a_1 \ldots (a_k - 1) + 9 \\ &= 9 \cdot (a_0a_1 \ldots a_k - 1 + 1) \\ &= 9 \cdot a_0a_1 \ldots a_k, \end{aligned}$$

donde se conclui que $10^k x = a_0a_1 \ldots a_k$, isto é, $x = a_0{\bullet}\, a_1 \ldots a_k$, ou seja, $x = p/q$. Nos cálculos anteriores, por abuso de notação, denotamos por $a_0a_1 \ldots a_k$ o inteiro N cuja representação decimal é obtida justapondo-se à direita de a_0 os algarismos $a_1, \ldots, a_k$, sucessivamente, ou seja, $N = a_0 \cdot 10^k + a_1 \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_k$.

Por exemplo, $1/2 = 0{\bullet}5$ ou $1/2 = 0{\bullet}49999$, $11/50 = 0{\bullet}22$ ou $11/50 = 0{\bullet}21999\ldots$. No que segue, estaremos sempre descartando representações decimais terminadas em 9's.

Definição 4.1

1. Chamaremos *decimal geral não-nulo* qualquer expressão da forma

   $$\pm a_0{\bullet}\, a_1a_2a_3\ldots,$$

   onde $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

   $$a_1, a_2, a_3, \cdots \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

   e para algum $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tem-se $a_k > 0$. Em geral escreve-se $a_0{\bullet}\, a_1a_2a_3\ldots$ em vez de $+a_0{\bullet}\, a_1a_2a_3\ldots$, e estes são chamados *positivos* ao passo que os decimais da forma $-a_0{\bullet}\, a_1a_2a_3\ldots$ são chamados *negativos*.

2. O *decimal nulo* é definido por $0{\bullet}000\ldots$.

3. Decimais gerais não-nulos da forma $\pm a_0{\bullet}\, a_1a_2\ldots a_k999\ldots$, onde $a_n = 9$ se $n > k$, $a_k \neq 9$, ou $\pm a_0{\bullet}9999\ldots$ serão por nós chamados *redundantes* e identificados com os decimais que lhes são equivalentes, isto é, $\pm a_0{\bullet}\, a_1a_2\ldots(a_k + 1)000\ldots$ e $\pm(a_0 + 1){\bullet}000\ldots$, respectivamente.

4. Um *decimal* é um decimal geral positivo, negativo ou nulo que não é redundante.

5. Um *decimal periódico* é um decimal que apresenta um bloco de m algarismos (período), com $m \in \mathbb{N}$, repetindo-se indefinidamente a partir da $(k+1)$-ésima casa decimal, para um certo $k \in \mathbb{N}$, isto é, $a_n = a_{n+m}$, para todo natural $n > k$. Em particular, o decimal nulo é periódico.

Quando a representação decimal periódica termina em 0's é usual omitir os zeros que se repetem indefinidamente. A seguir, damos uma definição informal para os números reais.

Definição 4.2 (Informal)
Um *número real* é um objeto que é representado por um decimal. O conjunto de todos os números reais é denotado por $\mathbb{R}$. O número real é *positivo* se é representado por um decimal positivo, *negativo* se é representado por um decimal negativo e *nulo* ou *zero* se é representado pelo decimal nulo.

A todo $p \in \mathbb{Z}$, associamos o decimal $p^* = p_\bullet 000\ldots$ que continuará sendo denotado, simplesmente, por p. Em particular, $0 := 0_\bullet 000\ldots$ e $1 := 1_\bullet 000\ldots$.

Dado $x \in \mathbb{R}$, se $x = +a_{0\bullet} a_1 a_2 a_3 \ldots$, denotamos por $-x$ o número real $-x := -a_{0\bullet} a_1 a_2 a_3 \ldots$, se $x = -a_{0\bullet} a_1 a_2 a_3 \ldots$ então pomos $-x := a_{0\bullet} a_1 a_2 a_3 \ldots$. Temos também a identidade $-0_\bullet 000 \cdots = 0_\bullet 000 \cdots = 0$.

Dizemos que a definição anterior é informal porque ela apresenta $\mathbb{R}$ apenas como um conjunto cujos elementos podem ser representados de uma forma determinada, e não como uma estrutura algébrica com propriedades que possam caracterizá-lo sem que precisemos saber exatamente que forma têm seus elementos.

Em particular, ela não fornece nenhuma indicação do que venha a ser a adição $x + y$, a subtração $x - y$, o produto $x \cdot y$ e a divisão x/y (quando $y \neq 0$) de dois números reais x e y quaisquer. Vamos definir essas operações de modo geral e dar uma caracterização estrutural para $\mathbb{R}$ em breve.

Por enquanto, vamos definir as referidas operações apenas em alguns casos bastante particulares, que nos serão úteis na discussão que faremos logo a seguir.

Definição 4.3

(a) Se x e y são decimais periódicos representando números racionais $x = p/q$, $y = p'/q'$, $p, p', q, q' \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $q' \neq 0$, então $x+y$, $x-y$, $x \cdot y$ e x/y (quando $y \neq 0$) são definidos como sendo os decimais obtidos por meio do algoritmo da divisão para as divisões $(pq'+qp') \div qq'$, $(pq'-qp') \div qq'$, $pp' \div qq'$ e $pq' \div qp'$, respectivamente.

(b) A multiplicação de um número real positivo x por uma potência positiva de 10 qualquer, $10^k \cdot x$, $k \in \mathbb{N}$, é o número real cuja representação decimal é obtida simplesmente deslocando-se para a direita, k casas decimais, o ponto decimal da representação de x. Além disso, se x é um número real negativo com $x = -y$, onde y é um número real positivo, então $10^k \cdot x := -10^k \cdot y$.

(c) Se x e y são dois reais positivos cujas representações decimais coincidem à direita de "$\bullet$", isto é,

$$x = a_0 \bullet a_1 a_2 a_3 \ldots$$
$$y = b_0 \bullet b_1 b_2 b_3 \ldots,$$

então,

$$x - y = a_0 - b_0.$$

Em particular, $x - x = 0$.

O resultado a seguir fornece uma caracterização precisa para a representação decimal dos números racionais.

Teorema 4.1
Um número real é racional se, e somente se, é um decimal periódico.

Prova: A prova de que todo racional é um decimal periódico já foi dada no início desta aula. Reciprocamente, mostraremos que se um decimal é periódico, então ele representa um número racional. A ideia da prova fica mais clara por meio de um exemplo. Suponhamos que $x = 5\bullet 42323\ldots 23\ldots$. Multiplicamos x por uma potência de 10 para mover o ponto decimal até o primeiro bloco que se repete periodicamente: para o nosso exemplo, obtemos $10x = 54\bullet 232323\ldots$. Observe que estamos usando (b) da Definição 4.3. Em seguida, multiplicamos x por uma potência de 10 para mover um bloco periódico para a esquerda do ponto decimal: no nosso exemplo obtemos $1000x = 5423\bullet 2323\ldots$. Finalmente, subtraímos o último número do primeiro, usando o item (c) da Definição 4.3, para obter um inteiro: no caso do nosso exemplo, $1000x - 10x = 5369$. Segue daí que $x = 5369/990$, um número racional. $\square$

Definição 4.4

1. Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é um *decimal não-periódico* se x não é um decimal periódico.

2. O conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é chamado conjunto dos *números irracionais*.

O Teorema 4.1 pode ser reescrito da seguinte forma.

Teorema 4.2
Um número real x é irracional se, e somente se, é um decimal não-periódico.

Agora vem a pergunta que não quer calar: *Por que precisamos dos irracionais? Por que não nos contentamos com os racionais? Por que introduzir decimais não-periódicos?*

Os exemplos a seguir servem como primeiras indicações de que os racionais são insuficientes para os propósitos da Análise Matemática.

Exemplo 4.1
Vamos mostrar que a equação

$$x^2 = 2 \tag{4.1}$$

não é satisfeita por nenhum número racional x.

Se existisse um tal racional x, poderíamos escrever $x = p/q$ com p e q inteiros primos entre si. Em particular, p e q não são ambos pares. Então, de (4.1) obtemos

$$p^2 = 2q^2. \tag{4.2}$$

Isso mostra que p^2 é par. Portanto, p é par, pois, se p fosse ímpar, p^2 seria ímpar (por quê?). Assim, $p = 2m$, para algum inteiro m, e, portanto, $p^2 = 4m^2$. Segue de (4.2) que $q^2 = 2m^2$. Logo, q^2 é par e, por conseguinte, q é par, o que nos dá uma contradição! Portanto, é impossível um racional x satisfazer (4.1).

Exemplo 4.2
Seja A o conjunto de todos os racionais positivos r tais que $r^2 < 2$ e seja B o conjunto de todos os racionais positivos r tais que $r^2 > 2$. Vamos mostrar que A *não contém um maior elemento e* B *não contém um menor elemento.*

Mais explicitamente, para todo $r \in A$ vamos mostrar que é possível encontrar um $s \in A$ tal que $r < s$; e, para todo $r \in B$, vamos mostrar que é possível encontrar um $s \in B$ tal que $s < r$.

Para isso, associamos a cada racional $r > 0$ o número (racional)

$$s = r - \frac{r^2 - 2}{r + 2} = \frac{2r + 2}{r + 2}. \tag{4.3}$$

Então

$$s^2 - 2 = \frac{2(r^2 - 2)}{(r + 2)^2} \tag{4.4}$$

Se $r \in A$, então $r^2 - 2 < 0$, (4.3) mostra que $s > r$ e (4.4) mostra que $s^2 < 2$, logo, $s \in A$.

Se $r \in B$, então $r^2 - 2 > 0$, (4.3) mostra que $0 < s < r$ e (4.4) mostra que $s^2 > 2$, logo, $s \in B$.

Os exemplos acima mostram que o sistema dos números racionais tem "falhas", "buracos". Os números irracionais são introduzidos para preencher essas "falhas", tapar esses "buracos". Essa é a razão principal do papel fundamental dos números reais na Análise.

Apesar dos buracos, o sistema dos racionais apresenta uma propriedade notável, que é a de ser *denso*. Usamos esse termo para expressar que *entre dois racionais existe sempre um outro racional.* De fato, se $r < s$, então $r < (r + s)/2 < s$.

Ainda não nos é possível afirmar que existe um número real satisfazendo a equação (4.1), dentre outras razões, porque ainda não definimos o que é o quadrado de um número real qualquer. No entanto, estamos bastante próximos de poder fazê-lo.

A relação de ordem dos números reais

Definição 4.5

Seja A um conjunto. Uma *ordem* em A é uma relação, denotada por $<$, com as duas seguintes propriedades:

1. (Tricotomia) Se $x \in A$ e $y \in A$, então uma, e somente uma, das alternativas abaixo é verdadeira:

$$x < y, \qquad x = y, \qquad y < x.$$

2. (Transitividade) Se $x, y, z \in A$, se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$.

A expressão "$x < y$" pode ser lida como "x é menor que y" ou "x precede y". Frequentemente é conveniente escrever $y > x$ em vez de $x < y$.

A notação $x \leq y$ significa $x < y$ ou $x = y$. Em outras palavras, $x \leq y$ é a negação de $x > y$.

Definição 4.6
Um *conjunto ordenado* é um conjunto A no qual está definida uma ordem.

Definição 4.7
Dados números reais positivos $x = a_0{\bullet}a_1a_2a_3\dots$ e $y = b_0{\bullet}b_1b_2b_3\dots$, dizemos que x *é menor que* y e escrevemos $x < y$ se $a_0 < b_0$ ou existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_j = b_j$, para $j = 0, \dots, k-1$, e $a_k < b_k$. Se $x \in \mathbb{R}$ é negativo ou igual a 0 e $y \in \mathbb{R}$ é positivo então, por definição, $x < y$. Se $x, y \in \mathbb{R}$ e ambos são negativos, então diremos, por definição, que $x < y$ se $-y < -x$.

Teorema 4.3
Com a relação $<$ entre números reais, dada pela Definição 4.7, $\mathbb{R}$ é um conjunto ordenado.

Prova: Claramente, a relação $<$ dada pela Definição 4.7 satisfaz as duas condições da Definição 4.5. Logo, pela Definição 4.6, $\mathbb{R}$ é um conjunto ordenado. $\square$

Cabe aqui perguntar se, de fato, coincidem, sobre os números racionais, a ordem induzida pela definição anterior, quando identificamos os racionais com suas representações decimais periódicas, e a ordem usual dos racionais, vistos como frações de inteiros. Lembremos que esta última é definida como segue. Sejam $x, y \in \mathbb{Q}$, representados como fração na forma $x = p/q$, $y = p'/q'$, com $p, p' \in \mathbb{Z}$ e $q, q' \in \mathbb{N}$. Então $x < y$ se, e somente se, $pq' < qp'$.

A seguir, enunciamos um resultado que estabelece essa coincidência. Omitiremos sua demonstração por ser um pouco extensa, embora simples. Se você tiver curiosidade poderá vê-la na seção Prossiga ao final desta aula.

Teorema 4.4
A relação $x < y$ dada pela Definição 4.7 para os números reais coincide com a relação de ordem usual dos números racionais se $x, y \in \mathbb{Q}$.

O resultado a seguir mostra que $\mathbb{R}$, com a ordem dada pela Definição 4.7, também possui a propriedade de ser denso, apresentada pelos racionais, como vimos anteriormente.

Teorema 4.5 (Teorema da Densidade)
Dados dois números reais a, b, com $a < b$, existe $\xi \in \mathbb{R}$ satisfazendo $a < \xi < b$. Mais ainda, podemos tomar ξ em $\mathbb{Q}$ ou em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ conforme nossa vontade.

Prova: Bastará analisar o caso em que x e y são positivos. Suponhamos $a = a_0{\bullet}a_1a_2a_3\dots$ e $b = b_0{\bullet}b_1b_2b_3\dots$. Como $a < b$, ou $a_0 < b_0$, ou existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_j = b_j$, $j = 0, 1, \dots, k-1$, e $a_k < b_k$. Por concretude, suponhamos que aconteça o segundo caso, isto é, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_j = b_j$, $j = 0, 1, \dots, k-1$, e $a_k < b_k$; o primeiro caso pode ser tratado do mesmo modo. Obtemos um racional ξ, com $a < \xi < b$, fazendo

$$\xi = a_0{\bullet}a_1a_2\dots a_k\dots a_{m-1}(a_m+1)000\dots,$$

onde $m > k$ é tal que $a_m < 9$, o qual sabemos existir, pois a não é decimal redundante.

Para obter um irracional ξ satisfazendo $a < \xi < b$, tomamos para ξ o decimal não-periódico

$$\xi = a_0{\bullet}a_1a_2\dots a_k\dots a_{m-1}(a_m+1)01\underbrace{00}_{2\times}1\underbrace{000}_{3\times}1\underbrace{0000}_{4\times}1\underbrace{00000}_{5\times}1\underbrace{\dots}_{\dots},$$

onde, como antes, $m > k$ é tal que $a_m < 9$. $\square$

Usamos as seguintes notações que definem os diversos tipos de intervalos de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},\\
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\},\\
(a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\},\\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\},\\
(-\infty,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\},\\
(-\infty,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \le b\},\\
(a,+\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\},\\
[a,+\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x \ge a\},\\
(-\infty,+\infty) &:= \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Chamamos atenção para o fato de que $-\infty$ e $+\infty$ são apenas símbolos convenientes, que se lêem “menos infinito” e “mais infinito”; não representam, em hipótese alguma, números reais.

Na lista de tipos de intervalos de $\mathbb{R}$ que acabamos de dar, os quatro primeiros são ditos *limitados*, ao passo que os cinco últimos são ditos *ilimitados*. O primeiro, o quinto e o sétimo intervalos são ditos *abertos*, ao passo que o segundo, o sexto e o oitavo são ditos *fechados*.

A Não-Enumerabilidade dos Reais

A seguir, vamos dar uma prova da não-enumerabilidade de $\mathbb{R}$ devida a Cantor. Mais uma vez, assistiremos a um brilhante ataque pela diagonal!

Teorema 4.6
O intervalo unitário aberto $(0,1) := \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ não é enumerável.

Prova: A prova é por contradição. Se $x \in (0,1)$ então

$$x = 0 \bullet a_1 a_2 a_3 \ldots .$$

Suponhamos que exista uma enumeração $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$ de todos os números em $(0,1)$, a qual disporemos na forma:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0\bullet a_{11}a_{12}a_{13}\ldots a_{1n}\ldots,\\
x_2 &= 0\bullet a_{21}a_{22}a_{23}\ldots a_{2n}\ldots,\\
x_3 &= 0\bullet a_{31}a_{32}a_{33}\ldots a_{3n}\ldots,\\
&\ldots\quad \ldots\quad \ldots\\
x_n &= 0\bullet a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots a_{nn}\ldots,\\
&\ldots\quad \ldots\quad \ldots
\end{aligned}$$

Agora definimos um número real $y := 0\bullet b_1 b_2 b_3 \ldots b_n \ldots$, pondo $b_1 := 2$, se $a_{11} \geq 5$, e $b_1 := 7$, se $a_{11} \leq 4$; em geral, definimos

$$b_n := \begin{cases} 2 & \text{se } a_{nn} \geq 5, \\ 7 & \text{se } a_{nn} \leq 4. \end{cases}$$

Então, $y \in (0,1)$. Como y e x_n diferem na n-ésima casa decimal, então, $y \neq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, y não está incluído na enumeração de $(0,1)$, o que nos dá a contradição desejada. $\square$

Supremos e Ínfimos

Definição 4.8
Seja C um conjunto ordenado e $B \subset C$. Se existe $y \in C$ tal que $x \leq y$ para todo $x \in B$, então dizemos que B é *limitado superiormente* e chamamos y uma *cota superior* de B. Se existe $z \in C$ tal que $z \leq x$ para todo $x \in B$, então dizemos que B é *limitado inferiormente* e chamamos z uma *cota inferior* de B.

A seguir uma definição de importância fundamental para tudo que se seguirá no curso de Análise Real.

Definição 4.9
Suponhamos que C seja um conjunto ordenado, $B \subset C$ e B é limitado superiormente. Suponhamos que exista um $\alpha \in C$ com as seguintes propriedades:

(i) α é uma cota superior de B.

(ii) Se $y < \alpha$, então y não é uma cota superior de B.

Então, α é chamado *supremo* de B.

Existe, no máximo, um supremo. De fato, se α e β são dois supremos de B, devemos ter, por (ii), $\beta \geq \alpha$, já que β é cota superior, por (i), e, de novo por (ii), $\alpha \geq \beta$, já que α é cota superior, por (i). Logo, $\alpha = \beta$. Escrevemos

$$\alpha = \sup B.$$

A definição a seguir é o análogo da definição anterior no caso das cotas inferiores.

Definição 4.10
Suponhamos que C seja um conjunto ordenado, $B \subset C$ e B é limitado inferiormente. Suponhamos que exista um $\alpha \in C$ com as seguintes propriedades:

(i) α é uma cota inferior de B.

(ii) Se $y > \alpha$ então y não é uma cota inferior de B.

Então, α é chamado *ínfimo* de B.

Da mesma forma que para o supremo, existe, no máximo, um ínfimo. Escrevemos

$$\alpha = \inf B.$$

Exemplos 4.1

(a) Consideremos os conjuntos A e B do Exemplo 4.2 como subconjuntos do conjunto ordenado $\mathbb{Q}$. O conjunto A é limitado superiormente. De fato, as cotas superiores de A são exatamente os elementos de B. Como B não contém nenhum menor elemento, *A não possui supremo em $\mathbb{Q}$*. Analogamente, B é limitado inferiormente. O conjunto das cotas inferiores de B consiste de A e todos os $r \in \mathbb{Q}$ com $r \leq 0$. Como A não possui um maior elemento, *B não possui ínfimo em $\mathbb{Q}$*.

(b) Se $\alpha = \sup B$ existe, então α pode ou não ser membro de B. Por exemplo, seja B_1 o conjunto de todos os $r \in \mathbb{Q}$ com $r < 0$, e B_2 o conjunto de todos $r \in \mathbb{Q}$ com $r \leq 0$. Então,

$$\sup B_1 = \sup B_2 = 0,$$

e $0 \notin B_1$, mas $0 \in B_2$.

(c) Seja $B \subset \mathbb{Q}$ o conjunto dos números da forma $1/n$, onde $n = 1, 2, 3, \ldots$. Então $\sup B = 1$, o qual pertence a B, e $\inf B = 0$, que não pertence a B.

Definição 4.11
Dizemos que um conjunto ordenado C tem a *propriedade do supremo* se para todo conjunto $B \subset C$ tal que B não é vazio e B é limitado superiormente, então existe o $\sup B$ em C.

O Exemplo 4.1(a) mostra que $\mathbb{Q}$ não tem a propriedade do supremo.

O resultado a seguir mostra que não é necessário definir o que venha a ser um conjunto ordenado C ter a "propriedade do ínfimo", em analogia à propriedade do supremo. Ele mostra, em suma, que a propriedade do supremo implica a "propriedade do ínfimo".

Teorema 4.7
Suponhamos que C seja um conjunto ordenado com a propriedade do supremo. Seja $B \subset C$ tal que B não é vazio e B é limitado inferiormente. Seja A o conjunto de todas as cotas inferiores de B. Então,

$$\alpha = \sup A$$

existe em C e $\alpha = \inf B$. Em particular, $\inf B$ existe em C.

Prova: Como B é limitado inferiormente, A não é vazio. Como A consiste exatamente daqueles $y \in C$ que satisfazem $y \leq x$ para todo $x \in B$, vemos que todo $x \in B$ é uma cota superior de A. Assim, A é limitado superiormente. Como, por hipótese, C tem a propriedade do supremo, temos que $\sup A$ existe em C. Seja $\alpha = \sup A$. Vamos mostrar que $\alpha = \inf B$.

Se $\gamma < \alpha$, então, pela Definição 4.9, γ não é uma cota superior de A e, portanto, $\gamma \notin B$. Segue que $\alpha \leq x$ para todo $x \in B$. Logo, $\alpha \in A$. Se $\alpha < \beta$, então $\beta \notin A$, já que α é uma cota superior de A. Em outras palavras, α é uma cota inferior de B e, se $\beta > \alpha$, então β não é cota inferior de B. Isso significa que $\alpha = \inf B$, como queríamos mostrar. $\square$

O fato de um conjunto ordenado C ter a propriedade do supremo também pode ser expresso dizendo-se que C é *completo*.

Exercícios 4.1

1. Mostre que se $a_k, b_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ e se
$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \cdots + \frac{b_m}{10^m} \neq 0,$$
então $n = m$ e $a_k = b_k$, para $k = 1, \ldots, n$.

2. Ache a representação decimal de $-\frac{13}{11}$.

3. Expresse $\frac{1}{7}$ e $\frac{2}{19}$ como decimais periódicos.

4. Que racionais são representados pelos decimais periódicos
$$1{\bullet}25137137\ldots137\ldots \quad \text{e} \quad 35{\bullet}14653653\ldots653\ldots?$$

5. Mostre que se $F \subset \mathbb{Q}$ é finito, então $\sup F = \max F$, $\inf F = \min F$, onde $\max F$ e $\min F$ são, respectivamente, o maior elemento (máximo) e o menor elemento (mínimo) de F.

6. Para cada um dos intervalos abaixo, diga quais são limitados superiormente, quais são limitados inferiormente e diga em cada caso, justificando, se existem em $\mathbb{R}$ e, caso existam, quem são o supremo e/ou o ínfimo:
$$\begin{array}{lr}
\text{(i)} & (a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \\
\text{(ii)} & [a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \\
\text{(iii)} & (a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \\
\text{(iv)} & [a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \\
\text{(v)} & (-\infty,b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}, \\
\text{(vi)} & (-\infty,b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}, \\
\text{(vii)} & (a,+\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \\
\text{(viii)} & [a,+\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}.
\end{array}$$

7. Prove que a equação $x^2 = 3$ não possui solução racional. Defina os subconjuntos de $\mathbb{Q}$,
$$A := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 3\} \qquad B := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 3\},$$

e mostre que A é limitado superiormente, mas não possui supremo em $\mathbb{Q}$, ao passo que B é limitado inferiormente, mas não possui ínfimo em $\mathbb{Q}$.

Prossiga: A ordem usual dos racionais e a ordem dos decimais

Prova do Teorema 4.4 Inicialmente, vamos provar que se $x, y \in \mathbb{Q}$ e $x < y$, de acordo com a Definição 4.7, então $x < y$ no sentido usual para números racionais: se $x = p/q$ e $y = p'/q'$, com $p, p' \in \mathbb{Z}$ e $q, q' \in \mathbb{N}$, então $x < y$ se, e somente se, $pq' < qp'$.

Vamos ilustrar essa afirmação com um exemplo. De acordo com a Definição 4.7, temos

$$x := 5{\bullet}42323\ldots23\cdots < y := 5{\bullet}4234234\ldots234\ldots.$$

Vamos proceder como na demonstração do Teorema 4.1, porém, desta feita, como temos dois decimais periódicos com períodos distintos (2 e 3, respectivamente), vamos multiplicar ambos por $10^7 - 10 = 9999990$ (note que 6 é o mínimo múltiplo comum de 2 e 3). Obtemos, desse modo, os seus múltiplos inteiros $9999990x = 54232323 - 54$ e $9999990y = 54234234 - 54$. Assim, temos

$$x = \frac{54232323 - 54}{9999990} \quad \text{e} \quad y = \frac{54234234 - 54}{9999990}.$$

Fica, então, evidente que, de fato, $x < y$, como queríamos mostrar.

O argumento que acabamos de dar, para demonstrar nesse exemplo particular que a noção de ordem dada pela Definição 4.7 implica a noção de ordem usual, pode ser perfeitamente adaptado para demonstrar que, se $x, y \in \mathbb{Q}$ e $x < y$, de acordo com a Definição 4.7, então $x < y$ no sentido usual da ordem entre os números racionais descrito anteriormente.

Reciprocamente, se $x, y \in \mathbb{Q}$, $x = p/q$, $y = p'/q'$, $p, p' \in \mathbb{Z}$, $q, q' \in \mathbb{N}$, e $x < y$ no sentido que $pq' < qp'$, então vale também $x < y$ no sentido da Definição 4.7. Para simplicar, vamos considerar apenas o caso em que $0 < x < y$ no qual podemos supor $p, q, p', q' \in \mathbb{N}$.

Observemos que a representação decimal de x fornecida pelo algoritmo da divisão $p \div q$ é a mesma fornecida pela divisão $pq' \div qq'$. Da mesma forma, a representação decimal de y fornecida pelo algoritmo da divisão $p' \div q'$ é a mesma fornecida pela divisão $p'q \div qq'$. Observe também que, no caso das divisões $pq' \div qq'$ e $p'q \div qq'$, os divisores são iguais, ao passo que o dividendo da primeiro é menor que o dividendo da segunda.

Portanto, o primeiro quociente obtido pelo algoritmo da divisão para $pq' \div qq'$ será no máximo igual ao primeiro quociente obtido para $p'q \div qq'$.

Se ele for de fato menor na primeira divisão que na segunda, então teremos $x < y$ de acordo com a Definição 4.7.

Se for igual, o resto da primeira divisão terá sido menor do que o resto da segunda divisão e, portanto, o segundo quociente da divisão $pq' \div qq'$ será no máximo igual ao segundo quociente da divisão $p'q \div qq'$.

Se ele for menor na primeira divisão que na segunda, então teremos $x < y$ de acordo com a Definição 4.7.

Se for igual, o resto da primeira divisão terá sido menor do que o resto da segunda divisão e, portanto, o terceiro quociente da divisão $pq' \div qq'$ será no máximo igual ao terceiro quociente da divisão $p'q \div qq'$ etc.

Continuando esse processo, em no máximo qq' passos teremos chegado a um ponto em que o quociente obtido na divisão $pq' \div qq'$ terá sido menor que o quociente correspondente na divisão $p'q \div qq'$, ao mesmo tempo em que todos os quocientes anteriores terão sido iguais para ambas as divisões. Poderemos, então, de qualquer modo, concluir que $x < y$, de acordo com a Definição 4.7. $\square$

Aula 5 – Os Números Reais II

Metas da aula: Enunciar o fundamental Teorema do Supremo para os números reais. Definir as operações de adição, subtração, produto e divisão no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Mostrar que $\mathbb{R}$ com essas operações satisfaz as propriedades de um corpo ordenado. Estabelecer a caracterização dos reais como um corpo ordenado completo. Fazer uma breve discussão sobre a propriedade dos intervalos encaixados.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber o enunciado do Teorema do Supremo e seu uso na demonstração de proposições simples sobre os números reais.
- Em particular, saber demonstrar as propriedades elementares das operações com os números reais.
- Saber o significado e o uso da propriedade dos intervalos encaixados.

Introdução

Nesta aula vamos tornar mais rigorosa nossa discussão sobre os números reais iniciada na aula passada. O ponto de partida fundamental para tal construção é o Teorema do Supremo. Ele nos permitirá definir de maneira rigorosa as operações entre os números reais e também demonstrar suas propriedades. A partir daí, torna-se possível uma caracterização do conjunto dos números reais que dispensa qualquer referência a uma forma específica dos seus elementos.

O Teorema do Supremo e as Operações nos Reais

Começaremos nossa aula enunciando um resultado que estabelece uma propriedade fundamental de $\mathbb{R}$, exatamente aquela que dá a $\mathbb{R}$ uma estrutura superior à dos números racionais e que possibilita todo o desenvolvimento posterior da Análise Real.

Há dois métodos clássicos consagrados de demonstrar esse resultado, ambos exigindo uma grande dose de abstração. Um deles, que é através da introdução dos chamados *cortes*, é devido a R. Dedekind (1831-1916), motivo pelo qual o processo ficou conhecido como “cortes de Dedekind”. O outro, que é através de classes de equivalência de seqüências de Cauchy, conceito este que será estudado em aulas futuras, é devido a Cantor, nome que já encontramos diversas vezes nas aulas anteriores. Deixaremos sua demonstração para a seção Prossiga ao fim desta aula, onde faremos uma exposição resumida do processo devido a Dedekind.

Vejamos agora o enunciado do importantíssimo Teorema do Supremo.

Teorema 5.1 (Teorema do Supremo)
O conjunto ordenado $\mathbb{R}$ tem a propriedade do supremo.

De posse do Teorema do Supremo, agora nos é possível definir as operações de adição, subtração, produto e divisão nos reais.

Definição 5.1
Dados $a, b \in \mathbb{R}$, sejam

$$A := (-\infty, a) \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x < a\},$$
$$B := (-\infty, b) \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x < b\}.$$

Ponhamos

$$A + B := \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x = r + s,\ r \in A,\ s \in B\}.$$

Definimos

$$a + b := \sup(A + B). \tag{5.1}$$

Para $a, b \in (0, +\infty)$, sejam

$$A_+ := (0, a) \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, 0 < x < a\},$$
$$B_+ := (0, b) \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, 0 < x < b\}.$$

Ponhamos

$$A_+ \cdot B_+ := \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x = rs,\ r \in A_+,\ s \in B_+\},$$
$$1/A_+ := \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x = 1/r,\ r \in A_+\}.$$

Definimos

$$a \cdot b := \sup(A_+ \cdot B_+) \tag{5.2}$$
$$1/a := \inf 1/A_+ \tag{5.3}$$

Para $a, b \in \mathbb{R}$, definimos

$$a - b := a + (-b), \tag{5.4}$$
$$0 \cdot a = a \cdot 0 := 0, \tag{5.5}$$

e, para $a, b \in (0, +\infty)$,

$$a \cdot (-b) = (-a) \cdot b := -(a \cdot b), \tag{5.6}$$

$$(-a) \cdot (-b) := a \cdot b, \tag{5.7}$$

$$1/(-a) := -(1/a). \tag{5.8}$$

Se $b \neq 0$, definimos

$$a/b := a \cdot (1/b). \tag{5.9}$$

Na definição anterior, observe que os conjuntos $A+B$ e $A_+ \cdot B_+$ são não-vazios e limitados superiormente, portanto, pelo Teorema 5.1, os supremos nas definições de $a+b$ e $a \cdot b$ existem. Observe também que o conjunto $1/A_+ := \{x \in \mathbb{Q} : x = 1/r,\ r \in A_+\}$ não é limitado superiormente, mas é limitado inferiormente (por quê?); a existência do ínfimo é garantida pelo Teorema 5.1.

Os quatro resultados seguintes se destinam, em particular, a mostrar que a Definição 5.1 é coerente com (a), (b), (c) e (d) da Definição 4.3.

Teorema 5.2
As operações de adição e multiplicação em $\mathbb{R}$, dadas pela Definição 5.1, coincidem com as operações correspondentes em $\mathbb{Q}$ quando $a, b \in \mathbb{Q}$. Isso confirma (a) da Definição 4.3.

Prova: A afirmação segue imediatamente da densidade de $\mathbb{Q}$ e das definições para $a+b$ e $a \cdot b$ na Definição 5.1, já que, nesse caso, $A+B = (-\infty, a+b) \cap \mathbb{Q}$ e $A_+ \cdot B_+ = (-\infty, ab) \cap \mathbb{Q}$, como é fácil constatar. □

Teorema 5.3
Se $r \in \mathbb{Q}$ e $B \subset \mathbb{Q}$, B não-vazio e limitado superiormente, então

$$r + \sup B = (\sup B) + r = \sup(B + r). \tag{5.10}$$

Prova: Observe inicialmente que tanto $r + \sup B$ como $(\sup B) + r$ são cotas superiores de $B + r$. Além disso, se $\beta < r + \sup B$, então existe $s \in \mathbb{Q}$ com $\beta < s < r + \sup B$, pela densidade de $\mathbb{Q}$. Como, $s - r < \sup B$ existe $t \in B$ tal que $s - r < t$. Logo, $\beta < s < r + t$ e $r + t \in r + B$, donde β não é cota superior de $r + B$, se $\beta < r + \sup B$. Da mesma forma, β não é cota superior de $r + B$ se $\beta < (\sup B) + r$. Concluímos que vale (5.10). □

Teorema 5.4
Se $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, $B \subset \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$, B não é vazio e é limitado superiormente, então

$$r \cdot \sup B = (\sup B) \cdot r = \sup(r \cdot B), \tag{5.11}$$

onde

$$r \cdot B := \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x = rs, \text{ para algum } s \in B\}.$$

Decorre daí, em particular, a confirmação de (b) da Definição 4.3.

Prova: A primeira igualdade em (5.11) decorre da própria Definição 5.1, já que se $\tilde{A}_+ := (0, r) \cap \mathbb{Q}$ e $\tilde{B}_+ := (0, \sup B) \cap \mathbb{Q}$, então, claramente,

$$\tilde{A}_+ \cdot \tilde{B}_+ = \tilde{B}_+ \cdot \tilde{A}_+ = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x = rs,\ r \in \tilde{A}_+,\ s \in \tilde{B}_+\},$$

e $r \cdot \sup B = \sup(\tilde{A}_+ \cdot \tilde{B}_+)$ ao passo que $(\sup B) \cdot r = \sup(\tilde{B}_+ \cdot \tilde{A}_+)$.

Provemos a segunda igualdade em (5.11). Primeiro, notemos que $r \cdot \sup B$ é cota superior de $r \cdot B$. De fato, se $x \in r \cdot B$, então $x = rs$ para algum $s \in B$. Como $B \subset \tilde{B}_+$ e $r = \sup \tilde{A}_+$, segue que $x \le r \cdot \sup B$.

Façamos $\alpha := r \cdot \sup B$. Dado qualquer $\beta < \alpha$ com $\beta > 0$, temos que existe $\xi \in \mathbb{Q}$ com $\beta < \xi < \alpha$. Mas então existe $\xi' \in \tilde{A}_+ \cdot \tilde{B}_+$ tal que $\xi < \xi' < \alpha$. Em particular, $\xi' = r's'$ onde $r' < r$ e $s' < \sup B$. Logo, $\xi' < rs$, para algum $s \in B$. Como $\beta < \xi' < rs$, com $rs \in r \cdot B$, segue que β não é cota superior de $r \cdot B$. Portanto, $\alpha = \sup(r \cdot B)$, o que prova (5.11).

Se $r = 10^k$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e $B = (0, x) \cap \mathbb{Q}$ para um dado número real $x > 0$, a relação (5.11) nos dá

$$10^k \cdot x = \sup(10^k \cdot B).$$

Seja $x = a_0 \bullet a_1 a_2 a_3 \dots$. Se $r \in B$, então existe $m \in \mathbb{N}$, com $m > k$, tal que $r < a_0 \bullet a_1 a_2 \dots a_m < x$. Logo, $10^k r \in 10^k \cdot B$ e

$$10^k r < a_0 a_1 \dots a_k \bullet a_{k+1} \dots a_m < a_0 a_1 \dots a_k \bullet a_{k+1} \dots a_m a_{m+1} \dots,$$

onde $a_0 a_1 \dots a_k$ representa o inteiro $N = a_0 \cdot 10^k + a_1 \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_k$. Logo, $a_0 a_1 \dots a_k \bullet a_{k+1} a_{k+2} \dots$ é uma cota superior de $10^k \cdot B$.

Por outro lado, é fácil ver que se $\beta < \alpha := a_0 a_1 \dots a_k \bullet a_{k+1} a_{k+2} \dots$, então $\beta < a_0 a_1 \dots a_k \bullet a_{k+1} \dots a_m = 10^k a_0 \bullet a_1 a_2 \dots a_m$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Como $10^k a_0 \bullet a_1 a_2 \dots a_m \in 10^k \cdot B$, então β não é cota superior de $10^k \cdot B$. Logo, $\alpha = \sup(10^k \cdot B) = 10^k \cdot x$, o que confirma (b) da Definição 4.3. $\square$

Teorema 5.5
A Definição 5.1 também é coerente com (d) da Definição 4.3.

Prova: Suponhamos a e b ambos positivos com representações decimais coincidindo à direita de "$\bullet$",

$$a = a_0 \bullet a_1 a_2 a_3 \dots, \qquad b = b_0 \bullet a_1 a_2 a_3 \dots.$$

Para fixar ideias, suponhamos $a_0 > b_0$. Devemos provar que $a - b = a_0 - b_0$. Seja $A = (-\infty, a) \cap \mathbb{Q}$, $\mathcal{B} = (b, +\infty) \cap \mathbb{Q}$ e $A - \mathcal{B} = A + (-\mathcal{B})$, isto é,

$$A - \mathcal{B} = \{x \in \mathbb{Q} : x = r + s,\ r < a,\ s < -b\}.$$

Temos

$$a - b = a + (-b) = \sup(A - \mathcal{B}).$$

Consideremos as sucessões de elementos de $\mathbb{Q}$, $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots < a$ e $s_1 < s_2 < \cdots < s_n < \cdots < -b$, dadas por

$$\begin{array}{ll}
r_1 := a_0{\bullet}a_1, & s_1 := -b_0{\bullet}(a_1 + 1), \\
r_2 := a_0{\bullet}a_1a_2, & s_2 := -b_0{\bullet}a_1(a_2 + 1), \\
r_3 := a_0{\bullet}a_1a_2a_3, & s_3 := -b_0{\bullet}a_1a_2(a_3 + 1), \\
\dots\ \dots\ \dots\ \dots & \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\
r_n := a_0{\bullet}a_1a_2\dots a_n, & s_n = -b_0{\bullet}a_1a_2\dots(a_n + 1) \\
\dots\ \dots\ \dots\ \dots & \dots\ \dots\ \dots\ \dots,
\end{array}$$

onde, nas representações para s_n, $n = 1, 2, 3, \dots$, adotamos a convenção que, quando $a_k = 9$, a representação decimal de s_k terminando com $a_k + 1$ deve ser substituída pela representação decimal correta. Esta última, como sabemos, é obtida pela regra que manda pôr 0 na k-ésima casa decimal e somar 1 à casa decimal imediatamente anterior, procedendo dessa forma até a primeira casa decimal anterior à k-ésima cujo algarismo correspondente seja menor que 9 ou, se não existir tal casa, concluir o processo substituindo $-b_0$ por $-(b_0 + 1)$.

Dado $r \in A$ qualquer, é possível encontrar $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $r < r_n < a$ para todo $n > n_1$ (por quê?). Da mesma forma, dado qualquer $s \in -\mathcal{B}$, é possível encontrar $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $s < s_n < -b$ para todo $n > n_2$. Assim, dado qualquer $x \in A - \mathcal{B}$, $x = r + s$, com $r \in A$, $s \in -\mathcal{B}$, e, portanto, se $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, então $x < r_n + s_n < a - b$ para todo $n > n_0$. Assim, $a - b = \sup(R + S)$, onde $R + S := \{r_1 + s_1, r_2 + s_2, r_3 + s_3, \dots\}$. Agora, verificamos facilmente que

$$r_n + s_n = (a_0 - b_0 - 1){\bullet}999\dots9000\dots,$$

onde todas as casas decimais à direita do ponto decimal, até a n-ésima, são iguais a 9 e todas as seguintes são iguais a 0. Daí segue que

$$a - b = a_0 - b_0.$$

De fato, $a_0 - b_0$ é uma cota superior de $R+S$. Além disso, se $y < a_0 - b_0$, então, pela densidade de $\mathbb{Q}$, existe $q \in \mathbb{Q}$ com $y < q < a_0 - b_0$, e, usando a representação decimal de q, deduzimos facilmente que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $q < r_n + s_n$ para todo $n > n_0$. Logo, se $y < a_0 - b_0$, y não é cota superior de $R+S$, e, portanto,

$$a_0 - b_0 = \sup(R+S) = a - b,$$

como queríamos mostrar. $\square$

Antes de passarmos à verificação das propriedades das operações de adição e multiplicação em $\mathbb{R}$, introduzidas na Definição 5.1, vamos enunciar um resultado que estabelece um fato conhecido como Propriedade Arquimediana de $\mathbb{R}$, cuja demonstração decorre diretamente do Teorema 5.4.

Teorema 5.6 (Propriedade Arquimediana)
Se $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, e $x > 0$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$nx > y.$$

Prova: Claramente, podemos supor $y > 0$. Seja $y = b_0 \bullet b_1 b_2 b_3 \dots$ e $x = a_0 \bullet a_1 a_2 a_3 \dots$. Como, pelo Teorema 5.4, $10^k x = a_0 a_1 a_2 \dots a_k \bullet a_{k+1} a_{k+2} \dots$, basta tomar $n = 10^k$, com k grande o suficiente, de modo que $a_0 a_1 a_2 \dots a_k \geq b_0 + 1 > y$, o que sempre é possível. $\square$

Propriedades Algébricas e Caracterização dos Reais

O resultado seguinte estabelece as propriedades fundamentais das operações de adição e multiplicação em $\mathbb{R}$, definidas anteriormente.

Teorema 5.7
As operações de adição $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e multiplicação $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} :\to \mathbb{R}$, definidas conforme a Definição 5.1, satisfazem as seguintes propriedades:

(A) Propriedades da Adição

(A1) Se $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, então $a + b \in \mathbb{R}$.

(A2) Comutatividade da adição: $a + b = b + a$ para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

(A3) Associatividade da adição: $(a + b) + c = a + (b + c)$ para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(A4) $\mathbb{R}$ contém um elemento 0 tal que $0 + a = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(A5) Para todo $a \in \mathbb{R}$ existe um elemento $-a \in \mathbb{R}$ tal que $a+(-a) = 0$.

(M) Propriedades da Multiplicação

(M1) Se $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, então o produto $a \cdot b \in \mathbb{R}$.

(M2) Comutatividade da multiplicação: $a \cdot b = b \cdot a$ para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

(M3) Associatividade da multiplicação: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (a \cdot c)$ para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(M4) $\mathbb{R}$ contém um elemento $1 \neq 0$ tal que $1 \cdot a = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(M5) Para todo $a \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, existe um elemento $1/a \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot (1/a) = 1$.

(D) A Lei Distributiva

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Um conjunto C dotado de operações $+$ e $\cdot$ satisfazendo **(A)**, **(M)** e **(D)** é uma estrutura algébrica chamada *corpo*. Em particular, $\mathbb{R}$ é um corpo.

Prova: As propriedades (A1) e (M1) seguem imediatamente do Teorema do Supremo. Vamos provar (A3) e (M3); as demais serão deixadas como exercício.

(A3) Devemos mostrar que $a + (b + c) = (a + b) + c$ para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$. Consideremos os conjuntos A e B dados na Definição 5.1 e definimos $C = (-\infty, c) \cap \mathbb{Q}$. Vamos mostrar que

$$(a + b) + c = \sup(A + B + C) = a + (b + c) \text{ para todos } a, b, c \in \mathbb{R}. \quad (5.12)$$

Observe que os conjuntos A, B e C são subconjuntos de $\mathbb{Q}$ e, como a adição em $\mathbb{Q}$ é associativa, podemos escrever $(A+B)+C = A+(B+C) = A+B+C$. Mostremos, então, a primeira igualdade em (5.12). Temos de provar que

$$\sup(\sup(A + B) + C) = \sup(A + B + C).$$

Denotemos $\alpha := \sup(\sup(A + B) + C)$. Para todo $x \in A + B + C$, temos $x = r + s + t$, com $r \in A$, $s \in B$ e $t \in C$. Em particular, $x = (r + s) + t \leq \sup(A + B) + t \leq \alpha$; portanto, α é uma cota superior de $A + B + C$.

Suponhamos que $\beta \in \mathbb{R}$ e $\beta < \alpha$. Vamos mostrar que β não é cota superior de $A + B + C$. Com efeito, pelo Teorema 4.5, existe um $p \in \mathbb{Q}$ satisfazendo $\beta < p < \alpha$. Como $\alpha = \sup(\sup(A+B)+C)$, pelas propriedades do supremo, existe um $t \in C$ tal que $p < \sup(A+B)+t = \sup(A+B+t)$, onde usamos o Teorema 5.3 na última igualdade. Pelas propriedades do supremo, existem $r \in A$, $s \in B$ tais que $p < r + s + t$, e $r + s + t \in A + B + C$. Como, $\beta < p < r + s + t$, concluímos que β não é cota superior de $A + B + C$, se $\beta < \sup(\sup(A+B)+C)$. Portanto, fica provado que $\sup(\sup(A+B)+C) = \sup(A + B + C)$.

Da mesma forma, verificamos que $\sup(A+\sup(B+C))$ é cota superior de $A+B+C$ e, se $\beta < \sup(A+\sup(B+C))$, então β não é cota superior de $A+B+C$. Segue desses fatos que vale $\sup(A+\sup(B+C)) = \sup(A+B+C)$, o que conclui a prova de (5.12). Em particular, vale (A3).

(M3) O caso em que $0 \in \{a, b, c\}$ é imediato. Assim, basta analisar o caso $0 \notin \{a, b, c\}$. Mais ainda, basta considerar o caso em que a, b e c são positivos, em vista de (5.6) e (5.7). Neste caso, a demonstração é totalmente análoga à de (A3). $\square$

Definição 5.2

1. Um *corpo ordenado* é um corpo C, com relação às operações $+$ e $\cdot$ nele definidas, o qual também é um conjunto ordenado, segundo uma relação de ordem $<$ nele definida, tal que:

   (i) se $x, y, z \in C$ e $y < z$ então $x + y < x + z$,

   (ii) se $x, y \in C$, $x > 0$ e $y > 0$, então $xy > 0$.

   Se $x > 0$, dizemos que x é *positivo*, e se $x < 0$, dizemos que x é *negativo*.

2. Um corpo C que satisfaz a propriedade do supremo é dito um corpo *completo*.

Teorema 5.8
$\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo.

Prova: Basta provar que as operações $+, \cdot$, e a ordem $<$ de $\mathbb{R}$ satisfazem (i) e (ii) na Definição 5.2.

(i) Se $y < z$, então $A := (-\infty, y) \cap \mathbb{Q} \subsetneq B := (-\infty, z) \cap \mathbb{Q}$. Seja $C := (-\infty, x) \cap \mathbb{Q}$. Claramente, temos $A+C \subsetneq B+C$. Mais ainda, vamos mostrar que a densidade de $\mathbb{Q}$ implica que existe $r \in B + C$ tal que $r > x + y$. Basta tomar $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x + y < r < x + z$. Como $r < x + z$, r não é cota superior de $B + C$ e, portanto, existem $p \in B$ e $q \in C$ tal que $r < p + q$. Logo, $r - p < q < x$, donde $r - p \in C$ e, então, $r = p + (r - p) \in B + C$. Segue daí que

$$x + y = \sup(A + C) < \sup(B + C) = x + z.$$

(ii) Segue imediatamente da definição. $\square$

Notação: No que segue, em vez de $x \cdot y$ vamos simplesmente escrever xy. Também vamos denotar $x^2 := xx$, $x^3 := xxx$. De modo geral, podemos definir, por indução, $x^1 = x$ e $x^{n+1} = xx^n$.

Uma vez estabelecida a caracterização de $\mathbb{R}$ como corpo ordenado completo, é perfeitamente possível desenvolver toda a Análise Real sem jamais precisar fazer qualquer referência à nossa definição de números reais como decimais; esse será, naturalmente, nosso procedimento daqui para diante. De fato, embora não vamos fazê-lo aqui, é possível provar que se C_1 e C_2 são dois corpos ordenados completos quaisquer, então eles são isomorfos. Com isso, queremos dizer que existe uma bijeção ϕ de C_1 sobre C_2, tal que $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$, $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$. Em particular, pode-se mostrar sem muita dificuldade que para um tal isomorfismo vale $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$, $\phi(-x) = -\phi(x)$, $\phi(1/x) = 1/\phi(x)$, se $x \neq 0$, e $\phi(x) > 0$ se $x > 0$.

Mais ainda, decorre também dessas observações que todo corpo ordenado completo contém $\mathbb{Q}$ como um subcorpo; isto é, contém um subcorpo isomorfo a $\mathbb{Q}$, que, para todos os efeitos, podemos perfeitamente considerar como sendo o próprio $\mathbb{Q}$.

Logo, o que importa não é a forma que os elementos de $\mathbb{R}$ têm individualmente, mas as propriedades das operações $+$ e $\cdot$, da relação de ordem $<$, e o fato de que vale a propriedade do supremo!

Existência de $\sqrt{2}$

Mostramos, na aula passada, que a equação $x^2 = 2$ não possui solução em $\mathbb{Q}$. Vamos mostrar, a seguir, que a mesma equação possui solução em $\mathbb{R}$.

Teorema 5.9
Existe um número real positivo x tal que $x^2 = 2$.

Prova: Lembremos que $[0, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Seja $A := \{y \in [0, +\infty) : y^2 < 2\}$. Como $1 \in A$, este último não é vazio. Outrossim, A é limitado superiormente, pois se $z > 2$, então $z^2 > 4$, de modo que $z \notin A$. Portanto, a propriedade do supremo implica que A tem um supremo em $\mathbb{R}$. Seja $x := \sup A$. Observe que $x > 1$. Mostraremos que $x^2 = 2$ mostrando que são falsas as duas outras possibilidades: $x^2 < 2$ e $x^2 > 2$.

Primeiramente, suponhamos $x^2 < 2$. Mostraremos que essa hipótese nos permite achar $n \in \mathbb{N}$ tal que $x + 1/n \in A$, contradizendo o fato de que, sendo $x = \sup A$, x é cota superior de A. Para saber como escolher tal n, observemos que $1/n^2 \leq 1/n$, de modo que

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \leq x^2 + \frac{1}{n}(2x + 1). \tag{5.13}$$

Portanto, se pudermos escolher n, de modo que

$$\frac{1}{n}(2x + 1) < 2 - x^2, \tag{5.14}$$

então teremos $(x+1/n)^2 < x^2 + (2 - x^2) = 2$. Por hipótese, temos $2 - x^2 > 0$, de modo que $(2 - x^2)/(2x + 1) > 0$. Logo, a Propriedade Aquimediana nos permite encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} < \frac{2 - x^2}{2x + 1}. \tag{5.15}$$

Podemos agora inverter a ordem dos passos e, começando por (5.15), obtemos (5.14), que utilizamos em (5.13), para concluir que $(x + 1/n)^2 < 2$, isto é, $x + 1/n \in A$, o que nos dá a contradição desejada. Portanto, não é possível termos $x^2 < 2$.

Agora suponhamos $x^2 > 2$. Vamos procurar encontrar $m \in \mathbb{N}$ tal que $(x - 1/m)^2 > 2$, o que implica $(x - 1/m)^2 > y^2$ para todo $y \in A$. Usaremos o fato de que, se a, b são números reais positivos, e $a^2 < b^2$ então $a < b$ (veja o Exercício 13). Assim, concluímos que $x - 1/m$ é cota superior de A e é menor que x, contradizendo o fato de que $x = \sup A$.

Com efeito, observemos que

$$\left(x - \frac{1}{m}\right)^2 = x^2 - \frac{2x}{m} + \frac{1}{m^2} > x^2 - \frac{2x}{m}. \tag{5.16}$$

Logo, se pudermos escolher m, de modo que

$$\frac{2x}{m} < x^2 - 2, \tag{5.17}$$

então teremos $(x-1/m)^2 > x^2-(x^2-2) = 2$. Agora, por hipótese, temos $x^2-2 > 0$, de modo que $(x^2-2)/2x > 0$. Logo, pela Propriedade Arquimediana, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{m} < \frac{x^2-2}{2x}. \tag{5.18}$$

De novo, podemos inverter a ordem dos passos acima, começando com (5.18), obtendo (5.17) e usando este último em (5.16). Logo, a hipótese $x^2 > 2$ também nos leva a uma contradição.

Como as possibilidades $x^2 > 2$ e $x^2 < 2$ estão excluídas, necessariamente vale $x^2 = 2$. $\square$

A Propriedade dos Intervalos Encaixados

Começamos essa seção conclusiva de nossa quinta aula com um resultado simples que caracteriza os subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são intervalos.

Teorema 5.10 (Caracterização dos Intervalos)
Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}$ que contém, ao menos, dois pontos. Então, S é um intervalo se, e somente se, tem a propriedade

$$\text{se } x, y \in S \text{ e } x < y, \text{ então } [x, y] \subset S. \tag{5.19}$$

Prova: O fato de que todo intervalo de $\mathbb{R}$ possui tal propriedade segue da própria descrição dos 8 possíveis tipos de intervalo além do próprio $\mathbb{R}$, que descrevemos na aula passada.

Vamos provar que se S satisfaz (5.19) então S é um intervalo. Existem quatro casos possíveis: (i) S é limitado; (ii) S é limitado superiormente mas não inferiormente; (iii) S é limitado inferiormente mas não superiormente; (iv) S não é limitado nem superiormente, nem inferiormente.

Caso (i): Seja $a := \inf S$ e $b := \sup S$. Então, $S \subset [a, b]$ e mostraremos que $(a, b) \subset S$. Se $a < z < b$, então z não é uma cota inferior de S, portanto, deve existir $x \in S$ com $x < z$. Também é verdade que z não é uma cota superior de S; portanto, deve existir $y \in S$ com $z < y$. Conseqüentemente, $z \in [x, y]$ e (5.19) implica $z \in S$. Como z é abitrário, concluímos que $(a, b) \subset S$. Agora, se $a \in S$ e $b \in S$ então $S = [a, b]$. Se $a \notin S$ e $b \notin S$, então $S = (a, b)$. As outras possibilidades nos dão $S = [a, b)$ e $S = (a, b]$.

Caso (ii): Se $b := \sup S$. Então, $S \subset (-\infty, b]$, e mostraremos que $(-\infty, b) \subset S$. De fato, se $z < b$, então existem $x, y \in S$ tais que $z \in [x, y] \subset S$

(por quê?). Portanto, $(-\infty, b) \subset S$. Se $b \in S$, então $S = (-\infty, b]$; se $b \notin S$, então $S = (-\infty, b)$.

Os casos (iii) e (iv) são semelhantes e serão deixados como exercício.□

Dizemos que uma seqüência de intervalos I_n, $n \in \mathbb{N}$, é *encaixada* se

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots .$$

Teorema 5.11 (Propriedade dos Intervalos Encaixados)
Seja $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, uma seqüência encaixada de intervalos fechados e limitados. Então, existe um número $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $\xi \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova: Como os intervalos são encaixados, temos $I_n \subset I_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo $a_n \leq b_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, o conjunto não vazio $A := \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ é limitado superiormente e, pela propriedade do supremo, existe $\xi = \sup A$. Por definição de supremo, temos $a_n \leq \xi$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que $\xi \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, b_n é uma cota superior de A. Fixemos $n \in \mathbb{N}$. Temos dois casos a considerar: (i) $k \geq n$; (ii) $k < n$. Se $k \geq n$, então $I_n \supset I_k$ e, portanto, temos $a_k \leq b_k \leq b_n$. Se $k < n$, então, como $I_k \supset I_n$, temos $a_k \leq a_n \leq b_n$. Portanto, concluímos que $a_k \leq b_n$ para todo $k \in \mathbb{N}$, de modo que b_n é uma cota superior de A, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\xi \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, temos $a_n \leq \xi \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $\xi \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema 5.12
Seja $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, uma seqüência encaixada de intervalos fechados e limitados, tais que os comprimentos $b_n - a_n$ de I_n satisfazem

$$\inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0.$$

Então, o número ξ contido em I_n para todo $n \in \mathbb{N}$ é único.

Prova: Se $\eta := \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, então um argumento semelhante ao da prova do Teorema 5.11 mostra que $a_n \leq \eta$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, que $\xi \leq \eta$. De fato, não é difícil mostrar que $x \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se, e somente se, $\xi \leq x \leq \eta$ (veja Exercício 17). Se tivermos $\inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$, então, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq \eta - \xi \leq b_m - a_m < \varepsilon$. Como isso vale para todo $\varepsilon > 0$, segue que $\eta - \xi = 0$ (por quê? veja o Exercício 16). Portanto, concluímos que $\xi = \eta$ é o único ponto que pertence a I_n para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Exercícios 5.1

1. Use o Teorema 5.3 para provar que se x é número real positivo, com $x = a_0{\bullet}a_1a_2\dots$, e $y = b_0{\bullet}000\dots$, então $x + y = (a_0 + b_0){\bullet}a_1a_2\dots$. Aqui, como no texto da aula, $a_0, b_0 \in \mathbb{N}$ e $a_1, a_2, \dots \in \{0, 1, \dots, 9\}$; em particular, $y = b_0 \in \mathbb{N}$.

2. Prove (A2) e (M2) do Teorema 5.7.

   (Dica: Para (A2), defina $A = (-\infty, a) \cap \mathbb{Q}$, $B = (-\infty, b) \cap \mathbb{Q}$ e $C = (\infty, a + b) \cap \mathbb{Q}$. Mostre que $C = A + B$. Para (M2), basta fazer o caso em que a e b são positivos. Defina $A_+ = (0, a) \cap \mathbb{Q}$, $B_+ = (0, b) \cap \mathbb{Q}$ e $C_+ = (0, ab) \cap \mathbb{Q}$. Mostre que $C_+ = A_+ \cdot B_+$.)

3. Prove (M3) do Teorema 5.7.

4. Prove (A4) do Teorema 5.7.

5. Prove (M4) do Teorema 5.7.

6. Prove (A5) do Teorema 5.7.

7. Prove (M5) do Teorema 5.7.

8. Prove **(D)** do Teorema 5.7. Faça primeiro o caso mais simples, em que a, b e c são positivos.

9. Prove que as propriedades (A1)-(A5) da adição num corpo qualquer C implicam as seguintes proposições:

   (a) Se $x + y = x + z$, então $y = z$;

   (b) Se $x + y = x$, então $y = 0$;

   (c) Se $x + y = 0$, então $y = -x$;

   (d) $-(-x) = x$.

   A proposição (a) é a lei do cancelamento. Observe que (b) estabelece a unicidade do elemento neutro da adição, cuja existência é dada por (A4), e (c), a unicidade do simétrico aditivo que existe por (A5).

(Dica: Para provar (a), por exemplo, os axiomas **(A)** nos dão

$$\begin{aligned} y = 0 + y = (-x + x) + y = -x + (x + y) \\ = -x + (x + z) = (-x + x) + z = 0 + z = z.) \end{aligned}$$

10. Prove que as propriedades (M1)-(M5) da multiplicação num corpo qualquer C implicam as seguintes proposições:

    (a) Se $x \neq 0$ e $xy = xz$, então $y = z$;

    (b) Se $x \neq 0$ e $xy = x$, então $y = 1$;

    (c) Se $x \neq 0$ e $xy = 1$, então $y = 1/x$;

    (d) Se $x \neq 0$ então $1/(1/x) = x$.

11. Prove que os axiomas de corpo (**(A)**, **(M)** e **(D)**) implicam as seguintes afirmações, para $x, y, z \in C$:

    (a) $0x = 0$;

    (b) Se $x \neq 0$ e $y \neq 0$, então $xy \neq 0$;

    (c) $(-x)y = -(xy) = x(-y)$;

    (d) $(-x)(-y) = xy$.

    (Dica: (a) é conseqüência de $0x + 0x = (0 + 0)x = 0x$. Prove (b) por contradição usando os inversos $1/x$ e $1/y$. Use a lei distributiva para provar (c) fazendo $(-x)y + xy = \ldots$. (d) é conseqüência de (c).)

12. Mostre que num corpo ordenado qualquer vale $xy > 0$ se, e somente se, $x > 0$ e $y > 0$ ou $x < 0$ e $y < 0$.

13. Mostre que se a, b são números reais positivos e $a^2 < b^2$, então $a < b$.

    (Dica: Use $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$.)

14. Use a Propriedade Arquimediana para mostrar que $\inf\{1/n : n \in \mathbb{N}\} = 0$.

15. Complete a prova do Teorema 5.10, fazendo os casos (iii) e (iv).

16. Mostre que se $a \in \mathbb{R}$ é tal que $0 \leq a < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, então $a = 0$.

17. Com a notação das provas dos Teoremas 5.11 e 5.12, mostre que $\eta \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Mostre também que $[\xi, \eta] = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Prossiga: Cortes de Dedekind

Nesta seção, vamos provar o Teorema 5.1 através do método de Dedekind que recorre ao auxílio dos chamados cortes, cuja definição damos a seguir. Na discussão seguinte sobre cortes, reproduziremos com leves modificações os três primeiros passos do resumo contido no livro de W. Rudin, "Princípios de Análise Matemática", Ao Livro Tecnico, Rio de Janeiro, 1971.

Definição 5.3
Chamamos *corte* qualquer conjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ com as seguintes propriedades:

(i) α não é vazio e $\alpha \neq \mathbb{Q}$;

(ii) Se $p \in \alpha$, $q \in \mathbb{Q}$, e $q < p$, então $q \in \alpha$;

(iii) Se $p \in \alpha$, então $p < r$ para algum $r \in \alpha$.

Usaremos as letras p, q, r, ... para denotar números racionais, e α, β, γ, ... para denotar cortes.

Observemos que (iii) simplesmente diz que α não tem maior elemento (ou máximo); (ii) implica dois fatos:

- Se $p \in \alpha$ e $q \notin \alpha$, então $p < q$.
- Se $r \notin \alpha$ e $r < s$, então $s \notin \alpha$.

Definição 5.4
Denotamos por $\mathcal{R}$ o conjunto dos cortes. Em $\mathcal{R}$, definimos a relação "$\alpha < \beta$" como significando: α é um subconjunto próprio de β.

Lema 5.1
A relação $<$ em $\mathcal{R}$ é uma ordem. Em particular, $\mathcal{R}$ é um conjunto ordenado.

Prova: Verifiquemos os requisitos da Definição 4.5. Se $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$, é claro que $\alpha < \gamma$, já que um subconjunto próprio de um subconjunto próprio é um subconjunto próprio. Também é claro que, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$, vale, no máximo, uma das três alternativas: $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta < \alpha$. Para mostrar que pelo menos uma vale, suponhamos que as duas primeiras sejam falsas. Então, α não é subconjunto de β. Logo, existe um $p \in \alpha$ com $p \notin \beta$. Se $q \in \beta$, segue que $q < p$ (já que $p \notin \beta$), e, então, $q \in \alpha$, por (ii). Logo, $\beta \subset \alpha$. Como $\beta \neq \alpha$, concluímos: $\beta < \alpha$. $\square$

Lema 5.2
O conjunto ordenado $\mathcal{R}$ tem a propriedade do supremo.

Prova: Seja A um subconjunto não-vazio de $\mathcal{R}$, e suponhamos que $\beta \in \mathcal{R}$ é uma cota superior de A. Definimos γ como a união de todos os $\alpha \in A$. Provaremos que $\gamma \in \mathcal{R}$ e que $\gamma = \sup A$.

Inicialmente, provemos que γ é um corte. Como A não é vazio, existe um $\alpha_0 \in A$. Esse α_0 não é vazio. Como $\alpha_0 \subset \gamma$, γ não é vazio. Em seguida, temos $\gamma \subset \beta$, já que $\alpha \subset \beta$ para todo $\alpha \in A$, e, portanto, $\gamma \neq \mathbb{Q}$. Logo, γ satisfaz a condição (i) da Definição 5.3. Para provar (ii) e (iii), tomemos $p \in \gamma$. Então, $p \in \alpha_1$ para algum $\alpha_1 \in A$. Se $q < p$, então $q \in \alpha_1$; logo, $q \in \gamma$, o que prova (ii). Se $r \in \alpha_1$ é escolhido de modo que $r > p$, vemos que $r \in \gamma$, já que $\alpha_1 \subset \gamma$, e, portanto, γ satisfaz (iii). Assim, $\gamma \in \mathcal{R}$.

Provemos agora que $\gamma = \sup A$. Claramente, $\alpha \leq \gamma$ para todo $\alpha \in A$. Suponhamos $\delta < \gamma$. Então, existe um $s \in \gamma$ tal que $s \notin \delta$. Como $s \in \gamma$, $s \in \alpha$ para algum $\alpha \in A$. Logo $\delta < \alpha$, e δ não é uma cota superior de A. Isso nos dá o resultado desejado: $\gamma = \sup A$. $\square$

Nosso objetivo agora será mostrar que existe uma identificação natural entre o conjunto ordenado $\mathcal{R}$, que, pelo Lema 5.2, tem a propriedade do supremo, e o conjunto ordenado dos números reais $\mathbb{R}$ (i.e., decimais dotados da ordem dada na Definição 4.7).

Definição 5.5
Dados dois conjuntos ordenados C_1 e C_2, dizemos que uma função $\phi : C_1 \to C_2$ preserva a ordem se, para quaisquer $x, y \in C_1$ vale: $x < y$ implica $\phi(x) < \phi(y)$.

Lema 5.3
Sejam C_1 e C_2 dois conjuntos ordenados e $\phi : C_1 \to C_2$ uma bijeção de C_1 sobre C_2 preservando ordem. Então, C_1 tem a propriedade do supremo se, e somente se, C_2 tem a propriedade do supremo.

Prova: Primeiramente, notemos que a inversa $\phi^{-1} : C_2 \to C_1$ também preserva ordem. Isso é claro, uma vez que, denotando também por ϕ o gráfico de ϕ, para todos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \phi$, temos $x_1 < x_2$ implica $y_1 < y_2$. Logo, se $(y_1, x_1), (y_2, x_2) \in \phi^{-1}$ e $y_1 < y_2$, então, devemos ter $x_1 < x_2$, pois, do contrário, teríamos $x_1 \geq x_2$, o que implicaria $y_1 \geq y_2$, em contradição com a hipótese $y_1 < y_2$.

Portanto, basta provarmos que, se C_1 tem a propriedade do supremo, então C_2 também a tem. Suponhamos então que C_1 tem a propriedade do supremo e seja $A \subset C_2$ um conjunto não-vazio e β uma cota superior de A. Então, $\phi^{-1}(A) \subset C_1$ não é vazio e, como ϕ^{-1} preserva ordem, $\phi^{-1}(\beta)$ é cota superior de $\phi^{-1}(A)$. Logo, como C_1 tem a propriedade do supremo, existe $\alpha = \sup \phi^{-1}(A)$. Afirmamos que $\phi(\alpha) = \sup A$. De fato, $\phi(\alpha)$ é claramente uma cota superior de A, já que ϕ preserva ordem. Além disso, se $\gamma < \phi(\alpha)$, então, $\phi^{-1}(\gamma) < \alpha$; logo, $\phi^{-1}(\gamma)$ não é cota superior de $\phi^{-1}(A)$ e, portanto, $\gamma = \phi(\phi^{-1}(\gamma))$ não é cota superior de A. Logo, $\phi(a) = \sup A$. $\square$

Lema 5.4
Dada $a \in \mathbb{R}$, $a^* = (-\infty, a) \cap \mathbb{Q}$ é um corte. Mais ainda, a aplicação $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{R}$, com $\phi(a) = a^*$ é injetiva e preserva ordem.

Prova: Devemos verificar (i), (ii) e (iii) da Definição 5.3. Que a^* não é vazio segue do fato que, se a_0 é a parte inteira do decimal a, então, $a > 0$ implica $a_0 \in a^*$ e $a \leq 0$, $a_0 - 1 \in a^*$. Que $a^* \neq \mathbb{Q}$ segue do fato que $a_0 + 1 \notin a^*$. Logo, vale (i). A condição (ii) é imediata. A condição (iii) é conseqüência direta da densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$. O fato de que $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{R}$ preserva ordem é claro, pois, se $a_1 < a_1$, $a_1^* \subset a_2^*$, o que também prova que ϕ é injetiva. $\square$

Através da injeção preservando ordem $a \mapsto a^*$, podemos considerar $\mathbb{R} \subset \mathcal{R}$. A prova do Teorema 5.1 estará concluída se mostrarmos que a aplicação $\phi : a \mapsto a^*$ é bijetiva. No que segue, vamos considerar $\mathbb{R} \subset \mathcal{R}$ e, para todo $a \in \mathbb{R}$, vamos denotar também por a, em vez de a^*, o corte associado $(-\infty, a) \cap \mathbb{Q}$. Além disso, para qualquer intervalo $I \subset \mathbb{R}$, identificamos I com sua imagem por ϕ, $\phi(I)$.

Lema 5.5
$\mathcal{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} [m, m+1]$.

Prova: Primeiramente, provemos que $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente em $\mathcal{R}$. De fato, se $\mathbb{N}$ fosse limitado superiormente em $\mathcal{R}$, pela propriedade do supremo, existiria $\alpha = \sup \mathbb{N}$ em $\mathcal{R}$. Claramente, $\alpha \notin \mathbb{N}$, já que $\mathbb{N}$ não possui máximo. Agora defina o conjunto $\alpha - 1 = \{q \in \mathbb{Q} : q = r - 1,\ r \in \alpha\}$. Não é difícil verificar que $\alpha - 1 \in \mathcal{R}$, tarefa que deixamos como exercício.

Claramente, $\alpha - 1 < \alpha$ e, pelas propriedades do supremo, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - 1 < m$. Verifica-se, facilmente, que daí segue que $\alpha < m + 1$, o que nos dá uma contradição.

Assim, dado qualquer $\alpha \in \mathcal{R}$, com $\alpha \geq 0$, o conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : n > \alpha\}$ não é vazio e, Pelo Princípio da Boa Ordenação, contém um mínimo m_α. Verificamos, então, facilmente, que $\alpha \in [m_\alpha - 1, m_\alpha]$.

Se $\alpha \in \mathcal{R} < 0$, defina $-\alpha = \{q \in \mathbb{Q} : \text{existe } r \notin \alpha,\ q < -r\}$. Verifica-se facilmente que $-\alpha$ é um corte e que, se $\alpha < 0$, $-\alpha > 0$, tarefa que deixamos como exercício. Pelo que já foi provado, $-\alpha \in [m, m+1]$, para algum $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Então, verifica-se facilmente que $\alpha \in [-m-1, -m]$, o que conclui a demonstação. $\square$

Prova do Teorema 5.1: Vamos provar que $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{R}$, $\phi(a) = a^*$ é sobrejetiva. Dado $\alpha \in \mathcal{R}$, pelo Lema 5.5, existe $a_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $a_0 \leq \alpha < a_0 + 1$. Para simplificar vamos supor que $a_0 \geq 0$. Por indução, podemos facilmente definir $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, tais que

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq \alpha < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n + 1}{10^n}. \qquad (5.20)$$

Seja $a \in \mathbb{R}$, $a = a_0 \bullet a_1 a_2 \dots a_n \dots$. Afirmamos que $\alpha = a^* = (-\infty, a) \cap \mathbb{Q}$.

Provemos primeiro que $\alpha \subset a^*$. Seja $q \in \alpha$. Como $q \notin q^*$ e, por (ii) da Definição 5.3, $q^* \subset \alpha$, vemos que q^* é subconjunto próprio de α, isto é, $q^* < \alpha$. Por (iii) da Definição 5.3, existe $r \in \alpha$ tal que $q < r$. Claramente, existe n tal que $10^n(r - q) > 1$, isto é, $r - q > 1/10^n$. Logo, ou $r \leq a_0$ e, neste caso, $q < a_0$, ou existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$q < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{b_n}{10^n} \leq r,$$

com $b_n < a_n$. Portanto, $q \in a^*$. Concluímos que $\alpha \subset a^*$.

Provemos agora que $a^* \subset \alpha$. Seja $q \in a^*$. Então, $q < a$ e, pela definição da ordem para os decimais dada pela Definição 4.7, ou $q < a_0$, ou existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$q < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{b_n}{10^n},$$

com $b_n \leq a_n$. Assim, de (5.20) vemos que existe $r \in \mathbb{Q}$, com $r > q$ e $r^* \subset \alpha$. Daí decorre que $q \in \alpha$, donde concluímos que $a^* \subset \alpha$. Portanto, $\alpha = a^*$, como queríamos demonstrar. $\square$

Aula 6 – Sequências e Limites

Metas da aula: Apresentar a definição rigorosa de limite de uma sequência de números reais bem como seu uso na demonstração de limites elementares e algumas propriedades básicas envolvendo esse conceito.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Usar a definição de limite de uma sequência de números reais para demonstrar a convergência de uma sequência convergente a um dado limite.

- Demonstrar certas propriedades básicas envolvendo o conceito de limite de uma sequência de números reais e usá-las na verificação de limites dados.

Introdução

Nesta aula iniciamos propriamente o estudo dos conceitos básicos da Análise Real. O primeiro destes e mais elementar de todos é o de limite de uma sequência de números reais, cuja definição rigorosa e propriedades básicas constituem o conteúdo desta aula.

Sequências de Números Reais

Uma sequência de elementos de um conjunto X qualquer é uma função $\mathbf{x} : \mathbb{N} \to X$, cujo domínio é $\mathbb{N}$ e cujos os valores estão contidos no conjunto X. Nesta aula estaremos interessados em sequências de números reais e no significado de convergência dessas sequências.

Definição 6.1
Uma *sequência de números reais* é uma função $\mathbf{x} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ dos números naturais e tomando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

Se $\mathbf{x} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é uma sequência, usaremos a notação x_n em lugar de $\mathbf{x}(n)$ para denotar seu valor em $n \in \mathbb{N}$. Os valores x_n são chamados os *termos* ou *elementos* da sequência. Usaremos frequentemente as notações $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (x_n) ou, simplesmente, x_n, como formas alternativas de representar a sequência $\mathbf{x}$.

Claramente, poderão ser usadas outras letras, como $\mathbf{y} = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{z} = (z_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{a} = (a_l)_{l\in\mathbb{N}}$ etc.

O uso de parênteses ( ) em vez de chaves { } serve para distinguir a sequência (x_n) do conjunto de seus valores $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Assim, por exemplo, a sequência $(1 + (-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem infinitos termos ($x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0, \dots$, $x_{100} = 2$, $x_{101} = 0$, $\dots$) ao passo que o conjunto $\{1 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$ coincide com o conjunto $\{0, 2\}$, que tem apenas dois elementos.

É muito comum definir-se uma sequência dando-se uma fórmula para o n-ésimo termo x_n, como acabamos de fazer com $x_n = 1 + (-1)^n$. Quando tal fórmula pode ser facilmente deduzida a partir do conhecimento de seus primeiros termos, é também comum listar-se os termos da sequência até que a regra de formação pareça evidente. Assim, a sequência dos números ímpares pode ser apresentada na forma $(1, 3, 5, \dots)$, que é o mesmo que $(2n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$.

Uma outra forma de se definir uma sequência é especificar o valor de x_1 e dar uma fórmula para x_{n+1} em termos de x_n, para $n \geq 1$, ou, de modo equivalente, dar uma fórmula para x_n em termos de x_{n-1}, para $n \geq 2$. Mais geralmente, para $p \in \mathbb{N}$ dado, podemos especificar os valores de x_1, $x_2, \dots$, x_p e dar uma fórmula para x_n em função de $x_{n-1}, \dots$, x_{n-p}, para $n \geq p + 1$. Nos casos em que sequências são definidas dessa forma, quase sempre $p \leq 3$. Dizemos, nesses casos, que a sequência está definida *recursivamente* ou *indutivamente*. Um exemplo disso é obtido se definirmos a sequência $(1/2^n)$ na forma

$$x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n}{2}, \quad \text{para } n \geq 1.$$

Outro exemplo é fornecido pela sequência definida por

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 1, \quad \text{e} \quad y_n = y_{n-1} + y_{n-2}, \quad \text{para } n \geq 3,$$

que é conhecida como *sequência de Fibonacci*, cuja importância reside em fatos alheios ao contexto do presente curso. É fácil verificar que os 10 primeiros termos da sequência de Fibonacci são os que aparecem na lista $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots)$.

Limite de uma Sequência

A noção de limite de uma sequência constitui o eixo fundamental de toda a Análise Matemática. Nesta aula apresentaremos esse conceito na sua forma mais básica que é aquela aplicada às sequências de números reais.

Definição 6.2
Diz-se que uma sequência $\mathbf{x} = (x_n)$ em $\mathbb{R}$ *converge* para $\bar{x} \in \mathbb{R}$, ou que $\bar{x}$ é *limite* de (x_n), se para todo $\varepsilon > 0$ existe um número natural $N_0(\varepsilon)$ tal que, para todo $n > N_0(\varepsilon)$, x_n satisfaz $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$.

Se uma sequência possui limite, dizemos que ela é *convergente*; caso contrário dizemos que ela é *divergente*.

Usaremos as seguintes notações para expressar que $\bar{x}$ é limite de (x_n):

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}, \qquad \lim x_n = \bar{x} \quad \text{ou ainda} \quad x_n \to \bar{x} \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Na definição que acabamos de dar denotamos $N_0(\varepsilon)$ e não, simplesmente, N_0, apenas para enfatizar o fato de que o referido número natural N_0 dependerá em geral do número $\varepsilon > 0$ que tenha sido escolhido. Frequentemente vamos usar a notação mais simples N_0 deixando de explicitar a dependência desse número em relação a ε. Como veremos nos exemplos que daremos a seguir, de modo geral, quanto menor for o ε escolhido, maior terá de ser o valor de N_0, para que tenhamos, para todo $n > N_0$, $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$.

Apenas por curiosidade, observamos que a definição anterior de limite de uma sequência x_n pode ser escrita somente com símbolos matemáticos na forma

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > N_0 \Rightarrow |x_n - \bar{x}| < \varepsilon),$$

ou, mais compactamente,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_0 \in \mathbb{N})(\forall n > N_0)(|x_n - \bar{x}| < \varepsilon).$$

Em termos coloquiais, a definição de limite pode ser traduzida da seguinte maneira: *à medida que os valores de n se tornam mais e mais altos, os elementos x_n se tornam mais e mais próximos de $\bar{x}$.* Matematicamente, a verificação dessa sentença assume um formato semelhante ao de um jogo em que um jogador A, que afirma ser $\bar{x}$ limite de x_n, é desafiado por um outro jogador B a provar tal afirmação. Sendo assim, B escolhe um $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno e desafia A a encontrar um número natural N_0, não importando quão grande ele seja, tal que para todo $n > N_0$ valha que $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$. Se A conseguir mostrar que para qualquer $\varepsilon > 0$ escolhido ele é capaz de exibir N_0 verificando tal propriedade, então ele ganha o jogo, provando que $\bar{x}$ é limite de x_n. Caso contrário, ele perde e quem ganha é B, ficando provado que $\bar{x}$ não é limite de x_n.

O resultado seguinte afirma que se uma sequência possui limite, então esse limite é único.

Teorema 6.1 (Unicidade dos Limites)
Uma sequência em $\mathbb{R}$ pode ter no máximo um limite.

Prova: Suponhamos que $\bar{x}'$ e $\bar{x}''$ sejam ambos limites de (x_n). Para cada $\varepsilon > 0$ existe um N_0' tal que $|x_n - \bar{x}'| < \varepsilon/2$ para todo $n > N_0'$, e existe um N_0'' tal que $|x_n - \bar{x}''| < \varepsilon/2$ para todo $n > N_0''$. Seja $N_0 = \max\{N_0',\ N_0''\}$. Então, para $n > N_0$, temos

$$\begin{aligned}|\bar{x}' - \bar{x}''| &= |\bar{x}' - x_n + x_n - \bar{x}''| \\ &\leq |\bar{x}' - x_n| + |x_n - \bar{x}''| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ pode ser tomado arbitrariamente pequeno, concluímos que $\bar{x}' - \bar{x}'' = 0$. $\square$

Decorre imediatamente da Definição 6.2 que a sequência x_n converge a $\bar{x}$ se, e somente se, a sequência $y_n = x_n - \bar{x}$ converge a 0 (por quê?).

A desigualdade triangular implica diretamente o seguinte resultado.

Teorema 6.2
Se a sequência (x_n) converge para $\bar{x}$ então a sequência $(|x_n|)$ converge para $|\bar{x}|$. Se $\bar{x} = 0$ então vale também a recíproca, isto é, se $|x_n| \to 0$, então $x_n \to 0$. Em particular, $x_n \to \bar{x}$ se, e somente se, $|x_n - \bar{x}| \to 0$.

Prova: Pela desigualdade triangular, temos $||x_n| - |\bar{x}|| \leq |x_n - \bar{x}|$. Dado $\varepsilon > 0$, se $x_n \to \bar{x}$, podemos obter $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > N_0$, $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ e, portanto, $||x_n| - |\bar{x}|| < \varepsilon$. Logo, $|x_n| \to |\bar{x}|$.

No caso particular em que $\bar{x} = 0$, suponhamos $|x_n| \to 0$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_0$ então $|x_n| = ||x_n| - 0| < \varepsilon$. Assim, para $n > N_0$, temos $|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon$ e, portanto, $x_n \to 0$.

Em particular, pelo que vimos anteriormente, $x_n \to \bar{x}$ se, e somente se, $x_n - \bar{x} \to 0$, que, por sua vez, vale se, e somente se, $|x_n - \bar{x}| \to 0$. $\square$

Exemplos 6.1

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Com efeito, seja $\varepsilon > 0$ arbitrariamente dado. Pela Propriedade Arquimediana dos números reais, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $N_0 > 1/\varepsilon$. Assim, se $n > N_0$, então

$$|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N_0} < \varepsilon.$$

Portanto, $1/n$ converge para 0.

(b) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{(-1)^n}{n}) = 1$.

Pelo Teorema 6.2, $(1+\frac{(-1)^n}{n}) \to 1$ se, e somente se, $|(1+\frac{(-1)^n}{n})-1| = \frac{1}{n} \to 0$, o qual é verdadeiro pelo exemplo anterior.

(c) $\lim \frac{n}{n^2+n+2} = 0$.

Com efeito, seja $\varepsilon > 0$ arbitrariamente dado. Como $1/n \to 0$, podemos obter $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_0$, então $1/n < \varepsilon$. Logo, para todo $n > N_0$, temos

$$|\frac{n}{n^2+n+2} - 0| = \frac{n}{n^2+n+2} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

o que prova a afirmação.

(d) $\lim \frac{5n+3}{n+2} = 5$.

De novo, pelo Teorema 6.2, basta provar que $|\frac{5n+3}{n+2} - 5| = \frac{7}{n+2} \to 0$. Agora, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, como $1/n \to 0$, podemos encontrar $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_0$, então $1/n < \varepsilon/7$. Portanto, para todo $n > N_0$,

$$\frac{7}{n+2} < \frac{7}{n} < 7(\frac{\varepsilon}{7}) = \varepsilon,$$

o que prova a afirmação.

Procedimento análogo ao adotado neste exemplo nos leva a um resultado geral bastante útil descrito no exemplo a seguir.

(e) Seja (x_n) uma sequência de números reais e $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Se (a_n) é uma sequência de números reais positivos com $\lim a_n = 0$ e se para alguma contante $C > 0$ e algum $M \in \mathbb{N}$ tivermos

$$|x_n - \bar{x}| \le C a_n \quad \text{para todo } n > M,$$

então $\lim x_n = \bar{x}$.

Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, como $\lim a_n = 0$, sabemos que existe $N_0' \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_0'$, então

$$a_n = |a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{C}.$$

Daí segue que se $n > N_0 := \max\{M,\ N_0'\}$, então

$$|x_n - \bar{x}| \le C a_n < C(\frac{\varepsilon}{C}) = \varepsilon,$$

o que prova que $\lim x_n = \bar{x}$.

(f) Se $a > 0$, então $\lim \dfrac{1}{1+na} = 0$.

De fato, temos

$$\left|\frac{1}{1+na} - 0\right| \leq \left(\frac{1}{a}\right)\frac{1}{n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, o item (e), com $C = 1/a > 0$ e $a_n = 1/n$, juntamente com o item (a) implicam a afirmação.

(g) Se $0 < b < 1$, então $\lim b^n = 0$.

De fato, como $0 < b < 1$, podemos escrever $b = 1/(1+a)$, onde $a := (1/b) - 1 > 0$. Pela desigualdade de Bernoulli, temos $(1+a)^n \geq 1 + na$. Portanto,

$$0 < b^n = \frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na}.$$

Assim, da mesma forma que no item anterior, concluímos que $\lim b^n = 0$.

(h) Se $c > 0$, então $\lim c^{1/n} = 1$.

Se $c = 1$, a afirmação é trivial, pois aí $(c^{1/n})$ é a sequência constante $(1, 1, 1, \dots)$, a qual obviamente converge para 1.

Se $c > 1$, então $c^{1/n} = 1 + d_n$, onde $d_n := c^{1/n} - 1 > 0$. Portanto, pela desigualdade de Bernoulli, já usada no item anterior,

$$c = (1 + d_n)^n \geq 1 + nd_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Daí segue que $c - 1 \geq nd_n$, de modo que $d_n \leq (c-1)/n$. Consequentemente, temos

$$|c^{1/n} - 1| = d_n \leq (c-1)\frac{1}{n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De novo, usamos os itens (e) e (a) para concluir que $\lim c^{1/n} = 1$ quando $c > 1$.

Suponhamos, enfim, que $0 < c < 1$. Então, $c^{1/n} = 1/(1+h_n)$, onde $h_n := c^{-1/n} - 1 > 0$. De novo, a desigualdade de Bernoulli $(1+h_n)^n \geq 1 + nh_n$ implica que

$$c = \frac{1}{(1+h_n)^n} \leq \frac{1}{1+nh_n} < \frac{1}{nh_n},$$

donde deduzimos que $0 < h_n < 1/nc$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí obtemos

$$0 < 1 - c^{1/n} = \frac{h_n}{1+h_n} < h_n < \frac{1}{nc}$$

de modo que

$$|c^{1/n} - 1| < \left(\frac{1}{c}\right)\frac{1}{n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De novo, aplicamos os itens (a) e (e) para concluir que $\lim c^{1/n} = 1$ também quando $0 < c < 1$.

(i) $\lim n^{1/n} = 1$.

Primeiramente, recordemos a fórmula binomial

$$(1+h)^n = 1 + \binom{n}{1}h + \binom{n}{2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}h^{n-1} + h^n,$$

onde, como de costume, $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Como $n^{1/n} > 1$, para $n > 1$, podemos escrever $n^{1/n} = 1 + k_n$, onde $k_n = n^{1/n} - 1 > 0$, para $n > 1$. Pela fórmula binomial, se $n > 1$ temos

$$n = (1+k_n)^n = 1 + nk_n + \frac{1}{2}n(n-1)k_n^2 + \cdots \geq 1 + \frac{1}{2}n(n-1)k_n^2,$$

donde segue que

$$n - 1 \geq \frac{1}{2}n(n-1)k_n^2.$$

Portanto, $k_n^2 \leq 2/n$ para $n > 1$. Dado $\varepsilon > 0$, segue da Propriedade Arquimediana de $\mathbb{R}$ que existe um número natural N_0 tal que $N_0 > 2/\varepsilon^2$. Segue que se $n > N_0$, então $2/n < \varepsilon^2$, o que implica

$$0 < n^{1/n} - 1 = k_n \leq (2/n)^{1/2} < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $\lim n^{1/n} = 1$.

(j) Dada a sequência de números reais $\mathbf{x} = (x_n)$ e $m \in \mathbb{N}$, defina a sequência $\mathbf{x}_m = (y_n)$ pondo $y_n := x_{n+m}$. A sequência $\mathbf{x}_m$ assim definida é às vezes chamada a *m-cauda* de $\mathbf{x}$. Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Provaremos que a sequência $\mathbf{x}$ converge a $\bar{x}$ se, e somente se, $\mathbf{x}_m$ converge a $\bar{x}$.

Com efeito, suponhamos que $\mathbf{x}$ converge a $\bar{x}$ e seja dado $\varepsilon > 0$ qualquer. Então existe $N_0' \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > N_0'$, $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$. Logo, para todo $n > N_0 := N_0' - m$, $y_n = x_{n+m}$ satisfaz $|y_n - \bar{x}| < \varepsilon$. Portanto, $\mathbf{x}_m$ converge para $\bar{x}$.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathbf{x}_m$ converge a $\bar{x}$ e seja dado $\varepsilon > 0$ qualquer. Então existe $N_0'' \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > N_0''$, $|y_n - \bar{x}| = |x_{n+m} - \bar{x}| < \varepsilon$. Logo, para todo $n > N_0 := N_0'' + m$, temos $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos que $\mathbf{x}$ converge para $\bar{x}$.

(l) Seja $\mathbf{x} = (x_n)$ uma sequência de números reais tal que o conjunto de seus valores $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto finito. Mostraremos que $\mathbf{x}$ é convergente se, e somente se, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que a m-cauda de $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_m$, é uma sequência constante, isto é, $x_{n+m} = x_{1+m}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pelo item anterior, fica claro que se para algum $m \in \mathbb{N}$ a m-cauda de $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_m$, é uma sequência constante, com $x_{n+m} = x_{1+m}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\mathbf{x}$ converge para x_{1+m}.

Reciprocamente, suponhamos que $F := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto finito e que $\mathbf{x} = (x_n)$ é convergente. Pelo menos um elemento do conjunto finito F é igual a x_n para todo n pertencente a um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Suponhamos que $\bar{x}' \in F$ e $\bar{x}'' \in F$ satisfazem $\bar{x}' = x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}'$, e $\bar{x}'' = x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}''$, onde $\mathbb{N}'$ e $\mathbb{N}''$ são dois subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$. Como são infinitos, os conjuntos $\mathbb{N}'$ e $\mathbb{N}''$ são ilimitados (por quê?). Assim, para qualquer $N_0 \in \mathbb{N}$, existem $n_1 > N_0$ tal que $n_1 \in \mathbb{N}'$, o que nos dá $x_{n_1} = \bar{x}'$, e $n_2 > N_0$ com $n_2 \in \mathbb{N}''$, o que implica $x_{n_2} = \bar{x}''$. Portanto, se $\bar{x}' \neq \bar{x}''$, tomando $\varepsilon < |\bar{x}' - \bar{x}''|/2$ obtemos uma contradição com o fato de que (x_n) é convergente, como demostramos a seguir.

De fato, supondo que $\lim x_n = \bar{x}$, para um certo $\bar{x} \in \mathbb{R}$, será impossível encontrar $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon < |\bar{x}' - \bar{x}''|/2$, para todo $n > N_0$, pois nesse caso teríamos

$$\begin{aligned}
|\bar{x}' - \bar{x}''| &\leq |\bar{x}' - x_{n_1}| + |x_{n_1} - x_{n_2}| + |x_{n_2} - \bar{x}''| \\
&\leq |\bar{x}' - x_{n_1}| + |x_{n_1} - \bar{x}| + |\bar{x} - x_{n_2}| + |x_{n_2} - \bar{x}''| \\
&< 0 + \varepsilon + \varepsilon + 0 = 2\varepsilon < |\bar{x}' - \bar{x}''|,
\end{aligned}$$

o que é absurdo.

Logo, existe um único elemento $\bar{x} \in F$ tal que $x_n = \bar{x}$ para uma infinidade de índices $n \in \mathbb{N}$. Como $F' := F \setminus \{\bar{x}\}$ é finito, o conjunto $J := \mathbf{x}^{-1}(F') = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in F'\}$ é um subconjunto finito de $\mathbb{N}$ (por quê?), donde $m := \sup J < +\infty$. Portanto, $x_{n+m} = \bar{x}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $\mathbf{x}_m$ é uma sequência constante.

(m) A sequência $(1 + (-1)^n)$ não é convergente.

Como $x_n = 0$ se n é ímpar, e $x_n = 2$ se n é par, segue do item anterior que $(1 + (-1)^n)$ não é convergente.

Exercícios 6.1

1. Escreva os cinco primeiros termos da sequência (x_n) em cada um dos casos seguintes:

   (a) $x_n := 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$,

   (b) $x_n := \dfrac{1}{n(n+1)}$,

   (c) $x_n := \dfrac{n}{n^2+3}$.

2. Liste os cinco primeiros termos das seguintes sequências definidas indutivamente:

   (a) $x_1 := 1$, $x_{n+1} = 3x_n + 1$,

   (b) $y_1 := 2$, $y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + 2/y_n)$.

   (c) $z_1 := 3$, $z_2 := 5$, $z_{n+2} := z_n + z_{n+1}$.

3. Para qualquer $b \in \mathbb{R}$, prove que $\lim \dfrac{b}{n} = 0$.

4. Use a definição de limite de uma sequência para demonstrar a validade dos seguintes limites:

   (a) $\lim \dfrac{n^2}{n^3+2} = 0$.

   (b) $\lim \dfrac{3n}{n+4} = 3$.

   (c) $\lim \left(\dfrac{2n+3}{5n+1}\right) = \dfrac{2}{5}$.

   (d) $\lim \left(\dfrac{3n^2-1}{2n^2+1}\right) = \dfrac{3}{2}$.

5. Mostre que

   (a) $\lim \dfrac{2}{\sqrt{3n+1}} = 0$.

   (b) $\lim \dfrac{2\sqrt{n+3}}{n+1} = 0$.

   (c) $\lim \dfrac{(-1)^n n}{n^2+1} = 0$.

   (d) $\lim \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} = 1$.

6. Se $\lim x_n = \bar{x} > 0$, mostre que existe um número natural M tal que se $n \geq M$, então $x_n > \dfrac{1}{2}\bar{x}$.

7. Mostre que $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$. Dica: Multiplique e divida por $(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$.

8. Se $0 < b < 1$, use a fórmula binomial como no exemplo 6.1 (i) para mostrar que $\lim(nb^n) = 0$.

9. Diz-se que uma sequência (x_n) é *periódica* se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n+p} = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que toda sequência periódica convergente é constante.

10. Diz-se que uma sequência $\mathbf{x}$ satisfaz *ultimadamente* uma determinada propriedade, ou que a satisfaz *para n suficientemente grande*, se existe $M_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m > M_0$ a m-cauda $\mathbf{x}_m$ satisfaz tal propriedade. Prove que toda sequência ultimadamente periódica convergente é ultimadamente constante.

11. Dado $\bar{x} \in \mathbb{R}$, definimos a *ε-vizinhança de $\bar{x}$* como o conjunto

$$V_\varepsilon(\bar{x}) := \{x \in \mathbb{R} : |x - \bar{x}| < \varepsilon\} = (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon).$$

Prove que a sequência $\mathbf{x}$ converge a $\bar{x}$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, ultimadamente todos os elementos de $\mathbf{x}$ pertencem a $V_\varepsilon(\bar{x})$, ou, equivalentemente, para todo $\varepsilon > 0$, $x_n \in V_\varepsilon(\bar{x})$ para n suficientemente grande.

Aula 7 – Operações e Desigualdades com Limites de Sequências

Metas da aula: Apresentar os principais resultados sobre limites de sequências de números reais envolvendo desigualdades e as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Usar os resultados sobre operações com limites para estabelecer limites de sequências cujos termos gerais envolvem expressões racionais bem como outras expressões algébricas mais complexas.
- Usar os resultados sobre limites e desigualdades para estabelecer limites de expressões complexas por meio de redução a casos mais simples.

Introdução

Nesta aula vamos estabelecer resultados que simplificarão bastante a verificação da convergência ou não de uma dada sequência, bem como a demonstração do limite correspondente. Esses resultados versam sobre a relação entre limites, desigualdades e as quatro operações entre números reais.

Operações com Limites

Começaremos estabelecendo uma propriedade básica das sequências convergentes que será muito útil em discussões subsequentes.

Definição 7.1
Diz-se que uma sequência de números reais (x_n) é *limitada* se o conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado, ou seja, se existe $M > 0$ tal que $|x_n| \le M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 7.1
Toda sequência de números reais convergente é limitada.

Prova: Suponhamos que $\lim x_n = \bar{x}$ e tomemos $\varepsilon = 1$. Então existe um número natural N_0 tal que $|x_n - \bar{x}| < 1$ para todo $n > N_0$. Aplicando a desigualdade triangular com $n > N_0$ obtemos

$$|x_n| = |x_n - \bar{x} + \bar{x}| \le |x_n - \bar{x}| + |\bar{x}| < 1 + |\bar{x}|.$$

Pondo

$$M := \sup\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N_0}|, 1 + |\bar{x}|\},$$

concluímos que $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Examinaremos a seguir como o processo de tomar o limite interage com as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de sequências.

Se $\mathbf{x} = (x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_n)$ são sequências de números reais, definimos sua soma, diferença, produto e quociente como é feito para funções em geral. Assim, temos

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x} + \mathbf{y} := (x_n + y_n),\\
&\mathbf{x} - \mathbf{y} := (x_n - y_n),\\
&\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := (x_n y_n),\\
&\mathbf{x}/\mathbf{y} := (x_n/y_n), \qquad \text{desde que } y_n \neq 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Observe que o quociente $\mathbf{x}/\mathbf{y}$ só está definido se os elementos de $\mathbf{y}$ forem todos não-nulos.

Dada $c \in \mathbb{R}$ a multiplicação da sequência $\mathbf{x} = (x_n)$ por c é trivialmente definida por $c\mathbf{x} := (cx_n)$.

Mostraremos agora que sequências obtidas aplicando-se essas operações a sequências convergentes são também convergentes e seus limites são obtidos aplicando-se as mesmas operações aos limites das sequências envolvidas.

Teorema 7.2

Sejam $\mathbf{x} = (x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_n)$ sequências de números reais que convergem a $\bar{x}$ e $\bar{y}$, respectivamente, e $c \in \mathbb{R}$. Então as sequências $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, e $c\mathbf{x}$ convergem a $\bar{x} + \bar{y}$, $\bar{x} - \bar{y}$, $\bar{x}\bar{y}$ e $c\bar{x}$, respectivamente. Além disso, se $\bar{y} \neq 0$ e $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\mathbf{x}/\mathbf{y}$ converge para $\bar{x}/\bar{y}$.

Prova: Mostremos inicialmente que $\lim(x_n + y_n) = \bar{x} + \bar{y}$. Pela desigualdade triangular temos

$$|(x_n + y_n) - (\bar{x} + \bar{y})| = |(x_n - \bar{x}) + (y_n - \bar{y})| \leq |x_n - \bar{x}| + |y_n - \bar{y}|.$$

Seja dado $\varepsilon > 0$ qualquer. Como $x_n \to \bar{x}$ e $y_n \to \bar{y}$, podemos encontrar $N_1 \in \mathbb{N}$ e $N_2 \in \mathbb{N}$ tais que, para todo $n > N_1$, $|x_n - \bar{x}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e, para todo $n > N_2$, $|y_n - \bar{y}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Seja $N_0 := \sup\{N_1, N_2\}$. Então, para todo $n > N_0$, temos

$$|(x_n + y_n) - (\bar{x} + \bar{y})| \leq |x_n - \bar{x}| + |y_n - \bar{y}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

o que prova que $(x_n + y_n)$ converge para $\bar{x} + \bar{y}$.

A prova de que $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ converge para $\bar{x}-\bar{y}$ segue dos mesmos argumentos.

Mostremos agora que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ converge para $\bar{x}\bar{y}$. Usando de novo a desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned}|x_n y_n - \bar{x}\bar{y}| &\le |(x_n y_n - \bar{x} y_n) + (\bar{x} y_n - \bar{x}\bar{y})| \\ &\le |y_n(x_n - \bar{x})| + |\bar{x}(y_n - \bar{y})| \\ &\le |y_n||x_n - \bar{x}| + |\bar{x}||y_n - \bar{y}|.\end{aligned}$$

Pelo Teorema 7.1, existe $M_1 > 0$ tal que $|y_n| \le M_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $M := \sup\{M_1, |\bar{x}|\}$. Assim, a desigualdade anterior implica

$$|x_n y_n - \bar{x}\bar{y}| \le M(|x_n - \bar{x}| + |y_n - \bar{y}|).$$

Como $|x_n - \bar{x}| \to 0$ e $|y_n - \bar{y}| \to 0$, segue do que acabamos de mostrar para o limite da soma que

$$a_n := |x_n - \bar{x}| + |y_n - \bar{y}| \to 0.$$

Como $|x_n y_n - \bar{x}\bar{y}| \le M a_n$, segue do exemplo 6.1(e) que $|x_n y_n - \bar{x}\bar{y}| \to 0$. Pelo Teorema 6.2 concluímos que $x_n y_n \to \bar{x}\bar{y}$.

A prova de que $cx_n \to c\bar{x}$, para $c \in \mathbb{R}$ qualquer, segue diretamente do que acabamos de demonstrar para o limite do produto, tomando-se por $\bar{y} = (y_n)$ a sequência constante $(c, c, c, \dots)$. Observe, em particular, que $c = -1$ nos dá que $-x_n \to -\bar{x}$.

Finalmente, para provar que $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{\bar{x}}{\bar{y}}$, vamos primeiro mostrar que $\dfrac{1}{y_n} \to \dfrac{1}{\bar{y}}$, desde que $\bar{y} \ne 0$ e $y_n \ne 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para simplificar, suponhamos inicialmente que $\bar{y} > 0$. Como $y_n \to \bar{y}$, para n suficientemente grande temos que $y_n \in V_{\bar{y}/2}(\bar{y}) = (\bar{y}/2, 3\bar{y}/2)$. Em particular, para n suficientemente grande, ou seja, $n > N_1$, para um certo $N_1 \in \mathbb{N}$, temos $y_n > \bar{y}/2$. Assim, para todo $n > N_1$, temos

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{\bar{y}}\right| = \left|\frac{\bar{y} - y_n}{\bar{y} y_n}\right| = \frac{1}{|y_n \bar{y}|}|y_n - \bar{y}| \le \frac{2}{\bar{y}^2}|y_n - \bar{y}|.$$

Seja, então, dado $\varepsilon > 0$ qualquer. Existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n - \bar{y}| < \dfrac{1}{2}\bar{y}^2\varepsilon$. Façamos $N_0 := \sup\{N_1, N_2\}$. Assim, para todo $n > N_0$, temos

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{\bar{y}}\right| \le \frac{2}{\bar{y}^2}|y_n - \bar{y}| < \frac{2}{\bar{y}^2}\left(\frac{1}{2}\bar{y}^2\varepsilon\right) = \varepsilon,$$

o que conclui a prova de que $\dfrac{1}{y_n} \to \dfrac{1}{\bar{y}}$, quando $\bar{y} > 0$. No caso em que $\bar{y} < 0$, pelo que já foi provado temos $-y_n \to -\bar{y}$ e, como $-\bar{y} > 0$, $-1/y_n \to -1/\bar{y}$. Segue daí que $\dfrac{1}{y_n} \to \dfrac{1}{\bar{y}}$ também no caso em que $\bar{y} < 0$.

A prova de que $x_n/y_n \to \bar{x}/\bar{y}$ segue, agora, do fato que $\mathbf{x}/\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (1/\mathbf{y})$ e então, pelo que já foi demonstrado,

$$\lim \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \lim (x_n) \left(\frac{1}{y_n}\right) = \lim x_n \lim \left(\frac{1}{y_n}\right) = \bar{x}\left(\frac{1}{\bar{y}}\right) = \frac{\bar{x}}{\bar{y}},$$

o que conclui a demonstração. □

Observação 7.1

As afirmações do Teorema 7.2 sobre o limite da soma e do produto de duas sequências convergentes podem ser facilmente estendidas para um número finito qualquer de sequências convergentes por Indução Matemática. Assim, se $\mathbf{a} = (a_n)$, $\mathbf{b} = (b_n)$, $\mathbf{c} = (c_n)$,...,$\mathbf{z} = (z_n)$ são sequências convergentes, então sua soma $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\cdots+\mathbf{z} := (a_n+b_n+c_n+\cdots+z_n)$ é uma sequência convergente e

$$\lim(a_n + b_n + c_n + \cdots + z_n) = \lim a_n + \lim b_n + \lim c_n + \cdots + \lim z_n. \tag{7.1}$$

Da mesma forma, seu produto $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\cdots\mathbf{z} := (a_n b_n c_n \cdots z_n)$ é uma sequência convergente e

$$\lim(a_n b_n c_n \cdots z_n) = (\lim a_n)(\lim b_n)(\lim c_n)\cdots(\lim z_n). \tag{7.2}$$

Em particular, se $k \in \mathbb{N}$ e $\mathbf{x} = (x_n)$ é uma sequência convergente, então

$$\lim x_n^k = (\lim x_n)^k. \tag{7.3}$$

Esperamos que você mesmo seja capaz de provar sem dificuldades as fórmulas (7.1), (7.2) e (7.3) usando o Teorema 7.2 e Indução Matemática.

Exemplos 7.1

(a) A sequência (n) é divergente.

De fato, pelo Teorema 7.1, se (n) fosse convergente, então seria limitada, isto é, existiria um número real $M > 0$ tal que $n = |n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas isso estaria em contradição com a Propriedade Arquimediana.

(b) Se $b > 1$ então a sequência (b^n) é divergente.

Como $b > 1$ temos $b = 1 + r$, com $r = b - 1 > 0$. A desigualdade de Bernoulli implica $b^n = (1 + r)^n \geq 1 + nr$. Se (b^n) fosse convergente, então teríamos $b^n = |b^n| < M$, para algum $M > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $1+nr \leq b^n < M$, ou seja, $n < (M - 1)/r$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso contradiz a Propriedade Arquimediana e, portanto, temos que (b^n) é divergente.

(c) A recíproca do Teorema 7.1 é falsa.

De fato, a sequência $(1 + (-1)^n)$ é limitada e, como vimos no exemplo 6.1 (m), não é convergente.

(d) Seja (x_n) uma sequência de números reais que converge a $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Seja p um polinômio, isto é,

$$p(t) := a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \cdots + a_1 t + a_0,$$

onde $k \in \mathbb{N}$ e $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \ldots, k$. Então a sequência $(p(x_n))$ converge a $p(\bar{x})$.

Segue do Teorema 7.2 e da Observação 7.1. Deixamos os detalhes para você como exercício.

(e) Seja (x_n) uma sequência convergente a $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Seja r uma função racional, isto é, $r(t) := p(t)/q(t)$, onde p e q são polinômios. Suponhamos que $q(x_n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $q(\bar{x}) \neq 0$. Então a sequência $(r(x_n))$ converge a $r(\bar{x})$.

Segue também do Teorema 7.2 e da Observação 7.1. Os detalhes ficam como exercício para você.

(f)

$$\lim \frac{5n^3 - 2n + 3}{2n^3 + 3n^2 + 1} = \frac{5}{2}.$$

Fazendo $a_n := \dfrac{5n^3 - 2n + 3}{2n^3 + 3n^2 + 1}$, para poder aplicar o Teorema 7.2 (em sua versão estendida pela Observação 7.1) é necessário escrever a sequência a_n de modo mais conveniente, para torná-la uma expressão racional envolvendo apenas sequências convergentes. Obtemos essa forma dividindo por n^3 o numerador e o denominador da fração que define a_n. Assim, encontramos

$$a_n = \frac{5 - (2/n^2) + (3/n^3)}{2 + (3/n) + (1/n^3)}.$$

Agora podemos aplicar o Teorema 7.2, obtendo

$$\lim a_n = \lim\left(\frac{5-(2/n^2)+(3/n^3)}{2+(3/n)+(1/n^3)}\right) = \frac{5-2\lim(1/n^2)+3\lim(1/n^3)}{2+3\lim(1/n)+\lim(1/n^3)}$$

$$= \frac{5-2(\lim(1/n))^2+3(\lim(1/n))^3}{2+3\lim(1/n)+(\lim(1/n))^3} = \frac{5}{2}.$$

(g)

$$\lim \frac{5^n-3^n+1}{5^n+2^n+2} = 1.$$

Façamos

$$x_n := \frac{5^n-3^n+1}{5^n+3^n+2}.$$

Dividindo numerador e denominador por 5^n, obtemos

$$x_n = \frac{1-(3/5)^n+5^{-n}}{1+(2/5)^n+2\cdot 5^{-n}}.$$

Portanto,

$$\lim x_n = \lim \frac{1-(3/5)^n+5^{-n}}{1+(2/5)^n+2\cdot 5^{-n}}$$
$$= \frac{1-\lim(3/5)^n+\lim 5^{-n}}{1+\lim(2/5)^n+2\lim 5^{-n}} = \frac{1-0+0}{1+0+0} = 1.$$

Limites e Desigualdades

A seguir vamos apresentar alguns resultados muito úteis envolvendo limites e desigualdades.

Teorema 7.3
Se (x_n) é uma sequência convergente de números reais e se $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\bar{x} = \lim x_n \geq 0$.

Prova: Suponhamos que a conclusão é falsa, isto é, que $\bar{x} < 0$. Então $\varepsilon = -\bar{x} > 0$. Como (x_n) converge a $\bar{x}$, existe um número natural N_0 tal que

$$2\bar{x} = \bar{x} - \varepsilon < x_n < \bar{x} + \varepsilon = 0 \qquad \text{para todo } n > N_0.$$

Em particular, $x_{N_0+1} < 0$, o que contradiz a hipótese de que $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

O próximo resultado, embora seja aparentemente mais forte que o anterior, é, na verdade, um simples corolário deste.

Teorema 7.4
Se (x_n) e (y_n) são sequências convergentes de números reais e se $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim x_n \leq \lim y_n$.

Prova: Seja $z_n := y_n - x_n$. Então $z_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue dos Teoremas 7.3 e 7.2 que

$$0 \leq \lim z_n = \lim y_n - \lim x_n,$$

de modo que $\lim x_n \leq \lim y_n$. $\square$

O resultado que acabamos de ver implica, em particular, que uma desigualdade da forma $a \leq x_n \leq b$, válida para todos os termos de uma dada sequência convergente, é também satisfeita pelo seu limite, como estabelecido no enunciado seguinte.

Teorema 7.5
Se (x_n) é uma sequência convergente e se $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $a \leq \lim x_n \leq b$.

Prova: Se (a_n) é a sequência constante com $a_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então temos $a_n \leq x_n$ e, pelo Teorema 7.4, $a = \lim a_n \leq \lim x_n$. Da mesma forma, tomando $b_n = b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de $x_n \leq b_n$ concluímos que $\lim x_n \leq b$. $\square$

Observação 7.2
Como, para todo $m \in \mathbb{N}$, a m-cauda de uma sequência convergente converge para o mesmo limite, as hipóteses $x_n \geq 0$, $x_n \leq y_n$ e $a \leq x_n \leq b$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, nos Teoremas 7.3, 7.4 e 7.5, respectivamente, podem ser enfraquecidas substituindo-se em cada um dos enunciados a expressão "para todo $n \in \mathbb{N}$" pela expressão "para n suficientemente grande", que significa precisamente "para todo $n \geq m$, para algum $m \in \mathbb{N}$".

O próximo resultado é um dos mais úteis para a demonstração da convergência de sequências, indicando, sempre que for possível, a estratégia de limitá-las por baixo e por cima por sequências convergentes que possuem o mesmo limite.

Teorema 7.6 (Teorema do Sanduíche)
Suponhamos que (x_n), (y_n) e (z_n) são sequências tais que

$$x_n \leq y_n \leq z_n \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

e que $\lim x_n = \lim z_n$. Então (y_n) é convergente e

$$\lim x_n = \lim y_n = \lim z_n.$$

Prova: Seja $\bar{c} := \lim x_n = \lim z_n$. Se $\varepsilon > 0$ é dado, então segue da convergência de (x_n) e (z_n) que existe um número natural N_0 tal que se $n \geq N_0$ então

$$|x_n - \bar{c}| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |z_n - \bar{c}| < \varepsilon.$$

Como

$$x_n - \bar{c} \leq y_n - \bar{c} \leq z_n - \bar{c} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

concluímos (por quê?) que

$$-\varepsilon < y_n - \bar{c} < \varepsilon \qquad \text{para todo } n > N_0.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que $\lim y_n = \bar{c}$. □

O seguinte resultado fornece um "teste da razão" para a convergência de sequências de fácil verificação.

Teorema 7.7
Seja (x_n) uma sequência de números reais positivos tal que $\bar{r} := \lim(x_{n+1}/x_n)$ existe. Se $\bar{r} < 1$, então (x_n) converge e $\lim x_n = 0$. Por outro lado, se $\bar{r} > 1$, então (x_n) é divergente.

Prova: Suponhamos $\bar{r} < 1$. Pelo Teorema 7.1 segue que $\bar{r} \geq 0$. Seja $s \in \mathbb{R}$ satisfazendo $\bar{r} < s < 1$, e seja $\varepsilon := s - \bar{r} > 0$. Existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_0$ então

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - \bar{r}\right| < \varepsilon.$$

Decorre daí que se $n > N_0$, então

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < \bar{r} + \varepsilon = \bar{r} + (s - \bar{r}) = s.$$

Portanto, se $n > N_0$, obtemos

$$0 < x_{n+1} < x_n s < x_{n-1}s^2 < \cdots < x_{N_0+1}s^{n-N_0}.$$

Fazendo $C := x_{N_0+1}/s^{N_0+1}$, vemos que $0 < x_{n+1} < Cs^{n+1}$, para todo $n > N_0$, ou seja, $0 < x_n < Cs^n$ para todo $n > N_0 + 1$. Como $0 < s < 1$, o Exemplo 6.1 (g) nos diz que $\lim s^n = 0$. Assim, podemos aplicar o resultado no Exemplo 6.1 (e) para concluir que $\lim x_n = 0$.

Vejamos agora o caso $\bar{r} > 1$. Tomando $b \in \mathbb{R}$ satisfazendo $1 < b < \bar{r}$ e $\varepsilon := \bar{r} - b$, temos que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_0$ então

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \bar{r} - \varepsilon = \bar{r} - (\bar{r} - b) = b.$$

Logo, se $n > N_0$, então

$$x_{n+1} > x_n b > x_{n-1} b^2 > \cdots > x_{N_0+1} b^{n-N_0} = \left(\frac{x_{N_0+1}}{b^{N_0+1}}\right) b^{n+1}.$$

Ponhamos $C' = x_{N_0+1}/b^{N_0+1}$. Vimos no item (b) que b^n não é limitada superiormente. Assim, dado $M > 0$ qualquer, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $b^n > M/C'$ para todo $n > N_1$. Portanto, $x_n > M$, para todo $n > \sup\{N_0+1, N_1+1\}$. Como $M > 0$ é arbitrário, segue que (x_n) não é limitada e, portanto, é divergente. □

Exemplos 7.2

(a)

$$\lim\left(\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right) = 0.$$

Lembremos que $-1 \le \operatorname{sen} n \le 1$. Então temos

$$-\frac{1}{n} \le \frac{\operatorname{sen} n}{n} \le \frac{1}{n} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo, podemos aplicar o Teorema 7.6 (do Sanduíche) para concluir a verificação da afirmação.

(b) Seja (x_n) uma sequência de números reais convergente a $\bar{x}$ e suponhamos que $x_n \ge 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então a sequência $(\sqrt{x_n})$ converge a $\sqrt{\bar{x}}$.

Segue do Teorema 7.3 que $\bar{x} \ge 0$. Consideremos os dois casos: (i) $\bar{x} = 0$; (ii) $\bar{x} > 0$.

(i) Se $\bar{x} > 0$, seja dado $\varepsilon > 0$ qualquer. Como $x_n \to 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_0$ então

$$0 \le x_n = x_n - 0 < \varepsilon^2.$$

Daí segue que $0 \le \sqrt{x_n} < \varepsilon$ para $n > N_0$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $\sqrt{x_n} \to 0$.

(ii) Se $\bar{x} > 0$, então $\sqrt{\bar{x}} > 0$ e temos

$$\sqrt{x_n} - \sqrt{\bar{x}} = \frac{(\sqrt{x_n} - \sqrt{\bar{x}})(\sqrt{x_n} + \sqrt{\bar{x}})}{\sqrt{x_n} + \sqrt{\bar{x}}} = \frac{x_n - \bar{x}}{\sqrt{x_n} + \sqrt{\bar{x}}}.$$

Como $\sqrt{x_n} + \sqrt{\bar{x}} \ge \sqrt{\bar{x}} > 0$, segue que

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{\bar{x}}| \le \frac{1}{\sqrt{\bar{x}}}|x_n - \bar{x}|.$$

Portanto, a convergência de $\sqrt{x_n}$ a $\sqrt{\bar{x}}$ segue do fato que $x_n \to \bar{x}$.

(c) Mostraremos que se r é um número racional positivo qualquer, então

$$\lim \frac{1}{n^r} = 0.$$

Primeiro consideramos o caso em que $r = 1/q$, $q \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, pela Propriedade Arquimediana existe um $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $N_0 > (1/\varepsilon)^q$. Então

$$n > N_0 \Rightarrow n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^q \Rightarrow n^{1/q} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |\frac{1}{n^{1/q}} - 0| = \frac{1}{n^{1/q}} < \varepsilon.$$

Segue que

$$\lim \frac{1}{n^{1/q}} = 0.$$

Consideremos agora o caso geral em que $r = p/q$, onde p e q são números naturais. Procedemos por indução em p. Acabamos de ver que a afirmação é válida para $p = 1$. Suponhamos, então, que vale

$$\lim \frac{1}{n^{k/q}} = 0.$$

Segue que

$$\lim \frac{1}{n^{(k+1)/q}} = \lim \frac{1}{n^{k/q}} \frac{1}{n^{1/q}} = (\lim \frac{1}{n^{k/q}})(\lim \frac{1}{n^{1/q}}) = 0 \cdot 0 = 0,$$

o que conclui a prova por indução.

(d) $\lim \dfrac{10^n}{n!} = 0.$

De fato, pondo $x_n := 10^n/n!$, temos

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{10^n} = \frac{10}{n+1}.$$

Logo $\lim(x_{n+1}/x_n) = 0$. Podemos então aplicar o Teorema 7.7 para concluir que $\lim x_n = 0$.

Exercícios 7.1

1. Para x_n dado pelas fórmulas seguintes, estabeleça se a sequência (x_n) é convergente ou divergente.

   (a) $x_n : \dfrac{n}{n+1}$,

   (b) $x_n := \dfrac{(-1)^n n}{n+1}$,

   (c) $x_n := \dfrac{n^2}{n+1}$,

(d) $x_n := \dfrac{2n^2+3}{n^2+1}$.

(e) $x_n := 2^n$.

(f) $x_n := (-1)^n n^2$.

2. Encontre os limites das seguintes sequências:

(a) $\lim\left(\dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}\right)$,

(b) $\lim\left(\dfrac{n+1}{n\sqrt{n}}\right)$.

(c) $\lim\big(\sqrt{n+3}\,(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\big)$,

(d) $\lim(3\sqrt{n})^{1/2n}$,

3. Encontre cada um dos seguintes limites e justifique plenamente suas respostas com base nos teoremas e exemplos dados no texto.

(a) $\lim \dfrac{2n^2+1}{3n^2-5n+2}$

(b) $\lim \dfrac{n^3-1}{3n^3+n-4}$

(c) $\lim \dfrac{n\cos n}{n^2+24}$

(d) $\lim \dfrac{2^n+1}{2^n-n}$

(e) $\lim((n+1)^{1/3}-n^{1/3})$

(f) $\lim \dfrac{n^{1/3}\,\mathrm{sen}\, n!}{n+2}$

(g) $\lim\left(\dfrac{n^3}{2n^2-1}-\dfrac{n^2}{2n+1}\right)$

(h) $\lim(a^n+a^{-n})^{1/n}$, com $a>0$.

4. Se $0<a<b$, determine

$$\lim\left(\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}\right).$$

5. Se $a>0$, $b>0$, mostre que

$$\lim\left(\sqrt{(n+a)(n+b)}-n\right)=\frac{a+b}{2}.$$

6. Mostre que se $z_n := (a^n+b^n)^{1/n}$ onde $0<a<b$, então $\lim z_n = b$.

7. Use o Teorema 7.6 (do Sanduíche) para determinar os seguintes limites:

   (a) $\lim n^{1/n^2}$,

   (b) $\lim (n!)^{1/n^2}$.

8. Aplique o Teorema 7.7 às seguintes sequências, onde a, b satisfazem $0 < a < 1$, $b > 1$.

   (a) (nb^{-n}),

   (b) $(2^{3n}/3^{2n})$,

   (c) (n^2a^n),

   (d) (b^n/n^2),

   (e) $(b^n/n!)$,

   (f) $(n!/n^n)$.

9. Seja (x_n) uma sequência de números reais positivos tal que $\bar{s} := \lim x_n^{1/n} < 1$. Mostre que existe um $r \in \mathbb{R}$ com $0 < r < 1$ tal que $0 < x_n < r^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Use isso para mostrar que $\lim x_n = 0$.

10. Mostre que se (x_n) e (y_n) são sequências convergentes, então (u_n) e (v_n) definidas por $u_n := \max\{x_n, y_n\}$ e $v_n := \min\{x_n, y_n\}$ também são convergentes.

Aula 8 – Sequências Monótonas e Subsequências

Metas da aula: Apresentar o conceito de sequência monótona e estabelecer o Teorema da Sequência Monótona. Introduzir o conceito de subsequência e estabelecer o Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber o enunciado do Teorema da Sequência Monótona e o uso desse resultado para estabelecer a existência do limite de sequências.
- Entender o conceito de subsequências e seu uso em conexão com o estabelecimento da convergência e da divergência de sequências.
- Saber o enunciado do Teorema de Bolzano-Weierstrass e seu uso para estabelecer a existência de subsequências convergentes.

Introdução

Nesta aula vamos aprender um resultado muito importante que nos permitirá afirmar a convergência de certas sequências, chamadas monótonas, mesmo em situações em que não temos candidatos a limites dessas sequências, nas quais, portanto, não seria possível verificar a convergência diretamente usando a Definição 6.2. Vamos também estudar o conceito de subsequências e seu uso no estabelecimento de limites bem como na prova da divergência de sequências. Por fim, vamos enunciar e provar o famoso Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Sequências Monótonas

Vamos iniciar nossa aula definindo sequências monótonas.

Definição 8.1
Seja $\mathbf{x} = (x_n)$ uma sequência de números reais. Dizemos que $\mathbf{x}$ é *não-decrescente* se $x_n \le x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots$. Diz-se que $\mathbf{x}$ é *crescente* se $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$. Em particular, sequências crescentes constituem um caso especial de sequências não-decrescentes.

Analogamente, dizemos que $\mathbf{x}$ é *não-crescente* se $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots$, e $\mathbf{x}$ é decrescente se $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $x_1 > x_2 > x_3 > \cdots$. De novo, temos que sequências decrescentes constituem um caso especial de sequências não-crescentes.

Dizemos, de modo geral, que $\mathbf{x}$ é *monótona* se $\mathbf{x}$ é não-decrescente ou não-crescente.

As sequências $(1, 2, 2, 3, 3, 3, \dots)$, (n), $(1, 1/2, 1/2, 1/3, 1/3, 1/3, \dots)$ e $(1/n)$ são exemplos de sequências monótonas: a primeira é não-decrescente, a segunda é crescente, a terceira é não-crescente e a quarta é decrescente.

A seguir enunciamos o resultado mais importante sobre sequências monótonas.

Teorema 8.1 (Teorema da Sequência Monótona)
Uma sequência monótona de números reais é convergente se, e somente se, é limitada. Além disso:

(a) Se $\mathbf{x} = (x_n)$ é uma sequência não-decrescente limitada, então

$$\lim x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

(b) Se $\mathbf{x} = (x_n)$ é uma sequência não-crescente limitada, então

$$\lim x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Prova: Vimos no Teorema 7.1 que toda sequência convergente é limitada. Portanto, basta mostrar que se uma sequência monótona é limitada, então ela é convergente. Seja, então, $\mathbf{x}$ uma sequência monótona limitada. Então, ou $\mathbf{x}$ é não-decrescente, ou $\mathbf{x}$ é não-crescente.

(a) Vamos tratar primeiro o caso em que $\mathbf{x} = (x_n)$ é uma sequência limitada não-decrescente. Como $\mathbf{x}(\mathbb{N}) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto limitado, pelo Teorema 5.7 (do Supremo), existe $x^* := \sup \mathbf{x}(\mathbb{N})$. Afirmamos que $\lim x_n = x^*$.

Com efeito, seja dado $\varepsilon > 0$ qualquer. Então $x^* - \varepsilon$ não é cota superior de $\mathbf{x}(\mathbb{N})$, e, portanto, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x^* - \varepsilon < x_{N_0}$. Como (x_n) é não-decrescente, temos que $x_{N_0} \leq x_n$ para todo $n > N_0$, e assim segue que

$$x^* - \varepsilon < x_{N_0} \leq x_n \leq x^* < x^* + \varepsilon \qquad \text{para todo } n > N_0,$$

ou seja,

$$|x_n - x^*| < \varepsilon \qquad \text{para todo } n > N_0.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, fica provado que $x_n \to x^*$.

(b) Consideremos agora o caso em que $\mathbf{x} = (x_n)$ é não-crescente. De novo, como $\mathbf{x}(\mathbb{N})$ é limitado, segue do Teorema do Supremo que existe $x_* := \inf \mathbf{x}(\mathbb{N})$. A prova de que $\lim x_n = x_*$ é inteiramente análoga à que acabamos de dar para o caso em que (x_n) é não-decrescente e deixaremos para você como exercício. $\square$

Exemplos 8.1

(a) $\lim(1/n^{1/3}) = 0$.

Esse é um caso particular do Exemplo 7.2 (c); contudo, daremos aqui uma outra demonstração usando o Teorema da Sequência Monótona. A sequência $\mathbf{x} := (1/n^{1/3})$ é decrescente e, claramente, 0 é uma cota inferior de $\mathbf{x}$. Não é difícil mostrar que, de fato, temos $0 = \inf \mathbf{x}(\mathbb{N})$ e, portanto, a afirmação segue do referido teorema. De outro modo, sabemos pelo Teorema da Sequência Monótona que existe $\bar{x} := \lim x_n$. Como $x_n^3 = 1/n$ e $\lim 1/n = 0$, temos

$$\bar{x}^3 = (\lim x_n)^3 = \lim x_n^3 = \lim \frac{1}{n} = 0 \Longrightarrow \bar{x} = \lim \frac{1}{n^{1/3}} = 0.$$

(b) Seja $\mathbf{x} = (x_n)$ definida indutivamente por $x_1 := 1$, $x_{n+1} := (x_n/3) + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostraremos que $\lim x_n = 3/2$.

Provemos, usando Indução Matemática, que vale $1 \le x_n < x_{n+1} < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $x_2 = (x_1/3) + 1 = (1/3) + 1 = 4/3$, a afirmação é válida para $n = 1$. Suponhamos, por indução, que vale $1 \le x_k < x_{k+1} < 2$. Temos

$$1 \le x_k < x_{k+1} = (x_k/3)+1 < (x_{k+1}/3)+1 = x_{k+2} < (2/3)+1 = 5/3 < 2,$$

e, portanto, vale $1 \le x_{k+1} < x_{k+2} < 2$, o que conclui a prova por indução de que $1 \le x_n < x_{n+1} < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Assim, temos que (x_n) é crescente e limitada. Pelo Teorema da Sequência Monótona, existe $\bar{x} = \lim x_n$. Como a 1-cauda $\mathbf{x}_1 = (x_{n+1})$ converge para o mesmo limite que $\mathbf{x}$, tomando o limite na relação $x_{n+1} = (x_n/3) + 1$ obtemos

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}}{3} + 1,$$

e daí segue que $\bar{x} = 3/2$.

(c) Seja $\mathbf{x} = (x_n)$ definida indutivamente por $x_1 := 0$, $x_{n+1} := \sqrt{2 + x_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que $\lim x_n = 2$.

Provemos por indução que vale $0 \leq x_n < x_{n+1} \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $x_2 = \sqrt{2+0} = \sqrt{2}$, a afirmação é claramente verdadeira para $n = 1$. Suponhamos por indução que vale $0 \leq x_k < x_{k+1} \leq 2$. Então

$$0 \leq x_k < x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2 + x_{k+1}} = x_{k+2} \leq \sqrt{2+2} = 2,$$

e, portanto, $0 \leq x_{k+1} < x_{k+2} \leq 2$, o que conclui a prova por indução de que $0 \leq x_n < x_{n+1} \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Assim, temos que (x_n) é uma sequência crescente e limitada. Logo, pelo Teorema da Sequência Monótona, existe $\bar{x} = \lim x_n$ e $\bar{x} = \sup \mathbf{x}(\mathbb{N})$. Como a 1-cauda $\mathbf{x}_1 = (x_{n+1})$ converge para o mesmo limite que $\mathbf{x}$, tomando o limite na relação $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, usando o Exemplo 7.2 (b) e o Teorema 7.5, obtemos

$$\bar{x} = \sqrt{2 + \bar{x}} \quad \text{e} \quad 0 \leq \bar{x} \leq 2.$$

Vemos então que $\bar{x}$ é uma raiz não-negativa da equação $x^2 - x - 2 = 0$ cujas raizes são -1 e 2. Logo, $\bar{x} = 2$ como afirmado.

(d) Seja $s_n := 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n$. A sequência (s_n) é conhecida como *série harmônica*. Como $s_{n+1} = s_n + 1/(n+1) > s_n$, essa é uma sequência crescente e, pelo Teorema da Sequência Monótona, será convergente se, e somente se, for limitada superiormente. Mostraremos a seguir que (s_n) é ilimitada e, portanto, divergente.

O interessante nessa questão é que ela nos traz um exemplo claro de um caso em que um argumento simples, puramente matemático, mostra-se muito mais poderoso que a tentativa de se fazer previsões baseadas exclusivamente no cálculo massivo de computadores de última geração. De fato, um cálculo com computador exibirá valores aproximados de s_n em torno de 11.4 para $n = 50\,000$, e $s_n \approx 12.1$ para $n = 100\,000$. Tais dados poderiam nos levar a concluir que a sequência é limitada. No entanto, podemos provar que vale o contrário, observando que

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)}_{2^{n-1} \text{ vezes}} \\ &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{n \text{ vezes}} \\ &= 1 + \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Os termos s_n crescem de modo extremamente lento. Por exemplo, pode-se mostrar que para obtermos $s_n > 50$ seriam necessárias aproximadamente 5.2×10^{21} adições, trabalho esse que levaria cerca de 400 000 anos num computador normal da atualidade, e mais de 160 anos num supercomputador capaz de realizar um trilhão de adições por segundo.

Cálculo de Raízes Quadradas.

Agora daremos uma aplicação do Teorema da Sequência Monótona relacionada com o cálculo de raízes quadradas de números positivos.

Seja $a > 0$. Apresentaremos um método de aproximação de $\sqrt{a}$ por meio da construção de uma seqüencia (s_n) que converge a esse número. Esse processo para calcular raízes quadradas já era conhecido na Mesopotamia antes do ano 1500 A.C..

Seja $s_1 > 0$ arbitrariamente escolhido e definamos

$$s_{n+1} := \frac{1}{2}(s_n + a/s_n) \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Mostraremos que (s_n) converge a $\sqrt{a}$.

Primeiramente, mostremos que $s_n^2 \geq a$ para $n \geq 2$. De fato, da relação $s_n^2 - 2s_{n+1}s_n + a = 0$ vemos que s_n é raiz da equação de segundo grau $x^2 - 2s_{n+1}x + a = 0$, cujo discriminante é $4s_{n+1}^2 - 4a$. Como tal equação possui raízes reais, seu discriminante deve ser não negativo e, portanto, devemos ter $s_{n+1}^2 \geq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora mostraremos que (s_n) é ultimadamente não-crescente; mais precisamente, que $s_{n+1} \leq s_n$ para $n \geq 2$. Com efeito,

$$s_n - s_{n+1} = s_n - \frac{1}{2}\left(s_n + \frac{a}{s_n}\right) = \frac{1}{2}\frac{(s_n^2 - a)}{s_n} \geq 0, \quad \text{se } n \geq 2.$$

Portanto, $s_{n+1} \leq s_n$ para todo $n \geq 2$. O Teorema da Sequência Monótona implica que $\bar{s} := \lim s_n$ existe. Além disso, os Teorema 7.2 e 7.5 nos dão que $\bar{s}$ deve satisfazer as relações

$$\bar{s} = \frac{1}{2}\left(\bar{s} + \frac{a}{\bar{s}}\right) \qquad \bar{s} \geq \sqrt{a},$$

donde segue que $\bar{s} = a/\bar{s}$, ou seja, $\bar{s}^2 = a$. Logo, $\bar{s} = \sqrt{a}$.

O Número e.

Seja (s_n) definida indutivamente por $s_1 = 1$, $s_{n+1} = s_n + \dfrac{1}{n!}$ e, portanto,

$$s_{n+1} := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como, para todo $n \in \mathbb{N}$, $s_n < s_{n+1}$ e

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + 1 + 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}) < 3, \end{aligned}$$

segue do Teorema da Sequência Monótona que (s_n) converge. Definimos

$$e := \lim s_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right). \tag{8.1}$$

O número e assim definido é o número “transcendental” mais importante da Matemática depois de π. O termo “transcendental” significa que esses números não são raízes de polinômios com coeficientes racionais, a não ser, obviamente, o polinômio identicamente nulo. Em particular, os números trancendentais são irracionais. A prova de que e é transcendental, embora possa ser feita de modo relativamente simples, escapa dos objetivos deste curso.

Pelo que acabamos de ver, vale $2 < e \le 3$. A sequência acima nos permite obter aproximações de e com erros arbitrariamente pequenos. Por exemplo, s_{10} nos dá a aproximação 2.7182818, com erro menor que 10^{-7}. O número e é às vezes chamado de *número de Euler*, em homenagem a LEONHARD EULER (1707–1783), considerado até hoje um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Ele é a base dos assim chamados *logaritmos naturais*: o logaritmo natural de um número real positivo x, denotado por $\log x$, é definido através da equação $e^{\log x} = x$.

O resultado seguinte trata de um limite clássico bastante importante.

Teorema 8.2

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e. \tag{8.2}$$

Prova: Seja $t_n := (1 + 1/n)^n$ para $n \in \mathbb{N}$. Aplicando a fórmula binomial obtemos

$$\begin{aligned} t_n &= 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Fazendo o mesmo para t_{n+1} e comparando as respectivas fórmulas, vemos que a segunda fórmula para t_{n+1} contém uma parcela positiva a mais que a segunda fórmula para t_n e que as parcelas restantes são todas maiores que as parcelas correspondentes na fórmula para t_n. Portanto, temos que $t_n < t_{n+1}$ para todo n. Claramente, temos que $t_n < s_n$, onde $s_n = 1 + 1 + 1/2! + \cdots + 1/n!$. Como vimos há pouco, $s_n < 3$ e, assim, segue que $t_n < 3$. Logo, pelo Teorema da Sequência Monótona segue que (t_n) converge.

Afirmamos que $\lim t_n = \lim s_n = e$. Com efeito, o fato de que $\lim t_n \le \lim s_n = e$ decorre diretamente do Teorema 7.4, uma vez que vale $t_n < s_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora, tomando $n > m$, vale

$$t_n \ge 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{m!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right).$$

Fixando m e fazendo $n \to \infty$ obtemos

$$\lim t_n \ge 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!} = s_m.$$

Fazendo agora $m \to \infty$, obtemos $\lim t_n \ge \lim_{m\to\infty} s_m = e$. Segue, então, que $\lim t_n = e$. $\square$

Subsequências e o Teorema de Bolzano-Weierstrass

Como uma sequência de números reais é por definição uma função $\mathbf{x} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, dada uma função qualquer $\mathbf{n} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (isto é, uma sequência de números naturais) a função composta $\mathbf{x} \circ \mathbf{n} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é também sequência de números reais. As subsequências de uma dada sequência $\mathbf{x}$ constituem os casos especiais, em que a função $\mathbf{n}$ é crescente, dessa forma de obter novas sequências a partir de uma sequência dada.

Definição 8.2
Seja $\mathbf{x} = (x_n)$ uma sequência de números reais e $\mathbf{n} = (n_k)$ uma sequência crescente de números naturais, $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$. Então dizemos que a sequência $\mathbf{x} \circ \mathbf{n} = (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$ é chamada uma *subsequência* de $\mathbf{x}$.

Por exemplo, dada a sequência $(1/n)$ as sequências $(1/2k)$ e $(1/(2k-1))$ são ambas subsequências suas com $n_k = 2k$ e $n_k = 2k - 1$ para $k \in \mathbb{N}$, respectivamente. Outros exemplos de subsequências dessa mesma sequência são as sequências $(1/2^k)$ e $(1/k!)$, com $n_k = 2^k$ e $n_k = k!$, respectivamente. Por outro lado, a sequência

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{3k}, \frac{1}{3k-1}, \frac{1}{3k-2}, \ldots\right)$$

não é subsequência de $(1/n)$, pois a sequência (n_k) correspondente não é crescente.

O resultado seguinte afirma que todas as subsequências de uma sequência convergente convergem para o mesmo limite da sequência.

Teorema 8.3
Se uma sequência de números reais (x_n) converge para $\bar{x} \in \mathbb{R}$, então qualquer subsequência (x_{n_k}) de (x_n) também converge para $\bar{x}$.

Prova: Seja dado $\varepsilon > 0$ qualquer. Existe N_0 tal que se $n > N_0$, então $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$. Como $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, é fácil mostrar usando Indução Matemática que $n_k \geq k$. Portanto, se $k > N_0$, então $n_k \geq k > N_0$ e, portanto, $|x_{n_k} - \bar{x}| < \varepsilon$. Decorre daí que (x_{n_k}) também converge para $\bar{x}$.□

Uma consequência imediata porém bastante útil do Teorema 8.3 é o seguinte critério para testar a divergência de sequências.

Teorema 8.4
Suponhamos que $\mathbf{x} = (x_n)$ é uma sequência e que (x_{n_k}) e (x_{m_k}) são duas subsequências de $\mathbf{x}$ satisfazendo: existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $|x_{n_k} - x_{m_k}| > \varepsilon_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Então $\mathbf{x}$ é divergente.

Prova: Com efeito, se existe $\bar{x} = \lim x_n$, então, pelo Teorema 8.2, $\bar{x} = \lim x_{n_k} = \lim x_{m_k}$. Daí teríamos, pelos resultados da aula anterior,

$$0 = |\bar{x} - \bar{x}| = \lim_{k\to\infty} |x_{n_k} - x_{m_k}| \geq \varepsilon_0 > 0,$$

o que é um absurdo, provando assim que $\mathbf{x}$ é divergente. □

Exemplos 8.2

(a) $\lim(1 + \frac{1}{n^2})^{n^2} = e$.

A sequência (y_k), com $y_k := (1+\frac{1}{k^2})^{k^2}$, é uma subsequência da sequência (t_n), com $t_n = (1 + 1/n)^n$. Logo, pelo Teorema 8.3, $\lim(1 + \frac{1}{k^2})^{k^2} = \lim(1 + 1/n)^n = e$.

(b) A sequência $\mathbf{x} = ((1 + (-1)^n)/2 - (-1)^n/n)$ é divergente.

Com efeito, $\mathbf{x} = (x_n)$ com $x_{2k-1} = 1/k$ e $x_{2k} = 1 - 1/k$ para $k \in \mathbb{N}$, de modo que as subsequências (x_{2k-1}) e (x_{2k}) convergem para 0 e 1, respectivamente. Portanto, pelo Teorema 8.4, $\mathbf{x}$ é divergente.

A seguir vamos enunciar e provar o célebre Teorema de Bolzano-Weierstrass assim nomeado em referência aos matemáticos Bernhard Bolzano (1781–1848) e Karl Weierstrass (1815–1897) que foram os primeiros a estabelecê-lo. Ele foi, na verdade, provado primeiramente por Bolzano, mas essa prova se perdeu. Foi depois redemonstrado por Weierstrass e se tornou uma peça central da Análise. Mais tarde descobriu-se que o teorema havia sido provado por Bolzano muito antes de Weierstrass e daí veio seu nome.

Teorema 8.5 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)
Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

Prova: Como o conjunto de valores $\mathbf{x}(\mathbb{N}) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado, ele está contido num intervalo fechado $I_1 := [a, b]$. Façamos $n_1 = 1$. Agora, dividimos o intervalo I_1 em dois intervalos fechados de igual comprimento I_1' e I_1'', isto é, $I_1' := [a, (a+b)/2]$ e $I_1'' := [(a+b)/2, b]$. Distinguimos assim dois subconjuntos de $\mathbb{N}$, a saber,

$$\mathbb{N}_1' := \{n \in \mathbb{N} : n > n_1,\ x_n \in I_1'\} \quad \text{e} \quad \mathbb{N}_1'' := \{b \in \mathbb{N} : n > n_1,\ x_n \in I_1''\}.$$

Como $\mathbb{N}_1' \cup \mathbb{N}_1'' = \mathbb{N}_1 := \{n \in \mathbb{N} : n > n_1\}$ é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, temos que pelo menos um dos dois conjuntos, $\mathbb{N}_1'$ e $\mathbb{N}_1''$, é infinito. Chamemos de $\mathbb{N}_2$ um desses dois subconjuntos que seja infinito, denotemos por I_2 o subintevalo correspondente, e chamemos de n_2 o menor elemento de $\mathbb{N}_2$, cuja existência é dada pelo Princípio da Boa Ordenação. Observe que $x_{n_2} \in I_2$. Vamos mostrar por Indução Matemática que é possível construir dessa forma uma família de intervalos fechados limitados I_1, I_2,...,I_k,..., com $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_k \supset I_{k+1} \supset \cdots$ e uma sequência de números naturais (n_k) com $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$, tais que $x_{n_k} \in I_k$. Suponhamos por indução que $I_1, I_2, \ldots, I_k$ e $n_1, n_2, \ldots, n_k$ tenham sido definidos satisfazendo $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_k$, $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ e tais que $x_{n_j} \in I_j$, $j = 1, \ldots, k$. Sejam $\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2, \ldots, \mathbb{N}_k$ definidos indutivamente por $\mathbb{N}_j := \{n \in \mathbb{N}_{j-1} : n > n_{j-1},\ x_n \in I_{j-1}\}$. De novo, dividimos o intervalo I_k em dois subintervalos de igual comprimento, I_k' e I_k'', e definimos

$$\mathbb{N}_k' := \{n \in \mathbb{N}_k : n > n_k,\ x_n \in I_k'\}, \qquad \mathbb{N}_k'' := \{n \in \mathbb{N}_k : n > n_k,\ x_n \in I_k''\}.$$

Chamemos de $\mathbb{N}_{k+1}$ a um desses dois subconjuntos de $\mathbb{N}_k$ que seja infinito, denotemos por I_{k+1} o subintervalo de I_k correspondente, e façamos $n_{k+1} := \inf \mathbb{N}_{k+1}$. Temos então que $I_k \supset I_{k+1}$, $n_k < n_{k+1}$ e $x_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$. Fica, assim, provada por indução a existência da família de intervalos fechados encaixados $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_k \supset I_{k+1} \supset \cdots$ e da sequência de números naturais (n_k) com $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$, tais que $x_{n_k} \in I_k$.

Como o comprimento de I_k é igual a $(b-a)/2^{k-1}$, segue do Teorema 5.12 (Propriedade dos Intervalos Encaixados) que existe um único ponto $\xi \in I_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como ambos x_{n_k} e ξ pertencem a I_k, temos

$$|x_{n_k} - \xi| \le \frac{(b-a)}{2^{k-1}},$$

donde concluímos que a subsequência (x_{n_k}) converge para ξ. □

O próximo resultado é uma aplicação do Teorema de Bolzano-Weierstrass. Em sua prova, vamos utilizar o fato de que se $\mathbf{x}'$ é uma subsequência de $\mathbf{x}$, então $\mathbf{x}'$ é, com todo direito, também uma sequência e, sendo assim, também possui subsequências. Observamos que se $\mathbf{x}''$ é uma subsequência de $\mathbf{x}'$, então $\mathbf{x}''$ também é uma subsequência de $\mathbf{x}$.

Teorema 8.6
Seja $\mathbf{x} = (x_n)$ uma sequência limitada de números reais e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tendo a propriedade de que toda subsequência convergente de $\mathbf{x}$ converge a $\bar{x}$. Então a sequência $\mathbf{x}$ converge a $\bar{x}$.

Prova: Como (x_n) é limitada, podemos obter $M > 0$ tal que $|x_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos, por absurdo, que $\mathbf{x}$ não converge a $\bar{x}$. Então existe um $\varepsilon_0 > 0$ e uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) tal que

$$|x_{n_k} - \bar{x}| \ge \varepsilon_0 \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{8.3}$$

De fato, a negação da afirmação

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > N_0 \Rightarrow |x_n - \bar{x}| < \varepsilon), \tag{8.4}$$

que é a definição formal de $x_n \to \bar{x}$, é a proposição

$$(\exists \varepsilon_0 > 0)(\forall k \in \mathbb{N})(\exists n_k \in \mathbb{N})(n_k > k \text{ e } |x_{n_k} - \bar{x}| \ge \varepsilon_0), \tag{8.5}$$

que equivale à afirmação que fizemos contendo (8.3). Observe que, apenas por conveniência, ao escrever a negação de (8.4), trocamos as variáveis ε, N_0, n pelas variáveis ε_0, k, n_k, o que é plenamente de nosso direito.

Agora, temos $|x_{n_k}| < M$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, o Teorema de Bolzano-Weierstrass implica que a sequência $\mathbf{x}' = (x_{n_k})$ possui uma subsequência convergente $\mathbf{x}''$. Como $\mathbf{x}''$ também é subsequência de $\mathbf{x}$, a qual por hipótese converge a $\bar{x}$, devemos ter $\lim \mathbf{x}'' = \bar{x}$. Portanto, todos os termos de $\mathbf{x}''$ devem ultimadamente pertencer a ε_0-vizinhança de $\bar{x}$, $V_{\varepsilon_0}(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R} : |x - \bar{x}| < \varepsilon_0\}$, o que contradiz (8.3) e conclui a prova do teorema. $\square$

Exemplos 8.3

(a) Suponhamos que $\mathbf{x} = (x_n)$ é uma sequência tal que as suas subsequências $\mathbf{x}' := (x_{2k-1})$ e $\mathbf{x}'' := (x_{2k})$, correspondentes aos índices ímpares e pares, respectivamente, convergem ambas para $\bar{x}$. Então (x_n) converge para $\bar{x}$.

Essa afirmação pode ser provada sem nenhuma dificuldade usando-se diretamente a Definição 6.2. Em vez disso, vamos prová-la aplicando o Teorema 8.6.

Com efeito, as subsequências $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ são convergentes e, portanto, são limitadas. Como o conjunto dos valores de $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(\mathbb{N})$, é a união do conjunto dos valores de $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}'(\mathbb{N})$, com o conjunto dos valores de $\mathbf{x}''$, $\mathbf{x}''(\mathbb{N})$, segue que $\mathbf{x}$ é limitada.

Agora, dada qualquer subsequência convergente $\mathbf{z} := (x_{n_k})$ de (x_n), então pelo menos uma das duas afirmações seguintes é verdadeira: (i) n_k é ímpar para uma infinidade de sub-índices $k \in \mathbb{N}$; (ii) n_k é par para uma infinidade de sub-índices $k \in \mathbb{N}$. Em qualquer caso, será possível obter uma subsequência $\mathbf{z}'$ de $\mathbf{z}$ cujos índices são todos ímpares ou todos pares. Então, $\mathbf{z}'$ será uma subsequência de $\mathbf{x}'$ e, assim, pelo Teorema 8.1, converge a $\bar{x}$. Mas então, pela mesma razão, devemos ter $\lim \mathbf{z} = \bar{x}$. Logo, podemos usar o Teorema 8.6 para concluir que $\lim x_n = \bar{x}$.

Sugerimos que você dê uma demonstração dessa mesma proposição usando diretamente a Definição 6.2.

(b) Seja (x_n) a sequência definida indutivamente por

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} := \frac{1}{1 + x_n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Os termos dessa sequência têm a forma

$$\frac{1}{1+1}, \quad \frac{1}{1 + \dfrac{1}{1+1}}, \quad \frac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1+1}}}, \dots$$

e, por isso, constituem o que chamamos *fração contínua* ou *fração continuada.* Mostraremos que

$$\lim x_n = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Por indução, provamos facilmente que $0 \le x_n \le 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, isso é verdade para $n = 1$ e, supondo que $0 \le x_k \le 1$, segue da fórmula $x_{k+1} = 1/(1 + x_k)$ que $0 \le x_{k+1} \le 1$, o que prova que $0 \le x_n \le 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vemos por substituição direta que $x_2 = 1/2$, $x_3 = 2/3$ e $x_4 = 3/5$. Portanto, $x_1 = 1 > x_3 = 2/3$ e $x_2 = 1/2 < x_4 = 3/5$. Seja $y_k := x_{2k-1}$ e $z_k := x_{2k}$. Agora, temos

$$x_{n+2} = \frac{1}{1+x_{n+1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x_n}} = \frac{1+x_n}{2+x_n} = 1 - \frac{1}{2+x_n}. \tag{8.6}$$

Desta última expressão para x_{n+2} em função de x_n segue que se $x_n < x_{n+2}$, então $x_{n+2} < x_{n+4}$. Da mesma forma, se $x_n > x_{n+2}$, então $x_{n+2} > x_{n+4}$.

Portanto, temos $x_1 > x_3 > \cdots > x_{2k-1} > x_{2k+1} > \cdots$, e $x_2 < x_4 < \cdots < x_{2k} < x_{2k+2} < \cdots$. Assim, a subsequência (y_n) é decrescente e a subsequência (z_n) é crescente. Além disso, ambas são limitadas e, portanto, são convergentes, pelo Teorema da Sequência Monótona. Mais ainda, de (8.6) temos

$$y_{n+1} = 1 - \frac{1}{2+y_n} \quad \text{e} \quad z_{n+1} = 1 - \frac{1}{2+z_n}.$$

Sejam $\bar{y} := \lim y_n$ e $\bar{z} := \lim z_n$. Segue do que foi visto na aula anterior que $0 \le \bar{y} \le 1$, $0 \le \bar{z} \le 1$, $\bar{y} = 1 - 1/(2+\bar{y})$ e $\bar{z} = 1 - 1/(2+\bar{z})$. Logo, $\bar{y}$ e $\bar{z}$ são ambos raízes não-negativas da equação de segundo grau

$$t^2 + t - 1 = 0,$$

cujas raízes são $(-1 \pm \sqrt{5})/2$. Assim, $\bar{y} = \bar{z} = (-1+\sqrt{5})/2$. Segue do exemplo anterior que $\lim x_n = (-1+\sqrt{5})/2$.

Exercícios 8.1

1. Seja $x_1 = 3$ e $x_{n+1} := \dfrac{1}{5}x_n + 4$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que (x_n) é limitada e monótona. Encontre o limite.

2. Seja $x_1 > 1$ e $x_{n+1} := 2 - 1/x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que (x_n) é limitada e monótona. Encontre o limite.

3. Seja $x_1 \geq 2$ e $x_{n+1} := 1 + \sqrt{x_n - 1}$ para $n \in \mathbb{N}$. Mostre que (x_n) é decrescente e limitada inferiormente por 2. Encontre o limite.

4. Seja $x_1 = 1$ e $x_{n+1} := \sqrt{2x_n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Mostre que (x_n) converge e encontre o limite.

5. Seja $y_1 := \sqrt{p}$, onde $p > 0$ e $y_{n+1} := \sqrt{p + y_n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Mostre que (y_n) converge e encontre o limite. (Dica: Primeiro mostre por indução que $1 + 2\sqrt{p}$ é uma cota superior.)

6. Seja $a > 0$ e $x_{n+1} = x_n + 1/x_n$ para $n \in \mathbb{N}$. Determine se (x_n) diverge ou converge. (Dica: Mostre que (x_n) é crescente e veja o que acontece quando se supõe que x_n converge.)

7. Estabeleça a convergência e encontre o limite das seguintes sequências:

   (a) $((1 + 1/n)^{n+1})$,
   (b) $((1 + 1/n)^{2n})$,
   (c) $((1 + 1/(n + 1))^n)$,
   (d) $((1 - 1/n)^n)$. (Dica: Use $1 - 1/n = (1 + 1/(n - 1))^{-1}$.)

8. Estabeleça a convergência e ache os limites das seguintes sequências:

   (a) $\left((1 + 1/n^2)^{2n^2}\right)$,
   (b) $\left((1 + 1/(9n^2))^{n^2}\right)$,
   (c) $((1 + 1/2n)^n)$,
   (d) $((1 + 2/n)^n)$.

9. Determine os limites das seguintes sequências:

   (a) $\left((3n)^{1/2n}\right)$,
   (b) $((1 + 2/n)^{3n})$.

10. Suponha que toda subsequência de $\mathbf{x} = (x_n)$ possui uma subsequência que converge a um mesmo número real $\bar{x}$. Mostre que $\lim x_n = \bar{x}$.

11. Seja $\mathbf{x} = (x_n)$ definida indutivamente por $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = 1/(2 + x_n)$. Mostre que $\mathbf{x}$ converge e encontre o limite.

12. Considere a sequência de Fibonacci definida indutivamente por $y_1 = 1$, $y_2 = 1$ e $y_{n+2} := y_{n+1} + y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $\mathbf{x} = (x_n)$ definida por $x_n = y_n/y_{n+1}$. Mostre que $\mathbf{x}$ converge e encontre o limite.

13. Considere a sequência (x_n) definida indutivamente por $x_1 := 1$ e $x_{n+1} = 1/(a_n + x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $a_{2k-1} := 1$ e $a_{2k} := 2$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

    (a) Mostre que $0 \leq x_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

    (b) Mostre que $\mathbf{x}' := (x_{2k-1})$ é decrescente e $\mathbf{x}'' := (x_{2k})$ é crescente.

    (c) Encontre $\bar{x}' := \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1}$ e $\bar{x}'' := \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k}$.

    (d) Observe que $\bar{x}' \neq \bar{x}''$ e justifique a conclusão de que (x_n) é divergente.

Aula 9 – Critério de Cauchy e Limites Infinitos

Metas da aula: Enunciar e provar o critério de Cauchy e apresentar algumas de suas aplicações no estabelecimento da convergência e da divergência de sequências. Apresentar o conceito de sequências propriamente divergentes com limites infinitos bem como alguns resultados relacionados com esse conceito.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber o enunciado do critério de Cauchy e o uso desse resultado para estabelecer a convergência e a divergência de sequências.
- Saber o conceito de sequências propriamente divergentes com limites infinitos bem como a resolução de questões simples envolvendo essa noção.

Introdução

Nesta aula vamos concluir nosso estudo sobre sequências de números reais com a apresentação do célebre critério de Cauchy. Esse critério permite determinar a convergência de uma sequência sem o conhecimento prévio do limite ou a divergência da mesma. O nome do critério se refere ao matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), um dos maiores contribuidores para o desenvolvimento da Análise Matemática no século XIX, que foi quem primeiro o publicou. Vamos também apresentar o conceito de sequências propriamente divergentes.

O Critério de Cauchy

Apesar da frequência com que nos deparamos com sequências monótonas e, portanto, da enorme importância do Teorema da Sequência Monótona, é importante que tenhamos uma condição implicando a convergência de uma sequência que não requeira conhecer de antemão o limite, e que não seja restrita a sequências monótonas. O critério de Cauchy é uma tal condição. Ele se baseia no conceito de sequência de Cauchy que apresentamos a seguir.

Definição 9.1
Diz-se que uma sequência de números reais $\mathbf{x} = (x_n)$ é uma *sequência de Cauchy* se para todo $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $m, n \in \mathbb{N}$ se

$m > N_0$ e $n > N_0$, então $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Em símbolos, escrevemos

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})\left((m > N_0 \text{ e } n > N_0) \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon\right).$$

Assim como na Definição 6.2, aqui também N_0 depende em geral de ε. Para enfatizar esse fato é usual escrever-se $N_0 = N_0(\varepsilon)$.

Observe que dizer que $\mathbf{x} = (x_n)$ *não é* uma sequência de Cauchy significa dizer que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ existem $m_k, n_k \in \mathbb{N}$ tais que $m_k > N_0$, $n_k > N_0$ e $|x_{m_k} - x_{n_k}| \geq \varepsilon_0$. Em símbolos, escrevemos

$$(\exists \varepsilon_0 > 0)(\forall k \in \mathbb{N})(\exists m_k, n_k \in \mathbb{N})\left((m_k > N_0 \text{ e } n_k > N_0) \text{ e } |x_n - x_m| \geq \varepsilon_0\right).$$

Notemos que, apenas por conveniência, na fórmula da negação as variáveis ε, N_0, m, n foram trocadas por $\varepsilon_0, k, m_k, n_k$, o que é de nosso pleno direito fazer.

Exemplos 9.1

(a) A sequência $(1/n)$ é uma sequência de Cauchy.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $N_0 > 2/\varepsilon$. Então se $m, n > N_0$, temos $1/n < 1/N_0 < \varepsilon/2$ e, do mesmo modo, $1/m < \varepsilon/2$ Daí segue que se $m, n > N_0$, então

$$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

o que demonstra que $(1/n)$ é sequência de Cauchy, uma vez que $\varepsilon > 0$ é arbitrário.

(b) A sequência $(1 + (-1)^n)$ não é uma sequência de Cauchy.

Com efeito, seja $\varepsilon_0 = 2$. Então, qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$ podemos tomar $m_k := 2k > k$ e $n_k := 2k + 1 > k$. Como $x_{2k} = 2$ e $x_{2k+1} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, temos

$$|x_{m_k} - x_{n_k}| = |x_{2k} - x_{2k+1}| = |2 - 0| = 2 = \varepsilon_0,$$

o que demonstra que $(1 + (-1)^n)$ não é uma sequência de Cauchy.

O seguinte resultado constitui a parte mais imediata do critério de Cauchy, estabelecendo uma condição necessária para que uma sequência seja convergente.

Lema 9.1

Se $\mathbf{x} = (x_n)$ é uma sequência convergente de números reais, então $\mathbf{x}$ é uma sequência de Cauchy.

Prova: Seja $\bar{x} = \lim \mathbf{x}$. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 = N_0(\varepsilon/2) \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_0$, então $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$. Logo, para todos $m, n \in \mathbb{N}$, satisfazendo $m > N_0$, $n > N_0$, temos

$$|x_m - x_n| = |(x_n - \bar{x}) + (\bar{x} - x_m)| \leq |x_n - \bar{x}| + |x_m - \bar{x}| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, fica provado que $\mathbf{x}$ é uma sequência de Cauchy. $\square$

Para provar a recíproca do Lema 9.1, que juntamente com este constitui o referido critério de Cauchy, precisaremos do seguinte resultado.

Lema 9.2
Toda sequência de Cauchy é limitada.

Prova: Seja $\mathbf{x} := (x_n)$ uma sequência de Cauchy e $\varepsilon := 1$. Se $N_0 = N_0(1)$ e $n > N_0$, então $|x_n - x_{N_0+1}| < 1$. Logo, pela deiguadade triangular, temos $|x_n| \leq |x_{N_0+1}| + 1$ para todo $n > N_0$. Seja

$$M := \sup\{|x_1|,\ |x_2|, \dots, |x_{N_0}|,\ |x_{N_0+1}| + 1\}.$$

Então temos que $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Apresentamos agora o importante critério de Cauchy.

Teorema 9.1 (Critério de Cauchy)
Uma sequência de números reais é convergente se, e somente se, ela é uma sequência de Cauchy.

Prova: Vimos no Lema 9.1 que toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy.

Reciprocamente, seja $\mathbf{x} = (x_n)$ uma sequência de Cauchy; vamos mostrar que $\mathbf{x}$ é uma sequência convergente. Inicialmente, observemos que, pelo Lema 9.2, $\mathbf{x}$ é limitada. Portanto, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass 8.6, existe uma subsequência $\mathbf{x}' = (x_{n_k})$ de $\mathbf{x}$ que converge para algum $x^* \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que toda a sequência $\mathbf{x}$ converge para x^*.

Como (x_n) é uma sequência de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 = N_0(\varepsilon/2) \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m > N_0$ então

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2. \tag{9.1}$$

Por outro lado, como $\mathbf{x}'$ converge a x^*, existe $N_1 > N_0$ pertencente ao conjunto $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ tal que

$$|x_{N_1} - x^*| < \varepsilon/2.$$

Como $N_1 > N_0$, segue de (9.1) com $m = N_1$ que

$$|x_n - x_{N_1}| < \varepsilon/2 \qquad \text{para } n > N_0.$$

Daí segue que se $n > N_0$, então

$$\begin{aligned} |x_n - x^*| &= |(x_n - x_{N_1}) + (x_{N_1} - x^*)| \\ &\le |x_n - x_{N_1}| + |x_{N_1} - x^*| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $\lim x_n = x^*$. □

A seguir damos alguns exemplos de aplicação do critério de Cauchy.

Exemplos 9.2

(a) Seja $\mathbf{x} = (x_n)$ definida por

$$x_1 := 1, \quad x_2 := 2 \quad e \quad x_n := \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1}) \quad \text{para } n > 2.$$

Geometricamente essa sequência é formada tomando-se o ponto médio de sucessivos intervalos, cujos extremos são os dois últimos termos da sequência até então definidos, a começar pelo intervalo $[1, 2]$. Fica claro então que $1 \le x_n \le 2$, fato que pode ser provado rigorosamente usando-se Indução Matemática. Com efeito, a afirmação vale para $n = 1$ e $n = 2$, por definição, e supondo que seja válida para $j = 1, 2, \dots, k$, com $k > 2$, vemos facilmente que

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (x_k + x_{k-1})/2 \ge (1 + 1)/2 = 1, \\ x_{k+1} &= (x_k + x_{k-1})/2 \le (2 + 2)/2 = 2. \end{aligned}$$

Provemos também por indução que vale

$$|x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

De fato, a afirmação é verdadeira para $n = 1$, e supondo que $|x_k - x_{k+1}| = 1/2^{k-1}$ temos

$$|x_{k+1} - x_{k+2}| = |x_{k+1} - \frac{x_k + x_{k+1}}{2}| = \frac{1}{2}|x_k - x_{k+1}| = \frac{1}{2^k},$$

o que conclui a prova por indução da afirmação.

Assim, dados $m > n$, temos

$$
\begin{aligned}
|x_n - x_m| &\le |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \cdots + |x_{m-1} - x_m| \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^{m-2}} \\
&= \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right) < \frac{1}{2^{n-2}}.
\end{aligned}
$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, tomando-se $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^{N_0-2} < \varepsilon$, se $m > N_0$, $n > N_0$ e supondo sem nenhuma perda de generalidade que $m \ge n$, obtemos que $|x_n - x_m| < 1/2^{n-2} < 1/2^{N_0-2} < \varepsilon$. Logo, $\mathbf{x}$ é uma sequência de Cauchy. Pelo critério de Cauchy concluímos que $\mathbf{x}$ converge para algum $\bar{x} \in \mathbb{R}$, o qual, pelo Teorema 7.5, deve satisfazer $1 \le x \le 2$.

Observe que não adiantará usar a regra de formação $x_n := (x_{n-1} + x_{n-2})/2$ para tentar saber o valor de $\bar{x}$, já que tomando-se o limite nessa relação obtemos $\bar{x} = (\bar{x} + \bar{x})/2$, o que é uma identidade trivialmente verdadeira porém inútil.

Para se conhecer o valor de $\bar{x}$ é necessário observar que vale

$$
x_{2n-1} < x_{2n+1} < x_{2n+2} < x_{2n} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N},
$$

que pode ser facilmente provado por indução (Exercício!). Em particular, a subsequência $\mathbf{x}' = (x_{2n-1})$ é crescente e a subsequência $\mathbf{x}'' = (x_{2n})$ é decrescente. Segue daí que, para a subsequência $\mathbf{x}' = (x_{2n-1})$ temos

$$
x_{2n+1} - x_{2n-1} = (x_{2n} - x_{2n-1}) - (x_{2n} - x_{2n+1}) = \frac{1}{2^{2n-2}} - \frac{1}{2^{2n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}},
$$

ou seja, $x_{2n+1} = x_{2n-1} + 1/2^{2n-1}$, e assim

$$
\begin{aligned}
x_{2n+1} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}} \\
&= 1 + \frac{1/2 - 1/2^{2n+1}}{1 - 1/2^2} = 1 + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \to \frac{5}{3},
\end{aligned}
$$

onde foi usada a conhecida fórmula para a soma de uma progressão geométrica.

Portanto, temos que $\bar{x} = \lim \mathbf{x} = \lim \mathbf{x}' = 5/3$.

(b) A sequência do exemplo anterior pertence a uma classe especial de sequências que vamos definir agora.

Dizemos que uma sequência de números reais $\mathbf{x} = (x_n)$ é *contrativa* se existe uma constante λ, com $0 < \lambda < 1$, tal que

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \lambda |x_{n+1} - x_n|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. O número λ é chamado a *constante de contração* da sequência.

Toda sequência contrativa $\mathbf{x} = (x_n)$ é uma sequência de Cauchy e, portanto, convergente para algum $x^* \in \mathbb{R}$. Além disso, temos

$$|x^* - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}|x_2 - x_1| \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \tag{9.2}$$

$$|x^* - x_n| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda}|x_n - x_{n-1}| \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{9.3}$$

Com efeito, é fácil provar por indução que

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \lambda^n |x_2 - x_1| \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{9.4}$$

De fato, a desigualdade (9.4) vale para $n = 1$ pela definição. Suponhamos que a desigualdade vale para $n = k$. Então temos

$$|x_{k+3} - x_{k+2}| \leq \lambda |x_{k+2} - x_{k+1}| \leq \lambda \left(\lambda^k |x_2 - x_1|\right) = \lambda^{k+1}|x_2 - x_1|,$$

o que prova (9.4) para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $m > n$, aplicamos a desigualdade triangular e a fórmula da soma de uma progressão geométrica para obter

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\
&\leq (\lambda^{m-2} + \lambda^{m-3} + \cdots + \lambda^{n-1})|x_2 - x_1| \\
&= \lambda^{n-1}\left(\frac{1-\lambda^{m-n}}{1-\lambda}\right)|x_2 - x_1| \\
&\leq \lambda^{n-1}\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)|x_2 - x_1|.
\end{aligned}$$

Como $0 < \lambda < 1$, sabemos que $\lim \lambda^n = 0$. Portanto, deduzimos que (x_n) é uma sequência de Cauchy. Pelo critério de Cauchy, segue que (x_n) converge para algum $x^* \in \mathbb{R}$.

Agora, fazendo $m \to \infty$ na desigualdade

$$|x_m - x_n| \leq \lambda^{n-1}\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)|x_2 - x_1|,$$

obtemos

$$|x^* - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}|x_2 - x_1| \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Quanto à desigualdade (9.3), notemos que

$$\begin{aligned}|x_m - x_n| &\leq (\lambda^{m-n} + \cdots + \lambda^2 + \lambda)|x_n - x_{n-1}| \\ &\leq \frac{\lambda}{1-\lambda}|x_n - x_{n-1}|.\end{aligned}$$

Fazendo $m \to \infty$ obtemos a desigualdade (9.3).

(c) Considere a equação $p(x) := x^3 - 5x + 3 = 0$. Como $p(0) = 3 > 0$ e $p(1) = -1 < 0$ somos levados a conjecturar que existe uma solução x_* da equação satisfazendo $0 < x_* < 1$. Seja x_1 um número qualquer satisfazendo $0 < x_1 < 1$. Definimos a sequência (x_n) indutivamente por

$$x_{n+1} := \frac{1}{5}(x_n^3 + 3) \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por indução provamos sem dificuldade que vale $0 < x_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (Exercício!). Além disso, usando a fórmula $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$, obtemos

$$\begin{aligned}|x_{n+2} - x_{n+1}| &= |\frac{1}{5}(x_{n+1}^3 + 3) - \frac{1}{5}(x_n^3 + 3)| = \frac{1}{5}|x_{n+1}^3 - x_n^3| \\ &= \frac{1}{5}|x_{n+1}^2 + x_{n+1}x_n + x_n^2||x_{n+1} - x_n| \leq \frac{3}{5}|x_{n+1} - x_n|.\end{aligned}$$

Portanto, (x_n) é uma sequência contrativa e, sendo assim, converge para algum $x_* \in \mathbb{R}$. Tomando o limite na equação $x_{n+1} := \frac{1}{5}(x_n^3 + 3)$ obtemos $x_* = \frac{1}{5}(x_*^3 + 3)$. Logo, x_* é raiz da equação $x^3 - 5x + 3 = 0$.

As relações (9.2) e (9.3) podem ser usadas para se estimar o erro cometido ao se aproximar o valor de x_* pelo de x_n.

(d) Seja $\mathbf{y} = (y_n)$ a sequência de números reais dada por

$$y_1 := \frac{1}{1!}, \quad y_2 := \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}, \ldots, \quad y_n := \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}, \ldots$$

Claramente, $\mathbf{y}$ não é uma sequência monótona. Porém, se $m > n$, então

$$y_m - y_n = \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)!} + \frac{(-1)^{n+3}}{(n+2)!} + \cdots + \frac{(-1)^{m+1}}{m!}.$$

Como $2^{r-1} \leq r!$ para todo $r \in \mathbb{N}$, segue que se $m > n$, então

$$\begin{aligned}|y_m - y_n| &\leq \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{m!} \\ &\leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

Portanto, temos que (y_n) é uma sequência de Cauchy. Logo, ela converge para algum $\bar{y} \in \mathbb{R}$. Não temos ainda elementos para saber o valor de $\bar{y}$. Passando ao limite quando $m \to \infty$ na desigualdade anterior obtemos

$$|\bar{y} - y_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}},$$

o que nos permite estimar o erro cometido ao aproximarmos o valor de $\bar{y}$ pelo valor de y_n. Apenas por curiosidade, podemos adiantar que o valor exato de $\bar{y}$ é $1 - 1/e$.

Limites Infinitos

Em alguns casos é conveniente termos uma definição para o significado de uma sequência (x_n) de números reais "tender a $\pm\infty$".

Definição 9.2
Seja (x_n) uma sequência de números reais.

(i) Dizemos que (x_n) tende a $+\infty$, e escrevemos $\lim x_n = +\infty$, se para todo $M > 0$ existe $N_0 = N_0(M) \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_0$, então $x_n > M$.

(ii) Dizemos que (x_n) tende a $-\infty$, e escrevemos $\lim x_n = -\infty$, se para todo $M > 0$ existe $N_0 = N_0(M) \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_0$, então $x_n < -M$.

Dizemos que (x_n) é *propriamente divergente* no caso em que temos $\lim x_n = +\infty$ ou $\lim x_n = -\infty$.

Observe que $\lim x_n = -\infty$ se, e somente se, $\lim(-x_n) = -\infty$.

Exemplos 9.3

(a) $\lim n = +\infty$.

De fato, dado $M > 0$, existe um $N_0 \in \mathbb{N}$ com $N_0 > M$, pela Propriedade Arquimediana, e assim $n > M$ para todo $n > N_0$.

(b) Se $b > 1$, então $\lim b^n = +\infty$.

Escrevamos $b = 1+c$, com $c = b-1 > 0$. Pela desigualdade de Bernoulli temos

$$b^n = (1+c)^n \geq 1 + nc.$$

Portando, dado $M > 0$, tomando $N_0 > M/c$, obtemos $b^n \geq 1 + nc > 1 + M > M$ para todo $n > N_0$.

Chamamos sua atenção para o fato de que sequências propriamente divergentes constituem um caso particular de sequências divergentes. As propriedades válidas para o limite de sequências convergentes que vimos em aulas anteriores podem não valer quando alguma das sequências envolvidas tem limite $\pm\infty$. No entanto, temos o seguinte resultado.

Teorema 9.2

(i) Se $\lim x_n = +\infty$ e (y_n) é uma sequência limitada inferiormente, então $\lim(x_n + y_n) = +\infty$.

(ii) Se $\lim x_n = +\infty$ e existe $c > 0$ tal que $y_n > c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim(x_n y_n) = +\infty$.

(iii) Se $x_n > c > 0$, $y_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim y_n = 0$, então $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = +\infty$.

Prova: (i) Existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $y_n \geq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $M > 0$ qualquer, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > M - c$ para todo $n > N_0$. Logo, se $n > N_0$, então $x_n + y_n > (M - c) + c = M$, o que mostra que $\lim(x_n + y_n) = +\infty$.

(ii) Analogamente, dado $M > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > M/c$ para todo $n > N_0$. Logo, se $n > N_0$, então $x_n y_n > (M/c)c = M$, o que demonstra que $\lim(x_n y_n) = +\infty$.

(iii) Dado $M > 0$, existe $N_0 = N_0(M/c) \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_0$, então $y_n = |y_n| < c/M$. Logo, se $n > N_0$, então $x_n/y_n > c/(c/M) = M$, o que mostra que $\lim(x_n/y_n) = +\infty$. $\square$

Observe que se $\lim x_n = +\infty$ e $\lim y_n = -\infty$, então nada pode ser afirmado sobre a divergência ou convergência da sequência $(x_n + y_n)$. Por exemplo, se $x_n = n + 1/n$ e $y_n = -n$, então $(x_n + y_n)$ é convergente e $\lim(x_n + y_n) = 0$. Se $x_n = 2n$ e $y_n = -n$, então $\lim(x_n + y_n) = +\infty$. Finalmente, se $x_n = n + (-1)^n$ e $y_n = -n$, então $(x_n + y_n)$ é divergente, mas não propriamente divergente.

O seguinte resultado estabelece um critério que determina quando uma sequência monótona é propriamente divergente.

Teorema 9.3

Uma sequência monótona de números reais é propriamente divergente se, e somente se, é ilimitada.

(i) Se (x_n) é uma sequência ilimitada não-decrescente, então $\lim x_n = +\infty$.

(ii) Se (x_n) é uma sequência ilimitada não-crescente, então $\lim x_n = -\infty$.

Prova: Suponhamos que (x_n) é uma sequência não-decrescente. Sabemos que se (x_n) é limitada então ela é convergente. Portanto, se ela é propriamente divergente, então tem que ser ilimitada. Se (x_n) é ilimitada, ela não é limitada superiormente, já que é limitada inferiormente por ser não-decrescente. Então dado $M > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{N_0} > M$. Como (x_n) é não-decrescente, se $n > N_0$, então $x_n \geq x_{N_0} > M$. Logo, $\lim x_n = +\infty$.

A afirmação (ii) se reduz a (i) considerando-se a sequência $(-x_n)$. □

O seguinte "critério de comparação" é frequentemente utilizado para demonstrar que uma sequência é propriamente divergente.

Teorema 9.4
Sejam (x_n) e (y_n) sequências satisfazendo

$$x_n \leq y_n \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{9.5}$$

(i) Se $\lim x_n = +\infty$, então $\lim y_n = +\infty$.

(ii) Se $\lim y_n = -\infty$, então $\lim x_n = -\infty$.

Prova: (i) Se $\lim x_n = +\infty$, dado $M > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > N_0$ implica $x_n > M$. Mas então, se $n > N_0$, de (9.5) segue que temos $y_n > M$, o que mostra que $\lim y_n = +\infty$.

A afirmação (ii) se reduz a (i) considerando-se as sequências $(-x_n)$ e $(-y_n)$. □

Observação 9.1
O Teorema 9.4 continua verdadeiro se a condição (9.5) é ultimadamente verdadeira: isto é, se existe $M_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq y_n$ para todo $n \geq M_0$.

O seguinte resultado também serve como um "critério de comparação" e é bastante útil nos casos em que não se tem a condição (9.5).

Teorema 9.5
Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências de números reais positivos e suponhamos que para algum $L > 0$ tenhamos

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = L. \tag{9.6}$$

Então $\lim x_n = +\infty$ se, e somente se, $\lim y_n = +\infty$.

Prova: Se a condição (9.6) vale, então existe $M_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{2}L < \frac{x_n}{y_n} < \frac{3}{2}L \qquad \text{para todo } n \geq M_0.$$

Portanto, temos $(L/2)y_n < x_n < (3L/2)y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A conclusão segue então do Teorema 9.4. □

Exercícios 9.1

1. Mostre diretamente da definição que as seguintes sequências são sequências de Cauchy.

   (a) $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

   (b) $\left(1 + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right)$.

2. Mostre diretamente da definição que as seguintes sequências não são sequências de Cauchy.

   (a) $((-1)^n)$.

   (b) $(n + \dfrac{(-1)^n}{n})$.

3. Mostre diretamente da definição que se (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy, então $(x_n + y_n)$ e $(x_n y_n)$ são sequências de Cauchy.

4. Seja $p \in \mathbb{N}$. Mostre que a sequência (x_n), com $x_n := \sqrt{n}$, satisfaz $\lim |x_{n+p} - x_n| = 0$, mas ela não é uma sequência de Cauchy.

5. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy satisfazendo $x_n \in \mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que (x_n) é ultimadamente constante.

6. Se $C > 0$, $0 < r < 1$ e $|x_{n+1} - x_n| < Cr^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mostre que (x_n) é uma sequência de Cauchy.

7. Se $x_1 < x_2$ são números reais arbitrários e $x_n := \frac{1}{3}x_{n-1} + \frac{2}{3}x_{n-2}$ para $n > 2$, mostre que (x_n) é uma sequência de Cauchy e encontre $\lim x_n$.

8. Mostre que as seguintes sequências são contrativas e encontre seus limites.

   (a) $x_1 := 1$ e $x_{n+1} := 1/(2 + x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (b) $x_1 := 2$ e $x_{n+1} := 2 + 1/x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

9. Defina uma sequência contrativa para aproximar uma raíz r da equação polinomial $x^3 - 3x + 1 = 0$ satisfazendo $0 < r < 1$. Encontre um valor aproximado de r com erro menor que 10^{-4}.

10. Mostre que se (x_n) é uma sequência ilimitada, então ela possui uma subsequência propriamente divergente.

11. Dê exemplos de sequência propriamente divergentes (x_n) e (y_n) com $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tais que:

    (a) (x_n/y_n) é convergente;

    (b) (x_n/y_n) é propriamente divergente.

12. Mostre que as sequências $(\sqrt{n})$ e $(n/\sqrt{n+1})$ são propriamente divergentes.

13. Mostre que se $\lim x_n = 0$ e $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim(1/x_n) = +\infty$.

14. Mostre que se $\lim(x_n/n) = L$, onde $L > 0$, então $\lim x_n = +\infty$.

15. Suponha que (x_n) é uma sequência propriamente divergente e (y_n) é uma sequência tal que existe $\lim(x_n y_n) \in \mathbb{R}$. Mostre que $\lim y_n = 0$.

Aula 10 – Séries Numéricas

Metas da aula: Definir séries numéricas. Apresentar os primeiros resultados para estabelecer a convergência e a divergência de séries numéricas bem como exemplos de aplicação dos mesmos.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber resultados básicos estabelecendo a convergência e a divergência de séries numéricas bem como suas aplicações em exemplos concretos.

Introdução

Nesta aula iniciaremos nosso estudo sobre as séries numéricas. Estas nada mais são que sequências (s_n) onde o termo geral é escrito na forma $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ para alguma sequência de números reais (x_n).

Séries Numéricas

Comecemos com a definição formal do que vem a ser uma série numérica.

Definição 10.1
Se $\mathbf{x} = (x_n)$ é uma sequência em $\mathbb{R}$, então a *série gerada por* $\mathbf{x}$ é a sequência $\mathbf{s} = (s_n)$ definida por

$$s_1 := x_1 \quad \text{e} \quad s_{n+1} := s_n + x_{n+1}.$$

Assim, temos

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Os números x_n são chamados os *termos* da série e os números s_n são chamados as *somas parciais* dessa série. Se $\lim s_n$ existe, dizemos que a série é convergente e chamamos esse limite a *soma* dessa série. Se o referido limite não existe, dizemos que a série $\mathbf{s}$ é *divergente*.

É usual se adotar as notações

$$\sum x_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n \tag{10.1}$$

para designar a série (s_n) gerada por (x_n) como na Definição 10.1.

No caso de uma série $\sum x_n$ convergente é usual também usar-se as notações em (10.1) para denotar o $\lim s_n$. Portanto, as expressões em (10.1) poderão ser usadas tanto para denotar a série, seja ela convergente ou divergente, como o limite da mesma, no caso em que for convergente. Quando houver risco de confusão será mencionado explicitamente o significado dessas expressões no contexto em questão.

Em alguns casos, a sequência $\mathbf{x}$ geradora da série pode estar definida a partir de um índice inicial $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ diferente de 1, como $n_0 = 0, 2, 5$, etc, isto é, $\mathbf{x} := (x_n)_{n=n_0}^{\infty}$. Em tais casos usaremos a notação

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$$

para denotar tanto a série como o seu limite, no caso em que este existe. Por exemplo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}, \qquad \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{(n-1)(n-2)(n-3)}, \qquad \text{etc.}$$

Exemplos 10.1

(a) Você certamente já está bastante familiarizado com as séries geométricas. Uma tal série é gerada por uma sequência da forma $\mathbf{x} := (r^n)_{n=0}^{\infty}$ onde $r \in \mathbb{R}$ e, portanto, se escreve

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots . \tag{10.2}$$

Como já foi visto anteriormente, se $|r| < 1$, então a série converge a $1/(1-r)$. De fato, se $s_n := 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$ para $n \geq 0$, tomando a diferença entre s_n e r vezes s_n, obtemos após simplificações

$$s_n(1-r) = 1 - r^{n+1}.$$

Portanto,

$$s_n = \frac{1}{1-r} - \frac{r^{n+1}}{1-r},$$

donde segue que

$$\left| s_n - \frac{1}{1-r} \right| \leq \frac{|r|^{n+1}}{|1-r|}.$$

Como $|r|^{n+1} \to 0$ quando $|r| < 1$, concluímos que a série (10.2) converge a $1/(1-r)$ se $|r| < 1$.

(b) Consideremos a série gerada por $((-1)^n)_{n=0}^{\infty}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots . \tag{10.3}$$

Temos então que $s_n = 1$ se $n \geq 0$ é par e $s_n = 0$ se n é ímpar; isto é, a sequência de somas parciais é $(1, 0, 1, 0, \ldots)$. Como essa sequência não é convergente, a série (10.3) é divergente.

(c) Consideremos a série $\sum 1/n(n+1)$ e investiguemos a existência do limite

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots . \tag{10.4}$$

O truque para analizar essa série é observar que

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Portanto, somando-se essas igualdades de $k = 1$ até n e notando-se que os membros à direita formam uma "soma telescópica", i.e., $(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) + (a_n - a_{n+1})$, com $a_k = 1/k$, obtemos

$$s_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1},$$

donde segue que $s_n \to 1$. Portanto, a série (10.4) converge a 1.

Apresentamos a seguir uma condição necessária imediata para a convergência de uma série, que é bastante útil para determinar casos em que há divergência, porém não é suficiente para determinar convergência.

Teorema 10.1
Se a série $\sum x_n$ converge, então $\lim x_n = 0$.

Prova: Pela Definição 10.1 a convergência de $\sum x_n$ significa que $\lim s_n$ existe. Agora, $x_n = s_n - s_{n-1}$. Com s_n e s_{n-1} convergem ao mesmo limite, x_n converge e $\lim x_n = \lim s_n - \lim s_{n-1} = 0$. □

Exemplos 10.2

(a) A série geométrica (10.2) diverge se $|r| \geq 1$.

Isso segue imediatamente do fato de que o termo geral r^n não converge a 0 quando $|r| \geq 1$.

(b) A série harmônica $\sum 1/n$ diverge.

Esse fato foi visto em aula anterior no Exemplo 8.1 (d) onde mostramos que $s_{2^n} \geq 1+n/2$ e, portanto, s_n não é limitada. Essa série constitui um dos mais simples exemplos de que a condição $\lim x_n = 0$ não é suficiente para garantir a convergência da série, já que nesse caso $x_n = 1/n$ satisfaz tal condição.

O seguinte Critério de Cauchy é uma simples reformulação para séries do Teorema 9.1 homônimo para sequências. A prova é idêntica à do Teorema 9.1 e, portanto, vamos omitir.

Teorema 10.2 (Critério de Cauchy para Séries)
A série $\sum x_n$ converge se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $m \geq n > N_0$, então

$$|s_m - s_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m| < \varepsilon. \tag{10.5}$$

O próximo resultado é consequência imediata do Teorema da Sequência Monótona e é de grande utilidade.

Teorema 10.3
Seja (x_n) uma sequência de números reais não-negativos. Então a série $\sum x_n$ converge se, e somente se, a sequência $\mathbf{s} = (s_n)$ das somas parciais é limitada. Nesse caso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim s_n = \sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Prova: Como $x_n \geq 0$, a sequência $\mathbf{s} = (s_n)$ das somas parciais é monótona não-decrescente, $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots$. Pelo Teorema 8.1 (da Sequência Monótona), a sequência $\mathbf{s}$ converge se, e somente se, é limitada, em cujo caso seu limite é igual a $\sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$. □

Exemplos 10.3

(a) Mostremos diretamente que a série harmônica $\sum 1/n$ não satisfaz o Critério de Cauchy para séries.

De fato, se $m > n$ temos

$$s_m - s_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{m} \geq \frac{m-n}{m} = 1 - \frac{n}{m}.$$

Em particular, se $m = 2n$ temos $s_{2n} - s_n \geq 1/2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que mostra que a série não satisfaz a condição (10.5) no Teorema 10.2 para $\varepsilon \leq 1/2$.

Uma outra forma engenhosa de mostrar a divergência da série harmônica é a seguinte prova por contradição. Suponhamos que $\sum 1/n$ seja convergente e ponhamos $s = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. Como $t_n = \sum_{k=1}^{n} 1/(2k-1) < s_{2n-1}$ e $u_n = \sum_{k=1}^{n} 1/(2k) < s_{2n}$, temos então que as séries $\sum 1/(2n-1)$ e $\sum 1/(2n)$ também são convergentes (por quê?). Ponhamos $t = \lim t_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n-1)$ e $u = \lim u_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n)$. Como $u_n = s_n/2$ e $s_{2n} = t_n + u_n$, temos $u = s/2$ e $t = s/2$ (por quê?). Agora,

$$t_n - u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k(2k-1)} \geq \frac{1}{2},$$

e, portanto, temos

$$0 = \frac{s}{2} - \frac{s}{2} = \lim t_n - \lim u_n \geq \frac{1}{2} > 0,$$

o que nos dá uma contradição, provando que $\sum 1/n$ diverge.

(b) A 2-*série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente.

Como as somas parciais formam uma sequência crescente (s_n), basta mostrar que (s_n) possui uma subsequência que é limitada (por quê?). Seja $k_n = 2^n - 1$ e mostremos que (s_{k_n}) é limitada. Temos $s_{k_1} = s_1 = 1$ e para $n > 1$

$$\begin{aligned} s_{k_n} &= \frac{1}{1} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} \right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^2} + \cdots + \frac{1}{(2^n - 1)^2} \right) \\ &< 1 + \frac{2}{2^2} + \frac{4}{4^2} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^2} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &< \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k = 2. \end{aligned}$$

Logo (s_{k_n}) é limitada, o que mostra que $\sum 1/n^2$ converge.

(c) A p-*série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge quando p é um número real com $p > 1$.

No caso em que p é irracional $n^p := e^{p \log n}$; a função exponencial e^x e sua inversa $\log x$ serão definidas rigorosamente e estudadas mais adiante neste curso. Por ora, se preferir, você pode pensar que p é racional.

A demonstração é totalmente similar à que foi feita para o caso $p = 2$. De novo, vamos mostrar que a subsequência (s_{n_k}) é limitada, onde $n_k = 2^k - 1$ e $s_n = \sum_{k=1}^n 1/k^p$, e dessa forma provar a convergência da sequência crescente s_n. Como no caso $p = 2$, temos

$$\begin{aligned} s_{k_n} &= \frac{1}{1} + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^p} + \cdots + \frac{1}{(2^n - 1)^p}\right) \\ &< 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^p} \\ &= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{(2^{p-1})^2} + \cdots + \frac{1}{(2^{p-1})^{n-1}} \\ &< \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k = \frac{1}{1 - 2^{-(p-1)}}. \end{aligned}$$

Portanto, o Teorema 10.3 implica que a p-série converge quando $p > 1$.

(d) A p-série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge quando $0 < p \leq 1$.

Como $n^p \leq n$ quando $0 < p \leq 1$, temos que as somas parciais da p-série $s_n = \sum_{k=1}^n 1/n^p$ são maiores que as somas parciais correspondentes da série harmônica $h_n = \sum_{k=1}^n 1/n$; $s_n \geq h_n$. Como a sequência $h_n \to +\infty$, o mesmo vale para s_n (por quê?), o que prova que a p-série diverge se $0 < p \leq 1$.

(e) A *série harmônica alternada*, dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n} + \cdots \tag{10.6}$$

é convergente.

Ponhamos $s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}/k$. Temos

$$s_{2n} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right),$$

o que mostra que a subsequência (s_{2n}) é crescente. Da mesma forma, vemos que a subsequência (s_{2n-1}) é decrescente, já que

$$s_{2n+1} = \frac{1}{1} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Como $0 < s_{2n} < s_{2n} + 1/(2n+1) = s_{2n+1} \leq 1$, concluímos que essas duas subsequências convergem, pois são limitadas inferiormente por

0 e superiormente por 1, e para o mesmo limite, devido a igualdade $s_{2n} + 1/(2n+1) = s_{2n+1}$. Logo a sequência de somas parciais (s_n) converge, provando que a série harmônica alternada é convergente.

Testes de Comparação

Em seguida vamos apresentar dois resultados simples que indicam como determinar a convergência de uma série por meio de comparação com uma série cuja convergência já esteja estabelecida.

Teorema 10.4 (Teste da Comparação)
Sejam $\mathbf{x} = (x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_n)$ sequências em $\mathbb{R}$ e suponhamos que para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ se tenha

$$0 \le x_n \le y_n \qquad \text{para } n > n_0. \tag{10.7}$$

Então:

(i) A convergência de $\sum y_n$ implica a convergência de $\sum x_n$;

(ii) A divergência de $\sum x_n$ implica a divergência de $\sum y_n$.

Prova: (i) Suponhamos que $\sum y_n$ seja convergente e, dado $\varepsilon > 0$, seja $N_1 = N_1(\varepsilon)$ tal que se $m > n \ge N_1$, então

$$y_{n+1} + \cdots + y_m < \varepsilon.$$

Se $m > n > N_0 := \max\{n_0, N_1\}$, então segue que

$$0 \le x_{n+1} + \cdots + x_m \le y_{n+1} + \cdots + y_m < \varepsilon,$$

donde segue a convergência de $\sum x_n$.

A afirmação (ii) é a contrapositiva de (i). $\square$

O seguinte resultado é bastante útil em casos em que é difícil estabelecer as desigualdades em (10.7).

Teorema 10.5 (Teste da Comparação Limite)
Sejam $\mathbf{x} = (x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_n)$ sequências de números estritamente positivos e suponhamos que existe o seguinte limite em $\mathbb{R}$:

$$r := \lim \left(\frac{x_n}{y_n} \right). \tag{10.8}$$

Temos:

(i) Se $r \neq 0$ então $\sum x_n$ é convergente se, e somente se, $\sum y_n$ é convergente.

(ii) Se $r = 0$ e se $\sum y_n$ é convergente, então $\sum x_n$ é convergente.

Prova: (i) Segue de (10.8) que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2}r \leq x_n/y_n \leq 2r$ para $n > N_0$, donde

$$\frac{r}{2}y_n \leq x_n \leq 2ry_n \qquad \text{para } n > N_0.$$

Aplicando o Teste da Comparação 10.4 duas vezes, obtemos a afirmação (i).

(ii) Se $r = 0$, então existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < x_n \leq y_n \qquad \text{para } n > N_0 \text{ (por quê?)},$$

de modo que podemos aplicar diretamente o Teorema 10.4.

Exemplos 10.4

(a) A série $\sum 1/(n^2 + n + 1)$ é convergente.

Claramente temos

$$0 < \frac{1}{n^2 + n + 1} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Logo, a convergência dessa série segue da convergência da 2-série pelo Teorema 10.4.

(b) A série $\sum 1/(n^2 - 3n + 3)$ é convergente.

De fato, seja $x_n = 1/(n^2 - 3n + 3)$ e $y_n = 1/n^2$. Observe que não vale $x_n \leq y_n$. Mas temos

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{n^2}{n^2 - 3n + 3} = \frac{1}{1 - (3/n) + (3/n^2)} \to 1.$$

Logo, podemos aplicar o Teste da Comparação Limite 10.5 para concluir que a série dada converge, como consequência da convergência da 2-série.

(c) A série $\sum 1/\sqrt{n + \sqrt{n}}$ é divergente.

Façamos $x_n := 1/\sqrt{n + \sqrt{n}}$ e $y_n := 1/\sqrt{n}$. A série $\sum y_n$ é a $\frac{1}{2}$-série que é divergente. Temos

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/\sqrt{n}}} \to 1.$$

Logo, segue do Teste da Comparação Limite que a série dada diverge.

(d) A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ é convergente. Aqui, usamos a convenção $0! := 1$.

Já vimos em aula passada que a sequência das somas parciais dessa série, $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right)_{n=0}^{\infty}$, converge e seu limite define o número e. Vamos, no entanto, dar outra prova desse fato, usando o Teorema 10.4. Com efeito, temos

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n(n-1)} \qquad \text{para } n \geq 2.$$

Como a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ coincide com a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (por quê?) e esta última converge, pelo Exemplo 10.1 (c), concluímos pelo Teorema 10.4 que a série dada converge.

Exercícios 10.1

1. Use o Critério de Cauchy para Séries para provar as seguintes proposições:

   (a) Para todo $m \in \mathbb{N}$ a série $\sum x_n$ converge se, e somente se, a série $\sum x_{n+m}$ converge. Nesse caso, temos

   $$\sum_{n=1}^{\infty} x_{n+m} = \sum_{n=m+1}^{\infty} x_n.$$

   (b) Se $\sum x_n$ e $\sum y_n$ são séries convergentes e $a, b \in \mathbb{R}$, então a série $\sum (ax_n + by_n)$ converge e vale

   $$\sum_{n=1}^{\infty} (ax_n + by_n) = a \sum_{n=1}^{\infty} x_n + b \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

2. Use somas telescópicas para estabelecer os seguintes limites:

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1$;

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)} = \frac{1}{a}$, se $a \in \mathbb{R}$ e $-a \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$;

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

3. Use o Critério de Cauchy para Séries para mostrar que a série $\sum (\operatorname{sen} n)/n^2$ é convergente.

4. Use um argumento semelhante ao usado no Exemplo 10.3 (e) para mostrar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ é convergente.

5. Investigue a convergência ou divergência das seguintes séries:

   (a) $\sum 1/(n^2 - n + 1)$;
   (b) $\sum 1/\sqrt{n^2 - 3n + 3}$;
   (c) $\sum 1/(n^2 + n + 2)^{3/4}$;
   (d) $\sum 1/(n^3 - n^2 + 1)^{1/3}$.

6. Seja $\sum_{n+1}^{\infty} x_n$ tal que (x_n) é uma sequência decrescente de números estritamente positivos. Se (s_n) denota a sequência das somas parciais mostre (agrupando os termos de s_{2^n} de dois modos distintos) que

   $$\frac{1}{2}\left(x_1 + 2x_2 + \cdots + 2^n x_{2^n}\right) \leq s_{2^n} \leq \left(x_1 + 2x_2 + \cdots + 2^{n-1} x_{2^{n-1}}\right) + x_{2^n}.$$

   Use essas desigualdades para mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge se, e somente se, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ converge.

   Esse resultado é muito poderoso e é freqüentemente chamado *Teste da Condensação de Cauchy*.

7. Use o Teste da Condensação de Cauchy para estabelecer a divergência das séries:

   (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$;
   (b) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)}$;
   (c) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)(\log\log\log n)}$.

8. Use o Teste da Condensação de Cauchy para estabelecer a convergência das séries

   $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}, \qquad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)^2}.$$

Aula 11 – Convergência Absoluta e Não-Absoluta de Séries

Metas da aula: Definir os conceitos de séries absolutamente convergentes e séries condicionalmente convergentes. Apresentar o Teorema dos Rearranjos para séries absolutamente convergentes. Apresentar os principais testes para a convergência absoluta de séries. Apresentar o teste para convergência de séries alternadas.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber os conceitos de convergência absoluta e convergência condicional (ou não-absoluta) de séries.
- Saber o Teorema dos Rearranjos para séries absolutamente convergentes.
- Conhecer e saber aplicar os principais testes para estabelecer a convergência absoluta de séries, bem como o teste para a convergência de séries alternadas.

Introdução

Nesta aula vamos estudar a importante noção de convergência absoluta de uma série assim como os principais testes para a verificação dessa convergência.

Convergência Absoluta de Séries

Iniciemos com a definição de convergência absoluta de uma série numérica.

Definição 11.1
Seja $\mathbf{x} = (x_n)$ uma sequência em $\mathbb{R}$. Dizemos que a série $\sum x_n$ é *absolutamente convergente* se a série $\sum |x_n|$ é convergente. Dizemos que a série é *condicionalmente convergente* (ou *não-absolutamente convergente*) se ela é convergente mas não é absolutamente convergente.

O exemplo clássico de série condicionalmente convergente é o da série harmônica alternada $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, que converge, como vimos no Exemplo 10.3 (e), mas cuja série de valores absolutos é a série harmônica $\sum \frac{1}{n}$ cuja divergência já verificamos em várias oportunidades.

O seguinte resultado mostra que a noção de convergência absoluta de uma série é mais forte que a de convergência simplesmente.

Teorema 11.1
Se uma série $\sum x_n$ é absolutamente convergente, então ela é convergente.

Prova: Como $\sum |x_n|$ converge, o Critério de Cauchy para Séries 10.2 implica que, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m > n > N_0$, então

$$|x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \cdots + |x_m| < \varepsilon.$$

Mas então, se (s_n) é a sequência das somais parciais de $\sum x_n$, a desigualdade triangular nos dá

$$|s_m - s_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m| \le |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \cdots + |x_m| < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue do Critério de Cauchy que $\sum x_n$ converge.$\square$

Dada uma série $\sum x_n$ e uma bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ obtemos uma nova série $\sum x'_n$ fazendo $x'_n = x_{\varphi(n)}$. Os termos da nova série $\sum x'_n$ são iguais aos da série $\sum x_n$ mas estão ordenados de modo distinto.

Definição 11.2
Dizemos que uma série $\sum x'_n$ é um *rearranjo* de uma série $\sum x_n$ se existe uma bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $x'_n = x_{\varphi(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

O seguinte resultado afirma que os rearranjos não alteram as somas das séries absolutamente convergentes.

Teorema 11.2 (Teorema dos Rearranjos)
Seja $\sum x_n$ uma série absolutamente convergente. Então qualquer rearranjo $\sum x'_n$ de $\sum x_n$ converge ao mesmo valor.

Prova: Suponhamos que $\sum x_n$ converge a $s \in \mathbb{R}$ e seja (s_n) a sequência das somas parciais. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe N_1 tal que se $n > N_1$ e $m > N_1$, então

$$|s - s_n| < \varepsilon \quad \text{e} \quad \sum_{k=N_1+1}^{m} |x_k| < \varepsilon.$$

Seja $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijeção qualquer. Ponhamos $x'_n = x_{\varphi(n)}$ e seja (s'_n) a sequência das somas parciais de $\sum x'_n$. Seja $N_0 = \sup\{\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(N_1)\}$.

Então todos os termos $x_1, x_2, \ldots, x_{N_1}$ estão contidos como parcelas na soma $s'_{N_0} = x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_{N_0}$. Segue que se $l > N_0$, então $s'_l - s_n$ é a soma de um número finito de termos x_k com índice $k > N_1$. Logo, para algum $m > N_1$ temos

$$|s'_l - s_n| \leq \sum_{k=N_1+1}^{m} |x_k| < \varepsilon.$$

Portanto, se $l > N_0$, então temos

$$|s'_l - s| \leq |s'_l - s_n| + |s_n - s| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $\sum x'_n$ converge para s. $\square$

Exemplos 11.1

(a) Seja $\sum x_n$ uma série condicionalmente convergente. Definamos $p_n := (|x_n|+x_n)/2 = \max\{x_n, 0\}$ e $q_n := (|x_n|-x_n)/2 = \max\{-x_n, 0\}$. Então as séries $\sum p_n$ e $\sum q_n$ são ambas divergentes. Os números p_n e q_n são chamados *parte positiva* e *parte negativa* de x_n, respectivamente.

De fato, como $x_n = p_n - q_n$ e $|x_n| = p_n + q_n$ então $s_n = P_n - Q_n$ e $S_n = P_n + Q_n$, onde (s_n), (S_n), (P_n) e (Q_n) são as sequências das somas parciais de $\sum x_n$, $\sum |x_n|$, $\sum p_n$ e $\sum q_n$, respectivamente. Temos que $S_n \to +\infty$, já que $\sum x_n$ é condicionalmente convergente. Como s_n converge, a igualdade $s_n = P_n - Q_n$ implica que se P_n converge, então Q_n converge, e vice-versa. Nesse caso, então teríamos a convergência de $P_n + Q_n$, contradizendo o fato de que $S_n \to +\infty$.

(b) Considere as séries

$$\sum x_n = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \cdots$$
$$\sum x'_n = 1 + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots,$$

onde $\sum x'_n$ é um rearranjo de $\sum x_n$ no qual dois termos positivos são sempre seguidos de um termo negativo.

A bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ correspondente é definida por $\varphi(3k-2) = 4k-3$, $\varphi(3k-1) = 4k-1$ e $\varphi(3k) = 2k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Note que se $\mathbf{I}$ é o conjunto dos números naturais ímpares, então $\mathbf{I} = \{4k-3 : k \in \mathbb{N}\} \cup \{4k-1 : k \in \mathbb{N}\}$ ao passo que $\{4k-3 : k \in \mathbb{N}\} \cap \{4k-1 : k \in \mathbb{N}\} = \emptyset$. Por outro lado, $\{3k-1 : k \in \mathbb{N}\}$, $\{3k-2 : k \in \mathbb{N}\}$ e $\{3k : k \in \mathbb{N}\}$ são três subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$, disjuntos dois a dois, cuja união é $\mathbb{N}$. Portanto, φ é, de fato, uma bijeção (por quê?).

A série $\sum(-1)^{n+1}/n^2$ é absolutamente convergente pois os valores absolutos de seus termos formam a 2-série $\sum 1/n^2$ que já vimos que é convergente no Exemplo 10.3 (b). Logo, as séries $\sum x_n$ e $\sum x'_n$ consideradas neste exemplo convergem ao mesmo limite, pelo Teorema 11.2.

(c) Considere as séries

$$\sum x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$
$$\sum x'_n = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

Como no item anterior, $\sum x'_n$ é um rearranjo de $\sum x_n$ onde a bijeção φ é a mesma definida em (b). Sabemos que a série $\sum x_n$ é condicionalmente convergente. Seja $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Temos

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) - (\frac{1}{6} - \frac{1}{7}) - \cdots < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Com relação à série $\sum x'_n$, como

$$\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} > \frac{1}{4k} + \frac{1}{4k} - \frac{1}{2k} = 0 \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$

temos $s'_3 < s'_6 < s'_9 < \cdots$, onde (s'_n) é a sequência das somas parciais de $\sum x'_n$. Além disso, como

$$-\frac{1}{2k} + \frac{1}{4k+1} + \frac{1}{4k+3} < -\frac{1}{2k} + \frac{1}{4k} + \frac{1}{4k} = 0 \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$

concluímos que

$$\begin{aligned} s'_{3n} &= 1 + \frac{1}{3} \\ &+ \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1}\right) - \frac{1}{2n} < \frac{4}{3} \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, a subsequência (s'_{3n}) da sequência (s'_n) é convergente. Seja $s' := \lim s'_{3n}$.

Dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos $n \in \{3m-2, 3m-1, 3m\}$ para algum $m \in \mathbb{N}$ (por quê?). Assim,

$$\begin{aligned} |s'_n - s'| &\le |s' - s'_{3m}| + |s'_n - s'_{3m}| \\ &\le |s' - s'_{3m}| + |x'_{3m-2}| + |x'_{3m-1}| = |s' - s'_{3m}| + \frac{1}{4m-3} + \frac{1}{4m-1}. \end{aligned}$$

Como $3m-2 \leq n \leq 3m$, temos que se $n \to +\infty$ então $m \to +\infty$ e vice-versa. Daí deduzimos facilmente que toda a sequência s'_n converge e $\lim s'_n = s'$. Além disso, temos

$$s' = \lim_{k\to\infty} s'_{3k} > s'_3 = \frac{5}{6} > s.$$

Portanto, a série $\sum x'_n$ converge a uma soma diferente daquela da série $\sum x_n$, da qual ela é um rearranjo.

(d) Se $\sum x_n$, $\sum x'_n$, s e s' são como no item anterior, então $s' = (3/2)s$.

Isso pode ser provado com o seguinte truque. Temos

$$\frac{s}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} s &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots \\ \frac{s}{2} &= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots \end{aligned}$$

Somando-se termo a termo obtemos

$$\frac{3s}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots,$$

o que mostra que s'_n converge para $(3/2)s$.

(e) Diz-se que uma série $\sum x_n$ é *comutavelmente convergente* quando qualquer rearranjo dela $\sum x'_n$ converge para a mesma soma. Em particular, uma série comutavelmente convergente é convergente. O Teorema dos Rearranjos 11.2 afirma que toda série absolutamente convergente é comutavelmente convergente.

O seguinte resultado mostra que vale a recíproca, isto é, $\sum x_n$ é comutavelmente convergente se, e somente se, $\sum x_n$ é absolutamente convergente:

"Se $\sum x_n$ é condicionalmente convergente então, dado qualquer $c \in \mathbb{R}$, existe um rearranjo $\sum x'_n$ de $\sum x_n$ cuja soma é igual a c."

A afirmação anterior é um lema devido a Bernhard Riemann (1826-1866). Riemann é considerado por muitos um dos maiores matemáticos de todos os tempos, tendo feito contribuições fundamentais à Análise e Geometria Diferencial dentre outras áreas da Matemática.

Segue desse lema de Riemann, em particular, que séries condicionalmente convergentes não são comutavelmente convergentes, o que prova a recíproca do Teorema 11.2, ou seja, que se uma série é comutavelmente convergente então ela é absolutamente convergente. Apresentamos a demonstração do lema na seção Prossiga ao final desta aula.

Testes para Convergência Absoluta

A seguir enunciaremos e provaremos alguns dos principais testes para a verificação da convergência absoluta de séries.

Teorema 11.3 (Teste da Comparação Limite II)
Sejam $\mathbf{x} = (x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_n)$ sequências de números reais com $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e suponhamos que exista

$$r := \lim \left| \frac{x_n}{y_n} \right|. \tag{11.1}$$

Temos:

(i) Se $r \neq 0$, então $\sum x_n$ é absolutamente convergente se, e somente se, $\sum y_n$ é absolutamente convergente.

(ii) Se $r = 0$ e $\sum y_n$ é absolutamente convergente, então $\sum x_n$ é absolutamente convergente.

Prova: Esse resultado segue imediatamente do Teorema 10.5. □

O seguinte teste é devido a Cauchy e por isso é também conhecido como Teste de Cauchy.

Teorema 11.4 (Teste da Raiz)
Seja $\mathbf{x} = (x_n)$ uma sequência em $\mathbb{R}$.

(i) Se existe $r \in \mathbb{R}$ com $r < 1$ e $N_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|x_n|^{1/n} \leq r \qquad \text{para } n > N_0, \tag{11.2}$$

então a série $\sum x_n$ é absolutamente convergente. Em particular, se existe $\bar{r} := \lim |x_n|^{1/n}$ e $\bar{r} < 1$, então vale a mesma conclusão.

(ii) Se existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) satisfazendo

$$|x_{n_k}|^{1/n_k} \geq 1 \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N}, \tag{11.3}$$

então a série $\sum x_n$ é divergente.

Prova: (i) Se (11.2) vale, então temos $|x_n| \leq r^n$ para $n > N_0$. Como a série geométrica $\sum r^n$ é convergente para $0 \leq r < 1$, o Teste da Comparação 10.4 implica que $\sum |x_n|$ é convergente. No caso em que existe $\bar{r} := \lim |x_n|^{1/n}$ e $\bar{r} < 1$, dado $0 < \varepsilon < 1 - \bar{r}$, podemos obter $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n|^{1/n} < \bar{r} + \varepsilon < 1$ para todo $n > N_0$ e, assim, vale (11.2) com $r := \bar{r} + \varepsilon < 1$.

(ii) Se (11.3) vale para uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) então x_n não converge a zero e o Teorema 10.1 implica que $\sum x_n$ é divergente. $\square$

Observação 11.1
Quando $\lim |x_n|^{1/n} = 1$ o Teste da Raiz não permite que se tire qualquer conclusão quanto à convergência ou divergência da série. Por exemplo, ambas as séries $\sum 1/n^2$ e $\sum 1/n$ satisfazem $|x_n|^{1/n} \to 1$ (por quê?). No entanto, a primeira série é convergente enquanto a segunda é divergente como já vimos.

O seguinte teste é também conhecido com Teste de D'Alembert em referência ao grande matemático e físico francês Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) que foi quem primeiro o enunciou e provou.

Teorema 11.5 (Teste da Razão)
Seja $\mathbf{x} = (x_n)$ uma sequência de números reais não-nulos.

(i) Se existe $r \in \mathbb{R}$ com $0 < r < 1$ e $N_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq r \qquad \text{para } n > N_0, \tag{11.4}$$

então a série $\sum x_n$ é absolutamente convergente. Em particular, se existe $\bar{r} := \lim(|x_{n+1}|/|x_n|)$ e $\bar{r} < 1$, então vale a mesma conclusão.

(ii) Se existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq 1 \qquad \text{para } n > N_0, \tag{11.5}$$

então a série $\sum x_n$ é divergente. Em particular, se existe $\bar{r} := \lim(|x_{n+1}|/|x_n|)$ e $\bar{r} > 1$, então $\sum x_n$ é divergente.

Prova: (i) Se vale (11.4) então podemos provar usando Indução Matemática que $|x_{N_0+1+m}| \leq |x_{N_0+1}| r^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. De fato, a afirmação vale para $m = 1$ e supondo que ela valha para algum $k \in \mathbb{N}$ temos

$$|x_{N_0+1+(k+1)}| \leq r|x_{N_0+1+k}| \leq r(|x_{N_0+1}|r^k) = |x_{N_0+1}|r^{k+1},$$

o que conclui a prova por indução. Assim, para $n > N_0$ os termos em $\sum |x_n|$ são dominados por uma constante $(|x_{N_0+1}|)$ multiplicando os termos na série geométrica $\sum r^n$ com $0 < r < 1$. Logo, o Teste da Comparação 10.4 implica que $\sum |x_n|$ é convergente.

No caso em que existe $\bar{r} := \lim(|x_{n+1}|/|x_n|)$ e $\bar{r} < 1$, tomando $0 < \varepsilon < 1 - \bar{r}$, obtemos que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que (11.4) vale com $r = \bar{r} + \varepsilon < 1$, e então podemos aplicar o resultado já provado.

(ii) Se vale (11.5), de novo um simples argumento por indução prova que $|x_{N_0+1+m}| \geq |x_{N_0+1}|$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Logo, x_n não converge a 0 e, portanto, o Teorema 10.1 implica que a série $\sum x_n$ é divergente.

Da mesma forma, se existe $\bar{r} := \lim(|x_{n+1}|/|x_n|)$ e $\bar{r} > 1$, tomando $0 < \varepsilon < \bar{r} - 1$, temos que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{n+1}|/|x_n| > \bar{r} - \varepsilon > 1$. Portanto, (11.5) vale e podemos aplicar o resultado que acabou de ser provado. $\square$

Observação 11.2
Quando $\lim(|x_{n+1}|/|x_n|) = 1$ nada pode ser afirmado quanto a convergência ou divergência da série $\sum x_n$. Por exemplo, a série $\sum(1/n^2)$ é convergente ao passo que a série $\sum(1/n)$ é divergente, como já vimos, mas ambas satisfazem essa condição (por quê?).

Exemplos 11.2

(a) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $b > 1$ e $q \in \mathbb{N}$. Mostraremos que as séries $\mathbf{s}_1 := \sum(a^n/n!)$, $\mathbf{s}_2 := \sum(n!/n^n)$ e $\mathbf{s}_3 := \sum(n^q/b^n)$ são convergentes.

Vamos aplicar o Teste da Razão 11.5. No caso de $\mathbf{s}_1$ temos

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{|a|^n} = \frac{|a|}{n+1} \to 0,$$

o que implica a convergência da série pelo Teorema 11.5. No caso de $\mathbf{s}_2$ temos

$$\begin{aligned}\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n!}{(n+1)(n+1)^n}\frac{n^n}{n!} \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+1/n)^n} \to 1/e < 1,\end{aligned}$$

e a convergência da série segue do referido teste. Finalmente, para $\mathbf{s}_3$ temos

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{(n+1)^q}{b^{(n+1)}}\frac{b^n}{n^q} = (1+\frac{1}{n})^q\frac{1}{b} \to \frac{1}{b} < 1,$$

o que, pelo Teste da Razão, implica a convergência da série.

(b) Sejam (x_n) uma sequência em $\mathbb{R}$ e $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$, com $a' < a$ e $b < b'$. Mostraremos que se existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > a \qquad \text{para } n > N_0, \tag{11.6}$$

então existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n|^{1/n} > a' \qquad \text{para } n > N_1. \tag{11.7}$$

Analogamente, se existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < b \qquad \text{para } n > N_0, \tag{11.8}$$

então existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n|^{1/n} < b' \qquad \text{para } n > N_1. \tag{11.9}$$

Com efeito, suponhamos que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que valha (11.6). Dado qualquer $m \in \mathbb{N}$ com $m > N_0+1$, multiplicando as desigualdades (11.6) com $n = N_0+1, N_0+2, \ldots, m-1$ obtemos

$$\frac{|x_m|}{|x_{N_0+1}|} > a^{m-N_0-1} \quad \text{ou seja} \quad |x_m| < Ka^m, \text{ com } K := a^{-N_0-1}|x_{N_0+1}|.$$

Extraindo a m-ésima raiz na última desigualdade obtemos

$$|x_m|^{1/m} < K^{1/m}a.$$

Como $K^{1/m} \to 1$ e $a' > a$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $m > N_1$ então $K^{1/m}a < a'$, o que implica (11.7) e prova a primeira afirmação.

A prova da segunda afirmação, relativa às desigualdades (11.8) e (11.9), é inteiramente análoga e deixaremos para você como exercício.

(c) Suponha que existe $\bar{r} := \lim(|x_{n+1}|/|x_n|)$. Então $\lim |x_n|^{1/n} = \bar{r}$.

De fato, dado qualquer $\varepsilon > 0$, tomando no exemplo anterior a, a', b, b' satisfazendo $a' := \bar{r} - \varepsilon < a < \bar{r}$ e $\bar{r} < b < b' := \bar{r} + \varepsilon$, concluímos que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $m > N_1$ então

$$\bar{r} - \varepsilon < |x_m|^{1/m} < \bar{r} + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $\lim |x_n|^{1/n} = \bar{r}$.

(d) Os fatos provados nos itens anteriores (b) e (c) mostram que se o Teste da Razão é capaz de indicar a convergência de uma série, então o Teste da Raiz também será capaz de fazê-lo, embora o Teste da Razão é frequentemente mais fácil de ser aplicado.

Contudo, existem casos em que o Teste da Raiz pode afirmar a convergência de uma série para os quais o Teste da Razão não é aplicável. Um exemplo disso é fornecido pela série

$$\mathbf{s}' := \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{64} + \cdots$$

que é um rearranjo da série geométrica $\mathbf{s} := \sum 1/2^{(n-1)}$, onde a bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é definida por $\varphi(2k) = 2k - 1$, $\varphi(2k-1) = 2k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\mathbf{s}$ é absolutamente convergente, sabemos do Teorema dos Rearranjos 11.2 que $\mathbf{s}'$ converge para uma soma igual à de $\mathbf{s}$. A convergência de $\mathbf{s}'$ é confirmada pelo Teste da Raíz já que

$$\begin{aligned}
\lim |x_{2k-1}|^{1/(2k-1)} &= \lim 2^{-\frac{2k-2}{2k-1}} = \frac{1}{2} \lim 2^{1/(2k-1)} \to \frac{1}{2} \\
\lim |x_{2k}|^{1/(2k)} &= \lim 2^{-\frac{2k-1}{2k}} = \frac{1}{2} \lim 2^{1/(2k)} \to \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

e, portanto, $\lim |x_n|^{1/n} = 1/2 < 1$. Por outro lado, o Teste da Razão não é aplicável já que $|x_{2k}|/|x_{2k-1}| = 2 > 1$ e $|x_{2k+1}|/|x_{2k}| = 1/8 < 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Séries Alternadas

Grande parte das séries condicionalmente convergentes é formada por “séries alternadas” cuja definição damos a seguir.

Definição 11.3
Diz-se que a sequência de números reais $\mathbf{x} = (x_n)$ é *alternada* se $x_n x_{n+1} < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $x_1 < 0 \Rightarrow x_2 > 0 \Rightarrow x_3 < 0 \Rightarrow \cdots$ e $x_1 > 0 \Rightarrow x_2 < 0 \Rightarrow x_3 > 0 \Rightarrow \cdots$. Se a sequência (x_n) é alternada, dizemos que a série $\sum x_n$ é uma *série alternada.*

Tipicamente, uma série alternada é escrita na forma $\sum (-1)^{n+1} a_n$ (ou $\sum (-1)^n a_n$) onde (a_n) é uma sequência de números positivos.

O principal resultado sobre séries alternadas é o seguinte teste que nos fornece, em particular, um modo muito simples de construir e de identificar séries condicionalmente convergentes. Esse teorema é também conhecido como Teste de Leibniz em referência ao grande filósofo e matemático Gottfried von Leibniz (1646-1716) a quem sua descoberta é atribuída.

Teorema 11.6 (Teste das Séries Alternadas)
Seja (a_n) uma sequência decrescente de números estritamente positivos com $\lim a_n = 0$. Então a série $\sum (-1)^{n+1} a_n$ é convergente.

Prova: Seja (s_n) a sequência de somas parciais da série $\sum(-1)^{n+1}a_n$. Como

$$s_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}),$$

e $a_k - a_{k+1} \geq 0$, segue que a subsequência (s_{2n}) de (s_n) é crescente. Como

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n},$$

segue também que $s_{2n} \leq a_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, o Teorema da Sequência Monótona 8.1 implica que a subsequência (s_{2n}) converge para algum $s \in \mathbb{R}$. Agora, temos $s_{2n-1} = s_{2n} + a_{2n}$ e, portanto,

$$|s_{2n-1} - s| \leq |s_{2n-1} - s_{2n}| + |s - s_{2n}| = a_{2n} + |s - s_{2n}| \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Daí decorre facilmente, usando o fato de que $a_{2n} \to 0$ e $|s - s_{2n}| \to 0$, que a subsequência (s_{2n-1}) também converge a s. Concluímos então que toda a sequência (s_n) converge a s (por quê?). Logo, $\sum(-1)^{n+1}a_n$ é convergente.$\square$

Exemplos 11.3
Como exemplo de aplicação imediata do Teste das Séries Alternadas 11.6 temos a atestação da convergência das séries

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \qquad \text{e} \qquad \sum(-1)^{n+1}\log(1+\frac{1}{n}),$$

já que as sequências de números positivos $(1/\sqrt{n})$ e $(\log(1+1/n))$ são ambas decrescentes e convergem a 0.

Ambas são condicionalmente convergentes. De fato, a primeira porque $\sum(1/\sqrt{n})$ é a 1/2-série que sabemos ser divergente pelo Exemplo 10.3 (d).

A segunda porque

$$\sum_{k=1}^{n}\log(1+\frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}(\log(k+1) - \log k) = \log(n+1).$$

Como $\log(n+1) \to +\infty$, segue que a série $\sum \log(1+1/n)$ diverge.

Exercícios 11.1

1. Diz-se que uma série é limitada se a sequência de suas somas parciais é limitada. Mostre que se uma série limitada contém apenas um número finito de termos negativos, então ela é absolutamente convergente.

2. Mostre que se uma série $\sum x_n'$ é um rearranjo de uma série absolutamente convergente $\sum x_n$, então $\sum x_n'$ é absolutamente convergente.

3. Mostre que se (y_n) é uma sequência limitada e $\sum x_n$ é uma série absolutamente convergente, então a série $\sum x_n y_n$ é absolutamente convergente. (Dica: Use o Critério de Cauchy.)

4. Encontre uma expressão explícita para a n-ésima soma parcial de
$$\sum_{n=2}^{\infty} \log(1 - 1/n^2)$$
para mostrar que esta série converge a $-\log 2$. Diga se a convergência é absoluta ou condicional.

5. Sejam (x_{n_k}) e (x_{m_k}) duas subsequências de uma sequência (x_n) e suponhamos que os subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ constituídos pelos valores de (n_k) e (m_k), $\mathbb{N}' = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ e $\mathbb{N}'' = \{m_k : k \in \mathbb{N}\}$, satisfaçam $\mathbb{N}' \cup \mathbb{N}'' = \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}' \cap \mathbb{N}'' = \emptyset$. Mostre que a série $\sum x_n$ é absolutamente convergente se, e somente se, as séries $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} x_{m_k}$ são absolutamente convergentes.

6. Estabeleça a convergência ou a divergência das séries cujo n-ésimo termo é:

   (a) $1/(n+1)(n+2)$.
   (b) $n/(n+1)(n+2)$.
   (c) $2^{1/n}$.
   (d) $n/2^n$.

7. Discuta a convergência ou a divergência das séries cujo n-ésimo termo (para n suficientemente grande) é dado por:

   (a) $(\log n)^{-p}$.
   (b) $(\log n)^{-n}$.
   (c) $(n \log n)^{-1}$.
   (d) $(n(\log n)(\log\log n)^2)^{-1}$.

8. Mostre que se a e b são números positivos, então a série $\sum (an+b)^{-p}$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

9. Considere a série $\sum x_n$ cuja sequência (x_n) é definida por $x_{2k-1} := (1/2)^k$ e $x_{2k} := (1/3)^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Mostre que o Teste da Raíz atesta a convergência da série, ao passo que o Teste da Razão não é aplicável.

10. Use o Teste da Raíz ou o Teste da Razão para determinar os valores de x para os quais as seguintes séries convergem:

    (a) $\sum n^3 x^n$.

    (b) $\sum \frac{2^n}{n!} x^n$.

    (c) $\sum \frac{2^n}{n^2} x^n$.

    (d) $\sum \frac{n^3}{3^n} x^n$.

11. Discuta a convergência e a convergência absoluta das seguintes séries:

    (a) $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$.

    (b) $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$.

    (c) $\sum \dfrac{(-1)^{n+1} n}{n+2}$.

    (d) $\sum (-1)^{n+1} \dfrac{\log n}{n}$.

Prossiga: Rearranjos de Séries Condicionalmente Convergentes

Nesta seção complementar vamos provar o seguinte lema devido a Riemann e mencionado no Exemplo 11.1 (e).

Lema 11.1
Se $\sum x_n$ é condicionalmente convergente então, dado qualquer $c \in \mathbb{R}$, existe um rearranjo $\sum x_n'$ de $\sum x_n$ que converge para c.

Prova: Vamos supor, para simplificar, que $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sejam p_n e q_n definidos como no Exemplo 11.1 (a). Vimos que as séries $\sum p_n$ e $\sum q_n$ são divergentes, crescendo ambas para $+\infty$. Sejam

$$\mathbb{N}' := \{n \in \mathbb{N} : p_n \neq 0\} \qquad \text{e} \qquad \mathbb{N}'' := \{n \in \mathbb{N} : q_n \neq 0\}.$$

Como estamos supondo $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $\mathbb{N}' \cup \mathbb{N}'' = \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}' \cap \mathbb{N}'' = \emptyset$. Além disso, como as séries $\sum p_n$ e $\sum q_n$ crescem para $+\infty$, os conjuntos $\mathbb{N}'$ e $\mathbb{N}''$ são infinitos. Denotemos por $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ os elementos de $\mathbb{N}'$ e por $m_1 < m_2 < m_3 < \cdots$ os elementos de $\mathbb{N}''$. Para não carregar demais a notação, ponhamos $\tilde{p}_k = p_{n_k}$ e $\tilde{q}_k = q_{m_k}$.

Começamos somando $\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 + \cdots$ até encontrarmos o índice $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que o valor da soma $\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 + \cdots + \tilde{p}_{j_1}$ se torna pela primeira vez $> c$. Note que $j_1 = 1$ se $\tilde{p}_1 > c$. O índice j_1 existe já que $\sum \tilde{p}_j \to +\infty$. Fazemos, $\varphi(1) := n_1, \ldots, \varphi(j_1) := n_{j_1}$. Ponhamos $s'(j_1) := \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 + \cdots + \tilde{p}_{j_1}$.

Em seguida, começamos a subtrair $s'(n_{j_1}) - \tilde{q}_1 - \tilde{q}_2 - \cdots$ até encontrarmos o primeiro índice k_1 tal que $s'(j_1) - \tilde{q}_1 - \tilde{q}_2 - \cdots - \tilde{q}_{k_1} < c$. De novo, o índice k_1 existe já que $\sum \tilde{q}_k \to +\infty$. Fazemos, $\varphi(j_1 + 1) := m_1, \ldots, \varphi(j_1 + k_1) := m_{k_1}$ e pomos $s'(j_1 + k_1) := s'(j_1) - \tilde{q}_1 - \tilde{q}_2 - \cdots - \tilde{q}_{k_1}$.

Retornamos ao procedimento de adição dos $\tilde{p}_j$ fazendo $s'(j_1 + k_1) + \tilde{p}_{j_1+1} + \tilde{p}_{j_1+2} + \cdots$ até encontrarmos o primeiro índice $j_2 > j_1$ tal que $s'(j_1 + k_1) + \tilde{p}_{j_1+1} + \tilde{p}_{j_1+2} + \cdots + \tilde{p}_{j_2} > c$. Fazemos $\varphi(j_1+k_1+1) = n_{j_1+1}$, $\varphi(j_1+k_1+2) = n_{j_1+2}, \ldots, \varphi(j_1 + k_1 + j_2) = n_{j_2}$. Então, pomos

$$s'(j_1 + k_1 + j_2) := s'(j_1 + k_1) + \tilde{p}_{j_1+1} + \tilde{p}_{j_1+2} + \cdots + \tilde{p}_{j_2}.$$

Retomamos então o procedimento de subtração dos $\tilde{q}_k$ fazendo $s'(j_1 + k_1 + j_2) - \tilde{q}_{k_1+1} - \tilde{q}_{k_1+2} - \cdots$ até encontrarmos o primeiro índice k_2 tal que $s'(j_1 + k_1 + j_2) - \tilde{q}_{k_1+1} - \tilde{q}_{k_1+2} - \cdots - \tilde{q}_{k_2} < c$. Fazemos então

$$\varphi(j_1 + k_1 + j_2 + 1) := m_{k_1+1}, \quad \varphi(j_1 + k_1 + j_2 + 2) := m_{k_1+2}, \cdots$$
$$\cdots, \varphi(j_1 + k_1 + j_2 + k_2) := m_{k_2}.$$

Continuando esse procedimento indefinidamente definimos uma bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e um rearranjo $\sum x'_n$ de $\sum x_n$, com $x'_n := x_{\varphi(n)}$.

Como $|x_n| \to 0$ quando $n \to +\infty$, segue que $\tilde{p}_j \to 0$ quando $j \to +\infty$ e $\tilde{q}_k \to 0$ quando $k \to +\infty$. Assim, temos que $|x'_n| \to 0$ quando $n \to +\infty$. Façamos

$$s'(l) := \sum_{n=1}^{l} x'_n,$$

e sejam $l_0 := 0 < l_1 < l_2 < l_3 < \cdots$, com $l_j \in \mathbb{N}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, definidos da seguinte forma. O número l_1 é o primeiro índice l tal que $s'(l) > c$; l_2 é o primeiro índice $l > l_1$ tal que $s'(l) < c$; de modo indutivo, l_{2k-1} é o primeiro índice $l > l_{2k-2}$ tal que $s'(l) > c$, e l_{2k} é o primeiro índice $l > l_{2k-1}$ tal que $s'(l) < c$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Temos

$$|s'(l+1) - c| < |s'(l) - c| \qquad \text{para } l_j \leq l < l_{j+1} \tag{11.10}$$

ao passo que

$$|s'(l_j) - c| < |x'_{l_j}| \qquad \text{para todo } j \in \mathbb{N}, \text{ com } j > 1, \tag{11.11}$$

já que

$$s'(l_{2k}) < c \leq s'(l_{2k}-1) \quad \text{e} \quad s'(l_{2k+1}-1) \leq c < s'(l_{2k+1}) \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Como $l_j \to +\infty$ quando $j \to +\infty$ e $|x'_n| \to 0$ quando $n \to +\infty$, deduzimos de (11.10) e (11.11) que $|s'(l) - c| \to 0$ quando $l \to +\infty$ e, portanto, $\sum x'_n$ converge para c. $\square$

Aula 12 – Limites de Funções

Metas da aula: Definir o conceito de ponto de acumulação de um subconjunto da reta. Definir limite de uma função num ponto de acumulação do seu domínio. Apresentar os resultados básicos sobre a existência e a inexistência do limite de uma função num ponto de acumulação do seu domínio.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber o significado dos conceitos de ponto de acumulação de um subconjunto da reta e de limite de uma função num ponto de acumulação do seu domínio.
- Entender e saber aplicar os critérios básicos para a existência e a inexistência do limite de uma função num ponto de acumulação do seu domínio.
- Saber demonstrar a partir da definição a validade ou falsidade de limites para funções simples.

Introdução

Nesta aula vamos iniciar o estudo do importante conceito de limite de uma função. Tal noção é o ponto de partida de todo o Cálculo Diferencial, já que o conceito de derivada nela se baseia. A idéia intuitiva de uma função f ter um limite L num ponto a é que os valores $f(x)$ se tornam mais e mais próximos de L à medida que os valores de x se aproximam mais e mais (mas são diferentes) de $\bar{x}$. Em símbolos intuitivos costuma-se abreviar isso pondo-se "$f(x) \to L$ quando $x \to \bar{x}$". Para exprimir essa idéia da aproximação de $f(x)$ vinculada à de x de modo matematicamente rigoroso é necessário recorrer à célebre 'dupla dinâmica' ε, δ, como faremos dentro de poucos instantes.

Pontos de Acumulação

Para que a idéia do limite de uma função f num ponto $\bar{x}$ faça sentido é preciso que f esteja definida em pontos arbitrariamente próximos de $\bar{x}$. Porém, ela não tem necessariamente que estar definida no próprio ponto $\bar{x}$. Essa é a razão de introduzirmos a seguinte definição.

Definição 12.1
Seja $X \subset \mathbb{R}$. Um ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ é um *ponto de acumulação* de X se para todo $\delta > 0$ existe ao menos um ponto $x \in X$, com $x \neq \bar{x}$, tal que $|x - \bar{x}| < \delta$.

Essa definição pode ser traduzida para a linguagem das vizinhanças do seguinte modo: Um ponto $\bar{x}$ é um ponto de acumulação do conjunto X se toda δ-vizinhança $V_\delta(\bar{x}) = (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$ de $\bar{x}$ contém ao menos um ponto de X diferente de $\bar{x}$.

Note que $\bar{x}$ pode ou não ser elemento de X, mas mesmo quando $\bar{x} \in X$, esse fato é totalmente irrelevante para que se julgue se ele é ou não um ponto de acumulação de X, já que explicitamente requeremos que existam pontos em $V_\delta(\bar{x}) \cap X$ distintos de $\bar{x}$ para que $\bar{x}$ seja ponto de acumulação de X.

Por exemplo, se $X = \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$, então nenhum dos elementos, -1 ou 1, é ponto de acumulação de X já que se $\delta = 1$ então $V_1(-1) \cap X = \{-1\}$ e $V_1(1) \cap X = \{1\}$ e, portanto, essas vizinhanças não contêm nenhum ponto de X distinto do próprio ponto $\bar{x}$, com $\bar{x} = -1$ e $\bar{x} = 1$, respectivamente.

Teorema 12.1
Um número $\bar{x} \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de um subconjunto X de $\mathbb{R}$ se, e somente se, existe uma sequência (x_n) em X tal que $\lim x_n = \bar{x}$ e $x_n \neq \bar{x}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova: Se $\bar{x}$ é um ponto de acumulação de X, então para qualquer $n \in \mathbb{N}$ a $(1/n)$-vizinhança $V_{1/n}(\bar{x})$ contém ao menos um ponto x_n em X distinto de $\bar{x}$. Então $x_n \in X$, $x_n \neq \bar{x}$, e $|x_n - \bar{x}| < 1/n$ o que implica $\lim x_n = \bar{x}$.

Reciprocamente, se existe uma sequência (x_n) em $X \setminus \{\bar{x}\}$ com $\lim x_n = \bar{x}$, então para qualquer $\delta > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_0$, então $x_n \in V_\delta(\bar{x})$. Portanto, a δ-vizinhança de $\bar{x}$ contém os pontos x_n, para $n > N_0$, que pertencem a X e são distintos de $\bar{x}$. $\square$

A seguir alguns exemplos onde enfatizamos o fato de um ponto de acumulação de um conjunto poder ou não pertencer a esse conjunto.

Exemplos 12.1

(a) Se $X := (0, 1)$, intervalo aberto de extremos 0 e 1, então todos os pontos do intervalo fechado $[0, 1]$ são pontos de acumulação de X. Note que 0 e 1 são pontos de acumulação de X embora não pertençam a X. Aqui, todos os pontos de X são pontos de acumulação de X.

(b) Para qualquer conjunto finito em $\mathbb{R}$ o conjunto de seus pontos de acumulação é vazio (por quê?).

(c) O conjunto infinito $\mathbb{N}$ não tem pontos de acumulação (por quê?).

(d) O conjunto $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um único ponto de acumulação que é o 0 (por quê?). Nenhum dos pontos em X é ponto de acumulação de X.

(e) Se $X := [0,1] \cap \mathbb{Q}$ então todo ponto do intervalo $[0,1]$ é ponto de acumulação de X por causa da densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$.

Limites de Funções

Vamos agora dar a definição rigorosa de limite de uma função f num ponto $\bar{x}$. É importante observar que nessa definição é irrevelante se f está ou não definida em $\bar{x}$.

Definição 12.2
Seja $X \subset \mathbb{R}$ e $\bar{x}$ um ponto de acumulação de X. Para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ um número real L é um *limite de f em $\bar{x}$* se, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $0 < |x - \bar{x}| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Observe que o δ depende em geral de ε e algumas vezes para enfatizar isso escrevemos $\delta(\varepsilon)$ ou $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Observe também que a desigualdade $0 < |x - \bar{x}|$ equivale a dizer que x é diferente de $\bar{x}$.

Se L é um limite de f em $\bar{x}$, então também dizemos que f *converge a L em $\bar{x}$* ou que f *tende a L quando x tende a $\bar{x}$*. É comum usar-se o simbolismo

$$f(x) \to L \quad \text{quando} \quad x \to \bar{x}.$$

Se o limite de f em $\bar{x}$ não existe dizemos que f *diverge* em $\bar{x}$.

Como primeiro uso da Definição 12.2, vamos provar que o limite quando existe é único. Assim, podemos dizer que L é *o* limite de f em $\bar{x}$ em vez de dizer que L é *um* limite de f em $\bar{x}$.

Teorema 12.2
Se $f : X \to \mathbb{R}$ e se $\bar{x}$ é um ponto de acumulação de X, então f pode ter no máximo um limite em $\bar{x}$.

Prova: Suponhamos, por contradição, que os números L e L' satisfaçam a Definição 12.2 e que $L \neq L'$. Tomemos $\varepsilon = |L - L'|/2 > 0$. Pela definição, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $x \in X$ e $|x - \bar{x}| < \delta(\varepsilon)$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$. Da mesma forma, existe $\delta'(\varepsilon)$ tal que se $|x - \bar{x}| < \delta'(\varepsilon)$, então $|f(x) - L'| < \varepsilon$. Assim, fazendo $\delta := \min\{\delta(\varepsilon), \delta'(\varepsilon)\}$, temos que se $|x - \bar{x}| < \delta$, então

$$|L - L'| < |L - f(x)| + |L' - f(x)| < \varepsilon + \varepsilon = \frac{|L - L'|}{2} + \frac{|L - L'|}{2} = |L - L'|,$$

o que é absurdo. Tal contradição foi originada com a nossa hipótese de que $L \neq L'$. Logo, o limite quando existe é único. □

A definição de limite ganha uma forma bem interessante em termos de vizinhanças como representado pictoricamente na Figura **12.1**.

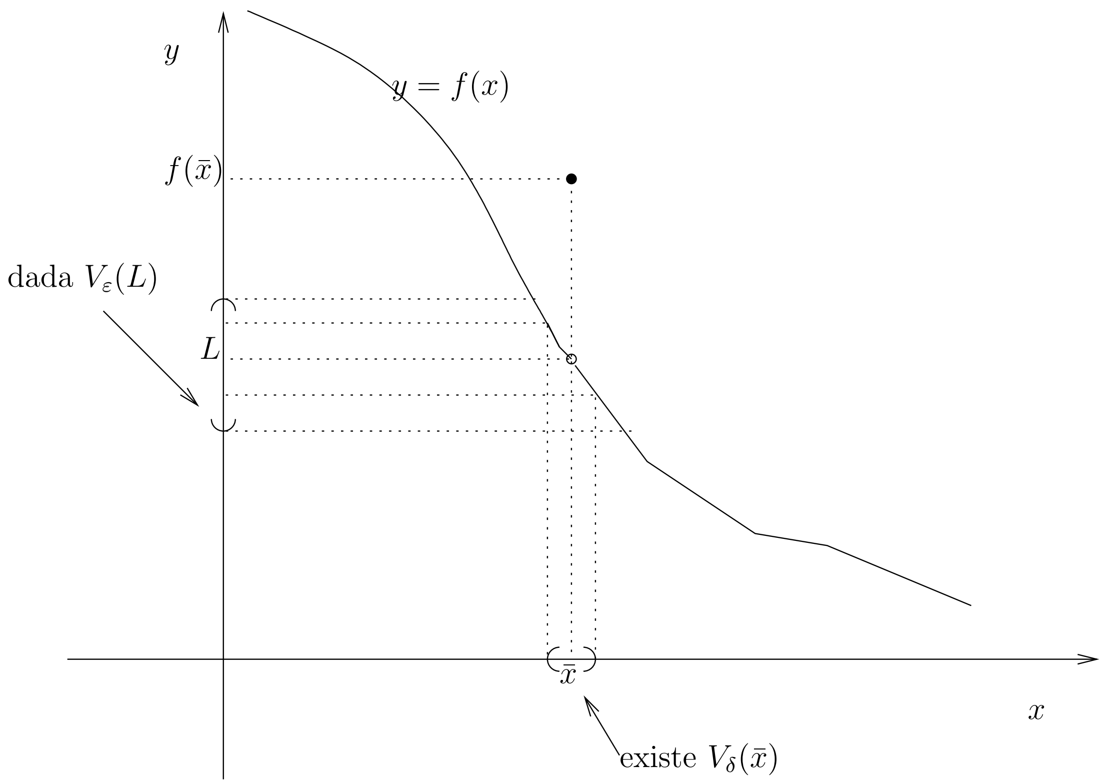


Figura 12.1: O limite de f em $\bar{x}$ é L. Observe que aqui $L \neq f(\bar{x})$.

Notemos que a desigualdade $0 < |x - \bar{x}| < \delta$ é equivalente a dizer que $x \neq \bar{x}$ e x pertence a δ-vizinhança $V_\delta(\bar{x})$ de $\bar{x}$. Similarmente, a desigualdade $|f(x) - L| < \varepsilon$ é equivalente a dizer que $f(x)$ pertence a ε-vizinhança $V_\varepsilon(L)$ de L. Desse modo segue imediatamente o seguinte resultado cujos detalhes da prova deixamos para você como exercício.

Teorema 12.3

Seja $f : X \to \mathbb{R}$ e seja $\bar{x}$ um ponto de acumulação de X. As seguintes afirmações são equivalentes.

(i) $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = L$.

(ii) Dada qualquer ε-vizinhança $V_\varepsilon(L)$ de L, existe uma δ-vizinhança $V_\delta(\bar{x})$ de $\bar{x}$ tal que se $x \neq \bar{x}$ é qualquer ponto de $V_\delta(\bar{x}) \cap X$, então $f(x)$ pertence a $V_\varepsilon(L)$.

Observe que pela Definição 12.2 o limite de uma função f num ponto $\bar{x}$ depende apenas de como f é definida numa vizinhança qualquer de $\bar{x}$. Isso significa, em particular, que se f e g são duas funções quaisquer cujos domínios contêm uma vizinhança $V_r(\bar{x})$, para algum $r > 0$, e são tais que $f|V_r(\bar{x}) = g|V_r(\bar{x})$, então $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{x \to \bar{x}} g(x) = L$. Deixamos a você como exercício a simples verificação desse fato.

A seguir damos alguns exemplos que ilustram como a definição de limite é aplicada.

Exemplos 12.2

(a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função constante $f(x) \equiv c$ para todo $x \in \mathbb{R}$, com $c \in \mathbb{R}$, então $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = c$.

De fato, dado qualquer $\varepsilon > 0$, tomamos qualquer $\delta > 0$, digamos $\delta := 1$. Então se $0 < |x - \bar{x}| < 1$, temos $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário concluímos da Definição 12.2 que $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = c$.

(b) $\lim_{x \to \bar{x}} x = \bar{x}$.

Aqui f é a função dada por $f(x) := x$ que podemos supor definida em todo $\mathbb{R}$. Seja dado $\varepsilon > 0$ qualquer. Tomemos $\delta := \varepsilon$. Então se $0 < |x - \bar{x}| < \delta = \varepsilon$, temos $|f(x) - \bar{x}| = |x - \bar{x}| < \varepsilon$. Logo, como $\varepsilon > 0$ é arbritrário, segue que $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \bar{x}$.

(c) $\lim_{x \to \bar{x}} x^2 = \bar{x}^2$.

Nesse caso temos $f(x) = x^2$ e podemos supor f definida em $\mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, devemos exibir $\delta > 0$ tal que se $|x - \bar{x}| < \delta$, então $|x^2 - \bar{x}^2| < \varepsilon$. Agora,

$$|x^2 - \bar{x}^2| = |(x + \bar{x})(x - \bar{x})| \leq (|x| + |\bar{x}|)|x - \bar{x}|.$$

Se $|x - \bar{x}| < 1$, então $|x| < |\bar{x}| + 1$ e teremos

$$|x^2 - \bar{x}^2| < (2|\bar{x}| + 1)|x - \bar{x}| < \varepsilon, \quad \text{se} \quad |x - \bar{x}| < \frac{\varepsilon}{2|\bar{x}| + 1}.$$

Assim, se fizermos $\delta := \min\{1, \varepsilon/(2|\bar{x}| + 1)\}$, então $|x - \bar{x}| < \delta$ implica $|x^2 - \bar{x}^2| < \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, obtemos $\lim_{x \to \bar{x}} x^2 = \bar{x}^2$.

(d) $\lim_{x \to \bar{x}} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\bar{x}}$ se $\bar{x} \neq 0$.

Podemos tomar $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Para provar que $\lim_{x \to \bar{x}} f = 1/\bar{x}$ devemos mostrar que $|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\bar{x}}|$ é menor que um $\varepsilon > 0$ arbitrariamente dado, se $|x - \bar{x}|$ é suficientemente pequeno. De antemão, podemos supor $|x - \bar{x}| < \dfrac{|\bar{x}|}{2}$ o que implica $|x| > \dfrac{|\bar{x}|}{2}$ (por quê?). Assim,

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{\bar{x}} \right| = \frac{1}{(|x||\bar{x}|)} |x - \bar{x}| < \frac{2}{|\bar{x}|^2} |x - \bar{x}|.$$

Portanto, fazendo $\delta := \min\{\dfrac{|\bar{x}|}{2}, \dfrac{|\bar{x}|^2}{2}\varepsilon\}$, temos que se $|x - \bar{x}| < \delta$, então $|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\bar{x}}| < \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, isso prova que $\lim_{x \to \bar{x}} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\bar{x}}$.

(e) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2} = -4$.

Fazendo $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2}$, vemos que f está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ com exceção de $x = 1$ e $x = 2$, já que esses valores são as raízes da equação $x^2 - 3x + 2 = 0$. Logo, podemos tomar essa função f definida em $X = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ ou $X = (-1, 1)$, por exemplo; o valor do limite em $\bar{x} = 0$ não será afetado pela escolha que fizermos.

Observe que $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ e $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$. Portanto, se $x \notin \{1, 2\}$, então temos

$$f(x) = \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x - 1)} = \frac{x^2 + 2x + 4}{x - 1}.$$

Assim, temos

$$|f(x) - (-4)| = \left| \frac{x^2 + 2x + 4}{x - 1} + 4 \right| = \left| \frac{x^2 + 6x}{x - 1} \right| = \frac{|x + 6|}{|x - 1|} |x|.$$

Se $|x| < 1/2$, então $|x - 1| > 1/2$ e $|x + 6| < 13/2$ (por quê?). Logo,

$$|f(x) - (-4)| < \frac{13/2}{1/2} |x| = 13|x|.$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, fazendo $\delta := \min\{1/2, \varepsilon/13\}$ temos que se $|x| < \delta$, então $|f(x) - (-4)| < \varepsilon$, o que prova a afirmação, já que $\varepsilon > 0$ é arbitrário.

O Critério Sequencial para Limites

A seguir estabelecemos uma importante formulação para o limite de uma função em termos de limites de sequências. Com base nessa caracterização será possível aplicarmos a teoria vista nas Aulas 6–9 sobre limites de sequências para estudar limites de funções.

Teorema 12.4 (Critério Sequencial)
Seja $f : X \to \mathbb{R}$ e seja $\bar{x}$ um ponto de acumulação de X. Então as seguintes afirmações são equivalentes.

(i) $\lim\limits_{x\to\bar{x}} f = L$.

(ii) Para toda sequência (x_n) em X que converge a $\bar{x}$ tal que $x_n \neq \bar{x}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência $(f(x_n))$ converge a L.

Prova: (i)⇒(ii). Suponhamos que f tem limite L em $\bar{x}$ e que (x_n) é uma sequência em X com $\lim x_n = \bar{x}$, tal que $x_n \neq \bar{x}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que $\lim f(x_n) = L$. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Pela Definição 12.2 existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ satisfaz $0 < |x - \bar{x}| < \delta$, então $f(x)$ satisfaz $|f(x) - L| < \varepsilon$. Agora aplicamos a Definição 6.2 de sequência convergente com o δ dado fazendo o papel de ε naquela definição. Assim obtemos um número natural N_0 tal que se $n > N_0$, então $|x_n - \bar{x}| < \delta$. Mas então para um tal x_n temos $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Portanto, se $n > N_0$, então $|f(x_n) - L| < \varepsilon$, o que prova que a sequência $(f(x_n))$ converge a L.

(ii)⇒(i). Equivalentemente, vamos provar a contrapositiva ∼(i)⇒∼(ii). Se (i) não é verdade, então existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que qualquer que seja $\delta > 0$, sempre existirá ao menos um número $x_\delta \in X$ satisfazendo $0 < |x_\delta - \bar{x}| < \delta$ e $|f(x_\delta) - L| \geq \varepsilon_0$. Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $\delta := 1/n$ e obter $x_n \in X$ satisfazendo

$$0 < |x_n - \bar{x}| < \frac{1}{n},$$

tal que

$$|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0 \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Concluímos então que a sequência (x_n) em $X \setminus \{\bar{x}\}$ converge para $\bar{x}$, porém a sequência $(f(x_n))$ não converge para L. Assim, mostramos que se (i) não é verdade, então (ii) também não é verdade, o que equivale a provar que (ii) implica (i). $\square$

O resultado anterior pode ser usado para se obter limites de funções usando-se as propriedades conhecidas sobre limites de sequências. Assim, do fato de que se $x_n \to \bar{x}$, então $x_n^2 \to \bar{x}^2$, concluímos facilmente que $\lim_{x\to\bar{x}} x^2 = \bar{x}^2$, como mostramos no Exemplo 12.2 (c) usando a Definição 12.2. Da mesma forma, se $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\bar{x} \neq 0$, então $x_n \to \bar{x}$ implica $1/x_n \to 1/\bar{x}$, donde concluímos pelo resultado anterior que $\lim_{x\to\bar{x}} \frac{1}{x} = \frac{1}{\bar{x}}$, confirmando o que foi provado no Exemplo 12.2 (d) usando a Definição 12.2.

Na próxima aula veremos que diversas propriedades básicas do limite de funções podem ser facilmente estabelecidas usando-se as propriedades correspondentes do limite de sequências.

Com o uso do Teorema 12.4 é possível também estabelecer facilmente critérios de divergência, isto é, formas simples de verificar ou que um número dado L não é o limite de uma dada função num certo ponto, ou que a função dada *não possui um limite* no ponto em questão. Deixamos a você como importante exercício os detalhes da prova dos seguintes critérios de divergência.

Teorema 12.5 (Critérios de Divergência)
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X.

(a) Se $L \in \mathbb{R}$, então f *não* converge a L quando x tende a $\bar{x}$ se existe uma sequência (x_n) em X com $x_n \neq \bar{x}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que (x_n) converge a $\bar{x}$ mas a sequência $(f(x_n))$ *não* converge a L.

(b) A função f *não* possui um limite em $\bar{x}$ se existe uma sequência (x_n) em X com $x_n \neq \bar{x}$ tal que (x_n) converge a $\bar{x}$ mas a sequência $(f(x_n))$ *não* converge em $\mathbb{R}$.

A seguir damos algumas aplicações desse resultado que mostram como ele pode ser usado.

Exemplos 12.3

(a) Não existe $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$.

De fato, a sequência (x_n) definida por $x_n := 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ satisfaz $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = 0$. Agora, se $f(x) = 1/x$ para $x \in X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então $f(x_n) = n$. Como a sequência $(f(x_n)) = (n)$ não converge em $\mathbb{R}$, concluímos pelo Teorema 12.5 que $f(x) = 1/x$ não possui limite em $\bar{x} = 0$.

(b) Não existe $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$, onde $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função definida por (veja Figura **12.2**)

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ 1, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

O símbolo sgn é uma abreviatura para a palavra latina *signum* que quer dizer sinal e, por isso, lê-se a expressão $\operatorname{sgn}(x)$ como "sinal de x".

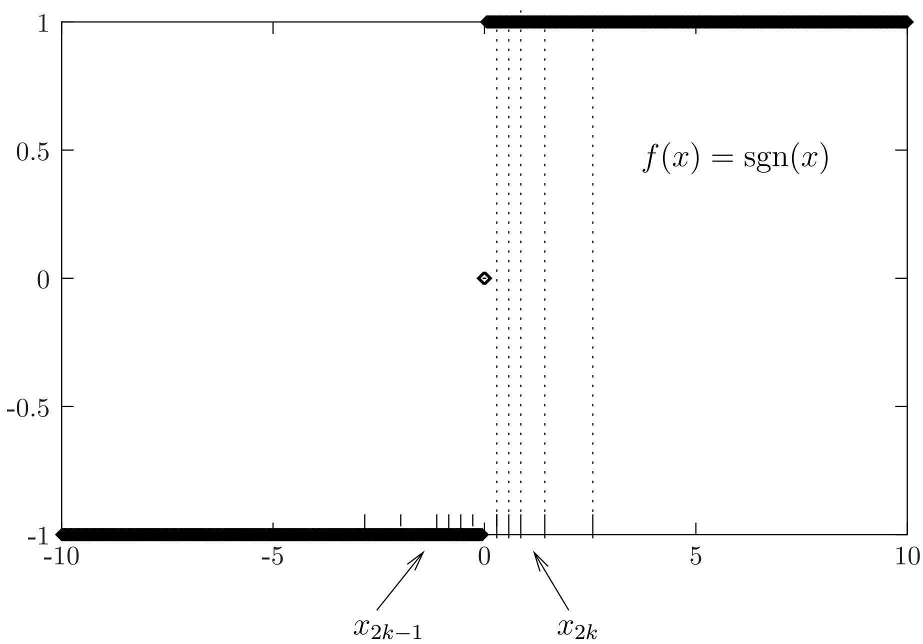


Figura 12.2: A função sinal.

De fato, seja (x_n) a sequência definida por $x_n := (-1)^n/n$ para $n \in \mathbb{N}$ de modo que $\lim x_n = 0$ e $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como

$$\operatorname{sgn}(x_n) = (-1)^n \qquad \text{para } n \in \mathbb{N},$$

segue que $(\operatorname{sgn}(x_n))$ não converge. Portanto, do Teorema 12.5, segue que não existe $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$.

(c) Não existe $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ (veja Figura **12.3**).

Aqui usaremos algumas propriedades bem conhecidas da função $\operatorname{sen} u$. A definição analítica rigorosa das funções trigonométricas e exponencial bem como o estudo de suas principais propriedades serão feitos em aula futura, quando tivermos de posse dos instrumentos teóricos necessários.

No entanto, a fim de dispor de aplicações interessantes, algumas vezes vamos fazer uso dessas funções e de suas principais propriedades apenas como exemplos, o que não afeta em nada o desenvolvimento lógico da teoria.

Provemos agora a afirmação. De fato, seja (x_n) a sequência definida por

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n\pi}, & \text{se } n \in \mathbb{N} \text{ é ímpar} \\ \frac{1}{\frac{1}{2}\pi + n\pi}, & \text{se } n \in \mathbb{N} \text{ é par} \end{cases}.$$

Seja $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \in X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Temos que $\lim x_n = 0$ e $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, $f(x_{2k-1}) = \operatorname{sen}(2k-1)\pi = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ao passo que $f(x_{2k}) = \operatorname{sen}(\frac{1}{2}\pi + 2k\pi) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, $(f(x_n))$ é a sequência $(0, 1, 0, 1, \dots)$, a qual sabemos que não converge. Logo, pelo Teorema 12.5, não existe $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen}(1/x)$.

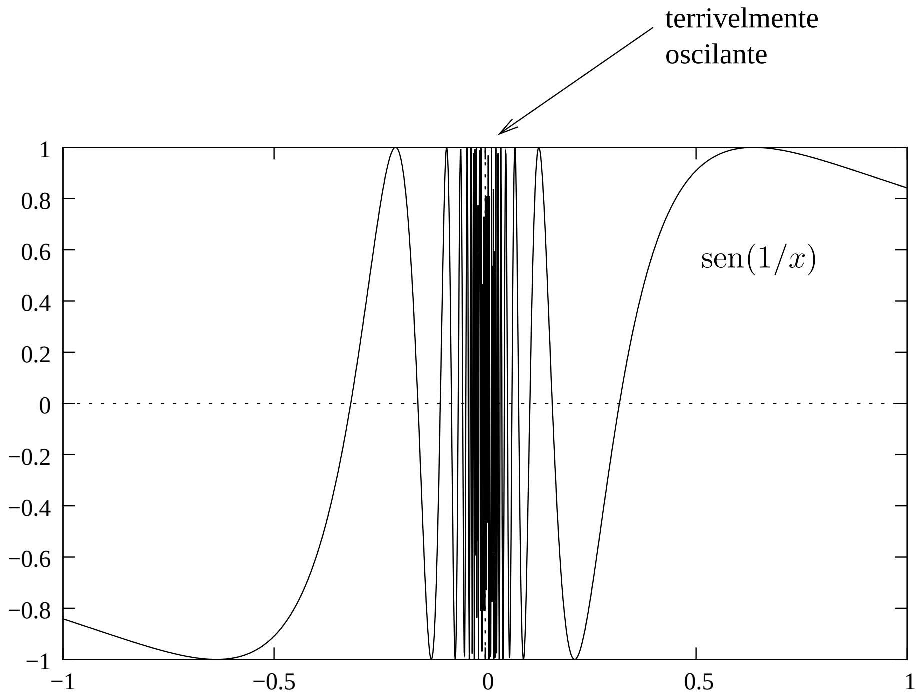


Figura 12.3: A função $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$.

Exercícios 12.1

1. Determine um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - \bar{x}| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$ para $\bar{x}, f, L$ e ε dados como segue:

   (a) $\bar{x} = 1$, $f(x) = x^2$, $L = 1$, $\varepsilon = 1/2$;

(b) $\bar{x} = 1$, $f(x) = x^2$, $L = 1$, $\varepsilon = 1/n$ para um $n \in \mathbb{N}$ dado;

(c) $\bar{x} = 2$, $f(x) = 1/x$, $L = 1/2$, $\varepsilon = 1/2$;

(d) $\bar{x} = 2$, $f(x) = 1/x$, $L = 1/2$, $\varepsilon = 1/n$ para um $n \in \mathbb{N}$ dado;

(e) $\bar{x} = 4$, $f(x) = \sqrt{x}$, $L = 2$, $\varepsilon = 1/2$;

(f) $\bar{x} = 4$, $f(x) = \sqrt{x}$, $L = 2$, $\varepsilon = 1/100$.

2. Seja $\bar{x}$ um ponto de acumulação de $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Prove que $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{x\to\bar{x}} |f(x) - L| = 0$.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Mostre que $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{x\to 0} f(x + \bar{x}) = L$.

4. Mostre que $\lim_{x\to\bar{x}} x^3 = \bar{x}^3$ para qualquer $\bar{x} \in \mathbb{R}$.

5. Mostre que $\lim_{x\to\bar{x}} \sqrt{x} = \sqrt{\bar{x}}$ para qualquer $\bar{x} > 0$.

6. Mostre que $\lim_{x\to 0} x^{1/p} = 0$ $(x > 0)$.

7. Sejam I um intervalo em $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in I$. Suponha que existem $K > 0$ e $L \in \mathbb{R}$ tais que $|f(x) - L| \le K|x - \bar{x}|$ para todo $x \in I$. Mostre que $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = L$.

8. Use a definição ε, δ ou o critério sequencial para estabelecer os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{1}{1-x} = -1$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x}{1+x} = \frac{1}{2}$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1} = \frac{2}{3}$;

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = 1$.

9. Mostre que os seguintes limites *não* existem:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ $\quad(x > 0)$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad(x > 0)$;

(c) $\lim_{x\to 0}(x + \operatorname{sgn}(x))$;

(d) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x^2)$.

Aula 13 – Teoremas de Limites de Funções

Metas da aula: Estabelecer as propriedades fundamentais dos limites de funções face às operações de soma, subtração, produto e quociente de funções, bem como em relação às desigualdades envolvendo funções.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber as propriedades dos limites de funções no que diz respeito às operações de soma, subtração, produto e quociente de funções, assim como em relação às desigualdades envolvendo funções, e suas aplicações no estabelecimento de limites de funções.

Introdução

Nesta aula vamos estabelecer as principais propriedades dos limites de funções relativas às operações e às desigualdades envolvendo funções. Os resultados aqui obtidos serão extremamente úteis no cálculo de limites de funções. Esses resultados são análogos aos teoremas de limites de sequências vistos na Aula 7. De fato, na maioria dos casos eles podem ser provados usando-se o Critério Sequencial (Teorema 12.4) juntamente com os resultados da Aula 7. Claramente, eles também podem ser provados por meio de argumentos do tipo ε, δ que são muito semelhantes aos utilizados na Aula 7.

Operações com Limites de Funções

Inicialmente vamos estabelecer um resultado sobre a limitação de funções na vizinhança de pontos nos quais elas possuam limites. Antes porém vamos introduzir a seguinte definição.

Definição 13.1
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $\bar{x}$ um ponto de acumulação de X. Dizemos que f é *limitada numa vizinhança de* $\bar{x}$ se existe uma δ-vizinhança $V_\delta(\bar{x})$ de $\bar{x}$ e uma constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in X \cap V_\delta(\bar{x})$.

Teorema 13.1
Se $X \subset \mathbb{R}$, $\bar{x}$ é ponto de acumulação de X e $f : X \to \mathbb{R}$ possui um limite em $\bar{x} \in \mathbb{R}$, então f é limitada em alguma vizinhança de $\bar{x}$.

Prova: Seja $L := \lim_{x\to\bar{x}} f$. Tomando $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x-\bar{x}| < \delta$, então $|f(x) - L| < 1$ e, portanto,

$$|f(x)| = |(f(x) - L) + L| \leq |f(x) - L| + |L| < |L| + 1.$$

Logo, se $x \in X \cap V_\delta(\bar{x})$ e $x \neq \bar{x}$, então $|f(x)| \leq |L|+1$. Façamos $M := |L|+1$, caso $\bar{x} \notin X$, ou então $M := \max\{|f(\bar{x})|, |L| + 1\}$, caso $\bar{x} \in X$. Segue que se $x \in X \cap V_\delta(\bar{x})$, então $|f(x)| \leq M$, o que mostra que f é limitada numa vizinhança de $\bar{x}$. □

Dadas duas funções $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definimos sua *soma* $f + g$, *diferença* $f - g$ e *produto* fg de modo natural pondo

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (f - g)(x) := f(x) - g(x),$$
$$(fg)(x) := f(x)g(x),$$

respectivamente, para todo $x \in X$. Se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, definimos o quociente f/g também de modo natural pondo

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Finalmente, se $c \in \mathbb{R}$, definimos a função cf de maneira óbvia pondo

$$(cf)(x) := cf(x) \qquad \text{para todo } x \in X.$$

A seguir estabelecemos o principal resultado sobre operações com limites de funções.

Teorema 13.2

Seja $X \subset \mathbb{R}$, sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X. Suponhamos que existam $L_f := \lim_{x\to\bar{x}} f$ e $L_g := \lim_{x\to\bar{x}} g$. Então existem

$$L_{f+g} := \lim_{x\to\bar{x}}(f + g), \qquad L_{f-g} := \lim_{x\to\bar{x}}(f - g),$$
$$L_{fg} := \lim_{x\to\bar{x}}(fg), \qquad L_{cf} := \lim_{x\to\bar{x}}(cf),$$

e valem as seguintes igualdades

$$L_{f+g} = L_f + L_g, \qquad L_{f-g} = L_f - L_g,$$
$$L_{fg} = L_f L_g, \qquad L_{cf} = cL_f.$$

Além disso, se $L_g \neq 0$ e $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, então existe

$$L_{\frac{f}{g}} := \lim_{x\to\bar{x}} \left(\frac{f}{g}\right)$$

e vale

$$L_{\frac{f}{g}} = \frac{L_f}{L_g}.$$

Prova: A prova desse teorema pode ser feita com argumentos do tipo ε, δ inteiramente análogos àqueles usados na prova do Teorema 7.2. De modo alternativo, podemos usar o Teorema 7.2 e o Teorema 12.4 (Critério Sequencial). De fato, seja (x_n) uma sequência qualquer em X com $x_n \neq \bar{x}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e tal que $x_n \to \bar{x}$. Segue do Teorema 12.4 que

$$\lim f(x_n) = L_f, \qquad \lim g(x_n) = L_g.$$

Assim, pelo Teorema 7.2 temos que

$$\begin{aligned}
\lim(f+g)(x_n) &= \lim(f(x_n)+g(x_n)) = L_f + L_g,\\
\lim(f-g)(x_n) &= \lim(f(x_n)-g(x_n)) = L_f - L_g,\\
\lim(fg)(x_n) &= \lim(f(x_n)g(x_n)) = L_f L_g,\\
\lim(cf)(x_n) &= \lim cf(x_n) = cL_f.
\end{aligned}$$

Do mesmo modo, se $L_g \neq 0$ e $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, temos pelo Teorema 7.2 que

$$\lim\left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{L_f}{L_g},$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Observação 13.1

(i) Observemos que a hipótese $L_g \neq 0$ é essencial para que valha a regra para o limite do quociente f/g no Teorema 13.2. Se essa hipótese não é satisfeita, o limite pode existir ou não. Porém, mesmo no caso em que ele existe, não podemos usar o Teorema 13.2 para calculá-lo.

(ii) Seja $X \subset \mathbb{R}$, sejam $f_1, f_2, \dots, f_n : X \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X. Se

$$L_k := \lim_{x\to\bar{x}} f_k \qquad \text{para } k = 1, 2, \dots, n,$$

então segue do Teorema 13.2 por Indução Matemática que

$$\lim_{x\to\bar{x}}(f_1 + f_2 + \cdots + f_n) = L_1 + L_2 + \cdots + L_n,$$

e

$$\lim_{x\to\bar{x}}(f_1 f_2 \cdots f_n) = L_1 L_2 \cdots L_n.$$

Em particular, deduzimos que se $L := \lim_{x\to\bar{x}} f$ e $n \in \mathbb{N}$, então

$$\lim_{x\to\bar{x}}(f(x))^n = L^n.$$

Exemplos 13.1

(a) $\lim\limits_{x\to\bar{x}} x^k = \bar{x}^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

De fato, como $\lim\limits_{x\to\bar{x}} x = \bar{x}$, então pela Observação 13.1 (ii) segue que $\lim\limits_{x\to\bar{x}} x^k = \bar{x}^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ como afirmado.

(b) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3)(2x^3-5) = -12$.

Segue do Teorema 13.2 que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(x^2+3)(2x^3-5) &= \left(\lim_{x\to 1}(x^2+3)\right)\left(\lim_{x\to 1}(2x^3-5)\right)\\ &= 4\cdot(-3) = -12.\end{aligned}$$

(c) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x^3-2}{x^2+3}\right) = 2$.

Como $\lim(x^3+3) = 7 \neq 0$, podemos aplicar o Teorema 13.2 obtendo

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^3-2}{x^2+3} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(2x^3-2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3)} = \frac{14}{7} = 2.$$

(d) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^3-8}{x^2-5x+6}\right) = -12$.

Observe que não é possível aplicar diretamente o Teorema 13.2 já que

$$\lim_{x\to 2}(x^2-5x+6) = \lim_{x\to 2} x^2 - 5\lim_{x\to 2} x + 6 = 4 - 5\cdot 2 + 6 = 0.$$

No entanto, para calcular o limite proposto basta considerar $x \in X := (1,3)$ com $x \neq 2$. Para $x \in X \setminus \{2\}$, temos que $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3) \neq 0$ e, como $x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4)$, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-8}{x^2-5x+6}\right) &= \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x-3}\\ &\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+4)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)} = \frac{12}{-1} = -12.\end{aligned}$$

(e) Se p é uma função polinomial, então $\lim\limits_{x\to\bar{x}} p(x) = p(\bar{x})$.

Seja p uma função polinomial em $\mathbb{R}$ de modo que $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Segue do Teorema 13.2 e do fato que $\lim\limits_{x\to\bar{x}} x^k = \bar{x}^k$ que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\bar{x}} p(x) &= \lim_{x\to\bar{x}}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0)\\ &= a_n \lim_{x\to\bar{x}} x^n + a_{n-1}\lim_{x\to\bar{x}} x^{n-1} + \cdots + a_1 \lim_{x\to\bar{x}} x + \lim_{x\to\bar{x}} a_0\\ &= a_n\bar{x}^n + a_{n-1}\bar{x}^{n-1} + \cdots + a_1\bar{x} + a_0\\ &= p(\bar{x}).\end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{x\to\bar{x}} p(x) = p(\bar{x})$ para qualquer função polinomial p.

(f) Se p e q são funções polinomiais em $\mathbb{R}$ e se $q(\bar{x}) \neq 0$, então

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(\bar{x})}{q(\bar{x})}.$$

Como q é uma função polinomial, segue de um teorema bastante conhecido em Álgebra que existem no máximo um número finito de valores $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ tais que $q(\alpha_j) = 0$ e tais que $q(x) \neq 0$ se $x \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. Portanto, se $x \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, podemos definir

$$r(x) := \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Pelo item (e) temos que $\lim\limits_{x\to\bar{x}} q(x) = q(\bar{x}) \neq 0$. Logo, podemos aplicar o Teorema 13.2 para concluir que

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to\bar{x}} p(x)}{\lim\limits_{x\to\bar{x}} q(x)} = \frac{p(\bar{x})}{q(\bar{x})},$$

como afirmado.

Desigualdades e Limites de Funções

O próximo resultado é o análogo do Teorema 7.5.

Teorema 13.3
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X. Se

$$a \leq f(x) \leq b \qquad \text{para todo } x \in X,\ x \neq \bar{x},$$

e se $\lim\limits_{x\to\bar{x}} f$ existe, então $a \leq \lim\limits_{x\to\bar{x}} f \leq b$.

Prova: De fato, se $L := \lim\limits_{x\to\bar{x}} f$, então segue do Teorema 12.4 que se (x_n) é qualquer sequência em $\mathbb{R}$ tal que $x_n \neq \bar{x}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e se $x_n \to \bar{x}$, então a sequência $(f(x_n))$ converge a L. Como $a \leq f(x_n) \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue do Teorema 7.5 que $a \leq L \leq b$. $\square$

A seguir estabelecemos o análogo do Teorema do Sanduíche 7.6. A prova é uma aplicação imediata do Teorema 12.4 combinado com o Teorema 7.6. Deixamos os detalhes da prova para você como exercício.

Teorema 13.4
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X. Se

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad \text{para todo } x \in X,\ x \neq \bar{x},$$

e se $\lim\limits_{x\to\bar{x}} f = \lim\limits_{x\to\bar{x}} h =: L$, então $\lim\limits_{x\to\bar{x}} g = L$.

O próximo resultado é às vezes chamado de Princípio da Preservação do Sinal pois ele afirma que se o limite de uma função num certo ponto é positivo (negativo), então a função é positiva (negativa) em toda uma vizinhança do ponto com exceção possivelmente do seu valor no próprio ponto.

Teorema 13.5
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X. Se

$$\lim_{x\to\bar{x}} f > 0 \qquad (\text{respectivamente, } \lim_{x\to\bar{x}} f < 0),$$

então existe uma vizinhança $V_\delta(\bar{x})$ de $\bar{x}$ tal que $f(x) > 0$ (respectivamente, $f(x) < 0$) para todo $x \in X \cap V_\delta(\bar{x})$, $x \neq \bar{x}$.

Prova: Seja $L := \lim\limits_{x\to\bar{x}} f$ e suponhamos que $L > 0$. Tomemos $\varepsilon = \frac{1}{2}L$ na Definição 12.2 para obter $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - \bar{x}| < \delta$ e $x \in X$, então $|f(x) - L| < \frac{1}{2}L$. Segue daí que $f(x) > \frac{1}{2}L > 0$ (por quê?) se $x \in X \cap V_\delta(\bar{x})$ e $x \neq \bar{x}$.

Argumento inteiramente semelhante se aplica no caso em que $L < 0$.□

Exemplos 13.2

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{5/4}}{x^{3/2} + x^{1/2} + 1} = 0$ $(x > 0)$.

Se $0 < x \leq 1$, então $1 < x^{3/2} + x^{1/2} + 1 \leq 3$ e $x^2 \leq x^{5/4} \leq x$ (por quê?). Portanto, temos

$$\frac{1}{3}x^2 \leq \frac{x^{5/4}}{x^{3/2} + x^{1/2} + 1} \leq x.$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$, a afirmação segue do Teorema 13.4.

(b) $\lim\limits_{x\to 0}(x \operatorname{sen}(1/x)) = 0$.

Seja $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$. Como $-1 \leq \operatorname{sen} u \leq 1$ para todo $u \in \mathbb{R}$, temos a desigualdade $|f(x)| \leq |x|$, ou seja,

$$-|x| \leq f(x) = x \operatorname{sen}(1/x) \leq |x|$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Como $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$, segue do Teorema 13.4 que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Veja o gráfico de f na Figura **13.1**.

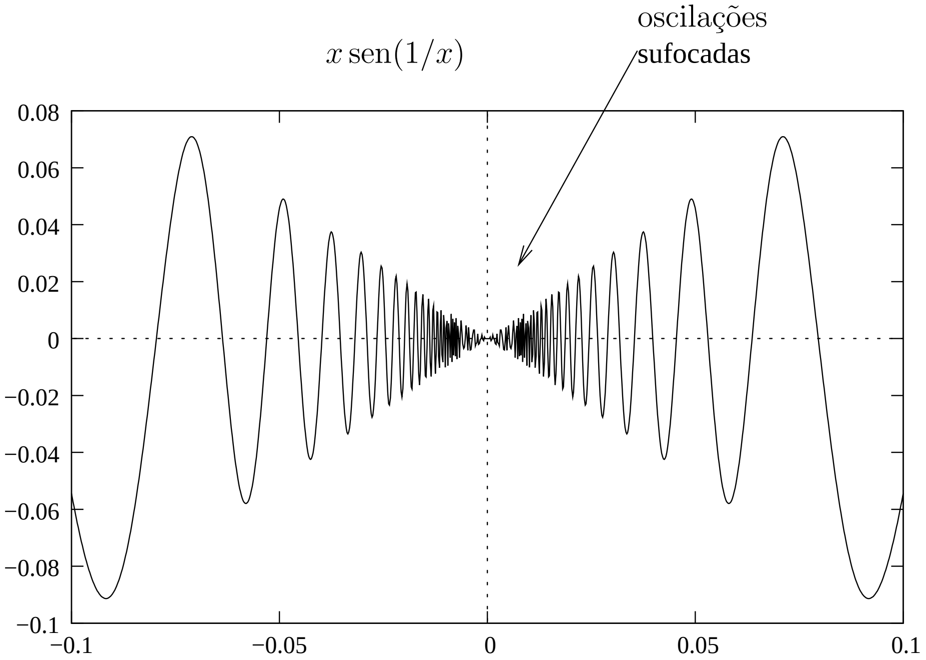


Figura 13.1: A função $f(x) = x\,\mathrm{sen}(1/x)$.

Exercícios 13.1

1. Aplique o Teorema 13.2 para determinar os seguintes limites:

   (a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2)(4x^3-3)$ $(x \in \mathbb{R})$;

   (b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2}{x^2-1}$ $(x > 1)$;

   (c) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{1}{2x-3} - \dfrac{1}{x-4}\right)$ $(x > 4)$;

   (d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-5}{x^2+3}$ $(x \in \mathbb{R})$.

2. Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X.

   (a) Se $\lim\limits_{x\to\bar{x}} f$ existe e se $|f|$ é a função definida em X por $|f|(x) := |f(x)|$, prove que
   $$\lim_{x\to\bar{x}} |f| = |\lim_{x\to\bar{x}} f|.$$

   (b) Se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in X$, se $\lim\limits_{x\to\bar{x}} f$ existe e se $\sqrt{f}$ é a função definida em X por $\sqrt{f}(x) := \sqrt{f(x)}$, prove que
   $$\lim_{x\to\bar{x}} \sqrt{f} = \sqrt{\lim_{x\to\bar{x}} f}.$$

3. Determine os seguintes limites e diga que teoremas são usados em cada caso. (Você pode usar também o exercício anterior.)

   (a) $\lim_{x\to 3} \sqrt{\dfrac{5x+1}{2x+3}}$ $(x > 0)$;

   (b) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$ $(2 < x < 3)$;

   (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(x+2)^2-(x-2)^2}{x}$ $(x > 0)$;

   (d) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ $(0 < x < 2)$.

4. Encontre $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2+x}}{x+3x^2}$ onde $x > 0$.

5. Prove que $\lim_{x\to 0} \cos(1/x)$ não existe mas que $\lim_{x\to 0} x\cos(1/x) = 0$.

6. Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X. Suponhamos que f é limitada numa vizinhança de $\bar{x}$ e que $\lim_{x\to\bar{x}} g = 0$. Prove que $\lim_{x\to\bar{x}} fg = 0$.

7. Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X.

   (a) Mostre que se ambos $\lim_{x\to\bar{x}} f$ e $\lim_{x\to\bar{x}} (f+g)$ existem, então $\lim_{x\to\bar{x}} g$ existe.

   (b) Se $\lim_{x\to\bar{x}} f$ e $\lim_{x\to\bar{x}} fg$ existem, segue que $\lim_{x\to\bar{x}} g$ existe?

8. Determine se os seguintes limites existem em $\mathbb{R}$.

   (a) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x^2)$ $(x \neq 0)$;

   (b) $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}(1/x^2)$ $(x \neq 0)$;

   (c) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} \operatorname{sen}(1/x)$ $(x \neq 0)$;

   (d) $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} \operatorname{sen}(1/x^2)$ $(x > 0)$.

Aula 14 – Funções Contínuas

Metas da aula: Introduzir o fundamental conceito de função contínua. Apresentar os critérios básicos para o estabelecimento da continuidade e da descontinuidade de funções.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber o significado do conceito de função contínua e seu uso na verificação da continuidade de funções.
- Conhecer os critérios básicos de continuidade e descontinuidade e suas aplicações para a verificação dessas propriedades.

Introdução

Nesta aula vamos definir o que significa uma função ser contínua num ponto ou sobre um conjunto. Essa noção é um dos conceitos centrais da análise matemática e será usada em quase todo o material seguinte deste curso. Será, portanto, decisivo que você domine esse conceito.

Funções Contínuas

Comecemos com a definição de continuidade de uma função num ponto de seu domínio.

Definição 14.1
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, e $\bar{x} \in X$. Dizemos que f é *contínua em* $\bar{x}$ se, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ satisfaz $|x - \bar{x}| < \delta$, então $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$.

Se f não é contínua em $\bar{x}$, dizemos que f é *descontínua em* $\bar{x}$.

Como no caso da definição de limite, a definição de continuidade num ponto também pode ser formulada de modo muito interessante em termos de vizinhanças. Isso é feito no próximo resultado, cuja verificação bastante simples deixamos como um importante exercício para você. Veja Figura **14.1**.

Teorema 14.1
Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua num ponto $\bar{x} \in X$ se, e somente se, dada qualquer ε-vizinhança $V_\varepsilon(f(\bar{x}))$ de $f(\bar{x})$ existe uma δ-vizinhança $V_\delta(\bar{x})$

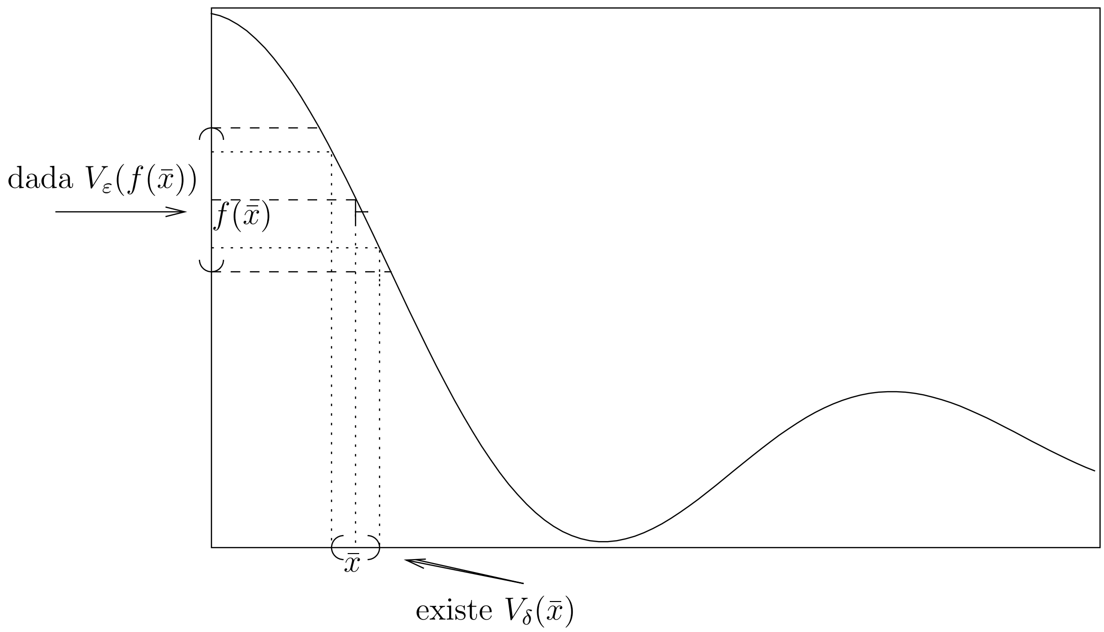


Figura 14.1: A função f é contínua em $\bar{x}$.

de $\bar{x}$ tal que se x é um ponto qualquer em $X \cap V_\delta(\bar{x})$, então $f(x)$ pertence a $V_\varepsilon(f(\bar{x}))$, isto é,

$$f(X \cap V_\delta(\bar{x})) \subset V_\varepsilon(f(\bar{x})).$$

Observação 14.1

(i) Se $\bar{x} \in X$ é um ponto de acumulação de X, então uma comparação da Definição 12.2 com a Definição 14.1 mostra que f é contínua se, e somente se,

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = f(\bar{x}). \tag{14.1}$$

Logo, se $\bar{x}$ é um ponto de acumulação de X, então três condições devem valer para f ser contínua em $\bar{x}$:

(i.1) f deve estar definida em $\bar{x}$ (de modo que $f(\bar{x})$ faça sentido),

(i.2) o limite de f em $\bar{x}$ deve existir (de modo que $\lim_{x\to\bar{x}} f(x)$ faça sentido), e

(i.3) a equação (14.1) deve ser válida.

(ii) Se $x \in X$ não é um ponto de acumulação de X, então existe uma vinhança $V_\delta(\bar{x})$ de $\bar{x}$ tal que $X \cap V_\delta(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$. Assim, concluímos que a função f é automaticamente contínua num ponto $\bar{x} \in X$ que não é ponto de acumulação de X. Tais pontos são frequentemente chamados "pontos isolados". Eles são de pouco interesse para nós já que não têm relação com qualquer processo limite. Como a continuidade é automática para tais pontos, em geral verificamos a continuidade apenas em pontos de acumulação. Por isso encaramos a condição (14.1) como sendo característica para a continuidade em $\bar{x}$.

Uma leve adaptação na prova do Teorema 12.4 para limites nos leva à seguinte versão sequencial para a continuidade num ponto.

Teorema 14.2 (Critério Sequencial para Continuidade)
Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua num ponto $\bar{x} \in X$ se, e somente se, para toda sequência (x_n) em X que converge a $\bar{x}$, a sequência $(f(x_n))$ converge para $f(\bar{x})$.

O seguinte Critério de Descontinuidade é uma consequência imediata do teorema anterior. Você deve prover sua demonstração detalhada.

Teorema 14.3 (Critério de Descontinuidade)
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in X$. Então f é descontínua em $\bar{x}$ se, e somente se, existe uma sequência (x_n) em X tal que (x_n) converge para $\bar{x}$, mas a sequência $(f(x_n))$ não converge para $f(\bar{x})$.

A seguinte definição estende de forma natural a noção de continuidade num ponto para a de continuidade num subconjunto qualquer de $\mathbb{R}$.

Definição 14.2
Seja $X \subset \mathbb{R}$ e seja $f : X \to \mathbb{R}$. Se Y é um subconjunto de X, dizemos que f é *contínua no conjunto* Y se f é contínua em todo ponto de Y.

Exemplos 14.1

(a) Dado $c \in \mathbb{R}$, a função constante $f(x) := c$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Vimos no Exemplo 12.2 (a) que se $\bar{x} \in \mathbb{R}$, então $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = c$. Como $f(\bar{x}) = c$, temos que $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$, e portanto f é contínua em todo $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Logo, f é contínua em $\mathbb{R}$.

(b) A função $f(x) := x$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Vimos no Exemplo 12.2 (b) que se $\bar{x} \in \mathbb{R}$, então $\lim_{x\to\bar{x}} f = \bar{x}$. Como $f(\bar{x}) = \bar{x}$, segue que f é contínua para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Logo, f é contínua em $\mathbb{R}$.

(c) A função $f(x) := x^2$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Vimos no Exemplo 12.2 (c) que se $\bar{x} \in \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{x\to\bar{x}} f = \bar{x}^2$. Como $f(\bar{x}) = \bar{x}^2$, segue que f é contínua em todo ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Logo, f é contínua em $\mathbb{R}$.

(d) A função $f(x) := 1/x$ é contínua em $X := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

Vimos no Exemplo 12.2 (d) que se $\bar{x} \in X$, então $\lim\limits_{x\to\bar{x}} f = 1/\bar{x}$. Como $f(\bar{x}) = 1/\bar{x}$, temos que f é contínua em todo ponto $\bar{x} \in X$. Logo, f é contínua em X.

(e) Dado qualquer $c \in \mathbb{R}$ a função $f : X := [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) := \begin{cases} c, & \text{se } x = 0, \\ 1/x, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

é descontínua em $x = 0$.

De fato, a sequência $(1/n)$ converge para 0, mas $f(1/n) = n$ não converge em $\mathbb{R}$. Pelo Teorema 14.3 concluímos que f é descontínua em $x = 0$.

(f) A função $f(x) := \operatorname{sgn}(x)$ é descontínua em $x = 0$. Veja Figura **12.2**.

Vimos no Exemplo 12.3 (b) que se $x_n = (-1)^n/n$ então $x_n \to 0$ mas a sequência $(f(x_n))$ não converge. Então, pelo Teorema 14.3 concluímos que f é descontínua em $x = 0$.

Será um bom exercício para você mostrar que $\operatorname{sgn}(x)$ é contínua em todo ponto $\bar{x} \neq 0$.

(g) Seja $X := \mathbb{R}$ e seja f a "função descontínua" de Dirichlet definida por

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é racional}, \\ 0 & \text{se } x \text{ é irracional}. \end{cases}$$

Afirmamos que f é descontínua em todo ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Essa função foi introduzida por P. G. L. Dirichlet (1805–1859), um grande matemático do século XIX.

De fato, seja $\bar{x}$ um número racional. Pelo Teorema da Densidade 4.5, existe um número irracional ξ_n satisfazendo $\bar{x} < \xi_n < \bar{x} + 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, a sequência (ξ_n) converge a $\bar{x}$ e $\xi_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $f(\xi_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\lim f(\xi_n) = 0$, enquanto $f(\bar{x}) = 1$. Portanto, f não é contínua em $\bar{x}$ se $\bar{x}$ é um número racional.

Por outro lado, se $\bar{x}$ é um número irracional, pelo Teorema da Densidade 4.5, similarmente, podemos obter uma sequência (r_n) tal que $r_n \in \mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $r_n \to \bar{x}$. Como $f(r_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $\lim f(r_n) = 1$, enquanto $f(\bar{x}) = 0$. Portanto, f não é contínua em $\bar{x}$ se $\bar{x}$ é um número irracional.

Como todo número real ou é racional ou é irracional, concluímos que f é descontínua em todo ponto em $\mathbb{R}$.

(h) Seja $X := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Para todo número irracional $x > 0$ definimos $f(x) = 0$. Dado um número racional em X, podemos escrevê-lo na forma p/q, com $p, q \in \mathbb{N}$ primos entre si (i.e., sem divisores comuns exceto 1), e então definimos $f(p/q) = 1/q$. Afirmamos que f é contínua em todo número irracional em X, e descontínua em todo número racional em X. Essa função foi introduzida em 1875 por K. J. Thomae.

De fato, se $\bar{x} > 0$ é racional, tomemos uma sequência (x_n) de números irracionais em X que converge para $\bar{x}$. Então $\lim f(x_n) = 0$, mas $f(\bar{x}) > 0$. Logo, f é descontínua em $\bar{x}$.

Por outro lado, se $\bar{x}$ é um número irracional e $\varepsilon > 0$, então (pela Propriedade Arquimediana) existe um número natural N_0 tal que $1/N_0 < \varepsilon$. Note também que existe apenas um número finito de racionais com denominador menor que N_0 no intervalo $(\bar{x}-1, \bar{x}+1)$, já que para cada $q \in \{1, \dots, N_0 - 1\}$ existem no máximo $2q$ racionais com denominador igual a q nesse intervalo (por quê?). Portanto, podemos escolher $\delta > 0$ pequeno o bastante de modo que a vizinhança $(\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta)$ não contenha nenhum racional com denominador menor que N_0. Segue então que para $|x - \bar{x}| < \delta$, com $x \in X$, temos $|f(x) - f(\bar{x})| = |f(x)| \leq 1/N_0 < \varepsilon$. Portanto, f é contínua no número irracional $\bar{x}$.

Consequentemente, deduzimos que a função de Thomae f é contínua exatamente nos pontos irracionais de X.

(i) Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $\bar{x}$ um ponto de acumulação de X tal que $\bar{x} \notin X$. Se f tem um limite L no ponto $\bar{x}$ e se definimos $\bar{f} : X \cup \{\bar{x}\} \to \mathbb{R}$ por

$$\bar{f} := \begin{cases} L & \text{para } x = \bar{x}, \\ f(x) & \text{para } x \in X, \end{cases}$$

então $\bar{f}$ é contínua em $\bar{x}$.

De fato, precisamos apenas verificar que $\lim_{x \to \bar{x}} \bar{f} = L$ mas isso é imediato já que $\lim_{x \to \bar{x}} f = L$.

Por exemplo, se $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$, $\bar{f}(x) = f(x)$ para $x \neq 0$ e $\bar{f}(0) = 0$, então $\bar{f}$ é contínua em $\mathbb{R}$. Veja Figura **13.1**.

(j) Se a função $f : X \to \mathbb{R}$ não possui limite em $\bar{x}$, então não existe nenhuma forma de obter uma função $\bar{f} : X \cup \{\bar{x}\} \to \mathbb{R}$ contínua em $\bar{x}$ definindo

$$\bar{f} := \begin{cases} c & \text{para } x = \bar{x}, \\ f(x) & \text{para } x \in X, \end{cases}$$

qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$.

De fato, se $\lim_{x \to \bar{x}} \bar{f}$ existisse, então também existiria $\lim_{x \to \bar{x}} f$ e valeria a igualdade $\lim_{x \to \bar{x}} \bar{f} = \lim_{x \to \bar{x}} f$.

Por exemplo, a função $f(x) := \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$ (veja Figura **12.3**) não possui limite em $x = 0$. Assim, não há nenhum valor que possamos atribuir à ela em $x = 0$ de modo a obter uma extensão de f contínua em $x = 0$.

Exercícios 14.1

1. Prove o Teorema 14.2 (Critério Sequencial).

2. Prove o Teorema 14.3 (Critério de Descontinuidade).

3. Seja $a < b < c$. Suponhamos que f é contínua em $[a, b]$, que g é contínua em $[b, c]$ e que $f(b) = g(b)$. Defina h sobre $[a, c]$ pondo $h(x) := f(x)$ para $x \in [a, b]$ e $h(x) := g(x)$ para $x \in [b, c]$. Prove que h é contínua em $[a, c]$.

4. Se $x \in \mathbb{R}$, definimos $[\![x]\!]$ como o maior inteiro $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m \leq x$. Por exemplo, $[\![5.7]\!] = 5$, $[\![\pi]\!] = 3$, $[\![-\pi]\!] = -4$. A função $x \mapsto [\![x]\!]$ é chamada a *função parte inteira*. Determine os pontos de continuidade das seguintes funções:

   (a) $f(x) := [\![x]\!]$,

   (b) $f(x) := x + [\![x]\!]$,

   (c) $f(x) := \operatorname{sen}([\![x]\!])$,

   (d) $f(x) := [\![1/x]\!]$ $(x \neq 0)$.

5. Seja $f(x) = (x^2 - 2x - 3)/(x - 3)$ para $x \neq 3$. É possível definir f em $x = 3$ de modo que f seja contínua nesse ponto?

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $\bar{x}$ e $f(\bar{x}) > 0$. Mostre que existe uma vizinhança $V_\delta(\bar{x})$ de $\bar{x}$ tal que se $x \in V_\delta(\bar{x})$, então $f(x) > 0$.

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $\mathbb{R}$ e seja $Z = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ o "conjunto zero" de f. Se (x_n) é uma sequência tal que $x_n \in Z$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\bar{x} = \lim x_n$, mostre que $\bar{x} \in Z$.

8. Sejam $X \subset Y \subset \mathbb{R}$, $f : Y \to \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$ a restrição de f a X, i.e., $g := f|X$.

   (a) Se f é contínua em $\bar{x} \in X$, mostre que g é contínua em $\bar{x}$.

   (b) Dê um exemplo em que a restrição g é contínua num ponto $\bar{x}$, mas sua extensão f não é contínua em $\bar{x}$.

9. Seja $K > 0$ e suponhamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que f é contínua em todo ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}$.

10. Suponhamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $\mathbb{R}$ e que $f(r) = 0$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Prove que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

11. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas em $\mathbb{R}$, e seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) := f(x)$ para $x \in \mathbb{Q}$ e $h(x) := g(x)$ para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Prove que h é contínua em $\bar{x}$ se, e somente se, $f(\bar{x}) = g(\bar{x})$.

Aula 15 – Combinações de Funções Contínuas

Metas da aula: Estabelecer os principais fatos sobre operações com funções contínuas bem como sobre composição dessas funções.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Conhecer os resultados sobre operações com funções contínuas e sobre composição dessas funções, bem como suas aplicações no estabelecimento da continuidade de funções.

Introdução

Nesta aula vamos estabelecer os principais resultados sobre operações com funções contínuas assim como sobre a composição dessas funções.

Operações com Funções Contínuas

Seja $X \subset \mathbb{R}$, sejam f e g funções de X em $\mathbb{R}$ e seja $c \in \mathbb{R}$. Vamos iniciar esta aula estabelecendo a preservação da continuidade pelas operações de soma $f+g$, diferença $f-g$, produto fg, multiplicação por constante cf, e, quando $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, do quociente f/g. Subsequentemente, vamos analisar a questão sobre a continuidade da composição de funções contínuas.

Teorema 15.1
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Suponhamos que f e g são contínuas em $\bar{x} \in X$.

(i) Então $f+g$, $f-g$, fg e cf são contínuas em $\bar{x}$.

(ii) Se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, então o quociente f/g é contínua em $\bar{x}$.

Prova: Se $\bar{x}$ não é um ponto de acumulação de X, então a conclusão é automática. Portanto, vamos assumir que $\bar{x}$ é um ponto de acumulação de X.

(i) Como f e g são contínuas em $\bar{x}$, então

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = f(\bar{x}), \qquad \lim_{x\to\bar{x}} g(x) = g(\bar{x}).$$

Logo, segue do Teorema 13.2 que

$$\lim_{x \to \bar{x}} (f+g) = \lim_{x \to \bar{x}} f + \lim_{x \to \bar{x}} g = f(\bar{x}) + g(\bar{x}).$$

Portanto, $f+g$ é contínua em $\bar{x}$. De forma inteiramente semelhante, provamos que $f-g$, fg e cf são contínuas em $\bar{x}$.

(ii) Do mesmo modo, se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, o Teorema 13.2 implica que

$$\lim_{x \to \bar{x}} \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\lim_{x \to \bar{x}} f}{\lim_{x \to \bar{x}} g} = \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} = \left(\frac{f}{g}\right)(\bar{x}).$$

Portanto, f/g é contínua em $\bar{x}$. $\square$

O próximo resultado é uma consequência imediata do Teorema 15.1, aplicado a todo ponto de X.

Teorema 15.2

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções contínuas em X, e $c \in \mathbb{R}$.

(i) As funções $f+g$, $f-g$, fg e cf são contínuas em X.

(ii) Se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, então a função quociente f/g é contínua em X.

Observação 15.1

Para definir funções quocientes, às vezes é mais conveniente proceder do seguinte modo. Se $g : X \to \mathbb{R}$, seja $X_* := \{x \in X \, : \, g(x) \neq 0\}$. Podemos definir o quociente f/g no conjunto X_* por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{para } x \in X_*. \tag{15.1}$$

Se g é contínua num ponto $\bar{x} \in X_*$, claramente a restrição g_* de g a X_* também é contínua em $\bar{x}$. Portanto, segue do Teorema 15.1 aplicado a g_* que f/g_* é contínua em $\bar{x}$. Como $(f/g)(x) = (f/g_*)(x)$ para $x \in X_*$ segue que f/g é contínua em $\bar{x} \in X_*$. Similarmente, se f e g são contínuas em X, então a função f/g, definida em X_* por (15.1), é contínua em X_*.

Exemplos 15.1

(a) Se p é uma função polinomial, de modo que $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então segue do Exemplo 13.1 (e) que $\lim_{x \to \bar{x}} p(x) = p(\bar{x})$ para todo $\bar{x} \in X$. Portanto, uma função polinomial é contínua em $\mathbb{R}$.

(b) Se p e q são funções polinomiais em $\mathbb{R}$, então existe no máximo um número finito de raízes de q, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Se $x \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, então $q(x) \notin 0$ de modo que podemos definir a função racional r por

$$r(x) := \frac{p(x)}{q(x)} \qquad \text{para } x \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}.$$

Vimos no Exemplo 13.1 (f) que se $q(\bar{x}) \neq 0$, então

$$\lim_{x\to\bar{x}} r(x) = \lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} = r(\bar{x}).$$

Portanto, r é contínua em $\bar{x}$. Assim, concluímos que uma função racional é contínua em todo número real para o qual ela está definida.

(c) Consideremos a série $\mathbf{s}(x) := \sum a_n x^n$ para $x \in \mathbb{R}$. Segue do Teste da Raiz 11.4 que $\mathbf{s}$ converge se

$$|x| \lim |a_n|^{1/n} < 1.$$

Suponhamos que existe $\alpha := \lim |a_n|^{1/n}$ em $\mathbb{R}$. Façamos

$$R := \frac{1}{\alpha} \quad \text{se } \alpha \neq 0 \text{ e } R := +\infty \text{ se } \alpha = 0.$$

O número R assim definido é chamado o *raio de convergência de* $\mathbf{s}(x)$. Defina $s(x) := \sum a_n x^n$ para todo $x \in X := (-R, R) \subset \mathbb{R}$. Então a função $s(x)$ é contínua em todo $\bar{x} \in X$.

De fato, seja dado $\varepsilon > 0$. Tomemos $\delta_1 > 0$ e $r > 0$ tais que $-R < -r < \bar{x} - \delta_1 < \bar{x} < \bar{x} + \delta_1 < r < R$. Como $\sum a_n r^n$ converge, podemos obter $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n r^n < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Assim temos

$$\left| \sum_{n=N+1} a_n \bar{x}^n \right| + \left| \sum_{n=N+1} a_n x^n \right| \leq 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n r^n < \frac{2\varepsilon}{3}$$

para todo $x \in X$ tal que $|x - \bar{x}| < \delta_1$. Agora $p(x) := \sum_{n=1}^{N} a_n x^n$ é uma função polinomial e, portanto, pelo item (a) é contínua em todo $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Logo, existe δ_2 tal que se $|x - \bar{x}| < \delta_2$, então

$$|p(x) - p(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tomemos $\delta := \min\{\delta_1,\, \delta_2\}$. Então se $|x - \bar{x}| < \delta$, temos

$$|s(x) - s(\bar{x})| \leq |p(x) - p(\bar{x})| + \left| \sum_{n=N+1} a_n \bar{x}^n \right| + \left| \sum_{n=N+1} a_n x^n \right|$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $s(x)$ é contínua em $\bar{x}$ para todo $\bar{x} \in X$.

(d) Consideremos as séries $\mathbf{s}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ e $\mathbf{c}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$. Façamos $a_k := \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$ e $b_k := \frac{(-1)^k}{(2k)!}$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$. É fácil ver que

$$\lim \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = 0 \quad \text{e} \quad \lim \frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = 0.$$

Assim, deduzimos pelo Exemplo 11.2 (c) que

$$\lim |a_k|^{1/k} = 0 \quad \text{e} \quad \lim |b_k|^{1/k} = 0.$$

Portanto, ambas as séries $\mathbf{s}(x)$ e $\mathbf{c}(x)$ possuem raio de convergência igual a $+\infty$. Portanto, podemos definir as funções

$$s(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad \text{e} \quad c(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Vamos ver em aula futura que, de fato, temos

$$s(x) = \operatorname{sen}(x) \quad \text{e} \quad c(x) = \cos(x) \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Do item anterior segue então que $\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x)$ são funções contínuas em $\mathbb{R}$.

(e) É possível provar analiticamente que vale a clássica interpretação geométrica para $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$. (Veja Figura **15.1**.) Dessa interpretação geométrica vemos facilmente que valem

$$|\operatorname{sen} x| \leq |x| \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Da segunda relação, segue imediatamente que $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ e $|\cos x| \leq 1$. Além disso, valem as fórmulas

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right),$$
$$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Portanto, se $\bar{x} \in \mathbb{R}$, então temos

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \bar{x}| \leq 2 \cdot \frac{1}{2}|x - \bar{x}| \cdot 1 = |x - \bar{x}|.$$

Isto nos dá uma outra maneira de mostrar a continuidade de $\operatorname{sen} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Da mesma forma,

$$|\cos x - \cos \bar{x}| \leq 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}|x - \bar{x}| = |x - \bar{x}|,$$

o que também nos dá uma outra prova da continuidade de $\cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

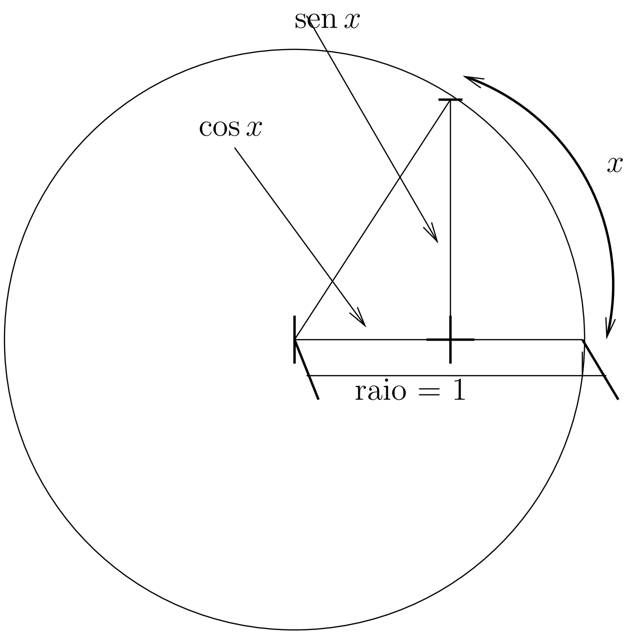


Figura 15.1: A interpretação geométrica de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

Composição de Funções Contínuas

Vamos agora mostrar que se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua num ponto $\bar{x}$ e se $g : Y \to \mathbb{R}$ é contínua em $\bar{y} := f(\bar{x})$, então a composta $g \circ f$ é contínua em $\bar{x}$. Para que tenhamos $g \circ f$ definida em todo X, é preciso também que $f(X) \subset Y$.

Teorema 15.3
Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$ e sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ funções tais que $f(X) \subset Y$. Se f é contínua num ponto $\bar{x} \in X$ e g é contínua em $\bar{y} := f(\bar{x}) \in Y$, então a função composta $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em $\bar{x}$.

Prova: Seja W uma ε-vizinhança de $g(\bar{y})$. Como g é contínua em $\bar{y}$, existe uma δ'-vizinhança V de $\bar{y} = f(\bar{x})$ tal que se $y \in V \cap Y$, então $g(y) \in W$. Como f é contínua em $\bar{x}$, existe uma δ-vizinhança U de $\bar{x}$ tal que se $x \in U \cap X$, então $f(x) \in V$ (Veja Figura **15.2**). Como $f(X) \subset Y$, segue que se $x \in U \cap X$, então $f(x) \in V \cap Y$ de modo que $g \circ f(x) = g(f(x)) \in W$. Mas como W é uma ε-vizinhança de $g(\bar{y})$ arbitrária, isso implica que $g \circ f$ é contínua em $\bar{x}$. $\square$

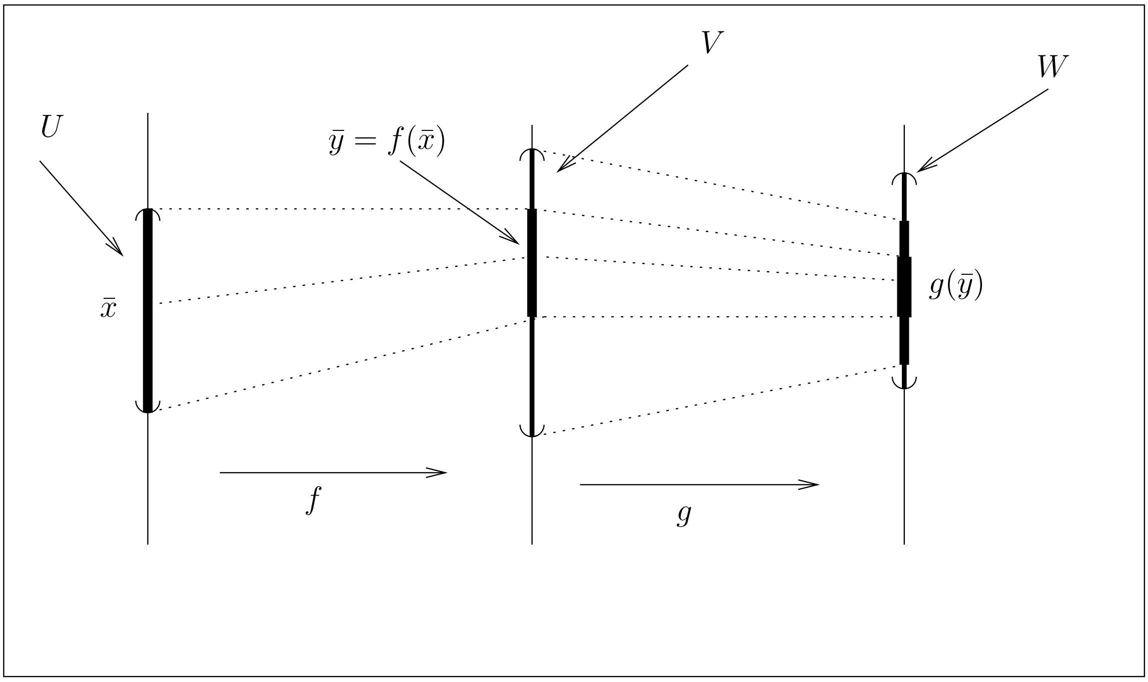


Figura 15.2: A composição de f e g.

O teorema seguinte é uma consequência imediata do Teorema 15.3. Porém vamos enunciá-lo devido à sua importância.

Teorema 15.4

Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ contínua em X e $g : Y \to \mathbb{R}$ contínua em Y. Se $f(X) \subset Y$, então a função composta $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em X.

Os Teoremas 15.3 e 15.4 são muito úteis para estabelecer a continuidade de certas funções. Eles podem ser usados em diversas situações em que seria difícil aplicar a definição de continuidade diretamente.

Exemplos 15.2

(a) Seja $g(x) := |x|$ para $x \in \mathbb{R}$. Segue da desigualdade triangular que

$$|g(x) - g(\bar{x})| \leq |x - \bar{x}|$$

para todo $x, \bar{x} \in \mathbb{R}$. Logo, g é contínua em todo $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Se $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é qualquer função contínua em X, então o Teorema 15.4 implica que $g \circ f = |f|$ é contínua em X.

(b) Seja $g(x) := \sqrt{x}$ para $x \geq 0$. Segue do Exemplo 7.2 (b) e do Teorema 14.2 que g é contínua em todo número $\bar{x} \geq 0$. Se $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em X e se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in X$, então segue do Teorema 15.4 que $g \circ f = \sqrt{f}$ é contínua em X.

(c) Seja $g(x) := \operatorname{sen} x$ para $x \in \mathbb{R}$. Vimos no Exemplo 15.1 (d) que g é contínua em $\mathbb{R}$. Se $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em X, então segue do Teorema 15.4 que $g \circ f$ é contínua em X.

Em particular, se $f(x) := 1/x$ para $x \neq 0$, então a função $g \circ f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ é contínua em todo ponto $\bar{x} \neq 0$.

Exercícios 15.1

1. Determine os pontos de continuidade das seguintes funções e diga que teoremas são usados em cada caso.

   (a) $f(x) := \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$ $(x \in \mathbb{R})$,

   (b) $f(x) := \sqrt{x + \sqrt{x}}$ $(x \geq 0)$,

   (c) $f(x) := \dfrac{\sqrt{1 + |\operatorname{sen} x|}}{x}$ $(x \neq 0)$,

   (d) $f(x) := \cos \sqrt{1 + x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$.

2. Mostre que se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em $X \subset \mathbb{R}$ e se $n \in \mathbb{N}$, então a função f^n definida por $f^n(x) := (f(x))^n$ para $x \in X$ é contínua em X.

3. Seja $x \mapsto [\![x]\!]$ a função parte inteira. Determine os pontos de continuidade da função $f(x) := x - [\![x]\!]$, $x \in \mathbb{R}$.

4. Seja g definida em $\mathbb{R}$ por $g(1) := 0$ e $g(x) = 2$ se $x \neq 1$, e seja $f(x) := x + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $\lim_{x \to 0} g \circ f \neq g \circ f(0)$. Por que isso não contradiz o Teorema 15.3?

5. Sejam f, g definidas em $\mathbb{R}$ e seja $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Suponhamos que $\lim_{x \to \bar{x}} f = \bar{y}$ e que g é contínua em $\bar{y}$. Mostre que $\lim_{x \to \bar{x}} g \circ f = g(\bar{y})$.

6. Dê um exemplo de uma função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ que é descontínua em todo ponto de $[0, 1]$ mas tal que $|f|$ é contínua em $[0, 1]$.

7. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $\mathbb{R}$ satisfazendo $h(m/2^n) = 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $h(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

8. Se f e g são contínuas em $\mathbb{R}$, seja $S := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq g(x)\}$. Se $(s_n) \subset S$ e $\lim s_n = s$, mostre que $s \in S$.

9. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo a relação $g(x + y) = g(x)g(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que se g é contínua em $x = 0$, então g é contínua em todo ponto de $\mathbb{R}$. Além disso, se tivermos $g(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}$, então $g(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

10. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas num ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}$, e seja $h(x) := \max\{f(x), g(x)\}$ para $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x)) + \frac{1}{2}|f(x) - g(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Use esse fato para mostrar que h é contínua em $\bar{x}$.

Aula 16 – Funções Contínuas em Intervalos

Metas da aula: Estabelecer o Teorema do Máximo-Mínimo para funções contínuas em intervalos fechados limitados. Estabelecer o Teorema do Valor Intermediário para funções contínuas em intervalos.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber o significado do Teorema do Máximo-Mínimo para funções contínuas em intervalos fechados limitados.

- Saber o significado do Teorema do Valor Intermediário para funções contínuas em intervalos.

Introdução

Nesta aula vamos apresentar os principais resultados sobre funções contínuas em intervalos. Primeiramente vamos ver o Teorema do Máximo-Mínimo para funções contínuas em intervalos fechados limitados. Esse resultado estabelece que funções contínuas em intervalos fechados limitados assumem os seus valores máximo e mínimo nesses intervalos. Em seguida vamos ver o também muito importante Teorema do Valor Intermediário que estabelece que, dada uma função contínua definida num intervalo e dois valores dessa função assumidos em dois pontos desse intervalo, então qualquer valor entre esses dois valores é assumido num ponto do intervalo entre os dois pontos onde são assumidos os valores dados.

O Teorema do Máximo-Mínimo

Iniciaremos mostrando que a imagem por uma função contínua de um intevalo limitado e fechado é um conjunto limitado.

Definição 16.1
Diz-se que uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *limitada em* X se existe uma constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in X$.

Teorema 16.1
Seja $I := [a, b]$ um intervalo fechado limitado e seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua em I. Então f é limitada em I.

Prova: Suponhamos que f não é limitada em I. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um $x_n \in I$ tal que $|f(x_n)| > n$. Como $I = [a, b]$, a seqüência $\mathbf{x} := (x_n)$ satisfaz $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, o Teorema de Bolzano-Weierstrass 8.5 implica que existe uma subseqüência $\mathbf{x}' := (x_{n_k})$ de $\mathbf{x}$ que converge a um número $\bar{x}$ e pelo Teorema 7.5 temos $a \leq \bar{x} \leq b$, ou seja, $\bar{x} \in I$. Então f é contínua em $\bar{x}$, de modo que $(f(x_n))$ converge a $f(\bar{x})$. Do Teorema 7.1 segue que a subseqüência convergente $(f(x_{n_k}))$ tem que ser limitada. Mas isso nos dá uma contradição já que

$$|f(x_{n_k})| > n_k \geq k \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Portanto, a hipótese de que a função contínua f não é limitada no intervalo fechado limitado I nos leva a uma contradição, o que prova que f é limitada em I. □

Definição 16.2
Seja $X \subset \mathbb{R}$ e seja $f : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que f *tem um máximo absoluto em* X se existe um ponto $x^* \in X$ tal que

$$f(x^*) \geq f(x) \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Dizemos que f *tem um mínimo absoluto em* X se existe um ponto $x_* \in X$ tal que

$$f(x_*) \leq f(x) \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Dizemos que x^* é um *ponto de máximo absoluto* para f em X, e que x_* é um *ponto de mínimo absoluto* para f em X, caso eles existam.

Teorema 16.2 (Teorema do Máximo-Mínimo)
Seja $I := [a, b]$ um intervalo fechado limitado e seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua em I. Então f tem um máximo absoluto e um mínimo absoluto em I.

Prova: Considere o conjunto não-vazio $f(I) := \{f(x) : x \in I\}$ de valores de f sobre I. O Teorema 16.1 estabelece que $f(I)$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$. Seja $y^* := \sup f(I)$ e $y_* := \inf f(I)$. Afirmamos que existem pontos x^* e x_* em I tais que $y^* = f(x^*)$ e $y_* = f(x_*)$. Vamos provar a existência do ponto x^*, sendo a prova da existência de x_* inteiramente semelhante e deixada para você como exercício.

Como $y^* = \sup f(I)$, dado $n \in \mathbb{N}$, o número $y^* - 1/n$ não é uma cota superior de $f(I)$. Sendo assim, existe $x_n \in I$ tal que

$$y^* - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq y^* \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como I é limitado, a seqüência $\mathbf{x} := (x_n)$ é limitada. Portanto, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass 8.5, existe uma subseqüência $\mathbf{x}' := (x_{n_k})$ de $\mathbf{x}$ que converge para um $\bar{x} \in \mathbb{R}$ e pelo Teorema 7.5 temos $\bar{x} \in I$. Logo, f é contínua em $\bar{x}$ de modo que $\lim f(x_{n_k}) = f(x^*)$. Como

$$y^* - \frac{1}{k} \leq y^* - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq y^* \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

concluímos pelo Teorema do Sanduíche 7.6 que $\lim f(x_{n_k}) = y^*$. Portanto, temos que

$$f(x^*) = \lim f(x_{n_k}) = y^* = \sup f(I),$$

e então concluímos que x^* é um ponto de máximo absoluto de f em I. $\square$

A Figura **16.1** ilustra o fato estabelecido no Teorema 16.2.

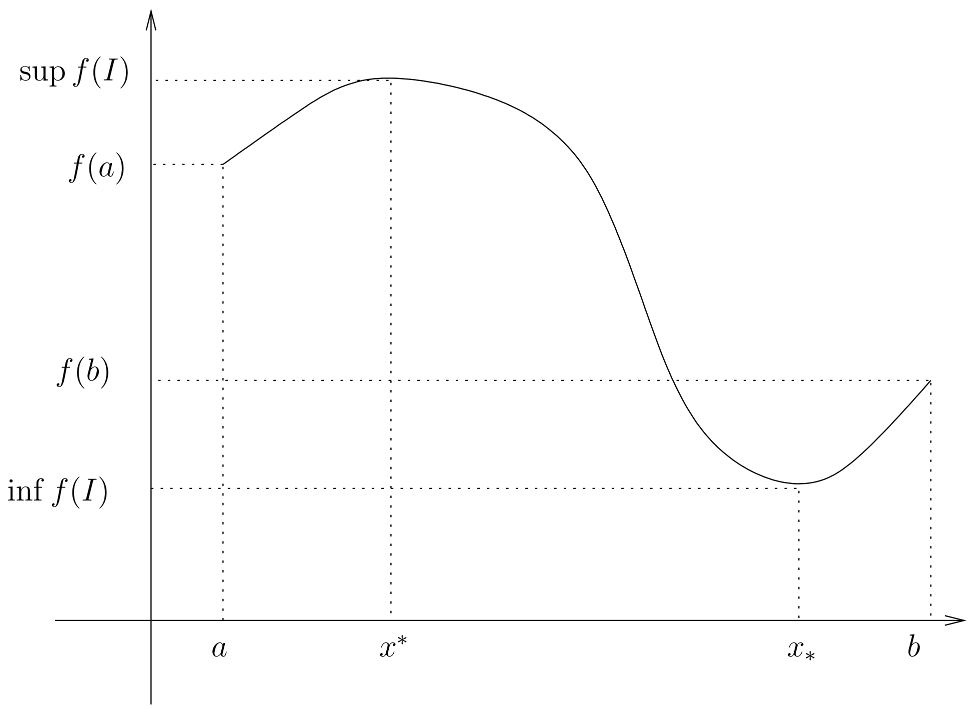


Figura 16.1: $f(I) = [f(x_*) = \inf f(I), f(x^*) = \sup f(I)]$.

A seguir damos alguns exemplos mostrando que as hipóteses dos Teoremas 16.1 e 16.2 não podem ser relaxadas.

Exemplos 16.1

(a) Nos Teoremas 16.1 e 16.2 a hipótese de que o intervalo é limitado não pode ser relaxada.

De fato, a função $f(x) := x$ para x no intervalo fechado ilimitado $I := [0, \infty)$ é contínua mas não é limitada. Em particular, ela não possui um máximo absoluto em I.

(b) Nos Teoremas 16.1 e 16.2 a hipótese de que o intervalo é fechado não pode ser dispensada.

De fato, a função $g(x) := 1/x$ para x no intervalo semi-aberto $I := (0, 1]$ é contínua mas não é limitada. Em particular, essa função também não possui um máximo absoluto no intervalo I em questão.

(c) Nos Teoremas 16.1 e 16.2 a hipótese de que a função é contínua não pode ser descartada.

De fato, a função f definida no intervalo fechado limitado $I := [0, 1]$ por $f(x) := 1/x$ para $x \in (0, 1]$ e $f(0) := 0$ é descontínua em $x = 0$ e é ilimitada em I. De novo, a função f assim definida não possui um máximo absoluto no intervalo fechado limitado I.

(d) A função $f(x) := 1/x$ não possui nem um máximo absoluto, nem um mínimo absoluto no intervalo $I := (0, \infty)$.

Essa função é ilimitada superiormente em I e assim não pode ter um máximo absoluto. Por outro lado, não existe nenhum ponto em I onde f assuma o valor $0 = \inf\{f(x) : x \in I\}$.

(e) Os pontos de máximo e de mínimo absolutos cuja existência é garantida pelo Teorema 16.2 não são necessariamente únicos.

De fato, um exemplo extremo é o de uma função constante $f(x) := c$ num intervalo fechado limitado $I := [a, b]$. Nesse caso, todo ponto de I é ao mesmo tempo um ponto de máximo absoluto e um ponto de mínimo absoluto para f.

Um outro exemplo menos drástico é fornecido pela função $f(x) := x^2$ em $[-1, 1]$ onde $x = -1$ e $x = 1$ são ambos pontos de máximo absoluto para f, ao passo que $x = 0$ é o único ponto de mínimo absoluto para f.

O Teorema do Valor Intermediário

O próximo resultado, devido a Bolzano, mostra uma propriedade fundamental das funções contínuas definidas em intervalos.

Teorema 16.3 (Teorema do Valor Intermediário)
Seja I um intervalo em $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ contínua em I. Se $a, b \in I$ e se $k \in \mathbb{R}$ satisfaz $f(a) < k < f(b)$, então existe um ponto $c \in I$ tal que $f(c) = k$.

Prova: Se $a < b$, a função $g(x) := f(x) - k$ satisfaz $g(a) < 0$ e $g(b) > 0$. Se $b < a$, a função $g := k - f(x)$ satisfaz $g(b) < 0$ e $g(a) > 0$. Em qualquer um dos dois casos, se acharmos um ponto c pertencente ao intervalo aberto de extremos a e b tal que $g(c) = 0$, então teremos $f(c) = k$ como afirmado.

Assim, sem perda de generalidade, podemos supor que $k = 0$, $a < b$, $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. O teorema ficará provado se mostrarmos que existe c satisfazendo $a < c < b$ e $f(c) = 0$.

Com efeito, seja $X := \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$. Então X é não vazio e limitado. Logo, existe $c := \sup X$. Afirmamos que $a < c < b$ e $f(c) = 0$. De fato, $f(a) < 0$ e $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$. Assim, pelo Teorema 13.5, temos que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para $x \in [a, a + \delta)$. Logo a não é cota superior de X e portanto $c > a$. Por outro lado, $f(b) > 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = f(b)$ e, de novo, o Teorema 13.5 implica que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para $x \in (b - \delta, b]$. Logo, b não é a menor cota superior de X e portanto $c < b$.

Agora, se $f(c) < 0$, então o Teorema 13.5 implica que para $\delta > 0$ suficientemente pequeno temos $a < c - \delta < c < c + \delta < b$ e $f(x) < 0$ se $x \in (c - \delta, c + \delta)$, contradizendo o fato de c ser cota superior de X. Similarmente, se $f(c) > 0$, então do Teorema 13.5 segue que para $\delta > 0$ suficientemente pequeno temos $a < c - \delta < c < c + \delta < b$ e $f(x) > 0$ se $x \in (c - \delta, c + \delta)$, contradizendo o fato de c ser a menor cota superior de X.

Portanto, necessariamente devemos ter $f(c) = 0$, o que conclui a prova.
□

O próximo teorema resume num só enunciado os resultados fornecidos pelo Teorema do Máximo-Mínimo 16.2 e pelo Teorema do Valor Intermediário 16.3.

Teorema 16.4
Seja I um intervalo fechado limitado e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua em I. Então o conjunto $f(I) := \{f(x) : x \in I\}$ é um intervalo fechado limitado.

Prova: Se $m := \inf f(I)$ e $M := \sup f(I)$, então sabemos pelo Teorema do Máximo-Mínimo 16.2 que existem $x_*, x^* \in I$ tais que $m = f(x_*)$, $M = f(x^*)$. Portanto, m e M pertencem a $f(I)$. Além disso, temos $f(I) \subset$

$[m, M]$. Agora, se k é qualquer elemento de $[m, M]$, então o Teorema do Valor Intermediário 16.3 implica que existe $c \in [x_*, x^*] \subset I$ tal que $k = f(c)$. Portanto, $k \in f(I)$ e concluímos então que $[m, M] \subset f(I)$. Logo, $f(I)$ é o intervalo fechado limitado $[m, M]$. $\square$

O último resultado que apresentaremos a seguir estabelece a propriedade das funções contínuas de levar intervalos em intervalos. Vimos no resultado anterior que intervalos fechados limitados são levados por funções contínuas em intervalos fechados limitados. Em geral, porém, quando um intervalo não é fechado e limitado, sua imagem poderá ser de um tipo diferente do dele. Por exemplo, a imagem do intervalo aberto $(-1, 1)$ pela função contínua $f(x) := 1/(1 + x^2)$ é o intervalo semi-aberto $(1/2, 1]$. Já o intervalo fechado $[0, \infty)$ é levado por essa mesma função no intervalo semi-aberto $(0, 1]$. (Veja Figura **16.2**.)

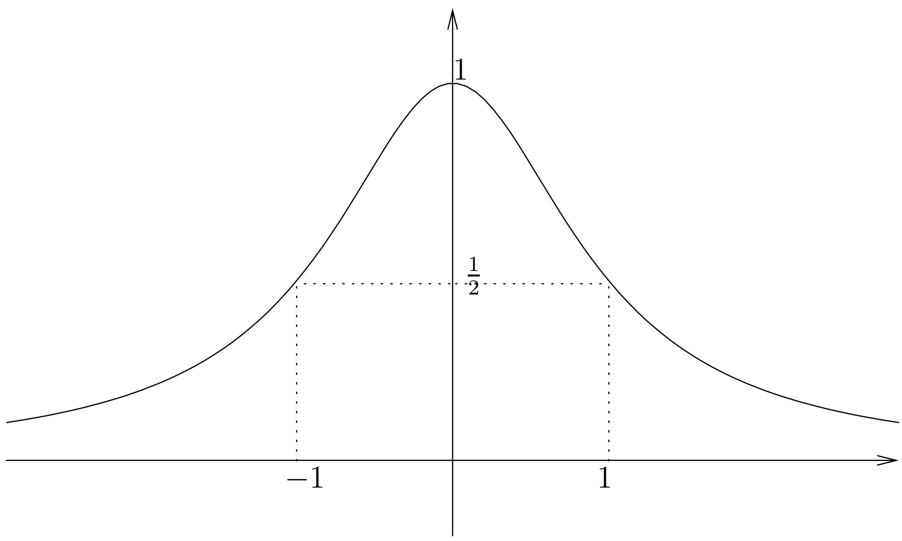


Figura 16.2: Gráfico da função $f(x) := 1/(1 + x^2)$ para $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 16.5
Seja I um intervalo e seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua em I. Então o conjunto $f(I)$ é um intervalo.

Prova: Vimos no Teorema 5.10 que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é um intervalo se, e somente se, dados $\alpha, \beta \in X$ com $\alpha < \beta$, então $[\alpha, \beta] \subset X$. Assim, sejam $\alpha, \beta \in f(I)$ com $\alpha < \beta$. Pela definição de $f(I)$, existem $a, b \in I$ tais que $\alpha = f(a)$ e $\beta = f(b)$. O Teorema do Valor Intermediário 16.3 implica que se

$k \in (\alpha, \beta)$ então existe $c \in I$ tal que $k = f(c) \in f(I)$. Logo, $[\alpha, \beta] \subset f(I)$, o que mostra que $f(I)$ é um intervalo. □

Exercícios 16.1

1. Seja $I := [a, b]$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) > 0$ para cada $x \in I$. Prove que existe um número $k > 0$ tal que $f(x) \geq k$ para todo $x \in I$.

2. Seja $I := [a, b]$ e sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções contínuas em I. Mostre que o conjunto $E := \{x \in I : f(x) = g(x)\}$ tem a propriedade de que se $(x_n) \subset E$ e $x_n \to \bar{x}$, então $\bar{x} \in E$.

3. Sejam $I := [a, b]$ e $f : I \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in I$ existe $y \in I$ satisfazendo $|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$. Prove que existe um ponto $c \in I$ tal que $f(c) = 0$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $\mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Mostre que se $x_0 \in \mathbb{R}$ é tal que $f(x_0) < \beta$, então existe uma δ-vizinhança $U := V_\delta(x_0)$ de x_0 tal que $f(x) < \beta$ para todo $x \in U$.

5. Considere o polinômio $p(x) := a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ e $a_3 > 0$. Mostre que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \in \mathbb{N}$ e $n > N_0$, então $p(n) > 0$ e $p(-n) < 0$. Use esse fato para mostrar que p possui ao menos uma raiz em $\mathbb{R}$. Generalize esse resultado para qualquer polinômio de grau ímpar.

6. Mostre que o polinômio $p(x) := x^4 + 5x^3 - 7$ possui ao menos duas raízes reais.

7. Seja f contínua no intervalo $[0, 1]$ e tal que $f(0) = f(1)$. Prove que existe um ponto $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$. [Dica: Considere $g(x) := f(x) - f(x + \frac{1}{2})$ no intervalo $[0, 1/2]$.]

8. (**Método da Bissecção para Localizar Raízes**) Sejam $I := [a, b]$ e $f : I \to \mathbb{R}$ contínua em I tal que $f(a) < 0 < f(b)$. Vamos gerar por bissecção uma sequência de intervalos encaixados $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$, com $I_k := [a_k, b_k]$ e $a_k, b_k \in I$ a serem definidos. Seja $I_1 := [a_1, b_1]$, onde $a_1 := a$, $b_1 := b$, e seja p_1 o ponto médio $p_1 := \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$. Se $f(p_1) = 0$ teremos encontrado uma raiz de $f(x) = 0$ e o processo termina. Se $f(p_1) \neq 0$, então ou $f(p_1) > 0$ ou $f(p_1) < 0$. Se $f(p_1) > 0$, então pomos $a_2 := a_1$ e $b_2 := p_1$, enquanto se $f(p_1) < 0$, então fazemos $a_2 := p_1$,

$b_2 := b_1$. Em qualquer dos casos, definimos $I_2 := [a_2, b_2]$: temos $I_2 \subset I_1$, $(b_2 - a_2) = \frac{1}{2}(b_1 - a_1)$ e $f(a_2) < 0 < f(b_2)$.

(a) Mostre por indução como definir os intervalos $I_n := [a_n, b_n]$ para $n \geq 2$, de modo que se $f(a_{n-1}) < 0 < f(b_{n-1})$, então $I_n \subset I_{n-1}$, $(b_n - a_n) = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$ e $f(a_n) < 0 < f(b_n)$; e se $f(a_{n-1})f(b_{n-1}) = 0$, então $I_n := I_{n-1}$.

(b) Caso não exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p_{n_0} := \frac{1}{2}(a_{n_0}+b_{n_0})$ satisfaz $f(p_{n_0}) = 0$, então prove que existe $c \in I$ tal que $\lim a_n = \lim b_n = c$ e $f(c) = 0$.

(c) Defina as sequências (a_n) e (b_n) com a_n, b_n obtidos pelo método da bissecção, fazendo $a_n = b_n = p_{n_0}$ para $n > n_0$, caso exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(p_{n_0}) = 0$, onde p_{n_0} é definido como no item anterior. Mostre que dado $\varepsilon > 0$ existem a_n e b_n tais que $a_n \leq c$, $f(a_n) \leq 0$ e $c - a_n < \varepsilon$, e $b_n \geq c$, $f(b_n) \geq 0$ e $b_n - c < \varepsilon$. Conclua que o método da bissecção fornece um modo de encontrar aproximações para uma raiz da equação $f(x) = 0$ com erro arbitrariamente pequeno.

(d) Verifique que valem resultados totalmente análogos no caso em que $f(a) > 0 > f(b)$.

9. (a) A função $f(x) := (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$ tem cinco raízes no intervalo $[0, 7]$. Se o método da bissecção for aplicado nesse intervalo que raiz será localizada?

   (b) A mesma questão para $g(x) := (x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$ no intervalo $[0, 7]$.

10. Mostre que se $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é contínua e tem apenas valores racionais, então f é constante.

ISBN 978-85-7648-678-7
9 788576 486787

UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense

Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UERJ

Universidade Federal Fluminense
uff

Universidade do Brasil

Universidade Federal Rural
do Rio de Janeiro

UNIRIO

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL