Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD1 - Segundo Semestre de 2014

Questões:

1. (1.0) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

   (a) Dado $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, 0\}$, o conjunto de partes de A, $P(A)$, é $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{0\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, 0\}, \{\{\emptyset\}, 0\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, 0\}\}$;

   Resposta: Falsa! O conjunto das partes de A possui 8 elementos: $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{0\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, 0\}, \{\{\emptyset\}, 0\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, 0\}\}$.

   (b) $(A-B)-C \subseteq A-(B-C)$, sendo A, B e C conjuntos arbitrários.

   Resposta: Verdadeira! Observe os diagramas de Venn da Figura 1 na página 8 para maior clareza.

   Demonstração. Seja $x \in (A-B)-C$. Vamos provar que $x \in A-(B-C)$.
   Se $x \in (A-B)-C$, então $x \in (A-B)$ e $x \notin C$. Mas se $x \in (A-B)$, então $x \in A$ e $x \notin B$. Logo, $x \notin (B-C)$ e, consequentemente, $x \in A-(B-C)$.

   $\square$

2. (1.5) Considere os seguintes conjuntos:
A= conjunto dos números naturais menores ou iguais a 250 tais que são múltiplos de 5;
B= conjunto dos números naturais menores ou iguais a 300 tais que são múltiplos de 9,
C=$\{x \in \mathbb{Z} : |3x-2| \leq 289\}$, onde $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros.
Observação: Consideramos os números naturais começando com 1.

(a) Descreva A e B usando notação matemática (como C).

Resposta: $A = \{y \in \mathbb{N} : y = 5k \text{ para algum } k \in \mathbb{N}, y \leq 250\}$
$B = \{z \in \mathbb{N} : z = 9l \text{ para algum } l \in \mathbb{N}, z \leq 300\}$

(b) Encontre o número de elementos de $(A \cup B) \cap C$, usando a propriedade distributiva da interseção de conjuntos em relação à união e também o Princípio da Inclusão e Exclusão. Justifique.

Resposta: Pela propriedade distributiva da interseção de conjuntos em relação a união temos que $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Vamos ulizar o Princípio da Inclusão e Exclusão para dois conjuntos com o intuito de solucionar a questão:

$$n(G \cup H) = n(G) + n(H) - n(G \cap H)$$

Aplicando a esta questão temos:

$$n((A \cap C) \cup (B \cap C)) = n(A \cap C) + n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)$$

Cálculo das cardinalidades dos conjuntos:
$C = \{x \in \mathbb{Z} : |3x - 2| \leq 289\}$

$$|3x - 2| \leq 289$$

$$-289 \leq 3x - 2 \leq 289$$

$$-289 + 2 \leq 3x - 2 + 2 \leq 289 + 2$$

$$-287 \leq 3x \leq 291$$

$$\frac{-287}{3} \leq x \leq \frac{291}{3}$$

Como $x \in \mathbb{Z}$, temos:
$C = \{x \in \mathbb{Z} : -95 \leq x \leq 97\}$
Daí,
$A \cap C = \{x \in \mathbb{N} : x = 5k$ para algum $k \in \mathbb{N}, x \leq 97\} = \{5 \times 1, 5 \times 2, \dots, 5 \times 19\} = \{5, 10, \dots, 95\}$
Logo, $n(A \cap C) = 19$
$B \cap C = \{y \in \mathbb{N} : y = 9l$ para algum $l \in \mathbb{N}, y \leq 97\} = \{9 \times 1, 9 \times 2, \dots, 9 \times 10\} = \{9, 18, \dots, 90\}$
Logo, $n(B \cap C) = 10$
$A \cap B \cap C = \{z \in \mathbb{N} : z = 45j$ para algum $j \in \mathbb{N}, z \leq 97\} = \{45 \times 1, 45 \times 2\} = \{45, 90\}$
Logo, $n(A \cap B \cap C) = 2$
Assim, pelo Princípio da Inclusão e Exclusão temos:

$$n((A \cap C) \cup (B \cap C)) = n(A \cap C) + n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)$$

$$n((A \cap C) \cup (B \cap C)) = 19 + 10 - 2 = 27$$

3. (2.0) Mostre pelo Princípio da Indução Matemática que:

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$$

Resposta: Seja $P(k) : \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$.

BASE DA INDUÇÃO: Fazendo $k = 1$ temos:

$$\frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{3}$$

.

Por outro lado,

$$\frac{1}{2 \times 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira.

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Suponha $P(n) : \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ verdadeira.

PASSO INDUTIVO: Vamos mostrar que se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1) : \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \cdots + \frac{1}{\underbrace{(2n+1)}_{2(n+1)-1}\underbrace{(2n+3)}_{2(n+1)+1}} = \frac{n+1}{2n+3}$ também é verdadeira.

$$\underbrace{\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}}_{H.I.} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$\frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$\frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$\frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$\frac{n+1}{2n+3}$$

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática temos que $P(k) : \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$ é verdadeira para todo $k \in \mathbb{N}$.

4. (2.0) O número de inscrição de um aluno em uma universidade é composto de 7 algarismos dentre 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. O primeiro algarismo pode ser 0. Considere os números de inscrição com todos os algarismos diferentes.

   (a) Quantos são os números de inscrição? Justifique.

   Resposta: Neste caso, temos $A_{10}^7 = \frac{10!}{3!} = 10 \times 9 \times 8 \times \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$

(b) Quantos deles são pares? Justifique.

Resposta: Neste caso, o número deve terminar com $0, 2, 4, 6$ ou 8. Assim, temos 5 possibilidades para o último dígito do número. Além disso, como os algarismos devem ser distintos, temos $A_9^6 \times 5 = \frac{9!}{3!} \times 5 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5^2 \times 4$ números pares distintos de matrícula.

(c) Quantos deles têm os algarismos 2 e 5 juntos? Justifique.

Resposta: Se os algarismos 2 e 5 estão juntos, dois dos sete algarismos já foram escolhidos para compor o número. Além disso, podem aparecer de duas formas: 25 ou 52. Primeiramente, vamos escolher e arrumar os outros algarismos nas 5 posições restantes: $A_8^5 = \frac{8!}{3!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$.
Agora, vamos assumir que os algarismos 2 e 5 são, juntos, um único número e vamos posicioná-lo em uma das 6 posições possíveis, representadas pelos pontos no esquema abaixo.

$$\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot$$

Então, pelo Princípio Multiplicativo temos: $A_8^5 \times 2 \times 6 = 8 \times 7 \times 6^2 \times 5 \times 4 \times 2$

(d) Em quantos números os algarismos 2 e 5 não estão juntos? Justifique

Resposta: Vamos subtrair do total de matrículas possíveis, aquelas que contêm os algarismos 2 e 5 juntos.

$$A_{10}^7 - A_8^5 \times 2 \times 6 =$$

$$10 \times 9 \times 8 \times \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 - 8 \times 7 \times 6^2 \times 5 \times 4 \times 2 =$$

$$8 \times \times 7 \times 6 \times 5 \times 4(10 \times 9 - 6 \times 2) =$$

$$8 \times \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 78$$

5. (1.5) De quantas maneiras podemos distribuir 12 livros distintos, em três grupos de 4 pessoas? Justifique.

   Resposta: Para cada grupo vamos escolher 4 livros: $C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^4 = \frac{12!}{8!4!} \times \frac{8!}{4!4!}$.
   Como escolher os livros ABCD, EFGH, IJKL é o mesmo que escolher IJKL, ABCD, EFGH, por exemplo, vamos dividir o resultado pela quantidade de permutações de grupos possíveis: 3!.

   Assim, temos $\frac{C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^4}{3!} = \frac{\frac{12!}{8!4!} \times \frac{8!}{4!4!}}{3!}$ maneiras de distribuir 12 livros distintos em três grupos de 4 pessoas.

6. (2.0) Considere os anagramas da palavra CONSTITUCIONALISTA.

   (a) Quantos anagramas podem ser formados? Justifique.

   Resposta: A palavra CONSTITUCIONALISTA possui 18 letras a saber: 2 C's, 2 O's, 2 N's, 2 S's, 3 T's, 3 I's, 1 U, 2 A's, 1 L. Assim, podemos formar $P_{18}^{2,2,2,2,3,3,1,2,1} = \frac{18!}{2!2!2!2!3!3!2!}$ anagramas com a palavra CONSTITUCIONALISTA.

   (b) Em quantos desses anagramas não existem vogais consecutivas? Justifique.

   Resposta: Inicialmente, vamos posicionar as 10 consoantes: $P_{10}^{2,2,2,3,1} = \frac{10!}{2!2!2!3!}$. Temos 11 espaços para posicionar as 8 vogais.

   ._._._._._._._._._._.

   Vamos escolher 8 espaços dentre os 11: $C_{11}^8 = \frac{11!}{3!8!}$. Feito isso, é só arrumar as vogais: $P_8^{2,3,1,2} = \frac{8!}{2!3!2!}$. Pelo Princípio Multiplicativo, temos $P_{10}^{2,2,2,3,1} \times C_{11}^8 \times P_8^{2,3,1,2} = \frac{10!}{2!2!2!3!} \times \frac{11!}{3!8!} \times \frac{8!}{2!3!2!}$ anagramas da palavra CONSTITUCIONALISTA nos quais não existem vogais consecutivas.

   (c) Em quantos anagramas duas letras **T** nunca ficam juntas? Justifique

   Resposta: Neste caso, vamos arrumar todas as letras com exceção dos T's: $P_{15}^{2,2,2,2,3,2,1,1} = \frac{15!}{2!2!2!2!3!2!}$. Em seguida, temos que escolher

3 espaços dentre os 16 disponíveis para posicionar as letras T: $C_{16}^{3} = \frac{16!}{13!3!}$.

.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.

Pelo Princípio Multiplicativo temos $P_{15}^{2,2,2,2,3,2,1,1} \times C_{16}^{3} = \frac{15!}{2!2!2!2!3!2!} \times \frac{16!}{13!3!}$ anagramas da palavra CONSTITUCIONALISTA nos quais duas letras T nunca ficam juntas.

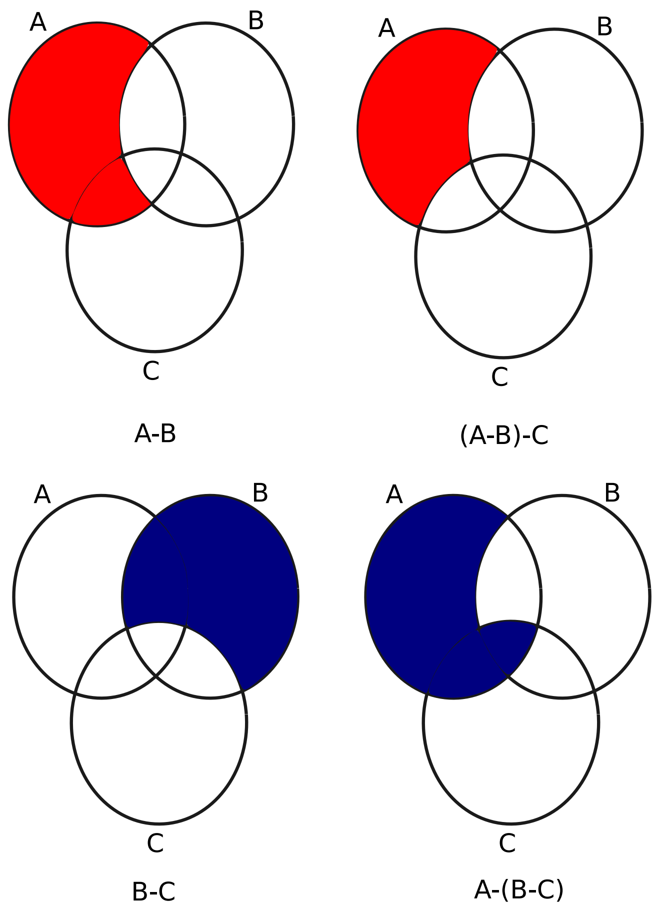

Figura 1: Diagramas de Venn para $(A-B)-C$ e $A-(B-C)$. Claramente, $(A-B)-C \subseteq A-(B-C)$.