Gabarito da AP 3 de Fundamentos de Algoritmos para Computação

Questões:

1. (1.0) Justifique a seguinte igualdade usando as propriedades de conjuntos tais como distributivas, leis de Morgan:

$$B - (A - D) = (B - A) \cup (B \cap D)$$

Resposta:

$$\begin{array}{lcll}
 & & B - (A - D) & = \\
\text{(propriedade da diferença)} & = & B - (A \cap \overline{D}) & = \\
\text{(propriedade da diferença)} & = & B \cap \overline{(A \cap \overline{D})} & = \\
\text{(lei de Morgan)} & = & B \cap (\overline{A} \cup \overline{(\overline{D})}) & = \\
\text{(propriedade } \overline{(\overline{D})} = \text{D)} & = & B \cap (\overline{A} \cup D) & = \\
\text{(propriedade distributiva)} & = & (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap D) & = \\
\text{(propriedade da diferença)} & = & (B - A) \cup (B \cap D) &
\end{array}$$

2. (1.5) Mostre usando indução matemática:

$$2\sum_{i=1}^{n}(3i-1) = n(1+3n) \ \ \forall \ \ n \in N.$$

Resposta:

Seja $P(n) : 2\sum_{i=1}^{n}(3i-1) = n(1+3n), \forall n \in N$

Prova por indução:

Base da indução: Para $n = 1$ temos $P(1) : 2\sum_{i=1}^{1}(3i - 1) = 2(3 - 1) = 2.2 = 4 = 1(1 + 3) = 1(1 + 1.3)$ é verdadeira.

Hipótese indutiva:

Suponha verdadeira para $n = k$, isto é:

$$P(k) : 2\sum_{i=1}^{k}(3i - 1) = k(1 + 3k) \text{ é verdadeira}$$

Vamos mostrar que se é verdadeira para k então é verdadeira para $k+1$.

Devemos provar que:

$$P(k + 1) : 2\sum_{i=1}^{k+1}(3i - 1) = (k + 1)(1 + 3(k + 1)) \text{ é verdadeira}$$

Desenvovendo para $n = k + 1$ e usando a hipótese indutiva, temos que:

$$\begin{array}{lcll}
2\sum_{i=1}^{k+1}(3i - 1) & = & 2\sum_{i=1}^{k}(3i - 1) + 2(3(k + 1) - 1) & \\
\text{(Hipótese Indutiva)} & = & k(1 + 3k) + 2(3k + 3 - 1) & = \\
 & = & k + 3k^2 + 6k + 6 - 2 & = \\
 & = & 3k^2 + 7k + 4 \qquad (1) &
\end{array}$$

Por outro lado, temos que:

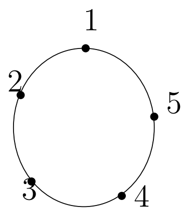
$$\begin{array}{lcll}
(k + 1)(1 + 3(k + 1)) & = & k(1 + 3(k + 1)) + (1 + 3(k + 1)) & = \\
 & = & k + 3k(k + 1) + 1 + 3k + 3 & = \\
 & = & k + 3k^2 + 3k + 1 + 3k + 3 & = \\
 & = & 3k^2 + 7k + 4 \qquad (2) &
\end{array}$$

Portanto, de (1) e (2) e aplicando a propriedade transitiva da igualdade, resultamos que $2\sum_{i=1}^{k+1}(3i - 1) = (k + 1)(1 + 3(k + 1))$.

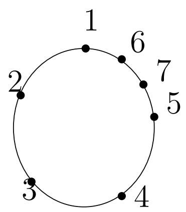
Logo, a expressão é verdadeira, $\forall n \in N$

3. (1.5) De quantas maneiras 7 pessoas podem sentar-se em torno de uma mesa circular sendo que 2 determinadas pessoas devem estar juntas? Justifique a resposta.

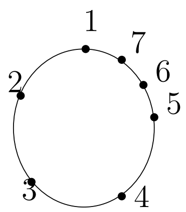
Resposta: Para resolvermos esta questão iremos usar permutação circular, logo podemos formar $(PC)_5 = 4!$ rodas com as 5 outras pessoas.



Temos agora 5 maneiras diferentes de colocar as pessoas 6 e 7, nesta mesma ordem.



E temos 5 modos de colocar as pessoas 7 e 6, nesta mesma ordem.



Logo, a resposta é $4! \times 5 \times 2 = 240$.

4. (1.0) Considere um alfabeto de 23 letras. Quantos anagramas de 3 letras podem ser formados permitindo repetições? Justifique a resposta.

   Resposta: Podem ser formados $(AR)^3_{23} = (23)^3$ anagramas de 3 letras com repetição.

5. (1.0) Dada a linha 7 do triângulo de Pascal:

   $$1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1$$

   calcule a linha 8 usando as condições de fronteira e as relações de Stifel. Justifique.

   Resposta: $n = 6 \Rightarrow 1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1$

   Pela relação de Stifel ($C^r_n = C^{r-1}_{n-1} + C^r_{n-1}$) e pela condição de fronteira ($C^0_n = C^n_n = 1$) temos que:

   $n = 7 \Rightarrow 1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1$

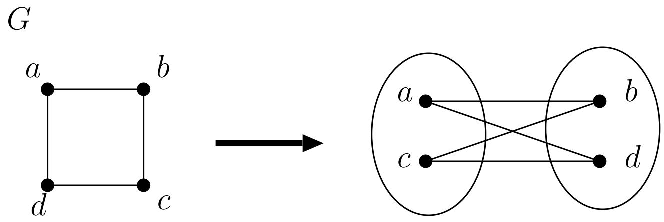
6. (4.0) Justifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira prove. Se for falsa dê um contra-exemplo.

   (a) Todo grafo bipartido é uma árvore.

   Resposta: Falso

   Contra-exemplo:

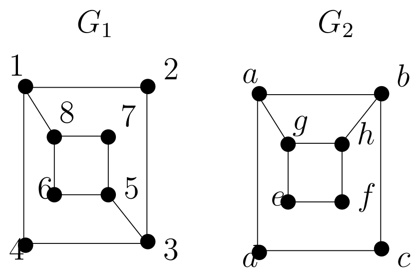
   O grafo G é bipartido e G não é árvore, já que G é um ciclo com 4 vértices.



(b) Se dois grafos possuem a mesma seqüência de graus então eles são isomorfos.

Resposta: Falso

Contra-exemplo:



Temos que $|V(G_1)| = |V(G_2)| = 8$ e $|E(G_1)| = |E(G_2)| = 10$

A sequência de vértices de G_1: $(2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3)$
A sequência de vértices de G_2: $(2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3)$

Em G_1, temos o vértice 1 de grau 3 adjacente a dois vértices de grau 2 e um de grau 3.

Em G_2, nenhum dos quatro vértices de grau 3 (a, b, g, h) tem adjacência semelhante.

Logo, G_1 e G_2 não são isomorfos.

(c) Toda árvore satisfaz a fórmula de Euler, $n - m + f = 2$, sendo n

o número de vértices, m o número de arestas e f o número de faces.

Resposta: Verdadeiro.

Para a árvore T o número de arestas é igual ao número de vértices menos 1, isto é, $|E| = |V| - 1 \Rightarrow m = n - 1$, e o número de faces de T é um, já que T é acíclico, logo:

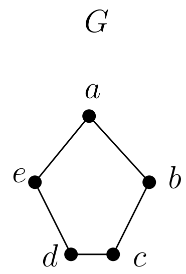
$$\begin{array}{rcll} n - m + f & = & n - (n-1) + 1 & = \\ & = & n - m + 1 + 1 & = \\ & = & 1 + 1 & = \\ & = & 2 & = \end{array}$$

Então, $n - m + f = 2$.

(d) Se G é hamiltoniano então todos os vértices de G têm grau maior ou igual a $n/2$ onde $\mid V(G) \mid = n$.

Resposta: Falso.

Contra-exemplo:



O grafo G é hamiltoniano (ciclo hamiltoniano: $abcdea$).

Temos que $\forall v \in G$, $d(v) = 2$ então $d(v) = 2 < \frac{n}{2} = \frac{5}{2}$, contradizendo a afirmação.