Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP2 - Primeiro Semestre de 2015

Questões:

1. (1.0) Usando o Teorema das Linhas calcule a seguinte soma:

$$C_{10}^2 + C_{10}^3 + C_{10}^4 + \cdots + C_{10}^9.$$

Justifique.

Resposta: Pelo teorema das linhas, temos que:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

Tomando $n = 10$ temos:

$$C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + \ldots + C_{10}^9 + C_{10}^{10} = 2^{10}$$
$$C_{10}^2 + \ldots + C_{10}^9 = 2^{10} - C_{10}^0 - C_{10}^1 - C_{10}^{10} =$$
$$C_{10}^2 + \ldots + C_{10}^9 = 2^{10} - \frac{10!}{0!10!} - \frac{10!}{1!9!} - \frac{10!}{10!0!} = 2^{10} - 1 - 10 - 1 == 2^{10} - 12$$

2. (1.5) Aplicando a fórmula do Binômio de Newton, calcule o coeficiente de x^{20} no desenvolvimento de $(\frac{2}{x^7} - 5x^3)^{80}$. Justifique a resposta.

Resposta: A fórmula para o termo geral do desenvolvimento do Binômio de Newton de $(a+b)^n$ é dada por: $T_{k+1} = C_n^k \ a^{n-k} \ b^k$, para $k = 0, 1, \cdots, n$. Neste caso temos $n = 80$, $a = \frac{2}{x^7}$ e $b = -5x^3$.

Para $0 \leq k \leq 80$, o termo genérico do desenvolvimento de $(\frac{2}{x^7} - 5x^3)^{80}$ é então dado por:

$$
\begin{array}{rcll}
T_k & = & C_{80}^k (\frac{2}{x^7})^{80-k}(-5x^3)^k & = \\
 & = & C_{80}^k \; 2^{80-k}(x^{-7(80-k)})(-1)^k \; 5^k \; x^{3k} & = \\
 & = & C_{80}^k \; 2^{80-k}(-1)^k \; 5^k \; x^{-560+7k} \; . \; x^{3k} & = \\
 & = & C_{80}^k \; 2^{80-k}(-1)^k \; 5^k \; x^{-560+7k+3k} & = \\
 & = & C_{80}^k \; 2^{80-k}(-1)^k \; 5^k \; x^{-560+10k} &
\end{array}
$$

Como queremos calcular o coeficiente de x^{20}, devemos ter $-560+10k = 20$, sendo $0 \leq k \leq 80$. Assim, temos $k = \frac{560+20}{10} = 58$.

Então, o coeficiente de x^{20} é:

$$
\begin{array}{ll}
C_{80}^{58} \times 2^{80-58} \times (-1)^{58} \times 5^{58} & = \\
\frac{80!}{58!22!} \times 2^{22} \times 5^{58} & =
\end{array}
$$

3. (1.5) Encontre a fórmula fechada da relação de recorrência:
$a_n = 2a_{n-1} + 2^{n-1}$ $\qquad n$ natural, $n \geq 1$
$a_0 = 1$
Descreva o processo utilizado para chegar á fórmula.

Resposta:

$$
\begin{array}{rcll}
a_n & = & 2a_{n-1} + 2^{n-1} & = \\
 & = & 2(2a_{n-2} + 2^{n-2}) + 2^{n-1} & = \\
 & = & 2^2 a_{n-2} + 2^{n-1} + 2^{n-1} & = \\
 & = & 2^2 a_{n-2} + 2.2^{n-1} & = \\
 & = & 2^2(2a_{n-3} + 2^{n-3}) + 2.2^{n-1} & = \\
 & = & 2^3 a_{n-3} + 2^{n-1} + 2.2^{n-1} & = \\
 & = & 2^3 a_{n-3} + 3.2^{n-1} & = \\
 & \vdots & & \\
 & = & 2^i a_{n-i} + i.2^{n-1} &
\end{array}
$$

Quando $n - i = 0$ temos $i = n$ e

$$
\begin{array}{rcll}
a_n & = & 2^n a_0 + n.2^{n-1} & = \\
 & = & 2^n + n.2^{n-1} &
\end{array}
$$

Logo, a fórmula fechada para a relação de recorrência é $a_n = 2^n + n.2^{n-1}$.

4. (1.5) Seja G um grafo planar conexo, com 9 faces e cuja soma dos graus dos vértices é 36. Determine o número de vértices de G. Justifique.

   Resposta: Sabemos pelo Teorema do Aperto de Mãos que:

   $$\sum_{v \in V} d(v) = 2m \ .$$

   Como a soma dos graus dos vértices é 36, temos:

   $$\sum_{v \in V} d(v) = 2m \Rightarrow 2m = 36 \Rightarrow m = 18 \ , \text{ onde } m \text{ é o número de arestas de } G.$$

   Seja f o número de faces do grafo planar conexo, G. Pela fórmula de Euler, temos que $n - m + f = 2$, para grafos conexos planares. Como $f = 9$ e $m = 18$, então temos $n = m - f + 2 \Rightarrow n = 18 - 9 + 2 \Rightarrow n = 11$ vértices.

   Logo, G possui 11 vértices.

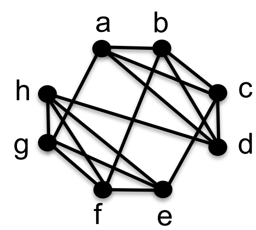
5. (4.5) Considere o grafo G dado por:
   $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ e
   $E(G) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, g), (b, c), (b, d), (b, f), (c, d), (c, e), (d, h), (e, f), (e, g), (e, h), (f, g), (f, h), (g, h)\}$.
   Responda as seguintes perguntas:

   (a) G é bipartido? Justifique.

   Resposta: Não. Pela caracterização de grafo bipartido temos: Um grafo G é bipartido se e somente se G não possui ciclos ímpares. Observe a representação do grafo G na figura abaixo.

   Observe que os vértices a, b, c do grafo G formam um ciclo ímpar (um ciclo de comprimemto 3), logo podemos concluir que o grafo G não é bipartido.

   (b) G é euleriano? Justifique.



Resposta: Sim, pois por teorema, G é euleriano se e somente se todo vértice de G tem grau par, e no grafo G temos $d(a) = d(b) = d(c) = d(d) = d(e) = d(f) = d(g) = d(h) = 4$, que é par.

(c) G é hamiltoniano? Justifique.

Resposta: Sim, pois G possui um ciclo que passa por todos os vértices uma única vez. E o ciclo é $a, b, c, d, h, e, f, g, a$.

(d) Determine o diâmetro e o centro de G. Justifique.

Resposta: A excentricidade de um vértice v, denotada por $e(v)$, é a maior distância (menor caminho) que pode ser percorrida a partir de v para alcançar qualquer outro vértice do grafo, isto é, $e(v) = max_{w \in V(G)}\{d(v, w)\}$.
O diâmetro de um grafo G, denotado por $diam(G)$, é o valor da maior excentricidade em G.
O centro de um grafo G, denotado por $c(G)$, é o conjunto de vértices de G composto pelos vértices de menor excentricidade.
Logo, para calcular o diâmetro e o centro de G, precisamos calcular a excentricidade de cada vértice e para tal, vamos calcular a distância entre cada par de vértices de G.

$d(a, b) = 1, d(a, c) = 1, d(a, d) = 1, d(a, e) = 2, d(a, f) = 2, d(a, g) = 1, d(a, h) = 2;$

$d(b, c) = 1, d(b, d) = 1, d(b, e) = 2, d(b, f) = 1, d(b, g) = 2, d(b, h) = 2;$

$d(c, d) = 1, d(c, e) = 1, d(c, f) = 2, d(c, g) = 2, d(c, h) = 2;$

$d(d,e)=2, d(d,f)=2, d(d,g)=2, d(d,h)=1;$

$d(e,f)=1, d(e,g)=1, d(e,h)=1;$

$d(f,g)=1, d(f,h)=1,$

$d(g,h)=1.$

Assim, podemos concluir que $e(v)=2$ para todo vértice $v \in V(G)$. Como todas as excentricidades são iguais temos que o diâmetro de G é $diam(G)=2$ e o seu centro é o próprio conjunto $V(G)$, ou seja, $C(G)=\{V(G)\}$.

(e) Determine a matriz de adjacência de G.

Resposta: A matriz de adjacência $A=(a_{ij})$ é uma matriz $n \times n$ tal que:
$a_{ij}=1$, se $(v_i,v_j) \in E(G)$
$a_{ij}=0$, caso contrário.

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	0	1	1	1	0	0	1	0
b	1	0	1	1	0	1	0	0
c	1	1	0	1	1	0	0	0
d	1	1	1	0	0	0	0	1
e	0	0	1	0	0	1	1	1
f	0	1	0	0	1	0	1	1
g	1	0	0	0	1	1	0	1
h	0	0	0	1	1	1	1	0