Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AD1 - Segundo Semestre de 2010

Questões:

1. (1.5) Considere um conjunto A e o conjunto de partes de A, $P(A)$. Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Justifique cada resposta.

   (a) $\{A\} \in P(A)$;

   Resposta: A afirmação é falsa, já que A é um elemento de $P(A)$, logo $\{A\}$ é um subconjunto de $P(A)$, e não um elemento de $P(A)$. As afirmações corretas são:

   $$\{A\} \subseteq P(A)$$

   ou

   $$A \in P(A)$$

   (b) $\emptyset \subseteq P(A)$;

   Resposta: A afirmação é verdadeira, já que $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto. Como $P(A)$ é o conjunto das partes de A, temos que $\emptyset \subseteq P(A)$.

   (c) $\{\emptyset\} \subseteq P(A)$.

   Resposta: A afirmação é verdadeira, já que $\emptyset$ é um elemento do conjunto das partes de A ($P(A)$), e por consequência, $\{\emptyset\}$ é um subconjunto de $P(A)$.

2. (1.5) Sejam os seguintes conjuntos:

$A = \{n \in N : |n-3| \leq 27$ e n é múltiplo de $3\}$

$B = \{n \in N : 10 \ \leq 2n-3 \ \leq \ 100$ e n é múltiplo de $2\}$.

Observação: Consideramos os números naturais começando com 1.

(a) Determine explicitamente os conjuntos A, B e $A \cap B$. Justifique.

Resposta:

$$\begin{aligned}
A &= \{n \in N : |n-3| \leq 27 \text{ e } n \text{ é múltiplo de } 3\} &=\\
&= \{n \in N : n = 3k, |n-3| \leq 27, k \in N\} &=\\
&= \{n \in N : n = 3k, |3k-3| \leq 27, k \in N\} &=\\
&= \{n \in N : n = 3k, -27 \leq 3k-3 \leq 27, k \in N\} &=\\
&= \{n \in N : n = 3k, -27+3 \leq 3k \leq 27+3, k \in N\} &=\\
&= \{n \in N : n = 3k, -24 \leq 3k \leq 30, k \in N\} &=\\
&= \{n \in N : n = 3k, \tfrac{-24}{3} \leq k \leq \tfrac{30}{3}, k \in N\} &=\\
&= \{n \in N : n = 3k, -8 \leq k \leq 10, k \in N\} &=\\
&= \{n \in N : n = 3k, 1 \leq k \leq 10, k \in N\} &=\\
&= \{n \in N : n = 3k, k \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}\} &=\\
&= \{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \{n \in N : 10 \ \leq 2n-3 \ \leq \ 100 \text{ e } n \text{ é múltiplo de } 2\} &=\\
&= \{n \in N : n = 2q, 10 \leq 2n-3 \leq 100, q \in N\} &=\\
&= \{n \in N : n = 2q, 10 \leq 4q-3 \leq 100, q \in N\} &=\\
&= \{n \in N : n = 2q, 10+3 \leq 4q \leq 100+3, q \in N\} &=\\
&= \{n \in N : n = 2q, 13 \leq 4q \leq 103, q \in N\} &=\\
&= \{n \in N : n = 2q, \tfrac{13}{4} \leq q \leq \tfrac{103}{4}, q \in N\} &=\\
&= \{n \in N : n = 2q, 4 \leq q \leq 25, q \in N\} &=\\
&= \{n \in N : n = 2q, q \in \{4,5,6,7,\ldots,22,23,24,25\}\} &=\\
&= \{8,10,12,14,\ldots,44,46,48,50\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A \cap B &= \{n \in N : n \in A, n \in B\} &=\\
&= \{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\} \cap &\\
&\quad \{8,10,12,14,\ldots,44,46,48,50\} &=\\
&= \{12,18,24,30\}
\end{aligned}$$

(b) Calcule o número de elementos de $A \cup B$ usando o Princípio da Inclusão e Exclusão. Justifique.

Resposta: Do item anterior temos que $n(A) = 10$, $n(B) = 22$ e $n(A \cap B) = 4$. Pelo princípio da Inclusão e Exclusão, temos:

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) &= \\ &= 10 + 22 - 4 &= \\ &= 28 \end{aligned}$$

3. (2.0) Mostre pelo Princípio da Indução Matemática que:

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2}$$

Resposta: Seja $P(n)$: $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2}$ para todo n natural.

Base da indução:

Para $n = 1$, $\frac{(-1)^{1-1}1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$, logo $P(1)$ é verdadeira.

Hipótese de Indução:

Suponha verdadeiro para $k \geq 1$, isto é, $P(k)$ é verdadeira:

$$P(k) : 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{k-1}k^2 = \tfrac{(-1)^{k-1}k(k+1)}{2}$$

Passo da Indução:

Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeiro então $P(k+1)$ é verdadeiro, isto é, temos que provar que:

$$P(k+1) : 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{k}(k+1)^2 = \tfrac{(-1)^{k}(k+1)(k+2)}{2}$$

Desenvolvendo:

$$
\begin{aligned}
& 1-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^k(k+1)^2 & = \\
= \ & \underbrace{1-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{k-1}k^2}_{H.I.}+(-1)^k(k+1)^2 & = \\
= \ & \tfrac{(-1)^{k-1}k(k+1)}{2}+(-1)^k(k+1)^2 & = \\
= \ & \tfrac{(-1)^{k-1}k(k+1)+2(-1)^k(k+1)^2}{2} & = \\
= \ & \tfrac{1}{2}\left[(-1)^{k-1}k(k+1)+2(-1)^k(k+1)^2\right] & = \\
= \ & \tfrac{1}{2}(-1)^{k-1}(k+1)\left[k+2(-1)(k+1)\right] & = \\
= \ & \tfrac{1}{2}(-1)^{k-1}(k+1)\left[k-2k-2\right] & = \\
= \ & \tfrac{1}{2}(-1)^{k-1}(k+1)(-k-2) & = \\
= \ & \tfrac{1}{2}(-1)^{k-1}(k+1)(-1)(k+2) & = \\
= \ & \tfrac{1}{2}(-1)^{k}(k+1)(k+2) &
\end{aligned}
$$

Logo, pelo princípio da indução matemática, $P(n)$ é verdadeiro para todo n natural.

4. (1,5) 15 membros de uma família, com alturas diferentes, devem posar para uma fotografia ocupando 3 degraus de uma escadaria. Supondo que cada degrau deva conter exatamente 5 pessoas, responda:

(a) De quantas maneiras isso pode ser feito? Justifique.

Resposta: Para iniciar vamos dispor 5 membros da família no primeiro degrau da escadaria, o que pode ser feito de $A(15,5)$. Restando 10 membros da família para serem alocadas no segundo degrau, temos $A(10,5)$. Os 5 membros restantes, serão alocados no terceiro degrau, e isto pode ser feito de $A(5,5)$ maneiras. Pelo princípio multiplicativo, temos $A(15,5).A(10,5).A(5,5) = \frac{15!}{10!}\cdot\frac{10!}{5!}\cdot\frac{5!}{0!} = 15!$.
Observemos que poderíamos obter esse resultado considerando todos as permutações dos 15 membros da família.

(b) De quantas maneiras isso pode ser feito de modo que os 3 de menor estatura fiquem no primeiro degrau? Justifique.

Resposta: Nesta questão, como os 3 membros de menor estatura vão ficar no primeiro degrau, temos então 5 posições para alocarmos estes 3 membros, o que pode ser feito de $A(5,3)$. Agora, devemos dispor os 12 membros restantes em 2 posições do primeiro degrau da escadaria, o que pode ser feito de $A(12,2)$, 10 membros para serem alocadas no segundo degrau, temos $A(10,5)$, e os 5 membros restantes, serão alocados no terceiro degrau, e isto pode ser feito de $A(5,5)$ maneiras. Pelo princípio multiplicativo, temos $A(5,3).A(12,2).A(10,5).A(5,5) = \frac{5!}{2!}.\frac{12!}{10!}.\frac{10!}{5!}.\frac{5!}{0!} = 60.12!$.

5. (1.5) Um estudante precisa selecionar 5 disciplinas, entre 12, para o próximo semestre e uma delas tem de ser Física ou Álgebra Linear. De quantas maneiras o estudante pode escolher suas disciplinas? Justifique.

   Resposta: Todas as escolhas de 5 disciplinas entre 12, sendo uma delas Física ou Algebra Linear equivale a todos as seleções possíveis menos as seleções que não contém nem Física nem Algebra Linear, ou seja, $C(12,5) - C(10,5) = \frac{12!}{7!5!} - \frac{10!}{5!5!} = \frac{12.11.10.9.8 - 10.9.8.7.6}{5!} = \frac{95040-30240}{120} = 540$.

6. (2.0) Uma florista tem rosas, cravos, lírios e margaridas em estoque.

   (a) Quantos buquês diferentes de uma dúzia de flores podem ser feitos? Justifique.

   Resposta: Consideremos as seguintes variáveis:

   x_1: quantidade de ROSAS

   x_2: quantidade de CRAVOS

   x_3: quantidade de LÍRIOS

   x_4: quantidade de MARGARIDAS

   Encontrar o número de maneiras de selecionar 12 flores de 4 tipos diferentes é equivalente a resolver a equação:
   $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$, onde $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.
   Logo, a resposta é $CR_4^{12} = C_{12+4-1}^{12} = C_{15}^{12} = \frac{15!}{3!12!} = 455$ maneiras de selecionar 12 flores de 4 tipos diferentes.

   (b) Quantos buquês diferentes de uma dúzia de flores com pelo menos 2 rosas podem ser feitos? Justifique.

   Resposta: Consideremos as variáveis definidas no item a.

   Encontrar o número de maneiras de selecionar 12 flores de 4 tipos diferentes, sendo que devem ser selecionados pelo menos 2 ROSAS é equivalente a resolver a equação:
   $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$, onde $x_1 \geq 2$ e $x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

Fazendo a mudança de variável $x_1' = x_1 - 2$, onde $x_1', x_2, x_3, x_4 \geq 0$.
Portanto, podemos resolver:

$$x_1' + 2 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$$

$$x_1' + x_2 + x_3 + x_4 = 12 - 2 = 10$$

onde $x_1', x_2, x_3, x_4 \geq 0$.
Logo, a resposta é $CR_4^{10} = C_{10+4-1}^{10} = C_{13}^{10} = \frac{13!}{3!10!} = 286$ maneiras de selecionar 12 flores de 4 tipos diferentes, sendo que devem ser selecionados pelo menos 2 ROSAS.