Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD2 - Segundo Semestre de 2018

Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (1.3) Usando o Teorema das Linhas calcule a seguinte soma:

$$S = \sum_{k=1}^{n} (k-1)C_n^k.$$

Justifique.

Resposta: O Teorema das Linhas garante que:

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$$

Note, porém, que não é possível aplicá-lo diretamente a esta soma. Entretanto, observe que:

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n}(k-1)C_n^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} kC_n^k - \sum_{k=1}^{n} C_n^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{(n-k)!k!} - \sum_{k=1}^{n} C_n^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{(n-k)!k(k-1)!} - \sum_{k=1}^{n} C_n^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} - \sum_{k=1}^{n} C_n^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(n-1-(k-1))!(k-1)!} - \sum_{k=1}^{n} C_n^k \\
&= n\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!(k-1)!} - \sum_{k=1}^{n} C_n^k \\
&= n \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}}_{\text{Teorema das Linhas}} - \sum_{k=1}^{n} C_n^k \\
&= n2^{n-1} - \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} C_n^k}_{\text{Teorema das Linhas}} - C_n^0 \right) \\
&= n2^{n-1} - (2^n - 1) \\
&= n2^{n-1} - 2^n + 1 \\
&= 2^{n-1}[n-2] + 1
\end{aligned}
$$

2. (1.5) Determine o coeficiente de x^{16} no desenvolvimento do binômio de Newton
$$(\sqrt{2}\,x^3 - \frac{5}{x^4})^{101}.$$
Justifique.

Resposta: Pela fórmula do termo geral do desenvolvimento do binômio $(a+b)^n$ temos:

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$$

No binômio $(\sqrt{2}\,x^3 - \frac{5}{x^4})^{101}$ temos $a = \sqrt{2}\,x^3 = 2^{\frac{1}{2}}x^3$, $b = -\frac{5}{x^4} = -5x^{-4}$ e $n = 101$. Utilizando a fórmula do termo geral temos:

$$
\begin{aligned}
T_{k+1} &= C_{101}^k \left(2^{\frac{1}{2}}x^3\right)^{101-k}(-5x^{-4})^k \\
&= C_{101}^k \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{101-k}(x^3)^{101-k}(-5x^{-4})^k \\
&= C_{101}^k 2^{\frac{101-k}{2}} x^{303-3k}(-1)^k(5)^k x^{-4k} \\
&= C_{101}^k 2^{\frac{101-k}{2}} (-1)^k(5)^k x^{303-7k}
\end{aligned}
$$

Como queremos determinar o coeficiente de x^{16}, temos:

$$303 - 7k = 16$$

Donde, $k = 41$.

Portanto, estamos procurando o coeficiente do termo 42 dado por:

$$\begin{array}{rcl} T_{42} & = & C_{101}^{41} 2^{\frac{101-41}{2}} (-1)^{41} 5^{41} x^{16} \\ & = & -\frac{101!}{60!41!} 2^{30} 5^{41} x^{16} \end{array}$$

Logo, o coeficiente de x^{16} é $-\frac{101!}{60!41!} 2^{30} 5^{41}$.

3. (1.5) Determine a fórmula fechada da seguinte relação de recorrência:

$$b_n = \sqrt{3} b_{n-1} + \sqrt{2} \quad , \; b_0 = 1,$$

para $n \geq 1$. Justifique.

Resposta: Vamos utilizar o método das substituições regressivas.

$$\begin{array}{rcl} b_n & = & \sqrt{3} b_{n-1} + \sqrt{2} \\ & = & \sqrt{3}(\sqrt{3} b_{n-2} + \sqrt{2}) + \sqrt{2} \\ & = & \sqrt{3}^2 b_{n-2} + \sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ & = & \sqrt{3}^2 (\sqrt{3} b_{n-3} + \sqrt{2}) + \sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ & = & \sqrt{3}^3 b_{n-3} + \sqrt{3}^2 \sqrt{2} + \sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ & = & \sqrt{3}^3 (\sqrt{3} b_{n-4} + \sqrt{2}) + \sqrt{3}^2 \sqrt{2} + \sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ & = & \sqrt{3}^4 b_{n-4} + \sqrt{3}^3 \sqrt{2} + \sqrt{3}^2 \sqrt{2} + \sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ & \vdots & \\ & = & \sqrt{3}^i b_{n-i} + \sqrt{3}^{i-1} \sqrt{2} + \sqrt{3}^{i-2} \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{2} \end{array}$$

Quando $n - i = 0$ temos que $n = i$ e podemos escrever:

$$\begin{array}{rcl} b_n & = & \sqrt{3}^n b_0 + \sqrt{3}^{n-1} \sqrt{2} + \sqrt{3}^{n-2} \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{2} \\ & = & \sqrt{3}^n + \sqrt{2} \underbrace{(\sqrt{3}^{n-1} + \sqrt{3}^{n-2} + \ldots + \sqrt{3}^0)}_{\substack{\text{Soma da P.G.,} n \text{ termos, razão } q=\sqrt{3}, \\ a_1=\sqrt{3}^0=1, \text{ cuja soma vale } a_1.\frac{1-q^n}{1-q}.}} \\ & = & \sqrt{3}^n + \sqrt{2} \left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt{3}^{j-1} \right) \\ & = & \sqrt{3}^n + \sqrt{2} \left(\frac{1-\sqrt{3}^n}{1-\sqrt{3}} \right) \end{array}$$

4. (1.2) Em cada um dos casos abaixo, se a resposta for **NÃO** justifique, e se for **SIM** desenhe uma representação possível para o grafo.

   (i) Existe um grafo (simples) com 15 vértices, cada um com grau 5?

   Resposta: Não, pois o Teorema do Aperto de Mãos garante que a soma dos graus dos vértices de um grafo é um número par, a saber, $2m$, onde m é o número de arestas do grafo. Neste caso, $\sum_{v \in V} d(v) = 15 \times 5 = 75$, que é um número ímpar. Logo, este grafo não existe.

   (ii) Existe um grafo (simples) com a sequência de graus de vértices $(3, 3, 3, 3, 2)$?

   Resposta: Sim. Observe a Figura 1.

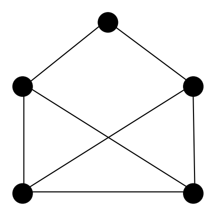

Figura 1: Grafo com sequência de vértices $(3, 3, 3, 3, 2)$.

5. (1.0) Seja F uma floresta com 5 componentes conexos tais que o número de vértices de cada componente é 11. Determine o número de vértices e o número de arestas de F. Justifique.

   Resposta: Em uma floresta, cada componente conexo é uma árvore. Em uma árvore, temos $m = n - 1$ arestas. Como em cada árvore $n = 11$, temos 10 arestas em cada. Além disso, como temos 5 componentes conexos, temos $5 \times 11 = 55$ vértices e $5 \times 10 = 50$ arestas em F.

6. (3.5) Considere o grafo bipartido completo $G = K_{2,6}$.

   (a) Desenhe o grafo G e desenhe também o seu grafo complemento $\overline{G}$.

   Resposta: Observe as Figuras 2 e 3.

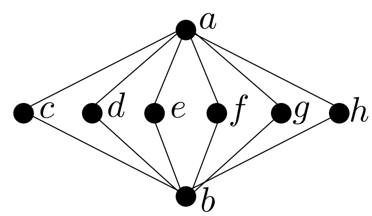

Figura 2: $G = K_{2,6}$.

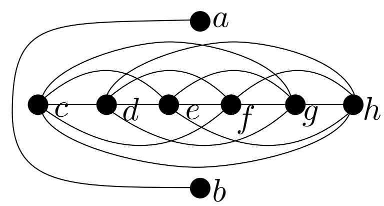

Figura 3: $\overline{G}$ (complemento do $K_{2,6}$).

(b) O grafo $\overline{G}$ é bipartido? Justifique.

Resposta: Não, pois tem ciclos de tamanho 3 e um grafo é bipartido se, e somente se, não possui ciclos ímpares.

(c) O grafo G é hamiltoniano? Justifique.

Resposta: Não. Seja $G = (V_1 \cup V_2, E)$, onde $V_1 = \{a, b\}$ e $V_2 = V \setminus V_1$. Começando a análise pelo vértice a, temos que alcançar um vértice em V_2. Seja x este vértice alcançado, $x \in V_2$. x só pode alcançar b agora. b, por sua vez, alcança algum outro vértice $y \neq x$ em V_2 e y só pode alcançar um vértice em V_1, pois o grafo é bipartido. Sendo assim, ou y retorna a x e repete-se um vértice, ou y retorna a a fechando um ciclo que não inclui todos os vértices do grafo. Logo, não existe ciclo Hamiltoniano em $K_{2,6}$.

(d) O grafo G é euleriano? Justifique.

Resposta: Sim, pois os vétices da parte 1 têm grau 6 e os vértices da parte 2 têm grau 2 e um grafo é Euleriano se, e somente se, todo vértice tem grau par.

(e) Determine o diâmetro e o centro de G. Justifique.

Resposta: O *diâmetro* de um grafo é a maior dentre as distâncias dos seus vértices. Note que os vértices de V_1 estão à distância 1 de qualquer vértice de V_2, e vice-versa. Além disso, vértices de uma parte estão à distância 2 de um outro vértice da mesma parte, independentemente de qual parte consideramos. Logo, a maior distância no grafo é entre vértices de uma mesma parte, a saber, $d(u, v) = 2$, se u, v pertencem a mesma parte da bipartição. Portanto, o diâmetro do grafo é 2.
O *centro* é um conjunto composto pelos vértices de menor excentricidade, onde *excentricidade* de um vértice é a maior distância deste vértice a um vértice qualquer do grafo. Neste caso, todos os vértices têm excentricidade 2 e, portanto, o centro é o conjunto composto por todos os vértices do grafo.