Aula 11: Arranjos com Repetição

Conteúdo:

- 🔷 Introdução
- Arranjo com repetição
- Número de arranjos com repetição

Introdução:

Exemplo 1:

Um prédio tem 8 portas. De quantas maneiras 1 pessoa pode entrar e sair?

• Observemos que a pessoa pode entrar e sair pela mesma porta.

Resolução:

entrada saída

Possibilidades $N = 8 \times 8 = 8^2$

- Interpretação do princípio multiplicativo aqui usada:

Se o evento "entrar por 1 porta" pode ocorrer de 8 maneiras e o evento "sair por 1 porta" pode ocorrer de 8 maneiras então o par de eventos, primeiro "entrar" e depois "sair", podem ocorrer de 8 × 8 maneiras.



Exemplo 1 (continuação):

 Outra interpretação do princípio multiplicativo (baseada em conjuntos):

$$A = \{ P_1, ..., P_8 \}, \quad n(A) = |A| = 8$$

 (P_i, P_j) representa entrada P_i e saída P_j , para i, j = 1, ..., 8.

$$A \times A = \{ (P_1, P_1), (P_1, P_2), \dots, (P_1, P_8), (P_2, P_1), \dots, (P_8, P_7), (P_8, P_8) \}$$

todas as possibilidades de entrar e sair

$$N = |A \times A| \stackrel{P.M.}{=} |A| \times |A| = 8^{2}$$

Resposta:

Uma pessoa pode entrar e sair de 64 maneiras diferentes.





Exemplo 2:

Quantos números distintos de 3 algarismos podem se formar com os dígitos 3, 5, 7, 8 e 9?

Resolução:

• Ilustração:

$$(\underbrace{3},\underbrace{5},\underbrace{5},\underbrace{5})$$
 representa $\underbrace{3},\underbrace{5},\underbrace{5}$ (posições dos dígitos \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 no número)

$$A = \{3, 5, 7, 8, 9\}$$

$$A \times A \times A = \{(u, v, w) \mid u \in A, v \in A, w \in A\} = \text{conjunto de possibilidades}$$

$$\mathbf{N} = \left| \mathbf{A} \times \mathbf{A} \times \mathbf{A} \right|^{\text{P.M.}} = \left| \mathbf{A} \right| \times \left| \mathbf{A} \right| \times \left| \mathbf{A} \right| = \left| \mathbf{A} \right|^3 = \mathbf{5}^3$$

(pois
$$A \times A \times A = (A \times A) \times A$$
, logo $|A \times A \times A| = |(A \times A) \times A| = |A \times A$

$$|A \times A| \times |A| \stackrel{\text{P.M.}}{=} |A| \times |A| \times |A|$$

Resposta: Podem se formar $5^3 = 125$ números diferentes com 3 algarismos escolhidos entre 3, 5, 7, 8 e 9.





cederi

Exemplo 3:

Quantos números distintos de 8 algarismos podem se formar com os dígitos 3, 5, 7, 8 e 9?

Resolução:

$$A = \{3, 5, 7, 8, 9\}$$
, $|A| = 5$

representamos um número de 8 algarismos por:

• Ilustração:

35789359
$$\stackrel{\text{associado}}{\longleftarrow}$$
 (3, 5, 7, 8, 9, 3, 5, 9) $\in A \times A \times ... \times A$

conjuntode possibilidades: $\mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf$

Resposta: Pelo princípio multiplicativo podem se formar

$$|B| = |A|^8 = 5^8$$
 números de 8 algarismos com 3, 5, 7, 8 e 9.







Características dos exemplos:

- Os <u>elementos</u> considerados $a_1, a_2, ..., a_n$ são <u>diferentes</u> $(A = \{a_1, a_2, ..., a_n\})$
- Cada escolha de r elementos ordenados, repetidos ou não, de a₁, a₂, ..., a_n corresponde a <u>uma</u> possibilidade

(os r elementos ordenados correspondem a 1 r-upla do conjunto $B = \underbrace{A \times ... \times A}_{r}$)

 Na obtenção do número de possibilidades aplica-se o princípio multiplicativo.

$$(N = |B|)$$



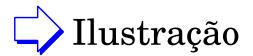


Arranjo com repetição:



Dados n objetos <u>distintos</u> $a_1, a_2, ..., a_n$, um <u>arranjo com repetição</u> de n elementos tomados r a r é uma <u>ordenação</u> de r elementos escolhidos entre $a_1, a_2, ..., a_n$, que podem ser repetidos.

(não são consideradas permutações entre elementos iguais)



- 357, 989, 998 são arranjos com repetição de 5 elementos, 3, 5, 7, 8 e 9, tomados 3 a 3.
- 35789359 é um arranjo com repetição de 5 elementos, 3, 5, 7, 8 e 9 tomados 8 a 8.
- Observação: Pode ser $r \le n$ ou r > n.



cederj



Número de escolhas dos exemplos anteriores:

Exemplo 1 Exemplo 2 Exemplo 3

2 entre 8 portas

3 entre 5 algarismos

8 entre 5algarismos

Resposta:

8²

5³

5⁸





cederj

Número de arranjos com repetição:



Problema:

Dados n elementos distintos a₁, a₂, ..., a_n,

<u>encontrar</u> o número de arranjos com repetição
de n elementos tomados r a r



Propriedade:

O número de <u>arranjos com repetição</u> de n elementos distintos tomados r a r, denominado A_n^r , é dado por:

$$A_n^r = n^r$$



Observação:

$$A_n^r = \left[\underbrace{A \times ... \times A}_r \right]$$
 onde $A = \{ a_1, a_2, ..., a_n \}$





Exemplo 1:
$$A_8^2 = 8^2$$
 (n = 8, r = 2)

Exemplo 2:
$$A_5^3 = 5^3$$
 (n = 5, r = 3)

Exemplo 3:
$$A_5^8 = 5^8$$
 (n = 5, r = 8)

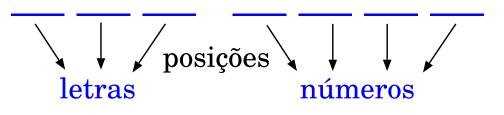
$$AR_n^r$$
, $AR(n, r)$

Exemplo 4:

As placas dos automóveis são formadas por três letras seguidas de quatro dígitos. Quantas placas podem ser formadas?

Resolução:

As letras do alfabeto são 26.



número de letras = 26

número de letras numa placa = 3

número de dígitos = 10

número de dígitos numa placa





Exemplo 4 (continuação):

Característica:



Sequências ordenadas de 3 letras e
4 números que podem ser repetidos.

Número de possibilidades:

letras números

$$A_{26}^3$$
 \times A_{10}^4 = $26^3 \times 10^4 = 17576 \times 10^4$

Resposta:

Tem-se 175.760.000 placas diferentes com 3 letras e 4 números.





Exemplo 5:

Quantos números naturais de 3 algarismos, na base 10, existem?

Resolução:

dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

os dígitos podem ser iguais

Possibilidades:

$$\frac{8}{9} \times A_{10}^2 = 9 \times 10^2 = 900$$

Resposta:

Tem-se 900 números naturais de 3 algarismos.





Exemplo 6:

Quantos números naturais ímpares, m, existem entre 1000 e 9999 (1000 < m < 9999)?

Resolução:

• dígitos ímpares: 1, 3, 5, 7, 9

$$|\mathbf{U}| = \mathbf{9} \times \mathbf{A}_{10}^{2} \times \mathbf{5}$$

$$p_{1} \quad p_{2} \quad p_{3} \quad p_{4}$$

- dígitos na posição p₁: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- dígitos na posição $p_4:1,3,5,7,9$ (excluímos 9999)
- dígitos nas posições p₂ e p₃: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- $U = \{ p \in \mathbb{N} \mid p \text{ impar, } 1001 \le p \le 9999 \}, B = \{ 9999 \}$

Possibilidades:
$$|U - B| = |U| - |B| = 9 \times 10^2 \times 5 - 1$$

Resposta:

Existem 4499 números ímpares entre 1000 e 9999.







Preliminares para os próximos exemplos:

Representação decimal dos números

Ilustração:

•
$$30,25: 3 \times 10^{1} + 0 \times 10^{0} + 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$$

•
$$-\frac{1}{3} = -0.333 \dots 3 \dots : -[3 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} + \dots + 3 \times 10^{-k} + \dots] =$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} 3 \times 10^{-k}$$
termo geral

•
$$\pi = 3,1415926...$$
:

$$3 \times 10^{0} + 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-4} + 9 \times 10^{-5} + \dots$$

Observação:

Os números racionais admitem uma representação decimal com finitos dígitos ou com infinitos dígitos periódicos. Os números irracionais admitem uma representação decimal com infinitos dígitos não periódicos.

cederi







Preliminares (continuação):

- Representação bináriaIlustração:
- Expressão binária de 30,25 : 11110,01

$$(30,25 = 1 \times 2^{4} + 1 \times 2^{3} + 1 \times 2^{2} + 1 \times 2^{1} + 0 \times 2^{0} + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2})$$

• Expressão binária de $-\frac{1}{3}$: -0,010101 ... 01... (binário periódico)

$$(-\frac{1}{3} = -[0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} + ... + 0 \times 2^{-(2n-1)} + 1 \times 2^{-2n} + ...])$$

Expressão binária de π : 11,0010010000011...
 (binário não periódico)







11.17



Preliminares (continuação):

Número decimal real

30,25 30,25

 π

decimal em aritmética de ponto flutuante

 $10^2 \times 0,3025$

binária

Representação

11110,01

binária em aritmética de ponto flutuante

 $2^5 \times 0,1111001$

 $-0.333 \dots 3 \dots \left| -10^{0} \times 0.33 \dots 33 \right| -0.0101 \dots 01 \dots \left| -2^{-1} \times 0.101010 \dots 10 \right| \dots$

3,1415926... $10^{12} \times 0,31415$ 11,001001000... $2^{12} \times 0,1100100100$

potência de 10

mantissa normalizada decimal

potência de 2

mantissa normalizada binária

Característica de uma mantissa normalizada: o primeiro decimal (ou binário) é <u>diferente</u> de <u>0</u> cederi

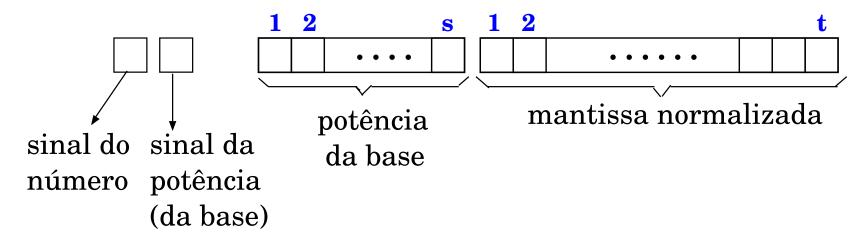






Preliminares (continuação):

 Representação dos números no computador
 Os <u>números</u> são <u>armazenados</u> em um computador (ou calculadora) em uma <u>palavra</u>



Sinal do número 0:+, s: tamanho da potência ou da potência 1:-, t: tamanho da mantissa





Arranjos com repetição: Número de arranjos

11.19



Preliminares (continuação):

Ilustração

Armazenamos os números –30,3125 e 0,0263671875 numa máquina

- (a) decimal com s = 2, t = 8
- (b) binária com s = 4, t = 8

(a)

$$-30,3125 = -10^2 \times 0,303125$$

(número armazenado exatamente)

$$0,0263671875 = 10^{-1} \times 0,263671875$$

(truncamento do número)



cederj

Arranjos com repetição: Número de arranjos

11.20



Preliminares (continuação):

(b) binária com s = 4, t = 8

(truncamento do número)

 $= -2^5 \times 0,111100101$

 $(5 \xrightarrow{\text{repr.}} 101$

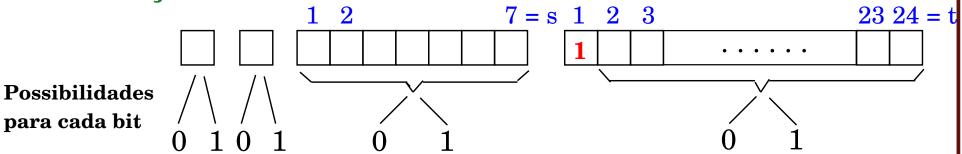
(número armazenado exatamente)

$$=2^{-5}\times0,11011$$

Exemplo 7:

Considere uma máquina <u>binária</u> (Intel 8087) que armazena os números em uma palavra com 24 bits para a mantissa, 7 bits para a potência de 2, 1 bit para o sinal da potência e 1 bit para o sinal do número. Quantos números são armazenados exatamente nesta máquina?

Resolução:



$$n=2$$
 (0, 1) , $r=\underbrace{1}_{\text{sinal}}+\underbrace{1}_{\text{potência}}+\underbrace{23}_{\text{mantissa}}=32$

Resposta: Nesta máquina são armazenados exatamente



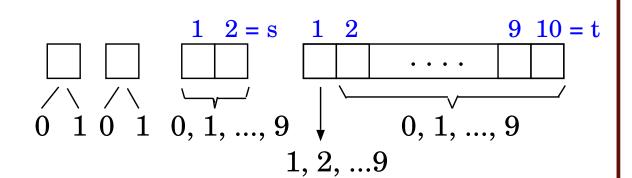
$$A_2^{32} = 2^{32} = 4.294.967.296$$
 números.

Exemplo 8:

Seja uma máquina <u>decimal</u> (HP-11C) cuja palavra tem s = 2 e t = 10. Quantos números são armazenados exatamente nesta máquina?

Resolução:

Possibilidades para cada posição



Possibilidades:

- sinais: $A_2^2 = 2^2$
- primeira posição da mantissa (normalizada) : 9
- posições restantes da mantissa e da potência : $A_{10}^{2+9} = A_{10}^{11} = 10^{11}$

Resposta: Pelo princípio multiplicativo tem-se $2^2 \times 9 \times 10^{11}$ números armazenados exatamente.

Observação:
$$2^2 \times 9 \times 10^{11} > 2^2 \times 2^2 \times (2 \times 4)^{11} = 2^{37} > 2^{32}$$





Resumo:

Considere n objetos <u>distintos</u> $a_1, a_2, ..., a_n (A = \{a_1, ..., a_n\})$

Conceito:

Arranjo com repetição de n objetos tomados r a r

Características:

Importa os <u>objetos</u> considerados, as suas <u>repetições</u> e a <u>posição</u> dos elementos distinguíveis.

(exemplos:
$$a_1 a_1 a_2 a_3 \dots a_{r-2} \neq a_1 a_2 \dots a_{r-2} a_1 a_1 \neq a_1 a_2 a_3 \dots a_{r-2} a_r a_r$$
)

Propriedade:

Número de arranjos com repetição de n objetos

tomados
$$\mathbf{r}$$
 a \mathbf{r} : $\mathbf{A}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{r}} = \mathbf{n}^{\mathbf{r}} = \left[\underbrace{\mathbf{A} \times ... \times \mathbf{A}}_{\mathbf{r}} \right]$

Observação: $r \le n$ ou r > n

cederj