Módulo: Indução matemática

- Princípio da indução matemática
- Indução forte

Objetivo:

- Aprender uma técnica para provar resultados matemáticos.

Importância:

- É uma técnica poderosa e muito útil usada para provar resultados que envolvem os números naturais.

Por exemplo:

Provar que $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2} \quad \forall \; n \in \mathbb{N}$

Aula 4: Princípio da indução matemática

Conteúdo:

- Introdução
- Princípio da indução matemática (PIM)
- Princípio da indução matemática generalizado

Introdução:

Idéia intuitiva:

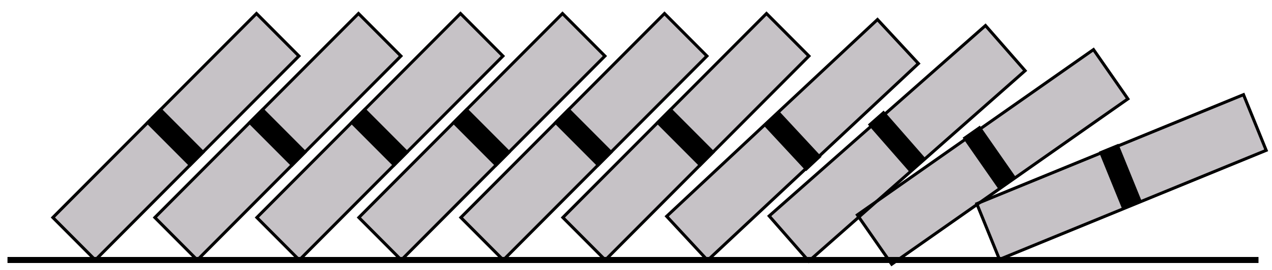
Exemplo 1:

Consideremos uma sequência de dominós alinhados tal que:

Se um cair ele vai derrubar o seguinte

PIM

Voltar



Observação:

Se o primeiro dominó cair então todos os outros cairão.

cederj

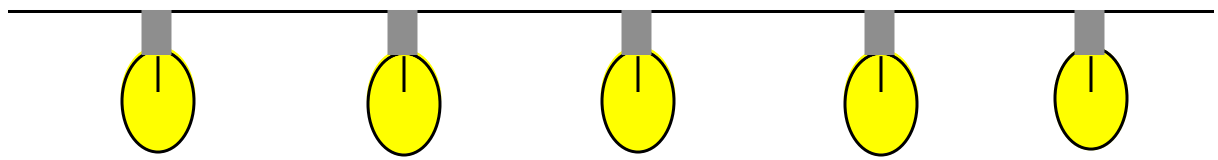
Exemplo 2:

Consideremos lâmpadas elétricas alinhadas e conectadas tal que:

ao acender uma delas acende-se a seguinte

PIM

Voltar



Observação:

Se a primeira lâmpada for acesa então todas as outras estarão acesas.

Princípio da indução matemática:

Formalização:

- Seja P(n) uma afirmação, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Se : (i) P(1) verdadeira e

(ii) P(k) verdadeira => P(k+1) verdadeira, $\forall$ k $\in \mathbb{N}$

Então P(n) verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para aplicarmos o PIM precisamos executar os três passos a seguir:

(1) Base da indução:

Mostrar que $P(n)$ verdadeira para $n = 1$

(2) Hipótese de indução:

Assumir que $P(k)$ verdadeira para $k \geq 1$

(3) Passo indutivo:

Mostrar que $P(k + 1)$ verdadeira, assumindo (2).

Exemplo 3:

- Mostre que $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2} \quad \forall \; n \in \mathbb{N}$.

Prova:

Seja $P(n) : 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(1) Base da indução:

$P(1) : 1 = \dfrac{1(1+1)}{2} = 1$ verdadeira

(2) Hipótese de indução (HI): Assuma que P(k) é verdadeira, $k \geq 1$:

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

(3) Passo indutivo:

$$P(k) \text{ verdadeira} \Rightarrow \underbrace{P(k+1) \text{ verdadeira}}_{1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}}$$

Desenvolvendo:

$$\underbrace{1 + 2 + \ldots + k}_{\| \text{ (HI)}} + (k+1) =$$

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} =$$

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} =$$

$$\frac{k^2 + 3k + 2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Logo P(k+1) verdadeira

Então pelo PIM

$$P(n) : 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{verdadeira} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Exemplo 4:

- Mostre que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \quad \forall \; n \in \mathbb{N}$.

Prova:

Seja $P(n) : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

(1) Base da indução:

$P(1) : 1 = 1^2$ verdadeira

(2) Hipótese de indução (HI):

$P(k) : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$ verdadeira

(3) Passo indutivo:

$$\underbrace{P(k)}\ \text{verdadeira} \Rightarrow \underbrace{P(k+1)}_{1+3+\ldots+[2(k+1)-1]=(k+1)^2}\ \text{verdadeira}$$

Desenvolvendo:

$$\underbrace{1+3+\ldots+(2k-1)}_{\overset{\text{(HI)}}{=}\ k^2} + \underbrace{[\,2(k+1)-1\,]}_{=\ 2k+1} = (k+1)^2$$

Logo $P(k+1)$ verdadeira

Então pelo PIM

$P(n) : 1+3+\ldots+(2n-1) = n^2$ verdadeira $\forall\ n \in \mathbb{N}$

Exemplo 5:

- Mostre que 8 divide $3^{2n} - 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Prova:

Seja $P(n)$: 8 divide $3^{2n} - 1$

ou

$3^{2n} - 1 = 8 \,.\, p$ para algum $p \in \mathbb{N}$

(1) Base da indução:

$P(1) : 3^{2 \cdot 1} - 1 = 9 - 1 = 8 \cdot 1 \quad (p = 1)$ verdadeira

(2) Hipótese de indução:

P(k) verdadeira,

$3^{2k} - 1 = 8 \cdot p$ para algum $p \in \mathbb{N}$

(3) Passo indutivo:

$$P(k) \text{ verdadeira } \Rightarrow \underbrace{P(k+1)}_{3^{2(k+1)} - 1 = 8 \,.\, p \text{ para algum } p \in \mathbb{N}} \text{ verdadeira}$$

<u>Desenvolvendo</u>:

$$3^{2(k+1)} - 1 = 3^{2k} \,.\, 3^2 - 1 = 3^{2k}(8+1) - 1 =$$

$$= 3^{2k} \,.\, 8 + 3^{2k} - 1 = \underbrace{3^{2k} \,.\, 8}_{\substack{\parallel \\ 3^{2k} \,.\, 8}} + \underbrace{3^{2k} - 1}_{\substack{\parallel\,(HI) \\ 8 \,.\, p}}$$

$$3^{2(k+1)} - 1 = 3^{2k} . 8 + 8 . p = \underbrace{8 . (3^{2k} + p)}_{\in \mathbb{N}} \qquad (p = 3^{2k} + p)$$

Logo P(k+1) verdadeira

Então pelo PIM

P(n) : 8 divide $3^{2n} - 1$ verdadeira $\forall \; n \in \mathbb{N}$

Princípio da indução matemática generalizado:

Princípio da indução matemática generalizado

Seja P(n) uma afirmação, para cada inteiro positivo n.

Se:

(i') P(n_0) verdadeira e

(ii') P(k) verdadeira => P(k+1) verdadeira, $\forall$ k $\geq n_0$, k $\in \mathbb{N}$

Então P(n) verdadeira $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

PIM Voltar

cederj

Para aplicarmos o PIM generalizado precisamos executar os três passos a seguir:

(1) Base da indução:

Mostrar que P(n) verdadeira para $n = n_0$

(2) Hipótese de indução:

Assumir que P(k) verdadeira para $k \geq n_0$

(3) Passo indutivo:

Mostrar que P(k + 1) verdadeira, assumindo a hipótese de indução (2)

cederj

Exemplo 6:

- Mostre que $n^2 > 3n \quad \forall \; n \geq 4 \,,\; n \in \mathbb{N}$.

Prova:

Seja $P(n) : \; n^2 > 3n \,,\; n \geq 4$

(1) Base da indução:

$P(4) : 16 > 3 \,.\, 4 = 12$ verdadeira

(2) Hipótese de indução:

$P(k) : k^2 > 3k \,, \quad k \geq 4$ verdadeira

(3) Passo indutivo:

$$P(k) \text{ verdadeira} \Rightarrow \underbrace{P(k+1)}_{k^2+2k+1 \,=\, (k+1)^2 \,>\, 3(k+1)} \text{ verdadeira}$$

Desenvolvendo:

$$P(k):\ k^2 > 3k \text{ verdadeira para } k \geq 4$$

$$\underbrace{k^2 + (2k+1)}_{(k+1)^2} > 3k + (2k+1) \overset{(k \geq 4)}{\geq} 3k + 8 + 1 = 3k + 9$$

$$(k+1)^2 > 3k + 9 = 3(k+3) > 3(k+1)$$

Logo P(k + 1) verdadeira

Então pelo PIM generalizado

$$P(n): n^2 > 3n \text{ verdadeira } \forall\, n \geq 4$$

- Verifique que:

$P(n) : n^2 > 3n$ não é verdadeira para $n = 1, 2, 3$

$$\left.\begin{array}{l} P(1) : 1^2 > 3 \,.\, 1 \\ P(2) : 2^2 > 3 \,.\, 2 \\ P(3) : 3^2 > 3 \,.\, 3 \end{array}\right\} \text{não são verdadeiras}$$

Resumo:

Princípio PIM generalizado

- Estrutura

  - Base de indução: P(n) verdadeira $n = n_0$
  - Hipótese de indução: P(k) verdadeira $\forall$ k $\geq n_0$
  - Passo indutivo: P(k) verdadeira => P(k + 1) verdadeira

- Em particular

  $n_0 = 1$: PIM

Exercícios:

Prove usando indução matemática

(i) $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{(n-1)} = 2^n - 1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$

(ii) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(iii) $2 + 5 + 8 + \ldots + (3n - 1) = \dfrac{n(1+3n)}{2}$

(iv) $(1 + 1)\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)\left(1 + \dfrac{1}{3}\right) \ldots \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = n + 1$

(v) 2 divide $n^2 + n$