Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP3 - Primeiro Semestre de 2019

Questões:

1. (1.5) Mostre usando indução matemática que:

$$3 + \ 5 \ + \ 7 \ + \ + \cdots + (2n-1) = n^2 \ - 1$$

para todo número natural maior ou igual a 2, ($n \geq 2$).

Resposta: Seja $P(n) : 3 + \ 5 \ + \ 7 \ + \ + \cdots + (2n-1) = n^2 \ - 1$, $\forall n \in N, n \geq 2$.

BASE DA INDUÇÃO: Vamos mostrar que $P(2)$ é verdadeira.

$3 = 4 - 1 = 2^2 - 1$. Logo, temos que $P(2)$ é verdadeira.

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Suponha que $P(k) : 3 + \ 5 \ + \ 7 \ + \ + \cdots + (2k-1) = k^2 \ - 1$ seja verdadeira, para todo $k \geq 2$.

PASSO INDUTIVO: Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeira, para $k \geq 2$, então $P(k+1) : 3 + \ 5 \ + \ 7 \ + \ + \cdots + [2(k+1) - 1] = (k+1)^2 \ - 1$ é verdadeira.

$$\underbrace{3 + \ 5 \ + \ 7 \ + \ + \cdots + (2k-1)}_{H.I.} + [2(k+1) - 1] =$$

$$k^2 \ - 1 + [2(k+1) - 1] =$$

$$k^2 \ - 1 + 2k + 2 \ - 1 =$$

$$k^2 + 2k + 1 \; - 1 =$$

$$(k+1)^2 \; - 1 =$$

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, $P(n) : 3 + \; 5 \; + \; 7 \; + + \cdots + (2n-1) = n^2 \; - 1, \; \forall n \in N, n \geq 2$.

2. (1.0) As placas novas dos veículos contêm 4 letras (**l**) dentre 26 do alfabeto e 3 números (**n**) dentre os 10 digitos, arrumados da seguinte forma: **lllnlnn**(as 3 primeiras posições são letras, depois segue um número, a continuação é uma letra e as duas últimas posições são números).
Quantas são as placas nas quais as letras são todas diferentes, os números podem estar repetidos e devem começar com a letra A? Justifique.

   Resposta: Como devemos escolher 4 letras diferentes em um alfabeto com 26 letras sendo que as placas devem começar com a letra A, e importa a ordem, então basta fixarmos a letra A na primeira posição e escolhermos 3 letras distintas e diferentes da letra A, o que pode ser feito com $A(25,3) = \frac{25!}{(25-3)!} = 13800$, e devemos escolher 3 algarismos entre 10 algarismos que podem ser repetidos, então temos $AR_{10}^3 = 10^3 = 1000$.

   Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $13800 \times 1000 = 13.800.000$ placas possíveis, onde todas as letras são diferentes, começam com a letra A e os algarismos podem ser repetidos.

3. (1.5) Em uma estante devemos arrumar 5 livros iguais de matemática, 4 livros iguais de química e 3 livros iguais de física. De quantas maneiras podemos arrumar os livros se:

   (a) não temos restrições? Justifique;

   Resposta:

   Na estante devemos arrumar 5 livros iguais de matemática, 4 livros iguais de química e 3 livros iguais de física. Nessas circunstâncias, sabemos que o número de maneiras que podemos arrumar os livros é dado por:

$$P_{12}^{5,4,3} = \frac{12!}{5!4!3!}.$$

Portanto, temos $P_{12}^{5,4,3} = \frac{12!}{5!4!3!}$ maneiras de arrumar a estante com 5 livros iguais de matemática, 4 livros iguais de química e 3 livros iguais de física.

(b) os livros de física não podem ficar juntos? Justifique.

Resposta: Vamos primeiramente arrumar os livros de matemática e os livros de química e, depois vamos entremear os livros de física. O número de modos de arrumar a estante é $P_9^{5,4} = \frac{9!}{5!4!}$. Para cada arrumação da estante com os livros de Matemática e Química, por exemplo, $MQQMQMMQM$, podemos colocar os 3 livros de física nos 10 espaços vazios da figura:

____ M ____ Q ____ Q ____ M ____ Q ____ M ____ M ____ Q ____ M ____

Temos, então, $C_{10}^3 = \frac{10!}{7!3!}$ modos de escolher os 3 espaços que serão ocupados os livros de física dentre 10.

Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $P_9^{5,4} \times C_{10}^3 = \frac{9!}{5!4!} \times \frac{10!}{7!3!}$ maneiras de arrumarmos uma estante com 5 livros de matemática, 4 livros de química e 3 livros de física de modo aos livros de física não ficarem juntos.

4. (1.5) Determine o termo independente no desenvolvimento do binômio de Newton se:

$$(x^3 - \frac{1}{2x})^{52}$$

Justifique a resposta.

Resposta: Como $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b^k a^{n-k}$ temos que o termo geral desta soma corresponde a

$$T_{k+1} = C_n^k b^k a^{n-k}$$

O objetivo da questão é determinar o termo independente, isto é, coeficiente de x^0, portanto devemos encontrar o termo que contém tal coeficiente. Para isso, precisamos determinar k.

Neste caso temos $n = 52$, $a = x^3$ e $b = -\frac{1}{2x}$. Assim, resulta:

$$\begin{aligned}
T_{k+1} &= C_{52}^{k} \left(-\tfrac{1}{2x}\right)^{k} (x^3)^{52-k} \\
&= C_{52}^{k} (-1)^{k} (2x)^{-k} x^{156-3k} \\
&= C_{52}^{k} (-1)^{k} 2^{-k} x^{-k} x^{156-3k} \\
&= C_{52}^{k} (-1)^{k} 2^{-k} x^{-k+156-3k} \\
&= C_{52}^{k} (-1)^{k} 2^{-k} x^{-4k+156}
\end{aligned}$$

Como queremos encontrar o coeficiente de x^0, deve ser $-4k + 156 = 0$. Então $k = \frac{156}{4} = 39$. Logo o coeficiente de x^0 é dado por:

$$C_{52}^{39} (-1)^{39} 2^{-39} = -2^{-39} \frac{52!}{39!13!}.$$

5. (1.5) Seja G um grafo com 3 componentes conexos G_1, G_2 e G_3. Sabendo que G_1 é uma árvore com 11 arestas, G_2 é um grafo 5-regular com 20 arestas e G_3 é um grafo ciclo com 9 arestas, determine o número de vértices e o número de arestas de G. Justifique.

   Resposta: Vamos calcular o número de arestas e o número de vértices em cada componente conexo e em seguida somar os resultados para obter o número de arestas e o número de vértices do grafo. Denotaremos por n_i e m_i os números de vértices e arestas, respectivamente, no componente conexo G_i, $i = 1, 2, 3$.

   Sabemos que em uma árvore T temos $m = n - 1$, onde m é o número de arestas e n o número de vértices de T.

   Como G_1 é árvore, $m_1 = n_1 - 1 \Rightarrow n_1 = m_1 + 1$. Como G_1 possui $m_1 = 11$ arestas, temos então que G_1 possui $n_1 = 11 + 1 = 12$ vértices.

   Logo, G_1 possui 12 vértices e 11 arestas.

   Como G_2 é 5-regular, isto é, todo vértice de G tem grau 5 e possui $m_2 = 20$ arestas, logo temos pelo Teorema do Aperto de Mãos que:

$$\sum_{v \in V(G_2)} d(v) = 2m_2$$
$$5 \times n_2 = 2 \times 20$$
$$5n_2 = 40$$
$$n_2 = \frac{40}{5}$$
$$n_2 = 8$$

Logo, G_2 tem 8 vértices e 20 arestas.

Em um ciclo, o número de vértices e de arestas é igual, isto é, $m = n$. Como G_3 é um ciclo com 9 arestas, temos então que G_3 possui 9 vértices.

Note que entre os componentes conexos, por definição, não temos arestas. Assim, o número total de arestas de G, que denotaremos por m é:

$$m = m_1 + m_2 + m_3$$
$$m = 11 + 20 + 9$$
$$m = 40$$

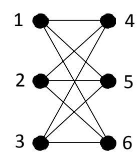
O número total de vértices de G, que denotaremos por n é:

$$n = n_1 + n_2 + n_3$$
$$n = 12 + 8 + 9$$
$$n = 29$$

Concluímos que o grafo G possui 29 vértices e 40 arestas.

6. (3.0)) Seja $G = (V, E)$ dado por:
$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \}$ e $E = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$

O grafo abaixo ilustra o grafo G com o conjunto de vértices e conjunto de arestas como descrito no enunciado da questão:



$K_{3,3}$

(a) G é euleriano? Justifique.

Resposta: Não. Sabemos que um grafo G é euleriano se ele admite um circuito euleriano, isto é, um circuito que passe por todas as arestas exatamente uma vez. E além disso, temos a seguinte caracterização para os grafos eulerianos: Um grafo é euleriano se e somente se o grau de todos os seus vértices é par.

Temos no grafo G que $d(1) = d(2) = d(3) = d(4) = d(5) = d(6) = 3$, ou seja, todos os vértices possuem grau ímpar, não satisfazendo a caracterização de grafos eulerianos.

(b) G é hamiltoniano? Justifique.

Resposta: Sim. Um grafo G é hamiltoniano se existe um ciclo que contém todos os vértices distintos de G. O ciclo hamiltoniano de G é 1 5 2 6 3 4 1

(c) G é planar? Justifique.

Resposta: Não, pois como G é o $K_{3,3}$ então pelo teorema de Kuratowski temos que G não é planar.

(d) Determine o centro e o diâmetro de G. Justifique.

Resposta: A excentricidade de um vértice v de G, $e(v)$, é o valor da maior distância de v aos outros vértices de G, isto é, $e(v) = max_{w \in V(G)}\{d(v,w)\}$. O diâmetro de um grafo G é o valor da maior excentricidade, isto é, $diam(G) = max_{v \in (G)}\{e(G)\}$.

Como $d(1,4) = d(1,5) = d(1,6) = d(2,4) = d(2,5) = d(2,6) = d(3,4) = d(3,5) = d(3,6) = 2$ e $d(1,2) = d(1,3) = d(2,3) = d(4,5) = d(4,6) = d(5,6) = 1$. Temos então que $e(1) = e(2) = e(3) = e(4) = e(5) = e(6) = 2$.

Logo, $diam(G) = 2$.

E, o centro de um grafo G é o conjunto dos vértices de G que tem a menor excentricidade, isto é, $c(G) = \{v \in V(G) \backslash e(v) \text{ é mínima}\}$.

Então, $c(G) = \{1,2,3,4,5,6\} = V(G)$.