Gabarito da AP3 de Fundamentos de Algoritmos para Computação

Questões:

1. (1.5) Mostre usando indução matemática que:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

para todo número natural.

Resposta: Seja $P(n) : 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$, para $n \in \mathbb{N}$.

Base da indução: Para $n = 1$, temos que $1 \cdot 2 = 2$ e $\frac{1}{3} \cdot 1(1+1)(1+2) = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3 = 2$. Logo, $P(1)$ é verdadeira.

Hipótese de indução:

Suponha verdadeiro para k, isto é, $P(k)$ é verdadeiro:

$$P(k) : 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$$

Devemos provar que $P(k+1)$ é verdadeiro, isto é:

$$P(k+1) : 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$$

Desenvolvendo o primeiro membro, e usando a hipótese de indução, temos que:

$$\underbrace{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + k(k+1)}_{HI := \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)} + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)$$

Como,

$$\frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) = (k+1)(k+2)(\frac{1}{3}k + 1) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$$

Então, concluímos que $P(k+1)$ é verdadeira.

Logo, pelo princípio da indução, a expressão é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. (1.5) Quantas são as permutações dos números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ nos quais 3 e 5 não estão juntos? Justifique.

Resposta: O número de permutações dos números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ nos quais 3 e 5 não estão juntos pode ser calculado das seguintes maneiras:

Primeira maneira: Primeiro realizamos a permutação dos números $1, 2, 4, 6, 7, 8$, que é igual a $P_6 = 6!$. Colocamos o 3 e o 5 nos espaços entre esses números:

— ● — ● — ● — ● — ● — ● —

isso pode ser feito de $A_2^7 = \frac{7!}{(7-2)!} = 7 \cdot 6$

Logo, pelo princípio multiplicativo, o número de permutações dos números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ nos quais 3 e 5 não estão juntos é $P_6 \cdot A_2^7 = 6 \cdot 7 \cdot 6! = 6 \cdot 7!$.

Segunda maneira: Neste raciocínio usamos o conceito de complementaridade. Temos os seguintes conjuntos:
A : é o conjunto de todas as permutações de $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ nas quais 3 e 5 não estão juntos.
B : é o conjunto de todas as permutações de $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.
C : é o conjunto de todas as permutações de $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ nas quais 3 e 5 estão juntos.

Queremos calcular $n(A) = n(B - C) = n(B) - n(C)$.

Calculamos $n(B)$, ou seja, o número de permutações dos números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, que é igual a $P_8 = 8!$. Depois calculamos $n(C)$. Para fazer isso, consideremos, inicialmente, o 3 e o 5 como um único número. Desta forma, temos permutações de 7 $P_7 = 7!$. Como temos duas posições para o 3 e 5, 3, 5 ou 5, 3, resulta $n(C) = 2P_7 = 2 \cdot 7!$. Logo, o resultado é $P_8 - 2P_7 = 8! - 2 \cdot 7! = 7!(8 - 2) = 6 \cdot 7!$.

3. (1.5) De quantos modos podem ser pintadas 6 caixas usando 3 cores diferentes? Justifique.

   Resposta: Para pintarmos 6 caixas usando 3 cores diferentes, podemos pintar x_1 quantidade de caixas com a cor 1, x_2 quantidade de caixas com a cor 2 e x_3 quantidade de caixas com a cor 3. Resolver este problema é equivalente a encontrar o número de soluções inteiras para a equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

   onde $x_1 \leq 0$, $x_2 \leq 0$ e $x_3 \leq 0$, que corresponde a
   $CR_3^6 = C_{3+6-1}^6 = C_8^6 = \frac{8!}{6!(8-6)!} = \frac{8 \cdot 7}{2!} = 28$

4. (1,5) Dada a linha 6 do triângulo de Pascal

$$1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1$$

   Calcule a linha 7 usando as condições de fronteira e as relações de Stifel. Justifique.

   Resposta: Temos pela sexta linha do triângulo de Pascal dada acima, pela relação de Stifel ($C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r$) e pela condição de Fronteira ($C_n^0 = C_n^n = 1$) que:

$n = 6$		1	6	15	20	15	6	1
$n = 7$	1	7	21	35	35	21	7	1

5. (1.5) Qual o maior número possível de vértices em um grafo com 18 arestas, em que todos os vértices têm grau maior ou igual a 3? Justifique.

   Resposta: Seja G um grafo, onde $|V(G)| = n$ e $|E(G)| = m = 18$.

Sabemos que $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$. Como $m = 18$ então $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2.18 = 36$.

Como, $d(v) \geq 3$, $\forall v \in V(G)$, temos que:

$$n.3 \leq \sum_{v \in V(G)} d(v) = 36$$
$$3n \leq 36$$
$$n \leq 12$$

Logo, o maior número possível de vértices é 12.

6. (2.5) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for falsa, dê um exemplo e a sua justificação. Se for verdadeira, prove.

(a) Se G é um grafo conexo então $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$.

Resposta: VERDADEIRO. Temos que todo grafo conexo de G possui uma árvore geradora T, onde $|V(T)| = |V(G)|$ e $|E(T)| \leq |E(G)|$ (1)

Sabemos que para qualquer árvore, $|E(T)| = |V(T)| - 1$ (2)

Por (1) e (2), temos que $|E(G)| \geq |E(T)| = |V(T)| - 1 = |V(G)| - 1$.

Concluímos então que: $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$.

(b) Um grafo bipartido não possui ciclos ímpares.

Resposta: VERDADEIRO. Seja G um grafo bipartido, com bipartição (V_1, V_2), e $C = v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1$ um ciclo em G. Assuma, sem perda de generalidade, que $v_1 \in V_1$, logo $v_2 \in V_2$, $v_3 \in V_1$, $v_4 \in V_2$, e assim por diante.

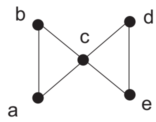
De forma geral, $v_{2i-1} \in V_1$ e $V_{2i} \in V_2$. Como $(v_k, v_1) \in E(G)$ e $v_1 \in V_1$ então $v_k \in V_2$ (porque G é bipartido), temos que $k = 2i$, para algum i, logo k é par, e portanto C é um ciclo par.

Portanto, um grafo bipartido não possui ciclo ímpares.

(c) Todo grafo euleriano é hamiltoniano.

Resposta: FALSO, pois no exemplo abaixo o grafo é euleriano, pois possui o passeio euleriano *abcdeca*, mas não possui um ciclo hamiltoniano, já que o vértice c é uma articulação, e todo caminho de a (ou b) a d (ou e) passa sempre pelo vértice c.

(d) Um grafo planar conexo, 5-regular, com 17 faces tem exatamente 25 arestas.



Resposta: VERDADEIRO. Como o grafo G é 5-regular, temos $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m \Rightarrow \sum_{v \in V(G)} d(v) = \underbrace{(5+5+\ldots+5+5)}_{n\ vezes} = 2m \Rightarrow 5n = 2m \Rightarrow n = \frac{2m}{5}$.

Como G é planar, temos pela fómula de Euler, que $n + f - m = 2 \Rightarrow \frac{2m}{5} + 17 - m = 2 \Rightarrow \frac{3m}{5} = 15 \Rightarrow m = 25$.