Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AP3 - Segundo Semestre de 2012

Nome -
Assinatura -

Observações:

1. Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular. Se necessário deixe o resultado indicado, como um produto ou quociente ou potência de números inteiros ou fatoriais.
2. Resultado sem indicação de como foi obtido, não será considerado.
3. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.
4. Você pode usar lápis para responder as questões.
5. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.
6. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

Questões:

1. (1,5) Mostre usando indução matemática que:

   $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ para todo número natural $n \geq 1$.

   Resposta: Seja $P(n) : 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

   BASE DA INDUÇÃO: Vamos mostrar que $P(1)$ é verdadeira.

   Como $(2 \times 1) - 1 = 1$ e $1^2 = 1$, temos que $P(1)$ é verdadeira.

   HIPÓTESE DE INDUNÇÃO: Suponha que $P(k) : 1+3+5+\cdots+(2k-1) = k^2$ é verdadeira.

PASSO INDUTIVO: Vamos mostrar que $P(k+1) : 1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2(k+1)-1) = (k+1)^2$ é verdadeira:

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2(k+1)-1) =$$

$$\underbrace{1+3+5+\cdots+(2k-1)}_{=k^2 \text{ pela HI}}+(2k+1) =$$

$$k^2+2k+1 =$$

$$(k+1)^2$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeira e, portanto, pelo PIM temos que $P(n) : 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$ é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. (1,5) Dada a palavra **MINIMALISTA**, quantos são os anagramas que não começam por **M** ? Justifique.

   Resposta: A palavra MINIMALISTA tem 2 M's, 3 I's, 1 N, 1 L, 1 S, 1 T e 2 A's, totalizando 11 letras. Vamos usar o conceito de complemento. De fato, como queremos o número de anagramas desta palavra que não começam por M, vamos inicialmente calcular a quantidade de anagramas que esta palavra possui e subtrair desta quantidade o número de anagramas que começam por M.

   ANAGRAMAS DA PALAVRA MINIMALISTA:

$$P_{11}^{2,3,1,1,1,1,2} = \frac{11!}{2!3!2!}$$

   ANAGRAMAS QUE COMEÇAM POR M: Vamos fixar M na primeira posição e permutar as demais letras, tomando cuidado com as repetições:

$$M\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Assim temos $P_{10}^{1,3,1,1,1,1,2} = \dfrac{10!}{3!2!}$ anagramas da palavra MINIMALISTA que começam por M.

Assim, utilizando a noção de complemento temos $P_{11}^{2,3,1,1,1,1,2} - P_{10}^{1,3,1,1,1,1,2} = \dfrac{11!}{2!3!2!} - \dfrac{10!}{3!2!}$ anagramas da palavra MINIMALISTA que não começam por M.

3. (1,5) Um comitê de 7 membros deve ser formado a partir de 12 homens e 12 mulheres. O comitê deve incluir pelo menos 2 mulheres e 1 homem. De quantas maneiras esse comitê pode ser formado? Justifique.

   Resposta: Como temos que incluir no comitê pelo menos duas mulheres e um homem, vamos começar escolhendo estas pessoas e em seguida escolhemos os outros integrantes que podem ser homens ou mulheres. Note que a ordem de nossas escolhas para formar uma comitê não importa e, portanto, para calcular a quantidade de comitês que podem ser formados, vamos utilizar o conceito de Combinação Simples.

   Para escolher duas mulheres temos $C_{12}^{2} = \dfrac{12!}{10!2!}$ formas.

   Para escolher um homem temos $C_{12}^{1} = \dfrac{12!}{11!1!} = 12$ formas.

   Para escolher as demais pessoas que formam o comitê temos $C_{21}^{4} = \dfrac{21!}{17!4!}$.

   Assim, pelo princípio multiplicativo, temos: $C_{12}^{2} \times C_{12}^{1} \times C_{21}^{4} = \dfrac{12!}{10!2!} \times 12 \times \dfrac{21!}{17!4!} = 21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 11 \times 3$ comitês de 7 pessoas com pelo menos duas mulheres e um homem.

4. (1,0) Usando a Relação de Stifel e as condições de fronteira, escreva as cinco primeiras linhas do triângulo de Pascal. Justifique.

   Resposta: A relação de Stifel nos diz que: $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$. Sabemos que as linhas do triângulo de Pascal sempre começam e terminam por 1 (condições de fronteira). Assim, utilizando as condições de fronteira e a Relação de Stifel podemos escrever as 5 primeiras linha do triângulo de Pascal:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \mathbf{1+1} & & 1 & & \\
 & 1 & & \mathbf{1+2} & & \mathbf{2+1} & & 1 & \\
1 & & \mathbf{1+3} & & \mathbf{3+3} & & \mathbf{3+1} & & 1
\end{array}
$$

Assim, temos:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \mathbf{2} & & 1 & & \\
 & 1 & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & 1 & \\
1 & & \mathbf{4} & & \mathbf{6} & & \mathbf{4} & & 1
\end{array}
$$

5. (4.5) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for falsa, dê um contra-exemplo e a sua justificativa. Se for verdadeira, prove.

(a) Se dois grafos G_1 e G_2 têm o mesmo número de vértices, o mesmo número de arestas e a mesma sequência de graus de vértices então eles são isomorfos.

Resposta: Falso. Observe o seguinte contra exemplo:

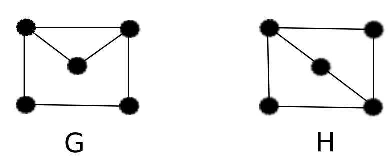

Figura 1: G e H com mesmo número de vértices e arestas e mesma sequência de graus de vértices mas não isomorfos.

$|V(G)| = 5 = |V(H)|$, $|E(G)| = |E(H)|$ e $(2, 2, 2, 3, 3)$ é a sequência de graus dos vértices de G e H mas G e H não são isomorfos. De fato, note que em G temos dois vértices de grau 3 adjacentes enquanto que em H tais vértices não são adjacentes.

(b) Se G é um grafo bipartido e hamiltoniano então G possui um número par de vértices.

Resposta: Verdadeiro.
Suponha G bipartido e hamiltoniano. Neste caso, G não possui ciclos ímpares (caracterização de grafos bipartidos) e possui um ciclo hamiltoniano, i.e, que passa por todos os seus vértices sem repetição exceto pelos vértices final e incial do ciclo. Como G é bipartido, sabemos que este ciclo hamiltoniano é par, portanto, G tem um número par de vértices.

(c) Se G é um grafo conexo, regular de grau 3 e possui 10 vértices então G não é planar.

Resposta: Falso. Observe o seguinte contra exemplo:

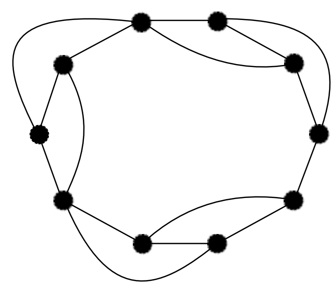

Figura 2: G é conexo, $3-$regular com 10 vértices e é planar.

(d) Os grafos completos K_{2k+1} para $k \geq 1$ são eulerianos.

Resposta: Verdadeiro. Como $2k + 1$ para todo $k \geq 1$ é um número ímpar, temos que K_{2k+1} é um grafo completo com $2k + 1$ vértices. Como um grafo completo com n vértices é um grafo $(n - 1)-$regular, temos que o grafo K_{2k+1} é $2k-$regular. Portanto, todos os vértices tem grau par, o que caracteriza um grafo Euleriano. Logo, grafos completos K_{2k+1} para $k \geq 1$ são eulerianos

(e) Se um digrafo possui fonte e sumidouro então ele é acíclico.

Resposta: Falso. Observe o seguinte contra exemplo:

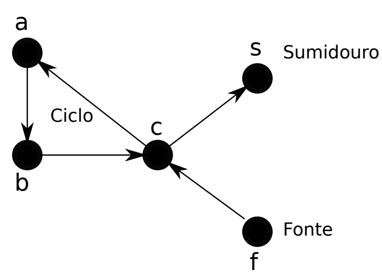

Figura 3: G possui uma fonte e um sumidouro mas é cíclico pois possui o ciclo *abca*.