Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP3 - Segundo Semestre de 2014

Questões:

1. (1,5) Mostre usando indução matemática que:
   $4 + 10 + 16 + \cdots + (6n - 2) = n(1 + 3n)$
   para todo número natural n, $n \geq 1$.

   Resposta: Seja $P(n) : 4 + 10 + 16 + \cdots + (6n - 2) = n(1 + 3n) \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

   BASE DA INDUÇÃO: Devemos provar que $P(1) : 6.1 - 2 = 1(1 + 3.1)$. De fato, como $6.1 - 2 = 4$ e $1(1+3.1) = 4$, temos que $P(1)$ é verdadeira.

   HIPÓTESE DA INDUÇÃO: Suponha que $P(k) : 4+10+16+\cdots+(6k-2) = k(1 + 3k)$ seja verdadeira para $k \in \mathbb{N},\ k \geq 1$.

   PASSO INDUTIVO: Vamos provar que se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1) : 4+10+16+\cdots+(6(k+1)-2) = (k+1)(1+3(k+1)) = 3k^2+7k+4$ também é verdadeira. Desenvolvendo o primeiro membro de $P(k+1)$, temos

$$4 + 10 + 16 + \cdots + (6(k+1) - 2) =$$
$$\underbrace{4 + 10 + 16 + \cdots + (6k - 2)}_{\text{H.I.}} + (6(k+1) - 2) =$$
$$k(1 + 3k) + (6(k+1) - 2) =$$

$$k + 3k^2 + 6k + 6 - 2 =$$
$$3k^2 + 7k + 4 =$$
$$(k+1)(1+3(k+1))$$

Portanto $P(k+1)$ é verdadeira.
Logo, pelo Princípio de Indução Matemática temos que $P(n) : 4+10+16+\cdots+(6n-2) = n(1+3n)$ é verdadeira para todo número natural $n \geq 1$.

2. (1,5) Considere uma senha válida que consista de 9 caracteres. O primeiro é uma letra grega escolhida do conjunto $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta\}$, e cada um dos outros 8 caracteres é uma letra qualquer (em um alfabeto de 26 letras) **ou** um digito qualquer (entre 10 digitos: $0, 1, 2, \cdots, 9$). Quantas senhas diferentes são possíveis? Justifique.

   Resposta: Devemos formar uma senha consistindo de 9 caracteres, e o primeiro caracter possui uma letra grega escolhida do conjunto $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta\}$, totalizando 7 letras. Como importa a ordem, então temos $A(7,1) = \frac{7!}{(7-1)!} = 7$ maneiras distintas de formar o primeiro caracter. Agora, devemos formar o restante da senha com 8 caracteres entre 26 letras do alfabeto e 10 dígitos que podem ser repetidos, então temos $AR_{36}^{8} = 36^8$.

   Logo, pelo princípio multiplicativo, temos 7×36^8 senhas diferentes.

3. (1,0) Quantos são os anagramas da palavra **ABRACADABRA** que começam com a letra **B**. Justifique.

   Resposta: A palavra **A B R A C A D A B R A** possui 5 A's, 2 B's, 2 R's, 1 C e 1 D, totalizando 11 letras. Para solucionar esta questão vamos fixar uma letra B na primeira posição restando 1 B, 5 A's, 2 R's, 1 C e 1 D. Assim, temos 10 letras a serem permutadas nas posições restantes. Logo, temos $P_{10}^{5,2,1,1,1} = \frac{10!}{5!2!1!1!1!} = 15120$ anagramas da palavra **A B R A C A D A B R A** que começam com a letra B.

4. (1,0) Quantas soluções distintas, estritamente positivas (>0), existem para :
$a+b+c+d=23$
Justifique.

Resposta: Como as variáveis $a,\ b,\ c,\ d$ são maiores ou iguais a 1, precisamos reescrevê-las em função de variáveis não negativas. Sejam $a=a'+1,\ b=b'+1,\ c=c'+1$ e $d=d'+1$. Note que, como $a,\ b,\ c,\ d\geq 1,\ a',\ b',\ c', d'\geq 0$. Fazendo as substituições na equação de $a,\ b,\ c,\ d$ por $a'+1,\ b'+1,\ c'+1,\ d'+1$ temos:

$$a+b+c+d=23$$
$$a'+1+b'+1+c'+1+d'+1=23$$
$$a'+b'+c'+d'=19$$

Logo, o número de soluções inteiras estritamente positivas $a+b+c+d=23$ corresponde ao número de soluções inteiras não negativas da equação acima, que podemos obter utilizando o conceito de *Combinações com repetição*. Portanto, temos $CR_4^{19}=C_{22}^{19}=\dfrac{22!}{19!3!}=1540$ soluções estritamente posistivas para a equação $a+b+c+d=23$.

5. (1,0) Dada a linha 8 do triângulo de Pascal:
1 8 28 56 70 56 28 8 1
calcule a linha 9 usando as condições de fronteira e a Relação de Stifel. Justifique sua resposta.

Utilizando as condições de fronteira ($C_n^0=C_n^n=1$) e a Relação de Stifel ($C_n^p+C_n^{p+1}=C_{n+1}^{p+1}$) podemos escrever a linha 9 do triângulo de Pascal, utilizando a linha 8:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 & \\ 1 & & 9 & & 36 & & 84 & & 126 & & 126 & & 84 & & 36 & & 9 & & 1 \end{array}$$

6. (4,0) As perguntas seguintes são sobre grafos.

(a) Se dois grafos G_1 e G_2 têm o mesmo número de vértices, o mesmo número de arestas e a mesma sequência de graus de vértices, então eles são isomorfos. Essa afirmativa é VERDADEIRA ou FALSA? Justifique sua resposta.

Resposta: Falso. Observe a Figura 1. Note que ambos os grafos G_1 e G_2 têm 6 vértices, 8 arestas e a seguinte sequência de graus dos vértices: $(2, 2, 3, 3, 3, 3)$. Contudo, G_1 e G_2 não são isomorfos pois em G_1 temos um triângulo enquanto que em G_2 não temos triângulos.

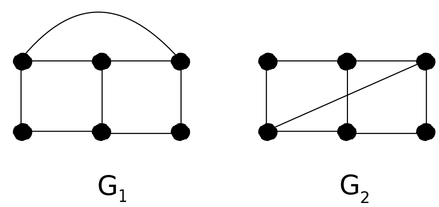

Figura 1: Grafos G_1 e G_2 não isomorfos com mesmo número de vértices e arestas e mesma sequência de graus de vértices.

(b) Seja G um grafo com 2 componentes conexos G_1, G_2. Sabendo que G_1 é uma árvore com 11 vértices, e G_2 é um grafo bipartido completo com bipartição (V_1, V_2), sendo que $|V_1| = 5$ e $|V_2| = 3$, determine o número de arestas de G. Justifique.

Resposta: Como G possui 2 componentes conexos G_1, G_2, temos que $G = G_1 \cup G_2$, ou seja, $|V(G)| = |V(G_1)| + |V(G_2)|$ e $|E(G)| = |E(G_1)| + |E(G_2)|$. Queremos determinar o número de arestas de G ($|E(G)|$), assim basta determinarmos o número de arestas do grafo G_1, $|E(G_1)|$, e o número de arestas do grafo G_2, $|E(G_2)|$.

O grafo G_1 é uma árvore com 11 vértices ($|V(G_1)| = 11$) e sabemos que em uma árvore T, $E(T) = V(T) - 1$, logo G_1 possui $|E(G_1)| = |V(G_1)| - 1 = 11 - 1 = 10$ arestas. Já o grafo G_2 é um grafo bipartido completo, com bipartição (V_1, V_2), sendo que $|V_1| = 5$ e $|V_2| = 3$. Como G_2 é um grafo bipartido completo, temos que todo vértice de G_1 é adjacente a todo vétice de G_2, e desta forma o grafo G_2 possui $|E(G_2)| = |V(G_1)| \times |V(G_2)| = 3 \times 5 = 15$ arestas.

Concluímos que $|E(G)| = |E(G_1)| + |E(G_2)| = 10 + 15 = 25$ arestas.

(c) Defina o que é um grafo hamiltoniano. O grafo completo K_7 é hamiltoniano? Justifique.

Resposta: Um grafo é Hamiltoniano se possui um ciclo Hamiltoniano, i.e., um ciclo que inclui todos os seus vértices.

O grafo completo K_7 possui todas as possíveis arestas no grafo. Considere $V(K_7) = \{\ a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g\ \}$. Desta forma, o K_7 possui um ciclo formado por todos os vértices $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g$ e, consequentente, o grafo K_7 é hamiltoniano.

(d) Seja G um grafo com a seguinte sequência de graus de vértices: $(2, 4, 4, 4, 4, 5, 5)$. G é euleriano? Justifique.

Resposta: O teorema de Euler caracteriza os grafos Eulerianos da seguinte forma: Um grafo G é Euleriano se e somente se todo vértice de G tem grau par. Logo, o grafo G com a sequência de graus de vértices: $(2, 4, 4, 4, 4, 5, 5)$ não é euleriano, pois o grafo possui dois vértices de grau 5, que são ímpar.

(e) Seja G um grafo planar, 4-regular (isto é, regular de grau 4). Se G tem 12 arestas, determine o número de faces de qualquer representação plana de G. Justifique.

Resposta: Pelo Teorema do Aperto de Mãos, temos:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

Como G é 4-regular, isto é, todo vértice tem grau 4 ($d(v) = 4$), e G tem n vértices, temos:

$$4 \times n = 2 \times 12$$

$$4n = 24$$

Logo $n = 6$. Como queremos determinar o número de faces de qualquer representação plana de G, temos que pelo teorema de Euler para grafos planares, um grafo planar possui o número de faces $f = m - n + 2$, onde f, m, n denotam respectivamente os números de faces, arestas e vértices do grafo. Assim, G possui $f = 12 - 6 + 2 = 8$ faces.