Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação

Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação

Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da AP1 - Primeiro Semestre de 2019

Nome -

Questões:

1. (1.8) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

   (a) $\{A\} \subseteq P(A)$ sendo $P(A)$ o conjunto das partes do conjunto A

   Resposta: A afirmação é verdadeira, já que o conjunto A é um elemento do conjunto das partes de A ($P(A)$), e por consequência, $\{A\}$ é um subconjunto de $P(A)$.

   (b) $(A - B) - C = A - (B \cap C)$, onde A, B e C são conjuntos arbitrários.

   Resposta: A afirmação é falsa. Vamos analisar esta questão pelos diagramas de Venn dos conjuntos $(A - B) - C$ e $A - (B \cap C)$.

   Podemos observar que todos os elementos do conjunto $(A - B) - C$ pertencem ao conjunto $A - (B \cap C)$, isto é, $(A - B) - C \subseteq A - (B \cap C)$.

   (c) Se $A = \{1, \{1\}\}$ então $P(A) = \{\emptyset, 1, \{1\}, \{1, \{1\}\}$

   Resposta: Falso, pois

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}\}$$

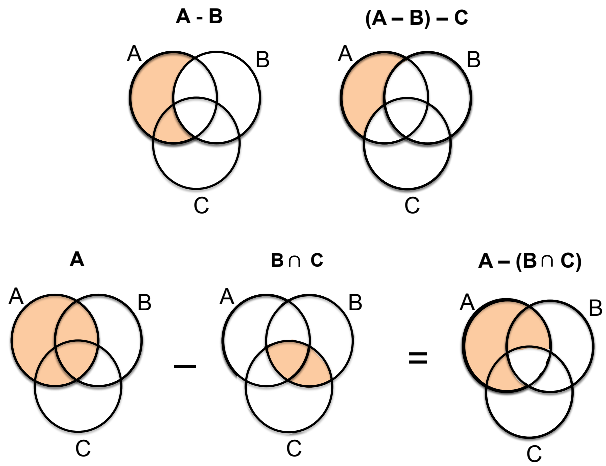

Figura 1: Diagramas que representam os conjuntos $(A - B) - C$ e $A - (B \cap C)$

2. (1.8) Mostre por Indução Matemática que:

$$1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1)$$

para todo número natural ≥ 1.

Resposta:

Seja $P(n) : 1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1)$, para $n \geq 1$.

BASE DA INDUÇÃO: Para $n = 1$, o lado esquerdo da equação resulta em: $4 \times 1 - 3 = 1$.

O lado direito é: $1(2 \times 1 - 1) = 1$.

Como ambos os lados são iguais, a base da Indução está verificada.

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Suponha que $P(k) : 1 + 5 + 9 + \cdots + (4k - 3) = k(2k - 1)$ seja verdadeira para $k \geq 1$.

PASSO DA INDUÇÃO: Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeira para $k \geq 1$, então $P(k + 1) : 1 + 5 + 9 + \cdots + (4(k + 1) - 3) = (k + 1)(2(k + 1) - 1)$ também é verdadeira. Como $(k+1)(2(k+1)-1) = (k+1)(2k+1)$ devemos então provar que $P(k + 1) : 1 + 5 + 9 + \cdots + (4(k + 1) - 3) = (k + 1)(2k + 1)$

De fato,

$$\underbrace{1+5+9+\cdots+(4k-3)}_{\text{Hipótese de Indução}}+(4(k+1)-3)=$$

$$k(2k-1)+(4(k+1)-3)=$$

$$2k^2-k+4k+4-3=$$

$$2k^2+3k+1$$

Como sabemos que $(k+1)(2k+1)=2k^2+3k+1$, podemos concluir que $1+5+9+\cdots+(4(k+1)-3)=(k+1)(2(k+1)-1)=(k+1)(2k+1)$.

Logo, $P(k+1)$ é verdadeira.

Portanto, pelo Princípio de Indução Matemática , temos que $P(n): 1+5+9+\cdots+(4k-3)=k(2k-1)$ é verdadeira, para todo $n \geq 1$.

3. (1.6) Em um almoço, Luis, Sofia, Daniel, Ana e Lucas se sentam em uma mesa circular. De quantas maneiras podem se acomodar se:

   (a) todos são amigos? **Justifique**.

   Resposta: Como a mesa é circular utilizamos permutação circular, e por isso temos $PC(5)=4!=24$ maneiras de acomodar os 5 amigos na mesa circular.

   (b) Sofia e Daniel nunca se sentam juntos? **Justifique**.

   Resposta: Para resolver esta questão vamos utilizar a permutação circular com os amigos Luis, Ana e Lucas apenas, o que pode ser feito de $PC(3)=2!=2$ maneiras de acomodar os três amigos. Agora, vamos colocar Sofia e Daniel entre os três amigos, já que os mesmos nunca se sentam juntos. Para colocarmos Sofia entre os 3 amigos, temos 3 maneiras possíveis, e uma vez Sofia já sentada em seu lugar, só teremos 2 possibilidades de colocarmos Daniel. Pelo princípio multiplicativo temos $PC(3)\times 3\times 2=2!\times 6=12$ maneiras de acomodá-los em uma mesa circular sem que Daniel e Sofia se sentem juntos.

   Uma outra maneira de resolver esta questão é utilizando o raciocínio do complemento. Note que, encontrar maneiras de acomodar os 5 amigos na mesa circular de modo a Sofia e Daniel nunca se sentarem juntos é justamente acomodar os 5 amigos na mesa circular menos as maneiras de acomodar os 5 amigos na mesa circular de modo a Sofia e Daniel se sentarem juntos. Sendo assim, vamos calcular o total de maneiras de acomodar os 5 amigos na mesa circular e subtrair deste valor o número de maneiras de acomodar os 5 amigos na mesa circular de modo a Sofia e Daniel se sentarem juntos.

TOTAL DE MANEIRAS DE ACOMODAR OS 5 AMIGOS NA MESA CIRCULAR:

$$PC(5) = 4! = 24$$

TOTAL DE MANEIRAS DE ACOMODAR OS 5 AMIGOS NA MESA CIRCULAR DE MODO A SOFIA E DANIEL SE SENTAREM JUNTOS:

$$PC(4) \times P_2 = 3! \times 2! = 6 \times 2 = 12$$

Logo, pelo raciocínio complementar, temos que o total de maneiras de acomodar os 5 amigos na mesa circular de modo a Sofia e Daniel se sentarem juntos é dado por: $4! - 3! \times 2! = 24 - 12 = 12$.

4. (1.3) Um clube tem um grupo de 12 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 8 são destros. O treinador deve organizar uma partida entre dois desses jogadores. De quantas maneiras o treinador pode escolher os tenistas, de forma que ambos não sejam canhotos? **Justifique**.

Resposta: Para solucionar esta questão, vamos utilizar o raciocínio do complemento. Note que, existir pelo menos um destro é justamente o contrário de não existir destro na partida. Sendo assim, vamos calcular o total de partidas possíveis e subtrair deste valor o número de partidas formadas apenas por canhotos.

TOTAL DE PARTIDAS COM DOIS JOGADORES:

$$C_{12}^{2} = \frac{12!}{10!2!} = 66$$

PARTIDAS FORMADAS APENAS POR CANHOTOS:

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

Logo, pelo raciocínio complementar, temos que o total de partidas com 2 jogadores de forma que ambos não sejam canhotos é dado por: $\frac{12!}{10!2!} - \frac{4!}{2!2!} = 66 - 6 = 60$.

5. (2.0) Considere a palavra **i n d e p e n d e n t e**.

   (a) Quantos anagramas podem ser formados a partir de suas letras? **Justifique**.

   Resposta: A palavra **I N D E P E N D E N T E** possui 4 E's, 3 N's, 2 D's, 1 P, 1 I e 1 T, totalizando 12 letras. Para calcular o número de anagramas desta palavra, basta permutar suas letras levando em consideração as repetições. Portanto, temos $P_{12}^{4,3,2,1,1,1} = \frac{12!}{4!3!2!}$ anagramas da palavra **I N D E P E N D E N T E**.

   (b) Quantos anagramas podem ser formados com suas letras de maneira que as consoantes **p** e **t** fiquem sempre juntas? **Justifique**.

   Resposta: Queremos que a sequência X = PT ou X=TP figure no anagrama, então podemos considerar o problema de obter o número de anagramas da palavra X I N D E E N D E N E, ou seja, anagramas que contém necessariamente ao menos uma ocorrência de PT ou TP, que pode ser obtido através de uma permutação com repetições, já que temos 11 letras das quais temos 4 E's, 3 N's, 2 D's, 1 I e 1 X. Portanto, temos um total de anagramas de $P_{11}^{4,3,2,1,1} = \frac{11!}{4!3!2!1!1!}$. Como X pode ser PT ou TP, necessitamos multiplicar por $P_2 = 2!$, resultando em $P_{11}^{4,3,2,1,1} \times P_2 = 2 \times \frac{11!}{4!3!2!1!1!} = \frac{11!}{4!3!}$.

6. (1.5) De quantas maneiras diferentes podemos distribuir 35 bombons idênticos em 5 caixas diferentes, de maneira que nenhuma caixa fique vazia? **Justifique**.

Resposta: Consideremos as seguintes variáveis:

x_1: quantidade de bombons na CAIXA 1;

x_2: quantidade de bombons na CAIXA 2;

x_3: quantidade de bombons na CAIXA 3;

x_4: quantidade de bombons na CAIXA 4;

x_5: quantidade de bombons na CAIXA 5.

Queremos encontrar o número de maneiras de selecionar 35 bombons idênticos em 5 caixas diferentes, de modo que tenha pelo menos um bombom em cada caixa. Este problema é equivalente a resolver a equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 35, \ \ onde \ \ x_i \geq 1, \ \forall i = 1, 2, 3, 4, 5$$

Podemos escrever: $x_1 = x'_1 + 1$, $x_2 = x'_2 + 1$, $x_3 = x'_3 + 1$, $x_4 = x'_4 + 1$ e $x_5 = x'_5 + 1$ onde $x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5 \geq 0$. Substituindo na equação acima temos: $x'_1 + 1 + x'_2 + 1 + x'_3 + 1 + x'_4 + 1 + x'_5 + 1 = 35$, com $x'_i \geq 0$, $\forall i = 1, \ldots, 5$, ou seja, $x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 + x'_5 = 35 - 5 = 30$, com $x'_1, x'_2, x'_3, x_4, x'_5 \geq 0$.

O número de soluções inteiras e não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 35$, onde $x_i \geq 1$, $\forall i = 1, \ldots, 5$, é o número de soluções inteiras e não negativas de $x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 + x'_5 = 30$, onde $x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5 \geq 0$, que corresponde a $CR_5^{30} = C_{30+5-1}^{30} = C_{34}^{30} = \frac{34!}{30!4!}$.

Logo, temos $CR_5^{30} = C_{34}^{30} = \frac{34!}{30!4!}$ maneiras de distribuirmos 35 bombons idênticos em 5 caixas diferentes, de maneira que nenhuma caixa fique vazia.