Gabarito da AP3 - Fundamentos de Algoritmos para Computação

2007-1

1. (1.5) Mostre usando indução matemática que:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Resposta:

Seja $P(n)$: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, para todo $n \geq n_0$

Base da indução:

Para $n = 1$, $1 = 1^2$, logo $P(1)$ é verdadeira.

Hipótese de Indução:

Suponha verdadeiro para $k \geq 1$, isto é, $P(k)$ é verdadeira, para $k \geq 1$:

$$P(k)\colon\ 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$$

Passo da Indução:

Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeiro então $P(k+1)$ é verdadeiro, isto é, temos que provar que:

$$P(k+1) : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k + 1) = (k + 1)^2 \text{ é verdadeira.}$$

De fato, desenvolvendo:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k + 1) &= \underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)}_{\text{H.I.}} + (2k + 1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2 \end{aligned}$$

Logo $P(k+1)$ é verdadeira. Então pelo princípio da indução matemática temos que $P(n)$: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, para todo $n \geq 1$.

2. (2.0) Quantos anagramas de 3 letras que contém pelo menos 2 repetidas podem ser formados com um alfabeto de 26 letras? Justifique a resposta.

Resposta: Seja $\mathbb{U}$ o conjunto de anagramas de 3 letras escolhidas dentre 26 que podem estar repetidos ou não. Tem se que $n(\mathbb{U}) = AR(26, 3) = 26^3$. Então o conjunto de anagramas de 3 letras que contém pelo menos 2 repetidas corresponde ao complemento (em relação a $\mathbb{U}$) do conjunto de anagramas de 3 letras sem repetição, cujo cardinal é $A(26, 3) = \frac{26!}{(26-3)!} = 26.25.24$. Logo temos que $26^3 - 26.25.24$ é o número de anagramas de 3 letras que contém pelo menos 2 repetidas.

3. (1.5) Uma urna contém 15 bolas numeradas. Determine a quantidade de modos possíveis de tirar simultaneamente dessa urna 6 bolas contendo as que têm os números 3, 9 e 14. Justifique cada resposta.

   Resposta: Considere um conjunto com seis bolas, onde três delas são as bolas 3, 9 e 14. Temos um universo de de doze bolas para escolher as outras três, portanto o total de modos diferentes de tirar as bolas é $C_{12}^{3} = \frac{12!}{3!9!}$.

4. (1.5) Calcule a seguinte soma usando o teorema das linhas:

$$\sum_{k=1}^{10} C_{10}^{k} = C_{10}^{1} + C_{10}^{2} + \ldots + C_{10}^{10}$$

   Justifique os cálculos.

   Resposta:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=1}^{10} C_{10}^{k} &= \textstyle\sum_{k=0}^{10} C_{10}^{k} - C_{10}^{0} \\ &=^{T.L.} 2^{10} - 1 \end{aligned}$$

5. (1.5) Mostre que todo grafo tem um número par de vértices de grau ímpar.

   Resposta: Seja $G = (V, E)$ um grafo qualquer, sabemos que $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$, $(m = |E|)$, que é um número par. Além disso, podemos decompor o somatório da seguinte forma:

   Seja $V_1 = \{v \in V | d(V_1) \text{ é ímpar}\}$ e $V_2 = \{v \in V | d(V_2) \text{ é par}\}$, $V = V_1 \cup V_2$.

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{u \in V_1} d(u) + \sum_{w \in V_2} d(w)$$

   Como a soma de números pares é um número par sabemos que

$$\sum_{w \in V_2} d(w)$$

   é par. Como $\sum_{v \in V} d(v)$ também é par, concluímos que

$$\sum_{u \in V_1} d(u)$$

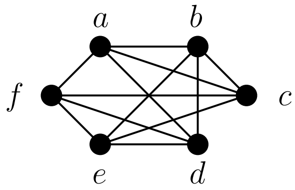
   também é par, como este somatório representa a soma de números ímpares, se o resultado final é par significa que o total de números presentes no somatório é par. Logo, em qualquer grafo, o número de vértices de grau ímpar é par.

6. (2.0) Considere o grafo G dado por:

   $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$
   $E(G) = (a, b), (a, c), (a, d), (a, f), (b, d), (b, e), (b, c), (c, e), (c, f), (d, e), (d, f), (e, f)$

(a) G é hamiltoniano? Justifique.

Resposta: Inicialmente representaremos este grafo de forma geométrica:



Sim. G é hamiltoniano pois possui ciclo hamiltoniano, um exemplo é o ciclo $abcedfa$.

(b) G é euleriano? Justifique.

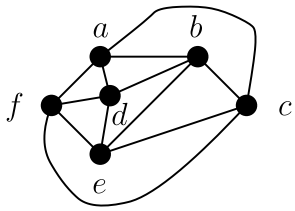
Resposta: Sim, pois um grafo é euleriano se e somente se todo vértice tem grau par. Em G todos os vértices possuem grau 4, logo o grafo G é euleriano.

(c) Qual é o centro de G? Justifique.

Resposta: O centro de G é dado por $C(G) = \{v \in V(G) | e(v) \text{ é mínima}\}$, $e(v) = \max\{d(v,w) | \ w \in V(G)\}$. Em G temos $e(a) = e(b) = e(c) = e(d) = e(e) = e(f) = 2$. Logo $C(G) = V(G)$.

(d) Verifique se G é planar. Caso seja, calcule o seu número de faces. Justifique.

Resposta: G é um grafo planar pois admite a seguinte representação plana:



Seja f o número de faces de G. Como G é conexo e planar a fórmula de Euler nos diz que n - m + f = 2. Como n = 6 e m = 12, então $f = m$ - n + 2 = 8.