Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP2 - Segundo Semestre de 2012

Nome -
Assinatura -

Observações:

1. Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular. Se necessário deixe o resultado indicado, como um produto ou quociente ou potência de números inteiros ou fatoriais.
2. Resultado sem indicação de como foi obtido, não será considerado.
3. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.
4. Você pode usar lápis para responder as questões.
5. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.
6. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

Questões:

1. (1.0) Usando o Teorema das Colunas mostre que:

$$2(1+2+3+\cdots+n)=n(n+1)$$

Resposta: O Teorema das colunas nos diz: $C_r^r + C_{r+1}^r + C_{r+2}^r + C_n^r = C_{n+1}^{r+1}$. Claramente precisamos reescrever o somatório com o intuito de podermos utilizá-lo. Assim, temos:

$$2(1+2+3+\cdots+n)=2\sum_{i=1}^{n} i \quad (I)$$

Além disso, observe que:

$$2(1+2+3+\cdots+n)=2\left(\frac{1!}{0!1!}+\frac{2!}{1!1!}+\frac{3!}{2!1!}+\cdots+\frac{n!}{(n-1)!1!}\right) \quad (II)$$

Por (I) e (II) temos:

$$\begin{aligned} 2\textstyle\sum_{i=1}^{n} i &= 2\left(\tfrac{1!}{0!1!}+\tfrac{2!}{1!1!}+\tfrac{3!}{2!1!}+\cdots+\tfrac{n!}{(n-1)!1!}\right) \\ &= 2\left(C_1^1+C_2^1+C_3^1+\cdots+C_n^1\right) \end{aligned}$$

Pelo Teorema das Colunas, temos que $C_1^1+C_2^1+C_3^1+\cdots+C_n^1=C_{n+1}^2$. Assim,

$$\begin{aligned} 2\textstyle\sum_{i=1}^{n} i &= 2C_{n+1}^2 \\ &= 2\tfrac{(n+1)!}{(n-1)!2!} \\ &= \tfrac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} \\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

2. (1.5) Determine o coeficiente de x^{10} no desenvolvimento de $(3x^2 - \frac{5}{x^3})^{50}$. Justifique a resposta.

Resposta: Sabemos que o termo geral do desenvolvimento do Binômio de Newton $(a+b)^n$ é dado por: $T_{k+1} = C_n^k a^k b^{n-k},\ k = 0, 1, \cdots, n$.

Neste caso particular temos que $n = 50, a = 3x^2$ e $b = -\frac{5}{x^3}$. Desta forma, podemos escrever o termo geral do desenvolvimento de $(3x^2 - \frac{5}{x^3})^{50}$ da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
T_{k+1} &= C_{50}^k (3x^2)^k \left(\frac{-5}{x^3}\right)^{50-k} \\
&= C_{50}^k 3^k (x^2)^k (-5x^{-3})^{50-k} \\
&= C_{50}^k 3^k x^{2k} (-5)^{50-k} (x^{-3})^{50-k} \\
&= C_{50}^k 3^k (-1)^{50-k} 5^{50-k} x^{2k} x^{-150+3k} \\
&= C_{50}^k 3^k (-1)^{50-k} 5^{50-k} x^{-150+5k}
\end{aligned}
$$

Como queremos obter o coeficiente de x^{10} no desenvolvimento, temos:

$$-150 + 5k = 10$$

$$k = \frac{160}{5}$$

$$k = 32$$

Portanto,

$$T_{33} = C_{50}^{32} 3^{32} (-1)^{18} 5^{18} x^{10}$$

Como $C_{50}^{32} = \dfrac{50!}{18!32!}$, o coeficiente de x^{10} no desenvolvimento de $(3x^2 - \frac{5}{x^3})^{50}$ é dado por:

$$\frac{50!}{18!32!}3^{32}5^{18}.$$

3. (1.5) Encontre a fórmula fechada da relação de recorrência:
$a_n = 3a_{n-1} + 1 \qquad n$ natural, $n \geq 1$
$a_0 = 1$
Descreva o processo utilizado para chegar à fórmula.

Resposta: Vamos utilizar o método de substituições regressivas:

$$\begin{aligned}
a_n &= 3a_{n-1} + 1 \\
&= 3\underbrace{(3a_{n-2} + 1)}_{a_{n-1}} + 1 \\
&= 3^2 a_{n-2} + 3 + 1 \\
&= 3^2\underbrace{(3a_{n-3} + 1)}_{a_{n-2}} + 3 + 1 \\
&= 3^3 a_{n-3} + 3^2 + 3 + 1 \\
&= 3^3\underbrace{(3a_{n-4} + 1)}_{a_{n-3}} + 3^2 + 3 + 1 \\
&= 3^4 a_{n-4} + 3^3 + 3^2 + 3 + 1 \\
&\vdots \\
&= 3^i a_{n-i} + 3^{i-1} + 3^{i-2} + \cdots + \underbrace{3^0}_{=1}
\end{aligned}$$

Fazendo $n - i = 0$, temos $i = n$ e

$$a_n = 3^n a_0 + 3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3^0$$

Como $a_0 = 1$,

$$a_n = 3^n + 3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3^0.$$

Observe que podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} 3^i$$

que expressa a soma de uma Progressão Geométrica finita com $n+1$ termos e razão 3. Sabemos que a soma de n termos de uma PG finita de razão q e termo inicial a_1 é dada por: $S_n = \dfrac{a_1(q^n-1)}{q-1}$. Portanto,

$$\sum_{i=0}^{n} 3^i = \frac{1(3^{n+1}-1)}{3-1},$$

donde concluímos que:

$$a_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}.$$

4. (1.5) Considere a afirmação seguinte:

   "Se G é um grafo tal que entre quaisquer dois vértices existe um único caminho então G é uma árvore."

   Diga se é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

   Resposta: Verdadeira.

   Por definição, uma árvore é um grafo conexo e acíclico. Logo, queremos mostrar que um grafo G no qual existe um único caminho entre todo par de vértices é conexo e acíclico.

   Como existe um caminho entre quaisquer dois vértices de G, por definição, G é conexo. Falta mostrar que G é acíclico.

   Suponha, por absurdo, que G contém um ciclo C e seja $e = (x, y)$ uma aresta de C. Então G possui dois caminhos entre x e y: a aresta e e o caminho $C - e$. Absurdo! (por hipótese existe um único caminho entre cada par de vértices de G).

   Logo, G é acíclico e conexo e portanto, G é árvore.

5. (4.5) As seguintes perguntas devem ser respondidas considerando o grafo $G = (V, E)$, sendo:
$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ e
$E = \{(a, b), (b, c), (c, d), (a, d), (a, g), (g, h), (d, h), (h, e), (c, e), (g, f), (f, e)\}$.

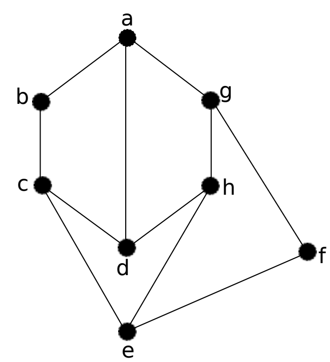

Figura 1: Grafo G.

(a) G é planar? Justifique.

Resposta: Sim, pois G possui uma representação plana, a qual está representada na Figura 1.)

(b) G é euleriano? Justifique.

Resposta: Não. O Teorema de Euler nos diz que um grafo é euleriano se e somente se todos os seus vértices têm grau par. Como neste caso, $d(a) = d(c) = d(d) = d(e) = d(g) = d(h) = 3$, temos que o grafo em questão não é euleriano.

(c) G é hamiltoniano? Justifique

Resposta: Sim, pois podemos exibir o seguinte ciclo hamiltoniano (ciclo que passa por todos os vértices do grafo): $a\ b\ c\ e\ f\ g\ h\ d\ a$

(d) G é bipartido? Caso a resposta seja positiva, dê a sua bipartição.

Resposta: Sim, pois G não possui ciclos ímpares (G é bipartido se e somente se G não possui ciclos ímpares). Além disso, podemos exibir a seguinte bipartição (V_1, V_2) dos vértices de G:

$V_1 = \{a, c, f, h\}$ e $V_2 = \{b, d, e, g\}$

(e) Qual o diâmetro de G e qual o centro de G? Justifique.

Resposta: A excentricidade de um vértice v, denotada por $e(v)$, é a maior distância (menor caminho) que pode ser percorrida a partir de v para alcançar qualquer outro vértice do grafo.

O diâmetro de um grafo G, denotado por $diam(G)$, é o valor da maior excentricidade em G.

O centro de um grafo G, denotado por $C(G)$, é o conjunto de vértices de G com menor excentricidade.

Como no grafo G $e(v) = 3, \ \forall v \in V(G)$, temos que $diam(G) = 3$ e $C(G) = V(G)$.