Gabarito da AP3 - Fundamentos de Algoritmos para Computação

1. (1.5) Mostre usando Indução Matemática que:

$$\left(1+\tfrac{1}{2}\right)\left(1+\tfrac{1}{3}\right)\left(1+\tfrac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\tfrac{1}{n}\right)=\tfrac{n+1}{2}$$

para todo número natural $n \geq 2$.

Resposta: Seja $P(n):\left(1+\tfrac{1}{2}\right)\left(1+\tfrac{1}{3}\right)\left(1+\tfrac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\tfrac{1}{n}\right)=\tfrac{n+1}{2}$.

Base da indução:

Para $n=2$, $\left(1+\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{3}{2}=\tfrac{2+1}{2}$, portanto $P(2)$ é verdadeira.

Hipótese de Indução:

Suponha verdadeiro para k, isto é, $P(k)$ é verdadeiro:

$$P(k):\left(1+\tfrac{1}{2}\right)\left(1+\tfrac{1}{3}\right)\left(1+\tfrac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\tfrac{1}{k}\right)=\tfrac{k+1}{2}$$

Devemos provar que $P(k+1)$ é verdadeiro, isto é:

$$P(k+1):\left(1+\tfrac{1}{2}\right)\left(1+\tfrac{1}{3}\right)\left(1+\tfrac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\tfrac{1}{k}\right)\left(1+\tfrac{1}{k+1}\right)=\tfrac{k+2}{2}$$

Desenvolvendo para $k+1$ e usando a hipótese de indução, temos que:

$$\begin{array}{rll}
 & \underbrace{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{k}\right)}_{(Por\ hipótese\ indutiva)}\left(1+\tfrac{1}{k+1}\right) & = \\
= & \left(\tfrac{k+1}{2}\right)\left(1+\tfrac{1}{k+1}\right) & = \\
= & \left(\tfrac{k+1}{2}\right)\left(\tfrac{k+1+1}{k+1}\right) & = \\
= & \left(\tfrac{k+1}{2}\right)\left(\tfrac{k+2}{k+1}\right) & = \\
= & \tfrac{k+2}{2} &
\end{array}$$

Logo, pelo princípio da indução, a expressão é verdadeira, $\forall n \geq 2$.

2. (1.5) Calcule, justificando.

   (i) De quantos modos diferentes podemos distribuir 30 bombons idênticos em 5 caixas distintas ? (Obs: cada caixa pode conter zero ou mais bombons.)

   Resposta: Este poblema é equivalente a encontrar o número de soluções inteiras não-negativas ($x_i \geq 0, i=1,2,3,4,5$) da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30,$$

onde x_i denota o número de bombons na caixa i, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, o que é equivalente a encontrar o número de sequências de $(30+5)$ binários com exatamente cinco 1's (as caixas), trinta 0's (os bombons), onde o último elemento de sequência é 1.

Isto é, o número corresponde a:

$$CR_5^{30} = C_{34}^{30} = \frac{34!}{30!4!} = \frac{34.33.32.31}{4.3.2.1}$$

(ii) E se tivermos a restrição de que nenhuma caixa pode ficar vazia?

Resposta: Este número é o número de soluções inteiras positivas da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30,$$

onde x_i denota o número de bombons na caixa, $x_i > 0$ i,e $x_i \geq 1$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Iremos fazer este problema recair em um outro problema em que sabemos resolver, pois $x_i \geq 1$ significa que $x_i - 1 \geq 0$, definindo $y_i = x_i - 1$, logo $y_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$:

Temos que $x_i = y_i + 1$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Daí, a equação $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 30$ transforma-se em $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5 = 25$ com $y_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
Logo, temos que o número de modos diferentes de distribuir 30 bombons idênticos em 5 caixas diferentes tal que nenhuma delas fique vazia corresponde ao número de soluções não negativas da última equação que é:

$$CR_5^{25} = C_{29}^{25} = \frac{29!}{25!4!} = \frac{29.28.27.26}{4.3.2.1}$$

3. (1.5) Quantos são os anagramas da palavra $TRITRIACONTAEDRO$ (poliedro de 33 faces) que começam com a letra A? Justifique.

Resposta: Temos 3 letras T, 3 letras R, 2 letras I, 2 letras A, 2 letras O, 1 letra C, 1 letra N, 1 letra E, 1 letra D.

Como queremos todos os anagramas da palavra $TRITRIACONTAEDRO$ que começam com a letra A, basta fixarmos uma letra A e permutarmos o restante. Daí, o número de anagramas é $P_{15}^{3,3,2,2,1,1,1,1,1} = \frac{15!}{3!3!2!2!1!1!1!1!1!} = 15.14.13.12.11.10.7.6.5.4.3$

4. (1.5) No desenvolvimento de $\left(\frac{\sqrt{x}}{4} + \frac{3}{x^2}\right)^{100}$ encontre o coeficiente de x^{-50}. Justifique.

Resposta: Temos $n = 100$, $a = \frac{\sqrt{x}}{4}$ e $b = \frac{3}{x^2}$.

Daí, para $0 \leq k \leq 100$ temos:

$$\begin{array}{rcll}
T_{k+1} & = & C_n^k a^{n-k} b^k & = \\
& = & C_{100}^k \left(\frac{\sqrt{x}}{4}\right)^{100-k} \left(\frac{3}{x^2}\right)^k & = \\
& = & C_{100}^k \frac{(\sqrt{x})^{100-k}}{4^{100-k}} . \frac{3^k}{x^{2k}} & = \\
& = & C_{100}^k \frac{(x^{\frac{1}{2}})^{100-k}}{4^{100-k}} . \frac{3^k}{x^{2k}} & = \\
& = & C_{100}^k \frac{x^{\frac{100-k}{2}}}{4^{100-k}} . \frac{3^k}{x^{2k}} & = \\
& = & C_{100}^k \frac{x^{\frac{100-k}{2}} .x^{-2k} .3^k}{4^{100-k}} & = \\
& = & C_{100}^k \frac{x^{\frac{100-k}{2}-2k} .3^k}{4^{100-k}} & = \\
& = & C_{100}^k \frac{x^{\frac{100-k-4k}{2}} .3^k}{4^{100-k}} & = \\
& = & C_{100}^k \frac{x^{\frac{100-5k}{2}} .3^k}{4^{100-k}} &
\end{array}$$

Devemos determinar k tal que $T_{k+1} = C_{100}^k \frac{x^{-50}.3^k}{4^{100-k}}$.

Portanto, deve ser $\frac{100-5k}{2} = -50 \Rightarrow 100 - 5k = -100 \Rightarrow k = 40$.

Logo, o coeficiente de x^{-50} em $\left(\frac{\sqrt{x}}{4} + \frac{3}{x^2}\right)^{100}$ é $C_{100}^{40} \frac{3^{40}}{4^{60}} = \frac{3^{40}.100!}{4^{60}.60!40!}$.

5. (4.0) Considere os grafos G_1 e G_2 dados por:

$V(G_1) = \{a, b, c, d, e, f\}$,
$E(G_1) = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, f), (f, a), (b, e), (c, f), (a, d)\}$

$V(G_2) = \{u, x, y, z, w, v\}$,
$E(G_1) = \{(u, x), (x, y), (y, z), (z, w), (w, v), (v, u), (x, v), (y, w), (u, z)\}$

(i) Desenhe os grafos G_1 e G_2.

Resposta:

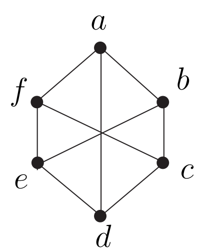

Figura 1: Grafo G_1

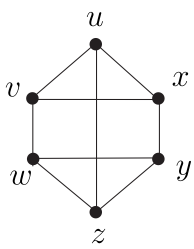

Figura 2: Grafo G_2

(ii) Mostre que G_1 e G_2 não são isomorfos.

Resposta: G_1 e G_2 não são isomorfos, já que o grafo G_1 não possui ciclos de tamanho 3 e G_2 possui.

(iii) G_1 é um grafo planar? Justifique. Caso seja, dê seu número de faces.

Resposta: Não, pois G_1 é isomorfo ao $K_{3,3}$, que sabemos que não é um grafo planar.

(iv) G_2 é um grafo planar? Justifique. Caso seja, dê seu número de faces.

Resposta: Sim, pois G possui a seguinte representação plana:

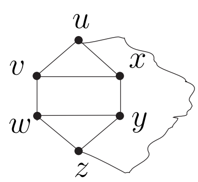

Figura 3: Representação plana de G_2

Temos $n = 6$, $m = 9$, logo pela fórmula de Euler, G_2 possui $n + f = m + 2$, ou seja, $f = 5$, isto é, 5 faces.

(v) G_1 é um grafo hamiltoniano? Justifique.

Resposta: Sim, pois G_1 possui o seguinte ciclo hamiltoniano: a, b, c, d, e, f, a.

(vi) Mostre que G_1 é bipartido. Dê a sua bipartição.

Resposta: Como G_1 não possui ciclos ímpares temos que G_1 é bipartido, pelo teorema de caracterização dos grafos bipartidos.

G pode ser particionado em 2 conjuntos independentes A e B tal que $A = \{a, c, e\}$ e $B = \{b, d, f\}$.