Gabarito da AD2 - Fundamentos de Algoritmos para Computação

2007-1

1. (1.5) Usando o teorema das linhas mostre que:

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1)C_n^k = n(n+3)2^{n-2}$$

Resposta:

$$
\begin{aligned}
& \textstyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1)C_n^k && = \\
= & \textstyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\frac{n!}{k!(n-k)!} && = \\
= & \textstyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} && = \\
= & \textstyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)\frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} && = \\
= & n\textstyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} && = \\
= & n\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(k+1)C_{n-1}^{k-1}}_{Tomando \quad p\ =\ k-1} && = \\
= & n\textstyle\sum_{p=0}^{n-1}(p+2)C_{n-1}^{p} && = \\
= & n\textstyle\sum_{p=0}^{n-1} pC_{n-1}^{p} + n\sum_{p=0}^{n-1} 2C_{n-1}^{p} && = \\
= & n\textstyle\sum_{p=1}^{n-1} pC_{n-1}^{p} + 2n\underbrace{\sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^{p}}_{teor.\ das\ linhas} && = \\
= & n\textstyle\sum_{p=1}^{n-1} p\frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + 2n2^{n-1} && = \\
= & n\textstyle\sum_{p=1}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)!}{(p-1)!((n-2)-(p-1))!} + n2^{n} && = \\
= & n\textstyle\sum_{p=1}^{n-1} C_{n-2}^{p-1} + n2^{n} && = \\
= & n(n-1)\underbrace{\sum_{p=1}^{n-1}(C_{n-2}^{0} + C_{n-2}^{1} + \cdots + C_{n-2}^{n-2})}_{teorema\ das\ linhas} + n2^{n} && = \\
= & n(n-1)2^{n-2} + n2^{2}2^{n-2} && = \\
= & n2^{n-2}(n-1+2^{2}) && = \\
= & n(n+3)2^{n-2}
\end{aligned}
$$

2. (1.5) Considerando o desenvolvimento de $\left(\frac{\sqrt[4]{a}}{b^2} - \frac{2\sqrt{b}}{a}\right)^{100}\left(\frac{\sqrt[4]{a}}{b^2} + \frac{2\sqrt{b}}{a}\right)^{100}$, com $a > 0$ e $b > 0$, calcule o coeficiente de a^{-10}. Justifique.

Resposta: Sabemos que $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$.

Reescrevendo, temos:

$$
\begin{aligned}
& \left(\frac{\sqrt[4]{a}}{b^2}-\frac{2\sqrt{b}}{a}\right)^{100}\left(\frac{\sqrt[4]{a}}{b^2}+\frac{2\sqrt{b}}{a}\right)^{100} && = \\
= \ & \left[\left(\frac{\sqrt[4]{a}}{b^2}-\frac{2\sqrt{b}}{a}\right)\left(\frac{\sqrt[4]{a}}{b^2}+\frac{2\sqrt{b}}{a}\right)\right]^{100} && = \\
= \ & \left[\left(\frac{\sqrt[4]{a}}{b^2}\right)^2-\left(\frac{2\sqrt{b}}{a}\right)^2\right]^{100} && = \\
= \ & \left(\frac{\sqrt{a}}{b^4}-\frac{4b}{a^2}\right)^{100} && = \\
= \ & \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^4}-\frac{4b}{a^2}\right)^{100}
\end{aligned}
$$

Para $0 \leq k \leq 100$, o termo genérico do desenvolvimento é dado por:

$$
\begin{aligned}
T_{k+1} &= C_{100}^{k}\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^4}\right)^{100-k}\left(-\frac{4b}{a^2}\right)^{k} && = \\
&= C_{100}^{k}\left(\frac{a^{\frac{100-k}{2}}}{b^{400-4k}}\right)\left((-4)^k\frac{b^k}{a^{2k}}\right) && = \\
&= C_{100}^{k}\ a^{50-\frac{k}{2}}\ b^{-400+4k}(-4)^k\ b^k\ a^{-2k} && = \\
&= C_{100}^{k}\ (-4)^k\ b^{-400+4k+k}\ a^{50-\frac{k}{2}-2k} && = \\
&= C_{100}^{k}\ (-4)^k\ b^{5k-400}\ a^{50-\frac{5k}{2}}
\end{aligned}
$$

Como queremos calcular o coeficiente de a^{-10}, temos que:

$50-\frac{5k}{2}=-10 \Rightarrow 60=\frac{5k}{2} \Rightarrow \boxed{\text{k=24}}$

Então, o coeficiente de a^{-10} é : $C_{100}^{24}\ (-4)^{24}\ b^{-280}=C_{100}^{24}\ 4^{24}\ b^{-280}$.

3. (1.5) Suponha que uma moeda seja lançada até que apareçam 2 caras, quando o experimento termina.

   (a) Seja a_n o número de experimentos que terminam no n-ésimo lançamento ou antes. Encontre uma relação de recorrência para a_n. Justifique.

   Observe por exemplo, que a_3 é o número de experimentos que terminam no segundo ou terceiro lançamento, ou seja, é a soma de cc, cCc e Ccc onde c significa 'cara' e C 'coroa'.

   Resposta: Os experimentos contados em a_n dividem-se em dois conjuntos disjuntos, experimentos onde as duas caras foram obtidas até o $(n-1)$-ésimo lançamento, existindo a_{n-1} experimentos deste tipo, e experimentos onde a segunda cara foi obtida no n-ésimo lançamento, e portanto só foi obtida uma cara até o $(n-1)$-ésimo lançamento, logo existem $n-1$ experimentos deste tipo.

   Pelo princípio aditivo, temos que $a_n = a_{n-1}+n-1$.

Observe que $a_1 = 0$. Portanto, a relação de recorrência para a_n é:

$$\begin{cases} a_n & = & a_{n-1} + n - 1 \text{ , para } n \geq 2. \\ a_1 & = & 0 \end{cases}$$

(b) Calcule a fórmula fechada da relação de recorrência. Justifique.

Resposta: Temos que :

$$\begin{array}{rcll} a_n & = & a_{n-1} + n - 1 & = \\ & = & [a_{n-2} + (n-2)] + (n-1) & = \\ & = & [a_{n-3} + (n-3)] + [(n-2) + (n-1)] & = \\ & = & [a_{n-4} + (n-4)] + [(n-3) + (n-2) + (n-1)] & = \\ & & \vdots & \\ & = & a_{n-i} + [(n-i) + (n-i+1) + \ldots + (n-2) + (n-1)] & = \\ & = & a_{n-i} + \sum_{k=n-i}^{n-1} k & \end{array}$$

Tomando $n - i = 1$, temos $\boxed{\text{i=n-1}}$.

Logo, $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k$.

Como $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$ e $a_1 = 0$ então $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

4. (1.0) Mostre que não existe grafo simples com 11 vértices que seja regular de grau 3.

Resposta: Suponhamos que exista um grafo G com 11 vértices que seja regular de grau 3.

Sejam $a_1, \ldots, a_{11}$ os vértices do grafo G.

Como G é um grafo regular de grau 3 temos que $d(a_1) = d(a_2) = \ldots = d(a_{11}) = 3$.

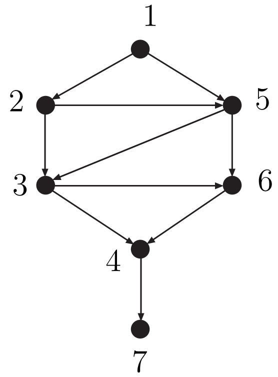
Então $\sum d(v) = 3 \times 11 = 33$, que é um número ímpar. Mas sabemos pelo "Teorema do Aperto de Mãos"que para todo grafo a soma dos graus de seus vértices é sempre igual a duas vezes o seu número de vértices, ou seja, é sempre um número par. Logo, não existe um grafo simples com 11 vértices que seja regular de grau 3.

5. (1.5) Dê um exemplo de um digrafo com 7 vértices que seja unilateralmente conexo e não seja fortemente conexo.

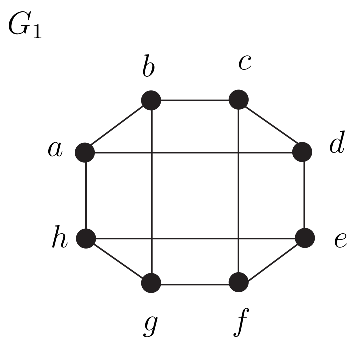
Resposta: Um digrafo $D = (V, E)$ é fortemente conexo quando para todo par de vértices $v, w \in V$, existe um caminho em D de v para w e também de w para v.

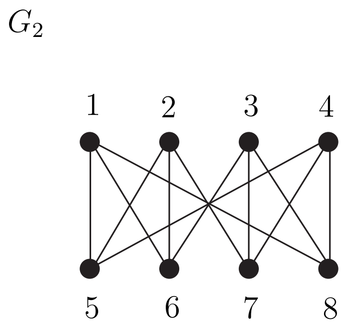
Se pelo menos um desses caminhos existir para todo $v, w \in V$, então D é unilateralmente conexo (isto é, se para cada par v, w de V existir caminho de v para w ou de w para v).

Veja no exemplo abaixo: o digrafo não é fortemente conexo pois não existe caminho de vértice 7 para nenhum outro vértice do grafo (o vértice 7 é um sumidouro). Mas ele é unilateralmente conexo. Existem os caminhos 12347, 15647, 256, 53, 36 que mostram que para todo $v, w \in V$ existe pelo menos um caminho de v a w ou de w a v.



6. (3.0) Responda as seguintes perguntas considerando os grafos G_1 e G_2 abaixo. (Respostas sem justificativas não serão consideradas.)





(a) G_1 e G_2 são isomorfos?

Resposta: Sim, pois seja $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ tal que:

v	$f(v)$
a	1
b	5
c	2
d	6
e	3
f	7
g	4
h	8

f é injetiva (1 a 1) e sobrejetiva. Para f ser isomorfa precisamos verificar se:

$(v, w) \in E(G_1) \leftrightarrow (f(v), f(w)) \in E(G_2)$, $\forall v, w \in V(G_1)$ tal que $(v, w) \in E(G_1)$.

$(a, b) \in E(G_1) \leftrightarrow (1, 5) \in E(G_2)$
$(b, c) \in E(G_1) \leftrightarrow (5, 2) \in E(G_2)$
$(c, d) \in E(G_1) \leftrightarrow (2, 6) \in E(G_2)$
$(d, e) \in E(G_1) \leftrightarrow (6, 3) \in E(G_2)$
$(e, f) \in E(G_1) \leftrightarrow (3, 7) \in E(G_2)$
$(f, g) \in E(G_1) \leftrightarrow (7, 4) \in E(G_2)$
$(g, h) \in E(G_1) \leftrightarrow (4, 8) \in E(G_2)$
$(h, a) \in E(G_1) \leftrightarrow (8, 1) \in E(G_2)$
$(a, d) \in E(G_1) \leftrightarrow (1, 6) \in E(G_2)$
$(b, g) \in E(G_1) \leftrightarrow (5, 4) \in E(G_2)$
$(c, f) \in E(G_1) \leftrightarrow (2, 7) \in E(G_2)$
$(e, h) \in E(G_1) \leftrightarrow (3, 8) \in E(G_2)$

Logo, f é um isomorfismo e G_1 é isomorfo a G_2.

(b) Escreva a matriz de adjacência de G_1.

Resposta: A matriz de adjacência $A = (a_{ij})$ é uma matriz $n \times n$ tal que:

$$\begin{cases} a_{ij} = 1, \text{ se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ a_{ij} = 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) G_2 é um grafo hamiltoniano?

Resposta: G_2 é hamiltoniano, pois G_2 possui um ciclo que passa por todos os vértices uma única vez. E o ciclo é 152637481.

(d) G_2 é um grafo euleriano?

Resposta: Não, pois por teorema, G_2 é euleriano se e somente se todo vértice de G_2 possui grau par, e $d(1) = d(2) = d(3) = d(4) = d(5) = d(6) = d(7) = d(8) = 3$, ou seja G_2 possui vértices com grau ímpar.

(e) G_2 é planar?

Resposta: Sim, pois G_2 possui a seguinte representação plana: