Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
AP3 - Segundo Semestre de 2010

Nome -
Assinatura -

Observações:

1. Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular. Se necessário deixe o resultado indicado, como um produto ou quociente ou potência de números inteiros ou fatoriais.

2. Resultado sem indicação de como foi obtido, não será considerado.

3. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.

4. Você pode usar lápis para responder as questões.

5. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.

6. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

Questões:

1. (1,5) Mostre usando indução matemática que:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Resposta: Seja $P(n) : 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ para todo n natural.

Base da Indução:

Para $n = 1$ temos $2 \times 1 - 1 = 1$.

Por outro lado, $1^2 = 1$, donde podemos concluir que $P(1)$ é verdadeira.

Hipótese de Indução:

Suponha, para $k \geq 1$, que $P(k)$ é verdadeira, isto é:

$$P(k) : 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

Passo Indutivo:

Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, temos que provar que:

$$P(k+1) : 1 + 3 + 5 + \cdots + (2(k+1) - 1) = (k+1)^2$$

$$P(k+1) : 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k+1) = (k+1)^2$$

Desenvolvendo:

$$\begin{array}{ll} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k+1) & = \\ \underbrace{1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1)}_{\text{Pela Hipótese de Indução}} + (2k+1) & = \\ k^2 + (2k+1) & = \\ (k+1)^2 & \end{array}$$

Logo, pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é verdadeira para todo n natural.

2. (1,5) De quantos modos podemos escolher 6 pessoas, incluindo pelo menos 2 mulheres, em um grupo de 8 homens e 5 mulheres ? Justifique.

Queremos escolher 6 pessoas, incluindo pelo menos 2 mulheres, em um grupo de 8 homens e 5 mulheres. Vamos resolver este problema usando complementaridade, isto é, subtraindo do número total de escolhas possíveis de 6 pessoas sem restrições, aquelas nas quais NÃO temos pelo menos 2 mulheres, ou seja, aquelas em que temos zero ou uma mulher.

Total de escolhas de 6 pessoas (sem restrições):

Como estamos falando em escolher pessoas, não devemos considerar a ordem de tais escolhas, já que, escolher primeiro Márcio e depois João é o mesmo que escolher João e depois Márcio, por exemplo. Então, denotando por n_t o número de todas as escolhas de 6 pessoas que é possível fazer a partir de um grupo com 13 pessoas, temos:

$$n_t = C_{13}^{6} = \frac{13!}{7!6!} = 1716.$$

Escolhas de 6 pessoas que NÃO incluem mulheres:

Nesse caso, como não podemos escolher mulheres, nossas escolhas serão restritas ao grupo de 8 homens. Assim, denotando por n_h o número de escolhas de 6 homens que é possível fazer, temos:

$$n_h = C_8^6 = \frac{8!}{6!2!} = 28.$$

Escolhas de 6 pessoas dentre as quais apenas 1 é mulher:

Primeiramente, temos que escolher uma dentre as 5 mulheres. Para tal, temos $C_5^1 = 5$ escolhas possíveis. Em seguida, temos que escolher 5 homens para ocupar as 5 posições restantes. Podemos fazer isto de $C_8^5 = \frac{8!}{3!5!} = 56$ formas. Então, denotando por n_{1m} o número de escolhas possíveis de 6 pessoas sendo que uma delas é necessariamente mulher, temos, pelo princípio multiplicativo que:

$$n_{1m} = 5 \times 56 = 280.$$

Denotando por n número de formas de escolher 6 pessoas incluindo 2 mulheres, em um grupo de 8 homens e 5 mulheres e utilizando o princípio aditivo temos:

$$n = n_t - (n_h + n_{1m}) = 1716 - 308 = 1408.$$

Portanto, podemos escolher 6 pessoas, incluindo duas mulheres, dentre 8 homens e 5 mulheres de 1408 formas.

3. (1,5) Quantos são os anagramas da palavra S A M A M B A I A que não começam com M? Justifique.

   Resposta: Vamos utilizar um raciocínio análogo ao utilizado na questão 2. A fim de obter o número de anagramas da palavra SAMAMBAIA que NÃO começam por M (que denotaremos por n), vamos subtrair do total de anagramas da palavra em questão, aqueles que começam pela letra M.

   Seja n_t o número de todos os anagramas da palavra SAMAMBAIA. Então, como temos 4 letras A, 2 letras M, 1 letra S, 1 letra I e 1 letra B totalizando 9 letras, temos:

$$n_t = P_9^{4,2,1,1,1} = \frac{9!}{4!2!1!1!1!} = 7560.$$

   Denotaremos o número de anagramas da palavra SAMAMBAIA que começam pela letra M por n_M. O cálculo de n_M será da seguinte forma:

   Fixaremos a letra M na primeira posição e restará uma letra M para ser permutada com as demais letras. Assim, temos 8 letras para posicionar em 8 posições sendo que 4 são letras A. Logo,

$$n_M = 1 \times P_8^{4,1,1,1,1} = \frac{8!}{4!1!1!1!1!} = 1680.$$

   Então,

$$n = 7560 - 1680 = 5880.$$

   Portanto, o número de anagramas da palavra SAMAMBAIA que não começam pela letra M é 5880.

4. (1,5) Calcule o coeficiente de x^{43} no desenvolvimento de :

$$\left(\frac{x}{4} - \frac{3}{x^2}\right)^{100}$$

Justifique.

Resposta: Sabemos que a fórmula do termo geral é:

$$T_{k+1} = C_n^k a^{100-k} b^k.$$

Tomando $a = \frac{x}{4}$, $b = \frac{-3}{x^2}$ e $n = 100$, temos:

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= C_{100}^k \left(\tfrac{x}{4}\right)^{100-k} \left(\tfrac{-3}{x^2}\right)^k \\ &= C_{100}^k \left(\tfrac{1}{4}\right)^{100-k} (-3)^k \ \underbrace{x^{100-k} \ \left(x^{-2}\right)^k} \\ &= C_{100}^k \left(\tfrac{1}{4}\right)^{100-k} (-3)^k \ \underbrace{(x)^{-2k+100-k}} \\ &= C_{100}^k \left(\tfrac{1}{4}\right)^{100-k} (-3)^k \ (x)^{-3k+100} \end{aligned}$$

Como queremos o coeficiente de x^{43}, fazemos $-3k + 100 = 43$. Daí, $k = 19$.

Então, o coeficiente de x^{43} é $C_{100}^{19} \left(\frac{1}{4}\right)^{91} \ (-3)^{19}$.

5. (1.5) Seja G o grafo bipartido completo $K_{2,3}$ (com bipartição (V_1, V_2), onde $|V_1| = 2$ e $|V_2| = 3$).

(a) G é planar? Justifique.

Resposta: Sim, pois G pode ser desenhado sem cruzamento de arestas. Observe a Figura 1.

(b) Qual a sequência de graus de G?

De acordo com a Figura 1 temos: $d(u) = 3, d(v) = 3, d(x) = 2, d(y) = 2, d(z) = 2$. Assim, a sequência de graus de G é:

$$(2, 2, 2, 3, 3)$$

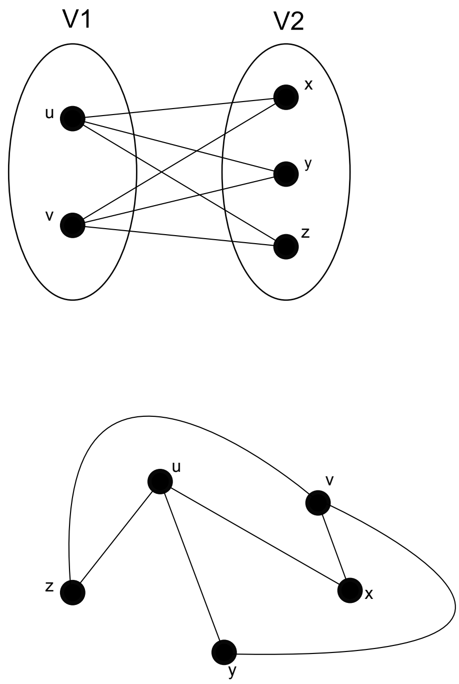

Figura 1: Representações do $K_{2,3}$.

(c) G é euleriano? Justifique.

Resposta: Não, pois os vértices u e v têm grau 3, ou seja têm grau ímpar, e pela caracterização dos grafos eulerianos temos que:

Um grafo é euleriano se e somente se todos os seus vértices têm grau par.

6. (2.5) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for falsa, dê um exemplo e a sua justificação. Se for verdadeira, prove.

(a) As folhas de uma árvore T, com pelo menos três vértices, não pertencem ao seu centro.

Resposta: Verdadeiro.
Seja f uma folha de $T = (V, E)$, árvore com n vértices, $n \geq 3$.

Se f é folha, então $d(f) = 1$ e f tem apenas um vizinho $v \in V$. Além disso, todo caminho de f a qualquer outro vértice $w \in V$ passa pelo vértice v. Logo, $dist(f, w) = dist(v, w) + 1$. Portanto, a excentricidade de v é estritamente menor que a excentricidade de f. Como o centro é formado pelos vértices de menor excentricidade, certamente f não pertence ao centro de T pois existe pelo menos um vértice com excentricidade menor que a excentricidade de f.

(b) Se G é um grafo hamiltoniano, com pelo menos três vértices, então G não possui vértices de grau um.

Resposta: Verdadeiro.

Se $G = (V, E)$ é hamiltoniano, então existe um ciclo C que passa por todo vértice de G. Logo cada vértice de G tem pelo menos dois vizinhos em C, ou seja $d(v) \geq 2$ (grau de $v \geq 2$). Então G não possui vértices de grau um.

(c) Se D é um digrafo (grafo direcionado) que possui ciclos então D não tem fonte e nem sumidouro.

Resposta: Falso.

Observe o contraexemplo:

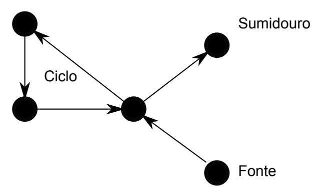

Figura 2: Digrafo cíclico com fonte e sumidouro.