Gabarito da AP1 - Fundamentos de Algoritmos para Computação - 2009/1

1. (2.0) Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N}; 2 \leq x \leq 7\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}; |x| \leq 4\}$.

   (a) Escreva explicitamente os conjuntos A e B.

   Resposta:

   A é o conjunto dos números naturais maiores ou iguais a 2 e menores ou iguais que 7, ou seja, $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e B é o conjunto dos números inteiros tais que o valor do módulo é menor ou igual a 4, ou seja, $B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

   (b) Calcule $n(A \cup B)$ usando o Princípio de Inclusão e Exclusão. Justifique.

   Resposta: $n(A) = 6$, $n(B) = 9$. Sendo $A \cap B = \{2, 3, 4\}$, temos que $n(A \cap B) = 3$. O Princípio de Inclusão e Exclusão diz:

   $$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

   $$n(A \cup B) = 6 + 9 - 3 = 12$$

   (c) A seguinte afirmação é verdadeira?

   $$\emptyset \in (A \cup B)$$

   Se for verdadeira, justifique. Se for falsa justifique e faça a devida modificação de modo a torná-la verdadeira

   Resposta: Falsa. O conjunto vazio não é um elemento de $(A \cup B)$. Mas, sabemos que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto, portanto a sentença verdadeira é

   $$\emptyset \subset (A \cup B)$$

2. (2.0) Mostre usando Indução Matemática:

   $$1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

   Resposta:

   Seja

   $$P(n) : 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

   Base da indução:

   Para $n = 1$, tem-se

   $$1(1!) = 1 = (1+1)! - 1$$

   Logo, $P(1)$ é verdadeira.

   Hipótese de Indução:

Suponha verdadeiro para $k \geq 1$, isto é, $P(k)$ é verdadeira:

$$P(k) : 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \cdots + k(k!) = (k+1)! - 1$$

Passo da Indução:

Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeiro então $P(k+1)$ é verdadeiro, isto é, temos que provar que:

$$P(k+1) : 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \cdots + k(k!) + (k+1)((k+1)!) = ((k+1)+1)! - 1$$

é verdadeira.

De fato,

$$\underbrace{1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \cdots + k(k!)}_{HI} + (k+1)((k+1)!) = (k+1)! - 1 + (k+1)((k+1)!)$$

Colocando $(k+1)!$ em evidência, temos:

$$(k+1)! - 1 + (k+1)((k+1)!) = (k+1)!(1+k+1) - 1 = (k+2)! - 1 = ((k+1)+1)! - 1$$

O que mostra que a afirmação

$$P(n) : 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1$$

é verdadeira para todo natural $n \in \mathbb{N}$.

3. (2.0) Considere a palavra P I R A C I C A B A.

   (a) Quantos são os anagramas que começam com vogal? Justifique.

   Resposta: A palavra P I R A C I C A B A possui 10 letras: 1 P, 2 I, 1 R, 3 A, 2 C e 1 B.

   __ __ __ __ __ __ __ __ __ __

   Os anagramas da palavra P I R A C I C A B A que começam por vogal, têm na primera posição as vogais I ou A. Sendo assim, para as outras 9 posições, temos 9 letras possíveis, pois uma já foi usada na primeira posição.
   Se a letra usada foi o I, temos:

$$P_9^{1,1,1,3,2,1} = \frac{9!}{3!2!}$$

   Se foi a letra A, temos:

$$P_9^{1,1,2,2,2,1} = \frac{9!}{2!2!2!}$$

   Logo, pelo princípio aditivo, temos:

$$P_9^{1,1,1,3,2,1} + P_9^{1,1,2,2,2,1} = \frac{9!}{3!2!} + \frac{9!}{2!2!2!} = \frac{9!}{2!}\left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!2!}\right) = \frac{9!}{2}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)$$

   anagramas da palavra P I R A C I C A B A que começam por vogal.

(b) Quantos são os anagramas onde as letras A não aparecem juntas, nem duas a duas nem três a três? Justifique.

Resposta: A palavra P I R A C I C A B A tem 10 letras, sendo 3 delas a letra A, que não podem estar juntas. Para formarmos os anagramas com essa restrição, vamos primeiro arrumar as outras 7 letras. Isso pode ser feito de $P_7^{1,2,1,2,1} = \frac{7!}{2!2!} = 1260$ formas diferentes.
Agora, vamos inserir as 3 letras A nos lugares que restaram. Podemos intercalar os 3 A entre as letras já colocadas no anagrama, no início ou no final do anagrama. Veja na figura:

Como nos restam 8 espaços para colocar as letras A, isso pode ser feito de $C_8^3 = \frac{8!}{3!5!} = 56$.
Pelo princípio multiplicativo, o número de os anagramas onde as letras A não aparecem juntas, nem duas a duas nem três a três é

$$P_7^{1,2,2,1} \times C_8^3 = \frac{7!}{2!2!} \times \frac{8!}{3!5!} = 1260 \times 56$$

4. (2.0) Usando os algarismos 1, 2, 3, 5, 7 e 9 quantos números de 4 dígitos podem ser formados de modo que pelo menos 2 algarismos sejam iguais? Justifique

Resposta: Sejam os seguintes conjuntos:

U : conjunto de todos os números de 4 dígitos que podem ser formados com os 6 dígitos: 1, 2, 3, 5, 7 e 9.

A : conjunto de todos os números de 4 dígitos que podem ser formados com os 6 dígitos: 1, 2, 3, 5, 7 e 9, de modo que pelo menos 2 algarismos sejam iguais.

B : conjunto de todos os números de 4 dígitos que podem ser formados com os 6 dígitos: 1, 2, 3, 5, 7 e 9, tal que todos os dígitos são diferentes.

Então, $n(A) = n(U) - n(B)$.

Mas, $n(U)$ é o número de arranjos com repetição de 6 elementos considerados 4 a 4, $AR(6,4) = 6^4$

$n(B) = A_6^4 = \frac{6!}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$.

Logo, formamos $n(A) = 6^4 - 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1296 - 360 = 936$ números de 4 dígitos de modo que pelo menos 2 algarismos sejam iguais.

5. (2.0) Determine quantas são as soluções inteiras, não negativas da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 23$$

tais que $x_2 > 1$ e $x_4 \geq 5$? Justifique.

Resposta: Para encontrar as soluções inteiras não negativas da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 23$$

onde $x_2 > 1$, $x_1, x_3 \geq 0$ e $x_4 \geq 5$ devemos fazer, primeiramente mudanças de variáveis: $x_2 = x_2' + 2$ e $x_4 = x_4' + 5 \Rightarrow x_2' \geq 0$ e $x_4' \geq 0$. Portanto, é equivalente resolver:

$$x_1 + x_2' + 2 + x_3 + x_4' + 5 = 23$$

$$x_1 + x_2' + x_3 + x_4' = 16$$

onde $x_1, x_2', x_3, x_4' \geq 0$.

Logo, a resposta é

$$CR_4^{16} = C_{16+4-1}^{16} = \frac{19!}{16!3!}$$

soluções inteiras não-negativas.