Aula 22: Grafos Eulerianos e Grafos Hamiltonianos

Conteúdo:

- Introdução
- Definições
  - Grafo Euleriano
  - Grafo Hamiltoniano
- Grafo Euleriano: Caracterização
- Grafo Hamiltoniano
  - Teorema de Dirac
  - Teorema de Ore
  - Problema do Caixeiro Viajante

Introdução:

Vamos considerar dois tipos de problemas, aparentemente muito semelhantes, mas de natureza muito diferentes.

Suponhamos que temos n cidades ligadas por estradas.

Problema do explorador

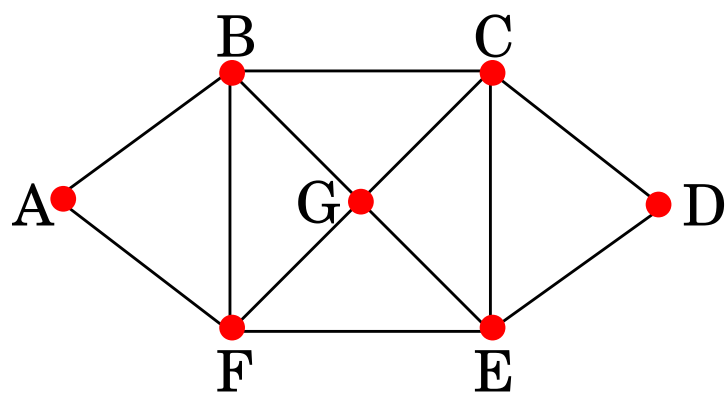
Um explorador deseja visitar todas as rotas (estradas) existentes entre as n cidades. É possível achar um percurso que atravessa cada rota apenas uma vez, retornando ao ponto de partida?

Problema do viajante

Um viajante deseja visitar todas as n cidades.
É possível achar um percurso que visita cada cidade apenas uma vez, retornando ao ponto de partida?

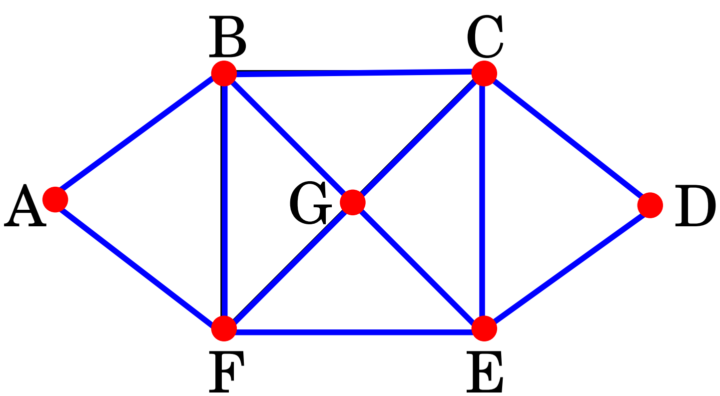
Para apreciar a diferença entre esses dois problemas, vamos considerar um exemplo com 7 cidades: A, B, C, D, E, F e G, e as estradas entre elas.

Podemos visualizar essa situação utilizando o grafo abaixo, onde cada cidade está associada a um vértice e cada estrada entre duas cidades está associada a uma aresta, unindo os vértices correspondentes as respectivas cidades.



Problema do explorador

O explorador deseja achar um percurso que <u>começa</u> em A, atravessa cada estrada exatamente uma vez e <u>termina</u> em A.



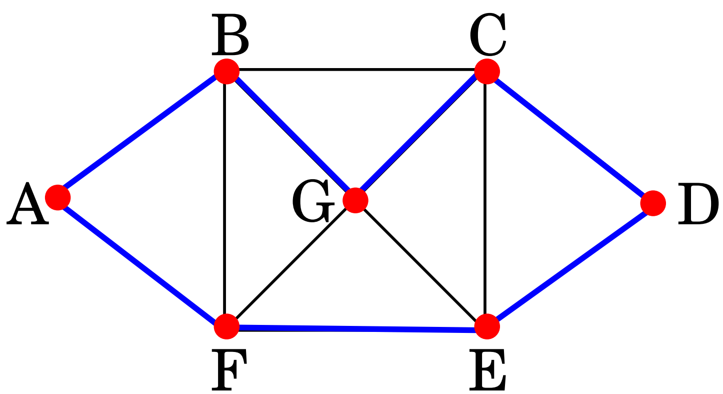
P_1: A B C D E F B G C E G F A

P_2: A F G C D E G B C E F B A

- Observe que o explorador passa por cada estrada uma única vez, mas pode passar por alguma cidade várias vezes.

Problema do viajante

O viajante deseja achar um percurso que <u>começa</u> em A, passa por cada cidade exatamente uma vez e <u>termina</u> em A.



P_1: A B C D E G F A

P_2: A F E D C G B A

- Observe que o viajante passa por cada cidade uma única vez (excetuando a inicial).

Resumindo:

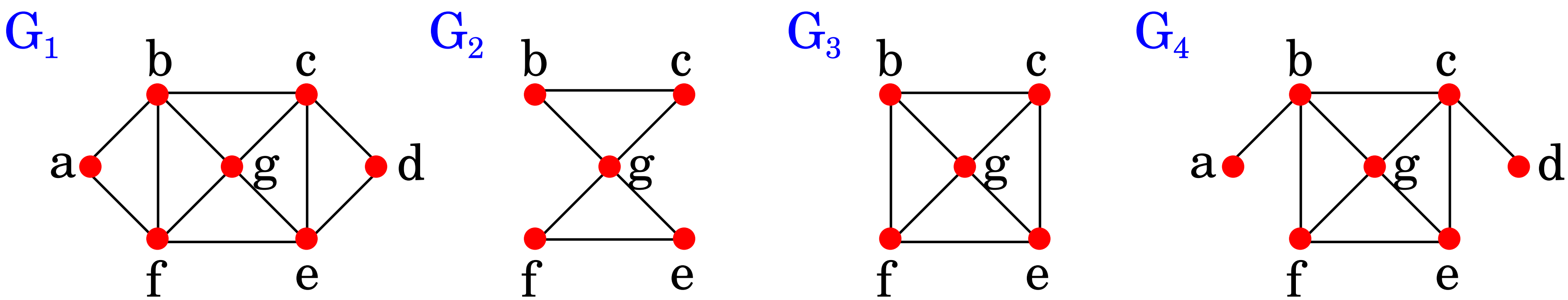
- O problema do explorador é achar um trajeto fechado que inclui cada aresta do grafo.
- O problema do viajante é achar um ciclo que inclui cada vértice do grafo.

Definições:

- Um grafo conexo G é euleriano se existe um trajeto fechado que inclui cada aresta de G. Tal trajeto é chamado de trajeto euleriano ou circuito euleriano.

- Um grafo G é hamiltoniano se existe um ciclo que inclui cada aresta de G. Tal ciclo é chamado de ciclo hamiltoniano.

Exemplo 1: Consideremos os 4 grafos abaixo:



G_1 é euleriano e hamiltoniano (já vimos).

G_2 é euleriano: b c g f e g b é um circuito euleriano.

G_2 não é hamiltoniano. Por que?

G_3 não é euleriano. Por que?

G_3 é hamiltoniano: b c g e f b é um ciclo hamiltoniano.

G_4 não é nem euleriano e nem hamiltoniano.

Por que?

- Vamos tratar agora, cada um dos problemas separadamente:

  - O problema do explorador: determinar se um grafo é <u>euleriano</u>.

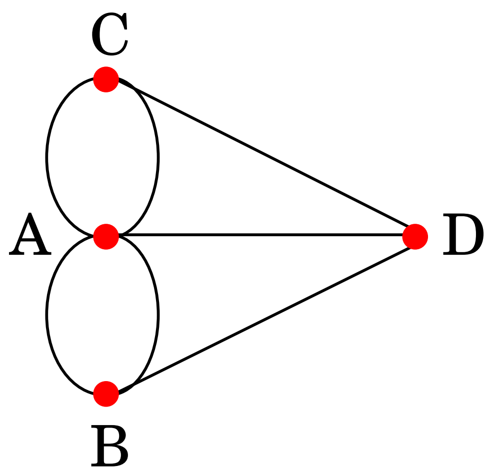
  - O problema do viajante: determinar se um grafo é <u>hamiltoniano</u>.

Grafos Eulerianos:

- Quando introduzimos os grafos, falamos do problema da Ponte de Königsberg.

- Esse problema foi resolvido pelo matemático Leonard Euler (1707 - 1783) e sua solução está no que é considerado o primeiro trabalho em grafos: "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis".

O problema da Ponte de Königsberg como vimos (se precisar volte a aula de Introdução aos grafos) era achar um percurso que atravessava cada ponte uma única vez, voltando ao ponto de partida. Esse problema corresponde exatamente ao problema de achar um trajeto (fechado) euleriano no grafo (multigrafo) correspondente:



- Daí a origem do nome: grafo euleriano.

- Comentamos que o problema não tinha solução e mais ainda, para que tivesse solução seria necessário termos em cada vértice um número par de arestas (pontes).

  E essa é justamente a caracterização de grafos eulerianos.

Caracterização de grafos eulerianos

Teorema: Seja G um grafo conexo.

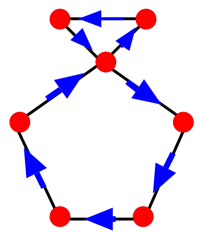
G é <u>euleriano</u> se e somente se todo vértice de G tem <u>grau par</u>.

- A prova consiste de duas partes:

1. Se G é euleriano $\Rightarrow$ todo vértice de G tem grau par (parte fácil)
2. Se todo vértice de G tem grau par $\Rightarrow$ G é euleriano

1. Se G é euleriano $\Rightarrow$ todo vértice de G tem grau par

Prova: Se G é euleriano, então temos um trajeto euleriano e podemos percorrer esse trajeto, passando por cada aresta uma vez e retornando a origem.



Cada vez que passamos por um vértice, temos uma contribuição de 2 unidades para o grau desse vértice (incluindo o inicial, pois terminamos nele). Como cada aresta é usada uma única vez, o grau de cada vértice é 2 vezes o número de visitas a esse vértice, logo é um número par.

2. Se todo vértice de G tem grau par então G é euleriano.

   Essa prova é mais elaborada e será omitida.

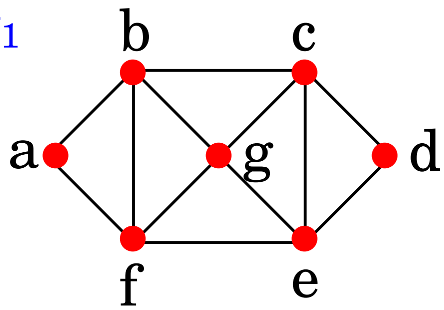
   Esse teorema nos dá uma maneira fácil e rápida de decidir se um grafo é ou não euleriano.

   Basta verificarmos os graus de todos os vértices do grafo:

   - Se todos tiverem grau par então o grafo é euleriano.
   - Caso contrário, o grafo não é euleriano.

Exemplo 2:

G_1

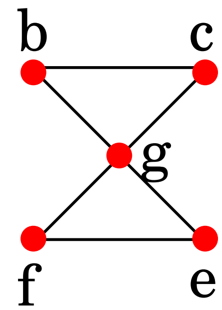


d(a) = d(d) = 2

d(b) = d(c) = d(f) = d(e) = d(g) = 4

G_1 é euleriano

G_2

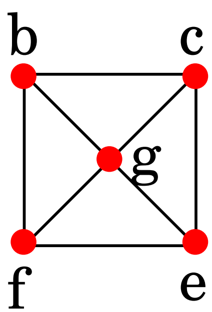


d(b) = d(c) = d(f) = d(e) = 2

d(g) = 4

G_2 é euleriano

G_3

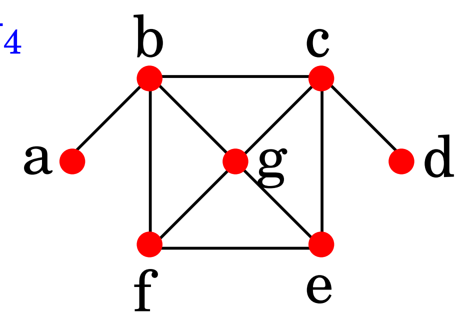


d(b) = d(c) = d(f) = d(e) = 3

d(g) = 4

G_3 não é euleriano

G_4



d(b) = d(c) = d(g) = 4

d(f) = d(e) = 3

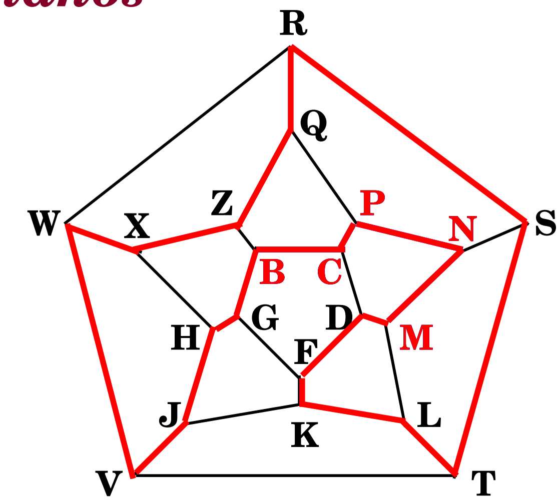
d(a) = d(d) = 1

G_4 não é euleriano

Grafos Hamiltonianos:

- Os grafos hamiltonianos são grafos em que existe um ciclo que passa por todos os vértices do grafo.

- O nome "hamiltoniano" vem do famoso matemático Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865).
  Ele popularizou o jogo do icosaedro, em que o jogador tem que achar ciclos hamiltonianos começando com 5 vértices consecutivos dados:



- Suponha que sejam dados: B C P N M

  Podemos completar o ciclo hamiltoniano da seguinte forma:

  B C P N M D F K L T S R Q Z X W V J H G B

Desafio: Ache outro ciclo hamiltoniano que também comece com B C P N M.

Desafio Voltar

B C P N M D F G H X W V J K L T S R Q Z B

- Aparentemente o problema de decidir se um grafo é hamiltoniano parece muito semelhante ao problema de decidir se um grafo é euleriano, e gostaríamos de poder conseguir condições necessárias e suficientes para isso.

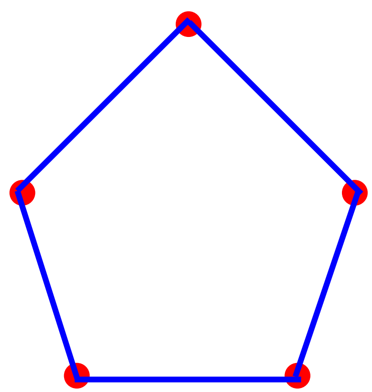
- Infelizmente não se conhecem condições necessárias e suficientes para este problema, mas apenas condições parciais.

- Observemos alguns grafos que são (trivialmente) hamiltonianos.

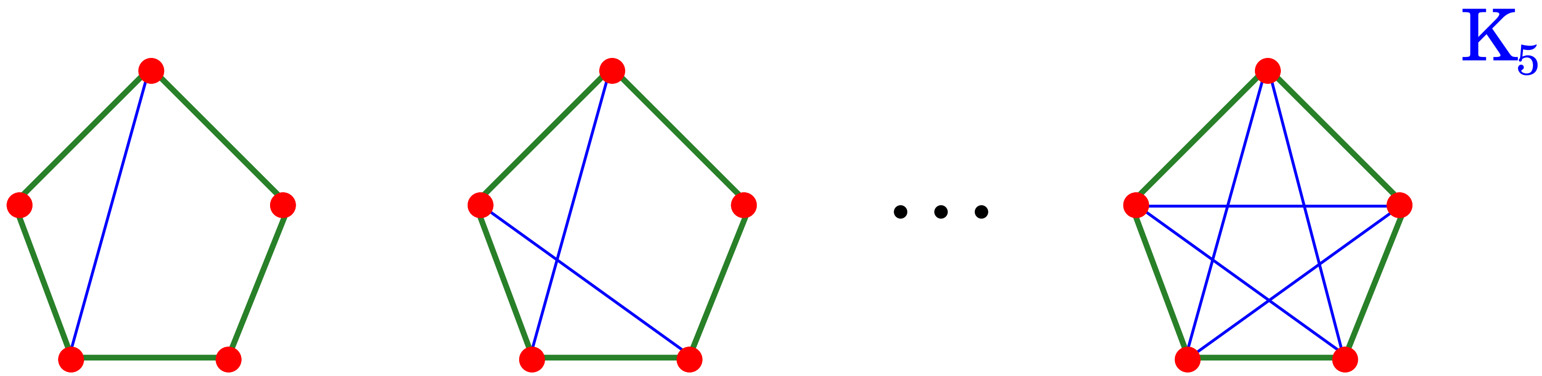
Por exemplo:

C_n (ciclo com n vértices) é hamiltoniano.

Vamos exemplificar com $n = 5$



- Se colocamos mais arestas em um grafo hamiltoniano, o grafo obtido continua hamiltoniano.



K_n (o grafo completo com n vértices) é hamiltoniano.

- Observação:

Podemos dizer que grafos com mais arestas têm mais possibilidade de serem hamiltonianos que grafos com menos arestas.

Temos duas condições de suficiência, mas não de necessidade que saem da observação acima.

- **Teorema** (Dirac):

  Seja G um grafo com n vértices, $n \geq 3$.

  Se $d(v) \geq \frac{1}{2}n \quad \forall \; v \in V(G)$ então G é hamiltoniano.

- **Teorema** (Ore):

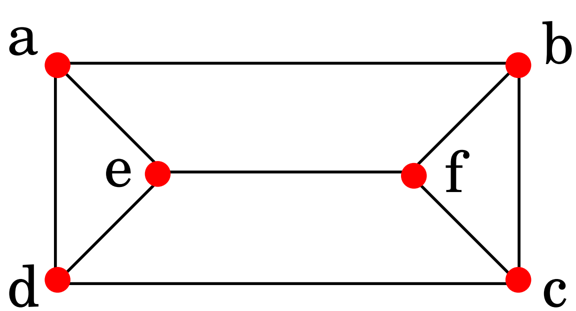
  Seja G um grafo com n vértices, $n \geq 3$.

  Se $d(v) + d(w) \geq n$ para todo par de vértices v e w não adjacentes, $v, w \in V(G)$ então G é hamiltoniano.

- Vamos ilustrar os teoremas considerando os exemplos a seguir:

Exemplo 3:

G_1



$n = 6$

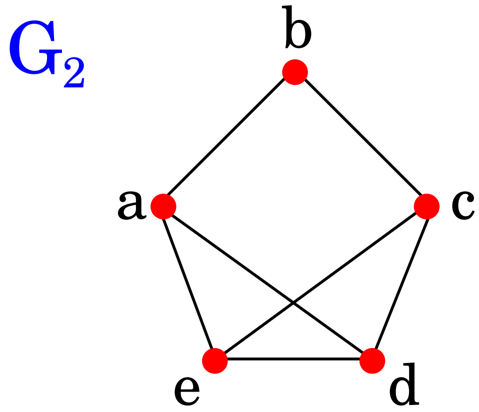
$d(a) = d(b) = d(c) = d(d) = d(e) = d(f) = 3$

G_1 é regular de grau 3, isto é $d(v) = 3 \quad \forall \; v \in V(G_1)$

$$d(v) = 3 = \frac{n}{2} = \frac{6}{2} = 3 \qquad \forall \; v \in V(G_1)$$

Logo G_1 é hamiltoniano pelo Teorema de Dirac.

Exemplo 4:



$n = 5$

$d(a) = d(c) = d(d) = d(e) = 3$

$d(b) = 2$

Para $v = a, c, d, e$ $\quad d(v) = 3 > \dfrac{n}{2} = \dfrac{5}{2} = 2,5$

Para $v = b$ $\quad d(b) = 2 < \dfrac{5}{2} = 2,5$

Logo o Teorema de Dirac não se aplica

Mas se testarmos a condição do Teorema de Ore

$d(a) + d(c) = 6 > n = 5$

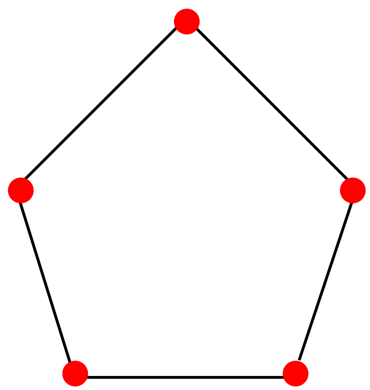
$d(b) + d(e) = d(b) + d(d) = 5 = n = 5$

Logo, G_2 é hamiltoniano pelo <u>Teorema de Ore</u>.

- Mas observe que as condições dadas pelo Teorema de Dirac e pelo teorema de Ore não são necessárias.

Exemplo 5: C_5 é hamiltoniano e <u>não satisfaz</u> nem a condição de Dirac e nem as condições de Ore.

C_5



($n = 5$ $d(v) = 2$ $\forall \ v \in C_5$)

Verifique!

- Um problema famoso e muito estudado:

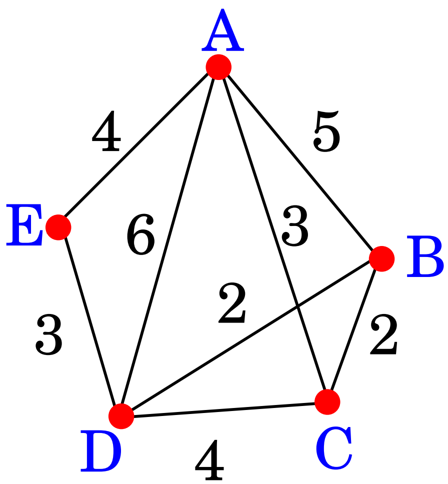
Problema do caixeiro viajante

Um caixeiro viajante deseja visitar n cidades (A_1, A_2, ... , A_n), começando na cidade A_1 e retornando ao fim a esta mesma cidade, de tal maneira que cada cidade é visitada apenas uma única vez e que a distância coberta seja a menor possível.

Dadas as distâncias entre as cidades, como o problema pode ser resolvido?

- Consideremos um exemplo pequeno:

5 cidades: A, B, C, D, E



(As distâncias entre cada cidade são os números associados a cada aresta que liga as respectivas cidades)

A princípio poderíamos resolver esse problema olhando todos os possíveis percursos (ciclos) e escolhendo o que envolve a menor distância.

Por exemplo: C_1 : A B C D E A $\rightarrow$ 18

C_2 : A C B D E A $\rightarrow$ 14

Se você testar todas as possibilidades verá que 14 é a menor distância.

- O Problema do Caixeiro Viajante é determinar (se possível) os ciclos hamiltonianos do grafo e escolher o de menor valor (somando todas as arestas do grafo).

  Se aumentarmos o número de cidades (e considerarmos todas as estradas possíveis entre as cidades, ou seja o modelo é um grafo completo) o problema pode complicar muito.

  10 cidades - 362880 possíveis percursos

  20 cidades - $1{,}22 \times 10^{17}$ possíveis percursos

  $\vdots$

- Infelizmente não se conhece algoritmos eficientes para resolver esse problema. Embora existam heurísticas, que podem ser usadas para se conseguir soluções aproximadas, uma solução exata envolveria olhar todos os possíveis ciclos hamiltonianos e escolher o de menor valor.

  O Problema do Caixeiro Viajante (e suas variações) é muito importante na prática e é um problema ainda muito estudado.

Resumo:

Grafo Euleriano:

É um grafo que possui um trajeto fechado que inclui todas as arestas do grafo.

Caracterização:

Um grafo é euleriano $\Leftrightarrow$ todos os seus vértices têm grau par

Grafo Hamiltoniano:

É um grafo que possui um ciclo que inclui todos os vértices do grafo.

Condições parciais:

G grafo conexo com n vértices, $n \geq 3$

Dirac: Se $d(v) \geq \frac{1}{2}n \quad \forall\, v \;\Rightarrow$ G é hamiltoniano.

Ore: Se $d(v) + d(w) \geq n$ para todo par de vértices v e w não adjacentes $\Rightarrow$ G é hamiltoniano.

Problema do Caixeiro Viajante:

Determinar (se possível) o ciclo hamiltoniano de menor valor do grafo.