Gabarito da AP1 - Fundamentos de Algoritmos para Computação - 2008/2

1. (2.0) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

   (a) $\{\emptyset\} \in \{0, 1\}$

   Resposta: Falso.

   O conjunto $\{\emptyset\}$ não é um elemento do conjunto $\{0, 1\}$.

   (b) $\{\emptyset\} \subset \{0, 1\}$

   Resposta: Falso.

   Lembramos que $A \subset B$ significa que, todo elemento de A é elemento de B. Se $A = \{\emptyset\}$ então, o único elemento de A é $\emptyset$. Temos que $\emptyset$ não é elemento do conjunto $\{0, 1\}$. Logo, $\{\emptyset\} \not\subset \{0, 1\}$. O que é válido é $\emptyset \subset \{0, 1\}$.

   (c) $n(A \cup B) \leq n(A) + n(B)$

   Resposta: Verdadeiro.

   Sabemos do princípio da inclusão e exclusão que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. Como $n(A \cap B) \geq 0$, temos que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \leq n(A) + n(B)$.

2. (2,0) Mostre usando o princípio da indução matemática que:

$$n^2 > 3n \text{ para todo natural } n \geq 4.$$

Resposta:

Seja

$$P(n) : n^2 > 3n, \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 4$$

Base da indução:

Para $n = 4$, tem-se

$$4^2 = 16 > 12 = 3 \cdot 4$$

Logo $P(4)$ é verdadeira.

Suponha verdadeiro para $k \geq 4$, isto é, $P(k)$ é verdadeira:

$$P(k) : k^2 > 3k$$

Passo da Indução:

Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeiro então $P(k+1)$ é verdadeiro, isto é, temos que provar que:

$$P(k+1) : (k+1)^2 > 3(k+1)$$

é verdadeira.

De fato,

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$$

Como pela hipótese de indução $k^2 > 3k$, segue que $k^2 + 2k + 1 > 3k + 2k + 1$.

Como $k \geq 4$, então temos $2k \geq 8$.

Logo,

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 > 3k + 2k + 1 \geq 3k + 8 + 1 = 3k + 9 = 3(k+3) \geq 3(k+1)$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeira.

Então pelo Princípio da Indução Matemática $P(n) : n^2 > 3n$ é verdadeira $\forall n \geq 4, n \in \mathbb{N}$.

3. (2.0) Dadas as letras **A, B, C, D, E, F e G**, quantas sequências de 4 letras diferentes podem ser formadas, considerando que as duas primeiras letras de cada sequência são escolhidas dentre **A, B e C**? Justifique.

   Resposta:

   Para formarmos uma palavra de quatro letras diferentes, onde as duas primeiras letras são escolhidas dentre **A, B e C**, vamos ocupar as primeiras 2 posições com duas das três letras, importando a ordem. Logo, temos arranjos de 3 letras tomadas 2 a 2, $A(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!}$.

   Resta 1 letra dentre **A, B** e **C** e as letras **D, E, F** e **G**, ou seja, 5 letras candidatas a ocupar os outros dois lugares na sequência. Novamente, temos arranjos de 5 letras tomadas 2 a 2, $A(5,2) = \frac{5!}{(5-2)!}$.

   Pelo princípio multiplicativo, temos

   $$A(3,2) \cdot A(5,2) = \frac{3!}{1!} \cdot \frac{5!}{3!} = 5! = 120$$

   modos diferentes.

4. (2.0) Maria adora sorvete. Ela tem diante de si sorvetes de 4 sabores, sendo 4 bolas de abacaxi, 3 bolas de cupuaçu, 2 bolas de limão e 3 bolas de manga. De quantas maneiras Maria pode comer as 12 bolas, caso:

   (a) Não haja restrições? Justifique.

   Resposta: Maria tem diante de si uma sequência de 12 bolas de sorvete, sendo 4 bolas de abacaxi, 3 bolas de cupuaçu, 2 bolas de limão e 3 bolas de manga. Como importa a ordem e temos repetições o resultado é dado por

   $$P_{12}^{4,3,2,3} = \frac{12!}{4!3!2!3!} = 277.200 \text{ maneiras.}$$

   (b) Ela não queira comer 2 bolas de cupuaçu sucessivamente? Justifique.

   Resposta: Para que Maria não coma 2 bolas de cupuaçu sucessivamente, vamos primeiro calcular as diferentes maneiras de comer os outros sabores que correspondem a permutações com repetição, $P_9^{4,2,3}$. Depois, colocamos as bolas de cupuaçu nos lugares restantes que podem estar no início da sequência, entre os outros sabores ou no final. Logo, temos 10 posições para colocar as 3 bolas de cupuaçu. Isso pode ser feito de C_{10}^3 modos.

Logo, pelo princípio multiplicativo, Maria pode comer as 12 bolas de sorvete, de forma que não coma duas bolas de cupuaçu sucessivamente de

$$P_9^{4,2,3} \cdot C_{10}^3 = \frac{9!}{4!2!3!} \cdot \frac{10!}{3!7!} \text{ maneiras.}$$

5. (2.0) Um mercadinho tem um estoque de 50 laranjas, 20 mangas e 10 maçãs. As frutas de mesmo tipo são idênticas. Quantas maneiras existem de selecionar:

   (a) Um total de 10 frutas? Justifique.

   Definamos por x_1 a quantidade de laranjas , por x_2 a quantidade de mangas e por x_3 a quantidade de maçãs que podem ser selecionadas de maneira que a soma seja 10. Como existem mais de 10 frutas de cada tipo, as restrições que devemos considerar são $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$. Ou seja, queremos encontrar o número de soluções inteiras não-negativas para a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ que correspondem a:

   $$CR_3^{10} = C_{10+3-1}^{10} = C_{12}^{10} = \frac{12!}{2!10!} = \frac{12 \cdot 11}{2!} = 66$$

   Portanto, existem 66 maneiras de selecionar 10 frutas dentre as frutas dadas.

   (b) Um total de 10 frutas, sendo que pelo menos três delas são maçãs? Justifique.

   Resposta: Como dentre as 10 frutas selecionadas devem existir, pelo menos três maçãs, devemos considerar uma restrição a mais para a variável x_3, ou seja, $x_3 \geq 3$.

   Como no item anterior, queremos encontrar soluções inteiras para a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, onde $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 3$. Fazendo a mudança de variável, $x_3^* = x_3 - 3$, e substituindo na equação, temos:

   $$x_1 + x_2 + (x_3^* + 3) = 10$$

   que é equivalente a encontrar as soluções inteiras não-negativas para a equação

   $$x_1 + x_2 + x_3^* = 10 - 3 = 7$$

   onde $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3^* \geq 0$, que corresponde a:

   $$CR_3^7 = C_{3+7-1}^7 = C_9^7 = \frac{9!}{2!7!} = \frac{9 \cdot 8}{2!} = 36$$

   Portanto, existem 36 maneiras de selecionar 10 frutas, sendo pelo menos três delas, maçãs.