Gabarito da AP3 de Fundamentos de Algoritmos para Computação

Questões:

1. (1.5) Mostre usando indução matemática que:

$$2 + 2.2^2 + 3.2^3 + \ldots + n2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$$

Resposta: Seja $P(n) : 2 + 2.2^2 + 3.2^3 + \ldots + n2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$, para $n \in \mathbb{N}$.

Base da indução: Para $n = 1$, temos que $2 = (1-1)2^{1+1} + 2$.

Logo, $P(1)$ é verdadeira.

Hipótese de indução:

Suponha verdadeiro para k, isto é, $P(k)$ é verdadeiro:

$$P(k) : 2 + 2.2^2 + 3.2^3 + \ldots + k2^k = (k-1)2^{k+1} + 2$$

Devemos provar que $P(k+1)$ é verdadeiro, isto é:

$$P(k+1) : 2 + 2.2^2 + 3.2^3 + \ldots + (k+1)2^{k+1} = k2^{k+2} + 2$$

Desenvolvendo para $k+1$, o primeiro membro, e usando a hipótese de indução, temos que:

$$\begin{array}{rll} & 2 + 2.2^2 + 3.2^3 + \ldots + (k+1)2^{k+1} & = \\ = & \underbrace{2 + 2.2^2 + 3.2^3 + \ldots + k2^k}_{(Por\ hipótese\ indutiva)} + (k+1)2^{k+1} & = \\ = & (k-1)2^{k+1} + 2 + (k+1)2^{k+1} & = \\ = & [k - 1 + k + 1]2^{k+1} + 2 & = \\ = & 2k.2^{k+1} + 2 & = \\ = & k.2^{k+2} + 2 & \end{array}$$

Logo, pelo princípio da indução, a expressão é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. (1.5) Em um jantar deve-se acomodar 6 (seis) pessoas A, B, C, D, E e F, em uma mesa circular. Sabe-se que A e B nunca se sentam lado a lado. Quantas são as maneiras de dispor as pessoas na mesa? Justifique.

Resposta:

Primeira maneira: Podemos formar $(PC)_4 = 3!$ maneiras de dispor as 4 pessoas na mesa (A e B estão de fora).

Há agora 4 maneiras de colocar a pessoa A na mesa. Depois colocamos o B na mesa. Temos 3 modos de colocá-lo para ele não ficar junto de A. Logo, pelo princípio multiplicativo, a resposta é: $3! \times 4 \times 3 = 3 \times 4!$.

Segunda maneira: Primeiro, colocamos na mesa 5 pessoas: B, C, D , E e F. Logo, temos $(PC)_5 = 4!$ maneiras diferentes de os dispor na mesa. Consideremos agora A, como não pode ficar lado a lado com B, ela terá 3 possibilidades de sentar para cada arrumação das outras 5 pessoas, logo, pelo princípio multiplicativo, tem-se $3 \cdot 4!$ maneiras de dispor as pessoas na mesa.

Terceira maneira: Podemos pensar no complemento, isto é, $Z = X - Y$, onde Z é o número de maneiras de dispor as 6 pessoas na mesa de forma que A e B nunca se sentam lado a lado, X é o número de maneiras de dispor as 6 pessoas na mesa sem restrição e Y é o número de maneiras de dispor as 6 pessoas na mesa de forma que A e B sempre se sentam juntas.

Temos que $X = (PC)_6 = 5!$.

Para calculcarmos Y, temos primeiramente que decidir em que ordem as pessoas A e B se colocarão na mesa. Há duas possibilidades: AB e BA. Agora, tudo se passa como se A e B fossem uma única pessoa.

Logo, a resposta é $Y = 2.(PC)_5 = 2.4!$

Temos então que $Z = 5! - 2.4! = 5.4! - 2.4! = 3.4!$

3. (1.5) Quantos números naturais menores ou iguais que 10.000 podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3 e 4? Justifique.

   Resposta: Seja X o número de naturais menores ou iguais que 10.000 que podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3 e 4

   Com 1 algarismo, temos 4 possibilidades; (5 se 0 for considerado número natural)
   Com 2 algarismos, temos 4.5 possibilidades;
   Com 3 algarismos, temos 4.5.5 possibilidades;
   Com 4 algarismos, temos 4.5.5.5 possibilidades;
   Com 5 algarismos, temos 1 possibilidade (o próprio 10.000);

   Logo, $X = 4 + 4.5 + 4.5^2 + 4.5^3 + 1$ ou $X = 5 + 4.5 + 4.5^2 + 4.5^3 + 1$

4. (1.5) Calcule o termo independente de x no desenvolvimento de:

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{1}{x^2}\right)^{105}$$

   Justifique.

   Resposta: O termo $(k+1)$, para $k = 0, \cdots, n$, do binômio $(a+b)^n$ é dado por:

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$$

Considerando $n = 105$, $a = \frac{\sqrt{x}}{3}$ e $b = -\frac{1}{x^2}$, temos que:

$$\begin{aligned}
T_{k+1} &= C_n^k a^{n-k} b^k &= \\
&= C_{105}^k \left(\frac{\sqrt{x}}{3}\right)^{105-k} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k &= \\
&= C_{105}^k \frac{(\sqrt{x})^{105-k}}{3^{105-k}} \cdot \frac{(-1)^k}{x^{2k}} &= \\
&= C_{105}^k \frac{(x^{\frac{1}{2}})^{105-k}}{3^{105-k}} (-1)^k x^{-2k} &= \\
&= C_{105}^k \frac{x^{\frac{105-k}{2}} . (-1)^k . x^{-2k}}{3^{105-k}} &= \\
&= C_{105}^k \frac{(-1)^k x^{\frac{105-k}{2} - 2k}}{3^{105-k}} &= \\
&= C_{105}^k \frac{(-1)^k x^{\frac{105-k-4k}{2}}}{3^{105-k}} &= \\
&= C_{105}^k \frac{(-1)^k x^{\frac{105-5k}{2}}}{3^{105-k}}
\end{aligned}$$

Devemos determinar k tal que $T_{k+1} = C_{105}^k \frac{(-1)^k x^0}{3^{105-k}}$.

Portanto, deve ser $\frac{105-5k}{2} = 0 \Rightarrow k = 21$.

Logo, o termo independente de $\left(\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{1}{x^2}\right)^{105}$ é

$$C_{105}^k \frac{(-1)^{21}}{3^{105-21}} = \frac{-C_{105}^{21}}{3^{84}}.$$

5. (1.5) Seja G um grafo planar conexo com sequência de graus de vértices $(3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5)$. Em quantas regiões qualquer representação plana de G divide o plano? Fundamente sua resposta.

   Resposta: Sabemos que $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$, onde m é o número de arestas do grafo G.

   Mas, $\sum_{v \in V} d(v) = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 30$, o que implica, $m = 15$.

   Como G é planar, pela fórmula de Euler, temos que $n - m + f = 2$, onde n é o número de vértices de G, f é o número de faces de qualquer representação plana de G e $n = 8$, segue que $8 - 15 + f = 2$. Logo o número de regiões que a representação plana de G divide o plano corresponde ao seu número de faces $f = 9$.

6. (2.5) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for falsa, dê um exemplo e a sua justificação. Se for verdadeira, prove.

   (a) Se G é um grafo conexo com n vértices então a cardinalidade de seu centro $C(G)$ tem menos do que n vértices.

   Resposta: Falso.

   Tome o grafo K_4, ilustrado na **Figura** 1 a seguir, a distância de um vértice a qualquer outro vértice é a mesma, porque o grafo é completo. Portanto, o centro do grafo K_4 é ele próprio e contém 4 vértices, ou seja, $|C(K_4)| = |V(K_4)|$.

   (b) Um grafo bipartido com número ímpar de vértices não é hamiltoniano.

   Resposta: Verdadeiro.

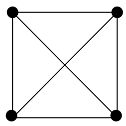

Figura 1: Grafo K_4

Tome a bipartição $V = V_1 \cup V_2$ dos vértices de G. Como o grafo tem um número ímpar de vértices, podemos supor, sem perda de generalidade, que $|V_1|$ é par e $|V_2|$ é ímpar. Num grafo bipartido, as arestas são entre de vértices de V_1 e V_2 e não existem arestas entre os vértices de V_1 nem entre vértices de V_2. Logo, num grafo bipartido os vértices de um ciclo se alternam entre os vértices de V_1 e V_2, mas um grafo hamiltoniano deve conter um ciclo hamiltoniano, ou seja, um ciclo que contenha todos os vértices exatamente uma vez, o que significa que se este ciclo existir $|V_1| = |V_2|$. Logo, um grafo bipartido com número ímpar de vértices não é hamiltoniano.

(c) Um grafo euleriano não admite ciclo ímpar.

Resposta: Falso. Para que um grafo seja euleriano, todos os seus vértices devem ter grau par. Tome qualquer ciclo ímpar, ele é euleriano, pois cada vértice tem grau par.

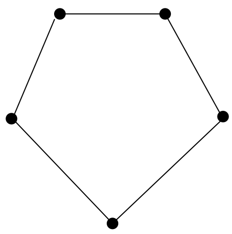

Figura 2: Grafo C_5

(d) Toda árvore é um grafo planar.

Resposta: Verdadeiro. A árvore é acíclica, isto é, não tem ciclos, portanto possui uma única face.