Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD1 - Primeiro Semestre de 2012

Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (2.0) Verifique se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira prove, se for falsa justifique.

   (a) $\emptyset \in \{\{\emptyset\}, 1\}$.

   Resposta: Falsa, pois $\emptyset$ não é elemento do conjunto $\{\{\emptyset\}, 1\}$. Os únicos elementos deste conjunto são $\{\emptyset\}$ e 1. Sendo assim, seria correto afirmar:

   - $\emptyset \subset \{\{\emptyset\}, 1\}$, pois $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.
   - $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}, 1\}$ pois $\{\emptyset\}$ é elemento do conjunto $\{\{\emptyset\}, 1\}$.

   (b) $\{1\} \in \{\emptyset, \{1\}\}$.
   Resposta: Verdadeiro, pois $\{1\}$ é elemento do conjunto $\{\emptyset, \{1\}\}$.

   (c) Para $C = \{\emptyset, \{1\}\}$ o conjunto de partes de C é dado por $P(C) = \{\emptyset, \{\{1\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}\}$.

   Resposta: Falso, pois sabendo que o conjunto das partes de C é o conjunto de todos os seus subconjuntos, temos que a cardinalidade de $P(C)$ é dada por $2^{|C|}$. Então neste caso, o número de elementos de $P(C)$ é $2^2 = 4$, o que nos mostra que o conjunto $\{\emptyset, \{\{1\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}\}$ certamente não é o conjunto das partes de C. Podemos escrever $P(C)$ da seguinte maneira:
   $P(C) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}\}$.

(d) $\overline{(\bar{A} \cap B)} \cap B \subseteq A$ sendo A e B conjuntos quaisquer.

Resposta: Verdadeiro.

$$
\begin{aligned}
\overline{(\overline{A} \cap B)} \cap B &= \underbrace{(\overline{\overline{A}} \cup \overline{B}) \cap B}_{\text{Lei de Morgan}} \\
&= (A \cup \overline{B}) \cap B \\
&= \underbrace{(A \cap B) \cup (\overline{B} \cap B)}_{\text{Propriedade distributiva da interseção em relação à união}} \\
&= \underbrace{A \cap B}_{\overline{B} \cap B = \emptyset}
\end{aligned}
$$

Como todo elemento de $(A \cap B)$ pertence a A e B ao mesmo tempo, temos que $(A \cap B) \subseteq A$. Note que se os conjuntos forem disjuntos, o resultado para $(A \cap B)$ é o conjunto $\emptyset$ que é subconjunto de qualquer conjunto, em particular, de A.

Portanto, a afirmação $\overline{(\bar{A} \cap B)} \cap B \subseteq A$ é verdadeira.

Vejamos, nas Figuras 1, 2, 3 e 4, os Diagramas de Venn que ilustram a solução deste problema.

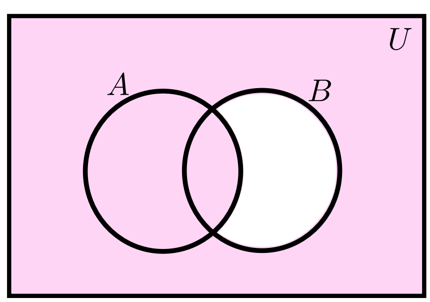

Figura 1: Diagrama de Venn para $A \cup \overline{B}$.

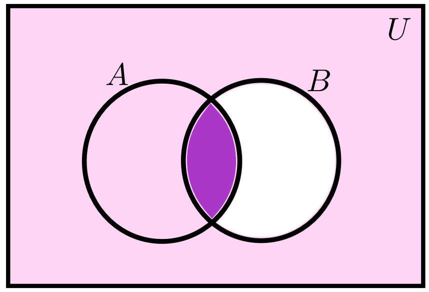

Figura 2: Diagrama de Venn para $(A \cup \overline{B}) \cap B$. A região roxa indica o resultado da expressão.

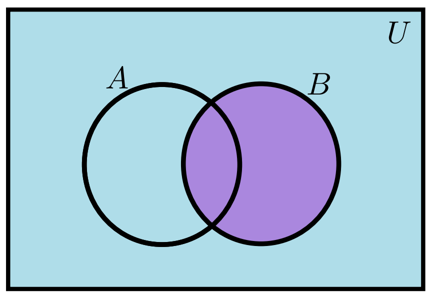

Figura 3: Diagrama de Venn para $(B \cap \overline{B})$. Em lilás temos B e em azul $\overline{B}$ e, claramemente temos que $B \cap \overline{B} = \emptyset$.

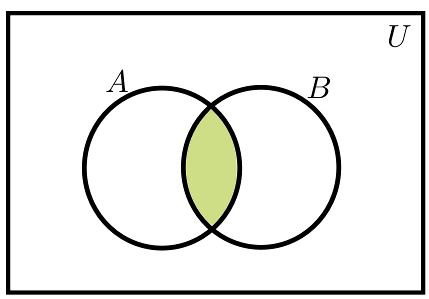

Figura 4: Diagrama de Venn para $A \cap B$.

2. (2.0) Usando o princípio de inclusão e exclusão determine a quantidade de números naturais comprendidos entre 1 e 1000 inclusive, que não são divisíveis por $2, 3$ ou 7.

Resposta: Considere os conjuntos:

$U = \{x \in \mathbb{N} |\ 1 \leq x \leq 1000\}$;

$A = \{x \in U |\ x \text{ é divisível por } 2\} = \{x \in U |\ x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$;

$B = \{x \in U |\ x \text{ é divisível por } 3\} = \{x \in U |\ x = 3m, m \in \mathbb{N}\}$

$C = \{x \in U |\ x \text{ é divisível por } 7\} = \{x \in U |\ x = 7p, p \in \mathbb{N}\}$.

Observe que queremos determinar os números inteiros entre 1 e 1000 (inclusive) que NÃO são divisíveis por $2, 3$ ou 7. Portanto, vamos utilizar nesta solução a noção de complemento, ou seja, vamos subtrair de todos os números existentes entre 1 e 1000 aqueles que são divisíveis por $2, 3$ ou 7. Assim,

$n(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = n(U) - n(A \cup B \cup C)$.

Inicialmente, vamos determinar $n(U)$.

$$n(U) = 1000$$

Em seguida, vamos calcular $n(A \cup B \cup C)$ utilizando o princípio da inclusão e exclusão.

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

$A = \{2 \times 1, 2 \times 2, 2 \times 3, \cdots, 2 \times 500\} = \{2, 4, 6, \cdots, 1000\}$

$n(A) = 500$

$B = \{3 \times 1, 3 \times 2, 3 \times 3, \cdots, 3 \times 333\} = \{3, 6, 9, \cdots, 999\}$

$n(B) = 333$

$C = \{7 \times 1, 7 \times 2, 7 \times 3, \cdots, 7 \times 142\} = \{7, 14, 21, \cdots, 994\}$

$n(C) = 142$

$(A \cap B) = \{x \in U |\ x \text{ é divisível por } 6\} = \{x \in U |\ x = 6k, k \in \mathbb{N}\} = \{6 \times 1, 6 \times 2, 6 \times 3, \cdots, 6 \times 166\} = \{6, 12, 18, \cdots, 996\}$

$n(A \cap B) = 166$

$(A \cap C) = \{x \in U |\ x \text{ é divisível por } 14\} = \{x \in U |\ x = 14\ell, \ell \in \mathbb{N}\} = \{14 \times 1, 14 \times 2, 14 \times 3, \cdots, 14 \times 71\} = \{14, 28, 42, \cdots, 994\}$

$n(A \cap C) = 71$

$(B \cap C) = \{x \in U |\ x$ é divisível por $21\} = \{x \in U |\ x = 21j, j \in \mathbb{N}\} = \{21 \times 1, 21 \times 2, 21 \times 3, \cdots, 21 \times 47\} = \{21, 42, 63, \cdots, 987\}$

$n(B \cap C) = 47$

$(A \cap B \cap C) = \{x \in U |\ x$ é divisível por $42\} = \{x \in U |\ x = 42z, z \in \mathbb{N}\} = \{42 \times 1, 42 \times 2, 42 \times 3, \cdots, 42 \times 23\} = \{42, 84, 126, \cdots, 966\}$

$n(A \cap B \cap C) = 23$

Daí, temos:

$n(A \cup B \cup C) = 500 + 333 + 142 - 166 - 71 - 47 + 23 = 714$ e

$n(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = 1000 - 714 = 286$

Logo, temos 286 números inteiros entre 1 e 1000 que não são divisíveis por $2, 3$ ou 7.

3. (2.0) Mostre pelo Princípio da Indução Matemática que:

(a) Para todo número natural n vale a seguinte afirmação:

$$2.6.10.14 \cdots (4n - 2) = \frac{(2n)!}{n!}$$

para todo n natural.

Resposta: Seja $P(n) : 2.6.10.14 \cdots (4n - 2) = \dfrac{(2n)!}{n!}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

BASE DA INDUÇÃO: Quando $n = 1$ temos:

$4 \times 1 - 2 = 2$. Como $\dfrac{(2 \times 1)!}{1!} = 2$, temos que $P(1)$ é verdadeira.

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Suponha que

$$P(k) : 2.6.10.14 \cdots (4k - 2) = \frac{(2k)!}{k!}$$

seja verdadeira.

PASSO INDUTIVO: Vamos mostrar que

$$P(k + 1) : 2.6.10.14 \cdots (4(k + 1) - 2) = \frac{(2(k + 1))!}{(k + 1)!}$$

é verdadeira.

$$\begin{aligned}
2.6.10.14\cdots(4(k+1)-2) &= \underbrace{2.6.10.14\cdots(4k-2)}_{\text{HI}}\times(4k+2)\\
&= \frac{(2k)!}{k!}\times(4k+2)\\
&= \frac{(2k)!}{k!}\times 2(2k+1)\\
&= \frac{(2k)!}{k!}\times 2(2k+1)\times\frac{k+1}{k+1}\\
&= \frac{(2k)!}{(k+1)!}\times(2k+1)\times 2(k+1)\\
&= \frac{(2k)!}{(k+1)!}\times(2k+1)\times(2k+2)\\
&= \frac{(2k+2)!}{(k+1)!}\\
&= \frac{(2(k+1))!}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática temos que $P(n)$: $2.6.10.14\cdots(4n-2) = \dfrac{(2n)!}{n!}$ é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b) O produto de 3 (três) números naturais consecutivos é divisível por 3, isto é

$$3 \quad \text{divide} \quad n(n+1)(n+2)$$

para todo n natural.

Resposta: Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $P(n)$: $n(n+1)(n+2) = 3p$, para algum $p \in \mathbb{N}$.

BASE DA INDUÇÃO: Quando $n = 1$ temos

$1(1+1)(1+2) = 6$. Como 6 é múltiplo de 3 (ou seja $p = 2$), temos que $P(1)$ é verdadeira.

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Suponha que

$$P(k) : k(k+1)(k+2) = 3p,$$

seja verdadeira para algum $p \in \mathbb{N}$.

PASSO INDUTIVO: Vamos mostrar que

$$P(k+1) : (k+1)((k+1)+1)((k+1)+2) = 3p', \quad \text{para algum } p' \in \mathbb{N}$$

é verdadeira.

De fato, inicilamente observemos que $k(k+1)(k+2) = (k^2+k)(k+2) = k^3 + 3k^2 + 2k$.

$$\begin{aligned}
(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2) &= (k+1)(k+2)(k+3) \\
&= (k^2+3k+2)(k+3) \\
&= \underbrace{k^3+3k^2+2k} + 3k^2 + 9k + 6 \\
&= \underbrace{k(k+1)(k+2)}_{\text{HI}} + 3(k^2+3k+2) \\
&= 3p + 3(k^2+3k+2) \\
&= 3(p + k^2 + 3k + 2) \\
&= 3p', \quad p' \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

onde $p' = p + k^2 + 3k + 2 \in \mathbb{N}$.

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática temos que o produto de três números naturais consecutivos é divisível por 3.

4. (2.0) Quantos são os anagramas da palavra **I N D E P E N D E N T I S T A**:

(a) começados por **D** e terminados em **E**? Justifique;

Resposta: Na palavra I N D E P E N D E N T I S T A temos 2 I, 3 N, 2 D, 3 E, 2 T, 1 A, 1 P e 1 S totalizando 15 letras.

Para solucionar esta questão, vamos colocar uma letra D na primeira posição e uma letra E na 15ª posição. Restam 13 posições nas quais devemos arrumar 13 letras com algumas repetições. Note que, separando uma letra D, resta um D para ser permutado com as demais letras, e, ao separarmos uma letra D, ainda restam dois D's para serem permutados. Assim temos:

$$P_{13}^{2,3,1,2,2,1,1,1} = \frac{13!}{2!3!1!2!1!2!1!1!} = \frac{13!}{48}$$

Portanto, temos $\dfrac{13!}{48}$ anagramas que começam com D e terminam com E.

(b) que contenham as letras **E** e **D** juntas? Justifque;

Resposta:

Vamos determinar o número de anagramas que têm TODAS as letras E e D juntas. Outras interpretações poderão ser consideradas.

Neste caso, inicialmente vamos permutar todas as letras E e D e vamos considerá-las como uma só letra. Temos $P_5^{2,3} = \dfrac{5!}{2!3!} = \dfrac{120}{12} = 10$ formas de fazer isso.

Restam 10 letras para serem permutadas junto com o conjunto de letras que consideraremos como uma única letra. Então, temos $P_{11}^{2,3,2,1,1,1,1} = \dfrac{13!}{2!3!2!1!1!1!1!} = \dfrac{13!}{24}$ formas de permutar estas letras, e portanto, pelo Princípio Multiplicativo, temos $\dfrac{13!}{24} \times 10$ anagramas com TODAS as letras D e E juntas.

(c) que contenham as letras **E** e **D** separadas? Justifique

Resposta:

Vamos considerar TODAS as letras E e D separadas. Outras interpretações poderão ser aceitas.

Agora queremos separar as letras E e D. Para isso, primeiramente vamos posicionar as 10 letras restantes, permutando-as. Então podemos arrumá-las de $P_{10}^{2,3,2,1,1,1} = \dfrac{10!}{2!3!2!1!1!1!} = \dfrac{10!}{24}$ maneiras. Feito isso, temos que posicionar as letras E e D nos espaços entre estas letras. Temos 11 espaços para inserir 5 letras. Portanto, vamos escolher em quais espaços posicionaremos tais letras. Para isso temos $C_{11}^5 = \dfrac{11!}{5!6!}$ escolhas. Resta agora arrumar as letras E e D nestas posições escolhidas e podemos fazê-lo de $P_5^{2,3} = \dfrac{5!}{2!3!} = \dfrac{120}{12}$. Sendo assim, utilizando o Princípio Multiplicativo,temos $P_{10}^{2,3,2,1,1,1} \times C_{11}^5 \times P_5^{2,3} = \dfrac{10!}{24} \times \dfrac{11!}{5!6!} \times \dfrac{5!}{2!3!} = \dfrac{11!10!}{21 \times 6! \times 12} = \dfrac{11! \times 10!}{21 \times 6! \times 12}$ anagramas com as letras E e D separadas.

5. (2.0) De quantas maneiras distintas 20 pessoas podem formar uma fila se Eric estará entre os primeiros 7 lugares somente se a Ana também estiver, e vice-versa, sabendo-se que neste caso os lugares deles não serão consecutivos? Justifique

Resposta:

Inicialmente, vamos posicionar o Eric e a Ana na fila. Note que, de forma geral, temos duas escolhas: ou posicionamos Eric e Ana em duas das 7 primeiras posições (CASO 1) ou em duas das 13 últimas posições (CASO 2). Para resolver o CASO 2, vamos apresentar 2 raciocínios, e resolveremos o CASO 1 de uma única forma.

- CASO 1: Posicionando Eric e Ana em uma das últimas 13 posições. Vamos posicionar as 7 primeiras pessoas da fila, escolhendo-as dentre as 18 pessoas restantes. Como a ordem importa, temos $A_{18}^7 = \dfrac{18!}{11!}$ formas de fazê-lo. Em seguida, permutamos as outras 13 pessoas nas posições restantes, de $P_{13} = 13!$ formas. Então, pelo Princípio Multiplicativo, temos $\dfrac{18!}{11!} \times 13! = 18! \times 13 \times 12 = 18! \times 156$
- CASO 2: Posicionando Eric e Ana em duas das 7 primeiras posições.

- PRIMEIRO RACIOCÍNIO: Argumento direto.
Vamos escolher 5 pessoas, que não incluem Ana e Eric, para se juntarem a eles nas 7 primeiras posições. Fazemos isso de $A_{18}^5 = \dfrac{18!}{13!}$ formas (lembrando que a ordem das pessoas é importante neste caso). Agora, para que Ana e Eric não ocupem posições consecutivas, vamos posicioná-los nos espaços entre as pessoas já posicionadas. Temos 6 espaços dos quais precisamos escolher 2. Para isso temos $A_6^2 = \dfrac{6!}{4!}$ maneiras. Em seguida, arrumamos as outras 13 pessoas nas últimas posições da fila, o que podemos fazer de $P_{13} = 13!$ formas. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, temos $A_{18}^5 \times A_6^2 \times P_{13} = \dfrac{18!}{13!} \times \dfrac{6!}{4!} \times 13! = 18! \times 30$ maneiras de formarmos a fila com Eric e Ana nas 7 primeiras posições.
- SEGUNDO RACIOCÍNIO: Utilizando a noção de complemento.
Se posicionarmos Eric em uma das 7 primeiras posições, Ana também deverá estar entre os 7 primeiros, contudo, não podem estar juntos. Vamos utilizar a noção de complemento neste caso, ou seja, vamos determinar o número total de formas de posicioná-los nas 7 primeiras posições e subtrair os casos em que os dois encontram-se juntos.

  * POSICIONADO ERIC E ANA JUNTOS:
  Vamos considerar Eric e Ana como uma só pessoa e vamos escolher mais 5 pessoas dentre os demais integrantes da fila para ocuparem as 7 primeiras posições. Para escolher as 5 pessoas temos $C_{18}^5 = \dfrac{18!}{5!13!}$ formas. Em seguida, vamos permutar Eric e Ana ($P_2 = 2! = 2$), e assumi-los como uma única pessoa a ser permutada com os 5 integrantes escolhidos. Podemos permutar 6 pessoas de $P_6 = 6!$ formas. Então, pelo Princípio Multiplicativo, temos $C_{18}^5 \times P_2 \times P_6 = \dfrac{18!}{5!13!} \times 2 \times 6! = \dfrac{18!}{13!} \times 12$ maneiras de posicionar Eric e Ana na fila entre os 7 primeiros de modo que eles estejam sempre juntos.

  * POSICIONANDO AS 7 PRIMEIRAS PESSOAS SEM RESTRI-

ÇÕES

Para arrumar as 7 primeiras posições sem restrições para o posicionamento de Eric e Ana, temos que escolher 5 pessoas para serem permutadas junto com os dois, o que podemos fazer de $C_{18}^{5} = \dfrac{18!}{5!13!}$ formas e, em seguida, permutar as 7 pessoas, que pode ser feito de $P_7 = 7!$ maneiras. Assim, utilizando o Princípio Multiplicativo, temos $C_{18}^{5} \times P_7 = \dfrac{18!}{5!13!} \times 7! = \dfrac{18!}{13!} \times 42$ modos de arrumar 7 pessoas (incluindo Eric e Ana) nas 7 primeiras posições.

* DETERMINANDO O NÚMERO DE FORMAS DE POSICIONAR ANA E ERIC SEPARADOS EM DUAS DAS 7 PRIMEIRAS POSIÇÕES

  Portanto, utilizando a noção de complemento, temos $\dfrac{18!}{13!} \times 42 - \dfrac{18!}{13!} \times 12 = \dfrac{18!}{13!}(42-12) = \dfrac{18!}{13!} \times 30$ de posicionar Eric e Ana nas 7 primeiras posições de modo que eles estejam separados.

  Por fim, basta posicionar as 13 outras pessoas na fila, fazendo uma permutação. Sendo assim, o número de formas de arrumar uma fila com 20 pessoas tais que Eric e Ana estejam separados e ocupem duas das 7 primeiras posições é $\dfrac{18!}{13!} \times 30 \times 13! = 18! \times 30$.

Como era de se esperar, ambos os raciocínios nos conduziram a mesma resposta. Ou seja, temos $18! \times 30$ formas de posicionar Ana e Eric em duas das 7 primeiras posições da fila, finalizando o estudo do CASO 2.

Para finalizar a questão, vamos utilizar o Princípio Aditivo visto que CASOS 1 e 2 são exclusivos. Assim, temos $\underbrace{18! \times 156}_{\text{caso 1}} + \underbrace{18! \times 30}_{\text{caso 2}} = 18! \times (30+156) = 18! \times 186$ maneiras de formar a fila de 20 pessoas seguindo as restrições impostas para o posicionamento de Ana e Eric.