Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da EP da Aula 15

Observações:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.

2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo antes de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.

3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

---

1. Uma torre de Hanoi dupla contém $2n$ discos de n tamanhos diferentes, dois de cada tamanho. As regras de movimentação dos discos são as mesmas: um disco de cada vez e nunca colocar um disco sobre outro menor.

Para determinar o número de movimentos que são necessários para transferir a torre dupla de um eixo para outro, supondo que os discos do mesmo tamanho sejam idênticos, siga os seguintes passos:

(a) Monte a relação de recorrência.

***R*esposta:** Seja $T(n)$ o número de movimentos necessários para deslocar uma torre de Hanoi com $2n$ discos de n tamanhos diferentes, dois de cada tamanho.

Quando $n = 1$, o número de movimentos necessários é $T(1) = 2$. Para valores maiores de n, é preciso inicialmente mover os $2(n-1)$ blocos menores (gastando $T(n-1)$ movimentos e trocando a ordem relativa dos blocos de mesmo tamanho) mover os dois maiores (2 movimentos) e depois transferir os $2(n-1)$ blocos menores para cima dos maiores (gastando $T(n-1)$ movimentos e trocando a ordem novamente). Portanto $T(1) = 2$ e $T(n) = 2T(n-1) + 2$, para $n \geq 2$.

$$\begin{cases} T(n) & = & 2T(n-1) + 2 \text{ , para } n \geq 2. \\ T(1) & = & 2 \end{cases}$$

(b) Resolva a relação de recorrência pelo método de substituição.

***R*esposta:**

$$\begin{array}{rcl} T(n) & = & 2T(n-1) + 2 \\ & = & 2[2T(n-2) + 2] + 2 \\ & = & 2^2T(n-2) + 2^2 + 2 \\ & = & 2^2[2T(n-3) + 2] + 2^2 + 2 \\ & = & 2^3T(n-3) + 2^3 + 2^2 + 2 \end{array}$$

Logo, $T(n) = 2^iT(n-i) + \sum_{k=1}^{i} 2^k$.

Tomando $i = n-1$ temos:

$$\begin{array}{rcl} T(n) & = & 2^{n-1}T(1) + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \\ & = & 2^{n-1}.2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \end{array}$$

Como $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} =^{\text{PG}} 2^n - 1$

Logo, $2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 2$.

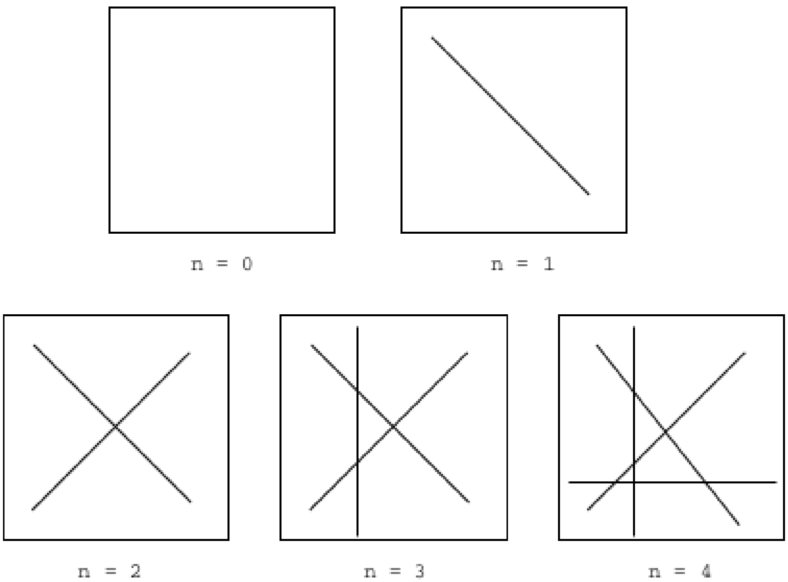
Portanto,

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2^n + 2^n - 2 \\
&= 2^{n+1} - 2
\end{aligned}
$$

2. Seja a_n o número de regiões ilimitadas em que um plano é dividido por n retas tais que a interseção de qualquer subconjunto de k retas ($k \geq 2$) só é diferente de vazio se $k = 2$. A relação de recorrência correspondente é

$$a_n = a_{n-1} + 2 \text{ com } a_0 = 1, a_1 = 2.$$

(a) Ilustre o problema para $n = 0, 1, 2, 3, 4$.



(b) Resolva a relação de recorrência para a_n.

***R*esposta:**

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2 \\ &= [a_{n-2} + 2] + 2 \\ &= a_{n-2} + 2 + 2 \\ &= a_{n-3} + 2 + 2 + 2 \\ &= a_{n-i} + 2i \end{aligned}$$

Logo, tomando $i = n - 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + 2(n-1) \\ &= 2 + 2(n-1) \\ &= 2n \end{aligned}$$

Portanto $a_n = 2n$.

3. Considere a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2a_{n-2} \text{ , para } n \geq 3 \\ & a_1 = 1, a_2 = 3 \end{aligned}$$

Verifique, usando indução, que a correspondente fórmula fechada é:

$$a_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}2^n$$

***R*esposta:**

(i) **Base de indução.**

$P(1)$: $a_1 = 1 = \frac{-1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}(-1)^1 + \frac{2}{3}2^1$;

$P(2)$: $a_2 = 3 = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = \frac{1}{3}(-1)^2 + \frac{2}{3}2^2$.

Logo $P(1)$ e $P(2)$ são válidas.

(ii) **Hipótese de indução.**

Suponha que $P(k)$ é válida para todo $i \leq k$: $a_i = \frac{1}{3}(-1)^i + \frac{2}{3}2^i$.

(iii) **Passo indutivo.**

Devemos provar que $a_{k+1} = \frac{1}{3}(-1)^{k+1} + \frac{2}{3}2^{k+1}$.

Desenvolvendo,

$$\begin{array}{rcl} a_{k+1} & = & a_{(k+1)-1} + 2a_{(k+1)-2} \\ & = & a_k + 2a_{k-1} \\ \text{(pela HI, i = k, i = k - 1)} & = & (\frac{1}{3}(-1)^k + \frac{2}{3}2^k) + 2(\frac{1}{3}(-1)^{k-1} + \frac{2}{3}2^{k-1}) \\ & = & (\frac{1}{3}(-1)^k + \frac{2}{3}(-1)^{k-1}) + \frac{2}{3}2^k + \frac{2}{3}2^k \\ & = & \frac{1}{3}(-1)^{k-1}(-1+2) + \frac{2}{3}2^{k+1} \\ & = & \frac{1}{3}(-1)^{k-1} + \frac{2}{3}2^{k+1} \\ & = & \frac{1}{3}(-1)^2(-1)^{k-1} + \frac{2}{3}2^{k+1} \\ & = & \frac{1}{3}(-1)^{k+1} + \frac{2}{3}2^{k+1} \end{array}$$

Então, pelo princípio de indução forte, resulta $a_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}2^n$.

4. Suponha que existe um tipo de planta que vive eternamente, mas que se reproduz apenas uma vez logo após o primeiro ano de vida. Qual é a rapidez de crescimento dessa "população" se o processo começa com uma planta?

   Observe que este é o problema reverso daquele do crescimento dos coelhos que se reproduzem todo ano exceto o primeiro ano.

   ***R*esposta:** Seja a_i a quantidade de plantas existentes no i-ésimo ano. Inicialmente temos apenas uma planta, $a_1 = 1$. Note que a primeira planta reproduz uma vez logo após o primeiro ano, conseqüentemente $a_2 = 2$. Logo após o segundo ano, só a planta que nasceu logo após o primeiro ano poderá reproduzir gerando uma nova planta, portanto $a_3 = a_2 + 1 = 3$. Esse processo continua com a geração de uma única planta por ano sem que nenhuma morra. Logo, a velocidade de crescimento da população de plantas é de uma planta por ano, no ano n tem - se o número de plantas do ano $n-1$ mais a planta reproduzida neste ano. Portanto:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 1 \text{ , para } n \geq 2. \\ a_1 = 1 \end{cases}$$