Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AD2 - Segundo Semestre de 2015

Gabarito da AD2 de FAC

1. (1.5) Usando o Teorema das Linhas calcule a seguinte soma:

$$S = \sum_{k=2}^{60} (k-1) C_{60}^{k}$$

Justifique.

Resposta: O Teorema das linhas nos diz que: $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$. Observe que não podemos aplicar diretamente este teorema a este somatório, visto que a cada termo C_n^k está multiplicado por $k-1$.

$$\begin{aligned}
S &= \textstyle\sum_{k=2}^{60} (k-1) C_{60}^{k} \\
&= \textstyle\sum_{k=2}^{60} k\, C_{60}^{k} - \sum_{k=2}^{60} C_{60}^{k} \\
&= \textstyle\sum_{k=2}^{60} k \dfrac{60!}{k!(60-k)!} - \displaystyle\sum_{k=2}^{60} C_{60}^{k} \\
&= \textstyle\sum_{k=2}^{60} \dfrac{60!}{(k-1)!(60-k)!} - \displaystyle\sum_{k=2}^{60} C_{60}^{k} \\
&= \textstyle\sum_{k=2}^{60} 60 \dfrac{59!}{(k-1)!(60-k)!} - \displaystyle\sum_{k=2}^{60} C_{60}^{k} \\
&= 60 \textstyle\sum_{k=2}^{60} \dfrac{59!}{(k-1)!(59-(k-1))!} - \displaystyle\sum_{k=2}^{60} C_{60}^{k} \\
&= 60 \textstyle\sum_{k=2}^{60} C_{59}^{k-1} - \sum_{k=2}^{60} C_{60}^{k} \\
&= 60(C_{59}^{1} + C_{59}^{2} + C_{59}^{3} + \cdots + C_{59}^{59}) - (C_{60}^{2} + C_{60}^{3} + C_{60}^{4} + \cdots + C_{60}^{60})
\end{aligned}$$

Observe que a linha 59 do triângulo de Pascal não está completa: falta no somatório o termo C_{59}^0 e a linha 60 do triângulo de Pascal também não está completa: falta no somatório o termo C_{60}^0 e C_{60}^1. Assim, aplicando o teorema das linhas, temos:

$$\begin{aligned} S &= 60(C_{59}^0 + C_{59}^1 + \cdots + C_{59}^{59} - C_{59}^0) - (C_{60}^0 + C_{60}^1 + \cdots + C_{60}^{60} - C_{60}^0 - C_{60}^1) \\ &= 60(2^{59} - C_{59}^0) - (2^{60} - C_{60}^0 - C_{60}^1) \end{aligned}$$

Como $C_{59}^0 = 1$, $C_{60}^0 = 1$ e $C_{60}^1 = 60$, temos que:

$$\begin{aligned} &= 60(2^{59} - 1) - (2^{60} - 1 - 60) \\ &= 60 \times 2^{59} - 60 - 2^{60} + 1 + 60 \\ &= 60 \times 2^{59} - 2^{60} + 1 \\ &= 60 \times 2^{59} - 2 \times 2^{59} + 1 \\ &= (60 - 2) \times 2^{59} + 1 \\ &= 58 \times 2^{59} + 1 \end{aligned}$$

2. (1.5) Determine o coeficiente de x^{32} no desenvolvimento do binômio de Newton:

$$(\sqrt{2}x^2 - \frac{3}{2x^{\frac{2}{3}}})^{108}$$

Justifique.

Resposta: A fórmula para o termo geral do desenvolvimento do Binômio de Newton de $(a+b)^n$ é dada por: $T_{k+1} = C_n^k \; a^{n-k} \; b^k$, para $k = 0, 1, \cdots, n$. Neste caso temos $n = 108$, $a = \sqrt{2}x^2$ e $b = -\frac{3}{2x^{\frac{2}{3}}}$.

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= C_{108}^k \; (\sqrt{2}x^2)^{108-k} \; (-\frac{3}{2x^{\frac{2}{3}}})^k \\ &= C_{108}^k \; (\sqrt{2})^{108-k} (x^2)^{108-k} \; (-1)^k \; 3^k \; ((2x^{\frac{2}{3}})^{-1})^k \\ &= C_{108}^k \; (2^{\frac{1}{2}})^{108-k} \; x^{216-2k} \; (-1)^k \; 3^k \; (2x^{\frac{2}{3}})^{-k} \\ &= C_{108}^k \; (2)^{\frac{108-k}{2}} \; x^{216-2k} \; (-1)^k \; 3^k \; (2)^{-k} x^{\frac{-2k}{3}} \\ &= C_{108}^k \; (2)^{\frac{108-k}{2}} \; (2)^{-k} \; (-1)^k \; 3^k \; x^{\frac{-2k}{3}} \; x^{216-2k} \\ &= C_{108}^k \; (2)^{\frac{108-k-2k}{2}} \; (-1)^k \; 3^k \; x^{\frac{-2k}{3}+216-2k} \\ &= C_{108}^k \; (2)^{\frac{108-3k}{2}} \; (-1)^k \; 3^k \; x^{\frac{-2k+648-6k}{3}} \\ &= C_{108}^k \; (2)^{\frac{108-3k}{2}} \; (-1)^k \; 3^k \; x^{\frac{-8k+648}{3}} \end{aligned}$$

Como queremos o coeficiente de x^{32}, temos:

$$\frac{-8k+648}{3} = 32 \Rightarrow -8k+648 = 96 \Rightarrow -8k = -552 \Rightarrow k = 69$$

Logo, $k = 69$.
Portanto, $T_{70} = C_{108}^{69}\ (2)^{\frac{108-207}{2}}\ (-1)^{69}\ 3^{69}\ x^{69} = -\ \frac{108!}{69!39!}\ (2)^{\frac{-99}{2}}\ 3^{69}\ x^{69}$ e, consequentemente, o coeficiente de x^{32} é $\frac{108!}{69!39!}\ (2)^{\frac{-99}{2}}\ 3^{69}$.

3. (1.5) Determine a fórmula fechada da seguinte relação de recorrência com as condições iniciais dadas:

$$a_n = 2a_{n-1} + 2^n, \quad a_0 = 1, \ \ \text{para } n \geq 1, natural$$

Justifique.

Resposta: Utilizando o método da Substituição regressiva temos:

$$\begin{array}{rcc}
a_n & = & 2a_{n-1} + 2^n \\
 & = & 2 \times \underbrace{(2a_{n-2} + 2^{n-1})}_{a_{n-1}} + 2^n \\
 & = & 2^2 a_{n-2} + 2^n + 2^n \\
 & = & 2^2 a_{n-2} + 2 \times 2^n \\
 & = & 2^2 \underbrace{(2a_{n-3} + 2^{n-2})}_{a_{n-2}} + 2 \times 2^n \\
 & = & 2^3 a_{n-3} + 2^n + 2 \times 2^n \\
 & = & 2^3 a_{n-3} + 3 \times 2^n \\
 & & \vdots \\
 & = & 2^{i-1} \underbrace{(2a_{n-i} + 2^{n-i+1})}_{a_{n-(i-1)} = a_{n-i+1}} + (i-1) \times 2^n \\
 & = & 2^i a_{n-i} + 2^n + (i-1) \times 2^n \\
 & = & 2^i a_{n-i} + i \times 2^n
\end{array}$$

O problema nos diz que $a_0 = 1$. Então, $n - i = 0 \Leftrightarrow i = n$. Logo, temos:

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2^n a_0 + n \times 2^n \\
&= 2^n + n \times 2^n \\
&= 2^n(1+n)
\end{aligned}
$$

Portanto, $a_n = 2^n(1+n)$.

4. (3.0) Responda as seguintes perguntas, **justificando** a resposta de cada uma delas.

(a) Quantos vértices e quantas arestas tem um grafo bipartido completo $K_{m,n}$?

Resposta: Um grafo bipartido completo $K_{m,n}$ é um grafo que cujo conjunto de vértices V pode ser particionado em dois conjuntos independentes A e B, de tal forma que $|A| = m$ e $|B| = n$ e existem todas as possíveis arestas entre os vértices dos conjuntos A e B. Desta forma, o grafo bipartido completo $K_{m,n}$ possui $|V| = |A| + |B| = m + n$ vértices e $|E| = |A|.|B| = m.n$ arestas.

(b) O que representa a soma das entradas de uma coluna de uma matriz de adjacência de:

(i) um grafo (simples)?

Resposta: Em um grafo simples o elemento a_{ij} da matriz de adjacência é igual a 1 quando os vértices v_i e v_j são adjacentes, e 0 caso contrário. Logo, a soma das entradas de uma coluna j da matriz de adjacência representa o grau do vértice v_j, isto é o número de vértices adjacentes a v_j.

(ii) um digrafo (simples) ?

Resposta: Em um digrafo simples o elemento a_{ij} da matriz de adjacência é igual a 1 quando existe a aresta direcionada

(v_i, v_j), e 0 caso contrário. Logo, a soma das entradas de uma coluna j da matriz de adjacência representa o grau de entrada de v_j, isto é, o número de vértices que convergem a v_j.

(c) Seja G um grafo planar conexo com a seguinte sequência de graus: $(2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4)$. Quantas faces o grafo G possui?

Resposta: Sabemos pelo Teorema do Aperto de Mãos que:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m \ .$$

Como o grafo G possui a sequência de graus $(2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4)$, temos que $n = 9$, onde n é o número de vértices de G e:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m \Rightarrow 2m = 2+2+2+3+3+3+3+4+4 \Rightarrow$$

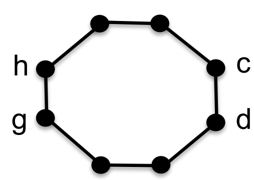
$$\Rightarrow 2m = 26 \Rightarrow \boxed{\text{m} = 13} \text{, onde } m \text{ é o número de arestas de } G.$$

Seja f o número de faces do grafo planar conexo, G. Pela fórmula de Euler, temos que $n - m + f = 2$, para grafos conexos planares. Como $n = 9$ e $m = 13$, então temos $f = m - n + 2 \Rightarrow f = 13 - 9 + 2 \Rightarrow n = 6$ vértices.

Logo, G possui 6 vértices.

5. (1.5) Desenhe um grafo G com 8 vértices, que seja bipartido, hamiltoniano e euleriano. No seu exemplo cada uma das propriedades deve ser justificada.

Resposta: Considere o grafo G abaixo:



O grafo G é bipartido, já que o mesmo não possui ciclo ímpar (caracterização de grafos bipartidos: "Um grafo é bipartido se e somente se o grafo não possui ciclo ímpar). G é euleriano, pois os vértices do grafo possuem grau par, $d(v) = 2$, para todo v $V(G)$ (caracterização dos grafos eulerianos: "Um grafo é euleriano se e somente se todos os vértices do grafos possuem grau par). E, por fim, G é hamiltoniano, já que possui o seguinte ciclo hamiltoniano: $abcdefgha$.

6. (1.0) Mostre que uma árvore com número par de arestas tem pelo menos um vértice de grau par.

   Resposta: Seja uma árvore T , com $|V(T)| = n$ e $|E(T)| = m$ e suponha que T tem número par de arestas, isto é, m ṕar. Suponha, por absurdo, que nenhum vértice de T tem grau par, isto é, todos os vértices têm grau ímpar. Como todos os vértices têm grau ímpar, temos, que o número de vértices n de T, é par (Teorema: Em qualquer grafo G, o número de vértices de G que possuem grau ímpar é par).

   Como T é uma árvore sabemos, por teorema, que $m = n - 1$. Desta forma, se m é par (por hipótese), então n é ímpar. Absurdo! Logo, concluímos que T tem pelo menos um vértice de grau par.