Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD1-1 Segundo Semestre de 2019

Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (1.4) Verifique se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira prove, se for falsa justifique.

   (a) Se $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, então o conjunto de partes de A é dado por: $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

   Resposta: Falso. O conjunto das partes de A é dado por: $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

   (b) $(A \triangle B) \cup (A \triangle C) = (A \triangle (B \cap C)) \cup (C - (A \cap B))$, sendo A, B e C conjuntos quaisquer.

   Resposta: Falso. Observe os diagramas de Venn das Figuras 1 e 2.

2. (1.8) Mostre pelo Princípio da Indução Matemática que:

$$6 \times 10 \times 14 \times \cdots \times (4n-2) = \frac{(2n)!}{2n!}$$

   para todo número natural $n \geq 2$.

   Resposta: Seja $P(n) : 6 \times 10 \times 14 \times \cdots \times (4n-2) = \frac{(2n)!}{2n!}, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

   BASE DA INDUÇÃO: Como $\frac{(2\times 2)!}{2\times 2!} = \frac{4!}{4} = 6$, temos que $P(2)$ é verdadeira.

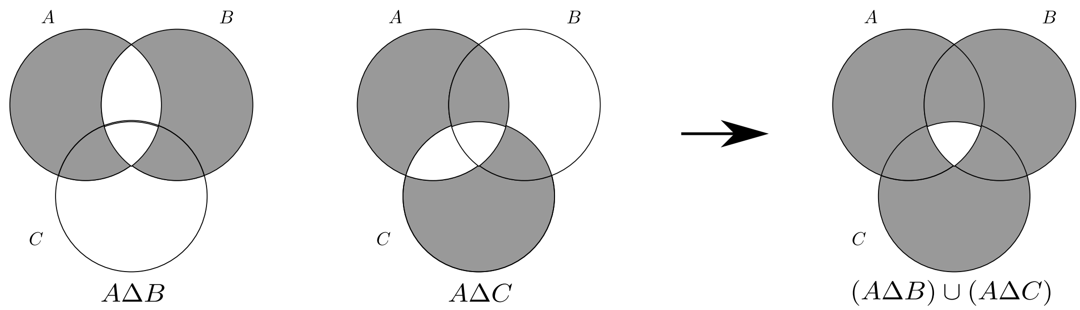

Figura 1: Construção do diagrama de Venn para $(A\Delta B)\cup(A\Delta C)$ da questão 1b.

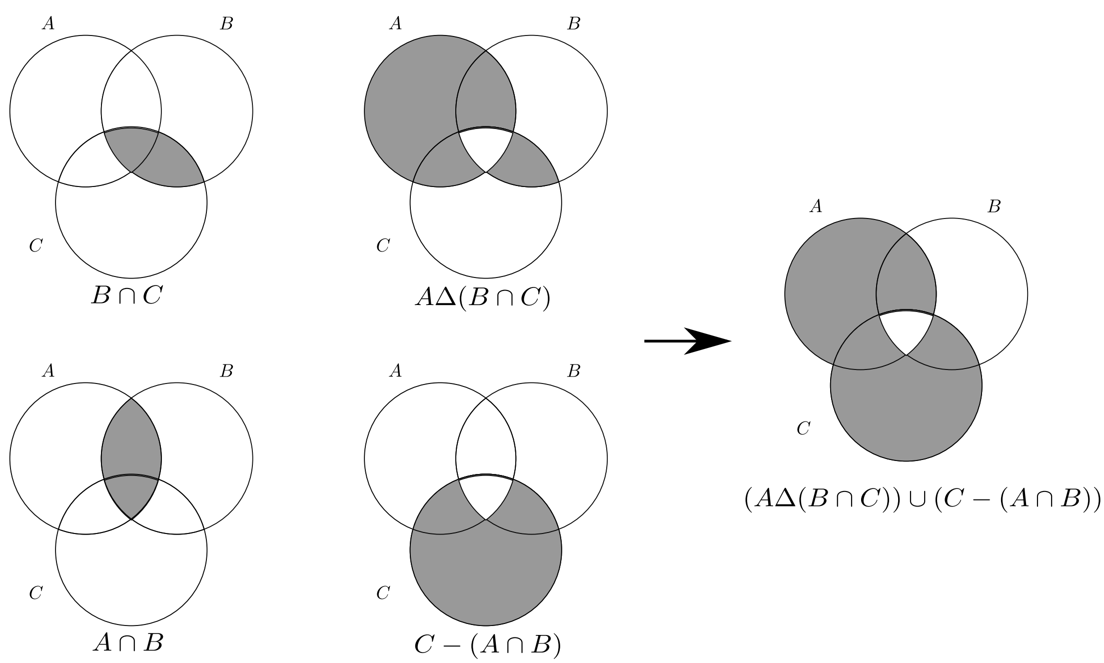

Figura 2: Construção do diagrama de Venn para $(A\Delta(B\cap C))\cup(C-(A\cap B))$ da questão 1b.

HIPÓTESE DA INDUÇÃO: Suponha que $P(k) : 6 \times 10 \times 14 \times \cdots \times (4k-2) = \frac{(2k)!}{2k!}$

seja verdadeira, $\forall k \geq 2, k \in \mathbb{N}$.

PASSO INDUTIVO: Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeira então
$P(k+1) : 6 \times 10 \times 14 \times \cdots \times (4k-2) \times (4(k+1)-2) = \frac{(2(k+1))!}{2(k+1)!}$
seja verdadeira, $\forall k \geq 2, k \in \mathbb{N}$.

Inicialmente, note que $P(k+1) : 6 \times 10 \times 14 \times \cdots \times (4k-2) \times (4(k+1)-2) = \frac{(2(k+1))!}{2(k+1)!}$ pode ser reescrita como:

$$P(k+1) : 6 \times 10 \times 14 \times \cdots \times (4k-2) \times (4k+2) = \frac{(2k+2)!}{2(k+1)!}$$

Assim,

$$\underbrace{6 \times 10 \times 14 \times \cdots \times (4k-2)}_{\text{H.I.}} \times (4k+2) =$$
$$\frac{(2k)!}{2k!} \times (4k+2) =$$
$$\frac{(2k)!}{2k!} \times 2(2k+1) =$$
$$\frac{(2k)!}{2k!} \times 2(2k+1) \times \frac{(k+1)}{(k+1)} =$$
$$\frac{(2k)!}{2k!(k+1)} \times (2k+1) \times 2(k+1) =$$
$$\frac{(2k)!}{2(k+1)!} \times (2k+1) \times (2k+2) =$$
$$\frac{(2k)! \times (2k+1) \times (2k+2)}{2(k+1)!} =$$
$$\frac{(2k+2)!}{2(k+1)!}$$

Logo, pelo PIM, $P(n) : 6 \times 10 \times 14 \times \cdots \times (4n-2) = \frac{(2n)!}{2n!}$, é verdadeira $\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

3. (1.8) Usando os Princípios Multiplicativo e Aditivo, calcule quantos são os números naturais de 5 algarismos, com dígitos não necessariamente distintos, tais que :

(a) o algarismo 3 não figura. Justifique,

Resposta: Note que, como queremos números com 5 algarismos, temos que excluir o zero da posição mais à esquerda. Além disso, como neste item o algarismo 3 não pode figurar, temos que excluir o 3 dos algarismos possíveis para compor o número. Sendo assim, temos 8 algarismos possíveis para a posição mais à esquerda e 9 algarismos possíveis para cada uma das outras 4 posições. Pelo PM, temos 8×9^4 números com 5 algarismos nos quais o algarismo 3 não figura.

(b) o algarismo 3 figura. Justifique.

Resposta: Resolveremos este item utilizando a noção de complemento. Como queremos que o algarismo 3 necessariamente figure, vamos calcular o total de números com 5 algarismos e subtrair deste valor o valor encontrado no item (a), que fornece a quantidade de números com 5 algarismos onde o algarismo 3 NÃO figura.

CÁLCULO DA QUANTIDADE TOTAL DE NÚMEROS COM 5 ALGARISMOS: A única restrição neste caso é de que o algarismo mais à esquerda não seja um zero. Assim, pelo PM temos que a quantidade de números com 5 algarismos é 9×10^4.

Assim, temos: $(9 \times 10^4) - (8 \times 9^4)$ números com 5 algarismos nos quais o 3 figura.