Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da EP da Aula 05

Observação:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.

2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo antes de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.

3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

---

(1) Seja $\{a_n\}$ a seqüência definida por:

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 5$$

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad , \quad n \geq 3$$

Mostre usando a indução forte que:

$$a_n = 2^n + (-1)^n \quad , \quad \forall \; n \geq \; 1$$

***P*rova:**

Considere a proposição:

$$P(n): \quad a_n = 2^n + (-1)^n$$

Devemos provar que P(n) é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

1. *Base da indução*:

   Para $n = 1$, a proposição

   $$P(1): \quad a_1 = 2^1 + (-1)^1$$

   é verdadeira pois:

   $$2^1 + (-1)^1 = 2 - 1 = 1 = a_1$$

2. *Hipótese de indução forte*:

   Assumimos que $P(1)$, $P(2)$, $\cdots$, $P(k)$ são verdadeiras para $k \geq 1$:

   $$(HI) \; : \quad a_i = 2^i + (-1)^i \quad , \quad \forall \; i = \; 1, 2, \cdots, k$$

3. *Passo indutivo*:

   Supondo que (HI) é válida devemos provar que P(k+1) é verdadeira, ou seja, devemos mostrar que:

   $$a_{k+1} = 2^{k+1} + (-1)^{k+1}.$$

De fato, usando a definição de a_{k+1} e aplicando a hipótese indutiva, temos que:

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_{(k+1)-1} + 2a_{(k+1)-2} \\
&= \underbrace{a_k}_{(HI)} + 2\underbrace{a_{k-1}}_{(HI)} \\
&= [2^k + (-1)^k] + 2[2^{k-1} + (-1)^{k-1}] \\
&= 2^k + (-1)^k + 2.2^{k-1} + 2.(-1)^{k-1} \\
&= 2^k + 2^k + (-1)^{k-1}[(-1) + 2] \\
&= 2^{k+1} + (-1)^{k-1} \\
&= 2^{k+1} + (-1)^{k-1}(-1)^{-2} \\
&= 2^{k+1} + (-1)^{k+1},
\end{aligned}$$

ou seja, $P(k+1)$ é verdadeira.

Logo, pelo princípio de indução indução forte temos que a igualdade

$$a_n = 2^n + (-1)^n$$

se verifica para todo $n \in \mathbb{N}$, que é o que queriamos provar.

(2) Seja $\{F_n\}$ a seqüência de Fibonacci. Mostre usando a indução forte que:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \quad \forall \ n \in \mathbb{N}$$

***P*rova:**

Lembremos que a seqüência de Fibonacci está definida por:

$$F_1 = 1, \qquad F_2 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad , \quad n \geq 3 \quad .$$

Seja

$$P(n) : \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \qquad , \quad n \in \mathbb{N}$$

1. *Base da indução*:

   A proposição

   $$P(1) \quad : \quad F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1,$$

   é verdade pois:

   $$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1 \quad &= \quad \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) \\ &= \quad \frac{1}{\sqrt{5}}[\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \\ &= \quad \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}-(1-\sqrt{5})}{2} \\ &= \quad \frac{1}{\sqrt{5}}(2\frac{\sqrt{5}}{2}) \quad = \quad 1. \end{aligned}$$

2. *Hipótese de indução forte*:

   Assumimos que $P(1)$, $P(2)$, $\cdots$, $P(k)$ se verificam para $k \geq 1$:

   $$(HI) \quad : \quad F_i = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^i - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^i \qquad \forall \ \ i = \ 1, 2, \cdots, k$$

3. *Passo indutivo*:

$$P(1),\ P(2),\ \cdots,\ P(k) \text{ verdadeiras} \Rightarrow P(k+1) \text{ verdadeira}$$

Desenvolvendo:

$$\begin{aligned}
F_{k+1} &= \underbrace{F_k}_{(HI)} + \underbrace{F_{k-1}}_{(HI)} \\
&= [\tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^k - \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^k] + [\tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{k-1} - \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{k-1}] \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{k-1}(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}+1) - \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{k-1}(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}+1) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{k-1}(\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}) - \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{k-1}(\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}).
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que:

$$(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = \tfrac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \tfrac{6+2\sqrt{5}}{4} = \tfrac{3+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{e}$$

$$(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^2 = \tfrac{1+5-2\sqrt{5}}{4} = \tfrac{6-2\sqrt{5}}{4} = \tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\ .$$

Portanto, das igualdades acima resulta:

$$\begin{aligned}
F_{k+1} &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{k-1}(\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}) - \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{k-1}(\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{k-1}(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{k-1}(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^2 \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{k+1} - \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{k+1}.
\end{aligned}$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeira.

Então, pelo princípio de indução forte, concluimos que:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \quad \forall \ \ n \in \mathbb{N}.$$