Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da EP da Aula 08

Observações:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.

2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo antes de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.

3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

1. Em uma comissão de 10 professores devem ser escolhidos um coordenador e um subcoordenador. De quantas maneiras eles podes ser escolhidos?

   Resposta: Observemos que temos 10 professores e devemos fazer 2 escolhas, coordenador e subcoordenador (importa a ordem em que são considerados). Portanto, esta questão tem as características dos arranjos simples, onde o número total de elementos diferentes considerados são 10 e cada escolha de 2 professores corresponde a uma possibilidade. Então, o número de maneiras em que eles podem ser escolhidos é $A(10,2) = \frac{10!}{(10-2)!} = 10.9 = 900$.

2. Determine, quando for possível, o valor de n se:

   (a) $A(n,2) = 72$

   Resposta: Como $A(n,2) = \frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1)$ deve estar bem definida, temos que n deve verificar: $n \in \mathbb{N}$ e $n-2 \geq 0$. Portanto, queremos encontrar aqueles $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$ que verificam a igualdade:

   $$n(n-1) = 72,$$

   ou seja,

   $$n^2 - n - 72 = 0.$$

   As raizes de esta equação são -8 e 9. Como temos as restrições $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$, o valor que verifica $A(n,2) = 72$ é $n = 9$.

   (b) $4A(n,2) = A(2n,3)$

   Resposta: Como $A(n,2) = \frac{n!}{(n-2)!}$ e $A(2n,3) = \frac{(2n)!}{(2n-3)!}$ devem estar bem definidas, temos que n deve verificar: $n \in \mathbb{N}$, $n-2 \geq 0$ e $2n-3 \geq 0$, isto é, $n \geq 2$ e $n \geq 3/2$. Portanto, queremos encontrar aqueles $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$ que verificam:

   $$4A(n,2) = A(2n,3)$$

quer dizer, devemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$ satisfazendo:

$$4n(n-1) = 2n(2n-1)(2n-2),$$

ou

$$4n(n-1) = 2n(2n-1)2(n-1).$$

Como $n \neq 0$ e $n \neq 1$, a igualdade acima se reduz a encontrar $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$ tal que:

$$2n - 1 = 1,$$

que tem como solução $n = 1$. Por outro lado vimos que temos a restrição $n \geq 2$. Portanto, a equação $4A(n, 2) = A(2n, 3)$ não tem solução.

3. De quantas maneiras 4 amigos entre 10 podem se colocar em uma foto?

   Resposta: Observemos que, escolhidos 4 amigos dentre 10, a ordem como eles podem aparecer na foto dá lugar a possibilidades diferentes. Portanto, o número de maneiras como 4 amigos dentre 10 podem se colocar em uma foto corresponde a arranjos simples, $A(10, 4) = \frac{10!}{6!}$.

4. Quantos tipos de bilhetes especificando a origem e o destino têm uma compania aérea que une 7 cidades?

   Resposta: 42.

5. Considere os números de 3 algarismos distintos formados com os dígitos $2, 3, 5, 8,$ e 9.

   (a) Quantos são estes números?

   Resposta: O número de 3 algarismos distintos formados com os dígitos $2, 3, 5, 8,$ e 9 é $A(5, 3) = 60$.

(b) Quantos são menores do que 800?

Resposta: Como os números devem ser menores do que 800, significa que o primeiro algarismo (centena) não pode começar nem com 8 nem com 9. Portanto, para esta posição, temos 3 possibilidades.

Escolhida uma possibilidade para a primeira posição, sobram 4 números para as outras 2 posições (dezena e unidade), isto é, temos $A(4, 2)$ possibilidades.

Então, pelo princípio multiplicativo, temos que a quantidade de números de 3 algarismos menores de 800 que podem ser formados com os números $2, 3, 5, 8,$ e 9 é $3A(4, 2) = 36$.

(c) Quantos são múltiplos de 5?

Resposta: Com os dígitos dados, os únicos números múltiplos de 5 são os que finalizam em 5. Portanto, restam para as outras duas posições (centenas e dezenas) os números $2, 3, 8$ e 9 tomados 2 a 2. Logo, os múltipos de 5 são $A(4, 2) = 12$.

(d) Quantos são pares?

Resposta: Os números pares são $2A(4, 2) = 24$.

(e) Quantos são ímpares?

Resposta: Os números ímpares são $3A(4, 2) = 36$.

(f) Quantos são múltiplos de 2?

Resposta: Os múltipos de 2 são $2A(4, 2) = 24$.

6. Quantas são as palavras de 5 letras distintas de um alfabeto de 26 letras nas quais a letra **A** figura mas não é a letra inicial da palavra?

Resposta: Para a letra inicial das palavras de 5 letras distintas temos 25 possibilidades pois não pode ser a letra **A**.

Fixada a primeira letra, a letra **A** pode ocupar na palavra 4 posições diferentes.

Fixada a primeira letra e a posição de **A** na palavra de 5 letras, restam 3 posições que podem ser preenchidos com 24 letras diferentes do alfabeto. Então, dadas 24 letras, o número de possibilidades de formar anagramas de 3 letras distintas é $A(24,3) = \frac{24!}{21!}$.

Portanto, considerando as possibilidades para a letra inicial, para a posição de **A** e para as 3 letras restantes e usando o princípio multiplicativo, concluimos que o número de palavras de 5 letras distintas de um alfabeto de 26 letras nas quais a letra **A** figura mas não é a letra inicial da palavra é $25.4.\frac{24!}{21!} = 4\frac{25!}{21!}$.

7. Quantos números de 3 e 4 algarismos distintos e maiores do que 300 podem ser formados com os algarismos $0, 1, 3, 5$ e 7?

   Resposta: Começamos calculando a quantidade de números de 3 algarismos distintos e maiores do que 300 formados com $0, 1, 3, 5$ e 7. Observemos que para o primeiro dígito (centena) temos 3 possibilidades ($3, 5$ ou 7). Para as duas posições restantes temos $A(4,2)$ possibilidades (incluimos 0 e 1). Portanto, devido ao princípio multiplicativo, neste caso temos $3A(4,2) = 36$ modos diferentes.

   Agora calculamos a quantidade de números com 4 algarismos distintos formados com $0, 1, 3, 5$ e 7. Para a primeira posição temos 4 maneiras ($1, 3, 5$ ou 7). Fixado um número na primeira posição, temos $A(4,3)$ possibilidades, pois também devemos considerar o 0 . Logo, neste caso, usando o princípio multiplicativo temos $4A(4,3) = 96$ possibilidades.

   Finalmente, usando o princípio aditivo, obtemos que a quantidade de números de 3 e 4 algarismos distintos e maiores do que 300 que podem ser formados com os algarismos $0, 1, 3, 5$ e 7 é $36 + 96 = 132$.

8. Quantos são os números de 5 algarismos distintos na base 10:

(a) nos quais o algarismo 2 figura?

Resposta: Separamos o raciocínio em duas partes. Na primeira consideramos que 2 está na primeira posição e na segunta etapa consideramos que o 2 não aparece na primeira posição.

Na primeira situação,temos de escolher 4 algarismos distintos dentre 9 dígitos. Portanto, os números de 5 algarismos distintos na base 10 que começam com 2 são $A(9,4) = 3024$.

Na segunda parte, os números podem começar de 8 formas diferentes (estão excluídos 0 e 2). Logo, uma das 4 posições restantes deve ser ocupada por 2. Fixados o primeiro dígito do número e a posição do 2, restam 3 lugares a serem preenchidos com 8 dígitos diferentes que pode ser feito de $A(8,3)$ modos diferentes. Portanto, neste caso, pelo princípio multiplicativo temos $8.4.A(8,3) = 10752$ possibilidades.

Os números de 5 algarismos distintos na base 10 nos quais o algarismo 2 figura é a união do conjunto de números de 5 algarismos distintos na base 10 que começam com 2 e do conjunto de números de 5 algarismos distintos na base 10 que não começam com 2, que são disjuntos. Logo, pelo princípio aditivo, temos que a quantidade dos números de 5 algarismos distintos na base 10 nos quais o algarismo 2 figura é $\frac{9!}{5!} + 32\frac{8!}{5!} = 13776$.

(b) nos quais o algarismo 2 não figura?

Resposta: O problema é equivalente a encontrar a quantidade de números de 5 algarismos distintos formados com os algarismos $0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, que corresponde a $8A(8,4) = 8\frac{8!}{4!}$.