Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
AD2 - Primeiro Semestre de 2014

Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (1.5) Usando a relação de Stifel mostre que:

$$C(n+2,10) = C(n,10) + 2C(n,9) + C(n,8) \text{ para } n \geq 10.$$

Justifique.

Resposta: A Relação de Stifel garante que:

$$C(n-1,k-1) + C(n-1,k) = C(n,k)$$

Vamos trabalhar com o lado direito da equação.

$$\begin{gathered} C(n,10) + 2C(n,9) + C(n,8) = \\ \underbrace{C(n,10) + C(n,9)}_{\text{Relação de Stifel}} + \underbrace{C(n,9) + C(n,8)}_{\text{Relação de Stifel}} = \\ \underbrace{C(n+1,10) + C(n+1,9)}_{\text{Relação de Stifel}} = \\ C(n+2,10) \end{gathered}$$

Logo, pela Relação de Stifel, $C(n+2,10) = C(n,10) + 2C(n,9) + C(n,8)$ para $n \geq 10$.

2. (1.5) Determine o coeficiente de x^{18} no desenvolvimento do binômio de Newton:

$$(\frac{3}{x^2} - 5x^4)^{96}$$

Justifique.

Resposta: A fórmula para o termo geral do desenvolvimento do Binômio de Newton de $(a+b)^n$ é dada por: $T_{k+1} = C_n^k \; a^{n-k} \; b^k$, para $k = 0, 1, \cdots, n$. Neste caso temos $n = 96$, $a = \frac{3}{x^2} = 3x^{-2}$ e $b = -5x^4$.

$$\begin{array}{rcc} T_{k+1} & = & C_{96}^k \; (3x^{-2})^{96-k} \; (-5x^4)^k \\ & = & C_{96}^k (3)^{96-k} x^{-192+2k} (-1)^k (5)^k x^{4k} \\ & = & C_{96}^k (3)^{96-k} (-1)^k (5)^k x^{-192+6k} \end{array}$$

Como queremos o coeficiente de x^{18}, temos:

$$-192 + 6k = 18$$

Logo, $k = 35$.

Portanto, $T_{36} = -\frac{96!}{35!61!} 3^{61} 5^{35} x^{18}$ e, consequentemente, o coeficiente de x^{18} é $-\frac{96!}{35!61!} 3^{61} 5^{35}$.

3. (1.5) Em um experimento, uma determinada colônia de bactérias tem uma população inicial de 50.000. A população é contada a cada 2 horas, e ao final do intervalo de 2 horas, a população triplica. Seja a_n o número de bactérias presentes no início do n-ésimo período de tempo.

(a) Deduza a relação de recorrência. Justifique.

Resposta: No instante inicial temos 50000 bactérias. Logo, $a_0 = 50000$. Como a cada duas horas o número de bactérias é triplicado, no n-ésimo período temos o triplo de bactérias que tínhamos no período $n - 1$. Assim, temos a seguinte relação de recorrência:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_0 & = & 50000 \\ a_n & = & 3a_{n-1} \end{array} \right.$$

(b) Determine a fórmula fechada da relação de recorrência encontrada em (a). Justifique.

Resposta: Vamos utilizar o método das Substituições Regressivas:

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} \\ &= 3(3a_{n-2}) \\ &= 3^2 a_{n-2} \\ &= 3^2(3a_{n-3}) \\ &= 3^3 a_{n-3} \\ &\vdots \\ &= 3^i a_{n-i} \end{aligned}$$

Quando $n = i$ temos $n - i = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} a_n &= 3^n a_0 \\ &= 3^n \times 50000 \end{aligned}$$

Logo, a fórmula fechada para a relação de recorrência descrita no item (a) é $a_n = 3^n \times 50000$.

(c) No início de que intervalo terão 1.350.000 bactérias presentes? Justifique.

Resposta: Como já determinamos a fórmula fechada para a relação de recorrência que modela o problema, basta substituir a_n por 1350000 para determinarmos o período solicitado.

$$1350000 = 3^n \times 50000$$
$$\frac{1350000}{50000} = 3^n$$
$$27 = 3^n$$
$$n = 3$$

Assim, no início do terceiro período teremos 1350000 bactérias na colônia.

4. (1.5) Seja G um grafo conexo com exatamente 3 componentes conexos G_1, G_2 e G_3. Sabendo que G_1 é um grafo 2-regular com 10 vértices, G_2 é um grafo completo com 5 vértices e que G_3 é uma árvore com 15 vértices, calcule o número de arestas de G. Justifique.

   Resposta: Vamos calcular o número de arestas em cada componente conexo e em seguida somar os resultados para obter o número de arestas do grafo. Denotaremos por m_i o número de arestas no componente conexo G_i, $i = 1, 2, 3$.

   Como G_1 é 2-regular e tem 10 vértices, pelo Teorema do Aperto de Mãos, temos:

$$\sum_{v \in V(G_1)} d(v) = 2m_1$$

$$2 \times 10 = 2m_1$$

$$m_1 = 10$$

   Como G_2 é completo e possui 5 vértices, G_2 é 4-regular e, usando novamente o Teorema do Aperto de Mãos, temos:

$$\sum_{v \in V(G_2)} d(v) = 2m_2$$

$$4 \times 5 = 2m_2$$

$$m_2 = 10$$

   Sabemos que uma árvore com k vértices possui $k - 1$ arestas.

   Como G_3 é árvore com 15 vértices, $m_3 = 15 - 1 = 14$.

   Note que entre os componentes conexos, por definição, não temos arestas. Assim, o número total de arestas de G, que denotaremos por m é:

$$m = m_1 + m_2 + m_3$$
$$m = 34$$

5. (2.5) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é **FALSA** ou **VERDADEIRA**. Se for verdadeira, prove. Se for falsa, dê um contra-exemplo (o contra-exemplo deve ser justificado).

(a) O grafo complementar de um grafo bipartido é bipartido.

Resposta: Falso. Observe o complemento do grafo bipartido completo $K_{3,3}$ na figura 1. Sabemos que um grafo é bipartido se e somente se não possui ciclo ímpar. Claramente, o complemento do $K_{3,3}$ tem 2 triângulos, não sendo, portanto, bipartido.

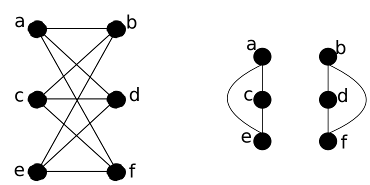

Figura 1: Grafo bipartido completo $K_{3,3}$ e seu complemento $\overline{K_{3,3}}$.

(b) Se $r = s$ então o grafo bipartido completo $K_{r,s}$ é hamiltoniano.

Resposta: Verdadeiro. Como $K_{r,s}$ é bipartido completo com partições com mesmo número de vértices, temos que $d(v) = \frac{n}{2}$ para todo vértice v do grafo.

O Teorema de Dirac nos diz que: Se $d(v) \geq \frac{n}{2}$ para todo $v \in V(G)$, então G é Hamiltoniano.

Assim, pelo Teorema de Dirac, quando $r = s$, o grafo bipartido completo $K_{r,s}$ é Hamiltoniano.

(c) Se G é um grafo euleriano então G é conexo.

Resposta: Falso. Pela definição, um grafo é Euleriano se existe um trajeto fechado que inclua todas as suas arestas. Observe a Figura 2. Claramente G é Euleriano e é desconexo.

OBS.: O Teorema de Euler fornece uma caracterização para grafos Eulerianos que assume que o grafo em questão é conexo. De maneira geral, grafos Eulerianos são conexos, a menos de vértices isolados.

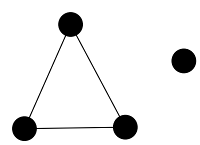

Figura 2: Grafo desconexo G euleriano.

6. (1.5) Seja G um grafo planar conexo com sequência de vértices $(2, 2, 3, 3, 3, 4, 5)$. Em quantas regiões qualquer representação plana de G divide o plano? Justifique.

   Resposta: A sequência de graus dos vértices de G nos fornecem dois dados importantes: G tem 7 vértices e o somatório dos graus desses vértices é 22. Podemos utilizar o Teorema do Aperto de Mãos para calcular o número de arestas de G.

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$$
$$22 = 2m$$
$$m = 11$$

   Pelo Teorema de Euler temos que o número de faces f (regiões do plano) de um grafo planar com n vértices e m arestas é dado por $f = m - n + 2$.

$$f = 11 - 7 + 2$$
$$f = 6$$

   Logo, o grafo G divide o plano em 6 regiões.