Gabarito da AP3 - Fundamentos de Algoritmos para Computação

1. (1.5) Dada a fórmula de recorrência:

   $a_1 = 1$, $a_2 = 5$
   $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ para $n \geq 3$

   Mostre, usando indução forte, que a fórmula fechada é dada por:

   $$a_n = 2^n + (-1)^n \text{ para todo } n \geq 1.$$

   Resposta: Seja $P(n) : a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2^n + (-1)^n$

   Base da indução:

   Para $n = 3$, $a_3 = a_2 + 2a_1 = 5 + 2 = 7$.

   Por outro lado, $2^3 + (-1)^3 = 7$, logo $P(3)$ é verdadeiro.

   Hipótese de Indução:

   Suponha verdadeiro para $k < n$, isto é, $P(k)$ é verdadeiro:

   $$P(k) : a_k = a_{k-1} + 2a_{k-2} = 2^k + (-1)^k$$

   Devemos provar que $P(n)$ é verdadeiro, isto é:

   Temos que provar que: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2^n + (-1)^n$.

   Desenvolvendo para n e usando a hipótese de indução, temos que:

   $$\begin{array}{rcll}
a_n & = & \underbrace{a_{n-1} + 2a_{n-2}}_{(Por\ hipótese\ indutiva)} & = \\
 & = & 2^{n-1} + (-1)^{n-1} + 2(2^{n-2} + (-1)^{n-2}) & = \\
 & = & 2^{n-1} + (-1)^{n-1} + 2^{n-1} + 2(-1)^{n-2} & = \\
 & = & (1+1)2^{n-1} + (-1)^{n-1} + 2(-1)^{n-2} & = \\
 & = & 2.2^{n-1} + (-1)(-1)^{n-2} + 2(-1)^{n-2} & = \\
 & = & 2^n + (-1+2)(-1)^{n-2} & = \\
 & = & 2^n + (-1)^{n-2} & = \\
 & = & 2^n + (-1)^2(-1)^{n-2} & = \\
 & = & 2^n + (-1)^n &
\end{array}$$

   Logo, pelo princípio da indução, a expressão é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$

2. (1.5) De quantos modos 5 meninas e 3 meninos podem ser divididos em 2 grupos de 4 crianças tal que cada grupo inclua pelo menos 2 meninas? Justifique.

   Resposta:

   Se tivermos um grupo com 3 meninos, este grupo terá menos que 2 meninas. Logo, os 2 grupos serão divididos em um grupo A com 2 meninos e em um grupo B com 1 menino.

   - Podemos escolher os meninos do grupo A de C_3^2 formas.
   - Podemos escolher as meninas do grupo A de C_5^2 formas.
   - O grupo B é formado pelas crianças restantes.

   Portanto, pelo princípio multiplicativo, o total de divisões possíveis é $C_3^2 \times C_5^2 = 30$.

3. (1.5) Quantos são os números naturais formados de 5 dígitos nos quais o número 2 não figura? Justifique.

   Resposta:

   Se um número natural possui 5 dígitos, então seu primeiro dígito não pode ser 0. Como o número 2 não figura então temos 8 possíveis algarismos para o primeiro dígito e 9 possíveis algarismos para os demais dígitos, pois o 2 não pode figurar.

   Portanto pelo princípio multiplicativo o total de 5 dígitos nos quais o número 2 não figura é $8.9.9.9.9 = 8.9^4 = 52488$.

4. (1.5) Usando a relação de Stifel obtenha a identidade abaixo.

   $C_n^p + C_n^{p+1} + C_{n+1}^{p+2} = C_{n+2}^{p+2}$

   Resposta:

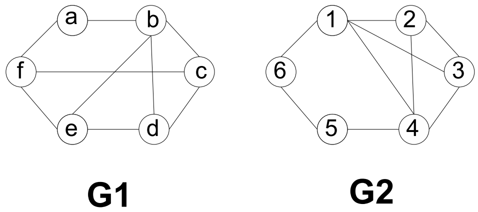
$$
\begin{array}{rcll}
 & & C_n^p + C_n^{p+1} + C_{n+1}^{p+2} & = \\
 & & (C_n^p + C_n^{p+1}) + C_{n+1}^{p+2} & = \\
\text{(Relação de Stifel no primeiro parênteses)} & = & C_{n+1}^{p+1} + C_{n+1}^{p+2} & = \\
\text{(Relação de Stifel)} & = & C_{n+2}^{p+2} &
\end{array}
$$

5. (4.0) Considere os grafos G_1 e G_2 dados por:

   $V(G_1) = \{a, b, c, d, e, f\}$,
   $E(G_1) = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, f), (f, a), (b, d), (b, e), (c, f)\}$

   $V(G_2) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
   $E(G_2) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 1), (2, 4), (1, 3), (1, 4)\}$

(i) Desenhe os grafos G_1 e G_2.
Resposta:

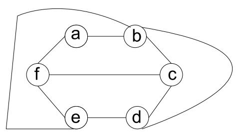


(ii) Eles são isomorfos? Justifique.

Resposta: Não, pois no grafo G_1 apenas o vértice a tem grau 2 e no grafo G_2 os vértices 5 e 6 possuem grau 2, isto é, eles possuem sequências de graus distintas e logo não podem ser isomorfos.

(iii) G_1 é um grafo planar? Justifique.

Resposta: Sim, pois G_1 possui a seguinte representação plana:



(iv) G_1 é um grafo hamiltoniano? Justifique.

Resposta: Sim, pois G_1 possui o seguinte ciclo hamiltoniano: a, b, c, d, e, f, a.

(v) G_1 é um grafo euleriano? Justifique.

Resposta: Não, pois por teorema, G_1 é euleriano se e somente se todo vértice de G_1 tem grau par, e $d(c) = d(d) = d(e) = d(f) = 3$ têm grau ímpar.

(vi) Qual é o centro de G_1 ? Justifique.

Resposta: $c(G_1) = \{v \in V(G_1) \mid e(v)$ é mínima$\}$ e $e(v) = max_{w \in V(G_1)}\{d(v,w)\}$.

Calculando as excentricidades dos vértices de G:

$e(a) = 2$
$e(b) = 2$
$e(c) = 2$
$e(d) = 2$
$e(e) = 2$
$e(f) = 2$

Logo, $c(G_1) = \{a, b, c, d, e, f\} = V(G_1)$