Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AP1 - Segundo Semestre de 2013

Nome -
Assinatura -

Observações:

1. Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular. Se necessário deixe o resultado indicado, como um produto ou quociente ou potência de números inteiros ou fatoriais.
2. Resultado sem indicação de como foi obtido, não será considerado.
3. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.
4. Você pode usar lápis para responder as questões.
5. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.
6. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

Questões:

1. (1.5) Sejam A, B e C conjuntos arbitrários. Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

(a) $\{A\} \in P(A)$.

Resposta: Falso. Observe o seguinte contra exemplo:
$A = \{1\} \quad P(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$. Note que $\{A\} = \{\{1\}\} \notin P(A)$. Seria correto afirmar que $\{A\} \subseteq P(A)$ ou que $A \in P(A)$.

(b) $\{\emptyset\} \subseteq P(A)$.

Resposta: Verdadeiro. Como $\emptyset \in P(A)$ para todo conjunto A, temos que $\{\emptyset\} \subseteq P(A)$.

(c) $A - (B - C) \subseteq (A - C) \cup (B \cap C)$.

*Resposta:*Falso. Considere o seguinte contra exemplo:
$A = \{1, 2\} \quad B = \{2\} \quad C = \{1\}$
Neste caso, $B-C = B$, $A-C = B$, $B \cap C = \emptyset$. Logo $A-(B-C) = A - B = C$. Por outro lado,
$(A - C) \cup (B \cap C) = B \cup \emptyset = B$. Como $C \not\subseteq B$, temos que a afirmação é falsa.

2. (2.0) Mostre por indução matemática que:

$$\sum_{k=2}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1}$$

para todo número natural maior ou igual a 2 ($n \geq 2$).
(Lembre que $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.)

Resposta: Seja $P(n) : 2.2^2 + 3.2^3 + \cdots + n.2^n = (n-1).2^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

BASE DA INDUÇÃO: Devemos provar que $P(2) : 2.2^2 = (2-1).2^{2+1}$. De fato, como $2.2^2 = 8$ e $(2-1).2^{2+1} = 1.2^3 = 8$, temos que $P(2)$ é verdadeira.

HIPÓTESE DA INDUÇÃO: Suponha que $P(k) : 2.2^2 + 3.2^3 + \cdots + k.2^k = (k-1).2^{k+1}$ seja verdadeira para $k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$.

PASSO INDUTIVO: Vamos provar que se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1) : 2.2^2 + 3.2^3 + \cdots + (k+1).2^{k+1} = k.2^{k+2}$ também é verdadeira: Desenvolvendo o primeiro membro de $P(k+1)$, temos

$$\underbrace{2.2^2 + 3.2^3 + \cdots + k.2^k}_{\text{H.I.}} + (k+1).2^{k+1} =$$
$$(k-1).2^{k+1} + (k+1).2^{k+1} =$$
$$2^{k+1}.(k-1+k+1) =$$
$$2^{k+1}.2k =$$
$$2^{k+2}.k$$

Portanto $P(k+1)$ é verdadeira.
Logo, pelo Princípio de Indução Matemática temos que $P(n) : 2.2^2 + 3.2^3 + \cdots + n.2^n = (n-1).2^{n+1}$ é verdadeira para todo número natural $n \geq 2$.

3. (2.0) Considere os números de 4 dígitos, maiores que 3000, formados com os dígitos $1, 3, 4, 5, 7$, 8 e 9. Quantos números podem ser formados se:

(a) todos os dígitos devem ser diferentes? Justifique;

Resposta: Como queremos números maiores que 3000 temos que o primeiro dígito pode ser: 3ou 4 ou 5 ou 7 ou 8 ou 9. Assim, temos 6 possibilidades para esta posição. Agora, vamos posicionar os outros 3 algarismos. Como de um total de 7 algarismos possíveis já utilizamos um para o primeiro dígito, restam agora um total de 6 algarismos para escolhermos 3 e posicionar. Temos, portanto $A_6^3 = \frac{6!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$ maneiras de fazer isso. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, temos $6 \times 120 = 720$ números de quatro algarismos distintos maiores que 3000.

(b) é permitida a repetição dos dígitos? Justifique;

Resposta: Como queremos números maiores que 3000 temos que o primeiro dígito pode ser: 3 ou 4 ou 5 ou 7 ou 8 ou 9. Assim, temos 6 possibilidades para esta posição. Agora, vamos posicionar os outros 3 algarismos, lembrando que são permitidas repetições. Basta escolher 3 dos 7 algarismos disponíveis e posicioná-los. Temos $AR_7^3 = 7^3 = 343$ formas de fazer isto. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, temos $6 \times 343 = 2058$ números de quatro algarismos maiores que 3000.

(c) o dígito 1 deve figurar? Justifique.

Vamos considerar como corretas as interpretações (i) ou (ii) dadas a seguir:

(i) *Resposta:* Estamos supondo que todos os dígitos são diferentes.

Temos 6 possibilidades para o primeiro dígito $(3, 4, 5, 7, 8, 9)$. Fixado o primeiro dígito, o dígito 1 pode ocupar a posição das centenas ou das decenas ou das unidades, logo temos 3 possibilidades para colocar o 1. Finalmente, fixados o primeiro dígito e o 1 restam 2 lugares a serem preenchidos pelos outros 5 dígitos, tendo $A_5^2 = \frac{5!}{2!} = 60$ possibilidades. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo temos $6 \times 3 \times 60 = 1080$ números maiores de 3000 que tem um dígito 1, formados com os dígitos $1, 4, 5, 7, 8$ e 9.

(ii)*Resposta:* Estamos supondo que os dígitos podem estar repetidos.

Neste caso, vamos solucionar esta questão utilizando a noção de complemento. Do total de números maiores que 3000 calculados no item b), vamos subtrair aqueles em que o dígito 1 NÃO figura.
CÁLCULO DOS NÚMEROS MAIORES QUE 3000 ONDE 1 NÃO FIGURA:
Para o primeiro dígito podemos ter: 3 ou 4 ou 5 ou 7 ou 8 ou 9. Assim, temos 6 possibilidades para esta posição. Para as demais posições temos 6 opções (pois estamos excluindo o algarismo 1). Logo temos $AR_6^3 = 6^3 = 216$ maneiras de terminar a composição destes números. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, temos $6 \times 216 = 1296$ números de quatro algarismos maiores que 3000 onde o algarismo 1 não figura.
Portanto, temos 1296 algarismos dentre os 2058 maiores que 3000

onde o 1 NÃO aparece, restando $2058 - 1296 = 762$ nos quais o algarismo 1 sempre figura.

4. (1.5) De quantas maneiras podemos acomodar 15 pessoas de modo que 9 delas fiquem em uma mesa redonda e as 6 restantes fiquem num banco? Justifique.

   Resposta: Observem que ao escolhermos quem se sentará à mesa automaticamente determinamos quem se sentará no banco. Para fazermos isso temos $C_{15}^{9} = \frac{15!}{9!6!}$. Em seguida, vamos sentar os 9 escolhidos à mesa e os 6 restantes no banco. Para sentar os 9 à mesa (lembrando que a mesa é redonda), temos $PC(9) = 8!$ formas enquanto que para sentar os outros 6 no banco temos $P_6 = 6!$. Pelo Princípio Multiplicativo temos: $C_{15}^{9} \times PC(9) \times P_6 = \frac{15!}{9!6!} \times 8! \times 6! = \frac{15!}{9}$ maneiras de alocar as 15 pessoas na mesa redonda e no banco.

5. (1.5) De quantos modos podemos colocar em fila 7 letras A, 6 letras B e 5 letras C, de maneira que não haja 2 letras B juntas? Justifique.

   Resposta: Como não queremos letras B juntas, vamos posicionar as outras letras e em seguida posicionar as letras B nos espaços vazios.

   POSICIONANDO APENAS A'S E C'S:

   Como temos 7 letras A e 5 letras C, temos $P_{12}^{7,5} = \frac{12!}{7!5!}$ formas de posicioná-las em fila.

   Agora temos a seguinte situação:

   $$\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot$$

   Temos 13 espaços em branco (representados no esquema acima por pontinhos) para inserir as letras B. Precisamos escolher 6 desses espaços e temos $C_{13}^{6} = \frac{13!}{7!6!}$ maneiras de fazer isso. Como todas as letras B são iguais, temos apenas uma maneira de posicioná-las. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, temos $P_{12}^{7,5} \times C_{13}^{6} \times 1 = \frac{12!}{7!5!} \times \frac{13!}{7!6!}$ formas de posicionar estas letras em fila sendo que as letras B nunca ficam juntas.

6. (1.5) Encontre o número de maneiras de se comprar 24 latas de refrigerante, tendo quatro tipos disponíveis (guaraná, coca-cola, sprite, fanta-laranja), de modo que tenhamos pelo menos uma lata de cada tipo. Justifique.
(Observação: suponha que existe um número suficiente de latas de cada tipo para que o problema tenha solução)

Resposta: Sejam:

x : número de latas de guaraná a serem compradas;

y : número de latas de coca-cola a serem compradas;

z : número de latas de sprite a serem compradas, e

w : número de latas de fanta-laranja a serem compradas.

Sabemos que $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$ e $w \geq 1$ e que queremos comprar 24 latas. Assim, podemos escrever a seguinte equação:

$$x + y + z + w = 24 \qquad (I)$$

Como as variáveis da equação (I) são todas maiores ou iguais a 1, precisamos fazer uma mudança de variáveis para que nossa equação tenha apenas variáveis não-negativas (≥ 0).

Sejam:

$x = a + 1$. Como $x \geq 1$, temos $a \geq 0$.

$y = b + 1$. Como $y \geq 1$, temos $b \geq 0$.

$z = c + 1$. Como $z \geq 1$, temos $c \geq 0$.

$w = d + 1$. Como $w \geq 1$, temos $d \geq 0$.

Assim podemos reescrever a equação (I) da seguinte forma:

$$a + 1 + b + 1 + c + 1 + d + 1 = 24$$

$$a + b + c + d = 20 \qquad (II)$$

Sabemos que o número de soluções inteiras não negativas da equação (II) é dado por: $CR_4^{20} = C_{4+20-1}^{20} = C_{23}^{20} = \frac{23!}{3!20!} = 23 \times 11 \times 7 = 1771$.

Como as equações (I) e (II) são equivalentes, temos 1771 maneiras de se comprar 24 latas de refrigerante respeitando as restrições do problema.