

Aula 3 : Número de elementos de um conjunto

Conteúdo:

- ➡ Conceitos iniciais
- ➡ Introdução ao princípio aditivo
- ➡ Introdução ao princípio da inclusão e exclusão

Conceitos iniciais:

- Faz sentido saber quantos elementos tem um conjunto?
- É sempre possível contar os elementos de um conjunto?
- Tem uma fórmula para calcular o número de elementos de $A \cup B$?

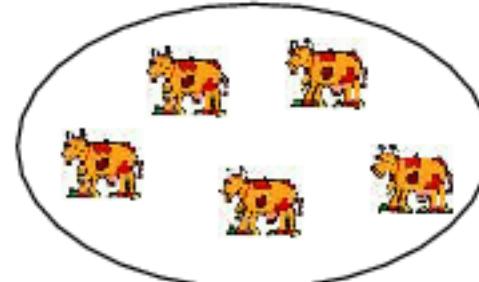
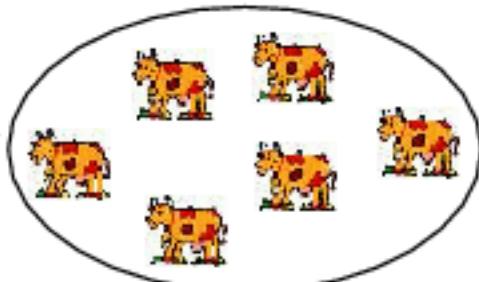
→ Questão 1:

Faz sentido saber quantos elementos tem um conjunto?

Exemplo 1:

O vaqueiro João cuida das vacas da fazenda "Três Irmãos". Ele leva as vacas para pastar nos campos fora da fazenda. Ele não pode perder nenhuma vaca. Então o que ele faz ? Conta as vacas que formam o gado antes e depois do pastoreio.

Conjunto de
vacas antes do
pastoreio.



Conjunto de
vacas depois
do pastoreio.

→ Questão 1:

Exemplo 2:

Você deu dez notas de R\$ 1,00 para um amigo fazer compras. No retorno, você contou o dinheiro que sobrou (3 notas de R\$ 1,00).



→ Questão 1:

Faz sentido saber quantos elementos tem um conjunto?

Exemplo 2:

Você deu dez notas de R\$ 1,00 para um amigo fazer compras. No retorno, você contou o dinheiro que sobrou (3 notas de R\$ 1,00).

Resposta: SIM



 Notação:

$n(A)$: é o número de elementos do conjunto A (ou cardinalidade de A).

Exemplo 1:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3\} \\ &= \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \end{aligned}$$



 Notação:

$n(A)$: é o número de elementos do conjunto A (ou cardinalidade de A).

Exemplo 1:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3\} \\ &= \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \end{aligned}$$

$$n(A) = 7$$



 Questão 2:

É sempre possível contar os elementos de um conjunto?

Exemplo 1:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

- Como contamos os elementos de \mathbf{A} ?



 Questão 2:

É sempre possível contar os elementos de um conjunto?

Exemplo 1:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

- Como contamos os elementos de \mathbf{A} ?

=> Enumerando seus elementos:

1 é o número -3

2 é o número -2

: :

7 é o número 3

=> Acabamos a enumeração em 7



→ Questão 2:

Exemplo 2:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par}\} \\ &= \{2, 4, 6, \dots\}\end{aligned}$$



 Questão 2:

Exemplo 2:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par}\} \\ &= \{2, 4, 6, \dots\}\end{aligned}$$

- Podemos ir enumerando seus elementos mas nunca acabaremos a enumeração.



 Questão 2:

É sempre possível contar os elementos de um conjunto?

Exemplo 2:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par}\} \\ &= \{2, 4, 6, \dots\}\end{aligned}$$

- Podemos ir enumerando seus elementos mas nunca acabaremos a enumeração.

Resposta: NEM sempre



→ Definição:

- Um conjunto é **finito** se é possível contar o número de seus elementos.
- Um conjunto é **infinito** se não é possível contar o número de seus elementos.



 Definição:

- Um conjunto é **finito** se é possível contar o número de seus elementos.
- Um conjunto é **infinito** se não é possível contar o número de seus elementos.

Exemplo 1:

A = $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\}$ é finito

B = $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par}\}$ é infinito

\mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} , \mathbb{Q} , \mathbb{I} são conjuntos infinitos.



- É sempre possível contar os elementos de um conjunto finito.



→ É sempre possível contar os elementos de um conjunto finito. Mas, será que sempre conseguimos contar ?

Exemplo:

$$C = \{x \mid x \text{ é uma pessoa que nasceu antes de 2000}\}$$

então:

- C está bem definido
- C é finito



→ É sempre possível contar os elementos de um conjunto finito. Mas, será que sempre conseguimos contar ?

Exemplo:

$C = \{x \mid x \text{ é uma pessoa que nasceu antes de 2000}\}$

então:

- C está bem definido
- C é finito
- $n(C)$ é um número que não conhecemos



→ É sempre possível contar os elementos de um conjunto finito. Mas, será que sempre conseguimos contar ?

Exemplo:

$C = \{x \mid x \text{ é uma pessoa que nasceu antes de 2000}\}$

então:

- C está bem definido
- C é finito
- $n(C)$ é um número que não conhecemos

Conclusão: Embora tenhamos um conjunto finito, pode ser impraticável contá-lo.



→ Assumimos, nesta aula:

- A é um conjunto **finito**;
- É possível determinar o número de elementos de A , $n(A)$.



→ Assumimos, nesta aula:

- A é um conjunto **finito**;
- É possível determinar o número de elementos de A , $n(A)$.

→ Questão 3:

Tem uma fórmula para calcular o número de elementos de $A \cup B$?



Introdução ao princípio aditivo:

→ Problema inicial:

{ Dados os conjuntos $A \in B$,
calcular $n(A \cup B)$



Introdução ao princípio aditivo:

→ Problema inicial:

{ Dados os conjuntos $A \in B$,
calcular $n(A \cup B)$

→ Objetivo:

— Encontrar uma fórmula para calcular $n(A \cup B)$.



Introdução ao princípio aditivo:

→ Problema inicial:

{ Dados os conjuntos $A \in B$,
calcular $n(A \cup B)$

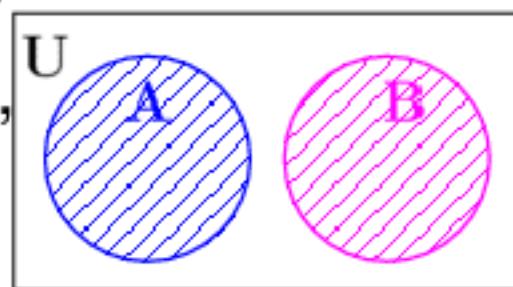
→ Objetivo:

— Encontrar uma fórmula para calcular $n(A \cup B)$.

→ Princípio aditivo (para dois conjuntos)

Se $A \in B$ são disjuntos $A \cap B = \emptyset$,

então $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$



→ Exemplo 1:

$\mathbf{U} = \{x \mid x \text{ é aluno do Instituto de Línguas IL}\}$

$\mathbf{A} = \{x \in \mathbf{U} \mid x \text{ está no } 4^{\circ} \text{ ano do curso de inglês}\}$

$\mathbf{B} = \{x \in \mathbf{U} \mid x \text{ está no } 1^{\circ} \text{ ano do curso de inglês}\}$

→ Problema:

Dados $n(\mathbf{U}) = 300$, $n(\mathbf{A}) = 150$, $n(\mathbf{B}) = 40$

Determinar o número de alunos do IL que está no 1° ou no 4° ano do curso de inglês.



Conjuntos: *Número de elementos / Introdução ao princípio aditivo*

→ Exemplo 1:

$\mathbf{U} = \{x \mid x \text{ é aluno do Instituto de Línguas IL}\}$

$\mathbf{A} = \{x \in \mathbf{U} \mid x \text{ está no } 4^{\circ} \text{ ano do curso de inglês}\}$

$\mathbf{B} = \{x \in \mathbf{U} \mid x \text{ está no } 1^{\circ} \text{ ano do curso de inglês}\}$

→ Problema:

Dados $n(\mathbf{U}) = 300$, $n(\mathbf{A}) = 150$, $n(\mathbf{B}) = 40$

Determinar o número de alunos do IL que está no 1° ou no 4° ano do curso de inglês.

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset \Rightarrow n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) = 190$$



→ Problema:

{ Dados os conjuntos A, B e C,
calcular $n(A \cup B \cup C)$



→ Problema:

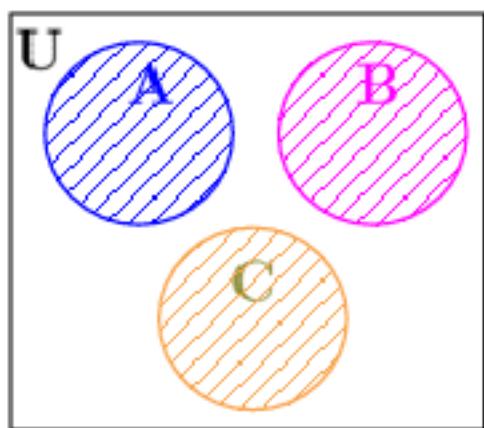
{ Dados os conjuntos A, B e C,
{ calcular $n(A \cup B \cup C)$

→ Princípio aditivo (para três conjuntos)

Se A, B e C são disjuntos dois a dois:

$$A \cap B = \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset, \quad B \cap C = \emptyset$$

então $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$



→ Problema:

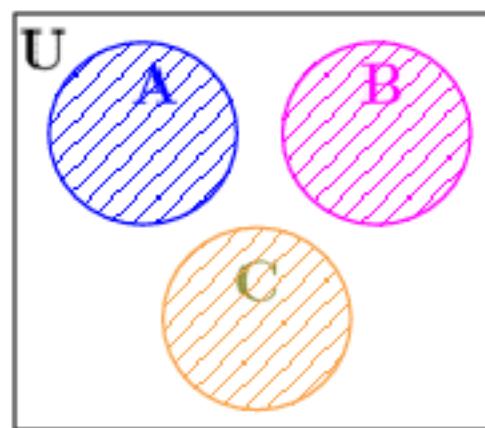
{ Dados os conjuntos A, B e C,
{ calcular $n(A \cup B \cup C)$

→ Princípio aditivo (para três conjuntos)

Se A, B e C são disjuntos dois a dois:

$$A \cap B = \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset, \quad B \cap C = \emptyset$$

então $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$



→ Prova:

$$n(A \cup B \cup C) = n((A \cup B) \cup C) \stackrel{(A \cup B) \cap C = \emptyset}{=} n(A \cup B) + n(C)$$



$$\stackrel{A \cap B = \emptyset}{=} n(A) + n(B) + n(C)$$

→ Princípio aditivo (para quatro conjuntos)

Se A, B, C e D são conjuntos disjuntos dois a dois

$$(A \cap B = A \cap C = A \cap D = B \cap C = B \cap D = C \cap D = \emptyset)$$

então $n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D)$



→ Princípio aditivo (para quatro conjuntos)

Se A, B, C e D são conjuntos disjuntos dois a dois

$$(A \cap B = A \cap C = A \cap D = B \cap C = B \cap D = C \cap D = \emptyset)$$

então $n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D)$

→ Tente fazer a prova aplicando o raciocínio anterior.



Conjuntos: *Número de elementos / Introdução ao princípio aditivo*

→ Prova: $n(A \cup B \cup C \cup D) = n((A \cup B) \cup C \cup D)$

Prova

Voltar

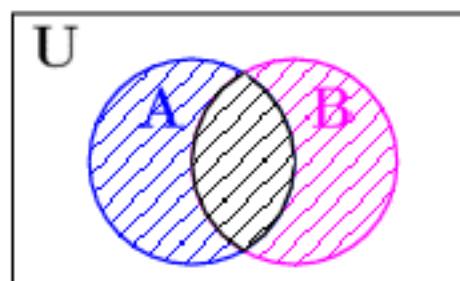
Introdução ao princípio da inclusão e exclusão:

→ Problema inicial:

{ Dados os conjuntos A e B,
calcular $n(A \cup B)$

■ A e B podem não ser disjuntos

$$A \cap B \neq \emptyset$$



$$n(A \cup B) = ?$$



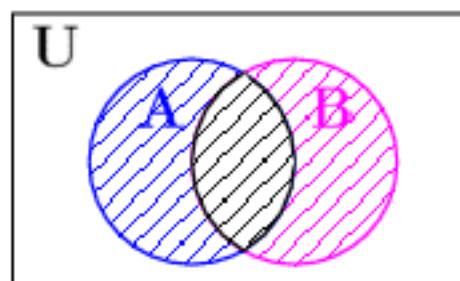
Introdução ao princípio da inclusão e exclusão:

→ Problema inicial:

{ Dados os conjuntos A e B,
calcular $n(A \cup B)$

- A e B podem não ser disjuntos

$$A \cap B \neq \emptyset$$



$$n(A \cup B) = ?$$

→ Objetivo:

- Encontrar uma fórmula para $n(A \cup B)$



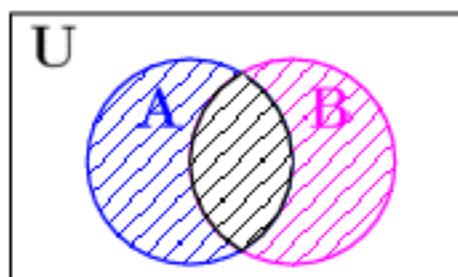
Introdução ao princípio da inclusão e exclusão:

→ Problema inicial:

{ Dados os conjuntos A e B,
calcular $n(A \cup B)$

- A e B podem não ser disjuntos

$$A \cap B \neq \emptyset$$



$$n(A \cup B) = ?$$

→ Objetivo:

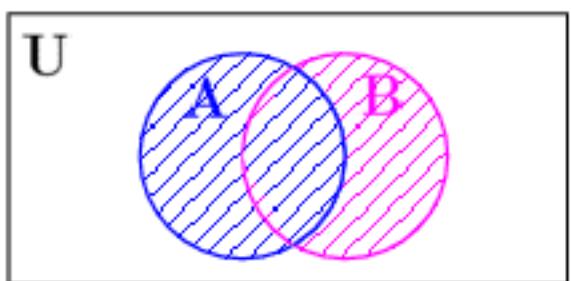
- Encontrar uma fórmula para $n(A \cup B)$

→ Estratégia:

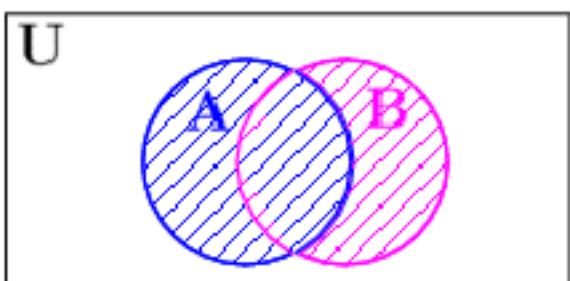
- Reescrever $A \cup B$ como conjuntos disjuntos.



→ Dados $A, B, A \cap B \neq \emptyset$

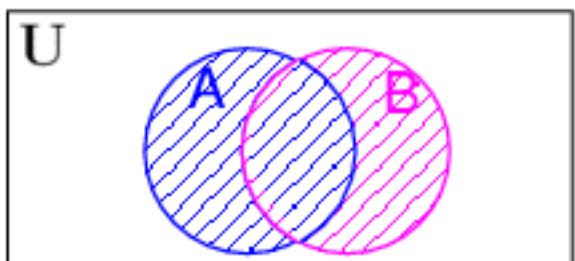


→ Como reescrever $A \cup B$ como união de conjuntos disjuntos?

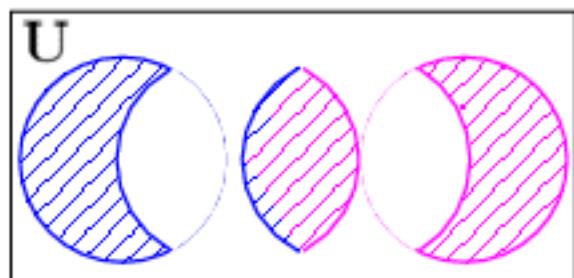


Disjuntos

Voltar

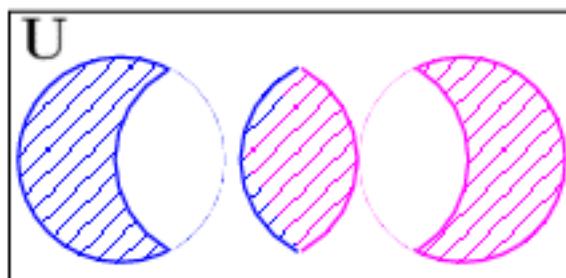


∩ Voltar



União Voltar

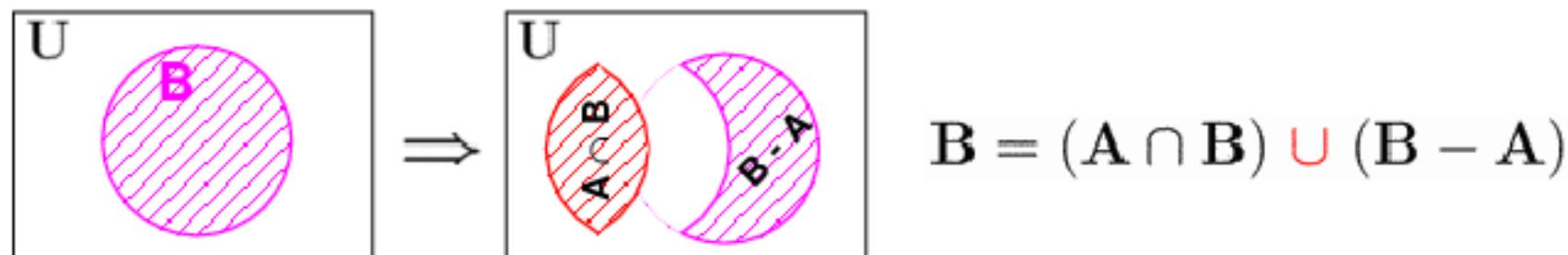
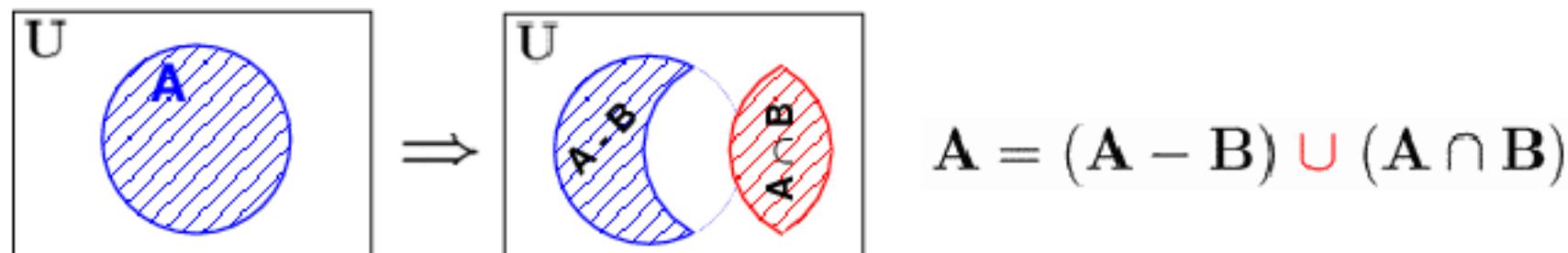
$$B = (B - A) \cup (A \cap B)$$
$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$



União Voltar

— **Conclusão:** $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$
 $n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$

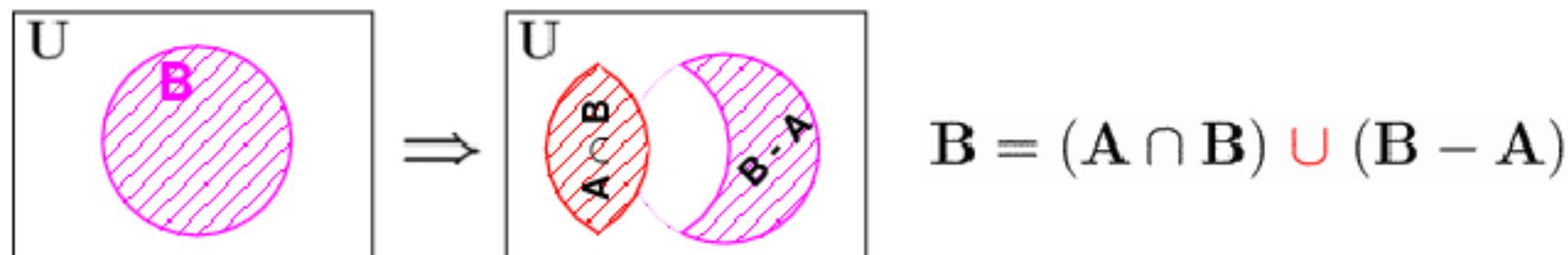
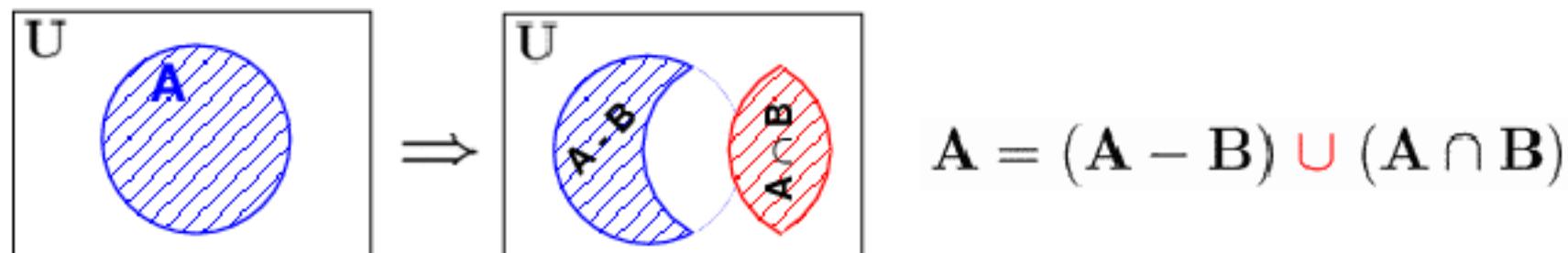
→ $n(A \cup B) = n((A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A))$
 $= n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$



**Conjuntos: Número de elementos /
Introdução ao princípio da inclusão e exclusão**

19

→ $n(A \cup B) = n((A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A))$
 $= n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$



$$n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$$

$$n(B) = n(B - A) + n(A \cap B)$$



→ Resumindo:

- $n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$
- $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$
- $n(B) = n(B - A) + n(A \cap B)$



→ Resumindo:

- $n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$
- $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B) \Rightarrow n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$
- $n(B) = n(B - A) + n(A \cap B) \Rightarrow n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$



→ Resumindo:

■ $n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$

■ $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B) \Rightarrow n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

■ $n(B) = n(B - A) + n(A \cap B) \Rightarrow n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$

→
$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= [n(A) - n(A \cap B)] + n(A \cap B) + [n(B) - n(A \cap B)] \\ &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \end{aligned}$$



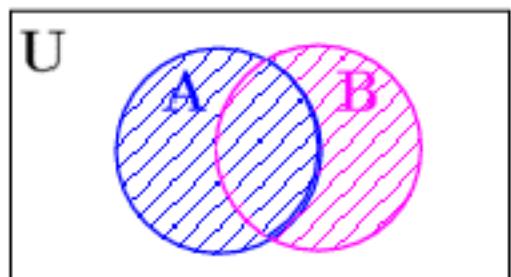
→ Princípio da inclusão e exclusão (para dois conjuntos)

Dados A e B ,

então

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

→ Interpretação visual



$$n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



Voltar

→ Exemplo 2:

$\mathbf{U} = \{x \mid x \text{ é aluno do Instituto de Línguas IL}\}$

$\mathbf{A} = \{x \in \mathbf{U} \mid x \text{ está no } 4^{\circ} \text{ ano do curso de inglês}\}$

$\mathbf{B} = \{x \in \mathbf{U} \mid x \text{ está no } 2^{\circ} \text{ ano do curso de francês}\}$

dados: $n(\mathbf{U}) = 300$ $n(\mathbf{A}) = 40$

$n(\mathbf{B}) = 20$ $n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = 2$



→ Exemplo 2:

$\mathbf{U} = \{x \mid x \text{ é aluno do Instituto de Línguas IL}\}$

$\mathbf{A} = \{x \in \mathbf{U} \mid x \text{ está no } 4^{\circ} \text{ ano do curso de inglês}\}$

$\mathbf{B} = \{x \in \mathbf{U} \mid x \text{ está no } 2^{\circ} \text{ ano do curso de francês}\}$

dados: $n(\mathbf{U}) = 300$ $n(\mathbf{A}) = 40$

$n(\mathbf{B}) = 20$ $n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = 2$

então o número de alunos do IL que cursam o 4° ano
de inglês ou o 2° ano de francês é:

$$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = 40 + 20 - 2 = 58$$





Questão:

Como calcular $n(A \cup B \cup C)$ usando o Princípio da inclusão e exclusão para dois conjuntos ?





Questão:

Como calcular $n(A \cup B \cup C)$ usando o Princípio da inclusão e exclusão para dois conjuntos ?

$$n(A \cup B \cup C) = n((\underbrace{A \cup B}) \cup C)$$





Questão:

Como calcular $n(A \cup B \cup C)$ usando o Princípio da inclusão e exclusão para dois conjuntos ?

$$n(A \cup B \cup C) = n((\underbrace{A \cup B}) \cup C)$$

$$= n(\underbrace{A \cup B}) + n(C) - n(\underbrace{(A \cup B)} \cap C)$$

$$= [n(A) + n(B) - n(A \cap B)] + n(C) - n((A \cap C) \cup (B \cap C))$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B)$$

$$- [n(A \cap C) + n(B \cap C) - n(\underbrace{(A \cap C)}_{A \cap B \cap C} \cap \underbrace{B \cap C}_{A \cap B \cap C})]$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$



→ Princípio da inclusão e exclusão (para três conjuntos)

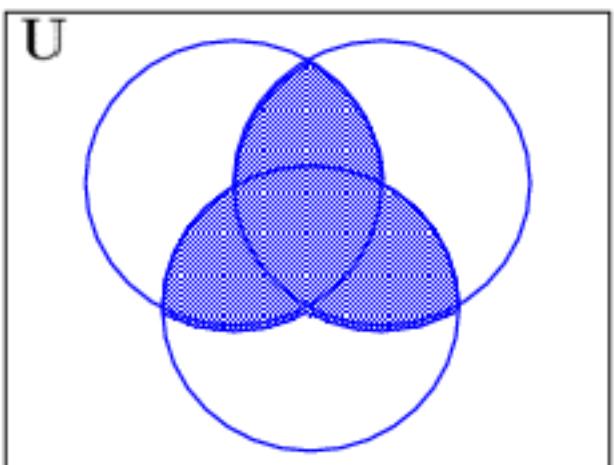
Dados A, B e C,

então $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$

$$-n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$$

$$+n(A \cap B \cap C)$$

— Interpretação gráfica:



→ Exemplo 3:

U = { $x \mid x$ é aluno do Instituto de Línguas IL }

A = { $x \in U \mid x$ está no 4º ano do curso de inglês}

B = { $x \in U \mid x$ está no 2º ano do curso de francês}

C = { $x \in U \mid x$ está no 1º ano do curso de italiano}

→ Exemplo 3 (continuação):

Dados: $n(\mathbf{U}) = 300$, $n(\mathbf{A}) = 40$, $n(\mathbf{B}) = 20$, $n(\mathbf{C}) = 30$

$$n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = 2 \qquad n(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) = 5$$

$$n(\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = 3 \qquad n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = 1$$

então o número de alunos do IL que estão cursando o 4º ano de inglês ou o 2º ano de francês ou o 1º ano de italiano é:



→ Exemplo 3 (continuação):

Dados: $n(\mathbf{U}) = 300$, $n(\mathbf{A}) = 40$, $n(\mathbf{B}) = 20$, $n(\mathbf{C}) = 30$

$$n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = 2 \qquad n(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) = 5$$

$$n(\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = 3 \qquad n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = 1$$

então o número de alunos do IL que estão cursando o 4º ano de inglês ou o 2º ano de francês ou o 1º ano de italiano é:

$$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) =$$

$$= n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) + n(\mathbf{C}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) - n(\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) + n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C})$$

$$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = 40 + 20 + 30 - 2 - 5 - 3 + 1 = 81$$



Prove o princípio da inclusão e exclusão no seguinte caso:

Dados A_1, A_2, A_3 e A_4 ,

então $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) - \\ \quad - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_1 \cap A_4) - n(A_2 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_4) - \\ \quad - n(A_3 \cap A_4) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + n(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - \\ \quad - n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \end{array} \right.$$

Fórmula

Voltar

→ Prova: $n(\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \cup \mathbf{A}_3 \cup \mathbf{A}_4) = n((\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2) \cup \mathbf{A}_3 \cup \mathbf{A}_4)$

[Prova](#)

[Voltar](#)

→ Observação:

A partir de $n(A \cup B)$ podemos obter outras relações.

Exemplo:

Determine a quantidade de números naturais que existe entre 1 e 100 inclusive e que não são divisíveis por 2 nem por 5.



→ Observação:

A partir de $n(A \cup B)$ podemos obter outras relações.

Exemplo:

Determine a quantidade de números naturais que existe entre 1 e 100 inclusive e que não são divisíveis por 2 nem por 5.

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 100\}$$

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in C, x = 2k, k \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, \dots, 100\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in C, x = 5k, k \in \mathbb{N}\} = \{5, 10, 15, \dots, 100\}$$



→ Observação:

A partir de $n(A \cup B)$ podemos obter outras relações.

Exemplo:

Determine a quantidade de números naturais que existe entre 1 e 100 inclusive e que não são divisíveis por 2 nem por 5.

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 100\}$$

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in C, x = 2k, k \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, \dots, 100\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in C, x = 5k, k \in \mathbb{N}\} = \{5, 10, 15, \dots, 100\}$$



$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \in C, x \notin A \text{ e } x \notin B\}$$

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \in C \text{ e } x \notin A \text{ e } x \notin B\}$$

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid x \in C \text{ e } (x \in \overline{A} \text{ e } x \in \overline{B})\}$$

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid x \in C \text{ e } (x \in \overline{A} \cap \overline{B})\}$$

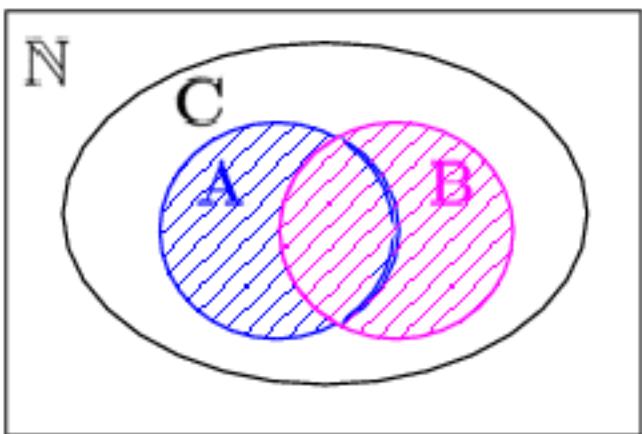
$$= \{x \in \mathbb{N} \mid x \in C \text{ e } x \in (\overline{A \cup B})\}$$

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid x \in C \text{ e } x \notin (A \cup B)\}$$

$$= C - (A \cup B)$$

Lembremos o enunciado do exemplo:

Determine a quantidade de números naturais que existe entre 1 e 100 e não são divisíveis por 2 nem por 5.



Conclusão:

Pede-se $n(C - (A \cup B))$

■ Observe que:

$$(C - (A \cup B)) \cup (A \cup B) = C$$

e $(C - (A \cup B)) \cap (A \cup B) = \emptyset$



■ Observe que:

$$(C - (A \cup B)) \cup (A \cup B) = C$$

$$\text{e } (C - (A \cup B)) \cap (A \cup B) = \emptyset$$

$$\Rightarrow \underbrace{n((C - (A \cup B)) \cup (A \cup B))}_{n(C)} = n(C - (A \cup B)) + n(A \cup B)$$

princípio
aditivo



**Conjuntos: Número de elementos /
Introdução ao princípio da inclusão e exclusão**

■ Observe que:

$$(C - (A \cup B)) \cup (A \cup B) = C$$

$$\text{e } (C - (A \cup B)) \cap (A \cup B) = \emptyset$$

$$\Rightarrow n(\underbrace{(C - (A \cup B)) \cup (A \cup B)}_{n(C)}) = n(C - (A \cup B)) + n(A \cup B)$$

princípio
aditivo

$$\Rightarrow n(C - (A \cup B)) = n(C) - n(A \cup B)$$



→ Resumindo:

Devemos calcular $n(C - (A \cup B)) = n(C) - n(A \cup B)$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 100\}$$

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in C, x = 2k, k \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, \dots, 100\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in C, x = 5k, k \in \mathbb{N}\} = \{5, 10, 15, \dots, 100\}$$

$$\begin{aligned} n(C) &= 100 & n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &&&\text{princípio} \\ &&&\text{inclusão e exclusão} \\ &&&= 50 + 20 - 10 = 60 \end{aligned}$$



→ Resumindo:

Devemos calcular $n(\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) = n(\mathbf{C}) - n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$

$$\mathbf{C} = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 100\}$$

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C}, x = 2k, k \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, \dots, 100\}$$

$$\mathbf{B} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbf{C}, x = 5k, k \in \mathbb{N}\} = \{5, 10, 15, \dots, 100\}$$

$$n(\mathbf{C}) = 100 \quad n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \begin{matrix} \text{princípio} \\ \text{inclusão e exclusão} \end{matrix} = n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \\ = 50 + 20 - 10 = 60$$

$$\text{logo,} \quad n(\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) = 100 - 60 = 40$$

Resposta: A quantidade de números naturais que existe entre 1 e 100 e não são divisíveis por 2 nem por 5 é **40**.



Resumo:

Conceitos:

- Número de elementos de um conjunto $n(A)$ - (cardinalidade)
- Conjunto finito
- Conjunto infinito
- Introdução ao princípio aditivo:
(Número de elementos da união de conjuntos disjuntos dois a dois)

- A_1 e A_2 disjuntos $\Rightarrow n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) = \sum_{i=1}^2 n(A_i)$

- A_1, A_2 e A_3 disjuntos $\Rightarrow n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$

$$= n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) = \sum_{i=1}^3 n(A_i)$$

- A_i disjuntos dois a dois $\Rightarrow n(\bigcup_{i=1}^4 A_i) = \sum_{i=1}^4 n(A_i)$

Resumo:**Conceitos:**

- Introdução ao princípio da inclusão e exclusão:

(Número de elementos da união de conjuntos não necessariamente disjuntos)

$$\bullet n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2) = \sum_{i=1}^2 n(A_i) - n(A_1 \cap A_2)$$

$$\bullet n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) -$$

$$-n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \sum_{i=1}^3 n(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^3 n(A_i \cap A_j) + n(\bigcap_{i=1}^3 A_i)$$

$$\bullet n(\bigcup_{i=1}^4 A_i) = \sum_{i=1}^4 n(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^4 n(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i,j,l=1 \\ i < j \\ j < l \\ i < j < l}}^4 n(A_i \cap A_j \cap A_l) - n(\bigcap_{i=1}^4 A_i)$$

Exercícios

1. Sejam A e B dois subconjuntos de um conjunto universo U tais que $B \subseteq A$. Usando o princípio aditivo prove que $n(A - B) = n(A) - n(B)$.
2. Quantos números inteiros entre 1 e 100 inclusive são divisíveis por 3 ou por 7.

Dica: Considere

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 100 \text{ e } x = 3k \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 100 \text{ e } x = 7k \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\}$$

e use o princípio de inclusão e exclusão.

3. Use os princípios aditivo ou de inclusão e exclusão para determinar, em cada caso, a quantidade de números naturais entre 1 e 60 que verificam:

- (i) são divisíveis por 2 e por 3
- (ii) são divisíveis por 2 ou por 3
- (iii) não são divisíveis nem por 2 nem por 3
- (iv) são ímpares divisíveis por 3 ou são divisíveis por 2
- (v) são divisíveis por 2 ou por 3 ou por 5

4. Foram consultadas 200 pessoas que estavam pesquisando preços de televisores em lojas de eletrodomésticos. As respostas foram as seguintes:

- 40% perguntaram pela marca A;
- 35% pela marca B;
- 10% pelas marcas A e B;
- 25% somente perguntaram por outras marcas.

Use o princípio de adição ou o princípio da inclusão e exclusão para determinar:

4. (continuação)

- (i) quantidade de pessoas que perguntaram pelos preços das televisões de marcas A ou B.
- (ii) número de pessoas que perguntaram pela marca A e não pela marca B (lembre-se do exercício 1).