Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD1 - Segundo Semestre de 2012

Questões:

1. (1.5) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

   (a) $A - (B - C) = (A - B) - C$;

   Resposta: Falsa. Sejam A, B e C conjuntos não vazios tais que $A \cap C \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ e $B \cap C = \emptyset$.
   $A - (B - C) = A - B = A$
   enquanto que
   $(A - B) - C = A - C \neq A$, pois $A \cap C \neq \emptyset$.
   Logo, a afirmação é falsa.

   (b) $(A \cap B) - C = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.

   Lembre que: $X\Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$.

   Resposta: Falsa. Inicialmente vamos reescrever a afirmação sabendo que $X\Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$.
   $(A \cap B) - C = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$
   $(A \cap B) - C = ((A \cap B) - (A \cap C)) \cup ((A \cap C) - (A \cap B))$
   Sejam A, B e C conjuntos distintos não vazios tais que $A \cap B \cap C \neq \emptyset$, $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$ e $B \cap C \neq \emptyset$.
   Observem os diagramas de Venn da Figura 1 ilustram a situação e provam que $(A \cap B) - C \neq ((A \cap B) - (A \cap C)) \cup ((A \cap C) - (A \cap B))$.

2. (1.5) Dentre os números de 1 a 1000, inclusive, quantos são divisíveis por 2 ou 5 ou 12? Justifique.
   Sugestão: Use o Princípio da Inclusão e Exclusão.

   Resposta: Considere os conjuntos:

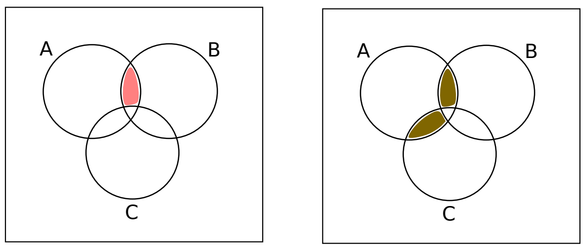

Figura 1: O diangrama de Venn da esquerda ilustra a expressão $(A \cap B) - C$, enquanto o diagrama da direita ilustra a expressão $((A \cap B) - (A \cap C)) \cup ((A \cap C) - (A \cap B))$.

$U = \{x \in \mathbb{N} |\ 1 \leq x \leq 1000\}$;

$A = \{x \in U |\ x$ é divisível por $2\} = \{x \in U |\ x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$;

$B = \{x \in U |\ x$ é divisível por $5\} = \{x \in U |\ x = 5m, m \in \mathbb{N}\}$

$C = \{x \in U |\ x$ é divisível por $12\} = x \in U |\ x = 12p, p \in \mathbb{N}\}$.

Pelo Princípio da Inclusão e Exclusão temos:

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

$A = \{2 \times 1, 2 \times 2, 2 \times 3, \cdots, 2 \times 500\} = \{2, 4, 6, \cdots, 1000\}$

$n(A) = 500$

$B = \{5 \times 1, 5 \times 2, 5 \times 3, \cdots, 5 \times 200\} = \{5, 10, 15, \cdots, 1000\}$

$n(B) = 200$

$C = \{12 \times 1, 12 \times 2, 12 \times 3, \cdots, 12 \times 83\} = \{12, 24, 36, \cdots, 996\}$

$n(C) = 83$

$(A \cap B) = \{x \in U |\ x$ é divisível por $10\} = \{x \in U |\ x = 10k, k \in \mathbb{N}\} = \{10 \times 1, 10 \times 2, 10 \times 3, \cdots, 10 \times 100\} = \{10, 20, 30, \cdots, 1000\}$

$n(A \cap B) = 100$

$(A \cap C) = \{x \in U |\ x$ é divisível por $12\} = C$

$n(A \cap C) = 83$

$(B \cap C) = \{x \in U |\ x$ é divisível por $60\} = \{x \in U |\ x = 60j, j \in \mathbb{N}\} = \{60 \times 1, 60 \times 2, 60 \times 3, \cdots, 60 \times 16\} = \{60, 120, 180, \cdots, 960\}$

$n(B \cap C) = 16$

$(A \cap B \cap C) = \{x \in U |\ x$ é divisível por $60\} = (B \cap C)$

$n(A \cap B \cap C) = 16$

Daí, temos:

$n(A \cup B \cup C) = 500 + 200 + 83 - 100 - 83 - 16 + 16 = 600$

Logo, temos 600 números inteiros entre 1 e 1000 que são divisíveis por $2, 5$ ou 12.

3. (1.0) Mostre pelo Princípio da Indução Matemática que:

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$$

para todo n natural.
Observação: Indique claramente os passos da indução.

Resposta: Seja $P(k) : \dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + \cdots + \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \dfrac{k}{2k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

BASE DA INDUÇÃO: Por um lado, $\dfrac{1}{1 \times 3} = \dfrac{1}{3}$.

Por outro lado, quando $k = 1$ temos $\dfrac{1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$.

Logo, $P(1)$ é verdadeira.

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Suponha que $P(n) = \dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}, \quad n \geq 1$ seja verdadeira.

PASSO INDUTIVO: Vamos provar que se $P(n)$ é verdadeira então

$$P(n{+}1): \frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+3}$$

também é verdadeira.

$$\underbrace{\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}}_{\text{HI}}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=$$

$$\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=$$

$$\frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} \quad (I)$$

Por outro lado,

$$\frac{n+1}{2n+3}=\frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} \quad (II)$$

Como $(I) = (II)$ temos $P(n+1)$ verdadeira.

Logo, $P(k): \dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+\cdots+\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{k}{2k+1}$ verdadeira $\forall k \in \mathbb{N}$.

4. (1.0) Seja a sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definida como:
$a_1 = 1$, $a_2 = 3$
$a_k = a_{k-2} + 2a_{k-1}$ para todos inteiros $k \geq 3$
Mostre usando Indução Forte que a_n é ímpar para todo n natural.
Observação: Indique claramente os passos da indução.

Resposta: Queremos mostrar que a_n é ímpar para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, seja $P(n): a_n = 2m-1, \quad n, m \in \mathbb{N}$, onde a_n é definido pela seguinte relação de recorrência:

$a_1 = 1$, $a_2 = 3$
$a_k = a_{k-2} + 2a_{k-1}$ para todos inteiros $k \geq 3$

BASE DA INDUÇÃO: $a_1 = 1$ que é um número ímpar. Logo $P(1)$ é verdadeira.

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Suponha que $P(1), P(2), \cdots, P(n)$ são verdadeiras, ou seja, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são ímpares.

PASSO INDUTIVO: Vamos mostrar que $P(n+1) : a_{n+1} = 2m' - 1, \quad m' \in \mathbb{N}$.

$$a_{n+1} = \underbrace{a_{n-1}}_{\text{ímpar pela HI}} + \underbrace{2a_n}_{\text{par}}$$

$$a_{n+1} = (2t-1) + 2t', \quad t, t' \in \mathbb{N}$$

$$a_{n+1} = 2t + 2t' - 1$$

$$a_{n+1} = 2\underbrace{(t+t')}_{m'} - 1 = 2m' - 1, \quad m' \in \mathbb{N}.$$

Logo, a_{n+1} pode ser escrito na forma $2m' - 1$ e, portanto, é ímpar.

Portanto, pelo Princípio da Indução Forte a_n é ímpar para todo n natural

5. (2.0) Um número de inscrição de um aluno em uma universidade é composto de 7 algarismos dentre $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. O primeiro algarismo pode ser 0. Considere os números de inscrição com todos os algarismos diferentes.

   (a) Quantos são os números de inscrição? Justifique.

   Resposta: Como temos 10 algarismos dos quais queremos escolher 7 distintos e a ordem dos desses algarismos importa, vamos resolver esta questão utilizando o conceito de arranjo simples. Assim, temos $A_{10}^7 = \dfrac{10!}{3!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$ números de inscrição com 7 algarismos distintos.

   (b) Quantos deles são pares? Justifique.

   Resposta: Temos 5 algarismos pares que podemos escolher para ocupar a última posição. Como não temos repetição de algarismos, temos 9 para escolher e posicionar nas 6 posições restantes. Podemos fazer isso de $A_9^6 = \dfrac{9!}{3!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$.

Pelo Princípio Multiplicativo, temos $5 \times A_9^6 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5^2$ maneiras de formar os números de matrícula pares com 7 algarismos distintos.

(c) Quantos deles tem todos os algarismos pares? Justifique.

Resposta: Nenhum, pois não é possível formar um número com 7 algarismos pares dispondo apenas de 5 algarismos pares.

(d) Quantos deles tem os algarismos 2 e 5 juntos? Justifique.

Resposta: Inicialmente, vamos permutar os algarismos 2 e 5, pois eles podem aparecer na ordem 2 5 ou 5 2. Logo, temos $P_2 = 2$ formas de fazer isso. Agora, tomando 2 e 5 como um único algarismo que chamaremos de $(*)$, vamos escolher e posicionar os demais algarismos. Retirando o 2 e o 5, restam 8 dos quais precisamos escolher 5 distintos para posicionar. Então, temos $A_8^5 = \dfrac{8!}{3!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$ formas de escolher e posicionar 5 algarismos em um total de 8 disponíveis.

Com esses algarismos já posicionados, temos 6 posições vazias entre eles para posicionar o algarismo $(*)$.

Logo, pelo Princípio Multiplicativo temos $P_2 \times A_8^5 \times 6 = 12 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$ números de matrícula com 7 algarismos distintos com 5 e 2 juntos.

6. (1,5) De quantas maneiras 18 objetos distintos podem ser divididos entre 5 pessoas, de modo que 4 pessoas fiquem com 4 objetos (cada uma delas) e uma fique com 2 objetos. Justifique.

Resposta: Vamos escolher inicialmente a pessoa que ficará com 2 objetos. Para isso temos $C_5^1 = 5$ formas. Em seguida, já com as 4 pessoas que terão 4 objetos definidas por esta escolha, vamos escolher os 4 objetos de cada uma delas. Temos $C_{18}^4 \times C_{14}^4 \times C_{10}^4 \times C_6^4 = \dfrac{18!}{4!14!} \times \dfrac{14!}{4!10!} \times \dfrac{10!}{4!6!} \times \dfrac{6!}{4!2!} = \dfrac{18!}{4!4!4!4!2}$ maneiras de escolher os objetos para as 4 pessoas. Note que estamos lidando com pessoas neste caso, e se trocarmos a pessoa que possui determinado obejeto temos uma nova solução.

Pelo Princípio Multiplicativo temos $5 \times \dfrac{18!}{4!4!4!4!2}$ formas de distribuir 18 objetos seguindo as regras da questão.

7. (1.5) De quantas maneiras as letras da palavra **INDIVIDUALIZAR** podem ser permutadas de modo que duas letras **I** nunca fiquem juntas? Justifique.

   A palavra I N D I V I D U A L I Z A R tem 4 I's, 1 N, 2 D's, 1 V, 1 U, 2 A's, 1 l, 1 Z, 1 R, totalizando 14 letras. Queremos o número de anagramas desta palavra que não têm duas letras I juntas. Ou seja, queremos que todos os I's dos anagramas estejam separados.

   Vamos posicionar todas as letras menos os $I's$.

   $P_{10}^{2,2} = \dfrac{10!}{2!2!}$

   Temos 11 espaços para inserir 4 I's. Logo, para escolher 4 desses espaços temos $C_{11}^{4} = \dfrac{11!}{7!4!}$.

   Daí, pelo Princípio Multiplicativo temos $P_{10}^{2,2} \times C_{11}^{4} = \dfrac{10!}{2!2!} \times \dfrac{11!}{7!4!}$ anagramas da palavra I N D I V I D U A L I Z A R com todos os I's separados.