Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AP1 - Segundo Semestre de 2015

Nome -
Assinatura -

Observações:

1. Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular. Se necessário deixe o resultado indicado, como um produto ou quociente ou potência de números inteiros ou fatoriais.

2. Resultado sem indicação de como foi obtido, não será considerado.

3. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.

4. Você pode usar lápis para responder as questões.

5. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.

6. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

Questões:

1. (1.5) Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{1, \{1\}, \{\{1\}\}\}, \qquad C = \{\emptyset, \{1, \{1\}\}\}.$$

Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

(a) $\emptyset \in A$

Resposta: Falso. $\emptyset$ não é elemento de A, logo $\emptyset \notin A$. Seria correto afirmar que $\emptyset \subseteq A$, uma vez que $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.

(b) $P(C) = \{\emptyset, \{\{1, \{1\}\}\}, \{\emptyset, \{1, \{1\}\}\}\}$ sendo $P(C)$ o conjunto de partes do conjunto C;

Resposta: Falso. O conjunto das partes de C possui 4 elementos. $P(C) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1, \{1\}\}\}, \{\emptyset, \{1, \{1\}\}\}\}$.

(c) $n(C) = 3$;

Resposta: Falso. O conjunto C possui 2 elementos, a saber, $\emptyset$ e $\{1, \{1\}\}$.

(d) $n(A \cup C) = 5$

Resposta: Verdadeiro. Pelo Princípio da Inclusão e Exclusão, temos que:

$$n(A \cup C) = n(A) + n(C) - n(A \cap C)$$

Como $n(A \cap C) = \emptyset$, temos

$$n(A \cup C) = n(A) + n(C)$$

O conjunto A possui 3 elementos, enquanto o conjunto C, 2.
Logo, $n(A \cup C) = 5$.

2. (1.5) Mostre por indução matemática que:

$$3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 3}{2}$$

para todo número natural maior ou igual a 2 ($n \geq 2$).

Resposta: Seja $P(n) : 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1} = \frac{3^n-3}{2}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

BASE DA INDUÇÃO: Vamos provar que a proposição se verifica para $n = 2$.

Quando $n = 2$, $3^{n-1} = 3$. Por outro lado, $\frac{3^n-3}{2} = \frac{3^2-3}{2} = 3$.

Logo $P(2)$ é verdadeira.

HIPÓTESE INDUTIVA: Suponha que $P(k) : 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{k-1} = \frac{3^k-3}{2}, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ seja verdadeira.

PASSO INDUTIVO: Vamos provar que se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1) : 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^k = \frac{3^{k+1}-3}{2}$ também é verdadeira.

$$\underbrace{3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{k-1}}_{\text{H.I.}} + 3^k =$$

$$\frac{3^k - 3}{2} + 3^k =$$

$$\frac{3^k - 3 + 2 \times 3^k}{2} =$$

$$\frac{3 \times 3^k - 3}{2} =$$

$$\frac{3^{k+1} - 3}{2}$$

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, $P(n) : 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1} = \frac{3^n-3}{2}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ é verdadeira.

3. (2.0) De quantos modos podemos distribuir 27 objetos distintos em:

(a) um grupo de 12 objetos e outro de 15. Justifique.

Resposta: Como queremos montar dois grupos, a ordem das escolhas dentro de cada grupo, não é importante. Para escolher os elementos do primeiro grupo, temos $C_{27}^{12} = \frac{27!}{12!15!}$. Escolhido tal grupo, o segundo com 15 elementos fica automaticamente determinado, uma vez que restam apenas 15 elementos. Portanto, temos uma forma de escolher o segundo grupo. Assim, pelo Princípio Multiplicativo temos $\frac{27!}{12!15!} \times 1$ maneiras de distribuir 27 objetos distintos em um grupo de 12 objetos e outro de 15.

(b) em 3 grupos de 9 objetos? Justifique.

Resposta: Novamente a ordem de escolha no interior dos grupos é irrelevante. Assim, para escolher o primeiro grupo, temos $C_{27}^{9} = \frac{27!}{18!9!}$ formas. Para o segundo grupo, temos $C_{18}^{9} = \frac{18!}{9!9!}$ maneiras. Escolhendo os dois primeiros grupos, o terceiro fica definido automaticamente. Logo, pelo Princípio Multiplicativo teríamos $C_{27}^{9} \times C_{18}^{9} \times 1$ formas de escolher os 3 grupos. Entretanto, os grupos têm todos o mesmo número de elementos, o que gera algumas repetições no momento em que utilizamos o PM. Observe que 1 2 3 = 3 2 1, para os nossos propósitos. Sendo assim, precisamos simplificar este resultado, removendo as possíveis permutações dos grupos, que neste caso são 3!. Portanto, temos $\frac{C_{18}^{9} \times C_{18}^{9}}{3!}$ de distribuir 27 objetos distintos em em 3 grupos de 9 objetos.

4. (1.5) Considerando todos os números naturais menores do que 10.000, determine quantos deles podem ser expressos utilizando somente os dígitos $7, 8$ e 9? Justifique.

Resposta: Vamos solucionar esta questão contanto a quantidade de números no intervalo $[1, 10000)$ de acordo com a quantidade de dígitos dos algarismos neste intervalo.

UM ALGARISMO: Neste caso, temos 3 números que utilizam apenas os dígitos $7, 8$ e 9.

DOIS ALGARISMOS: Com dois algarismos, temos 3 possibilidades de escolha para cada um dos dois algarismos, i.e., podemos escolher o $7, 8$

ou 9 para ocupar cada uma das duas posições. Então, pelo Princípio Multiplicativo, temos $3 \times 3 = 3^2$ números com dois algarismos onde apenas o $7, 8$ ou 9 figuram. Ou seja, temos arranjos com repetição de 3 elementos tomados dois a dois.

TRÊS ALGARISMOS: Seguindo o mesmo raciocínio do caso anterior, para cada posição temos 3 dígitos possíveis. Assim, temos arranjos com repetição de 3 elementos tomados 3 a 3: $AR_3^3 = 3^3$ números com três algarismos onde apenas o $7, 8$ ou 9 figuram.

QUATRO ALGARISMOS: Finalmente com 4 algarismos, temos para cada um deles 3 escolhas. Logo, temos arranjos com repetição de 3 elementos tomados 4 a 4: $AR_3^4 = 3^4$ números com quatro algarismos onde apenas o $7, 8$ ou 9 figuram.

Então, pelo Princípio Aditivo, temos $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = \frac{3(3^4-1)}{3-1} = 120$ números no intervalo $[1, 10000)$ que são expressos utilizando somente os dígitos $7, 8$ e 9.

5. (2.0) Dada a palavra **PROPORCIONAR** determine:

(a) O número de anagramas possíveis. Justifique.

Resposta: A palavra **PROPORCIONAR** possui 2 P's, 3 R's, 3 O's, 1 C, 1 I, 1 N e 1 A, totalizando 12 letras. Para calcular o número de anagramas desta palavra, basta permutar suas letras levando em conta as repetições. Portanto, temos $P_{12}^{2,3,3,1,1,1,1} = \frac{12!}{2!3!3!}$ anagramas da palavra **PROPORCIONAR**.

(b) O número de anagramas que não possuem letras **R** juntas (nem 2 **R**'s e nem 3 **R**'s). Justifique.

Resposta: Neste caso, como os R's não podem ser posicionados juntos, vamos posicionar todas as outras letras e em seguida posicionar cada um dos 3 R's nos espaços entre as letras posicionadas. Assim, desconsiderando os R's, temos 9 letras, das quais 2 são P's, 3 são O's , 1 é C, 1 é I, 1 é N e 1 é A. Logo, temos $P_9^{2,3,1,1,1,1} = \frac{9!}{2!3!}$ formas de posicionar tais letras. Desta forma, restam 10 espaços entre as letras já posicionadas nos quais podemos inserir cada um dos R's. Observe o esquema abaixo, onde os traços representam as letras já posicionadas e os pontos, os espaços vazios.

$$\cdot \; \_ \; \cdot \; \_ \; \cdot \; \_ \; \cdot \; \_ \; \cdot \; \_ \; \cdot \; \_ \; \cdot \; \_ \; \cdot \; \_ \; \cdot \; \_ \; \cdot$$

Assim, temos 10 espaços para escolher 3. Note que, como temos 3 letras iguais para posicionar nesses espaços, a ordem das escolhas não importa. Portanto, temos $C_{10}^{3} = \frac{10!}{7!3!}$ maneiras de escolher 3 espaços para os R's e posicioná-los nestes espaços. Pelo Princípio Multiplicativo, temos $P_9^{2,3,1,1,1,1} \times C_{10}^{3}$ anagramas da palavra **PROPORCIONAR** onde as letras R não figuram juntas.

6. (1.5) Encontre o número de maneiras de se comprar 24 latas de refrigerante, tendo quatro tipos disponíveis (guaraná, coca-cola, sprite, fanta-laranja), de modo que tenhamos pelo menos duas lata de cada tipo. Justifique. (Observação: suponha que existe um número suficiente de latas de cada tipo para que o problema tenha solução).

   Resposta: Sejam g, c, s, f as quantidades de latas de guaraná, coca-cola, sprite e fanta laranja. Como precisamos comprar pelo menos duas de cada, temos que $g, c, s, f \geq 2$. Desta forma, nosso problema se resume a solucionar a seguinte equação:

$$g + c + s + f = 24 \qquad (I)$$

   Como as variáveis da equação (I) valem pelo menos 2, precisamos fazer a seguinte mudança de variáveis para obtermos uma equação equivalente à (I) que possua apenas variáveis não negativas.

   Podemos reescrever g, c, s, f em função de $g', c', s', f' \geq 0$ da seguinte maneira:

$$g = g' + 2$$

$$c = c' + 2$$

$$s = s' + 2$$

$$f = f' + 2$$

Considere, portanto, a equação (II) abaixo, equivalente à equação (I):

$$(g' + 2) + (c' + 2) + (s' + 2) + (f' + 2) = 24 \quad (II)$$

$$g' + c' + s' + f' = 24 - 8$$

Ou seja, as soluções de (I) são as soluções inteiras não negativas de:

$$g' + c' + s' + f' = 16 \quad (III)$$

A equação (III) possui CR_4^{16} soluções distintas. Logo, temos $CR_4^{16} = C_{4+16-1}^{16} = C_{19}^{16} = \frac{19!}{16!3!}$ soluções distintas do problema original.