Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AP1 - Segundo Semestre de 2014

Nome -
Assinatura -

Observações:

1. Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular. Se necessário deixe o resultado indicado, como um produto ou quociente ou potência de números inteiros ou fatoriais.
2. Resultado sem indicação de como foi obtido, não será considerado.
3. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.
4. Você pode usar lápis para responder as questões.
5. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.
6. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

Questões:

1. (0.5) Dado o conjunto $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, determine o conjunto de partes $P(A)$ de A.

   Resposta: $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

2. (1.5) Sejam A, B e C conjuntos arbitrários. Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

   (a) $C \cup (A - B) \subseteq C \cup (A \cap B)$.

   Resposta: Falso! Observe os Diagramas de Venn da Figura **??** na página 6.

   (b) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$.

   Resposta: Falso! Pelo Princípio de Inclusão e Exclusão aplicado a três conjuntos, temos:

   $$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

   Observação: Também é correto colocar um contra-exemplo em cada caso.

3. (1.5) Mostre por indução matemática que:

   $$2 + 6 + 10 + \cdots + (4n - 2) = 2n^2$$

   para todo número natural maior ou igual a 1 ($n \geq 1$).

   Resposta: Seja $P(n) : 2 + 6 + 10 + \cdots + (4n - 2) = 2n^2$, ($n \geq 1$).
   BASE DA INDUÇÃO: Fazendo $n = 1$ temos:

   $$4 \times 1 - 2 = 2$$

.

Por outro lado,

$$2 \times (1)^2 = 2$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira.

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Suponha $P(k) : 2+6+10+\cdots+(4k-2) = 2k^2$ verdadeira.

PASSO INDUTIVO: Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1) : 2+6+10+\cdots+(4k-2)+\underbrace{(4k+2)}_{4(k+1)-2} = 2(k+1)^2$ também é verdadeira.

$$\underbrace{2+6+10+\cdots+(4k-2)}_{H.I.}+(4k+2) =$$

$$2k^2+(4k+2) =$$

$$2(k^2+2k+1) =$$

$$2(k+1)^2$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeira.

Então, pelo Princípio de Indução Matemática temos que $P(n) : 2+6+10+\cdots+(4n-2) = 2n^2$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. (1.5) Em um teste de Matemática existem 10 questões de múltipla escolha com 4 possibilidades de resposta para cada uma, e 15 questões do tipo Verdadeiro ou Falso. De quantas maneiras as 25 questões podem ser respondidas? Justifique.

   Resposta: Para cada uma das 10 questões de múltipla escolha teremos 4 possíveis respostas. Assim, temos $AR_4^{10} = 4^{10}$ possíveis respostas para as 10 questões. Para cada uma das 15 questões de Verdadeiro ou

Falso, temos duas possíveis respostas. Assim, temos $AR_2^{15} = 2^{15}$. Como a prova é composta pelas 10 questões de múltipla escolha e pelas 15 questões de Verdadeiro ou Falso, pelo Princípio Multiplicativo temos $AR_4^{10} \times AR_2^{15} = 4^{10} \times 2^{15} = (2^2)^{10} \times 2^{15} = 2^{20} \times 2^{15} = 2^{35}$ maneiras distintas para responder esta prova.

5. (2.5) Marina tem 8 livros diferentes e Pedro tem 9 livros diferentes. De quantas maneiras:

(a) podemos arrumar em uma prateleira os 17 livros? Justifique.

Resposta: Como os 17 livros são distintos, para arrumá-los na prateleira temos $P_{17} = 17!$ formas.

(b) podemos arrumar em uma prateleira os 17 livros, começando com um livro do Pedro, de modo alternado, isto é, um livro do Pedro, outro da Marina, outro do Pedro e assim por diante? Justifique.

Resposta: Como temos que alternar os livros de Pedro e Mariana, começando por um livro do Pedro, inicialmente vamos posicionar os 8 livros da Mariana : $P_8 = 8!$. Temos 9 espaços para posicionar os livros de Pedro: $P_9 = 9!$

._._._._._._._._.

Assim, pelo Princípio Multiplicativo, temos $P_8 \times P_9 = 8! \times 9!$ maneiras de dispor os 17 livros na prateleira de maneira alternada, começando por um livro do Pedro.

(c) Marina e Pedro podem trocar 3 livros entre si? Justifique.

Resposta: Neste caso, Marina e Pedro devem escolher 3 livros, cada um, para trocarem entre si. Note que a ordem das escolhas não importa. Assim, Marina pode fazê-las de $C_8^3 = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8\times7\times6}{3\times2} = 56$ formas e Pedro de $C_9^3 = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9\times8\times7}{3\times2} = 84$ formas. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, existem $C_8^3 \times C_9^3 = 56 \times 84 = 4704$ de Mariana e Pedro trocarem 3 livros entre si.

6. (1.0) Quantos são os anagramas da palavra **INDEPENDENTE** que começam com a letra **P**? Justifique.

   Resposta: A palavra **INDEPENDENTE** possui 1 P, 1 I, 3 N's, 2 D's, 4 E's e 1 T, totalizando 12 letras. Vamos fixar a letra P na primeira posição e permutar as demais letras : $P_{11}^{1,3,2,4,1} = \frac{11!}{3!2!4!}$. Logo, temos $P_{11}^{1,3,2,4,1} = \frac{11!}{3!2!4!}$ anagramas da palavra **INDEPENDENTE** que começam com P.

7. (1.5) Quantas são as soluções inteiras e não negativas (≥ 0) da equação: $x + y + z + w = 15$ com $x \geq 1$ e $z \geq 3$? Justifique.

   Resposta: Sabemos determinar o número de soluções inteiras não negativas para equações deste tipo quando todas as variáveis da equação são não negativas. Então, neste caso, temos que fazer uma mudança de variáveis para obtermos uma equação equivalente a

   $$x + y + z + w = 15 \quad (I)$$

   apenas com variáveis não negativas.

   Sejam

   $a = x - 1 \quad \rightarrow x = a + 1$

   $b = z - 3 \quad \rightarrow z = b + 3$

   Observe que $y, w \geq 0$ e como $a, b \geq 0$ podemos reescrever (I) da seguinte forma:

   $$a + 1 + y + b + 3 + w = 15$$
   $$a + y + b + w = 15 - 4$$

   Logo, temos a seguinte equação com variáveis não negativas:

   $$a + y + b + w = 11 \;\; (II)$$

   A equação (II) é equivalente a equação (I) e possui

   $$CR_4^{11} = C_{11+4-1}^{11} = C_{14}^{11} = \frac{14!}{3!11!} = 364$$

   soluções inteiras não negativas.

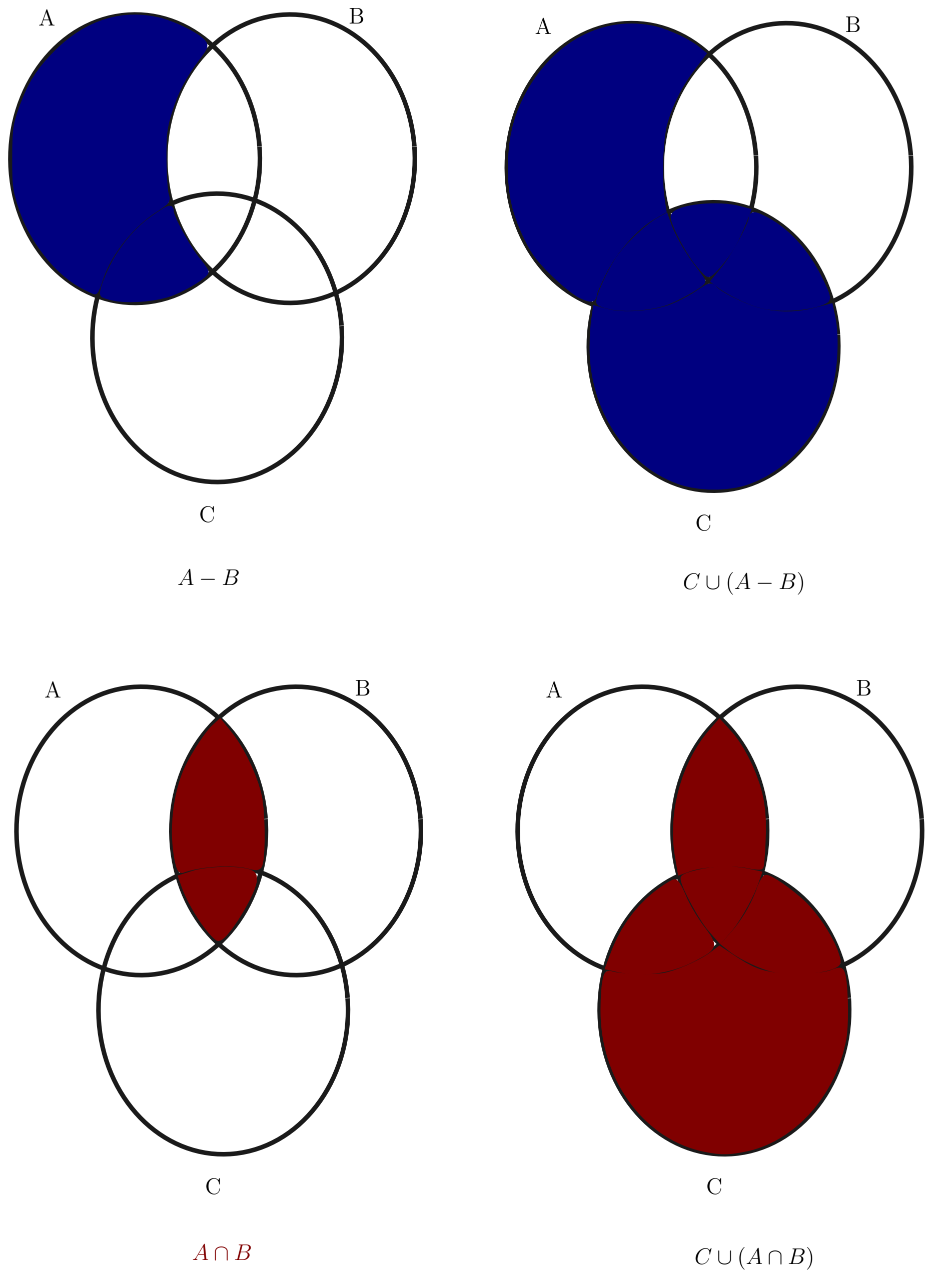

Figura 1: Claramente $C \cup (A - B)$ tem elementos que não pertencem a $C \cup (A \cap B)$. Consequentemente, $C \cup (A - B) \nsubseteq C \cup (A \cap B)$.