Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AP3 - Primeiro Semestre de 2014

Nome -
Assinatura -

Observações:

1. Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular. Se necessário deixe o resultado indicado, como um produto ou quociente ou potência de números inteiros ou fatoriais.
2. Resultado sem indicação de como foi obtido, não será considerado.
3. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.
4. Você pode usar lápis para responder as questões.
5. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.
6. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

Questões:

1. (1,5) Mostre usando indução matemática que:

$$2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$$

para todo número natural.

Resposta: Seja $P(n) : 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$ para $n \in \mathbb{N}$.

BASE DA INDUÇÃO: $n = 1$.

Como $2^1 = 2$ e $2^{1+1} - 2 = 2$ temos que $P(1)$ é verdadeira.

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Vamos supor que $P(k) : 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 2$ seja verdadeira, para $k \in \mathbb{N}$.

PASSO INDUTIVO: Vamos provar que se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1) : 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 2$ também é verdadeira:

$$\underbrace{2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^k}_{\text{H.I.}} + 2^{k+1} =$$

$$2^{k+1} - 2 + 2^{k+1}$$

$$2 \times 2^{k+1} - 2$$

$$2^{k+2} - 2$$

Assim, acabamos de mostrar, pelo PIM, que

$$P(n) : 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$$

é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. (1,5) De quantas maneiras diferentes você pode sentar uma turma de 19 alunos em uma fila, sendo 11 homens e 8 mulheres, se os alunos Ana e João nunca sentam juntos? Justifique.

Resposta:

PRIMEIRO RACIOCÍNIO: Vamos posicionar o restante dos alunos e em seguida posicionamos Ana e João entre os alunos já posicionados.

Para posicionar os 17 alunos restantes, temos 17! possibilidades. Agora vamos escolher 2 espaços entre alunos já posicionados para posicionar Ana e João. Isso garantirá que os dois não ficarão juntos. Note que temos 18 espaços, dos quais queremos selecionar 2 e posicionar Ana e João. Podemos fazer isso de $A^2_{18} = \frac{18!}{16!} = 18 \times 17$ formas. Assim, podemos formar a tal fila de $17! \times 18 \times 17 = 18! \times 17$ formas.

SEGUNDO RACIOCÍNIO: Vamos usar a noção de complemento. Como Ana e João não podem ficar juntos, vamos calcular de quantas maneiras podemos formar uma fila qualquer com 19 pessoas e subtrair desse resultado os casos em que Ana e João estão juntos.

Para formar uma fila com 19 pessoas, temos 19! formas.

Agora, para calcular o caso quando Ana e João estão sempre juntos, vamos pensar que Ana e João são uma única pessoa. Assim, teremos que formar uma fila com 18 pessoas. Para tal temos 18! maneiras. Entretanto temos que permutar Ana e João, o que podemos fazer de 2 maneiras. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, temos $2 \times 18!$ formas de posicionar as 19 pessoas na fila com Ana e João juntos.

Usando a noção de complemento temos $19! - 2 \times 18! = 19 \times 18! - 2 \times 18! = 18!(19-2) = 18! \times 17$ maneiras de formar a fila com Ana e João separados.

3. (1,5) Quantas soluções distintas, não negativas, existem para :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15$$

se $x_2 \geq 3$? Justifique

Resposta: Como a variável x_2 é maior ou igual a 3, precisamos reescrevê-la em função de uma variável não negativa. Seja $x_2 = x' + 3$. Note que, como $x_2 \geq 3$, $x' \geq 0$. Fazendo a substituição na inequação de x_2 por $x' + 3$ temos:

$$x_1 + x' + 3 + x_3 + x_4 \leq 15$$

$$x_1 + x' + x_3 + x_4 \leq 12$$

Para transformar esta inequação em uma equação, vamos acrescentar uma variável f de folga. Esta variável tem o papel de completar o valor que a expressão à esquerda assume de modo a igualá-lo ao resultado da direita da inequação. Então, se, por exemplo, $x_1 + x' + x_3 + x_4 = 12$, f assume o valor 0. Se $x_1 + x' + x_3 + x_4 = 11$, então f assume o valor 1 e assim sucessivamente. Note que o maior valor que f pode assumir é 12. Assim, estamos acrescentando à inequação a variável $f \geq 0$ de modo a obter a seguinte equação com variáveis inteiras e não-negativas:

$$x_1 + x' + x_3 + x_4 + f = 12$$

Logo, o número de soluções inteiras não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15$ com $x_2 \geq 3$ corresponde ao número de soluções inteiras não negativas da equação acima, que podemos obter utilizando o conceito de *Combinações com repetição*. Portanto, temos $CR_5^{12} = C_{16}^{12} = \dfrac{16!}{12!4!} =$ 1820 soluções inteiras e não-negativas para a inequação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15$, sendo $x_2 \geq 3$.

4. (1,0) Determine o termo independente no desenvolvimento de

$$(\frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{1}{x^2})^{50}$$

Justifique a resposta.

Resposta: A fórmula para o termo geral do desenvolvimento do Binômio de Newton de $(a+b)^n$ é dada por: $T_{k+1} = C_n^k \; a^{n-k} \; b^k$, para $k = 0, 1, \cdots, n$. Neste caso temos $n = 50$, $a = \frac{\sqrt{x}}{3} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{3}$ e $b = x^{-2}$.

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= C_{50}^k \; (\tfrac{x^{\frac{1}{2}}}{3})^{50-k} \; (x^{-2})^k \\ &= C_{50}^k (\tfrac{1}{3})^{50-k} x^{25-\frac{k}{2}} x^{-2k} \\ &= C_{50}^k (\tfrac{1}{3})^{50-k} x^{25-\frac{5k}{2}} \end{aligned}$$

Como queremos o coeficiente de x^0, temos:

$$25 - \frac{5k}{2} = 0$$

$$5k = 50$$

Logo, $k = 10$.

Portanto, $T_{11} = \frac{50!}{10!40!}(\frac{1}{3})^{40}x^0$.

5. (4,5) As perguntas seguintes são sobre grafos. Responda cada uma delas **justificando**.

   (a) Seja G um grafo 5-regular (isto é, regular de grau 5). Se G tem 10 vértices, calcule o seu número de arestas.

   Resposta: Pelo Teorema do Aperto de Mãos, temos:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

   Como G é 5-regular temos:

$$5 \times 10 = 2m$$

$$50 = 2m$$

   Logo $m = 25$.

   (b) Seja F uma floresta com 3 componentes conexos T_1, T_2 e T_3. Sabendo que $E(T_1) = 5$, $E(T_2) = 11$ e $E(T_3) = 8$, determine o número de vértices de F.

   Resposta: Se F é floresta, então todos os seus componentes conexos são árvores. Uma árvore com n vértices tem $m = n - 1$ arestas. Assim,

$$5 = n_1 - 1 \rightarrow n_1 = 6$$

$$11 = n_2 - 1 \rightarrow n_2 = 12$$

$$8 = n_3 - 1 \rightarrow n_3 = 9,$$

   onde n_1, n_2, n_3 dnotam a quantidade de vértices de T_1, T_2, T_3 respectivamente. Portanto, F tem $n = n_1 + n_2 + n_3 = 27$ vértices.

(c) Enuncie a condição necessária e suficiente para um grafo ser euleriano. O grafo bipartido completo $K_{4,2}$ é euleriano?

Resposta: O teorema de Euler caracteriza os grafos Eulerianos da seguinte forma: Um grafo G é Euleriano se e somente se todo vértice de G tem grau par.
Observe a Figura 1. Note que no grafo $K_{4,2}$ os vértices ou têm grau 4, ou têm grau 2. Portanto, o $K_{4,2}$ é Euleriano.

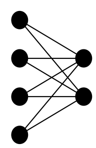

Figura 1: Grafo $K_{4,2}$.

(d) Se G tem n vértices, $n \geq 3$ e é hamiltoniano então $d(v) \geq \frac{n}{2}$. A afirmativa é verdadeira ou falsa?

Resposta: Falsa. Observe o contra-exemplo da Figura 2. Temos um ciclo hamiltoniano (o próprio grafo) de 6 vértices e cada vértice tem grau $2 < \frac{6}{2}$.

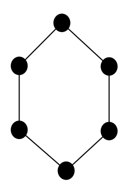

Figura 2: C_6 é hamiltoniano, mas não satisfaz a condição descrita.

(e) Se G é um grafo planar com 14 vértices e 20 arestas, calcule quantas faces G possui.

Resposta: Pelo teorema de Euler para grafos planares temos que em um grafo planar $f = m - n + 2$, onde f, m, n denotam respectivamente os números de faces, arestas e vértices do grafo. Assim, G possui $f = 20 - 14 + 2 = 8$ faces.