Gabarito da AP1 - Segundo Semestre de 2016

Questões:

1. (1.5) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

   (a) $\emptyset \nsubseteq \{0, -1, 2\}$

   Resposta: Falso, pois $\emptyset \subseteq A$, uma vez que $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto. O correto então seria $\emptyset \subseteq \{0, -1, 2\}$

   (b) $(A \cap B) \cup \bar{B} = A \cup \bar{B}$, sendo A e B conjuntos quaisquer e $\bar{B}$ o complemento de B.

   Resposta: Verdadeiro.

$(A \cap B) \cup \bar{B} =$	Propriedade distributiva
$= (A \cup \bar{B}) \cap (B \cup \bar{B}) =$	$B \cup \bar{B} = U$
$= (A \cup \bar{B}) \cap U =$	$A \cap U = A$
$= (A \cup \bar{B})$	

   Observe o seguinte diagrama de Venn que ilustra a prova:

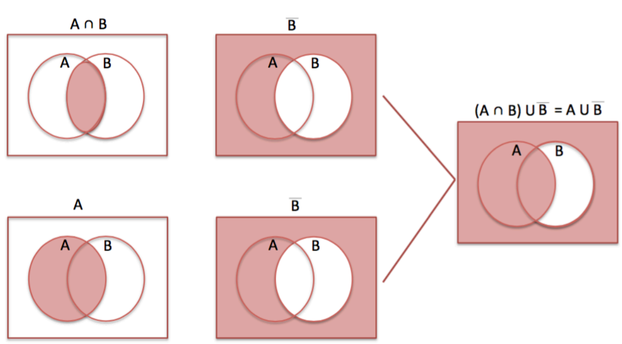

Figura 1: Grafo bipartido G

(c) $n(A) < n(A - B) + n(A \cap B)$, sendo A e B conjuntos quaisquer. Observe que $A = (A - B) \cup (A \cap B)$.

Resposta: Falso. Como contra-exemplo, podemos tomar quaisquer dois conjuntos A e B disjuntos, como por exemplo, $A = \{0\}, B = \{0, 1\}$. Note que $A \cap B = \{0\}$ e $(A - B) = \emptyset$. Sendo assim, $n(A) = n(A \cap B) = 1$ e $n(A - B) = 0$, ou seja, $n(A) = 1 = 0 + 1 = n(A - B) + n(A \cap B)$, contradizendo a afirmação.

O correto seria $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$ dado que $A - B$ e $A \cap B$ são conjuntos disjuntos.

2. (1.5) Mostre por indução matemática que:

$$2^2 - 3^2 + 4^2 - \cdots + (-1)^n\ n^2 = \frac{(-1)^n\ n(n+1)}{2} + 1 \quad \text{para todo natural} \quad n \geq 2.$$

Resposta: Seja $P(k) = 2^2 - 3^2 + 4^2 - \ldots + (-1)^k k^2 = \frac{(-1)^k\ k(k+1)}{2} + 1$.

Base da Indução: Fazendo $k = 2$ temos que $2^2 = 4$ e $\frac{(-1)^2 2(2+1)}{2} = \frac{(-1)^2\ 2.3}{2} + 1 = 3 + 1 = 4$, logo $P(2)$ é verdadeira.

Hipótese de Indução (H.I.): Suponha que $P(k)$ é verdadeiro, isto é,

$$2^2 - 3^2 + 4^2 - \ldots + (-1)^k k^2 = \frac{(-1)^k\ k(k+1)}{2} + 1.$$

Passo Indutivo: Vamos provar que se $P(k)$ é verdadeiro então $P(k+1)$ é verdadeiro, ou seja,

$$2^2 - 3^2 + 4^2 - \ldots + (-1)^{k+1}(k+1)^2 = \frac{(-1)^{k+1}\ (k+1)(k+2)}{2} + 1.$$

Desenvolvendo, temos:

$$\underbrace{2^2 - 3^2 + 4^2 - \cdots + (-1)^k (k)^2}_{\text{Aplicando a H.I. :}} + (-1)^{k+1}(k+1)^2 =$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{(-1)^k (k)(k+1)}{2} + 1 + (-1)^{k+1}(k+1)^2 \\
&= (-1)^k (k+1)[\tfrac{k}{2} + (-1)(k+1)] + 1 \\
&= (-1)^k (k+1)[\tfrac{k - 2(k+1)}{2}] + 1 \\
&= (-1)^k (k+1)\tfrac{(-k-2)}{2} + 1 \\
&= (-1)^k (k+1)\tfrac{(-1)(k+2)}{2} + 1 \\
&= \tfrac{(-1)^{k+1}(k+1)(k+2)}{2} + 1
\end{aligned}
$$

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, temos que $P(k) = 2^2 - 3^2 + 4^2 - \ldots + (-1)^{k+1}k^2 = \frac{(-1)^k\, k(k+1)}{2} + 1$ é verdadeiro para todo $k \in \mathbb{N}$.

3. (2.0) De quantos maneiras um grupo de atletas de 20 pessoas pode ser dividido em:

   (a) um grupo de 10 pessoas, um de 06 pessoas e um grupo de 04 pessoas? Justifique.

   Resposta: Como queremos montar 3 grupos, a ordem das escolhas dentro de cada grupo, não é importante. Para escolher os elementos do primeiro grupo, temos $C_{20}^{10} = \frac{20!}{10!10!}$. Já para o segundo grupo, temos $C_{10}^{6} = \frac{10!}{6!4!}$. Escolhido os dois primeiros grupos, com o terceiro com 04 elementos fica automaticamente determinado, uma vez que restam apenas 04 elementos. Assim, pelo Princípio Multiplicativo temos $\frac{20!}{10!10!} \times \frac{10!}{6!4!} \times 1$ maneiras de distribuir 20 pessoas em um grupo de 10 pessoas, um de 06 pessoas e um grupo de 04 pessoas.

   (b) 2 grupos de 10 pessoas cada? Justifique.

   Resposta: Novamente a ordem de escolha no interior dos grupos é irrelevante. Assim, para escolher o primeiro grupo, temos $C_{20}^{10} = \frac{20!}{10!10!}$ formas. Escolhido o primeiro grupo, o segundo fica definido automaticamente. Logo, pelo Princípio Multiplicativo teríamos $C_{20}^{10} \times 1$ formas de escolher os 2 grupos. Entretanto, os dois grupos têm o mesmo número de elementos, o que gera algumas repetições no momento em que utilizamos o Princípio Multiplicativo. Sendo assim, precisamos simplificar este resultado, removendo as possíveis permutações dos grupos, que neste caso são 2!. Portanto, temos $\frac{C_{20}^{10} \times 1}{2!}$ maneiras de distribuir 20 pessoas em 2 grupos de 10 pessoas.

4. (1.8) Quantos números naturais de 3 algarismos podem ser formados se:

   (a) os algarismos devem ser todos diferentes? Justifique.

   Resposta: Queremos formar números naturais com 3 algarismos em que os algarismos devem ser todos diferentes. Temos que a primeira posição não pode ser ocupada pelo algarismo 0. Portanto, temos 9 algarismos que podem ocupá-la. A segunda posição pode ser ocupada por um dos 9 algarismos restantes e a terceira posição, 8 algarismos, já que os algarismos que formam o número devem ser diferentes. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, temos $9\times9\times8 = 648$ números com três algarismos formados com os algarismos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, e 9 em que todos os algarismos devem ser diferentes.

(b) os algarismos podem estar repetidos? Justifique.

Resposta: Queremos formar números naturais com 3 algarismos, podendo haver repetição, logo a única restrição é que a primeira posição não pode ser ocupada pelo algarismo 0. Portanto, temos 9 algarismos que podem ocupá-la. Cada uma das outras 2 posições podem ser ocupadas por um dos 10 algarismos possíveis. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, temos $9\times10\times10 = 900$ números com três algarismos formados com os algarismos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, e 9.

5. (1.7) Considere a palavra **P E R S I S T E N T E**.

(a) Quantos anagramas podem ser formados a partir de suas letras? Justifique.

Resposta: A palavra **P E R S I S T E N T E** possui 3 E's, 2 T's, 2 S's, 1 P, 1 R, 1 I e 1 N, totalizando 11 letras. Para calcular o número de anagramas desta palavra, basta permutar suas letras levando em conta as repetições. Portanto, temos $P_{11}^{3,2,2,1,1,1,1} = \frac{11!}{3!2!2!}$ anagramas da palavra **P E R S I S T E N T E**.

(b) Quantos são os anagramas que começam com vogal? Justifique.

Resposta: A palavra **P E R S I S T E N T E** possui 3 E's, 2 T's, 2 S's, 1 P, 1 R, 1 I e 1 N, sendo que temos 2 vogais, a letra E e a letra I. Para calcular o número de anagramas que começam com vogal devemos analisar dois casos:

(i) o anagrama começa com a vogal E: para este anagrama, temos que permutar as letras restantes (2 E's, 2 T's, 2 S's, 1 P, 1 R, 1 I e 1 N), assim temos $P_{10}^{2,2,2,1,1,1,1} = \frac{10!}{2!2!2!}$ anagramas da palavra **P E R S I S T E N T E** começando com a vogal E.

(ii) o anagrama começa com a vogal I: para este anagrama, temos que permutar as letras restantes (3 E's, 2 T's, 2 S's, 1 P, 1 R e 1

N), assim temos $P_{10}^{3,2,2,1,1,1} = \frac{10!}{3!2!2!}$ anagramas da palavra **P E R S I S T E N T E** começando com a vogal I.

Pelo princípio aditivo, temos $P_{10}^{2,2,2,1,1,1,1} + P_{10}^{3,2,2,1,1,1} = \frac{10!}{2!2!2!} + \frac{10!}{3!2!2!}$ anagramas que começam com vogal.

6. (1.5) Quantas soluções inteiras não negativas tem a equação: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ com $x_2 \geq 3$? Justifique.

   Resposta: Como $x_2 \geq 3$, definimos

   $$a = x_2 - 3$$

   .

   A variável a é inteira e não negativa e podemos re-escrever x_2 como:

   $$x_2 = a + 3.$$

   Substituindo esses valores na equação, temos:

   $$x_1 + (a + 3) + x_3 + x_4 = 15,$$

   onde $x_1, a, x_3, x_4 \geq 0$.

   Logo,

   $$x_1 + a + x_3 + x_4 = 12,$$

   onde $a, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

   Para obtermos o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ com $x_2 \geq 3$, basta resolvermos a equação

   $$x_1 + a + x_3 + x_4 = 12,$$

   com $x_1, a, x_3, x_4 \geq 0$.

   A solução de tal equação é dada por: $CR_4^{12} = C_{4+12-1}^{12} = C_{15}^{12} = \frac{15!}{12!3!} = 455$.

   Portanto, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ com $x_2 \geq 3$ tem 455 soluções inteiras e não negativas.