# Gabarito da AP1 - Fundamentos de Algoritmos para Computação

AP1 - Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

**Questões:**

1. (1.5) Justifique a seguinte igualdade usando as propriedades de conjuntos:

$$\overline{(\overline{A} \cup B)} - C = A \cap \overline{(B \cup C)}$$

*Resposta:*

$$\begin{array}{lcll}
 & & \overline{(\overline{A} \cup B)} - C & = \\
\text{(lei de Morgan)} & = & (\overline{(\overline{A})} \cap \overline{B}) - C & = \\
\text{(propriedade } \overline{(\overline{A})} = A\text{)} & = & (A \cap \overline{B}) - C & = \\
\text{(propriedade da diferença)} & = & (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} & = \\
\text{(propriedade associativa)} & = & A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) & = \\
\text{(lei de Morgan)} & = & A \cap \overline{(B \cup C)} &
\end{array}$$

2. (1.0) Em um grupo de 15 pessoas, 11 gostam de cinema e 7 gostam de teatro. Quantas pessoas gostam simultaneamente de cinema e teatro. Justifique a resposta.

*Resposta:* Considere U = {x / x é um elemento de um grupo de pessoas} tal que $n(U) = 15$. Sejam A = $\{x \in U$ / x é uma pessoa que gosta de cinema} e B = $\{x \in U$ / x é uma pessoa que gosta de teatro}, então $n(A) = 11$ e $n(B) = 7$.

Pelo princípio da inclusão e exclusão, temos:

$$n(U) = n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 15 = 11 + 7 - n(A \cap B) \Rightarrow$$
$$n(A \cap B) = 18 - 15 \Rightarrow n(A \cap B) = 3$$

3. (2.0) Mostre usando indução matemática:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

*Resposta:*

Seja $P(n) : \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, para $n \in \mathbb{N}$

Prova por indução:

Base da indução:

Para $n = 1$ temos $P(1) : \sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$ é verdadeira.

Hipótese indutiva:

Suponha verdadeira para $n = k$, isto é:

$$P(k) : \sum_{i=1}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} \quad \textit{é verdadeira}$$

Vamos mostrar que se é verdadeira para $k$ então é verdadeira para $k + 1$.

Devemos provar que:

$$P(k+1) : \sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \quad \textit{é verdadeira}$$

Desenvolvendo para $n = k + 1$ e usando a hipótese indutiva, temos que:

$$\begin{array}{lcll}
\sum_{i=1}^{k+1} i^3 & = & \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3 & = \\
\textit{Hipótese Indutiva} & = & \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 & = \\
 & = & \frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4} & = \\
 & = & \frac{(k+1)^2[k^2+4(k+1)]}{4} & = \\
 & = & \frac{(k+1)^2[k^2+4k+4]}{4} & = \\
 & = & \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} & =
\end{array}$$

Logo, $P(k + 1)$ é verdadeira, portanto pelo princípio de indução temos que $P(n)$ é verdadeiro, para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. (1.5) De quantos modos é possível dividir 18 pessoas em 3 grupos de 6. Justifique:

   *Resposta:* Escolha 6 das 18 pessoas para formar um grupo, o que pode ser feito de $C_{18}^6$ modos. Fixado 1 grupo de 6 pessoas, para formar o segundo grupo temos $C_{12}^6$ modos diferentes de escolher. E fixados 6 pessoas de um grupo e 6 do outro, fica automaticamente definido as pessoas do último grupo. Se fizermos distinção entre os grupos (primeiro, segundo e terceiro) teríamos, pelo princípio multiplicativo, $C_{18}^6.C_{12}^6.C_6^6$ modos diferentes. Mas como não há distinção entre os grupos então estaríamos repetindo cada ordenação $P_3 = 3!$ vezes. Logos, temos $\frac{C_{18}^6.C_{12}^6.C_6^6}{3!}$ modos diferentes de dividir 18 pessoas em 3 grupos de 6.

5. (2.0) Quantos são as soluções inteiras e não negativas da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25, \quad \text{onde } x_1 > 2,\ x_2 \geq 3,\ x_4, x_5 \geq 7.$$

*Resposta:* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25$, onde $x_1 > 2$, $x_2 \geq 3$, $x_4, x_5 \geq 7$, isto é, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25$, onde $x_1, x_2 \geq 3$, $x_4, x_5 \geq 7$.

Substituindo $x_1$, $x_2$, $x_4$, $x_5$ por $y_1 = x_1 - 3$, $y_2 = x_2 - 3$, $y_4 = x_4 - 7$, $y_5 = x_5 - 7$, ou seja, $x_1 = y_1 + 3$, $x_2 = y_2 + 3$, $x_4 = y_4 + 7$, $x_5 = y_5 + 7$, então a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25$ é equivalente a: $y_1 + 3 + y_2 + 3 + x_3 + y_4 + 7 + y_5 + 7 = 25$, com $x_3 \geq 0$ e $y_i \geq 0$, para $i = 1, 2, 4, 5$, ou seja, $y_1 + y_2 + x_3 + y_4 + y_5 = 5$, com $x_3 \geq 0$ e $y_i \geq 0$, para $i = 1, 2, 4, 5$.

As soluções inteiras não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25$, onde $x_1, x_2 \geq 3$, $x_4, x_5 \geq 7$, são as soluções inteiras não negativas de $y_1 + y_2 + x_3 + y_4 + y_5 = 5$, onde $x_3 \geq 0$ e $y_i \geq 0$, para $i = 1, 2, 4, 5$, que corresponde a $CR_5^5 = C_{5+5-1}^5 = C_9^5 = \frac{9!}{5!4!} = 126$.

6. (2.0) Considere a palavra ESPECIALIDADE:

   (a) Quantos são seus anagramas.

   *Resposta:* Esta questão corresponde a um problema de permutação com repetição. Como temos 3 letras $E$, 2 letras $I$, 2 letras $A$, 2 letras $D$, 1 letra $S$, 1 letra $P$, 1 letra $C$, 1 letra $L$, então temos $P_{13}^{3,2,2,2,1,1,1,1} = \frac{13!}{3!2!2!2!1!1!1!1!} = 129.729.600$.

   (b) Quantos são os anagramas que começam com vogal.

   *Resposta:* Os anagramas podem começar com $E$, $I$ ou $A$, então temos $P_{12}^{2,2,2,2,1,1,1,1}$ começados com a letra $E$, temos $P_{12}^{3,2,2,1,1,1,1,1}$ começados com a letra $I$ e temos $P_{12}^{3,2,2,1,1,1,1,1}$ começados com a letra $A$. Portanto pelo princípio aditivo, temos $P_{12}^{2,2,2,2,1,1,1,1} + P_{12}^{3,2,2,1,1,1,1,1} + P_{12}^{3,2,2,1,1,1,1,1} = P_{12}^{2,2,2,2,1,1,1,1} + 2.P_{12}^{3,2,2,1,1,1,1,1} = 69.854.400$.