Gabarito da AP1 - Fundamentos de Algoritmos para Computação - 2008/1

1. (2.0) Seja A um conjunto com um número finito de elementos sendo $P(A)$ o conjunto das partes de A. Sejam B e C dois conjuntos arbitrários. Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique:

   (a) $\{\emptyset\} \subset P(A)$

   Resposta: Verdadeira.
   Como $\emptyset \subset A$, resulta que $\emptyset \in P(A)$, portanto, $\{\emptyset\} \subset P(A)$.

   (b) $A \notin P(A)$

   Resposta: Falsa.
   $A \in P(A)$, porque o conjunto A é uma parte de A, ou seja, $A \subset A$.

   (c) $C \cap B \subset C - B$

   Resposta: Falsa.
   Seja $B = \{1, 2\}$ e $C = \{2, 3, 4\}$ e $B \cap C = \{2\}$ e $C - B = \{3, 4\}$. Logo, $C \cap B \not\subset C - B$

2. (1.5) Mostre por indução matemática que:

$$\frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)!}$$

para todo natural $n \geq 2$.

Resposta:

Seja

$$P(n) : \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)!}, \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2$$

Base da indução:

Para $n = 2$, tem-se

$$\frac{2}{(2+1)!} = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3} \text{ e}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{3}.$$

Logo $P(2)$ é verdadeira.

Hipótese de Indução:

Suponha verdadeiro para $k \geq 2$, isto é, $P(k)$ é verdadeira:

$$P(k) : \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(k+1)!}$$

Passo da Indução:

Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeiro então $P(k+1)$ é verdadeiro, isto é, temos que provar que:

$$P(k+1): \frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{k}{(k+1)!}+\frac{k+1}{(k+1+1)!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{(k+1+1)!}$$

é verdadeira.

De fato,

$$\underbrace{\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{k}{(k+1)!}}_{HI}+\frac{k+1}{(k+2)!}=\underbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{(k+1)!}}_{HI}+\frac{k+1}{(k+2)!}$$

Mas,

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{(k+1)!}+\frac{k+1}{(k+2)!}=\frac{1}{2}+\frac{(-(k+2)+(k+1))}{(k+2)!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{(k+2)!}$$

O que mostra que a afirmação

$$\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)!}$$

é verdadeira para todo natural $n \geq 2$.

3. (1.5) Dentre os números de 1 a 1111 inclusive, quantos são divisíveis por 2 ou por 11? Justifique.

Resposta:

Sejam

$$A=\{x \in \mathbb{N}\,; 1 \leq x \leq 1111, x \text{ é divisível por } 2\} \text{ e}$$
$$B=\{x \in \mathbb{N}\,; 1 \leq x \leq 1111, x \text{ é divisível por } 11\}.$$

Então a quantidade de números inteiros dentre 1 a 1111, inclusive, que são divisíveis por 2 ou por 11 corresponde a $n(A \cup B)$. Então, pelo princípio de inclusão e exclusão tem-se $n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$.

Cálculo de $n(A)$:

$$A=\{x \in \mathbb{N}\,;\ x=2k,\ 1 \leq 2k \leq 111, k \in \mathbb{N}\}$$

$$=\{2k;\ \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1111}{2},\ k \in \mathbb{N}\}$$

$$\{2 \cdot 1, 2 \cdot 2, \cdots, 2 \cdot 555\}.$$

Logo, $n(A)=555$.

Cálculo de $n(B)$:

Usando o mesmo raciocínio, temos que:

$$B = \{11k \; ; \; \frac{1}{11} \leq k \leq \frac{1111}{11}, \; k \in \mathbb{N}\}$$
$$B = \{11 \cdot 1, 11 \cdot 2, \cdots, 11 \cdot 100\}.$$

Portanto, $n(B) = 101$.

Cálculo de $n(A \cap B)$:

Analogamente, temos que:

$$A \cap B = \{x = 2 \cdot 11 \cdot k \; ; 1 \leq 2 \cdot 11 \cdot k \leq 1111, k \in \mathbb{N}\}$$
$$= \{x = 22k; \frac{1}{22} \leq k \leq \frac{1111}{22} = \frac{101}{2}, k \in \mathbb{N}\}$$

Então, $n(A \cap B) = 50$.

Logo resulta que,

$$n(A \cup B) = 555 + 101 - 50 = 606$$

4. (1.5) João comprou 14 livros diferentes sendo 4 sobre Física, 7 sobre Programação e 3 sobre Matemática. De quantas maneiras esses livros podem ser dispostos em uma prateleira de modo que livros do mesmo tema fiquem juntos? Justifique.

   Resposta: Queremos arrumar 14 livros diferentes em uma prateleira, sendo que os livros do mesmo tipo devem permanecer juntos.

   - Para os 4 livros diferentes de Física, temos 4! formas de arrumá-los;
   - Para os 7 livros diferentes de Programação, temos 7! formas de arrumá-los e
   - Para os 3 livros diferentes de Matemática, temos 3! formas de arrumá-los.

   Como devemos arrumar esses livros em blocos, cada bloco contendo o mesmo tipo de livro, podemos então arrumar os blocos de livro de 3! maneiras na prateleira.

   Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $3! \times 4! \times 7! \times 3!$ maneiras de arrumar os livros na prateleira.

5. (1.5) Considere as letras da palavra PROBABILIDADE.

   (a) Quantos anagramas podem ser formados? Justifique.

   Resposta: A palavra PROBABILIDADE tem 13 letras, sendo 1 P, 1 R, 1 O, 2 B, 2 A, 2 I, 1 L, 2 D e 1 E, logo a resposta é

$$P_{13}^{1,1,1,2,2,2,1,2,1} = \frac{13!}{1!1!1!2!2!2!1!2!1!} \text{ anagramas}$$

(b) Em quantos anagramas as consoantes estão todas consecutivas? Justifique.

Resposta: Para formar os anagramas da palavra PROBABILIDADE em que as consoantes são todas consecutivas, vamos considerar o bloco em que as consoantes estão todas juntas como sendo uma única letra, então, temos uma palavra com 7 letras sendo 6 vogais, onde as letras A e I se repetem 2 vezes. Temos então

$$P_7^{1,1,2,2,1} = \frac{7!}{1!1!2!1!2!} = 1260.$$

Agora precisamos levar em conta também o número de maneiras em que o bloco das consoantes pode ser arrumado. Esse bloco, onde temos as letras B e D, cada uma repetida duas vezes, pode ser arrumado de

$$P_7^{1,1,2,1,2} = \frac{7!}{1!1!2!1!2!} = 1260 \text{ maneiras.}$$

Pelo Princípio Multiplicativo, temos

$$P_7^{1,1,2,1,2} \cdot P_7^{1,1,2,2,1} = 1260^2$$

anagramas em que as consoantes estão todas consecutivas.

6. (2.0) Uma mercearia produz 7 tipos de pães. Supondo que ela vai doar 1 cesta de 20 pães para uma creche, quantos tipos de cestas são possíveis:

(a) Se a cesta pode ser constituída de quaisquer tipo de pães? Justifique.

Resposta: Para montar uma cesta com 20 pães, devemos escolher as quantidades de pães dentre os 7 produzidos pela mercearia: x_1 quantidades de pães do tipo 1, x_2 quantidades de pães do tipo 2, $\cdots$, x_7 quantidades de pães do tipo 7. Onde essas quantidades $x_1, x_2, \cdots, x_7$ são inteiros não-negativos. Portanto, o número de cestas possíveis é o número de soluções inteiras não-negativas da equação que é dada por:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 20, \;\; x_i \geq 0 \text{ e } i = 1, \cdots, 7.$$

Logo,

$$CR_7^{20} = C_{26}^{20} = \frac{26!}{6!20!}.$$

(b) Se a cesta deve ter pelo menos 1 pão de cada tipo? Justifique.

Resposta: Neste caso, temos a restrição de que em cada cesta devemos ter um pão de cada tipo, ou seja, $x_i \geq 1;\; i = 1, \cdots, 7$. Logo, queremos encontrar a soluções inteiras não-negativas para a equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 20$ $x_i \geq 1$, $i = 1, \cdots, 7$.

Para isso, basta fazermos a mudança de variável $x_i = x_i' + 1$, onde $x_i' \geq 1$. Desta forma vamos encontrar soluções inteiras não-negativas para a equação

$$(x_1' + 1) + (x_2' + 1) + \cdots + (x_7' + 1) = 20,$$

que é equivalente a $x_1' + x_2' + \cdots + x_7' = 20 - 7 = 13$, onde $x_i' \geq 0$, $i = 1, \cdots, 7$. Logo, a solução é

$$CR_7^{13} = C_{19}^{13} = \frac{19!}{6!13!}.$$