Gabarito da AP2 - Primeiro semestre 2007

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Questões:

1. (1.5) Determine o coeficiente de x^{15} no desenvolvimento de $(\frac{3}{x^2} - 2x^3)^{100}$. Justifique a resposta.

   Resposta:

   Os termos do desenvolvimento deste binômio são da forma $C_{100}^{k}(\frac{3}{x^2})^{100-k}(-2x^3)^k$, Portanto:

$$\begin{aligned} C_{100}^{k}(\tfrac{3}{x^2})^{100-k}(-2x^3)^k &= C_{100}^{k}(3^{(100-k)}x^{(2k-200)})((-2)^k x^{3k}) = \\ &= C_{100}^{k}3^{(100-k)}(-2)^k x^{(5k-200)} \end{aligned}$$

   Como o expoente de x deve ser 15, então $15 = 5k - 200$, logo $k = 43$.

   Portanto, o coeficiente de x^{15} é:

$$C_{100}^{43}3^{(100-43)}(-2)^{43} = -C_{100}^{43}3^{57}2^{43}$$

2. (1.5) Usando o Teorema das Diagonais mostre que:

$$\frac{1}{6!}(6! + 7! + \frac{8!}{2!} + \frac{9!}{3!} + ... + \frac{16!}{10!}) = \frac{17!}{10!7!}$$

   Resposta:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{6!}(6! + 7! + \tfrac{8!}{2!} + \tfrac{9!}{3!} + ... + \tfrac{16!}{10!}) &= \\ &= \tfrac{6!}{6!0!} + \tfrac{7!}{6!1!} + \tfrac{8!}{6!2!} + ... + \tfrac{16!}{6!10!} \\ &= C_6^0 + C_7^1 + C_8^2 + ... + C_{16}^{10} \\ &=^{T.D.} C_{17}^{10} \\ &= \tfrac{17!}{10!7!} \end{aligned}$$

3. (1.5) Encontre a fórmula fechada da relação de recorrência:
   $a_n = a_{n-1} + 2^n$
   $a_0 = 1$
   Justifique.

   Resposta:

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + 2^n &&= \\
&= \left(a_{n-2} + 2^{(n-1)}\right) + 2^n &&= \\
&= a_{n-2} + \left(2^{(n-1)} + 2^n\right) &&= \\
&= \left(a_{n-3} + 2^{(n-2)}\right) + \left(2^{(n-1)} + 2^n\right) &&= \\
&= a_{n-3} + \left(2^{(n-2)} + 2^{(n-1)} + 2^n\right) &&= \\
&\ \ \vdots \\
&= a_{n-k} + \left(2^{(n-k+1)} + \ldots + 2^{(n-1)} + 2^n\right)
\end{aligned}
$$

Então, para que $k = n$ resulta:

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_0 + (2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n) \\
&= a_0 + 2(2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-1})
\end{aligned}
$$

Usando a condição $a_0 = 1$ e o fato que $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-1}$ são os n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão 2, obtemos:

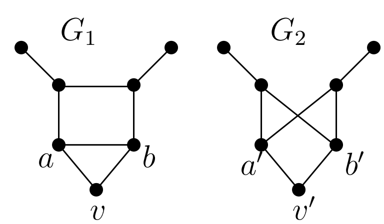
$$a_n = 1 + \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1.$$

4. (4.5) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for falsa, dê um exemplo. Se for verdadeira, prove.

(a) Se dois grafos distintos G_1 e G_2 têm o mesmo número de vértices, o mesmo número de arestas e a mesma seqüência de graus de vértices então eles são isomorfos.

Resposta: **Falso**

Consideremos o seguinte contra-exemplo:



Os grafos G_1 e G_2 têm o mesmo número de vértices: 7, o mesmo número de arestas: 8 e a mesma seqüência de graus de vértices: $(1, 1, 2, 3, 3, 3, 3)$, no entanto não são isomorfos. Concluímos isso pois v é o único vértice de grau 2 em G_1, ele é adjacente aos vértices a e b que são adjacentes entre si. Em G_2, v' é o único vértice de grau 2, no entanto os dois vértices aos quais ele é adjacente, a' e b', não são adjacentes entre si. Portanto, G_1 e G_2 não são isomorfos.

(b) Todo grafo conexo com um número par de vértices é euleriano.

Resposta: **Falso**

O K_4, possui um número par de vértices, mas todos os seus vértices tem grau 3, ímpar. Mas pela caracterização de grafos eulerianos que diz: “Um grafo é euleriano se e somente se todos os seus vértices têm grau par”, concluímos que o K_4 não é euleriano.

(c) Em qualquer grafo, o número de vértices de grau ímpar é par.

Resposta: **Verdadeiro**

Seja $G = (V, E)$ um grafo qualquer, sabemos que $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$ que é um número par. Além disso, podemos decompor o somatório da seguinte forma:

Seja $V_1 = \{v \in V | d(V_1) \text{ é ímpar}\}$ e $V_2 = \{v \in V | d(V_2) \text{ é par}\}$, $V = V_1 \cup V_2$.

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{u \in V_1} d(u) + \sum_{w \in V_2} d(w)$$

Como a soma de números pares é um número par sabemos que

$$\sum_{w \in V_2} d(w)$$

é par. Como $\sum_{v \in V} d(v)$ também é par, concluímos que

$$\sum_{u \in V_1} d(u)$$

também é par, como este somatório representa a soma de números ímpares, se o resultado final é par significa que o total de números presentes no somatório é par. Logo, em qualquer grafo, o número de vértices de grau ímpar é par.

(d) Todo grafo bipartido com um número ímpar de vértices não é hamiltoniano.

Resposta: **Verdadeira**

Seja G um grafo bipartido qualquer com número ímpar de vértices. Suponha que G seja hamiltoniano. Então existe um ciclo hamiltoniano em G, isto é, um ciclo que contém todos os vértices de G. Logo esse ciclo é um ciclo ímpar. Contradição, pois a caracterização de grafos bipartidos diz que: "Um grafo é bipartido se e somente se não possui ciclo ímpar".

(e) Se G é conexo então $|E(G)| \geq |V(G)|$ - 1.

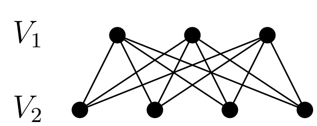
Resposta: **Verdadeira**

Se G é conexo, então G possui uma árvore geradora T onde $V(T) = V(G)$ e $E(T) \subseteq E(G)$. Devido a um teorema sobre árvores, sabemos que $|E(T)| = |V(T)| - 1$. Mas $|E(G)| \geq |E(T)| = |V(T)| - 1$. Logo o resultado segue.

5. (1.5) Considere o grafo $K_{3,4}$ (o grafo bipartido completo, com bipartição (V_1, V_2), onde $|V_1| = 3$ e $|V_2| = 4$).

(a) Determine o centro de $K_{3,4}$. Justifique.

Resposta: Seja $G = (V, E)$ um $K_{3,4}$.



$V(K_{3,4}) = V_1 \cup V_2$. Para $v \in V_1$ temos $e(v) = 2$ e para $v \in V_2$ temos $e(v) = 2$. O centro $c(G)$ de um grafo G é o conjunto dos vértices de G que têm excentridade mínima. Como em $K_{3,4}$ todos os vértices tem excentricidade 2, então $c(K_{3,4}) = V(K_{3,4}) = V_1 \cup V_2$.

(b) O grafo $K_{3,4}$ é planar? Justifique.

Resposta: Não. O $K_{3,4}$ possui como subgrafo o $K_{3,3}$ que não é um grafo planar, isto é, não possui uma representação plana. E como sabemos que se um grafo contém um subgrafo não planar ele também não é planar, então $K_{3,4}$ não é planar.