Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP1 - Primeiro Semestre de 2018 - POLO ROCINHA

Questões:

1. (1.8) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

   (a) $\emptyset \in \{1, 0, -1\}$

   Resposta: A afirmação é FALSA. Para esta afirmação ser verdadeira, $\emptyset$ deveria ser elemento do conjunto $\{1, 0, -1\}$. Desta forma, as seguintes afirmações são válidas:

   - $\emptyset \notin \{1, 0, -1\}$;
   - $\emptyset \subset \{1, 0, -1\}$, pois o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

   (b) $n(B) = n(A \cup B) - n(A)$,

   Resposta: A afirmação é FALSA. Como contra-exemplo, podemos tomar os seguintes conjuntos $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$. Note que $A \cup B = \{0, 1, 2\}$. Sendo assim, $n(A) = n(B) = 2$, $n(A \cup B) - n(A) = 3 - 2 = 1$ e $n(B) = 2$, ou seja, $n(B) \neq n(A \cup B) - n(A)$ contradizendo a afirmação.

   (c) Sejam A e B dois conjuntos tais que $B \subseteq A$.
   Então $n(A - B) = n(A) - n(B)$.

   Resposta: A afirmação é VERDADEIRA. Temos que $A \cup B = (A - B) \cup B$. Como $(A - B) \cap B = \emptyset$ então, pelo Princípio Aditivo, temos $n(A \cup B) = n((A - B) \cup B) = n(A - B) + n(B)$. Por hipótese, temos que $B \subseteq A$, logo $n(A \cup B) = n(A)$. Portanto, $n(A \cup B) = n(A) = n(A - B) + n(B)$, e consequentemente, $n(A - B) = n(A) - n(B)$.

2. (1.5) Mostre por Indução Matemática que:

$$\frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)!}$$

para todo natural $n \geq 2$.

Resposta:

Seja $P(n) : \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)!} \qquad \forall n \geq 2$

Base da indução: Vamos mostrar que $P(2)$ é verdadeira.
Analisando o lado esquerdo quando $n = 2$, temos: $\frac{2}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
E o lado direito nos fornece: $\frac{1}{2} - \frac{1}{(2+1)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3-1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
Logo, $P(2)$ é verdadeira.

Hipótese de indução: Suponha $P(k)$ verdadeira, isto é,

$$\frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(k+1)!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Passo Indutivo: Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeira então $P(k+1) : \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{k+1}{(k+2)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(k+2)!}$ é verdadeira.

$$\begin{aligned}
\tfrac{2}{3!} + \tfrac{3}{4!} + \cdots + \tfrac{k+1}{(k+2)!} &= \underbrace{\frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{k}{(k+1)!}}_{\text{H.I.}} + \tfrac{k+1}{(k+2)!} \\
&= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{(k+1)!} + \tfrac{k+1}{(k+2)!} \\
&= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{(k+1)!} + \tfrac{k+1}{(k+2)(k+1)!} \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{-1(k+2)+k+1}{(k+2)!} \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{-k-2+k+1}{(k+2)!} \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{-1}{(k+2)!} \\
&= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{(k+2)!}
\end{aligned}$$

Logo, pelo princípio da indução matemática,

$$P(n) : \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)!}$$

é verdadeira $\forall n \geq 2$.

3. (1.5) Um comitê de 7 membros deve ser formado a partir de 12 mulheres e de 12 homens. O comitê deve incluir pelo menos 1 mulher e 1 homem. De quantas maneiras esse comitê pode ser formado? Justifique.

   Resposta: Para solucionar esta questão, vamos utilizar o raciocínio do complemento. Note que, formar comitês que deva incluir pelo menos uma mulher e um homem é justamente o contrário de formar comitês com apenas mulheres ou apenas homens no comitê . Consideremos os seguintes conjuntos:

   U: conjunto de todos os comitês contendo 7 membros (é o conjunto universo).
   M: conjunto de comitês contendo 7 membros mulheres.
   H: conjunto de comitês contendo 7 membros homens.
   X: conjunto de comitês contendo 7 membros, sendo que deve incluir pelo menos 1 mulher e 1 homem

   Observemos que devemos calcular $n(X) = n(U) - n(M) - n(H)$.

   PARA ENCONTRAR O $n(U)$, ONDE U : CONJUNTO DE TODOS OS COMITÊS CONTENDO 7 MEMBROS (CONJUNTO UNIVERSO):

$$C^7_{12+12} = C^7_{24} = \frac{24!}{7!17!}$$

   PARA ENCONTRAR O $n(M)$, ONDE M : CONJUNTO DE COMITÊS CONTENDO 7 MEMBROS MULHERES.

$$C^7_{12} = \frac{12!}{7!5!}$$

   PARA ENCONTRAR O $n(H)$, ONDE M : CONJUNTO DE COMITÊS CONTENDO 7 MEMBROS HOMENS.

$$C^7_{12} = \frac{12!}{7!5!}$$

   Portanto, o número de comitês com 7 membros a partir de 12 mulheres e de 12 homens, de modo que deve incluir pelo menos 1 mulher e 1 homem é $n(U) - n(M) - n(H) = \frac{24!}{7!17!} - \frac{12!}{7!5!} - \frac{12!}{7!5!} = \frac{24!}{7!17!} - 2\frac{12!}{7!5!}$.

4. (2.0) Considere os algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6$ e 7. Quantos números naturais superiores a 1000 e inferiores a 10000 podem ser formados se:

   (a) os números são pares e têm todos os dígitos diferentes. Justifique.

   Resposta: Queremos encontrar os números naturais superiores a 1000 e inferiores a 10000 formados apenas com os algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6$ e 7, logo queremos encontrar os números naturais de 4 algarismos utilizando os algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6$ e 7. Como queremos que os números sejam pares, temos que estes devem terminar com algarismo par, logo temos três possibilidades: 2, 4 e 6. Como para esta questão, todos os dígitos devem ser diferentes, então utilizaremos arranjos simples. Se fixarmos o algarismo 2 para ser o algarismo final do número temos $A(6, 3)$ para os três algarismos restantes. Se fixarmos os outros dois algarismos pares da mesma forma que o algarismo 2, também teremos $A(6, 3)$ para os outros três algarismos restantes. Portanto, pelo princípio aditivo, temos $3.A(6, 3) = 3.\frac{6!}{3!} = 360$ números pares.

   (b) os números são ímpares e os dígitos podem ser repetidos. Justifique.

   Resposta: Queremos encontrar os números naturais superiores a 1000 e inferiores a 10000 formados apenas com os algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6$ e 7, logo queremos encontrar os números naturais de 4 algarismos utilizando os algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6$ e 7. Como queremos que os números sejam ímpares, temos que estes devem terminar com algarismo ímpar, logo temos quatro possibilidades: 1, 3, 5 e 7. Como para esta questão, os dígitos podem ser repetidos, então utilizaremos arranjos com repetição. Se fixarmos o algarismo 1 para ser o algarismo final do número temos $AR(7, 3)$ para os três algarismos restantes. Se fixarmos os outros três algarismos ímpares da mesma forma que o algarismo 1, também teremos $AR(7, 3)$ para os outros três algarismos restantes. Portanto, pelo princípio aditivo, temos $4.AR(7, 3) = 4.7^3 = 1372$ números ímpares.

5. (1.7) Considere as letras da palavra MATEMATICA (sem acento).

(a) Quantos anagramas podem ser formados ? Justifique.

Resposta: A palavra $MATEMATICA$ tem 10 letras das quais 3 são A's, 2 são M's, 2 são T's, 1 é E, 1 é I e 1 é C. Como temos letras repetidas, para determinar o número de anagramas desta palavra temos que utilizar o conceito de permutação com repetição. Portanto, temos $P_{10}^{3,2,2,1,1,1} = \dfrac{10!}{3!2!2!1!1!1!}$ anagramas da palavra $MATEMATICA$.

(b) Em quantos anagramas as consoantes estão todas consecutivas? Justifique.

Resposta: Inicialmente vamos determinar o número de vogais e consoantes da palavra a fim de facilitar nossos cálculos. A palavra **M A T E M A T I C A** tem 5 vogais, a saber: 3A's, 1 E e 1 I, e as 5 consoantes: 2M's, 2T's e 1C, totalizando 10 letras.

Queremos determinar o número de anagramas onde as CONSOANTES aparecem **todas** juntas. Para isso, vamos utilizar o seguinte raciocínio:

Uniremos todas as CONSOANTES em um único bloco e o consideraremos uma única letra. Neste bloco, as 5 consoantes podem ser arrumadas de $P_5^{2,2,1}$ formas, pois temos duas repetições das letras M e T.

Agora, basta permutarmos as 5 vogais juntamente com o bloco de consoantes, levando em conta que a letra A se repete 3 vezes nesta palavra. Logo, temos $P_6^{3,1,1,1}$ formas de posicionar estas 6 letras.

Portanto, o número de anagramas da palavra **M A T E M A T I C A** é dado por:

$$P_5^{2,2,1} \times P_6^{3,1,1,1} = \frac{5!}{2!2!1!} \times \frac{6!}{3!1!1!1!} = 30 \times 120 = 3600.$$

6. (1.5) No sistema decimal de numeração, quantos números existem com 5 algarismos repetidos ou não? Justifique.

Resposta: Observemos que para no sistema decimal de numeração, os números são formados pelos algarismos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Queremos os números com 5 algarismos repetidos ou não, então temos como restrição que o primeiro dígito (dezena de milhar) não contempla o algarismo 0, logo o primeiro dígito possui apenas as possibilidades $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Para a primeira posição temos 9 maneiras $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$. Fixado um número na primeira posição, temos $AR_{10}^4 = 10^4$ possibilidades, pois para os demais dígitos devemos considerar o algarismo 0 e os números podem estar repetidos ou não. Logo, usando o princípio multiplicativo, temos $9AR_{10}^4 = 90000$ possibilidades.

OUTRO RACIOCÍNIO: A quantidade de números de 5 algarismos são todos os arranjos de 5 posições usando 10 algarismos, que podem ser com repetição ou não, menos aqueles que começam por zero. O total de arranjos de 5 posições são arranjos com repetição $AR_{10}^5 = 10^5$. O total de arranjos de 5 algarismos que têm 0 na primeira posição é $AR_{10}^4 = 10^4$. Logo, usando a noção de complemento, tem-se que $10^5 - 10^4 = 100000 - 10000 = 90000$ números.