Tecnologia em Sistemas de Computação

Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Scheimberg de Makler e Sulamita Klein
Gabarito: AD1

(1) - $2+5+8+...+(3n-1)=\frac{n(1+3n)}{2}\ \forall n\in\mathbb{N}$

Por indução:

para $n=1$, $3*1-1=2=\frac{1(1+3*1)}{2}=2$ é verdadeira

Suponha verdadeira para $n=k$ isto é, $2+5+...+(3k-1)=\frac{k(1+3k)}{2}$

(Vamos mostrar que se é verdadeira para $k\Rightarrow$verdadeira para $k+1$)

Desenvolvendo para $n=k+1$

$\underbrace{2+5+8+...+(3k-1)+[3(k+1)-1]}=$

(por hipótese de indução)

$=\frac{k(1+3k)}{2}+(3k+2)=\frac{k+3k^2+6k+4}{2}=\frac{3k^2+7k+4}{2}=$

$=\frac{1}{2}(3k^2+6k+3+k+1)=\frac{1}{2}[3(k^2+2k+1)+(k+1)]=$

$=\frac{1}{2}[3(k+1)^2+(k+1)]=\frac{1}{2}(k+1)[3(k+1)+1]$

Logo a expressão é verdadeira $\forall n\in\mathbb{N}$

(2)

(a) Estamos considerando arranjos simples de 9 elementos tomados 6 a 6, portanto a resposta é $A(9,6)=\frac{9!}{3!}$

(b) Nesta parte estamos considerando arranjos com repetição de nove elementos tomados 6 a 6, a resposta é $A_9^6=9^6$.

Ou

$\frac{P_1}{9}\ \frac{P_2}{9}\ \frac{P_3}{9}\ \frac{P_4}{9}\ \frac{P_5}{9}\ \frac{P_6}{9}$.

Em cada uma das 6 posições temos 9 possibilidades Pelo P.M. temos $9\times9\times9\times9\times9\times9=9^6$

(c) Temos C(9, 3) possibilidades de escolher 3 algarismos distintos entre os 9. Depois, com as repetições de cada um deles temos: $P_6^{2,2,2}$

Logo pelo P.M. temos $C(9,3)\times P_6^{2,2,2}=(\frac{9!}{3!6!})\times(\frac{6!}{2!2!2!})$ possibilidades.

(3) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25$, $x_1, x_2 \geq 3$, $x_4, x_5 \geq 7$

Fazendo:

$x_1 = y_1 + 3$, $y_1 \geq 0$, $x_4 = y_4 + 7$, $y_4 \geq 0$, $x_3 = y_3$

$x_2 = y_2 + 3$, $y_2 \geq 0$, $x_5 = y_5 + 7$, $y_5 \geq 0$

e substituindo

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 25 - 3 - 3 - 7 - 7$

isto é

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 5, \quad y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$

Solução: $CR_5^5 = C(5 + 5 - 1, 5) = C(9, 5) = \frac{9!}{5!4!}$

(4)

Permuta-se circularmente a posição dos n pares o que nos dá $\rightarrow PC_n = (n-1)!$

Permuta-se cada par: $2!$, n pares $\rightarrow 2! \times 2! \times ... \times 2! = 2^n$

Pelo P.M. temos $(n-1)! \times 2^n$ maneiras.

(5)

Da definição de complemento de um conjunto A, $\bar{A} = \{x \in U : x \notin A\}$, resulta

$A \cup \bar{A} = U$ e $A \cap \bar{A} = \emptyset$,

Logo, podemos aplicar o princípio aditivo obtendo

$n(U) = n(A \cup \bar{A}) = n(A) + n(\bar{A})$

portanto temos

$n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$

que é o que queríamos provar.