Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD2 - Primeiro Semestre de 2017

Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (1.0) Usando o Teorema das Diagonais, calcule a seguinte soma:

$$\sum_{k=10}^{25} CR_{106}^{k} = CR_{106}^{10} + CR_{106}^{11} + CR_{106}^{12} + \cdots + CR_{106}^{25}$$

Justifique.

Resposta: Segue do Teorema das Diagonais que:

$$C_r^0 + C_{r+1}^1 + C_{r+2}^2 + \ldots + C_{r+l}^l = C_{r+l+1}^l$$

Para aplicá-lo nesta solução, precisamos primeiramente desenvolver as combinações com repetição que compõem o somatório:

$$\sum_{k=10}^{25} CR_{106}^{k} = CR_{106}^{10} + CR_{106}^{11} + CR_{106}^{12} + \cdots + CR_{106}^{25} \quad (I)$$

. Sabemos que $CR_p^q = C_{p+q-1}^q$. Assim, podemos reescrever (I) da seguinte forma:

$$\sum_{k=10}^{25} CR_{106}^{k} = C_{115}^{10} + C_{116}^{11} + C_{117}^{12} + \ldots + C_{130}^{25} \quad (2)$$

Pelo Teorema das Diagonais, temos:

$$C_{105}^{0}+C_{106}^{1}+\ldots+C_{114}^{9}+\underbrace{C_{115}^{10}+\ldots+C_{130}^{25}}_{(2)}=C_{131}^{25}$$

Daí,

$$\sum_{k=10}^{25} CR_{106}^{k}=C_{131}^{25}-\underbrace{[C_{105}^{0}+C_{106}^{1}+\ldots+C_{114}^{9}]}_{\text{Teorema das Diagonais}}$$

$$\sum_{k=10}^{25} CR_{106}^{k}=C_{131}^{25}-C_{115}^{9}$$

Logo,

$$\sum_{k=10}^{25} CR_{106}^{k}=\frac{131!}{106!25!}-\frac{115!}{106!9!}$$

2. (1.5) Calcule o termo independente de x no desenvolvimento do binômio de Newton:

$$\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2}-\frac{5}{x^4}\right)^{105}$$

Justifique.

Resposta: O termo geral de um binômio $(a+b)^n$ pode ser determinado utilizando a seguinte fórmula:

$$T_{k+1}=C_n^k a^{(n-k)} b^k$$

Considerando $a=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2}=2^{-1}x^{\frac{2}{3}}$, $b=-\frac{5}{x^4}=-5x^{-4}$ e $n=105$, temos:

$$\begin{aligned}
T_{k+1} &= C_{105}^{k}(2^{-1}x^{\frac{2}{3}})^{105-k}(-5x^{-4})^k \\
&= C_{105}^{k}(2)^{-105+k}x^{\frac{210-2k}{3}}(-5)^k x^{-4k} \\
&= C_{105}^{k}(2)^{-105+k}(-1)^k(5)^k x^{\frac{210-14k}{3}}
\end{aligned}$$

Como desejamos obter o termo independente, precisamos calcular o coeficiente de x^0. Daí,

$$\frac{210-14k}{3} = 0$$
$$210 - 14k = 0$$
$$k = 15$$

Concluímos, portanto que o termo independente é dado por

$$T_{16} = -C_{105}^{15}(2)^{-90}(5)^{15}$$

$$T_{16} = -\frac{105!}{15!90!}(2)^{-90}(5)^{15}$$

3. (1.5) Determine a fórmula fechada da seguinte relação de recorrência com as condições iniciais dadas:

$$a_n = 5 \times a_{n-1} + 2 \times 5^{n-1}, \quad a_0 = 1, \quad \text{para } n \geq 1$$

Justifique.

Resposta: Vamos determinar a fórmula fechada para esta relação de recorrência utilizando o método das Substituições Regressivas.

$$\begin{array}{rcc} a_n & = & 5a_{n-1} + 2 \times 5^{n-1} \\ & = & 5[5a_{n-2} + 2 \times 5^{n-2}] + 2 \times 5^{n-1} \\ & = & 5^2 a_{n-2} + 2 \times 5^{n-1} + 2 \times 5^{n-1} \\ & = & 5^2 a_{n-2} + 5^{n-1}(2+2) \\ & = & 5^2[5a_{n-3} + 2 \times 5^{n-3}] + 5^{n-1}(2+2) \\ & = & 5^3 a_{n-3} + 5^{n-1}(2+2+2) \\ & \vdots & \vdots \\ & = & 5^i a_{n-i} + 5^{n-1}\underbrace{(2+2+\ldots+2)}_{i \text{ vezes}} \\ & = & 5^i a_{n-i} + (2i) \times 5^{n-1} \end{array}$$

Quando $n - i = 0$, temos:

$$a_n = 5^n a_0 + (2n) \times 5^{n-1}$$

Como $a_0 = 1$,

$$a_n = 5^n + (2n) \times 5^{n-1}$$

4. (1.5) Seja G o grafo complemento do grafo bipartido completo $K_{3,4}$.

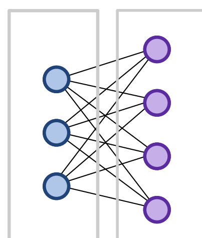

Figura 1: Grafo $K_{3,4}$.

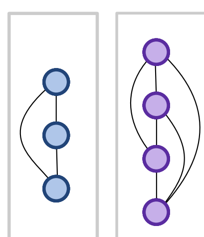

Figura 2: Grafo G: complemento do grafo $K_{3,4}$.

(i) Quantos vértices e quantas arestas tem o grafo G? Justifique.

Resposta: O grafo complemento do grafo bipartido completo $K_{3,4}$ tem 7 vértices (pois o grafo $K_{3,4}$ tem 7 vértices) e 9 arestas.

De fato, o grafo complemento de um grafo G qualquer com n vértices possui todas as arestas que estão no grafo completo K_n menos as arestas que estão em G. Como o grafo $K_{3,4}$ possui 7 vértices, seu grafo complementar também possui 7 vértices e todas as arestas que estão no K_7 que não são arestas do $K_{3,4}$. Considere, portanto, o grafo completo K_7. Para determinar o número de arestas do K_7, utilizaremos o Teorema do Aperto de Mãos, que garante que em um grafo G,

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$$

onde m é o número de arestas de G. Como todo vértice no K_7 tem grau 6, ele possui 21 arestas. Dado que o grafo $K_{3,4}$ possui 12 arestas, então o grafo complemento do $K_{3,4}$ possui $21 - 12 = 9$ arestas.

(ii) Determine o número de componentes conexos de G? Justifique.

Resposta: G tem 2 componentes conexos, uma vez que cada parte da bipartição do $K_{3,4}$ em G é uma clique e não existem arestas entre elas, afinal, no $K_{3,4}$ existem todas as arestas entre as partes da bipartição (ver Figuras 1,2).

5. (3.5) Seja $G = (V, E)$ o grafo dado por:
$V = \{a, b, c, d, e, f\}$ e
$E = \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, f), (c, d), (c, f), (d, e), (e, f)\}$

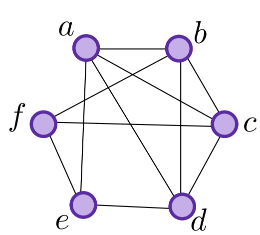

Figura 3: Grafo G.

(i) Determine o diâmetro de G e o centro de G. Justifique.

Resposta: A excentricidade de um vértice v em um grafo G, denotada por $e(v)$, é a maior distância entre v e qualquer outro vértice de G.

O diâmetro de um grafo G, denotado por $diam(G)$, é o valor da maior excentricidade de G.

O centro de um grafo G, denotado por $c(G)$, é o conjunto dos vértices de menor excentricidade em G.

Como $2 = e(a) = e(b) = e(c) = e(d) = e(e) = e(f)$, concluímos que $diam(G) = 2$ e $c(G) = V(G)$.

(ii) G é euleriano? Justifique.

Resposta: O Teorema de Euler garante que um grafo G é euleriano se e somente se todo vértice de G possui grau par.

Neste caso, observe que o vértice f, por exemplo, tem grau 3. Logo, G não é euleriano.

(iii) G é hamiltoniano? Justifique.

Resposta: Sim. Considere o seguinte ciclo hamiltoniano: a,b,c,f,e,d,a. Note que este ciclo é hamiltoniano pois percorre todos os vértices do grafo sem repetições.

(iv) Exiba uma árvore geradora de G. Justifique.

Resposta: O grafo T, ilustrado na Figura 4, é árvore geradora de G. Note que T é subgrafo gerador de G, pois $E(T) \subseteq E(G)$ e $V(T) = V(G)$. Além disso, T é conexo e não possui ciclos. Como uma árvore é um grafo conexo e acíclico, por definição, temos que T é uma árvore. Logo, T é uma árvore geradora de G.

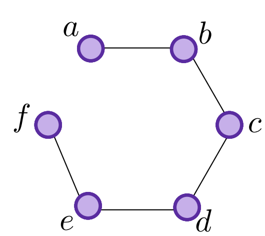

Figura 4: Grafo T: Exemplo de árvore geradora de G.

6. (1.0) Determine o número de faces de um grafo G conexo, planar, 3-regular, e com 30 arestas. Justifique.

   Resposta: Um grafo G, conexo e planar possui $f = m - n + 2$ faces (Fórmula de Euler), onde m é o número de arestas de G e n o número de vértices de G. Como G é 3-regular e possui 30 arestas, pelo Teorema do Aperto de Mãos, sabemos que $n = 20$. Daí, utilizando a fórmula de Euler, temos que:

$$f = 30 - 20 + 2 = 12$$

   Portanto, G tem 12 faces.