Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP1 - Segundo Semestre de 2018

Questões:

1. (2.0) Dado o conjunto:

$$A = \{\{\emptyset\}, 1\}$$

(a) Calcule o conjunto de partes de A, denotado por $P(A)$.

Resposta: O conjunto de partes de A é:

$\mathbb{P}(A) = \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{1\}, \{\{\emptyset\}, 1\}\}$

(b) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

(i) $\{\emptyset\} \in A$

Resposta: A afirmação é verdadeira, já que $\{\emptyset\}$ é um elemento do conjunto A.

(ii) $\{\emptyset\} \in P(A)$

Resposta: Através do conjunto $\mathbb{P}(A)$ descrito no item (a), temos que a afirmação é falsa. Note que ela só seria verdadeira se $\emptyset \in A$. Seria correto afirmar que: $\emptyset \in \mathbb{P}(A)$, $\{\{\emptyset\}\} \in \mathbb{P}(A)$, $\{\emptyset\} \subseteq \mathbb{P}(A)$.

(iii) $\{\emptyset\} \subseteq A$
Resposta: A afirmação é falsa, já que $\emptyset$ não é um elemento de A, e portanto, $\{\emptyset\}$ não é um subconjunto de A.

2. (1.5) Mostre por indução matemática que:

$$2 + 5 + 8 + \cdots + (3n - 1) = \frac{n(1 + 3n)}{2}$$

para todo n natural, $n \geq 1$.

Resposta:

Seja $P(n) : 2+5+8+\cdots+(3n-1) = \frac{n(1+3n)}{2}$ para todo número natural n.

Base da indução:

Para $n = 1$, tem-se

$$3 \cdot 1 - 1 = 2 = \frac{1(1+3)}{2}$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira.

Hipótese de indução

Suponha verdadeiro para $k \geq 1$, isto é, $P(k)$ é verdadeira:

$$P(k) : 2 + 5 + 8 + \cdots + (3k-1) = \frac{k(1+3k)}{2}$$

Passo de indução

Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeiro então $P(k+1)$ é verdadeiro, isto é, temos que provar que:

$$P(k+1) : 2+5+8+\cdots+(3k-1)+[3(k+1)-1] = \frac{(k+1)[1+3(k+1)]}{2}$$

é verdadeira.

De fato, primeiro observemos que:

$$\frac{(k+1)[1+3(k+1)]}{2} = \frac{(k+1)(3k+4)}{2} = \frac{3k^2+7k+4}{2} \qquad \textbf{(1)}$$

Por outro lado,

$$\underbrace{2+5+8+\cdots+(3k-1)}_{HI} + [3(k+1)-1] = \frac{k(1+3k)}{2} + [3(k+1)-1]$$

Desenvolvendo o segundo lado da igualdade, temos:

$$\begin{aligned}
& \tfrac{k(1+3k)}{2} + [3(k+1)-1] && = \\
= \; & \tfrac{k(1+3k)}{2} + (3k+2) && = \\
= \; & \tfrac{k(1+3k)+2(3k+2)}{2} && = \\
= \; & \tfrac{k+3k^2+6k+4}{2} && = \\
= \; & \tfrac{3k^2+7k+4}{2} && \qquad (\mathbf{2})
\end{aligned}$$

Logo, de **(1)** e **(2)** temos que $P(k+1)$ é verdadeira, o que mostra que a afirmação $P(n) : 2+5+8+\cdots+(3n-1) = \frac{n(1+3n)}{2}$ é verdadeira para todo número natural $n \geq 1$.

3. (1.5) De quantos modos 10 meninos e 10 meninas podem formar uma roda de ciranda de modo que eles se alternem (isto é, um menino, uma menina, um menino, uma menina,...)? Justifique.

   Resposta: Podemos formar $(PC)_{10} = 9!$ maneiras de dispor os 10 meninos em uma roda de ciranda.

   Há agora 10 maneiras de colocar uma menina na roda, 9 maneiras de colocar a segunda menina na roda, 8 maneiras de colocar a terceira menina na roda, e assim sucessivamente. Logo, há $P_{10} = 10!$ modos de colocar as 10 meninas na roda de ciranda.

   Pelo princípio multiplicativo, temos: $9! \times 10!$ maneiras de formar uma roda de ciranda de modo que meninas e meninos se alternem.

4. (2.0) Quantos números naturais com 7 algarismos, que terminem com 9 ou 0, podem ser formados de maneira que:

   (a) todos os algarismos sejam distintos.

   Resposta: Como queremos os números que tenham 7 algarismos distintos e que terminem em 9 ou 0, então teremos que dividir o problema em duas partes:

- Terminam em 9: este problema é equivalente a encontrar os números que têm 6 algarismos distintos e o algarismo 9 não figura. Assim, na primeira posição não podemos considerar os algarismos 0 e 9, logo temos 8 possíveis algarismos para este dígito. Do segundo ao sexto dígito, basta fazermos um arranjo simples considerando o 0 como opção e excluindo o algarismo utilizado na primeira posição e o algarismo 9: $A_8^5 = \frac{8!}{3!}$. Portanto, pelo P.M. temos $8 \times \frac{8!}{3!}$ números naturais de 7 algarismos distintos que terminam em 9.

- Terminam em 0: este problema é equivalente a encontrar os números que têm 6 algarismos distintos e o algarismo 0 não figura. Neste caso basta fazermos um arranjo simples dos 6 dígitos sem a presença do 0 como algarismo, e isto pode ser feito de $A_9^6 = \frac{9!}{3!}$.

Portanto, pelo P.A. temos $8 \times \frac{8!}{3!} + \frac{9!}{3!}$ números naturais de 7 algarismos distintos que terminam em 9 ou 0.

(b) os algarismos podem se repetir.

Resposta: Como queremos os números que tenham 7 algarismos e que terminam em 9 ou 0, então teremos que dividir o problema em duas partes:

- Terminam em 9: este problema é equivalente a encontrar os números que têm 6 algarismos. Desta forma, não podemos considerar o algarismo 0 para a primeira posição. Sendo assim, temos 9 possíveis algarismos para este dígito. Do segundo ao sexto dígito, basta fazermos um arranjo com repetição considerando o 0 como opção: $AR_{10}^5 = 10^5$. Portanto, pelo P.M. temos 9×10^5 números naturais de 7 algarismos que terminam em 9.

- Terminam em 0: este problema é equivalente ao item anterior, logo, pelo P.M. temos 9×10^5 números naturais de 7 algarismos que terminam em 0.

Portanto, pelo P.A. temos $9 \times 10^5 + 9 \times 10^5 = 2 \times 9 \times 10^5$ números naturais de 7 algarismos que terminam em 9 ou 0.

5. (1.5) De quantas maneiras é possível arranjar as letras da palavra **INCONSTITUCIONAL** de forma que as vogais fiquem todas juntas.

   Resposta: A palavra INCONSTITUCIONAL, possui 3 I, 3 N, 2 C, 2 O, 1 S, 2 T, 1 U, 1 A, 1 L. São 7 vogais e 9 consoantes, com as devidas repetições.

   O número de arranjos possíveis de forma que as 7 vogais fiquem consecutivas pode ser feito de $P_7^{3,2,1,1} = \frac{7!}{3!2!}$.

   Considerando então as vogais como um bloco que pode ser colocado entre as consoantes temos então permutações com repetições de 10 elementos (9 consoantes mais o bloco) onde temos onde temos 3 N, 2 C, 1 S, 2 T, 1 L e 1 bloco, isto é, $P_{10}^{3,2,2,1,1,1} = \frac{10!}{3!2!2!}$ maneiras de arranjar as letras da palavra INCONSTITUCIONAL de forma que as vogais fiquem consecutivas todas juntas.

   Portanto, pelo P.M. temos $P_7^{3,2,1,1} \times P_{10}^{3,2,2,1,1,1} = \frac{7!}{3!2!} \times \frac{10!}{3!2!2!}$ maneiras de arranjar as letras da palavra **INCONSTITUCIONAL** de forma que as vogais fiquem todas juntas.

6. (1.5) Quantas são as soluções inteiras e não negativas (≥ 0) de : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 34$, tais que $x_1 \geq 2$, $x_3 \geq 5$, $x_4 \geq 3$, $x_5 \geq 1$? Justifique.

   Resposta: Temos de encontrar o número de soluções inteiras e não-negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 34$ com as restrições: $x_1 \geq 2$, $x_3 \geq 5$, $x_4 \geq 3$, $x_5 \geq 1$.

   Podemos escrever: $x_1 = x_1' + 2$, $x_3 = x_3' + 5$, $x_4 = x_4' + 3$, $x_5 = x_5' + 1$, onde $x_1', x_3', x_4', x_5' \geq 0$. Substituindo na equação temos: $x_1' + 2 + x_2 + x_3' + 5 + x_4' + 3 + x_5' + 1 + x_6 = 34$, com $x_1', x_2, x_3', x_4', x_5', x_6 \geq 0$, ou seja, $x_1' + x_2 + x_3' + x_4' + x_5' + x_6 = 23$, com $x_1', x_2, x_3', x_4', x_5', x_6 \geq 0$.

   O número de soluções inteiras e não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 34$, onde $x_1 \geq 2$, $x_3 \geq 5$, $x_4 \geq 3$, $x_5 \geq 1$, é o número de soluções inteiras e não negativas de $x_1' + x_2 + x_3' + x_4' + x_5' + x_6 = 23$, onde $x_1', x_2, x_3', x_4', x_5', x_6 \geq 0$, que corresponde a $CR_6^{23} = C_{23+6-1}^{23} =$

$C_{28}^{23} = \frac{28!}{23!5!}$.