Tema : Conjuntos

- Conceitos
- Diagramas de Venn e operações
- Número de elementos de um conjunto

Objetivos:

- Familiarizar-se com a linguagem de conjuntos.
- Melhorar o raciocínio lógico.

Importância:

- Fornece uma linguagem e ferramentas básicas que nos ajudam no raciocínio tanto na vida cotidiana como na manipulação de outros tópicos matemáticos.

Aula 1 : Conceitos

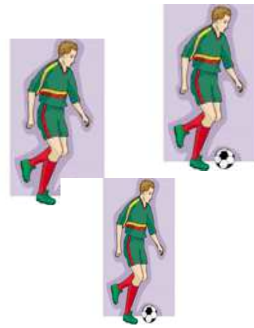
Conteúdo:

- Introdução
- Noção intuitiva
- Notação
- Relação de pertinência
- Definição
- Descrição
- Formalização
- Conjunto vazio
- Relações entre conjuntos
- Conjunto de partes

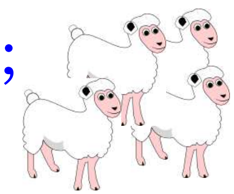
Introdução:

Encontrar a estrutura comum a:

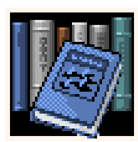
- uma equipe de futebol;



- um rebanho de ovelhas;

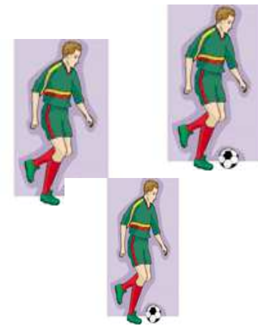


- uma biblioteca.

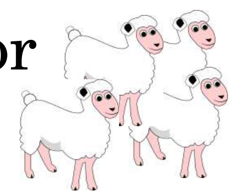


Formação de estrutura comum:

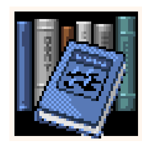
- uma equipe de futebol é constituída por um grupo de jogadores;



- um rebanho de ovelhas é formado por uma reunião de ovelhas;

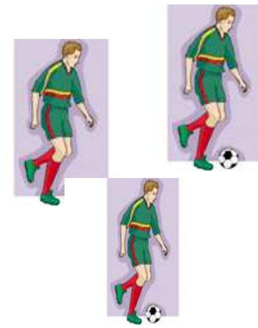


- uma biblioteca está formada por uma coleção de livros.

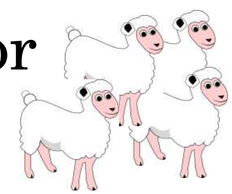


Formação de estrutura comum:

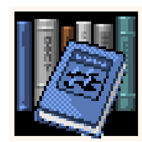
- uma equipe de futebol é constituída por uma coleção de jogadores;



- um rebanho de ovelhas é formado por uma coleção de ovelhas;



- uma biblioteca está formada por uma coleção de livros.



Estrutura comum:

- equipe de futebol
- rebanho de ovelhas
- biblioteca

está formada(o) por uma coleção de objetos.

Noção intuitiva:

Um conjunto é uma coleção de objetos, chamados elementos.

Exemplos:

- uma equipe de futebol é um conjunto de jogadores.

  os elementos são os jogadores

- um rebanho de ovelhas é um conjunto de ovelhas.

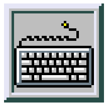
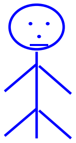
  os elementos são as ovelhas

- uma biblioteca é um conjunto de livros.

  os elementos são os livros

Invente um conjunto com 4 elementos considerando coisas e/ou pessoas do lugar em que você está agora.

Meu conjunto está formado pelo(a):

- monitor do computador 
- teclado 
- cadeira 
- você mesmo 

Notação de conjuntos:

- Letras maiúsculas são usadas para denotar conjuntos.

  Exemplo: seu conjunto pode chamar-se A e o meu B.

- Letras minúsculas são usadas para descrever os elementos de um conjunto.

  Exemplo: os elementos do meu conjunto B podem ser denominados por:

  m : monitor;
  t : teclado;
  c : cadeira;
  v : você.

Descrição de um conjunto:

- O símbolo { indica o início da descrição de um conjunto.
- O símbolo } indica o fim da descrição de um conjunto.

Resumindo:

- Conjunto: letras maiúsculas
- Elementos de um conjunto: letras minúsculas
- Início do conjunto: {
- Fim do conjunto: }

Exemplo: $B = \{m, t, c, v\}$

Relação de pertinência:

Noção intuitiva:

Seja $B = \{m, t, c, v\}$

- O elemento t (teclado) está no conjunto B.
- O elemento r (relógio) não está em B.

Definição de pertinência:

- x pertence a um conjunto X se x é um elemento de X.

Notação: $\boldsymbol{x} \in \mathbf{X}$

Exemplo:

B = { m, t, c, v }

t pertence a B , t $\in$ B

r não pertence a B, r $\notin$ B

Exemplo importante:

- $\mathbb{N}$ = conjunto dos números naturais

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \dots \}$$

- $10598 \in \mathbb{N}$
- $-1 \notin \mathbb{N}$
- $1/5 \notin \mathbb{N}$
- $2{,}5 \notin \mathbb{N}$

Outro exemplo:

- C = conjunto das pessoas que são altas.

  Você pertence a C ?

  - Se você mede 1,95 metros, está claro que você pertence a C.
  - Se você mede 1,50 metros, está claro que você não pertence a C.
  - Se você mede 1,75 metros, você está em C ou não?

  Conclusão: esta coleção não está bem definida.

Modificação do exemplo:

- C = conjunto das pessoas que têm mais de 1,75 metros.

Você pertence a C ?

Conclusão: esta coleção está bem definida.

Definição de conjunto:

Um conjunto é uma coleção **BEM DEFINIDA** de objetos, chamados elementos.

Isto é, **SEMPRE** podemos decidir quando um objeto está ou não no conjunto.

Um conjunto é uma coleção bem definida de objetos, chamados elementos.

Exemplos:

- O conjunto de números naturais que são pares;
- O conjunto dos meses do ano que têm exatamente 30 dias;
- O conjunto dos meses do ano que têm pelo menos 30 dias.

Descrição de um conjunto:

Representação explícita

- Enumeração dos elementos do conjunto.

Exemplo: $B = \{ m, t, c, v \}$ $\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \ldots \}$

Representação implícita

- Indicação da propriedade que caracteriza os elementos.

Exemplo:

C = conjunto das pessoas que têm mais de 1,75 metros de altura

Representação implícita:

C = conjunto das pessoas de altura maior que 1,75 metros.

ou

C está constituído por elementos (pessoas) x tal que a altura de x é maior que 1,75 metros.

- Levando a idéia da notação matemática:

C = { x | altura de x > 1,75 metros }

Formalização:

- C está constituído por elementos (pessoas) x tal que a altura de x é maior que 1,75 metros.

$$C = \{ x \mid \text{altura de } x > 1{,}75 \text{ metros} \}$$

- Propriedade que caracteriza os elementos de C:

$P(x)$: a altura de x é maior que 1,75 metros.

$$C = \{ x \mid P(x) \}$$

C está constituído pelos elementos x tal que verifica $P(x)$

Outro exemplo:

D = conjunto de números naturais maiores ou iguais a 5.

Representação explícita:

$$D = \{\, 5, 6, 7, \ldots \}$$

Representação implícita:

$$D = \{\, x \mid \underbrace{x \in \mathbb{N} \text{ e } x \geq 5}_{P(x)} \,\}$$

Notação de conjuntos conhecidos

$\mathbb{N}$ = conjunto dos números naturais

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

$\mathbb{Z}$ = conjunto dos números inteiros

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

$\mathbb{Q}$ = conjunto dos números racionais

$$\mathbb{Q} = \{ x \mid x = p/q \ , \ p, q \in \mathbb{Z} \ , q \neq 0 \}$$

$\mathbb{R}$ = conjunto dos números reais

Conjunto especial:

- O conjunto vazio, $\varnothing$, é o conjunto que não tem elementos.

- Pode-se falar da representação de $\varnothing$?

Exemplos:

$$\varnothing = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \, , \; x > 5 \text{ e } x < 0 \}$$

$$\varnothing = \{ x \mid x \in \mathbb{Z} \, , \; 2x - 1 = 0 \}$$

Relações entre conjuntos:

Definição de igualdade

- Os conjuntos A e B são iguais quando têm os mesmos elementos.
- Notação: **A = B**

Exemplo:

Sejam $A = \{ 1, 3, a \}$ $C = \{ 1, 3, 1, a \}$

$B = \{ 3, a, 1 \}$ $D = \{ 2, 3, a \}$

Os conjuntos A, B e C são iguais, $\mathbf{A = B = C}$

A é diferente de D, $\mathbf{A \neq D}$

Definição de inclusão

- Um conjunto A está contido em um conjunto B se todo elemento de A é elemento de B.
- Notação: $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$

Exemplo 1: $\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$

$P = \{ 2, 4, 6, 8, \dots \}$

$S = \{ 0, 1 \}$

P está contido em $\mathbb{N}$, $P \subseteq \mathbb{N}$

S não está contido em $\mathbb{N}$, $S \not\subseteq \mathbb{N}$

Exemplo 2:

$$A = \{ 1, 3, a \}$$

$$B = \{ 3, a, 1 \}$$

$$A \subseteq B \quad \text{e} \quad B \subseteq A$$

Conclusão: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ e $B \subseteq A$

(é equivalente)

Observação:

$$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$$

- A está contido em B
- A é um subconjunto de B
- B contém A $\quad (B \supseteq A)$

Definição de inclusão estrita:

- $A \subseteq B$ e $A \neq B$
- Notação: $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ (A <u>está contido estritamente</u> em B)

Exemplo 1:

$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, \ldots \}$

$P = \{ 2, 4, 6, 8, \ldots \}$

$P \subseteq \mathbb{N}$, mas $\underbrace{1 \in \mathbb{N} \text{ e } 1 \notin P}_{N \neq P}$

Conclusão: $P \subset \mathbb{N}$

Observação:

- Para todo conjunto: $\varnothing \subseteq A$
- Para todo conjunto $A \neq \varnothing$: $\varnothing \subset A$

Conjunto de partes de um conjunto:

Considere o conjunto A.

- O conjunto das partes de A, $P(A)$, é o conjunto formado por todos os subconjuntos de A.

Exemplo:

Seja $A = \{ 1, 2, 3 \}$

então

$P(A) = \{\emptyset, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 3 \}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$

Observação:

- Os <u>elementos</u> de P(A) são <u>conjuntos</u>:

Exemplo:

$A = \{ 1, 2, 3 \}$

$P(A) = \{\emptyset, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 3 \}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$

- $\{ 1 \} \in P(A)$ pois $\{ 1 \} \subseteq \{ 1, 2, 3 \}$
- $1 \notin P(A)$
- $\{ \{ 1 \}, \{ 1, 2, 3 \} \} \subseteq P(A)$
- $\{ \{ 1 \} \} \subseteq P(A)$
- $\emptyset \in P(A)$

Resumo:

Conceitos	Notação
- Conjunto	A, B, ...
- Elemento	a, b, x, ...
- Relação de pertinência	$x \in A$, ($x \notin A$)
- Relações entre conjuntos:	
Igualdade	$A = B$, ($A \neq B$)
Inclusão	$A \subseteq B$, ($A \not\subseteq B$)
Inclusão estrita	$A \subset B$, ($A \not\subset B$)
Conjuntos especiais	$\varnothing$, P(A)

Propriedade: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ e $B \subseteq A$

cederj