Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito da AP3 - Primeiro Semestre de 2010

Questões:

1. (1.5) Mostre usando indução matemática:

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1} = \frac{3^n-1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Resposta: Seja $P(n) : 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1} = \frac{3^n-1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Base da indução: Para $n = 1$, $3^{1-1} = 1 = \frac{2}{2} = \frac{(3^1-1)}{2}$.

Logo, $P(1)$ é verdadeira.

Hipótese de indução:

Suponha verdadeiro para k, isto é, $P(k)$ é verdadeiro:

$$P(k) : 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{k-1} = \frac{3^k-1}{2}$$

Devemos provar que $P(k+1)$ é verdadeiro, isto é:

$$P(k+1) : 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^k = \frac{3^{k+1}-1}{2}$$

Desenvolvendo para $k+1$ e usando a hipótese de indução, temos que:

$$\begin{aligned}
& 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^k && = \\
= \; & \underbrace{1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{k-1}}_{(Por\ hipótese\ indutiva)} + 3^k && = \\
= \; & \frac{3^k-1}{2} + 3^k && = \\
= \; & \frac{3^k-1+2.3^k}{2} && = \\
= \; & \frac{(1+2).3^k-1}{2} && = \\
= \; & \frac{3.3^k-1}{2} && = \\
= \; & \frac{3^{k+1}-1}{2}
\end{aligned}$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeira. Pelo princípio da indução, a expressão é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. (1,5) Dada a palavra **I N D E C L I N A B I L I D A D E**, em quantos anagramas as vogais estão todas juntas? Justifique.

   Resposta: A palavra **I N D E C L I N A B I L I D A D E**, possui 4 I, 2 N, 3 D, 2 E, 1 C, 2 L, 2 A, 1 B. São 8 vogais e 9 consoantes, com as devidas repetições.

   O número de maneiras possíveis de colocar as 8 vogais todas juntas corresponde a permutações com repetição dado por $P_8^{4,2,2} = \frac{8!}{4!2!2!}$.

   Ao colocar todas as vogais juntas, as consoantes também ficam todas juntas. Usando o mesmo raciocínio anterior, temos $P_9^{3,2,2,1,1}$ maneiras de colocar as 9 consoantes todas juntas.

   Como, nos anagramas de 17 letras podemos ter o bloco de todas as vogais antes do bloco de todas as consoantes, ou despois, temos $P_2 = 2!$ maneiras de fazer esta arrumação dos blocos.

   Logo pelo princípio multiplicativo temos $2 \cdot P_8^{4,2,2} \cdot P_9^{3,2,2,1,1} = 2\ \frac{8!}{4!2!2!} \cdot \frac{9!}{3!2!2!}$ maneiras de arranjar as letras da palavra **I N D E C L I N A B I L I D A D E** de forma que as vogais fiquem todas juntas.

3. (1,5) De quantas maneiras pode-se selecionar um grupo de 5 homens e 7 mulheres em um conjunto de 17 homens e 23 mulheres? Justifique.

   Resposta: Para compor o grupo devemos escolher 5 homens em um conjunto de 17 homens, o que nos dá um total de $C(17,5) = \frac{17!}{5!12!}$ maneiras. Analogamente para as mulheres, temos $C(23,7) = \frac{23!}{7!16!}$ maneiras. Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos $C(17,5).C(23,5) = \frac{17!}{5!12!} \cdot \frac{23!}{7!18!} = \frac{23!}{5!7!12!18}$ grupos distintos.

4. (1,5) Use o teorema das diagonais para calcular a seguinte soma:

$$C_{50}^{4} + C_{51}^{5} + C_{52}^{6} + \cdots + C_{80}^{34}$$

   Justifique.

Resposta: Pelo teorema das diagonais, temos que $C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \ldots + C_{n+r}^r = C_{n+r+1}^r$

$$
\begin{aligned}
& C_{50}^4 + C_{51}^5 + C_{52}^6 + \cdots + C_{80}^{34} && = \\
= \; & C_{50}^4 + \cdots + C_{80}^{34} + C_{46}^0 - C_{46}^0 + C_{47}^1 - C_{47}^1 + C_{48}^2 - C_{48}^2 + C_{49}^3 - C_{49}^3 && = \\
= \; & \underbrace{C_{46}^0 + C_{47}^1 + C_{48}^2 + C_{49}^3 + C_{50}^4 + \cdots + C_{80}^{34}}_{\textit{Pelo teorema das diagonais, quando } n=46 \textit{ e } r=34} - C_{46}^0 - C_{47}^1 - C_{48}^2 - C_{49}^3 && = \\
= \; & C_{46+34+1}^{34} - C_{46}^0 - C_{47}^1 - C_{48}^2 - C_{49}^3 && = \\
= \; & C_{81}^{34} - C_{46}^0 - C_{47}^1 - C_{48}^2 - C_{49}^3 && = \\
= \; & \frac{81!}{34!47!} - \frac{46!}{0!46!} - \frac{47!}{1!46!} - \frac{48!}{2!46!} - \frac{49!}{3!46!} && =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \; & \frac{81!}{34!47!} - 1 - 47 - \frac{48 \times 47}{2} - \frac{49 \times 48 \times 47}{6} && = \\
= \; & \frac{81!}{34!47!} - 1 - 47 - 1128 - 18424 && = \\
= \; & \frac{81!}{34!47!} - 19600
\end{aligned}
$$

5. (1.5) Determine o número de arestas de um grafo que possui quatro componentes conexos G_1, G_2, G_3, G_4, sendo que G_1 é um grafo completo (K_5) com 5 vértices, G_2 é um grafo bipartido completo ($K_{2,3}$) com bipartição (V', V''), com $|V'| = 2$ e $|V''| = 3$, G_3 é uma árvore com 10 vértices e G_4 é um grafo trivial. Justifique.

   Resposta: Seja $G = (V, E)$ um grafo formado por quatro componentes conexos $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2), G_3 = (V_3, E_3), G_4 = (V_4, E_4)$, onde $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ e $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$.

   O grafo G_1 é um grafo completo com 5 vértices (K_5), logo $d(v) = 4$, $\forall v \in V_1$. Temos que $\sum_{v \in V(G_1)} d(v) = 2|E_1| \Rightarrow 4 \times 5 = 2|E_1| \Rightarrow |E_1| = 10$ (De uma outra forma, podemos observar que como o grafo G_1 é completo, cada par de vértices distintos, tem uma aresta entre si. Como temos 5 vértices, teremos então $C_5^2 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ arestas).

   O grafo G_2 é um grafo bipartido completo com bipartição (V', V''), com $|V'| = 2$ e $|V''| = 3$ ($K_{2,3}$), logo $d(v) = 3$, $\forall v \in V'$ e $d(w) = 2$, $\forall w \in V''$. Como $V(G_2) = V' \cup V''$ e $V' \cap V'' = \emptyset$, temos então que $\sum_{y \in V(G_2)} d(y) = \sum_{y \in V'} d(y) + \sum_{y \in V''} d(y) = 2|E_2| \Rightarrow 3 \times 2 + 2 \times 3 = 2|E_2| \Rightarrow |E_2| = 6$ (De uma outra forma, podemos observar que como o grafo G_2 é bipartido completo, com $|V'| = 2$ e $|V''| = 3$, cada vértice de V' é adjacente a cada vértice de V''. Logo, temos $|V'| \times |V''| = 2 \times 3 = 6$ arestas).

O grafo G_3 é uma árvore com 10 vértices. Temos então que $|E_3| = |V_3| - 1 \Rightarrow |E_3| = 10 - 1 \Rightarrow |E_3| = 9$.

O grafo G_4 é um grafo trivial, isto é, $|V_4| = 1$. Logo, $|E_4| = 0$.

Podemos concluir que, o número de arestas de G é $|E| = |E_1| + |E_2| + |E_3| + |E_4| = 10 + 6 + 9 + 0 = 25$.

6. (2.5) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for falsa, dê um exemplo e a sua justificação. Se for verdadeira, prove.

   (a) Se G é um grafo regular de grau 7 , com 28 arestas, então G tem exatamente 8 vértices.

   Resposta: VERDADEIRA, pois temos que em qualquer grafo G, a soma dos graus de todos os vértices é igual a duas vezes o número de arestas, isto é,

   $$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|,$$

   .

   Se $G = (V, E)$ é um grafo regular de grau 7 com n vértices, temos então que $d(v) = 7$, $\forall v \in V(G)$. Logo:

   $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 7 \times n = 2 \times 28 \Rightarrow \boxed{\text{n=8}}$.

   Logo, o grafo G tem exatamente 8 vértices.

   (b) Se G é um grafo bipartido então ele não possui ciclo ímpar.

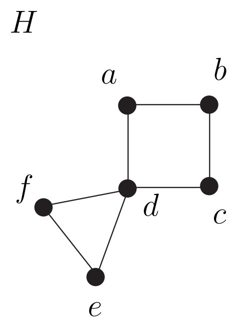
   Resposta: VERDADEIRO. Seja G um grafo bipartido com bipartição (V_1, V_2) e $C = v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1$ um ciclo em G. Assuma que $v_1 \in V_1$, logo $v_2 \in V_2$, $v_3 \in V_1$, $v_4 \in V_2$ e assim por diante.

   De forma geral, $v_{2i-1} \in V_1$ e $v_{2i} \in V_2$. Como $(v_k, v_1) \in E$ e $v_1 \in V_1$ então $v_k \in V_2$ (porque G é bipartido), temos que $k = 2i$, para algum i, logo k é par e portanto C é um ciclo par.

Logo, podemos concluir que se G é um grafo bipartido então ele não possui ciclo ímpar.

(c) Todo grafo euleriano é também hamiltoniano.

Resposta: FALSO. Considere o seguinte grafo H:



O grafo H é euleriano, pois todos os seus vértices tem grau par ($d(a) = d(b) = d(c) = d(e) = d(f) = 2$ e $d(d) = 4$), mas H não é hamiltoniano, pois possui uma articulação (o vértice d) e todo caminho de a (ou b ou c) a e (ou f) passa sempre pelo vértice d, logo não existe ciclo hamiltoniano.

(d) Se um grafo conexo G é planar e tem uma única face então G é uma árvore.

Resposta: VERDADEIRO. Seja G um grafo planar e com uma única face $F (f = 1)$.

Suponha que G não é uma árvore. Como G é conexo, temos então que G possui pelo menos um ciclo, e isto implica em dizer que temos pelo menos uma face interna delimitada pelo ciclo e a face externa. Logo, contradiz o fato de $f = 1$. Portanto, G não possui ciclos.

Podemos concluir que, se um grafo conexo G é planar e tem uma única face então G é uma árvore.