Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
AP2 - Segundo Semestre de 2014

Nome -
Assinatura -

Observações:

1. Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular. Deixe o resultado indicado, como um produto ou quociente ou potência de números inteiros ou fatoriais.
2. Resultado sem indicação de como foi obtido, não será considerado.
3. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.
4. Você pode usar lápis para responder as questões.
5. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.
6. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

Questões:

1. (1.0) Usando o Teorema das Colunas calcule a seguinte soma:

$$C_{24}^{21} + C_{25}^{21} + C_{26}^{21} + \cdots + C_{31}^{21}$$

Resposta: O Teorema das Colunas, nos diz que: $C_r^r + C_{r+1}^r + \ldots + C_n^r = C_{n+1}^{r+1}$.

Assim, segue que: $C_{21}^{21} + C_{22}^{21} + C_{23}^{21} + C_{24}^{21} + C_{25}^{21} + C_{26}^{21} + \cdots + C_{31}^{21} = C_{32}^{22}$.

Portanto, $C_{24}^{21} + C_{25}^{21} + C_{26}^{21} + \cdots + C_{31}^{21} = C_{32}^{22} - (C_{21}^{21} + C_{22}^{21} + C_{23}^{21})$.

Aplicando novamente o Teorema das Colunas à soma $C_{21}^{21} + C_{22}^{21} + C_{23}^{21} = C_{24}^{22}$, obtemos o valor desejado:

$$C_{24}^{21} + C_{25}^{21} + C_{26}^{21} + \cdots + C_{31}^{21} = C_{32}^{22} - C_{24}^{22} = \frac{32!}{22!10!} - \frac{24!}{22!2!}$$

2. (1.5) Aplicando a fórmula do Binômio de Newton, calcule o termo independente no desenvolvimento de $(\frac{x^5}{2} - \frac{3}{x^4})^{63}$. Justifique a resposta.

Resposta: A fórmula para o termo geral do desenvolvimento do Binômio de Newton de $(a+b)^n$ é dada por: $T_{k+1} = \binom{n}{k}\, a^{n-k}\, b^k$, para $k = 0, 1, \cdots, n$. Neste caso temos $n = 63$, $a = \frac{x^5}{2}$ e $b = -\frac{3}{x^4}$. Logo

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= \tbinom{63}{k}\, (\tfrac{x^5}{2})^{63-k}\, (-\tfrac{3}{x^4})^k \\ &= \tbinom{63}{k}(\tfrac{1}{2})^{63-k}(-3)^k(x^{5\times 63-5k})(x^{-4k}) \\ &= \tbinom{63}{k}(\tfrac{1}{2})^{63-k}(-3)^k x^{5\times 63-9k} \end{aligned}$$

Como queremos o termo independente, então devemos encontrar o valor de k que torna o expoente de x nulo: $5 \times 63 - 9k = 0 \to k = \frac{5\times 63}{9} = 35$. Portanto o termo independente será:

$$T_{36} = \binom{63}{35}\left(\frac{1}{2}\right)^{63-35}(-3)^{35} = -\frac{63!}{35!28!}\left(\frac{1}{2}\right)^{28} 3^{35}$$

3. (1.5) Encontre a fórmula fechada da relação de recorrência:
$a_n = 2a_{n-1} + 1 \qquad n$ natural, $n \geq 1$
$a_0 = 4$
Descreva o processo utilizado para chegar à fórmula.

Resposta: Vamos utilizar substituição regressiva para determinar a fórmula fechada da relação de recorrência:

$$\begin{aligned}
a_n &= 2a_{n-1} + 1 \\
&= 2(\underbrace{2a_{n-2} + 1}_{a_{n-1}}) + 1 \\
&= 2^2 a_{n-2} + 2 + 1 \\
&= 2^2(\underbrace{2a_{n-3} + 1}_{a_{n-2}}) + 2 + 1 \\
&= 2^3 a_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\
&\vdots \\
&= 2^i a_{n-i} + (2^{i-1} + 2^{i-2} + \ldots + 2^0)
\end{aligned}$$

Como a base é dada pelo termo a_0, temos que $n - i = 0$ quando $i = n$. Logo:

$$\begin{aligned}
a_n &= 2^n a_0 + \underbrace{(2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^0)}_{\text{soma da P.G. de razão 2 com } n \text{ termos}} \\
&= 2^n \times 4 + (2^n - 1) \\
&= 5 \times 2^n - 1
\end{aligned}$$

4. (1.0) Considere o grafo G dado pela seguinte sequência de graus de vértices: $(5, 4, 4, 3, 3, 2, 1)$. Calcule (sem auxílio de desenho) quantos vértices e quantas arestas G possui. Justifique.

Resposta: O número de vértices n é dado pela número de elementos na sequência de graus, já que cada elemento da sequência se refere a exatamente um vértice do grafo, portanto $n = 7$. Para encontrarmos o número de arestas m do grafo, é suficiente utilizar a relação dada pelo Teorema do Aperto de Mãos: $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$, onde $d(v)$ denota o grau de v. Dessa forma, temos que $2m = 5 + 4 + 4 + 3 + 3 + 2 + 1 = 22$ e, portanto, $m = 11$.

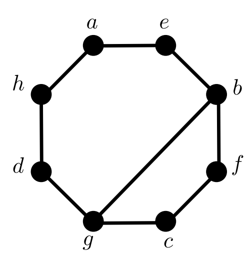
5. (1.5) Seja G um grafo conexo, planar e 3-regular (isto é regular de grau 3). Sabendo que G (em qualquer representação plana) possui 12 faces, determine o número de vértices de G. Justifique.

   Resposta: Pela Fórmula de Euler, sabemos que $f + n - m = 2$ para todo grafo planar. Além disso, novamente pelo Teorema do Aperto de Mãos $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$, e pelo fato que $d(v) = 3$ para todo vértice de G, como temos n vértices, podemos verificar que $3n = 2m$. Portanto, pelas restrições do problema temos que:

   $$n = 2 + m - f = 2 + \frac{3n}{2} - 12 = \frac{3n - 20}{2} \qquad \rightarrow \qquad n = 20$$

6. (3.5) As seguintes perguntas devem ser respondidas considerando o grafo G dado por:
   $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ e
   $E(G) = \{(a, e), (a, h), (b, e), (b, f), (b, g), (c, f), (c, g), (d, g), (d, h)\}$

   Resposta: Considere a seguinte representação de G:



   (a) G é bipartido? Justifique o SIM ou o NÃO.

   Resposta: Sim, pois podemos particionar $V(G)$ em dois conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{e, f, g, h\}$, de modo que ambos induzem conjuntos independentes. Podemos também verificar que G possui apenas ciclos pares. Logo, pela caracterização dos grafos bipartidos (um grafo é bipartido se e somente se não possui ciclos ímpares), G é bipartido.

   (b) G é euleriano? Justifique.

   Resposta: Não. Dada a caracterização dos grafos eulerianos: um grafo G é euleriano se e somente se todo vértice de G tem grau par. Como

b e g possuem grau ímpar, $d(b) = d(g) = 3$, o grafo em questão não é euleriano.

(c) G é hamiltoniano? Justifique.

Resposta: Sim, pois o ciclo induzido $C = \langle a, e, b, f, c, g, d, h, a \rangle$ passa por todos os vértices de G exatamente uma vez, logo G possui um ciclo hamiltoniano.

(d) G é planar? Justifique.

Resposta: Sim, já que a Figura apresenta uma representação plana de G, ou seja, uma representação em que não há cruzamento de arestas, logo G é um grafo planar.

(e) Determine o centro de G. Justifique.

Resposta: O centro de G, $C(G)$, é um conjunto de vértices composto pelos vértices de menor excentricidade. A excentricidade de um vértice v, denotada por $e(v)$, é a maior distância de v a um outro vértice do grafo. Já a distância entre dois vértices v, w, denotada por $d(v, w)$, é o comprimento do menor caminho entre v, w. Observando a Figura acima, podemos verificar que $e(b) = e(g) = e(d) = e(e) = 3$ e $e(a) = e(c) = e(f) = e(g) = e(h) = 4$. Dessa forma, temos que $C(G) = \{b, g, d, e\}$.