## Aula 14: Binômio de Newton

#### Conteúdo:

- Definição de binômio
- Introdução ao binômio de Newton
- Teorema binomial

# Definição de binômio:

Chamamos de binômio qualquer expressão da forma a + b, onde a e b são símbolos diferentes.

Exemplo 1: Sejam  $x, y \in \mathbb{R}$ 

- (a) x y = x + (-y) é um binômio (a := x, b := -y)
- (b)  $3xy + x^2$  é um binômio (a := 3xy, b :=  $x^2$ )



# Introdução ao binômio de Newton:

## Exemplo 2:

Desenvolva as potências do binômio a + b,  $(a + b)^n$ , para n = 0, 1, 2, 3.

$$(a+b)^{0} = 1$$

$$(a+b)^{1} = 1a+1b$$

$$(a+b)^{2} = (a+b)(a+b) = 1a^{2} + 2ab+1b^{2}$$

$$(a+b)^{3} = (a+b)(a+b)^{2} = 1a^{3} + 3a^{2}b + 3ab^{2} + 1b^{3}$$

Observação: os coeficientes dos termos podem ser ordenados da seguinte forma:



Triângulo de Pascal

## Exemplo 3:

Calcule a linha n = 4 do triângulo de Pascal e verifique que são os coeficientes da expansão de (a + b)<sup>4</sup>.

Resolução:

$$n = 3$$

$$n = 4$$

ou

Cálculo de (a + b)<sup>4</sup>:

$$(a + b)^{4} = (a + b)(a + b)^{3} = (a + b)(a^{3} + 3a^{2}b + 3ab^{2} + b^{3}) =$$

$$= a(a^{3} + 3a^{2}b + 3ab^{2} + b^{3}) + b(a^{3} + 3a^{2}b + 3ab^{2} + b^{3}) =$$

$$= 1a^{4} + 4a^{3}b + 6a^{2}b^{2} + 4ab^{3} + 1b^{4})$$

$$C_{4}^{0} \quad C_{4}^{1} \quad C_{4}^{2} \quad C_{4}^{2} \quad C_{4}^{3} \quad C_{4}^{4}$$
cederi





#### Teorema Binomial (Binômio de Newton):

Se a e b são números reais e n é um número natural então tem-se:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^{n} = \sum_{r=0}^{n} C_{n}^{r} \mathbf{a}^{n-r} \mathbf{b}^{r} =$$

$$= C_{n}^{0} \mathbf{a}^{n} + C_{n}^{1} \mathbf{a}^{n-1} \mathbf{b} + C_{n}^{2} \mathbf{a}^{n-2} \mathbf{b}^{2} + \dots + C_{n}^{n-1} \mathbf{a} \mathbf{b}^{n-1} + C_{n}^{n} \mathbf{b}^{n}$$





Prova (princípio de indução matemática):

Seja P(n): 
$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n C_n^r a^{n-r} b^r$$

(1) Base de indução

P(1): 
$$(a + b)^1 = a + b \stackrel{C.F.}{=} C_1^0 a^1 + C_1^1 b^1 = \sum_{r=0}^{1} C_1^r a^{1-r} b^r$$

Logo, P(1) é verdadeira

(2) Hipótese de indução (HI)

P(k) é verdadeira





## Prova (continuação):

(3) 
$$P(k)$$
 é verdadeira  $\Rightarrow P(k+1)$  é verdadeira   

$$(a+b)^{k} = \sum_{r=0}^{k} C_{k}^{r} a^{k-r} b^{r}$$

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{r=0}^{k+1} C_{k+1}^{r} a^{k+1-r} b^{r}$$

#### Desenvolvendo

$$(a + b)^{k+1} = (a + b)(a + b)^{k} \stackrel{\text{HI}}{=} (a + b)\sum_{r=0}^{k} C_{k}^{r} a^{k-r} b^{r} =$$

$$= a \sum_{r=0}^{k} C_{k}^{r} a^{k-r} b^{r} + b \sum_{r=0}^{k} C_{k}^{r} a^{k-r} b^{r}$$



Desenvolvimento indutivo (continuação):

Descrivorvimento mattivo (continuação).

ou seja:
$$(a + b)^{k+1} = a(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1}b + C_k^2 a^{k-2}b^2 + ... + C_k^{k-1}ab^{k-1} + C_k^k b^k)$$

$$+b(C_{k}^{0}a^{k}+C_{k}^{1}a^{k-1}b+C_{k}^{2}a^{k-2}b^{2}+...+C_{k}^{k-1}ab^{k-1}+C_{k}^{k}b^{k})=$$

$$= C_k^0 a^{k+1} + C_k^1 a^k b + C_k^2 a^{k-1} b^2 + ... + C_k^{k-1} a^2 b^{k-1} + C_k^k a b^k$$

+ 
$$C_k^0 a^k b + C_k^1 a^{k-1} b^2 + C_k^2 a^{k-2} b^3 + ... + C_k^{k-1} a b^k + C_k^k b^{k+1} =$$

$$= C_{k}^{0} a^{k+1} + (C_{k}^{0} + C_{k}^{1}) a^{k} b + (C_{k}^{1} + C_{k}^{2}) a^{k-1} b^{2} + ...$$

$$\stackrel{C.F.}{=} 1 = C_{k+1}^{0} \stackrel{R.S.}{=} C_{k+1}^{1}$$

$$\stackrel{R.S.}{=} C_{k+1}^{2}$$

+ 
$$(C_k^{k-1} + C_k^k)ab^k + C_k^k b^{k+1}$$





ceder

Desenvolvimento indutivo (continuação):

Usando a relação de Stifel e as condições de fronteira obtém-se:

$$P(k + 1): (a + b)^{k+1} = C_{k+1}^{0} a^{k+1} + C_{k+1}^{1} a^{k} b + C_{k+1}^{2} a^{k-1} b^{2} + ...$$

$$+ C_{k+1}^{k} a b^{k} + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1} =$$

$$= \sum_{r=0}^{k+1} a^{k+1-r} b^{r}$$

Logo, P(k + 1) é verdadeira

Então, pelo princípio de indução matemática tem-se

P(n): 
$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n C_n^r a^{n-r} b^r \text{ \'e verdadeira } \forall n \in \mathbb{N}$$





Observações:

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r$$

desenvolvimento ou expansão da potência n de a + b

(1) Os coeficientes do desenvolvimento de (a + b)<sup>n</sup> são os elementos da linha n do triângulo de Pascal.

(por exemplo, 
$$(a + b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 a b^2 + C_3^3 b^3$$
)

- (2) O desenvolvimento de  $(a + b)^n$  tem (n + 1) termos
- (3) O somando (r + 1) do desenvolvimento de  $(a + b)^n$

$$T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$$

(por exemplo, o segundo somando de  $(a + b)^3$  é  $T_2 = C_3^1 a^2 b$ , n = 3, r = 1)





## Exemplo 4:

Determine a expansão de  $(x + 3)^4$ .

#### Resolução:

$$(x + 3)^4 \stackrel{\text{B.N.}}{=} C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3 \cdot 3 + C_4^2 x^2 \cdot 3^2 + C_4^3 x \cdot 3^3 + C_4^4 3^4$$

Triângulo de Pascal até n = 4

**Resposta:** 
$$(x + 3)^4 = x^4 + 4.3x^3 + 6.9x^2 + 4.27x + 81 = x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$$





## Exemplo 5:

Seja n um número natural. Prove que para todo número real x se verifica:

$$(x + 1)^{n} = \sum_{r=0}^{n} C_{n}^{r} x^{r}$$

#### Prova (desafio!)

**Desafio** 

Voltar

Sabemos que

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^{\mathbf{n}} \stackrel{\text{B.N.}}{=} \sum_{\mathbf{r}=0}^{\mathbf{n}} C_{\mathbf{n}}^{\mathbf{r}} \mathbf{a}^{\mathbf{n}-\mathbf{r}} \mathbf{b}^{\mathbf{r}}$$

Logo, considerando a := 1 e b := x, resulta

$$(x + 1)^n = (1 + x)^n \stackrel{\text{B.N.}}{=} \sum_{r=0}^n C_n^r 1^{n-r} \cdot x^r = \sum_{r=0}^n C_n^r x^r$$

isto é: 
$$(x + 1)^n = \sum_{r=0}^n C_n^r x^r$$

cederj

## Exemplo 6:

Seja n um número natural. Determine a expansão do binômio de Newton de  $(x-1)^n$ , para  $x \in \mathbb{R}$ .

## Resolução:

No teorema do binômio de Newton consideramos

a := x , b := -1  
Logo, 
$$(x-1)^n = (x + (-1))^n \stackrel{\text{B.N.}}{=} \sum_{r=0}^n C_n^r x^{n-r} (-1)^r =$$

$$= \sum_{r=0}^n C_n^r (-1)^r x^{n-r}$$
isto é,  $(x-1)^n = \sum_{r=0}^n C_n^r (-1)^r x^{n-r}$ 

- Ilustração:  $(x-1)^5 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$ 







Observação:

$$(a + b)^{n} = (b + a)^{n} \stackrel{\text{B.N.}}{=} \sum_{r=0}^{n} C_{n}^{r} b^{n-r} a^{r}$$
,

substituindo r por k, resulta

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Outra notação:

$$\binom{n}{k} := C_n^k = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^{n} \stackrel{\text{B.N.}}{=} \sum_{k=0}^{n} {n \choose k} \mathbf{a}^{k} \mathbf{b}^{n-k}$$





Propriedade

Dados a e b números reais e n um número natural, o binômio de Newton admite o seguinte desenvolvimento

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^{\mathbf{n}} = \sum_{r=0}^{\mathbf{n}} {n \choose \mathbf{n} - \mathbf{k}} \mathbf{a}^{\mathbf{k}} \mathbf{b}^{\mathbf{n} - \mathbf{k}}$$

#### Prova (desafio!)

Voltar

Use a condição complementar ou de simetria do coeficiente binomial.

De fato, pela condição de simetria tem-se que

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$
 ou seja  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ 

Usando a observação anterior resulta

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^{\mathbf{n}} = \sum_{k=0}^{\mathbf{n}} {n \choose k} \mathbf{a}^{k} \mathbf{b}^{\mathbf{n}-\mathbf{k}} = \sum_{k=0}^{\mathbf{n}} {n \choose \mathbf{n}-\mathbf{k}} \mathbf{a}^{k} \mathbf{b}^{\mathbf{n}-\mathbf{k}}$$





# Exemplo 7:

Determine o coeficiente de x<sup>2</sup> no desenvolvimento de

$$\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^9$$

## Resolução:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^{\mathbf{n}} = \sum_{k=0}^{\mathbf{n}} \binom{\mathbf{n}}{k} \mathbf{a}^{\mathbf{n}-\mathbf{k}} \mathbf{b}^{\mathbf{k}}$$

$$T_{k+1} = {n \choose k} a^{n-k} b^{k}$$
  $k = 0, 1, ..., n$ 

Consideramos 
$$\mathbf{a} = \mathbf{x}^3$$
,  $\mathbf{b} = -\frac{1}{\mathbf{x}^2}$ ,  $\mathbf{n} = 9$ :

# Resolução (continuação):

$$T_{k+1} = {9 \choose k} (x^3)^{9-k} \left( -\frac{1}{x^2} \right)^k \qquad 0 \le k \le 9$$

$$= {9 \choose k} (-1)^k \frac{x^{27-3k}}{x^{2k}} =$$

$$= (-1)^k {9 \choose k} x^{27-3k-2k} = (-1)^k {9 \choose k} x^{27-5k}$$

Logo, devemos determinar k tal que  $T_{k+1} = (-1)^k \binom{9}{k} x^2$ Portanto, deve ser  $27 - 5k = 2 \Rightarrow k = 5$ 

## Resposta:

O coeficiente 
$$x^2$$
 de  $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^9$  é  $\left(-1\right)^5 \left(\frac{9}{5}\right) = -126$ 





Binômio de Newton

14.18

#### Resumo:

Definição de binômio: a + b

Teorema binomial (ou Binômio de Newton):

$$(a + b)^{n} = \sum_{r=0}^{n} C_{n}^{r} a^{n-r} b^{r} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{+}$$

## Observações:

- (1) Os coeficientes da expansão de (a + b)<sup>n</sup> são os elementos da linha n do triângulo de Pascal.
- (2) A expansão de  $(a + b)^n$  tem n + 1 termos
- (3) O termo r + 1 da expansão de  $(a + b)^n$  é  $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$

cederj

## Notação:

$$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{r}} := \mathbf{C}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{r}}$$

## Propriedade:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^{\mathbf{n}} = \sum_{k=0}^{\mathbf{n}} {n \choose k} \mathbf{a}^{\mathbf{n}-\mathbf{k}} \mathbf{b}^{\mathbf{k}} = \sum_{k=0}^{\mathbf{n}} {n \choose k} \mathbf{a}^{\mathbf{k}} \mathbf{b}^{\mathbf{n}-\mathbf{k}}$$
$$= \sum_{k=0}^{\mathbf{n}} {n \choose \mathbf{n}-\mathbf{k}} \mathbf{a}^{\mathbf{k}} \mathbf{b}^{\mathbf{n}-\mathbf{k}}$$

ceder