Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação

Disciplina Fundamentos de Algoritmos para Computação

Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da AP1 - Segundo Semestre de 2017

Questões:

1. (1.5) Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Verifique se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, prove, se for falsa justifique.

   (a) $\{\emptyset\} \subseteq P(A)$, sendo $P(A)$ o conjunto de partes de A.

   Resposta: A afirmação é verdadeira, já que $\emptyset$ é um elemento do conjunto das partes de A ($P(A)$), e por consequência, $\{\emptyset\}$ é um subconjunto de $P(A)$.

   (b) $A - (B \triangle C) \subseteq (A - B) \cup (A - C)$.

   Resposta: A afirmação é verdadeira. Vamos analisar esta questão pelos diagramas de Venn dos conjuntos $A - (B \triangle C)$ e $(A - B) \cup (A - C)$.

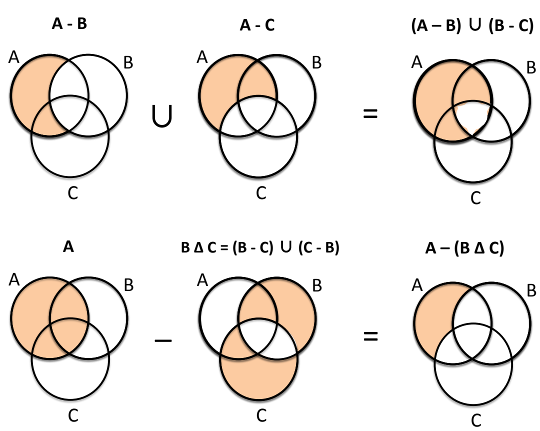

Figura 1: Diagramas que representa os conjunto $A - (B \triangle C)$ e $(A - B) \cup (A - C)$

Podemos observar que todos os elementos do conjunto $A-(B \triangle C)$ pertencem ao conjunto $(A-B)\cup(A-C)$, e portanto podemos concluir que $A-(B \triangle C) \subseteq (A-B)\cup(A-C)$.

(c) $n(A \cup B \cup C) < n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$

Resposta: A afirmativa é falsa. De fato, sabemos que $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$ e como $n(A \cap B \cap C) \geq 0$ tem-se que $n(A \cup B \cup C) \geq n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

Outro raciocínio é através de um contra-exemplo. Sejam os conjuntos:

$A = \{3, 4, 7\}$

$B = \{3, 4, 5, 6\}$

$C = \{1, 5, 7, 9\}$

Temos:

$A \cap B = \{3, 4\}$

$A \cap C = \{7\}$

$B \cap C = \{5\}$

$A \cap B \cap C = \emptyset$

Logo:

$n(A) = 3$

$n(B) = 4$

$n(C) = 4$

$n(A \cap B) = 2$

$n(A \cap C) = 1$

$n(B \cap C) = 1$

$n(A \cap B \cap C) = 0$

Sabemos que:

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 3 + 4 + 4 - 2 - 1 - 1 + 0 = 7$

Por outro lado, temos que:

$n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C) = 3+4+4-2-1-1 = 7.$

2. (1.5) Mostre por indução matemática que:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{(n-1).n}=1-\frac{1}{n} \quad \text{para todo natural} \quad n\geq 2.$$

Resposta:

Seja $P(n) : \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{(n-1).n}=1-\frac{1}{n}$, para $n\geq 2$.

BASE DA INDUÇÃO: Para $n=2$, o lado esquerdo da equação resulta em: $\frac{1}{(2-1)2}=\frac{1}{2}$.

O lado direito é: $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Como ambos os lados são iguais, a base da Indução está verificada.

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Suponha que $P(k) : \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{(k-1)k}=1-\frac{1}{k}$ seja verdadeira para $k\geq 2$.

PASSO DA INDUÇÃO: Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeira para $k\geq 2$, então $P(k+1) : \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{(k-1)k}+\frac{1}{((k+1)-1)(k+1)}=1-\frac{1}{(k+1)}$ também é verdadeira. De fato,

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{(k-1)k}}_{\text{Hipótese de Indução}}+\frac{1}{k(k+1)}=$$

$$1-\frac{1}{k}+\frac{1}{k(k+1)}=$$

$$1+\frac{-(k+1)+1}{k(k+1)}=$$

$$1+\frac{-k-1+1}{k(k+1)}=$$

$$1-\frac{k}{k(k+1)}=$$

$$1-\frac{1}{k+1}$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeira.

Portanto, pelo Princípio de Indução Matemática , temos que $P(n): \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{(n-1).n} = 1 - \frac{1}{n}$ é verdadeira pelo Princípio de indução matemática, para todo $n \geq 2$.

3. (2.0) De quantos maneiras:

(a) podemos dividir 8 pessoas em 2 grupos de 4 pessoas cada? Justifique.

Resposta: Escolha 4 das 8 pessoas para formar um grupo, o que pode ser feito de $C(8,4)$ modos. Restando 4 pessoas para formar o outro grupo de 4 pessoas, o que pode ser feito de $C(4,4)$ modos. Observemos que, se fizermos $C(8,4) \times C(4,4)$ estamos repetindo subdivisões.

Por exemplo, uma subdivisão é:
GRUPO 1: formado por pessoas 1,2,3,4
GRUPO 2: formado por pessoas 5,6,7,8.

Uma outra subdivisão seria:
GRUPO 1: formado por pessoas 5,6,7,8
GRUPO 2: formado por pessoas 1,2,3,4.

Vemos que ambas as subdivisões são as mesmas. Vamos ter 2! subdivisões iguais. Logo, podemos dividir 8 pessoas em 2 grupos de 4 pessoas:

$$\frac{C(8,4) \times C(4,4)}{2!} =$$
$$\frac{\frac{8!}{4!4!} \times \frac{4!}{4!0!}}{2!} =$$
$$\frac{\frac{8!}{4!4!}}{2} = \frac{70}{2} = 35$$

(b) podemos escolher 6 pessoas, incluindo exatamente 2 mulheres, escolhidas arbitrariamente em um grupo 4 mulheres e de 7 homens? Justifique.

Resposta: Como o grupo de 6 pessoas deve conter exatamente 2 mulheres, então vamos analisar as mulheres primeiro. Temos que o número de escolhas de 2 mulheres dentre 4 corresponde a C_4^2. Por outro lado, fixada 2 mulheres, temos que escolher 4 homens dentre 7, dando lugar a C_7^4 possibilidades. Logo, pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades de escolher 6 pessoas, incluindo exatamente 2 mulheres é $C_4^2.C_7^4 = \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{7!}{4!3!} = 6 \times 35 = 210$.

4. (1.2) Calcule a quantidade de números naturais de 5 algarismos distintos que não contêm o digito 9. Justifique.

   Resposta: Se um número natural possui 5 dígitos, então seu primeiro dígito não pode ser 0. Como o número 9 não figura então temos 8 possíveis algarismos para o primeiro dígito, já para o segundo dígito temos novamente 8 possibilidades, pois o zero pode ser contabilizado e os algarismos são distintos, o terceiro dígito possui 7 possíveis algarismos, o quarto, 6 e o último, 5 possibilidades.

   Portanto pelo princípio multiplicativo o total de 5 algarismos distintos nos quais não contém o número 9 é $8.8.7.6.5 = 13440$. Observemos que $8.8.7.6.5 = 8A_8^4$.

5. (2.3) Considere a palavra **I R R E D U T I B I L I D A D E**.

   (a) Quantos anagramas podem ser formados a partir de suas letras? Justifique.

   Resposta: A palavra **I R R E D U T I B I L I D A D E** é composta por 16 letras, das quais 4 são I, 3 são D, 2 são R, 2 são E, 1 é U, 1 é T, 1 é B, 1 é L e 1 é A. Nessas circunstâncias, sabemos que o número de anagramas distintos dessa palavra é dado por:

$$P_{16}^{4,3,2,2,1,1,1,1,1} = \frac{16!}{4!3!2!2!1!1!1!1!1!} = \frac{16!}{4!3!2!2!}$$

   Portanto, a palavra **I R R E D U T I B I L I D A D E** tem $\frac{16!}{4!3!2!2!}$ anagramas distintos.

(b) Quantos anagramas podem ser formados a partir de suas letras de maneira que todas as vogais fiquem consecutivas e todas as consoantes também? Justifique.

Resposta: A palavra **I R R E D U T I B I L I D A D E** tem 4 I's, 3 D's, 2 R's, 2 E's, 1 U, 1 T, 1 B, 1 L e 1 A totalizando 16 letras, das quais 8 são vogais e 8 consoantes. Como queremos os anagramas em que as vogais estão todas juntas e as consoantes também, vamos permutar as vogais e as consoantes em separados e em seguida tratar as vogais como uma única letra e as consoantes também.

PERMUTAR AS 8 VOGAIS: Temos $P_8^{4,2,1,1} = \dfrac{8!}{4!2!1!1!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ maneiras de posicionar as 8 vogais.

PERMUTAR AS 8 CONSOANTESS: Temos $P_8^{3,2,1,1,1} = \dfrac{8!}{3!2!1!1!1!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 2 = 3360$ maneiras de posicionar as 8 consoantes.

TRATAR AS VOGAIS COMO UMA ÚNICA LETRA E TRATAR AS CONSOANTES COMO UMA ÚNICA LETRA E PERMUTÁ-LAS: Considerando as 8 vogais como uma única letra e as 8 consoantes como uma única letra, temos então 2 letras para permutar. Podemos fazer isso de $P_2 = 2!$ formas.

Por fim, utilizando o princípio multiplicativo, temos $P_8^{4,2,1,1} \times P_8^{2,3,1,1,1} \times 2! = 840 \times 3360 \times 2$ anagramas da palavar **I R R E D U T I B I L I D A D E** que possuem todas as vogais consecutivas e todas as consoantes também.

6. (1.5) Determine, justificando, o número de maneiras de selecionar 15 brinquedos de 4 tipos diferentes, sendo que devem ser selecionados pelo menos um brinquedo de cada tipo. Observação: estamos supondo que cada tipo de brinquedo tem um estoque suficiente para que o problema tenha solução.

Resposta: Para encontrarmos o número de maneiras de selecionar 15 brinquedos de 4 tipos diferentes, sendo que devem ser selecionados pelo menos um brinquedo de cada tipo, basta encontrarmos o número de soluções inteiras positivas da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15,$$

onde x_i denota o número de brinquedos do tipo i, e $x_i \geq 1$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

Iremos fazer este problema recair em um outro problema em que sabemos resolver, pois $x_i \geq 1$ significa que $x_i - 1 \geq 0$, definindo $y_i = x_i - 1$, logo $y_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$:

Temos que $x_i = y_i + 1$, para $i = 1, 2, 3, 4$.

Desta forma, a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ transforma-se em $y_1 + 1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 = 15$, ou seja, $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$ com $y_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Logo, temos que o número de maneiras de selecionar 15 brinquedos de 4 tipos diferentes, sendo que devem ser selecionados pelo menos um brinquedo de cada tipo corresponde ao número de soluções não negativas da equação $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$ que é um problema de combinações com repetição:

$$CR_4^{11} = C_{4+11-1}^{11} = C_{14}^{11} = \frac{14!}{11!3!} = \frac{14.13.12.11!}{11!3!} = \frac{14.13.12}{3.2.1} = 364$$