Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein
Gabarito AD1 - Segundo Semestre de 2017

Nome -
Assinatura -

Questões:

1. (1.0) Verifique se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira prove, se for falsa justifique.

   (a) $\emptyset \in P(A)$, sendo A um conjunto arbitrário e $P(A)$ é o conjunto de partes de A.

   Resposta: Verdadeira. Como $\emptyset \subseteq A$, para todo conjunto A, temos que $\emptyset \in P(A)$, para todo conjunto A.

   (b) $\{\emptyset\} \nsubseteq P(A)$ onde $A = \{0, 1, a\}$.

   Resposta: Falsa. Observe que

   $$P(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{a\}, \{0, 1\}, \{0, a\}, \{1, a\}, \{0, 1, a\}\}$$

   Como $\emptyset \in P(A)$, temos que $\{\emptyset\} \subseteq P(A)$.

   (c) $A \cap (B \triangle C) \subseteq (A \cap B) \triangle (A \cap C)$, sendo A, B e C conjuntos arbitrários

   Resposta: Verdadeira. Sabendo que $(A \triangle B) = (A \cup B) - (A \cap B)$, observe a validade da afirmação através dos diagramas de Venn da Figura 1.

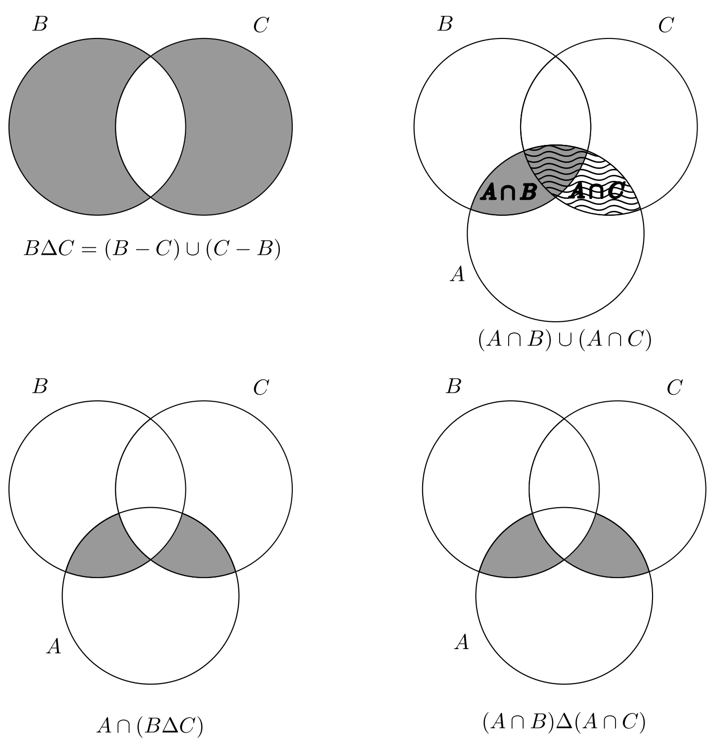

Figura 1: Diagramas de Venn para $A \cap (B \triangle C)$ e $(A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

2. (1.5) Mostre pelo Princípio da Indução Matemática que:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

para todo n natural.

Resposta: Seja $P(n) : 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

BASE DA INDUÇÃO: Quando $n = 1$ temos $1^3 = 1$. Como, $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$, temos que $P(1)$ é verdadeira.

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Suponha que $P(k) : 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ seja verdadeira $\forall k \in \mathbb{N}$.

PASSO INDUTIVO: Vamos mostrar que, se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1) : 1^3 + 2^3 + \ldots + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2((k+1)+1)^2}{4}$ é verdadeira.

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + \ldots + k^3}_{\text{H.I.}} + (k+1)^3 =$$

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 =$$

$$\frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} =$$

$$\frac{(k+1)^2(k^2 + 4(k+1))}{4} =$$

$$\frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} =$$

$$\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, temos que $P(n) : 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. (1.5) Numa turma de 50 alunos foi feita uma pesquisa relativa ao estudo das línguas inglês, francês e espanhol. Obteve-se que 60% da turma estuda inglês, 30% estuda francês, 20% espanhol, sendo que 6% estuda francês e espanhol, 10% francês e inglês, 8% inglês e espanhol e 2% estuda inglês, francês e espanhol. Determine a quantidade de alunos da turma que não estudam nenhuma dessas três línguas. Justifique.

   Resposta: Considere os seguintes conjuntos:
   $I = \{$ conjunto dos alunos que estudam inglês $\}$
   $E = \{$ conjunto dos alunos que estudam espanhol $\}$
   $F = \{$ conjunto dos alunos que estudam francês $\}$
   $U = \{$ conjunto de todos os alunos da turma$\}$

   Quer-se determinar a quantidade de alunos que não estudam nem inglês, nem espanhol e nem francês. Tal número pode ser determinado utilizando a noção de complemento: $n(U) - n(I \cup F \cup E)$. Pelo Princípio da Inclusão e Exclusão, temos:

   $n(I \cup F \cup E) = n(I) + n(F) + n(E) - n(I \cap F) - n(I \cap E) - n(F \cap E) + n(I \cap F \cap E)$

   CARDINALIDADES DOS CONJUNTOS:

   Sabendo que $n(U) = 50$, temos:
   $n(I) = \frac{60}{100} \times 50 = 30$,
   $n(F) = \frac{30}{100} \times 50 = 15$,
   $n(E) = \frac{20}{100} \times 50 = 10$,
   $n(I \cap F) = \frac{10}{100} \times 50 = 5$,
   $n(I \cap E) = \frac{8}{100} \times 50 = 4$,
   $n(F \cap E) = \frac{6}{100} \times 50 = 3$ e
   $n(I \cap F \cap E) = \frac{2}{100} \times 50 = 1$.

   Assim,

$$n(I \cup F \cup E) = 30 + 15 + 10 - 5 - 4 - 3 + 1 = 44.$$

Daí,

$$n(U) - n(I \cup F \cup E) = 50 - 44 = 6.$$

Logo, 6 alunos da turma não estudam nem inglês, nem espanhol e nem francês.

4. (1.5) Luana convidou 25 amigos para sua festa de aniversário sendo que 5 desses amigos devem compartilhar uma mesa circular junto à aniversariante. De quantas maneiras diferentes podem 5 dos 25 amigos sentarem à mesa circular quando:

   (a) não importa o lugar em que as pessoas sentam à mesa. Justifique.

   Resposta: Neste caso, basta escolhermos os 5 amigos que sentarão à mesa. Temos $C_{25}^{5} = \frac{25!}{20!5!}$ maneiras distintas de fazer esta escolha.

   (b) importa a posição em que as pessoas sentam à mesa. Justifique.

   Resposta: Neste caso, após escolhidos os 5 ocupantes da mesa (como no item a)), vamos posicioná-los à mesa junto com a aniversariante utilizando permutação circular. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, existem: $C_{25}^{5} \times PC(6) = \frac{25!}{20!5!} \times (6-1)! = 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21$ formas distintas dos amigos sentarem à mesa.

5. (1.5) O número de inscrição de um aluno em uma universidade é composto de 6 algarismos dentre $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9. O primeiro algarismo pode ser 0. Determine a quantidade de números de inscrição em cada um dos seguintes casos:

   (a) todos os algarismos são diferentes. Justifique.

   Resposta: Como todos os algoritmos devem ser distintos e não há restrição para o primeiro algarismo, temos $A_{10}^{6} = \frac{10!}{4!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$ números de inscrição em que todos os 6 algarismos são distintos.

(b) todos os algarismos são pares, tem pelo menos um algarismo 8 e podem aparecer repetidos. Justifique.

Resposta: Neste caso, como só podemos ter algarismos pares, vamos utilizar apenas os algarismos $0, 2, 4, 6, 8$ para compor o número de matrícula. Além disso, como o algarismo 8 deve figurar pelo menos uma vez, vamos utilizar a noção de complemento para solucionar a questão, ou seja, vamos subtrair do total de números de matrícula com 6 algarismos pares, a quantidade de números de matrícula com 6 algarismos pares nos quais o 8 não aparece. O total de números de matrícula com 6 algarismos pares é dado por $AR_5^6 = 5^6$. A quantidade de números de matrícula com 6 algarismos pares nos quais o 8 não figura é dada por: $AR_4^6 = 4^6$. Logo, pela noção de complemento, a quantidade de números de matrícula com 6 algarismos pares nos quais o algarismo 8 aparece pelo menos uma vez é $5^6 - 4^6$.

6. (1.5) Quantos são os anagramas da palavra

M A C R O E C O N O M I A

em cada um dos seguintes casos:

(a) sem nenhuma restrição? Justifique.

Resposta: A palavra MACROECONOMIA possui 2 M's, 2 A's, 2 C's, 1 R, 3 O's, 1 E, 1 N, 1 I, totalizando 13 letras. Como nenhuma restrição foi imposta, o número de anagramas da palavra MACROECONOMIA é dado por $P_{13}^{2,2,2,1,3,1,1,1} = \frac{13!}{2!2!2!3!}$.

(b) que não possuem duas letras **A** juntas? Justifique.

Resposta: Vamos utilizar a noção de complemento, subtraindo do total de anagramas da palavra MACROECONOMIA, calculado no item (a), o número de anagramas que tem sempre 2 A's juntos. Para calcular esta quantidade de anagramas, vamos considerar as duas letras A como uma única letra e permutá-la junto das demais 11 letras. Assim, temos $P_{12}^{2,1,2,1,3,1,1,1} = \frac{12!}{2!2!3!}$. Portanto, temos $P_{13}^{2,2,2,1,3,1,1,1} - P_{12}^{2,1,2,1,3,1,1,1} = \frac{13!}{2!2!2!3!} \frac{12!}{2!2!3!}$ anagramas da palavra MACROECONOMIA que não possuem duas letras A juntas.

OUTRO RACIOCÍNIO:

Para solucionar esta questão, vamos excluir as letras A e permutar as demais. Para fazermos isso, temos $P_{11}^{2,2,1,3,1,1,1,} = \frac{11!}{2!2!3!}$ formas. Em seguida, vamos posicionar as letras A nos espaços entre essas letras já permutadas. Note que temos 12 espaços possíveis para alocar as letras A. Observe o esquema abaixo:

$$\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot\_\cdot$$

Os pontos representam as posições possíveis para as letras A. Destes 12 espaços, precisamos escolher 2 para posicionar as letras A. Temos $C_{12}^{2} = \frac{12!}{10!2!} = 66$ maneiras de fazer isso. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, temos $\frac{11!}{2!2!3!} \times 66 = \frac{11 \times 11!}{4}$ anagramas que não possuem duas letras A juntas.

(c) que começam por consoante? Justifique.

Resposta: Vamos analisar os casos possíveis que começam por consoantes.

- Anagramas que começam com M:
  Fixando a letra M na primeira posição, restam 12 letras as serem permutadas: 1 M, 2 A's, 2 C's, 1 R, 3 O's , 1 E, 1 N, 1 I. Assim, temos $P_{12}^{1,2,2,1,3,1,1,1} = \frac{12!}{2!2!3!}$ anagramas que começam com M.
- Anagramas que começam com C:
  Fixando a letra C na primeira posição, restam 12 letras as serem permutadas: 2 M's , 2 A's, 1 C's, 1 R, 3 O's , 1 E, 1 N, 1 I. Assim, temos $P_{12}^{2,2,1,1,3,1,1,1} = \frac{12!}{2!2!3!}$ anagramas que começam com C.
- Anagramas que começam com R:
  Fixando a letra R na primeira posição, restam 12 letras as serem permutadas: 2 M's, 2 A's, 2 C's, 3 O's , 1 E, 1 N, 1 I. Assim, temos $P_{12}^{2,2,2,3,1,1,1} = \frac{12!}{2!2!2!3!}$ anagramas que começam com R.

- Anagramas que começam com N:
  Fixando a letra N na primeira posição, restam 12 letras as serem permutadas: 2 M's, 2 A's, 2 C's, 1 R, 3 O's , 1 E, 1 I. Assim, temos $P_{12}^{2,2,2,3,1,1,1} = \frac{12!}{2!2!2!3!}$ anagramas que começam com N.

Como os casos descritos são mutuamente exclusivos, pelo Princípio Aditivo, o número de anagramas da palavra MACROECONOMIA que começam com consoante é dado por $\frac{12!}{2!2!3!} + \frac{12!}{2!2!3!} + \frac{12!}{2!2!2!3!} + \frac{12!}{2!2!2!3!} = 2 \times \frac{12!}{2!2!3!} + 2 \times \frac{12!}{2!2!2!3!} = \frac{12!}{2!3!} + \frac{12!}{2!2!3!}$.

7. (1.5) Um mercadinho tem um estoque de 70 laranjas, 30 maçãs e 15 abacaxis. Determine o número de maneiras de escolher no máximo 14 dessas frutas, de maneira que, dentre essas 14 frutas, tenha pelo menos 3 laranjas e 1 abacaxi. Justifique.

   Resposta: Vamos modelar o problema da seguinte forma: sejam l, m, a as quantidades escolhidas de laranja, maçã e abacaxi, respectivamente. Quer-se escolher, no máximo, 14 dessas frutas. Portanto, temos a seguinte inequação que modela o problema:

$$l + m + a \leq 14 \quad (I)$$

   Como o número de laranjas escolhidas deve ser no mínimo 3 e o número de abacaxis, no mínimo, 1, temos que $l \geq 3$ e $a \geq 1$. Queremos obter, portanto, o número de soluções inteiras não negativas para a inequação (I), tais que $l \geq 3$ e $a \geq 1$. Para tal, vamos reescrever a inequação (I) de maneira equivalente, como uma equação, adicionando uma variável de folga $f \geq 0$, obtendo a equação (II).

$$l + m + a + f = 14 \quad (II)$$

   Note ainda que as variáveis l e a não são não negativas. Vamos reescrevê-las em função das variáveis não negativas l' e a' da seguinte forma:

$$l = l' + 3 \quad \text{e} \quad a = a' + 1, \;\; l' \geq 0, a' \geq 0$$

Substituindo, na equação (II), l por $l' + 3$ e a por $a' + 1$, obtemos a equação (III) que é equivalente a (II):

$$l' + 3 + m + a' + 1 + f = 14$$

$$l' + m + a' + f = 10, \quad l', m, a' \geq 0 \quad (III)$$

O número de soluções inteiras e não negativas para a equação 3 é dado por: $CR_4^{10} = C_{4+10-1}^{10} = C_{13}^{10} = \frac{13!}{10!3!} = 13 \times 11 \times 2$.

Logo, o número de maneiras de escolhermos no máximo 14 dessas frutas, de modo que tenhamos pelo menos 3 laranjas e 1 abacaxi, é $13 \times 22 = 286$.