Aula 12: Combinações com Repetição

Conteúdo:

- **T**Introdução
- Combinação com repetição
- Número de combinações com repetição

Introdução:

Exemplo 1 (revisão):

De quantos modos podemos colocar três binários iguais a 1 e cinco iguais a 0 em 8 posições?

Resolução 1:

Raciocínio 1 (usando permutações com repetição)

Ilustração

Observação:

Cada possibilidade corresponde a uma seqüência de 8 binários com três 1's e cinco 0's.







Exemplo 1 (raciocínio 1):

- Reformulação 1

Quantas seqüências de 8 números binários com exatamente três 1's e cinco 0's podem ser formados? elementos: binários (0, 1)

Resposta 1:

O número de seqüências de 8 binários com 3 iguais a 1 e 5 iguais a 0 corresponde ao número de permutações com repetição de 8 elementos com 3 iguais a 1 e 5 iguais a 0, ou seja, $P_8^{3,5} = \frac{8!}{3! \, 5!} = 56$





Exemplo 1 (continuação):

Observação:

Outros enunciados equivalentes:

- 1 Quantas seqüências de 8 números <u>binários</u> com exatamente <u>três</u> 1's podem ser formuladas?
- 2 Quantas seqüências de 8 números <u>binários</u> com exatamente <u>cinco</u> 0's podem ser formuladas?





Exemplo 1 (resolução 2):

De quantos modos podemos colocar três binários iguais a 1 e cinco iguais a 0 em 8 posições?

Raciocínio 2: (usando combinações simples)

Ilustração

Atenção: <u>Fixadas</u> as posições para os três 1's <u>automaticamente</u> estão <u>fixadas</u> as <u>posições</u> para os <u>cinco</u> 0's

Reformulação 2

De quantos modos podemos selecionar 3 posições entre 8? elementos diferentes: posições (p₁, p₂, ..., p₈)



Exemplo 1 (continuação raciocínio 2):

Resposta 2:

O número de combinações simples de 8 elementos

tomados 3 a 3 é C(8, 3) =
$$\frac{8!}{3! (8-3)!}$$
 = $\frac{8!}{3! 5!}$ = 56

Resposta exemplo 1: Podemos colocar três 1's e cinco 0's em 8 posições de 56 modos diferentes.

→ Observações:

1 - Podemos fazer um raciocínio similar fixando agora as posições correspondentes aos cinco 0's
 (automaticamente estão fixadas as posições dos 1's, e obtemos como resultado C(8, 5))

$$2 - P_8^{5,3} = C(8,5) = C(8,8-5) = C(8,3) = \frac{8!}{5! \ 3!}$$





Exemplo 2: (Modelo matemático)

Queremos determinar o número de següências binárias finalizadas em 1 que podem ser formadas com cinco 0's e três 1's, que denominamos N.

Ilustração

 $oldsymbol{\mathrm{p}}_{2} \qquad oldsymbol{\mathrm{p}}_{3} \qquad oldsymbol{\mathrm{p}}_{4}$ $p_5 p_6$

Reformulação do problema

De quantos modos podemos colocar dois 1's e cinco 0's em 7 posições?

Resposta: N = C(7, 2) = C(7, 5) = 21

- Observação: 7 = 3 + 5 - 1

$$7 = 3 + 5 - 1$$

$$2 = 3 - 1$$



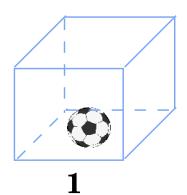
número de 1's número de 0's fixado 1

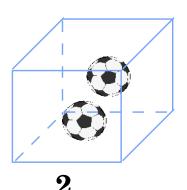
Exemplo 3:

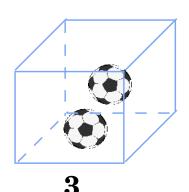
De quantos modos podemos colocar 5 bolas de igual cor em 3 caixas numeradas?

Resolução:

Ilustração 1







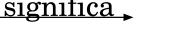
Representação matemática



significa.



significa.





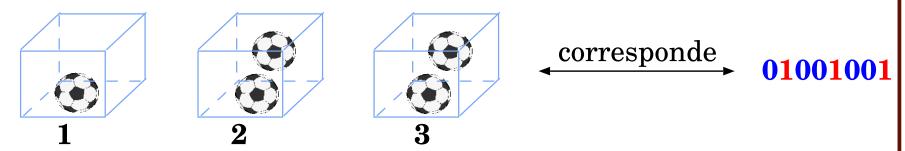


<u>significa</u> possibilidade -

seqüência de binários ceder

Exemplo 3 (continuação):

• Ilustração 1

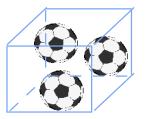


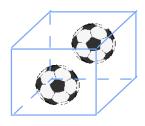
Uma <u>possibilidade</u> do problema está <u>associada</u> a uma <u>seqüência</u> de 3 + 5 binários, <u>finalizada</u> em 1 com o seguinte significado:

número de 0's à esquerda do primeiro 1: número de bolas na caixa 1 número de 0's entre o primeiro 1 e o segundo 1: número de bolas na caixa 2 número de 0's entre o segundo e o último 1: número de bolas na última caixa

• Ilustração 2

00010011 corresponde











Exemplo 3 (modelo matemático):

Reformulação 1

Quantas seqüências podemos formar com cinco 0's (bolas) e três 1's (caixas) que finalizem em 1?

Reformulação 2

Quantas seqüências podemos formar com cinco 0's e dois 1's?

Resposta dos problemas reformulados:

O número de seqüências é C(7, 2) = 21

Resposta do problema:

Podemos colocar 5 bolas de igual cor em 3 caixas numeradas de 21 modos diferentes.



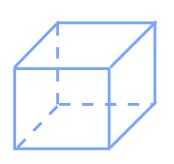


Exemplo 4:

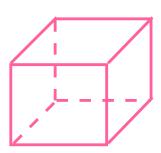
De quantos modos podemos selecionar 5 caixas escolhendo entre caixas de 3 cores diferentes?

Resolução:

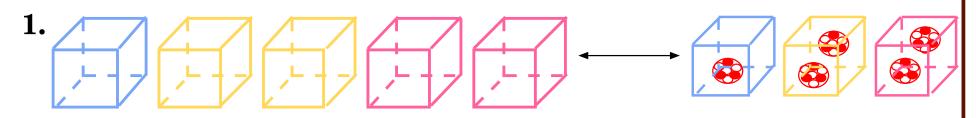
• Ilustração







Possibilidades







Exemplo 4 (continuação):

Possibilidades

Voltar

2.



- Conclusão
 - O problema tem a mesma resolução que o exemplo 3. (Os problemas dos exemplos 3 e 4 são <u>equivalentes</u>)



Exemplo 5:

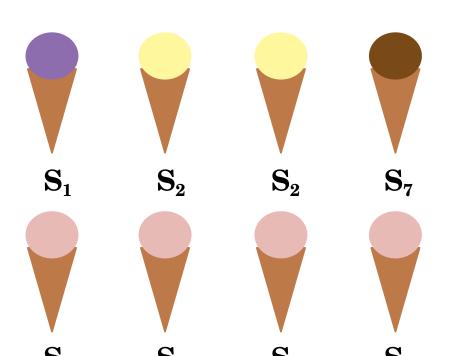
De quantos modos é possível comprar 4 sorvetes em casquinha de 1 sabor em uma loja que oferece 7 sabores diferentes?

Resolução:

Ilustração

Possibilidade 1

Possibilidade 2



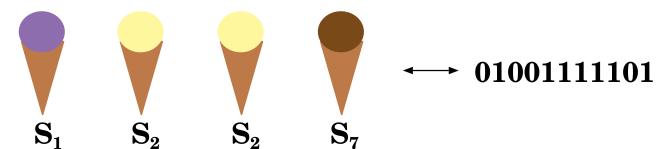




Exemplo 5 (continuação):

Ilustração

Possibilidade 1



Possibilidade 2









11100001111

Representação matemática

Sabores: objetos <u>diferentes</u>

$$(S_1, S_2, S_3, \dots, S_7)$$

Casquinhas: objetos iguais -

Possibilidade: sequência de quatro 0's e sete 1's

finalizada em 1





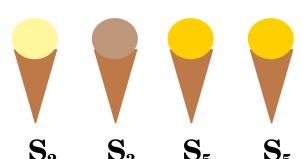
Exemplo 5 (continuação):

Reformulação matemática

Seja N o número de seqüências que podem ser formadas com quatro 0's e sete 1's finalizadas em 1. Calcular N.

Ilustração

1 possibilidade: **10101100111 ← →**



- Resposta matemática:

N =
$$C(4+7-1,7-1)$$
 = $C(10,4)$ = $\frac{10!}{4! \ 6!}$ = 210
número número fixada a última
de 0's de 1's posição com 1

¬ Resposta do problema:

Temos 210 modos diferentes de escolher 4 sorvetes de um sabor entre 7 sabores diferentes.





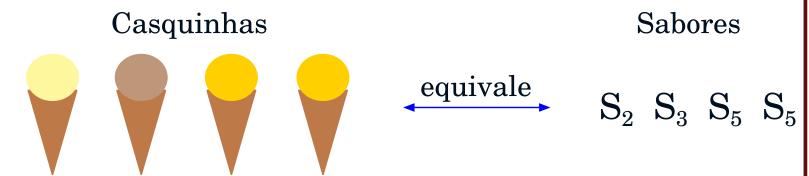


Observações:

1 - Reformulação do exemplo 5:

De quantos modos podemos escolher 4 <u>sabores</u>, que podem ser repetidos, entre 7 <u>sabores</u> diferentes.

Ilustração



2 - Os exemplos 3, 4 e 5 estão <u>associados</u> ao <u>mesmo</u> modelo matemático (exemplo 2) correspondente a seqüências de 0's e 1's <u>finalizadas</u> em 1.







Observações (continuação):

3 - Os exemplos 3 e 5 que consideram dois tipos de objetos (3 caixas diferentes e 5 bolas, 7 sabores diferentes e 4 casquinhas) são equivalentes a problemas que trabalham com os mesmos tipos de objetos diferentes (caixas, sabores), considerando possíveis repetições dos mesmos (5 caixas, 4 sabores)



Características dos exemplos

- Consideram-se n objetos <u>diferentes</u> (associados a 1)
 (3 caixas, 7 sabores)
- Entre os n objetos dados escolhem-se r que podem ser repetidos (associados a 0)
 (5 caixas, 4 sabores)
- Cada <u>possibilidade</u> está associada a uma <u>sequência</u> de n + r binários <u>finalizada</u> em 1, onde o 0 está repetido r vezes e o 1 está repetido n vezes.
- ─ Na obtenção do número de possibilidades aplica-se os princípios aditivo e multiplicativo (usa-se combinações simples ou permutações com repetição).



Combinação com repetição:



Definição

Considere n objetos <u>diferentes</u>, a₁, a₂, ..., a_n. Uma <u>combinação com</u> repetição de n objetos tomados r a r é uma <u>seleção</u> de r objetos, distintos ou não, escolhidos entre os n objetos dados.

• Ilustração:

Exemplo 4:

objetos: caixas diferentes (azul, amarela, rosa)

$$n = 3, r = 5$$

Uma combinação com repetição de 3 tomados 5 a 5

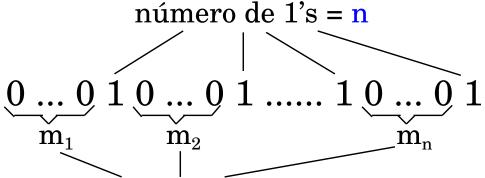






Atenção

Cada combinação com repetição de n objetos diferentes, a_1 , ..., a_n , selecionados \mathbf{r} a \mathbf{r} , repetidos ou não, está <u>associado</u> a uma seqüência de \mathbf{n} + \mathbf{r} binários finalizada em 1, onde o número 0 aparece \mathbf{r} vezes e o número 1 aparece \mathbf{n} vezes.



m_i := número de 0's = número de repetições de a_i, i = 1, ..., n

$$m_1 + m_2 + ... + m_n = r$$
, $0 \le m_i \le r$, $i = 1, ..., n$

— Observação: r≤n ou r>n





Número de combinações com repetição:



Problema

<u>Dados</u> n objetos diferentes, a₁, a₂, ..., a_n <u>encontrar</u> o número de combinações com repetição de n objetos tomados r a r.



Modelo matemático do problema

Encontrar o número de seqüências de n+r binários finalizadas em 1 onde o 0 está repetido r vezes e o 1 está repetido n vezes.







Propriedade

O número de combinações com repetição de n objetos tomados \mathbf{r} a \mathbf{r} , denominado $\mathbf{CR}_n^{\mathbf{r}}$, é dado por

$$\frac{CR_{n}^{r}}{R} = C(n + r - 1, r) = C(n + r - 1, n - 1)$$



Ilustração:

Exemplo 3:

$$n = 3, r = 5$$

$$CR_3^5 = C(3 + 5 - 1, 5) = C(7, 2) = 21$$





Exemplo 6:

Se jogarmos 10 moedas iguais, quantos resultados diferentes de cara e coroa podem ser obtidos?

Resolução:

elementos distintos:
$$\underbrace{cara}_{a_1}$$
, \underbrace{coroa}_{a_2}
 $n = 2$, $r = 10$

Resposta:

O número de resultados diferentes que podem ser obtidos é $CR_2^{10} = C(10 + 2 - 1, 10) = C(11, 10) = 1$



Observação:

Problema similar

De quantos modos podemos colocar 10 bolas em 2 caixas?

Desafio:

Coloque um enunciado similar pensando em sorvetes, sabores e casquinhas.

Desafio

Voltar

De quantos modos podemos comprar 10 sorvetes em casquinhas de um sabor em uma loja que oferece 2 sabores diferentes?

Exemplo 7:

Quantas são as soluções inteiras não negativas da equação x + y + z + w = 9?

Resolução: elementos diferentes:

4 objetos distintos a₁, a₂, a₃, a₄ associados às variáveis

x, y, z, w respectivamente

• Ilustração: 1 solução (1 possibilidade)

$$x = 3, y = 4, z = 0, w = 2 \longrightarrow a_1 a_1 a_2 a_2 a_2 a_2 a_2 a_4 a_4$$

Interpretação da solução: x = 3 : 3 unidades do elemento a_1

y = 4: 4 unidades do elemento a_2

z = 0: 0 unidades do elemento a_3

 $\mathbf{n} = \mathbf{4}, \mathbf{r} = \mathbf{9}$ $\mathbf{w} = 2 : 2 \text{ unidades do elemento } \mathbf{a}_4$

Resposta: O número de soluções inteiras não negativas da equação

dada é
$$CR_4^9 = C(9 + 4 - 1, 9) = \frac{12!}{9! \ 3!} = \frac{220}{9! \ 3!}$$



Combinações com repetição: N^o de combinação com repetição

12.26

Exemplo 8:

Encontrar o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, onde $x_2 > 3$.

Resolução:
$$\mathbb{Z}_+ := \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0 \}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$
 é equivalente a $x_1 + (x_2 - 4) + x_3 = 10 - 4$

Problema original

encontrar
$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

$$x_2 > 3$$

(a)

$$(\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{4})$$

$$(\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_2 + \mathbf{4})$$

Problema reformulado

encontrar
$$x_1, y_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+$$

$$x_1 + y_2 + x_3 = 6$$

(b)

• Ilustração:

$$x_1 = 2$$
, $x_2 = 4$, $x_3 = 4$

é uma solução de (a)

 $(y_2 = 4 - 4)$
 $(x_2 = 0 + 4)$

é uma solução de (b)

é uma solução de (b)



Exemplo 8 (continuação):

- Resolução do problema reformulado

$$x_1 + y_2 + x_3 = 6$$
, $x_1, y_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+$

elementos diferentes: 3 (associados a x_1, y_2, x_3)

$$n = 3, r = 6$$

Resposta do problema reformulado

O número de soluções inteiras não negativas da

equação
$$x_1 + y_2 + x_3 = 6$$
 é $CR_n^r = CR_3^6 = C(3+6-1, 6)$

$$= \frac{8!}{6! \ 2!} = 28$$

Resposta do problema

O número de soluções inteiras não negativas da

equação
$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$
 com $x_2 > 3$ é $CR_3^6 = 28$



Desafios:

Desafio

Voltar

(1) Coloque o enunciado de um problema similar ao do exemplo 8 em termos de caixas e bolas.

De quantos modos podem ser colocadas 10 bolas iguais em 3 caixas numeradas se a segunda caixa tem sempre mais de 3 bolas?

(2) Escreva a sequência binária correspondente a solução $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 4$ do problema 8.

0010000100001





Exemplo 9:

Quantas são as soluções inteiras não negativas de $x + y \le 5$?

Resolução:

Tente resolver o problema observando que:

 $x, y \in \mathbb{Z}_+$ é uma solução se verifica:

$$x + y = 5$$
 ou $x + y = 4$ ou $x + y = 3$ ou

$$x + y = 2$$
 ou $x + y = 1$ ou $x + y = 0$

Exemplo 9 (continuação):

Desafio

Voltar

Considere:

N := número de soluções inteiras não negativas de $x+y \le 5$

$$C := \{ (x, y) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ : x + y \leq 5 \}$$

Então N = |C|

Da observação anterior temos que

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 5\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 4\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 3\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+} : x+y = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{+}$$

Exemplo 9 (continuação):

Desafio

Voltar

Como os conjuntos C_0 , C_1 , C_2 , C_3 , C_4 e C_5 são disjuntos C_5 a C_5 , C_6 and C_7 and C_7 and C_7 are C_7 and C_7 and C_7 are C_7 are C_7 are C_7 and C_7 are C_7 and C_7 are C_7 are C_7 are C_7 are C_7 are C_7 and C_7 are C_7

$$C_i \cap C_j = \emptyset$$
 $0 \le i, j \le 5, i \ne j,$

resulta pelo princípio aditivo que

$$\begin{aligned} |C| &= \sum_{i=0}^{5} |C_i| = |C_0| + |C_1| + |C_2| + |C_3| + |C_4| + |C_5| \\ |C_0| &= CR_2^0 = C(2 + 0 - 1, 0) , |C_1| = CR_2^1 = C(2 + 1 - 1, 1) \end{aligned}$$

$$|C_2| = CR_2^2 = C(2 + 2 - 1, 2)$$
, $|C_3| = CR_2^3 = C(2 + 3 - 1, 3)$

$$|C_4| = CR_2^4 = C(2 + 4 - 1, 4)$$
, $|C_5| = CR_2^5 = C(2 + 5 - 1, 5)$

Resposta:

$$N = \frac{1!}{0! \ 1!} + \frac{2!}{1! \ 1!} + \frac{3!}{2! \ 1!} + \frac{4!}{3! \ 1!} + \frac{5!}{4! \ 1!} + \frac{6!}{5! \ 1!}$$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$
cederj

Resumo:

Sejam n objetos diferentes, a₁, a₂, ..., a_n.

Conceito:

Uma combinação com repetição de n objetos tomados r a r é uma seleção de r objetos escolhidos entre os n dados que podem ser repetidos.

<u>Características</u>:

Cada combinação com repetição de n objetos tomados r a r

está associado

a uma sequência de n + r binários <u>finalizada</u> em 1 onde o 0 está repetido r vezes e o 1 está repetido n vezes

o que corresponde

a uma combinação simples de (n+r-1) objetos tomados r a r

Propriedade:

Número de combinações com repetição de n objetos tomados r a r:

$$CR_n^r = C(n + r - 1, r) = C(n + r - 1, n - 1) = \frac{(n + r - 1)!}{r! (n - 1)!}$$