



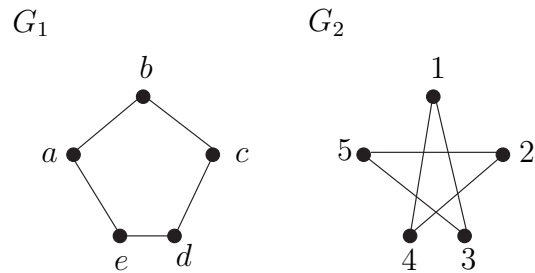
Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Fundamentos de Algoritmos para Computação
Professoras: Susana Makler e Sulamita Klein

Gabarito da EP da Aula 19

Observações:

1. Em algumas questões serão dadas o desenvolvimento e em outras apenas a resposta.
2. É importante que você tente resolver cada exercício justificando cada passo antes de ler o gabarito. Desta forma, você estará mais preparado para entender o raciocínio usado, será capaz de avaliar onde acertou e onde errou.
3. Lembre-se que muitos exercícios podem ser resolvidos usando raciocínios diferentes. Nós desenvolvemos apenas um, tente encontrar outras formas, ajuda a compreender melhor os conceitos.

-
1. Considere cada par de grafos abaixo e verifique se são isomorfos. Justifique sua resposta.



(a) **Resposta:** G_1 e G_2 são isomorfos.

Justificativa: Observe que $G_1 = C_5$ e $G_2 = \overline{C_5} = C_5$, ou seja, G_1 e G_2 representam o mesmo grafo com rotulações diferentes.

Mais formalmente, seja $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ tal que:

v	$f(v)$
a	1
b	3
c	5
d	2
e	4

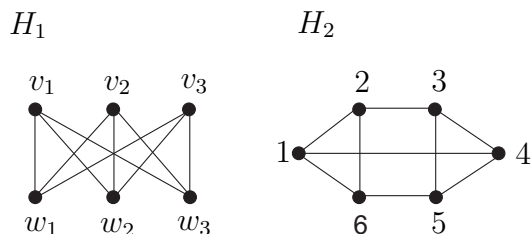
f é injetiva (1 a 1) e sobrejetiva. Para f ser isomorfa precisamos verificar se:

$(v, w) \in E(G_1) \Leftrightarrow (f(v), f(w)) \in E(G_2), \forall v, w \in V(G_1)$ tal que $(v, w) \in E(G_1)$.

$(a, b) \in E(G_1) \leftrightarrow (1, 3) \in E(G_2)$
 $(b, c) \in E(G_1) \leftrightarrow (3, 5) \in E(G_2)$
 $(c, d) \in E(G_1) \leftrightarrow (5, 2) \in E(G_2)$
 $(d, e) \in E(G_1) \leftrightarrow (2, 4) \in E(G_2)$
 $(e, a) \in E(G_1) \leftrightarrow (4, 1) \in E(G_2)$

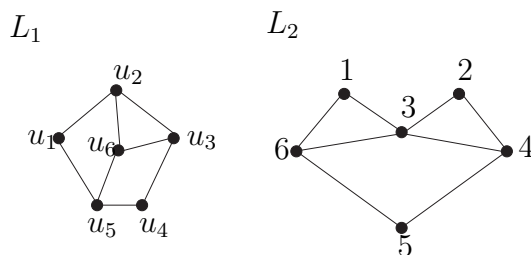
Logo, f é isomorfismo e G_1 é isomorfo a G_2 .

(b) **Resposta:** H_1 e H_2 não são isomorfos.



Justificativa: H_2 contém dois triângulos (K_3) induzidos pelos conjuntos de vértices $\{1, 2, 6\}$ e $\{3, 4, 5\}$ e H_1 não contém nenhum triângulo, logo H_1 e H_2 não são isomorfos.

(c) **Resposta:** L_1 e L_2 não são isomorfos.



Justificativa: Sabemos que dois grafos isomorfos tem necessariamente a mesma sequência de graus (consequência da propriedade que o isomorfismo preserva adjacências). A recíproca não é verdadeira, ou seja, grafos com sequência diferentes de graus não são isomorfos.

A sequência de graus de L_1 é: $(2, 2, 2, 3, 3, 3)$.

A sequência de graus de L_2 é: $(2, 2, 2, 3, 3, 4)$.

Logo, L_1 e L_2 não são isomorfos.

2. Verifique se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, prove, se for falsa dê um contra-exemplo.

- (a) Se G e H são isomorfos então eles têm o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas.

Resposta: Verdadeira.

Se G e H são isomorfos então:

(1) existe uma função $f : V(G) \rightarrow V(H)$ injetora e sobrejetora, e além disso:

$$(2) (v, w) \in E(G) \Leftrightarrow (f(v), f(w)) \in E(H).$$

De (1) temos que como f é injetora (1 a 1) e sobre isso significa que cada $v \in V(G)$ é correspondente a um único $u \in V(H)$ e vice-versa, isto é, a cada $u \in V(H)$ corresponde um único $v = f^{-1}(u) \in V(G)$. Logo, $|V(G)| = |V(H)|$.

De (1) e (2) temos que a cada aresta (v, w) corresponde a uma única aresta $(f(v), f(w)) \in E(H)$ e vice-versa. Logo, $|E(G)| = |E(H)|$.

- (b) Se G e H têm o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas então eles são isomorfos.

Resposta: Falsa.

Como contra-exemplo, podemos considerar os grafos L_1 e L_2 do exercício 1.

$$\begin{aligned} |V(L_1)| &= |V(L_2)| = 6 \\ |E(L_1)| &= |E(L_2)| = 8 \end{aligned}$$

Mas, eles não são isomorfos, como visto no exercício 1, item c.

- (c) Se G e H são grafos isomorfos então eles têm a mesma sequência de graus.

Resposta: Verdadeiro.

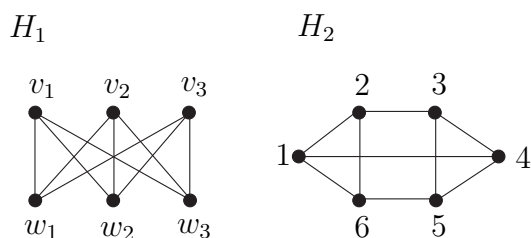
Como G e H são isomorfos então existe um isomorfismo f entre eles e o isomorfismo preserva adjacências, isto é, vértices correspondentes $v \in V(G)$ e $f(v) \in V(H)$ têm as mesmas adjacências e portanto o mesmo grau. E, como $|V(G)| = |V(H)|$ as sequências de graus de V e H são iguais.

Logo, possuem a mesma sequência de graus.

- (d) Se G e H têm a mesma sequência de graus então eles são isomorfos.

Resposta: Falsa.

Como contra-exemplo podemos considerar os grafos H_1 e H_2 do exercício 1.



Os grafos H_1 e H_2 possuem a mesma sequência de graus, que é: $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$, mas não são isomorfos como visto no exercício anterior.

3. Determine a matriz de adjacência e a matriz de incidência do grafo L_1 de 1.c.

Resposta:

A matriz de adjacência do grafo L_1 é:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

E, a matriz de incidência do grafo L_1 é:

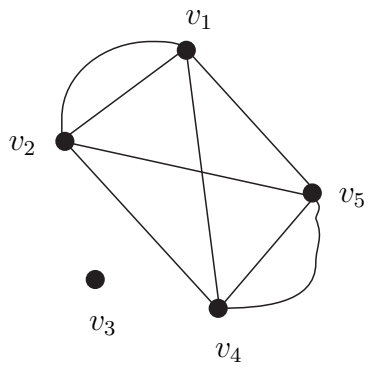
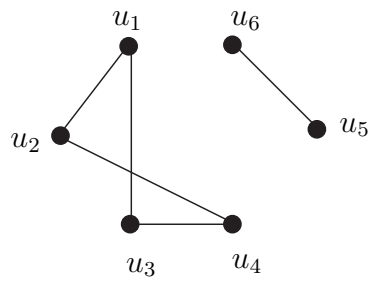
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Desenhe o grafo cuja matriz de adjacência é dada por:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Resposta: O grafo G correspondente a matriz de adjacência é:

5. Desenhe o grafo cuja matriz de incidência é dada por:



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resposta: O grafo H correspondente a matriz de incidência é: