Introdução à Informática

Álgebra de Boole

Ageu Pacheco e Alexandre Meslin

cederj

Álgebra de Boole

- Objetivo da Aula:

- Estudar os conceitos e regras que regem o projeto e funcionamento dos circuitos lógicos dos computadores digitais.

Álgebra de Boole

- Álgebra de Boole:

  Criada em 1854 por George Boole com o intuito de formalizar matematicamente o pensamento lógico.

Álgebra de Boole

- Variável lógica ou booleana:

  Uma variável lógica só pode assumir dois valores (estados):

  verdadeiro ou falso; ligado ou desligado; aceso ou apagado; fechado ou aberto; branco ou preto; sim ou não; “1” ou “0”.

Álgebra de Boole

- Operações lógicas básicas (primitivas):

São 3 as operações lógicas básicas:

1. Produto lógico ⇨ porta AND ($\cdot$)
2. Soma lógica ⇨ porta OR (+)
3. Negação ⇨ porta NOT ($-$)

Álgebra de Boole

- Todas as operações internas a um computador podem ser descritas por combinações destas 3 operações básicas.

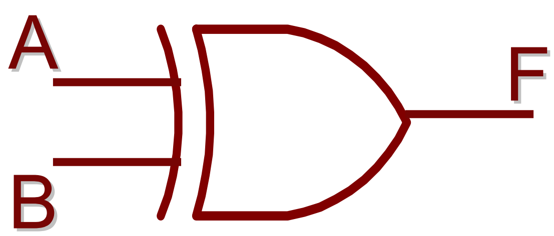
- Na realidade bastaria utilizar o AND com o NOT ou o OR com o NOT (conjuntos funcionalmente completos).

Álgebra de Boole

- Uma função lógica pode ser representada pela sua expressão algébrica, pela sua tabela verdade, pelo seu símbolo ou circuito lógico.

  Exemplo:

$$F(A,B) = \overline{A}.B + A.\overline{B}$$



A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Álgebra de Boole

- Função AND

Definição:

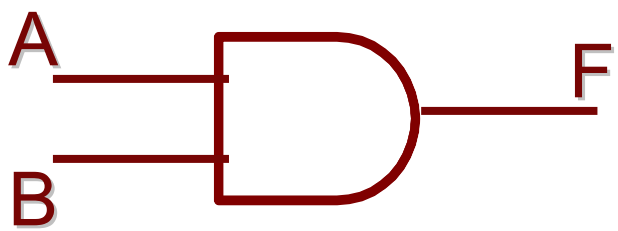
$$F(A,B,C,\ldots,N) = A.B.C.\ldots.N$$

$$F(A,B,C,\ldots,N) = 1 \text{ se e somente se } A=B=C=\ldots=N=1$$

Álgebra de Boole

- AND de duas variáveis:

$$F(A,B) = A.B$$



Símbolo lógico

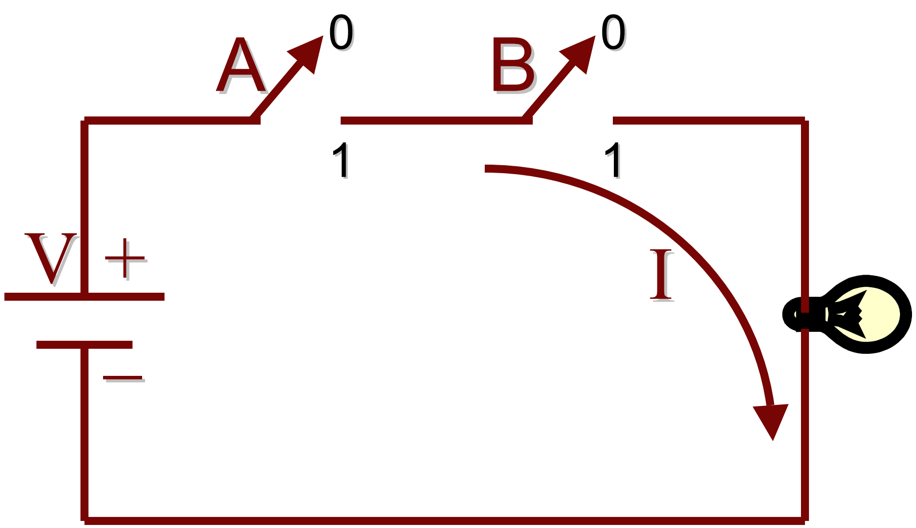
A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabela verdade

Álgebra de Boole

- AND de duas variáveis: (cont.)

$$F(A,B) = A.B$$



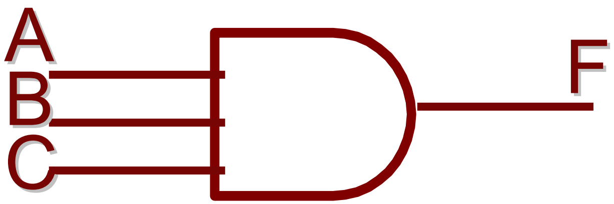
Circuito elétrico equivalente

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Álgebra de Boole

- AND de três variáveis:

$$F(A,B,C) = A.B.C$$



A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Álgebra de Boole

- Cada linha da tabela verdade relaciona uma combinação específica das variáveis de entrada ao valor assumido pela função na saída.
- O número total de linhas é igual a 2^n, onde n é o número de variáveis.

Álgebra de Boole

- Função OR

Definição:

$$F(A,B,C,...,N) = A+B+C+...+N$$

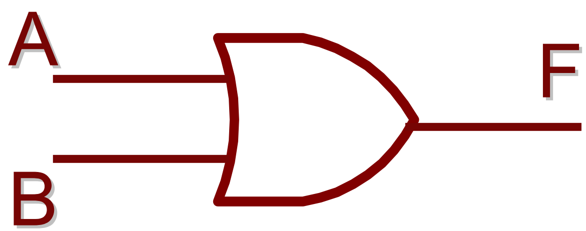
$F(A,B,C,...,N) = 1$ se e somente se $A=1$ ou $B=1$ ou ... ou $N=1$

cederj

Álgebra de Boole

- OR de duas variáveis:

$$F(A,B) = A+B$$



Símbolo lógico

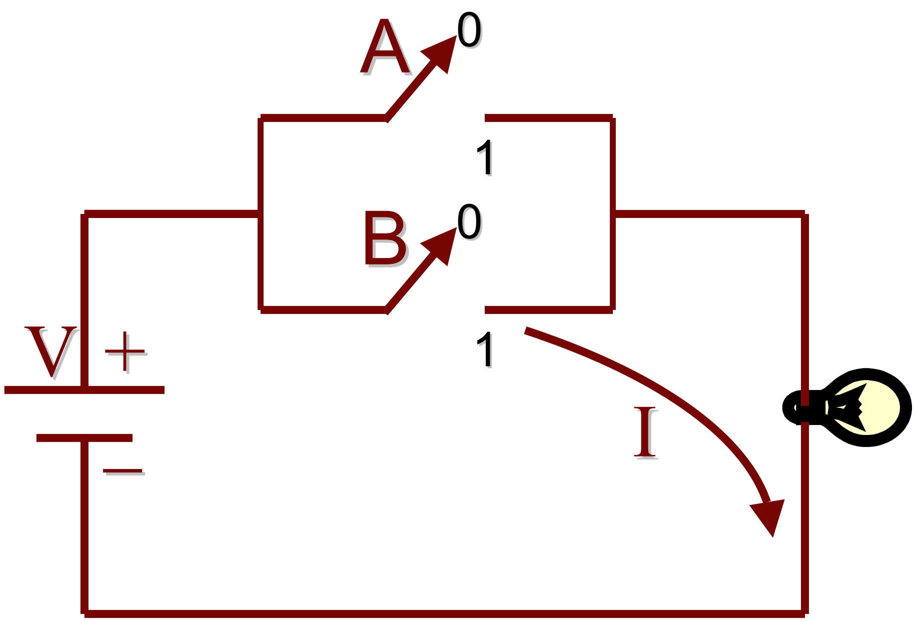
A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tabela verdade

Álgebra de Boole

- OR de duas variáveis: (cont.)

$$F(A,B) = A+B$$



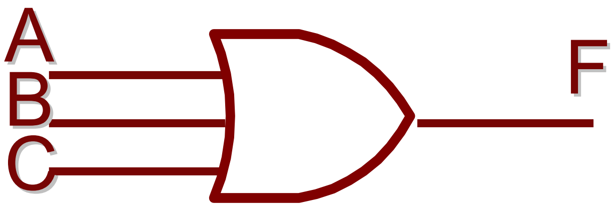
Circuito elétrico equivalente

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Álgebra de Boole

- OR de três variáveis:

$$F(A,B,C) = A+B+C$$



A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Álgebra de Boole

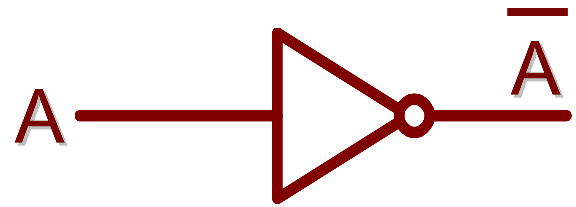
- Função NOT

Definição: $F(A) = \overline{A}$

A	F
0	1
1	0

$F(A) = 0 \quad \text{se} \quad A = 1$

$F(A) = 1 \quad \text{se} \quad A = 0$



Álgebra de Boole

- Outras funções lógicas importantes:
- Função NAND

Definição:

$$F(A,B,C,...,N) = \overline{A.B.C....N}$$

$$F(A,B,C,...,N) = 0 \text{ se e somente se } A=B=C=...=N=1$$

Álgebra de Boole

- NAND de duas variáveis:

$$F(A,B) = \overline{A.B}$$

Símbolo lógico

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tabela verdade

Álgebra de Boole

- Função NOR

Definição:

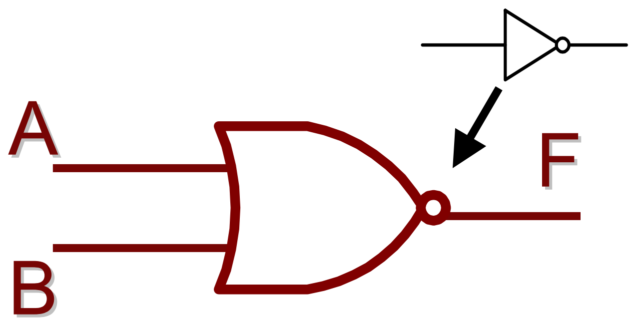
$$F(A,B,C,...,N) = \overline{A+B+C+...+N}$$

$$F(A,B,C,...,N) = 1 \text{ se e somente se } A=B=C=...=N=0$$

Álgebra de Boole

- NOR de duas variáveis:

$$F(A,B) = \overline{A+B}$$



Símbolo lógico

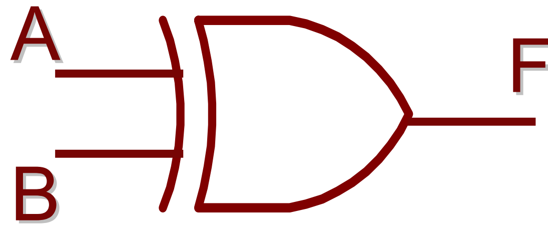
A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Tabela verdade

Álgebra de Boole

- Função OU-EXCLUSIVO (XOR)

$F(A,B) = A \oplus B$



A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Por inspeção na tabela verdade:

$$\text{F=1 se } \underbrace{\text{A=0 e B=1}} \text{ ou se } \underbrace{\text{A=1 e B=0}}$$

$$F(A,B) = \overline{A}.B + A.\overline{B}$$

Álgebra de Boole

- Relações da álgebra booleana:

- Postulados:

1a. $A = 1$ (se $A \neq 0$) 1b. $A = 0$ (se $A \neq 1$)
2a. $0.0 = 0$ 2b. $0+0 = 0$
3a. $1.1 = 1$ 3b. $1+1 = 1$
4a. $1.0 = 0$ 4b. $1+0 = 1$
5a. $\overline{1} = 0$ 5b. $\overline{0} = 1$

Álgebra de Boole

- Relações da álgebra booleana (cont.):

- <u>Teoremas:</u>

6a. $A.0 = 0$	6b. $A+0 = A$
7a. $A.1 = A$	7b. $A+1 = 1$
8a. $A.A = A$	8b. $A+A = A$
9a. $A.\overline{A} = 0$	9b. $A+\overline{A} = 1$
10a. $\overline{\overline{A}} = A$	10b. $A = \overline{\overline{A}}$

Álgebra de Boole

- Propriedades algébricas:

  Comutativa:

  11a. $AB = BA$ 11b. $A+B = B+A$

  Associativa:

  12a. $A(BC) = AB(C)$

  12b. $A+(B+C) = (A+B)+C$

  Distributiva:

  13a. $A(B+C) = AB + AC$

  13b. $A + BC = (A+B)(A+C)$

Álgebra de Boole

- Teorema da absorção:

14a. $A(A+B) = A$ 14b. $A+AB = A$

15a. $A(\overline{A}+B) = AB$ 15b. $A+\overline{A}B = A+B$

Álgebra de Boole

- Teoremas de De Morgan:

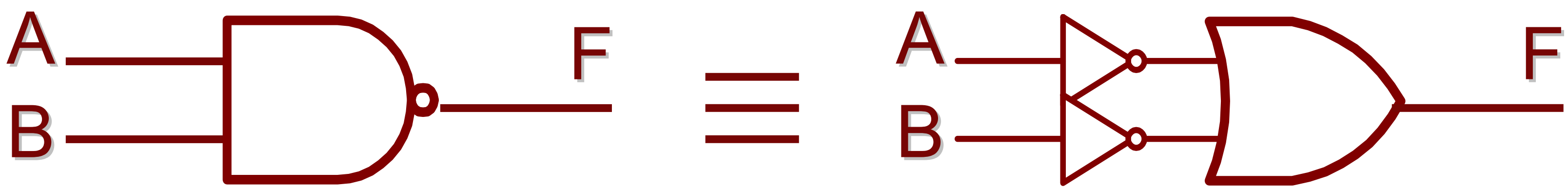
16a. $\overline{A.B.C...N} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} +...+\overline{N}$

16b. $\overline{A+B+C+...+N} = \overline{A} \,.\, \overline{B} \,.\, \overline{C} \,...\, \overline{N}$

Álgebra de Boole

- Consequências diretas das leis De Morgan:

1. $\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$



cederj

Álgebra de Boole

- Consequências diretas das leis De Morgan:

1. Prova pela tabela verdade:

$$F1(A,B) = \overline{A.B}$$

$$F2(A,B) = \overline{A} + \overline{B}$$

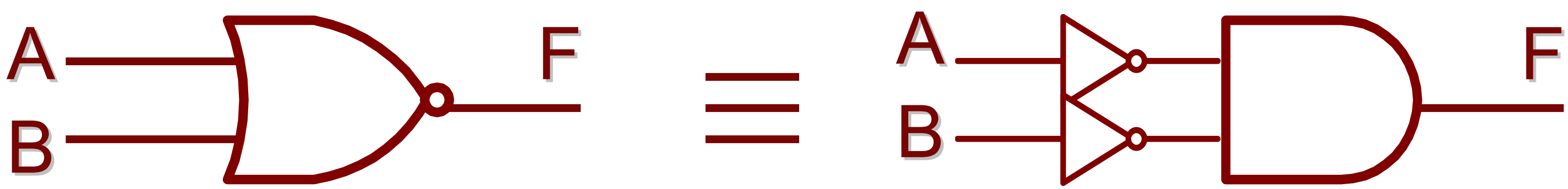
$$\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$$

A	B	F1	F2
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Álgebra de Boole

- Consequências diretas das leis De Morgan:

2. $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

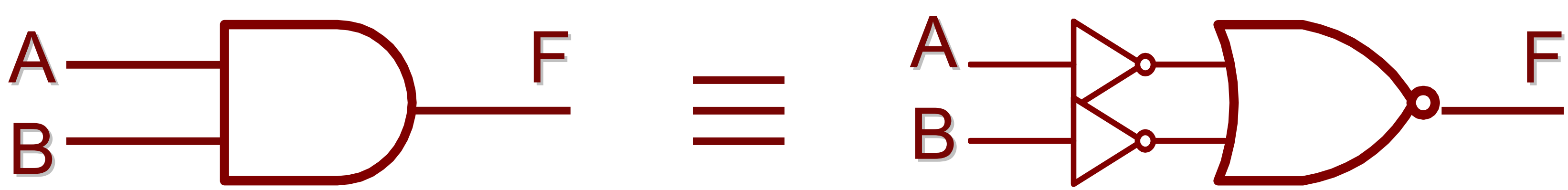


Álgebra de Boole

- Consequências diretas das leis De Morgan:

3. $\overline{A.B} = \overline{A}+\overline{B} \Rightarrow \overline{\overline{A.B}} = \overline{\overline{A} + \overline{B}} \Rightarrow$

$$A.B = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$$

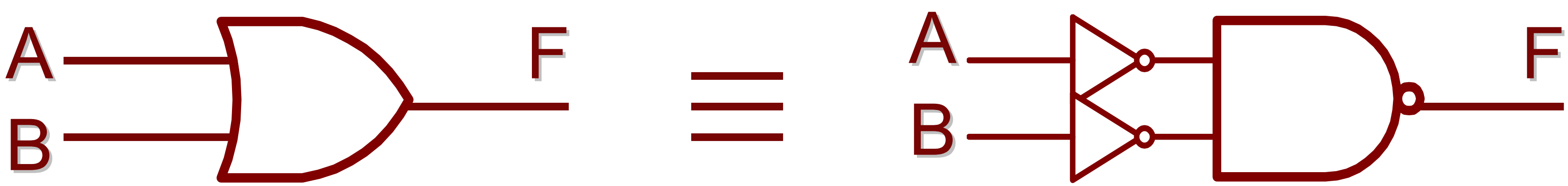


Álgebra de Boole

- Consequências diretas das leis De Morgan:

$$4. \quad \overline{A+B} = \overline{A}.\overline{B} \;\Rightarrow\; \overline{\overline{A+B}} = \overline{\overline{A}\;.\;\overline{B}} \;\Rightarrow$$

$$A+B = \overline{\overline{A}\;.\;\overline{B}}$$



Álgebra de Boole

- Exercícios:

1. Mostrar que $A + BC = (A+B)(A+C)$ 13b

$$(A+B)(A+C) = AA+AC+AB+BC =$$
$$= A+AC+AB+BC =$$
$$= A(\overset{1}{\cancel{1+C+B}})+BC$$
$$= A + BC$$

Álgebra de Boole

- Exercícios: (cont.)

2. Mostrar que $A + \overline{A}B = A + B \Rightarrow$ 15b

14b $\Rightarrow A + AB = A(1+B) = A$

$$A + \overline{A}B = \overbrace{A+AB}^{A} + \overline{A}B = A+(A+\overline{A})B =$$
$$= A + B$$

Álgebra de Boole

- Exercícios: (cont.)

3. Mostrar que $\overline{A \oplus B} = \overline{A} \oplus B$

$$\overline{A \oplus B} = \overline{\overline{A}B + A\overline{B}} \overset{M}{=} \overline{\overline{A}B} \,.\, \overline{A\overline{B}} \overset{M}{=}$$

$$\overset{M}{=} (A+\overline{B})(\overline{A}+B) = \underbrace{\cancel{A\overline{A}}}_{0}+AB+\overline{A}\,\overline{B}+\underbrace{\cancel{\overline{B}B}}_{0}$$

$$= AB + \overline{A}\,\overline{B}$$

Álgebra de Boole

- Exercícios: (cont.)

3. Mostrar que $\overline{A \oplus B} = \overline{A} \oplus B$ (cont.)

$X \oplus B = \overline{X}B + X\overline{B}$

Fazendo $X=\overline{A}$, temos:

$$\overline{A} \oplus B = \overline{\overline{A}}B + \overline{A}\,\overline{B} = AB + \overline{A}\,\overline{B} = A \oplus \overline{B}$$

Álgebra de Boole

- Exercícios: (cont.)

4. Mostrar que $AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$

$$AB+\overline{A}C+BC = AB+\overline{A}C+BC\underbrace{(A+\overline{A})}_{1} =$$

$$= AB + \overline{A}C + ABC + \overline{A}BC =$$

$$= AB(1+C)+\overline{A}C(1+B) = AB + \overline{A}C$$

cederj

Álgebra de Boole

- Exercícios: (cont.)

5. Simplifique a expressão lógica de F:

$$F(x,y,z) = \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz$$

$$= \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy(\bar{z}+z) = xy + \bar{x}yz + x\bar{y}z =$$

$$= y(\underbrace{x+\bar{x}z}_{15b}) + x\bar{y}z = y(x+z) + x\bar{y}z =$$

Álgebra de Boole

- Exercícios: (cont.)

5. (cont.)

$$F = xy + yz + x\bar{y}z = yz + x(\underbrace{y+\bar{y}z}_{15b}) =$$

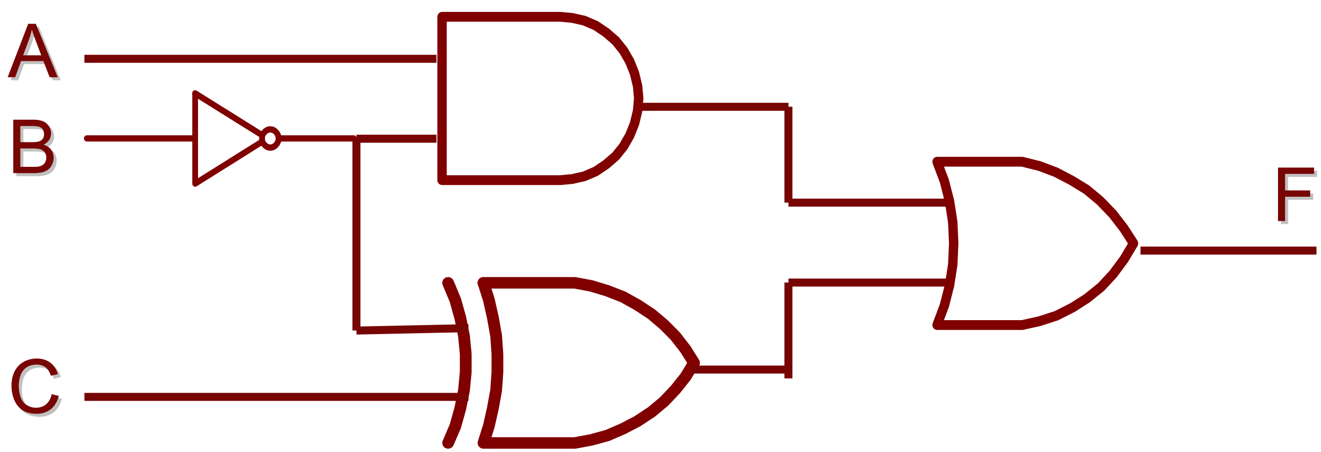
$$= yz + x(y+z)$$

$$F(x,y,z) = xy + xz + yz$$

Álgebra de Boole

- Exercícios: (cont.)

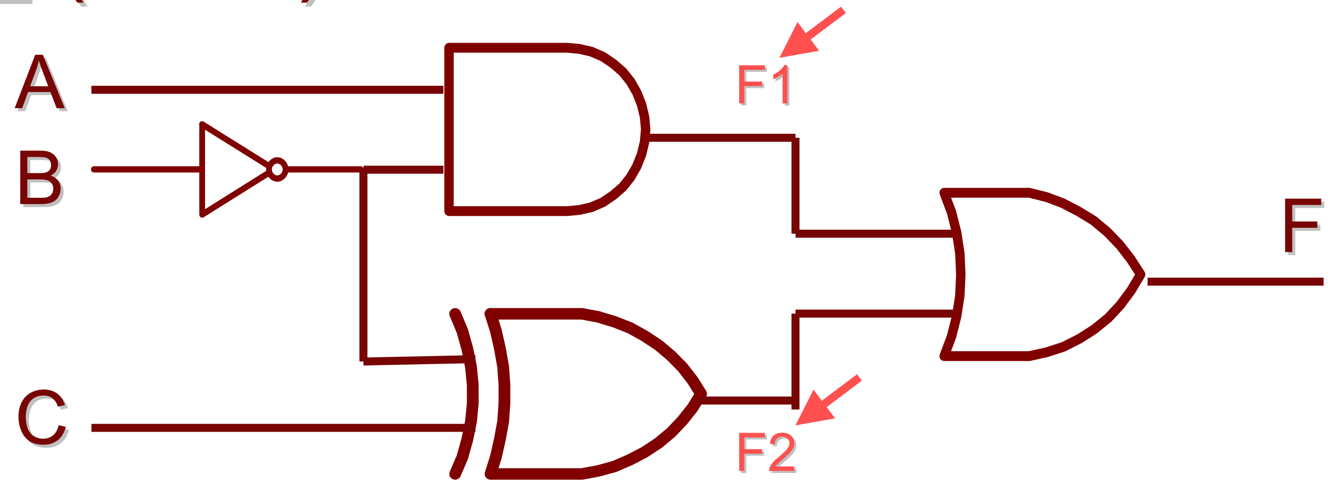
6. Determine a expressão lógica para a saída F no circuito abaixo:



Álgebra de Boole

- Exercícios: (cont.)

6. (cont.)



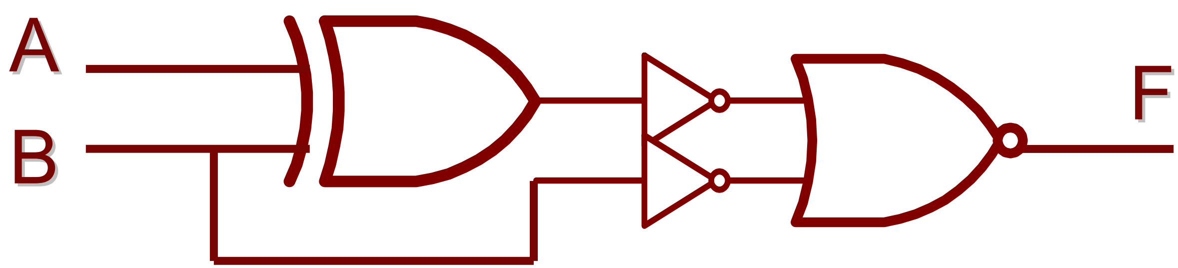
$$F1 = A\overline{B}\ ,\quad F2 = \overline{B} \oplus C = \overline{B}\,\overline{C} + BC$$

$$F = F1 + F2 = A\overline{B} + \overline{B}\,\overline{C} + BC$$

Álgebra de Boole

- Exercícios: (cont.)

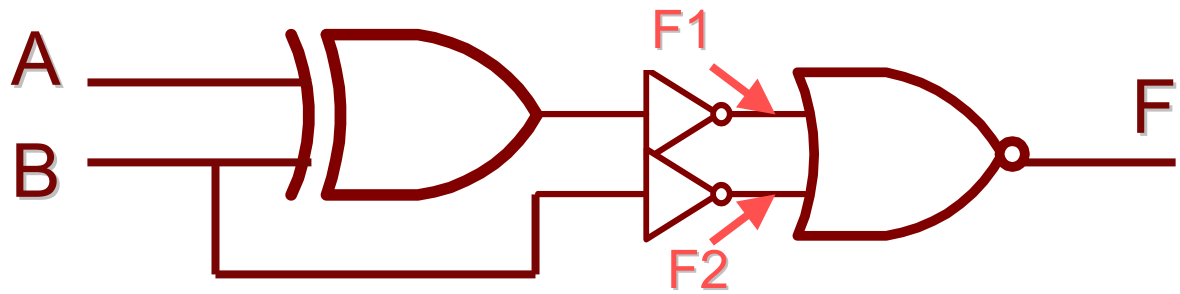
7. Dado o circuito abaixo, obtenha a expressão lógica mais simples que você puder para a saída F:



Álgebra de Boole

- Exercícios: (cont.)

7. (cont.)



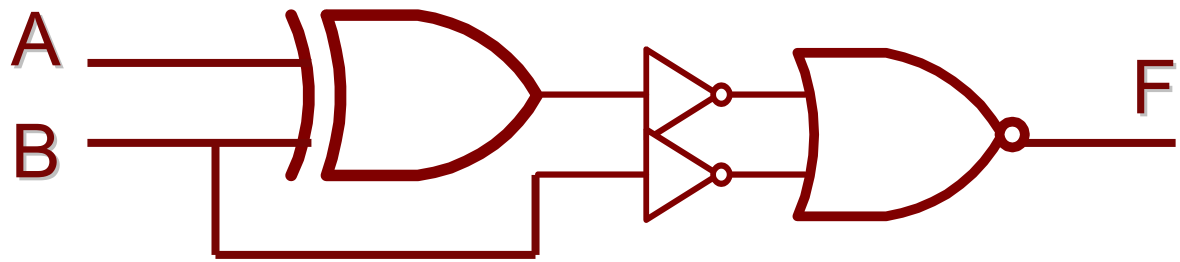
$$F1 = \overline{A \oplus B} = \bar{A}\bar{B} + AB\ ,\quad F2 = \bar{B}$$

$$F = \overline{F1+F2} = \overline{\bar{A}\underbrace{\bar{B}+AB+\bar{B}}} = \overline{\bar{B}\cancelto{1}{(1+\bar{A})}+AB} =$$

$$= \overline{\bar{B}+AB} = \overline{\bar{B}+A} \overset{M}{=} \bar{\bar{B}}.\bar{A} = \bar{A}B$$

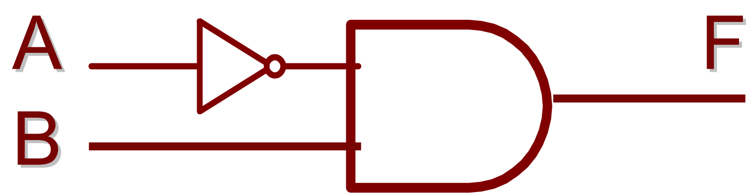
- Exercícios: (cont.)

7. (cont.)



$$\equiv$$

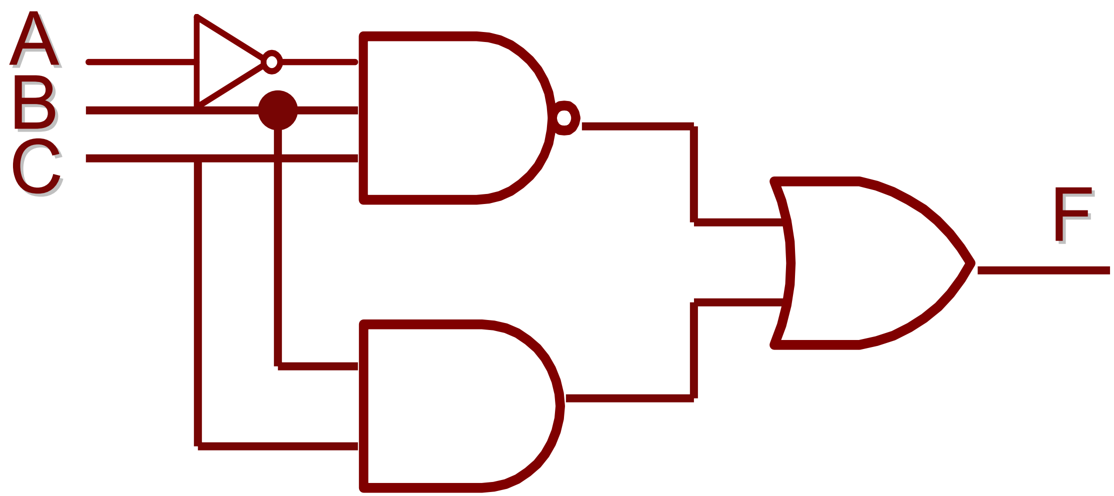
$$F(A,B) = \overline{A}B$$



- Exercícios: (cont.)

8. Desenhe o circuito correspondente a expressão abaixo:

$$F = \overline{\overline{A}BC} + BC$$



Álgebra de Boole

- Exercícios: (cont.)

9. Simplifique a expressão de F do exemplo anterior:

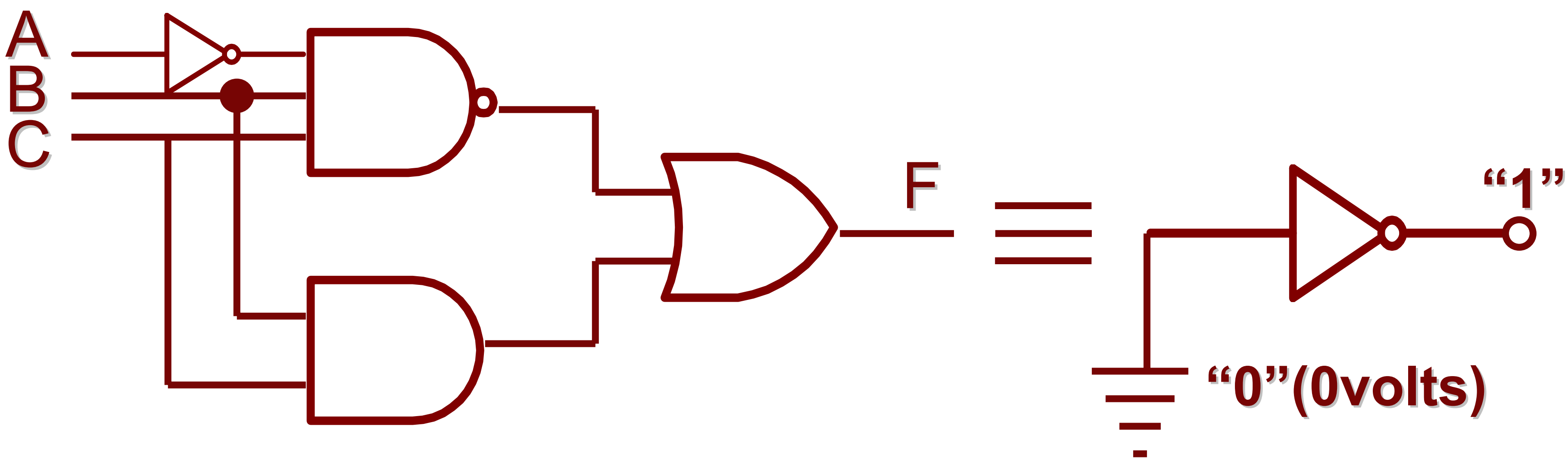
$$F = \overline{\overline{A}BC} + BC \overset{M}{=} A+\overline{B}+\underbrace{\overline{C} + BC}_{} =$$

$$= A+\underbrace{\overline{B}+\overline{C}+B}_{1} = A+1+\overline{C} = 1$$

Álgebra de Boole

- Exercícios: (cont.)

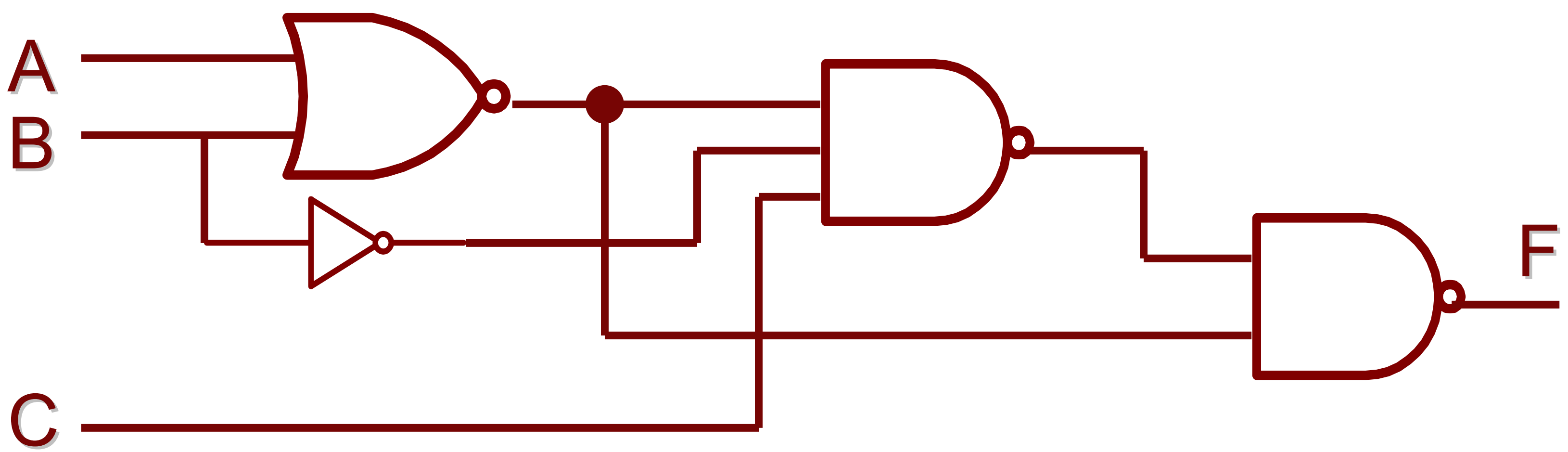
9. (cont.)



Álgebra de Boole

- Exercícios: (cont.)

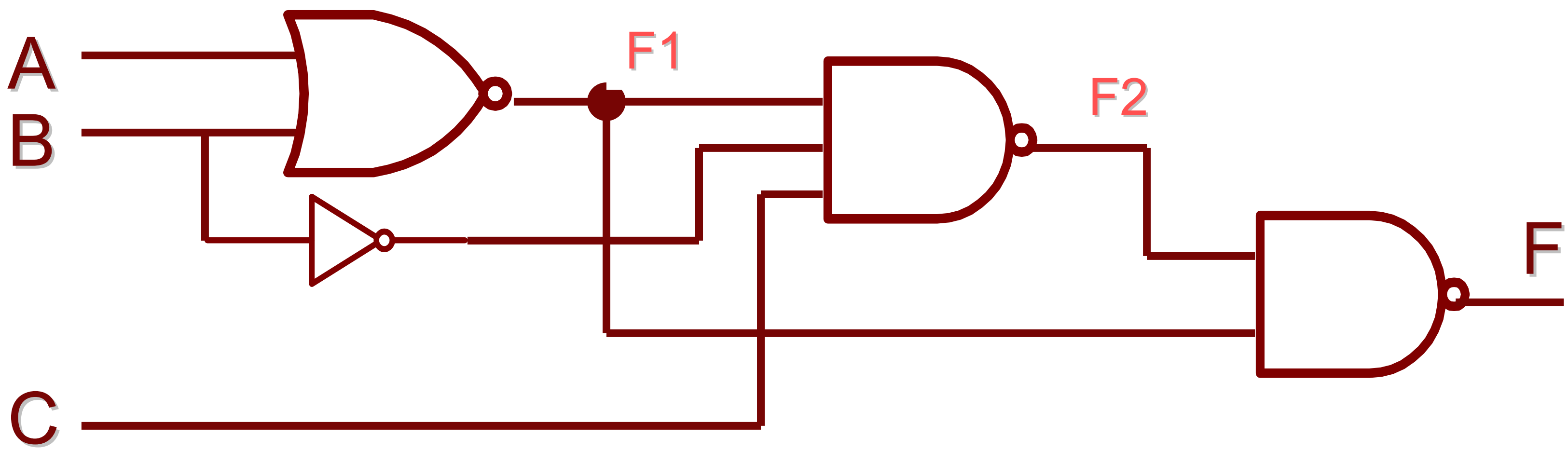
10. No circuito abaixo, obtenha a expressão lógica mais simples que você puder para a saída F:



Álgebra de Boole

- Exercícios: (cont.)

10.



$$F1 = \overline{A+B} \overset{M}{=} \overline{A}.\overline{B}$$

$$F2 = \overline{F1\overline{B}\,C} = \overline{\overline{A}\overline{B}\overline{B}C} = \overline{\overline{A}\overline{B}C} \overset{M}{=} A+B+\overline{C}$$

$$F = \overline{F1F2} \overset{M}{=} \overline{F1}+\overline{F2}$$

Álgebra de Boole

- <u>Exercícios:</u> (cont.)

  10. (cont.)

$$F1 = \overline{A+B} \overset{M}{=} \bar{A}.\bar{B}$$

$$F2 = \overline{F1\bar{B}\,C} = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{B}C} = \overline{\bar{A}\bar{B}C} \overset{M}{=} A+B+\bar{C}$$

$$F = \overline{F1F2} \overset{M}{=} \overline{F1}+\overline{F2}$$

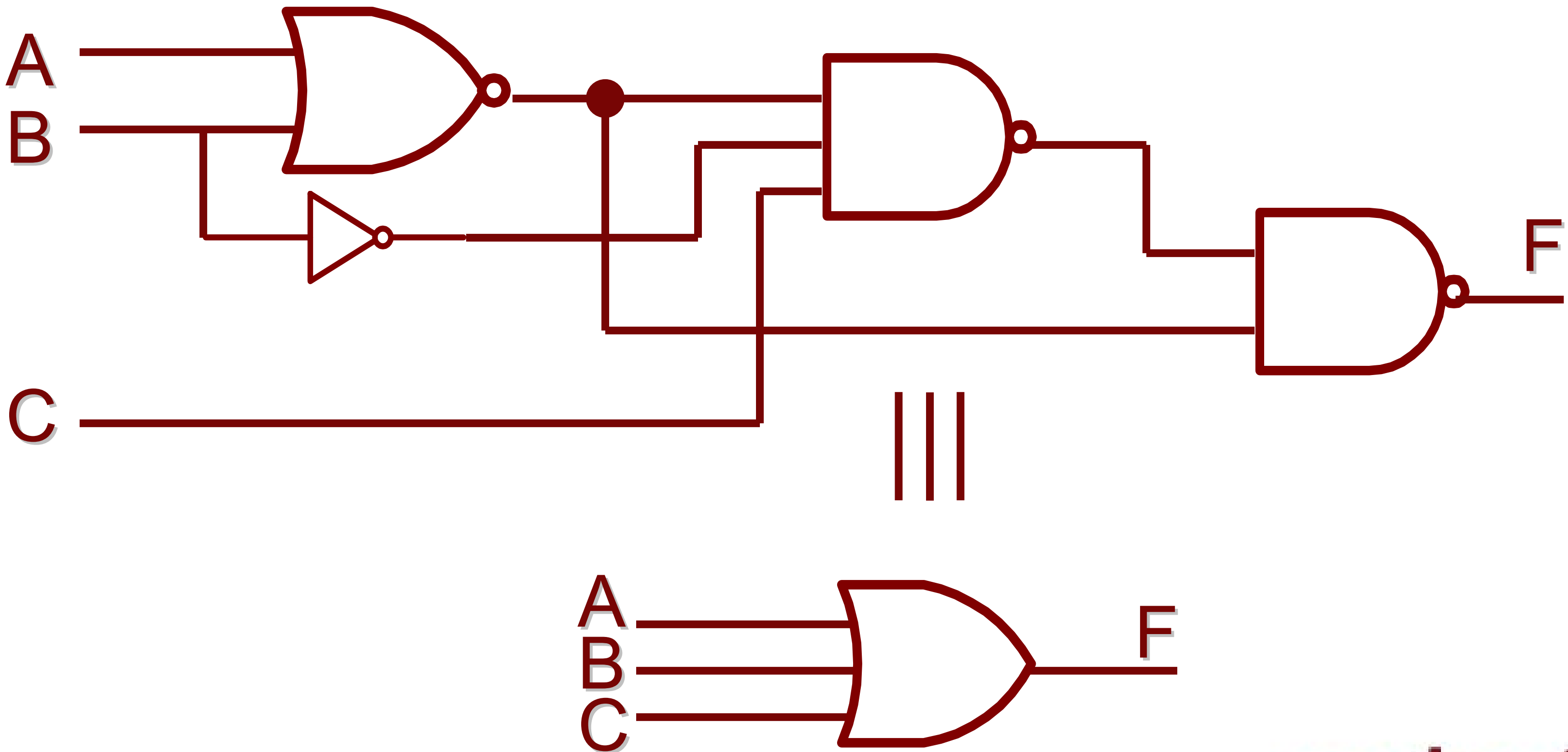
$$F = \overline{F1}+\overline{F2} = \overline{\overline{A+B}} + \overline{\overline{\bar{A}\bar{B}C}} = \underbrace{A+B+\bar{A}}\bar{B}C$$

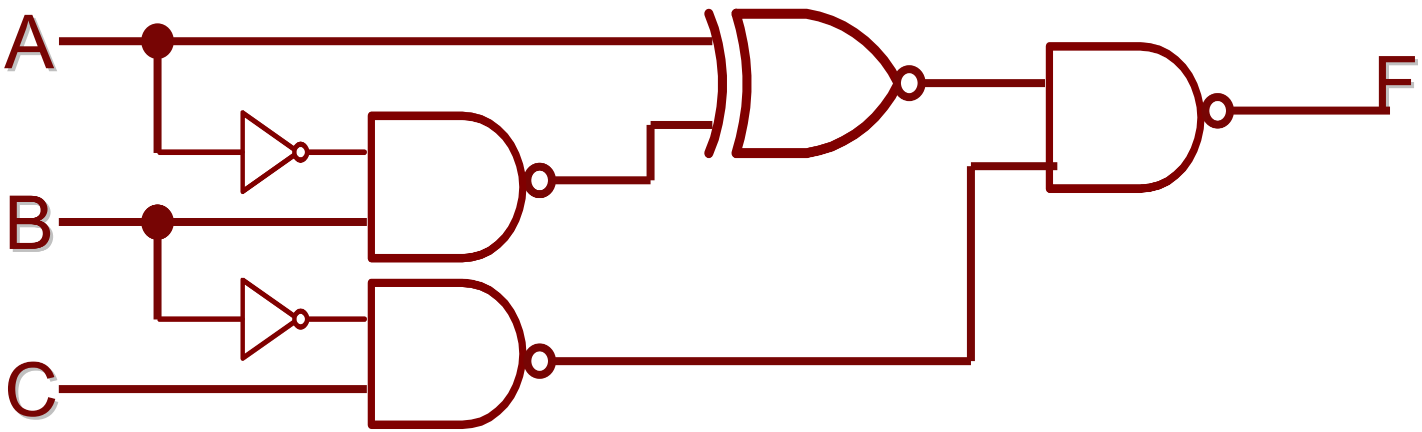
$$F = A+\underbrace{\bar{B}C+B} = A+B+C$$

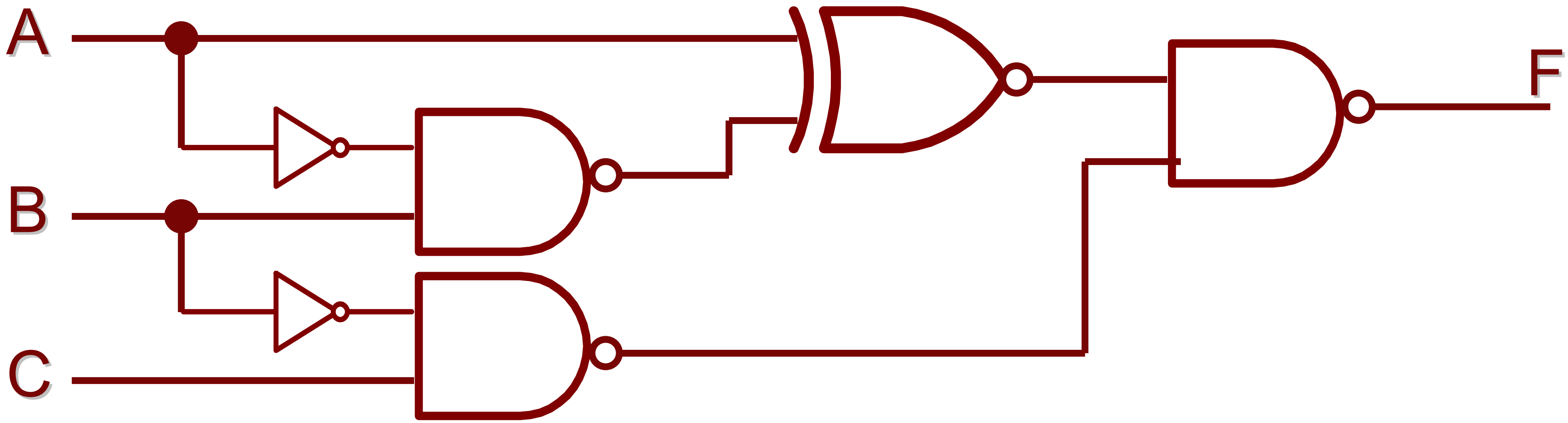
Álgebra de Boole

- Exercícios: (cont.)

10. (cont.)




A
B
C
F


A
B
C
F