

Introdução à Informática

**Sistemas Numéricos
Operações Aritméticas em Diversas Bases**

Ageu Pacheco e Alexandre Meslin

cederj

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Objetivo da Aula:
- Partindo da base 10, ver como operações aritméticas são efetuadas em outras bases; em especial a 2.

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Adição na base 10:

$$\begin{array}{r} & (1) & (1) \\ & \swarrow & \searrow \\ + & 6 & 8 \\ \hline & 1 & 5 & 4_{10} \\ & & & \downarrow \\ & & & 1_{10} \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Adição na base 10:

$$\begin{array}{r} & (1) & (1) \\ & \swarrow & \searrow \\ + & 8 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 1_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} & (1) & (1) \\ & \swarrow & \searrow \\ + & 8 & 6 \\ \hline & 1 & (15) & (11) \\ & - & 10 & 10 \\ \hline & 1 & 5 & 1_{10} \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Adição na base 9:

$$\begin{array}{r} & (1) & (1) \\ & 6 & 7_9 \\ + & 8 & 4_9 \\ \hline & 1 & (15) & (11) \\ - & & 9 & 9 \\ \hline & 1 & 6 & 2_9 \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Adição na base 9:

$$\begin{array}{r} & (1) & (1) \\ & \swarrow & \searrow \\ + & 8 & 7_9 \\ \hline & 1 & (15) & (11) \\ & \swarrow & \searrow \\ - & 9 & 9 \\ \hline & 1 & 6 & 2_9 \end{array}$$

- Na base 8:

$$\begin{array}{r} & (1) & (1) \\ & \swarrow & \searrow \\ + & 7 & 7_8 \\ \hline & 1 & (15) & (14) \\ & \swarrow & \searrow \\ - & 8 & 8 \\ \hline & 1 & 7 & 6_8 \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Adição na base 7:

$$\begin{array}{r} (1) & (1) \\ + & \\ \hline 1 & (8) & (9) \\ - & 7 & 7 \\ \hline 1 & 1 & 2_7 \end{array}$$

The diagram shows the addition of two numbers in base 7: $5_7 + 4_7 = 2_7$. The numbers are aligned by their least significant digits. The sum of the units column is 12, which is equivalent to 5 in base 7 (with a carry of 1). This carry is added to the tens column, where the sum is 2 (from the carry plus the digits 5 and 4). The final result is 2₇.

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Adição na base 7:
- Na base 16:

$$\begin{array}{r} & (1) & (1) \\ & \swarrow & \searrow \\ + & 5 & 2 \\ & | & | \\ & 5 & 4_7 \\ \hline & (8) & (9) \\ & | & | \\ & 7 & 7 \\ \hline - & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 2_7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} & (1) & (1) \\ & \swarrow & \searrow \\ + & F & E \\ & | & | \\ & 1 & 0 \\ \hline & (29) & (19) \\ & | & | \\ & 16 & 16 \\ \hline - & 1 & D \\ \hline & 2 & 3_{16} \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Adição na base 16:

$$\begin{array}{r} (1) & (1) \\ 2 & F \\ + 1 & F \\ \hline 4 & (31) & (29) \\ - & 16 & 16 \\ \hline 4 & F & D_{16} \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Adição na base 16:
 - Na base 2:
-
- A handwritten addition diagram in base 16. It shows the sum of 2 and F. The result is 16 (31). The diagram includes arrows indicating the carry-over from each column.
- | | | | |
|-----|------|-----------------|--|
| (1) | (1) | | |
| 2 | F | | |
| + | | | |
| 4 | (31) | (29) | |
| - | 16 | 16 | |
| 4 | F | D ₁₆ | |
-
- A handwritten addition diagram in base 2. It shows the sum of 11011101 and 10101101. The result is 101001010₂. The diagram includes arrows indicating the carry-over from each column.
- | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|----------------|----------------|
| (1) | (1) | (1) | (1) | (1) | (1) | |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 ₂ |
| + | | | | | | |
| (3) | (2) | (2) | (2) | (3) | (2) | |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 ₂ | |

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Adição na base 2 (cont.):

(1) (1) (1)

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0_2 \\ + \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1_2 \\ \hline 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1_2 \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Adição na base 2 (cont.):

$$\begin{array}{r} (1) \quad (1) \quad (1) \\ 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0_2 \\ + \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1_2 \\ \hline 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1_2 \end{array} \quad + \quad \begin{array}{r} (10) \quad (1) \quad (1) \quad (1) \quad (1) \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1_2 \\ 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1_2 \\ + \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0_2 \\ \hline 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0_2 \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Subtração na base 10:

$$\begin{array}{r} 4 & 7_{10} \\ - 2 & 4_{10} \\ \hline 2 & 3_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (4) & (+10) \\ 5 \xrightarrow{\quad} & 2_{10} \\ - 1 & 7_{10} \\ \hline 3 & 5_{10} \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Subtração na base 10 (cont.):

$$\begin{array}{r} 5 \\ - 1^{(+1)} \quad 7_{10} \\ \hline 3 \quad 5_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \quad 0 \\ - 1^{(+1)} \quad 4^{(+1)} \quad 7_{10} \\ \hline 1 \quad 5 \quad 3_{10} \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Subtração na base 8:

$$\begin{array}{r} 5 \\ - 1^{(+1)} \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2_8 \\ 7_8 \\ \hline 3_8 \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Subtração na base 8 (cont.):

$$\begin{array}{r} 5 & 2_8 \\ - 1(+1) & 7_8 \\ \hline 3 & 3_8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 & 0 & 0_8 \\ - 1(+1) & 4(+1) & 7_8 \\ \hline 1 & 3 & 1_8 \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Subtração na base 16:

$$\begin{array}{r} 5 \\ - 1^{(+1)} \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2_{16} \\ 7_{16} \\ \hline B_{16} \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Subtração na base 16 (cont.):

$$\begin{array}{r} 5 \\ - 1(+1) \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2_{16} \\ 7_{16} \\ \hline B_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ - 1(+1) \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0 \\ 4(+1) \\ \hline B \end{array} \quad \begin{array}{r} 0_{16} \\ 7_{16} \\ \hline 9_{16} \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Subtração na base 16 (cont):

$$\begin{array}{r} 3 \\ - 1(+1) \quad F(+1) \quad E_{16} \\ \hline 1 \quad (13) \quad (14) \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 1 \quad D \quad E_{16} \end{array}$$

The diagram shows a subtraction problem in base 16:

3
- 1(+1) F(+1) E₁₆

The result is:

1 (13) (14)

Below the result, arrows point down to the final answer:

1 D E₁₆

The intermediate steps (13 and 14) are shown in parentheses.

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Subtração na base 16 (cont):

$$\begin{array}{r} & 3 & D & C_{16} \\ - & 1(+1) & F(+1) & E_{16} \\ \hline & 1 & (13) & (14) \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 1 & D & E_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} & C & 0 & A_{16} \\ - & 2(+1) & C(+1) & C_{16} \\ \hline & 9 & 3 & (14) \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 9 & 3 & E_{16} \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Subtração na base 2:

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 2 \\ - 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 2 \\ \hline 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \\ - 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 2 \\ \hline 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Representação em “complemento à base”
 - ❖ O complemento de um número N em uma dada base B é igual a diferença entre o número e a próxima potência da base.

Ex: Complemento a 10 de 734
próxima potência $\longrightarrow 10^3$

$$\begin{array}{r} 1000 \\ - 734 \\ \hline 266 \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

Ex: Complemento a 2 de 1011

próxima potência $\longrightarrow 2^4 = 16 = 10000$

10000

- 1011
—————

101 \longrightarrow é o complemento a 2 de 1011

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

Ex: Complemento a 2 de 101101

próxima potência → 1000000

$$\begin{array}{r} 1000000 \\ - 101101 \\ \hline 10011 \end{array} \rightarrow \text{é o comp. a 2 de 101101}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Representação em “complemento à base” (cont.)
 - O cálculo do complemento à base em qualquer base é tedioso por causa dos “vem-um”.
 - Uma alternativa mais confortável é calcular o “complemento à base menos 1” e depois somar 1 ao resultado para obter o complemento à base.

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

Ex: Base 10 \longrightarrow “complemento a 9” de 734

$$\begin{array}{r} 999 \\ - 734 \\ \hline 265 \\ + \quad 1 \\ \hline 266 \end{array}$$

\longrightarrow (complemento a 9 de 734)

\longrightarrow (complemento a 10 de 734)

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

Ex: Base 2 → “complemento a 1” de 1011

$$\begin{array}{r} 1111 \\ - 1011 \\ \hline 100 \\ + 1 \\ \hline 101 \end{array}$$

→ (complemento a 1 de 1011)

→ (complemento a 2 de 1011)

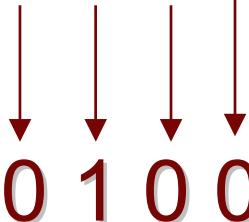
Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Observação importante:

Para obter o “complemento a 1” de um número binário basta invertê-lo bit a bit.

Ex: complemento a 1 de 1 0 1 1



| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| 0 | 1 | 0 | 0 |

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Operações de subtração em qualquer base podem ser feitas utilizando complemento à base.

Ex: Subtração $913 - 734 \longrightarrow$ na base 10

$$\begin{array}{r} 913 \\ - 734 \\ \hline 179 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 999 \\ - 734 \\ \hline 265 \\ + 1 \\ \hline 266 \end{array} \quad \begin{array}{r} 913 \\ + 266 \\ \hline 1)179 \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

Ex: Subtração $11001 - 10011$ na base 2

complemento a 1 do subtraendo = $\overrightarrow{01100}$

comp. a 2:

$$\begin{array}{r} 01100 \rightarrow (\text{comp.a 1}) & 11001 \text{ (minuendo)} \\ + \quad 1 & \xrightarrow{\pm} 01101 \\ \hline 01101 \rightarrow (\text{comp.a 2}) & 1)00110 \text{ (resultado)} \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Regra prática para obtenção do complemento a 2:

Para se obter diretamente o complemento a 2 de um número basta percorrer o número da direita para a esquerda repetindo-se os dígitos zeros até encontrar o primeiro dígito 1 (um), o qual deve ser mantido. A partir daí, todos os dígitos (zeros ou uns) a esquerda desse primeiro 1 deverão ser invertidos.

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

Exemplos:

| | | | |
|--------------------|---|---------|-------------|
| 1) 10 <u>10</u> | → | 0110 | (comp. a 2) |
| 2) 11 <u>001</u> | → | 00111 | (comp. a 2) |
| 3) 111 <u>000</u> | → | 001000 | (comp. a 2) |
| 4) 1100 <u>110</u> | → | 0011010 | (comp. a 2) |

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Representação de números com sinal:

Para simplificar, vamos supor que os números sejam representados internamente ao computador no formato de 8 bits (1 byte), ou seja eles são operados e armazenados em 8 bits.



Bit de sinal { 0 – nº positivo
1 – nº negativo

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Representação de números com sinal (cont.):

Em 8 bits é possível representar 256 números diferentes : de 00000000 a 11111111, já que $2^8 = 256$.

Com o bit mais significativo representando o sinal, a gama de números possíveis de serem representados permanece a mesma, só que agora metade negativa e metade positiva.

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Exemplos:

+ 127

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

+ 1

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

(+) 0

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

- 1

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

- 128

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Mais exemplos:

$$+ 74 \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$+ 27 \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$- 10 \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$- 27 \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$- 74 \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Operações aritméticas no computador:

Números positivos são submetidos na forma “normal”.

Ex: + 22 

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

Números negativos na forma complemento a 2.

Ex: - 22 

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Desta forma, todas as operações de soma e subtração envolvendo números com bits de sinal produzem diretamente resultados consistentes, ou seja, positivos na forma “normal” e negativos em complemento a 2.
- A vantagem de representar números negativos em complemento a 2 internamente ao computador é que todas as operações de subtração ficam transformadas em simples somas.

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Exemplos:

Tomemos como exemplo os números 9 e 4. Vamos ver como ficam todas as possibilidades de somas e subtrações envolvendo suas formas positivas e negativas.

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Somas:

$$\begin{array}{r} + 4 \\ (+) + 9 \\ \hline +13 \end{array} \quad \begin{array}{r} 00000100 \\ 00001001 \\ \hline 00001101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +4 \\ (+) - 9 \\ \hline - 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 00000100 \\ 11110111 \\ \hline 11111011 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 4 \\ (+) + 9 \\ \hline + 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11111100 \\ 00001001 \\ \hline 1)00000101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 4 \\ (+) - 9 \\ \hline - 13 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11111100 \\ 11110111 \\ \hline 1)11110011 \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Subtrações:

$$\begin{array}{r} + 4 \quad 00000100 \\ (-) + 9 \quad 00001001 \\ \hline - 5 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 00000100 \\ 11110111 (+) \\ \hline 11111011 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 4 \quad 00000100 \\ (-) - 9 \quad 11110111 \\ \hline +13 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 00000100 \\ 00001001 (+) \\ \hline 00001101 \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Subtrações:

| | | |
|---|---|---|
| $\begin{array}{r} - 4 \\ (-) + 9 \\ \hline -13 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 11111100 \\ 00001001 \\ \hline \end{array}$ | $\begin{array}{r} 11111100 \\ 11110111 (+) \\ \hline 1) 11110011 \end{array}$ |
| $\begin{array}{r} - 4 \\ (-) - 9 \\ + 5 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 11111100 \\ 11110111 \\ \hline \end{array}$ | $\begin{array}{r} 11111100 \\ 00001001 (+) \\ \hline 1) 00000101 \end{array}$ |

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- “Overflow” em operações aritméticas
 - O maior número positivo que pode ser carregado (armazenado) em um registro de 8 bits é +127 (01111111).
 - Nas mesmas condições o menor número negativo é –128 (10000000).

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- “Overflow” em operações aritméticas (cont.)
 - Apenas para ilustrar, supondo ser o computador de 8 bits, temos que, caso o resultado de qualquer operação aritmética exceda um dos valores anteriores, é dito que uma condição de overflow ocorreu, o que normalmente acarreta erro.

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

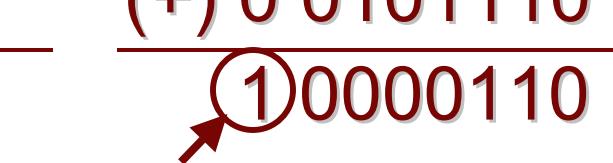
- “Overflow” em operações aritméticas (cont.)
 - A detecção de overflow é simples e consiste em:
 1. Há um “vai-um” propagado para o bit de sinal sem “vai-um” saindo deste.
 2. Há um “vai-um” propagado pelo bit de sinal sem este ter recebido “vai-um”.

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Exemplos:

$$\begin{array}{r} 1) \quad + 88 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0\ 1011000 \\ (+) 0\ 0101110 \\ \hline \end{array}$$

 An arrow points from the text "overflow" to the circled '1' in the result 10000110.

overflow

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Exemplos (cont):

$$\begin{array}{r} 1) \quad + 88 \\ (+) + 46 \\ \hline + 134 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0\ 1011000 \\ (+) 0\ 0101110 \\ \hline 10000110 \end{array}$$

overflow

$$\begin{array}{r} 2) \quad - 76 \\ (-) + 68 \\ \hline - 144 \end{array} \qquad \begin{array}{r} (01001100) \longrightarrow 1\ 0110100 \\ (01000100) \longrightarrow 1\ 0111100 \\ \hline 10110000 \end{array}$$

overflow