

Introdução à Informática

Sistemas Numéricos
Conversão entre Bases

Ageu Pacheco e Alexandre Meslin


Sistemas Numéricos

- Objetivo da Aula:

Conhecer e saber aplicar os métodos de conversão entre bases, com especial ênfase na conversão de números entre as bases 10, 2, e 16.

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Problema: Dado um número \underline{N}_s expresso em uma base \underline{s} (origem) achar sua representação \underline{N}_r na base \underline{r} (destino).
 - Dois métodos:
 - desenvolvimento da notação posicional (polinomial)
 - divisões sucessivas
 - Embora ambos os métodos possam ser utilizados para conversão direta entre quaisquer bases \underline{s} e \underline{r} , é desejável que uma delas seja a 10. Senão vejamos:
- 

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Desenvolvimento da notação posicional:

Dado $N_s = A_n A_{n-1} \dots A_1 A_0$, N_r é obtido avaliando a expressão $N_r = A_n s^n + A_{n-1} s^{n-1} + \dots + A_1 s + A_0$ no sistema de base \underline{r} .

- Se $s < r$ a expressão é avaliada diretamente.
- Se $s > r$ é necessário primeiramente converter a base \underline{s} e os dígitos A_i para a base \underline{r} .

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Exemplos:

1) $s = 2$, $N_s = 1110101$, $r = 10$, $N_r = ?$

$$N_r = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 = 117_{10}$$

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Exemplos:

1) $s = 2$, $N_s = 1110101$, $r = 10$, $N_r = ?$

$$N_r = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 = 117_{10}$$

2) $s = 10$, $N_s = 117$, $r = 2$, $N_r = ?$ (caso de $s > r$)

$$N_r = 1 \times (10_2)^2 + 1 \times (10_2)^1 + (7_2)$$

$$N_r = 1010^2 + 1010 + 111 = 1100100 + 10001$$

$$N_r = 1110101_2$$

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Cálculos envolvidos no Exemplo 2:

$$\begin{array}{r} 1010 \\ \times 1010 \\ \hline 0000 \\ 1010 \\ 0000 \\ + 1010 \\ \hline 1100100 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1100100 \\ 1010 \\ + 111 \\ \hline 1110101 \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Exemplos (cont.):

3) $s = 9$, $N_s = 857$, $r = 10$, $N_r = ?$

$$N_r = 8 \times 9^2 + 5 \times 9 + 7 = 700_{10}$$

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Exemplos:

3) $s = 9$, $N_s = 857$, $r = 10$, $N_r = ?$

$$N_r = 8 \times 9^2 + 5 \times 9 + 7 = 700_{10}$$

4) $s = 16$, $N_s = \text{BF7}$, $r = 10$, $N_r = ?$ (caso de $s > r$)

$$N_r = (B_{10}) \times 16^2 + (F_{10}) \times 16 + 7$$

$$N_r = 11 \times 256 + 15 \times 16 + 7 = 3063_{10}$$

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Exemplos:

3) $s = 9$, $N_s = 857$, $r = 10$, $N_r = ?$

$$N_r = 8 \times 9^2 + 5 \times 9 + 7 = 700_{10}$$

4) $s = 16$, $N_s = \text{BF7}$, $r = 10$, $N_r = ?$

$$N_r = (B_{10}) \times 16^2 + (F_{10}) \times 16 + 7$$

$$N_r = 11 \times 256 + 15 \times 16 + 7 = 3063_{10}$$

5) $s = 7$, $N_s = 100$, $r = 2$, $N_r = ?$

No caso, nem a base origem nem a destino é a 10.

A solução é transformar primeiramente 100_7 para a base 10 e depois desta para a base 2 pelo método das divisões sucessivas a seguir.

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Método das divisões sucessivas:

$$N_s = A_n A_{n-1} \dots A_1 A_0 \quad (n^\circ \text{ na base origem})$$

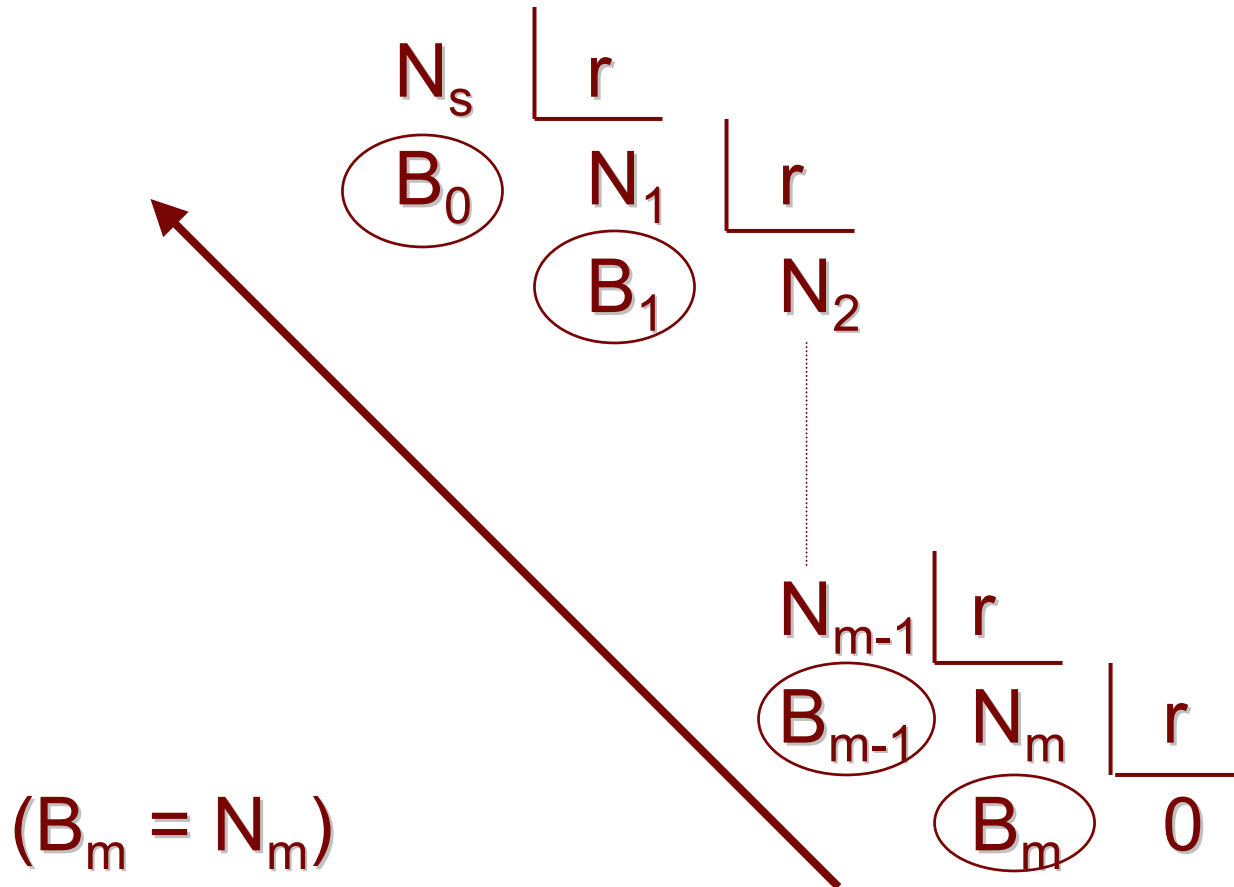
$$N_r = B_m B_{m-1} \dots B_1 B_0 \quad (n^\circ \text{ na base destino})$$

- Consiste em dividir sucessivamente o número dado N_s da base origem \underline{s} pela base destino \underline{r} .
 - Se $s > r$ os restos B obtidos já são os dígitos procurados, ou seja, $N_r = B_m B_{m-1} \dots B_1 B_0$.
 - Se $s < r$ os restos B devem ser primeiramente convertidos para a base r .

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Divisões sucessivas:

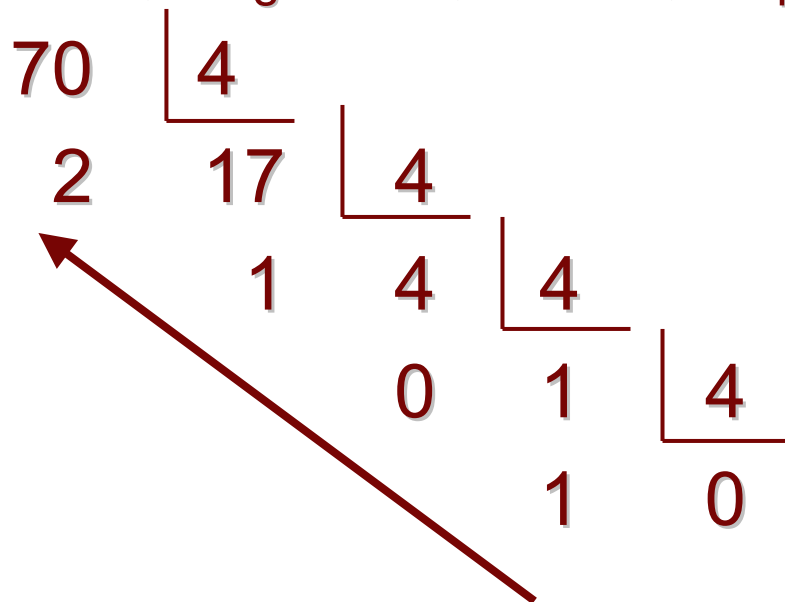


Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Exemplos:

6) $s = 10$, $N_s = 70$, $r = 4$, $N_r = ?$



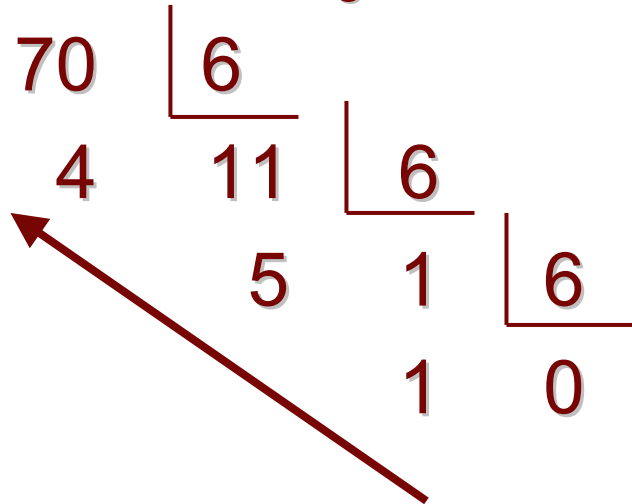
$$70_{10} = 1012_4$$

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Exemplos (cont):

7) $s = 10$, $N_s = 70$, $r = 6$, $N_r = ?$

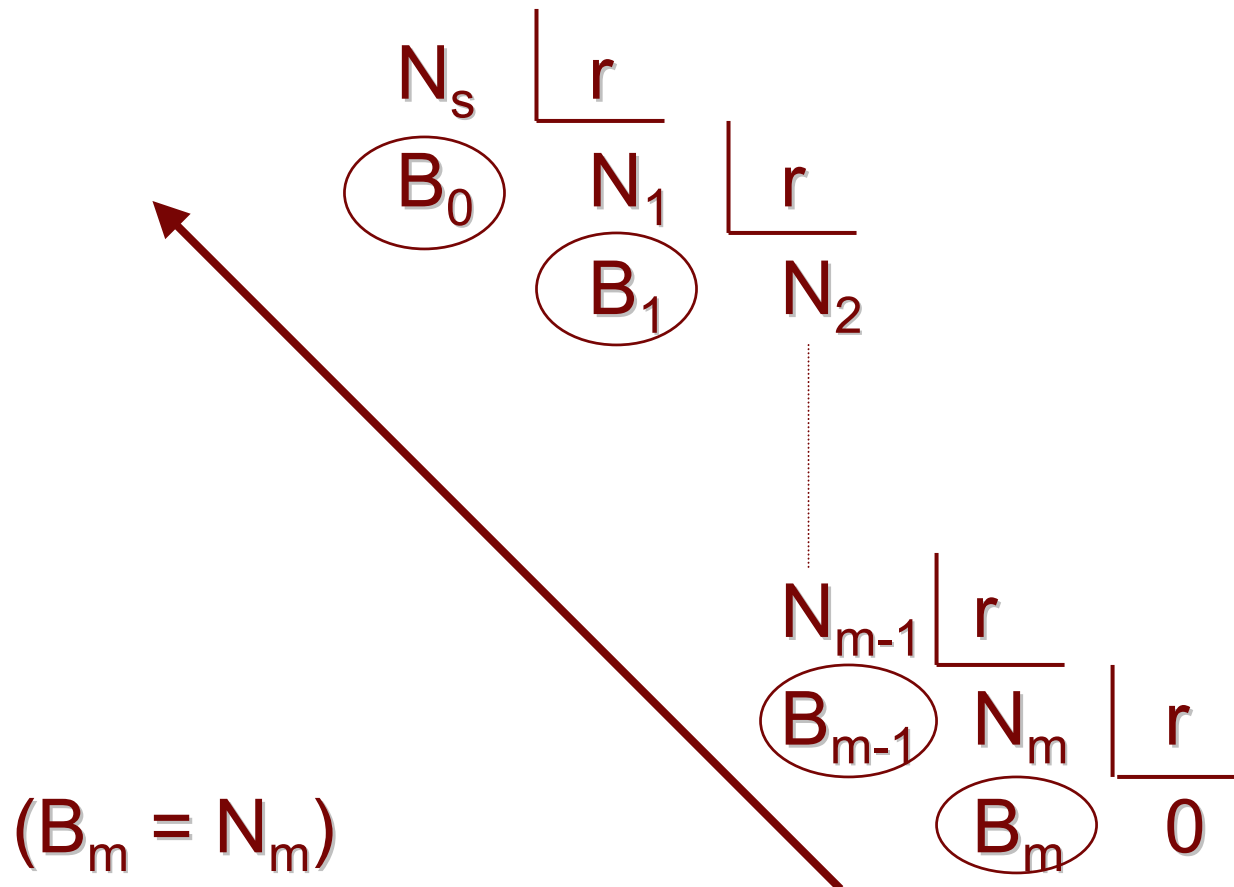


$$70_{10} = 154_6$$

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Algoritmo da divisão sucessiva:



Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Demonstração:

$$N_s = N_1 \cdot r + B_0$$

$$N_1 = N_2 \cdot r + B_1$$

$$N_m = 0 \cdot r + B_m$$

$$N_s = (N_2 \cdot r + B_1) r + B_0 = N_2 \cdot r^2 + B_1 \cdot r + B_0$$

$$N_s = (N_3 \cdot r + B_2) r^2 + B_1 \cdot r + B_0 \dots\dots\dots$$

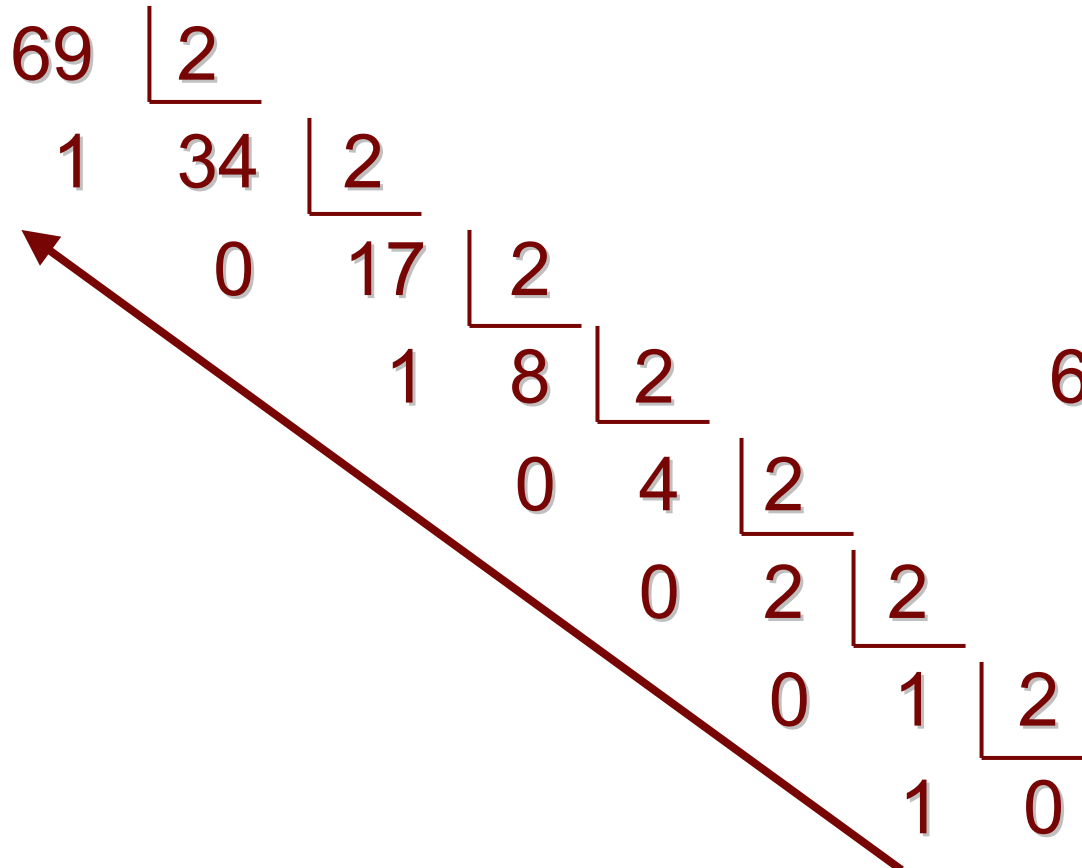
$$N_s = B_m \cdot r^m + B_{m-1} \cdot r^{m-1} + \dots\dots\dots + B_1 \cdot r + B_0 = N_r$$

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Exemplos (cont.):

8) $s = 10$, $N_s = 69$, $r = 2$, $N_r = ?$



$$69_{10} = 1000101_2$$

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Exemplos (cont.):

9) $s = 2$, $N_s = 1000101$, $r = 10$, $N_r = ?$ (caso $s < r$)

A base destino \underline{r} não tem representação direta na base \underline{s} origem. É preciso antes achar representação da base destino na de origem para depois realizar a conversão.

$$r = 10_{10} = 1010_2$$

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Exemplos (cont.):

9)
$$\begin{array}{r} 10001011 \\ - 1010 \\ \hline 1110 \\ - 1010 \\ \hline 1001 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1010 \\ 110 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1010 \\ 0 \\ \hline \end{array}$$

Nr

110

1001

$$Nr = (110)_2 (1001)_2 = 69_{10}$$

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Apenas relembrando a sequência inicial da base 2:

- Base 2:

0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Exemplos (cont.):

9a) $s = 2$, $N_s = 1000101$, $r = 10$, $N_r = ?$

A solução do exemplo 4, em que $s < r$, é muito mais facilmente obtida através da decomposição posicional do número fornecido.

$$N_r = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^2 + 1 = 64 + 4 + 1 = 69_{10}$$

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Considerando \underline{s} (base origem) e \underline{r} (base destino) temos na prática que:
 - Quando $s < r$ e $r = 10 \longrightarrow$ aplicar o método do desenvolvimento da notação posicional do número N_s
 - Quando $s > r$ e $s = 10 \longrightarrow$ aplicar o método das divisões sucessivas.
 - Quando $s \neq 10$ e $r \neq 10 \longrightarrow$ converter N_s para a base 10 (desenvolvimento posicional) e depois converter para a base \underline{r} (divisões sucessivas).

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Exemplos (cont):

10) $s = 7$, $N_s = 100$, $r = 2$, $N_r = ?$ (Ex5 não resolvido)

$$N_s = 1 \times 7^2 = 49_{10}$$

$$\begin{array}{r} 49 \div 2 = 24 \text{ r } 1 \\ 24 \div 2 = 12 \text{ r } 0 \\ 12 \div 2 = 6 \text{ r } 0 \\ 6 \div 2 = 3 \text{ r } 0 \\ 3 \div 2 = 1 \text{ r } 1 \\ 1 \div 2 = 0 \text{ r } 1 \end{array}$$

$$100_7 = 110001_2$$

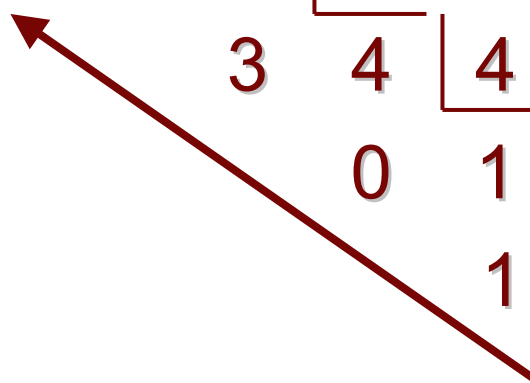
Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Exemplos (cont):

11) $s = 9$, $N_s = 87$, $r = 4$, $N_r = ?$

$$N_s = 8 \times 9 + 7 = 79_{10}$$

$$\begin{array}{r} 79 \quad | \quad 4 \\ 3 \quad 19 \quad | \quad 4 \\ \quad 3 \quad 4 \quad | \quad 4 \\ \quad \quad 0 \quad 1 \quad | \quad 4 \\ \quad \quad \quad 1 \quad 0 \end{array}$$


$$87_9 = 1033_4$$

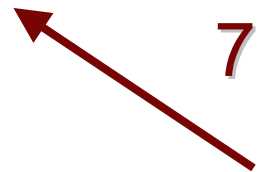
Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Exemplos (cont):

12) $s = 3, N_s = 2120, r = 9, N_r = ?$

$$N_s = 2 \times 3^3 + 3^2 + 2 \times 3 = 54 + 9 + 6 = 69_{10}$$

$$\begin{array}{r|l} 69 & 9 \\ \hline 6 & 7 \\ & 7 \end{array} \begin{array}{r|l} & 9 \\ \hline & 0 \end{array}$$


$$2120_3 = 76_9$$

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Exemplos (cont):

11) $s = 9, N_s = 76, r = 3, N_r = ?$

$$N_s = 7 \times 9 + 6 = 63 + 6 = 69_{10}$$

$$69 \begin{array}{|l} 3 \end{array}$$

$$0 \quad 23 \begin{array}{|l} 3 \end{array}$$

$$2 \quad 7 \begin{array}{|l} 3 \end{array}$$

$$1 \quad 2 \begin{array}{|l} 3 \end{array}$$

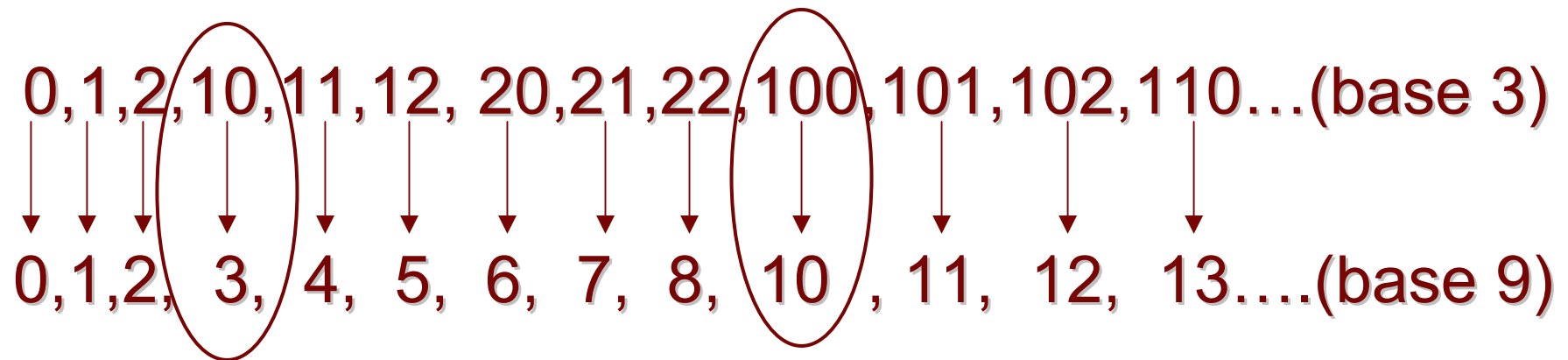
$$2 \quad 0$$

$$76_9 = 2120_3$$

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Os dois exemplos anteriores podem ser resolvidos de forma mais rápida se atentarmos para o fato de que a base 9 é potência da base 3. Senão, vejamos a sequência inicial da base 3:



Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Repare que cada dois dígitos em sequência de um dado número na base 3 corresponde diretamente a um dígito da base 9. Assim teríamos:

$$\textcircled{21}\textcircled{20}_3 = \textcircled{(2 \times 3) + 1} \textcircled{(2 \times 3)} = \textcircled{7}\textcircled{6}_9$$

- É esta relação de potências entre as bases que tornará, com o passar do tempo, a conversão entre as bases 2, 4, 8, e principalmente entre a 2 e a 16 (e vice-versa), muito mais simples.

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Exemplos (cont.):

12) $s = 2$, $N_s = 1011011$, $r = 4$, $N_r = ?$

$$\textcircled{01}\textcircled{01}\textcircled{10}\textcircled{11} = \textcircled{1}\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3} = 1123_4$$

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Exemplos (cont.):

12) $s = 2$, $N_s = 1011011$, $r = 4$, $N_r = ?$

$$\textcircled{01}\textcircled{01}\textcircled{10}\textcircled{11} = \textcircled{1}\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3} = 1123_4$$

13) $s = 4$, $N_s = 1123$, $r = 2$, $N_r = ?$

$$\textcircled{1}\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3} = \textcircled{01}\textcircled{01}\textcircled{10}\textcircled{11} = 1011011_2$$

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Exemplos (cont.):

14) $s = 2, N_s = 1011011_2, r = 8, N_r = ?$
 $\textcircled{001} \textcircled{011} \textcircled{011} = \textcircled{1} \textcircled{3} \textcircled{3} = 133_8$

15) $s = 2, N_s = 1011011, r = 16, N_r = ?$
 $\textcircled{0101} \textcircled{1011} = \textcircled{5} \textcircled{B} = 5B_{16}$

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Mudança de base de números reais:

$$N_R = (A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1 A_0 . A_{-1} A_{-2} A_{-3} \dots)$$

$$N_R = N_I + N_F, \text{ onde:}$$

$$N_I = A_n \cdot b^n + A_{n-1} \cdot b^{n-1} + \dots + A_1 \cdot b^1 + A_0 \cdot b^0$$

$$N_F = A_{-1} \cdot b^{-1} + A_{-2} \cdot b^{-2} + A_{-3} \cdot b^{-3} + \dots$$

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- A parte fracionária N_F de um número em uma dada base corresponde sempre à parte fracionária de sua representação em outra base.

$$N_F = A_{-1}.b^{-1} + A_{-2}.b^{-2} + A_{-3}.b^{-3} + \dots$$

- O problema se reduz ao cálculo dos dígitos A_{-1} , A_{-2} , A_{-3} ,

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Multiplicando a expressão de N_F por b temos:

$$b.N_F = (A_{-1}.b^{-1} + A_{-2}.b^{-2} + A_{-3}.b^{-3} + \dots).b$$

$$b.N_F = A_{-1} + A_{-2}.b^{-1} + A_{-3}.b^{-2} + \dots$$

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Repare que na expressão anterior A_{-1} é a parte inteira de $b.N_F$. Subtraindo-se A_{-1} de $b.N_F$ e multiplicando novamente por b a expressão resultante temos:

$$b.(b.N_F - A_{-1}) = A_{-2} + A_{-3}.b^{-1} + \dots$$

- O processo deve continuar até alcançar o número de dígitos desejado na parte fracionária. A aplicação do método na prática é bem mais simples que as equações anteriores parecem sugerir.

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Exemplos:

1) Converter 69.71_{10} para a base 2.

$N_I = 1000101$ de um exemplo anterior.

Para N_F : $2 \times (0.71) = 1.42 \longrightarrow A-1 = 1$

$2 \times (0.42) = 0.84 \longrightarrow A-2 = 0$

$2 \times (0.84) = 1.68 \longrightarrow A-3 = 1$

$2 \times (0.68) = 1.36 \longrightarrow A-4 = 1$

$2 \times (0.36) = 0.72 \longrightarrow A-5 = 0$

$2 \times (0.72) = 1.44 \longrightarrow A-6 = 1$

⋮

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Exemplos (cont.):

1) Continuando ... $N_F = 101101\dots$ e o resultado fica:
 $69.71_{10} = (1000101.101101\dots)_2$

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Exemplos (cont.):

1) Continuando ... $N_F = 101101\dots$ e o resultado fica:
 $69.71_{10} = (1000101.101101\dots)_2$

2) Converter $(1000101.101101)_2$ para a base 10.

Aqui como $s < r$, a solução é desenvolver a notação posicional do número:

$$\begin{aligned} 1000101.101101 &= 2^6 + 2^2 + 1 + 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-6} = \\ &= 64 + 4 + 1 + 0.5 + 0.125 + 0.0625 + 0.015625 = \\ &= 69.703125_{10} \end{aligned}$$

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Exemplos (cont.):

3) $s = 2$, $N_s = 1001011.0110011$, $r = 4$, $N_r = ?$

$$\textcircled{0}\textcircled{1}\textcircled{00}\textcircled{10}\textcircled{11}.\textcircled{01}\textcircled{10}\textcircled{01}\textcircled{10} = \textcircled{1}\textcircled{0}\textcircled{2}\textcircled{3}.\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{1}\textcircled{2}$$

$$1001011.0110011_2 = 1023.1212_4$$

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Exemplos (cont.):

3) $s = 2$, $N_s = 1001011.0110011$, $r = 4$, $N_r = ?$

$$\begin{array}{cccc} \textcircled{01} & \textcircled{00} & \textcircled{10} & \textcircled{11} \end{array} . \begin{array}{cccc} \textcircled{01} & \textcircled{10} & \textcircled{01} & \textcircled{10} \end{array} = \begin{array}{cccc} \textcircled{1} & \textcircled{0} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \end{array} . \begin{array}{cccc} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{1} & \textcircled{2} \end{array}$$

$$1001011.0110011_2 = 1023.1212_4$$

4) $s = 2$, $N_s = 10101110.10011111$, $r = 8$, $N_r = ?$

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{010} & \textcircled{101} & \textcircled{110} \end{array} . \begin{array}{ccc} \textcircled{100} & \textcircled{111} & \textcircled{110} \end{array} = \begin{array}{ccc} \textcircled{2} & \textcircled{5} & \textcircled{6} \end{array} . \begin{array}{ccc} \textcircled{4} & \textcircled{7} & \textcircled{6} \end{array}$$

$$10101110.10011111_2 = 256.476_8$$

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Exemplos (cont.):

5) $s = 2$, $N_s = 101011.1100111$, $r = 16$, $N_r = ?$

$\textcircled{0010} \textcircled{1011} . \textcircled{1100} \textcircled{1110} = \textcircled{2} \textcircled{B} . \textcircled{C} \textcircled{E}$

$$101011.1100111_2 = 2B.CE_{16}$$

Sistemas Numéricos

Conversão entre Bases

- Exemplos (cont.):

5) $s = 2$, $N_s = 101011.1100111$, $r = 16$, $N_r = ?$

$$\begin{array}{ccccccc} \textcircled{0010} & \textcircled{1011} & . & \textcircled{1100} & \textcircled{1110} & = & \textcircled{2} \textcircled{B} . \textcircled{C} \textcircled{E} \\ 101011.1100111_2 & = & 2B.CE_{16} \end{array}$$

6) $s = 16$, $N_s = AB.CD$, $r = 8$, $N_r = ?$

$$N_s = \underline{A} \underline{B} . \underline{C} \underline{D} = (\underline{1010} \underline{1011} . \underline{1100} \underline{1101})_2$$

$$N_s = (\underline{010} \underline{101} \underline{011} . \underline{110} \underline{011} \underline{010})_2$$

$$N_s = (\underline{2} \underline{5} \underline{3} . \underline{6} \underline{3} \underline{2})_8$$

$$AB.CD_{16} = 253.632_8$$