Introdução à Informática

Funções Lógicas

Ageu Pacheco e Alexandre Meslin

cederj

Funções Lógicas

- Objetivo da Aula:

- Estudar os principais métodos empregados na simplificação/minimização de funções lógicas (booleanas).

cederj

Funções Lógicas

- Conceito de mintermos e maxtermos:

  Considere a tabela verdade a seguir que expressa a função votador majoritário para 3 votantes:

Funções Lógicas

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Por inspeção na tabela podemos escrever:

$$F = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

Funções Lógicas

$$F(A,B,C) = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

- Repare que a expressão de F é constituída por uma soma de produtos lógicos, cada um composto pelas 3 variáveis de que F depende.
- Cada um destes produtos “completos” é denominado mintermo.

cederj

Funções Lógicas

- A descrição de uma função por meio de soma de produtos (mintermos) representa a função implementada nos pontos em que ela é “1”
- Notação compacta:

$$F = \underbrace{\overline{A}BC}_{} + \underbrace{A\overline{B}C}_{} + \underbrace{AB\overline{C}}_{} + \underbrace{ABC}_{}$$

$$F = m_3 + m_5 + m_6 + m_7$$

$$F = \sum(3,5,6,7) \Rightarrow \text{(notação compacta)}$$

Funções Lógicas

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Função votador majoritário:

$$F = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

$$F = m_3 + m_5 + m_6 + m_7$$

$$F = \sum(3,5,6,7)$$

Funções Lógicas

- Invertendo F e aplicando a Lei de Morgan à equação resultante temos:

$$\overline{F} = \overline{\overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC} \overset{M}{=}$$

$$\overline{F} \overset{M}{=} (\overline{\overline{A}BC}).(\overline{A\overline{B}C}).(\overline{AB\overline{C}}).(\overline{ABC}) \overset{M}{=}$$

$$\overline{F} \overset{M}{=} (A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

Funções Lógicas

$$\overline{F} = (A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

- $\overline{F}$ acha-se representada por um produto de somas onde cada soma contém as 3 variáveis de que $\overline{F}$ depende.

- Cada um destas somas "completas" é denominada maxtermo.

Funções Lógicas

- A descrição de uma função por meio de produtos de somas (maxtermos) representa a função implementada nos pontos em que ela é "0"
- Notação compacta:

$$\overline{F} = \underbrace{(A+\overline{B}+\overline{C})}_{M_3} \cdot \underbrace{(\overline{A}+B+\overline{C})}_{M_5} \cdot \underbrace{(\overline{A}+\overline{B}+C)}_{M_6} \cdot \underbrace{(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})}_{M_7}$$

$$\overline{F} = M_3 \;.\; M_5 \;.\; M_6 \;.\; M_7$$

$$\overline{F} = \P\,(3,5,6,7) \Longrightarrow \text{(notação compacta)}$$

Funções Lógicas

	A	B	C	F	$\overline{F}$
0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1
2	0	1	0	0	1
3	0	1	1	1	0
4	1	0	0	0	1
5	1	0	1	1	0
6	1	1	0	1	0
7	1	1	1	1	0

$$\overline{F} = (A+\overline{B}+\overline{C}).(\overline{A}+B+\overline{C}).$$
$$.(\overline{A}+\overline{B}+C).(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

$$\overline{F} = M_3.M_5.M_6.M_7$$

$$\overline{F} = \P\,(3,5,6,7)$$

Funções Lógicas

- Para achar F representada por maxtermos aplicamos Morgan à expressão de $\overline{F}$ descrita por mintermos:

$$\overline{F} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,C + \overline{A}\,B\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,\overline{C}$$

$$\overline{F} = m_0 + m_1 + m_2 + m_4$$

Funções Lógicas

A	B	C	F	$\overline{F}$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

$$\overline{F} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C}$$

$$\overline{F} = m_0 + m_1 + m_2 + m_4$$

Pela tabela já dá para perceber que F por maxtermos será:

$$F = M_0 . M_1 . M_2 . M_4$$

Funções Lógicas

- Aplicando Morgan a $\bar{F}$:

$$\bar{\bar{F}} = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}B\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}} \overset{M}{=}$$

$$F \overset{M}{=} \overline{(\bar{A}\bar{B}\bar{C})}.\overline{(\bar{A}\bar{B}C)}.\overline{(\bar{A}B\bar{C})}.\overline{(A\bar{B}\bar{C})} \overset{M}{=}$$

Funções Lógicas

- Aplicando Morgan a F (cont.):

$$F=(\overline{\overline{A}}+\overline{\overline{B}}+\overline{\overline{C}})(\overline{\overline{A}}+\overline{\overline{B}}+\overline{C})(\overline{\overline{A}}+\overline{B}+\overline{\overline{C}})(\overline{A}+\overline{\overline{B}}+\overline{\overline{C}})$$

$$F=(A+B+C)(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)$$

$$F = M_0.M_1.M_2.M_4 = \P(0,1,2,4)$$

Funções Lógicas

	A	B	C	F	$\overline{F}$
0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1
2	0	1	0	0	1
3	0	1	1	1	0
4	1	0	0	0	1
5	1	0	1	1	0
6	1	1	0	1	0
7	1	1	1	1	0

$$F = m_3+m_5+m_6+m_7$$

$$F = M_0.M_1.M_2.M_4$$

$$\overline{F} = m_0+m_1+m_2+m_4$$

$$\overline{F} = M_3.M_5.M_6.M_7$$

Funções Lógicas

Linha	x	y	z	Mintermo	Maxtermo
0	0	0	0	$m_0 = \bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}$	$M_0 = x + y + z$
1	0	0	1	$m_1 = \bar{x}\ \bar{y}\ z$	$M_1 = x + y + \bar{z}$
2	0	1	0	$m_2 = \bar{x}\ y\ \bar{z}$	$M_2 = x + \bar{y} + z$
3	0	1	1	$m_3 = \bar{x}\ y\ z$	$M_3 = x + \bar{y} + \bar{z}$
4	1	0	0	$m_4 = x\ \bar{y}\ \bar{z}$	$M_4 = \bar{x} + y + z$
5	1	0	1	$m_5 = x\ \bar{y}\ z$	$M_5 = \bar{x} + y + \bar{z}$
6	1	1	0	$m_6 = x\ y\ \bar{z}$	$M_6 = \bar{x} + \bar{y} + z$
7	1	1	1	$m_7 = x\ y\ z$	$M_7 = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$

Funções Lógicas

- Exercícios: (mintermos e maxtermos)

1)Represente $F(A,B,C)=\sum 1,3,5,7$ por meio de produtos de maxtermos.

$$F(A,B,C) = \prod 0,2,4,6 = M_0.M_2.M_4.M_6$$

$$F = (A+B+C)(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

2) Represente a função F da tabela por meio de soma de mintermos e produtos de maxtermos.

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Funções Lógicas

2)

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$F = \sum 1,2,4 = m_1+m_2+m_4$

F = ¶ 0,3,5,6,7

$F = M_0.M_3.M_5.M_6.M_7$

Funções Lógicas

2) $F = m_1 + m_2 + m_4$

$$F = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C}$$

$$F = M_0 . M_3 . M_5 . M_6 . M_7$$

$$F = (A+B+C).(A+\bar{B}+\bar{C}).(\bar{A}+B+\bar{C}).$$
$$(\bar{A}+\bar{B}+C).(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})$$

Funções Lógicas

- Simplificação de expressões lógicas:

  Métodos:
  - Por manipulações algébricas
  - Por mapas de Karnaugh
  - Pelo método de Quine-McCluskey

Funções Lógicas

- Manipulações algébricas (exemplos):

  1) Simplificar a função
     $F(A,B,C) = \sum 3,5,6,7$
     (votador majoritário de 3 votantes)

$$F = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

Funções Lógicas

1) (cont.)

$$F = \overline{A}BC + A\overline{B}C + \underbrace{AB\overline{C} + ABC}$$

$$F = \overline{A}\underbrace{BC + A\overline{B}C + AB}\cancelto{1}{(\overline{C} + C)}$$

$$F = B(\underbrace{A + \overline{A}C}) + A\overline{B}C = B(A + C) + A\overline{B}C$$

Funções Lógicas

1) (cont.)

$$F = B(A+C)+A\bar{B}C$$

$$F = AB+B\underbrace{C+A\bar{B}C} = AB+C(B+\bar{B}A)$$

$$F = AB+C(B+A) \Rightarrow F = AB+AC+BC$$

Funções Lógicas

2) $F(A,B,C) = \sum 3,7$

$$F = \underbrace{\bar{A}BC+A}BC = BC(\bar{A}+A) = BC$$

Funções Lógicas

2) $F(A,B,C) = \sum 3,7$

$$F = \overline{A}BC + ABC = BC(\overline{A}+A) = BC$$

3) $F(A,B,C) = A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$

$$F = A\overline{B}(\overline{C}+C) + AB(\overline{C}+C) = A\overline{B} + AB$$

$$F = A(\overline{B}+B) \Rightarrow F = A$$

Funções Lógicas

3) (cont.)

$$F = A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$$

$$F = \sum 4,5,6,7$$

(mintermos adjacentes)

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Funções Lógicas

$$4)\ F(A,B,C) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+AB\overline{C}$$

$$F = \overline{A}\,\overline{C}(\overline{B}+B)+A\overline{C}(\overline{B}+B)$$

$$F = \overline{A}\,\overline{C}+A\overline{C} = \overline{C}(\overline{A}+A) = \overline{C}$$

Funções Lógicas

4)

$$F=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+AB\overline{C}$$

$$F = \sum 0,2,4,6$$

(mintermos adjacentes)

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Funções Lógicas

5)

A	B	C	D	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0

A	B	C	D	F
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Funções Lógicas

5) $F(A,B,C,D) = \sum 0,1,2,4,8,9,10,12,14$

$$F = \underbrace{\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}}_{0} + \underbrace{\bar{A}\bar{B}\bar{C}D}_{1} + \underbrace{\bar{A}\bar{B}C\bar{D}}_{2} + \underbrace{\bar{A}B\bar{C}\bar{D}}_{4} +$$

$$+ \underbrace{A\bar{B}\bar{C}\bar{D}}_{8} + \underbrace{A\bar{B}\bar{C}D}_{9} + \underbrace{A\bar{B}C\bar{D}}_{10} + \underbrace{AB\bar{C}\bar{D}}_{12} + \underbrace{ABC\bar{D}}_{14}$$

(a simplificação será feita mais adiante por meio do mapa de Karnaugh)

- Mapas de Karnaugh (Maurice Karnaugh ~~1950)

  O mapa de Karnaugh é uma representação gráfica espacial da tabela verdade onde cada quadrado representa um mintermo de tal maneira que quadrados adjacentes contêm mintermos adjacentes.

Funções Lógicas

- Exemplos de mapas:

1)

	A	B	F
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	0

A \ B	0	1
0	0	1
1	1	0

A \ B	0	1
0	m_0	m_1
1	m_2	m_3

Funções Lógicas

2) Mapa de 3 variáveis:

B

A \ BC	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
A 1	m_4	m_5	m_7	m_6

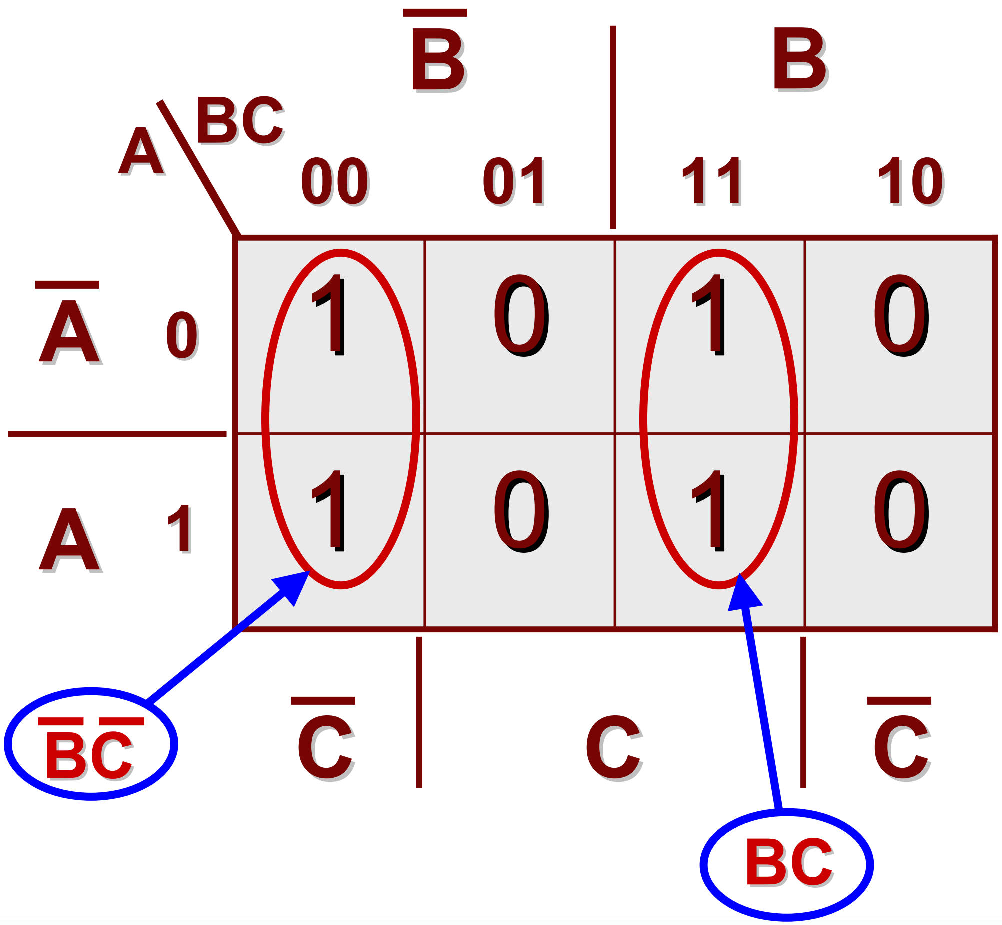
C

inversão na sequência

	A	B	C	F
m0	0	0	0	1
m1	0	0	1	0
m2	0	1	0	0
m3	0	1	1	1
m4	1	0	0	1
m5	1	0	1	0
m6	1	1	0	0
m7	1	1	1	1

Funções Lógicas

2) Mapa de 3 variáveis:



	A	B	C	F
m0	0	0	0	1
m1	0	0	1	0
m2	0	1	0	0
m3	0	1	1	1
m4	1	0	0	1
m5	1	0	1	0
m6	1	1	0	0
m7	1	1	1	1

Funções Lógicas

2) cont:

Pela tabela temos:

$F(A,B,C) = \sum 0,3,4,7$

$F = m_0+m_3+m_4+m_7$

	A	B	C	F
m0	0	0	0	1
m1	0	0	1	0
m2	0	1	0	0
m3	0	1	1	1
m4	1	0	0	1
m5	1	0	1	0
m6	1	1	0	0
m7	1	1	1	1

Funções Lógicas

2) cont:

$$F = m_0+m_3+m_4+m_7$$

$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}BC+A\bar{B}\bar{C}+ABC$$

$$F = \bar{B}\bar{C}(\cancelto{1}{\bar{A}+A})+BC(\cancelto{1}{\bar{A}+A}) = \bar{B}\bar{C}+BC$$

3) Mapa de 4 variáveis:

A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1

A	B	C	D	F
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Funções Lógicas

3) $F(A,B,C,D) = \sum m_1, m_2, m_3, m_6, m_7, m_9, m_{12}$

AB \ CD	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

F

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	0	1	1
11	1	0	0	0
10	0	1	0	0

Funções Lógicas

3) $F(A,B,C,D) = \sum m_1, m_2, m_3, m_6, m_7, m_9, m_{12}$

F

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	0	1	1
11	1	0	0	0
10	0	1	0	0

$\bar{A}C$

$AB\bar{C}\bar{D}$

$\bar{B}\bar{C}D$

Funções Lógicas

3) $F(A,B,C,D) = \sum m_1, m_2, m_3, m_6, m_7, m_9, m_{12}$

$$F = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}BCD + A\overline{B}\,\overline{C}D + AB\overline{C}\,\overline{D}$$

$$F = \overline{A}C + \overline{B}\,\overline{C}D + AB\overline{C}\,\overline{D}$$

- **Regras para simplificação com o mapa de Karnaugh:**

  1. Começar pelos quadrados isolados, isto é, que não tenham adjacentes. Eles representam mintermos que não podem ser simplificados mas que fazem parte da função.

Funções Lógicas

- **Regras (cont.):**

2. Procurar por quadrados que só tenham uma possibilidade de combinação.
3. Daí em diante procurar visualizar combinações envolvendo o máximo de quadrados.

- **Observação importante:**

Combinações onde **todos** quadrados participantes já tenham sido utilizados em combinações prévias, não geram simplificações adicionais. Na verdade tais combinações geram termos redundantes.

Funções Lógicas

- “Sentidos” de mapas:

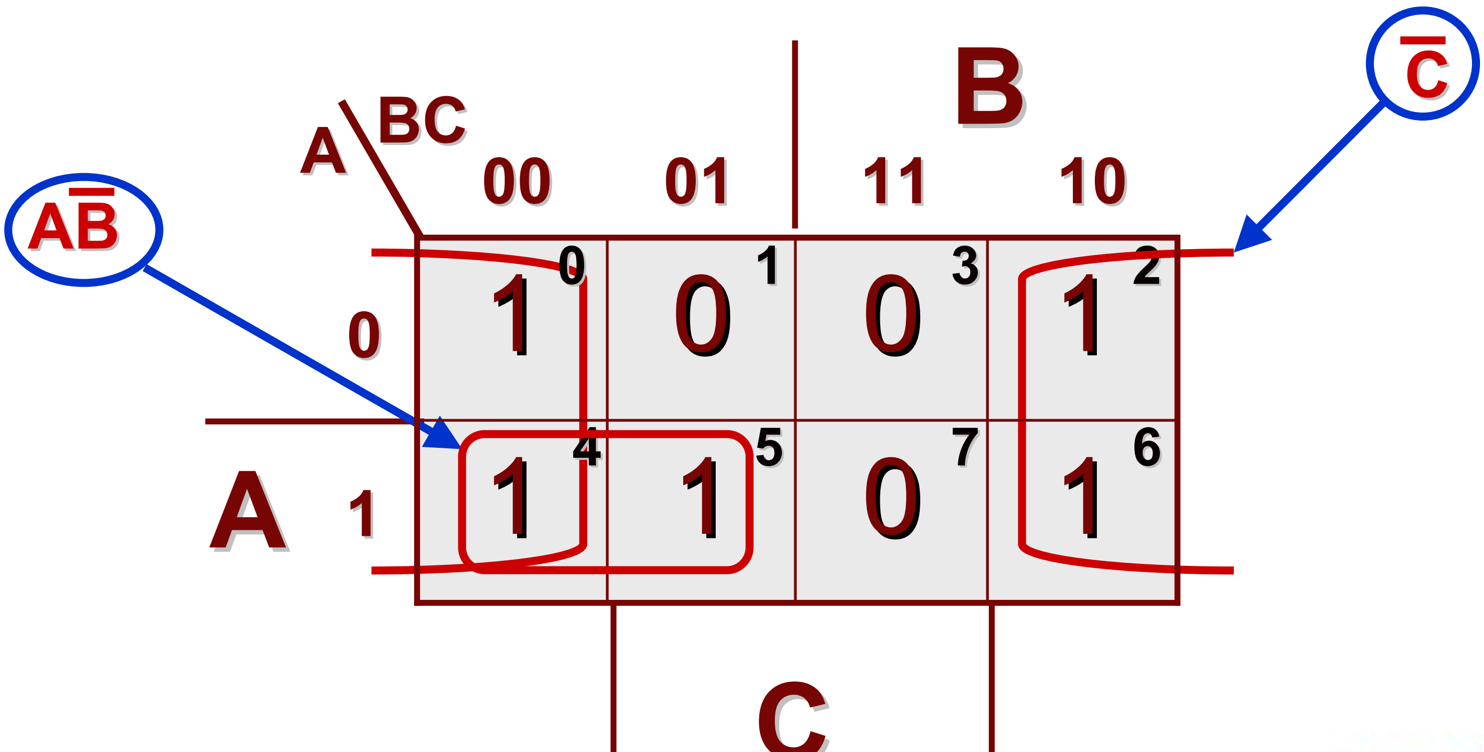
AB \ CD				
	0	1	3	2
	4	5	7	6
	12	13	15	14
	8	9	11	10

CD \ AB				
	0	4	12	8
	1	5	13	9
	3	7	15	11
	2	6	14	10

Funções Lógicas

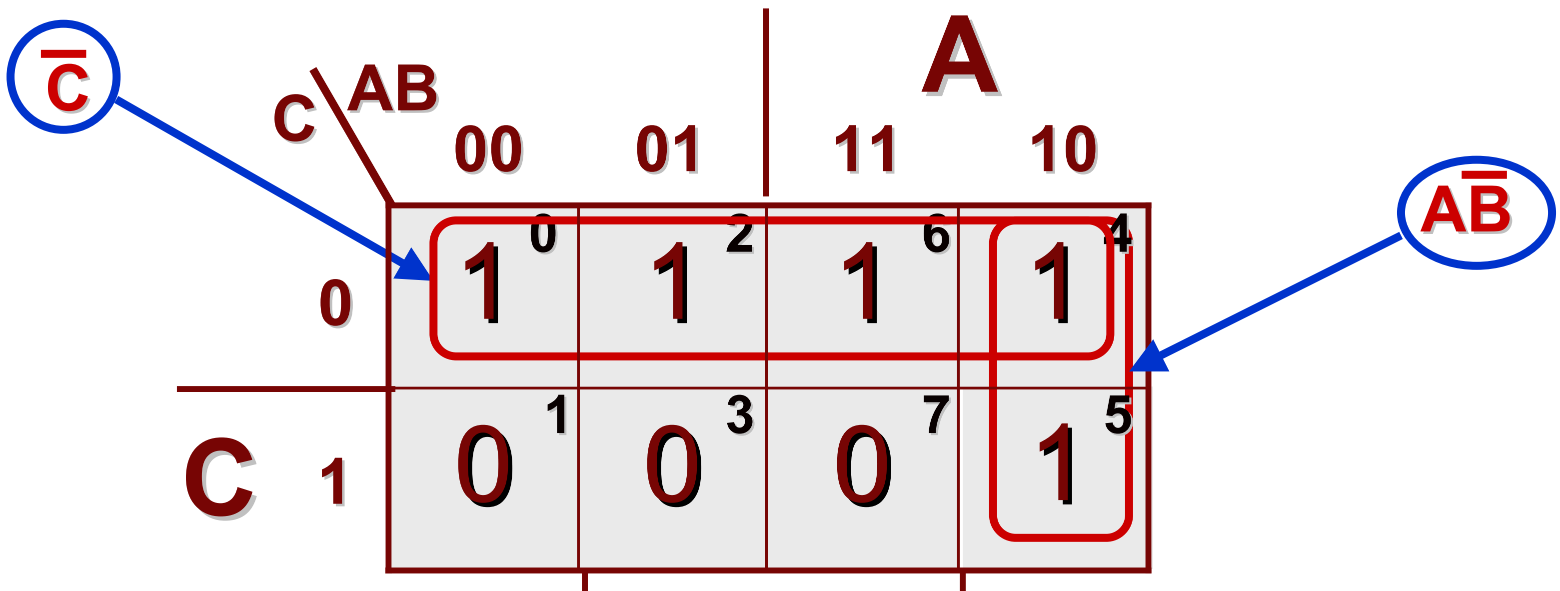
- Exercícios:

1. $F(A,B,C) = \sum 0,2,4,5,6$



Funções Lógicas

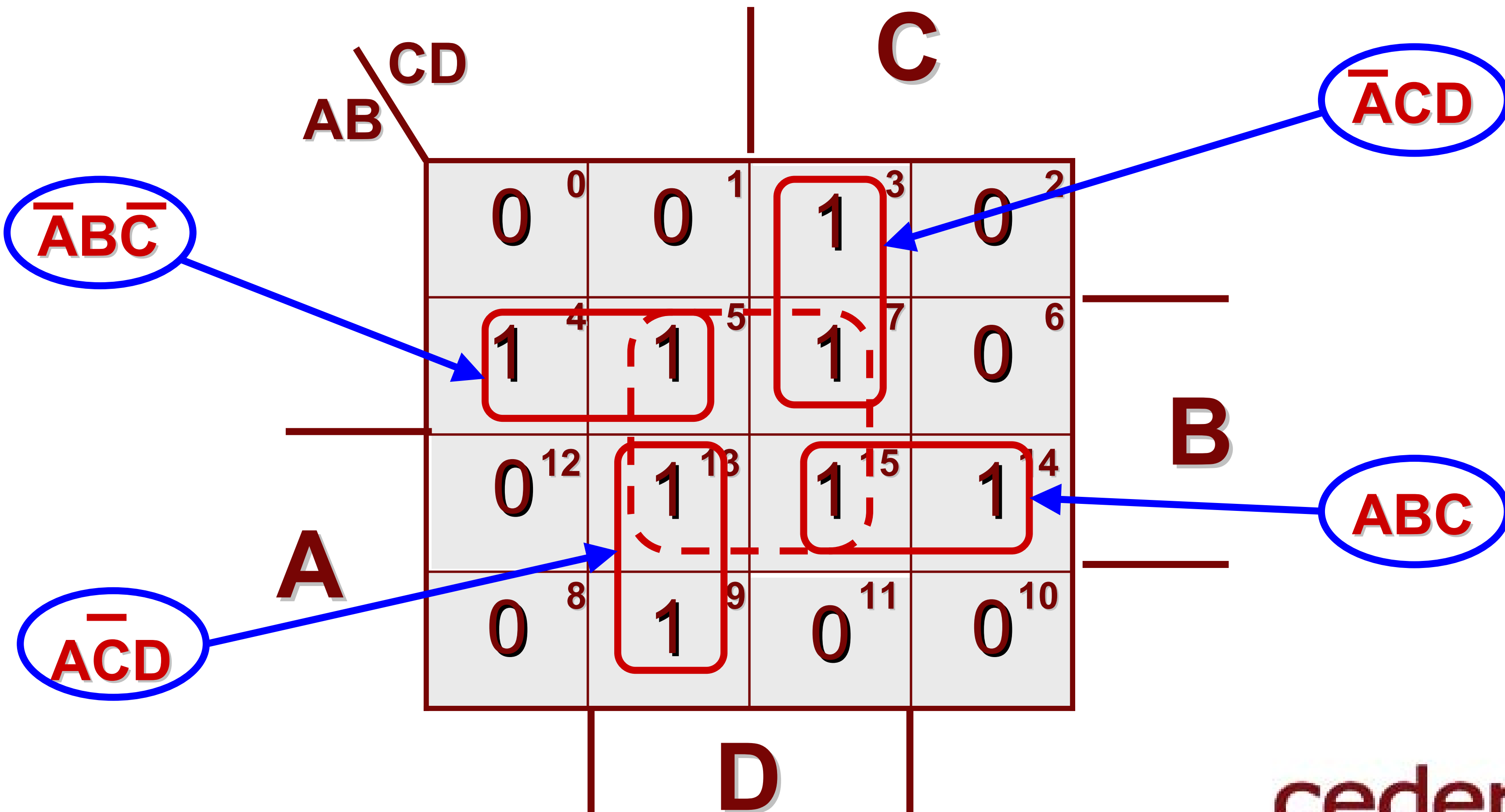
1a. $F(A,B,C) = \sum 0,2,4,5,6$



$$F = A\overline{B} + \overline{C}$$

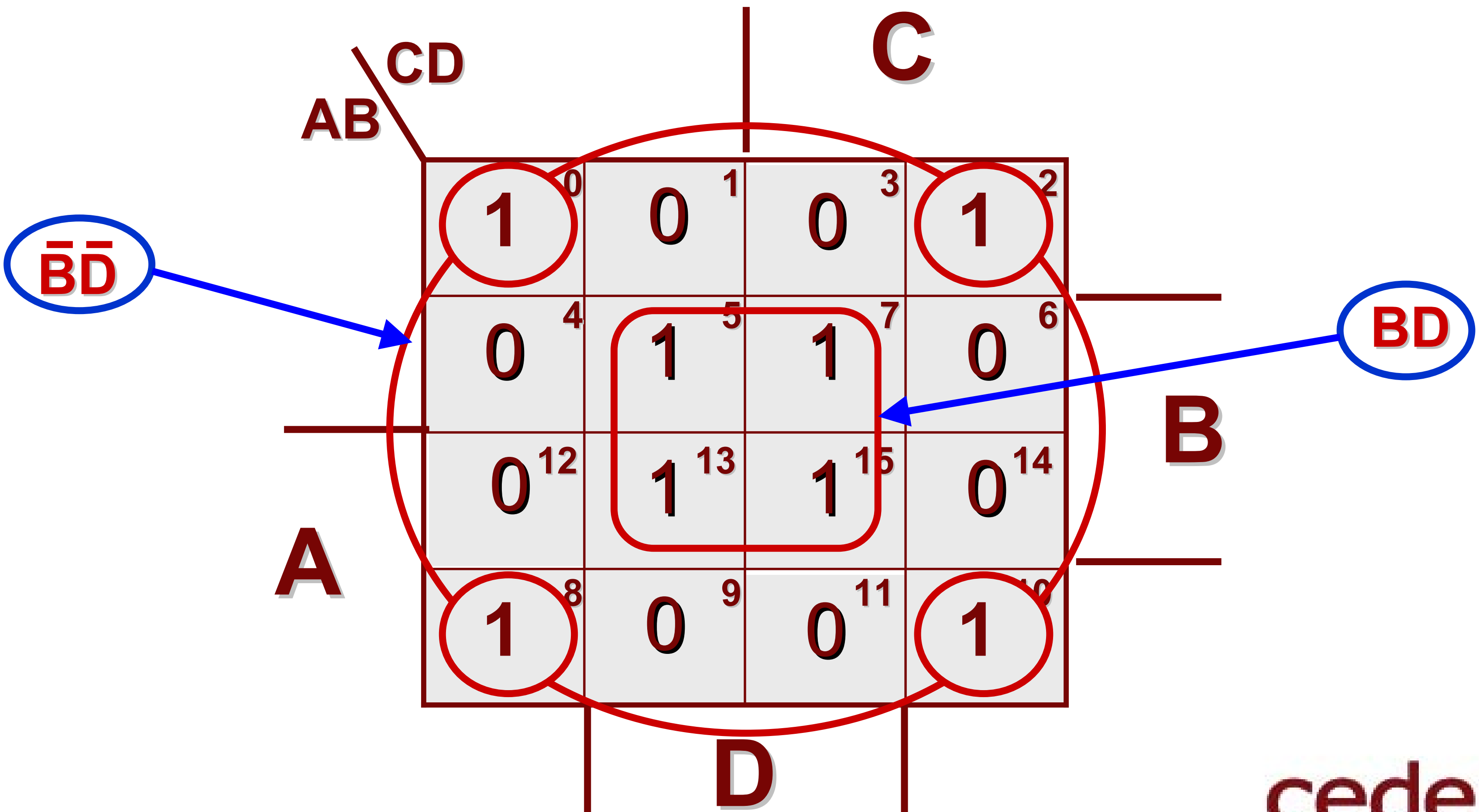
Funções Lógicas

2. $F(A,B,C,D) = \sum 3,4,5,7,9,13,14,15$



Funções Lógicas

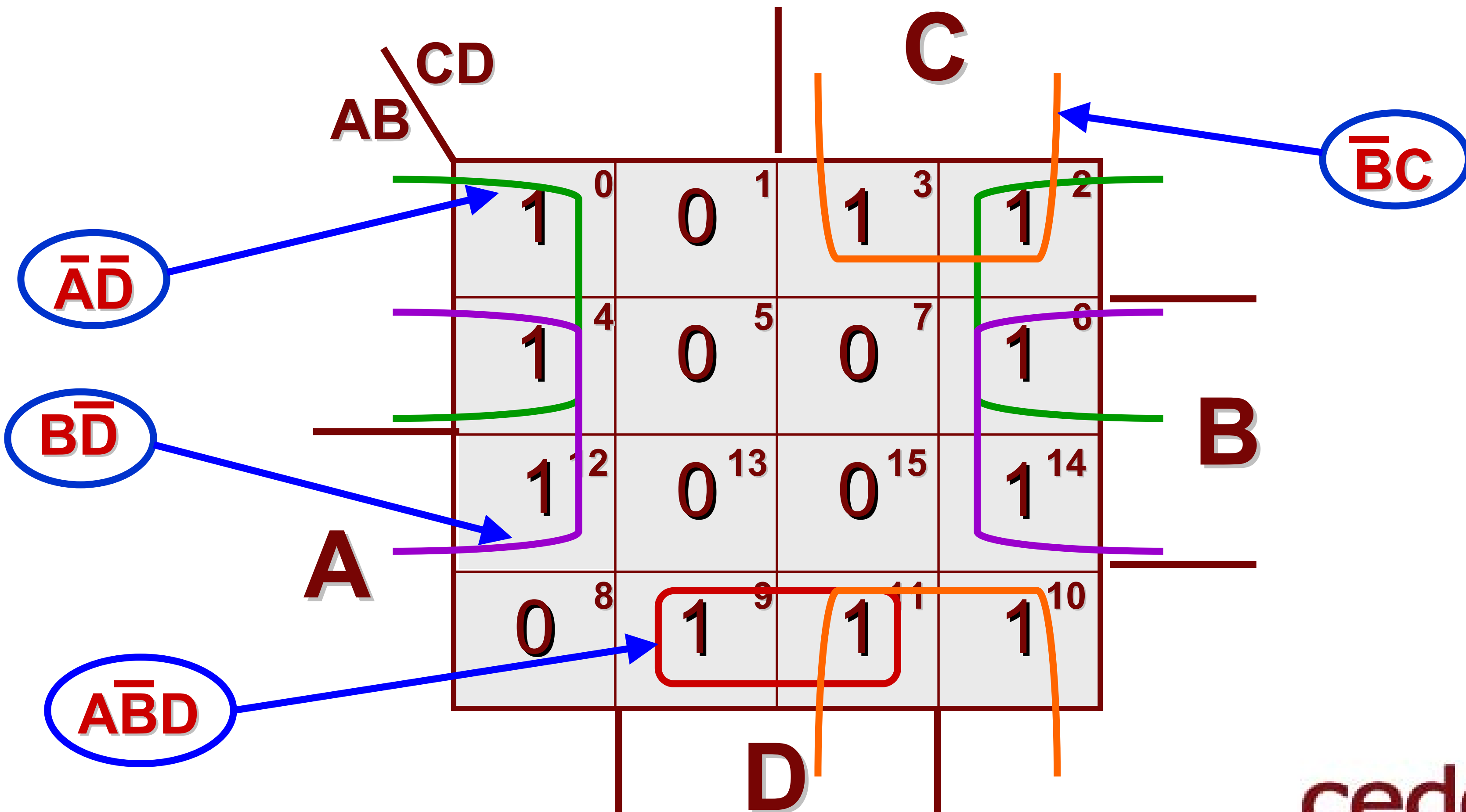
3. $F(A,B,C,D) = \sum 0,2,5,7,8,10,13,15$



cederj

Funções Lógicas

4. $F(A,B,C,D) = \sum 0,2,3,4,6,9,10,11,12,14$



cederj

Funções Lógicas

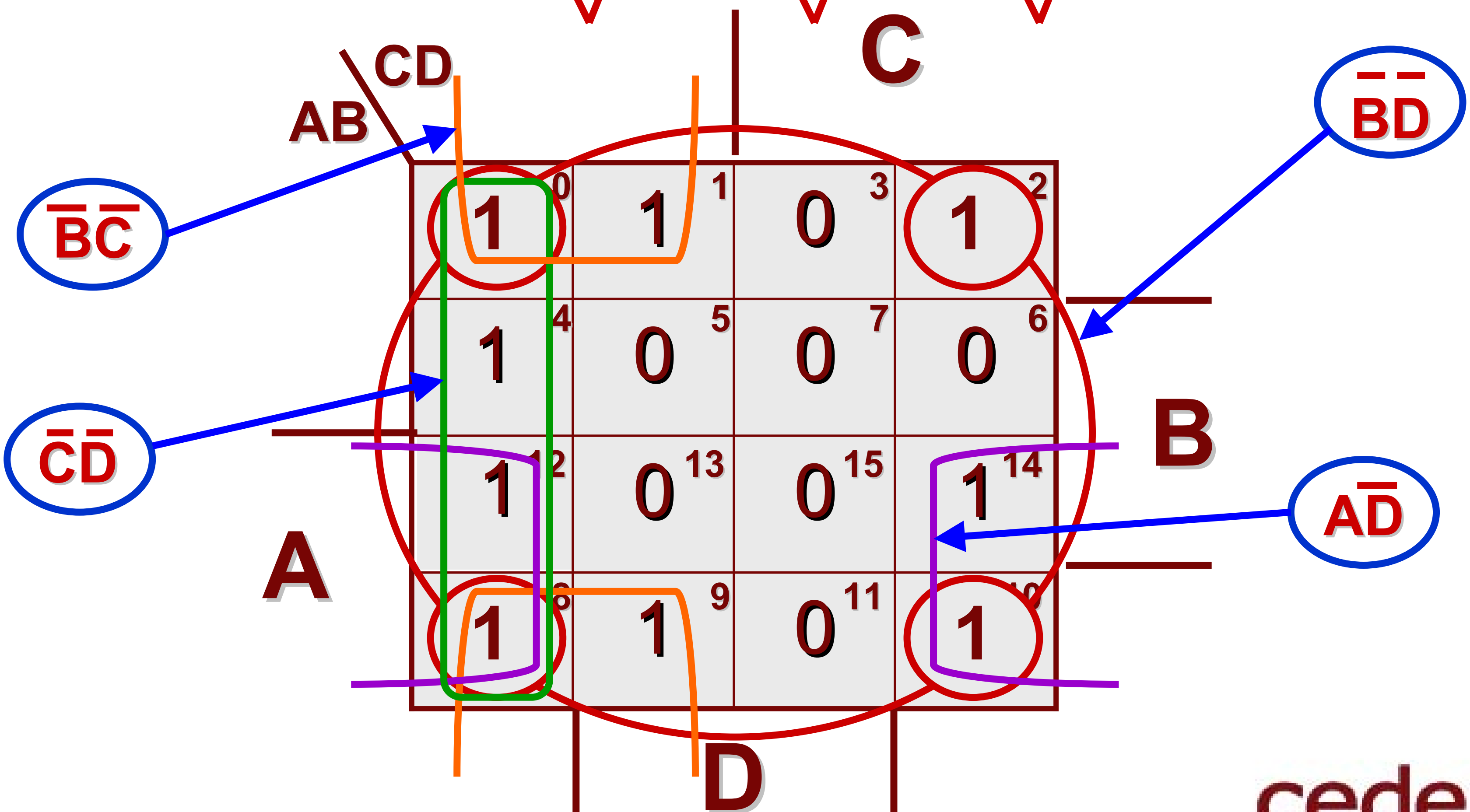
4. $F(A,B,C,D) = \sum 0,2,3,4,6,9,10,11,12,14$

$$F = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} +$$
$$\overline{A}BC\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}CD +$$
$$AB\overline{C}\,\overline{D} + ABC\overline{D}$$

$$F = \overline{A}\,\overline{D} + \overline{B}C + B\overline{D} + A\overline{B}D$$

Funções Lógicas

$$5.F(A,B,C,D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{A}\bar{B}C\bar{D}+\bar{A}B\bar{C}\bar{D}+A\bar{B}\bar{C}D+$$
$$+AC\bar{D}+A\bar{C}\bar{D}+\bar{B}\bar{C}D$$



cederj

Funções Lógicas

5) $F(A,B,C,D) = \sum 0,1,2,4,8,9,10,12,14$

$$F = \underbrace{\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}}_{0}+\underbrace{\bar{A}\bar{B}\bar{C}D}_{1}+\underbrace{\bar{A}\bar{B}C\bar{D}}_{2}+\underbrace{\bar{A}B\bar{C}\bar{D}}_{4}+$$

$$+\underbrace{A\bar{B}\bar{C}\bar{D}}_{8}+\underbrace{A\bar{B}\bar{C}D}_{9}+\underbrace{A\bar{B}C\bar{D}}_{10}+\underbrace{AB\bar{C}\bar{D}}_{12}+\underbrace{ABC\bar{D}}_{14}$$

(a simplificação será feita mais adiante por meio do mapa de Karnaugh)

Funções Lógicas

5) $F(A,B,C,D) = \sum 0,1,2,4,8,9,10,12,14$

$$F = \underbrace{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}}_{0} + \underbrace{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D}_{1} + \underbrace{\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}}_{2} + \underbrace{\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}}_{4} +$$

$$+ \underbrace{A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}}_{8} + \underbrace{A\overline{B}\,\overline{C}D}_{9} + \underbrace{A\overline{B}C\overline{D}}_{10} + \underbrace{AB\overline{C}\,\overline{D}}_{12} + \underbrace{ABC\overline{D}}_{14}$$

$$\mathbf{F(A,B,C,D) = A\overline{D} + \overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{D} + \overline{C}\,\overline{D}}$$

Álgebra de Boole

- $F(A,B,C,D) = A\overline{D} + \overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{D} + \overline{C}\,\overline{D}$