

Introdução à Informática

Sistemas Numéricos
Operações Aritméticas em Diversas Bases

Ageu Pacheco e Alexandre Meslin

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Objetivo da Aula:
- Partindo da base 10, ver como operações aritméticas são efetuadas em outras bases; em especial a 2.

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- **Adição na base 10:**

Diagram illustrating the addition of 1 and 5 in base 10, resulting in 6. The result 6 is then converted to base 7, which is 10 (1 in the 7's place and 0 in the 1's place). The diagram shows the carry-over from the 1's place to the 7's place.

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- **Adição na base 10:**

Diagram illustrating the addition of 1 and 4 in base 10, showing the carry-over to base 6:

$$\begin{array}{r}
 (1) \quad (1) \\
 \begin{array}{r}
 6 \\
 7_{10} \\
 4_{10} \\
 \hline
 1 \\
 5 \\
 1_{10}
 \end{array}
 \end{array}$$

The diagram shows the addition of 1 and 4 in base 10, resulting in 5. The carry-over is shown as 1 in base 6, which is then added to the next column.

Diagram illustrating the addition of 1 and 6 in base 10, resulting in 7. The diagram shows the numbers 1 and 6 being added, with a carry of 1 from the units place to the tens place. The result is 7.

$$\begin{array}{r} (1) \quad (1) \\ + \quad 6 \quad 7_{10} \\ \hline 1 \quad (15) \quad (11) \\ - \quad 10 \quad 10 \\ \hline 1 \quad 5 \quad 1_{10} \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Adição na base 9:

$$\begin{array}{r} \begin{array}{c} (1) \\ + \end{array} \begin{array}{c} (1) \\ 6 \\ + \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} 7_9 \\ 4_9 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} (15) \\ 9 \end{array} \begin{array}{c} (11) \\ 9 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 6 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} 2_9 \\ 2_9 \end{array} \end{array}$$

The diagram illustrates the addition of two numbers in base 9. The first number is 167₉ and the second is 184₉. The sum is calculated column by column from right to left. The rightmost column (units) shows 7 + 4 = 11 in base 10, which is 11 in base 9, resulting in a carry of 1 and a digit of 2. The middle column (nines) shows 6 + 8 = 14 in base 10, plus the carry of 1, resulting in 15 in base 10, which is 15 in base 9, resulting in a carry of 1 and a digit of 6. The leftmost column (81s) shows 1 + 1 = 2 in base 10, plus the carry of 1, resulting in 3 in base 10, which is 3 in base 9, resulting in a final carry of 1 and a digit of 1. The final result is 162₉.

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Adição na base 9:

$$\begin{array}{r} \begin{array}{cc} (1) & (1) \\ + & 67_9 \\ + & 84_9 \\ \hline 1 & (15) & (11) \\ - & 9 & 9 \\ \hline 1 & 6 & 2_9 \end{array} \end{array}$$

- Na base 8:

$$\begin{array}{r} \begin{array}{cc} (1) & (1) \\ + & 77_8 \\ + & 77_8 \\ \hline 1 & (15) & (14) \\ - & 8 & 8 \\ \hline 1 & 7 & 6_8 \end{array} \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Adição na base 7:

$$\begin{array}{r} \begin{array}{c} (1) \\ + \end{array} \begin{array}{c} (1) \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 5_7 \\ 4_7 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \end{array} \begin{array}{c} (8) \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} (9) \\ 7 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \end{array} \begin{array}{c} 2_7 \end{array} \end{array}$$

The diagram illustrates the addition of 25_7 and 54_7 in base 7. The first row shows the numbers with carry indicators: a (1) above the 2 and a (1) above the 5. The second row shows the addition of the units digits: $2 + 4 = 6$, which is written as 2 with a subscript 7. The third row shows the addition of the tens digits: $5 + 5 = 10$, which is written as 7 with a subscript 7, and a carry of 1 is indicated above the 7. The final row shows the result: 112_7 .

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Adição na base 7:

$$\begin{array}{r} _7 \\ + _7 \\ \hline 1 _7 \\ - _7 \\ \hline 1 _7 \end{array}$$

Diagram illustrating addition in base 7. The numbers 5₇ and 4₇ are added. The sum is 112₇. Carry values (1) are shown above the digits. The intermediate sums (8) and (9) are shown in parentheses, and the final result 112₇ is shown below the line.

- Na base 16:

$$\begin{array}{r} _{16} \\ + _{16} \\ \hline 1 _{16} \\ - _{16} \\ \hline 1 _{16} \end{array}$$

Diagram illustrating addition in base 16. The numbers F₁₆ and E₁₆ are added. The sum is 1D3₁₆. Carry values (1) are shown above the digits. The intermediate sums (29) and (19) are shown in parentheses, and the final result 1D3₁₆ is shown below the line.

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Adição na base 16:

	(1)	(1)	
	2	F	F_{16}
+	1	F	E_{16}
<hr/>			
	4	(31)	(29)
		16	16
-			
<hr/>			
	4	F	D_{16}

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Adição na base 16:

$$\begin{array}{r} \text{(1)} \quad \text{(1)} \\ 2 \quad F \quad F_{16} \\ + \quad 1 \quad F \quad E_{16} \\ \hline 4 \quad (31) \quad (29) \\ - \quad 16 \quad 16 \\ \hline 4 \quad F \quad D_{16} \end{array}$$

- Na base 2:

$$\begin{array}{r} \text{(1)} \quad \text{(1)} \quad \text{(1)} \quad \text{(1)} \quad \text{(1)} \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1_2 \\ + \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1_2 \\ \hline (3) \quad (2) \quad (2) \quad (3) \quad (2) \\ - \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \\ \hline 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0_2 \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Adição na base 2 (cont.):

$$\begin{array}{rcccccc} & (1) & (1) & (1) & & & \\ & & 1 & 0 & 1 & 0 & 0_2 \\ + & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1_2 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1_2 \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Adição na base 2 (cont.):

$$\begin{array}{r} \begin{array}{cccccc} (1) & (1) & (1) & & & \\ & 1 & 0 & 1 & 0 & 0_2 \\ + & 1 & 1 & 1 & 0 & 1_2 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1_2 \end{array} & + & \begin{array}{cccccc} (10) & (1) & (1) & (1) & (1) & \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & 1_2 \\ & 1 & 0 & 1 & 0 & 1_2 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & 0_2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0_2 \end{array} \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Subtração na base 10:

$$\begin{array}{r} 4 \quad 7_{10} \\ - 2 \quad 4_{10} \\ \hline 2 \quad 3_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (4) \quad (+10) \\ \cancel{5} \longrightarrow 2_{10} \\ - 1 \quad 7_{10} \\ \hline 3 \quad 5_{10} \end{array}$$

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Subtração na base 10 (cont.):

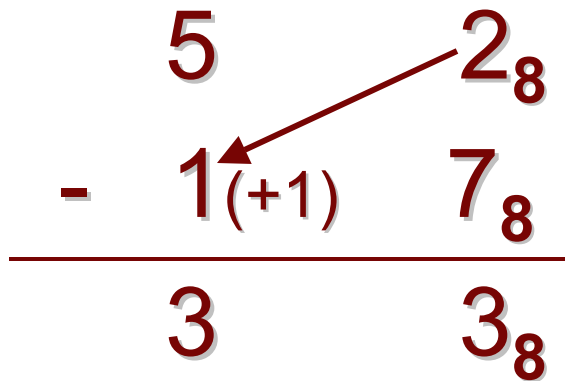
$$\begin{array}{r} 57_{10} \\ - 21_{10} \\ \hline 35_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3 \qquad 0 \qquad 0_{10} \\
 - \quad 1_{(+1)} \quad 4_{(+1)} \quad 7_{10} \\
 \hline
 1 \qquad 5 \qquad 3_{10}
 \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Subtração na base 8:

$$\begin{array}{r} 5 2_8 \\ - 1^{(+1)} 7_8 \\ \hline 3 3_8 \end{array}$$


Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Subtração na base 8 (cont.):

$$\begin{array}{r} 5 2_8 \\ - 1^{(+1)} 7_8 \\ \hline 3 3_8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 0 0_8 \\ - 1^{(+1)} 4^{(+1)} 7_8 \\ \hline 1 3 1_8 \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Subtração na base 16:

$$\begin{array}{r} 5 2_{16} \\ - 1^{(+1)} 7_{16} \\ \hline 3 B_{16} \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Subtração na base 16 (cont.):

$$\begin{array}{r} 5 2_{16} \\ - 1_{(+1)} 7_{16} \\ \hline 3 B_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 0 0_{16} \\ - 1_{(+1)} 4_{(+1)} 7_{16} \\ \hline 1 B 9_{16} \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Subtração na base 16 (cont):

$$\begin{array}{r} \\ - \\ \hline \\ \\ \end{array}$$

Diagram illustrating subtraction in base 16:

The diagram shows a subtraction operation in base 16. The top row displays the minuend (3) and the subtrahend (D) with arrows indicating borrowing from the next column. The result is shown below the line, with the final result (E₁₆) indicated by an arrow.

The diagram shows a subtraction operation in base 16:

The top row displays the minuend (3) and the subtrahend (D) with arrows indicating borrowing from the next column. The result is shown below the line, with the final result (E₁₆) indicated by an arrow.

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Subtração na base 16 (cont):

Diagram illustrating a Huffman tree structure for the string "1111111111111111".

The root node is **D**. The left child of **D** is **3**, which has a single child **1(+1)**. The right child of **D** is **C₁₆**, which has a left child **F(+1)** and a right child **E₁₆**.

Below the tree, three vertical arrows point from the internal nodes to the leaf nodes:

- From **1(+1)** to **1**
- From **F(+1)** to **D**
- From **E₁₆** to **E₁₆**

Diagram illustrating the carry propagation in a 32-bit adder. The carry-in C is connected to $2_{(+1)}$, and the carry-in 0 is connected to $C_{(+1)}$. The carry-in A_{16} is connected to C_{16} . The carry-out 9 is connected to 9 , the carry-out 3 is connected to 3 , and the carry-out (14) is connected to E_{16} .

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Subtração na base 2:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0_2 \\ - 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1_2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1_2 \\ - 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0_2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1_2 \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Representação em “complemento à base”
 - ❖ O complemento de um número N em uma dada base B é igual a diferença entre o número e a próxima potência da base.

Ex: Complemento a 10 de 734
próxima potência $\longrightarrow 10^3$

$$\begin{array}{r} 1000 \\ - 734 \\ \hline 266 \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

Ex: Complemento a 2 de 1011

próxima potência $\longrightarrow 2^4 = 16 = 10000$

$$\begin{array}{r} 10000 \\ - 1011 \\ \hline \end{array}$$

101 \longrightarrow é o complemento a 2 de 1011

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

Ex: Complemento a 2 de 101101

próxima potência \longrightarrow 1000000

$$\begin{array}{r} 1000000 \\ - 101101 \\ \hline \end{array}$$

10011 \longrightarrow é o comp. a 2 de 101101

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Representação em “complemento à base” (cont.)
 - O cálculo do complemento à base em qualquer base é tedioso por causa dos “vem-um”.
 - Uma alternativa mais confortável é calcular o “complemento à base menos 1” e depois somar 1 ao resultado para obter o complemento à base.

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

Ex: Base 10 \longrightarrow “complemento a 9” de 734

$$\begin{array}{r} 999 \\ - 734 \\ \hline \end{array}$$

265 \longrightarrow (complemento a 9 de 734)

$$\begin{array}{r} + \quad 1 \\ \hline \end{array}$$

266 \longrightarrow (complemento a 10 de 734)

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

Ex: Base 2 \longrightarrow “complemento a 1” de 1011

$$\begin{array}{r} 1111 \\ - 1011 \\ \hline 100 \end{array} \longrightarrow \text{(complemento a 1 de 1011)}$$

$$\begin{array}{r} + \quad 1 \\ \hline 101 \end{array} \longrightarrow \text{(complemento a 2 de 1011)}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Observação importante:

Para obter o “complemento a 1” de um número binário basta invertê-lo bit a bit.

Ex: complemento a 1 de

1	0	1	1
↓	↓	↓	↓
0	1	0	0

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Operações de subtração em qualquer base podem ser feitas utilizando complemento à base.

Ex: Subtração $913 - 734 \longrightarrow$ na base 10

$$\begin{array}{r} 913 \\ - 734 \\ \hline 179 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 999 \\ - 734 \\ \hline 265 \\ + 1 \\ \hline 266 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 913 \\ + 266 \\ \hline 1)179 \end{array}$$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

Ex: Subtração $11001 - 10011$ na base 2

complemento a 1 do subtraendo = 01100

comp. a 2:

01100 → (comp.a 1) 11001 (minuendo)

+ 1

01101 → (comp.a 2)

+ 01101

1)00110 (resultado)

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Regra prática para obtenção do complemento a 2:

Para se obter diretamente o complemento a 2 de um número basta percorrer o número da direita para a esquerda repetindo-se os dígitos zeros até encontrar o primeiro dígito 1 (um), o qual deve ser mantido. A partir daí, todos os dígitos (zeros ou uns) a esquerda desse primeiro 1 deverão ser invertidos.

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

Exemplos:

- | | | | |
|------------|---|---------|-------------|
| 1) 1010 | → | 0110 | (comp. a 2) |
| 2) 11001 | → | 00111 | (comp. a 2) |
| 3) 111000 | → | 001000 | (comp. a 2) |
| 4) 1100110 | → | 0011010 | (comp. a 2) |

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Representação de números com sinal:

Para simplificar, vamos supor que os números sejam representados internamente ao computador no formato de 8 bits (1 byte), ou seja eles são operados e armazenados em 8 bits.



Bit de sinal

$\left\{ \begin{array}{l} 0 - \text{n\u00f3 positivo} \\ 1 - \text{n\u00f3 negativo} \end{array} \right.$

cederj

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Representação de números com sinal (cont.):

Em 8 bits é possível representar 256 números diferentes : de 00000000 a 11111111, já que $2^8 = 256$.

Com o bit mais significativo representando o sinal, a gama de números possíveis de serem representados permanece a mesma, só que agora metade negativa e metade positiva.

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Exemplos:

+ 127



0	1	1	1	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---

+ 1



0	0	0	0	0	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---

(+) 0



0	0	0	0	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---

- 1



1	1	1	1	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---

- 128



1	0	0	0	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Mais exemplos:

+ 74



0	1	0	0	1	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---

+ 27



0	0	0	1	1	0	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---

- 10



1	1	1	1	0	1	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---

- 27



1	1	1	0	0	1	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---

- 74



1	0	1	1	0	1	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Operações aritméticas no computador:

Números positivos são submetidos na forma “normal”.

Ex: + 22 \Rightarrow

0	0	0	1	0	1	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---

Números negativos na forma complemento a 2.

Ex: - 22 \Rightarrow

1	1	1	0	1	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Desta forma, todas as operações de soma e subtração envolvendo números com bits de sinal produzem diretamente resultados consistentes, ou seja, positivos na forma “normal” e negativos em complemento a 2.
- A vantagem de representar números negativos em complemento a 2 internamente ao computador é que todas as operações de subtração ficam transformadas em simples somas.

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Exemplos:

Tomemos como exemplo os números 9 e 4.
Vamos ver como ficam todas as possibilidades de somas e subtrações envolvendo suas formas positivas e negativas.

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Somas:

$\begin{array}{r} + 4 \quad 00000100 \\ (+) + 9 \quad 00001001 \\ \hline +13 \quad 00001101 \end{array}$	$\begin{array}{r} +4 \quad 00000100 \\ (+) - 9 \quad 11110111 \\ \hline - 5 \quad \swarrow 11111011 \end{array}$
$\begin{array}{r} - 4 \quad 11111100 \\ (+) + 9 \quad 00001001 \\ \hline + 5 \quad 1)00000101 \end{array}$	$\begin{array}{r} - 4 \quad 11111100 \\ (+) - 9 \quad 11110111 \\ \hline - 13 \quad \swarrow 1)11110011 \end{array}$

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Subtrações:

+ 4	00000100		00000100
(-) + 9	00001001	→	11110111 (+)
- 5			11111011
+ 4	00000100		00000100
(-) - 9	11110111	→	00001001 (+)
+13			00001101

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Subtrações:

- 4	11111100		11111100
(-) + 9	00001001	→	11110111 (+)
-13			1) 11110011

- 4	11111100		11111100
(-) - 9	11110111	→	00001001 (+)
+ 5			1) 00000101

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- “Overflow” em operações aritméticas
 - O maior número positivo que pode ser carregado (armazenado) em um registro de 8 bits é +127 (01111111).
 - Nas mesmas condições o menor número negativo é -128 (10000000).

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- “Overflow” em operações aritméticas (cont.)
 - Apenas para ilustrar, supondo ser o computador de 8 bits, temos que, caso o resultado de qualquer operação aritmética exceda um dos valores anteriores, é dito que uma condição de overflow ocorreu, o que normalmente acarreta erro.

Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- “Overflow” em operações aritméticas (cont.)
 - A detecção de overflow é simples e consiste em:
 1. Há um “vai-um” propagado para o bit de sinal sem “vai-um” saindo deste.
 2. Há um “vai-um” propagado pelo bit de sinal sem este ter recebido “vai-um”.

Sistemas Numéricos


Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Exemplos:

1)

+ 88	0 1011000
(+) + 46	(+) 0 0101110
<hr/>	<hr/>
+ 134	1 0000110

overflow



Sistemas Numéricos

Operações Aritméticas em Diversas Bases

- Exemplos (cont):

1)

+ 88	0 1011000
(+) + 46	(+) 0 0101110
<hr/>	<hr/>
+ 134	1 0000110

overflow →

2)

- 76	(01001100)	→	1 0110100
(-) + 68	(01000100)	→	1 0111100
<hr/>			<hr/>
- 144			1 01110000

overflow →